



**HAL**  
open science

# Modèle de plaques stratifiées à fort contraste : application au verre feuilleté

Kevin Viverge

► **To cite this version:**

Kevin Viverge. Modèle de plaques stratifiées à fort contraste : application au verre feuilleté. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université de Lyon, 2019. Français. NNT : 2019LYSET005 . tel-02288105

**HAL Id: tel-02288105**

**<https://theses.hal.science/tel-02288105>**

Submitted on 13 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2019LYSET005

**THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON**  
opérée au sein de  
**L'École Nationale des Travaux Publics de l'Etat**

**Ecole Doctorale N° 162**  
**MEGA de Lyon**  
**(Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique)**

**Spécialité : Génie Civil**

Soutenue publiquement le 04/06/2019, par :  
**Kevin VIVERGE**

---

**Modèle de plaques stratifiées à fort  
contraste - Application au verre  
feuilleté**

---

Devant le jury composé de :

BOISSE Philippe

INSA Lyon

Président

CARTRAUD Patrice  
DUMONTET Hélène  
BOISSE Philippe  
SOURCIS Benjamin

Ecole Centrale Nantes  
Sorbonne Université  
INSA Lyon  
Saint-Gobain Isover CRIA

Rapporteur  
Rapporteuse  
Examineur  
Examineur

BOUTIN Claude

ENTPE

Directeur de thèse



---

## Remerciements

---

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Claude Boutin qui m'a accompagné durant ces cinq longues années et qui, malgré la distance suite à ma prise de poste en Mars 2017, a su m'aider à trouver les ressources pour terminer ce travail. Je remercie également Frédéric Sallet, technicien au laboratoire, pour sa disponibilité et son expertise technique.

Merci aux membres du jury d'avoir accepté de relire et d'examiner ce travail.

Je dois bien avouer que j'ai passé de très bons moments durant ces années au labo, autour d'un thé, d'un ballon rond, ou d'une bière pour les plus sportifs d'entre nous. Ces bons moments, je les dois en partie à mes nombreux collègues, tous plus particulier les uns que les autres, mais qui ont tous joué un rôle dans mon épanouissement durant cette thèse. Je pense particulièrement à mes colocataires de bureau Flo et Lucile et aux ex-futures star du futsal Lucas, Mattia, Manu, Salvo, Alvaro, Jean-Claude, Fionn (et j'en oublie forcément !), avec qui j'étais persuadé tous les ans pouvoir gagner le tournoi de futsal... On dira que c'est passé à rien !

Ces années sont passées au rythme des plus grandes émotions de ma vie et j'aimerais remercier ma femme qui m'a donné deux merveilleux garçons. Tous les trois, vous m'avez donné une énergie folle quand il le fallait, pour me rebooster dans les périodes plus creuses. J'ai tout fait pour que soyez fier de moi et j'espère avoir réussi. Les trolls, si un jour vous lisez ça, sachez que rédiger ce mémoire avec chacun de vous sur mes deux genoux n'a pas été une mince affaire, mais reprenez surtout qu'*à coeur vaillant, rien d'impossible*.



Très utilisé ces dernières années, le matériau verre permet d'ériger des structures à la fois légères, esthétiques et résistantes notamment grâce à la technique du feuillete, qui consiste à assembler deux ou plusieurs feuilles de verre par une ou plusieurs couches de polymères viscoélastiques intermédiaires. Ces couches d'interface viscoélastiques sont à l'origine des interactions entre les mécanismes de cisaillement, de flexion locale et de flexion globale qui régissent le comportement d'ensemble du verre feuillete. Pour un dimensionnement optimal et une détermination précise des différents champs, nous proposons un modèle de plaques dites "fortement contrastées" intégrant ces différents mécanismes et leur couplage.

Dès lors qu'il existe une séparation d'échelle entre l'épaisseur de la plaque et la taille caractéristique des variations des champs cinématiques, la méthode des développements asymptotiques est applicable pour l'étude des stratifiées. Le comportement effectif de la plaque est dérivé de la loi de comportement 3D des matériaux, associée à une formulation de développements asymptotiques et à une mise à l'échelle appropriée du contraste de rigidité entre les couches raides de verre et des couches souples de polymère viscoélastique. Le procédé fournit une formulation explicite et cohérente, intégrant les efforts duaux des descripteurs macroscopiques (équations constitutives), les équations d'équilibres hors-plan et dans le plan et les différentes lois de comportements du stratifié.

Le modèle est d'abord construit dans le cas d'une plaque de verre feuillete à 2 couches raides puis différents cas de chargements statiques et dynamiques sont appliqués. Il est ensuite étendu aux plaques à 3 couches raides puis généralisé aux plaques à  $N$  couches raides. Des campagnes expérimentales sont mises en place pour valider les modèles obtenus. Enfin un cas d'étude de dimensionnement de plancher en verre feuillete est proposé.

*Mots-clés* : Verre feuillete ; Plaques stratifiées ; Méthode asymptotique ; Viscoélasticité ; Dynamique ; Modèle de plaque Tri-Laplacien ; Essais de flexion ; Essais de vibration.



Widely used in recent years, the glass material makes it possible to erect light, aesthetic and resistant structures, in particular with glass lamination method, which consists in assembling two or more sheets of glass by one or more intermediate viscoelastic polymers layer. These viscoelastic interface layers are the source of interactions between the shear, the local bending and the global bending mechanisms that govern the overall behavior of laminated glass. For an optimal dimensioning and an accurate determination of the different fields, we propose a "highly-contrasted" plates model encapsulating these different mechanisms and their coupling.

As long as a scale separation between the plate thickness and the characteristic size of kinematics field variations exists, the asymptotic expansion method can be applied for the study of laminates. The effective plate behaviour is derived from the 3D constitutive law of the materials combined with an asymptotic expansion formulation and an appropriate scaling the stiffness contrast between stiff glass layers and soft viscoelastic polymer layers. The method provides a synthetic and consistent formulation, integrating the dual efforts of the macroscopic descriptors, in-plane and out-of-plane balance equations and the constitutive laws of the laminate.

First the model is developed for a 2 stiff layers laminated glass plates, then different static and dynamic loading cases are applied. It is then extended to plates with 3 stiff layers and then generalized to plates with N stiff layers. Experimental campaigns are set up in order to validate the models. Finally, a case study of laminated glass floor design is proposed.

*Key words* : Laminated glass ; Stratified plates ; Asymptotic method ; Viscoelasticity ; Dynamics ; Tri-Laplacian plate model ; Bending tests ; Vibration tests.



<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Contexte de l'étude</b>	<b>5</b>
1.1 Les matériaux . . . . .	5
1.1.1 Le verre : fabrication, composition et structure . . . . .	5
1.1.2 Propriétés physiques . . . . .	7
1.1.3 Comportement mécanique des différents types de verre . . . . .	7
1.1.4 Le verre feuilleté . . . . .	10
1.1.5 Le PolyVinylButyral (PVB) . . . . .	11
1.2 Modèles phénoménologiques de plaques . . . . .	16
1.2.1 Introduction . . . . .	16
1.2.2 Aperçu des théories des plaques homogènes élastiques . . . . .	17
1.2.3 Modèles de plaques stratifiées ou multicouches . . . . .	22
1.2.4 Introduction des effets viscoélastiques dans l'étude du verre feuilleté . . . . .	27
1.3 Modèles asymptotiques de plaques . . . . .	29
1.3.1 Méthode des développements asymptotiques appliquée aux plaques . . . . .	29
1.3.2 Plaques hétérogènes contrastées . . . . .	30
1.4 Intérêt d'un nouveau modèle de plaque . . . . .	31
1.4.1 Nécessité de l'étude : comportement du verre feuilleté . . . . .	31
1.4.2 Rappel des limites des modèles existants et choix de la méthode . . . . .	32
1.4.3 Objectifs de l'étude . . . . .	32
<b>2 Modèle de plaque stratifiée à fort contraste</b>	<b>35</b>
2.1 Modèle de plaque généralisé établi par méthode asymptotique . . . . .	35
2.1.1 Description d'une plaque stratifiée . . . . .	35
2.1.2 Formulation redimensionnée . . . . .	37
2.1.3 Contraste de raideur . . . . .	38
2.1.4 Développements des champs locaux . . . . .	39
2.2 Plaques HCS symétriques à deux couches raides . . . . .	40
2.2.1 Cinématique des couches raides . . . . .	41
2.2.2 Etat de contrainte/déformation dans les couches raides . . . . .	42

2.2.3	Etat de contrainte/déformation dans la couche souple . . . . .	44
2.2.4	Equilibres globaux . . . . .	45
2.2.5	Equilibre des efforts tranchants . . . . .	48
2.3	Formulation synthétique . . . . .	48
2.3.1	Synthèse de l'approche asymptotique pour une plaque HCS non-chargée . . . . .	48
2.3.2	Description des plaques HCS chargées . . . . .	50
2.3.3	Bilan énergétique et conditions limites . . . . .	52
2.3.4	Equation tri-Laplacienne . . . . .	53
2.4	Analyse du comportement des plaques HCS . . . . .	54
2.4.1	Représentation schématique . . . . .	54
2.4.2	Cartographie des comportements de plaque HCS élastique . . . . .	56
2.4.3	Application au verre feuilleté . . . . .	59
2.5	Cas des plaque HCS asymétriques . . . . .	61
2.5.1	Cinématique des couches raides . . . . .	62
2.5.2	Etat de contrainte/déformation dans les couches raides . . . . .	62
2.5.3	Etat de contrainte/déformation dans la couche souple . . . . .	65
2.5.4	Equilibres globaux . . . . .	66
2.5.5	Equilibre des efforts tranchants . . . . .	67
2.5.6	Formulation synthétique . . . . .	68
2.6	Conclusion . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Etudes de chargements d'une plaque HCS</b>	<b>71</b>
3.1	Chargement statique : flexion trois points . . . . .	71
3.1.1	Flexion trois points asymétrique d'une plaque symétrique . . . . .	71
3.1.2	Cas de la flexion symétrique . . . . .	76
3.1.3	Flexion de plaques asymétriques . . . . .	77
3.2	Flexion 4 points et chargement uniforme . . . . .	80
3.3	Chargement avec condition mouvement de corps rigide imposé aux extrémités . . . . .	83
3.4	Dynamique d'une plaque HCS élastique . . . . .	86
3.4.1	Rappel du modèle dynamique . . . . .	86
3.4.2	Etude des oscillations libres . . . . .	87
3.4.3	Conditions limites et déformées modales pour une plaque encastrée-libre . . . . .	90
3.4.4	Obtention des fréquences et des modes propres . . . . .	93
3.4.5	Comparaisons des caractéristiques dynamiques avec les modèles dégénérés . . . . .	94
3.5	Dynamique d'une plaque HCS viscoélastique . . . . .	97
3.5.1	Détermination des fréquences propres viscoélastiques . . . . .	97
3.5.2	Cas des modèles dégénérés . . . . .	98
3.5.3	Comparaison des fréquences fondamentales . . . . .	98
3.5.4	Calcul de l'amortissement structurel . . . . .	99
<b>4</b>	<b>Les plaques HCS multicouches symétriques</b>	<b>103</b>
4.1	Plaques HCS à trois couches raides . . . . .	103
4.1.1	Cinématique des couches raides . . . . .	105
4.1.2	Etat de contrainte/déformation dans les couches raides . . . . .	106
4.1.3	Etat de contrainte/déformation dans les couches souples . . . . .	110

4.1.4	Equilibres globaux . . . . .	111
4.1.5	Equilibre des efforts tranchants . . . . .	113
4.1.6	Formulation synthétique . . . . .	113
4.2	Plaques HCS avec N couches raides . . . . .	114
4.3	Deux exemples de plaques multicouches . . . . .	116
4.3.1	Exemple succinct des plaques HCS à 4 couches raides . . . . .	116
4.3.2	Réponse dans le plan à un chargement en cisaillement pur d'une plaque HCS à trois couches raides . . . . .	120
4.4	Conclusion . . . . .	124
<b>5</b>	<b>Application du modèle HCS au verre feuilleté : validation expérimentale</b>	<b>125</b>
5.1	Campagne expérimentale . . . . .	125
5.2	Matériel utilisé . . . . .	128
5.2.1	Essais statiques . . . . .	128
5.2.2	Essais vibratoires . . . . .	128
5.3	Flexion trois points . . . . .	129
5.3.1	Instrumentation et conditions d'essai . . . . .	129
5.3.2	Rappels analytiques . . . . .	130
5.3.3	Essais cycliques de flexion . . . . .	131
5.3.4	Fluage . . . . .	134
5.3.5	Relaxation . . . . .	137
5.3.6	Rupture et rupture différée . . . . .	138
5.4	Rupture thermique par extension différentielle . . . . .	141
5.5	Cisaillement "pur" sur verre tricouche . . . . .	142
5.6	Essais de vibration . . . . .	144
5.6.1	Instrumentation et conditions d'essai . . . . .	145
5.6.2	Essais de balayage en fréquence . . . . .	146
5.6.3	Sollicitations cycliques aux différentes fréquences propres . . . . .	152
5.6.4	Bilan de la campagne expérimentale dynamique . . . . .	156
<b>6</b>	<b>Dimensionnement d'un plancher de télécabine</b>	<b>161</b>
6.1	Verre feuilleté structurel . . . . .	161
6.1.1	Structures existantes . . . . .	162
6.1.2	Cas des planchers de transports guidés . . . . .	165
6.2	Commande de planchers de télécabine . . . . .	165
6.3	Conditions réelles d'utilisation . . . . .	167
6.3.1	Chargements . . . . .	167
6.3.2	Assemblage à la structure . . . . .	167
6.3.3	Température . . . . .	167
6.4	Modélisation retenue . . . . .	167
6.4.1	Conditions limites . . . . .	167
6.4.2	Chargement et température . . . . .	168
6.4.3	Schéma de la modélisation retenue . . . . .	168
6.5	Vérification du dimensionnement proposé . . . . .	169
6.5.1	Rappel des déformations induites sous flexion trois points . . . . .	169

---

6.5.2	Déformations induites sous charge répartie . . . . .	169
6.5.3	Principe de superposition et maximum de déformation . . . . .	170
6.5.4	Applications numériques aux planchers P1 et P2 . . . . .	171
6.6	Optimisation : critère de dimensionnement . . . . .	171
6.7	Cas des planchers soumis à de faibles températures . . . . .	172
6.7.1	Rappel des déformations induites sous flexion trois points . . . . .	172
6.7.2	Déformations induites sous charge répartie . . . . .	172
6.7.3	Principe de superposition et maximum de déformation . . . . .	173
6.7.4	Applications numériques aux planchers P1 et P2 . . . . .	173
6.8	Influence d'une plaque supérieure brisée . . . . .	174
6.9	Conclusion . . . . .	174
<b>Conclusion générale</b>		<b>177</b>

## Contexte général

Contrairement au béton et à l'acier, le matériau verre n'a été que très peu utilisé comme matériau structurel dans le domaine du Bâtiment et du Génie Civil. Ceci s'explique car c'est un matériau fragile ne disposant donc pas de réserve de plasticité et sa résistance mécanique est fortement dépendante de sa fabrication et de l'endommagement de sa surface. Les traitements appliqués au verre mais surtout la technique du feuilletage, ont donné de nouvelles opportunités d'utiliser ce matériau. Durant ces dernières années, l'utilisation du verre se développe pour des raisons esthétiques, techniques et pratiques. Il offre la possibilité d'ériger des bâtiments plus légers et sa transparence permet aux utilisateurs de bénéficier de la lumière naturelle. Dans le domaine des ouvrages d'art, il permet d'accéder à des panoramas exceptionnels : un des exemples le plus cité est le Grand Canyon Skywalk, une passerelle horizontale en forme de fer à cheval au plancher de verre qui domine le lit du fleuve de plus de 1 200 mètres, dépassant de 21 mètres le bord du canyon et capable de supporter plus de 74 tonnes. La demande pour une plus large utilisation du verre porte sur des structures comme les ascenseurs, les escaliers, et surtout les transports guidés (téléphériques, télécabines, funiculaires, . . .) qui deviennent tendance comme moyens de déplacements en site urbain. Faibles emprises, débits élevés, coûts maîtrisés et expériences reconnues sont les arguments forts pour ces solutions. Les plus célèbres des transports guidés sont le téléphérique de Montjuïc de Barcelone ou celui du Pain de Sucre à Rio, mais les réalisations et projets foisonnent aussi en France (Grenoble, Toulouse, Créteil, Bagnolet, Nantes ou encore Brest).

## Contexte de l'étude

En 2009, le Service Technique des Remontées Mécaniques et des Transports Guidés (STRMTG) a initié un travail visant à comprendre et modéliser le comportement mécanique de dalle de verre afin de proposer une nouvelle méthode de dimensionnement plus adaptée aux remontées mécaniques. Jusqu'en 2013 et le début de cette thèse, différentes études à dominante expérimentale, principalement axées sur le comportement des matériaux [27] [28] ont été menées transversalement avec le Laboratoire Génie Civil et Bâtiment (LGCB) de l'Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat (ENTPE)

Contrairement à ces dernières études, le sujet principal de ces travaux de thèse est bien l'étude du comportement global du composite verre feuilleté, considéré comme une plaque stratifiée composée de deux couches rigide de verre et d'une fine couche centrale de polymère viscoélastique, souvent en Polyvinyle de Butyral (PVB). On comprend aisément que cette couche d'interface joue un rôle majeur dans le comportement global d'un stratifié. En effet, une couche centrale très rigide réalise une liaison (quasi-)parfaite entre les couches de verre et la réponse en flexion du stratifié est celle d'une plaque monolithique, régie par un mécanisme de flexion global. A l'inverse, avec une couche de polymère très déformable, les deux plaques de verre glissent (quasi-)parfaitement l'une sur l'autre et sont régies par leur propre mécanisme de flexion. Pour une rigidité intermédiaire comme celle du PVB, le cisaillement de la couche centrale doit être pris en compte pour décrire la transition entre les comportements monolithique et multi-couche. Comme le comportement du composite est directement lié à celui de ses composants, la prise en compte de la viscoélasticité de la couche centrale et de la continuité des champs cinématiques et de contraintes aux interfaces conduit à construire un modèle complet.

Dans le domaine des plaques stratifiées, deux familles de modèles se distinguent : les modèles *par couche* où les champs s'appliquent couche par couche et les modèles de type *monocouche équivalente* où ils s'appliquent dans toute la plaque. Dans le premier cas, les modèles sont très souvent numériques et d'application complexe au regard du nombre de descripteurs cinématiques. Dans le second cas, on trouve différents modèles. Les modèles les plus simplifiés sont des extensions des théories classiques de plaques homogènes élastiques minces et épaisses et peuvent être adaptées à la description du comportement d'une plaque chargée dans des cas bien précis. Cependant, ils deviennent vite inadaptés lorsqu'il s'agit de vérifier la continuité des champs aux interfaces entre les couches.

Des modèles plus récents adaptés à la description d'un stratifié élastique prennent en compte cette continuité aux interfaces en introduisant un effet "zig-zag" traduisant un changement de pente d'une variable du champ de déplacement entre deux couches successives. Cependant, ils montrent des difficultés à intégrer des effets viscoélastiques dans les propriétés des composants et ne dégénèrent pas vers les modèles simplifiés de plaques élastiques. Par conséquent, la construction d'un modèle complet et explicite de plaque stratifiée est toujours un travail à mener.

Dans cette thèse, la méthode analytique employée pour obtenir ce modèle est appelée "méthode des développements asymptotiques" ou "méthode de changement d'échelle". Elle est basée sur l'introduction du rapport d'échelle  $\varepsilon$  entre l'épaisseur  $h$  de la plaque et la taille caractéristique d'évolution d'un phénomène dans le plan de la plaque  $L$ , soit  $\varepsilon = \frac{h}{L}$ . Cette approche asymptotique permet d'obtenir une description macroscopique explicite du comportement du stratifié, sans hypothèse sur les champs cinématiques.

## Organisation du mémoire

Le mémoire se présente en 6 chapitres.

Le premier chapitre, à vocation bibliographique, présente les différents matériaux constituant une plaque de verre feuilleté ainsi que leurs propriétés physiques générales. Il introduit également différents modèles théoriques de plaques (phénoménologiques et asymptotiques) et les hypothèses qui les déterminent. Cette bibliographie montre l'intérêt de développer des modèles de plaques fortement contrastées pour décrire le comportement du verre feuilleté. Les objectifs de la thèse sont détaillés en dernière partie de ce chapitre.

Le second chapitre est consacré à l'étude théorique d'un modèle généralisé de plaque stratifiée fortement contrastée (HCS). Il commence par une présentation de la méthode des développements asymptotiques pour l'étude des stratifiés puis une application aux plaques symétriques avec deux couches raides connectées par une couche souple est détaillée. Enfin, le cas des plaques HCS asymétriques est traité.

Dans le chapitre suivant, le modèle obtenu est utilisé pour déterminer les différents champs (cinématique, déformations et contraintes) d'une plaque soumise à des chargements statiques standards et dynamiques. Dans le domaine statique, la flexion cylindrique trois ou quatre points ainsi que la charge répartie sont considérées. Par ailleurs, le rôle des conditions aux bords (glissement ou bloqués entre les couches) est également étudié. Dans le domaine dynamique, on s'intéresse au modes propres (déformées et fréquences propres d'une plaque HCS symétrique élastique avant de reprendre ces résultats dans le cas d'une plaque avec une couche centrale viscoélastique.

Le quatrième chapitre est d'abord consacré à l'extension de la méthode développée dans le Chapitre 2 aux cas des plaques HCS constituées de trois couches raides, avec une application du modèle permettant d'étudier le comportement dans le plan de la plaque sous déplacement différentiel de la plaque interne. Puis l'approche par développements asymptotiques est généralisée au cas des plaques HCS avec  $N$  couches raides et son principe est illustré dans le cas des plaques HCS constituées de quatre couches raides.

Le Chapitre 5 a pour objectif de valider les formulations analytiques obtenues par approche asymptotique, grâce à une campagne expérimentale. Des plaques de verre feuilleté sont soumises à de multiples essais (fluage, relaxation, cyclique, rupture, vibrations) dans différentes conditions externes (variations des conditions limites, de la température, de la fréquence des essais cycliques). Des chargements dans le plan et hors-plan, sur des plaques à deux ou trois couches de verre, permettent de valider le comportement statique déterminé analytiquement. Aussi, des essais vibratoires sont menés sur une table vibrante.

Le dernier chapitre est une application directe du modèle de plaques stratifiées à fort contraste pour le dimensionnement d'un plancher en verre feuilleté destiné à être équipé dans une télécabine suspendue. Sa résistance mécanique et l'épaisseur des couches de verre sont déterminées pour des cas de chargements défavorables afin d'optimiser le ratio poids/performance mécanique du plancher.

Pour finir, une synthèse de ce mémoire ainsi que les différentes perspectives d'études sont développées dans la conclusion générale.



### Résumé

L'objectif de cette partie est double. D'une part, il s'agit de présenter les différents matériaux constituant une plaque de verre feuilleté, ainsi que leurs propriétés physiques générales. D'autre part, les modèles théoriques de plaques phénoménologiques et asymptotiques sont présentés ainsi que les hypothèses qui les déterminent. Cette bibliographie montre l'intérêt de développer des modèles de plaques fortement contrastées pour décrire le comportement du verre feuilleté. Les objectifs de ce travail sont détaillés en dernière partie de ce chapitre.

### Sommaire

---

1.1	Les matériaux . . . . .	5
1.2	Modèles phénoménologiques de plaques . . . . .	16
1.3	Modèles asymptotiques de plaques . . . . .	29
1.4	Intérêt d'un nouveau modèle de plaque . . . . .	31

---

## 1.1 Les matériaux

### 1.1.1 Le verre : fabrication, composition et structure

La fabrication du verre trouve son origine en Mésopotamie il y a environ 5000 ans où les habitants découvrirent qu'en portant à haute température (1400°C) un mélange de silice, de carbonate de sodium, de chaux, de potasses carbonatées et d'oxydes métalliques, on obtenait une pâte vitreuse, suffisamment maléable pour être travaillée (verre moulé). Du fait de sa fabrication complexe, le verre resta longtemps un matériau rare. Du verre coulé ou soufflé (époque romaine) au verre flotté, utilisé depuis le 20<sup>e</sup> siècle et jusqu'à aujourd'hui, les techniques de fabrication du verre n'ont cessé de se développer.

La technique de flottage (Figure 1.1) a été mise au point par Alastair Pilkington en 1959. Lors de ce processus, les matières premières sont mélangées dans un four de fusion, puis la masse vitreuse progresse le long d'un couloir où elle passe par différents stades l'amenant au

produit final. Le verre en fusion s'écoule doucement sur un bain d'étain liquide ayant une masse volumique bien plus importante et une surface parfaitement lisse, ce qui permet d'assurer une planéité parfaite du verre. Les effets conjugués des viscosités et des tensions superficielles du verre en fusion et de l'étain entraînent la formation d'une couche de verre dont l'épaisseur est déterminée par la vitesse d'évacuation, elle-même déterminée par celle des rouleaux dans la zone de refroidissement. Ce ruban de verre subit ensuite un refroidissement lent et contrôlé jusqu'à son complet durcissement. Il est ensuite recuit afin d'éliminer les tensions internes résiduelles. Pour cela, on le porte à une température comprise entre 500°C et 550°C où la pâte présente un comportement visqueux lui permettant de relâcher les contraintes tout en préservant sa forme. Enfin, il est à nouveau refroidi jusqu'à ce qu'il retrouve sa rigidité (environ 400°C), puis il atteint progressivement la température ambiante, avant d'être découpé.

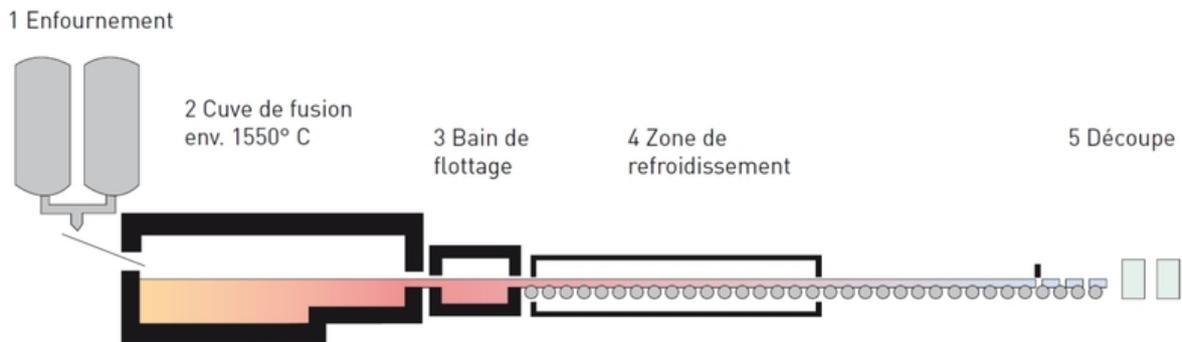


FIGURE 1.1 – Processus de flottage du verre.

On appelle plus généralement "verre" un produit inorganique de fusion ayant été refroidi à un état rigide sans cristallisation (dû à un refroidissement trop rapide ou durant lequel la viscosité devient trop importante). Ce terme est donc applicable à tous les solides non-cristallin (amorphe) présentant le phénomène de transition vitreuse. Pour ces matériaux, on ne retrouve pas l'ordre macroscopique associé aux cristaux, mais ils conservent un degré d'organisation en trois dimensions à courte échelle. La Figure 1.2 présente la comparaison entre la structure de la silice cristalline et celle de la silice vitreuse, composant principal de la plupart des verres.

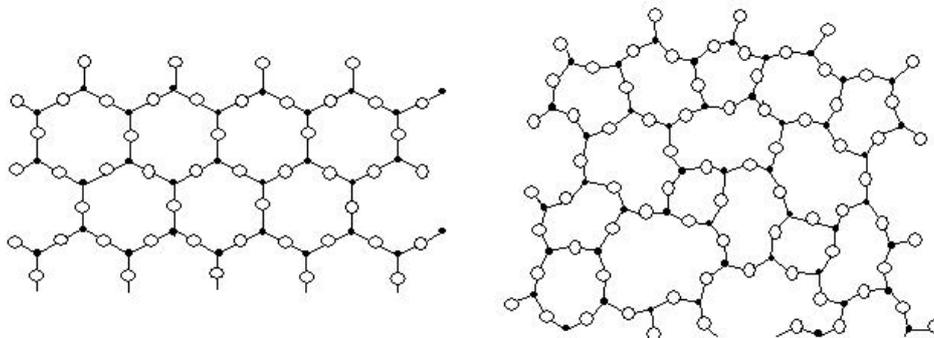


FIGURE 1.2 – Structure de la silice cristalline (à gauche) et vitreuse (à droite)

Le verre le plus utilisé en construction est le verre sodocalcique. Pour des applications spécifiques telles que la résistance au feu ou à la chaleur, on utilise du verre borosilicaté, offrant une

		Sodocalcique	Borosilicaté
Dioxyde de silicium	SiO <sub>2</sub>	69-74%	70-87%
Oxyde de calcium	CaO	5-14%	/
Oxyde de sodium blanc	Na <sub>2</sub> O	10-16%	0-8%
Trioxyde de bore	B <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	/	7-15%
Oxyde de potassium	K <sub>2</sub> O	/	0-8%
Oxyde de magnésium	MgO	0-6%	/
Oxyde d'aluminium	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0-3%	0-8%
Autres		0-5%	0-8%

TABLE 1.1 – Composition chimique du verre sodocalcique et borosilicaté

plus grande résistance aux variations de température. Leurs compositions sont données dans le Tableau 1.1, définies respectivement selon les normes Européennes EN-572 et EN-1748.

Il est possible d'ajouter d'autres composants en faibles quantités afin de modifier la couleur du verre, ou encore des propriétés physiques telles que la viscosité, la température de fusion, ou encore le coefficient de dilatation thermique, sans changer sa résistance mécanique. Par exemple, bien que la température de fusion du dioxyde de silicium SiO<sub>2</sub> soit d'environ 1710°C, elle tombe à 1300°C-1600°C lorsqu'on ajoute des composés alcalins. De même, le coefficient de dilatation thermique passe de  $5.10^{-7}K^{-1}$  pour un verre fait de silice pure à  $9.10^{-6}K^{-1}$  pour un verre sodocalcique.

### 1.1.2 Propriétés physiques

Comme nous venons de le voir, chaque type de verre possède ses propriétés physiques. Le Tableau (1.2) résume celles des deux verres les plus utilisés, présentés dans la partie précédente. Pour la suite de l'étude, nous considérerons les propriétés physiques du verre sodocalcique.

Propriétés	Symbole	Unité	Sodocalcique	Borosilicaté
Masse volumique	$\rho$	$kg.m^{-3}$	2500	2200-2500
Module d'Young	$E$	$GPa$	70	60-70
Coefficient de Poisson	$\nu$	/	0.2	0.2
Coefficient de dilatation thermique*	$\alpha_T$	$\mu def.K^{-1}$	9	3.1-6
Capacité thermique massique	$c_p$	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	720	800
Conductivité thermique	$\lambda$	$W.m^{-1}.K^{-1}$	1	1
Emissivité	$\varepsilon$	/	0.837	0.837

TABLE 1.2 – Propriétés physiques du verre sodocalcique et borosilicaté selon les normes européennes. \* : Coefficient moyen entre 20°C et 300°C.

### 1.1.3 Comportement mécanique des différents types de verre

Traité ou non, le verre a un comportement dit "fragile". Cela signifie qu'il n'a pas ou extrêmement peu de réserve de plasticité, autrement dit, il se déforme de manière élastique jusqu'à la rupture. Ceci est illustré par le diagramme contraintes-déformations (1.3) :

Néanmoins, les résistances caractéristiques des différents types de verre sont très variables en fonction du traitement qu'ils ont subi. Développons les traitements usuels et leurs influences sur le comportement mécanique du verre.

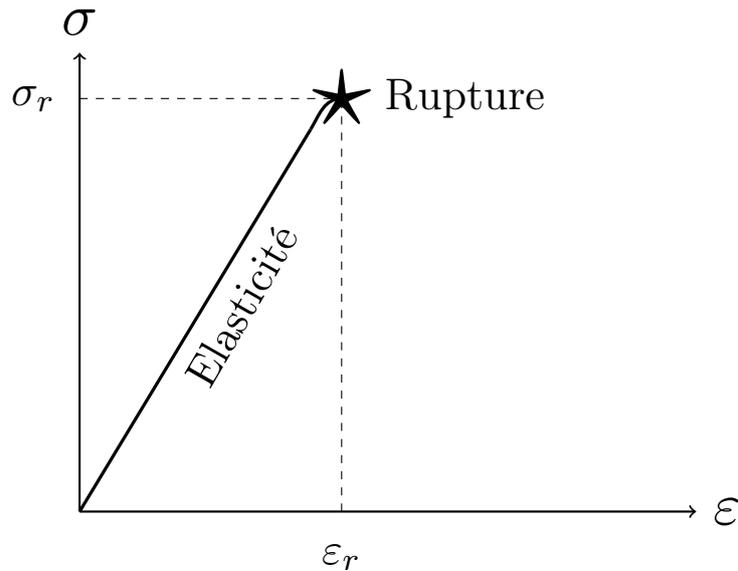


FIGURE 1.3 – Diagramme contraintes-déformations illustrant le comportement fragile du verre (sans réserve de plasticité)

### Verre flotté et verre étiré (non-traité)

Le verre flotté est fabriqué selon le procédé décrit plus haut. Son faible coût permet de le fabriquer en grande quantité et d'en faire le verre le plus utilisé de nos jours. Le verre étiré peut être produit selon deux procédés : d'une part celui d'Emile Fourcault qui consiste à évacuer verticalement le verre liquide grâce à une débiteuse et des rouleaux tireurs tout en le refroidissant progressivement, d'autre part, celui de Libbey-Owens, qui consiste à évacuer le verre liquide verticalement sur une courte distance, puis de réchauffer le verre afin de le plier grâce à un rouleau permettant de l'évacuer horizontalement.

Ces deux types de verre non-traités ont la même composition chimique et offrent les mêmes résistances mécaniques générales, regroupées dans le Tableau 1.3. A titre de comparaison, les valeurs pour l'acier et le béton, autres matériaux de construction très utilisés, sont ajoutées.

Propriétés	Symbole	Unité	Verre	Acier	Béton
Masse volumique	$\rho$	$kg.m^{-3}$	2500	7500 – 8100	2200
Module d'Young	$E$	GPa	70	210	20-50
Coefficient de Poisson	$\nu$	/	0.2	0.27-0.3	0.2
Résistance caractéristique à la flexion	$\sigma_{fm}$	MPa	40	400	2
Résistance caractéristique à la traction	$\sigma_{tm}$	MPa	50	235-255	2.1-2.7
Résistance caractéristique à la compression	$\sigma_{cm}$	MPa	1000	235-255	50

TABLE 1.3 – Propriétés mécaniques du verre flotté/étiré, de l'acier, et du béton.

Pour améliorer la résistance mécanique des plaques de verre, on a recours à deux principales techniques que sont la trempe thermique et la trempe chimique.

### Verre trempé thermiquement

La trempe thermique consiste à porter le verre à une température proche de celle de sa transition vitreuse (entre 570°C et 700°C en fonction de sa composition) puis à le refroidir

brutalement en surface soit grâce à des jets d'air comprimé, soit en le plongeant dans un bain à basse température. Ainsi, un gradient thermique s'installe dans l'épaisseur. Les couches de surface se refroidissent donc plus vite que le cœur du verre, se rigidifient et se contractent tandis que ce dernier reste à l'état visqueux. A l'issue du refroidissement complet de la plaque, on obtient un état de contrainte de compression en surface et de traction au cœur. De ce fait, comme l'illustre la Figure 1.4, lorsque l'on fléchit la plaque de verre trempé thermiquement, les précontraintes de compression en surface doivent être compensées avant de voir apparaître des contraintes de traction, pouvant mener à la rupture du matériau. Les précontraintes peuvent aller de 80MPa à 150MPa pour un verre sodocalcique, soit de l'ordre du millième du module d'Young.

Dans l'épaisseur de la plaque, l'état de précontrainte obtenu après une trempe thermique peut être approché par une distribution de contrainte plane de type parabolique. La contrainte de compression en surface est environ deux fois plus grande que la contrainte de traction au cœur et l'épaisseur de la zone en compression due à la trempe thermique est de l'ordre de 20% de celle de l'échantillon.

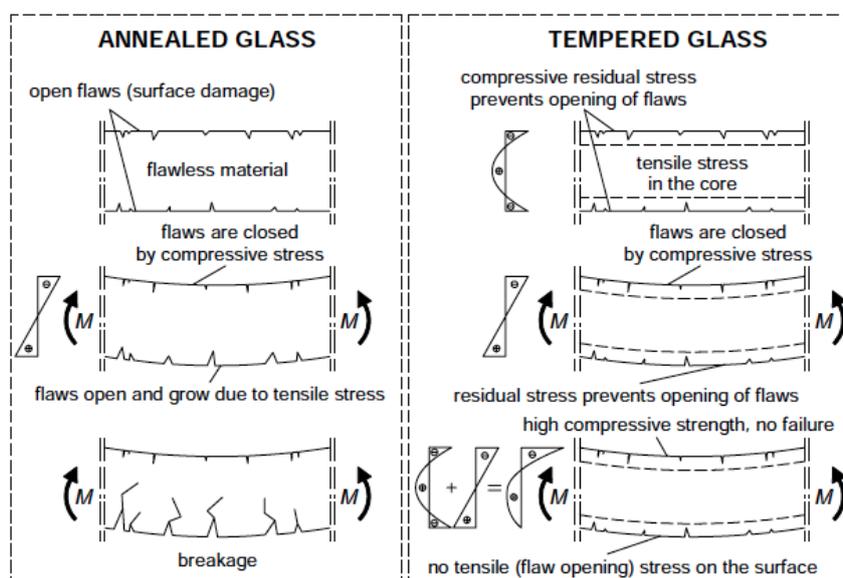


FIGURE 1.4 – Augmentation de la résistance d'un échantillon trempé en flexion [30]

Une fois trempé thermiquement, le verre ne peut plus être retravaillé (découpe, façonnage, perçage ...). L'usinage doit donc se faire avant la trempe. On obtient un verre dit "sécuritaire" puisque, lors de sa rupture, il se brise en de nombreux petits morceaux non-coupants. Enfin, pour que le gradient thermique se mette correctement en place lors de la trempe, l'épaisseur minimum du verre est de l'ordre de 3 à 4mm. Dans le cas contraire, on utilisera plutôt la trempe chimique.

### Verre trempé chimiquement

La trempe chimique consiste à placer le verre dans un bain de sels de potassium à 400°C, température à laquelle les ions sodium de la surface du verre se diffusent dans le bain et sont remplacés par les ions potassium. Ces derniers étant plus gros, ils vont créer un état de compression en surface du verre lors du refroidissement. Ce traitement ne nécessite pas d'épaisseur

minimale du verre et n'empêche pas le travail du verre post-trempe. De plus, la précontrainte appliquée est alors de 350MPa à 700MPa pour un verre sodocalcique soit de l'ordre du centième du module d'Young. Bien qu'elle possède plusieurs avantages sur la trempe thermique, la trempe chimique n'est que très peu utilisée dans le domaine du verre structural, puisque 4 à 5 fois plus coûteuse. Elle reste cependant utilisée en particulier dans l'aviation. La Figure 1.5 résume le profil de contrainte dû aux différentes trempes.

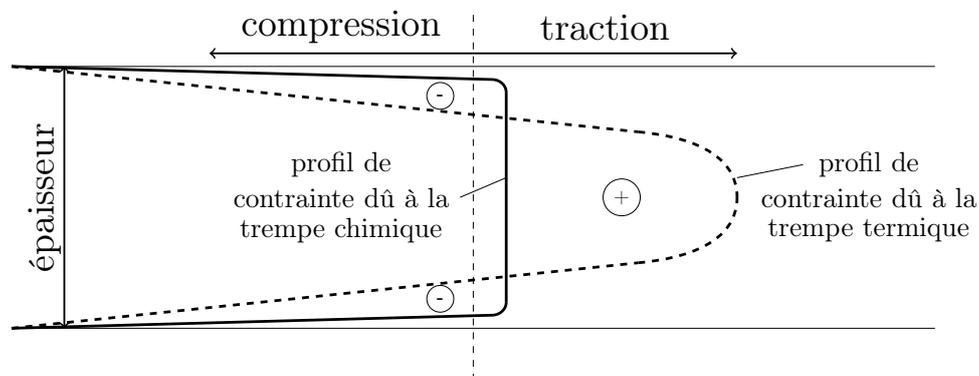


FIGURE 1.5 – Profils des précontraintes dans la section pour les différentes trempes

#### 1.1.4 Le verre feuilleté

Il est constitué de deux ou plusieurs feuilles de verre assemblées par une ou plusieurs couches de polymères viscoélastiques intermédiaires, généralement transparentes (Figure 1.6). Les verres peuvent être identiques ou différents, tant par leur épaisseur que par leur traitement. Le processus d'assemblage le plus courant est le passage en autoclave. On superpose les feuilles de verre déjà traitées (si nécessaire) et le polymère dans une enceinte fermée, à une température entre 18°C et 20°C. Pour procéder au collage, on porte la température à environ 140°C pour ramolir les films de polymère, puis on applique une pression de 14 bars à l'ensemble afin de s'assurer qu'il n'y ait pas d'air occlus aux interfaces verre/polymère. Un assemblage parfait sur toute la surface du verre feuilleté nécessite entre 10 et 12 heures de contact sous pression.

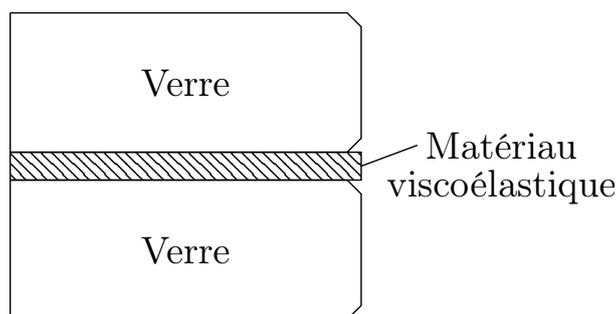


FIGURE 1.6 – Structure d'un verre feuilleté

Pour des applications structurales, le verre feuilleté présente un intérêt majeur. Car si la trempe améliore déjà les performances mécaniques et structurales du verre, le feuilletage permet de plus une amélioration considérable du comportement post-rupture. En effet, les fragments de

verre adhérent au film intermédiaire de sorte qu'il subsiste une certaine tenue mécanique due à l'interaction entre ces fragments. Ainsi, cela permet à la plaque même brisée de rester en place. Cela permet également de protéger les personnes contre les blessures par morceaux de verres mais aussi de réduire les risques d'infractions.

Notons enfin qu'il est possible d'utiliser comme couche(s) intermédiaire(s) des matériaux intumescents qui s'opacifient et s'épaississent considérablement lorsqu'ils sont en contact avec un fort flux de chaleur afin d'utiliser le verre feuilleté comme paroi de protection contre les incendies.

Dans le domaine structurel, le comportement post-rupture dépend du type d'intercalaire utilisé pour l'assemblage. Le plus commun est le PolyVinylButyral, ou PVB, dont nous allons évoquer les propriétés dans la partie suivante.

### 1.1.5 Le PolyVinylButyral (PVB)

#### Généralités

Le PolyVinylButyral, ou PVB, est un polymère thermo-plastique de synthèse utilisé principalement dans les cas où une forte liaison, une clareté optique, une adhérence à de multiples surfaces, une tenacité et une flexibilité sont nécessaires. Il est préparé à partir d'alcool de polyvinyle, par réaction avec du butyraldéhyde. Comme nous venons de le voir, on l'utilise principalement comme interface entre des couches de verre pour former du verre feuilleté sécuritaire. Connue pour ne pas laisser passer les rayonnements UV, il est parfois appelé "couche anti-UV".

L'épaisseur nominale d'une couche de PVB est de 0.38mm mais on utilise plus souvent 2 ou 4 couches (soit 0.76mm ou 1.52mm), voir 6 couches pour les verres plus épais ou traités thermiquement. Il existe plusieurs sortes de PVB, notamment les séries RB41 et DG41 de l'entreprise Saflex, que nous utiliserons pour la suite de l'étude, et dont les propriétés physiques, mécaniques et thermiques sont résumées dans le Tableau 1.4.

	Propriété	Unité	Série RB41	Série DG41
Physique	Capacité thermique massique	$J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	1980	2150
	Masse volumique	$kg.m^{-3}$	1070	1080
Mécanique	Module d'Young à T=60°C/f=1Hz	MPa	1.56	1.76
	Coefficient de Poisson	/	0.5	0.48
	Elongation à la rupture	%	205	190
	Résistance à la traction	MPa	27	32
Thermique	Dilatation thermique*	$\mu def.K^{-1}$	2.6	?
	Conductivité à T=65°C	$W.m^{-1}.K^{-1}$	0.2	0.2
	Emissivité	/	0.94	0.94

TABLE 1.4 – Propriétés du PVB à T=23°C (sauf mention contraire). \* : Coefficient moyen entre -40°C et 5°C pour le DG41 et entre 30°C et 100°C pour le RB41.

A des températures très faibles et/ou pour des chargements courts (soit des fréquences hautes), il sera relativement rigide. A des températures plus élevées et des chargements longs (soit des fréquences basses), il sera notablement plus souple. Pour l'étude du comportement global des plaques stratifiées telles que le verre feuilleté, un PVB rigide couplera quasi-parfaitement le comportement des plaques de verres, tandis qu'un PVB souple le découplera quasi-parfaitement. Il est donc indispensable de prendre en compte l'influence de la température et de la fréquence

sur le module de cisaillement du PVB.

### Propriétés viscoélastiques en cisaillement

En régime harmonique à la fréquence  $f = \omega/(2\pi)$  et à la température  $\theta$ , le module de cisaillement complexe  $\mu_c^*(\omega, \theta)$  est défini par la contrainte de cisaillement complexe  $\sigma e^{i\omega t}$  en réponse à une distorsion  $\gamma e^{i\omega t}$ , soit :

$$\sigma e^{i\omega t} = \mu_c^*(\omega, \theta) \cdot \gamma e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad \mu_c^*(\omega, \theta) = \text{Re}(\mu_c^*) + i\text{Im}(\mu_c^*) \quad (1.1)$$

Dans le domaine temporel, cette relation se met sous la forme :

$$\sigma(t, \theta) = \text{TFI}(\mu_c^*(\omega, \theta)) * \gamma(t) \quad (1.2)$$

où  $*$  représente le produit de convolution défini pour deux fonctions  $Q$  et  $V$  par :

$$(Q * V)(t) = \int_0^t Q(\tau)V(t - \tau)d\tau$$

et où la transformée de Fourier directe (TF) d'une fonction  $f(t)$  et inverse (TFI) d'une fonction  $g(w)$  sont données par :

$$\text{TF}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t)f(t)dt \quad ; \quad \text{TFI}(g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t)g(\omega)d\omega$$

La partie réelle et la partie imaginaire de  $\mu_c^*$  correspondent respectivement au module élastique (ou de stockage) et au module de dissipation (ou de perte). Comme la plupart des polymères, le PVB suit le principe d'équivalence temps-température. Cela signifie que  $\mu_c^*(\omega, \theta)$  ne dépend en fait que d'une variable réduite  $\omega\tau_\theta$ , où  $\tau_\theta$  est le temps caractéristique, fonction de la température. Ce dernier est relié au temps caractéristique à la température de référence  $\theta_0$  par la relation  $\tau_\theta = \tau_{\theta_0}a_\theta$ . Le facteur de translation  $a_\theta$ , fonction de la température, est donné par la loi de William-Landel et Ferry où C1 et C2 sont des constantes spécifiques au polymère considéré :

$$\log(a_\theta) = \frac{-C_1(\theta - \theta_0)}{C_2 + (\theta - \theta_0)} \quad (1.3)$$

Par conséquent, la connaissance (i) de la dépendance en fréquence de  $\mu_c^*(\omega, \theta_0)$  à la température de référence  $\theta_0$  et (ii) du facteur de translation, permet de déterminer les propriétés viscoélastique du PVB à toutes fréquences et températures, grâce à la relation suivante :

$$\mu_c^*(\omega, \theta) = \mu_c^*(\omega\tau_\theta) = \mu_c^*(\omega a_\theta \tau_{\theta_0}) = \mu_c^*(\omega a_\theta, \theta_0)$$

Par ailleurs, le PVB peut être caractérisé dans le domaine temporel par sa réponse en relaxation de contrainte. Pour la déterminer, on impose une déformation en cisaillement  $\gamma(t) = H(t)$  où  $H(t)$  est la fonction de Heaviside (ou fonction échelon) définie par  $H(t) = (1 + \text{Sign}(t))/2$ , et on

observe la contrainte  $\sigma(t) = G(t)$ . Dans ces conditions, l'équation (1.2) s'écrit dans le domaine temporel :

$$G(t, \theta) = \text{TFI}(\mu_c^*(\omega, \theta)) * H(t)$$

La transformée de Fourier de cette expression permet de déduire les relations qui relient le module de cisaillement complexe  $\mu_c^*(\omega, \theta)$  au module de relaxation  $G(t, \theta)$  (sachant que  $\text{TF}(H(t)) = \frac{1}{i\omega}$ ) :

$$G(t, \theta) = \text{TFI}\left(\frac{\mu_c^*(\omega, \theta)}{i\omega}\right) \quad ; \quad \mu_c^*(\omega, \theta) = i\omega \text{TF}(G(t, \theta)) = \text{TF}\left(\frac{dG}{dt}(t, \theta)\right)$$

D'après le principe d'équivalence temps-température, le module de cisaillement à la température  $\theta$  est relié à celle à la température  $\theta_0$  dans le domaine fréquentiel par :

$$\mu_c^*(\omega, \theta) = \mu_c^*(\omega a_\theta, \theta_0)$$

et par conséquent

$$\frac{\mu_c^*(\omega, \theta)}{i\omega} = a_\theta \frac{\mu_c^*(\omega a_\theta, \theta_0)}{i\omega a_\theta}$$

En partant de cette expression, on déduit le principe d'équivalence dans le domaine temporel :

$$\begin{aligned} \text{TFI}\left(\frac{\mu_c^*(\omega, \theta)}{i\omega}\right) &= \text{TFI}\left(a_\theta \frac{\mu_c^*(\omega a_\theta, \theta_0)}{i\omega a_\theta}\right) \\ \Leftrightarrow G(t, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) a_\theta \frac{\mu_c^*(\omega a_\theta, \theta_0)}{i\omega a_\theta} d\omega \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable  $\omega^* = a_\theta \omega$  dans le terme de droite, on obtient

$$G(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega^* \frac{t}{a_\theta}) \frac{\mu_c^*(\omega^*, \theta_0)}{i\omega^*} d\omega^*$$

Finalement, le principe d'équivalence dans le domaine temporel s'écrit :

$$G(t, \theta) = G(t/a_\theta, \theta_0) \tag{1.4}$$

A la température  $\theta$ , on modélise le comportement rhéologique du PVB comme une série de  $N$  modèles élémentaires de Maxwell en parallèle (Figure 1.7), ayant chacun leur propre module  $G_k$  et temps de relaxation  $\tau_k$ , ce qui amène à exprimer la fonction de relaxation  $G(t, \theta)$  et le module de cisaillement  $\mu_c^*(\omega, \theta)$  du PVB sous la forme (rappelons que  $\text{TF}(e^{-\alpha t}) = \frac{1}{\alpha + i\omega}$ ) :

$$G(t, \theta) = \sum_k^N G_k e^{-t/a_\theta \tau_k} + G_\infty \quad \text{et} \quad \mu_c^*(\omega, \theta) = \sum_k^N \frac{i\omega a_\theta \tau_k G_k}{1 + i\omega a_\theta \tau_k} + G_\infty$$

où  $G(t = 0, \theta) = G_0 = \sum_k^N G_k$  est le module instantané et où  $G_\infty$ , module aux temps très long,

est considéré proche de zéro, autrement dit le module est considéré nul pour un temps infini.

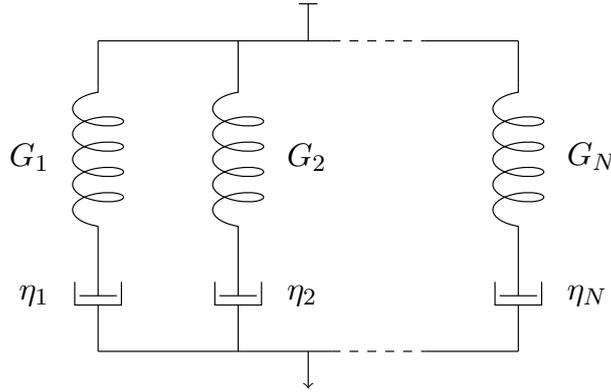


FIGURE 1.7 – Modélisation du comportement rhéologique du PVB par un modèle de Maxwell généralisé, constitué de  $N$  modèles élémentaires de Maxwell en parallèle.

La caractérisation rhéologique du PVB de la série RB41 peut être trouvée dans [23]. Le facteur de translation  $a_\theta$  y est déterminé expérimentalement. Sa variation avec la température est illustrée en Figure 1.8 et est en accord avec l'expression (1.3) et les constantes  $C_1 = 18.9$  et  $C_2 = 96.8$  et en prenant  $\theta_0 = 20^\circ C$  comme température de référence.

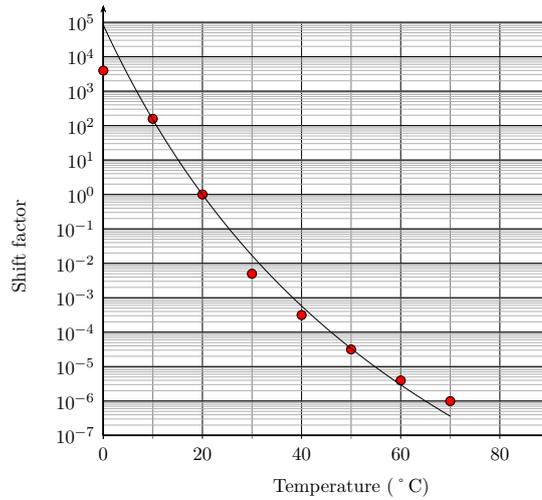


FIGURE 1.8 – Principe d'équivalence temps-température. Facteur de translation  $a_\theta$  du PVB RB41. En noir le tracé de l'expression (1.3) avec  $C_1 = 18.9$ ,  $C_2 = 96.8$  et  $\theta_0 = 20^\circ C$  déterminées à partir des données expérimentales en rouge ([23]).

Les paramètres  $(G_k, \tau_k)$  déterminés à  $\theta = \theta_0 = 20^\circ C$  sont reportés dans le Tableau 1.5. Ces valeurs, qui sont celles utilisées dans cette étude, sont extraites de [23] sauf pour  $\tau_k = 0.1, 1, 10$ s où on adopte les valeurs  $G_k = 35.2, 6.2, 1.9$ MPa, au lieu de  $G_k = 29.2, 14.2, 3.7$ MPa pour une meilleure correspondance avec les données du fournisseur.

Les données mises à disposition par le fabricant pour le PVB de la série DG41 ne permettent malheureusement pas de déduire les paramètres  $(G_k, \tau_k)$  ni les coefficients  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\theta_0$  de la loi de William-Landel et Ferry pour ce type de PVB.

Les courbes maîtresses du module de stockage  $\text{Re}(\mu_c^*(\omega, \theta_0))$  et de perte  $\text{Im}(\mu_c^*(\omega, \theta_0))$  du PVB

$\tau_k = \frac{\eta_k}{G_k}$ (s)	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	$10^7$	$10^8$
$G_k$ (MPa)	2.3	25.2	30.8	39.2	35.2	6.2	1.9	0.7	0.17	0.07	0.08	0.11	0.10	0.14

TABLE 1.5 – Couple expérimentaux  $(G_k, \tau_k)$  pour un PVB RB41 à  $\theta = \theta_0 = 20^\circ C$ 

RB41, qui sont établies à la température de référence  $\theta_0 = 20^\circ C$ , sont représentées en Figure 1.9. Les modules de relaxation  $G(t, \theta)$  à  $\theta = 20^\circ C$  et  $\theta = 10^\circ C$  sont représentés en Figure 1.10.

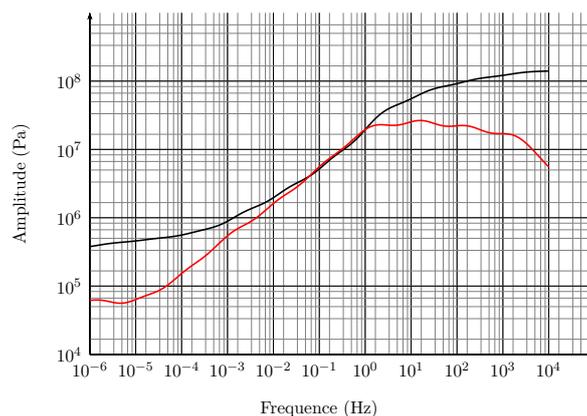


FIGURE 1.9 – Module de cisailment complexe  $\mu_c^*$  du PVB RB41 en fonction de la fréquence. Courbe maîtresse du module de stockage  $\text{Re}(\mu_c^*)$  (noir) et de perte  $\text{Im}(\mu_c^*)$  (rouge) à la température de référence  $\theta_0 = 20^\circ C$

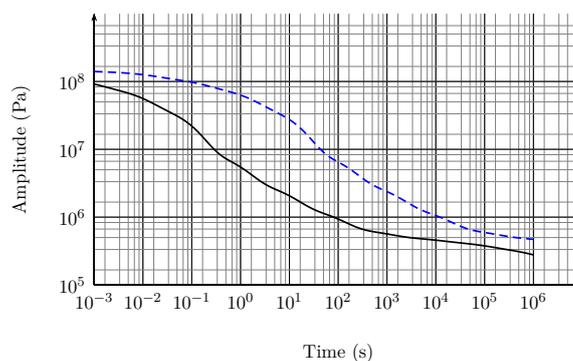


FIGURE 1.10 – Courbe de relaxation  $G(t, \theta)$  pour  $\theta = 20^\circ C$  (noir) et  $\theta = 10^\circ C$  (bleu) d'un PVB RB41

Ces données expérimentales montrent que le module de cisailment du PVB RB41 varie d'un facteur 1000 avec la fréquence et la température et atteint des valeurs plus grandes à basse température et haute fréquence (ou temps court) qu'à haute température et basse fréquence (ou temps long).

Les valeurs typiques de  $|\mu_c^*|$  sont 0.1GPa pour  $\theta \leq 0^\circ C$  et  $f > 1kHz$ , et 0.1 MPa pour  $\theta \geq 50^\circ C$  et un chargement permanent, soit  $f < 10^{-4}Hz$  (voir également [2]).

*Remarque* : Dans le domaine de l'ingénierie du verre, on utilise souvent une approximation sur le module de cisaillement appelée approximation *secant-stiffness*. Elle consiste à considérer le polymère comme un composant élastique, en tenant compte de sa viscoélasticité à travers un module élastique apparent, supposé égal au module de relaxation  $G(t, \theta)$  sous déformation constante après un temps  $t$  correspondant à la durée du chargement. Autrement dit, la réponse de la plaque en fluage est évaluée en remplaçant  $\mu_c$  par  $G(t, \theta)$ . Comme mentionné plus haut, cette approximation ne traduit que partiellement les effets du ramollissement du PVB et suppose a priori que le chargement est constant.

Dans les applications pratiques, le matériau verre est essentiellement utilisé sous forme de plaque. Il est donc utile de rappeler les modèles de plaques connus, établis soit par approche phénoménologique soit par approche asymptotique.

## 1.2 Modèles phénoménologiques de plaques

### 1.2.1 Introduction

On appelle "plaque" un corps solide délimité par deux plans parallèles, appelés "faces", et un cylindre (de section quelconque) d'axe perpendiculaire aux faces. La hauteur  $h$  du cylindre, aussi appelée "épaisseur", est petite devant la taille caractéristique  $L$  des faces (typiquement  $\frac{L}{h} > 5$ ).

On appelle "feuillelet moyen" le plan  $(O, \underline{x}_1, \underline{x}_2)$  d'équation  $x_3 = 0$  situé à équidistance des faces supérieure ( $x_3 = \frac{h}{2}$ ) et inférieure ( $x_3 = -\frac{h}{2}$ ). Son domaine est noté  $\omega$ . On définit également une fibre normale au feuillelet moyen, de direction  $\underline{x}_3$  (Figure 1.11).

$$\text{Le corps occupe donc le domaine } \Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \omega, |x_3| \leq \frac{h}{2} \right\}.$$

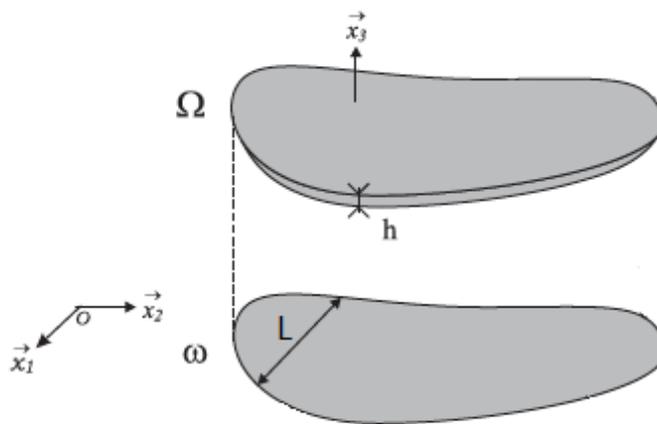


FIGURE 1.11 – Définition d'une plaque et notations associées.

Du fait de cette géométrie, on distingue les variations des grandeurs (déplacements, déformations, contraintes, efforts, ...) dans le plan de la plaque et celles dans la direction de l'épaisseur.

On dénote par  $x_3$  et  $\underline{x}_3$  la coordonnée et le vecteur unitaire hors-plan, et par  $x_\alpha$  et  $\underline{x}_\alpha$  les coordonnées et vecteurs unitaires dans le plan (par convention, les indices grecs prennent les valeurs 1 ou 2 et les indices romains prennent les valeurs 1 à 3). Par exemple, le vecteur déplacement  $\underline{u}$  se décompose en un déplacement dans le plan de composante  $u_\alpha$  selon la direction  $\underline{x}_\alpha$  et d'un déplacement hors plan  $u_3$  selon  $\underline{x}_3$ , soit :

$$\underline{u}(x_1, x_2, x_3) = u_\alpha \underline{x}_\alpha + u_3 \underline{x}_3$$

Par convention, la virgule utilisée en indice indique une dérivée partielle dans la direction de l'indice mentionné, soit pour une quantité  $q$ ,  $q_{,i}$  désigne  $\frac{\partial q}{\partial x_i}$ .

### 1.2.2 Aperçu des théories des plaques homogènes élastiques

Les théories conduisant à modéliser et analyser le comportement des plaques ont pour but de réduire la formulation tridimensionnelle à une description bidimensionnelle qui respecte au mieux les conditions d'équilibres et de continuité qu'impose la mécanique des milieux continus. Néanmoins, comme le passage de la 3D à la 2D s'accompagne d'approximations, ces exigences ne peuvent pas être totalement respectées. Plusieurs théories ont été élaborées en s'appuyant sur des observations empiriques et proposent des modélisations de nature phénoménologiques, d'un degré de raffinement variable selon la précision des hypothèses retenues et de la complexité de la structure de la plaque.

Chaque jeu d'hypothèse menant à une modélisation différente, l'objectif de cette section est de passer en revue les principaux modèles phénoménologiques existants et de préciser leurs avantages et inconvénients dans le cadre des plaques homogènes et stratifiées.

Les premières théories permettant de décrire le comportement d'une plaque soumise à un chargement remontent à la fin du 19<sup>e</sup> siècle. Elles s'inspirent des travaux déjà réalisés dans le domaine des poutres. Ces théories sont encore utilisées efficacement aujourd'hui pour des géométries de plaques ou des chargements particuliers.

#### Plaques minces de Love-Kirchhoff

En 1888, Love [31] propose une théorie de plaques minces formées d'un matériau homogène isotrope basée sur les hypothèses de Kirchhoff [36], elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour l'étude des poutres. Les hypothèses sur lesquelles repose cette théorie sont :

- a) Les plaques sont fortement élancées, soit  $\frac{L}{h} \geq 10$  (on parle de plaques "minces").
- b) Le feuillet moyen ne subit pas de déformation dans son plan.
- c) Les sections normales au plan moyen le restent lors de la déformation, par conséquent les déformations de cisaillement sont négligées.

Compte tenu de l'hypothèse b) le déplacement hors-plan de la plaque est indépendant de la variable  $x_3$  et est égal à la déflexion d'un point du feuillet moyen, soit :

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2, 0) = w(x_1, x_2)$$

Du fait de l'hypothèse c) et dans le cadre des petites déformations, la rotation de la section droite déformée est directement liée au gradient de la déflexion et vaut  $\theta_\alpha = -w_{,\alpha}$ . Dans le cas d'une plaque en flexion/extension, la cinématique s'écrit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = u_\alpha(x_1, x_2) - x_3 w_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $u_\alpha(x_1, x_2)$  représente le déplacement homogène engendré par l'extension du plan de la plaque. La déformée d'une section droite d'une plaque mince de Love-Kirchhoff est illustrée par la Figure 1.12.

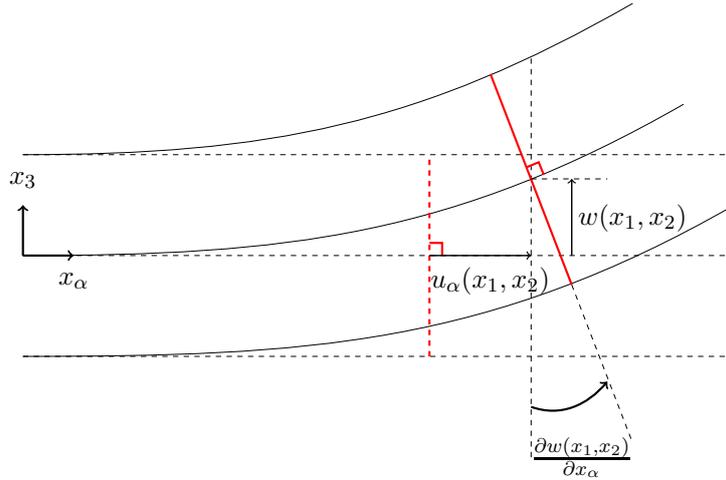


FIGURE 1.12 – Déformée de section d'une plaque modélisée par la théorie de Love-Kirchhoff.

Ce champs de déplacement permet de déduire, en petites déformations, le tenseur des déformations dans le plan de la section :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right)}_{e_{\alpha\beta}(x_1, x_2)} + x_3 \underbrace{\left( -\frac{\partial w(x_\alpha)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)}_{\kappa_{\alpha\beta}(x_1, x_2)} = e_{\alpha\beta}(x_1, x_2) + x_3 \kappa_{\alpha\beta}(x_1, x_2) \quad (1.6)$$

La condition de contrainte normale transverse nulle en surface  $\sigma_{33} = 0$  permet de déduire la relation entre la déformation normale transverse  $\varepsilon_{33}$  et les déformations normales  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{22}$  dans le plan en fonction du coefficient de Poisson du matériau  $\nu$  :

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (1.7)$$

En introduisant cette expression dans la loi de Hooke pour un matériau homogène élastique linéaire isotrope, on obtient la relation suivante entre les contraintes et les déformations dans le plan :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} [(1-\nu)\varepsilon_{\alpha\beta} + \nu\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \quad (1.8)$$

où  $E$  est le module d'Young du matériau et  $\delta_{\alpha\beta}$  le symbole de Kronecker qui vaut 1 si  $\alpha = \beta$  et 0 sinon. Les efforts normaux et moments par unité de longueur sont définis par intégration des contraintes sur l'épaisseur de la section :

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta}(x_1, x_2) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2) dx_3 = \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)e_{\alpha\beta} + \nu e_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \\ M_{\alpha\beta}(x_1, x_2) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2) dx_3 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [(1-\nu)\kappa_{\alpha\beta} + \nu\kappa_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \end{aligned} \quad (1.9)$$

L'expression de l'équilibre des efforts et des moments sur l'épaisseur de la plaque conduisent aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta,\beta}(x_1, x_2) + p_\alpha(x_1, x_2) &= 0 \\ M_{\alpha\beta,\alpha\beta}(x_1, x_2) + p(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

où  $p_\alpha(x_\alpha)$  représente les actions extérieures réparties dans le plan de la plaque et  $p(x_\alpha)$  les actions suivant la normale à la plaque.

Dans le cas d'une plaque en flexion pure, la cinématique en flexion d'une plaque mince de Love-Kirchhoff n'implique qu'un seul et unique descripteur cinématique, la déflexion  $w$ . Celle-ci est régie par une équation différentielle d'ordre 4, impliquant les paramètres géométriques et mécanique de la plaque :

$$E'\mathcal{I}\Delta_x^{(2)}w(x_1, x_2) + p(x_1, x_2) = 0 \quad ; \quad \Delta_x^{(2)} = \Delta_x\Delta_x \quad \text{et} \quad \Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (1.11)$$

avec  $E' = \frac{E}{(1-\nu^2)}$  le module de plaque apparent du matériau et  $\mathcal{I} = \frac{h^3}{12}$  son inertie de section par unité de longueur. Ce modèle de plaque permet de décrire correctement le comportement des plaques fortement élancées. Néanmoins, lorsque l'élancement diminue, le cisaillement transverse ne peut plus être négligé et le modèle est mis en défaut.

### Introduction du cisaillement transverse : plaques épaisses de Reissner-Mindlin

La théorie des plaques dites "épaisses" de Reissner-Mindlin [25] est analogue à la théorie de Timoshenko dans le domaine des poutres. Les plaques épaisses peuvent être définies pour un rapport  $5 \leq \frac{L}{h} \leq 10$  entre la taille caractéristique  $L$  du plan de la plaque et son épaisseur  $h$ . Contrairement à la théorie des plaques minces, le feuillet moyen n'est plus nécessairement orthogonal aux sections normales après déformation, par conséquent les effets du cisaillement transverse sont maintenant pris en compte.

Dans cette approche, les angles de rotation  $\theta_\alpha$  d'une section droite déformée ne sont plus directement égaux au gradient de la déflexion mais dépendent également de la distorsion de la section due au cisaillement transverse  $\gamma_{\alpha 3}$  (Figure 1.13). Par conséquent, le champ de déplacement s'écrit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) &= u_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \theta_\alpha(x_1, x_2) \\ w(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.12)$$

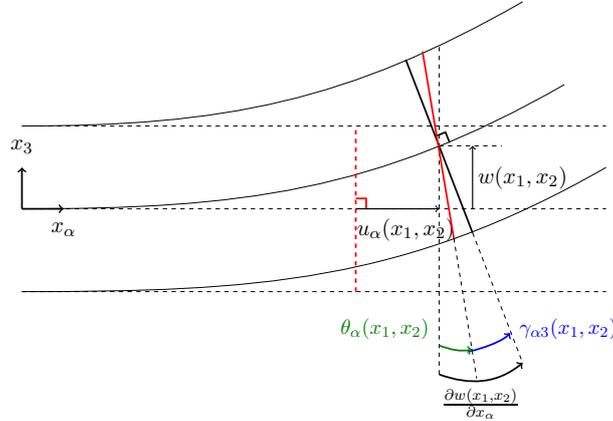


FIGURE 1.13 – Déformée de section d'une plaque modélisée par la théorie de Reissner-Mindlin.

Les déformations associées à ce champ de déplacement s'écrivent cette fois sous forme matricielle (toujours sous l'hypothèse des petites déformations) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + x_3 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \theta_\beta}{\partial x_\alpha} \right) = e_{\alpha\beta}(x_1, x_2) + x_3 \kappa_{\alpha\beta}(x_1, x_2) \\ 2\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} - \theta_\alpha \end{cases} \quad (1.13)$$

où  $\varepsilon_{\alpha 3}$  représente les déformations en cisaillement, intégrées dans le modèle de Reissner-Mindlin et nulles dans le modèle de Love-Kirchhoff. La déformation normale transverse  $\varepsilon_{33}$  s'écrit toujours sous la forme (1.7). Les définitions des contraintes dans le plan (1.8), et des efforts normaux et moments (1.9) restent inchangées. Contrairement au modèle de Love-Kirchhoff, les contraintes de cisaillement transverse sont non-nulles. Elles s'écrivent :

$$\sigma_{\alpha 3} = G\varepsilon_{\alpha 3} \quad (1.14)$$

Ainsi, on définit les efforts tranchants par :

$$T_{\alpha 3}(x_1, x_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3}(x_1, x_2) dx_3 = Gh \left( \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} - \theta_\alpha \right) \quad (1.15)$$

Comme dans le cas d'un modèle de Love-Kirchhoff, l'expression de l'équilibre des efforts et des moments sur l'épaisseur de la plaque conduisent aux équations d'équilibres d'une plaque de Reissner-Mindlin :

$$\begin{aligned}
N_{\alpha\beta,\beta}(x_1,x_2) + p_\alpha(x_1,x_2) &= 0 \\
M_{\alpha\beta,\beta}(x_1,x_2) + T_\alpha(x_1,x_2) &= 0 \\
T_{\alpha,\alpha}(x_1,x_2) + p(x_1,x_2) &= 0
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Celles-ci, combinées aux équations constitutives (1.9) (qui restent identiques) et (1.15), nous mènent à l'équation bilan qui régie le comportement d'une plaque de Reissner-Mindlin sous flexion pure :

$$E'I\Delta_x^{(2)}w(x_1,x_2) - \frac{EI}{Gh}\Delta_x^{(2)}p(x_1,x_2) + p(x_1,x_2) = 0 \tag{1.17}$$

En comparant cette équation bilan à celle obtenue dans le modèle de Love-Kirchhoff (1.11), on note l'apparition d'un terme dû au cisaillement. Les équations d'équilibres obtenues dans ce modèle sont réduites par rapport à celle de la théorie de l'élasticité 3D. Afin de corriger cet écart et d'ajuster la raideur du cisaillement transverse, on introduit un facteur dit "de correction du cisaillement" dans les lois de comportement. Néanmoins, ce coefficient influe fortement sur la précision des solutions et doit être déterminé en fonction de la géométrie de la plaque, du chargement et des conditions limites. Dans le cas d'une plaque homogène, on introduit un facteur  $\frac{5}{6}$  dans la loi de comportement de l'effort tranchant :

$$T_{\alpha 3}(x_1,x_2) = \frac{5}{6}Gh \left( \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} - \theta_\alpha \right) \tag{1.18}$$

Nous venons de voir que le choix de variation linéaire du champ de déplacement est incompatible avec la condition de contrainte tangentielle nulle sur les faces. Pour pallier cette limitation, des théories dites "d'ordre supérieur" ont été développées.

### Modèles avec cisaillement d'ordre supérieur (HSDT<sup>1</sup>)

Afin de corriger la limitation du modèle de Reissner-Mindlin, les théories HSDT supposent des champs de déplacement non-linéaires. Les principales sont basées sur l'hypothèse d'une variation cubique du champ de déplacement, permettant d'obtenir une allure parabolique du champ de déformation en cisaillement correspondant. La plus citée est la théorie de Vlasov-Reddy du troisième ordre [32]. Elle présente l'avantage d'exprimer le champ de déplacement sans variable additionnelle par rapport à la théorie de Reissner-Mindlin, tout en respectant les conditions de nullité des contraintes de cisaillement sur les faces inférieure et supérieure. Dans le cadre de cette théorie, le champ de déplacement pour une plaque soumise à un chargement quelconque s'écrit :

$$\begin{cases}
u_\alpha(x_1,x_2,x_3) &= u_\alpha(x_1,x_2) - x_3\theta_\alpha(x_1,x_2) - \frac{4x_3^3}{3h^2} (\theta_\alpha(x_1,x_2) + w_{,\alpha}^0(x_1,x_2)) \\
w(x_1,x_2,x_3) &= w(x_1,x_2)
\end{cases} \tag{1.19}$$

---

1. Higher-order Shear Deformation plate Theory

Cette théorie est plus pertinente que les approches de Love-Kirchhoff et Reissner-Mindlin pour décrire le comportement dans le plan d'une plaque homogène puisque l'équation constitutive de l'effort tranchant ne nécessite pas de facteur de correction. Elle fournit une bonne approximation des contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tri-dimensionnelle. Néanmoins, elle reste une solution approchée et se généralise difficilement au cas des plaques stratifiées qui implique des conditions de continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement aux interfaces entre les couches.

### Remarque sur les modèles de plaques homogènes

Tout les modèles évoqués précédemment sont basés sur le même état de déformation (1.6), sur les mêmes descripteurs cinématiques macroscopiques  $u_\alpha$  et  $\theta_\alpha$  et les efforts duaux associés  $M$  et  $T$ . Les équations d'équilibre en moment et en effort tranchant sont identiques, seule la loi constitutive de l'effort tranchant diffère entre les modèles.

### 1.2.3 Modèles de plaques stratifiées ou multicouches

Dans le domaine des plaques stratifiées, deux familles de modèles se distinguent : les modèles de *monocouche équivalente* (ESL<sup>2</sup>) et les modèles *par couche* (LW<sup>3</sup>). Intéressons-nous particulièrement aux modèles ESL.

En pré-intégrant la formulation des travaux virtuels le long de l'épaisseur, les modèles ESL réduisent le problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel. Pour ces structures multicouches, cela revient à considérer une plaque monolithique homogène statiquement équivalente. Par conséquent, le champ de déplacement s'exprime en fonction des variables  $x_1$  et  $x_2$  définies dans le plan de la plaque ( $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ ) et de la variable  $x_3$  dans la direction orthonormale à la plaque. La composante dans la direction  $\underline{x}_3$  d'un champ (déplacement, déformation, contrainte) peut ainsi s'exprimer de la façon suivante :

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1, x_2)F_1(x_3) + \dots + f_P(x_1, x_2)F_P(x_3)$$

Les fonctions  $F_i$  sont généralement déterminées grâce à des conditions cinématiques sur le champ de déplacement. Ainsi, le nombre de variables est indépendant du nombre de couches.

Du fait des variations (en général discontinues) de propriétés dans l'épaisseur, la géométrie d'un champ doit être telle que les conditions appelées  $C_{x_3}^0$  suivantes (issues du problème tridimensionnel) soient respectées :

- (a) Continuité cinématique entre les couches :  $u_i(x_{3k}^-) = u_i(x_{3k}^+)$
- (b) Continuité interlaminaire des contraintes :  $\sigma_{i3}(x_{3k}^-) = \sigma_{i3}(x_{3k}^+)$
- (c) Faces inférieure et supérieure libres  $\sigma_{\alpha 3}(\pm \frac{h}{2}) = 0$

avec  $i = 1, 2, 3$ ,  $\alpha = 1, 2$  et  $x_{3k}$  désignant la coordonnée  $x_3$  de l'interface entre la  $k^{\text{ième}}$  et la  $(k+1)^{\text{ième}}$  couche du stratifié.

---

2. Equivalent Single Layer  
3. Layer-Wise

## Extension des modèles classiques de plaques homogènes élastiques

En considérant une plaque multicouche comme une plaque monolithique homogène statiquement équivalente, il est possible d'appliquer directement les théories classiques des plaques homogènes élastiques. On utilise ainsi les mêmes descripteurs cinématiques macroscopiques  $u_\alpha$  et  $\theta_\alpha$ , les mêmes efforts duaux associés  $M$  et  $T$  et les mêmes équations d'équilibre en moment et en effort tranchant. On considère également les mêmes cinématiques que pour chaque modèle (Love-Kirchhoff, Reissner-Mindlin et Vlasov-Reddy)

Néanmoins, en plus des limites citées dans la Section 1.2.2, ces modèles équivalents présentent plusieurs incompatibilités avec les conditions  $\mathcal{C}_{x_3}^0$ .

Le premier modèle ESL, nommé théorie classique des stratifiés (CLT<sup>4</sup>), est la généralisation de la théorie des plaques minces homogène de Love-Kirchhoff au cas multicouche. A ce titre, le champ de déplacement supposé dans la plaque équivalente s'écrit toujours sous la forme (1.5) et la déformée de la section droite sous chargement quelconque est identique à celle illustrée en Figure 1.12. Comme dans le cas des plaques homogènes élastiques, la principale limite de ce modèle est qu'il ne tient pas compte du cisaillement transverse. Ainsi, seule la condition  $\mathcal{C}_{x_3}^0(a)$  de continuité cinématique entre les couches est vérifiée et la simplicité du modèle CLT ne suffit plus à décrire le comportement d'une plaque stratifiée, même fortement élançée.

Considérons maintenant une plaque monolithique équivalente représentée par un modèle de Reissner-Mindlin. Ainsi, le champ de déplacement dans toute la plaque est linéaire et s'écrit sous la forme (1.12). Contrairement au modèle CLT, les déformations en cisaillement transverse sont prises en compte, et la déformée d'une section droite sous chargement quelconque sur une des faces est identique à celle obtenue dans le cas homogène (Figure 1.12). Cependant, les difficultés rencontrées dans le cas monolithique persistent : les déformations en cisaillement sont toujours constantes, il est donc toujours nécessaire d'introduire un coefficient de correction du cisaillement, fortement influencé par les conditions limites et le chargement pour se rapprocher des solutions tridimensionnelles. La condition  $\mathcal{C}_{x_3}^0(c)$  n'est pas respectée.

Grâce à la non-linéarité de la distribution des champs de déplacement, déformation et contrainte, les modèles avec cisaillement d'ordre supérieur sont plus pertinents que les modèles de Love-Kirchhoff et Reissner-Mindlin pour décrire le comportement d'une plaque épaisse homogène. En appliquant le modèle HSDT de Vlasov-Reddy, le champ de déplacement d'une plaque stratifiée considérée comme monolithique statiquement équivalente s'écrit comme dans la section précédente sous la forme (1.19).

Le modèle présente toujours l'avantage de ne pas nécessiter de facteur de correction du cisaillement. Néanmoins, pour l'étude d'une plaque stratifiée, ce modèle ne respecte pas la condition de continuité  $\mathcal{C}_{x_3}^0(c)$ . De plus, contrairement au cas des plaques homogènes élastiques, il perd sa capacité à calculer les contraintes de cisaillement transverse à partir des équations constitutives.

On remarque que la généralisation des modèles classiques de plaques homogènes élastique aux plaques stratifiées ESL implique des difficultés dans le respect des conditions  $\mathcal{C}_{x_3}^0$ , en particulier les conditions de continuité des contraintes interlaminaires. Afin de pallier cette difficulté, différents modèles ont été développés introduisant un effet "zig-zag" qui traduit un fort gradient des différents champs dans l'épaisseur dû aux propriétés mécaniques très distinctes des couches.

## Modèles Zig-Zag

Les plaques multicouches font apparaître un champ de déplacement continu dans le sens de l'épaisseur. Les conditions  $\mathcal{C}_{x_3}^0$  de continuité des contraintes normales et de cisaillement aux interfaces entre les couches sont à l'origine d'un changement de pente d'une variable du champ de déplacement entre deux couches considérées comme parfaitement liées, connu sous le nom d'effet "zig-zag".

Initialement, cet effet a été introduit dans plusieurs modèles ESL, notamment dans les théories multicouche de Lekhnitskii-Ren [33] et de Ambartsumian-Whitney [34] qui imposent toutes deux des conditions de continuité des contraintes de cisaillement transverse (et non plus de continuité du champ de déplacement comme dans les cas précédent).

Afin de traduire cet effet zig-zag, Murakami [35] introduit une fonction de la coordonnée orthonormale  $x_3$ , nommée "fonction Zig-Zag de Murakami", dans le champ de déplacement d'un stratifié. Elle s'écrit pour une plaque multicouche composée de  $N$  couches d'épaisseur  $h_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , soit une épaisseur totale  $h = \sum_{k=1}^N h_k$ , ayant pour plan moyen  $x_3 = 0$  :

$$F^M(x_3) = (-1)^k \zeta_k = (-1)^k \frac{2x_{3k}}{h_k} \quad \text{avec} \quad -1 \leq \zeta_k \leq 1 \quad (1.20)$$

où  $x_{3k}$  est la coordonnée locale d'un point situé sur la couche  $k$  (Figure 1.14). Cette fonction possède des propriétés locales intéressantes puisqu'elle est nulle dans le plan moyen de chaque couche et vaut  $\pm 1$  aux interfaces, facilitant ainsi le respect des conditions de continuité interlaminaires. Aussi, elle permet une bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée.

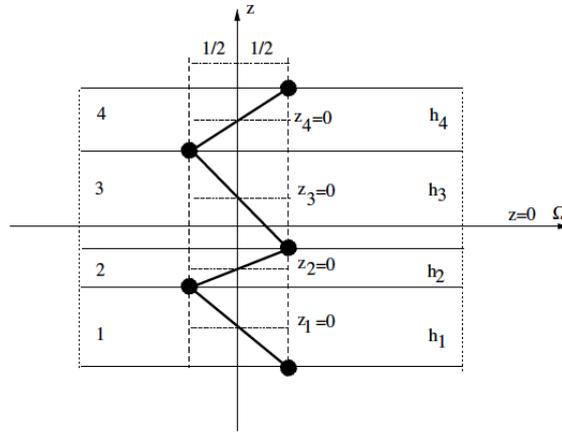


FIGURE 1.14 – Fonction Zig-Zag de Murakami pour  $N=4$ . [12] avec  $x_3 = z$  ici.

Dans ses travaux, Carrera [12] rend compte de la facilité d'intégrer cette fonction dans le champ de déplacement plan et applique cette formulation Zig-Zag à la théorie de Reissner-Mindlin. Il obtient le champ suivant :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) &= u_\alpha^0(x_1, x_2) + x_3 u_\alpha^1(x_1, x_2) + F^M(x_3) u_\alpha^M(x_1, x_2) \\ w(x_1, x_2, x_3) &= w^0(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.21)$$

où  $u_\alpha^0(x_1, x_2)$ ,  $u_\alpha^1(x_1, x_2)$  et  $u_\alpha^M(x_1, x_2)$  sont respectivement les amplitudes des termes constant, li-

néaire et Zig-Zag. La Figure (1.15) montre la contribution de chacun des termes dans l'expression du déplacement dans le plan total  $u_\alpha(x_1, x_2, x_3)$ .

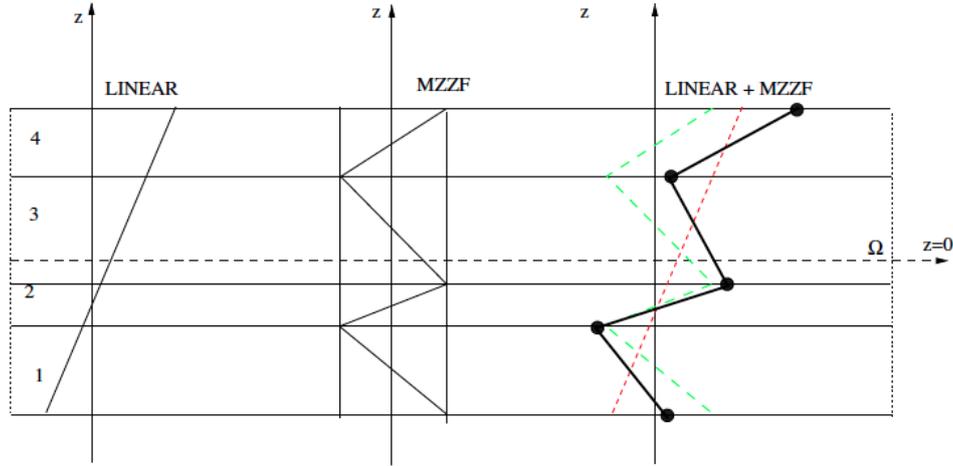


FIGURE 1.15 – Inclusion de l'effet Zig-Zag dans la théorie FSDT pour  $N=4$ . [12] avec  $x_3 = z$  ici.

De la même manière, Carrera a intégré l'effet Zig-Zag dans les théories HSDT, et notamment dans la théorie de Vlasov-Reddy. Après traduction des conditions interlaminaires et des conditions de bord, il obtient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = u_\alpha^0(x_1, x_2) + \left(x_3 - \frac{4x_3^3}{3h^2}\right) u_\alpha^1(x_1, x_2) + \left(\zeta_k - \frac{8x_3^3}{3h_k h^2}\right) u_\alpha^M(x_1, x_2) \\ w(x_1, x_2, x_3) = w^0(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.22)$$

L'effet de l'introduction d'une fonction de Murakami sur le champ de déplacement dans le plan est illustré par la Figure (1.16).

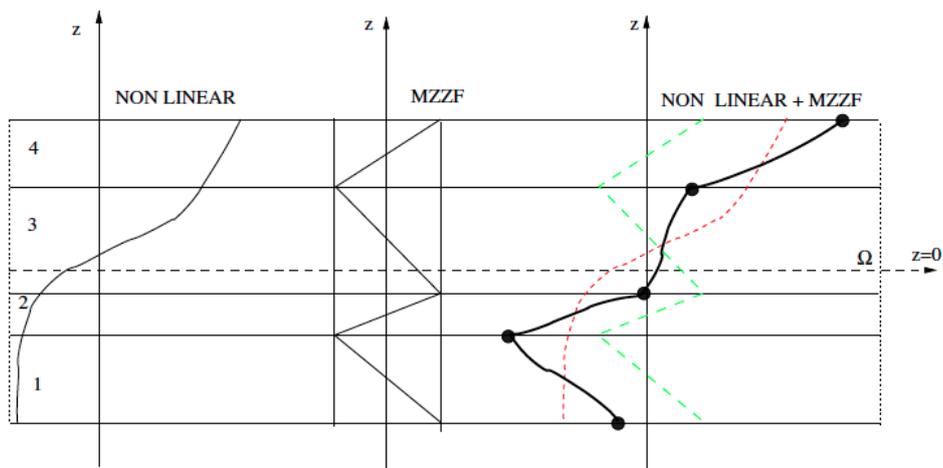


FIGURE 1.16 – Inclusion de l'effet Zig-Zag dans la théorie HSDT pour  $N=4$ . [12] avec  $x_3 = z$  ici.

Le champ de déplacement des modèles zig-zag a pour avantage d'introduire une perturbation aux interfaces permettant de respecter les conditions  $C_{x_3}^0$ . De plus, le facteur de correction du

cisaillement transverse n'est plus nécessaire. Cependant, une cinématique macroscopique additionnelle est introduite sans que l'effort dual associé ne soit identifié, par conséquent la formulation du modèle reste en partie implicite.

S'inspirant de ce concept, de nombreux auteurs ont affiné ces modèles zig-zag, proposant d'autres fonctions polynômiales ou trigonométriques permettant la description de la répartition du cisaillement au travers de l'épaisseur. Une bonne revue et une étude comparative de ces modèles peuvent être trouvées dans les travaux de Carrera [11] [13]. Il en ressort que le choix optimal entre ces modélisations dépend fortement de la précision des résultats souhaitée et des paramètres extérieurs (chargement, conditions limites, ...). De plus, ces modèles présentent des difficultés à représenter les effets locaux (effets de bord, interfaces...).

### Autres modèles ESL pour plaques trilaminées élastiques

Dans le cas particulier des plaques trilaminées élastiques, des approches analytiques prenant en compte le cisaillement de la couche intermédiaire sous chargement statique ont été proposées par Foraboschi [16] et Ivanov [20]. Dans ces travaux, les descriptions sont obtenues en considérant les équations d'équilibres des différentes couches, dans lesquelles la cinématique est supposée. Par construction, les variables cinématiques habituelles ainsi que les efforts tranchants et les moments sont complétées par des variables additionnelles.

Il est difficile cependant pour ces modèles ou pour les modèles zig-zag bien adaptés aux milieux élastiques, de déterminer les effets d'un constituant viscoélastique sur le comportement d'ensemble du stratifié. En effet, si le module viscoélastique d'un constituant varie, la cinématique du stratifié doit être actualisée pour chaque valeur du module, ce qui est très contraignant en terme de temps de calcul.

Les approches ESL supposent implicitement des propriétés mécaniques quasi-homogènes dans l'épaisseur du stratifié. Cependant, dès qu'elles apparaissent très hétérogènes, de forts gradients de déplacement, de déformation et de contrainte apparaissent entre les couches et il est nécessaire d'étudier le comportement de chacune d'entre elles. Pour cela, il existe des approches dites "par couche" dans lesquelles chacune des couches est considérée comme indépendante.

### Modèles par couches

Contrairement aux modèles ESL, les modèles par couche considèrent les cinématiques de *chaque couche* ainsi que les conditions de continuités aux interfaces  $\mathcal{C}_{x_3}^0$ . On a cette fois pour un champ quelconque :

$$f^k(x_1, x_2, x_3) = f_1^k(x_1, x_2)F_1(x_3) + \dots + f_P^k(x_1, x_2)F_P(x_3)$$

où l'exposant désigne la couche dans laquelle la composante du champ est exprimée. Cette fois, lorsqu'on discrétise le système, le nombre de variables indépendantes est directement lié au nombre de couches. Ainsi, les équations d'équilibre sont écrites dans chaque couche ce qui implique que le nombre de descripteurs cinématiques macroscopiques est fonction du nombre de couches (contrairement aux approches ESL) de sorte que plus il y a de strates, plus l'analyse est complexe. Les efforts duaux associés aux descripteurs additionnels ne sont pas identifiés, par conséquent la formulation de ces modèles est implicite.

La méthode consiste à appliquer un modèle de type Reissner-Mindlin ou HSDT à chacune des couches, puis à exprimer les conditions de continuité interlaminaires afin de diminuer le nombre de variables indépendantes. Ces modèles complexes requièrent une résolution numérique.

### Synthèse sur les modèles de plaques stratifiées

Comme nous venons de le voir, les modèles de plaques stratifiées nécessitent d'introduire des descripteurs cinématiques macroscopiques additionnels afin de répondre aux conditions de continuité  $\mathcal{C}_{x_3}^0$ . Cependant, les efforts duaux associés à ces descripteurs ne sont pas définis dans ces modèles, ce qui ne permet pas la formulation explicite d'un modèle global. De ce fait, même si ils offrent un cadre de résolution numérique pour des stratifiés élastiques, leur application aux stratifiés viscoélastiques reste une question en suspens.

#### 1.2.4 Introduction des effets viscoélastiques dans l'étude du verre feuilleté

Les modèles par couches de stratifiés constitués d'une ou plusieurs couches viscoélastiques sont peu nombreux. Parmi ceux-ci, citons les travaux de Galuppi et Royer-Carfagni [17] [18] qui ont travaillé dans le domaine des poutres trilaminées et plus particulièrement des poutres de verre feuilleté. Le modèle proposé s'appuie sur une analyse des efforts et des moments par couche. Dans chacune d'elles, la cinématique n'est pas démontrée mais supposée identique à celle d'une poutre d'Euler, analogue 1D au modèle de Love-Kirchhoff pour les plaques :

$$\begin{cases} u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= u_3(x_3, t) - x_\alpha \frac{\partial w_\alpha(x_3, t)}{\partial x_3} \\ w_\alpha(x_1, x_2, x_3, t) &= w_\alpha(x_3, t) \end{cases} \quad (1.23)$$

où  $x_\alpha$  est la variable dans une direction de la section droite de la poutre ( $\alpha = 1, 2$ ) et  $x_3$  la variable dans la direction axiale de la poutre. Avec cette définition du champ de déplacement, Galuppi et Royer-Carfagni établissent une déformation en cisaillement, supposant qu'elle s'applique au PVB et s'écrivant sous la forme :

$$\gamma_\alpha(x_3, t) = \frac{1}{c} \left( u_3^+(x_3, t) - u_3^-(x_3, t) + x_\alpha \frac{\partial w_\alpha(x_3, t)}{\partial x_3} H \right) \quad (1.24)$$

avec  $c$  l'épaisseur de la couche d'interface,  $H$  la distance entre les mi-épaisseurs des couches de verre et où les exposants  $^+$  et  $^-$  désignent respectivement les poutres de verre supérieure et inférieure. A partir de cette déformation, la contrainte en cisaillement dans la couche d'interface est définie par :

$$\tau_\alpha(x_3, t) = G(0)\gamma_\alpha(x_3, t) - \int_0^t \frac{\partial G(t - \zeta)}{\partial \zeta} \gamma_\alpha(x_3, \zeta) d\zeta \quad (1.25)$$

avec  $G(t)$  le module de cisaillement viscoélastique de la couche d'interface.

#### Influence des effets viscoélastiques sur l'inertie équivalente de la section de poutre

L'introduction de ces effets impose de définir différentes inerties. En effet, la variation du module de cisaillement entraîne une variation de l'inertie équivalente de la section de la poutre. Les

auteurs définissent  $I^\pm$  l'inertie de section des poutres de verres  $\pm$ ,  $\mathcal{I}$  l'inertie de la section de la poutre trilaminée, et  $A^*$  un paramètre géométrique reliant  $\mathcal{I}$  à  $I^+ + I^-$ . A titre d'exemple, pour un module de cisaillement qui tend vers 0, l'inertie équivalente de la poutre tend vers  $I^+ + I^-$ . Dans le cas d'un module qui tend vers l'infini, elle tend vers  $\mathcal{I}$ .

**Equation bilan** Les équilibres des efforts conduisent à l'équation bilan temporelle régissant le comportement en  $w_\alpha$  d'une poutre de verre feuilleté telle que définie par Galuppi et Royer-Carfagni, prenant en compte les effets viscoélastiques dans la couche d'interface :

$$E(I^- + I^+)w_\alpha^{(4)}(x_3, t) - \frac{b\mathcal{I}}{cA^*} \left\{ G(0)w_\alpha''(x_3, t) - \int_0^t \frac{\partial G(t-\zeta)}{\partial \zeta} w_\alpha''(x_3, \zeta) d\zeta \right\} + \frac{b\mathcal{I}}{cA^*} \left\{ G(0)M(x_3, t) - \int_0^t \frac{\partial G(t-\zeta)}{\partial \zeta} M(x_3, \zeta) d\zeta \right\} + p(x_3, t) = 0 \quad (1.26)$$

où  $M(x_3, t)$  est le moment engendré par la distribution de charge externe  $p(x_3, t)$

Les auteurs proposent une résolution générale par la méthode de Galerkin et une application au cas d'une poutre de verre feuilleté bi-appuyée chargée sinusoidalement dans laquelle ils comparent les résultats obtenus en utilisant l'équation (1.26) et ceux obtenus par l'approximation *secant stiffness* (voir Section 1.1.5) où la contrainte de cisaillement se simplifie en :

$$\tau_\alpha(x_3, t) = G(t)\gamma_\alpha(x_3, t)$$

On rappelle que cette approximation consiste à considérer le polymère comme un composant élastique, en tenant compte de sa viscoélasticité à travers un module élastique apparent, supposé égal au module de cisaillement  $G(t)$  sous déformation constante après un temps  $t$  correspondant à la durée du chargement. Elle conduit à des solutions que l'on peut considérer comme *pseudo-élastique*.

Ils concluent qu'il est préférable d'utiliser les solutions viscoélastiques complètes, sauf dans des cas particuliers où les solutions approximées en sont très proches (temps de chargement court et chargement monotone notamment).

**Synthèse sur les travaux de Galuppi et Royer-Carfagni** Ce modèle présente l'avantage de traiter une situation viscoélastique et donne une formulation explicite. Cependant, du fait des hypothèses retenues *a priori* sur les cinématiques, la description ne donne pas accès aux torseurs d'action spécifique du PVB sur le verre. De plus, il est nécessaire de connaître analytiquement les moments engendrés par les efforts externes pour résoudre les équations. Enfin, sans chargement, le modèle tend vers un modèle de plaque de cisaillement lorsqu'on fait tendre le module de cisaillement de PVB vers l'infini, et non vers un modèle de poutre monolithique. Ainsi se pose la question du caractère général de ce modèle, nécessaire à une bonne description des effets viscoélastiques sur le comportement global de la poutre. Le modèle obtenu est considéré par les auteurs comme la généralisation viscoélastique de l'équation de Newmark [37].

**Effets viscoélastiques dans les modèles Zig-Zag** Comme nous l'avons vu précédemment, les modèles Zig-Zag sont des modèles implicites, numériquement efficaces. Cependant, introduire des effets viscoélastiques dans les propriétés des composants conduit à réactualiser les solutions obtenues à chaque pas de temps. La mise en œuvre de ces modèles dans le cadre viscoélastique n'a pas été abordée dans la littérature à notre connaissance.

### 1.3 Modèles asymptotiques de plaques

Les modèles phénoménologiques présentés dans la section précédente supposent des champs de déplacement ou de contrainte, mais ne les démontrent pas. Ces champs empiriques sont basés sur des observations et si certains de leurs termes ont un réel sens physique (flexion globale, déplacement homogène de la section), les termes d'ordre supérieur ou les fonctions de correction du cisaillement sont des approximations difficiles à justifier. Les modèles phénoménologiques de plaques homogènes ont été justifiés théoriquement dans le cadre strict d'une méthode multi-échelle, aussi appelée "méthode des développements asymptotiques", basée sur l'introduction du rapport d'échelle  $\varepsilon$  entre l'épaisseur  $h$  de la plaque, et la taille caractéristique d'évolution d'un phénomène dans le plan de la plaque  $L$ , soit  $\varepsilon = \frac{h}{L}$ . Notons que ce paramètre de changement d'échelle est l'inverse de l'élanement d'une plaque introduit dans la Section 1.2.1, il est donc très petit devant l'unité.

Cette section permet d'introduire les travaux basés sur la méthode asymptotique, et les travaux actuels sur le thème des plaques stratifiés.

#### 1.3.1 Méthode des développements asymptotiques appliquée aux plaques

La méthode des développements asymptotiques permet de déterminer un modèle de plaque 2D à partir du comportement 3D de ses constituants. Pour cela, on écrit les champs de déplacement et de contrainte comme somme de termes en puissance de  $\varepsilon$ , soit :

$$\underline{u}(x_1, x_2, x_3) = \sum_i \varepsilon^i \underline{u}^i(x_1, x_2, x_3) \quad (1.27)$$

$$\underline{\sigma}(x_1, x_2, x_3) = \sum_i \varepsilon^i \underline{\sigma}^i(x_1, x_2, x_3) \quad (1.28)$$

où l'on rappelle que  $\varepsilon = \frac{h}{L} \ll 1$ . Une des premières approches asymptotiques dans le domaine des plaques est proposée par Ciarlet et Destynder [14] [15] qui ont étudié les plaques homogènes élastiques en exprimant la formulation variationnelle des équations d'équilibre et en séparant les équilibres dans le plan et hors-plan, ils démontrent que le champ de déplacement d'une plaque élastique homogène en flexion pure s'écrit à l'ordre dominant :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) &= u_\alpha^0(x_1, x_2, x_3) - x_3 w_{,\alpha}^0(x_1, x_2) \\ w(x_1, x_2, x_3) &= w^0(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.29)$$

où l'exposant 0 désigne le terme d'ordre dominant. Ainsi, ils valident dans le cadre strict des développements asymptotiques la formulation (1.5) supposée *a priori* dans le cadre de la théorie des plaques minces de Love-Kirchhoff.

Parmi les travaux précurseurs sur la méthode des développements asymptotiques dans les milieux non-homogènes, il convient de citer ceux de Sanchez-Palencia [24]. Dans le domaine des plaques, Caillerie a montré que cette méthode fournit de meilleurs résultats lorsqu'on part d'une situation tridimensionnelle et qu'on utilise un passage à la limite approprié. Ces travaux ont porté sur l'étude des plaques minces élastiques périodiques [9], puis sur les plaques à structure périodique ondulées [10].

Depuis ces premiers travaux, Trabucho et Viano [26] ont établi grâce à des considérations énergétiques une procédure de résolution qui consiste à séparer les équations d'équilibres dans le plan et hors-plan. Cette procédure est celle que nous utiliserons dans ce mémoire. Elle permet de montrer le développement des champs en puissances paires ou impaires de  $\varepsilon$ .

$$\underline{u}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0} \varepsilon^{2k} \left( \underline{w}^{2k}(x_1, x_2, x_3) + \varepsilon \underline{u}_\alpha^{2k+1}(x_1, x_2, x_3) \right) \quad (1.30)$$

Plus récemment, plusieurs auteurs comme Auriault et Boutin [1], Lebé et Sab [21] ou Lewinski et Telega [22] ont appliqué la méthode asymptotique pour l'étude de structure hétérogène.

Les résultats obtenus par approche asymptotique pour les plaques hétérogènes dans le plan supposent implicitement que les propriétés élastiques des constituants sont du même ordre de grandeur. Cependant, si un ou plusieurs constituants sont viscoélastiques, leurs propriétés mécaniques varient et il peut exister des contrastes de rigidité importants entre les propriétés mécaniques des constituants. Comme l'ont montré Boutin et Soubestre dans le cadre des milieux souples renforcés par de longues inclusions rigides [4], la prise en compte de ce contraste mécanique est indispensable à l'obtention d'un modèle complet, couplant les effets de flexion et de cisaillement. A ce jour, il existe peu de travaux prenant en compte ce contraste dans le domaine des plaques stratifiées.

### 1.3.2 Plaques hétérogènes contrastées

On s'intéresse maintenant aux plaques hétérogènes dans leur épaisseur, appelées plaques stratifiées ou encore plaques multicouches. De tels composites sont dits "contrastés" lorsqu'il existe un rapport important entre les propriétés mécaniques (contraste de rigidité) et/ou les épaisseurs de couche (contraste géométrique) des constituants.

Les plaques hétérogènes contrastées trouvent leur application dans des domaines tels que l'aéronautique ou l'automobile. On les trouve souvent sous leur forme trilaminée, présentant à la fois un contraste géométrique et mécanique. Dans la plupart des cas, elles sont constituées de deux fines couches rigides externes appelées "peaux" et d'une couche centrale épaisse et souple appelée "cœur" (Figure 1.17).

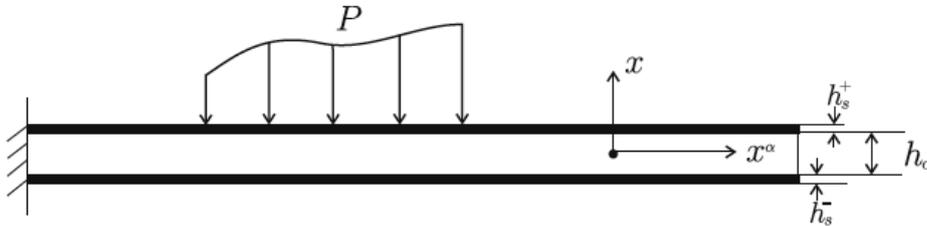


FIGURE 1.17 – Plaque trilaminée à peaux minces et cœur épais étudiée par Berdichevsky. Notations :  $h_s^+ = h_s^- = h_s$ , soit une épaisseur totale  $h = 2h_s + h_c$ .

Dans ses travaux, Berdichevsky [3] introduit un paramètre défini en fonction des rigidités et des épaisseurs des différentes couches :

$$\frac{\mu_c h_c}{\mu_s h_s} = \left( \frac{h}{L} \right)^\alpha = \varepsilon^\alpha$$

où  $L$  est la longueur caractéristique de variation du chargement,  $\mu_c$  et  $\mu_s$  les modules de cisaillement respectifs du cœur et des peaux. Berdichevsky explore les différents comportements de l'ensemble en fonction de  $(\frac{h}{L})^\alpha$ .

Par une approche énergétique, il retrouve que si  $\alpha < 2$ , le comportement du trilaminée est celui d'une plaque de Love-Kirchhoff, où le seul phénomène physique apparent est la flexion globale. Pour  $\alpha > 2$ , il distingue deux cas : soit les peaux sont suffisamment épaisses pour qu'il existe un couplage entre la flexion locale et le cisaillement (plaque "sandwich"), soit l'épaisseur est très faible et seul le phénomène de cisaillement persiste (plaque "membrane"). Enfin, le cas intermédiaire  $\alpha = 2$  (ayant déjà été identifié par Boutin et Soubestre [4]) permet d'obtenir une équation différentielle régissant le comportement de la plaque sous flexion faisant intervenir des termes issus de la flexion globale, de la flexion locale et du cisaillement.

Malgré la généralité de cette approche asymptotique qui intègre bien les contrastes internes, le passage des formulations énergétiques à des formulations classiques de théorie des plaques en terme de moment et d'effort tranchant n'est pas explicite. Par conséquent, les équations constitutives et les équations bilans ne sont pas extraites et on ne peut pas établir une formulation explicite du comportement d'ensemble de la plaque hétérogène. De plus, les champs cinématiques sont supposés *a priori*, et non démontrés comme c'est le cas dans la méthode des développements asymptotiques. Enfin, l'étude est restreinte au cas des couches élastiques et à la géométrie peaux minces/ cœur épais, i.e.  $h_s \ll h_c$ .

## 1.4 Intérêt d'un nouveau modèle de plaque

### 1.4.1 Nécessité de l'étude : comportement du verre feuilleté

La section bibliographique précédente a permis de montrer que la réponse en flexion des plaques stratifiées est fortement influencée par le contraste de rigidité entre les différentes couches. Afin de comprendre l'influence des effets viscoélastiques sur le comportement global d'un stratifié, considérons un instant une plaque de verre feuilleté. Comme nous l'avons vu dans la Section 1.6, elle est constituée de deux couches externes de verre (traité ou non), connectées par une couche centrale viscoélastique de PVB. Les propriétés du PVB, développées dans la Section 1.1.5, permettent de distinguer deux comportements d'ensemble extrêmes. Dans le cas où la couche centrale est très rigide (module de cisaillement du PVB très fort), les deux plaques de verre sont (quasi)-parfaitement connectées et le stratifié se comporte comme une plaque monolithique, régie par de la flexion globale. A l'inverse, si le module de cisaillement de la couche viscoélastique est très faible (couche très souple), alors les plaques de verre sont (quasi)-totalement découplées et le comportement du stratifié est celui de deux plaques de verre, glissant (quasi)-parfaitement l'une sur l'autre, étant chacune régie par sa propre flexion (dite "locale"). Pour des valeurs intermédiaires du module, les effets de cisaillement doivent être pris en compte pour assurer la transition entre les deux comportements extrêmes.

La différence entre les deux comportements extrêmes est trop grande pour que l'une ou l'autre des descriptions permette une évaluation raisonnable du comportement réel du stratifié. Par conséquent, un modèle complet et pertinent requiert d'englober (au moins) les phénomènes de flexion globale, de flexion locale et de cisaillement. Cette nécessité est d'autant plus importante dans le cas du verre feuilleté, dû aux propriétés du PVB et particulièrement à sa dépendance

significative à la fréquence et à la température puisqu'en pratique, les deux comportements limites peuvent être atteints en fonction des conditions extérieures et du chargement. Cette situation s'éloigne des descriptions usuelles ou raffinées des plaques élastiques stratifiées avec un contraste de rigidité limité. En fait, un faible contraste réduit les cinématiques possibles et par conséquent élimine certains mécanismes se produisant dans le cas de fort contraste.

#### 1.4.2 Rappel des limites des modèles existants et choix de la méthode

Nous venons de voir que les modèles de plaques stratifiées existants présentent plusieurs inconvénients. Pour commencer, les modèles phénoménologiques sont basés sur des champs de déplacement et/ou de contrainte supposés *a priori* qui ne respectent pas toutes les conditions de continuité interlaminaire. Ensuite, les équations d'équilibre du problème tridimensionnel ne sont que partiellement vérifiées et les solutions obtenues étant fonctions des hypothèses sur lesquels ces modèles sont construits, elle peuvent être plus ou moins éloignées des solutions exactes en fonction de plusieurs paramètres (géométrie, chargement, ...). De plus, ces modèles n'aboutissent pas à une formulation explicite du comportement global du stratifié (équations constitutives, lois de comportement, équations bilans), qui tient compte des effets viscoélastiques.

Dans le domaine des plaques, l'approche asymptotique a permis de retrouver certains résultats supposés dans les théories classiques. Elle a aussi été largement utilisée dans le cadre des plaques hétérogènes dans leur plan et a permis de montrer la nécessité d'un contraste mécanique entre les constituants pour obtenir un modèle complet. Néanmoins, elle a été beaucoup moins utilisée dans l'étude des stratifiées et les modèles connus ne traitent que certains cas particulier de plaques trilaminées. De plus, les formulations qu'ils fournissent ne sont pas explicites et il est difficile de distinguer l'influence de la flexion et du cisaillement.

Les méthodes asymptotiques présentent l'avantage de ne faire aucune hypothèse sur la forme des champs de déplacement et/ou de contrainte et de s'appliquer quelle que soit l'épaisseur de la plaque (à condition de respecter la séparation d'échelle soit  $\varepsilon \ll 1$ ). Ces méthodes ont conduit à des résultats pertinents dans le domaine des milieux hétérogènes et des plaques élastiques hétérogènes dans leur plan, notamment dans la prise en compte du couplage flexion/cisaillement. De plus, l'introduction d'un constituant viscoélastique n'empêche pas la résolution des équations d'équilibre issues de ces méthodes asymptotiques. Ainsi, dans cette étude, nous appliquerons la méthode des développements asymptotiques.

En conclusion, après analyse bibliographique, il apparaît que s'il existe effectivement des possibilités de calcul de plaque à composants viscoélastiques, il n'existe pas de modèle explicite qui permettent une description physique du comportement à l'échelle du composite exprimé de manière équivalente. C'est à cette question que nous consacrerons notre travail.

#### 1.4.3 Objectifs de l'étude

Basés sur les motivations de l'étude et les limites des modèles de plaques existants, différents objectifs théoriques et expérimentaux ont été définis pour cette étude.

##### Objectifs théoriques

L'objectif théorique principal de ces travaux est d'obtenir un modèle de plaques stratifiées qui soit "complet", autrement dit qui prenne en compte un couplage flexion/cisaillement complet

et qui soit en mesure d'exprimer explicitement ses effets sur le comportement d'ensemble de la plaque. Pour cela, nous avons vu que les matériaux doivent absolument avoir des propriétés mécaniques fortement contrastées. De plus, il est indispensable que ce modèle intègre les effets d'une ou plusieurs couches viscoélastiques.

Le modèle recherché doit donc intégrer les phénomènes de flexion globale, de flexion locale et de cisaillement, et s'appliquer sans hypothèse sur la géométrie de la plaque (tout en restant dans le cadre des plaques). De plus, il sera nécessaire de démontrer la forme des champs de déplacement, de déformation et de contrainte (et non les supposer comme pour les modèles phénoménologiques).

Par une approche asymptotique, nous allons pouvoir distinguer les descripteurs cinématiques permettant d'évaluer le comportement d'ensemble de la plaque et exprimer leur origine physique. Par conséquent, cela permettra d'obtenir une formulation explicite du comportement du stratifié, à savoir exprimer les efforts et les moments en fonction des descripteurs cinématiques (équations constitutives), les équations d'équilibre régissant le comportement hors-plan et dans le plan et les différentes lois de comportement du stratifié.

L'étude d'une plaque stratifiée fortement contrastée composée de  $N$  couches d'épaisseur quelconque est complexe. Afin de comprendre les mécanismes qui régissent le comportement d'une telle plaque, un objectif théorique est d'obtenir cette formulation explicite dans le cas d'une plaque trilaminée symétrique composée de deux couches externes élastiques et d'une couche centrale viscoélastique (soit une structure identique au verre feuilleté). Cela va permettre d'extraire les différents descripteurs cinématiques, de comprendre leur origine physique, et de déterminer leur influence sur les efforts de flexion, de cisaillement et leur couplage. Ainsi, il sera plus simple d'étendre le raisonnement aux plaques trilaminées asymétriques, puis aux plaques à trois couches raides élastiques et deux couches souples symétrique, et enfin généraliser ce raisonnement aux plaques à  $N$  couches symétriques.

Afin de vérifier la cohérence du modèle généralisé obtenu, il est nécessaire de vérifier qu'il "dégénère" vers les modèles de plaques classiques illustrées dans les sections précédentes. Ainsi, l'un des objectifs théorique sera de retrouver les formulations des modèles de Love-Kirchhoff, de Reissner-Mindlin, de plaque sandwich ou encore de plaque de cisaillement en faisant varier les contrastes mécaniques et géométriques de la plaque.

Enfin, le dernier objectif théorique de cette thèse est d'appliquer ce modèle généralisé au dimensionnement de plaques à applications réelles, notamment de plancher de télécabine en verre feuilleté. Il s'agira de trouver le meilleur ratio poids/performance mécanique afin d'optimiser le coût et le fonctionnement de ce type de plancher.

## Objectifs expérimentaux

Afin de valider le modèle théorique obtenu, une campagne expérimentale a été mise en place sur des plaques de verre feuilleté. Tous les essais ont été menés dans des conditions précises, avec un objectif clairement défini lié soit à l'observation des effets viscoélastiques soit au suivi temporel des variations d'une cinématique mise en avant analytiquement. Aussi, une grande importance a été accordée à la surveillance des déformations, notamment pour faire le lien avec la méthode de dimensionnement proposée.

La première partie de cette campagne est composée d'**essais quasi-statiques** en régime permanent et transitoire, avec différentes sollicitations. Les essais de fluage et de relaxation en

flexion trois points (chargement hors-plan) ont pour objectif d'observer les variations temporelles des descripteurs cinématiques tels que la déflexion ou le déplacement différentiel entre les couches de verre et de mettre en avant la transition entre les modèles extrêmes "monolithique" et "bi-couche" présentés plus haut. Ces essais sont menés à différentes températures, paramètre influant fortement sur les effets viscoélastiques et par conséquent sur le comportement d'ensemble du stratifié. Autre paramètre influant, les effets de la fréquence de sollicitation sur le comportement statique de la plaque de verre feuilleté sont étudiés grâce à différents essais cycliques (toujours en flexion trois points).

Toujours dans le domaine statique, on s'intéresse aux plaques à trois couches de verre, et notamment à la cinématique additionnelle qu'elles proposent par rapport aux plaques à deux couches de verre. La sollicitation appliquée sur ces plaques est un chargement en cisaillement "pur" (chargement dans le plan). L'objectif principal de cet essai est de vérifier que l'évolution temporelle de cette cinématique correspond aux prédictions faites par le modèle asymptotique.

Le modèle analytique obtenu est également applicable en régime harmonique. Par conséquent, la seconde partie de la campagne expérimentale se compose de différents **essais dynamiques**, effectués sur une plaque de verre feuilleté constituée de deux couches de verre, identique à celle utilisée lors des essais statiques de flexion trois points. Cette dernière est encastrée sur une table vibrante à une extrémité et libre à l'autre. Le premier objectif de ces essais est d'identifier les caractéristiques dynamiques de la plaque, soit les fréquences propres et les déformées propres, à différentes températures. Pour cela, on réalise un balayage en fréquence et on observe la réponse de la plaque grâce à différents accéléromètres judicieusement placés.

Le second objectif est de vérifier la résistance de la plaque lorsqu'elle est sollicitée à son mode fondamentale (fréquence fixe), en observant les déformations où elles sont maximales, les maximums de déformation étant déterminés analytiquement. Aussi, toutes ces données expérimentales sont comparées aux prédictions analytiques apportées par le modèle.

Enfin, le dernier objectif de cette campagne expérimentale dynamique est de vérifier si une sollicitation longue et continue au mode fondamental implique une variation du comportement d'ensemble de la plaque, notamment par échauffement local dans la couche viscoélastique de PVB.

---

Modèle de plaque stratifiée à fort contraste

---

**Résumé :**

Cette partie est consacrée à l'étude théorique d'un modèle généralisé de plaque stratifiée fortement contrastée (HCS). Tout d'abord, la méthode des développements asymptotiques pour l'étude des stratifiés est présentée. Ensuite, elle est appliquée aux plaques symétriques avec deux couches raides connectées par une couche souple. Enfin, le cas des plaques HCS asymétriques est traité.

**Sommaire**

---

<b>2.1</b>	<b>Modèle de plaque généralisé établi par méthode asymptotique . . .</b>	<b>35</b>
<b>2.2</b>	<b>Plaques HCS symétriques à deux couches raides . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>2.3</b>	<b>Formulation synthétique . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>2.4</b>	<b>Analyse du comportement des plaques HCS . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>2.5</b>	<b>Cas des plaque HCS asymétriques . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>2.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>69</b>

---

**2.1 Modèle de plaque généralisé établi par méthode asymptotique**

Tout au long de ce mémoire, une plaque HCS désigne une plaque stratifiée fortement contrastée.

**2.1.1 Description d'une plaque stratifiée**

Considérons une plaque mince stratifiée  $\Omega$  (Figure 2.1), de dimension caractéristique  $L$  dans son plan et d'épaisseur  $h_\Omega$ . Elle est constituée de  $N$  couches raides (indice  $s$ )  $\Omega_{s_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , d'épaisseur  $h_i$ , parfaitement connectées à  $N - 1$  couches souples (indice  $c$ )  $\Omega_{c_j}$ ,  $j = 1, \dots, N - 1$ , d'épaisseur  $c_i$ . Les épaisseurs de chacune des couches sont du même ordre de grandeur et on a  $h_\Omega = \sum_{i=1}^N h_i + \sum_{i=1}^{N-1} c_i$ . On note  $\Omega_s = \cup_{i=1}^N \Omega_{s_i}$  et  $\Omega_c = \cup_{i=1}^{N-1} \Omega_{c_i}$ , respectivement les domaines

des couches raides et souples. De plus,  $\Gamma = \cup_{i=1}^{N-1} \Gamma_{i\pm}$  représente les interfaces entre les couches, tandis que  $\Gamma_\Omega$  représente la surface externe de  $\Omega$ .

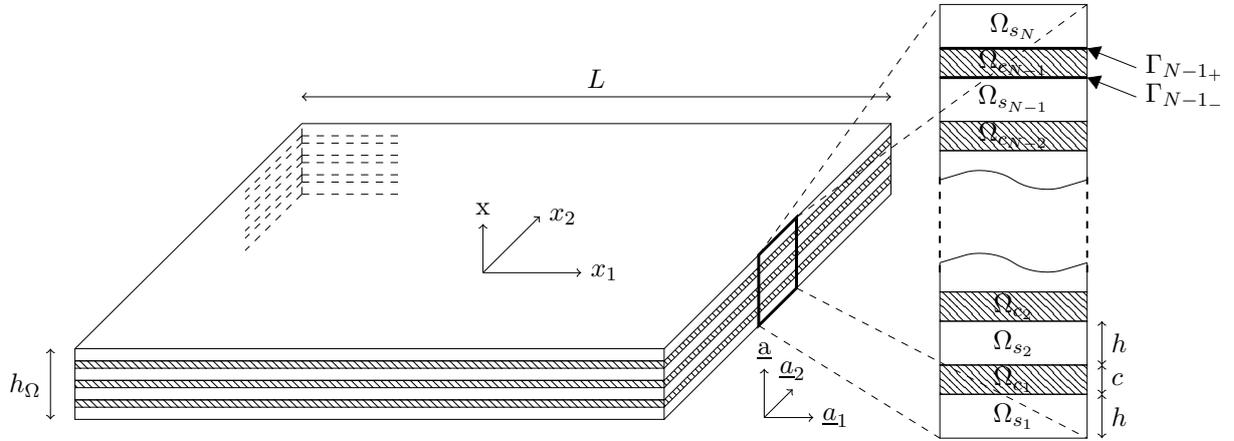


FIGURE 2.1 – Structure d'une plaque HCS  $\Omega$  composée de  $N$  couches raides  $\Omega_{s_i}$  parfaitement connectées à  $N-1$  couches souples  $\Omega_{c_i}$ .

On désigne par  $\underline{x}$  et  $\underline{a}$  la coordonnée et le vecteur unitaire hors-plan, et par  $x_\alpha$  et  $\underline{a}_\alpha$  (par convention les indices grecs prennent les valeurs 1 et 2) les coordonnées et vecteurs unitaires orthogonaux dans le plan (voir Figure 2.1). Le vecteur déplacement  $\underline{u}$  se décompose en un mouvement hors-plan (ou déflexion) suivant  $\underline{a}$  noté  $w$  et un mouvement dans le plan  $\underline{a}_\alpha$  noté  $\underline{u}_\alpha = u_\alpha \underline{a}_\alpha$ , soit :

$$\underline{u}(\underline{x}, \underline{x}) = w(\underline{x}, \underline{x}) \underline{a} + u_\alpha(\underline{x}, \underline{x}) \underline{a}_\alpha \quad ; \quad \underline{x} = x_\alpha \underline{a}_\alpha$$

Chaque couche (raide ou souple) est considérée comme un matériau élastique linéaire isotrope. Pour chacune, le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  est relié au tenseur des petites déformations  $\underline{\underline{e}}(\underline{u})$  par la loi de comportement de Hooke ( $\underline{\underline{I}}$  représente le tenseur identité) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{e}}(\underline{u}) \underline{\underline{I}} + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{e}}) \underline{\underline{I}} \quad \text{ou inversement} \quad \underline{\underline{e}}(\underline{u}) = \frac{1}{E} ((1 + \nu) \underline{\underline{\sigma}} - \nu \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})) \quad (2.1)$$

où les coefficient de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  prennent les valeurs  $\lambda_a$ ,  $\mu_a$ ,  $E_a$  et  $\nu_a$  dans  $\Omega_a$ ,  $a = s, c$ . On utilisera également le module de plaque apparent  $E' = E/(1 - \nu^2)$ . De la même manière, nous utiliserons systématiquement la convention suivante : chaque quantité  $q$  exprimée sans indice est définie dans la plaque entière  $\Omega$  et prend les valeurs  $q_a$  dans  $\Omega_a$ ,  $a = s, c$ . Par exemple, le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  dans  $\Omega$  est défini par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}_s & \text{dans } \Omega_s \\ \underline{\underline{\sigma}}_c & \text{dans } \Omega_c \end{cases}$$

Notons que lorsque des constituants sont viscoélastiques, on travaille dans le domaine de Fourier. Ainsi, la formulation est identique mais les coefficients de Lamé deviennent complexes, dépendants de la fréquence.

### 2.1.2 Formulation redimensionnée

La géométrie d'une plaque élancée est caractérisée par  $L \gg h_\Omega$ , ce qui permet d'introduire le petit paramètre de séparation d'échelle :

$$\varepsilon = \frac{h_\Omega}{L} \ll 1$$

Sachant que les tailles caractéristiques des variations dans le plan et hors-plan d'une quantité  $q$  évoluant au sein de la plaque sont respectivement  $L$  et  $h_\Omega$ , les variables adimensionnelles appropriées sont  $\frac{x_\alpha}{L}$  et  $\frac{x}{h_\Omega}$ . Par commodité, nous utiliserons les variables physiques d'espace  $x_\alpha$  et les variables dilatées  $y = \frac{L}{h_\Omega}x = \varepsilon^{-1}x$ . Par conséquent, le gradient usuel  $\underline{\nabla} = \partial_{x_j} \underline{e}_j$  (qui s'applique à  $q(x, x_\alpha)$ ) devient :

$$\underline{\nabla}q = (\varepsilon^{-1} \partial_y \underline{a} + \partial_{x_\alpha} \underline{a}_\alpha)q(y, x_\alpha)$$

Les efforts tangentiels exercés sur la plaque sont supposés nuls (ou négligeables), ce qui se traduit par :

$$(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{a}}) \cdot \underline{a}_\alpha = \mu(w, x_\alpha + u_{\alpha, x}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\Omega \quad (2.2)$$

Par analyse dimensionnelle, les tailles caractéristiques des variations du déplacement dans le plan et hors-plan imposent que  $w, x_\alpha = O(w/L)$  et  $u_{\alpha, x} = O(u_\alpha/h_\Omega)$ . Par conséquent, (2.2) impose :  $O(w/L) = O(u_\alpha/h_\Omega)$ , soit  $O(u_\alpha) = \varepsilon O(w)$ . On en déduit que les déplacements dans le plan sont inférieurs d'un ordre au déplacement hors-plan. On réexprime donc les déplacements de la manière suivante  $u_\alpha = \varepsilon u_\alpha$  :

$$\underline{\underline{u}} = w \underline{\underline{a}} + \varepsilon u_\alpha \underline{a}_\alpha \quad \text{avec} \quad O(w) = O(u_\alpha) \quad (2.3)$$

De plus, les rôles différents joués par les directions dans le plan et hors-plan conduisent à décomposer les tenseurs des contraintes et des déformations en des tenseurs réduits :

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}_P + (\underline{\underline{A}}_T \otimes \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{A}}_T)/2 + A_N \underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{a}} \quad ; \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{e}}$$

où

- $\underline{\underline{A}}_P$  est le *tenseur* d'ordre 2 des contraintes ou des déformations *dans le plan* de la plaque,
- $\underline{\underline{A}}_T$  est le *vecteur* tangentiel des contraintes ou des déformations exercé *hors du plan* de la plaque,
- $A_N$  est la contrainte ou déformation *scalaire* normale à la plaque.

En utilisant les variables  $(y, x_\alpha)$  et le déplacement redimensionné (2.3), les tenseurs réduits des contraintes et des déformations s'écrivent (avec  $\underline{\underline{I}}_P = \underline{a}_1 \otimes \underline{a}_1 + \underline{a}_2 \otimes \underline{a}_2$  le tenseur unité dans le plan et  $\underline{\underline{E}}_{\alpha\beta} = \underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}_\beta + \underline{a}_\beta \otimes \underline{a}_\alpha$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{e}}_P = \varepsilon ((u_{\alpha, x_\beta} + u_{\beta, x_\alpha})/2) \underline{\underline{E}}_{\alpha\beta} \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}_P = 2\mu \underline{\underline{e}}_P + \lambda(\text{tr}(\underline{\underline{e}}_P) + e_N) \underline{\underline{I}}_P \\ \underline{\underline{e}}_T = ((u_{\alpha, y} + w, x_\alpha)/2) \underline{a}_\alpha \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}_T = 2\mu \underline{\underline{e}}_T \\ e_N = \varepsilon^{-1} w, y \quad ; \quad \sigma_N = 2\mu e_N + \lambda(\text{tr}(\underline{\underline{e}}_P) + e_N) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Dans un premier temps, nous considérerons que la section de la plaque ne subit aucune force surfacique et volumique et se comporte en régime quasi-statique (l'analyse sera étendue aux plaques chargées plus loin dans ce chapitre). L'ensemble des équations d'équilibre local est constitué de l'équation d'équilibre des moments,

$$\underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) = \underline{0} \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

de la continuité du vecteur contrainte et des déplacements aux interfaces ( $[q]$  exprime un saut de la quantité  $q$  à travers une surface)

$$[\underline{\sigma} \cdot \underline{a}] = \underline{0}; [\underline{u}] = \underline{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma = \cup_{i=1}^{N-1} \Gamma_{i\pm},$$

et de la condition de contrainte nulle sur les surfaces externes

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{a} = \underline{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\Omega}.$$

Cet ensemble d'équations, réécrit avec les variables  $(y, x_{\alpha})$  et les tenseurs réduits, se divise en :

- un système d'équations scalaires exprimant l'équilibre hors-plan (i.e. suivant  $\underline{a}$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon^{-1} \sigma_{N,y} + \text{div}_x(\underline{\sigma}_T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ [\sigma_N] = 0 \quad ; \quad [w] = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \\ \sigma_N = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{\Omega} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

- un système d'équations vectorielles exprimant l'équilibre dans le plan (i.e. dans le plan  $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon^{-1} \underline{\sigma}_{T,y} + \underline{\text{div}}_x(\underline{\sigma}_P) = \underline{0} & \text{dans} \quad \Omega \\ [\underline{\sigma}_T] = \underline{0} \quad ; \quad [u_{\alpha} \underline{a}_{\alpha}] = \underline{0} & \text{sur} \quad \Gamma \\ \underline{\sigma}_T = \underline{0} & \text{sur} \quad \Gamma_{\Omega} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

### 2.1.3 Contraste de raideur

Comme mentionné dans la Section 1.3.2, le contraste entre les propriétés élastiques des constituants joue un rôle crucial dans le fonctionnement des plaques stratifiées fortement contrastées, où la flexion des  $N$  couches raides interagit avec le cisaillement des  $N-1$  couches souples. Un tel couplage flexion/cisaillement émerge lorsque les efforts transversaux dans les constituants raides et souples contribuent au même ordre de grandeur à l'équilibre transversal de la section de la plaque.

Considérons un déplacement normal  $w$ , variant le long des directions planes (par exemple le long de  $\underline{a}_1$ ). Comme la plaque est constituée d'alternance de couches raides et de couches très souples, les couches raides sont régies en première approximation par de la flexion. Par conséquent, l'équilibre des moments permet d'exprimer l'ordre de grandeur de l'effort tranchant dans les couches raides :

$$T_s = O(M, x_1) = O\left(\frac{M}{L}\right)$$

où le moment de flexion s'écrit :

$$M = O(E_s \mathcal{I} w, x_1 x_1) = O\left(\frac{E_s h_\Omega^3 w}{L^3}\right)$$

La déflexion des couches raide engendre une distorsion des couches souples de l'ordre de  $w/L$ . Cette distorsion se traduit par un effort de cisaillement dans les couches souples d'épaisseur totale  $\sum_i^{N-1} c_i$  de l'ordre (par unité de largeur) de :

$$T_c = O\left(\frac{\sum_i^{N-1} c_i \mu_c w}{L}\right)$$

Ainsi, la nécessité d'avoir  $T_c = O(T_s)$  pour observer un couplage de flexion/cisaillement donne :

$$\frac{\mu_c}{E_s} = O\left(\frac{h_\Omega^2}{L^2}\right) \frac{h_\Omega}{\sum_i^{N-1} c_i} = O(\varepsilon^2) \quad \text{en considérant que} \quad h_\Omega = O(h_i) = O(c_i) \quad \forall i$$

Par conséquent, pour obtenir une plaque avec un couplage flexion/cisaillement complet, on est amené à considérer un fort contraste de raideur  $\varepsilon^2$ , déjà examiné (i) pour les plaques dans [3] et (ii) pour les milieux souples renforcés par des inclusion rigides [4]. Ceci mène à réexprimer le tenseur des contraintes dans les couches souples sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}_c = \varepsilon^2 \underline{\underline{\sigma}}_s$$

#### 2.1.4 Développements des champs locaux

Pour déterminer le comportement asymptotique des plaques minces stratifiées, atteint à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on cherche les champs sous la forme d'une série en puissance de  $\varepsilon$ . D'après les expressions des tenseurs réduits (2.4), les équations d'équilibre et les conditions limites (2.5-2.6) contiennent soit des termes en puissances impaires de  $\varepsilon$  (c'est le cas de l'équilibre axial et des conditions limites dans le plan) soit des termes en puissances paires de  $\varepsilon$  (pour l'équilibre dans le plan et les conditions limites axiales). Par conséquent, les termes consécutifs des développements des tenseurs réduits des contraintes sont décalés d'une puissance  $\varepsilon^2$ . En considérant la loi de comportement élastique (4.1) et le contraste mécanique  $\varepsilon^2$ , c'est également le cas pour les tenseurs réduits des déformations. Ainsi, tout en respectant (2.3), il suffit de développer  $w$  et  $u_\alpha$  en puissances paires de  $\varepsilon$ , i.e. :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{u}} &= w \underline{\underline{a}} + \varepsilon u_\alpha \underline{\underline{a}}_\alpha = \sum_{k=0} \varepsilon^{2k} \left( w^{2k} \underline{\underline{a}} + \varepsilon u_\alpha^{2k+1} \underline{\underline{a}}_\alpha \right) \\ w &= w^0 + \varepsilon^2 w^2 + \dots; \quad u_\alpha = u_\alpha^1 + \varepsilon^2 u_\alpha^3 + \dots \end{aligned}$$

En conséquence, les tenseurs réduits des déformations (2.4) normal ( $N$ ), hors-plan ( $T$ ) et dans le plan ( $P$ ) sont développés dans les couches souples et raides sous la forme :

$$\underline{\underline{e}}_{Na} = \varepsilon^{-1} \underline{\underline{e}}_{Na}^{-1} + \varepsilon \underline{\underline{e}}_{Na}^1 + \dots \quad ; \quad \underline{\underline{e}}_{Ta} = \underline{\underline{e}}_{Ta}^0 + \varepsilon^2 \underline{\underline{e}}_{Ta}^2 + \dots \quad ; \quad \underline{\underline{e}}_{Pa} = \varepsilon \underline{\underline{e}}_{Pa}^1 + \dots \quad ; \quad a = s, c \quad (2.7)$$

Ainsi, le tenseur des déformations dans les couches souples et raides peut s'écrire de manière synthétique :

$$\underline{e}_a = \varepsilon^{-1} \left( \begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & e_{Na}^{-1} \end{array} \right) + \varepsilon^0 \left( \begin{array}{c|c} \underline{0} & e_{Ta}^0 \\ \hline e_{Ta}^0 & \underline{0} \end{array} \right) + \varepsilon^1 \left( \begin{array}{c|c} e_{Pa}^1 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & e_{Na}^1 \end{array} \right) + \dots \quad ; \quad a = s, c \quad (2.8)$$

En tenant compte du contraste de raideur  $\varepsilon^2$ , les tenseurs réduits des contraintes (2.4) sont développés comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{Ns} &= \varepsilon^{-1} \sigma_{Ns}^{-1} + \varepsilon \sigma_{Ns}^1 + \dots \quad ; \quad \underline{\sigma}_{Ts} = \underline{\sigma}_{Ts}^0 + \varepsilon^2 \underline{\sigma}_{Ts}^2 \dots \quad ; \quad \underline{\sigma}_{Ps} = \varepsilon \underline{\sigma}_{Ps}^1 + \dots \\ \sigma_{Nc} &= \varepsilon \sigma_{Nc}^1 + \dots \quad ; \quad \underline{\sigma}_{Tc} = \varepsilon^2 \underline{\sigma}_{Tc}^2 + \dots \quad ; \quad \underline{\sigma}_{Pc} = O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (2.9)$$

soit en représentation tensorielle dans le domaine des couches rigides :

$$\underline{\underline{\sigma}}_s = \varepsilon^{-1} \left( \begin{array}{c|c} \underline{\underline{\sigma}}_{Ps}^{-1} & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \sigma_{Ns}^{-1} \end{array} \right) + \varepsilon^0 \left( \begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{\sigma}_{Ts}^0 \\ \hline \underline{\sigma}_{Ts}^0 & \underline{0} \end{array} \right) + \varepsilon^1 \left( \begin{array}{c|c} \underline{\underline{\sigma}}_{Ps}^1 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \sigma_{Ns}^1 \end{array} \right) + \dots \quad \text{dans } \Omega_s \quad (2.10)$$

puis dans le domaine des couches souples :

$$\underline{\underline{\sigma}}_c = \varepsilon^1 \left( \begin{array}{c|c} \underline{\underline{\sigma}}_{Pc}^1 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \sigma_{Nc}^1 \end{array} \right) + \varepsilon^2 \left( \begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{\sigma}_{Tc}^2 \\ \hline \underline{\sigma}_{Tc}^2 & \underline{0} \end{array} \right) + \varepsilon^3 \left( \begin{array}{c|c} \underline{\underline{\sigma}}_{Pc}^3 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \sigma_{Nc}^3 \end{array} \right) + \dots \quad \text{dans } \Omega_c \quad (2.11)$$

La description asymptotique du comportement de la plaque est obtenue en introduisant les développements (2.9) dans les équations d'équilibre (2.5) et (2.6), et en résolvant les problèmes par ordre croissant des puissances de  $\varepsilon$ . Les développements pairs ou impairs des tenseurs réduits impliquent que les problèmes asymptotiques hors-plan et dans le plan (2.5-2.6) émergent respectivement aux puissances paires et impaires de  $\varepsilon$ . Ainsi, la résolution se fait en traitant alternativement un problème lié à l'équilibre hors-plan, puis un problème lié à l'équilibre dans le plan, etc... La résolution pour un stratifié à deux couches raides symétriques est développée ci-après, puis elle sera généralisée au cas des plaques asymétriques. On s'intéressera au cas des plaques HCS à trois couches raides et plus dans le Chapitre 4.

## 2.2 Plaques HCS symétriques à deux couches raides

On présente ici l'étude des plaques stratifiées  $\Omega$  à très fort contraste (voir Figure 3.1), de contour  $\Gamma_\Omega$ , constituées de deux couches raides identiques  $\Omega_{s_1}$  et  $\Omega_{s_2}$  (différenciées par les indices  $s_1$  et  $s_2$ ), de même module  $E_s$  et d'épaisseur  $h$ . Elles sont parfaitement connectées à une couche souple  $\Omega_c$  d'épaisseur  $c$  (soit  $h_\Omega = 2h + c$ ). On note  $\bar{h} = h + c$  la distance entre les plans moyens des couches raides.

Les deux premières étapes de résolution fournissent les cinématiques des plaques raides. Les deux suivantes donnent les états de contraintes et de déformations dans les couches raides et souples. Puis on établit les lois de comportement et les équations d'équilibre de la plaque à l'ordre dominant.

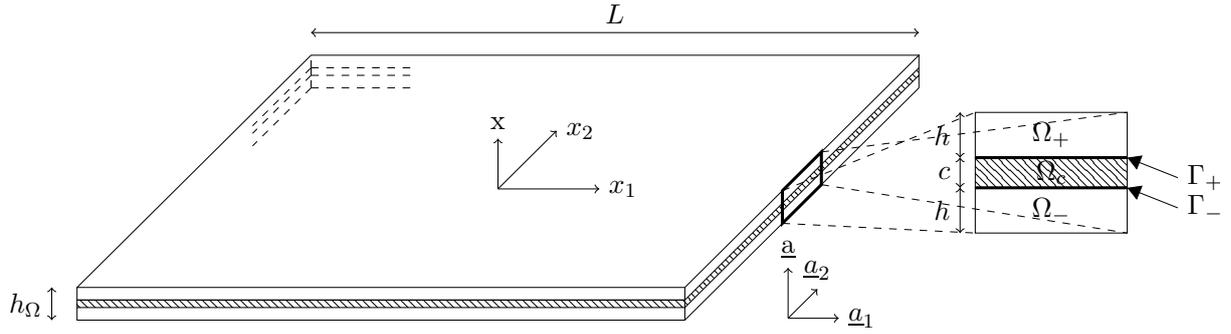


FIGURE 2.2 – Plaque HCS composée de deux couches externes raides parfaitement connectées à une couche centrale souple  $\Omega_c$ .  $\Omega_s = \Omega_{s1} \cup \Omega_{s2}$  et  $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$  représentent respectivement le domaine des couches raides et les interfaces avec la couche souple.

### 2.2.1 Cinématique des couches raides

Le premier problème, extrait de (2.5) à l'ordre  $\varepsilon^{-2}$ , traite de la déflexion et de l'équilibre hors-plan des couches raides (avec des conditions limites libres puisqu'à cet ordre la couche souple n'est pas active). Il s'écrit dans  $\Omega_s$  :

$$\begin{cases} \sigma_{N_s, y}^{-1} = 0 & ; \quad \sigma_{N_s}^{-1} = (\lambda_s + 2\mu_s)e_{N_s}^{-1} = (\lambda_s + 2\mu_s)w_{,y}^0 & \text{dans } \Omega_s \\ \sigma_{N_s}^{-1} = 0 & \text{sur } \Gamma_\Omega \cup \Gamma \end{cases} \quad (2.12)$$

On en déduit que  $\sigma_{N_s}^{-1}$  est constante dans les couches raides. Etant nulle aux bords et aux interfaces, on a  $\sigma_{N_s}^{-1} = 0$ . D'après l'expression (2.12)-a de la contrainte normale, on a donc  $w_{,y}^0 = 0$  dans  $\Omega_s$ , soit un déplacement normal des couches  $\Omega_{s1}$  et  $\Omega_{s2}$  uniforme, mais pouvant *a priori* être différent pour chaque couche, soit :

$$w^0 = w_1^0(\underline{x}) \quad \text{dans } \Omega_{s1} \quad ; \quad w^0 = w_2^0(\underline{x}) \quad \text{dans } \Omega_{s2}$$

De plus, d'après l'expression (2.12)-a, on a  $e_{N_s}^{-1} = 0$  et donc, d'après la loi de comportement (2.4)-a,  $\underline{\sigma}_{P_s}^{-1} = \underline{0}$ . Le problème suivant provient de (2.6) à l'ordre  $\varepsilon^{-1}$  et concerne le déplacement et l'équilibre dans le plan des couches raides. Il s'écrit dans  $\Omega_s$  :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}_{T_s, y}^0 = \underline{0} & ; \quad \underline{\sigma}_{T_s}^0 = \mu_s(\underline{u}_{,y}^1 + \nabla_x w^0) & \text{dans } \Omega_s \\ \underline{\sigma}_{T_s}^0 = \underline{0} & \text{sur } \Gamma_\Omega \cup \Gamma \end{cases} \quad (2.13)$$

De la même manière qu'à l'ordre précédent, on montre pour chaque couche raide que  $\underline{\sigma}_{T_s}^0 = \underline{0}$  dans  $\Omega_s$  et de ce fait que  $\underline{u}_{,y}^1 + \nabla_x w^0 = \underline{0}$ . Par intégration on en déduit que le déplacement dans le plan  $\underline{u}^1$  suit pour chaque couche la cinématique classique de Kirchhoff :

$$\begin{cases} \underline{u}^1(y, \underline{x}) = -y \nabla_x w_1^0(\underline{x}) + \underline{U}_1^1(\underline{x}) & \text{dans } \Omega_{s1} \\ \underline{u}^1(y, \underline{x}) = -y \nabla_x w_2^0(\underline{x}) + \underline{U}_2^1(\underline{x}) & \text{dans } \Omega_{s2} \end{cases} \quad (2.14)$$

On note que chaque couche raide subit son propre déplacement qui se décompose en son déplacement homogène dans le plan et *a priori* sa propre rotation de section due au gradient de sa déflexion.

### 2.2.2 Etat de contrainte/déformation dans les couches raides

L'équilibre hors-plan, extrait de (2.5) à l'ordre  $\varepsilon^0$ , s'écrit dans le domaine complet  $\Omega$  et en utilisant les résultats précédents :

$$\begin{cases} \sigma_{N,y}^1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ [\sigma_N^1] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_N^1 = 0 & \text{sur } \Gamma_\Omega \end{cases} \quad (2.15)$$

Par simple intégration et en tenant compte des conditions aux limites, on déduit que  $\sigma_N^1 = 0$  dans toute la plaque  $\Omega$  et donc en particulier que  $\sigma_{Nc}^1 = 0$  dans  $\Omega_c$ . Avec ce résultat, le problème hors-plan dans la couche centrale devient :

$$\begin{cases} \sigma_{Nc}^1 = (\lambda_c + 2\mu_c)w_{c,y}^0 = 0 & \text{dans } \Omega_c \\ w_c^0 = w_1^0 & \text{sur } \Gamma_- \\ w_c^0 = w_2^0 & \text{sur } \Gamma_+ \end{cases} \quad (2.16)$$

d'où on déduit que la couche souple subit elle aussi un déplacement normal uniforme  $w_c^0(\underline{x})$ . Les conditions limites imposent la continuité du champs hors-plan aux interfaces. Par conséquent, l'épaisseur entière de la plaque  $\Omega$  subit la même déflexion uniforme  $W^0(\underline{x})$ , soit

$$w_1^0 = w_2^0 = w_c^0 = W^0(\underline{x}) \quad (2.17)$$

Intéressons-nous maintenant à la cinématique des couches raides  $\Omega_s$ . Physiquement, il est plus parlant de réexprimer les champs dans le plan (2.14) en fonction des trois descripteurs cinématiques suivant, dépendants uniquement de  $\underline{x}$  :

- le gradient de déflexion de la plaque entière  $\underline{\nabla}_x W^0(\underline{x})$
- le déplacement *différentiel* dans le plan entre les couches raides  $\underline{D}^1(\underline{x}) = \frac{U_2^1 - U_1^1}{2}$
- le déplacement homogène *moyen* dans le plan des couches raides  $\underline{U}^1(\underline{x}) = \frac{U_1^1 + U_2^1}{2}$

soit

$$\underline{u}^1(y, \underline{x}) = -y \underline{\nabla}_x W^0(\underline{x}) \pm \underline{D}^1(\underline{x}) + \underline{U}^1(\underline{x}) \quad \text{dans } \Omega_s \quad (2.18)$$

où, ici et pour la suite,  $\pm$  vaut  $-$  dans  $\Omega_{s_1}$  et  $+$  dans  $\Omega_{s_2}$  (et inversement pour  $\mp$ ). Alternative-ment au déplacement différentiel dans le plan  $\underline{D}^1(\underline{x})$  (i.e. le demi glissement à l'*interface* entre les couches raides), on peut considérer le déplacement différentiel dans le plan  $\underline{d}^1(\underline{x})$  entre les *plans moyens* des couches raides. Le déplacement dans le plan s'exprime alors :

$$\underline{u}^1(y, \underline{x}) = -(y \mp \frac{\bar{h}}{2}) \underline{\nabla}_x W^0(\underline{x}) \pm \underline{d}^1(\underline{x}) + \underline{U}^1(\underline{x}) \quad \text{dans } \Omega_s \quad (2.19)$$

où  $\underline{d}^1(\underline{x})$  est défini par :

$$\underline{d}^1(\underline{x}) = \underline{D}^1(\underline{x}) - \left(\frac{\bar{h}}{2}\right) \underline{\nabla}_x W^0(\underline{x})$$

Par construction,  $\pm \underline{d}^1(\underline{x})$  est le déplacement longitudinal subit par le plan moyen des couches raides  $\Omega_{s_1}$  et  $\Omega_{s_2}$ . Notons que  $\underline{D}^1 = \underline{0}$  correspond à une cinématique monolithique, tandis que

$\underline{d}^1 = \underline{0}$  correspond à une cinématique bicouche. De plus,  $\underline{d}^1$  permet de définir le vecteur rotation  $\underline{\alpha}^0$  (Figure 2.3), exprimant l'extension différentielle des plans moyens des deux couches raides (dû à la division par l'épaisseur, la rotation est d'un ordre supérieur au déplacement).

$$\underline{\alpha}^0 = -\frac{2}{h}\underline{d}^1 \quad (2.20)$$

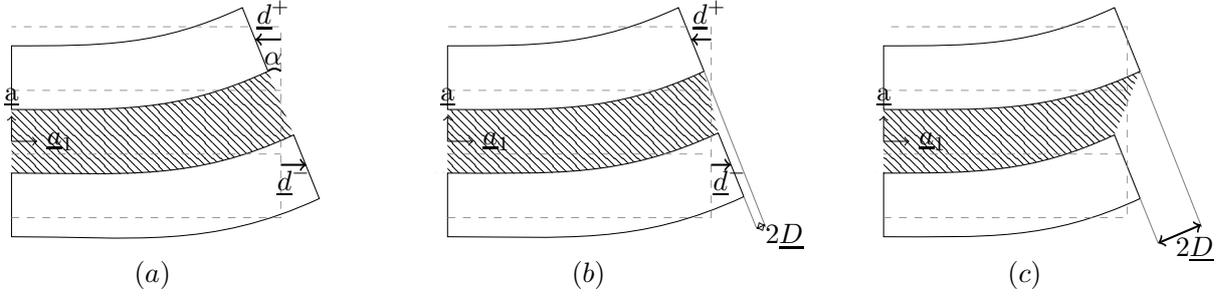


FIGURE 2.3 – Variables  $\underline{D}^1$  et  $\underline{d}^1$ . A gauche : cinématique monolithique avec  $\underline{D}^1 = \underline{0}$ . A droite : cinématique bicouche avec  $\underline{d}^1 = \underline{0}$ . Au centre : cinématique générale.

L'introduction de l'expression (2.18) de  $\underline{u}^1$  dans l'équation (2.4) fournit le tenseur réduit des déformations dans le plan  $\underline{e}_{P_s}^1$  dans le domaine des plaques raides :

$$\underline{e}_{P_s}^1 = -y\underline{e}_x(\nabla_x W^0) \pm \underline{e}_x(\underline{D}^1) + \underline{e}_x(\underline{U}^1) \quad \text{dans } \Omega_s \quad (2.21)$$

d'où l'on déduit

$$\text{tr}(\underline{e}_{P_s}^1) = -y\Delta_x W^0 \pm \text{div}_x(\underline{D}^1) + \text{div}_x(\underline{U}^1)$$

Ensuite, la loi de comportement élastique (4.1) fournit :

$$\sigma_N^1 = (\lambda_s + 2\mu_s)e_N^1 + \lambda_s \text{tr}(\underline{e}_{P_s}^1)$$

Or nous venons de montrer que  $\sigma_N^1 = 0$ , donc :

$$e_{N_s}^1 = -\frac{\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s} (-y\Delta_x(W^0) + \text{div}_x(\underline{U}^1) \pm \text{div}_x(\underline{D}^1)) \quad \text{dans } \Omega_s \quad (2.22)$$

Les équations (2.21-2.22) définissent entièrement l'état de déformation dans  $\Omega_s$  à l'ordre dominant (rappelons que  $\underline{e}_T$  est développé en puissances paires de  $\varepsilon$ , soit  $\underline{e}_T^1 = \underline{0}$ ).

Puis, la loi de comportement (2.1) donne le tenseur réduit des contraintes  $\underline{\sigma}_P^1$  dans  $\Omega$ , ce qui détermine entièrement l'état de contrainte à l'ordre dominant puisque  $\sigma_N^1 = 0$  et  $\underline{\sigma}_T^1 = \underline{0}$ . En tenant compte du contraste de rigidité  $\varepsilon^2$  dans la couche souple, on obtient (rappelons que  $E'_s = E_s/(1 - \nu_s^2)$ ) :

$$\underline{\sigma}_P^1 = \begin{cases} \underline{\sigma}_{P_s}^1 = E'_s \left( (1 - \nu_s)\underline{e}_{P_s}^1 + \nu_s \text{tr}(\underline{e}_{P_s}^1)\underline{I}_P \right) & \text{dans } \Omega_s \\ \underline{\sigma}_{P_c}^1 = \underline{0} & \text{dans } \Omega_c \end{cases} \quad (2.23)$$

En résumé, les tenseurs des contraintes (2.10) dans  $\Omega_s$  et (2.11) dans  $\Omega_c$  deviennent :

$$\underline{\underline{\sigma}}_s = \varepsilon^1 \left( \begin{array}{c|c} \underline{\underline{\sigma}}_{Ps}^1 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{0} \end{array} \right) + \varepsilon^2 \left( \begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{\underline{\sigma}}_{Ts}^2 \\ \hline \underline{\underline{\sigma}}_{Ts}^2 & \underline{0} \end{array} \right) + \dots \quad \text{dans } \Omega_s \quad (2.24)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_c = \varepsilon^2 \left( \begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{\underline{\sigma}}_{Tc}^2 \\ \hline \underline{\underline{\sigma}}_{Tc}^2 & \underline{0} \end{array} \right) + \varepsilon^3 \left( \begin{array}{c|c} \underline{\underline{\sigma}}_{Ps}^3 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{\underline{\sigma}}_{Nc}^3 \end{array} \right) + \dots \quad \text{dans } \Omega_c \quad (2.25)$$

où seul le tenseur réduit  $\underline{\underline{\sigma}}_{Ps}^1$  a été déterminé jusqu'à présent.

*Remarque* : Comme  $e_N^1 = w_{,y}^2$ , une intégration directe donne le correcteur de la déflexion dans chacune des couches raides (avec  $i = 1,2$ ) :

$$w_i^2 = -\frac{\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s} \left( -\frac{y^2}{2} \Delta_x W^0 + y(\operatorname{div}_x(\underline{U}^1) \pm \operatorname{div}_x(\underline{D}^1)) \right) + U_i^2(\underline{x}) \quad \text{dans } \Omega_{s_i} \quad (2.26)$$

### 2.2.3 Etat de contrainte/déformation dans la couche souple

Le problème local dans le plan, fourni par (2.6) à l'ordre  $\varepsilon$ , s'écrit dans le domaine  $\Omega_c$  :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}_{Tc,y}^2 = 0 & ; & \underline{\underline{\sigma}}_{Tc}^2 = \mu_c(\underline{u}_{c,y}^1 + \nabla_x W^0) & \text{dans } \Omega_c \\ & & [\underline{u}^1] = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.27)$$

Une intégration directe permet de déduire

$$\underline{\underline{\sigma}}_{Tc}^2 = \underline{\underline{\sigma}}_{Tc}^2(\underline{x}) \quad \text{et} \quad \underline{u}_c^1(y,(\underline{x})) = y \left( \frac{\underline{\underline{\sigma}}_{Tc}^2(\underline{x})}{\mu_c} - \nabla_x W^0(\underline{x}) \right) + \underline{U}_c^1(\underline{x})$$

Puis, les conditions de continuité du déplacement sur  $\Gamma$  s'écrivent

$$\underline{u}_c^1(\pm \frac{c}{2}, \underline{x}) = \underline{u}^1(\pm \frac{c}{2}, \underline{x})$$

et donnent d'après l'expression (2.18) les deux équations linéaires suivantes :

$$\pm \frac{c}{2\mu_c} \underline{\underline{\sigma}}_{Tc}^2 + \underline{U}_c^1(\underline{x}) = \underline{U}^1 \pm \underline{D}^1$$

La résolution fournit le déplacement dans le plan ainsi que l'état de déformation/contrainte dans la couche souple  $\Omega_c$

$$\begin{cases} \underline{u}_c^1(y, \underline{x}) & = & y(\frac{2}{c} \underline{D}^1(\underline{x}) - \nabla_x W^0(\underline{x})) + \underline{U}^1(\underline{x}) \\ \underline{e}_{Tc}^0(\underline{x}) & = & \frac{1}{c} \underline{D}^1(\underline{x}) \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}_{Tc}^2(\underline{x}) = \frac{2\mu_c}{c} \underline{D}^1(\underline{x}) \end{cases} \quad (2.28)$$

Ainsi, la couche souple est dans un état de déformation/contrainte de cisaillement pur induit par le déplacement différentiel dans le plan  $\underline{D}^1$  entre les deux couches raides. Notons que la contrainte tangentielle dans les couches raides  $\underline{\underline{\sigma}}_{Ts}^2$  reste indéterminée à cette étape.

**Réexpression du déplacement dans le plan :** Une fois déterminé dans la plaque entière  $\Omega$ , le champ  $\underline{u}^1(y, \underline{x})$  peut être réexprimé sous la forme suivante :

$$\underline{u}^1(y, \underline{x}) = -\phi_W(y)\nabla_x W^0(\underline{x}) + \phi_D(y)\underline{D}^1(\underline{x}) + \phi_U(y)\underline{U}^1(\underline{x}) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.29)$$

où  $\phi_W(y)$ ,  $\phi_D(y)$  et  $\phi_U(y)$  sont les fonctions de formes respectivement associées aux trois descripteurs cinématiques  $\nabla_x W^0(\underline{x})$ ,  $\underline{D}^1(\underline{x})$  et  $\underline{U}^1(\underline{x})$ . Compte tenu des résultats précédents, elles sont explicitement déterminées par :

$$\phi_W(y) = y \quad ; \quad \phi_D(y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y \in [\frac{c}{2}; h + \frac{c}{2}] \\ \frac{2y}{c} & \text{pour } y \in [-\frac{c}{2}; \frac{c}{2}] \\ -1 & \text{pour } y \in [-h - \frac{c}{2}; -\frac{c}{2}] \end{cases} \quad ; \quad \phi_U(y) = 1$$

Notons que dans (2.29), les termes  $-\phi_W(y)\nabla_x W^0(\underline{x})$  et  $\phi_U(y)\underline{U}^1(\underline{x})$  correspondent, respectivement, aux cinématiques classiques hors-plan et dans le plan des plaques homogènes de Kirchhoff, tandis que  $\phi_D(y)\underline{D}^1(\underline{x})$  est une cinématique additionnelle induite par la présence de la couche souple. La cinématique *zig-zag* en  $y$  du déplacement dans le plan  $\underline{u}^1$  combinant les contributions de chaque descripteur cinématique, linéaire par morceaux, est illustrée par la Figure 2.4.

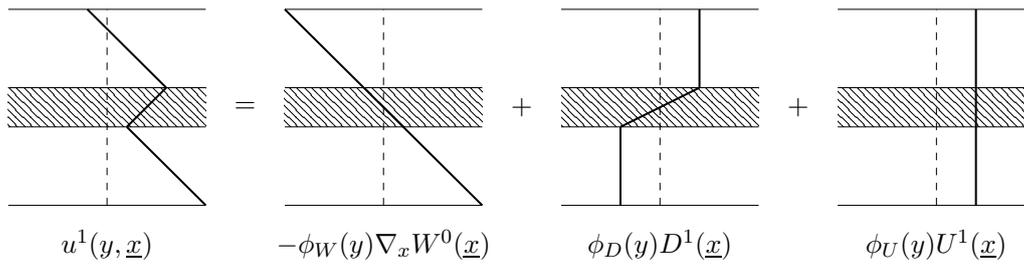


FIGURE 2.4 – Décomposition de la dépendance en  $y$  du champ dans le plan  $\underline{u}^1(y, \underline{x})$ .

L'introduction de l'expression (2.29) de  $\underline{u}^1$  dans l'équation (2.4) fournit le tenseur réduit des déformations dans le plan  $\underline{e}_P^1$  dans le domaine entier  $\Omega$ . Notons que les fonctions de forme  $\phi$  décrivant le déplacement dans le plan expriment également la dépendance en  $y$  des déformations

$$\underline{e}_P^1 = -\phi_W \underline{e}_x(\nabla_x W^0) + \phi_D \underline{e}_x(\underline{D}^1) + \phi_U \underline{e}_x(\underline{U}^1) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.30)$$

### 2.2.4 Équilibres globaux

En utilisant les résultats précédents, l'équilibre dans le plan (2.6) à l'ordre  $\varepsilon$  s'écrit  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}_{T,y}^2 + \underline{\text{div}}_x(\underline{\sigma}_P^1) = \underline{0} & \text{dans } \Omega \\ [\underline{\sigma}_T^2] = \underline{0} & \text{sur } \Gamma \\ \underline{\sigma}_T^2 = \underline{0} & \text{sur } \Gamma_\Omega \end{cases} \quad (2.31)$$

Ce système permet d'établir trois équilibres *globaux* liés aux descripteurs cinématiques, et trois seulement. En effet, les trois fonctions de formes associées aux trois descripteurs macroscopiques constituent la base fonctionnelle des déplacements internes, ainsi on ne peut obtenir que trois équilibres indépendants.

Par *global* on entend que les quantités physiques et les opérateurs différentiels dépendent uniquement de la variable plane  $\underline{x}$ . Pour les obtenir, multiplions (2.31-a) par les fonctions de forme  $\phi$  intégrons suivant l'épaisseur de la plaque :

$$\int_{-\frac{h_\Omega}{2}}^{\frac{h_\Omega}{2}} \phi(y) \underline{\sigma}_{T,y}^2 dy + \int_{-\frac{h_\Omega}{2}}^{\frac{h_\Omega}{2}} \phi(y) \underline{\text{div}}_x(\underline{\sigma}_P^1) dy = \underline{0}$$

Rappelant que  $\underline{\sigma}_P^1 = \underline{0}$  dans  $\Omega_c$ , et que la divergence porte sur la variable  $x$ , le second terme se simplifie et on obtient :

$$\langle \phi(y) \underline{\sigma}_{T,y}^2 \rangle + \underline{\text{div}}_x(\langle \phi(y) \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s) = \underline{0} \quad \text{avec} \quad \phi(y) = \phi_U(y); \phi_W(y); \phi_D(y)$$

où les notations  $\langle q \rangle$  et  $\langle q \rangle_s$  représentent respectivement l'intégrale sur toute l'épaisseur  $h_\Omega$  de la plaque, et sur l'épaisseur des couches raides uniquement :

$$\langle q \rangle = \int_{-\frac{h_\Omega}{2}}^{\frac{h_\Omega}{2}} q dy \quad ; \quad \langle q \rangle_s = \int_{-\frac{h_\Omega}{2}}^{-\frac{c}{2}} q dy + \int_{\frac{c}{2}}^{\frac{h_\Omega}{2}} q dy \quad (2.32)$$

Intégrons  $\langle \phi(y) \underline{\sigma}_{T,y}^2 \rangle$  par partie :

$$\langle \phi(y) \underline{\sigma}_{T,y}^2 \rangle = \left[ \phi(y) \underline{\sigma}_T^2 \right]_{-h_\Omega/2}^{h_\Omega/2} - \langle \phi_{,y} \underline{\sigma}_T^2 \rangle$$

D'après la condition limite (2.31)-b  $\underline{\sigma}_T^2$  est nulle sur  $\Gamma_\Omega$ , soit en  $y = \pm \frac{h_\Omega}{2}$ . Par conséquent, le premier terme du second membre est nul et on obtient finalement :

$$-\langle \phi(y)_{,y} \underline{\sigma}_T^2 \rangle + \underline{\text{div}}_x(\langle \phi(y) \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s) = \underline{0} \quad \text{avec} \quad \phi(y) = \phi_U(y); \phi_W(y); \phi_D(y) \quad (2.33)$$

Pour le terme  $\langle \phi(y) \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s$ , en tenant compte des expressions (2.30-2.23) de  $\underline{e}_P^1$  et  $\underline{\sigma}_P^1$ , l'intégration en  $y$  ne concerne que le produit des fonctions de forme. Les valeurs de  $\langle \phi_A \cdot \phi_B \rangle_s$  sont indiquées dans le Tableau (2.1), où  $I = h^3/12$  est l'inertie d'une seule couche raide et  $\mathcal{I} = \langle y^2 \rangle_s$  est l'inertie de l'ensemble des deux couches raides.

$\langle \phi_A \cdot \phi_B \rangle_s$	$\phi_U$	$\phi_W$	$\phi_D$	;	$\bar{h} = h + c$ $I = h^3/12$
$\phi_U$	$2h$	$0$	$0$		
$\phi_W$	$0$	$\mathcal{I} = 2I + \bar{h}^2 h/2$	$\bar{h}h$		
$\phi_D$	$0$	$\bar{h}h$	$2h$		

TABLE 2.1 – Produits intégrés des fonctions de forme associées aux trois descripteurs cinématiques

**Equilibre global dans le plan :** Considérons tout d'abord l'équation (2.33), avec  $\phi(y) = \phi_U(y) = 1$ . Puisque  $\phi_{U,y} = 0$ , elle se simplifie en :

$$\underline{\text{div}}_x(\langle \phi_U(y) \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s) = \underline{0}$$

A l'aide de la loi de comportement élastique, remplaçons  $\underline{\sigma}_P^1$  par son expression en fonction

du tenseur réduit des déformations planes  $\underline{e}_P^1$ , il vient :

$$\underline{\text{div}}_x \left( E'_s \left( (1 - \nu_s) \langle \phi_U(y) \underline{e}_P^1 \rangle_s + \nu_s \langle \phi_U(y) \text{tr}(\underline{e}_P^1) \rangle_s \underline{I}_P \right) \right) = \underline{0}$$

Le Tableau 2.1 indique que  $\langle \phi_U \phi_W \rangle_s = \langle \phi_U \phi_D \rangle_s = 0$ . Ainsi, d'après l'expression (2.30) du tenseur réduit  $\underline{e}_P^1$  et en remarquant que  $\text{tr}(\underline{e}_x(U^1)) = \text{div}_x(U^1)$  on obtient après simplification par  $\langle \phi_U \phi_U \rangle_s$  :

$$\underline{\text{div}}_x(\underline{\Sigma}_P^1) = \underline{0} \quad ; \quad \underline{\Sigma}_P^1 = E'_s \left( (1 - \nu_s) \underline{e}_x(U^1) + \nu_s \text{div}_x(U^1) \underline{I}_P \right) \quad (2.34)$$

L'équation (2.34) montre qu'à l'ordre dominant, l'équilibre dans le plan de la plaque stratifiée est régie par l'élasticité bidimensionnelle classique, avec pour seuls paramètres ceux des couches raides, la variable cinématique étant le déplacement moyen  $\underline{U}^1$  dans le plan de la plaque entière. En introduisant l'opérateur différentiel  $\underline{\Theta}_x$  défini pour chaque champ dans le plan  $\underline{u}$  par

$$\underline{\Theta}_x(\underline{u}) = \underline{\text{div}}_x \left( (1 - \nu_s) \underline{e}_x(\underline{u}) + \nu_s \text{div}_x(\underline{u}) \underline{I}_P \right) \quad (2.35)$$

on obtient de manière équivalente une équation différentielle bidimensionnelle d'ordre 2 :

$$E'_s \underline{\Theta}_x(U^1) = \underline{0} \quad \text{i.e.} \quad \frac{E'_s}{2} \left( (1 - \nu_s) \underline{\Delta}_x(U^1) + (1 + \nu_s) \underline{\text{grad}}_x \text{div}_x(U^1) \right) = \underline{0} \quad (2.36)$$

**Equilibre des moments globaux :** Considérons maintenant l'équation (2.72) avec  $\phi(y) = \phi_W(y) = y$ . Sachant que  $\phi_{W,y} = 1$  on a :

$$-\langle \underline{\sigma}_T^2 \rangle + \underline{\text{div}}_x(\langle \phi_W \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s) = \underline{0}$$

Comme pour l'équilibre précédent, le second terme du premier membre peut être réécrit en écrivant le tenseur réduit des contraintes  $\underline{\sigma}_P^1$  en fonction du tenseur réduit des déformations  $\underline{e}_P^1$  et de son expression (2.30). Grâce aux expressions données dans le Tableau (2.1) et à la relation  $\text{div}_x(\underline{\nabla}_x(W^0)) = \underline{\Delta}_x(W^0)$ , on obtient :

$$\underline{\text{div}}_x(\langle \phi_W \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s) = E'_s \left( -\underline{\mathcal{I}} \underline{\nabla}_x \underline{\Delta}_x W^0 + \bar{h} h \underline{\Theta}_x(D^1) \right) \quad (2.37)$$

Finalement, en exprimant  $\underline{D}^1 = \frac{\bar{h}}{2} (\underline{\nabla}_x W^0 - \underline{\alpha}^0)$  en fonction du vecteur rotation  $\underline{\alpha}^0$  et du gradient de la déflexion  $\underline{\nabla}_x W^0$  et en introduisant l'effort tranchant moyen  $\underline{\mathcal{T}}^2$  on obtient

$$E'_s \left( -2\underline{\mathcal{I}} \underline{\nabla}_x \underline{\Delta}_x W^0 - (\underline{\mathcal{I}} - 2\underline{\mathcal{I}}) \underline{\Theta}_x(\underline{\alpha}^0) \right) = \underline{\mathcal{T}}^2 \quad ; \quad \underline{\mathcal{T}}^2 = \langle \underline{\sigma}_T^2 \rangle \quad (2.38)$$

**Equilibre des moments locaux :** Enfin, en considérant (2.72) avec  $\phi(y) = \phi_D(y)$  et les expressions de  $\phi_D$  et de  $\underline{\sigma}_{Tc}^2$ , le terme  $\langle \phi_{D,y} \underline{\sigma}_T^2 \rangle$  devient :

$$\langle \phi_{D,y} \underline{\sigma}_T^2 \rangle = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{2}{c} \underline{\sigma}_{Tc}^2 dy = 2 \underline{\sigma}_{Tc}^2 = \mu_c \frac{4}{c} \underline{D}^1$$

De plus, en utilisant les résultats du Tableau 2.1, le terme  $\underline{\text{div}}_x(\langle \phi_D \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s)$  s'écrit :

$$\underline{\text{div}}_x(\langle \phi_D \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s) = E'_s \left( -\bar{h} h \underline{\nabla}_x \underline{\Delta}_x W^0 + 2h \underline{\Theta}_x(D^1) \right)$$

Par conséquent on obtient

$$-\mu_c \frac{4}{c} \underline{D}^1 + E'_s (-\bar{h}h \underline{\nabla}_x \Delta_x W^0 + 2h \Theta_x(\underline{D}^1)) = \underline{0}$$

Cette équation exprime l'équilibre des efforts tangentiels exercés par la couche souple subissant le déplacement différentiel  $\underline{D}^1$  avec (i) la flexion associée au gradient de la déflexion  $\underline{\nabla}_x \Delta_x W^0$  (ii) les efforts dans le plan dus aux variations spatiales de  $\underline{D}^1$ . En introduisant une fois encore  $\underline{\alpha}^0$ , on déduit la formulation équivalente :

$$-E'_s (\mathcal{I} - 2I) \Theta_x(\underline{\alpha}^0) + \mu_c \frac{\bar{h}^2}{c} (\underline{\alpha}^0 - \underline{\nabla}_x W^0) = \underline{0} \quad (2.39)$$

L'équilibre des moment locaux (2.39) couple le gradient de la déflexion  $\underline{\nabla}_x W^0$  et le vecteur rotation  $\underline{\alpha}^0$  (ou le glissement  $\underline{D}^1$ ) indépendamment du déplacement moyen  $\underline{U}^1$ . Notons que dans ce bilan les paramètres mécaniques de chacune des couches interviennent.

En résumé, les trois équations d'équilibres (2.34-2.38-2.39) sont associées aux trois descripteurs cinématiques. Néanmoins, une quatrième équation impliquant  $\underline{\mathcal{T}}^2$  est nécessaire pour résoudre le système complet. Elle est établie en considérant l'équilibre local hors-plan à l'ordre supérieur.

### 2.2.5 Equilibre des efforts tranchants

L'équilibre local hors-plan est donné par (2.5) à l'ordre  $\varepsilon^2$ . Il s'écrit dans le domaine entier  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \sigma_{N,y}^3 + \text{div}_x(\underline{\sigma}_T^2) = 0 & \text{dans } \Omega \\ [\sigma_N^3] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{Ns}^3 = 0 & \text{sur } \Gamma_\Omega \end{cases} \quad (2.40)$$

En intégrant (2.40)-a sur l'épaisseur de la plaque, on obtient que le premier terme du premier membre s'annule de part les conditions limites et la continuité de  $\sigma_N^3$ . Ainsi, l'équilibre des efforts tranchants est donné par

$$\text{div}_x(\langle \underline{\sigma}_T^2 \rangle) = \text{div}_x(\underline{\mathcal{T}}^2) = 0 \quad (2.41)$$

## 2.3 Formulation synthétique

### 2.3.1 Synthèse de l'approche asymptotique pour une plaque HCS non-chargée

Les équations (2.36)-(2.38)-(2.39)-(2.41), qui impliquent des opérateurs différentiels s'appliquant uniquement sur la variable d'espace dans le plan  $\underline{x}$ , donnent la description d'une plaque HCS non-chargée à l'ordre dominant. La cinématique de la plaque implique deux ensembles de descripteurs indépendants :

- Le déplacement moyen dans le plan  $\underline{U}^1(\underline{x})$ , gouverné par l'équilibre classique dans le plan (2.36)

- La déflexion  $W^0(\underline{x})$  et le vecteur rotation  $\underline{\alpha}^0(\underline{x})$ , couplés par l'équilibre du moment global (2.38), du moment local (2.39) et de l'effort tranchant hors-plan (2.41).

En pratique, il est plus commode d'exprimer cette description sans redimensionnement. Pour ce faire, on revient aux variables naturelles grâce au changement de variable inverse  $\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{y}$ , en considérant les quantités *physiquement observables*  $\varepsilon^i Q^i$  au lieu des quantités anormalisées  $Q^i$ , et en exprimant les paramètres grâce aux variables d'espaces non-redimensionnées (i.e. en pratique, avec la même unité de longueur dans l'épaisseur et dans le plan de la plaque). De plus, en se concentrant sur la description à l'ordre dominant, les exposants spécifiant les ordres peuvent être supprimés.

**Comportement dans le plan :** Avec ces notations naturelles, l'équation régissant le comportement dans le plan s'exprime grâce aux termes classiques de contraintes plane associés au déplacement moyen dans le plan  $\underline{U}(\underline{x})$  (rappelons que  $E'_s = E/(1 - \nu_s^2)$ ) :

$$\underline{\text{div}}_x(\underline{\Sigma}_P) = 0 \quad ; \quad \underline{\Sigma}_P = E'_s \left( (1 - \nu_s) \underline{\underline{e}}_x(\underline{U}) + \nu_s \underline{\text{div}}_x(\underline{U}) \underline{\underline{I}}_P \right) \quad (2.42)$$

**Comportement hors-plan :** La déflexion  $W(\underline{x})$  et le vecteur rotation  $\underline{\alpha}(\underline{x})$  décrivent le comportement hors-plan. On rappelle que, d'après (4.14),  $\underline{\alpha} = -\frac{2}{h} \underline{d}$  où  $\pm \underline{d}(\underline{x})$  sont les déplacements opposés dans le plan subis par les plans moyens de chaque couche raide.

Pour une meilleure compréhension de la physique des phénomènes de flexion et cisaillement, il est utile d'introduire les deux tenseurs bidimensionnels agissant sur la plaque HCS, soit :

- l'effort de cisaillement interne dans la couche souple, moyenné sur l'épaisseur de la plaque entière  $\underline{T}$ ,
- le tenseur du moment interne  $\underline{M}$  associé au vecteur rotation  $\underline{\nabla}_x W$ ,
- le tenseur du moment global  $\underline{\underline{M}}$  associé au vecteur rotation  $\underline{\alpha}$ ,
- l'effort tranchant global  $\underline{\mathcal{T}}$ .

Exprimées avec les variables naturelles (non redimensionnées), les lois de comportement de  $\underline{T}$ ,  $\underline{M}$  et  $\underline{\underline{M}}$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{T} = K (\underline{\nabla}_x W - \underline{\alpha}) & \text{avec} \quad K = \mu_c \bar{h}^2 / c \\ \underline{M} = 2E'_s I \left( (1 - \nu_s) \underline{\underline{e}}_x(\underline{\nabla}_x W) + \nu_s \Delta_x W \underline{\underline{I}}_P \right) \\ \underline{\underline{M}} = E'_s (\underline{\mathcal{T}} - 2I) \left( (1 - \nu_s) \underline{\underline{e}}_x(\underline{\alpha}) + \nu_s \underline{\text{div}}_x(\underline{\alpha}) \underline{\underline{I}}_P \right) \end{cases} \quad (2.43)$$

Soulignons que le moment  $\underline{M}$  associé au gradient de la déflexion  $\underline{\nabla}_x W$  est engendré par une cinématique classique d'évolution *linéaire* de la compression à l'extension dû à la rotation de section de *chaque* couche raide. En revanche, le moment  $\underline{\underline{M}}$  associé à  $\underline{\alpha}$  est engendré par la cinématique d'extension *uniforme* d'une couche et de compression uniforme opposée de l'autre couche. Cette cinématique est spécifique au cas des plaques stratifiées fortement contrastées. Exprimé avec ces tenseurs, l'ensemble (2.38)-(2.39)-(2.41) gouvernant le comportement hors-plan d'une plaque HCS non-chargée devient :

$$\begin{cases} \text{div}_x(\underline{\mathcal{T}}) = 0 \\ \underline{\mathcal{T}} = -\underline{\text{div}}_x(\underline{\underline{M}}) + \underline{T} \\ \underline{T} = -\underline{\text{div}}_x(\underline{M}) \end{cases} \quad (2.44)$$

L'équation (2.44)-b montre que l'effort tranchant global  $\underline{T}$  est la somme de (i) l'effort de cisaillement dans la couche souple  $\underline{T}$  et (ii) et l'effort de cisaillement  $-\underline{\text{div}}_x(\underline{M})$  induit par la flexion locale des couches raides (chacun des efforts de cisaillement étant moyenné sur l'épaisseur de la plaque entière). L'équation (2.44)-c signifie que  $\underline{T}$  est équilibré par les efforts normaux différentiels dans le plan de chaque couche raide, exprimés par  $-\underline{\text{div}}_x(\underline{M})$ .

*Remarque* : Les torseurs des efforts sont ici définis en accord avec les conventions de la Mécanique des Milieux Continus. Cela signifie que (i) les efforts sont positifs en extension, (ii) les moments et les rotations sont positifs quand ils vont de  $\underline{a}$  vers  $\underline{a}_\alpha$  ( $M_{\alpha\beta}$  est le moment subit par une surface orientée par  $\underline{a}_\beta$  induisant une rotation de  $\underline{a}$  vers  $\underline{a}_\alpha$ ) et (iii) le torseur défini en  $\underline{x}_0$  est l'action de la partie  $x_\alpha > x_{0\alpha}$  sur la partie  $x_\alpha < x_{0\alpha}$ .

### 2.3.2 Description des plaques HCS chargées

L'objectif de cette section est de compléter l'analyse précédente afin d'établir la description du comportement des plaques HCS en présence de forces de contact ou de volume, en régime quasi-statique ou dynamique harmonique. On note pour cette section uniquement  $\Gamma_{\Omega_{s_1}}$  et  $\Gamma_{\Omega_{s_2}}$  respectivement le contour de la plaque raide inférieure  $\Omega_{s_1}$  et supérieure  $\Omega_{s_2}$ , de normale respective  $\underline{n}_1$  et  $\underline{n}_2$ , de sorte que  $\Gamma_\Omega = \Gamma_{\Omega_{s_1}} \cup \Gamma_{\Omega_{s_2}}$ . Pour alléger les notations, l'indice  $i$  prend dans cette section les valeurs 1 ou 2.

#### Statique des plaques HCS

Intéressons-nous à définir les forces volumiques  $\underline{f}$  telles que  $\underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) = \underline{f}$  et les forces de contact  $\underline{p}_i$  telles que  $\underline{p}_i = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_i$  sur  $\Gamma_{\Omega_{s_i}}$ , qui peuvent être appliquées aux plaques HCS, tout en étant compatible avec la description précédente. Premièrement, pour que la séparation d'échelle entre la fluctuation axiale et l'épaisseur de section subsiste, les forces imposées doivent également la respecter. Par conséquent, elles ne doivent dépendre que des variables macroscopique planes  $x_\alpha$  ( $\alpha = 1,2$ ) et de la variable microscopique hors-plan  $y$ , elles s'écrivent donc  $\underline{f}(y, x_\alpha)$  et  $\underline{p}(y, x_\alpha)$ . Deuxièmement, elles ne doivent pas perturber la cinématique à l'ordre dominant, les lois de comportement (2.43) doivent donc rester identiques. En considérant, les contributions hors-plan et dans le plan de  $\underline{f}$  et  $\underline{p}$ , soit  $\underline{f} = \underline{f}_a + \underline{g}$  avec  $\underline{g} = g_\alpha \underline{a}_\alpha$  et  $\underline{p}_i = \underline{p}_i \underline{a} + \underline{q}_i$  avec  $\underline{q}_i = q_{i\alpha} \underline{a}_\alpha$ , cette condition est remplie lorsque les ordres des amplitudes sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{f} = \varepsilon^2 \underline{f}^2, \quad \underline{g} = \varepsilon \underline{g}^1 \quad \text{dans } \Omega_s \quad ; \quad \underline{g}_c = \varepsilon^3 \underline{g}^3 \quad \text{dans } \Omega_c \\ \underline{p}_i = \varepsilon^3 \underline{p}_i^3, \quad \underline{q}_i = \varepsilon^2 \underline{q}_i^2 \quad \text{sur } \Gamma_{\Omega_{s_i}} \end{array} \right. \quad (2.45)$$

En effet, dans ce cas, les problèmes locaux menant aux lois de comportement restent identiques. Seuls les équilibres globaux sont modifiés par la présence des forces  $\underline{f}$  et  $\underline{p}$ , qui, moyennées dans l'épaisseur et sur  $\Gamma_{\Omega_{s_i}}$ , agissent en tant que sources. En notant respectivement les forces de contact *moyenne* et *différentielle* par  $\underline{p} = \underline{p}_1 + \underline{p}_2$  et  $\tilde{\underline{p}} = \underline{p}_2 - \underline{p}_1$  (et similairement  $\underline{q} = \underline{q}_1 + \underline{q}_2$  et  $\tilde{\underline{q}} = \underline{q}_2 - \underline{q}_1$ ), la description d'une plaque HCS chargée est donnée par :

- l'équilibre dans le plan en présence d'un chargement

$$\frac{E'}{2} \left( (1 - \nu) \underline{\Delta}_x(\underline{U}^1) + (1 + \nu) \underline{\text{grad}}_x \underline{\text{div}}_x(\underline{U}^1) \right) = \frac{1}{2h} (\langle \phi_U \underline{g}^1 \rangle + \underline{q}^2)$$

- l'ensemble des équations d'équilibre hors-plan, obtenu en suivant la même procédure que

dans les Sections 2.2.4 et 2.2.5 :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{T}}^2) &= \langle \phi_U \underline{f}^2 \rangle + \underline{p}^3 \\ E'(-2I \underline{\nabla}_x \Delta_x W^0 - (\mathcal{I} - 2I) \underline{\Theta}_x(\underline{\alpha}^0)) - \underline{\mathcal{T}}^2 &= \langle \phi_W \underline{g}^1 \rangle + \frac{h\Omega}{2} \underline{\tilde{q}}^2 \\ -E'(\mathcal{I} - 2I) \underline{\Theta}_x(\underline{\alpha}^0) + K(\underline{\alpha}^0 - \underline{\nabla}_x W^0) &= \frac{h}{2} (\langle \phi_D \underline{g}^1 \rangle + 2\underline{\tilde{q}}^2) \end{cases} \quad (2.46)$$

En pratique, le chargement quasi-statique usuel d'une plaque est un chargement normal  $\underline{p}(x)$ , soit  $\underline{g} = \underline{0}$ , et une force volumique uniforme de gravité  $\underline{f}_0$ , soit  $\langle \phi_D \underline{g} \rangle = \underline{0}$  et  $\langle \phi_W \underline{g} \rangle = \underline{0}$ . Par conséquent, la description d'une plaque HCS sous chargement normal et poids propre, exprimée avec les variables naturelles, se réduit à :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{T}}) &= \underline{f}_0 + \underline{p}(x) \\ \underline{\mathcal{T}} &= -\operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{M}}) + \underline{\mathcal{T}} \\ \underline{\mathcal{T}} &= -\operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{M}}) \end{cases} \quad (2.47)$$

avec les mêmes lois de comportement (2.43) que dans le cas d'une plaque non-chargée.

*Remarque :* Des chargements  $\underline{f}$  et  $\underline{p}$  d'amplitudes plus faibles conduisent à la description d'une plaque non-chargée (à l'ordre dominant). À l'inverse, des amplitudes plus importantes sont incompatibles avec le modèle de plaque : la cinématique spécifique est remplacée par un état local tridimensionnel qui brise la séparation d'échelle axiale/transverse.

## Dynamique des plaques HCS

La dynamique des plaques non-chargée ( $\underline{p} = \underline{0}$ ) sur leur contour s'obtient de manière similaire. Considérons un régime harmonique à la fréquence  $f = \omega/2\pi$ . Par linéarité du problème, toutes les quantités prennent la forme  $Q \exp(i\omega t)$ . Par conséquent, on peut ignorer le terme temporel  $\exp(i\omega t)$  dans toutes les équations et garder les mêmes notations, chaque variable étant maintenant complexe.

La force volumique inertielle est complètement déterminée, à condition que la cinématique locale déterminée précédemment, soit (2.17) et (2.29), s'applique toujours. Dans ce cas, à l'ordre dominant, le champ de déplacement induit une force volumique inertielle  $-\rho\omega^2 \underline{u}$  s'écrivant

$$\underline{f} = \underline{f}_a + \underline{g} = -\rho\omega^2 (W^0 \underline{a} - \phi_W(y) \underline{\nabla}_x W^0(\underline{x}) + \phi_D(y) \underline{D}^1(\underline{x}) + \phi_U(y) \underline{U}^1(\underline{x})) \quad \text{in } \Omega \quad (2.48)$$

où  $\rho = \rho_s$  dans  $\Omega_s$  et  $\rho = \rho_c$  dans  $\Omega_c$  représente la masse volumique de la couche considérée. Comme dans le cas d'un chargement statique, la condition d'une cinématique non-modifiée (et par conséquent la conservation des lois de comportement de la plaque HCS) est donné par (2.45)-a. Puisque la cinématique de flexion impose une différence d'un ordre de grandeur entre les composantes axiale et transverse, la force inertielle hors-plan  $\underline{f}$  se doit d'être d'un ordre supérieur à la force inertielle plane  $\underline{g}$ . Les amplitudes des inerties compatibles avec la description de la plaque sont pour chacune des couches

$$\underline{f} = \varepsilon^2 \underline{f}^2 \quad \text{ce qui impose} \quad \underline{g} = \varepsilon^3 \underline{g}^3$$

Par conséquent, les inerties de rotation  $\langle \phi_W \underline{g} \rangle$  et  $\langle \Phi_D \underline{g} \rangle$  sont d'ordre  $\varepsilon^4$ , et sont donc négligeables dans l'équilibre local et l'équilibre global des moments (chacun d'ordre  $\varepsilon^2$ ). En d'autres termes, à l'ordre dominant seule la translation hors-plan influe sur le comportement en régime dynamique.

Ainsi, seule l'inertie moyenne  $\langle \phi_U f \rangle = -\omega^2 \rho_m W^0$  avec  $\rho_m = 2h\rho_s + c\rho_c$  apparaît dans l'équilibre des efforts tranchants. Les restrictions sur les amplitudes des termes inertiels expriment le fait que la fréquence doit être suffisamment faible afin que la taille caractéristique de la longueur d'onde du mode soit plus grande que l'épaisseur de la plaque. Une situation contraire mènerait à la perte de la séparation d'échelle hors-plan/dans le plan, et on ne serait plus dans le domaine des plaques. Finalement, la description dynamique s'écrit avec les variables naturelles :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{T}}) &= -\omega^2 \rho_m W \\ \underline{\mathcal{T}} &= -\underline{\operatorname{div}}_x(\underline{\mathcal{M}}) + \underline{\mathcal{T}} \\ \underline{\mathcal{T}} &= -\underline{\operatorname{div}}_x(\underline{\mathcal{M}}) \end{cases} \quad (2.49)$$

avec les mêmes lois de comportement (2.43) que dans le cas d'une plaque HCS non-chargée.

### 2.3.3 Bilan énergétique et conditions limites

Puisque la description de la plaque est une description équivalente 2D, le bilan énergétique est formulé sur le plan moyen de la plaque noté  $S$ , de contour  $\partial S$ . Pour formuler la cohérence énergétique du modèle sous chargement statique, multiplions (2.47)-a par  $W$  puis intégrons par partie sur la surface  $S$  et remplaçons  $\underline{\mathcal{T}}$  en utilisant (2.47)-b. On obtient :

$$\int_S (f_0 + p)W ds = \int_S \operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{T}})W ds = \int_{\partial S} \underline{\mathcal{T}} \cdot \underline{n} W dl - \int_S (\underline{\mathcal{T}} - \underline{\operatorname{div}}_x(\underline{\mathcal{M}})) \cdot \underline{\nabla}_x W ds$$

En prenant en compte (2.47)-c et en intégrant encore par partie, la dernière intégrale devient :

$$\begin{aligned} & \int_S \underline{\mathcal{T}} \cdot (\underline{\nabla}_x W - \underline{\alpha}) ds - \int_S \underline{\operatorname{div}}_x(\underline{\mathcal{M}}) \cdot \underline{\alpha} ds - \int_S \underline{\operatorname{div}}_x(\underline{\mathcal{M}}) \cdot \underline{\nabla}_x W ds \\ &= \int_S (\underline{\mathcal{T}} \cdot (\underline{\nabla}_x W - \underline{\alpha}) + \underline{\mathcal{M}} \cdot \underline{\nabla}_x \underline{\alpha} + \underline{\mathcal{M}} \cdot \underline{\nabla}_x \underline{\nabla}_x W) ds \\ & \quad + \int_{\partial S} (\underline{\mathcal{M}} \cdot \underline{n}) \underline{\alpha} dl + \int_{\partial S} (\underline{\mathcal{M}} \cdot \underline{n}) \underline{\nabla}_x W dl \end{aligned}$$

et, de la symétrie du tenseur des moments couplée à la loi de comportement, on obtient (avec la notation  $|\underline{e}_x|^2 = \underline{e}_x : \underline{e}_x$ ) :

$$\begin{aligned} \int_S (f_0 + p)W ds &= \int_S K |\underline{\nabla}_x W - \underline{\alpha}|^2 ds \\ & \quad + \int_S 2E'_s I \left( (1 - \nu) |\underline{e}_x(\underline{\nabla}_x W)|^2 + \nu |\Delta_x W|^2 \right) ds \\ & \quad + \int_S E'_s (\mathcal{I} - 2I) \left( (1 - \nu) |\underline{e}_x(\underline{\alpha})|^2 + \nu |\underline{\operatorname{div}}_x(\underline{\alpha})|^2 \right) ds \\ & \quad + \int_{\partial S} (\underline{\mathcal{M}} \cdot \underline{n}) \underline{\nabla}_x W dl + \int_{\partial S} (\underline{\mathcal{M}} \cdot \underline{n}) \underline{\alpha} dl + \int_{\partial S} \underline{\mathcal{T}} \cdot \underline{n} W dl \end{aligned} \quad (2.50)$$

Le bilan énergétique (2.50) montre l'égalité entre les énergies des forces volumiques et de contact (terme de gauche) et (i) l'énergie élastique associée aux mécanismes de cisaillement interne, de flexion locale et globale, et (ii) l'énergie fournie aux frontières. Cette dernière définit explicitement les conditions limites appropriées pour une plaque HCS, exprimées en terme de flexion locale,

de flexion globale et d'effort tranchant global, associés à la rotation locale, la rotation globale (par extension/compression différentielle) et la déflexion.

En régime dynamique harmonique, le terme de gauche dans (3.70) doit être remplacé par l'énergie cinétique  $\int_S \omega^2 \rho_m W^2 ds$ .

### 2.3.4 Equation tri-Laplacienne

En statique, l'ensemble (2.47) exprimé en remplaçant les moments  $M$  et  $\mathcal{M}$  et l'effort de cisaillement interne  $T$  par leurs expressions en fonction des variables cinématiques prend la forme :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{T}}) = \mathbf{p} + \mathbf{f}_0 \\ \underline{\mathcal{T}} = -E'_s(\mathcal{I} - 2I)\underline{\Theta}_x(\underline{\alpha}) - 2E'_s I \underline{\Theta}_x(\underline{\nabla}_x W) \\ -K(\underline{\alpha} - \underline{\nabla}_x W) = E'_s(\mathcal{I} - 2I)\underline{\Theta}_x(\underline{\alpha}) \end{cases} \quad (2.51)$$

Premièrement, appliquons l'opérateur  $-E'_s(\mathcal{I} - 2I)\underline{\Theta}_x + K$  (qui agit sur la variable  $\underline{\alpha}$  dans l'équilibre du moment interne (2.51-c)) à l'équilibre du moment global (2.51-b). Ceci donne :

$$(-E'_s(\mathcal{I} - 2I)\underline{\Theta}_x + K) \left\{ -E'_s(\mathcal{I} - 2I)\underline{\Theta}_x(\underline{\alpha}) - 2E'_s I \underline{\Theta}_x(\underline{\nabla}_x W) - \underline{\mathcal{T}} \right\} = \underline{0}$$

et, en utilisant l'équilibre du moment local (2.51-c) pour éliminer  $\underline{\alpha}$ , on obtient

$$-E'_s(\mathcal{I} - 2I)\underline{\Theta}_x \left\{ K \underline{\nabla}_x W \right\} + (-E'_s(\mathcal{I} - 2I)\underline{\Theta}_x + K) \left\{ -2E'_s I \underline{\Theta}_x(\underline{\nabla}_x W) + \underline{\mathcal{T}} \right\} = \underline{0}$$

Puis prenons la divergence pour éliminer  $\underline{\mathcal{T}}$  grâce à l'équilibre de l'effort tranchant global (2.51-a), soit

$$-E'_s(\mathcal{I} - 2I)K \operatorname{div}_x \underline{\Theta}_x \left\{ \underline{\nabla}_x W \right\} + (-E'_s(\mathcal{I} - 2I) \operatorname{div}_x \underline{\Theta}_x + K \operatorname{div}_x) \left\{ -2E'_s I \underline{\Theta}_x(\underline{\nabla}_x W) - \underline{\mathcal{T}} \right\} = \underline{0}$$

Enfin, en notant que  $\operatorname{div}_x \underline{\Theta}_x = \Delta_x \operatorname{div}_x$ , on obtient l'équation différentielle d'ordre 6 suivante ( $\Delta_x^{(2)}$  signifie  $\Delta_x \Delta_x$  et  $\Delta_x^{(3)}$  signifie  $\Delta_x \Delta_x \Delta_x$ ) :

$$2E'_s I (E'_s(\mathcal{I} - 2I)) \Delta_x^{(3)} W - E'_s \mathcal{I} K \Delta_x^{(2)} W + E'_s(\mathcal{I} - 2I) \Delta_x p - K(\mathbf{p} + \mathbf{f}_0) = 0 \quad (2.52)$$

En régime dynamique harmonique de pulsation  $\omega$ , le même procédé (où  $p$  est remplacé par  $-\omega^2 \rho_m W$  et  $\mathbf{f}_0$  est pris nul) mène à l'équation suivante :

$$2E'_s I (E'_s(\mathcal{I} - 2I)) \Delta_x^{(3)} W - E'_s \mathcal{I} K \Delta_x^{(2)} W - E'_s(\mathcal{I} - 2I) \omega^2 \rho_m \Delta_x W + K \omega^2 \rho_m W = 0 \quad (2.53)$$

Contrairement aux plaques de Love-Kirchhoff ou de Reissner-Mindlin dont la déflexion est régie par une équation du 4<sup>e</sup> ordre, la déflexion des plaques stratifiées à fort contraste suit une équation tri-Laplacienne non commune (du 6<sup>e</sup> ordre). Notons que les coefficients des termes de cette équation sont déterminés par les paramètres géométriques et mécaniques de la plaque stratifié puisque ce modèle généralisé couple les effets de flexion globale, de flexion locale et de cisaillement. Il est donc simple d'identifier quels peuvent être les termes dominants et les

termes négligeables pour une plaque stratifiée donnée et ainsi vérifier si le modèle tri-Laplacien est nécessaire à la bonne description du comportement hors-plan ou si l'un des modèles Bi-Laplaciens classiques suffit.

## 2.4 Analyse du comportement des plaques HCS

Analysons maintenant le comportement d'une plaque HCS sous flexion cylindrique, dans la direction  $x$ . Dans ce cas, les tenseurs des moments et les efforts vectoriels deviennent scalaires, et le modèle se simplifie sous la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{,x} = \mathcal{F} & ; & T = K(W_{,x} - \alpha) \\ \mathcal{T} = -M_{,x} + T & ; & M = 2E'_s I W_{,xx} \\ T = -\mathcal{M}_{,x} & ; & \mathcal{M} = E'_s (\mathcal{I} - 2I) \alpha_{,x} \end{cases} \quad (2.54)$$

### 2.4.1 Représentation schématique

La Figure 2.5 donne une représentation schématique du comportement (2.54) en utilisant des éléments de flexion et cisaillement en série et en parallèle. Un élément de cisaillement de paramètre  $K$  relie un effort transversal  $T$  à la distorsion  $u_{,x}$  par  $T = K u_{,x}$ . Un élément de flexion de paramètre  $EI$  relie un moment  $M$  à la variation de la rotation par  $M = EI \alpha_{,x}$ , l'effort transversal et la distorsion correspondants étant respectivement  $M_{,x}$  et  $\alpha$ . Pour les éléments en série, les efforts sont identiques et les distorsions de chaque élément s'additionnent, et inversement pour les éléments en parallèle<sup>1</sup>.

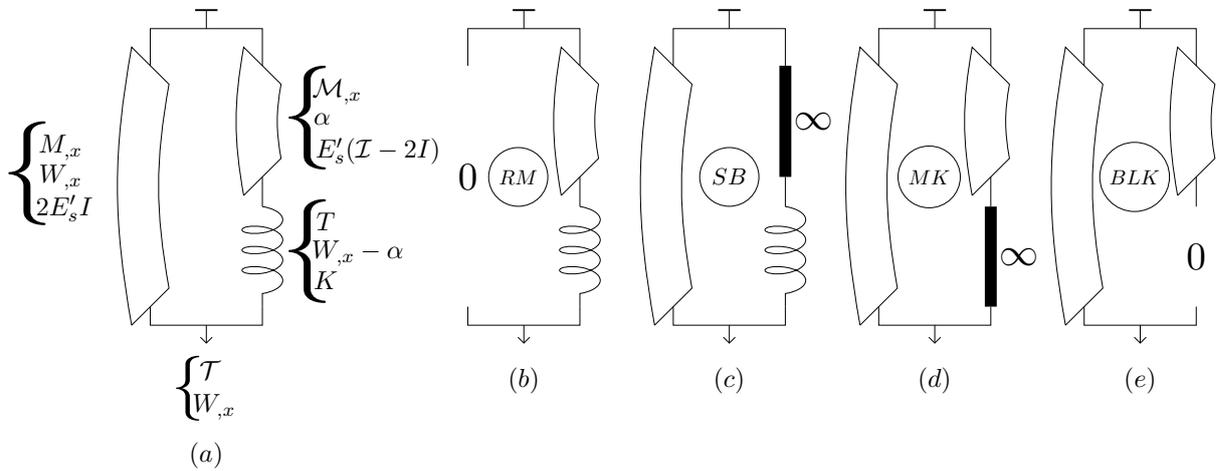


FIGURE 2.5 – Représentation schématique du comportement hors-plan d'une plaque HCS, impliquant les mécanismes de flexion locale, globale, et de cisaillement : (a) modèle généralisé, (b) modèle de Reissner-Mindlin (RM), (c) modèle de flexion/cisaillement (SB), (d) plaque monolithique de Kirchhoff (MK), (e) plaque bicouche de Kirchhoff (BLK).

Avec ces conventions, le comportement (2.54) est décrit par un élément de flexion de paramètre  $2E'I$  et de variable  $W_{,x}$ , en parallèle avec un élément de flexion en série avec un élément

1. Une analogie peut être faite avec les ressorts et dashpot classiques utilisés en rhéologie. La correspondance entre dashpot et élément de flexion est obtenu en remplaçant la dérivée *simple en temps* par la dérivée *double en espace* et la viscosité par la rigidité de flexion.

de cisaillement, de paramètres respectifs  $E'(\mathcal{I} - 2I)$ ,  $K$  et de variables respectives  $\alpha$ ,  $W_{,x} - \alpha$  (par construction).

Sous cette forme, il apparaît que la formulation englobe les modèles classiques de plaque :

- Modèle de Reissner-Mindlin (RM) lorsque  $I \rightarrow 0$ , (Figure 2.5-b) : dans ce cas  $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{0}}$  et l'ensemble d'équation se réduit à la description RM :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x(\underline{\underline{T}}) = \mathcal{F} & ; & \underline{\underline{T}} = K(\nabla_x W - \underline{\underline{\alpha}}) \\ \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}} = -\operatorname{div}_x(\underline{\underline{M}}) & ; & \underline{\underline{M}} = E'_s \mathcal{I} \left( (1 - \nu_s) \underline{\underline{e}}_x(\underline{\underline{\alpha}}) + \nu_s \operatorname{div}_x(\underline{\underline{\alpha}}) \underline{\underline{I}}_P \right) \end{cases}$$

- Modèle de plaque en Flexion/Cisaillement (SB) lorsque  $E'_s \mathcal{I} \rightarrow \infty$  (Figure 2.5-c) de sorte que nécessairement  $\alpha = 0$  et le modèle se réduit à la description SB

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x(\underline{\underline{T}}) = \mathcal{F} & ; & \underline{\underline{T}} = K(\nabla_x W - \underline{\underline{\alpha}}) \\ \underline{\underline{T}} = -\operatorname{div}_x(\underline{\underline{M}}) + \underline{\underline{T}} & ; & \underline{\underline{M}} = 2E'_s I \left( (1 - \nu_s) \underline{\underline{e}}_x(\nabla_x W) + \nu_s \Delta_x W \underline{\underline{I}}_P \right) \end{cases}$$

- Modèle Monolithique de Kirchhoff (MK) lorsque  $\mu_c \rightarrow \infty$  (Figure 2.5-d). Dans ce cas  $K \rightarrow \infty$  et en conséquence  $\alpha = W_{,x}$ . Ainsi, il reste

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x(\underline{\underline{T}}) = \mathcal{F} \\ \underline{\underline{T}} = -\operatorname{div}_x(\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}}) & ; & \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} = E'_s \mathcal{I} \left( (1 - \nu_s) \underline{\underline{e}}_x(\nabla_x W) + \nu_s \Delta_x W \underline{\underline{I}}_P \right) \end{cases}$$

qui est un modèle de Kirchhoff classique (de section d'inertie  $\mathcal{I}$ ) correspondant à la limite monolithique.

- Modèle Bicouche de Kirchhoff (BLK) lorsque  $\mu_c \rightarrow 0$  (Figure 2.5-e). En effet, cela implique que  $K \rightarrow 0$  et de ce fait  $T$  et donc  $\mathcal{M}_{,x}$  s'annulent. La description est donc celle d'une plaque de Kirchhoff de section d'inertie  $2I$

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x(\underline{\underline{T}}) = \mathcal{F} \\ \underline{\underline{T}} = -\operatorname{div}_x(\underline{\underline{M}}) & ; & \underline{\underline{M}} = 2E'_s I \left( (1 - \nu_s) \underline{\underline{e}}_x(\nabla_x W) + \nu_s \Delta_x W \underline{\underline{I}}_P \right) \end{cases}$$

La Figure 2.6 propose une vision globale de ces différents comportements dégénérés à partir du modèle global en fonction des paramètres mécaniques et géométriques.

Ainsi, la formulation (2.44) ou (2.54) fournit un cadre commun applicable pour toutes valeurs des paramètres constitutifs  $K$ ,  $E'_s \mathcal{I}$  et  $2E'_s I$ . Ce n'est évidemment pas le cas ni pour une plaque de type flexion/cisaillement ni pour une plaque de Reissner-Mindlin. En effet, si  $K \rightarrow \infty$  dans un modèle SB, obtient un modèle de plaque en cisaillement et non le modèle monolithique de Kirchhoff (MK) qui devrait être obtenu. De même, si  $K \rightarrow 0$  dans un modèle RM, on obtient un modèle de cisaillement pur S et non un modèle bicouche de Kirchhoff (BLK).

Par ailleurs, sans tenir compte des expressions précises des paramètres constitutifs, la formulation (2.54) semble être générale. En effet, tant que la distribution du cisaillement se fait dans la couche souple, on retrouve une description de type Reissner-Mindlin. On peut également noter que, dans le domaine très différent des poutres réticulées, (2.54) correspond au modèle de poutre généralisé établi par Hans et Boutin [19].

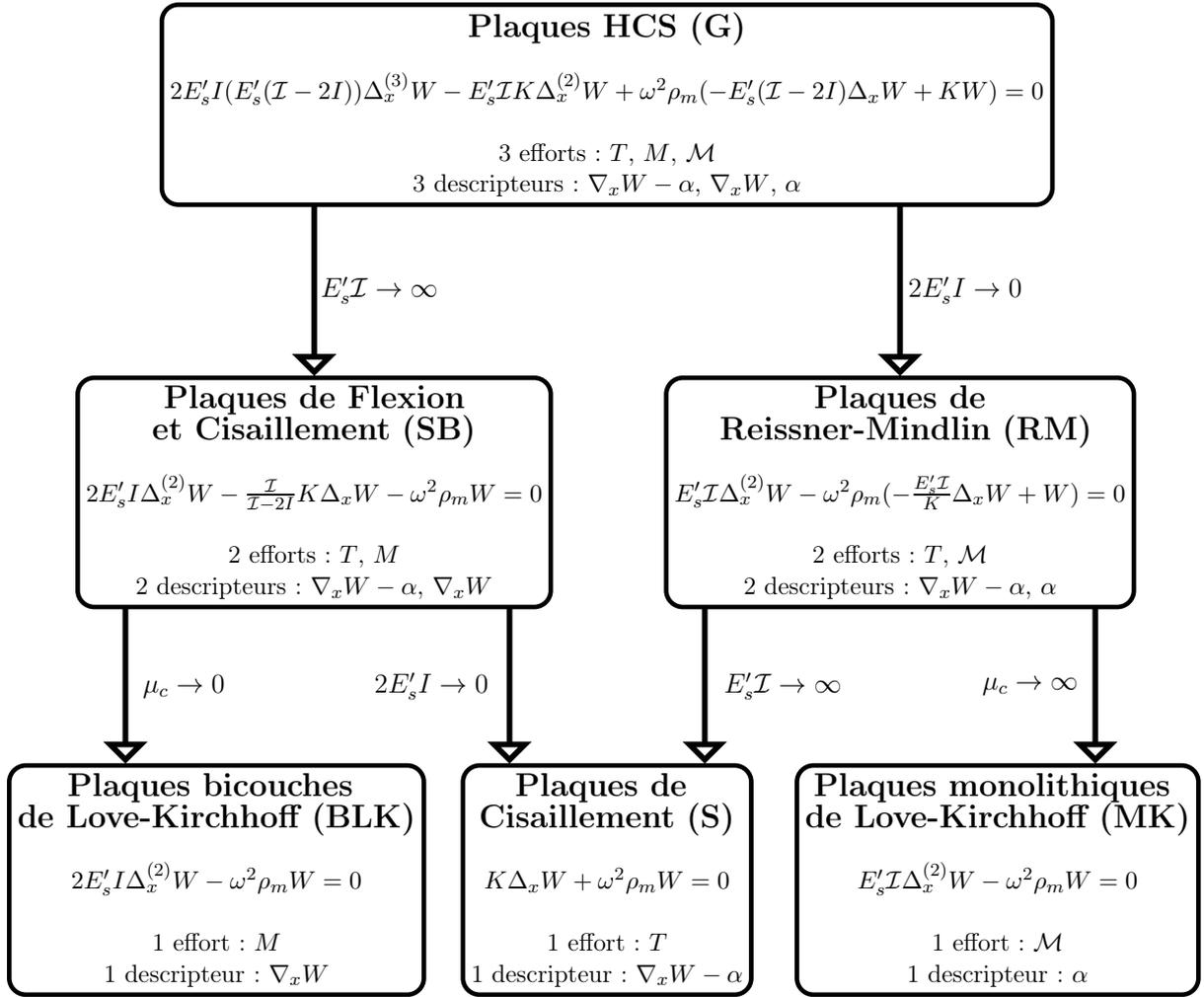


FIGURE 2.6 – Les différents modèles de plaques, dégénérés depuis le modèle générique de plaques HCS

### 2.4.2 Cartographie des comportements de plaque HCS élastique

Le comportement de la plaque variant entre deux situations limites, il est intéressant de fournir un critère permettant de justifier le modèle le plus pertinent pour le décrire. Pour cela, on effectue une analyse dimensionnelle, dans le même esprit que celle faite pour les structures en treillis dans [19].

Notons d'abord qu'une plaque HCS donnée d'épaisseur  $h_\Omega$  est caractérisée par les deux paramètres adimensionnels indépendants suivants, constants quelle que soit la longueur macroscopique caractéristique :

$$\Pi = \frac{E'_s (\mathcal{I} - 2I)}{K h_\Omega^2} \quad ; \quad \Upsilon = \frac{2I}{\mathcal{I} - 2I} = \frac{1}{3} \left( \frac{h}{h+c} \right)^2 < 1 \quad (2.55)$$

La taille caractéristique  $L$  est définie en statique soit par les dimensions de la plaque, soit par la taille caractéristique selon laquelle le chargement varie, et en dynamique par la longueur d'onde réduite (soit divisée par  $2\pi$ ) des modes. Exprimons la variable d'espace et la déflexion sous la forme  $x = x^* L$  et  $W = W_r W^*$  où l'indice  $r$  indique la valeur de référence, et l'exposant  $*$

indique les termes sans dimension,  $O(1)$  par construction. Avec ces changements de variables, les équations Tri-Laplaciennes (2.52) ou (2.53) exprimées en flexion cylindrique, deviennent (les nombres entre parenthèses indiquent l'ordre de dérivation) :

$$\begin{cases} C\Upsilon W^{*(6)} - (\Upsilon + 1)W^{*(4)} + C\Phi p^{*(2)} - \frac{\Phi}{C}(p^* + \frac{f_{0r}}{p_r}f_0^*) = O(\varepsilon) \\ C\Upsilon W^{*(6)} - (\Upsilon + 1)W^{*(4)} - C\Psi W^{*(2)} + \frac{\Psi}{C}W^* = O(\varepsilon) \end{cases} \quad (2.56)$$

Les coefficients structuraux sans dimension  $C$ ,  $\Upsilon$  comparent les effets de la flexion globale et du cisaillement (pour  $C$ ), et les effets de la flexion locale et globale (pour  $\Upsilon$ ). Les coefficients de charge sans dimension  $\Phi$  et  $\Psi$  comparent respectivement, en statique le chargement et le cisaillement et en dynamique, l'inertie de translation et le cisaillement. Ils s'écrivent :

$$C = \frac{E'_s(\mathcal{I} - 2I)}{KL^2} = \frac{E'_s}{\mu_c} \frac{hc}{2L^2} = \Pi\varepsilon^2 \quad ; \quad \Upsilon = \frac{2I}{\mathcal{I} - 2I} = \frac{1}{3} \left( \frac{h}{h+c} \right)^2 < 1 \quad (2.57)$$

$$\Phi = \frac{p_r}{W_r KL^2} \quad ; \quad \Psi = \frac{\rho_m \omega^2 L^2}{K} \quad (2.58)$$

La description complète est obtenue quand  $C = O(1)$ ,  $\Upsilon = O(1)$  et  $\Phi = O(1)$  ou  $\Psi = O(1)$ . Le terme de droite  $O(\varepsilon)$  dans (2.56) illustre le fait que les descriptions sont d'ordre zéro, autrement dit qu'elles ne sont valables qu'à  $\varepsilon = h_\Omega/L$  près. Par conséquent, en comparant les valeurs des termes sans dimension à des puissances de  $\varepsilon$ , (2.56)-a ou (2.56)-b peuvent dégénérer en des formes simplifiées.

Par exemple, dans les situations où  $C = O(\varepsilon)$  et  $\Upsilon = O(1)$ , les termes en  $C$  sont négligeables et on a nécessairement  $O(\Phi) < O(C)$ ,  $O(\Psi) < O(C)$ . Ainsi, le modèle de plaque HCS dégénère en un modèle monolithique de Kirchhoff (MK), soit en dynamique :

$$-(\Upsilon + 1)W^{*(4)} + \frac{\Psi}{C}W^* = O(\varepsilon)$$

Dans les situations où  $C = O(\varepsilon^{-1})$  et  $\Upsilon = O(1)$ , le modèle de plaque HCS dégénère en un modèle bicouche de Kirchhoff (BLK), soit en statique :

$$C \left( \Upsilon W^{*(4)} + \Phi p^* \right)^{(2)} = O(\varepsilon)$$

De la même manière, le modèle de plaque HCS devient un modèle de Reissner-Mindlin (RM) quand  $C = O(1)$  et  $\Upsilon = O(\varepsilon)$ , etc ...

Soulignons que  $\varepsilon$  dépend de  $L$ , il est donc lié à la géométrie de la plaque et/ou à la longueur caractéristique du chargement statique ou dynamique. Par conséquent, une plaque HCS donnée peut être décrite par un modèle classique en statique (ou à basse fréquence) et par un autre modèle classique à haute fréquence. L'intérêt de ce modèle généralisé est qu'il reste valide dans tout les cas (tant que l'on respecte la séparation d'échelle).

Les différents comportements de la plaque sont obtenus en comparant les ordres des coefficients des termes de l'équation adimensionnelle (2.56)-b, soit  $C\Upsilon$ ,  $C$ ,  $\Upsilon$ , aux ordres supérieur ( $\varepsilon$ ) et inférieur ( $\varepsilon^{-1}$ ). Pour identifier les différents cas, il est commode d'introduire les deux paramètres  $p$  et  $q$  définis par  $C = \varepsilon^p$  et  $\Upsilon = \varepsilon^q$ , ce qui permet une représentation dans le plan  $(p; q)$  des comportements possibles. On obtient six différents domaines dans le plan  $(p, q)$ , délimités

par deux droites verticales définies par  $C = \varepsilon$  et  $C = \varepsilon^{-1}$  et deux lignes parallèles à la deuxième diagonale correspondantes à  $C\Upsilon = \varepsilon$ , et  $C\Upsilon = \varepsilon^{-1}$  (l'horizontale correspondante à  $\Upsilon \leq \varepsilon$  n'est pas indiquée puisqu'il suffit de remplacer  $\mathcal{I} - 2I$  par  $\mathcal{I}$  dans les équations). La cartographie (Figure 2.7) donne le domaine de validité des différents modèles en fonction des deux paramètres  $p$  et  $q$ .

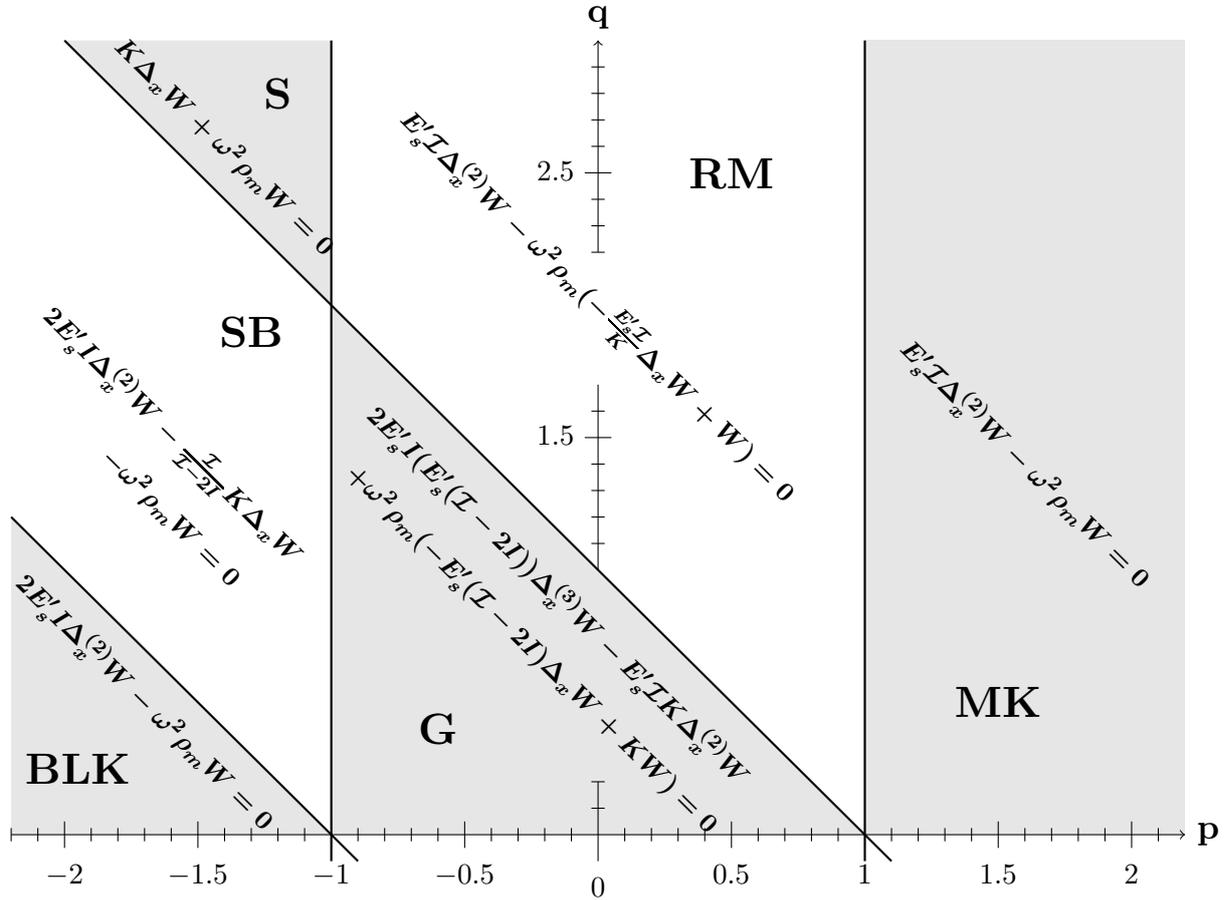


FIGURE 2.7 – Domaine de validité des comportements d'une plaque HCS à l'ordre dominant en fonction des valeurs de  $p$  et  $q$  définis par  $C = \varepsilon^p$  et  $\Upsilon = \varepsilon^q$ . Dans chaque domaine l'équation de la déflexion correspondante est indiquée. MK représente une plaque monolithique de Kirchhoff, BLK une plaque bicouche de Kirchhoff, RM une plaque de Reissner-Mindlin, SB une plaque de Flexion/Cisaillement, S une plaque de cisaillement et G une plaque généralisée.

Etant donné que  $\Pi$  et  $\Upsilon$  sont *fixés et connus* pour une plaque stratifiée élastique donnée, les paramètres  $p$  et  $q$  déterminant le comportement possible de cette plaque soumise a un chargement de longueur macroscopique  $L$  sont obtenus de la manière suivante :

$$(p - 2) \log(\varepsilon) = \log(\Pi) \quad ; \quad q \log(\varepsilon) = \log(\Upsilon)$$

puis, en éliminant  $\varepsilon$  on obtient

$$(p - 2) \log(\Upsilon) = q \log(\Pi) \tag{2.59}$$

Ainsi, dans le plan  $(p, q)$ , les comportements possibles à l'ordre dominant d'une plaque élas-

tique donnée suivent nécessairement une droite partant du point P ( $p = 2, q = 0$ ). La position sur la droite s'éloigne de P quand  $L$  décroît (pour une longueur de plaque plus courte, on a de "plus petites" variations du chargement, ou des modes supérieurs). Cela correspond à l'effet de taille lié à un moindre élancement, très classique en théorie des plaques. Rappelons que la validité des différents modèles impose le respect de la séparation d'échelle.

*Remarque* : Dans le cas d'une plaque viscoélastique, le module de cisaillement  $\mu_c$  (et par conséquent le paramètre  $K$ ) varie,  $\Pi$  n'est donc pas constant. Ainsi, les comportements possibles ne sont pas restreints à une ligne droite dans le plan  $(p, q)$ .

### 2.4.3 Application au verre feuilleté

Considérons une plaque de verre feuilleté composée de deux couches raides de verre, identiques, d'épaisseur  $h = 19\text{mm}$ , de module d'Young  $E_s = 70\text{GPa}$  et de coefficient de Poisson  $\nu_s = 0.25$  soit  $E'_s = \frac{E_s}{1-\nu_s^2} = 74.6\text{GPa}$ . Ces couches raides sont connectées par une couche de PVB d'épaisseur  $c = 1.52\text{mm}$ , dont les propriétés ont été développées dans la Section 1.1.5.

L'objectif de cette section est de déterminer les comportements possibles de cette plaque lorsqu'on fait varier un paramètre géométrique et/ou un paramètre mécanique. Le paramètre géométrique variable est la taille caractéristique  $L$  des variations d'une quantité dans le plan et le paramètre mécanique variable est le module de cisaillement  $\mu_c^*(\omega, \theta)$  du PVB. Dans cette section, on se place en régime harmonique et on estime le comportement à l'aide du module  $|\mu_c^*(\omega, \theta)| = |G(\omega, \theta)|$ . De plus, on considère un chargement cyclique suffisamment lent pour que les effets dynamiques soient faibles. En conséquence, la taille caractéristique de la déformée est de l'ordre de la longueur de la plaque, ainsi  $L$  représente la longueur de la plaque de verre feuilleté. En s'appuyant sur la méthode proposée dans la section précédente, on détermine les valeurs prises par  $p$  et  $q$  en fonction de  $L$  et  $|G(\omega, \theta)|$ .

Rappelons la définition du paramètre de changement d'échelle en fonction de l'épaisseur totale  $h_\Omega$  et de la longueur  $L$  de la plaque :

$$\varepsilon = \frac{h_\Omega}{L} \quad \text{avec} \quad h_\Omega = 2h + c = 39.52\text{mm}$$

De plus, les épaisseurs des couches étant connues et fixées, on peut déterminer les valeurs de  $q$  défini par :

$$q = \frac{\log(\Upsilon)}{\log(\varepsilon)} = \frac{\log\left(\frac{1}{3}\left(\frac{h}{h+c}\right)^2\right)}{\log(\varepsilon)} \simeq -\frac{\log(3)}{\log\left(\frac{h_\Omega}{L}\right)}$$

La Figure 2.8 représente les valeurs de  $q$  en fonction de  $L$  (respectant la séparation d'échelle, *i.e.*  $\varepsilon \ll 1$ ).

De même, déterminons les valeurs de  $p$  défini en fonction de  $\varepsilon$ ,  $L$  et  $|G(\omega)|$  par :

$$p = \frac{\log(C)}{\log(\varepsilon)} = \frac{\log\left(\frac{E'_s}{|G(\omega)|} \frac{hc}{2L^2}\right)}{\log(\varepsilon)}$$

Les valeurs de  $p$  en fonction de la longueur de la plaque  $L$  sont données par la Figure 2.9 pour différentes valeurs du module de cisaillement du PVB.

Les couples  $(p, q)$  obtenus pour chaque couple  $(L, |G(\omega)|)$  déterminent le comportement d'ensemble de la plaque stratifiée. La Figure 2.10 permet d'illustrer les différents cas et d'identifier

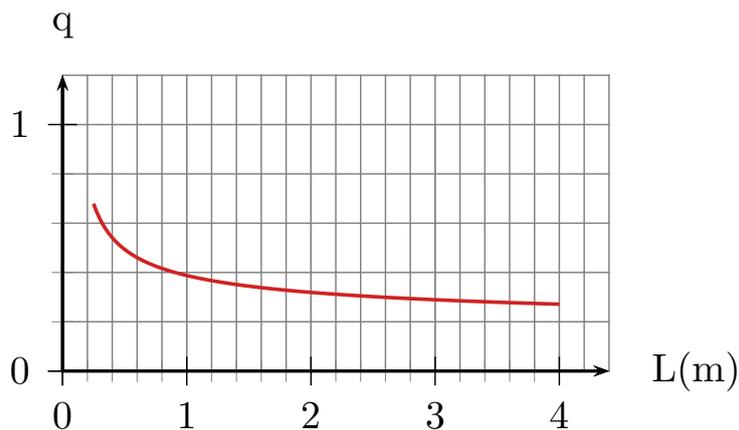


FIGURE 2.8 – Valeurs de  $q$  en fonction de la longueur caractéristique  $L$  de la plaque avec  $h = 19\text{mm}$ .

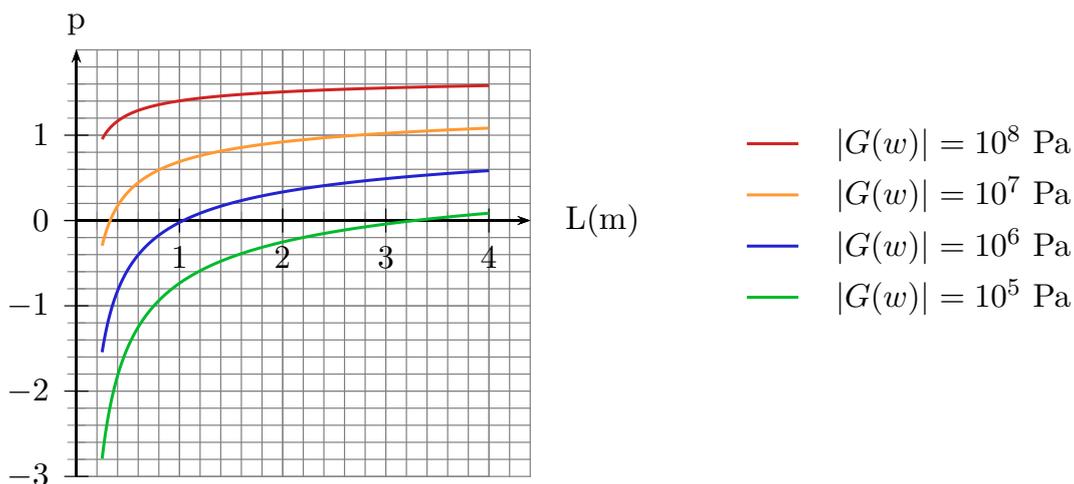


FIGURE 2.9 – Valeurs de  $p$  en fonction de la longueur caractéristique  $L$  de la plaque et du module de cisaillement  $|G(w)|$  du PVB avec  $h = 19\text{mm}$ ,  $c = 1.52\text{mm}$  et  $E'_s = 74.6\text{GPa}$ .

le modèle adapté à la description du comportement pour chaque situation.

Comme démontré dans la section précédente avec l'équation (2.59), lorsque  $L$  varie et que le module de cisaillement est fixe, les différents comportements de la plaque se situent sur une droite passant par le point de coordonnées  $(2,0)$  dans le plan  $(p,q)$  et s'éloigne d'autant de ce point que  $L$  diminue. Par ailleurs, pour  $L$  fixée et un module variable, le comportement est décrit par une droite parallèle à l'axe des abscisses. Ainsi, on met en évidence la nécessité d'utiliser le modèle de plaques HCS pour décrire le comportement d'une plaque de verre feuilleté. En effet, le PVB possédant un module de cisaillement variant de  $0.1\text{MPa}$  à  $100\text{MPa}$ , le comportement d'ensemble du verre feuilleté va varier d'un extrême à l'autre en fonction de ce module en passant par le comportement généralisé.

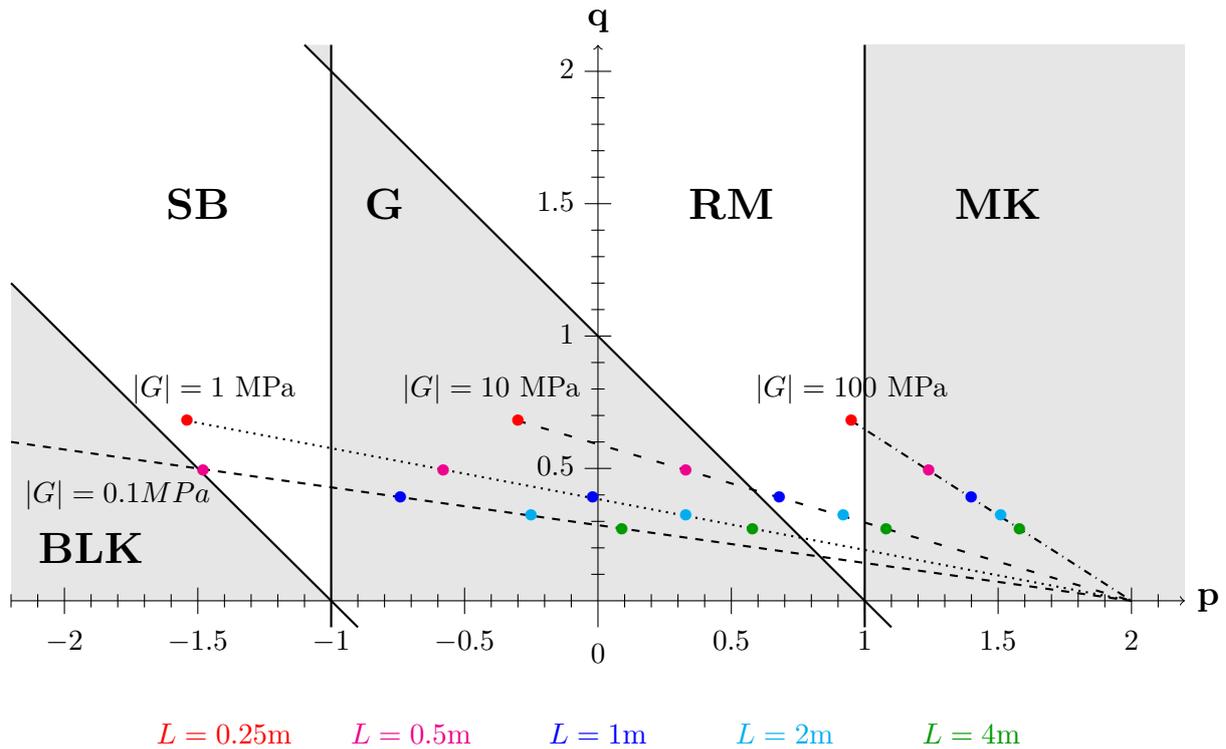


FIGURE 2.10 – Illustration des différents comportements possibles pour plusieurs valeurs de la longueur de la plaque (point de différentes couleurs) et du module de cisaillement (différentes droites pointillées)

*Remarque :* Nous avons vu qu'il existe plusieurs séries de PVB. Les paramètres  $(G_i, \tau_i)$  du modèle de Maxwell généralisé caractérisant le comportement rhéologique du polymère diffèrent entre les séries ce qui peut modifier significativement le comportement du stratifié. Les travaux présentés dans ce mémoire portent sur la série RB41 (dont les propriétés sont détaillées dans la Section 1.1.5) et la série DG41. Dans la pratique, il est commun de trouver des plaques de verre feuilleté avec des couches de verre d'épaisseurs différentes. Cela nous amène à étudier le comportement des plaques HCS dites "asymétriques", toujours grâce à la méthode des développements asymptotiques.

## 2.5 Cas des plaque HCS asymétriques

Considérons maintenant une plaque HCS  $\Omega$  composée de deux couches raides  $\Omega_{s_1}$  et  $\Omega_{s_2}$ , d'épaisseur respective  $h_1$  et  $h_2$ , parfaitement connectée à une couche souple  $\Omega_c$  d'épaisseur  $c$  (voir Figure 3.6), soit une épaisseur totale  $h_\Omega = h_1 + h_2 + c$ . On note  $\bar{h} = \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} + c$  la distance entre les plans moyens des couches raides.

L'objectif de cette section est de décrire explicitement le comportement de cette plaque dans un cadre similaire à celui des plaques symétriques, en gardant un ensemble de lois de comportement et d'équations constitutives sous la forme (2.54). L'intérêt de cette écriture bitorsorielle est qu'elle permet de découpler les phénomènes de flexion et d'extension/compression. Ainsi, la méthode de calcul des champs et notamment des fonctions de forme  $\Phi$  sera adaptée afin de garder ce découplage.

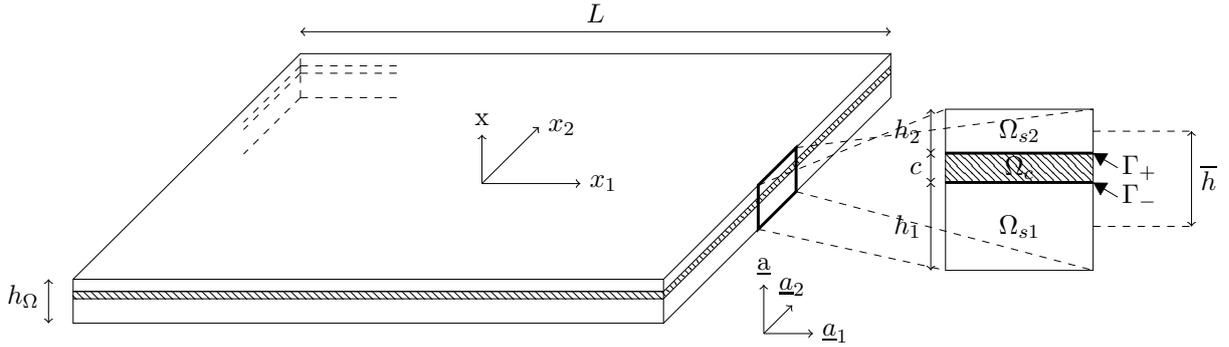


FIGURE 2.11 – Plaque HCS asymétrique composée de deux couches externes raides parfaitement connectées à une couche centrale souple  $\Omega_c$ .  $\Omega_s = \Omega_{s1} \cup \Omega_{s2}$  et  $\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_+$  représentent respectivement le domaine des couches raides et les interfaces avec la couche souple.

Les problèmes et la méthode de résolution par ordre croissant des puissances d' $\varepsilon$  étant similaires à ceux de la Section (2.2), seuls les points qui en diffèrent seront développés en détail.

### 2.5.1 Cinématique des couches raides

Le premier problème à l'ordre  $\varepsilon^{-2}$  qui traite de la déflexion et de l'équilibre hors-plan des couches raides s'écrit toujours sous la forme (2.12). Similairement au cas d'une plaque HCS symétrique, il permet de montrer que  $\sigma_{N_s}^{-1} = 0$  et  $\underline{\sigma}_{P_s}^{-1} = \underline{0}$  dans  $\Omega_s$  et par conséquent que chaque plaque raide subit une déflexion uniforme, mais pouvant *a priori* être différente pour chacune des couches :

$$w^0 = w_1^0(\underline{x}) \quad \text{dans } \Omega_{s1} \quad ; \quad w^0 = w_2^0(\underline{x}) \quad \text{dans } \Omega_{s2}$$

Le second problème à l'ordre  $\varepsilon^{-1}$  s'écrit sous la même forme que dans le cas symétrique (4.6). Il concerne l'équilibre et le déplacement dans le plan des couches raides. Pour chacune de ces couches, on montre que  $\underline{\sigma}_{T_s}^0 = \underline{0}$  et que le déplacement  $\underline{u}^1$  de chaque suit une cinématique linéaire classique de Kirchhoff. Néanmoins, la dissymétrie de la géométrie de la plaque engendre une variation de la position dans l'épaisseur de la fibre neutre sous flexion pure de  $Y$  par rapport au cas symétrique. En conséquence, les champs de déplacements s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{u}^1(y, \underline{x}) = -(y + Y)\underline{\nabla}_x w_1^0(\underline{x}) + \underline{U}_1^1(\underline{x}) & \text{dans } \Omega_{s1} \\ \underline{u}^1(y, \underline{x}) = -(y + Y)\underline{\nabla}_x w_2^0(\underline{x}) + \underline{U}_2^1(\underline{x}) & \text{dans } \Omega_{s2} \end{cases} \quad (2.60)$$

où  $\underline{U}_1^1(\underline{x})$ ,  $\underline{U}_2^1(\underline{x})$  représentent respectivement le déplacement homogène dans le plan de chacune des couches  $\Omega_{s1}$  et  $\Omega_{s2}$  et où le paramètre  $Y$  introduit précédemment sera déterminé par la suite et permettra d'assurer le découplage entre les phénomènes de flexion et d'extension/compression dans l'expression du comportement hors-plan.

### 2.5.2 Etat de contrainte/déformation dans les couches raides

L'équilibre hors-plan (2.15) à l'ordre  $\varepsilon^0$  est toujours valable dans le cas asymétrique, et permet de montrer que les contraintes normales  $\sigma_{N_s}^1$  et  $\sigma_{N_c}^1$  sont nulles. Par conséquent, on déduit que la plaque entière subit la même déflexion uniforme  $W^0(\underline{x})$  soit :

$$w_1^0 = w_2^0 = w_c^0 = W^0(\underline{x})$$

Comme dans la Section 2.2.3, on réexprime le déplacement dans le plan (2.60) sous la forme :

$$\underline{u}^1(y, \underline{x}) = -\phi_W(y) \underline{\nabla}_x W^0(\underline{x}) + \phi_D(y) \underline{D}^1(\underline{x}) + \phi_U(y) \underline{U}^1(\underline{x}) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.61)$$

faisant intervenir les trois descripteurs cinématiques qui pilotent la physique du système :

- le gradient de déflexion de la plaque entière  $\underline{\nabla}_x W^0(\underline{x})$
- le déplacement *différentiel* dans le plan entre les couches raides  $\underline{D}^1(\underline{x}) = \frac{U_2^1(\underline{x}) - U_1^1(\underline{x})}{2}$
- le déplacement homogène *moyen* dans le plan des couches raides  $\underline{U}^1(\underline{x})$ , uniforme sur toute la section.

et des fonctions de forme associées  $\phi_W(y)$ ,  $\phi_D(y)$  et  $\phi_U(y)$ , *a priori* différentes de celles obtenues dans le cas symétrique.

Le mécanisme de glissement entre les couches nous mène à garder une définition du déplacement différentiel identique au cas symétrique. De plus,  $\underline{U}^1(\underline{x})$  étant défini comme uniforme sur toute la section, la fonction de forme associée est constante, on garde donc  $\phi_U(y) = 1$ .

Afin de garder le découplage entre les phénomènes de flexion et d'extension/compression dans le cas des plaques HCS asymétriques, on construit les fonctions  $\phi_W(y)$  et  $\phi_D(y)$  de manière à ce qu'elles soient orthogonales à  $\phi_U(y)$  au sens de l'intégration sur les couches raides définie pour une quantité  $q$  par :

$$\langle q \rangle_s = \int_{-\frac{h_\Omega}{2}}^{-\frac{h_\Omega}{2} + h_1} q \, dy + \int_{\frac{h_\Omega}{2} - h_2}^{\frac{h_\Omega}{2}} q \, dy$$

Cela se traduit par :

$$\begin{cases} \langle \phi_W(y) \phi_U(y) \rangle_s = 0 \\ \langle \phi_D(y) \phi_U(y) \rangle_s = 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

L'équation 2.62-a s'écrit :

$$\langle \phi_W(y) \phi_U(y) \rangle_s = \int_{-\frac{h_\Omega}{2}}^{-\frac{h_\Omega}{2} + h_1} (y - Y) \, dy + \int_{\frac{h_\Omega}{2} - h_2}^{\frac{h_\Omega}{2}} (y - Y) \, dy = 0$$

d'où l'on déduit le paramètre  $Y$  introduit en (2.60)

$$Y = \frac{c(h_2 - h_1)}{2(h_1 + h_2)} \quad (2.63)$$

Géométriquement,  $Y$  est tel que  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$  sur la Figure (2.12).

Déterminons ensuite l'expression de  $\underline{U}^1(\underline{x})$ . Pour cela on identifie les projections des expressions (2.60) et (2.61) sur la fonction de forme  $\phi_U(y)$  :

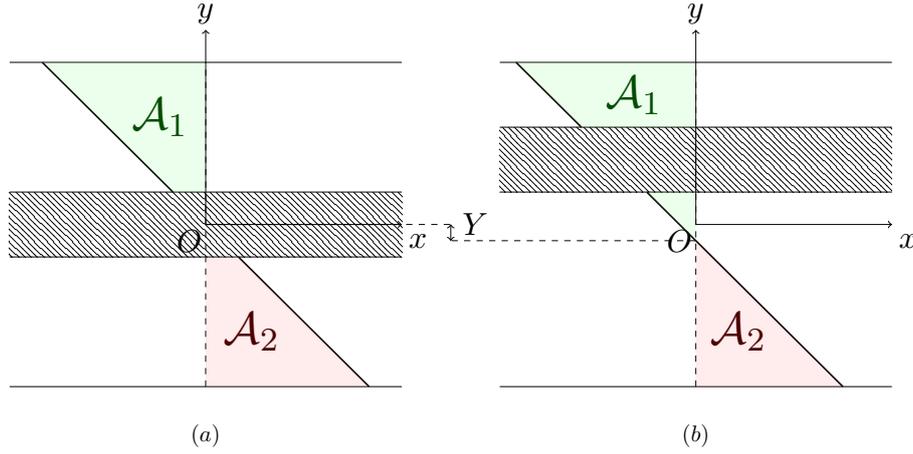


FIGURE 2.12 – Déplacement des couches raides dans le plan  $\underline{u}^1$  sous flexion pure dans le cas d'une plaque HCS (a) symétrique et (b) asymétrique.

$$\begin{aligned}
 & \langle (2.60) \phi_U(y) \rangle_s = \langle (2.61) \phi_U(y) \rangle_s \\
 \Leftrightarrow & \int_{-\frac{h_\Omega}{2}}^{-\frac{h_\Omega}{2}+h_1} [(y-Y)\nabla_x W^0(x) + U_1^1(x)] dy + \int_{\frac{h_\Omega}{2}-h_2}^{\frac{h_\Omega}{2}} [(y-Y)\nabla_x W^0(x) + U_2^1(x)] dy \\
 & = -\langle \phi_W(y) \phi_U(y) \rangle_s \nabla_x W^0(x) + \langle \phi_D(y) \phi_U(y) \rangle_s D^1(x) + \langle \phi_U(y) \phi_U(y) \rangle_s(y) U^1(x)
 \end{aligned}$$

En utilisant les relations (2.62) et (2.63), on en déduit que :

$$\int_{-\frac{h_\Omega}{2}}^{-\frac{h_\Omega}{2}+h_1} U_1^1(x) dy + \int_{\frac{h_\Omega}{2}-h_2}^{\frac{h_\Omega}{2}} U_2^1(x) dy = \int_{-\frac{h_\Omega}{2}}^{-\frac{h_\Omega}{2}+h_1} U^1(x) dy + \int_{\frac{h_\Omega}{2}-h_2}^{\frac{h_\Omega}{2}} U^1(x) dy$$

En conséquence, le déplacement homogène moyen dans le plan des couches raides, uniforme sur toute la section  $U^1(x)$  s'écrit

$$U^1(x) = \frac{h_1 U_1^1(x) + h_2 U_2^1(x)}{h_1 + h_2} \quad (2.64)$$

Enfin, on détermine  $\phi_D(y)$  en introduisant cette expression de  $U^1(x)$  dans celle du champ dans le plan (2.61) puis en écrivant l'égalité avec les champs (2.60) dans chacune des couches raides  $\Omega_{s_1}$  et  $\Omega_{s_2}$ . On obtient :

$$\begin{cases} -(y-Y)\nabla_x W(x) + U_1^1(x) = -(y-Y)\nabla_x W(x) + \phi_D(y) \frac{U_2^1(x) - U_1^1(x)}{2} + \frac{h_1 U_1^1(x) + h_2 U_2^1(x)}{h_1 + h_2} \\ -(y-Y)\nabla_x W(x) + U_2^1(x) = -(y-Y)\nabla_x W(x) + \phi_D(y) \frac{U_2^1(x) - U_1^1(x)}{2} + \frac{h_1 U_1^1(x) + h_2 U_2^1(x)}{h_1 + h_2} \end{cases}$$

D'où l'on déduit

$$\phi_D(y) = \begin{cases} \frac{2h_1}{h_1+h_2} & \text{dans } \Omega_{s_1} \\ -\frac{2h_2}{h_1+h_2} & \text{dans } \Omega_{s_2} \end{cases} \quad (2.65)$$

En résumé, les fonctions de forme  $\phi_W(y)$  et  $\phi_D(y)$  s'écrivent dans le domaine des couches raides :

$$\phi_W(y) = y - \frac{c(h_2 - h_1)}{2(h_1 + h_2)} \quad ; \quad \phi_D(y) = \begin{cases} \frac{2h_1}{h_1+h_2} & \text{pour } y \in [\frac{h_\Omega}{2} - h_2; \frac{h_\Omega}{2}] \\ -\frac{2h_2}{h_1+h_2} & \text{pour } y \in [-\frac{h_\Omega}{2}; -\frac{h_\Omega}{2} + h_1] \end{cases}$$

On remarque que du fait de l'asymétrie des couches, la fibre neutre n'est pas à mi-épaisseur dans la section. Notons que le champ (et par conséquent les fonctions de forme) dans  $\Omega_c$  sera déterminé à l'ordre suivant (comme dans le cas symétrique). Alternativement au glissement de l'interface  $\underline{D}^1(\underline{x})$  entre les couches raides, on peut introduire le déplacement différentiel dans le plan  $\underline{d}^1(\underline{x})$  entre les *plans moyens* des couches raides définit par :

$$\underline{d}^1 = \underline{D}^1 - \left(\frac{\bar{h}}{2}\right) \nabla_x W^0$$

et le vecteur rotation  $\underline{\alpha}^0$  associé

$$\underline{\alpha}^0(\underline{x}) = -\frac{2}{\bar{h}} \underline{d}^1(\underline{x}) \quad (2.66)$$

On détermine ensuite dans le domaine global le tenseur réduit des déformations dans le plan  $\underline{e}_P^1$  en introduisant l'expression (2.61) du déplacement dans le plan dans l'équation (2.4). On obtient de manière identique au cas symétrique :

$$\underline{e}_P^1 = -\phi_W \underline{e}_x(\nabla_x W^0) + \phi_D \underline{e}_x(\underline{D}^1) + \phi_U \underline{e}_x(\underline{U}^1) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.67)$$

Puis, en rappelant que  $\sigma_N^1 = 0$  dans  $\Omega$ , la loi de comportement élastique isotropique fournit :

$$e_N^1 = -\frac{\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s} \text{tr}(\underline{e}_P^1) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.68)$$

ainsi que le tenseur réduit des contraintes, en tenant compte du contraste de raideur  $\varepsilon^2$  dans la couche souple :

$$\underline{\sigma}_P^1 = \begin{cases} \underline{\sigma}_{Ps}^1 = E'_s \left( (1 - \nu_s) \underline{e}_{Ps}^1 + \nu_s \text{tr}(\underline{e}_{Ps}^1) \underline{I}_{Ps} \right) & \text{dans } \Omega_s \\ \underline{\sigma}_{Pc}^1 = \underline{0} & \text{dans } \Omega_c \end{cases} \quad (2.69)$$

### 2.5.3 Etat de contrainte/déformation dans la couche souple

A l'ordre  $\varepsilon$ , une intégration directe du problème (2.27), permet de déduire le déplacement dans le plan ainsi que l'état de déformation/contrainte dans la couche souple  $\Omega_c$  :

$$\begin{cases} \underline{u}_c^1(y, \underline{x}) = y \left( \frac{2}{c} \underline{D}^1(\underline{x}) - \nabla_x W^0(\underline{x}) \right) + \underline{U}^1(\underline{x}) \\ \underline{e}_{Tc}^0(\underline{x}) = \frac{1}{c} \underline{D}^1(\underline{x}) \quad ; \quad \underline{\sigma}_{Tc}^2(\underline{x}) = \frac{2\mu_c}{c} \underline{D}^1(\underline{x}) \end{cases} \quad (2.70)$$

Similairement au cas symétrique, la couche souple est dans un état de déformation/contrainte de cisaillement pur induit par le déplacement différentiel dans le plan  $\underline{D}^1$  entre les deux couches raides. L'expression du champs de déplacement dans le plan de la couche souple peut être

réécrite sous une forme identique à (2.61). Ainsi, obtient l'expression des fonctions de forme dans le domaine global :

$$\phi_W(y) = y - \frac{c(h_2 - h_1)}{2(h_1 + h_2)} \quad ; \quad \phi_D(y) = \begin{cases} \frac{2h_1}{h_1+h_2} & \text{pour } y \in [\frac{h_\Omega}{2} - h_2; \frac{h_\Omega}{2}] \\ \frac{2y}{c} + \frac{(h_2-h_1)(h_1+h_2-c)}{c(h_1+h_2)} & \text{pour } y \in [-\frac{h_\Omega}{2} + h_1; \frac{h_\Omega}{2} - h_2] \\ -\frac{2h_2}{h_1+h_2} & \text{pour } y \in [-\frac{h_\Omega}{2}; -\frac{h_\Omega}{2} + h_1] \end{cases}$$

La cinématique *zig-zag* en  $y$  du déplacement dans le plan  $\underline{u}^1(y, \underline{x})$ , linéaire par morceaux, est illustrée par la Figure (2.13).

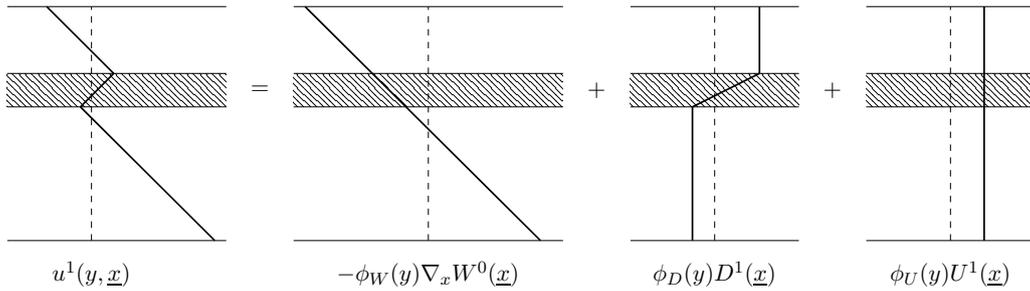


FIGURE 2.13 – Décomposition de la dépendance en  $y$  du champ dans le plan  $\underline{u}^1$  pour une plaque HCS asymétrique.

#### 2.5.4 Equilibres globaux

En utilisant les résultats précédents, l'équilibre (2.6) dans le plan à l'ordre  $\varepsilon$  dans  $\Omega$  s'écrit similairement au cas symétrique :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}_{T,y}^2 + \underline{\text{div}}_x(\underline{\sigma}_P^1) = \underline{0} & \text{dans } \Omega \\ [\underline{\sigma}_T^2] = \underline{0} & \text{sur } \Gamma \\ \underline{\sigma}_T^2 = \underline{0} & \text{sur } \Gamma_\Omega \end{cases} \quad (2.71)$$

Cet ensemble permet d'établir trois équilibres *globaux* indépendants, liés aux trois descripteurs cinématiques. Pour les obtenir, la méthode de calcul est identique à celle de la Section (2.2.4) : on multiplie (2.71-a) par les fonctions de forme  $\phi$  et on intègre suivant l'épaisseur de la plaque. En rappelant que  $\underline{\sigma}_{Pc}^1 = \underline{0}$ , on obtient :

$$\langle \phi(y) \underline{\sigma}_{T,y}^2 \rangle + \underline{\text{div}}_x(\langle \phi(y) \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s) = \underline{0} \quad \text{avec} \quad \phi(y) = \phi_U(y); \phi_W(y); \phi_D(y)$$

où  $\langle q \rangle = \int_{-\frac{h_\Omega}{2}}^{\frac{h_\Omega}{2}} q \, dy$  représente l'intégrale sur toute l'épaisseur  $h_\Omega$  de la plaque. En intégrant  $\langle \phi \underline{\sigma}_{T,y}^2 \rangle$  par partie et en tenant compte des conditions limites et de la continuité de  $\underline{\sigma}_T^2$ , on a :

$$-\langle \phi_{,y} \underline{\sigma}_T^2 \rangle + \underline{\text{div}}_x(\langle \phi \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s) = \underline{0} \quad \text{avec} \quad \phi(y) = \phi_U(y); \phi_W(y); \phi_D(y) \quad (2.72)$$

Comme dans le cas symétrique, l'intégration en  $y$  dans le calcul du second terme du premier membre ne concerne que le produit des fonctions de forme. Les valeurs de  $\langle \phi_A \cdot \phi_B \rangle_s$  sont indiquées dans le Tableau (2.2), où  $I_1 = \frac{h_1^3}{12}$  et  $I_2 = \frac{h_2^3}{12}$  sont les inertias respectives des couches  $\Omega_{s1}$  et  $\Omega_{s2}$ ,

et où  $\mathcal{I} = \langle y^2 \rangle_s$  est l'inertie d'ensemble des deux couches raides.

$\langle \phi_A \cdot \phi_B \rangle_s$	$\phi_U$	$\phi_W$	$\phi_D$
$\phi_U$	$h_1 + h_2$	0	0
$\phi_W$	0	$\mathcal{I} = I_1 + I_2 + \bar{h}^2 h^*$	$2\bar{h}h^*$
$\phi_D$	0	$2\bar{h}h^*$	$4h^*$

$$; \quad \begin{cases} \bar{h} = \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} + c \\ h^* = \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right)^{-1} \end{cases}$$

TABLE 2.2 – Produits intégrés des fonctions de forme associées aux trois descripteurs cinématiques

Les calculs étant identiques à ceux de la Section (2.2.4), ils ne sont pas redéveloppés ici. On réintroduit l'opérateur différentiel :

$$\Theta_x(\underline{u}) = \underline{\text{div}}_x \left( (1 - \nu) \underline{e}_x(\underline{u}) + \nu \underline{\text{div}}_x(\underline{u}) \underline{I}_P \right) \quad (2.73)$$

et les trois équilibres globaux obtenus en prenant successivement  $\phi(y) = \phi_U(y)$  puis  $\phi_W(y)$  et enfin  $\phi_D(y)$  s'écrivent :

**Equilibre global dans le plan :**

$$E'_s \Theta_x(\underline{U}^1) = \underline{0} \quad \text{i.e.} \quad \frac{E'_s}{2} \left( (1 - \nu) \underline{\Delta}_x(\underline{U}^1) + (1 + \nu) \underline{\text{grad}}_x \underline{\text{div}}_x(\underline{U}^1) \right) = \underline{0} \quad (2.74)$$

**Equilibre des moments globaux :**

$$E'_s \left( -(I_1 + I_2) \underline{\nabla}_x \underline{\Delta}_x W^0 - (\mathcal{I} - (I_1 + I_2)) \Theta_x(\underline{\alpha}^0) \right) = \underline{\mathcal{I}}^2 \quad ; \quad \underline{\mathcal{I}}^2 = \langle \underline{\sigma}_T^2 \rangle \quad (2.75)$$

**Equilibre des moments locaux :**

$$-E'_s (\mathcal{I} - (I_1 + I_2)) \Theta_x(\underline{\alpha}^0) + \mu_c \frac{\bar{h}^2}{c} (\underline{\alpha}^0 - \underline{\nabla}_x W^0) = \underline{0} \quad (2.76)$$

### 2.5.5 Equilibre des efforts tranchants

Afin d'obtenir l'équilibre des efforts tranchants, on intègre sur l'épaisseur de la plaque l'équilibre local hors-plan à l'ordre  $\varepsilon^2$  suivant :

$$\begin{cases} \sigma_{N,y}^3 + \underline{\text{div}}_x(\underline{\sigma}_T^2) = 0 & \text{dans } \Omega \\ [\sigma_N^3] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{N_s}^3 = 0 & \text{sur } \Gamma_\Omega \end{cases} \quad (2.77)$$

Le premier terme du premier membre s'annule de par les conditions limites et la continuité de  $\sigma_N^3$  aux interfaces. Ainsi, l'équilibre des efforts tranchants est donné par

$$\underline{\text{div}}_x(\langle \underline{\sigma}_T^2 \rangle) = \underline{\text{div}}_x(\underline{\mathcal{I}}^2) = 0 \quad (2.78)$$

### 2.5.6 Formulation synthétique

L'étude du comportement d'une plaque HCS asymétrique par développements asymptotiques diffère en peu de points du cas symétrique. En effet, la méthode de résolution des problèmes locaux d'équilibre dans le plan et hors-plan aux différents ordres  $\varepsilon$  n'est pas fonction de la géométrie de la plaque. On retrouve donc que la cinématique de la plaque implique les descripteurs suivants :

- Le déplacement *moyen* dans le plan  $\underline{U}^1(\underline{x})$ , gouverné par l'équilibre classique dans le plan (2.74)
- La déflexion  $W^0(\underline{x})$  et le vecteur rotation  $\underline{\alpha}^0(\underline{x})$ , toujours couplés par l'équilibre du moment global (2.75), du moment local (2.76) et de l'effort tranchant hors-plan (2.78).

**Comportement dans le plan :** En adoptant une nouvelle fois les notations naturelles des variables non-redimensionnées et en supprimant les exposants à l'ordre dominant, le comportement dans le plan est décrit par une équation différentielle d'ordre deux, s'écrivant classiquement grâce aux termes de contraintes planes associés au déplacement moyen dans le plan  $\underline{U}(\underline{x})$  :

$$\underline{\text{div}}_x(\underline{\Sigma}_P) = 0 \quad ; \quad \underline{\Sigma}_P = E'_s \left( (1 - \nu) \underline{e}_x(\underline{U}) + \nu \underline{\text{div}}_x(\underline{U}) \underline{I}_P \right) \quad (2.79)$$

Cette équation est identique à celle obtenue dans le cas symétrique, bien que le déplacement moyen soit cette fois pondéré par les épaisseurs des couches raides.

**Comportement hors-plan :** La réexpression des fonctions de forme  $\Phi$  a permis de découpler les phénomènes de flexion et d'extension/compression dans l'écriture des équations d'équilibre. Ainsi, comme nous l'avons fait dans la Section 2.3, on introduit les deux torseurs bidimensionnels agissant sur la plaque HCS qui sont constitués de :

- l'effort de cisaillement interne dans la couche souple, moyenné sur l'épaisseur de la plaque entière  $\underline{T}$
- le tenseur du moment interne  $\underline{M}$  associé au vecteur rotation  $\underline{\nabla}_x W$
- le tenseur du moment global  $\underline{\mathcal{M}}$  associé au vecteur rotation  $\underline{\alpha}$
- l'effort tranchant global  $\underline{\mathcal{I}}$

Dans le cas d'une plaque asymétrique, les lois de comportement associées s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{T} = K (\underline{\nabla}_x W - \underline{\alpha}) & \text{avec } K = \mu_c \bar{h}^2 / c \\ \underline{M} = E'_s (I_1 + I_2) \left( (1 - \nu) \underline{e}_x(\underline{\nabla}_x W) + \nu \Delta_x W \underline{I}_P \right) \\ \underline{\mathcal{M}} = E'_s (\underline{\mathcal{I}} - (I_1 + I_2)) \left( (1 - \nu) \underline{e}_x(\underline{\alpha}) + \nu \underline{\text{div}}_x(\underline{\alpha}) \underline{I}_P \right) \end{cases} \quad (2.80)$$

On retrouve la formulation (2.43) mais avec des paramètres différents, puisque fonctions de la géométrie de la plaque. On exprime ensuite l'ensemble (2.75)-(2.76)-(2.78) gouvernant le comportement d'une plaque HCS asymétrique non-chargée grâce à ces torseurs :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{T}}) = 0 \\ \underline{\mathcal{T}} = -\operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{M}}) + \underline{\mathcal{T}} \\ \underline{\mathcal{T}} = -\operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{M}}) \end{cases} \quad (2.81)$$

A nouveau, l'équation (2.81)-a montre que l'effort tranchant global  $\underline{\mathcal{T}}$  est la somme de (i) l'effort de cisaillement dans la couche souple  $\underline{\mathcal{T}}$  et (ii) et l'effort de cisaillement  $-\operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{M}})$  induit par la flexion locale des couches raides (chacune moyennée sur l'épaisseur de la plaque entière). L'équation (2.44)-c signifie que  $\underline{\mathcal{T}}$  est équilibré par les efforts normaux différentiels dans le plan de chaque couche raide, exprimés par  $-\operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{M}})$ .

Enfin, en régime harmonique, l'équation (2.81)-b devient  $\operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{T}}) = -\rho_m \omega^2 W$ , et l'équation tri-Laplacienne régissant le comportement hors-plan d'une plaque HCS asymétrique s'écrit :

$$E'_s(I_1 + I_2) (E'_s(\mathcal{I} - (I_1 + I_2))) \Delta_x^{(3)} W - E'_s \mathcal{I} K \Delta_x^{(2)} W - E'_s(\mathcal{I} - (I_1 + I_2)) \omega^2 \rho_m \Delta_x W + K \omega^2 \rho_m W = 0 \quad (2.82)$$

*Remarque :* Notons que pour  $h_1 = h_2 = h$ , on retrouve l'équation (2.53) du cas symétrique. Aussi, les méthodes utilisées dans la Section (2.4) pour la représentation schématique et la cartographie des différents comportements sont également valables dans le cas asymétrique en adaptant les paramètres constitutifs. Enfin, cette étude peut être étendue au cas des plaques HCS à deux couches raides ayant des paramètres mécaniques (module d'Young et coefficient de Poisson) différents, à condition d'adapter les paramètres constitutifs dans les lois de comportement (2.80).

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, le modèle de plaque stratifiée fortement contrastée a été développé par la méthode des développements asymptotiques. Cette méthode présente l'avantage de ne faire aucune hypothèse sur la forme des champs de déplacement et/ou de contrainte et de s'appliquer quelle que soit l'épaisseur de la plaque (à condition de respecter la séparation d'échelle, soit  $\varepsilon \ll 1$ ), contrairement aux modèles phénoménologiques développés dans le Chapitre 1 qui sont basés sur des champs supposés a priori et qui ne respectent pas toutes les conditions de continuité interlaminaire.

Le modèle de plaque HCS, obtenu notamment grâce à l'intégration du fort contraste mécanique entre les couches, est un modèle complet. Il intègre les phénomènes de flexion globale, de flexion locale et de cisaillement, et s'applique sans hypothèse sur la géométrie de la plaque (tout en restant dans le cadre des plaques). La cinématique qui en découle est une cinématique enrichie, incluant un effet "Zig-Zag" tel que vu dans le Chapitre 1 démontré et non supposé.

De plus, contrairement aux récents modèles viscoélastiques développés dans le cadre de l'étude du verre feuilleté, la formulation du comportement du stratifié est explicite. Elle définit les efforts duaux des descripteurs macroscopiques (équations constitutives), les équations d'équilibres régissant le comportement hors-plan et dans le plan et les différentes lois de comportements du stratifié. Aussi, l'intégration des effets viscoélastiques dans le modèle HCS ne complexifie pas la résolution des équations d'équilibres.

Enfin, la cohérence du modèle généralisé obtenu est vérifiée puisque nous avons montré qu'il

"dégénère" vers les modèles de plaques classiques (Love-Kirchhoff, Reissner-Mindlin, plaque sandwich ou encore plaque de cisaillement) en faisant varier les contrastes mécaniques et géométriques de la plaque.

**Résumé :**

La partie précédente a permis d'établir le modèle généralisé de plaque stratifiée fortement contrastrée. L'objectif de cette partie est d'utiliser ce modèle pour déterminer les différents champs (cinématique, déformations et contraintes) d'une plaque soumise à des chargements statiques standards et dynamiques. La méthode de calcul des champs est développée dans le cas de la flexion trois points cylindrique asymétrique, puis ces derniers sont généralisés aux cas des plaques asymétriques, de la flexion quatre points et d'une charge répartie. Par ailleurs, le rôle des conditions aux bords (glissement ou mouvement de corps rigide imposé) est également étudié. Enfin pour l'analyse en dynamique, on détermine tout d'abord dans le cas d'une plaque HCS symétrique élastique les modes propres (déformées et fréquences propres), puis une comparaison est menée entre ces résultats et ceux des modèles dégénérés. Ces résultats sont ensuite repris pour traiter le cas d'une plaque avec une couche centrale viscoélastique.

**Sommaire**

<b>3.1</b>	<b>Chargement statique : flexion trois points . . . . .</b>	<b>71</b>
<b>3.2</b>	<b>Flexion 4 points et chargement uniforme . . . . .</b>	<b>80</b>
<b>3.3</b>	<b>Chargement avec condition mouvement de corps rigide imposé aux extrémités . . . . .</b>	<b>83</b>
<b>3.4</b>	<b>Dynamique d'une plaque HCS élastique . . . . .</b>	<b>86</b>
<b>3.5</b>	<b>Dynamique d'une plaque HCS viscoélastique . . . . .</b>	<b>97</b>

**3.1 Chargement statique : flexion trois points****3.1.1 Flexion trois points asymétrique d'une plaque symétrique**

Considérons une plaque HCS à deux couches raides d'épaisseurs identiques  $h$  connectées par une couche souple d'épaisseur  $c$  telle que le montre la Figure 3.1.

On étudie sa réponse lorsqu'elle est soumise à une flexion (cylindrique) trois points asymétrique. Comme illustré en Figure 3.2, la plaque de longueur  $L$  (et de largeur unitaire) est en

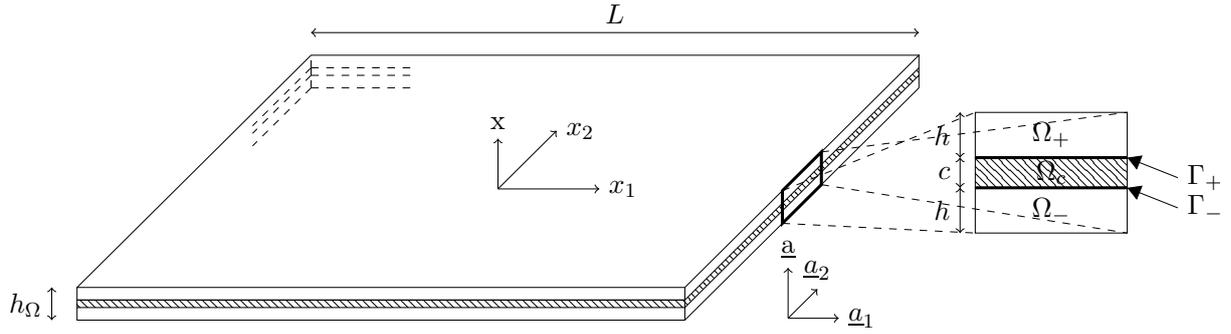


FIGURE 3.1 – Plaque HCS avec deux couches raides identiques parfaitement connectées à une couche souple  $\Omega_c$ . Notations :  $\Omega_s = \Omega_{s+} \cup \Omega_{s-}$  et  $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$  dénotent respectivement le domaine des couches raides et les interfaces entre les couches raides et la couche souple.

appui simple a ses extrémités ( $x_1 = \pm L/2$ ) et chargée par un effort ponctuel  $F$  indépendant de  $x_2$  appliqué en  $x_1 = a - \frac{L}{2}$ . Ainsi le chargement ne dépend que de  $x_1$  et on peut simplifier les notations en remplaçant  $x_1$  par  $x$  pour la suite des calculs. Dans ce cas, les quantités varient uniquement selon  $x$  et l'ensemble (3.1) des équations en  $W$  (déflexion) et  $\alpha$  (rotation) se simplifie en :

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{,x} = \mathcal{F} & ; & T = K(W_{,x} - \alpha) & ; & K = \frac{\mu_c(h+c)^2}{c} \\ \mathcal{T} = -M_{,x} + T & ; & M = 2E'_s I W_{,xx} & ; & I = \frac{h^3}{12} \\ T = -\mathcal{M}_{,x} & ; & \mathcal{M} = E'_s(\mathcal{I} - 2I)\alpha_{,x} & ; & \mathcal{I} = 2I + \frac{h(h+c)^2}{2} \end{cases} \quad (3.1)$$

Les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} W(\pm \frac{L}{2}) = 0 & \text{Déplacement nul aux extrémités} \\ \mathcal{M}(\pm \frac{L}{2}) = 0, M(\pm \frac{L}{2}) = 0 & \text{Moment local et global nuls aux extrémités} \end{cases}$$

### Détermination des trois descripteurs cinématiques

On commence par déterminer les réactions d'appuis  $R_1$  et  $R_2$  illustrées par la Figure 3.2 afin d'exprimer analytiquement les efforts appliqués sur la plaque.

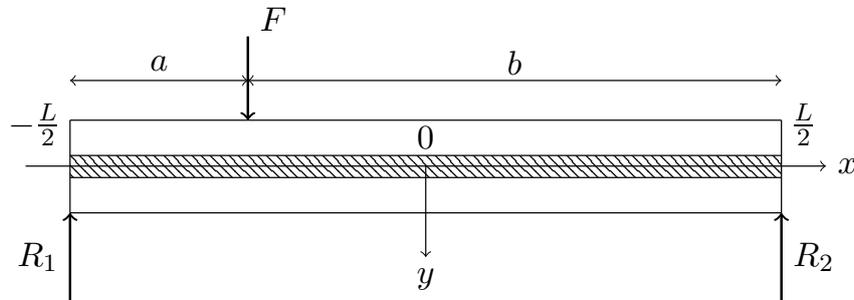


FIGURE 3.2 – Essai de flexion trois points asymétrique.

Pour cela, on applique le Principe Fondamental de la Statique au point d'application de la

force, en  $x = a - \frac{L}{2}$  :

$$\begin{cases} F + R_1 + R_2 = 0 \\ aR_1 - bR_2 = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

La résolution donne les réactions d'appui  $R_1 = -\frac{Fb}{L}$  et  $R_2 = -\frac{Fa}{L}$ .

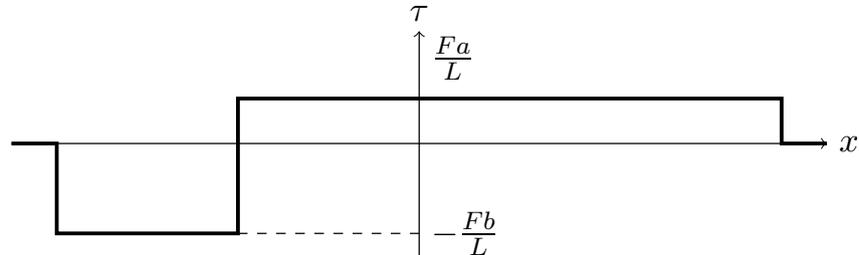


FIGURE 3.3 – Effort tranchant le long d'une plaque bi-appuyée sous flexion trois points cylindrique asymétrique.

Par conséquent, le chargement en flexion trois points asymétrique correspond à l'effort externe par unité de largeur suivant, où  $\delta$  est la distribution de Dirac :

$$\mathcal{F}(x) = F \left( \delta(x - (a - \frac{L}{2})) - \frac{b}{L} \delta(x + \frac{L}{2}) - \frac{a}{L} \delta(x - \frac{L}{2}) \right)$$

En intégrant l'équilibre de l'effort tranchant global  $\mathcal{T}_x(x) = \mathcal{F}(x)$ , avec la condition  $\mathcal{T}(x) = 0 \quad \forall |x| > \frac{L}{2}$ , on obtient l'effort tranchant  $\tau$  le long de la plaque tel que représenté sur la Figure 3.3 et dont l'expression est donnée par

$$\mathcal{T}(x) = F\mathcal{H}_0(x) \quad ; \quad \mathcal{H}_0(x) = H(x - (a - \frac{L}{2})) - \frac{b}{L}H(x + \frac{L}{2}) - \frac{a}{L}H(x - \frac{L}{2}) \quad (3.3)$$

où  $H(x)$  est la fonction de Heaviside, ou fonction "échelon", définie par  $H(x) = (1 + \text{sign}(x))/2$ . Introduisons également pour la suite les notations pour les intégrations successives de la fonction de Heaviside  $H_1(x) = xH(x)$ ,  $H_2(x) = \frac{1}{2}x^2H(x)$ , et les fonctions

$$\mathcal{H}_i(x) = H_i(x - (a - \frac{L}{2})) - \frac{b}{L}H_i(x + \frac{L}{2}) - \frac{a}{L}H_i(x - \frac{L}{2}) \quad ; \quad i = 1,2$$

L'intégration de l'équilibre des moments  $(\mathcal{M} + M)_{,x} + \mathcal{T} = 0$  fournit

$$\mathcal{M} + M = -F(\mathcal{H}_1(x) + C_1)$$

où la constante d'intégration  $C_1$  est nulle d'après les conditions aux limites  $(\mathcal{M} + M)(\pm \frac{L}{2}) = 0$ . Par conséquent, en introduisant les expressions des moments  $\mathcal{M}$  et  $M$

$$E'_s(\mathcal{I} - 2I)\alpha_{,x} + 2E'_sIW_{,xx} = -F\mathcal{H}_1(x)$$

ce qui donne par intégration

$$\frac{\mathcal{I} - 2I}{2I}\alpha + W_{,x} = -\frac{F}{2E'_sI}(\mathcal{H}_2(x) + C_2) \quad (3.4)$$

où  $C_2$  est une constante. Considérons maintenant l'équilibre du moment local  $M_{,x} + T = 0$ , soit

$$E'_s(\mathcal{I} - 2I)\alpha_{,xx} + K(W_{,x} - \alpha) = 0$$

En combinant les deux dernières équations, on élimine  $W_{,x}$  et on obtient une équation différentielle en  $\alpha$  :

$$\alpha_{,xx} - A^2\alpha = \mathcal{B}(\mathcal{H}_2(x) + C_2) \quad , \quad \mathcal{B} = \frac{FK}{2(E'_s)^2 I(\mathcal{I} - 2I)}$$

où  $A^{-1}$  est la taille caractéristique intrinsèque du phénomène de flexion/cisaillement dans une plaque HCS définie par :

$$A^2 = \frac{K\mathcal{I}}{2E'_s I(\mathcal{I} - 2I)} = \frac{\mu_c \mathcal{I}}{E'_s} \frac{1}{I hc} \quad (3.5)$$

Puisque  $\mathcal{H}_{2,xx} = \mathcal{H}_0$  est discontinue en  $x = a - \frac{L}{2}$ , cette équation est résolue séparément dans les domaines  $x < a - \frac{L}{2}$  et  $x > a - \frac{L}{2}$ . Pour la suite, l'indice  $<$  (respectivement  $>$ ) représente un champ dans le domaine  $x \in [-\frac{L}{2}; a - \frac{L}{2}[$  (respectivement  $x \in ]a - \frac{L}{2}; \frac{L}{2}]$ ). La formulation explicite est donc :

$$\begin{cases} \alpha_{<,xx} - A^2\alpha_{<} = \mathcal{B}\left(-\frac{b}{L}\frac{(x+\frac{L}{2})^2}{2} + C_2\right) \\ \alpha_{>,xx} - A^2\alpha_{>} = \mathcal{B}\left(\frac{(x-(a-\frac{L}{2}))^2}{2} - \frac{b}{L}\frac{(x+\frac{L}{2})^2}{2} + C_2\right) \end{cases}$$

Les solutions se décomposent en somme de la solution homogène et d'une solution particulière, soit

$$\begin{cases} \alpha_{<}(x) = f e^{Ax} + g e^{-Ax} + \frac{\mathcal{B}b}{2A^2L}\left(x^2 + xL + \frac{2}{A^2} + \frac{L^2}{4} - \frac{2C_2L}{b}\right) \\ \alpha_{>}(x) = f e^{Ax} + g e^{-Ax} - \frac{\mathcal{B}a}{2A^2L}\left(x^2 - xL + \frac{2}{A^2} + aL - \frac{3L^2}{4} + \frac{2C_2L}{a}\right) \end{cases}$$

Les constantes d'intégration  $f$  et  $g$  sont déterminées par les conditions aux limites aux appuis  $>, <$  et  $>, <$  et par la continuité du champ en  $x = a - \frac{L}{2}$ , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \alpha_{<,x}\left(-\frac{L}{2}\right) = \alpha_{>,x}\left(\frac{L}{2}\right) = 0 & \text{Moment local nul aux extrémités} \\ \alpha_{<,x}\left(a - \frac{L}{2}\right) = \alpha_{>,x}\left(a - \frac{L}{2}\right) & \text{Continuité du moment local} \\ \alpha_{<}\left(a - \frac{L}{2}\right) = \alpha_{>}\left(a - \frac{L}{2}\right) & \text{Continuité de la rotation} \end{cases}$$

Après résolution on obtient :

$$\begin{cases} \alpha_{<}(x) = \frac{F}{2E'_s\mathcal{I}} \left[ \frac{1}{A^2} \left( \frac{2 \sinh(A(a-L))}{\sinh(AL)} \cosh\left(A\left(x + \frac{L}{2}\right)\right) + \frac{2(L-a)}{L} \right) + \frac{L-a}{L} \left( x^2 + xL + \frac{L^2}{4} - \frac{2C_2L}{b} \right) \right] \\ \alpha_{>}(x) = \frac{F}{2E'_s\mathcal{I}} \left[ \frac{1}{A^2} \left( \frac{2 \sinh(Aa)}{\sinh(AL)} \cosh\left(A\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) - \frac{2a}{L} \right) - \frac{a}{L} \left( x^2 - xL + aL - \frac{3L^2}{4} + \frac{2C_2L}{a} \right) \right] \end{cases}$$

Maintenant que nous connaissons  $\alpha(x)$ , on peut déterminer la déflexion en intégrant l'équation (3.4). On réécrit cette dernière de manière explicite

$$W_{,x} = -\frac{\mathcal{I} - 2I}{2I}\alpha - \frac{F}{2E'_s I}(\mathcal{H}_2(x) + C_2)$$

La constante d'intégration et  $D$  sont déterminés par les conditions limites suivantes

$$\begin{cases} W_{<}(-\frac{L}{2}) = W_{>}(\frac{L}{2}) = 0 & \text{Déplacement nul aux extrémités} \\ W_{<}(a - \frac{L}{2}) = W_{>}(a - \frac{L}{2}) & \text{Continuité de la déflexion} \end{cases}$$

Les calculs fournissent donc la déflexion globale  $W(x)$ , la rotation locale  $\alpha(x)$  et le déplacement différentiel dans le plan entre les deux couches raides  $D(x)$  :

$$W_{>}(x) = \frac{F}{2E_s' \mathcal{I}} \left[ \frac{\mathcal{I} - 2I}{I} \frac{1}{A^2} \left( -\frac{\sinh(Aa)}{A \sinh(AL)} \sinh\left(A\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) - \frac{a}{L} \left(x - \frac{L}{2}\right) \right) \right. \\ \left. + \frac{a}{L} \left( x^2 \left( -\frac{x}{3} + \frac{L}{2} \right) - \frac{1}{12} (4a^2 - L^2) \left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{L^3}{12} \right) \right] \quad (3.6)$$

$$\alpha_{>}(x) = -\frac{F}{2E_s' \mathcal{I}} \left[ \frac{2}{A^2} \left( -\frac{\sinh(Aa)}{\sinh(AL)} \cosh\left(A\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) + \frac{a}{L} \right) \right. \\ \left. + \frac{a}{L} \left( x(x - L) + \frac{1}{12} (4a^2 - L^2) \right) \right] \quad (3.7)$$

$$D_{>}(x) = \frac{F(h+c)}{4E_s' I A^2} \left[ -\frac{\sinh(Aa)}{\sinh(AL)} \cosh\left(A\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) + \frac{a}{L} \right] \quad (3.8)$$

*Remarque* : Les expressions analytiques dans le domaine complémentaire  $x \in [-\frac{L}{2}; a - \frac{L}{2}]$  (indice "<") sont obtenues en remplaçant  $(x, a)$  par  $(-x, b = L - a)$  dans les expressions précédentes et en changeant le signe des expressions de  $\alpha(x)$ ,  $D(x)$ , et  $T(x)$  mais pas de celles de  $W(x)$ ,  $M(x)$  ni  $\mathcal{M}(x)$ . Par exemple :

$$W_{<}(x) = \frac{F}{2E_s' \mathcal{I}} \left[ \frac{\mathcal{I} - 2I}{I} \frac{1}{A^2} \left( \frac{\sinh(Ab)}{A \sinh(AL)} \sinh\left(A\left(x + \frac{L}{2}\right)\right) + \frac{b}{L} \left(x + \frac{L}{2}\right) \right) \right. \\ \left. + \frac{b}{L} \left( x^2 \left( \frac{x}{3} + \frac{L}{2} \right) + \frac{1}{12} (4b^2 - L^2) \left(x + \frac{L}{2}\right) - \frac{L^3}{12} \right) \right] \quad (3.9)$$

$$\alpha_{<}(x) = \frac{F}{2E_s' \mathcal{I}} \left[ \frac{2}{A^2} \left( \frac{\sinh(Ab)}{\sinh(AL)} \cosh\left(A\left(x + \frac{L}{2}\right)\right) + \frac{b}{L} \right) \right] \quad (3.10)$$

### Détermination des efforts et des moments

L'effort tranchant dans la couche souple moyenné sur toute l'épaisseur  $T(x)$ , le moment local  $M(x)$  généré par la rotation  $\nabla_x W$  et le moment global  $\mathcal{M}(x)$  dû à la rotation  $\alpha$  sont obtenus grâce aux lois de comportements (3.1) et s'écrivent dans le domaine  $x \in [a - \frac{L}{2}; \frac{L}{2}]$

$$T_{>}(x) = \frac{F(\mathcal{I} - 2I)}{\mathcal{I}} \left[ -\frac{\sinh(Aa)}{\sinh(AL)} \cosh\left(A\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) + \frac{a}{L} \right] \quad (3.11)$$

$$M_{>}(x) = \frac{FI}{\mathcal{I}} \left[ -\frac{\mathcal{I} - 2I}{I} \frac{\sinh(Aa)}{A \sinh(AL)} \sinh\left(A\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) - \frac{a}{L} (2x - L) \right] \quad (3.12)$$

$$\mathcal{M}_{>}(x) = -\frac{F(\mathcal{I} - 2I)}{2\mathcal{I}} \left[ -\frac{1}{A} \frac{2 \sinh(Aa)}{\sinh(AL)} \sinh\left(A\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) + \frac{a}{L} (2x - L) \right] \quad (3.13)$$

*Remarque* : Pour les expressions analytiques dans le domaine complémentaire, la remarque du paragraphe précédent s'applique également. Par exemple :

$$T_{<}(x) = \frac{F(\mathcal{I} - 2I)}{\mathcal{I}} \left[ \frac{\sinh(Ab)}{\sinh(AL)} \cosh\left(A\left(x + \frac{L}{2}\right)\right) - \frac{b}{L} \right] \quad (3.14)$$

$$M_{<}(x) = \frac{FI}{\mathcal{I}} \left[ \frac{\mathcal{I} - 2I}{I} \frac{\sinh(Ab)}{A \sinh(AL)} \sinh\left(A\left(x + \frac{L}{2}\right)\right) + \frac{b}{L}(2x + L) \right] \quad (3.15)$$

### Détermination des déformations de section

Une fois les trois descripteurs cinématiques obtenus, il est possible de déterminer entièrement le champ de déformation puis le champ de contrainte. Par exemple, la déformation axiale dans la section à l'abscisse  $x$  s'écrit dans  $\Omega_s$  :

$$\varepsilon_n(x, y) = -\frac{\nu_s}{1 - \nu_s} \left( -\phi_W(y) W''(x) + \phi_D(y) \frac{h+c}{2} (W''(x) - \alpha'(x)) \right) \quad \text{pour } |y| \leq h + \frac{c}{2} \quad (3.16)$$

où l'on rappelle les fonctions de forme :

$$\phi_W(y) = y \quad \text{et} \quad \phi_D(y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y \in [\frac{c}{2}; h + \frac{c}{2}] \\ \frac{2y}{c} & \text{pour } y \in [-\frac{c}{2}; \frac{c}{2}] \\ -1 & \text{pour } y \in [-h - \frac{c}{2}; -\frac{c}{2}] \end{cases}$$

Les expressions analytiques seront développées dans le cas d'une flexion symétrique.

### Principe de superposition

La résolution précédente permet par principe de superposition, d'accéder à tout les champs (cinématiques et efforts) quelque soit le chargement imposé à la plaque, à condition qu'il soit indépendant de  $x_2$ .

#### 3.1.2 Cas de la flexion symétrique

Dans le cas d'un chargement en flexion trois points symétrique, on a  $a = \frac{L}{2}$  et les expressions précédentes dans la plaque entière, i.e.  $|x| \leq \frac{L}{2}$ , se simplifient. Les variables cinématiques s'écrivent :

$$W(x) = -\frac{F}{4E'_s \mathcal{I}} \left( \frac{\mathcal{I} - 2I}{I} \frac{1}{A^2} \left( \frac{\sinh(A(|x| - \frac{L}{2}))}{A \cosh(\frac{AL}{2})} - (|x| - \frac{L}{2}) \right) + \frac{L^3}{12} \left( 4 \frac{|x|^3}{L^3} - 6 \frac{x^2}{L^2} + 1 \right) \right) \quad (3.17)$$

$$\alpha(x) = \frac{F}{2E'_s \mathcal{I}} \left( \text{sign}(x) \frac{1}{A^2} \left( \frac{\cosh(A(|x| - \frac{L}{2}))}{\cosh(\frac{AL}{2})} - 1 \right) + x \frac{L - |x|}{2} \right) \quad (3.18)$$

$$D(x) = \frac{F(h+c)}{8E'_s I A^2} \left( -\frac{\cosh(A(|x| - \frac{L}{2}))}{\cosh(\frac{AL}{2})} + 1 \right) \text{sign}(x) \quad (3.19)$$

où on rappelle que  $A^{-1}$  est la taille caractéristique intrinsèque du phénomène de flexion/cisaillement dans une plaque HCS définie par :

$$A^2 = \frac{K\mathcal{I}}{2E'_s I(\mathcal{I} - 2I)} = \frac{\mu_c \mathcal{I}}{E'_s I} \frac{1}{hc} \quad (3.20)$$

Les calculs de  $T(x)$ ,  $\mathcal{M}(x)$ , et  $M(x)$  sont similaires et donnent :

$$T(x) = \frac{F(\mathcal{I} - 2I)}{\mathcal{I}} \left[ -\frac{1}{2 \cosh(AL/2)} \cosh\left(A\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) + \frac{1}{2} \right] \quad (3.21)$$

$$M(x) = \frac{FI}{\mathcal{I}} \left[ -\frac{\mathcal{I} - 2I}{I} \frac{1}{2A \cosh(AL/2)} \sinh\left(A\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) - \frac{1}{2}(2x - L) \right] \quad (3.22)$$

$$\mathcal{M}(x) = -\frac{F(\mathcal{I} - 2I)}{2\mathcal{I}} \left[ -\frac{1}{A} \frac{1}{\cosh(AL/2)} \sinh\left(A\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}(2x - L) \right] \quad (3.23)$$

Les variations des variables, des efforts, et moments le long de la plaque sont tracés en Figure (3.4) pour une valeur constante  $E'_s = 74\text{GPa}$  et trois valeurs  $\mu_c = \{10^4; 10^7; 10^8\}\text{Pa}$ . Elles correspondent à trois valeurs du paramètre adimensionnel  $AL$ , soit 0.097, 3.07 et 9.7.

Les résultats obtenus montrent des différences significatives en fonction de  $AL$ . On retrouve la description des plaques monolithiques quand  $AL \rightarrow \infty$  tandis qu'elle tend vers celle des plaques bicouches quand  $AL \rightarrow 0$ . D'après l'expression (3.5) de  $A$ , ces comportements limites sont atteints respectivement quand  $\mu_c \gg E'_s \frac{I}{\mathcal{I}} \frac{hc}{L^2}$  (couche centrale raide) ou  $\mu_c \ll E'_s \frac{I}{\mathcal{I}} \frac{hc}{L^2}$  (raideur de la couche centrale négligeable).

La forte sensibilité du modèle au paramètre  $AL$  est également mise en évidence en considérant la déformation axiale (3.16) dans la section à mi-travée pour le chargement symétrique :

$$\varepsilon_{n,\pm}(0,y) = -\frac{F\nu_s}{4(1-\nu_s)E'_s \mathcal{I}} \left( -y + \frac{\tanh\left(\frac{AL}{2}\right)}{\frac{AL}{2}} \left( -\frac{\mathcal{I} - 2I}{2I} y \pm \frac{\mathcal{I}}{2I} \frac{h+c}{2} \right) \right) L$$

où l'indice "+" (resp. "-") dénote la couche raide supérieure (resp. inférieure). Cette déformation s'écrit dans le cas limite monolithique :

$$\varepsilon_{n,\pm}(0,y) \underset{AL \rightarrow \infty}{=} \frac{\nu_s}{1-\nu_s} \frac{FL}{4E'_s \mathcal{I}} y \quad (3.24)$$

Dans le cas limite bicouche, elle s'écrit (rappelons que  $\tanh(x) \underset{x \rightarrow 0}{\simeq} x$ ) :

$$\varepsilon_{n,\pm}(0,y) \underset{AL \rightarrow 0}{=} -\frac{\nu_s}{1-\nu_s} \frac{FL}{8E'_s I} \left( -y \pm \frac{h+c}{2} \right) \quad (3.25)$$

La Figure 3.5 montre que  $\varepsilon_n$  passe d'une variation linéaire quand  $AL \rightarrow \infty$  à bi-linéaire quand  $AL \rightarrow 0$ .

### 3.1.3 Flexion de plaques asymétriques

Considérons une plaque HCS  $\Omega$  composée de deux couches raides  $\Omega_{s_1}$  et  $\Omega_{s_2}$ , d'épaisseur respective  $h_1$  et  $h_2$ , parfaitement connectée à une couche souple  $\Omega_c$  d'épaisseur  $c$  (voir Figure 3.6), soit une épaisseur totale  $h_\Omega = h_1 + h_2 + c$ . On note  $\bar{h} = \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} + c$  la distance entre les plans moyens des couches raides.

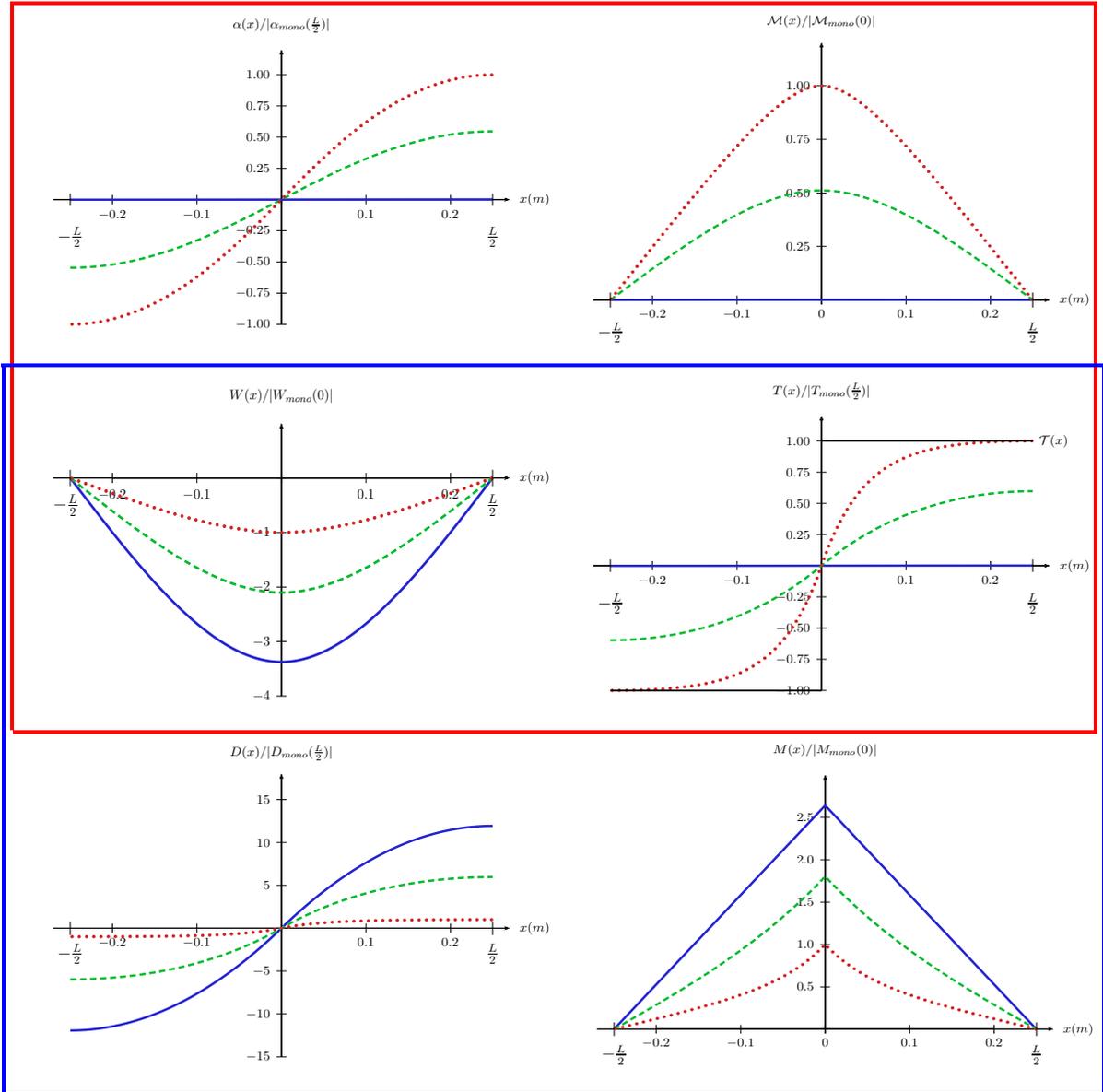
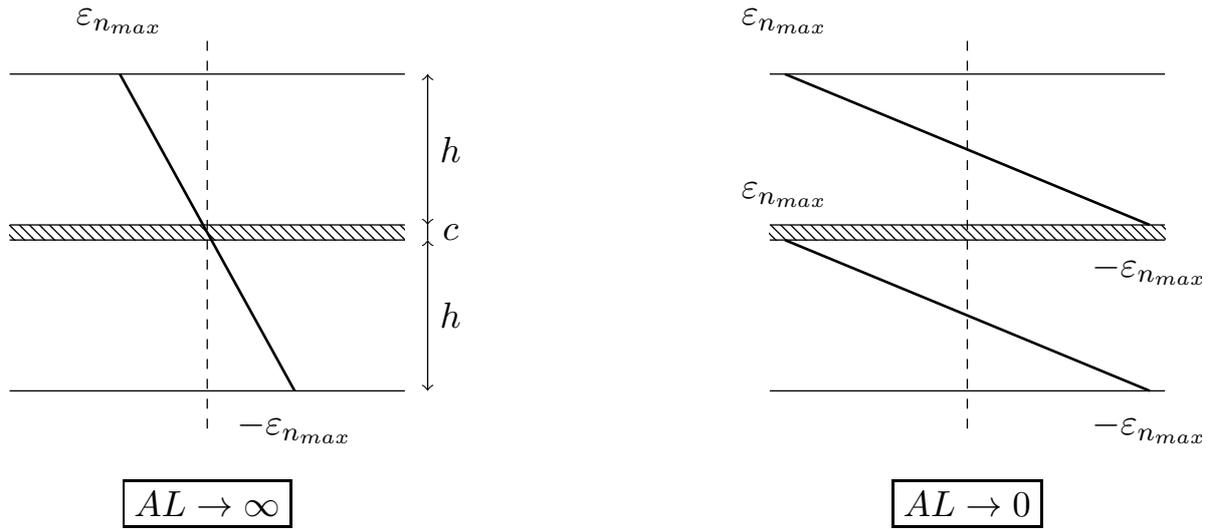


FIGURE 3.4 – Variables normalisées pour  $\mu_c = \{10^4(\text{bleu}); 10^7(\text{vert}); 10^8(\text{rouge})\}$  Pa et  $E'_s = 74\text{GPa}$ . La géométrie de la plaque est définie par  $L = 0.5$  m;  $h = 18.5\text{mm}$ ;  $c = 1.8\text{mm}$ . Les figures dans le cadre rouge illustrent les variables nécessaires à la description d'une plaque monolithique ( $AL \rightarrow \infty$ ) tandis que celles dans le cadre bleu illustrent les variables servant à décrire le comportement d'une plaque bicouche ( $AL \rightarrow 0$ ). Le modèle généralisé correspond à une valeur finie de  $AL$  et toutes les variables sont nécessaires pour une description complète.

Nous avons vu dans la Section 2.5.6 que le comportement hors plan de cette plaque sous flexion cylindrique est régi par un ensemble d'équations quasiment identiques à celui des plaques symétriques :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{T}_{,x} = \mathcal{F} & ; \quad T = K'(W_{,x} - \alpha) \\ \mathcal{T} = -M_{,x} + T & ; \quad M = E'_s(I_1 + I_2)W_{,xx} \\ T = -\mathcal{M}_{,x} & ; \quad \mathcal{M} = E'_s(\mathcal{I} - (I_1 + I_2))\alpha_{,x} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad K' = \frac{\mu_c \bar{h}^2}{c} \quad (3.26)$$



$$\varepsilon_{n_{max}} = -\frac{\nu_s}{1-\nu_s} \frac{FL}{4E'_s \mathcal{I}} \left( h + \frac{c}{2} \right)$$

$$\varepsilon_{n_{max}} = -\frac{\nu_s}{1-\nu_s} \frac{FLh}{16E'_s \mathcal{I}}$$

FIGURE 3.5 – Déformation axiale dans la section  $x = 0$  pour une plaque HCS symétrique soumise à une sollicitation en flexion trois points cylindrique symétrique.

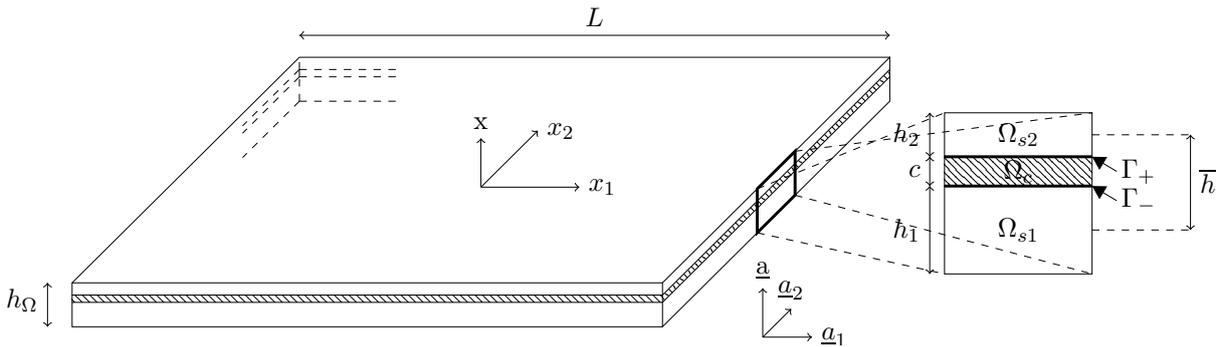


FIGURE 3.6 – Plaque HCS asymétrique composée de deux couches externes raides parfaitement connectées à une couche centrale souple  $\Omega_c$ .  $\Omega_s = \Omega_{s1} \cup \Omega_{s2}$  et  $\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_+$  représentent respectivement le domaine des couches raides et les interfaces avec la couche souple.

où  $\mathcal{I} = I_1 + I_2 + \bar{h}^2 h^*$  est l'inertie de section de la plaque entière  $\Omega$ ,  $I_1 = \frac{h_1^3}{12}$  et  $I_2 = \frac{h_2^3}{12}$  sont les inerties de section respectives des couches  $\Omega_{s1}$  et  $\Omega_{s2}$  et  $h^* = \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right)^{-1}$  un paramètre permettant de simplifier les expressions. La méthode de détermination des trois descripteurs cinématiques, des efforts et des moments est identique à celle utilisée dans le cas des plaques symétriques (Section 2.5). Ainsi, il suffit de reprendre les expressions obtenues dans la section précédente (pour un chargement symétrique), en remplaçant les termes d'inertie  $2I$  par  $I_1 + I_2$  et  $A$  par  $A'$  avec  $A'^{-1}$  taille caractéristique intrinsèque du phénomène de flexion/cisaillement dans une plaque HCS définie par :

$$A'^2 = \frac{K\mathcal{I}}{E'_s(I_1 + I_2)(\mathcal{I} - (I_1 + I_2))} = \frac{\mu_c}{E'_s} \frac{\mathcal{I}}{I_1 + I_2} \frac{1}{h^*c} \quad (3.27)$$

Comme dans le cas des plaques symétriques, la sensibilité du modèle au paramètre  $A'L$  est particulièrement mise en évidence en considérant la déformation axiale dans la section à mi-travée pour un chargement symétrique :

$$\varepsilon_n(0,y) = -\frac{\nu_s}{1-\nu_s} \frac{FL}{4E'_s \mathcal{I}} \left( -\phi_W(y) + \frac{\tanh\left(\frac{A'L}{2}\right)}{\frac{A'L}{2}} \left( -\frac{\mathcal{I} - (I_1 + I_2)}{I_1 + I_2} \phi_W(y) + \frac{\mathcal{I}}{I_1 + I_2} \frac{\bar{h}}{2} \phi_D(y) \right) \right) \quad (3.28)$$

où l'on rappelle les fonctions de forme dans le cas des plaques asymétriques :

$$\phi_W(y) = y - \frac{c(h_2 - h_1)}{2(h_1 + h_2)} \quad \text{et} \quad \phi_D(y) = \begin{cases} \frac{2h_1}{h_1+h_2} & \text{pour } y \in [\frac{h_\Omega}{2} - h_2; \frac{h_\Omega}{2}] \\ \frac{2y}{c} + \frac{(h_2-h_1)(h_1+h_2-c)}{c(h_1+h_2)} & \text{pour } y \in [-\frac{h_\Omega}{2} + h_1; \frac{h_\Omega}{2} - h_2] \\ -\frac{2h_2}{h_1+h_2} & \text{pour } y \in [-\frac{h_\Omega}{2}; -\frac{h_\Omega}{2} + h_1] \end{cases}$$

Cette déformation s'écrit dans le cas limite monolithique :

$$\varepsilon_n(0,y) \underset{A'L \rightarrow \infty}{=} \frac{\nu_s}{1-\nu_s} \frac{FL}{4E'_s \mathcal{I}} \left( y - \frac{c(h_2 - h_1)}{2(h_1 + h_2)} \right) \quad (3.29)$$

Dans le cas limite bicouche, elle s'écrit (rappelons que  $\tanh(x) \underset{x \rightarrow 0}{\simeq} x$ ) :

$$\varepsilon_n(0,y) \underset{A'L \rightarrow 0}{=} -\frac{\nu_s}{1-\nu_s} \frac{FL}{4E'_s (I_1 + I_2)} \left( -\phi_W(y) + \frac{\bar{h}}{2} \phi_D(y) \right) \quad (3.30)$$

Après simplification, on obtient dans chacune des couches raides :

$$\varepsilon_n(0,y) \underset{A'L \rightarrow 0}{=} -\frac{\nu_s}{1-\nu_s} \frac{FL}{4E'_s (I_1 + I_2)} \left( -y + \frac{c + h_1}{2} \right) \quad \text{dans } \Omega_{s_1} \quad (3.31)$$

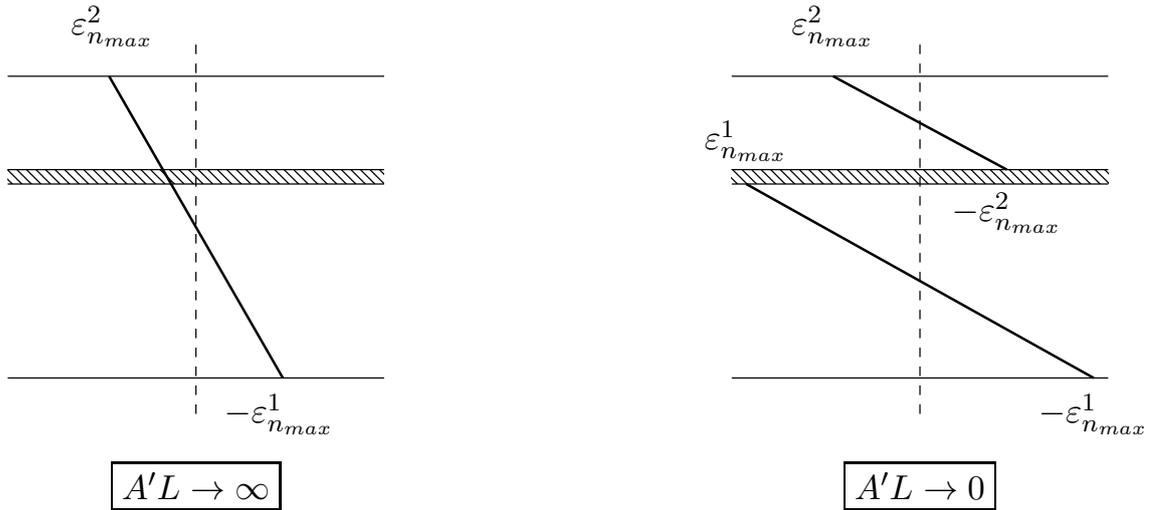
$$\varepsilon_n(0,y) \underset{A'L \rightarrow 0}{=} -\frac{\nu_s}{1-\nu_s} \frac{FL}{4E'_s (I_1 + I_2)} \left( -y - \frac{c + h_2}{2} \right) \quad \text{dans } \Omega_{s_2} \quad (3.32)$$

On retrouve sur la Figure 3.7 que  $\varepsilon_n$  passe d'une variation linéaire quand  $AL \rightarrow \infty$  à bilinéaire quand  $AL \rightarrow 0$ .

## 3.2 Flexion 4 points et chargement uniforme

On donne dans ce paragraphe un tableau récapitulatif des cinématiques, des efforts et des moments engendrés dans une plaque HCS symétrique à deux couches raides en flexion quatre points ou soumise à un chargement uniforme (toujours pour une plaque bi-appuyée sous flexion cylindrique).

Ces résultats ont été établis par des calculs similaires à ceux développés dans la section précédente. Dans le cas de la charge répartie  $q$ , nous avons appliqué strictement la méthode précédente en prenant  $\mathcal{F}(x) = q$ . Pour la flexion symétrique quatre points, nous avons superposé



$$\varepsilon_{n_{max}}^1 = -\frac{\nu_s}{1-\nu_s} \frac{FL}{4E'_s \mathcal{I}} \left( \frac{2ch_2 + (h_1+h_2)^2}{h_1+h_2} \right)$$

$$\varepsilon_{n_{max}}^1 = -\frac{\nu_s}{1-\nu_s} \frac{FLh_1}{8E'_s (I_1+I_2)}$$

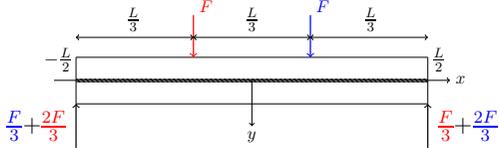
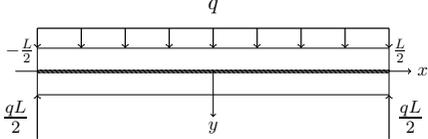
$$\varepsilon_{n_{max}}^2 = -\frac{\nu_s}{1-\nu_s} \frac{FL}{4E'_s \mathcal{I}} \left( \frac{2ch_1 + (h_1+h_2)^2}{h_1+h_2} \right)$$

$$\varepsilon_{n_{max}}^2 = -\frac{\nu_s}{1-\nu_s} \frac{FLh_2}{8E'_s (I_1+I_2)}$$

FIGURE 3.7 – Déformation axiale dans la section  $x = 0$  pour une plaque HCS asymétrique soumise à une sollicitation en flexion trois points cylindrique symétrique.

les champs obtenus en flexion trois points pour  $a = \frac{L}{3}$  et  $\frac{2L}{3}$  (se rapporter aux figures dans le tableau).

Les expressions des déformations et des contraintes obtenues analytiquement dans la Section 2.2 sont toujours applicables pour ces cas standards.

	$W( x  > \frac{L}{3}) = -\frac{F}{2E_s' \mathcal{I}} \left[ \frac{\mathcal{I}-2\mathcal{I}}{\mathcal{I}} \frac{1}{A^2} \left( \frac{\sinh(A( x -\frac{L}{2}))}{A \sinh(AL)} (\sinh(\frac{AL}{3}) + \sinh(\frac{2AL}{3})) -  x  + \frac{L}{2} \right) + \frac{ x ^3}{3} - \frac{x^2 L}{2} + \frac{L^2}{36} ( x  - \frac{L}{2}) + \frac{L^3}{12} \right]$ $W( x  < \frac{L}{3}) = -\frac{F}{2E_s' \mathcal{I}} \left[ \frac{\mathcal{I}-2\mathcal{I}}{\mathcal{I}} \frac{1}{A^2} \frac{\sinh(AL/3)}{A \sinh(AL)} (\sinh(A(x - \frac{L}{2})) - \sinh(A(x + \frac{L}{2}))) + \frac{x^2 L}{3} - \frac{23L^3}{324} \right]$
$\mathcal{F}(x) = F \left( \delta(x - \frac{L}{6}) + \delta(x + \frac{L}{6}) \right) - \delta(x + \frac{L}{2}) - \delta(x - \frac{L}{2})$	$\alpha( x  > \frac{L}{3}) = \text{sign} \left( x + \frac{L}{3} \right) \frac{F}{2E_s' \mathcal{I}} \left[ \frac{2}{A^2} \left( \frac{\cosh(A( x -\frac{L}{2}))}{\sinh(AL)} (\sinh(\frac{AL}{3}) + \sinh(\frac{2AL}{3})) - 1 \right) - x^2 +  x L - \frac{L^2}{36} \right]$
$\mathcal{T}(x) = F \left( H(x - \frac{L}{6}) + H(x + \frac{L}{6}) \right) - H(x + \frac{L}{2}) - H(x - \frac{L}{2})$	$\alpha( x  < \frac{L}{3}) = \frac{F}{2E_s' \mathcal{I}} \left[ \frac{2}{A^2} \frac{\sinh(AL/3)}{\sinh(AL)} (\cosh(A(x - \frac{L}{2})) - \cosh(A(x + \frac{L}{2}))) + \frac{2xL}{3} \right]$
$T( x  < \frac{L}{3}) = \frac{2\mu_c \bar{h}}{c} D( x  < \frac{L}{3}) = -\frac{F(\mathcal{I}-2\mathcal{I})}{\mathcal{I}} \frac{\sinh(AL/3)}{\sinh(AL)} [\cosh(A(x - \frac{L}{2})) - \cosh(A(x + \frac{L}{2}))]$	$T( x  > \frac{L}{3}) = \frac{2\mu_c \bar{h}}{c} D( x  > \frac{L}{3}) = -\text{sign} \left( x + \frac{L}{3} \right) \frac{F(\mathcal{I}-2\mathcal{I})}{\mathcal{I}} \left[ \frac{\cosh(A( x -\frac{L}{2}))}{\sinh(AL)} (\sinh(\frac{AL}{3}) + \sinh(\frac{2AL}{3})) - 1 \right]$
$M( x  < \frac{L}{3}) = -\frac{F\mathcal{I}}{\mathcal{I}} \left[ \frac{\mathcal{I}-2\mathcal{I}}{\mathcal{I}} \frac{\sinh(AL/3)}{A \sinh(AL)} (\sinh(A(x - \frac{L}{2})) - \sinh(A(x + \frac{L}{2}))) + \frac{2L}{3} \right]$	$M( x  > \frac{L}{3}) = -\frac{F\mathcal{I}}{\mathcal{I}} \left[ \frac{\mathcal{I}-2\mathcal{I}}{\mathcal{I}} \frac{\sinh(A( x -\frac{L}{2}))}{A \sinh(AL)} (\sinh(\frac{AL}{3}) + \sinh(\frac{2AL}{3})) + 2 x  + \frac{L^3}{12} \right]$
$\mathcal{M}( x  < \frac{L}{3}) = \frac{F(\mathcal{I}-2\mathcal{I})}{\mathcal{I}} \left[ \frac{\sinh(AL/3)}{A \sinh(AL)} (\sinh(A(x - \frac{L}{2})) - \sinh(A(x + \frac{L}{2}))) + \frac{L}{3} \right]$	$\mathcal{M}( x  > \frac{L}{3}) = \frac{F(\mathcal{I}-2\mathcal{I})}{\mathcal{I}} \left[ \frac{\sinh(A( x -\frac{L}{2}))}{A \sinh(AL)} (\sinh(\frac{AL}{3}) + \sinh(\frac{2AL}{3})) -  x  + \frac{L}{2} \right]$
	$W(x) = -\frac{qL^4}{E_s' \mathcal{I}} \left( \frac{\mathcal{I}-2\mathcal{I}}{2\mathcal{I}} \frac{1}{(AL)^2} \left( \frac{\cosh(Ax)}{(AL)^2 \cosh(\frac{AL}{2})} - \frac{1}{(AL)^2} - \left( \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \frac{1}{8} \right) \right) + \left( \frac{1}{24} \left( \frac{x}{L} \right)^4 - \frac{1}{16} \left( \frac{x}{L} \right)^2 + \frac{5}{384} \right) \right)$
$\mathcal{F}(x) = q$	$\alpha(x) = \frac{q}{E_s' \mathcal{I}} \left( \frac{\sinh(Ax)}{A^3 \cosh(AL/2)} - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{A^2} \left( 1 - \frac{(AL)^2}{8} \right) x \right)$
$\mathcal{T}(x) = qx$	$M(x) = -\frac{q\mathcal{I}}{\mathcal{I}} \left( \frac{\mathcal{I}-2\mathcal{I}}{A^2 \mathcal{I}} \left( \frac{\cosh(Ax)}{\cosh(AL/2)} - 1 \right) + x^2 - \frac{L^2}{4} \right)$
$T(x) = \frac{2\mu_c \bar{h}}{c} D(x) = \frac{2q(\mathcal{I}-2\mathcal{I})}{\mathcal{I}} \left( \frac{\sinh(Ax)}{A \cosh(AL/2)} - x \right)$	$\mathcal{M}(x) = -\frac{q(\mathcal{I}-2\mathcal{I})}{\mathcal{I}} \left( \frac{2}{A^2} \left( \frac{\cosh(Ax)}{\cosh(AL/2)} - 1 \right) - x^2 + \frac{L^2}{4} \right)$

### 3.3 Chargement avec condition mouvement de corps rigide imposé aux extrémités

Nous avons vu dans le chapitre précédent que trois variables cinématiques étaient nécessaires à la description du comportement d'une plaque HCS. L'objectif de cette section est de déterminer l'influence de la cinématique non-classique décrite par la variable  $D(x)$ , et la sensibilité de la réponse de la plaque à cette variable. Pour cela, on considère une plaque HCS, toujours décrite par l'ensemble (3.1), et soumise à un essai de flexion trois points symétrique (soit  $a = L/2$ ). Cependant, on impose maintenant que les extrémités suivent un mouvement de corps rigide (par exemple en collant une plaque infiniment rigide sur la tranche du laminé), et on détermine la variation des champs, en particulier celle de la cinématique différentiel  $D(x)$  dans la plaque sous ces conditions de plaque monolithique aux bords.

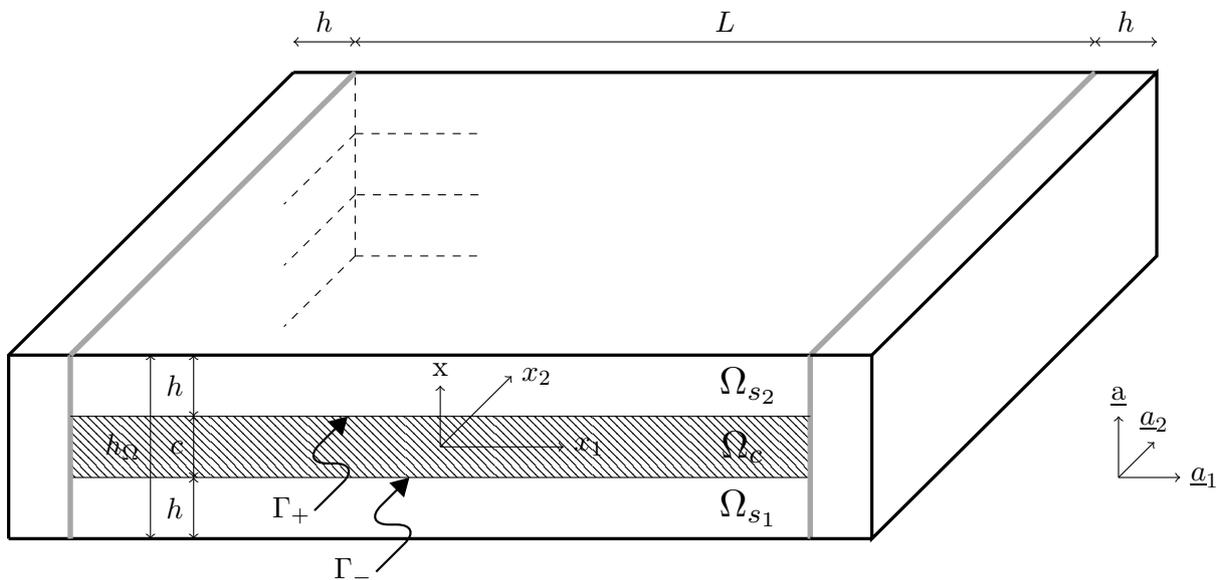


FIGURE 3.8 – Plaque HCS à bords collés *i.e.* avec conditions aux limites de glissement nul  $D_c(\pm \frac{L}{2}) = 0$

En terme de conditions aux limites, on impose un déplacement différentiel entre les deux couches raides nul aux appuis  $D_c(\pm \frac{L}{2}) = 0$  soit  $\alpha_c(\pm \frac{L}{2}) = \nabla W_c(\pm \frac{L}{2})$ , où l'indice "c" désigne dans cette section un champ dans la plaque à bords collés. Les conditions aux limites s'écrivent donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} W_c(\pm \frac{L}{2}) = 0 & \text{Déplacement nul aux extrémités} \\ (\mathcal{M}_c + M_c)(\pm \frac{L}{2}) = 0 & \text{Somme des moments nulle aux extrémités} \\ \alpha_c(\pm \frac{L}{2}) = \nabla W_c(\pm \frac{L}{2}) & \text{Couches raides collées aux extrémités} \end{array} \right.$$

En tenant compte de la symétrie du chargement, nous pouvons considérer dans le domaine

$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$  de la plaque les conditions aux limites équivalentes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} W_c(\frac{L}{2}) = 0 & \text{Déplacement nul à l'appui} \\ (\mathcal{M}_c + M_c)(\frac{L}{2}) = 0 & \text{Somme des moments nulle à l'appui} \\ \mathcal{T}_c(0) = 0 & \text{Effort tranchant nul à mi-travée} \\ \alpha_c(0) = 0, W_{c,x}(0) = 0 & \text{Rotation locale et globale nulles à mi-travée} \\ \alpha_c(\pm \frac{L}{2}) = \nabla W_c(\pm \frac{L}{2}) & \text{Couches raides collées aux extrémités} \end{array} \right.$$

La méthode de résolution reste inchangée et n'est donc pas redéveloppée ici. Elle fournit tout d'abord la rotation locale pour  $|x| \leq \frac{L}{2}$

$$\alpha_c(x) = \frac{F}{2E'_s \mathcal{I}} \text{sign}(x) \left( \frac{1}{A^2} \left( \frac{\sinh(A|x|)}{\sinh(\frac{AL}{2})} (1 - e^{AL/2}) + e^{A|x|} - 1 \right) + \frac{-x^2 + L|x|}{2} \right)$$

Puis une fois que  $\alpha(x)_c$  est connue, on détermine la déflexion

$$W_c(x) = -\frac{F}{4E'_s \mathcal{I}} \left( \frac{\mathcal{I} - 2I}{I} \frac{1}{A^2} \left( \frac{1 - e^{AL/2}}{A \sinh(\frac{AL}{2})} (\cosh(Ax) - \cosh(\frac{AL}{2})) + \frac{e^{A|x|} - e^{AL/2}}{A} - (|x| - \frac{L}{2}) \right) + \frac{L^3}{12} (4 \frac{|x|^3}{L^3} - 6 \frac{x^2}{L^2} + 1) \right)$$

et le déplacement différentiel

$$D_c(x) = \text{sign}(x) \frac{F(h+c)}{8E'_s I} \frac{1}{A^2} \left( \frac{\sinh(A|x|)}{\sinh(\frac{AL}{2})} (1 - e^{AL/2}) + e^{A|x|} - 1 \right)$$

En terme d'efforts et de moments, les équations constitutives (3.1) permettent de déduire :

$$T_c(x) = \frac{F(\mathcal{I} - 2I)}{2\mathcal{I}} \left( \frac{\sinh(A|x|)}{\sinh(\frac{AL}{2})} (1 - e^{AL/2}) + e^{A|x|} - 1 \right)$$

$$M_c(x) = -\frac{FI}{2\mathcal{I}} \left( \frac{\mathcal{I} - 2I}{I} \frac{1}{A} \left( \frac{\cosh(Ax)}{\sinh(\frac{AL}{2})} (1 - e^{AL/2}) + e^{A|x|} \right) + \frac{L^3}{12} \left( \frac{24|x|}{L^3} - \frac{12}{L^2} \right) \right)$$

$$\mathcal{M}_c(x) = \frac{F(\mathcal{I} - 2I)}{2\mathcal{I}} \left( \frac{1}{A} \left( \frac{\cosh(Ax)}{\sinh(\frac{AL}{2})} (1 - e^{AL/2}) + e^{A|x|} \right) - |x| + \frac{L}{2} \right)$$

D'après les expressions des champs ci-dessus, il apparaît que le comportement de la plaque est bien un comportement de plaque HCS et non monolithique, bien qu'on impose des conditions limites monolithiques. On notera en particulier que si la couche intermédiaire est viscoélastique, cette plaque est sujette aux phénomènes de fluage/relaxation puisque le paramètre  $A$  fait intervenir le coefficient de cisaillement viscoélastique  $\mu_c$ .

### Comparaison avec une plaque à bords libres

Intéressons-nous aux efforts aux extrémités ( $x = \pm \frac{L}{2}$ ) dans les cas d'une plaque à bords libres et à bords collés. Dans le premier cas, les expressions (3.17), (3.18) et (3.19) insérées dans les équations constitutives (3.1) donnent :

$$T_l(\pm \frac{L}{2}) = 0 \quad M_l(\pm \frac{L}{2}) = 0 \quad \mathcal{M}_l(\pm \frac{L}{2}) = 0$$

où l'indice  $l$  désigne un champ dans la plaque à bords libres. Dans le second cas, on a également  $T_c(\pm \frac{L}{2}) = T_l(\pm \frac{L}{2}) = 0$ . Néanmoins, le moment global et le moment local ne sont plus nuls aux appuis et s'écrivent :

$$M_c(\pm \frac{L}{2}) = -\mathcal{M}_c(\pm \frac{L}{2}) = \frac{F(\mathcal{I} - 2I)}{2\mathcal{I}} \left( \frac{1}{A} \left( \cotan(\frac{AL}{2})(1 - e^{AL/2}) + e^{AL/2} \right) \right)$$

Ainsi, même si la somme des moments est nulle aux appuis, il existe des efforts internes engendrés par le mouvement de corps rigide imposé.

Afin de vérifier si les effets viscoélastiques sont négligeables ou non dans une plaque à bords collés, comparons la déflexion à mi-travée  $W_c(x=0)$  :

$$W_c(0) = -\frac{FL^3}{48E'_s\mathcal{I}} \left( 1 - \frac{\mathcal{I} - 2I}{I} \frac{6}{(AL)^2} \left( \frac{\tanh(\frac{AL}{4})}{\frac{AL}{4}} - 1 \right) \right) \quad ; \quad A = \sqrt{\frac{K\mathcal{I}}{2E'_sI(\mathcal{I} - 2I)}}$$

à l'expression (3.17) (prise en  $x=0$ ) obtenue précédemment dans le cas des bords libres :

$$W_l(0) = -\frac{FL^3}{48E'_s\mathcal{I}} \left( 1 - \frac{\mathcal{I} - 2I}{I} \frac{6}{(AL)^2} \left( \frac{\tanh(\frac{AL}{2})}{\frac{AL}{2}} - 1 \right) \right)$$

Pour cela, on trace les flèches normalisées  $|\frac{W_l(0)}{W_{lm}(0)}|$  et  $|\frac{W_c(0)}{W_{cm}(0)}|$  en fonction du paramètre adimensionnel  $AL$  (Figure (3.9)). L'indice  $m$  dénote la limite monolithique (*i.e.* obtenu lorsque  $AL \rightarrow \infty$ ) du champ soit  $W_{lm}(0) = W_{cm}(0) = -\frac{FL^3}{48E'_s\mathcal{I}}$ . La géométrie de la plaque est prise identique au cas de la partie précédente, soit  $h = 18.5mm$  et  $c = 1.8mm$ .

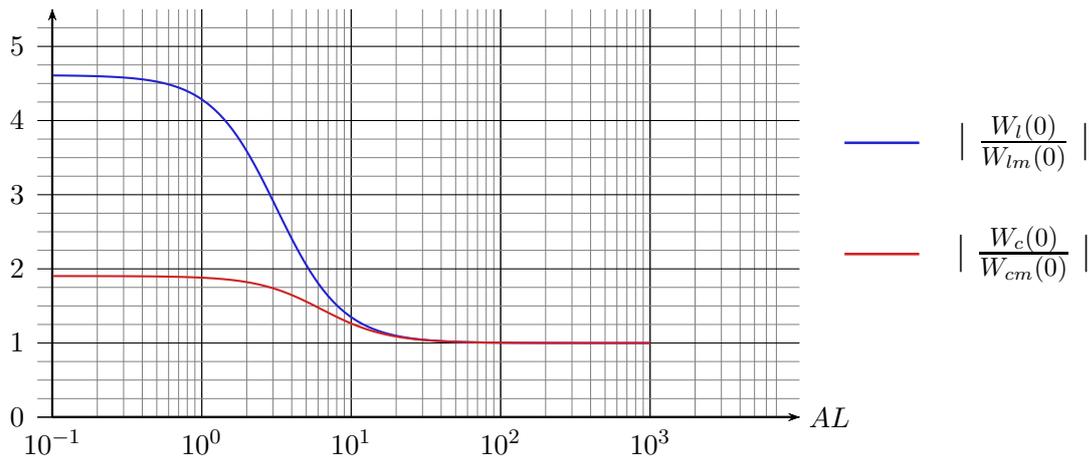


FIGURE 3.9 – Flèche normalisée à mi-travée en fonction du paramètre adimensionnel  $AL$  dans le cas de bords libres (bleu) et collés (rouge).

On retrouve qu'il existe un rapport d'environ 4 entre la flèche à mi-travée d'une plaque à

bords libres bicouche (soit  $AL \rightarrow 0$ ) et celle d'une plaque à bords libres monolithique (soit  $AL \rightarrow \infty$ ). Ce rapport n'est pas exactement de 4 car le rapport des inerties de section entre le cas d'une plaque monolithique et celui d'une plaque bicouche s'écrit  $\frac{(2h+c)^3}{2h^3}$ . Ce résultat est cohérent avec celui illustré par le graphique de la Figure 3.4.

### 3.4 Dynamique d'une plaque HCS élastique

L'analyse d'une plaque HCS en régime harmonique (voir Section 2.3.2) a montré que son comportement hors-plan dépend non seulement des paramètres géométriques et mécaniques de chacune des couches, mais également de la fréquence de la sollicitation. L'objectif de cette section est d'étudier le comportement dynamique d'une plaque HCS élastique à deux couches raides, décrite par le modèle Tri-Laplacien déterminé précédemment par méthode de développements asymptotiques. On se place dans le cas d'une plaque encastree à la base et libre à l'autre extrémité, et on montre qu'il est possible (bien que fastidieux) de déterminer ses fréquences et modes propres. Les caractéristiques dynamiques obtenues sont comparées à celles des modèles classiques monolithique/bicouche de Kirchhoff, Reissner-Mindlin et flexion/cisaillement.

#### 3.4.1 Rappel du modèle dynamique

Considérons une plaque HCS symétrique constituée de deux couches raides d'épaisseur  $h$  et de module réduit  $E'_s$  connectées par une couche souple d'épaisseur  $c$  et de module de cisaillement  $\mu_c$ . Les notations utilisées pour la suite de la section sont identiques aux cas précédents et reprises par la Figure 3.10.

Rappelons que le comportement hors-plan des plaques HCS en régime dynamique harmonique de pulsation  $\omega$  est régie par l'ensemble d'équations d'équilibre suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{T}}) &= -\omega^2 \rho_m W \\ \underline{\mathcal{T}} &= -\operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{M}}) + \underline{\mathcal{T}} \\ \underline{\mathcal{T}} &= -\operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{M}}) \end{cases} \quad (3.33)$$

où les efforts et les moments  $\underline{\mathcal{T}}$ ,  $\underline{\mathcal{M}}$  et  $\underline{\mathcal{M}}$  sont définis par les lois de comportement suivantes, écrites sous forme scalaire pour une sollicitation cylindrique :

$$\begin{cases} T &= K(W_{,x} - \alpha) & \text{avec} & K = \mu_c(h+c)^2/c \\ M &= 2E'_s I W_{,xx} \\ \mathcal{M} &= E'_s (\mathcal{T} - 2I)\alpha_{,x} \end{cases} \quad (3.34)$$

où on rappelle que l'indice  $_{,x}$  désigne une dérivée simple par rapport à  $x$ , l'indice  $_{,xx}$  désigne une dérivée double par rapport à  $x$ , et ainsi de suite. En injectant ces lois dans les équations d'équilibre (3.33), on montre que le comportement hors-plan d'une plaque HCS à deux couches raides est régi par une équation Tri-Laplacienne dont les coefficients des termes sont les paramètres géométriques et mécaniques des constituants de la plaque :

$$\frac{2E'_s I}{K} W_{,xxxxx}(x) - \frac{E'_s \mathcal{T}}{E'_s (\mathcal{T} - 2I)} W_{,xxx}(x) - \frac{\rho_m \omega^2}{K} W_{,xx}(x) + \frac{\rho_m \omega^2}{E'_s (\mathcal{T} - 2I)} W(x) = 0 \quad (3.35)$$

Pour la suite, exprimons  $\alpha(x)$  en fonction de la déflexion  $W(x)$ . Pour cela, on détermine tout

d'abord l'expression de  $\alpha_{,x}(x)$  grâce à l'équation d'équilibre d'effort tranchant (3.33)-a et aux expressions (3.34)-a et (3.34)-b :

$$\mathcal{T}_{,x} = -M_{,xx} + T_{,x} = -2E'_s I W_{,xxxx} + K(W_{,xx} - \alpha_{,x}) = -\rho_m \omega^2 W$$

d'où

$$\alpha_{,x}(x) = \frac{\rho_m \omega^2}{K} W(x) + W_{,xx}(x) - \frac{2E'_s I}{K} W_{,xxxx}(x) \quad (3.36)$$

Isolons ensuite  $\alpha(x)$  dans l'équation d'équilibre des moments (3.34)-c :

$$T = -\mathcal{M}_{,x} \Rightarrow K(W_{,x} - \alpha) = -E'_s(\mathcal{I} - 2I)\alpha_{,xx} \Rightarrow \alpha = W_{,x} + \frac{E'_s(\mathcal{I} - 2I)}{K}\alpha_{,xx}$$

d'où

$$\Rightarrow \alpha(x) = W_{,x}(x) + \frac{E'_s(\mathcal{I} - 2I)}{K} \left( \frac{\rho_m \omega^2}{K} W_{,x}(x) + W_{,xxx}(x) - \frac{2E'_s I}{K} W_{,xxxx}(x) \right) \quad (3.37)$$

Enfin, l'effort tranchant global  $\mathcal{T}$  s'exprime en fonction de la déflexion grâce à l'équilibre (3.33)-b :

$$\mathcal{T} = -M_{,x} - \mathcal{M}_{,x} = -2E'_s I W_{,xxx} - E'_s(\mathcal{I} - 2I)\alpha_{,xx}$$

d'où

$$\mathcal{T}(x) = -\frac{E'_s(\mathcal{I} - 2I)\rho_m \omega^2}{K} W_{,x}(x) - E'_s \mathcal{I} W_{,xxx}(x) + \frac{2E_s'^2 I(\mathcal{I} - 2I)}{K} W_{,xxxx}(x) \quad (3.38)$$

### 3.4.2 Etude des oscillations libres

Le calcul des fréquences propres et des déformées modales est mené à partir de la formulation adimensionnée. Similairement à l'étude des différents comportements dégénérés (voir Section 2.4.2), on exprime la variable d'espace sous la forme  $x^* = \frac{x}{L}$  où l'exposant \* désigne un terme sans dimension et  $L$  la longueur caractéristique du chargement dynamique. Ainsi, l'équation (3.35) devient :

$$C_1 C_2 W_{,x^* x^* x^* x^* x^* x^*}(x^*) - (C_1 + C_2) W_{,x^* x^* x^* x^*}(x^*) - C_1 \Omega^2 W_{,x^* x^*}(x^*) + \Omega^2 W(x^*) = 0$$

$$\text{avec} \quad C_1 = \frac{E'_s(\mathcal{I} - 2I)}{KL^2} \quad ; \quad C_2 = \frac{2E'_s I}{KL^2} \quad ; \quad \Omega^2 = \frac{\rho_m \omega^2 L^2}{K}$$

(3.39)

où les coefficients structuraux adimensionnels  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\Omega^2$  comparent respectivement les effets

de la flexion globale et du cisaillement, de la flexion locale et du cisaillement, et des effets inertiels et du cisaillement.

*Remarque :* Il est possible de démontrer en dynamique des structures qu'indépendamment du modèle considéré [29] la taille macroscopique  $L_k$  associée au  $k^{\text{ième}}$  mode est donnée par :

$$L_k \approx \frac{2H}{(2k-1)\pi}$$

### Méthode de Cardan

Les solutions de l'équation (3.39) sont cherchées sous la forme  $W(x^*) = W_0 e^{\delta x^*}$ . L'équation caractéristique qui détermine le nombre d'onde s'écrit alors :

$$\lambda^3 - \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \lambda^2 - \frac{\Omega^2}{C_2} \lambda + \frac{\Omega^2}{C_1 C_2} = 0 \quad \text{où} \quad \lambda = \delta^2 \quad (3.40)$$

Afin de résoudre cette équation polynômiale du 3<sup>e</sup> degré, nous reprenons l'analyse exploitant la méthode de Cardan menée dans la thèse de Chesnais [29] dans le cadre de la dynamique de poutre multi-portiques. Cette méthode consiste à poser le changement de variable  $\lambda = \gamma + \frac{C_1 + C_2}{3C_1 C_2}$  afin de se ramener à une équation de degré 3 sans terme de degré 2 que l'on sait résoudre :

$$\gamma^3 - \gamma \left( \frac{\Omega^2}{C_2} + \frac{(C_1 + C_2)^2}{3C_1^2 C_2^2} \right) + \frac{\Omega^2}{C_1 C_2} - \frac{\Omega^2 (C_1 + C_2)}{3C_1 C_2^2} - \frac{2(C_1 + C_2)^3}{27C_1^3 C_2^3} = 0 \quad (3.41)$$

On introduit les deux paramètres  $p$  et  $q$  définis par :

$$p = -\frac{1}{3} \left( \frac{\Omega^2}{C_2} + \frac{(C_1 + C_2)^2}{3C_1^2 C_2^2} \right) \quad ; \quad q = \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega^2}{C_1 C_2} - \frac{\Omega^2 (C_1 + C_2)}{3C_1 C_2^2} - \frac{2(C_1 + C_2)^3}{27C_1^3 C_2^3} \right)$$

Ainsi, le déterminant de l'équation caractéristique (3.41) s'écrit  $\Delta = p^3 + q^2$ , soit après simplification :

$$\Delta = -\frac{\Omega^2 \left( 4C_2^3 + 12C_2^2 C_1 + 12C_2 C_1^2 + 4C_1^3 + \left( -8C_2^2 C_1^2 + 20C_2 C_1^3 + C_1^4 \right) \Omega^2 + 4C_2 C_1^4 \Omega^4 \right)}{108C_1^4 C_2^4} \quad (3.42)$$

Etudions le signe de ce déterminant. Les paramètres  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\Omega^2$  étant toujours positifs, le signe de  $\Delta$  sera opposé au signe de la fonction  $N(C_1, C_2, \Omega^2)$  définie par :

$$N(C_1, C_2, \Omega^2) = 4C_2^3 + 12C_2^2 C_1 + 12C_2 C_1^2 + 4C_1^3 + \left( -8C_2^2 C_1^2 + 20C_2 C_1^3 + C_1^4 \right) \Omega^2 + 4C_2 C_1^4 \Omega^4$$

$N$  est une expression polynomiale de degré 2 en  $\Omega^2$ , dont le déterminant s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta_N(C_1, C_2) &= \left(-8C_2^2C_1^2 + 20C_2C_1^3 + C_1^4\right)^2 - 16C_2C_1^4\left(4C_2^3 + 12C_2^2C_1 + 12C_2C_1^2 + 4C_1^3\right) \\ &= C_1^5(C_1 - 8C_2)^3\end{aligned}$$

On observe trois possibilités dans la détermination du signe de  $\Delta_N$  :

- $C_1 < 8C_2 \Rightarrow \Delta_N(C_1, C_2) < 0 \Rightarrow N(C_1, C_2, \Omega^2) > 0$
- $C_1 = 8C_2 \Rightarrow \Delta_N(C_1, C_2) = 0 \Rightarrow N(C_1, C_2, \Omega^2) > 0$
- $C_1 > 8C_2 \Rightarrow \Delta_N(C_1, C_2) > 0 \Rightarrow$  une seule racine susceptible d'être positive :

$$R_{\Delta_N}^+ = \frac{\sqrt{C_1^5(C_1 - 8C_2)^3} - \left(-8C_2^2C_1^2 + 20C_2C_1^3 + C_1^4\right)}{8C_1^4C_2}$$

Elle est du signe de son numérateur. On peut montrer que pour  $C_1 > 8C_2$  le signe de cette racine est toujours négatif. En conséquence, comme  $\Omega^2$  est toujours positif dans le cas  $C_1 > 8C_2$  comme dans les deux autres cas,  $N$  prend toujours des valeurs positives. De ce fait, le déterminant  $\Delta$  est toujours négatif, et l'équation caractéristique (3.40) possède trois solutions réelles distinctes  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  telles que  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ . Utilisons les relations suivantes entre les racines :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 &= -\frac{\Omega^2}{C_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= -\frac{\Omega^2}{C_1 C_2} \end{cases} \quad (3.43)$$

Les relations (3.43)-a et (3.43)-c permettent d'affirmer qu'une seule racine est négative (on rappelle que  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\Omega^2$  sont positifs). Ainsi, posons :

$$\lambda_1 = -\delta_1^2 < 0 \quad \lambda_2 = \delta_2^2 > 0 \quad \lambda_3 = \delta_3^2 > 0$$

Ceci signifie qu'il existe trois types d'onde dans la plaque, caractérisés par les nombres d'ondes  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  et  $\delta_3$ . Le mode associé à  $\delta_1$  est propagatif oscillant, alors que les modes associés à  $\delta_2$  et  $\delta_3$  sont évanescents sans oscillations. Le système (3.43) devient :

$$\begin{cases} -\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 &= \delta_0^2 \\ \delta_1^2 \delta_2^2 + \delta_1^2 \delta_3^2 - \delta_2^2 \delta_3^2 &= \frac{\Omega^2}{C_2} \\ \delta_1^2 \delta_2^2 \delta_3^2 &= \frac{\Omega^2}{C_1 C_2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \delta_0^2 = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \quad (3.44)$$

En introduisant les rapports  $r_2 = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2$  et  $r_3 = \left(\frac{\delta_3}{\delta_1}\right)^2$  entre les racines dans le système précédent, on extrait :

$$\begin{cases} r_2 + r_3 &= 1 + \frac{\delta_0^2}{\delta_1^2} \\ \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} &= 1 + C_1 \delta_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_2 + r_3 &= 1 + \frac{\delta_0^2}{\delta_1^2} \\ r_2 r_3 &= \left(1 + \frac{\delta_0^2}{\delta_1^2}\right) \frac{1}{1 + C_1 \delta_1^2} \end{cases} \quad (3.45)$$

La résolution de ce nouveau système d'équations permet d'exprimer  $\delta_2^2$  et  $\delta_3^2$  en fonction de  $\delta_1^2$  :

$$\delta_2^2 = \delta_1^2 \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\delta_0^2}{\delta_1^2} - \sqrt{\left(1 + \frac{\delta_0^2}{\delta_1^2}\right)^2 - 4 \left(1 + \frac{\delta_0^2}{\delta_1^2}\right) \frac{1}{1 + C_1 \delta_1^2}} \right) \quad (3.46)$$

$$\delta_3^2 = \delta_1^2 \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\delta_0^2}{\delta_1^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{\delta_0^2}{\delta_1^2}\right)^2 - 4 \left(1 + \frac{\delta_0^2}{\delta_1^2}\right) \frac{1}{1 + C_1 \delta_1^2}} \right)$$

Compte tenu du signe des solutions de l'équation caractéristique, le déplacement transversal  $W(x)$  solution de l'équation différentielle de degré 6 est de la forme :

$$W(x) = a_1 \cos(\delta_1 \frac{x}{L}) + a_2 \sin(\delta_1 \frac{x}{L}) + a_3 \operatorname{ch}(\delta_2 \frac{x}{L}) + a_4 \operatorname{sh}(\delta_2 \frac{x}{L}) + a_5 \operatorname{ch}(\delta_3 \frac{x}{L}) + a_6 \operatorname{sh}(\delta_3 \frac{x}{L}) \quad (3.47)$$

Enfin, avant l'étude des déformées modales, réécrivons l'expression (3.37) de  $\alpha(x)$  en fonction des paramètres  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\Omega^2$  :

$$\alpha(x) = (1 + C_1 \Omega^2) W_{,x}(x) + C_1 L^2 W_{,xxx}(x) - C_1 C_2 L^4 W_{,xxxx}(x) \quad (3.48)$$

### 3.4.3 Conditions limites et déformées modales pour une plaque encastree-libre

Considérons une plaque HCS symétrique de hauteur  $H$ , encastree à la base et libre à l'autre extrémité comme le montre la Figure 3.10.

La résolution de l'équation (3.35) d'ordre six nécessite six conditions limites. Pour une plaque encastree à la base ( $x = 0$ ) et libre à l'autre extrémité ( $x = H$ ), elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} W(0) &= 0 & \mathcal{T}(H) &= 0 \\ W_{,x}(0) &= 0 & M(H) &= 0 \\ \alpha(0) &= 0 & \mathcal{M}(H) &= 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

La prochaine étape consiste à déterminer les constantes  $a_i$ ,  $i=1,\dots,6$ . Pour cela, on utilise les conditions limites (3.49) exprimées en fonction de la déflexion  $W(x)$  et de la rotation  $\alpha(x)$  :

$$\begin{aligned} W(0) &= 0 & W(H) &= W_H \\ W_{,x}(0) &= 0 & W^{(2)}(H) &= 0 \\ \alpha(0) &= 0 & \alpha^{(1)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

En imposant un déplacement  $W_H$  en tête, cela permet de retrouver directement les déformées modales normalisées. Notons que la condition limite  $\mathcal{T}(H) = 0$  sera utilisée pour la détermina-

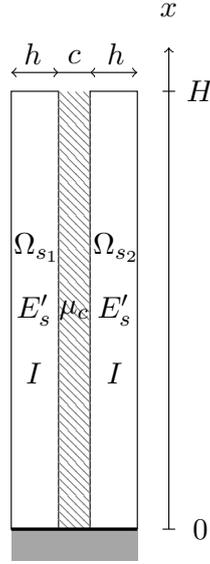


FIGURE 3.10 – Géométrie et conditions limites d'une plaque HCS encastree-libre. Pour les applications numériques, nous prendrons  $H = 0.56\text{m}$ ,  $h = 19\text{mm}$ ,  $c = 1.52\text{mm}$  et  $E'_s = 74\text{GPa}$

tion de l'équation aux fréquence propres. La résolution du système étant lourde elle n'est pas développée ici.

Le système (3.45) permet d'exprimer  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\Omega^2$  en fonction des racines  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  et  $\delta_3$ , soit :

$$C_1 = \frac{\delta_1^2(\delta_2^2 + \delta_3^2) - \delta_2^2\delta_3^2}{\delta_1^2\delta_2^2\delta_3^2} \quad C_2 = \frac{\delta_2^2\delta_3^2 - \delta_1^2(\delta_2^2 + \delta_3^2)}{(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_1^2 - \delta_3^2)(\delta_2^2 + \delta_3^2)} \quad \Omega^2 = -\frac{(\delta_2^2\delta_3^2 - \delta_1^2(\delta_2^2 + \delta_3^2))^2}{(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_1^2 - \delta_3^2)(\delta_2^2 + \delta_3^2)}$$

Finalement, on obtient les constantes suivantes :

$$a_1 = \frac{\delta_1^2(\delta_2^2 + \delta_3^2)}{(\delta_1^2 + \delta_2^2)(\delta_1^2 + \delta_3^2)} \left( \frac{-\frac{\delta_2^2(\delta_1^4 - \delta_3^4)}{\text{ch}(\frac{\delta_2 H}{L})} \left( \delta_1 \sin(\frac{\delta_1 H}{L}) + \delta_2 \text{sh}(\frac{\delta_2 H}{L}) \right) + \frac{\delta_3^2(\delta_1^4 - \delta_2^4)}{\text{ch}(\frac{\delta_3 H}{L})} \left( \delta_1 \sin(\frac{\delta_1 H}{L}) + \delta_3 \text{sh}(\frac{\delta_3 H}{L}) \right)}{\delta_1^3(\delta_2^4 - \delta_3^4) \tan(\frac{\delta_1 H}{L}) - \delta_2^3(\delta_1^4 - \delta_3^4) \text{th}(\frac{\delta_2 H}{L}) + \delta_3^3(\delta_1^4 - \delta_2^4) \text{th}(\frac{\delta_3 H}{L})} \right) \times \frac{W_H}{\cos(\frac{\delta_1 H}{L})}$$

$$a_2 = \frac{\delta_1^3(\delta_2^2 + \delta_3^2)}{(\delta_1^2 + \delta_2^2)(\delta_1^2 + \delta_3^2)} \left( \frac{\frac{\delta_1^2(\delta_2^4 - \delta_3^4)}{\cos(\frac{\delta_1 H}{L})} + \frac{\delta_2^2(\delta_1^4 - \delta_3^4)}{\text{ch}(\frac{\delta_2 H}{L})} - \frac{\delta_3^2(\delta_1^4 - \delta_2^4)}{\text{ch}(\frac{\delta_3 H}{L})}}{\delta_1^3(\delta_2^4 - \delta_3^4) \tan(\frac{\delta_1 H}{L}) - \delta_2^3(\delta_1^4 - \delta_3^4) \text{th}(\frac{\delta_2 H}{L}) + \delta_3^3(\delta_1^4 - \delta_2^4) \text{th}(\frac{\delta_3 H}{L})} \right) W_H$$

$$a_3 = \frac{\delta_2^2(\delta_1^2 - \delta_3^2)}{(\delta_1^2 + \delta_2^2)(\delta_2^2 - \delta_3^2)} \left( \frac{\frac{\delta_1^2(\delta_2^4 - \delta_3^4)}{\cos(\frac{\delta_1 H}{L})} \left( \delta_1 \sin(\frac{\delta_1 H}{L}) + \delta_2 \text{sh}(\frac{\delta_2 H}{L}) \right) + \frac{\delta_3^2(\delta_1^4 - \delta_2^4)}{\text{ch}(\frac{\delta_3 H}{L})} \left( \delta_3 \text{sh}(\frac{\delta_3 H}{L}) - \delta_2 \text{sh}(\frac{\delta_2 H}{L}) \right)}{\delta_1^3(\delta_2^4 - \delta_3^4) \tan(\frac{\delta_1 H}{L}) - \delta_2^3(\delta_1^4 - \delta_3^4) \text{th}(\frac{\delta_2 H}{L}) + \delta_3^3(\delta_1^4 - \delta_2^4) \text{th}(\frac{\delta_3 H}{L})} \right) \times \frac{W_H}{\cos(\frac{\delta_2 H}{L})}$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= \frac{\delta_2^3 (\delta_1^2 - \delta_3^2)}{(\delta_1^2 + \delta_2^2)(\delta_2^2 - \delta_3^2)} \left( \frac{\frac{\delta_1^2(\delta_2^4 - \delta_3^4)}{\cos(\frac{\delta_1 H}{L})} + \frac{\delta_2^2(\delta_1^4 - \delta_3^4)}{\text{ch}(\frac{\delta_2 H}{L})} - \frac{\delta_3^2(\delta_1^4 - \delta_2^4)}{\text{ch}(\frac{\delta_3 H}{L})}}{\delta_1^3(\delta_2^4 - \delta_3^4) \tan(\frac{\delta_1 H}{L}) - \delta_2^3(\delta_1^4 - \delta_3^4) \text{th}(\frac{\delta_2 H}{L}) + \delta_3^3(\delta_1^4 - \delta_2^4) \text{th}(\frac{\delta_3 H}{L})} \right) W_H \\
a_5 &= \frac{\delta_3^2 (\delta_1^2 - \delta_2^2)}{(\delta_1^2 + \delta_3^2)(\delta_2^2 - \delta_3^2)} \left( \frac{\frac{\delta_1^2(\delta_2^4 - \delta_3^4)}{\cos(\frac{\delta_1 H}{L})} (\delta_1 \sin(\frac{\delta_1 H}{L}) + \delta_3 \text{sh}(\frac{\delta_3 H}{L})) - \frac{\delta_2^2(\delta_1^4 - \delta_3^4)}{\text{ch}(\frac{\delta_2 H}{L})} (\delta_2 \text{sh}(\frac{\delta_2 H}{L}) - \delta_3 \text{sh}(\frac{\delta_3 H}{L}))}{\delta_1^3(\delta_2^4 - \delta_3^4) \tan(\frac{\delta_1 H}{L}) - \delta_2^3(\delta_1^4 - \delta_3^4) \text{th}(\frac{\delta_2 H}{L}) + \delta_3^3(\delta_1^4 - \delta_2^4) \text{th}(\frac{\delta_3 H}{L})} \right) \\
&\quad \times \frac{W_H}{\cos(\frac{\delta_3 H}{L})} \\
a_6 &= \frac{\delta_3^3 (\delta_1^2 - \delta_2^2)}{(\delta_1^2 + \delta_3^2)(\delta_2^2 - \delta_3^2)} \left( \frac{\frac{\delta_1^2(\delta_2^4 - \delta_3^4)}{\cos(\frac{\delta_1 H}{L})} + \frac{\delta_2^2(\delta_1^4 - \delta_3^4)}{\text{ch}(\frac{\delta_2 H}{L})} - \frac{\delta_3^2(\delta_1^4 - \delta_2^4)}{\text{ch}(\frac{\delta_3 H}{L})}}{\delta_1^3(\delta_2^4 - \delta_3^4) \tan(\frac{\delta_1 H}{L}) - \delta_2^3(\delta_1^4 - \delta_3^4) \text{th}(\frac{\delta_2 H}{L}) + \delta_3^3(\delta_1^4 - \delta_2^4) \text{th}(\frac{\delta_3 H}{L})} \right) W_H
\end{aligned}$$

Grâce à l'expression (3.48), on déduit  $\alpha(x)$  en fonction des racines  $\delta_i$ , des constantes  $a_i$  et des paramètres  $C_1$  et  $C_2$  :

$$\begin{aligned}
\alpha(x) &= -\frac{\delta_1}{L} \frac{1}{1+C_1\delta_1^2} \left[ a_1 \sin\left(\frac{\delta_1 x}{L}\right) - a_2 \cos\left(\frac{\delta_1 x}{L}\right) \right] \\
&\quad + \frac{\delta_2}{L} \frac{1+C_1(1+C_1\delta_1^2)(\delta_1^2+\delta_2^2)(1+C_2(\delta_1^2-\delta_2^2))}{1+C_1\delta_1^2} \left[ a_3 \text{sh}\left(\frac{\delta_2 x}{L}\right) + a_4 \text{ch}\left(\frac{\delta_2 x}{L}\right) \right] \\
&\quad + \frac{\delta_3}{L} \frac{1+C_1(1+C_1\delta_1^2)(\delta_1^2+\delta_3^2)(1+C_2(\delta_1^2-\delta_3^2))}{1+C_1\delta_1^2} \left[ a_5 \text{sh}\left(\frac{\delta_3 x}{L}\right) + a_6 \text{ch}\left(\frac{\delta_3 x}{L}\right) \right]
\end{aligned} \tag{3.51}$$

### Equation aux fréquences propres

Déterminons maintenant l'équation aux fréquences propres en utilisant l'expression de l'effort tranchant global puis la condition limite  $\mathcal{T}(H) = 0$ . Pour commencer écrivons (3.38) en fonction de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\Omega^2$  :

$$\frac{\mathcal{T}(x)}{K} = -C_1 \Omega^2 W_{,x}(x) - (C_1 + C_2) L^2 W_{,xxx}(x) + C_1 C_2 L^4 \Omega^2 W_{,xxxx}(x) \tag{3.52}$$

Après de multiples simplifications qui ne seront pas développées ici pour des questions de lisibilité, on obtient l'équation aux fréquences propres pour une plaque de verre feuilleté à deux couches raides encastree-libre :

$$\begin{aligned}
& 2\delta_2^2\delta_3^2(\delta_1^4 - \delta_2^4)(\delta_1^4 - \delta_3^4) \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) + 2\delta_1^2\delta_3^2(\delta_1^4 - \delta_2^4)(\delta_2^4 - \delta_3^4) \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \\
& - 2\delta_1^2\delta_2^2(\delta_1^4 - \delta_3^4)(\delta_2^4 - \delta_3^4) \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_3 H}{L}\right) \\
& - (\delta_1^4(\delta_2^4 - \delta_3^4)^2 + \delta_3^4(\delta_1^4 - \delta_2^4)^2 + \delta_2^4(\delta_1^4 - \delta_3^4)^2) \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_3 H}{L}\right) \\
& + \delta_2\delta_3(\delta_1^4 - \delta_2^4)(\delta_1^4 - \delta_3^4)(\delta_2^2 + \delta_3^2) \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_3 H}{L}\right) \\
& + \delta_1\delta_2(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_1^4 - \delta_3^4)(\delta_2^4 - \delta_3^4) \sin\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_3 H}{L}\right) \\
& - \delta_1\delta_3(\delta_1^4 - \delta_2^4)(\delta_1^2 - \delta_3^2)(\delta_2^4 - \delta_3^4) \sin\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_3 H}{L}\right) = 0
\end{aligned} \tag{3.53}$$

### 3.4.4 Obtention des fréquences et des modes propres

L'objectif de ce paragraphe est simplement d'illustrer la méthode permettant d'obtenir les caractéristiques dynamiques d'une plaque HCS à deux couches raides donnée. Elle sera appliquée au verre feuilleté dans le Chapitre 5.

La particularité de l'équation aux fréquences propres (3.53) est que l'inconnu n'est pas directement la fréquence propre, mais la racine  $\delta_1$ . En effet, exprimer les  $\delta_i$  en fonction de la pulsation  $\omega$  ne permet pas une résolution numérique fiable de l'équation aux fréquences propres. Ainsi, la résolution de cette équation nécessite d'exprimer  $\delta_2$  et  $\delta_3$  en fonction de  $\delta_1$ ,  $C_1$  et  $C_2$  en utilisant les expressions (3.46)-a et (3.46)-b.

Les racines obtenues sont directement liées à la pulsation propre  $\Omega_k$  du mode recherché par :

$$\Omega_k^2 = C_1 C_2 \delta_{1_k}^2 \delta_{2_k}^3 \delta_{3_k}^2 = \delta_{1_k}^4 \frac{C_1 C_2 \delta_{1_k}^2 + C_1 + C_2}{1 + C_1 \delta_{1_k}^2} \quad \text{avec} \quad \Omega_k^2 = \frac{\rho_m (2\pi f_k)^2 L_k^2}{K} \tag{3.54}$$

(Pour rappel, une estimation a priori de  $L_k$  est  $L_k \approx \frac{2H}{(2k-1)\pi}$ ). La  $k^{\text{ième}}$  déformée propre est obtenue en remplaçant la racine  $\delta_{1_k}$  dans l'expression de  $W(x)$ . L'expression (3.51) fournit la rotation  $\alpha(x)$ .

Pour pouvoir appliquer cette méthode et résoudre l'équation aux fréquences propres, il est nécessaire de connaître le module de cisaillement  $G$  de la couche souple centrale afin de fixer la valeur de  $K$ . Ceci ne pose pas de problème dans le cas d'une couche élastique, mais introduit une difficulté dans le cas d'une couche viscoélastique. En effet dans ce cas le module de cisaillement (et par conséquent  $K$ ) dépend de la fréquence de sollicitation qui est justement l'inconnue recherchée. Ainsi, afin que la fréquence propre  $f_k$  obtenue soit pertinente, la valeur fixée *a priori* du module de cisaillement doit correspondre à celle lorsque le PVB est sollicité à la fréquence  $f_k$ . Cette situation nécessite de mettre en place un processus de résolution itératif qui sera illustré dans la Section 3.5.

On rappelle que ce résultat complexe s'applique au comportement dynamique de la plaque HCS lorsqu'il est décrit par le modèle de degré 6, autrement dit si la longueur caractéristique

$L_k$  (qui diminue à mesure que le nombre du mode considéré augmente) est telle que les termes de l'équation (3.39) sont du même ordre. Si ce n'est pas le cas, on peut utiliser les descriptions dynamiques obtenues pour les modèles dégénérés qui conduisent à des déterminations beaucoup plus simples des caractéristiques modale comme cela est détaillé dans le paragraphe suivant.

### 3.4.5 Comparaisons des caractéristiques dynamiques avec les modèles dégénérés

Cette section a pour but de comparer les fréquences et les modes propres du modèle général et des modèles dégénérés. Les calculs de ces caractéristiques pour les cas dégénérés ne sont pas développés, mais synthétisés avant l'étude comparative.

#### Modèle monolithique (MK) et bicouches (BLK)

Dans les cas dégénérés MK et BLK, l'équation régissant le comportement hors-plan de la plaque s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$W_{,x^*x^*x^*x^*}(x^*) - \delta_{1,M,BL}^4 W(x^*) = 0^* \quad (3.55)$$

dont les solutions s'écrivent avec  $\delta_{1,M}^4 = \frac{\Omega^2}{C_1+C_2}$  dans le cas monolithique et  $\delta_{1,BL}^4 = \frac{\Omega^2}{C_2}$  dans le cas bicouche :

$$W_{M,BL}(x) = a_1 \cos(\delta_{1,M,BL} \frac{x}{L}) + a_2 \sin(\delta_{1,M,BL} \frac{x}{L}) + a_3 \operatorname{ch}(\delta_{1,M,BL} \frac{x}{L}) + a_4 \operatorname{sh}(\delta_{1,M,BL} \frac{x}{L}) \quad (3.56)$$

On remarquera à l'aide des expressions (3.39) des  $C_i$ , que conformément au fonctionnement de la plaque, ces paramètres  $\delta_i$  sont indépendant de  $K$  et donc de la couche viscoélastique (qui est supposée ici soit infiniment rigide soit infiniment souple). Les conditions aux limites s'écrivent pour une plaque en console encastree-libre :

$$W(0) = 0 \quad W_{,x}(0) = 0 \quad (\mathcal{M} + M)(H) = 0 \quad \mathcal{T}(H) = 0 \quad (3.57)$$

et dans le cas bicouche :

$$W(0) = 0 \quad W_{,x}(0) = 0 \quad M(H) = 0 \quad \mathcal{T}(H) = 0 \quad (3.58)$$

On montre qu'elles sont équivalentes dans les deux cas. Pour un déplacement normalisé à  $W_H$  en tête, on obtient les constantes  $a_i$  suivantes (avec  $\delta_1 = \delta_{1,M}$  dans le cas monolithique et  $\delta_1 = \delta_{1,BLK}$  dans le cas bicouche) :

$$a_1 = - \frac{\sin(\frac{\delta_1 H}{L}) + \operatorname{sh}(\frac{\delta_1 H}{L})}{2 \left( \operatorname{ch}(\frac{\delta_1 H}{L}) \sin(\frac{\delta_1 H}{L}) - \cos(\frac{\delta_1 H}{L}) \operatorname{sh}(\frac{\delta_1 H}{L}) \right)} W_H$$

$$a_2 = -\frac{\cos(\frac{\delta_1 H}{L}) + \operatorname{ch}(\frac{\delta_1 H}{L})}{2 \left( -\operatorname{ch}(\frac{\delta_1 H}{L}) \sin(\frac{\delta_1 H}{L}) + \cos(\frac{\delta_1 H}{L}) \operatorname{sh}(\frac{\delta_1 H}{L}) \right)} W_H$$

$$a_3 = \frac{\sin(\frac{\delta_1 H}{L}) + \operatorname{sh}(\frac{\delta_1 H}{L})}{2 \left( \operatorname{ch}(\frac{\delta_1 H}{L}) \sin(\frac{\delta_1 H}{L}) - \cos(\frac{\delta_1 H}{L}) \operatorname{sh}(\frac{\delta_1 H}{L}) \right)} W_H$$

$$a_4 = \frac{\cos(\frac{\delta_1 H}{L}) + \operatorname{ch}(\frac{\delta_1 H}{L})}{2 \left( -\operatorname{ch}(\frac{\delta_1 H}{L}) \sin(\frac{\delta_1 H}{L}) + \cos(\frac{\delta_1 H}{L}) \operatorname{sh}(\frac{\delta_1 H}{L}) \right)} W_H$$

Enfin, l'équation aux fréquences propres obtenue s'écrit dans les deux cas :

$$1 + \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) = 0 \quad (3.59)$$

On note que le ratio des fréquences modales des deux modèles extrêmes est toujours de 2 lorsque l'épaisseur de PVB est négligeable devant l'épaisseur totale de la plaque.

### Modèle de Flexion/Cisaillement (SB)

L'équation régissant le comportement hors-plan d'une plaque de flexion/cisaillement (SB) s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$W_{,x^*x^*x^*x^*}(x^*) - \frac{1}{C_2} W_{,x^*x^*}(x^*) - \frac{\Omega^2}{C_2} W(x^*) = 0 \quad (3.60)$$

En utilisant les racines de l'équation caractéristique, on détermine  $\delta_1$  et  $\delta_2$  qui prennent la forme ci-dessous :

$$\delta_1^2 = -\frac{\frac{1}{C_2} - \sqrt{\frac{1}{C_2^2} + \frac{4\Omega^2}{C_2}}}{2} \quad \delta_2^2 = \frac{\frac{1}{C_2} + \sqrt{\frac{1}{C_2^2} + \frac{4\Omega^2}{C_2}}}{2} \quad (3.61)$$

de sorte que la déflexion s'écrit :

$$W(x) = a_1 \cos\left(\delta_1 \frac{x}{L}\right) + a_2 \sin\left(\delta_1 \frac{x}{L}\right) + a_3 \operatorname{ch}\left(\delta_2 \frac{x}{L}\right) + a_4 \operatorname{sh}\left(\delta_2 \frac{x}{L}\right) \quad (3.62)$$

Afin de déterminer ces constantes d'intégration, on utilise les conditions limites suivantes :

$$W(0) = 0 \quad W^{(1)}(0) = 0 \quad M(H) = 0 \quad \mathcal{T}(H) = 0 \quad (3.63)$$

Pour un déplacement normalisé à  $W_H$  en tête, on obtient les constantes  $a_i$  suivantes :

$$a_1 = -\frac{\delta_1 \delta_2 \left( \delta_1 \sin\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) + \delta_2 \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \right)}{\left( \delta_1^2 + \delta_2^2 \right) \left( \delta_2 \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \sin\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) - \delta_1 \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \right)} W_H$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{\delta_2 \left( \delta_1^2 \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) + \delta_2^2 \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \right)}{(\delta_1^2 + \delta_2^2) \left( \delta_2 \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \sin\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) - \delta_1 \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \right)} W_H \\
a_3 &= \frac{\delta_1 \delta_2 \left( \delta_1 \sin\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) + \delta_2 \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \right)}{(\delta_1^2 + \delta_2^2) \left( \delta_2 \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \sin\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) - \delta_1 \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \right)} W_H \\
a_4 &= -\frac{\delta_1 \left( \delta_1^2 \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) + \delta_2^2 \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \right)}{(\delta_1^2 + \delta_2^2) \left( \delta_2 \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \sin\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) - \delta_1 \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \right)} W_H
\end{aligned}$$

L'équation aux fréquences propres s'écrit cette fois :

$$(\delta_1^4 + \delta_2^4) \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) + \delta_1 \delta_2 (2\delta_1 \delta_2 (\delta_2^2 - \delta_1^2)) \sin\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) = 0 \quad (3.64)$$

Elle est évidemment différente de celle obtenue dans les cas MK/BLK. Néanmoins, si le terme  $\frac{1}{C_2}$  devient négligeable (sans que  $\frac{\Omega^2}{C_2}$  le devienne également), alors on a  $\delta_1 = \delta_2$  et on retrouve l'équation (3.59).

### Modèle de Reissner-Mindlin (RM)

Dans le modèle RM, le terme de cisaillement est fonction de la fréquence de sollicitation, ce qui n'était pas le cas pour le modèle SB puisque son terme de degré deux est uniquement fonction des caractéristiques intrinsèques à la plaque HCS. L'équation régissant le comportement hors-plan ce type de plaque s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$W_{,x^*x^*x^*x^*}(x^*) + \Omega^2 W_{,x^*x^*}(x^*) - \frac{\Omega^2}{C_1 + C_2} W(x^*) = 0 \quad (3.65)$$

Cette fois,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  s'écrivent :

$$\delta_1^2 = \frac{\Omega^2 + \sqrt{\Omega^4 + \frac{4\Omega^2}{C_1 + C_2}}}{2} \quad \delta_2^2 = \frac{-\Omega^2 + \sqrt{\Omega^4 + \frac{4\Omega^2}{C_1 + C_2}}}{2} \quad (3.66)$$

Cependant, la forme de la solution de l'équation différentielle reste inchangée :

$$W(x) = a_1 \cos\left(\delta_1 \frac{x}{L}\right) + a_2 \sin\left(\delta_1 \frac{x}{L}\right) + a_3 \operatorname{ch}\left(\delta_2 \frac{x}{L}\right) + a_4 \operatorname{sh}\left(\delta_2 \frac{x}{L}\right) \quad (3.67)$$

Pour ce modèle, les conditions aux limites font intervenir la rotation de section  $\alpha$  :

$$W(0) = 0 \quad \alpha(0) = 0 \quad \mathcal{M}(H) = 0 \quad \mathcal{T}(H) = 0 \quad (3.68)$$

Pour un déplacement normalisé à  $W_H$  en tête, elles mènent aux constantes  $a_i$  suivantes :

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{\delta_1^2 \delta_2^2 \left( \delta_1 \sin\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) + \delta_2 \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \right)}{(\delta_1^2 + \delta_2^2) \left( \delta_1^3 \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \sin\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) - \delta_2^3 \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \right)} W_H \\
a_2 &= \frac{\delta_1^3 \left( \delta_2^2 \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) + \delta_1^2 \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \right)}{(\delta_1^2 + \delta_2^2) \left( \delta_1^3 \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \sin\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) - \delta_2^3 \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \right)} W_H \\
a_3 &= \frac{\delta_1^2 \delta_2^2 \left( \delta_1 \sin\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) + \delta_2 \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \right)}{(\delta_1^2 + \delta_2^2) \left( \delta_1^3 \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \sin\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) - \delta_2^3 \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \right)} W_H \\
a_4 &= -\frac{\delta_2^3 \left( \delta_2^2 \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) + \delta_1^2 \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \right)}{(\delta_1^2 + \delta_2^2) \left( -\delta_1^3 \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \sin\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) + \delta_2^3 \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) \right)} W_H
\end{aligned}$$

L'équation aux fréquences obtenue se met sous la forme :

$$(\delta_1^4 + \delta_2^4) \cos\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) + \delta_1 \delta_2 (2\delta_1 \delta_2 (\delta_2^2 - \delta_1^2)) \sin\left(\frac{\delta_1 H}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_2 H}{L}\right) = 0 \quad (3.69)$$

Elle est identique à l'équation (3.64) du modèle SB, mais les expressions (3.66) des racines  $\delta_1$  et  $\delta_2$  étant différentes des expressions (3.61), les solutions  $\omega_k$  de cette équation différeront également de celles obtenues dans le cas SB.

### 3.5 Dynamique d'une plaque HCS viscoélastique

Dans cette section, on considère que la couche centrale de la plaque HCS étudiée dans la section précédente est viscoélastique. Ainsi, son module de cisaillement est fonction de la température et de la fréquence de sollicitation (voir Section 1.1.5). Comme mentionné plus haut, cela pose des difficultés dans la détermination des caractéristiques dynamiques de la plaque. L'objectif de cette section est principalement de les lever, mais également d'étudier l'influence de la température sur ces caractéristiques.

#### 3.5.1 Détermination des fréquences propres viscoélastiques

Dans le cas d'une couche centrale viscoélastique, le module de cisaillement  $\mu_c$  (et par conséquent  $K$ ) dépend de la fréquence de sollicitation. On rappelle que la résolution numérique de l'équation (3.53) ne fournit pas directement les fréquences propres et nécessite de fixer le module de cisaillement avant la résolution. Ainsi, il est indispensable qu'à l'issue du schéma de résolution le module obtenu soit effectivement celui du PVB sollicité à la fréquence propre  $f_G$  et à la température considérée  $T$ . Afin de s'en assurer, on applique un processus itératif dont l'initialisation est basée sur le fait que les fréquences propres du modèle de degré 6  $f_G$  sont comprises entre les fréquences  $f_{BLK}$  et  $f_{MK} = 2f_{BLK}$  (pour une épaisseur  $c$  négligeable) des modèles bicouche et monolithique. Or compte tenu des propriétés du PVB (décrite en échelle bilogarithmique en Figure 1.9 du Chapitre 1), faire varier la fréquence d'un facteur 2 ne modifie que modérément la valeur du module viscoélastique. On procède de la manière suivante avec  $\mu_c(\omega) = G(\omega)$  pour

la suite :

- A. On fixe  $G(\omega) = G$  réel tel que  $|G(f_{BLK})| < G < |G(f_{MK})|$
- B. On détermine numériquement la solution  $\delta_1$  de (3.53) puis  $f_G$  grâce à (3.54)
- C. On remplace  $G(\omega) = |G(2\pi f_G)|$
- D. On détermine la nouvelle solution  $\delta_1$  puis la nouvelle fréquence  $f_G$
- E. On considère avoir obtenu l'estimation élastique de la fréquence propre  $f_1$  lorsque les incréments à chaque itération sont négligeables. En moyenne, trois itérations sont nécessaires pour déterminer la fréquence propre fondamentale de la plaque.
- F. Enfin, on fixe  $G(2\pi f_1)$  puis on relance le calcul afin d'obtenir  $\delta_i^*$  complexe ( $i = 1,2,3$ ) puis la fréquence propre fondamentale complexe  $f_1^*$ , et on vérifie que la partie réelle de cette dernière est proche de  $f_1$ . On vérifie également grâce aux ratios  $\frac{Im(\delta_i^*)}{Re(\delta_i^*)}$  que l'onde associée à  $\delta_1^*$  est propagative et que les ondes associées à  $\delta_2^*$  et  $\delta_3^*$  sont des ondes de couche limite fortement atténuées.

### 3.5.2 Cas des modèles dégénérés

Contrairement aux modèles MK et BLK qui sont totalement élastiques, les modèles RM et SB font intervenir le caractère viscoélastique de la couche centrale. Cependant la résolution numérique des équations aux fréquences propres (3.64) et (3.69) permet d'obtenir directement les fréquences propres et non plus des valeurs intermédiaires comme  $\delta_{1k}$  dans le cas du modèle de plaque HCS. Ainsi, il suffit d'utiliser l'expression analytique du module de cisaillement complexe dans la résolution numérique pour s'abstenir de la résolution par itération.

### 3.5.3 Comparaison des fréquences fondamentales

Considérons la plaque HCS symétrique illustrée par la Figure 3.11, de hauteur  $H = 0.56\text{m}$ , constituée de deux couches raides identiques d'épaisseur  $h = 19\text{mm}$  et de module réduit  $E'_s = 74\text{GPa}$  connectées par une couche de PVB (série RB41) d'épaisseur  $c = 1.52\text{mm}$  de module de cisaillement  $G(\omega, T)$ .

Pour commencer, on rappelle que les fréquences propres dans les cas monolithique (MK) et bicouche (BLK) ne dépendent pas de  $G$  et donc ne varient pas avec la température. Les paramètres géométriques et mécaniques de la plaque HCS permettent de calculer la fréquence fondamentale des plaques monolithique et bicouche :

$$f_{BLK} = 52.8 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad f_{MK} = 112 \text{ Hz}$$

Ensuite, le calcul de la fréquence fondamentale des modèles de Flexion/Cisaillement (SB) et de Reissner-Mindlin (RM) se fait en résolvant numériquement les équations (3.64) et (3.69) pour

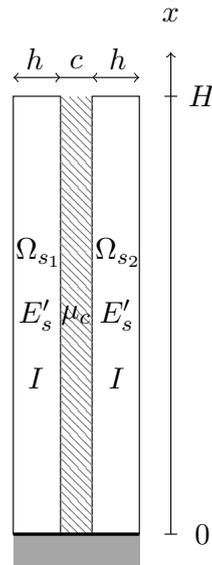


FIGURE 3.11 – Géométrie et conditions limites d'une plaque HCS encastrée-libre. Pour les applications numériques, nous prendrons  $H = 0.56\text{m}$ ,  $h = 19\text{mm}$ ,  $c = 1.52\text{mm}$  et  $E'_s = 74\text{GPa}$

une température  $T$  fixée. Contrairement au modèle complet de degré 6, on déduit directement de ces équations les fréquences propres de la plaque.

Enfin, les fréquences propres à différentes températures d'une plaque HCS avec une couche centrale viscoélastique sont obtenues grâce à la méthode itérative pseudo-élastique précédemment développée.

La Figure 3.12 montre l'évolution des fréquences fondamentales calculées en pseudo-élastique en fonction de la température pour le modèle de degré 6 ainsi que pour les différents modèles dégénérés :

On observe tout d'abord que les fréquences fondamentales  $f_G(T)$  semblent bien tendre vers la fréquence fondamentale  $f_{MK}$  (respectivement  $f_{BLK}$ ) lorsque la température augmente (respectivement diminue). Néanmoins, le contraste mécanique  $\frac{E'_s}{G}$  étant insuffisamment faible ( $|G(\omega)_{\max}| \simeq 10^8 \text{ Pa}$ ) ou insuffisamment fort ( $|G(\omega)_{\min}| \simeq 10^5 \text{ Pa}$ ), il subsiste un écart entre la description générale et la description dégénérée.

Aussi, on retrouve qu'à partir d'une certaine température, le modèle de Reissner-Mindlin ( $T > 45^\circ\text{C}$ ) et le modèle de Flexion/Cisaillement ( $T < 15^\circ\text{C}$ ) suffisent à décrire correctement le comportement dynamique de la plaque, par conséquent on peut s'abstenir d'utiliser le modèle général, plus lourd à mettre en place.

Enfin, au contraire, on note que pour une large plage de température, le modèle général tri-laplacien est indispensable, les modèles bi-laplacien RM et SB divergeant très rapidement.

### 3.5.4 Calcul de l'amortissement structurel

Le coefficient d'amortissement structurel  $\zeta$  est un paramètre dynamique sans dimension permettant de caractériser l'énergie dissipée par cycle de sollicitation. Physiquement, il caractérise la décroissance au cours du temps des oscillations libres d'un système.

Afin de le déterminer dans le cas d'une plaque HCS viscoélastique décrite par le modèle

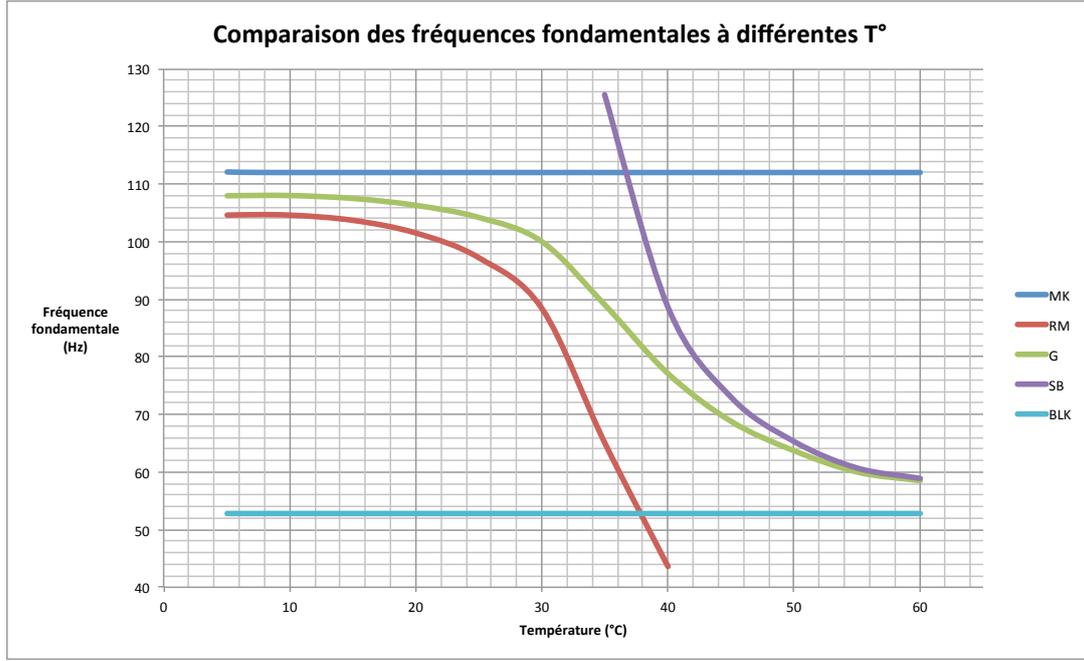


FIGURE 3.12 – Comparaison des fréquences fondamentales calculées en pseudo-élastique pour les différents modèles en fonction de la température.

tri-laplacien, on rappelle le bilan énergétique en régime dynamique harmonique déterminé dans la Section 2.3.3 :

$$\begin{aligned}
\int_S \rho_m \omega^2 W^2 ds &= \int_S K^*(\omega) |\nabla_x W - \underline{\alpha}|^2 ds \\
&+ \int_S 2E'_s I \left( (1 - \nu) |\underline{e}_x(\nabla_x W)|^2 + \nu |\Delta_x W|^2 \right) ds \\
&+ \int_S E'_s (\mathcal{I} - 2I) \left( (1 - \nu) |\underline{e}_x(\underline{\alpha})|^2 + \nu |\underline{\text{div}}_x(\underline{\alpha})|^2 \right) ds \\
&+ \int_{\partial S} (\underline{M} \cdot \underline{n}) \nabla_x W dl + \int_{\partial S} (\underline{M} \cdot \underline{n}) \underline{\alpha} dl + \int_{\partial S} \underline{\mathcal{I}} \cdot \underline{n} W dl \quad (3.70)
\end{aligned}$$

Dans le cas d'une plaque encastree-libre sur toute sa largeur (voir Figure 3.10), sollicitée à la pulsation propre  $\omega_k = 2\pi f_k$ , l'énergie associée au mécanisme de cisaillement interne se décompose en une partie réelle élastique et une partie imaginaire dissipative, due à la partie imaginaire du module de cisaillement  $\mu_c^*(\omega_k)$  :

$$E_{\text{cis}}^*(\omega_k) = \int_0^H K^*(\omega_k) |\nabla_x W(x, \omega_k) - \alpha(x, \omega_k)|^2 dx = E_{e, \text{cis}}(\omega_k) + i E_{d, \text{cis}}(\omega_k)$$

Les énergies élastiques associées aux mécanismes de flexion locale et globale s'écrivent respectivement :

$$E_{e, \text{fl}}(\omega_k) = \int_0^H 2E'_s I |\Delta_x W(x, \omega_k)|^2 dx$$

et

$$E_{e,fg}(\omega_k) = \int_0^H E'_s(\mathcal{I} - 2I) |\operatorname{div}_x(\alpha(x, \omega_k))|^2 dx$$

Le coefficient d'amortissement structural à la pulsation propre  $\omega_k$  est défini comme le rapport entre les énergies dissipatives et les énergies élastiques, soit pour une plaque HCS viscoélastique décrite par le modèle généralisé de degré 6 impliquant l'ensemble des mécanismes de flexion et de cisaillement :

$$\zeta_G(\omega_k) = \frac{E_{d,cis}(\omega_k)}{E_{e,cis}(\omega_k) + E_{e,fl}(\omega_k) + E_{e,fg}(\omega_k)} \quad (3.71)$$

Le calcul des différents termes s'effectue en introduisant la déformée modale pseudo-élastique déterminée précédemment.

Comme nous l'avons vu dans la Section 2.4, les modèles RM et SB ne font pas intervenir tout les mécanismes décrits ci-dessus. Par conséquent, en ne tenant compte que des mécanismes impliqués, leur taux d'amortissement s'écrit :

$$\zeta_{RM}(\omega_k) = \frac{E_{d,cis}(\omega_k)}{E_{e,cis}(\omega_k) + E_{e,fgRM}(\omega_k)} \quad \text{et} \quad \zeta_{SB}(\omega_k) = \frac{E_{d,cis}(\omega_k)}{E_{e,cis}(\omega_k) + E_{e,fl}(\omega_k)} \quad (3.72)$$

où dans le cas du modèle RM, l'énergie de flexion globale se simplifie en :

$$E_{e,fgRM}(\omega_k) = \int_0^H E'_s \mathcal{I} |\operatorname{div}_x(\alpha(x, \omega_k))|^2 dx$$

Les modèles MK et BLK étant purement élastique, ils ne sont pas dissipatifs. Par conséquent leur taux d'amortissement est nul.

Remarquons que,  $\zeta$  étant fonction du module de cisaillement  $\mu_c^*$  du PVB, il dépend directement de la température de la plaque.

Considérons la plaque HCS symétrique illustrée par la Figure 3.11, de hauteur  $H = 0.56\text{m}$ , constituée de deux couches raides identiques d'épaisseur  $h = 19\text{mm}$  et de module réduit  $E'_s = 74\text{GPa}$  connectées par une couche de PVB (série RB41) d'épaisseur  $c = 1.52\text{mm}$  de module de cisaillement  $\mu_c^*(\omega, T)$ . La Figure 3.13 représente l'évolution de coefficient d'amortissement  $\zeta$  en fonction de la température  $T$  lorsque la plaque est sollicitée à sa fréquence fondamentale pour les modèles G, BLK et MK.

On observe que lorsqu'on tend vers une description monolithique (températures basses) ou bicouche (température hautes), le coefficient d'amortissement structural tend vers zéro, ce qui est caractéristique des structures purement élastiques. Cependant, lorsque la partie imaginaire et la partie réelle de l'énergie due au mécanisme de cisaillement interne ne sont pas négligeables devant les énergies élastiques de flexion locale et globale, l'énergie dissipée augmente considérablement.

Comme pour l'analyse des fréquences fondamentales de chaque modèle dans la section précédente, on observe que les modèles RM et SB sont suffisamment précis pour obtenir l'amortissement structural d'une plaque HCS pour les températures extrêmes (ici inférieure à  $20^\circ\text{C}$  pour

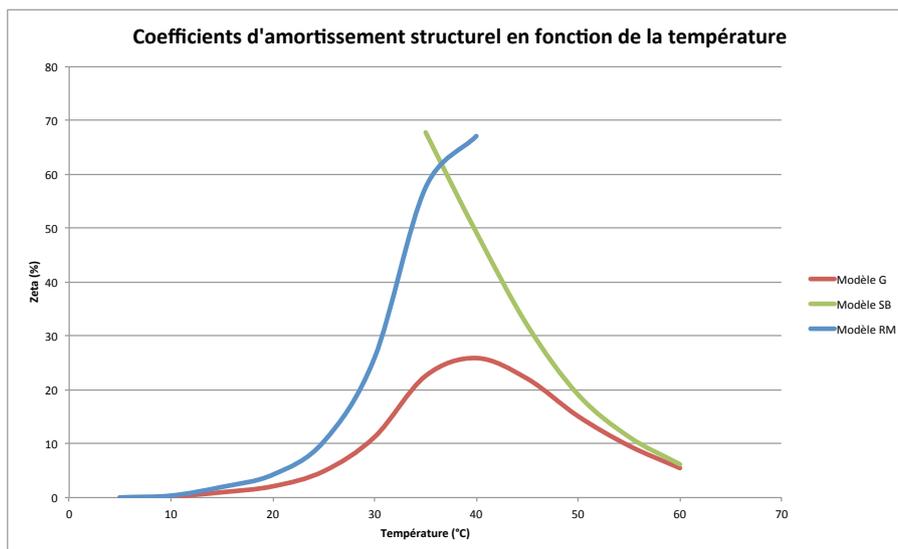


FIGURE 3.13 – Coefficient d’amortissement structurel  $\zeta(T)$  au mode fondamental pour les modèles RM, SB et G en fonction de la température.

le modèle RM et supérieur à 50°C pour le modèle SB), soit pour de faible amortissement.

Pour le modèle G, on note que le coefficient  $\zeta$  est maximal autour de  $T = 40^\circ\text{C}$  (et  $f = 77.1\text{Hz}$ ) et vaut  $\zeta_{\max} \simeq 26\%$ .

---

Les plaques HCS multicouches symétriques

---

**Résumé :**

Cette partie est consacrée à l’extension de la méthode développée dans le Chapitre 2 aux cas des plaques HCS constituées de trois couches raides d’abord et N couches raides ensuite (symétriques dans un souci de simplicité des calculs). L’objectif de ce chapitre est de montrer qu’il est possible, une fois encore, d’exprimer le comportement de ces plaques HCS multicouches de façon explicite. Comme dans le cas des plaques HCS à deux couches raides, il s’agit d’identifier les variables cinématiques appropriées et les variables d’efforts duales afin de retrouver une formulation multi-torseurs impliquant les flexions locales, la flexion globale et le cisaillement entre les couches. Nous verrons que le nombre de descripteurs cinématiques nécessaires augmente avec le nombre de couches raides. Dans le cas de plaques constituées de trois couches raides, une application du modèle permettra d’étudier le comportement dans le plan de la plaque sous déplacement différentiel de la plaque interne. Enfin, l’approche par développements asymptotiques est généralisée au cas des plaques HCS avec N couches raides, et son principe est illustré dans le cas des plaques HCS constituées de quatre couches raides.

**Sommaire**

---

<b>4.1</b>	<b>Plaques HCS à trois couches raides . . . . .</b>	<b>103</b>
<b>4.2</b>	<b>Plaques HCS avec N couches raides . . . . .</b>	<b>114</b>
<b>4.3</b>	<b>Deux exemples de plaques multicouches . . . . .</b>	<b>116</b>
<b>4.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>124</b>

---

**4.1 Plaques HCS à trois couches raides**

Considérons une plaque symétrique  $\Omega$  constituée de trois couches raides  $\Omega_s = \Omega_{s_1} \cup \Omega_{s_2} \cup \Omega_{s_3}$  d’épaisseur  $h$  pour les couches externes et  $h_c$  pour la couche centrale, et de deux couches souples identiques  $\Omega_c = \Omega_{c_1} \cup \Omega_{c_2}$  de même épaisseur  $c$ , soit une épaisseur totale  $h_\Omega = 2h + h_c + 2c$  (Figure 4.1). Pour des facilités de lecture, on introduit pour la suite la notation  $\bar{h} = h + h_c + 2c$ .

On note  $\Gamma_\Omega$  le contour de la plaque entière et  $\Gamma = \cup \Gamma_i$  l'ensemble des interfaces couches raides/couches souples avec  $\Gamma_i = \Gamma_{i-} \cup \Gamma_{i+}$  les interfaces de la couche souple  $\Omega_{c_i}$  avec les couches  $\Omega_{s_i}$  d'un côté et  $\Omega_{s_{i+1}}$  de l'autre.

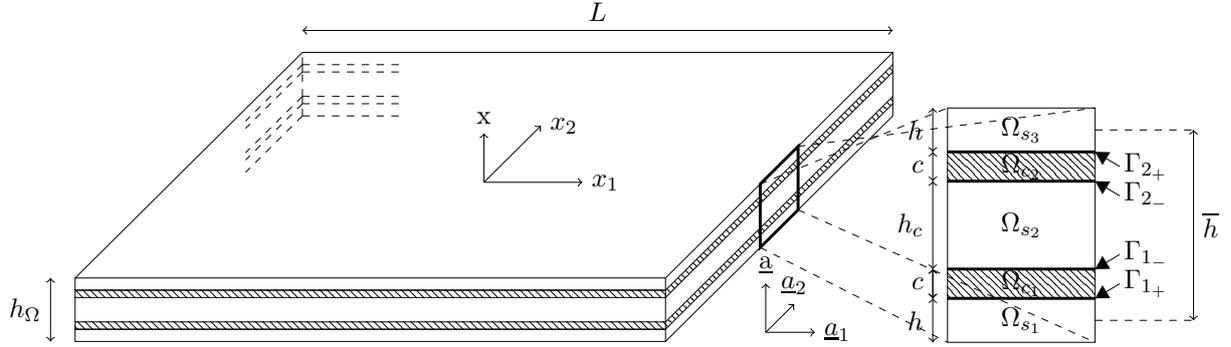


FIGURE 4.1 – Structure d'une plaque HCS  $\Omega$  composée de trois couches raides  $\Omega_{s_i}$  parfaitement connectées à deux couches souples  $\Omega_{c_i}$ .

Pour commencer, rappelons que chaque couche (raide ou souple) est considérée comme un matériau élastique linéaire isotrope et que pour chacune, le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  est relié au tenseur des petites déformations  $\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}})$  par la loi de comportement de Hooke ( $\underline{\underline{I}}$  représente le tenseur identité) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}})\underline{\underline{I}} + \lambda\text{tr}(\underline{\underline{e}}) \quad \text{ou inversement} \quad \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}}) = \frac{1}{E} \left( (1 + \nu)\underline{\underline{\sigma}} - \nu\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{I}} \right) \quad (4.1)$$

où le module d'Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$  et les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  prennent les valeurs  $\lambda_a, \mu_a, E_a$  et  $\nu_a$  dans  $\Omega_a, a = s, c$ . On utilisera également le module de plaque apparent  $E' = E/(1 - \nu^2)$ . Comme précédemment, nous utiliserons systématiquement la convention suivante : chaque quantité  $q$  exprimée sans indice est définie dans la plaque entière  $\Omega$  et prend les valeurs  $q_a$  dans  $\Omega_a, a = s, c$ .

Reprenons la formulation des champs adaptée à cette approche qui est similaire pour une plaque HCS à trois couches raides à celle utilisée pour les plaques HCS à deux couches raides.

Le champ de déplacement se décompose en un champ dans le plan de la plaque  $u_\alpha$  et un champ hors-plan  $w$ . Le champ total s'écrit comme une somme de termes en puissances paires (champ hors plan) et impaires (champ dans le plan) du paramètre de changement d'échelle  $\varepsilon$ , toujours défini par  $\varepsilon = \frac{h_\Omega}{L} \ll 1$ , soit :

$$\underline{\underline{u}} = w\underline{\underline{a}} + \varepsilon u_\alpha \underline{\underline{a}}_\alpha = \sum_{k=0} \varepsilon^{2k} \left( w^{2k} \underline{\underline{a}} + \varepsilon u_\alpha^{2k+1} \underline{\underline{a}}_\alpha \right)$$

$$w = w^0 + \varepsilon^2 w^2 + \dots; \quad u_\alpha = u_\alpha^1 + \varepsilon^2 u_\alpha^3 + \dots$$

Ainsi, les tenseurs réduits des déformations et des contraintes s'écrivent (avec  $\underline{\underline{I}}_P = \underline{\underline{a}}_1 \otimes \underline{\underline{a}}_1 + \underline{\underline{a}}_2 \otimes \underline{\underline{a}}_2$  le tenseur unité dans le plan et  $\underline{\underline{E}}_{\alpha\beta} = \underline{\underline{a}}_\alpha \otimes \underline{\underline{a}}_\beta + \underline{\underline{a}}_\beta \otimes \underline{\underline{a}}_\alpha$ ) :

$$\begin{cases} \underline{e}_P = \varepsilon ((u_{\alpha,x_\beta} + u_{\beta,x_\alpha})/2) \underline{E}_{\alpha\beta} & ; \quad \underline{\sigma}_P = 2\mu\underline{e}_P + \lambda(\text{tr}(\underline{e}_P) + e_N)\underline{I}_P \\ \underline{e}_T = ((u_{\alpha,y} + w_{,x_\alpha})/2) \underline{a}_\alpha & ; \quad \underline{\sigma}_T = 2\mu\underline{e}_T \\ e_N = \varepsilon^{-1}w_{,y} & ; \quad \sigma_N = 2\mu e_N + \lambda(\text{tr}(\underline{e}_P) + e_N) \end{cases} \quad (4.2)$$

Les expressions synthétiques des champs de déformation et de contrainte obtenues dans la Section 2.1.4 équations (2.7)-(2.11) restent donc valables pour l'étude des plaques HCS multicouches.

Enfin, on rappelle que les équations d'équilibre des moments, de continuité des contraintes aux interfaces et de nullité des contraintes en surface (lorsque la plaque ne subit aucune force surfacique et volumique en régime statique) se divisent en :

- un système d'équations scalaires exprimant l'équilibre hors-plan (suivant  $\underline{a}$ ) :

$$\begin{cases} \varepsilon^{-1}\sigma_{N,y} + \text{div}_x(\underline{\sigma}_T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ [\sigma_N] = 0 \quad ; \quad [w] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_N = 0 & \text{sur } \Gamma_\Omega \end{cases} \quad (4.3)$$

- un système d'équations vectorielles exprimant l'équilibre dans le plan (soit dans le plan  $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ ) :

$$\begin{cases} \varepsilon^{-1}\underline{\sigma}_{T,y} + \underline{\text{div}}_x(\underline{\sigma}_P) = \underline{0} & \text{dans } \Omega \\ [\underline{\sigma}_T] = \underline{0} \quad ; \quad [u_\alpha \underline{a}_\alpha] = \underline{0} & \text{sur } \Gamma \\ \underline{\sigma}_T = \underline{0} & \text{sur } \Gamma_\Omega \end{cases} \quad (4.4)$$

Comme dans le Chapitre 2, la résolution des équilibres se fait par ordre croissant des puissances de  $\varepsilon$  et permet de déduire d'abord la cinématique des couches raides, ensuite la cinématique des couches souples, puis les états de contrainte et déformation dans toute la plaque et enfin les équilibres globaux.

#### 4.1.1 Cinématique des couches raides

La détermination de la cinématique des couches raides est identique pour les plaque HCS à trois couches raides. Le premier problème extrait de (4.3) à l'ordre  $\varepsilon^{-2}$  décrit l'équilibre hors-plan des couches raides et s'écrit dans  $\Omega_s$  :

$$\begin{cases} \sigma_{Ns,y}^{-1} = 0 & \text{dans } \Omega_s \\ \sigma_{Ns}^{-1} = 0 & \text{sur } \Gamma_\Omega \cup \Gamma \end{cases} \quad (4.5)$$

On en déduit que  $\sigma_{Ns}^{-1}$  est constante dans les couches raides, nulle aux bords et aux interfaces, et par conséquent que  $\sigma_{Ns}^{-1} = (\lambda_s + 2\mu_s)e_{Ns}^{-1} = (\lambda_s + 2\mu_s)w_{,y}^0 = 0$ . Ainsi, la déflexion  $w^0$  ne dépend pas de  $y$  dans  $\Omega_s$ , et le déplacement des couches  $\Omega_{s_i}$ ,  $i = 1,2,3$  est normal mais peut a priori être différent pour chaque couche, soit

$$w^0 = w_i^0(\underline{x}) \quad \text{dans } \Omega_{s_i}$$

De plus, on a  $e_{Ns}^{-1} = 0$  soit d'après la loi de comportement (4.2)-a, la contrainte plane  $\underline{\sigma}_{Ps}^{-1}$  est

nulle.

Le problème suivant provient de (4.4) à l'ordre  $\varepsilon^{-1}$  et concerne le déplacement et l'équilibre dans le plan des couches raides. Il s'écrit dans  $\Omega_s$  :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}_{Ts,y}^0 = \underline{0} & \text{dans } \Omega_s \\ \underline{\sigma}_{Ts}^0 = \underline{0} & \text{sur } \Gamma_\Omega \cup \Gamma \end{cases} \quad (4.6)$$

On raisonne de la même manière que dans le cas des plaques HCS à deux couches raides pour montrer que :

$$\underline{\sigma}_{Ts}^0 = \mu_s(\underline{u}_{,y}^1 + \underline{\nabla}_x w^0) = \underline{0} \quad \text{dans } \Omega_s$$

Par intégration, on en déduit que le déplacement dans le plan  $\underline{u}^1$  suit pour chaque couche raide  $\Omega_{s_i}$  la cinématique linéaire classique de Kirchhoff :

$$\underline{u}^1(y, \underline{x}) = -y \underline{\nabla}_x w_i^0(\underline{x}) + \underline{U}_i^1(\underline{x}) \quad \text{dans } \Omega_{s_i} \quad (4.7)$$

Comme dans le cas des plaques HCS à deux couches raides, on note que chaque couche raide subit son propre déplacement qui se décompose en son déplacement homogène  $\underline{U}_i^1$  dans le plan et a priori sa propre rotation de section  $\underline{\nabla}_x w_i^0$  due au gradient de sa déflexion.

#### 4.1.2 Etat de contrainte/déformation dans les couches raides

En utilisant les résultats précédents, l'équilibre hors-plan extrait de (4.3) à l'ordre  $\varepsilon^0$ , s'écrit dans le domaine complet  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \sigma_{N,y}^1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ [\sigma_N^1] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_N^1 = 0 & \text{sur } \Gamma_\Omega \end{cases} \quad (4.8)$$

On raisonne comme à l'ordre  $\varepsilon^{-2}$  pour montrer successivement que  $\sigma_{Nc}^1 = 0$  dans  $\Omega_c$ , et par conséquent que  $\sigma_N^1 = 0$  dans toute la plaque  $\Omega$ . Ainsi, le problème hors-plan dans les couches  $\Omega_c$  devient :

$$\begin{cases} \sigma_{Nc}^1 = (\lambda_c + 2\mu_c)w_{c,y}^0 = 0 & \text{dans } \Omega_c \\ w_{c_1}^0 = w_1^0 & \text{sur } \Gamma_{1-} \\ w_{c_1}^0 = w_2^0 & \text{sur } \Gamma_{1+} \\ w_{c_2}^0 = w_2^0 & \text{sur } \Gamma_{2-} \\ w_{c_2}^0 = w_3^0 & \text{sur } \Gamma_{2+} \end{cases} \quad (4.9)$$

d'où on déduit que toutes les couches souples subissent elles aussi le même déplacement normal uniforme  $w_{c_i}^0(\underline{x})$ . Les conditions limites imposent la continuité du champ hors-plan aux interfaces. Par conséquent, l'épaisseur entière de la plaque  $\Omega$  subit la même déflexion uniforme

$W^0(\underline{x})$ , *i.e.*

$$w_1^0 = w_2^0 = w_3^0 = w_{c_1}^0 = w_{c_2}^0 = W^0(\underline{x}) \quad (4.10)$$

Comme dans le cas des plaques HCS à deux couches raides, il est physiquement plus judicieux d'exprimer le champ de déplacement uniforme dans le plan  $\underline{U}_i^1(\underline{x})$  de chacune des plaques raides en fonction de trois champs : un champ moyen  $\underline{U}^1(x)$ , un champ symétrique  $\underline{\tilde{d}}^1(x)$  et un champ antisymétrique  $\underline{\tilde{D}}^1(x)$ . En introduisant les fonctions de forme  $\phi_W(y)$ ,  $\phi_{\tilde{D}}(y)$ ,  $\phi_{\tilde{d}}(y)$  et  $\phi_U(y)$  associées à ces champs, le champ de déplacement dans le plan (4.7) dans  $\Omega_s$  se met sous la forme :

$$\underline{u}^1(x, y) = -\phi_W(y)\underline{\nabla}_x W^0(x) + \phi_{\tilde{D}}(y)\underline{\tilde{D}}^1(x) + \phi_{\tilde{d}}(y)\underline{\tilde{d}}^1(x) + \phi_U(y)\underline{U}^1(x) \quad \text{dans } \Omega \quad (4.11)$$

Chacun de ces quatre champs décrit une cinématique particulière jouant un rôle précis dans le comportement d'ensemble de la plaque. Trois de ces descripteurs cinématiques ont le même sens physique que ceux utilisés dans le modèle de plaque HCS à deux couches raides :

- le gradient de la déflexion de la plaque entière  $\underline{\nabla}_x W^0$
- le déplacement homogène *moyen* dans le plan des couches raides  $\underline{U}^1$
- le déplacement *différentiel* antisymétrique dans le plan des couches externes  $\underline{\tilde{D}}^1 = \frac{U_3^1 - U_1^1}{2}$

respectivement associés aux fonction de forme  $\phi_W$ ,  $\phi_U$  et  $\phi_{\tilde{D}}$ .

Comme précédemment, on a  $\phi_W = y$ . De plus,  $\underline{U}^1$  étant défini comme uniforme sur toute la section, la fonction de forme associée est constante, on a donc  $\phi_U(y) = 1$ . La définition du déplacement *différentiel* antisymétrique dans le plan des couches externes  $\underline{\tilde{D}}^1$  est analogue à celle utilisée pour les plaques HCS à deux couches raides. Enfin, on sait par construction que  $\phi_{\tilde{D}}$  est antisymétrique, on a donc :

$$\phi_{\tilde{D}} = \begin{cases} 1 & \text{pour } y \in [\frac{h_c+2c}{2}; \frac{h_\Omega}{2}] \\ 0 & \text{pour } y \in [-\frac{h_c}{2}; \frac{h_c}{2}] \\ -1 & \text{pour } y \in [-\frac{h_\Omega}{2}; -\frac{h_c+2c}{2}] \end{cases}$$

Afin de décrire entièrement la cinématique dans le plan de la plaque, il est nécessaire d'introduire un descripteur cinématique supplémentaire  $\underline{\tilde{d}}^1$ , non-présent dans le cas des plaques HCS à deux couches raides. On construit sa fonction de forme  $\phi_{\tilde{d}}$  de sorte que la cinématique associée soit indépendante, *i.e.* que  $\phi_{\tilde{d}}$  soit orthogonale aux trois autres fonctions de formes déjà introduites au sens de l'intégration définie pour une quantité  $q$  par :

$$\langle q \rangle_s = \int_{-\frac{h_\Omega}{2}}^{-\frac{h_\Omega}{2}+h} q \, dy + \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} q \, dy + \int_{\frac{h_\Omega}{2}-h}^{\frac{h_\Omega}{2}} q \, dy$$

Similairement au cas des plaques à deux couches raides, les fonctions  $\phi_W$  et  $\phi_{\tilde{D}}$  sont antisymé-

triques, et par conséquent orthogonales à toute fonction symétrique. De plus,  $\phi_U$  est orthogonale à toute fonction de moyenne nulle sur  $\Omega_s$ . On cherche donc une fonction de forme symétrique, de moyenne nulle i.e.  $\langle \phi_{\tilde{d}} \rangle_s = 0$ .

Sachant cela, déterminons tout d'abord l'expression du champ de déplacement homogène moyen en fonction des champs homogènes de chacune des couches raides. Pour cela,

on projette les différentes expressions du champ de déplacement dans le plan (4.7) et (4.11) sur la fonction de forme  $\phi_U = 1$ , puis on en fait la moyenne sur l'épaisseur des couches raides :

$$\langle (4.7)\phi_U \rangle_s = \langle (4.11)\phi_U \rangle_s$$

avec

$$\langle (4.7)\phi_U \rangle_s = \int_{-\frac{h\Omega}{2}}^{-\frac{h\Omega}{2}+h} (-y\nabla_x w_1^0(\underline{x}) + \underline{U}_1^1) dy + \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (-y\nabla_x w_2^0(\underline{x}) + \underline{U}_2^1) dy + \int_{\frac{h\Omega}{2}-h}^{\frac{h\Omega}{2}} (-y\nabla_x w_3^0(\underline{x}) + \underline{U}_3^1) dy$$

En rappelant que  $w_1^0(\underline{x}) = w_2^0(\underline{x}) = w_3^0(\underline{x}) = W^0(\underline{x})$ , on obtient :

$$\langle (4.7)\phi_U \rangle_s = h\underline{U}_1^1 + h_c\underline{U}_2^1 + h\underline{U}_3^1$$

On a :

$$\langle (4.11)\phi_U \rangle_s = -\nabla_x W^0(x) \langle \phi_W \phi_U \rangle_s + \tilde{D}^1(x) \langle \phi_{\tilde{D}} \phi_U \rangle_s + \tilde{d}^1(x) \langle \phi_{\tilde{d}} \phi_U \rangle_s + \langle \phi_U \phi_U \rangle_s$$

La fonction de forme  $\phi_U$  étant orthogonale aux trois autres fonctions de forme au sens de  $\langle \cdot \rangle_s$ , il vient :

$$\langle (4.11)\phi_U \rangle_s = (2h + h_c)\underline{U}^1$$

Ainsi, on obtient :

$$\underline{U}^1 = \frac{h\underline{U}_1^1 + h_c\underline{U}_2^1 + h\underline{U}_3^1}{2h + h_c} \quad (4.12)$$

Par construction, la fonction de forme  $\phi_{\tilde{d}}$  doit être symétrique à moyenne nulle. Ainsi elle est définie par :

$$\phi_{\tilde{d}} = \begin{cases} 1 & \text{pour } y \in [\frac{h_c+2c}{2}; \frac{h\Omega}{2}] \\ -\frac{2h}{h_c} & \text{pour } y \in [-\frac{h_c}{2}; \frac{h_c}{2}] \\ 1 & \text{pour } y \in [-\frac{h\Omega}{2}; -\frac{h_c+2c}{2}] \end{cases}$$

Etablissons finalement l'expression du nouveau descripteur cinématique  $\tilde{d}^1$ . Pour cela, on projette une fois encore les deux expressions du champ de déplacement (4.7) et (4.11) sur la fonction de forme  $\phi_{\tilde{d}}$  puis on fait la moyenne sur l'épaisseur des couches raides, soit :

$$\begin{aligned}
 \langle (4.7)\phi_{\tilde{d}} \rangle_s &= \langle (4.11)\phi_{\tilde{d}} \rangle_s \\
 \iff h\underline{U}_3^1 - 2h\underline{U}_2^1 + h\underline{U}_1^1 &= \left(h + \frac{4h^2}{h_c} + h\right)\tilde{d} \\
 \iff \tilde{d}^1 &= \frac{(\underline{U}_3^1 - \underline{U}_2^1) - (\underline{U}_2^1 - \underline{U}_1^1)}{2 + \frac{4h}{h_c}} \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Notons que ce descripteur cinématique représente le déplacement *différentiel* symétrique dans le plan entre les couches externes raides et la couche centrale raide. Les expressions des fonctions de forme dans les couches souples  $\Omega_s$  seront déterminées à l'ordre supérieur.

Comme pour le cas à deux couches raides, on introduit le vecteur rotation  $\tilde{\underline{\alpha}}^0$  relatif à l'extension différentiel entre les couches externes. Il est défini par la relation géométrique suivante :

$$\tilde{\underline{\alpha}}^0 = -\frac{2}{\bar{h}}\tilde{D}^1 + \nabla_x W^0 \quad \text{avec} \quad \bar{h} = h + h_c + 2c \quad (4.14)$$

Les états de déformation et de contrainte dans les couches raides sont complètement déterminés à l'ordre  $\varepsilon$ . En effet, comme dans le cas des plaques HCS à deux couches raides, on a montré que  $\sigma_N^1 = 0$  soit d'après la loi de comportement de Hooke :

$$e_N^1 = -\frac{\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s} \text{tr}(\underline{e}_P^1) = -\frac{\nu_s}{1 - \nu_s} \text{tr}(\underline{e}_P^1)$$

Grâce à l'expression du déplacement dans le plan (4.11), on établit que le tenseur réduit des déformations dans le plan s'écrit dans  $\Omega_s$  :

$$\underline{e}_{P_s}^1 = -\phi_W(y)\underline{e}_x(\nabla_x W^0) + \phi_{\tilde{D}}(y)\underline{e}_x(\tilde{D}^1) + \phi_{\tilde{d}}(y)\underline{e}_x(\tilde{d}^1) + \phi_U(y)\underline{e}_x(\underline{U}^1) \quad \text{dans} \quad \Omega_s \quad (4.15)$$

Enfin, la loi de comportement élastique permet de déduire le tenseur réduit des contraintes dans le plan dans  $\Omega$  (on rappelle que  $E'_s = E_s/(1 - \nu_s^2)$  et qu'il faut tenir compte du contraste  $\varepsilon^2$  pour déterminer l'état de contrainte dans les couches souples) :

$$\underline{\sigma}_P^1 = \begin{cases} \underline{\sigma}_{P_s}^1 = E'_s \left( (1 - \nu_s)\underline{e}_{P_s}^1 + \nu_s \text{tr}(\underline{e}_{P_s}^1)\underline{I}_{\underline{P}} \right) & \text{dans} \quad \Omega_s \\ \underline{\sigma}_{P_c}^1 = \underline{0} & \text{dans} \quad \Omega_c \end{cases} \quad (4.16)$$

En résumé, les tenseurs des contraintes dans  $\Omega_s$  et dans  $\Omega_c$  sont de la forme :

$$\underline{\sigma}_s = \varepsilon^1 \left( \begin{array}{c|c} \underline{\sigma}_{P_s}^1 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{0} \end{array} \right) + \varepsilon^2 \left( \begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{\sigma}_{T_s}^2 \\ \hline \underline{\sigma}_{T_s}^2 & \underline{0} \end{array} \right) + \dots \quad \text{dans} \quad \Omega_s \quad (4.17)$$

$$\underline{\sigma}_c = \varepsilon^2 \left( \begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{\sigma}_{T_c}^2 \\ \hline \underline{\sigma}_{T_c}^2 & \underline{0} \end{array} \right) + \varepsilon^3 \left( \begin{array}{c|c} \underline{\sigma}_{P_s}^3 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{\sigma}_{N_c}^3 \end{array} \right) + \dots \quad \text{dans} \quad \Omega_c \quad (4.18)$$

où seul le tenseur réduit  $\underline{\sigma}_{P_s}^1$  a été déterminé jusqu'à présent.

### 4.1.3 Etat de contrainte/déformation dans les couches souples

Le problème local dans le plan est extrait de (4.4) à l'ordre  $\varepsilon$  et s'écrit dans le domaine  $\Omega_c$  :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}_{Tc,y}^2 = 0 & ; & \underline{\sigma}_{Tc}^2 = \mu_c(\underline{u}_{c,y}^1 + \nabla_x W^0) & \text{dans } \Omega_c \\ & & [\underline{u}^1] = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.19)$$

Une intégration directe donne le déplacement dans le plan des couches souples :

$$\underline{\sigma}_{Tc}^2 = \underline{\sigma}_{Tc}^2(\underline{x}) \quad \text{et} \quad \underline{u}_c^1(y,(\underline{x})) = y \left( \frac{\underline{\sigma}_{Tc}^2(\underline{x})}{\mu_c} - \nabla_x W^0(\underline{x}) \right) + \underline{U}_c^1(\underline{x})$$

La continuité du champ  $\underline{u}_c^1(y,(\underline{x}))$  aux interfaces permet de déduire les expressions des fonctions de forme dans les couches souples. Ainsi le champ de déplacement dans le plan  $\underline{u}^1(y,(\underline{x}))$  s'écrit toujours :

$$\underline{u}^1(x,y) = -\phi_W(y)\nabla_x W^0(x) + \phi_{\tilde{D}}(y)\tilde{D}^1(x) + \phi_{\tilde{d}}(y)\tilde{d}^1(x) + \phi_U(y)U^1(x) \quad \text{dans } \Omega \quad (4.20)$$

et les fonctions de forme sont définies dans toute l'épaisseur de la plaque par  $\phi_W = y$ ,  $\phi_U = 1$  et :

$$\phi_{\tilde{D}} = \begin{cases} 1 & \text{pour } y \in [\frac{h_c+2c}{2}, \frac{h_\Omega}{2}] \\ \frac{y}{c} - \frac{h_c}{2c} & \text{pour } y \in [\frac{h_c}{2}, \frac{h_c+2c}{2}] \\ 0 & \text{pour } y \in [-\frac{h_c}{2}, \frac{h_c}{2}] \\ \frac{y}{c} + \frac{h_c}{2c} & \text{pour } y \in [-\frac{h_c+2c}{2}, -\frac{h_c}{2}] \\ -1 & \text{pour } y \in [-\frac{h_\Omega}{2}, -\frac{h_c+2c}{2}] \end{cases} ; \quad \phi_{\tilde{d}} = \begin{cases} 1 & \text{pour } y \in [\frac{h_c+2c}{2}, \frac{h_\Omega}{2}] \\ \frac{2h+h_c}{ch_c}y - \frac{2h+h_c}{2c} - \frac{2h}{h_c} & \text{pour } y \in [\frac{h_c}{2}, \frac{h_c+2c}{2}] \\ -\frac{2h}{h_c} & \text{pour } y \in [-\frac{h_c}{2}, \frac{h_c}{2}] \\ -\frac{2h+h_c}{ch_c}y - \frac{2h+h_c}{2c} - \frac{2h}{h_c} & \text{pour } y \in [-\frac{h_c+2c}{2}, -\frac{h_c}{2}] \\ 1 & \text{pour } y \in [-\frac{h_\Omega}{2}, -\frac{h_c+2c}{2}] \end{cases}$$

La Figure (4.2) montre cette dépendance linéaire *zig-zag* en  $y$  du déplacement dans le plan ainsi que la contribution de chaque descripteur cinématique.

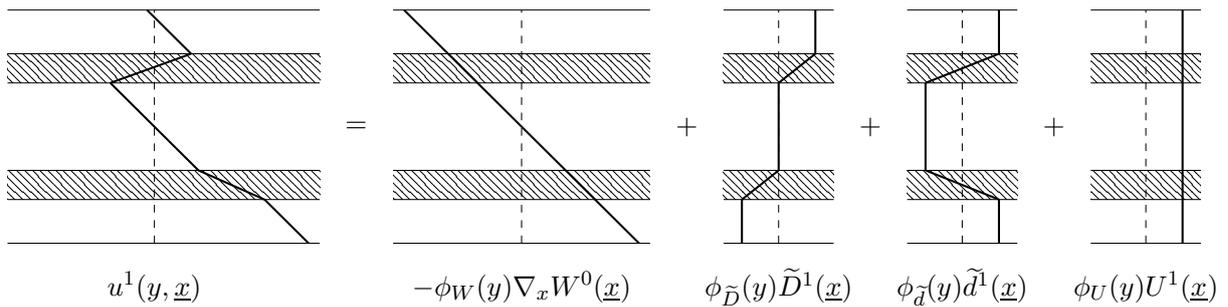


FIGURE 4.2 – Décomposition de la dépendance en  $y$  du champ cinématique dans le plan  $u^1$  pour une plaque HCS à trois couches raides.

Enfin, l'état de déformation/contrainte dans les couches souples  $\Omega_c$  à l'ordre dominant, s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{e}_{Tc\pm}^0(\underline{x}) & = & \frac{1}{2c} \left( \tilde{D}^1(\underline{x}) \pm \frac{2h+h_c}{h_c} \tilde{d}^1(\underline{x}) \right) \\ \underline{\sigma}_{Tc\pm}^2(\underline{x}) & = & \frac{\mu_c}{c} \left( \tilde{D}^1(\underline{x}) \pm \frac{2h+h_c}{h_c} \tilde{d}^1(\underline{x}) \right) \end{cases} \quad (4.21)$$

où dans cette expression  $\pm$  vaut  $-$  dans  $\Omega_{c_1}$  et  $+$  dans  $\Omega_{c_2}$ . Ainsi, les couches souples sont dans un état de déformation/contrainte de cisaillement pur induit par le déplacement différentiel dans le plan  $\underline{\tilde{D}}^1$  entre les deux couches externes mais également par le déplacement différentiel symétrique dans le plan entre les couches externes et la couche raide centrale  $\underline{\tilde{d}}^1$ .

Notons que la contrainte tangentielle dans les couches raides  $\underline{\sigma}_{T,s}^2$  reste indéterminée à cette étape.

#### 4.1.4 Équilibres globaux

Comme dans la Section 2.2.4, quatre équilibres globaux sont établis depuis l'équilibre local dans le plan à l'ordre  $\varepsilon^2$  :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}_{T,y}^2 + \underline{\text{div}}_x(\underline{\sigma}_P^1) = \underline{0} & \text{dans } \Omega \\ [\underline{\sigma}_T^2] = \underline{0} & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \underline{\sigma}_T^2 = \underline{0} & \text{sur } \Gamma_\Omega \end{cases} \quad (4.22)$$

Le procédé consiste à multiplier (4.22)-a par chacune des quatres fonctions de forme puis à intégrer sur toute l'épaisseur de la plaque :

$$\langle \phi(y) \underline{\sigma}_{T,y}^2 \rangle + \underline{\text{div}}_x \left( \langle \phi(y) \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s \right) = \underline{0} \quad \text{avec} \quad \phi(y) = \phi_U(y); \phi_W(y); \phi_{\tilde{D}}(y); \phi_{\tilde{d}}(y)$$

où on introduit similairement au cas des plaques à deux couches raides l'intégrale sur toute l'épaisseur définie pour toute quantité  $q$  par :

$$\langle q \rangle = \int_{-\frac{h_\Omega}{2}}^{\frac{h_\Omega}{2}} q \, dy$$

En intégrant  $\langle \phi \underline{\sigma}_{T,y}^2 \rangle$  par partie et en tenant compte des conditions de bords libres et de la continuité de  $\underline{\sigma}_T^2$  aux interfaces, on a :

$$-\langle \phi, y \underline{\sigma}_T^2 \rangle + \underline{\text{div}}_x \left( \langle \phi \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s \right) = \underline{0} \quad (4.23)$$

Une fois encore, le calcul des équilibres globaux fait intervenir le produit de chacune des fonctions de forme. Les résultats sont présentés dans le Tableau 4.1 et montrent que les déplacements dans le plan  $\underline{U}$  et  $\underline{\tilde{d}}$  sont indépendants, tandis que la déflexion hors-plan  $W$  et le déplacement dans le plan  $\underline{\tilde{D}}$  sont couplés.

La méthode pour établir les équilibres globaux est identique à celle utilisée dans le cas des plaques HCS à deux couches raides (Section 2.2.4) : on remplace  $\phi$  par les différentes fonctions de forme dans (4.23). Par conséquent, les calculs ne sont pas détaillés ici.

**Équilibre global dans le plan** Considérons tout d'abord  $\phi(y) = \phi_U(y) = 1$  dans l'équation (4.23). On a  $\phi_{U,y}(y) = 0$ . Ainsi, l'équation se simplifie :

$$\underline{\text{div}}_x(\langle \phi_U(y) \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s) = \underline{0}$$

Le Tableau 4.1 indique que  $\langle \phi_U \phi_W \rangle_s = \langle \phi_U \phi_{\tilde{D}} \rangle_s = \langle \phi_U \phi_{\tilde{d}} \rangle_s = 0$ . D'après l'expression (4.15)

$\langle \phi_A \cdot \phi_B \rangle_s$	$\phi_U$	$\phi_W$	$\phi_{\tilde{D}}$	$\phi_{\tilde{d}}$	
$\phi_U$	$2h + h_c$	0	0	0	$\bar{h} = h + h_c + 2c$
$\phi_W$	0	$\tilde{\mathcal{I}} = 2I + I_c + \frac{h\bar{h}^2}{2}$	$h\bar{h}$	0	; $I = h^3/12$
$\phi_{\tilde{D}}$	0	$h\bar{h}$	$2h$	0	$I_c = h_c^3/12$
$\phi_{\tilde{d}}$	0	0	0	$\frac{2h(2h+h_c)}{h_c}$	

TABLE 4.1 – Produit intégré des fonctions de forme associées aux quatres descripteurs cinématiques

du tenseur réduit  $\underline{e}_P^1$  et en remarquant que  $\text{tr}(\underline{e}_x(\underline{U}^1)) = \text{div}_x(\underline{U}^1)$  on obtient :

$$E'_s \underline{\text{div}}_x \left( (1 - \nu_s) \underline{e}_x(\underline{U}^1) + \nu_s \underline{\text{div}}_x(\underline{U}^1) \underline{I}_P \right) = \underline{0} \quad (4.24)$$

Cet équilibre global montre qu'à l'ordre dominant, le comportement dans le plan de la plaque est régi par l'élasticité bidimensionnelle classique, la seule variable cinématique étant le déplacement homogène moyen  $\underline{U}^1$  commun à toutes les couches raides.

**Equilibre des moments globaux** Pour obtenir cet équilibre, utilisons cette fois  $\phi(y) = \phi_W(y) = y$ , soit  $\phi_{W,y}(y) = 1$ . Ainsi, l'équation (4.23) s'écrit :

$$-\langle \underline{\sigma}_T^2 \rangle + \underline{\text{div}}_x(\langle \phi_W \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s) = \underline{0}$$

Comme pour l'équilibre précédent, on remplace  $\underline{\sigma}_P^1$  par son expression en fonction de  $\underline{e}_P^1$  et on utilise les relations du Tableau (4.1). En remarquant que  $\text{div}_x(\underline{\nabla}_x(W^0)) = \Delta_x(W^0)$  et en utilisant l'expression  $\tilde{D}^1 = \frac{\bar{h}}{2}(\underline{\nabla}_x W^0 - \tilde{\alpha}^0)$ , l'équilibre des moments globaux s'écrit grâce à la déflexion  $W^0$  et au vecteur rotation  $\tilde{\alpha}^0$  :

$$E'_s \left( -(2I + I_c) \underline{\nabla}_x \Delta_x W^0 - (\tilde{\mathcal{I}} - (2I + I_c)) \underline{\text{div}}_x \left( (1 - \nu) \underline{e}_x(\tilde{\alpha}^0) + \nu \text{div}_x(\tilde{\alpha}^0) \underline{I}_P \right) \right) = \langle \underline{\sigma}_T \rangle = \underline{\mathcal{T}}^2 \quad (4.25)$$

où  $\underline{\mathcal{T}}^2$  représente l'effort tranchant moyen dans l'épaisseur de la plaque.

**Equilibre des moments locaux** Enfin, en considérant (4.23) avec  $\phi(y) = \phi_{\tilde{D}}(y)$  et les expressions de  $\phi_{\tilde{D}}$  et de  $\underline{\sigma}_{Tc\pm}^2$  dans  $\Omega_c$ , le terme  $\langle \phi_{\tilde{D},y} \underline{\sigma}_T^2 \rangle$  devient :

$$\langle \phi_{\tilde{D},y} \underline{\sigma}_T^2 \rangle = \int_{-\frac{h_c+2c}{2}}^{-\frac{h_c}{2}} \frac{1}{c} \underline{\sigma}_{Tc-}^2 dy + \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c+2c}{2}} \frac{1}{c} \underline{\sigma}_{Tc+}^2 dy = \mu_c \frac{2}{c} \tilde{D}^1$$

En utilisant les résultats du Tableau 4.1, le terme  $\underline{\text{div}}_x(\langle \phi_{\tilde{D}} \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s)$  s'écrit :

$$\underline{\text{div}}_x(\langle \phi_{\tilde{D}} \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s) = E'_s \left( -\bar{h} h \underline{\nabla}_x \Delta_x W^0 + 2h \underline{\text{div}}_x \left( (1 - \nu) \underline{e}_x(\tilde{D}^1) + \nu \text{div}_x(\tilde{D}^1) \underline{I}_P \right) \right)$$

Par conséquent l'équation d'équilibre des moments globaux s'écrit :

$$-\mu_c \frac{2}{c} \tilde{D}^1 + E'_s \left( -\bar{h} h \underline{\nabla}_x \Delta_x W^0 + 2h \underline{\text{div}}_x \left( (1 - \nu) \underline{e}_x(\tilde{D}^1) + \nu \underline{\text{div}}_x(\tilde{D}^1) \underline{I}_P \right) \right) = \underline{0}$$

Cette équation exprime l'équilibre des efforts tangentiels exercés par les couches souples subissant le déplacement différentiel  $\tilde{D}^1$  avec (i) la flexion associée au gradient de la déflexion  $\underline{\nabla}_x \Delta_x W^0$  (ii) les efforts dans le plan dus aux variations spatiales de  $\tilde{D}^1$ . En introduisant la "rotation"  $\tilde{\alpha}^0$  définie en (4.14), l'équation d'équilibre des moments globaux prend la forme :

$$-E'_s \left( \tilde{\mathcal{I}} - (2I + I_c) \right) \underline{\text{div}}_x \left( (1 - \nu) \underline{e}_x(\tilde{\alpha}^0) + \nu \underline{\text{div}}_x(\tilde{\alpha}^0) \underline{I}_P \right) + \mu_c \frac{\bar{h}^2}{2c} (\tilde{\alpha}^0 - \underline{\nabla}_x W^0) = \underline{0} \quad (4.26)$$

**Equilibre des moments locaux opposés** Par rapport aux cas des plaques HCS à deux couches raides, nous avons vu que la cinématique est enrichie avec une variable additionnelle  $\tilde{d}^1$ . Considérons l'équation (4.23) avec  $\phi(y) = \phi_{\tilde{d}}(y)$ . Avec les expressions de  $\phi_{\tilde{d}}(y)$  et de  $\underline{\sigma}_{Tc\pm}^2$ , le terme  $\langle \phi_{\tilde{d},y} \underline{\sigma}_T^2 \rangle$  devient :

$$\langle \phi_{\tilde{d},y} \underline{\sigma}_T^2 \rangle = \int_{-\frac{h_c+2c}{2}}^{-\frac{h_c}{2}} -\frac{2h+h_c}{ch_c} \underline{\sigma}_{Tc-}^2 dy + \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c+2c}{2}} \frac{2h+h_c}{ch_c} \underline{\sigma}_{Tc+}^2 dy = \mu_c \frac{2}{c} \left( \frac{2h+h_c}{h_c} \right)^2 \tilde{d}^1$$

Similairement aux équilibres précédents, on utilise l'expression de  $\underline{\sigma}_P^1$  et les résultats du Tableau 4.1 pour simplifier le terme  $\underline{\text{div}}_x(\langle \phi_{\tilde{d}} \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s)$ . Ainsi, l'équilibre s'écrit :

$$E'_s \underline{\text{div}}_x \left( (1 - \nu) \underline{e}_x(\tilde{d}^1) + \nu \underline{\text{div}}_x(\tilde{d}^1) \underline{I}_P \right) - \frac{\mu_c}{ch} \frac{2h+h_c}{h_c} \tilde{d}^1 = \underline{0} \quad (4.27)$$

#### 4.1.5 Equilibre des efforts tranchants

Lorsque la plaque est chargée par un effort normal  $\mathcal{F}$ , l'équilibre hors-plan est donné à l'ordre  $\varepsilon^2$  dans le domaine complet  $\Omega$  par :

$$\begin{cases} \sigma_{N,y}^3 + \underline{\text{div}}_x(\underline{\sigma}_T^2) = \mathcal{F} & \text{dans } \Omega \\ [\sigma_N^3] = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_{Ns}^3 = 0 & \text{sur } \Gamma_\Omega \end{cases} \quad (4.28)$$

En intégrant la première équation sur toute l'épaisseur de la plaque et en utilisant les conditions de continuité aux interfaces, le premier terme du membre de gauche s'annule et l'**équilibre global du cisaillement hors-plan** s'écrit finalement :

$$\underline{\text{div}}_x(\underline{\mathcal{T}}^2) = \mathcal{F} \quad (4.29)$$

#### 4.1.6 Formulation synthétique

En utilisant les notations naturelles non-redimensionnées et en supprimant les exposants indiquant l'ordre, la description du comportement d'ensemble se divise en trois parties :

- le comportement hors-plan est déterminé par une description bi-torsorielle identique à celle obtenue dans le cas des plaques HCS à deux couches raides chargées normalement par un effort  $\mathcal{F}$ . Les équations (4.29) , (4.25) et (4.26) s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x(\underline{T}) = \mathcal{F} \\ \underline{T} = -\operatorname{div}_x(\underline{M}) + \underline{T} \\ \underline{T} = -\operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{M}}) \end{cases} \quad (4.30)$$

Néanmoins, les équations constitutives changent et deviennent :

$$\begin{cases} \underline{T} = 2K^* (\nabla_x W - \tilde{\alpha}) & ; & K^* = \mu_c \bar{h}^2 / 4c \\ \underline{M} = E'_s (2I + I_c) \left( (1 - \nu_s) \underline{e}_x (\nabla_x W) + \nu_s \Delta_x W \underline{I}_{\underline{P}} \right) \\ \underline{\mathcal{M}} = E'_s (\tilde{\mathcal{I}} - (2I + I_c)) \left( (1 - \nu_s) \underline{e}_x (\tilde{\alpha}) + \nu_s \operatorname{div}_x (\tilde{\alpha}) \underline{I}_{\underline{P}} \right) \end{cases} \quad (4.31)$$

- le comportement moyen dans le plan régit par l'équilibre dans le plan classique avec les paramètres des couches raides :

$$\operatorname{div}_x(\underline{\Sigma}_P) = 0 \quad ; \quad \underline{\Sigma}_P = E'_s \left( (1 - \nu_s) \underline{e}_x (\underline{U}) + \nu_s \operatorname{div}_x (\underline{U}) \underline{I}_{\underline{P}} \right) \quad (4.32)$$

- le comportement différentiel dans le plan régit par une nouvelle équation impliquant la variable indépendante  $\tilde{d}$  :

$$\operatorname{div}_x(\tilde{\underline{\Sigma}}_P) - \frac{\mu_c}{ch} \frac{2h + h_c}{h_c} \tilde{d} = 0 \quad ; \quad \tilde{\underline{\Sigma}}_P = E'_s \left( (1 - \nu_s) \underline{e}_x (\tilde{d}) + \nu_s \operatorname{div}_x (\tilde{d}) \underline{I}_{\underline{P}} \right) \quad (4.33)$$

Par conséquent, la variable cinématique additionnelle  $\tilde{d}$  n'interagit pas avec les autres variables et est gouvernée par une équation impliquant les paramètres des couches raides et souples. Notons que les deux tenseurs des contraintes dans le plan  $\underline{\Sigma}_P$  et  $\tilde{\underline{\Sigma}}_P$  associés à  $\underline{U}$  et  $\tilde{d}$  coexistent indépendamment dans la plaque. Ce champ sera illustré dans la Section 4.3.2.

## 4.2 Plaques HCS avec N couches raides

La situation devient plus complexe pour les stratifiés multi-couches constitués de  $N > 3$  couches raides (que l'on considère identiques ici pour simplifier). Néanmoins, les arguments et une procédure similaire aux cas deux et trois couches raides s'appliquent. Sans entrer dans le détail, concentrons-nous sur une description qualitative.

Considérons une plaque HCS constituée de N couches raides  $\Omega_{s_n}$ ,  $n = [1, N]$ , géométriquement et mécaniquement identiques, parfaitement connectées entre elles par N-1 couches souples identiques  $\Omega_{c_i}$ ,  $i = [1, N-1]$ . Pour commencer, on peut montrer que l'ensemble de la plaque subit une même déflexion uniforme  $\underline{W}(\underline{x})$  et que le déplacement dans le plan de chacune des N couches raides suit une cinématique linéaire classique de Kirchhoff. Ainsi, chacune des N couches raides a son propre déplacement homogène dans le plan  $\underline{U}_n(\underline{x})$ ,  $n = [1, N]$ . Afin d'obtenir une interprétation physique qui permet une claire dissociation des différentes cinématiques, on construit à partir de ces champs homogènes une base de N descripteurs cinématiques :

- le déplacement **homogène moyen** dans le plan des couches raides  $\underline{U}(\underline{x}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \underline{U}_n(\underline{x})$
- $p$  déplacements **antisymétriques** dans le plan, non-homogènes et de moyenne nulle, notés  $\underline{\tilde{D}}_q$ ,  $q = [1, p]$ , où  $p = \lfloor N/2 \rfloor$  représente la partie entière de  $N/2$ . Comme précédemment, une rotation  $\underline{\tilde{\alpha}}_q$  peut être définie relativement à  $\underline{\tilde{D}}_q$ .
- $p - 1$  ou  $p$  (pour  $N = 2p$  ou  $N = 2p + 1$ ) déplacements **symétriques** dans le plan, non-homogènes et de moyenne nulle, notés  $\underline{\tilde{d}}_m$ ,  $m = [1, p \text{ ou } p + 1]$  auxquels sont associées  $N$  fonctions de forme permettant d'exprimer le déplacement dans le plan de la plaque à l'ordre dominant sous la forme :

$$\underline{u}^1(y, \underline{x}) = -\phi_W(y) \underline{\nabla}_x W(\underline{x}) + \phi_U \underline{U}(\underline{x}) + \sum_{q=1}^p \phi_{\underline{\tilde{D}}_q} \underline{\tilde{D}}_q(\underline{x}) + \sum_{m=1}^{p; p+1} \phi_{\underline{\tilde{d}}_m} \underline{\tilde{d}}_m(\underline{x}) \quad (4.34)$$

Ces champs symétriques et antisymétriques doivent être construits astucieusement, afin qu'il existe entre leurs fonctions de forme associées des relations d'orthogonalité selon l'intégration  $\langle \cdot \rangle_s$  définie dans le domaine des couches raides pour une quantité  $f$  par :

$$\langle f \rangle_s = \int_{\Omega_s} f \, dy$$

Le déplacement  $\underline{U}(\underline{x})$  étant homogène dans la section, on prend systématiquement  $\phi_U(y) = 1$ . On construit les champs  $\underline{\tilde{d}}_m(\underline{x})$  de sorte que leurs fonctions de forme soient de moyenne nulle (les champs  $\underline{\tilde{D}}_q(\underline{x})$  étant antisymétriques, ils sont de moyenne nulle), i.e. :

$$\langle \phi_{\underline{\tilde{D}}_q} \rangle_s = \langle \phi_{\underline{\tilde{d}}_m} \rangle_s = 0$$

Ainsi, le déplacement homogène dans le plan  $\underline{U}(\underline{x})$  n'interagit ni avec le champ associé à  $\underline{\nabla}_x W(\underline{x})$ , ni avec les champs symétriques et antisymétriques précédemment construits. Par conséquent, le comportement dans le plan moyen reste inchangé et régit par l'équilibre dans le plan classique (4.32).

De plus, les fonctions de forme associées aux déplacements symétriques  $\underline{\tilde{d}}_m$  sont construites orthogonales entre elles, autrement dit les  $\underline{\tilde{d}}_m$  sont *découplés les uns des autres*. N'interagissant ni avec les fonctions de formes des déplacements antisymétriques ni avec celle associée à  $\underline{\nabla}_x W$ , chacun des  $p$  (ou  $p - 1$ ) champs symétriques associés à  $\underline{\tilde{d}}_m$  est gouverné indépendamment par une équation différentielle du second ordre similaire à (4.33).

Par construction, les champs associés aux déplacements antisymétriques  $\underline{\tilde{D}}_q$  sont tous *couplés* avec le champ associé à  $\underline{\nabla}_x W$ , et *découplés* des champs antisymétriques associés à  $\underline{\tilde{d}}_m$ . Par ailleurs, la construction des fonctions de forme associées à  $\underline{\tilde{D}}_q$  (ou  $\underline{\tilde{\alpha}}_q$ ) est telle qu'elles sont orthogonales une à une, autrement dit elles sont *découplées les unes des autres*. Par conséquent, le comportement hors-plan est régit par  $p + 1$  descripteurs cinématiques ( $\underline{\nabla}_x W$  et tous les  $\underline{\tilde{D}}_q$ ) et  $p + 1$  torseurs. L'ensemble des équations d'équilibres écrites avec ces variables "orthogonales" se structure de la manière suivante :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x(\underline{\mathcal{T}}) = 0 \\ \underline{\mathcal{T}} = -\underline{\operatorname{div}}_x(\underline{\mathcal{M}}) + \sum_{q=1}^p \underline{\mathcal{T}}_q \\ \underline{\mathcal{T}}_q = -\underline{\operatorname{div}}_x(\underline{\mathcal{M}}_q) \end{cases} \quad (4.35)$$

et les lois de comportement prennent la forme :

$$\begin{cases} \underline{T}_q &= K_q (\nabla_x W - \tilde{\alpha}_q) \\ \underline{M} &= NE'_s I \left( (1 - \nu) \underline{e}_x (\nabla_x W) + \nu \Delta_x W \underline{I}_P \right) \\ \underline{M}_q &= E'_s \mathcal{J}_q \left( (1 - \nu) \underline{e}_x (\tilde{\alpha}_q) + \nu \underline{\text{div}}_x (\tilde{\alpha}_q) \underline{I}_P \right) \end{cases} \quad (4.36)$$

où les paramètres effectifs  $K_q$  et  $\mathcal{J}_q$  sont complètement déterminés par la géométrie et les paramètres mécaniques de la plaque stratifiée.

Le comportement hors-plan est donc décrit par un élément de flexion  $NE'_s I$  et la variable  $W_{,x}$ , en parallèle avec  $p$  éléments de flexion et cisaillement en série, de paramètres et variables respectifs  $(E'_s \mathcal{J}_q; \alpha_q)$  et  $(K_q; W_{,x} - \alpha_q)$  (voir Figure 4.3).

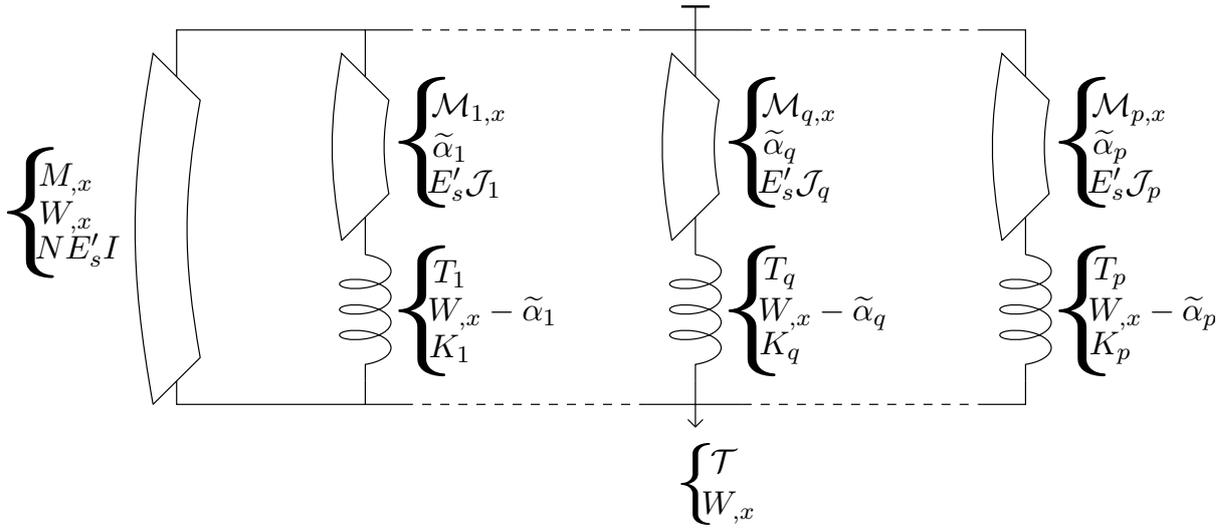


FIGURE 4.3 – Représentation schématique du comportement hors-plan d'une plaque HCS à  $N$  couches raides impliquant les mécanismes de flexion globale, flexion locale et cisaillement

Soulignons que la description ci-dessus repose sur le découplage des champs symétriques et antisymétriques. Cet argument géométrique s'applique pour toute plaque stratifiée symétrique, même lorsque les épaisseurs des couches sont différentes. Dans ce cas, la structure de l'ensemble des équations d'équilibre est toujours valable mais les paramètres effectifs seront différents.

## 4.3 Deux exemples de plaques multicouches

### 4.3.1 Exemple succinct des plaques HCS à 4 couches raides

Cette section a pour but d'illustrer le principe général présenté dans la section précédente. Nous allons simplement indiquer les descripteurs cinématiques, les fonctions de formes associées et le principe de construction des équations d'équilibre pour une plaque constituée de  $N = 4$  (soit  $p = 2$ ) couches raides  $\Omega_{s_i}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Ces dernières sont prises identiques, d'épaisseur  $h$  et de module d'Young apparent  $E'_s$ . Elles sont parfaitement connectées entre elles par trois couches souples identiques  $\Omega_{c_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , d'épaisseur  $c$  (soit une épaisseur totale  $h_c = 4h + 3c$ ) et de module de cisaillement  $\mu_c$ .

Comme dans les cas précédents (deux ou trois couches raides), l'approche asymptotique

permet de montrer que l'ensemble de la plaque HCS subit une déflexion uniforme  $W^0(\underline{x})$ , et que le déplacement dans le plan  $\underline{u}^1(y, \underline{x})$  suit pour chacune des couches raides la cinématique linéaire classique de Kirchhoff :

$$\underline{u}^1(y, \underline{x}) = -y \nabla_x W(\underline{x}) + \underline{U}_i(\underline{x}) \quad \text{dans } \Omega_{s_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, 4 \quad (4.37)$$

Chaque couche raide a donc son propre déplacement homogène dans le plan  $\underline{U}_i(\underline{x})$ . La méthode pour simplifier la description est de décomposer ces champs en quatre champs indépendants, construit de façon à ce que les fonctions de forme associées soient orthogonales au sens de l'intégration définie pour une quantité  $q$  par :

$$\langle q \rangle_s = \int_{-\frac{h\Omega}{2}}^{-\frac{h\Omega}{2}+h} q \, dy + \int_{-h-\frac{c}{2}}^{-\frac{c}{2}} q \, dy + \int_{\frac{c}{2}}^{h+\frac{c}{2}} q \, dy + \int_{\frac{h\Omega}{2}-h}^{\frac{h\Omega}{2}} q \, dy$$

Ces orthogonalités (ou découplage entre les descripteurs) vont permettre d'obtenir aisément les équilibres globaux décrivant le comportement du stratifié. Parmi les quatre descripteurs construits à partir des champs homogènes des couches raides, deux sont symétriques (on rappelle que  $p = 2$ ) :

- le déplacement homogène moyen dans le plan des couches raides

$$\underline{U} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 + \underline{U}_4}{4}$$

- le déplacement différentiel symétrique entre les couches externes et les couches internes

$$\underline{\tilde{d}} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2 - \underline{U}_3 + \underline{U}_4}{4}$$

et les deux autres sont antisymétriques :

- le déplacement différentiel progressif

$$\underline{\tilde{D}}_1 = \frac{-2\underline{U}_1 - \underline{U}_2 + \underline{U}_3 + 2\underline{U}_4}{10}$$

- le déplacement différentiel alterné

$$\underline{\tilde{D}}_2 = \frac{-\underline{U}_1 + 2\underline{U}_2 - 2\underline{U}_3 + \underline{U}_4}{10}$$

Les fonctions de formes associées s'écrivent dans les couches raides :

$$\phi_U = 1 \quad ; \quad \phi_{\underline{\tilde{d}}} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{cases} \quad ; \quad \phi_{\underline{\tilde{D}}_1} = \begin{cases} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{cases} \quad ; \quad \phi_{\underline{\tilde{D}}_2} = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega_{s_4} \\ -2 & \text{dans } \Omega_{s_3} \\ 2 & \text{dans } \Omega_{s_2} \\ -1 & \text{dans } \Omega_{s_1} \end{cases}$$

de sorte que le déplacement dans le plan de la plaque à l'ordre dominant s'écrit dans  $\Omega$  avec  $\phi_W = y$  :

$$\underline{u}^1(y, \underline{x}) = -\phi_W(y) \underline{\nabla}_x W(\underline{x}) + \phi_U \underline{U}(\underline{x}) + \phi_{\tilde{d}} \tilde{d}(\underline{x}) + \phi_{\tilde{D}_1} \tilde{D}_1(\underline{x}) + \phi_{\tilde{D}_2} \tilde{D}_2(\underline{x}) \quad (4.38)$$

La Figure 4.4 montre les fonctions de forme associées aux champs construits à partir des déplacements homogènes dans le plan de chacune des couches raides. Elles sont obtenues graphiquement dans les couches souples par continuité (les démonstrations dans les cas précédents deux et trois couches raides permettent d'affirmer qu'elles sont linéaires en  $y$ ).

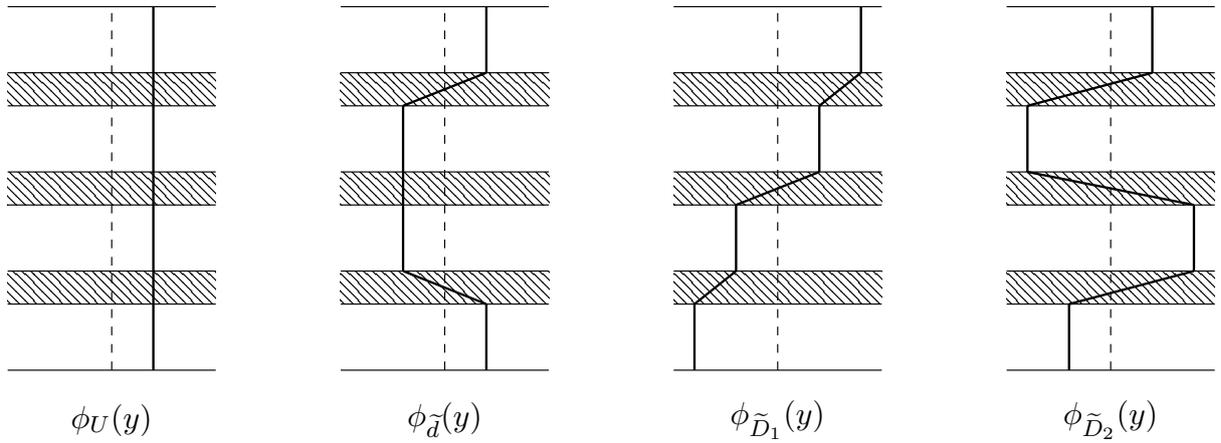


FIGURE 4.4 – Fonctions de forme  $\phi(y)$  associées aux champs construits à partir des déplacements homogènes dans le plan de chacune des couches raides

Le Tableau 4.2 illustre les relations d'orthogonalité ou de non-orthogonalité entre les différentes fonctions de forme ainsi que les coefficients géométriques pouvant intervenir dans les équilibres globaux.

$\langle \phi_A \cdot \phi_B \rangle_s$	$\phi_U$	$\phi_W$	$\phi_{\tilde{D}_1}$	$\phi_{\tilde{D}_2}$	$\phi_{\tilde{d}}$
$\phi_U$	$4h$	$0$	$0$	$0$	$0$
$\phi_W$	$0$	$\tilde{I} = 4I + 5h(h+c)^2$	$7h(h+c)$	$h(h+c)$	$0$
$\phi_{\tilde{D}_1}$	$0$	$7h(h+c)$	$10h$	$0$	$0$
$\phi_{\tilde{D}_2}$	$0$	$h(h+c)$	$0$	$10h$	$0$
$\phi_{\tilde{d}}$	$0$	$0$	$0$	$0$	$4h$

;  $I = h^3/12$

TABLE 4.2 – Produit intégré des fonctions de forme associées aux cinq descripteurs cinématiques

Les équilibres globaux sont obtenus en remplaçant  $\phi(y)$  par chacune des fonctions de formes précédentes dans l'équation issue de l'équilibre local à l'ordre  $\varepsilon^1$  :

$$\langle \phi(y) \underline{\sigma}_{T,y}^2 \rangle + \underline{\text{div}}_x \left( \langle \phi(y) \underline{\sigma}_P^1 \rangle_s \right) = \underline{0} \quad (4.39)$$

En utilisant le Tableau 4.2, on montre que les champs symétriques sont totalement découplés des autres champs et leurs fonctions de forme mènent à deux équations d'équilibre dans le plan :

- L'équation d'équilibre dans le plan usuelle est obtenue en prenant  $\phi(y) = \phi_U(y)$ . On obtient l'équation classique (4.32) impliquant le déplacement homogène moyen  $\underline{U}(\underline{x})$
- La seconde équation d'équilibre dans le plan, moins conventionnelle, est obtenue en prenant  $\phi(y) = \phi_{\tilde{d}}(y)$ . Grâce à l'orthogonalité de cette fonction de forme avec toutes les autres, l'équation ne fait intervenir que le descripteur cinématique  $\tilde{\underline{d}}(\underline{x})$ .

Inversement, le gradient de la déflexion  $\nabla W(\underline{x})$  et les deux champs antisymétriques  $\tilde{D}_1(\underline{x})$  et  $\tilde{D}_2(\underline{x})$  sont tous couplés dans les équations d'équilibre hors-plan :

- L'équation d'équilibre des moments globaux est établie en prenant  $\phi(y) = \phi_W(y)$ . Comme indiqué dans le Tableau (4.2), l'équation obtenue montre le couplage entre les deux champs antisymétriques et le gradient de la déflexion.
- Un premier équilibre des moments locaux est obtenu avec  $\phi(y) = \phi_{\tilde{D}_1}(y)$ . Cette fonction de forme étant orthogonale à  $\phi_{\tilde{D}_2}(y)$ , on obtient une équation couplant uniquement le déplacement différentiel progressif avec le gradient de la déflexion.
- Finalement, un second équilibre des moments locaux est établi avec  $\phi(y) = \phi_{\tilde{D}_2}(y)$ . Par orthogonalité, l'équation d'équilibre obtenue montre le couplage entre  $\tilde{D}_2^1$  et le gradient de la déflexion.

L'ensemble des équations d'équilibres écrites avec ces variables "orthogonales" se structure de la manière suivante :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x(\underline{T}) = 0 \\ \underline{T} = -\operatorname{div}_x(\underline{M}) + \underline{T}_1 + \underline{T}_2 \\ \underline{T}_1 = -\operatorname{div}_x(\underline{M}_1) \\ \underline{T}_2 = -\operatorname{div}_x(\underline{M}_2) \end{cases} \quad (4.40)$$

et les lois de comportement prennent la forme :

$$\begin{cases} \underline{T}_1 = K_1 (\nabla_x W - \underline{\alpha}_1) \\ \underline{T}_2 = K_2 (\nabla_x W - \underline{\alpha}_2) \\ \underline{M} = NE'_s I \left( (1 - \nu) \underline{e}_x (\nabla_x W) + \nu \Delta_x W \underline{I}_{\underline{P}} \right) \\ \underline{M}_1 = E'_s \mathcal{J}_1 \left( (1 - \nu) \underline{e}_x (\underline{\alpha}_1) + \nu \operatorname{div}_x (\underline{\alpha}_1) \underline{I}_{\underline{P}} \right) \\ \underline{M}_2 = E'_s \mathcal{J}_2 \left( (1 - \nu) \underline{e}_x (\underline{\alpha}_2) + \nu \operatorname{div}_x (\underline{\alpha}_2) \underline{I}_{\underline{P}} \right) \end{cases} \quad (4.41)$$

où les paramètres effectifs  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{J}_2$  sont complètement déterminés par la géométrie et les paramètres mécaniques de la plaque stratifiée.

Ainsi, on obtient un système de quatre équations différentielles couplées, avec quatre descripteurs cinématiques à déterminer. La résolution permet notamment d'exprimer l'équation différentielle en  $\underline{W}(\underline{x})$  et d'étudier les comportements limites des plaques HCS à quatre couches raides, comme nous l'avons fait dans le Chapitre 2 pour les plaques HCS à deux couches raides.

### 4.3.2 Réponse dans le plan à un chargement en cisaillement pur d'une plaque HCS à trois couches raides

L'objectif de cette section est de montrer que contrairement aux modèles de plaques classiques, le modèle de plaques HCS multicouche permet de traiter des cinématiques inhomogènes dans la section, particulièrement la cinématique différentielle additionnelle  $\tilde{d}$  mise en avant dans la Section 4.1.

Considérons une plaque HCS constituée de trois couches raides identiques, d'épaisseur  $h$  et de module d'Young apparent  $E'_s$ , parfaitement connectées entre elles par deux couches souples identiques d'épaisseur  $c$  et de module de cisaillement  $\mu_c$ , soumise à un chargement en cisaillement pur. Comme l'illustre la Figure 4.5, la plaque de longueur  $L$  (et de largeur unitaire) est chargée dans son plan sur la tranche supérieure  $x_1 = L/2$  par une contrainte  $F/S$  appliquée sur la couche raide centrale. Sur la tranche inférieure  $x_1 = -L/2$ , les deux couches externes sont encastrées et la couche raide centrale est libre. Pour ce cas de chargement, les quantités varient uniquement selon  $x_1$  (noté  $x$  par simplicité dans la suite de cette section) et il n'existe aucun déplacement hors-plan, soit  $W(x) = 0$ .

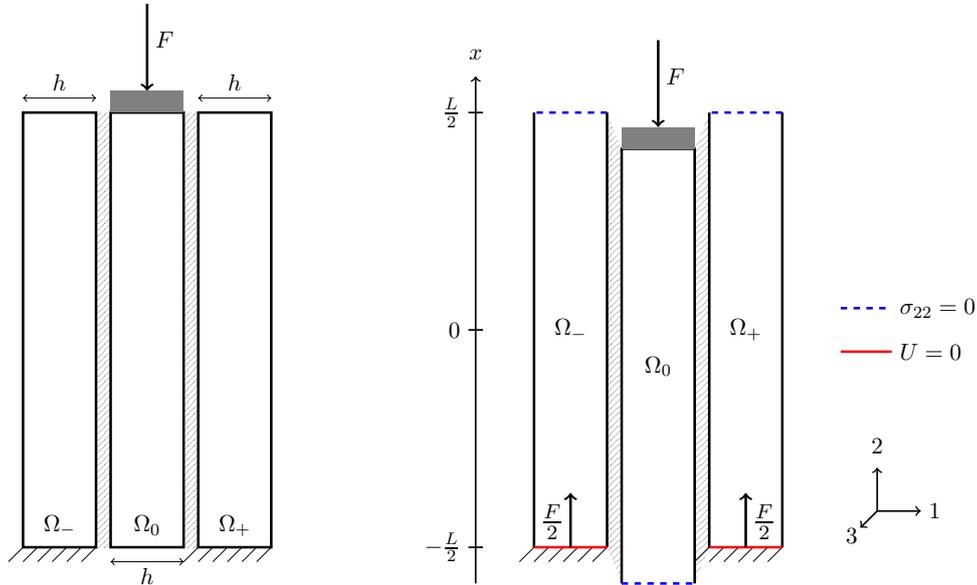


FIGURE 4.5 – Chargement en cisaillement "pur" et conditions limites en contrainte et déplacement

La symétrie géométrique et mécanique des plaques impose que les déplacements ainsi que les contraintes soient identiques dans les deux couches externes, soit  $U_+(x) = U_-(x)$ , soit par définition  $\tilde{D}(x) = 0$ . Par conséquent, le déplacement dans le plan s'écrit :

$$u(x,y) = \phi_U(y)U(x) + \phi_{\tilde{d}}(y)\tilde{d}(x) = \begin{cases} U_+(x) & \text{dans } \Omega_+ \\ U_0(x) & \text{dans } \Omega_0 \\ U_-(x) & \text{dans } \Omega_- \end{cases} \quad \text{avec } U_+(x) = U_-(x)$$

où le déplacement homogène moyen dans le plan des couches raides  $U(x)$  et le déplacement différentiel symétrique dans le plan entre les couches externes raides et la couche centrale raide

$\tilde{d}(x)$  s'écrivent grâce aux relations (4.12) et (4.13) :

$$U(x) = \frac{2U_+(x) + U_0(x)}{3} \quad ; \quad \tilde{d}(x) = \frac{U_+(x) - U_0(x)}{3}$$

et où les fonctions de forme associées  $\phi_U$  et  $\phi_{\tilde{d}}$  s'écrivent pour une plaque HCS à trois couches raides identiques :

$$\phi_U = 1 \quad ; \quad \phi_{\tilde{d}} = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega_+ \\ -2 & \text{dans } \Omega_0 \\ 1 & \text{dans } \Omega_- \end{cases}$$

Les deux équations différentielles (4.32 - 4.33) régissant les déplacements moyen  $U(x)$  et différentiel  $\tilde{d}(x)$  dans le plan deviennent :

$$\Sigma_{,x} = 0 \quad ; \quad \Sigma = E'_s U_{,x} \quad (4.42)$$

$$\tilde{\Sigma}_{,x} - 3\frac{\mu_c}{h} \frac{\tilde{d}}{c} = 0 \quad ; \quad \tilde{\Sigma} = E'_s \tilde{d}_{,x} \quad (4.43)$$

Par construction, les égalités suivantes relient  $\Sigma$  et  $\tilde{\Sigma}$  à la contrainte  $\sigma_{22}$  dans les couches raides externes et centrale (respectivement d'indice  $\pm$  et 0) :

$$\Sigma = \frac{2\sigma_{22+} + \sigma_{22_0}}{3} \quad ; \quad \tilde{\Sigma} = \frac{\sigma_{22+} - \sigma_{22_0}}{3} \quad (4.44)$$

En considérant le chargement, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\text{en } x = L/2 \quad \begin{cases} \sigma_{22\pm} = 0 \\ \sigma_{22_0} = -\frac{F}{S} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \Sigma = -\frac{F}{3S} \\ \tilde{\Sigma} = \frac{F}{3S} \end{cases} \quad (4.45)$$

$$\text{en } x = -L/2 \quad \begin{cases} \sigma_{22\pm} = -\frac{F}{2S} \\ \sigma_{22_0} = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \Sigma = -\frac{F}{3S} \\ \tilde{\Sigma} = -\frac{F}{6S} \end{cases} \quad (4.46)$$

auxquelles s'ajoutent les conditions en déplacement

$$U_{\pm}(-L/2) = 0 \quad \text{soit} \quad U(-L/2) = \frac{U_0}{3} \quad , \quad \tilde{d}(-L/2) = -\frac{U_0}{3}$$

Rappelons que la contrainte de cisaillement dans les deux couches souples est donnée par la relation (4.21) avec  $h_c = h$  :

$$\tau_{\pm c}(x) = \pm 3\mu_c \frac{\tilde{d}(x)}{c}$$

Déterminons le déplacement différentiel  $\tilde{d}(x)$ . L'équation (4.43) peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle d'ordre deux sans second membre :

$$\tilde{d}_{,xx}(x) - B^2 \tilde{d}(x) = 0 \quad \text{avec} \quad B^2 = \frac{3\mu_c}{E'_s h c} \quad (4.47)$$

où  $B^{-1}$  est la taille caractéristique intrinsèque du phénomène de compression/cisaillement dans une plaque HCS. Ainsi, on cherche la solution sous la forme :

$$\tilde{d}(x) = a_1 \operatorname{ch}(Bx) + a_2 \operatorname{sh}(Bx)$$

respectant les conditions limites  $\tilde{d}_{,x}(-L/2) = -\frac{F}{6E'_s S}$  et  $\tilde{d}_{,x}(L/2) = \frac{F}{3E'_s S}$ . On obtient

$$\tilde{d}(x) = \frac{1}{12BE'_s} \left( \frac{3 \operatorname{ch}(Bx)}{\operatorname{sh}(BL/2)} + \frac{\operatorname{sh}(Bx)}{\operatorname{ch}(BL/2)} \right) \frac{F}{S}$$

et on déduit  $\tilde{\Sigma}(x)$  grâce à la relation (4.43) :

$$\tilde{\Sigma}(x) = E'_s \tilde{d}_{,x}(x) = \frac{1}{12} \left( \frac{3 \operatorname{sh}(Bx)}{\operatorname{sh}(BL/2)} + \frac{\operatorname{ch}(Bx)}{\operatorname{ch}(BL/2)} \right) \frac{F}{S}$$

L'équation (4.42) montre que la contrainte  $\Sigma$  est constante selon  $x$ . D'après les conditions limites (4.45) et (4.46), elle vaut  $\Sigma(x) = -\frac{F}{3S}$ . L'équation (4.42) intégrée fournit l'expression du déplacement homogène moyen  $U(x)$  en fonction de la constante d'intégration  $a_3$  :

$$U(x) = -\frac{F}{3E'_s S} x + a_3 \quad \text{avec} \quad U(-L/2) = \frac{U_0(-L/2)}{3} = -\tilde{d}(-L/2) \quad (4.48)$$

La résolution donne finalement :

$$U(x) = -\frac{1}{3E'_s} \left( \left( x + \frac{L}{2} \right) + \frac{1}{4B} (3 \operatorname{cotanh}(BL/2) - \operatorname{th}(BL/2)) \right) \frac{F}{S}$$

Les champs  $U(x)$  et  $\tilde{d}(x)$  permettent de déterminer les champs homogène dans le plan de chacune des couches raides grâce aux relations suivantes :

$$U_+(x) = U(x) + \tilde{d}(x) \quad \text{et} \quad U_0(x) = U(x) - 2\tilde{d}(x)$$

**Synthèse** La résolution des équations d'équilibre avec les conditions aux limites associées à  $\tilde{d}$ , et donc à  $U$ , permet avec (4.44), de déterminer le déplacement et la contrainte dans chaque couche :

$$\tilde{d}(x) = \frac{1}{12BE'_s} \left( \frac{3 \operatorname{ch}(Bx)}{\operatorname{sh}(BL/2)} + \frac{\operatorname{sh}(Bx)}{\operatorname{ch}(BL/2)} \right) \frac{F}{S} \quad (4.49)$$

$$U(x) = -\frac{1}{3E'_s} \left( \left(x + \frac{L}{2}\right) + \frac{1}{4B} (3 \operatorname{cotanh}(\frac{BL}{2}) - \operatorname{th}(\frac{BL}{2})) \right) \frac{F}{S} \quad (4.50)$$

$$\tilde{\Sigma}(x) = \frac{1}{12} \left( \frac{3 \operatorname{sh}(Bx)}{\operatorname{sh}(BL/2)} + \frac{\operatorname{ch}(Bx)}{\operatorname{ch}(BL/2)} \right) \frac{F}{S} \quad (4.51)$$

$$\Sigma(x) = -\frac{F}{3S} \quad (4.52)$$

$$U_+(x) = -\frac{1}{3E'_s} \left[ \left(x + \frac{L}{2}\right) - \frac{\operatorname{sh}(B(x + \frac{L}{2}))}{2B} \left( 3 \frac{\operatorname{sh}(B(x - \frac{L}{2}))}{\operatorname{sh}(BL/2)} + \frac{\operatorname{ch}(B(x - \frac{L}{2}))}{\operatorname{ch}(BL/2)} \right) \right] \frac{F}{S} \quad (4.53)$$

$$U_0(x) = -\frac{1}{3E'_s} \left[ \left(x + \frac{L}{2}\right) + \frac{1}{4B} \left( \frac{6 \operatorname{ch}(Bx)}{\operatorname{sh}(BL/2)} + 3 \operatorname{cotanh}(\frac{BL}{2}) + \frac{2 \operatorname{sh}(Bx)}{\operatorname{ch}(BL/2)} - \operatorname{th}(\frac{BL}{2}) \right) \right] \frac{F}{S} \quad (4.54)$$

Ces résultats montrent qu'en général, ni le déplacement ni les contraintes ne sont homogènes dans les différentes couches. Etudions les cas limites. Quand  $BL \rightarrow \infty$  (couches d'interface raides), on a :

$$\lim_{BL \rightarrow +\infty} \tilde{d}(x) = 0 \quad \text{soit} \quad U_0(x) = U_{\pm}(x) = U(x)$$

De plus, on sait que :

$$\lim_{BL \rightarrow +\infty} \operatorname{th}(\frac{BL}{2}) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{BL \rightarrow +\infty} \operatorname{cotanh}(\frac{BL}{2}) = 1$$

Ainsi, la description se réduit à la formulation classique pour la compression des poutres monolithiques, i.e. :

$$U_0(x) = U_{\pm}(x) = U(x) = -\frac{1}{3E'_s} \left(x + \frac{L}{2}\right) \frac{F}{S}$$

Quand  $BL \rightarrow 0$  (rigidité des couches d'interface négligeable, ou module d'Young des couches raides très grand), on utilise les développements limités à l'ordre 1 suivant :

$$\sin(\frac{BL}{2}) \simeq \frac{BL}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotan}(\frac{BL}{2}) \simeq \frac{2}{BL}$$

Par conséquent, la description donne le déplacement uniforme dans le plan de la couche centrale

$$U_0(x) \underset{BL \rightarrow 0}{=} -\frac{hc}{2\mu_c L} \frac{F}{S}$$

Ceci correspond à l'hypothèse stipulant que la couche centrale subit un déplacement dans le

plan rigide (indépendant de  $x$ ) et que le cisaillement dans les couches souples est uniforme et donné par :

$$\tau = \mu_c \frac{U_0}{c} = -\frac{h}{2L} \frac{F}{S}$$

#### 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre dédié aux plaques symétriques stratifiées à trois puis  $N$  couches raides, le champ de déplacement dans le plan est décomposé en champs symétriques et antisymétriques, découplés par construction. La description synthétique et explicite obtenue grâce à l'approche par développements asymptotiques repose totalement sur ce découplage. On obtient ainsi un ensemble d'équations d'équilibre et de lois de comportement simples, permettant une représentation rhéologique du comportement d'ensemble de la plaque, impliquant des mécanismes de flexion globale, locale et de cisaillement.

L'application du modèle au cas particulier d'une plaque à trois couches raides chargée en cisaillement "pur" montre qu'en général les différents champs ne sont pas homogènes dans les couches. Elle illustre également que la détermination de ces champs ne nécessite pas d'approche numérique et que les calculs théoriques peuvent être menés sans hypothèses lourdes.

---

 Application du modèle HCS au verre feuilleté : validation expérimentale
 

---

**Résumé**

Ce chapitre intervient après le développement d'un modèle généralisé de plaques stratifiées fortement contrastées. Son objectif principal est de valider les formulations analytiques obtenues par approche asymptotique. Pour cela une campagne expérimentale a été réalisée. Des plaques de verre feuilleté ont été soumises à différents types d'essais (fluage, relaxation, cyclique, rupture, vibrations) dans différentes conditions externes (variations des conditions limites, de la température, de la fréquence des essais cycliques). Des chargements dans le plan et hors-plan, sur des plaques à deux ou trois couches de verre, permettent de valider le comportement statique déterminé analytiquement dans le Chapitre 3. Afin de se rendre compte de l'influence du matériau viscoélastique sur le comportement d'ensemble, les essais statiques sont menés sur des plaques de verre feuilleté avec deux PVB différents. Par ailleurs, des essais vibratoires ont été effectués sur une table vibrante afin de mesurer les caractéristiques dynamiques de plaques de verre feuilleté (fréquences propres, déformées modales) en fonction du contraste mécanique entre les couches.

**Sommaire**


---

<b>5.1</b>	<b>Campagne expérimentale . . . . .</b>	<b>125</b>
<b>5.2</b>	<b>Matériel utilisé . . . . .</b>	<b>128</b>
<b>5.3</b>	<b>Flexion trois points . . . . .</b>	<b>129</b>
<b>5.4</b>	<b>Rupture thermique par extension différentielle . . . . .</b>	<b>141</b>
<b>5.5</b>	<b>Cisaillement "pur" sur verre tricouche . . . . .</b>	<b>142</b>
<b>5.6</b>	<b>Essais de vibration . . . . .</b>	<b>144</b>

---

**5.1 Campagne expérimentale**

L'objectif général de ce chapitre est de valider le modèle de plaque HCS obtenu par approche asymptotique dans les chapitres précédents. Par "valider le modèle" on entend vérifier les résultats théoriques qu'il fournit en observant le comportement d'une plaque réelle sous diverses

sollicitations bien choisies. C'est en ce sens que la campagne expérimentale de ces travaux a été définie. Les essais dits de validation ont été menés sur du verre feuilleté avec du PVB de la série RB41, dont les paramètres rhéologiques sont complètement déterminés. Néanmoins, certains essais ont été répétés sur des plaques avec PVB de la série DG41 afin d'analyser l'influence de la couche d'interface sur le comportement d'ensemble.

Rappelons que l'approche asymptotique a permis d'obtenir un modèle de plaques fortement contrastées s'appliquant aussi bien en statique qu'en dynamique. Ainsi pour cette campagne expérimentale, nous utilisons du verre feuilleté, en tant que plaque HCS, sollicité statiquement et dynamiquement. Ensuite, ce modèle a été généralisé à des plaques HCS à  $N$  couches raides (ou  $2N-1$  couches au total). Néanmoins, les calculs des champs cinématiques ont été détaillés uniquement dans les cas  $N=2$  et  $N=3$ . Ainsi, on étudie des plaques de verre feuilleté avec deux et trois couches de verre. Pour finir, des chargements hors-plan et dans le plan sont appliqués.

Dans le cadre des essais statiques, la validation du modèle passe par l'observation des descripteurs hors-plan et dans le plan, déterminés analytiquement aux ordres dominants dans les chapitres précédents. Aussi, le modèle théorique a mis en avant que lorsque le contraste mécanique était variable, le comportement d'ensemble hors-plan pouvait varier de monolithique à bicouche. Pour observer ce phénomène, on utilise les propriétés viscoélastiques du PVB et la variation de son module de cisaillement sous chargement (fluage) ou déplacement (relaxation) constant.

Ainsi, plusieurs essais statiques balayant les différents cas de chargement et les différents types d'échantillons ont été mis en place. Ils permettent de mesurer les descripteurs cinématiques afin de les comparer aux champs analytiques, d'observer les comportements extrêmes et le passage de l'un à l'autre.

Les essais dynamiques sur table vibrante ont pour objectif de retrouver les caractéristiques dynamiques des plaques de verre feuilleté telles que les fréquences propres et les déformées modales. Aussi, nous analysons l'effet de l'échauffement du PVB lors d'essais harmoniques de vibration.

Le Tableau 5.1 suivant résume les essais qui ont été réalisés, leurs objectifs, le type d'échantillon testé et les champs mesurés pour valider le modèle théorique.

		Statique			Dynamique	
		Flexion 3 points 2 couches raides Chargement HP		Cisaillement "pur" 3 couches raides Chargement IP	Table vibrante 2 couches raides Chargement HP	
		Cyclique	Fluage / Relaxation	Rupture différée	Balayages	Essais cycliques à $f_i$
Objectifs	Observer les comportements limites Valider les déformations analytique	Identification des temps de fluage Passage de MK à BLK à 10°C et 20°C	Mise en évidence du phénomène Identification du temps de rupture	Valider la cinématique additionnelle	Identification des fréquences propres $f_i$ à différentes températures	Mesures des déformées propres
Champs mesurés	Déflexion à mi-travée $W(0)$ Déplacement différentiel à l'appui $D(L/2)$ Déformations dans la section à mi-travée $\varepsilon_n(0,y)$			Cinématique additionnelle au centre $\tilde{d}(0)$	Accéléromètres à différents noeuds et ventres Déformations à l'encastrement et aux ventres	

TABLE 5.1 – Tableau des essais réalisés. Notations : HP désigne un chargement hors-plan et IP un chargement dans le plan de la plaque.

## 5.2 Matériel utilisé

### 5.2.1 Essais statiques

Les essais statiques en flexion cylindrique et en cisaillement "pur" sont réalisés à l'aide d'une presse hydraulique. Cette dernière est équipée d'un capteur de force de plage  $\pm 50\text{kN}$  d'une précision de  $\pm 0.25\text{N}$ . La régulation par servovalve de la presse permet de générer des chargement sinusoïdaux de fréquence allant jusqu'à  $10\text{Hz}$ , des chargements en (quasi)-échelon ou d'autres types de chargement que nous n'utiliseront pas comme des signaux en rampe, triangulaire, ...

Afin d'assurer un contrôle en température, le dispositif de chargement est placé dans une enceinte thermique de dimension  $35 \times 80 \times 50\text{cm}$  (largeur x profondeur x hauteur) permettant de générer une température entre  $-60^\circ\text{C}$  et  $80^\circ\text{C}$  à une vitesse de  $2^\circ\text{C}/\text{min}$  (à vide) avec une stabilité de régulation de l'ordre de  $\pm 0.4^\circ\text{C}$ .

L'acquisition de la température se fait grâce à un capteur de température adhésif PT100, placé au contact de l'échantillon. Il mesure des température allant de  $-50^\circ\text{C}$  à  $150^\circ\text{C}$ , avec une précision de  $0.1^\circ\text{C}$ .

Pour les essais en flexion cylindrique les déformations de la section droite sont mesurées par des jauges de déformation monoaxiales de dimension  $8 \times 3\text{ mm}^2$ , de résistance  $350\Omega$ , précise à  $\pm 1\mu\text{def}$ . On utilise également deux capteurs sans contact, l'un de  $6\text{mm}$  de plage (SC1) pour mesurer la flèche et l'autre de  $2\text{mm}$  de plage (SC2) pour mesurer le déplacement différentiel dans le plan entre les plaques de verre, chacun précis à  $1\mu\text{m}$ . Les positions des jauges de déformation et des capteurs sans contact seront précisées ultérieurement.

Pour les essais en cisaillement "pur", le déplacement différentiel entre les couches de verre est mesuré par un extensomètre d'une précision de  $4\mu\text{m}$ .

Enfin, l'acquisition des données expérimentales est assurée par une centrale à 11 voies d'acquisition reliée à un ordinateur.

### 5.2.2 Essais vibratoires

Pour les essais dynamiques, on utilise une table vibrante composée d'un système vibratoire électrodynamique de force nominale  $20\text{kN}$ , ayant une course de  $76\text{mm}$  crête à crête pour des fréquences allant de  $1\text{Hz}$  à  $1800\text{Hz}$  en charge ( $2400\text{Hz}$  à vide). L'accélération maximale de la table vibrante est de  $26\text{g}$  en vibration verticale et  $25\text{g}$  en vibration horizontale.

Pour les mesures d'accélération, on utilise des accéléromètres miniature à électronique intégrée de sensibilité  $100\text{mV/g}$ , que l'on fixe par collage sur la plaque de verre feuilleté. Le pilotage est assuré par un vibromètre laser portable possédant une plage de fréquence de  $0.5\text{Hz}$  à  $22\text{kHz}$  pour des mesures de vitesse allant de  $0.02\mu\text{m/s}$  à  $5\text{m/s}$ .

Pour mesurer les déformations lors des essais vibratoires, on utilise les même jauges de déformation monoaxiales que pour les essais statiques, dont les positions seront précisées ultérieurement.

Enfin, la centrale d'acquisition possède une voie de contrôle et 15 voies de mesures dont la fréquence d'acquisition varie de  $10\text{kHz}$  à  $100\text{kHz}$ .

### 5.3 Flexion trois points

Les essais de flexion trois points ont été menés sur une plaque de verre feuilleté de 0.6m de long et de 0.2m de large, composée de deux couches de verre trempé identiques, d'épaisseur  $h = 18.5\text{mm}$ , connectées par une couche de PVB d'épaisseur  $c = 1.8\text{mm}$ . Ainsi, l'épaisseur totale est  $h_{\Omega} = 38.8\text{mm}$  et l'inertie d'une couche de verre vaut  $I = 0.528 \times 10^{-6}\text{m}^3$  tandis que l'inertie de la plaque entière vaut  $\mathcal{I} = 4.867 \times 10^{-6}\text{m}^3$ .

On observe le comportement d'ensemble dans le plan et hors-plan sous sollicitations cycliques (en force), sous charge constante et enfin sous déplacement constant. Les particularités du comportement à la rupture dues à la viscoélasticité du PVB sont mises en évidence.

#### 5.3.1 Instrumentation et conditions d'essai

L'essai de flexion 3 points consiste à appliquer une charge ponctuelle  $F(t)$  ou un déplacement à mi-travée d'une plaque de verre feuilleté bi-appuyée. Ce principe est illustré par la Figure 5.1. La travée entre les appuis vaut  $L = 0.5\text{m}$ . Les jauges de déformation  $J_i$  ( $i=1,\dots,6$ ) sont placées à mi-travée dans l'épaisseur de la plaque. Elles permettent de mesurer les déformation en fibre supérieure, centrale et inférieure de chaque couche de verre. Leurs positions sont illustrées par la Figure 5.1. Le capteur sans contact SC1 est placé sur le banc d'essai, sous la plaque, afin de mesurer la flèche à mi-travée. Le déplacement différentiel dans le plan entre les couches de verre est mesuré par le capteur sans contact SC2, placé au droit de l'appui. Les photos de la Figure 5.2 et de la Figure 5.3 illustrent le positionnement de ces instrumentations sur la plaque de verre testée.

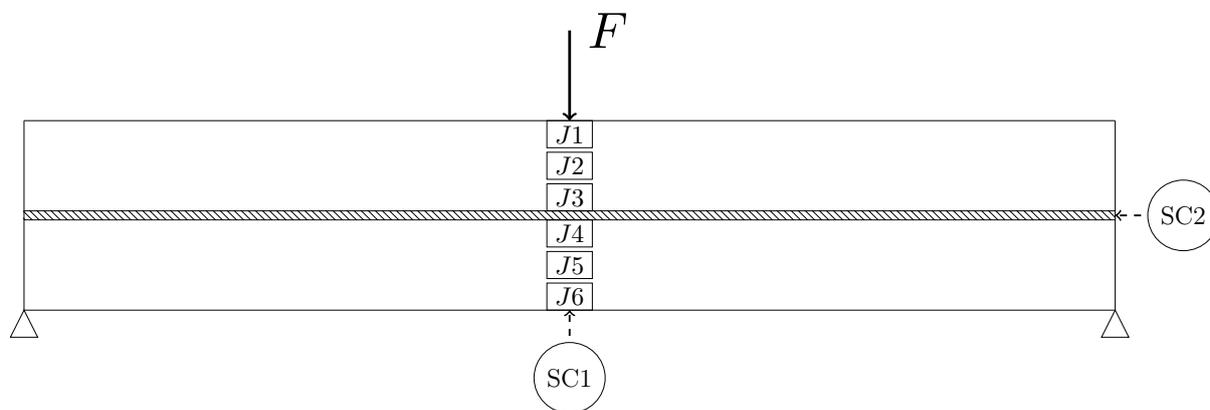


FIGURE 5.1 – Principe de l'essai de flexion trois points et positionnement de l'instrumentation.

L'ensemble est placé dans l'enceinte thermique afin de maintenir la température constante durant les essais (Figure 5.4).

Enfin, la chaîne de mesure est pilotée par un ordinateur qui échantillonne et stocke les données. La fréquence d'échantillonnage sera adaptée à chaque type d'essai. Pour les essais cycliques à  $f = 0.5\text{Hz}$ , l'échantillonnage est fixé à  $50\text{Hz}$ . Pour les essais de fluage/relaxation, qui peuvent durer plusieurs jours en fonction de la température, la fréquence d'échantillonnage diminue graduellement de  $1.7\text{kHz}$  au temps court à  $0.5\text{Hz}$  aux temps long (après une heure de chargement).

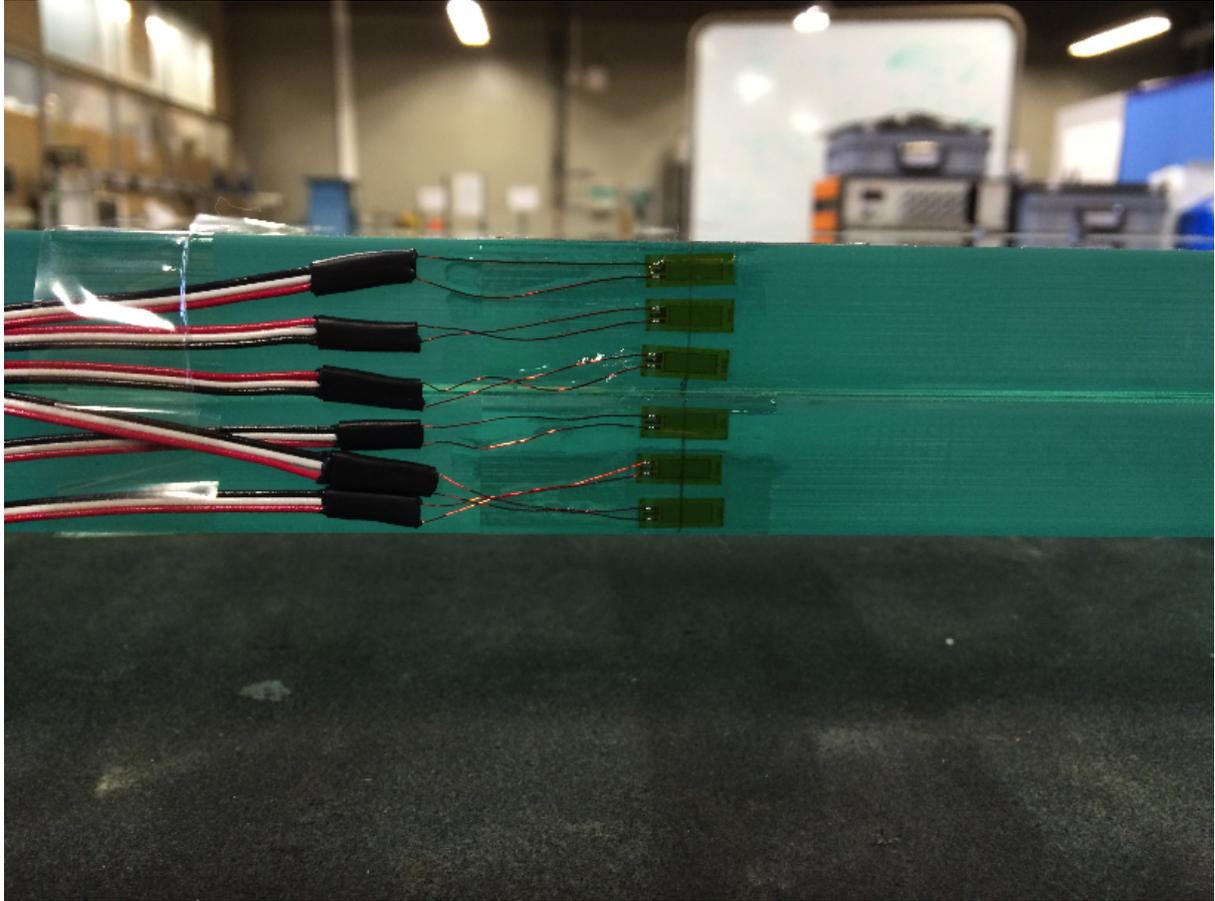


FIGURE 5.2 – Positions des jauges  $J_i$  dans l'épaisseur de la plaque de verre feuilleté testée.

### 5.3.2 Rappels analytiques

Concentrons-nous sur les expressions analytiques des champs de déplacement et de déformation qui vont être mesurés lors des essais de flexion trois points, aux points auxquels ils vont être mesurés. Les expressions obtenues pour ce cas de chargement dans la Section 3.1.2 peuvent être utilisées directement en régime harmonique. Ainsi, une plaque de verre feuilleté à deux couches de verre sous chargement cyclique d'amplitude  $F$ , à la température  $\theta$ , subit la déflexion et les déformations axiales à mi-travée, et le glissement différentiel entre les couches de verre à l'appui suivants :

$$W(x=0, \omega, \theta) = -\frac{FL^3}{48E_s' \mathcal{I}} \left( 1 - \frac{\mathcal{I} - 2I}{I} \frac{6}{(A^*L)^2} \left( \frac{\text{th}(\frac{A^*L}{2})}{\frac{A^*L}{2}} - 1 \right) \right) \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_{n,\pm}(0, y, \omega, \theta) = \frac{FL}{4E_s' \mathcal{I}} \left( -y + \frac{\text{th}(\frac{A^*L}{2})}{\frac{A^*L}{2}} \left( y - \frac{\mathcal{I}}{2I} \left( y \mp \frac{h+c}{2} \right) \right) \right) \quad (5.2)$$

$$D(x = \frac{L}{2}, \omega, \theta) = -\frac{F(h+c)}{8A^{*2}E_s'I} \left( \frac{1}{\text{ch}(\frac{A^*L}{2})} - 1 \right) = -\frac{F(h+c)hc}{8\mu_c^*I} \left( \frac{1}{\text{ch}(\frac{A^*L}{2})} - 1 \right) \quad (5.3)$$

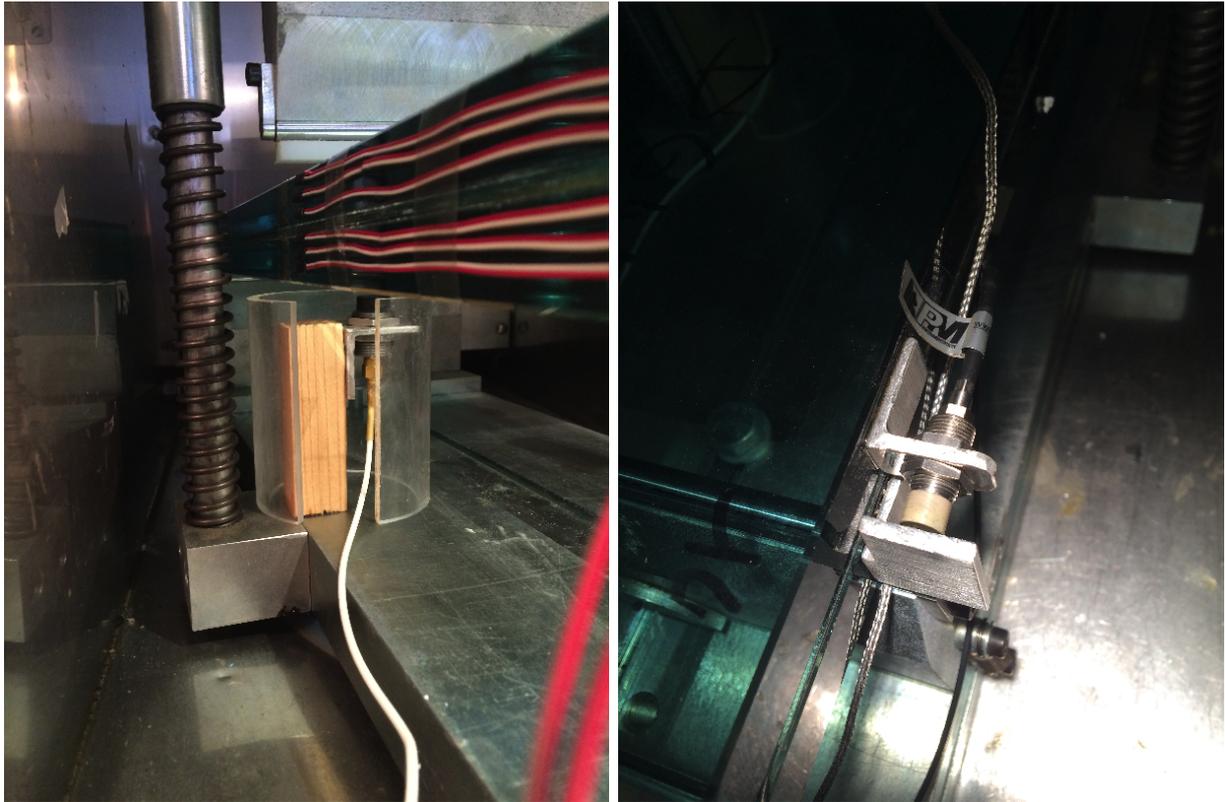


FIGURE 5.3 – Positions des capteurs SC1 et SC2 lors des essais.

où  $A^*$  est complexe et donné par :

$$A^*(\omega a_\theta) = \sqrt{\frac{\mu_c^*(\omega a_\theta) \mathcal{I}}{E'_s} \frac{1}{I h c}}$$

Dans le domaine temporel, la réponse en fluage du verre feuilleté sous un chargement en échelon  $F \times H(t)$  est obtenu en appliquant la Transformée de Fourier Inverse (TFI). Le temps de fluage caractéristique est difficile à estimer analytiquement puisqu'il résulte d'un couplage complexe entre la réponse élastique du verre, la réponse viscoélastique du PVB et la géométrie de la plaque.

### 5.3.3 Essais cycliques de flexion

Les essais cycliques consistent à appliquer un chargement sinusoïdal  $\mathcal{F}(t) = F \sin(\omega t)$  à mi-travée de la plaque de verre feuilleté bi-appuyée. Puisque la plaque est simplement appuyée, il n'est pas possible en pratique d'appliquer un chargement externe cyclique de type "traction/compression". Pour surmonter cette difficulté, on ajoute un chargement constant en compression d'amplitude  $F_0 > F$ . Ainsi, on observe bien un chargement cyclique mais dans un état de compression uniquement.

Par conséquent, les essais sont menés en deux étapes. La première consiste à appliquer un chargement en échelon  $F_0 H(t)$ , où  $H(x)$  est la fonction de Heaviside, ou fonction "échelon", définie par  $H(x) = (1 + \text{sign}(x))/2$ . Cette charge induit une réponse en fluage (voir Section 5.3.4), qui doit être stabilisée avant de passer à l'étape suivante. Pour la seconde étape, on



FIGURE 5.4 – Banc d’essai et plaque de verre feuilleté placés dans l’enceinte thermique.

surperpose le chargement cyclique, soit  $\mathcal{F}(t) = F_0 + F \sin(\omega t)$  avec  $F_0 > F$ . Grâce à la linéarité du comportement, la réponse à un chargement cyclique pur est obtenue en soustrayant la réponse stabilisée sous chargement constant  $F_0 H(t)$  à la réponse mesurée.

Deux essais ont été réalisés à la fréquence  $f = 0.5\text{Hz}$  ( $\omega = \pi$ ) avec  $F_0 = 8\text{kN}$  et  $F = 4\text{kN}$  à deux températures  $\theta = 5^\circ\text{C}$  et  $\theta = 30^\circ\text{C}$ .

A ces températures, les coefficients de translation sont  $a_5 = 2.9 \times 10^3$  et  $a_{30} = 1.7 \times 10^{-3}$  (voir Figure 1.8). Ainsi, les valeurs complexes du module de cisaillement du PVB (voir Figure 5.5) sont données par :

$$\mu_c^*(\omega = \pi, \theta = 5^\circ\text{C}) = \mu_c^*(\omega = \pi 10^3, \theta = 20^\circ\text{C}) = 126(1 + 0.13i) \text{ MPa}$$

$$\mu_c^*(\omega = \pi, \theta = 30^\circ\text{C}) = \mu_c^*(\omega = 3\pi 10^{-3}, \theta = 20^\circ\text{C}) = 1.84(1 + 0.80i) \text{ MPa}$$

Ceci mène aux valeurs du paramètre sans dimension  $A^*L$  et de  $\text{th}(\frac{A^*L}{2})/(\frac{A^*L}{2})$  suivantes :

$$A^*(\pi a_5)L = 10.8(1 + 0.07i) \quad ; \quad \frac{\text{th}(\frac{A^*L}{2})}{\frac{A^*L}{2}} \simeq \frac{1}{\frac{A^*L}{2}} = 0.36(1 - 0.06i)$$

$$A^*(\pi a_{30})L = 1.39(1 + 0.35i) \quad ; \quad \frac{\text{th}(\frac{A^*L}{2})}{\frac{A^*L}{2}} \simeq 0.87$$

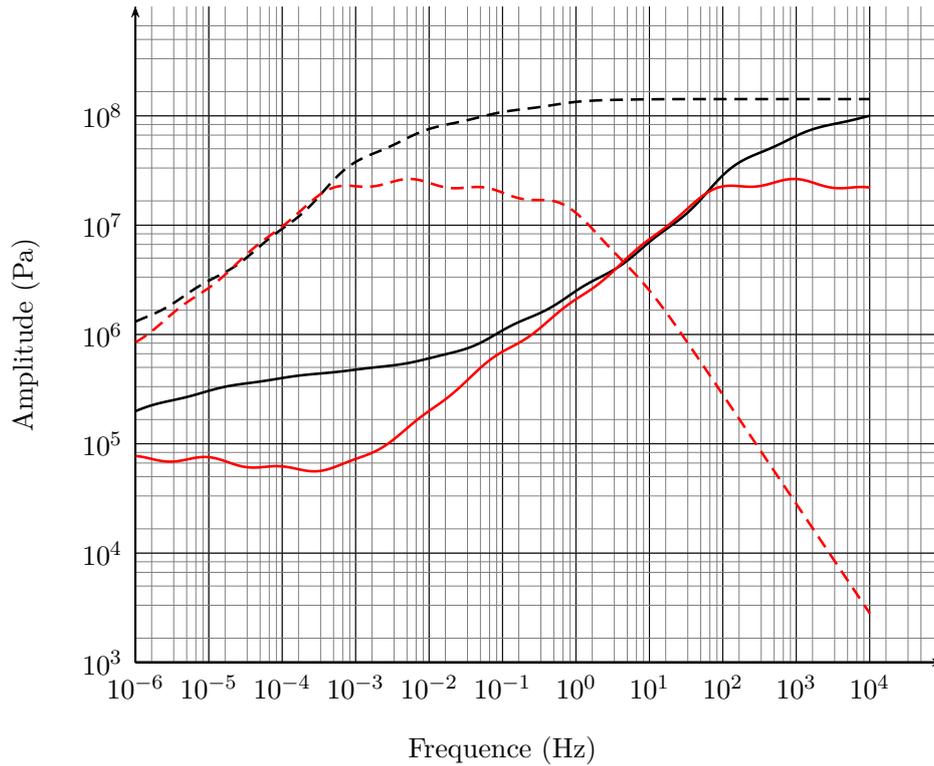


FIGURE 5.5 – Module de cisailment complexe  $\mu_c^*$  du PVB en fonction de la fréquence. Module de stockage  $\text{Re}(\mu_c^*)$  (noir) et de perte  $\text{Im}(\mu_c^*)$  (rouge) aux températures  $\theta = 5^\circ\text{C}$  (traits pointillés) et  $\theta = 30^\circ\text{C}$  (traits pleins).

L'utilisation de ces valeurs dans l'expression de la déformation axiale (5.2) montre que pour  $\theta = 5^\circ\text{C}$  (respectivement  $\theta = 30^\circ\text{C}$ ) le comportement de la plaque est proche de celui d'une plaque monolithique (respectivement bicouche) qui serait atteint pour  $\text{th}(\frac{A^*L}{2})/(\frac{A^*L}{2}) = 0$  (respectivement =1) soit avec  $\pm$  valant  $+$  dans la couche supérieure ( $y > 0$ ) et  $-$  dans la couche inférieure ( $y < 0$ ) :

$$\varepsilon_n(0,y) = -\frac{FLy}{4E'_s\mathcal{I}} \quad \text{dans le cas monolithique}$$

et

$$\varepsilon_{n,\pm}(0,y) = -\frac{FL}{8E'_sI} \left( y \mp \frac{h+c}{2} \right) \quad \text{dans le cas bicouche}$$

De plus, le décalage de phase entre l'effort et le déplacement est quasiment négligeable dans chaque cas.

Les variations des déformations de la section à mi-travée enregistrées durant les cycles à  $\theta = 5^\circ\text{C}$  et  $\theta = 30^\circ\text{C}$  sont présentées dans les Figures 5.6 et 5.7. Les résultats expérimentaux sont qualitativement et quantitativement en accord avec les prédictions théoriques :

- La Figure 5.6 confirme expérimentalement que la répartition des déformations cycliques à  $5^\circ\text{C}$  est proche de celle d'une plaque monolithique. La couche centrale de PVB est quasiment indéformée tandis que les couches supérieure et inférieure de verre sont respective-

ment dans un état de compression et d'extension. L'amplitude des déformations enregistrées en fibre supérieure ( $y = 15.9mm$ )  $\varepsilon_1 = -110\mu def$  est proche de la valeur théorique  $\varepsilon_{1th} = -120\mu def$ .

- Inversement, la Figure 5.7 montre qu'à  $\theta = 30^\circ C$  la répartition des déformations dans la section est proche de celle d'une plaque bicouche. Comme le prédit l'approche théorique, la couche centrale est fortement cisailée tandis que les couches supérieure et inférieure de verre subissent chacune un état de compression/extension avec une fibre neutre à mi-épaisseur de chacune des couches. L'amplitude des déformations enregistrées en fibre supérieure ( $y = 15.9mm$ )  $\varepsilon_1 = -180\mu def$  est proche de la valeur théorique  $\varepsilon_{1th} = -182\mu def$ .
- Dans chaque cas, on observe aucun décalage de phase notable entre chargement et déplacement.

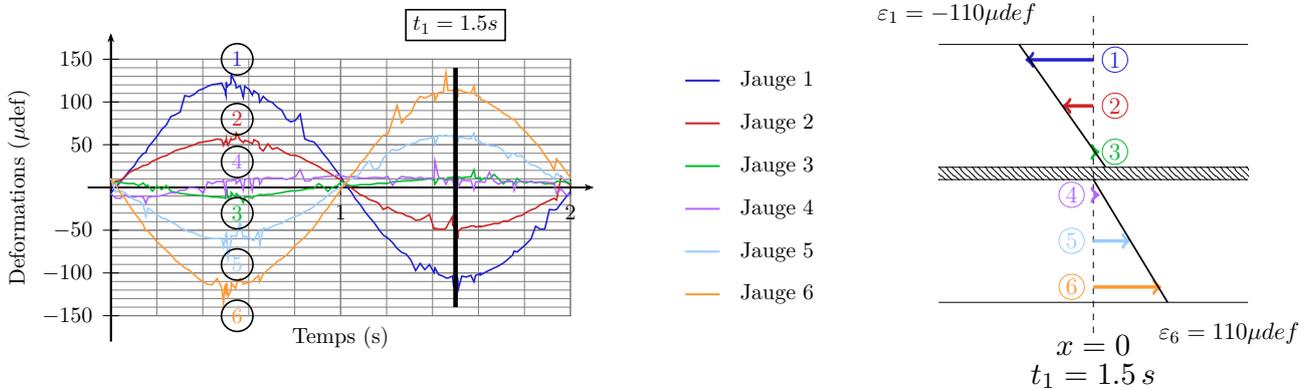


FIGURE 5.6 – Déformations à mi-travée lors d'un chargement cyclique à  $f = 0.5Hz$  et  $\theta = 5^\circ C$ .

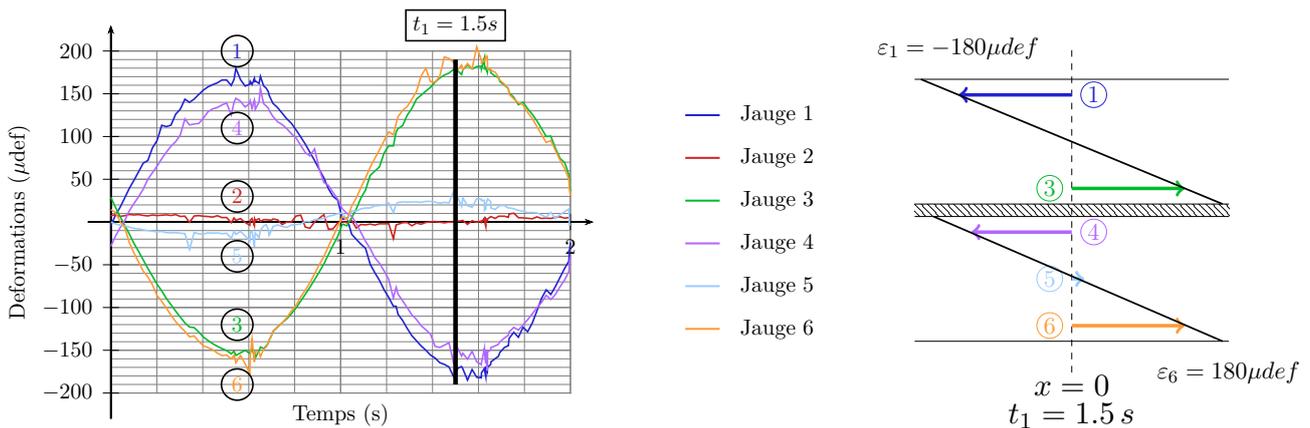


FIGURE 5.7 – Déformations à mi-travée lors d'un chargement cyclique à  $f = 0.5Hz$  et  $\theta = 30^\circ C$ .

### 5.3.4 Fluage

Un essai de fluage consiste à appliquer un chargement échelon d'amplitude  $F$ , soit  $\mathcal{F}(t) = F \times H(t)$ , à mi-travée de la plaque bi-appuyée. Du fait du au phénomène de relaxation, le module

de cisaillement du PVB varie d'une valeur élastique instantanée  $G_0$  jusqu'à une valeur nulle à long terme. Ainsi durant le fluage, le contraste mécanique varie et on s'attend à observer une transition d'un comportement monolithique à court terme à un comportement bicouche à long terme. Afin d'analyser l'influence de la température, deux essais de fluage sont effectués, l'un à  $\theta = 10^\circ\text{C}$  et l'autre à  $\theta = 20^\circ\text{C}$ .

Comme le montre la Figure 5.8 avec l'historique du chargement, la presse hydraulique ne peut fournir qu'un chargement en échelon approché, avec un temps de montée de la charge d'environ  $0.08\text{s}$ . Pour tenir compte de cela, la charge réelle appliquée s'écrit  $\mathcal{F}_c(t) = F \times H(t)(1 - \exp(-t/t_0))$  avec  $t_0 = 0.04\text{s}$  (et  $\text{TF}(\mathcal{F}_c(t)) = \frac{F}{i\omega} - \frac{F}{i\omega + 1/t_0}$ ).

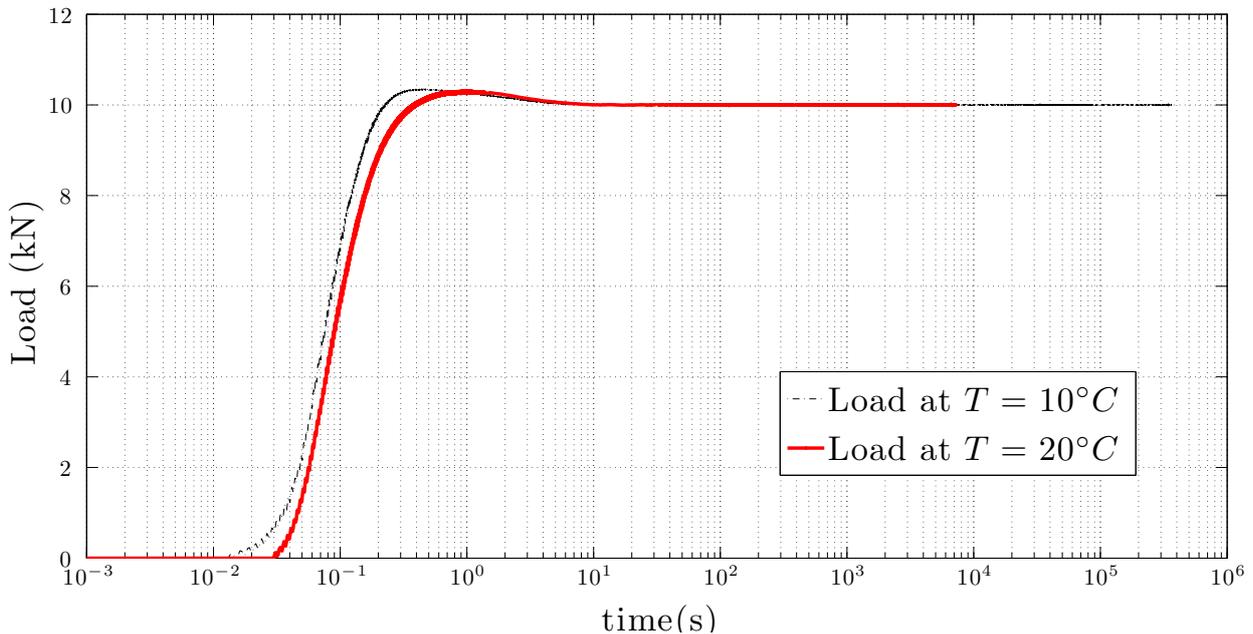


FIGURE 5.8 – Historique des chargements imposés à  $\theta = 10^\circ\text{C}$  et  $\theta = 20^\circ\text{C}$ .

### Déflexion et déplacement différentiel dans le plan

La Figure 5.9 compare la déflexion à mi-travée mesurée lors des essais à  $\theta = 10^\circ\text{C}$  et  $\theta = 20^\circ\text{C}$  avec  $F = 10\text{kN}$  aux valeurs calculées par la Transformée de Fourier Inverse de la flèche à mi-travée analytique (5.1) multipliée par  $\text{TF}(\mathcal{F}_c(t))$ . De plus, la réponse obtenue en utilisant l'approximation "secant-stiffness" (voir Section 1.1.5) est également tracée.

Tout d'abord, nous observons un bon accord entre les mesures et les prédictions analytiques. En effet, l'influence significative de la température sur les temps caractéristique de fluage est bien retranscrite analytiquement. A  $20^\circ\text{C}$ , le temps de fluage est d'environ 40 minutes contre environ 3.5 jours à  $10^\circ\text{C}$ . Ces durées sont cohérentes avec le facteur de translation,  $a_{10} = 1.3 \times 10^2$ , qui donne  $t_{\text{fluage},10} = 130t_{\text{fluage},20}$ .

Au temps court, la différence d'allure entre les courbes obtenues à  $10^\circ\text{C}$  et  $20^\circ\text{C}$  s'explique par le temps de montée de charge de la presse. Bien que ce temps soit identique aux deux températures, le facteur de translation implique que le chargement à  $10^\circ\text{C}$  soit plus proche d'un échelon

que le chargement à 20°C. Ceci explique pourquoi, à 10°C, une courte phase élastique (avant 0.2s) est d'abord observée avant d'être suivie par le fluage, tandis qu'à 20°C le comportement est immédiatement viscoélastique.

Notons ensuite que la réponse calculée avec l'approximation "secant-stiffness" s'écarte des réponses théoriques et mesurées.

Les mêmes commentaires s'appliquent au déplacement différentiel dans le plan  $2D(x = \frac{L}{2})$  mesuré et calculé, tracés en Figure 5.10.

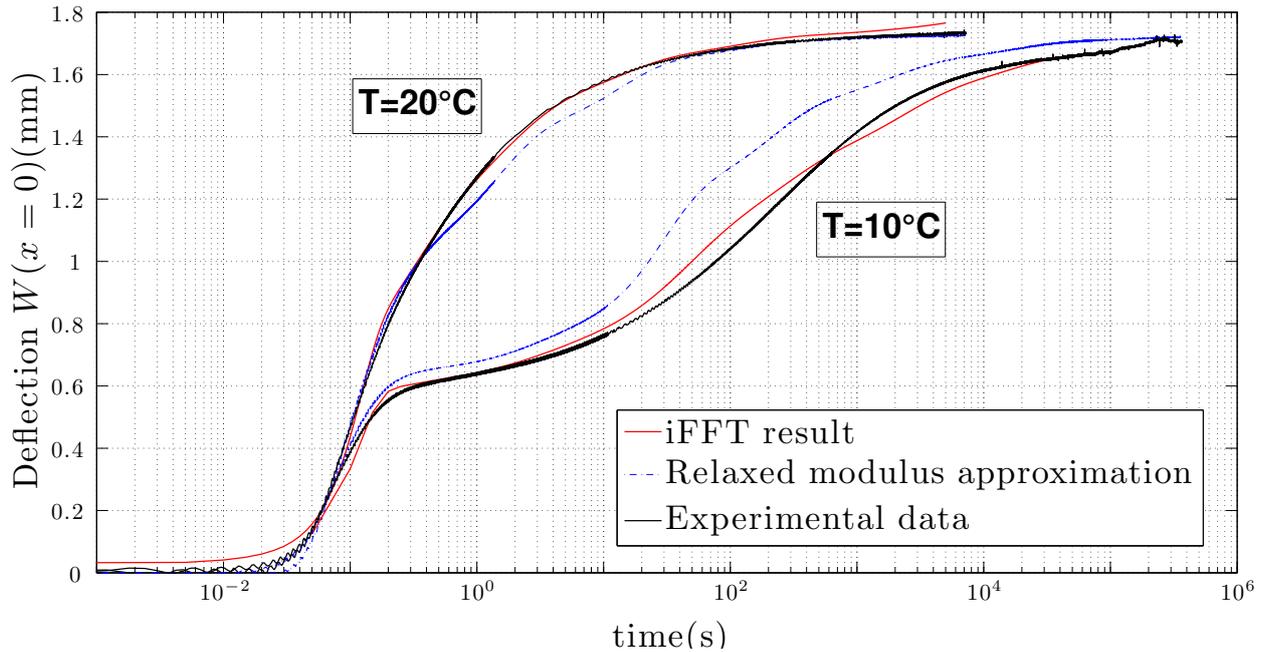


FIGURE 5.9 – Déflexion à mi-travée théorique, expérimentale et approchée pour des essais de fluage à  $\theta = 10^\circ\text{C}$  et  $\theta = 20^\circ\text{C}$ .

### Déformations de la section à mi-travée

Les six jauges de déformation monoaxiales placées dans l'épaisseur à mi-travée permettent d'observer l'évolution de la cinématique de la plaque durant les essais de fluage, et donc la transition du comportement monolithique au comportement bicouche. Comme nous l'avons vu avec les résultats sur la déflexion, cette transition sera plus évidente à basse température.

La Figure 5.11 représente l'évolution des déformations des jauges 1 à 6 durant l'essai de fluage à  $10^\circ\text{C}$ . La distribution des contraintes dans la section à mi-travée correspond au temps court, soit  $t < t_1 = 0.3\text{s}$ , à un comportement (quasi)-monolithique et au temps long, soit  $t \geq t_3 = 3.10^3\text{s}$ , à un comportement (quasi)-bicouche. Cela apparaît clairement dans la Figure 5.11 où les états de déformation de la section aux instants  $t_0$ ,  $t_2$  et  $t_3$  sont tracés. En effet, à  $t_0 = 0.1\text{s}$ , la couche supérieure (respectivement inférieure) de verre subit une compression (respectivement extension) linéaire et la fibre neutre est située dans la couche de PVB, tandis qu'après  $t_3$ , chacune des couches de verre est en compression/extension avec une fibre neutre située à mi-épaisseur de chacune des couches de verre. Au temps intermédiaire, par exemple

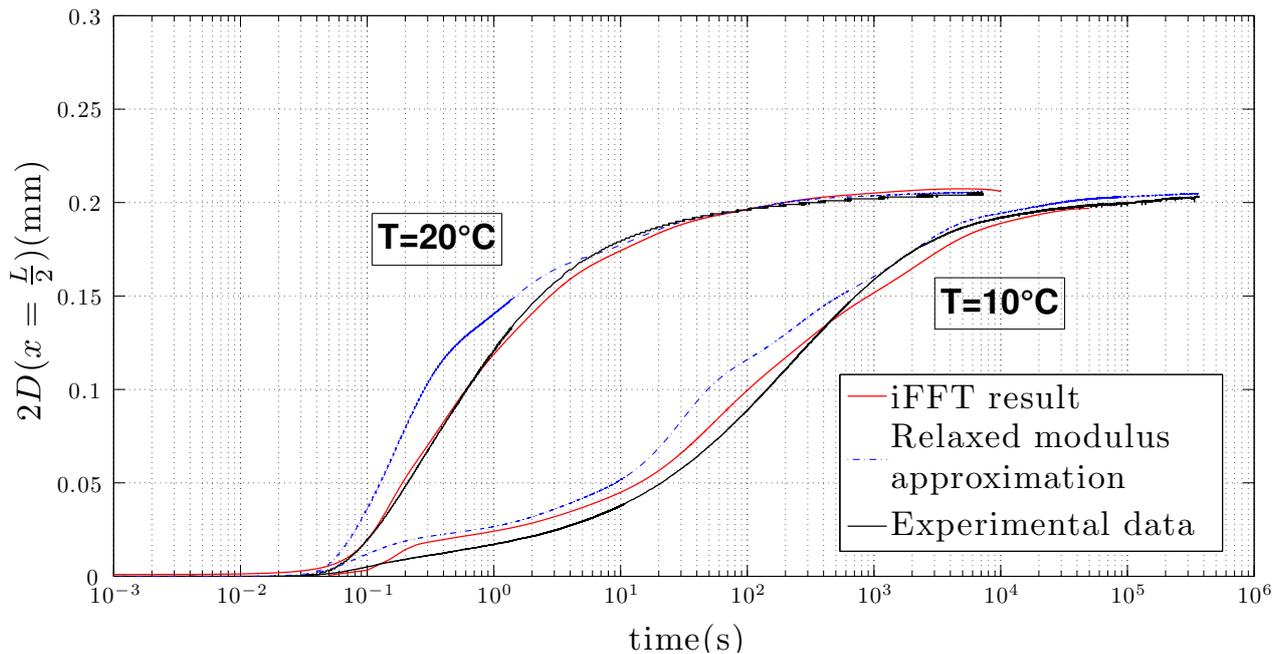


FIGURE 5.10 – Déplacement différentiel dans le plan aux appuis théorique, expérimental et approché pour des essais de fluage à  $\theta = 10^\circ\text{C}$  et  $\theta = 20^\circ\text{C}$ .

$t_2 = 10\text{s}$ , la distribution des déformations s'écarte des deux modèles limites et est bien décrite par le modèle généralisé des plaques HCS.

### 5.3.5 Relaxation

Inversement à l'essai de fluage, l'essai de relaxation consiste non plus à appliquer un effort constant et observer la variation d'un déplacement, mais à appliquer un échelon de déplacement et observer la réponse en effort. Ainsi, on applique un déplacement constant à mi-travée  $W(0,t) = W_0 \times H(t)$ .

Les objectifs de cet essai sont d'observer expérimentalement la réponse en effort de la plaque de verre feuilleté sous le déplacement constant  $W_0$ , et de comparer les temps de relaxation obtenus avec les temps de fluage déterminés précédemment pour  $\theta = 10^\circ\text{C}$  et  $\theta = 20^\circ\text{C}$ .

La consigne en déplacement est pilotée sur le capteur sans contact SC2, plus précis que le capteur LVDT de la presse. Déterminons l'amplitude de la consigne en déplacement permettant de ne pas rompre l'échantillon. Pour cela, observons les résultats des essais de fluage à  $\theta = 10^\circ\text{C}$  sur la Figure 5.10. On impose un déplacement  $W_0 = 0.6\text{mm}$ . Les résultats obtenus à  $T = 10^\circ\text{C}$  et  $T = 20^\circ\text{C}$  sont illustrés par la Figure 5.12.

On note que pour chaque température, le temps nécessaire pour passer du modèle (quasi)-monolithique au modèle (quasi)-bicouche est en ordre de grandeur identique à celui observé lors des essais de fluage, soit environ 40 minutes à  $T = 20^\circ\text{C}$  et 3,5 jours à  $T = 10^\circ\text{C}$ .

*Remarque :* Analytiquement, on peut inverser l'expression (5.1) pour obtenir en régime harmonique la charge  $F(x = 0, \omega, \theta)$  en fonction de la consigne en déplacement  $W_0$  et des paramètres mécaniques et géométriques de la plaque de verre feuilleté :

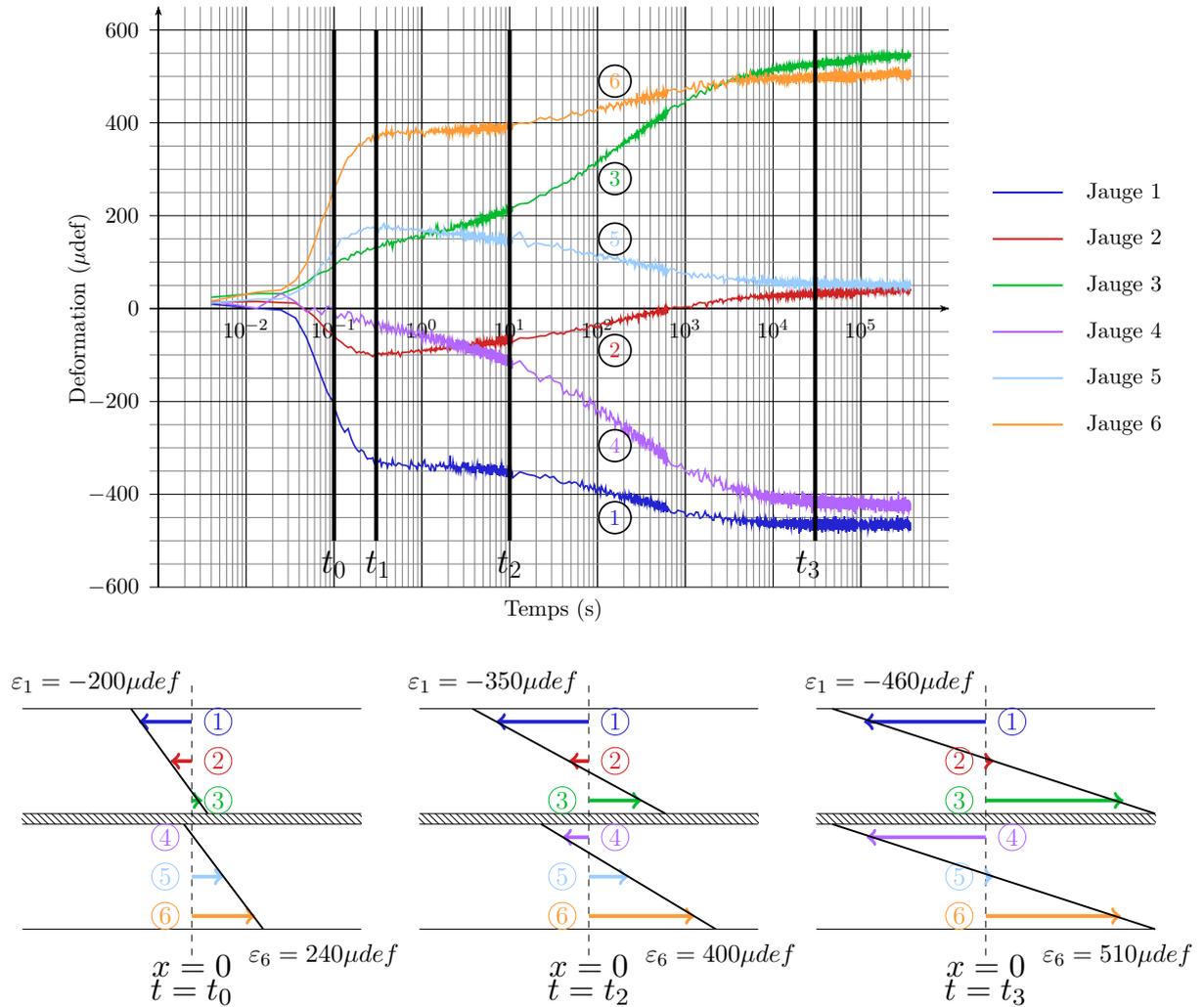


FIGURE 5.11 – Mesures des déformations dans la section à mi-travée lors de l'essai de fluage à  $\theta = 10^\circ\text{C}$  et distribution des déformations aux différents instants  $\{t_0, t_2, t_3\}$

$$F(x=0, \omega, \theta) = -\frac{48W_0 E'_s \mathcal{I}}{L^3} \left( 1 - \frac{\mathcal{I} - 2I}{I} \frac{6}{(A^*L)^2} \left( \text{th}\left(\frac{A^*L}{2}\right) - 1 \right) \right)^{-1} \quad (5.4)$$

### 5.3.6 Rupture et rupture différée

Les essais de fluage et de relaxation ont mis en évidence l'évolution du comportement d'ensemble du verre feuilleté lorsque le module de cisaillement du PVB (et par conséquent le contraste mécanique) varie. Le passage d'un comportement monolithique à un comportement bicouche sous charge constante modifie le comportement du stratifié qui perd de la résistance au fur et à mesure que le PVB s'assouplit. Il en résulte que certains chargements supportables à l'application de la charge ne le sont plus à partir d'un certain temps. Dans ce cas la rupture n'est plus une rupture fragile instantanée mais une rupture fragile différée dans le temps. Cette situation a été effectivement observée et sera détaillée dans le paragraphe suivant.

Il est bien connu que sous un chargement en flexion trois points cylindrique tel que décrit

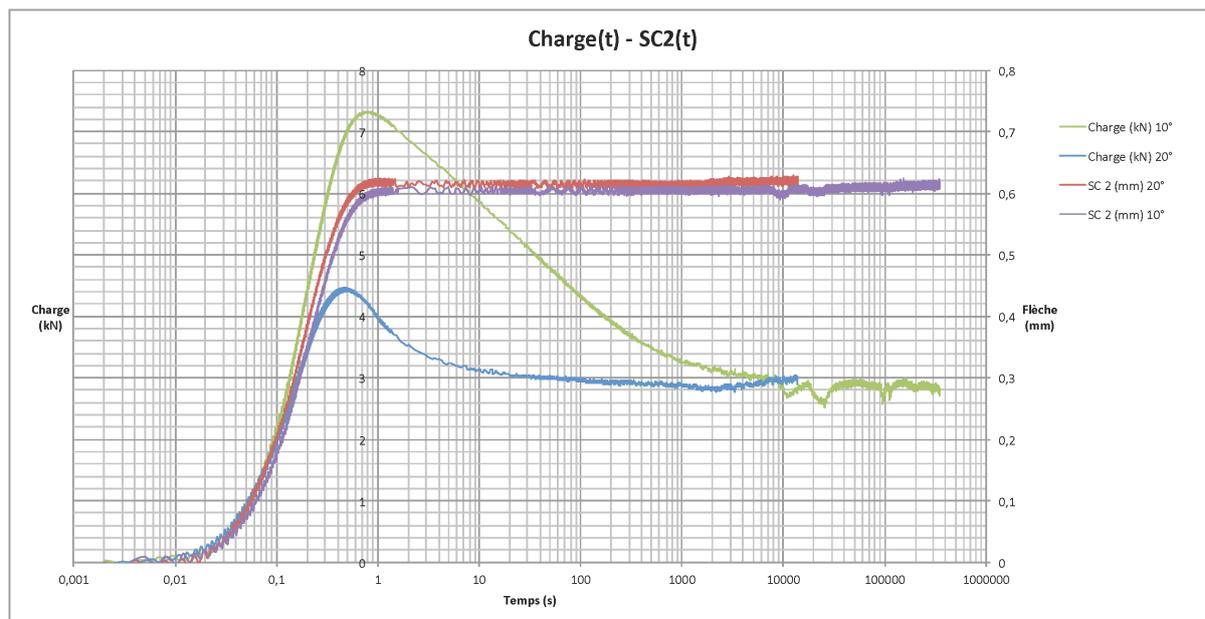


FIGURE 5.12 – Essais de relaxation sur une plaque de verre feuilleté avec un PVB de type R à  $T = 10^{\circ}\text{C}$  et  $T = 20^{\circ}\text{C}$ . En rouge, consigne à  $T = 20^{\circ}\text{C}$ . En violet, consigne à  $T = 10^{\circ}\text{C}$ . En bleu, charge à  $T = 20^{\circ}\text{C}$ . En vert, charge à  $T = 10^{\circ}\text{C}$ .

dans la Section 5.3.1, la rupture d'un échantillon monolithique se fait en extension, au niveau de la fibre inférieure. Ainsi, en terme de déformation, la limite de rupture d'une plaque de verre feuilleté sous flexion trois points est directement liée à la limite de rupture en extension du verre seul. Dans notre cas, le verre utilisé est un verre trempé thermiquement.

### Détermination de la limite d'extension du verre trempé - Essai de rupture

Au sein du Laboratoire Génie Civil et Bâtiment de l'ENTPE, plusieurs travaux de fin d'étude portant sur le comportement du verre simple non feuilleté ont été réalisés. Afin de déterminer la limite de déformation du verre trempé, intéressons-nous à un essai de rupture réalisé par Chambon [27]. Le dispositif d'essai est identique à celui utilisé pour les essais de fluage/relaxation, et le chargement appliqué est illustré par la Figure 5.13. Il s'agit d'un chargement cyclique en dent de scie, de vitesse de montée  $v = 0.5\text{kN/s}$ , et où le maximum de chaque cycle est incrémenté de  $0.8\text{kN}$  par cycle. La plaque de verre testée a une longueur  $L = 0.5\text{m}$ , une largeur  $b = 0.2\text{m}$  et une épaisseur  $h = 18.5\text{mm}$ . On rappelle  $I = \frac{bh^3}{12}$  l'inertie de la section droite.

Rappelons l'expression des contraintes et déformations axiales à mi-travée, en fibre inférieure, pour l'essai de flexion trois points :

$$\sigma_n(x=0, y=-\frac{h}{2}) = \frac{FLh}{8I} \quad \text{soit} \quad \varepsilon_n(x=0, y=-\frac{h}{2}) = \frac{FLh}{8E'_s I} \quad (5.5)$$

où  $F$  est l'effort appliqué par la presse et  $E'_s = 74\text{GPa}$  le module d'Young apparent du verre trempé. La rupture de la plaque de verre trempé n'a pas eu lieu durant les dix premiers cycles, mais lors de la montée du 11<sup>e</sup> pic d'amplitude  $15\text{kN}$  pour un chargement  $F_r = 12.8\text{kN}$ , soit une contrainte à la rupture  $\sigma_{n,r} = 140\text{MPa}$  ou une limite de déformation en extension du verre

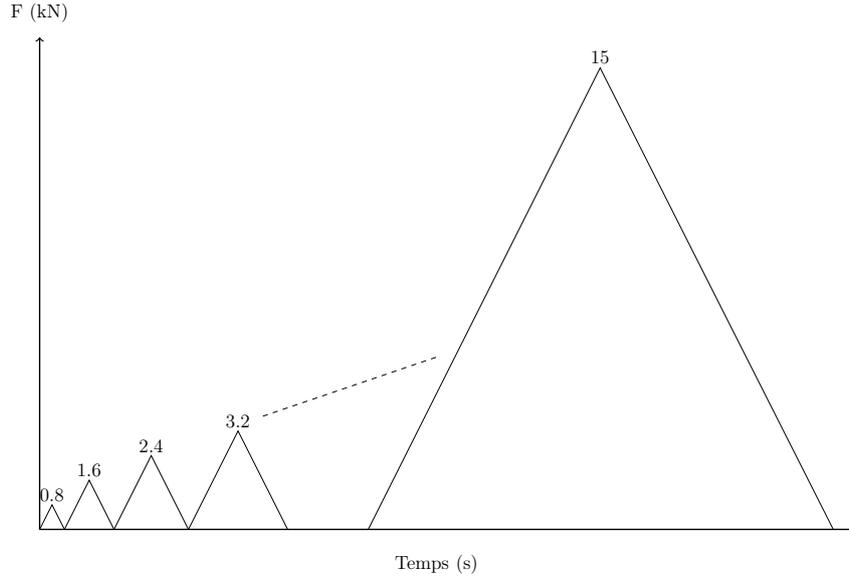


FIGURE 5.13 – Chargement en dent de scie pour la rupture du verre trempé simple. Vitesse de montée  $v = 0.5\text{kN/s}$ .

trempe :

$$\varepsilon_{n,r} = 1880\mu\text{def} \quad (5.6)$$

Dorénavant, c'est cette valeur limite qui sera utilisée lorsqu'on parlera de la déformation maximale du verre simple.

### Essai de rupture différée

Afin de comprendre le phénomène de rupture différée, intéressons-nous à l'effort nécessaire à la rupture du verre feuilleté dans les cas monolithique et bicouche. Pour cela, on rappelle l'expression de la déformation axiale à mi-travée en fibre inférieure du stratifiée, soit  $x = 0$  et  $y = -h - \frac{c}{2}$  :

$$\varepsilon_{n,\text{mono}} = \frac{FL}{4E'_s\mathcal{I}} \left( h + \frac{c}{2} \right) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{n,\text{bi}} = \frac{FL}{8E'_sI} \frac{h}{2}$$

La limite d'extension est intrinsèque au matériau, soit  $\varepsilon_{n,r,\text{mono}} = \varepsilon_{n,r,\text{bi}} = \varepsilon_{n,r}$ . On exprime les efforts à la rupture dans les deux cas :

$$F_{r,\text{mono}} = \frac{4E'_s\mathcal{I}\varepsilon_{n,r}}{L} \left( \frac{2}{2h+c} \right) \quad \text{et} \quad F_{r,\text{bi}} = \frac{8E'_sI\varepsilon_{n,r}}{L} \frac{2}{h} \quad (5.7)$$

Par conséquent, dans le cas simple d'une couche centrale infiniment mince ( $c \rightarrow 0$ ), soit  $\mathcal{I} = 2I + \frac{h(h+c)^2}{2} \rightarrow 8I$ , on obtient la relation :

$$F_{r,\text{mono}} \underset{c \rightarrow 0}{=} 2F_{r,\text{bi}}$$

Ainsi, on montre que l'effort nécessaire à la rupture d'une plaque monolithique est deux fois plus important que celui nécessaire à la rupture d'une plaque bicouche. Autrement dit, en appliquant un effort échelon  $F$  compris entre  $F_{r,mono}$  et  $F_{r,bi}$ , on peut observer une rupture dite "différée" : l'échantillon ne va pas rompre instantanément, mais plus tard durant l'essai. Ce phénomène est directement lié à la variation du contraste mécanique, et donc du module de cisaillement  $\mu_c^*$  de la couche viscoélastique lors de cet essai de fluage. L'expression de la déformation axiale (5.2) permet d'exprimer l'effort à la rupture en flexion trois points dans le cas d'une plaque HCS :

$$F_r(\omega, \theta) = \frac{4E'_s \mathcal{I}}{L} \varepsilon_{n,r} \left( \left( h + \frac{c}{2} \right) + \frac{\text{th} \left( \frac{A^* L}{2} \right)}{\frac{A^* L}{2}} \left( -h - \frac{c}{2} + \frac{\mathcal{I} h}{2I} \right) \right)^{-1} \quad (5.8)$$

avec  $A^*(\omega a_\theta) = \sqrt{\frac{\mu_c^*(\omega a_\theta) \mathcal{I}}{E'_s} \frac{1}{I h c}}$ .

L'objectif expérimental est de mettre en évidence ce phénomène de rupture différée et d'identifier le temps auquel se fait la rupture pour un effort donné. Pour cela, on réalise un essai de fluage identique à ceux réalisés dans la Section 5.3.4, sur une plaque de verre feuilleté identique. Afin d'observer clairement le phénomène, il est nécessaire d'augmenter le temps de fluage. Ainsi l'essai est mené à la température  $\theta = 10^\circ\text{C}$ . D'après les expressions (5.7)-a et (5.7)-b, on a pour notre échantillon :

$$F_{r,mono} = 56.3\text{kN} \quad \text{et} \quad F_{r,bi} = 25.6\text{kN}$$

Toujours dans le but de mieux observer le phénomène (en augmentant la durée d'essai avant qu'il ne se produise), on applique une charge constante à mi-travée d'amplitude  $F = 30\text{kN}$ . Durant l'essai, on mesure les mêmes champs que lors des essais de fluage. La Figure 5.14 montre l'évolution temporelle de la flèche à mi-travée  $W(0,t)$  ainsi que la consigne en force appliquée par la presse.

On observe clairement la phase de fluage précédant la rupture. Comme attendu, la plaque de verre feuilleté n'a pas rompu instantanément mais bien après un temps  $t_r = 650\text{s}$ .

## 5.4 Rupture thermique par extension différentielle

Comme nous l'avons vu jusqu'ici, la température est un paramètre influant fortement sur le comportement hors-plan d'une plaque HCS. Sous des conditions de chargement particulières, il peut également jouer un rôle prépondérant dans son comportement à la rupture.

Considérons une plaque HCS telle qu'illustrée par la Figure 3.1, encadrée sur un bord dans un matériau homogène appelé "matériau limite" et libre sur les autres bords. On note  $\alpha_s$  et  $\alpha_l$  respectivement les coefficients de dilatation thermique des couches raides et du matériau limite, tels que  $\alpha_l > \alpha_s$ .

L'ensemble est soumis à une variation de température  $\Delta T$  par rapport à un état de température initial  $T_0$ . Aucun autre chargement n'est appliqué sur la plaque. Les couches raides ayant un coefficient de dilatation thermique linéaire plus faible, la variation de température imposée engendre une extension différentielle entre les deux matériaux :

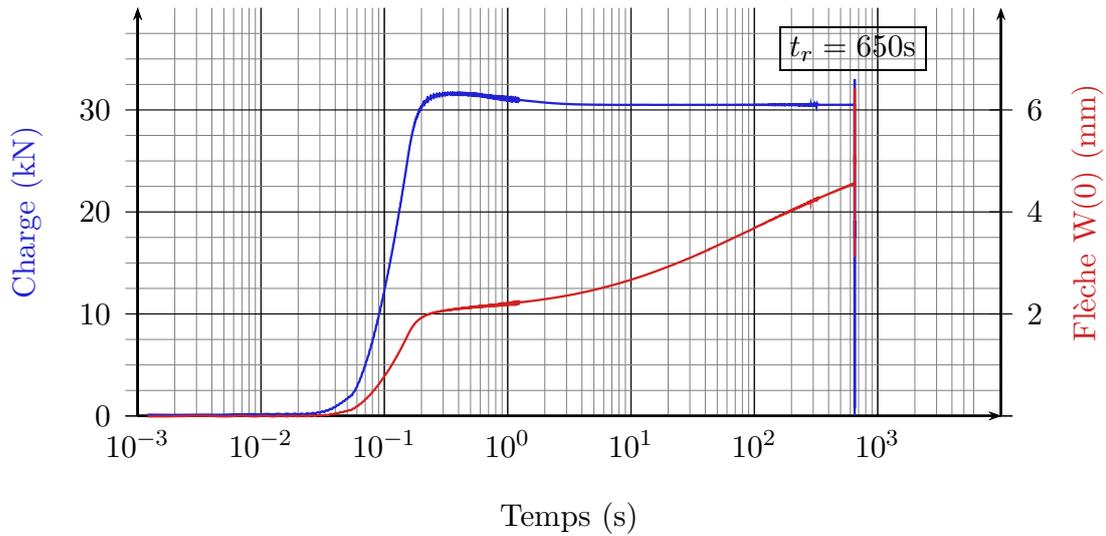


FIGURE 5.14 – Déflexion à mi-travée  $W(0,t)$  lors de l'essai de rupture différée à  $\theta = 10^\circ\text{C}$ .

$$\Delta\varepsilon = (\alpha_l - \alpha_s)\Delta T = \Delta\alpha\Delta T$$

Ainsi, pour  $\Delta\alpha$  et/ou  $\Delta T$  suffisamment grand, de sorte que  $\Delta\varepsilon$  soit supérieur à la limite d'extension de la couche raide, on peut observer une "rupture thermique par extension différentielle".

L'intérêt de ce chargement thermique est qu'il permet une détermination précise de la limite d'extension d'un matériau élastique. Pour cela, il convient de choisir un matériau limite à fort coefficient de dilatation thermique, tel que l'aluminium, afin de maximiser  $\Delta\alpha$ .

Dans le cadre de notre campagne expérimentale, ce phénomène de rupture thermique a été observé. En effet, une dalle de verre à la température initiale  $T = 28^\circ\text{C}$  a été mise dans une cellule de refroidissement à  $T = 3^\circ\text{C}$ . Malheureusement, le phénomène n'ayant pas été envisagé en amont, l'acquisition des données n'était pas en cours lors du refroidissement. Ainsi la température et la déformation à la rupture n'ont pas été identifiés.

Les photos de la Figure 5.15 montrent que lors ce phénomène de rupture, les fissurations ne se sont pas propagées jusqu'aux bords de la plaque, sauf au droit de l'encastrement. Les raisons de ce mode de rupture n'ont pas été déterminées.

## 5.5 Cisaillement "pur" sur verre tricouche

Comme nous l'avons vu dans la Section 4.1, en plus de la description dans le plan classique gouvernant les déplacements uniformes dans l'épaisseur de la plaque, une nouvelle équation indépendante émerge pour décrire le déplacement différentiel  $\tilde{d}$ . Pour étudier cette cinématique spécifique, le cas de chargement décrit et modélisé dans la Section 4.3.2 (voir Figure 4.5) a été reproduit expérimentalement sur du verre feuilleté avec trois couches de verre et deux couche de PVB. La géométrie de l'échantillon est définie par  $L = 0.1\text{m}$ ,  $h = 1\text{cm}$ ,  $c = 0.76\text{mm}$  (soit

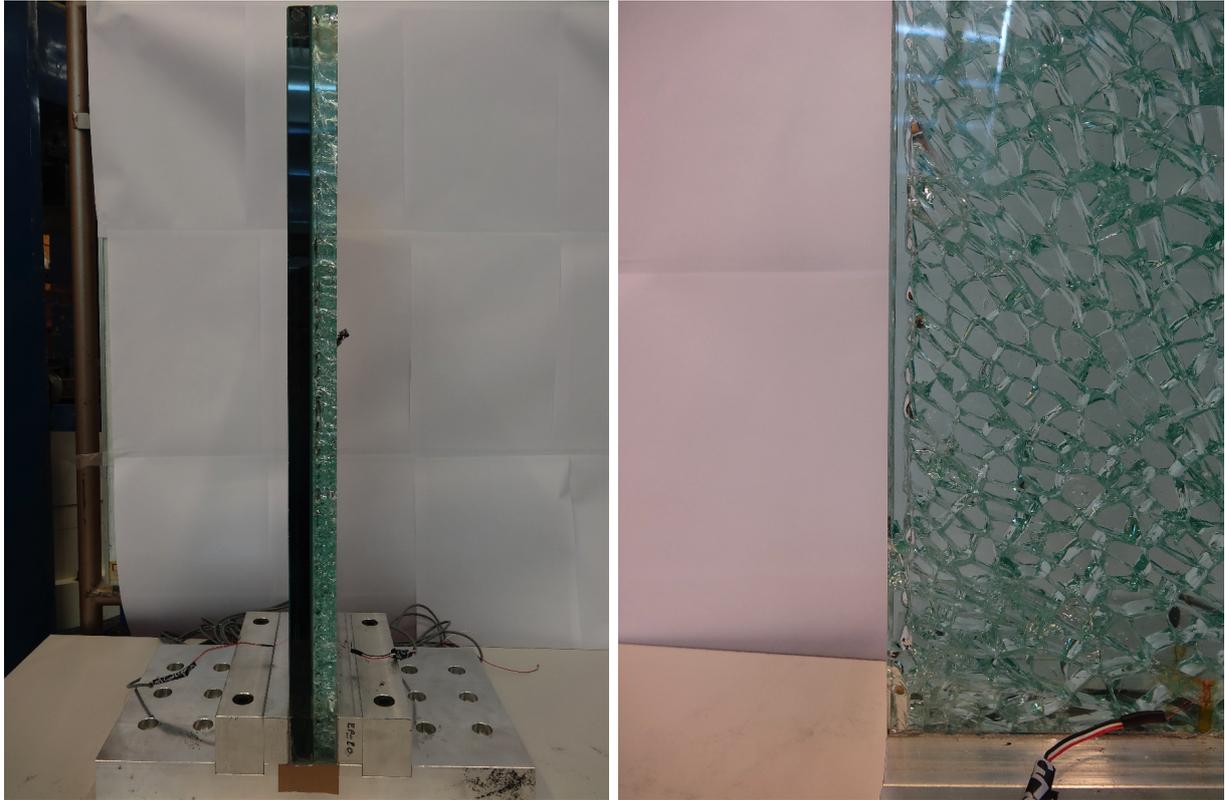


FIGURE 5.15 – Rupture thermique d'une dalle de verre feuilleté dans un encastrement en aluminium

$h_{\Omega} = 3.15\text{cm}$ ) et la largeur  $b = 0.1\text{m}$ .

Le test consiste à appliquer un chargement constant d'amplitude  $F$  (mesuré par le capteur de force de la presse hydraulique et atteint après un temps de montée de charge de 35s), et mesurer le déplacement différentiel dans le plan  $\tilde{d}$  entre une couche de verre externe et la couche de verre centrale grâce à un extensomètre placé en  $x = 0$ . La photo 5.16 illustre l'échantillon placé dans le dispositif d'essai fournissant les conditions limites désirées.

D'après l'analyse menée en Section 4.3.2, la réponse harmonique à ce chargement est donnée par

$$U_+(0) - U_0(0) = 3\tilde{d}(0) = \frac{1}{4B^*E'_s \text{sh}(B^*L/2)} \frac{F}{bh} \quad \text{avec} \quad B^*(\omega) = \sqrt{\frac{3\mu_c^*(\omega)}{hcE'_s}} \quad (5.9)$$

dont la Transformée de Fourier Inverse donne la réponse temporelle. La Figure 5.17 montre que les valeurs théoriques de  $\tilde{d}(0)$  correspondent en partie aux données expérimentales enregistrées pendant deux heures à 20°C.

*Remarque* : Dans le cas du verre feuilleté, l'hypothèse d'un verre parfaitement rigide est valable à une précision de 2%. La réponse calculée par Transformée de Fourier Inverse de (5.9) présente une variation lisse dans le temps tandis que la réponse obtenue par l'approximation "secant-stiffness" présente un changement de pente soudain lorsque la charge atteint sa valeur constante à  $t = 35\text{s}$ . Néanmoins, au temps intermédiaire, l'approche "secant-stiffness" fournit une

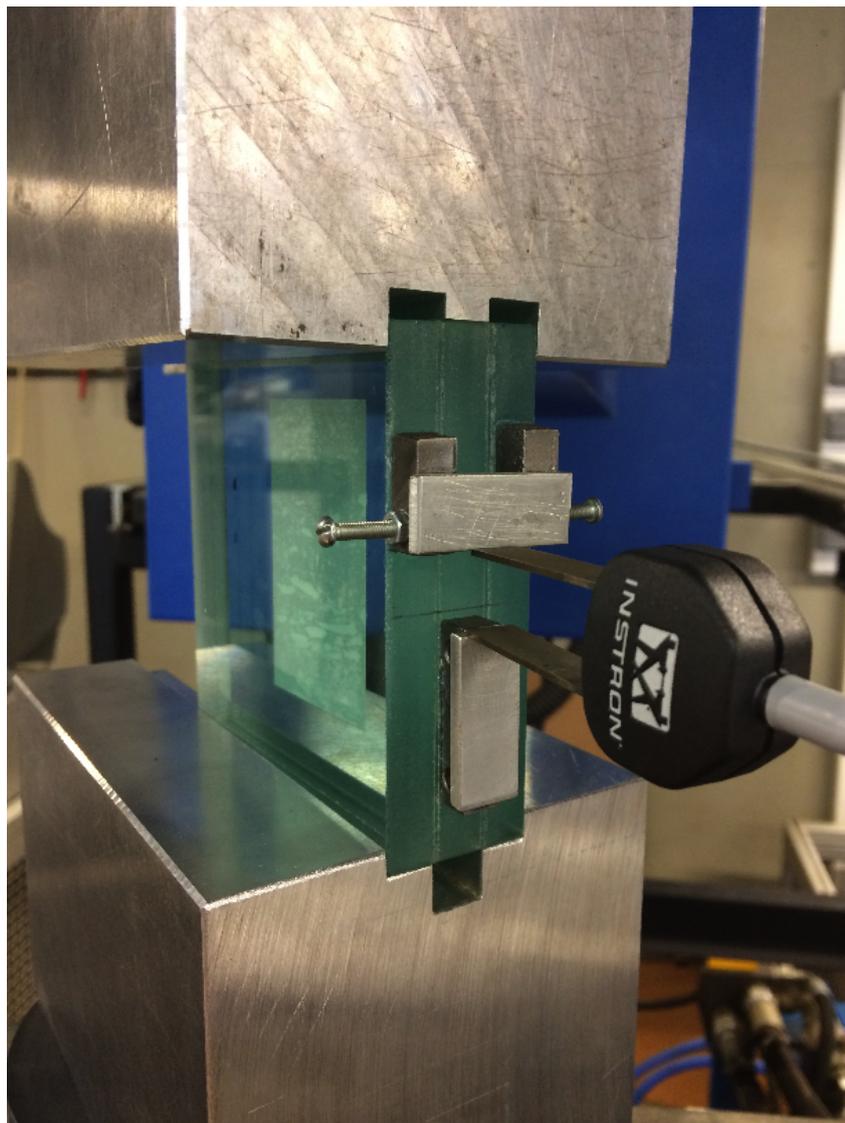


FIGURE 5.16 – Dispositif d'essai et instrumentation de l'échantillon de verre feuilleté pour l'essai de cisaillement pur.

meilleure correspondance avec les valeurs expérimentales que le modèle théorique. Nous n'avons pas d'explication simple permettant de justifier cet écart entre théorie et expérimentation.

## 5.6 Essais de vibration

Jusqu'à présent, les essais réalisés ont permis d'étudier le comportement d'une plaque HCS dans le domaine statique. Dans cette section, on s'intéresse à son comportement dynamique. Deux objectifs majeurs sont identifiés pour cette campagne d'essais : l'identification des fréquences propres d'une plaque pour différentes températures, et la mesure de différents champs (déformations à l'encastrement, accélération en tête notamment) lorsqu'elle est sollicitée cycliquement à cette même fréquence. Après avoir précisé l'instrumentation de la plaque ainsi que les différentes conditions d'essai, les résultats expérimentaux en balayage et en chargement cyclique sont présentés.

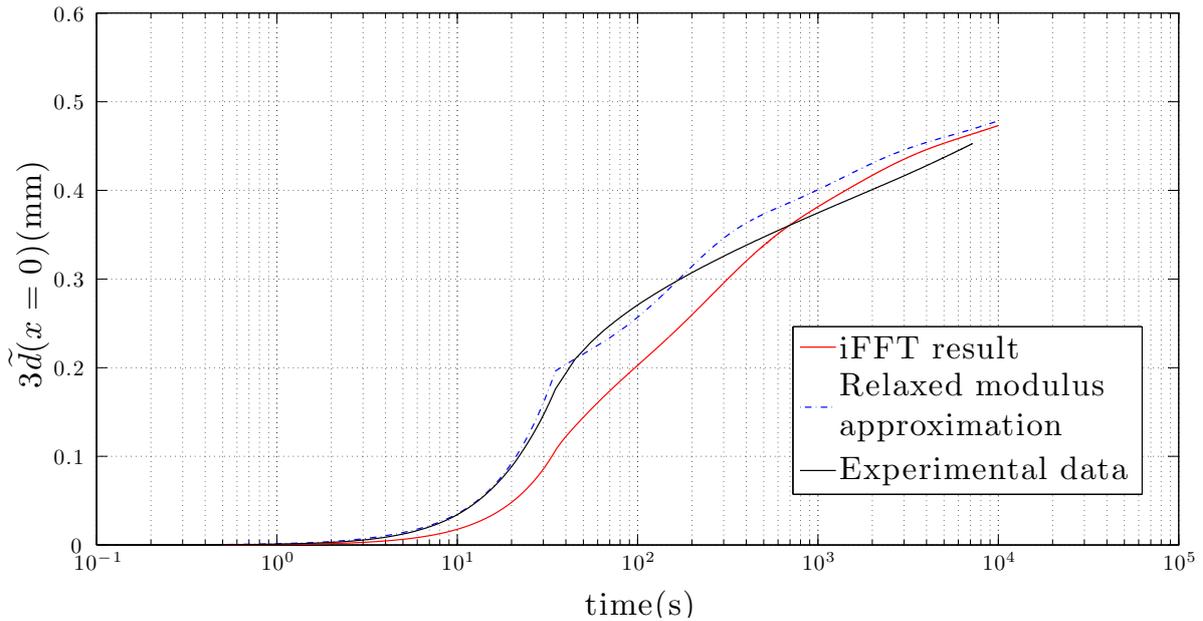


FIGURE 5.17 – Déplacement différentiel dans le plan entre les couches centrale et externe lors de l’essai de cisaillement à  $\theta = 20^{\circ}C$ . Valeurs théoriques et données expérimentales.

### 5.6.1 Instrumentation et conditions d’essai

La plaque étudiée est identique à celle testée lors des précédents essais statiques, soit une plaque de verre feuilleté de 0.6m de long et de 0.2m de large, composée de deux couches de verre trempé identiques d’épaisseur  $h = 18.5\text{mm}$  connectées par une couche de PVB (série R) d’épaisseur  $c = 1.8\text{mm}$ . Cette plaque est encastrée verticalement sur la table vibrante décrite dans la Section 5.2.2 grâce à un dispositif en aluminium accueillant la plaque collée sur 4cm de hauteur, lui-même fixé à la table vibrante (voir Figure 5.18).

La plaque est équipée de 2 accéléromètres miniatures à électronique intégrée, collés à l’axe de la plaque. Le premier est placé en tête de la plaque, permettant de mesurer l’accélération où le déplacement est le plus important lors de la résonance au premier mode. Le second est placé au noeud théorique (déplacement nul) du deuxième mode, appelé N2 pour la suite.

Pour la mesure des déformations lors de essais de vibrations, on utilise des jauges de déformation monoaxiales identiques à celles utilisées lors des essais statiques. Elles sont placées à l’encastrement de la plaque et au ventre théorique du deuxième mode, zones où les déformations sont à priori les plus importantes.

Contrairement aux essais statiques et par manque de moyen, l’échantillon n’a pu être placé dans une enceinte thermique durant l’essai de vibration. Par conséquent, le contrôle de la température par un capteur collé à la surface de la plaque est sujet à approximation. En effet, l’échantillon est d’abord placé dans une enceinte thermique à la température  $T$ , puis il est acheminé jusqu’à la table vibrante où les différents branchements sont réalisés et enfin l’essai est lancé. Durant ce court laps de temps, la température en surface diminue, mais on peut supposer que la température du PVB au cœur de la plaque reste à la température  $T$ . Afin de quantifier le changement de température au sein du PVB, on utilise une caméra thermique qui mesure la température dans l’épaisseur de la plaque, et donc celle du PVB (pilotant le comportement

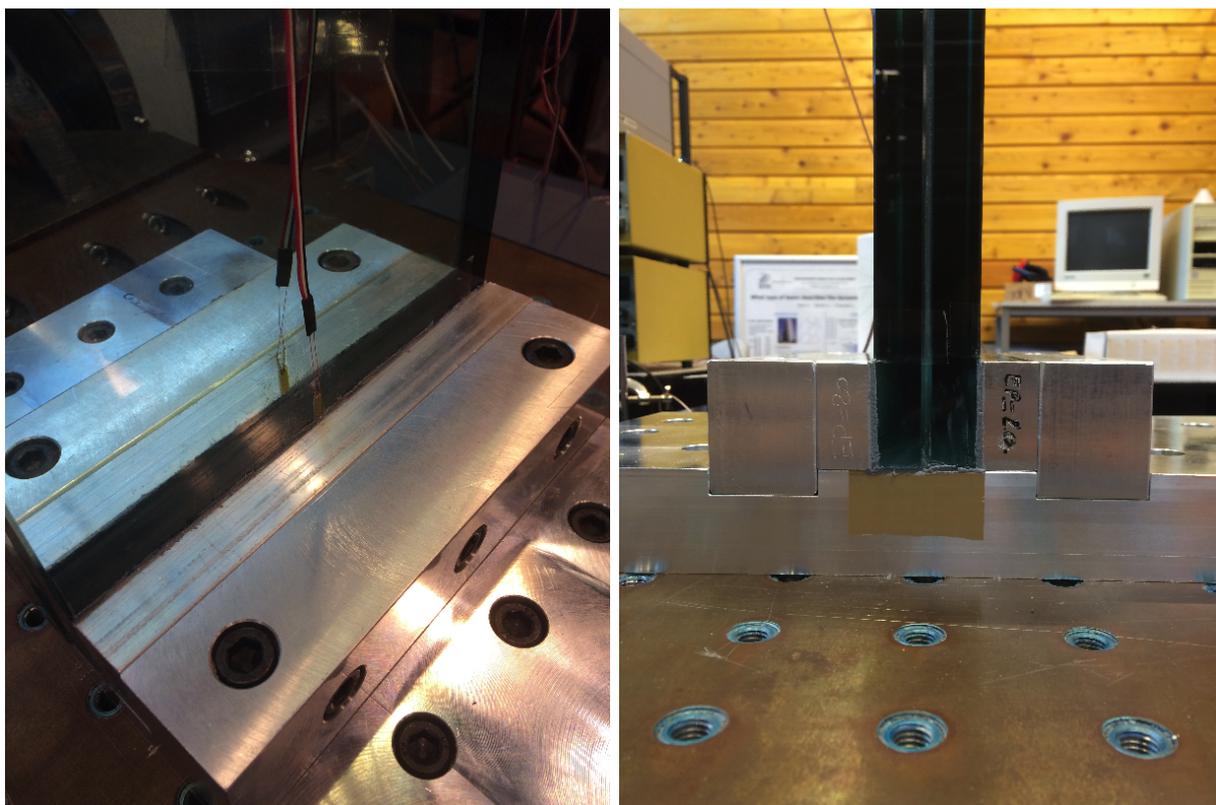


FIGURE 5.18 – Détail de l'encastrement du support en aluminium sur la table vibrante (gauche) et de la plaque HCS dans le support en aluminium (droite). A droite les deux plaques verre apparaissent noires avec une couche de PVB entre, à gauche le verre est transparent et on peut voir les jauges collées.

global de la plaque) mais uniquement en surface. La Figure 5.19 fournit la mesure initiale de la caméra thermique *via* un logiciel de traitement des données.

Enfin, on rappelle que le pilotage est assuré par un vibromètre laser portable, pointé sur le support en aluminium, possédant une plage de fréquence de 0.5Hz à 22kHz pour des mesures de vitesse allant de  $0.02\mu\text{m/s}$  à  $5\text{m/s}$ .

### 5.6.2 Essais de balayage en fréquence

Les premiers essais réalisés sont les essais dit de "balayage en fréquence croissant". Ces balayages sont logarithmiques, ce qui signifie que la fréquence varie d'une valeur constante de décades par seconde. Cela permet de couvrir une plage de fréquence étendue où la résolution aux basses fréquences serait potentiellement perdue avec un balayage linéaire. L'amplitude en accélération est également fixée dans le logiciel.

Cette procédure d'identification est rigoureusement exacte dans le cas d'un milieu purement élastique. Elle est également couramment utilisée pour les matériaux faiblement dissipatifs, l'atténuation pouvant être dans ce cas traitée comme une petite perturbation du fonctionnement élastique. Compte tenu de l'analyse théorique du chapitre précédent, on peut considérer que le verre feuilleté rentre dans ce cadre et que l'essai est pertinent pour une analyse pseudo-élastique.

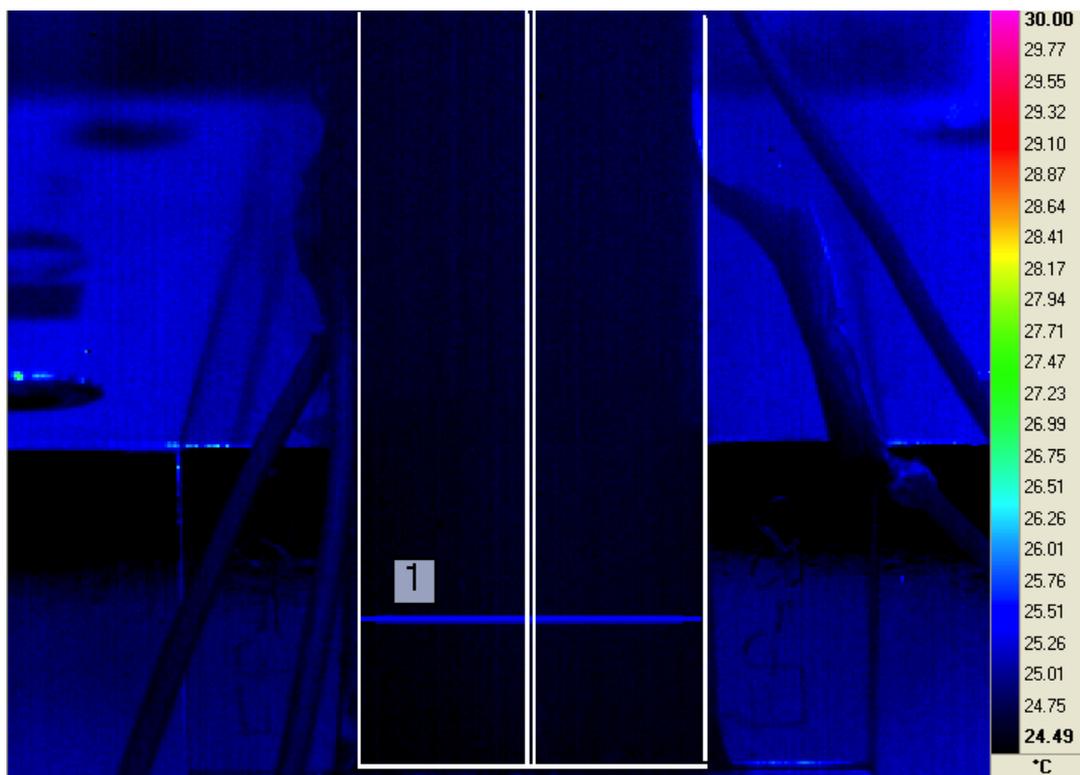


FIGURE 5.19 – Exemple du champ de température dans l'épaisseur de la plaque mesuré par caméra thermique avant le lancement d'un essai (température homogène). En blanc les contours des plaques de verre.

### Exemple d'acquisition

On rappelle que le premier objectif des essais dynamiques est de déterminer expérimentalement les fréquences propres de la plaque HCS en fonction de la température. Pour cela, on trace les accélérations mesurées en tête et au noeud N2 en fonction de la fréquence. La mesure s'étend de 0 à 1800Hz. A titre d'exemple, la Figure 5.20 illustre (pour une seule température et de 0 à 800Hz pour une meilleure lisibilité) les deux premiers modes de la plaque HCS pour  $T = 31^{\circ}\text{C}$ .

On s'intéresse à l'accélération en tête de plaque. On observe pour une consigne d'accélération  $a = 12\text{m.s}^{-2}$  à la base, constante avec la fréquence, des pics d'accélération en tête à  $f_1 \simeq 75\text{Hz}$  correspondant au premier mode (avec une amplification d'environ neuf fois le signal d'entrée) et à  $f_2 \simeq 460\text{Hz}$  correspondant au deuxième mode (amplification d'environ 4 fois le signal d'entrée).

Pour plus de précision, le logiciel permet de tracer la fonction de transfert (gain et phase) de la plaque HCS et d'identifier directement la fréquence du mode, la bande passante  $BW$  et le coefficient de qualité  $Q$  qu'on peut relier au coefficient d'amortissement  $\zeta$  par  $\zeta = \frac{1}{2Q}$ . La Figure 5.21 illustre le gain pour l'exemple précédent

Cette fonctionnalité du logiciel est constamment utilisée par la suite lorsqu'on parle de mesure expérimentale de fréquence propre, ou de coefficient d'amortissement.

### Données expérimentales

Le Tableau 5.2 suivant récapitule pour une consigne d'accélération  $a = 12\text{m.s}^{-2}$  les données extraites du logiciel pour les 3 premiers modes : fréquence fondamentale, bande-passante, facteur

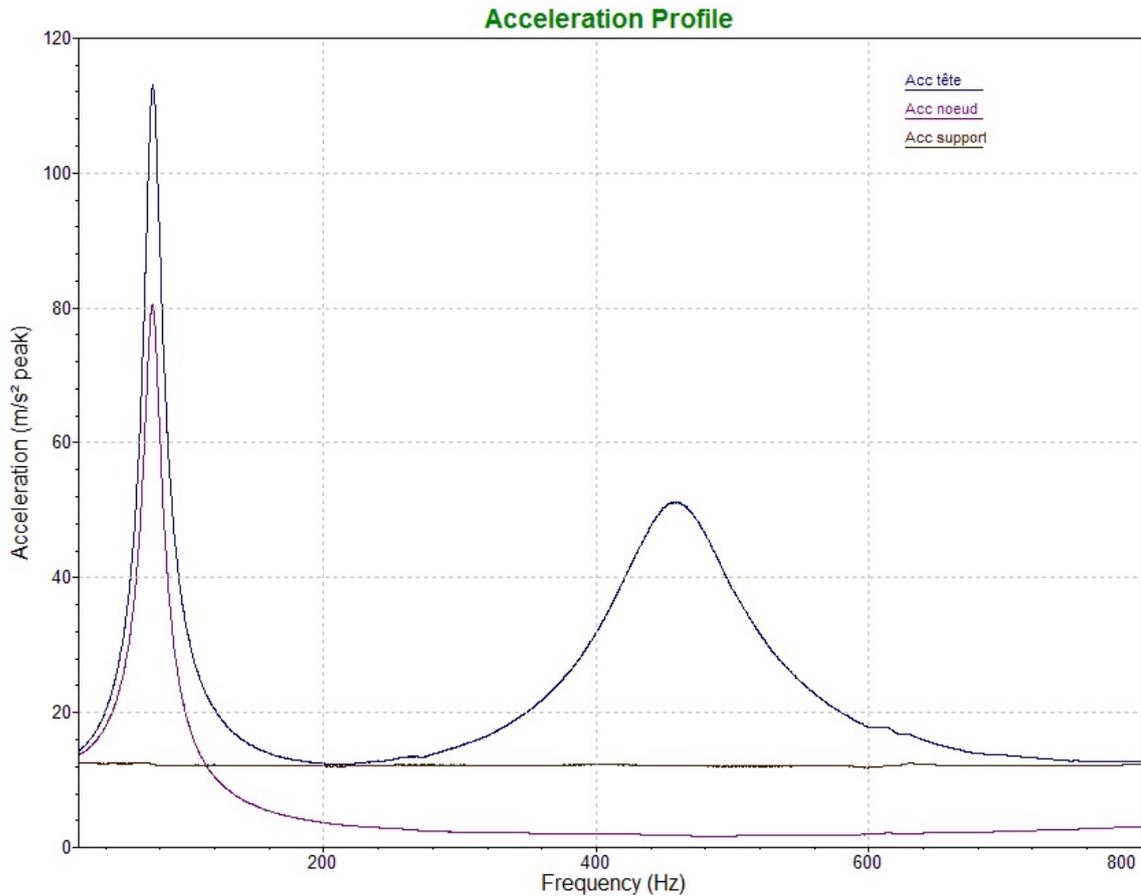


FIGURE 5.20 – Exemple d’acquisition lors d’un balayage en fréquence croissant à  $T = 31^{\circ}\text{C}$  (consigne d’accélération  $a = 12\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ )

d’amortissement, température de surface de la plaque HCS :

On rappelle que la température indiquée est la température de surface moyennée sur la largeur de bande du mode considéré, et que la température de la plaque est considérée variable uniquement dans l’épaisseur de la plaque (et mesurable par caméra thermique). Les données pour les modes 2 et 3 sont synthétisées dans le Tableau 5.3.

Les analyses suivantes sont basées sur ces données.

### Fréquence propre fondamentale $f_1$ à différentes températures

L’essai de balayage tel que présenté ci-dessus a été mené à différentes températures. Grâce au module du logiciel permettant de tracer la fonction de transfert en gain, on peut déduire les fréquences propres de la plaque HCS et ainsi étudier l’influence de la température sur ces dernières. La Figure 5.22 illustre les fonctions de transfert en gain zoomées autour du premier mode de la plaque HCS (pour une meilleure lisibilité) en fonction de la température de surface.

On s’intéresse ici à la fréquence fondamentale de la plaque. La Figure 5.23 suivant illustre son évolution théorique et expérimentale en fonction de la température.

En accord avec l’intuition et l’analyse théorique, on observe que la fréquence fondamentale de la plaque diminue lorsque la température augmente. En effet, nous avons vu dans les chapitres précédents qu’une augmentation (respectivement diminution) de la température implique une di-

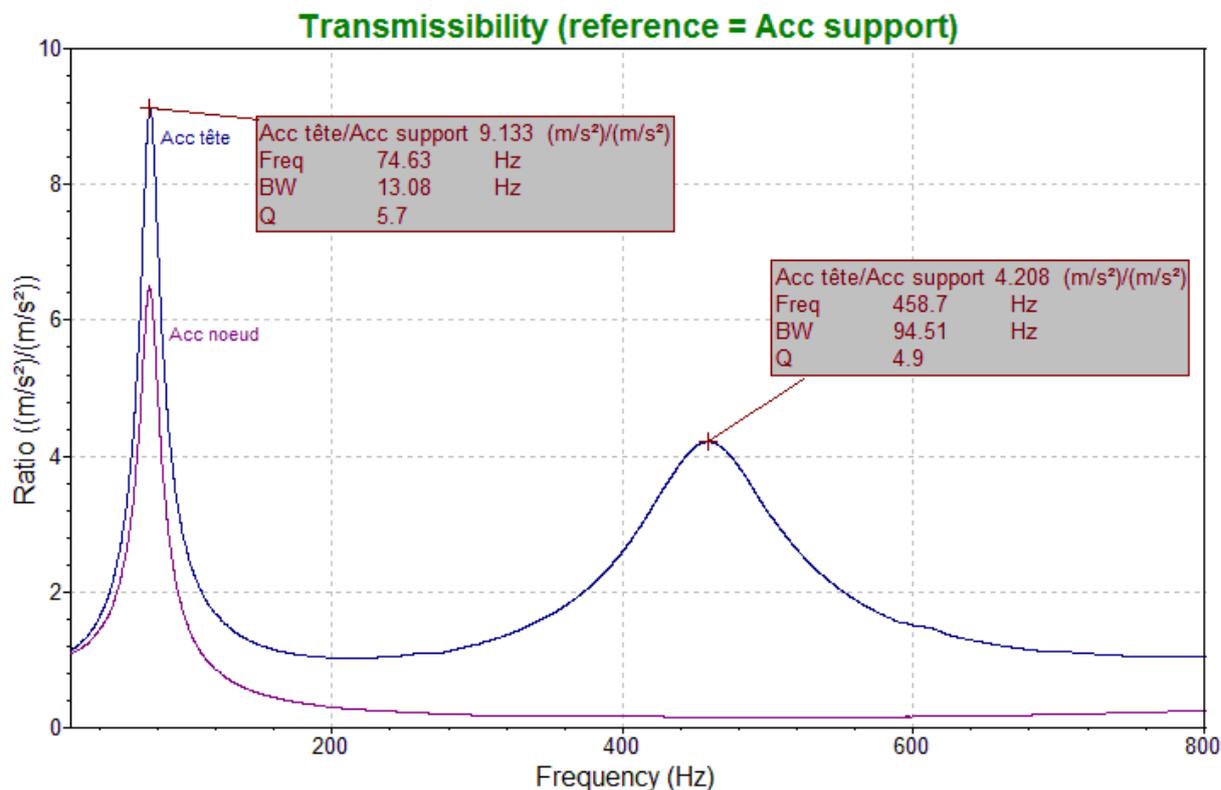


FIGURE 5.21 – Fonction de transfert (gain) de la plaque HCS à  $T = 31^{\circ}\text{C}$  pour une consigne d'accélération  $a = 12\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Mode 1				
Température ( $^{\circ}\text{C}$ )	$f_1$ (Hz)	$\text{BW}_1$ (Hz)	$Q_1$	$\zeta_1$ (%)
49.5	54.4	5.8	9.41	5.31
47.3	55.2	7.5	7.39	6.77
45	56.5	9.5	5.93	8.44
43.2	57.9	11.8	4.89	10.22
41.5	59.6	14.1	4.22	11.85
40	61.7	16	3.86	12.95
38.6	64.0	17.1	3.73	13.39
37.5	65.9	17.6	3.75	13.35
36.4	67.8	17.6	3.86	12.97
35.5	69.1	17.2	4.02	12.45
33.5	71.8	15.8	4.54	11.01
33.2	72.5	15.4	4.72	10.59
32.6	73.2	14.8	4.96	10.08
32.2	73.5	14.4	5.11	9.79
31.8	74.1	14	5.30	9.44
31.4	74.4	13.6	5.45	9.17
31	74.6	13.1	5.71	8.76

TABLE 5.2 – Données extraites du logiciel de traitement pour le mode fondamental de la plaque HCS

Mode 2					Mode 3				
T(°C)	$f_2$ (Hz)	BW <sub>2</sub> (Hz)	Q <sub>2</sub>	$\zeta_2$ (%)	T(°C)	$f_3$ (Hz)	BW <sub>3</sub> (Hz)	Q <sub>3</sub>	$\zeta_3$ (%)
48.7	313.6	32.2	9.73	5.14	48.3	868.3	65.3	13.30	3.76
46.5	319	42.5	7.51	6.66	45.8	878.5	84.0	10.45	4.78
44.4	326.4	54.7	5.97	8.37	43.8	890.4	106.4	8.37	5.97
42.6	333.2	69.0	4.83	10.35	42.2	898.9	131.4	6.84	7.31
41	344.2	83.3	4.13	12.10	40.5	907	164.7	5.51	9.08
39.5	356.7	96.8	3.68	13.57	39.2	946.6	196.2	4.82	10.36
38.2	370.2	106.7	3.47	14.41	38	953	234.2	4.07	12.29
37.2	382.8	114.0	3.36	14.89	36.8	995.6	248.1	4.01	12.46
36.1	394.8	117.5	3.36	14.88	35.8	1002	270.4	3.71	13.49
35.2	406	118	3.44	14.53	35	1040	281.7	3.69	13.54
33.4	426.8	112.9	3.78	13.23	33.4	1079	274.6	3.93	12.72
33.1	433.4	110.3	3.93	12.72	32.9	1098	270.7	4.06	12.33
32.4	441.5	106.4	4.15	12.05	32.3	1099	270.4	4.06	12.30
32	445.9	103.7	4.30	11.63	31.9	1126	275.2	4.09	12.22
31.7	450.5	100.8	4.47	11.19	31.6	1127	272.8	4.13	12.10
31.3	453.6	98.3	4.61	10.84	31.3	1152	266.6	4.32	11.57
30.9	458.7	94.5	4.85	10.30	30.9	1168	255.9	4.56	10.95

TABLE 5.3 – Données extraites du logiciel de traitement pour les modes 2 et 3 de la plaque HCS

minution (respectivement augmentation) du module de cisaillement du PVB et le comportement d'ensemble de la plaque tend vers un comportement bi-couche (respectivement monolithique). Les résultats analytiques des chapitres précédents montrent que la fréquence fondamentale d'une plaque monolithique est de l'ordre de deux fois celle d'une plaque bi-couche. Ainsi, les tendances de variation de  $f_1$  observées lors des essais de balayage sont conformes qualitativement aux analyses théoriques déjà menées.

On note néanmoins un écart important entre la théorie et la mesure expérimentale, celle-ci étant toujours plus faible que son estimation théorique. Des sources possibles de cet écart sont la variation de la température au sein du matériau et la précision de la détermination des fréquences propres théoriques en oscillations libres.

Nous n'avons pas pu clarifier complètement cet écart par des mesures complémentaires. Cependant, il semble que malgré les soins apportés dans la réalisation du dispositif d'essai, l'encastrement réel n'est pas l'encastrement parfait prévu théoriquement. L'assouplissement de la condition d'encastrement va naturellement dans le sens d'une fréquence propre moindre. De plus, il autorise un déplacement relatif entre les deux couches de verre qui se traduit par un échauffement du PVB cisailé. Cet effet supplémentaire d'assouplissement tend également à réduire les fréquences. On souligne que de fait la caméra thermique indique clairement un échauffement au sein même de l'encastrement supposé (voir Figure 5.24). Cette observation vient conforter l'analyse de l'écart entre la théorie et l'expérience. Pour s'en assurer, il faudrait avoir une meilleure maîtrise des conditions d'encastrement, ce qui représente une véritable difficulté expérimentale (garder des déplacements limités avec un appui rotulé est également difficilement envisageable).

On précise que cette analyse faite sur la fréquence fondamentale est transposable aux deux modes suivants.

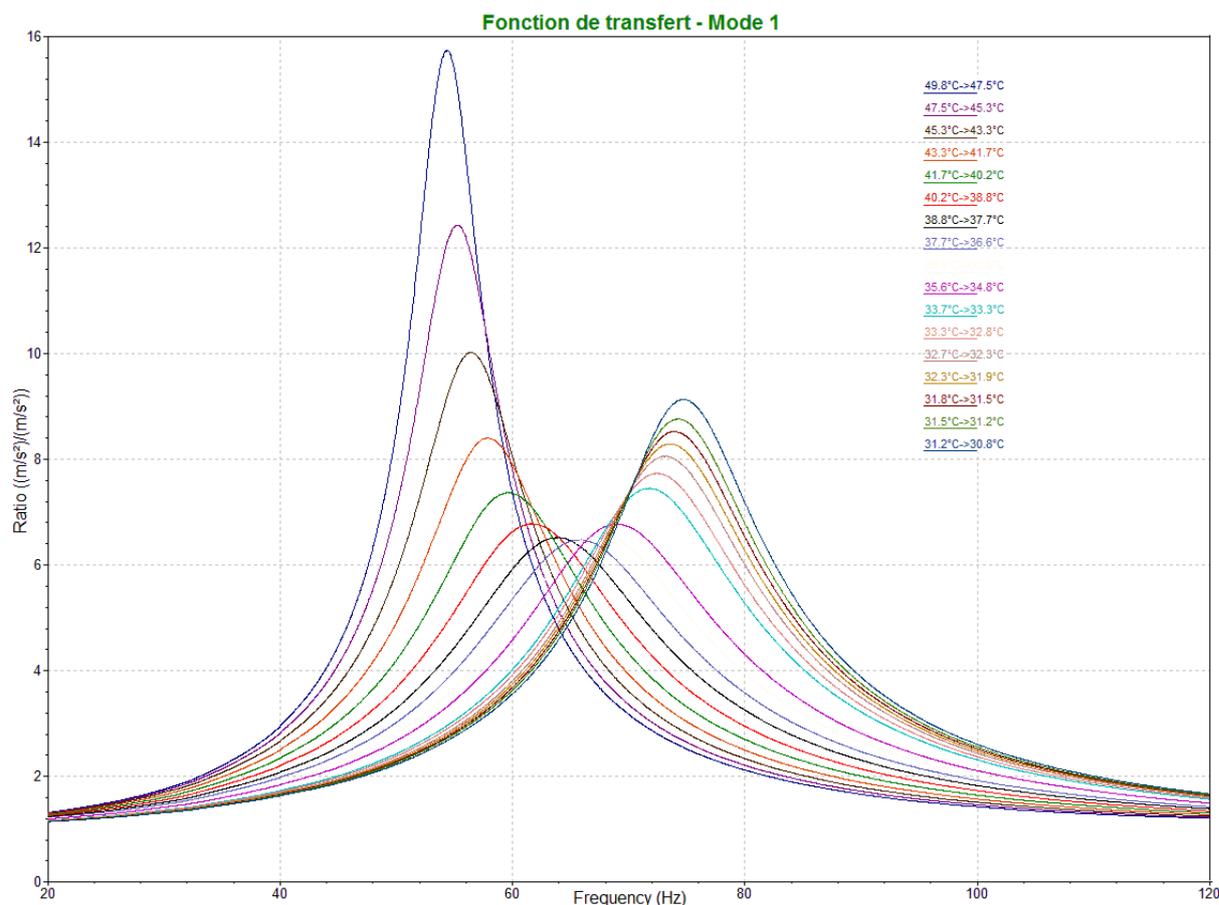


FIGURE 5.22 – Fonction de transfert (gain) autour du premier mode de la plaque HCS à différentes températures pour une consigne d'accélération  $a = 12m.s^{-2}$

### Coefficient d'amortissement

Les données du Tableau 5.2 permettent de tracer le coefficient d'amortissement en fonction de la température pour le mode fondamental et de le comparer avec l'amortissement théorique calculé grâce au modèle de plaque HCS développé dans les chapitres précédents (Figure 5.25).

On observe un maximum d'amortissement autour de  $T = 38^{\circ}C$  expérimentalement et  $T = 40^{\circ}C$  théoriquement. Comme nous l'avons vu dans définition théorique du coefficient d'amortissement, ce maximum correspond à un couple (fréquence fondamentale, température) pour lequel le ratio partie imaginaire sur partie réelle (autrement dit la phase) du module de cisaillement du PVB est maximal.

Aussi, l'allure de la courbe expérimentale est cohérente avec l'allure de la courbe théorique. Néanmoins, on note un écart important entre mesure et valeur théorique. Les sources d'erreurs sont très probablement identiques à celles évoquées plus haut pour les fréquences fondamentales.

### Mesures des déformations

On s'intéresse maintenant aux déformations mesurées grâce aux différentes jauges placées sur la plaque lors de l'essai de balayage, avec pour objectif principal d'observer les amplitudes des déformations autour des différents modes propres et leur symétrie entre fibre supérieure et fibre inférieure de la plaque.

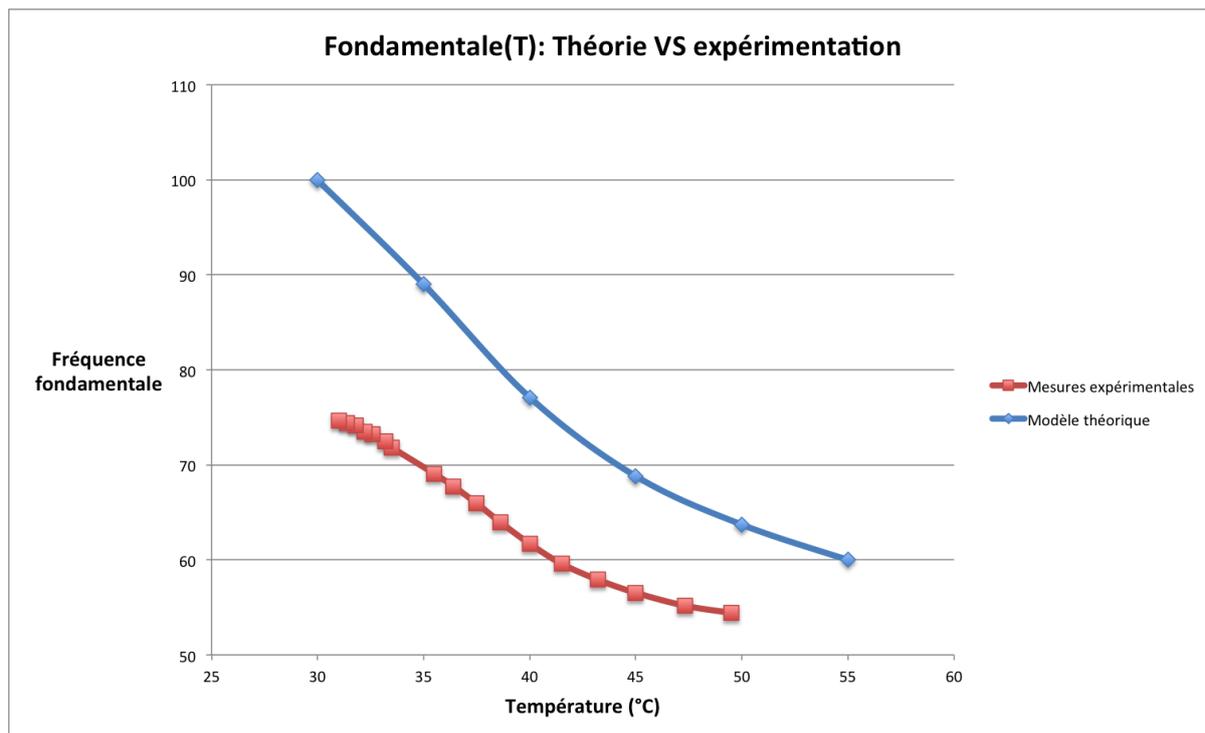


FIGURE 5.23 – Fréquence fondamentale expérimentale et théorique de la plaque HCS en fonction de la température.

Pour cet essai mené à  $T = 27^{\circ}\text{C}$  avec une consigne d'accélération  $a = 12\text{m.s}^{-2}$ , le premier mode a été observé à  $f_1 = 80\text{Hz}$  et le second à  $f_2 = 496\text{Hz}$ . La Figure 5.26 suivante illustre l'évolution des accélérations et des déformations en fonction du temps.

Pour commencer, on note que le niveau de bruit des mesures de déformation est de l'ordre de 10 à  $15\mu\text{def}$ .

Autour du premier mode, on note une déformation significative  $\varepsilon_{base} = 110\mu\text{def}$  à la base de l'encastrement (enveloppe rouge) ainsi qu'une déformation mineure  $\varepsilon_{ventre2} = 30\mu\text{def}$  au ventre du second mode. Pour les modes suivants, les déformations sont inférieures au niveau de bruit qui parasite la mesure par jauge. Ainsi, on en déduit que les déformations liées au premier mode sont bien plus importantes que celles liées aux modes suivants. Afin d'avoir un ratio réel des déformations entre le premier mode et les suivants sans augmenter l'amplitude de la consigne (ce qui aurait pour effet d'amplifier les déformations à la base et par conséquent risquer la rupture du matériau), il sera nécessaire de réduire le niveau de bruit, ce qui est délicat expérimentalement. Une autre possibilité serait d'effectuer des sollicitations plus fortes dans cette gamme spécifique de fréquence où le premier mode n'est pas amplifié.

Enfin, l'enveloppe violette (Figure 5.26) montre également que l'accéléromètre associé est effectivement placé au noeud N2 de la plaque HCS encastree-libre puisqu'on ne mesure aucune accélération à la fréquence  $f_2$ .

### 5.6.3 Sollicitations cycliques aux différentes fréquences propres

Le deuxième essai de vibration consiste à solliciter la plaque HCS à son mode fondamental et observer si son comportement varie du fait d'un échauffement par dissipation visqueuse dans

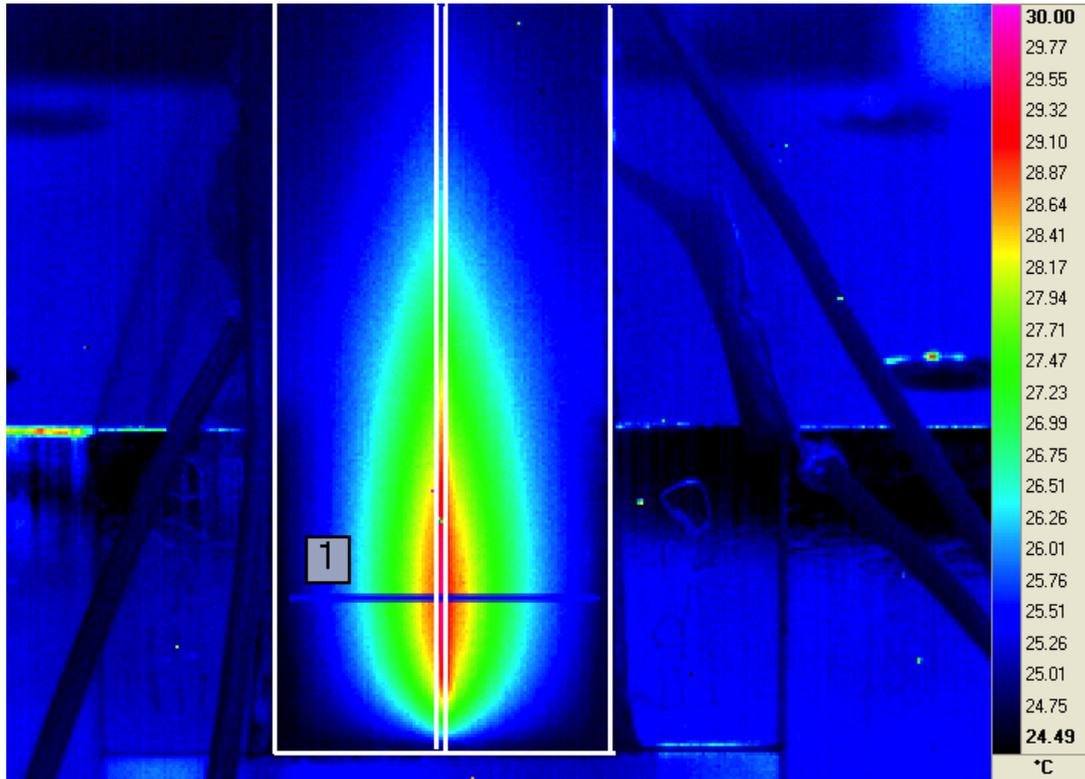


FIGURE 5.24 – Echauffement observé dans l’encastrement durant les essais de vibration à la fréquence fondamentale, après 17000 cycles.

le PVB. Pour cela, on s’intéresse principalement aux variations des déformations dans le temps, mais également aux variations de température dans le PVB engendrées par la réponse de la plaque à la sollicitation.

Cet essai a été réalisé à température ambiante  $T = 25^{\circ}\text{C}$ . Un premier balayage a permis d’identifier la fréquence fondamentale  $f_1 = 83\text{Hz}$ . Ensuite, la plaque est sollicitée par un signal d’amplitude  $a = 45\text{m.s}^{-2}$  à cette fréquence  $f_1$  durant 5 minutes. La Figure 5.27 ci-dessous illustre la variation des amplitudes de déformations durant l’essai complet.

On observe entre  $t = 0\text{s}$  et  $t = 4\text{s}$  une forte chute des déformations et des accélérations en tête et au noeud N2. Si on s’intéresse à la consigne d’accélération à la base, on note qu’elle est atteinte et stabilisé en moins d’une seconde, elle n’est par conséquent pas à l’origine de cette baisse importante. Pour une meilleure lecture de l’évolution, quelques cycles ont été extrait de ce graphique à  $t = 4\text{s}$  (Figure 5.28) et  $t = 300\text{s}$  (Figure 5.29).

La première observation est que les déformations en fibre supérieure sont bien symétriques à celles en fibre inférieure et que les déformations à l’encastrement sont bien les plus importantes. Intéressons-nous aux maximums de déformation en début (indice  $d$ ) et fin (indice  $f$ ) d’essai, à la base (indice  $b$ ) et au noeud N2 (indice  $N2$ ). On a :

$$\begin{cases} \varepsilon_{bd} = 250\mu\text{def} \\ \varepsilon_{bf} = 200\mu\text{def} \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_{N2d} = 50\mu\text{def} \\ \varepsilon_{N2f} = 35\mu\text{def} \end{cases}$$

L’écart entre les déformations en début et fin d’essai indique une variation du comportement d’ensemble de la plaque. Nous avons vu au début du chapitre lors des essais statiques qu’à

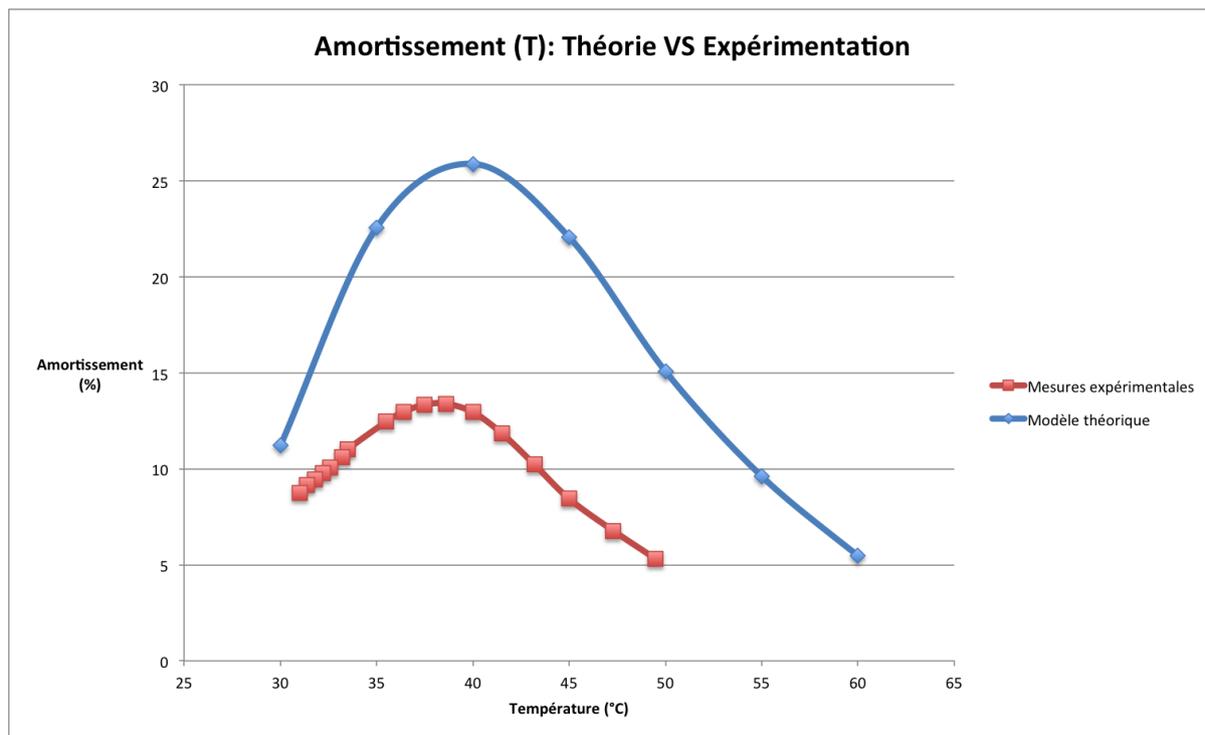


FIGURE 5.25 – Facteur d’amortissement expérimentale (calculé à partir des données du logiciel de mesure) et théorique du premier mode de la plaque HCS à différentes températures

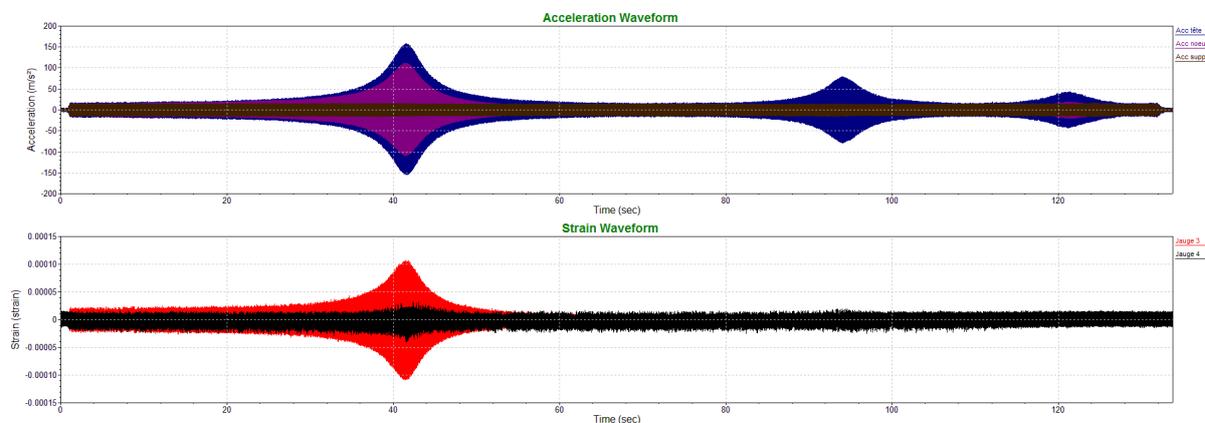


FIGURE 5.26 – Evolution temporelle des accélérations et des déformations lors d’un essai de balayage à  $T = 27^{\circ}\text{C}$  pour une consigne d’accélération  $a = 12\text{m.s}^{-2}$

chargement identique, le modèle bicouche présente des déformations plus importante que le modèle monolithique. Par conséquent, un hypothétique échauffement interne devrait induire une augmentation de déformations, contrairement à ce que nous observons. Cependant, il faut garder à l’esprit que la fréquence de la sollicitation est constante et que si le comportement d’ensemble varie, alors elle ne correspond plus à la fréquence propre fondamentale de la plaque. Ainsi, l’amplification de la consigne est plus faible qu’à la résonance et les déformations observées ne sont plus comparables à celles du début de l’essai.

Afin de confirmer qu’un changement de comportement est effectivement observé, on s’inté-

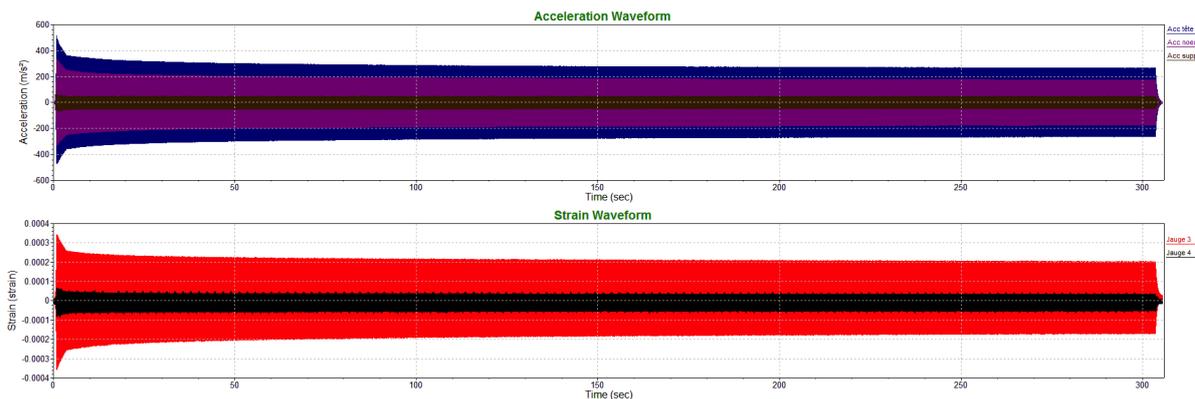


FIGURE 5.27 – Evolution temporelle des accélérations et des déformations lors d’un essai cyclique à  $T = 25^{\circ}\text{C}$  et  $f_1 = 83\text{Hz}$  pour une consigne d’accélération  $a = 45\text{m.s}^{-2}$ . En bleu l’accélération en tête, en violet l’accélération au noeud N2, en marron la consigne d’accélération. En rouge les déformations à l’encastrement, en noir les déformations au noeud N2.

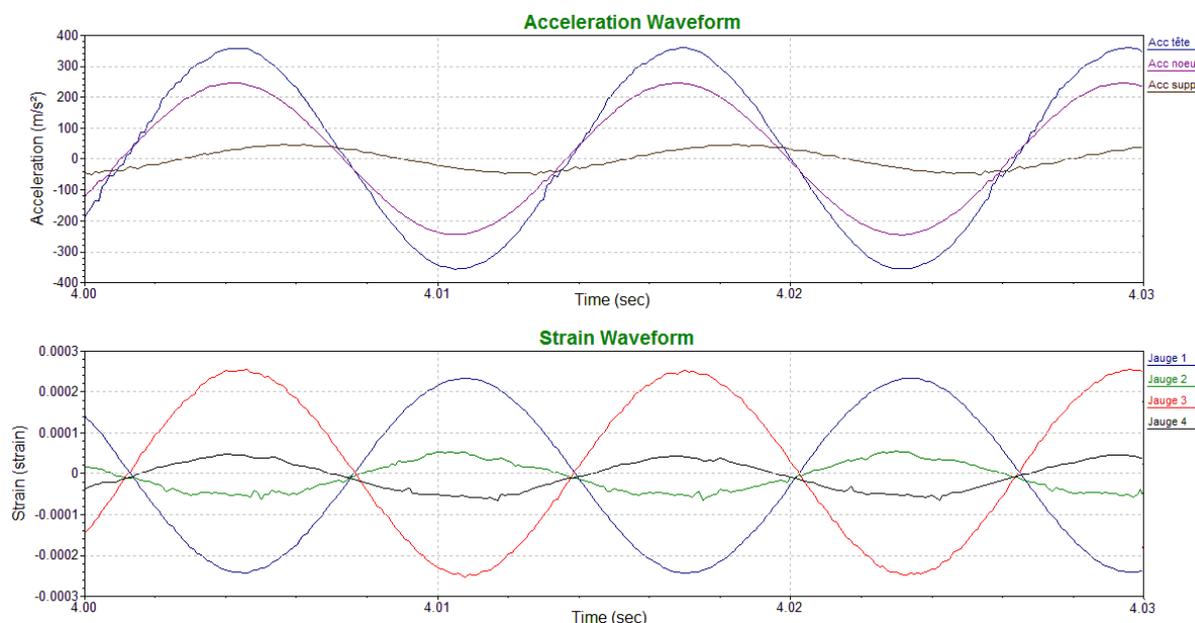


FIGURE 5.28 – Zoom autour de  $t = 4\text{s}$  (début) sur les accélérations et des déformations lors de l’essai cyclique à  $T = 25^{\circ}\text{C}$  et  $f_1 = 83\text{Hz}$  pour une consigne d’accélération  $a = 45\text{m.s}^{-2}$

resse à la température sur la tranche (en surface) dans l’épaisseur de la plaque. Deux zones ont montré une variation de la température. La première se situe environ à mi-hauteur de la plaque (Figure 5.30).

Après 9 minutes et 20 secondes d’essai, on constate que la température de surface du PVB est passée de  $25.5^{\circ}\text{C}$  à  $26.5^{\circ}\text{C}$ , soit un module de cisaillement qui passe de  $|G(2\pi * 83 ; 25.5^{\circ}\text{C})| = 56.8\text{MPa}$  à  $|G(2\pi * 83 ; 26.5^{\circ}\text{C})| = 51.2\text{MPa}$ . Par conséquent, on peut déduire que cet échauffement non négligeable est une des origines de la modification du comportement global de la plaque durant l’essai (et donc de la modification de la fréquence propre).

La seconde zone qui présente un échauffement est l’encastrement à la base de la plaque. Comme le montre la Figure 5.31, cet échauffement est bien plus important que le précédent

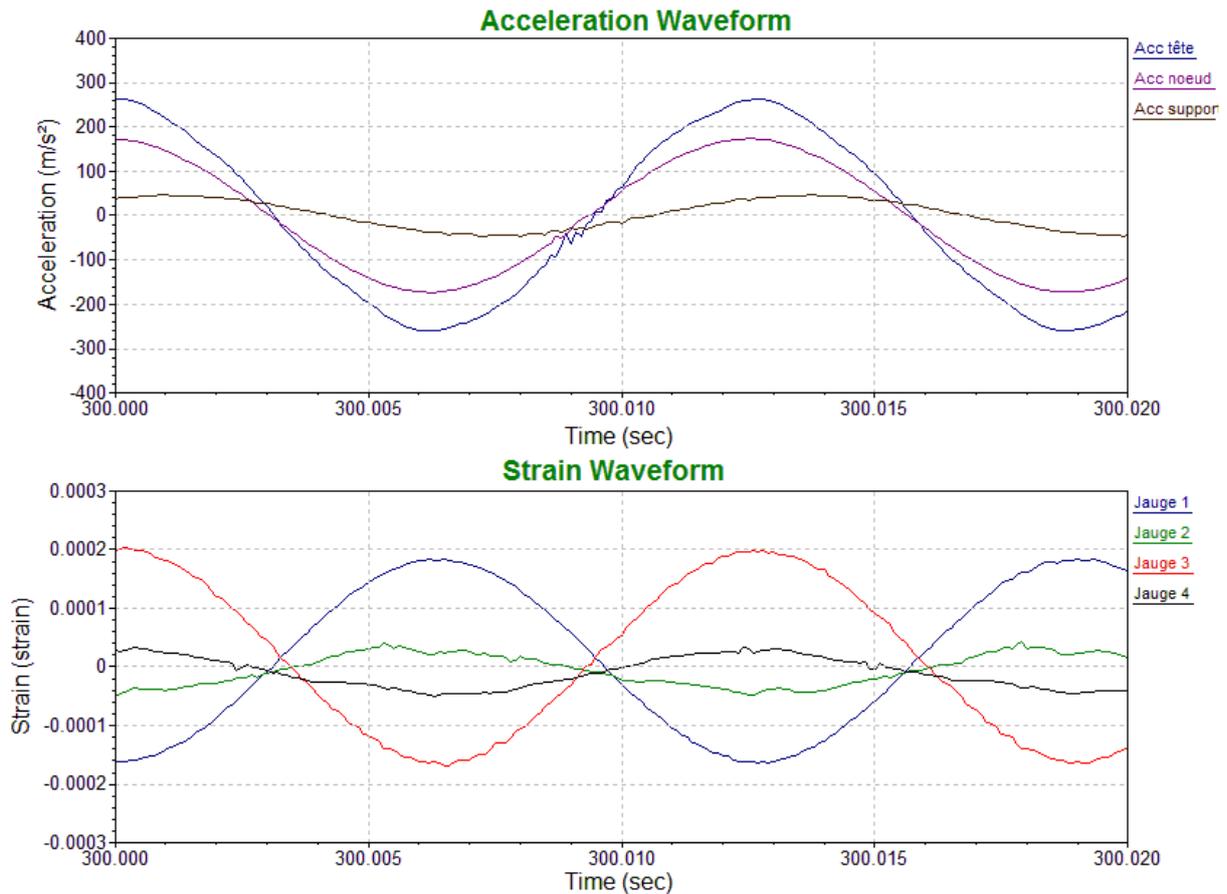


FIGURE 5.29 – Zoom autour de  $t = 300\text{s}$  (fin de l'essai) sur les accélérations et des déformations lors de l'essai cyclique à  $T = 25^\circ\text{C}$  et  $f_1 = 83\text{Hz}$  pour une consigne d'accélération  $a = 45\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

puisque la surface PVB atteint une température de  $30^\circ\text{C}$ , soit un module  $|G(2\pi * 83 ; 30^\circ\text{C})| = 33.5\text{MPa}$ , en 3 minutes et 25 secondes.

Cette augmentation de la température dans l'encastrement est très probablement due à un défaut de liaison puisqu'en théorie, aucun déplacement n'est permis dans l'encastrement de la plaque. Il est certain que sa diffusion au sein du PVB vers le haut de l'encastrement joue un rôle majeur dans la variation du comportement global de la plaque. Une limitation de celui-ci grâce à une amélioration des conditions limites à la base permettrait de mieux appréhender l'influence du premier échauffement à mi-hauteur de la plaque.

#### 5.6.4 Bilan de la campagne expérimentale dynamique

Au bilan, même si l'interprétation de ces essais est complexe et de ce fait n'a pas été poussé plus loin, ces expériences sont très instructives.

Elles montrent en particulier que lors d'un essai dynamique harmonique, la plaque de verre feuilleté, qui peut être considérée à l'état initial comme une plaque effective homogène, se transforme en une plaque effective distincte du fait de l'échauffement par dissipation visqueuse dans la couche viscoélastique. Comme cet échauffement est non-homogène car dépendant des zones de plus ou moins grande distorsion interne associée à la géométrie du mode, la plaque perd son homogénéité initiale. Nous sommes donc en présence d'une situation de couplage thermo-

mécanique fort qui requiert une modélisation spécifique dépendante de la nature temporelle du chargement.

Cette situation sort du cadre usuel des systèmes viscoélastiques puisque les variations des propriétés rhéologiques résultent à la fois de la température ambiante mais aussi de la dissipation interne non-homogène.

Dans les cas où ces effets ne sont que des petites perturbations de l'état élastique, on peut espérer qu'une analyse en perturbation pseudo-élastique fournirait une description raisonnable de la réalité. Si par contre les effets deviennent notables, ils induisent alors une non-linéarité de comportement (l'échauffement est quadratique) et l'analyse d'un tel essai est considérablement plus complexe. Elle ne pourrait être menée que dans le domaine temporel en traitant conjointement les aspects mécaniques et de conduction thermique avec source interne.

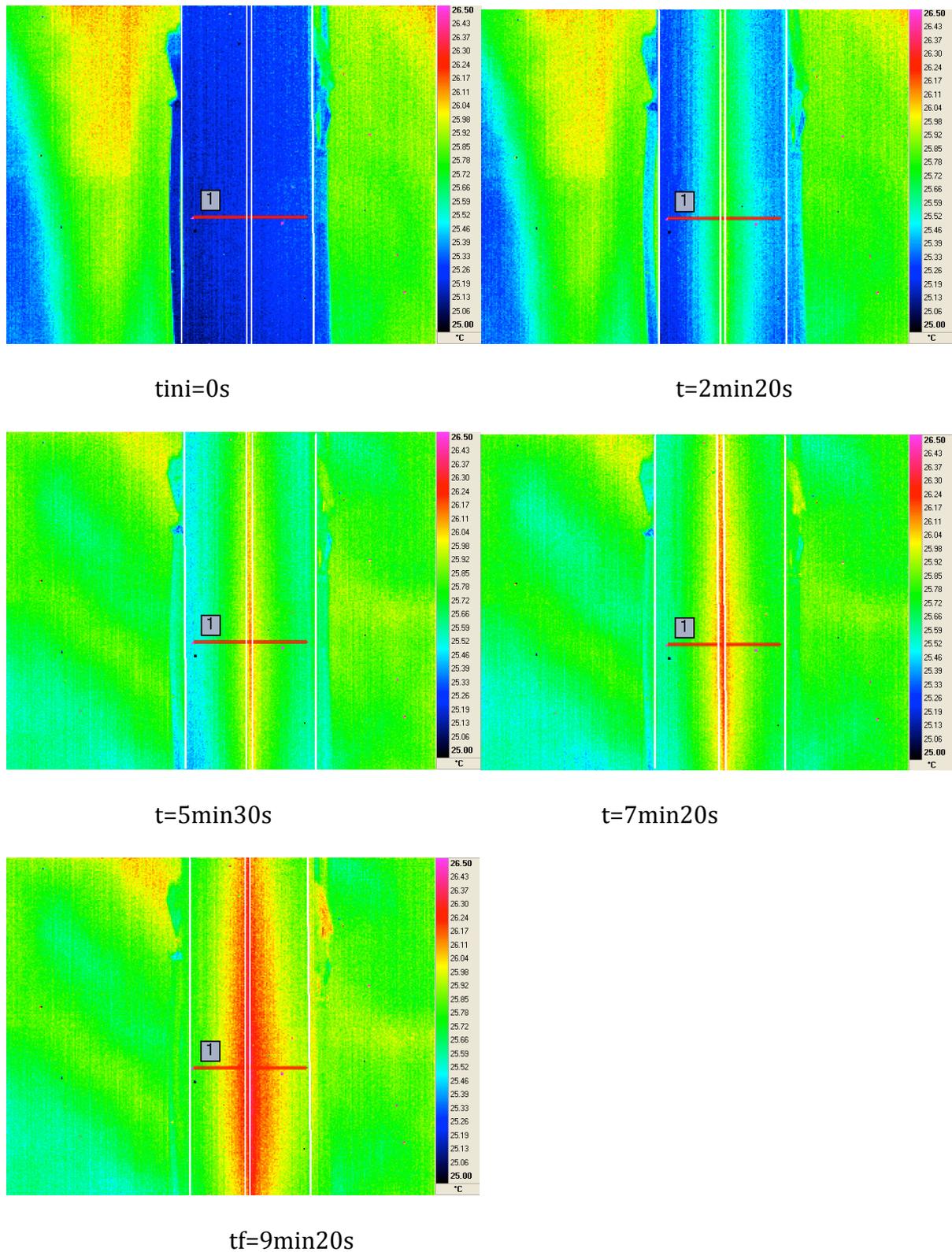


FIGURE 5.30 – Variation de la température de surface à mi-hauteur pour une consigne d'accélération  $a = 45m.s^{-2}$  à  $f_1 = 83Hz$ . Température initiale du PVB  $T = 25^{\circ}C$ . Température après 9 minutes et 20 secondes d'essai  $T = 26.5^{\circ}C$ .

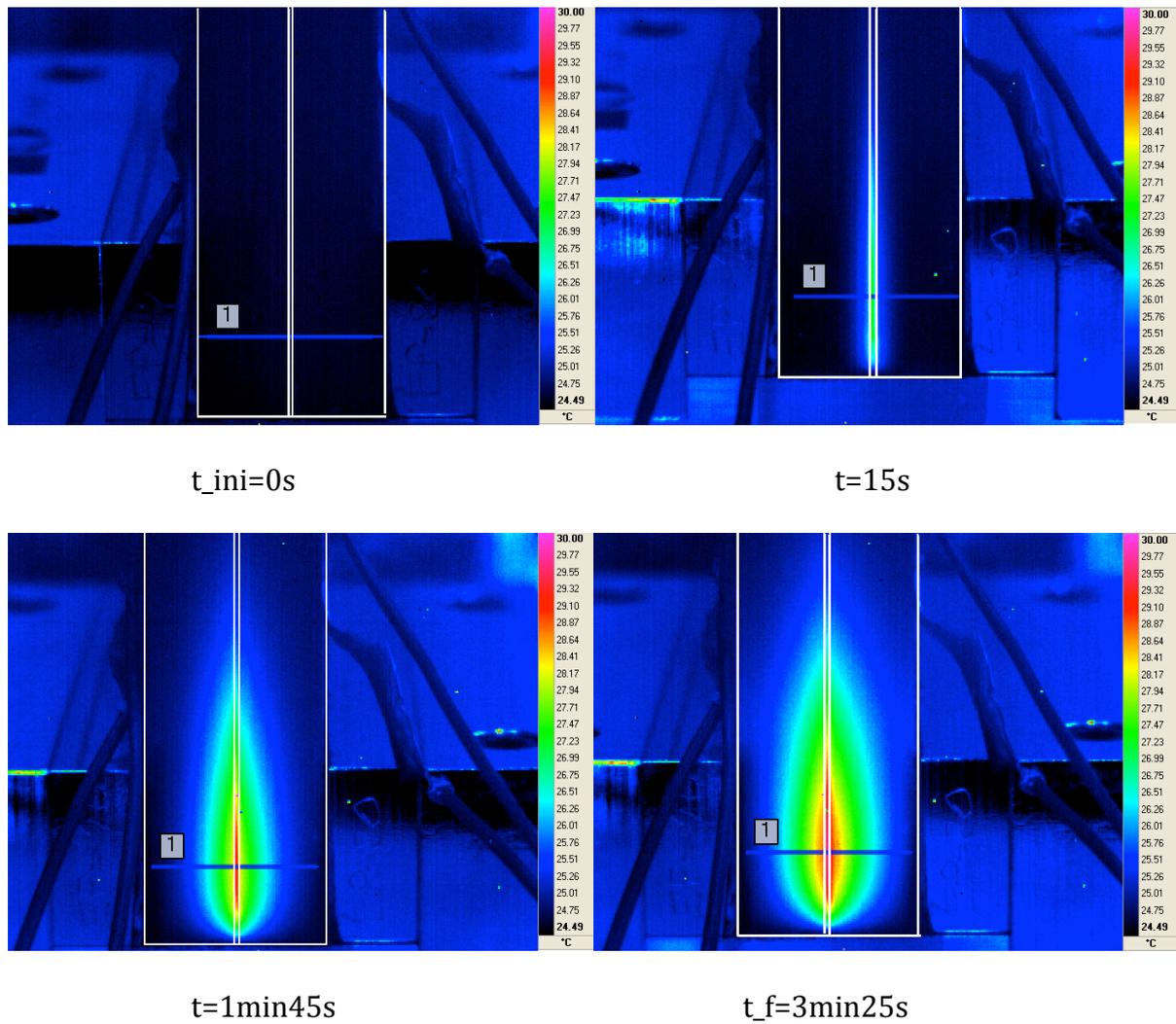


FIGURE 5.31 – Echauffement dans l'encastrement pour une consigne d'accélération  $a = 45m.s^{-2}$  à  $f_1 = 83Hz$ . Température initiale du PVB dans l'encastrement  $T = 25^{\circ}C$ . Température après 3 minutes et 25 secondes d'essai  $T = 30^{\circ}C$ .



---

 Dimensionnement d'un plancher de télécabine
 

---

**Résumé :**

Ce dernier chapitre est une application directe du modèle de plaques stratifiées à fort contraste pour le dimensionnement d'un plancher en verre feuilleté. On s'intéresse particulièrement à la résistance mécanique de la plaque, dont les caractéristiques géométriques (longueur, largeur, épaisseur des différentes couches) et mécaniques (type de traitement, série de PVB) sont fixés par le constructeur. En fonction du domaine d'utilisation, notamment du nombre de personne que le plancher doit accueillir, plusieurs géométries sont envisagées par le constructeur (seules les épaisseurs restent fixes). Dans cette partie, on considère que le plancher est destiné à équiper une télécabine suspendue, et on détermine sa résistance mécanique pour des cas de chargements défavorables (charge concentrée, conditions d'appuis simples aux bords). On détermine également pour ces cas de chargement et pour différentes géométries de plancher l'épaisseur des couches de verre à la limite de rupture afin d'en optimiser le ratio poids/performance mécanique.

**Sommaire**


---

<b>6.1</b>	<b>Verre feuilleté structurel . . . . .</b>	<b>161</b>
<b>6.2</b>	<b>Commande de planchers de télécabine . . . . .</b>	<b>165</b>
<b>6.3</b>	<b>Conditions réelles d'utilisation . . . . .</b>	<b>167</b>
<b>6.4</b>	<b>Modélisation retenue . . . . .</b>	<b>167</b>
<b>6.5</b>	<b>Vérification du dimensionnement proposé . . . . .</b>	<b>169</b>
<b>6.6</b>	<b>Optimisation : critère de dimensionnement . . . . .</b>	<b>171</b>
<b>6.7</b>	<b>Cas des planchers soumis à de faibles températures . . . . .</b>	<b>172</b>
<b>6.8</b>	<b>Influence d'une plaque supérieure brisée . . . . .</b>	<b>174</b>
<b>6.9</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>174</b>

---

**6.1 Verre feuilleté structurel**

Durant ces dernières années, l'utilisation du verre dans le domaine du bâtiment ou des ouvrages d'art s'est développée pour des raisons esthétiques, techniques et pratiques. En effet,

il offre la possibilité d'ériger des structures légères, et sa transparence permet aux utilisateurs de bénéficier de la lumière naturelle. L'objectif de cette partie est d'illustrer cette expansion avec des structures existantes, et particulièrement avec l'utilisation du verre feuilleté en tant que plancher de télécabines.

### 6.1.1 Structures existantes

Dans le domaine du bâtiment, le verre est utilisé aussi bien en tant qu'escalier, garde-corps ou plancher. Un des planchers les plus connus est le plancher en verre de la *CN Tower* (Figure 6.1) à Toronto. Il est constitué d'un assemblage de plusieurs plaques de verre feuilleté de 127x107 cm et d'une épaisseur totale de 6.35cm. Ces plaques sont surmontées d'une couche de verre trempé de protection, remplacée chaque année. Une fois par an, chaque plaque est soumise à un essai de charge pour en vérifier la sécurité.



FIGURE 6.1 – Plancher en verre de la *CN Tower* à Toronto (Canada)

L'utilisation du verre en tant qu'escalier ou garde-corps (Figure 6.2 et 6.3) est un peu plus développée, en partie dû au fait qu'au vu des charges appliquées, le dimensionnement des épaisseurs de verre est presque secondaire. En effet, une bonne maîtrise des conditions d'encastrement suffit à faire tenir la structure. Dans les deux cas, l'esthétisme du matériau est un critère de choix du constructeur.

Dans le domaine des ouvrages d'art, le verre feuilleté permet d'accéder à des panoramas exceptionnels. Un des exemples le plus cité est le *Grand Canyon Skywalk* (Figure 6.5), une



FIGURE 6.2 – Exemple d’escaliers opaques et garde-corps transparents en verre

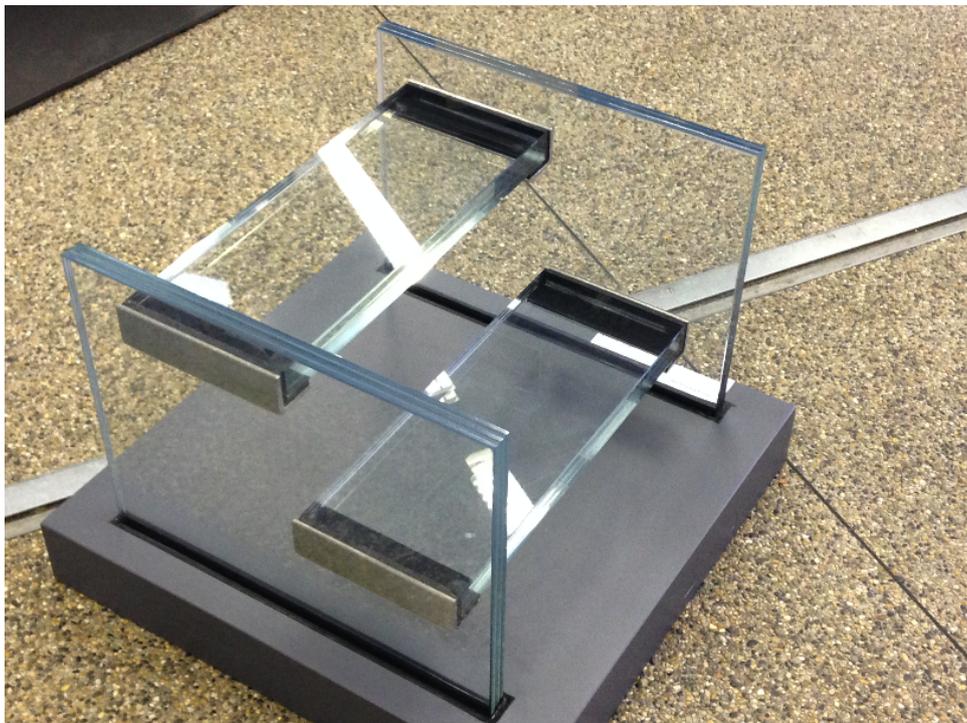


FIGURE 6.3 – Escaliers en verre blanc transparents et conditions d’encastrement par collage

passerelle horizontale en forme de fer à cheval au plancher de verre qui domine le lit du fleuve de plus de 1 200 mètres et qui dépasse de 21 mètres le bord du canyon. Les parois et le plancher sont constitués d’un verre feuilleté de 10.2 cm d’épaisseur totale. Le *Skywalk* est capable de

supporter plus de 74 tonnes.



FIGURE 6.4 – Le *Grand Canyon Skywalk* en Arizona (Etats-Unis)

Enfin, le matériau verre est également utilisé pour moderniser des structures plus anciennes mais emblématiques comme la *Tour Eiffel*. En 2014, des couloirs de verre d'une largeur de 2 mètres ont été installés au premier étage. Notons que le verre possède un revêtement anti-dérapant, ce qui limite sa transparence. Néanmoins, le compromis trouvé par l'entreprise *Glasolutions Austria*, spécialisée dans la transformation verrière permet tout de même à l'utilisateur de découvrir la structure en encorbellement du premier étage. Au droit de ces couloirs, des garde-corps en verre, transparents, de 2.65 mètre de hauteur et inclinés de  $17^\circ$  dans le vide permettent aux visiteurs de se pencher dans le vide.

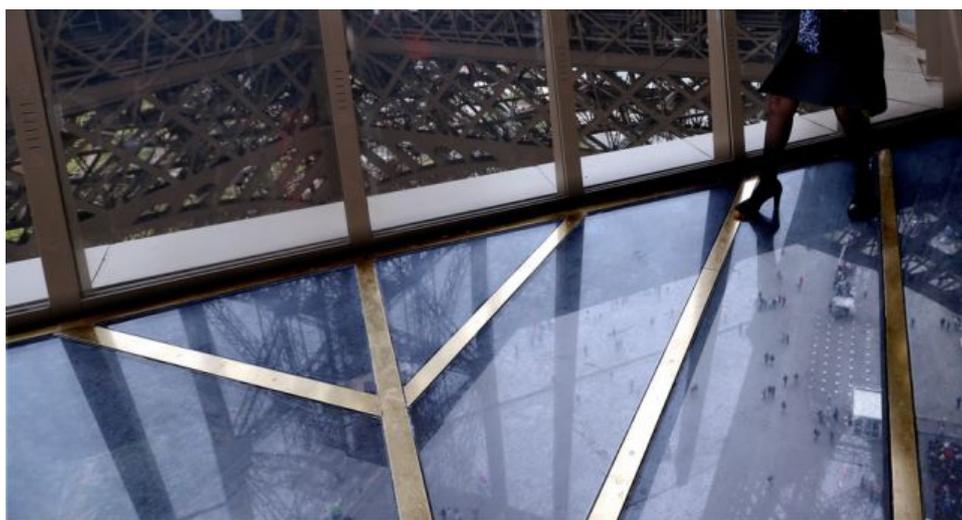


FIGURE 6.5 – Inauguration du plancher en verre du premier étage de la *Tour Eiffel* à Paris (France)

### 6.1.2 Cas des planchers de transports guidés

Les transports guidés (téléphériques, télécabines, funiculaires, ...) deviennent "tendance" comme moyens de déplacements en site urbain. Faibles emprises, débits élevés, coûts maîtrisés, expériences reconnues sont les arguments forts pour ces solutions. Les plus célèbres en circulation sont le téléphérique de Montjuïc de Barcelone (Espagne) et celui du Pain de Sucre à Rio (Brésil).

L'utilisation du verre en tant que plancher de ces structures est en plein essor et il existe aujourd'hui de nombreux projets en ce sens à travers le monde. Aujourd'hui, un industriel de la région Rhône-Alpes s'est vu attribuer un marché conséquent en Asie, visant à équiper une grande quantité de télécabines urbaines de plancher en verre. Les deux contractants trouvent un intérêt majeur à minimiser les dimensions des planchers sans qu'il n'y ait d'impact sur la tenue du plancher. D'un côté, un plancher plus léger permet d'augmenter la capacité d'accueil des télécabines (le poids de la cabine étant une des contraintes les plus importantes dans ce domaine). De l'autre, cela réduirait le coût de fabrication des planchers du point de vue du verrier. L'optimisation du ratio poids/performance mécanique fait la particularité de ce type de projet.

## 6.2 Commande de planchers de télécabine

On s'intéresse maintenant à deux planchers en verre feuilleté commandés à l'industriel mentionné plus haut. Dans ce chapitre, il est question d'étudier leur résistance à la rupture. Le premier plancher  $P_1$  a une capacité d'accueil de 5 personnes tandis que le plancher  $P_2$  est prévu pour accueillir 10 personnes. La Figure 6.6 détaille la géométrie plane de ces planchers.

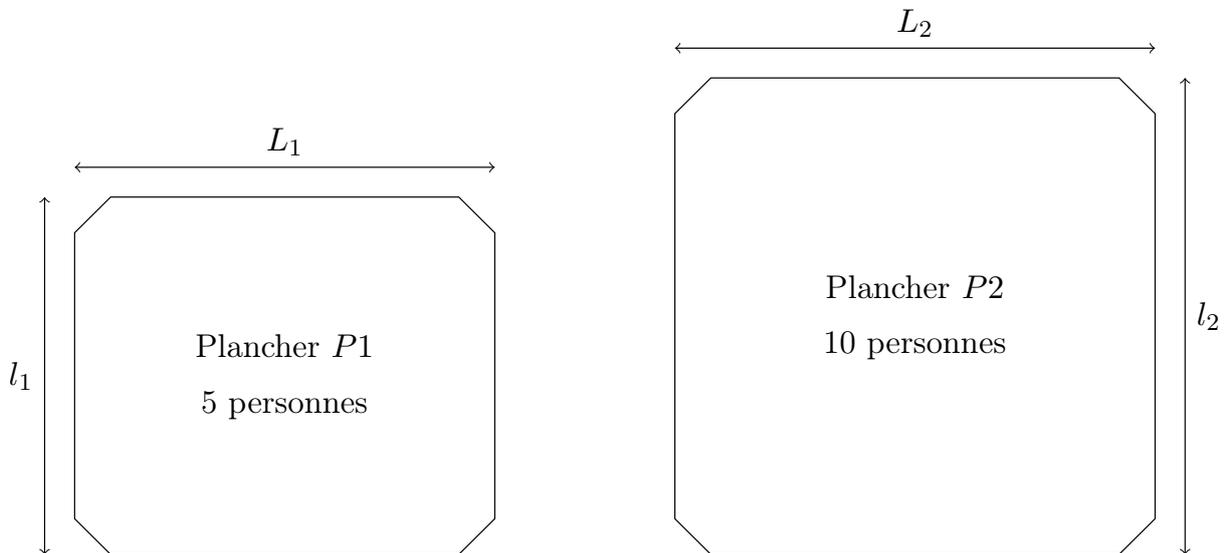


FIGURE 6.6 – Vue en plan des planchers  $P_1$  et  $P_2$  avec  $L_1=1.45\text{m}$  ,  $l_1=1.25\text{m}$  ,  $L_2=1.68\text{m}$  et  $l_2=1.6\text{m}$

Pour la suite de l'étude, on considérera un plancher à géométrie simplifiée, sans chanfrein (donc rectangulaire) de longueur  $L_i$  et de largeur  $l_i$  avec  $i = 1,2$ . Bien que les dimensions dans le plan soit différentes, la section des planchers  $P_1$  et  $P_2$  est identique (Figure 6.7). Ils sont chacun constitués de deux couches de verre trempé d'épaisseur  $h = 19\text{mm}$  liées par une couche de PVB

Série RB41 d'épaisseur  $c = 2.28\text{mm}$ . L'ensemble est surmonté d'une surcouche de verre trempé d'épaisseur  $h_s = 8\text{mm}$ . Pour la suite, on se placera dans la situation défavorable ou cette couche est considérée comme une simple surcharge répartie ne jouant aucun rôle structurel.

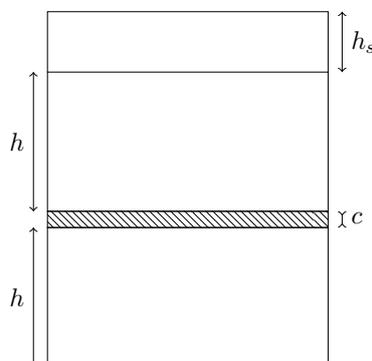


FIGURE 6.7 – Epaisseurs des couches des planchers  $P_1$  et  $P_2$  avec  $h = 19\text{mm}$ ,  $h_s = 8\text{mm}$  et  $c = 2.28\text{mm}$

Ainsi, les planchers sont considérés comme des plaques HCS symétriques à deux couches raides similaires à celles étudiées dans les Chapitre 2 et 3, dont les paramètres géométriques et mécaniques sont entièrement connus. En conséquence, les résultats théoriques seront directement repris et adaptés à la modélisation retenue dans la Section 6.9. Aussi, la Figure 6.8 issue du Chapitre 2 (on s'y reportera pour les calcul de  $p$  et  $q$ ) illustre les différents comportements des planchers  $P_1$  et  $P_2$  en fonction du module de cisaillement du PVB. Pour le plancher  $P_1$  on a  $q_1 = 0.3$  et  $p_1 = [-1.83; 1.34]$ . Pour le plancher  $P_2$  on a  $q_2 = 0.29$  et  $p_2 = [-1.68; 1.36]$ . Pour des questions de lisibilité, on retiendra  $q = 0.3$  et  $p = [-1.83; 1.36]$  pour chaque plancher.

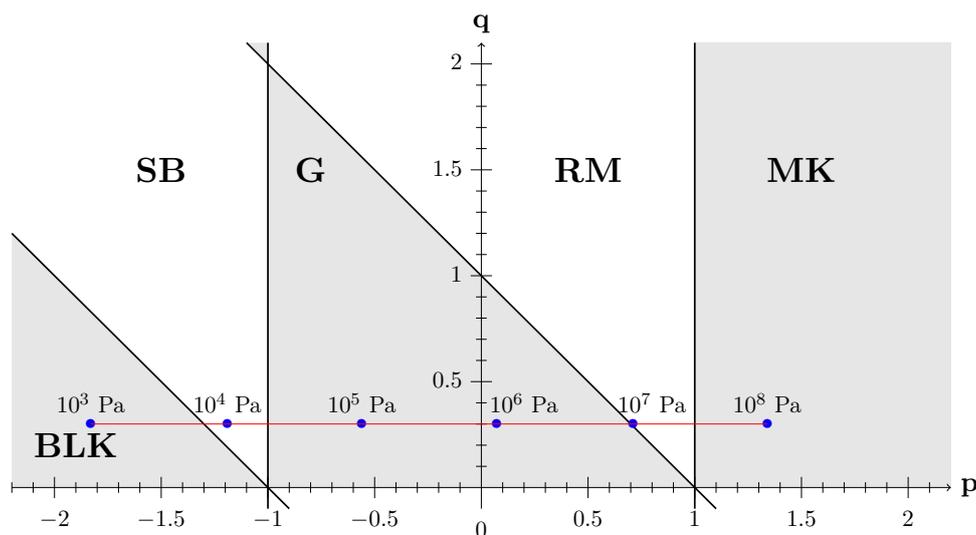


FIGURE 6.8 – Comportement des planchers  $P_1$  et  $P_2$  avec  $h = 19\text{mm}$ ,  $h_s = 8\text{mm}$  et  $c = 2.28\text{mm}$  en fonction du module de cisaillement du PVB (points bleu) compris entre  $10^3\text{ Pa}$  et  $10^8\text{ Pa}$ .

## 6.3 Conditions réelles d'utilisation

Ces planchers étant destinés à équiper des télécabines urbaines, ils sont soumis à différents paramètres extérieurs qui vont influencer sur leur comportement à chaque instant. L'objectif de cette section est de mettre en avant les conditions réelles d'utilisations afin d'identifier par la suite les cas les plus défavorables.

### 6.3.1 Chargements

Lorsqu'ils seront installés dans des télécabines en fonctionnement, les planchers seront soumis à plusieurs types de chargement. Tout d'abord, leurs dimensions sont suffisamment importantes pour que le poids propre soit pris en compte. On rappelle que la masse volumique du verre et du PVB valent respectivement  $\rho_v = 2500\text{kg/m}^3$  et  $\rho_c = 1080\text{kg/m}^3$ .

Ainsi, le poids propre considéré comme une charge surfacique vaut  $F_p = (\rho_v(2h + h_s) + \rho_c c)g$  avec  $g = 9.81\text{m/s}^2$ , soit pour les planchers  $P_1$  et  $P_2$  :

$$F_p = 1.15\text{kN/m}^2$$

Le poids des usagers est pris égal à 800N par personne. Le constructeur précise qu'il n'y a pas de siège dans les télécabines.

### 6.3.2 Assemblage à la structure

Le plancher en verre vient s'emboîter dans un cadre profilé laminé en aluminium. La liaison entre le cadre et le plancher est assurée par une mousse expansive qui vient remplir l'espace entre le plancher et le profilé laminé aluminium.

### 6.3.3 Température

Les conditions extérieures d'utilisation des télécabines suspendues ne sont pas spécifiées par le constructeur. Ainsi, on considère pour la suite une large plage de température allant de  $-20^\circ\text{C}$  à  $40^\circ\text{C}$ . Dans cette gamme, la température la plus haute permet de se placer dans la situation structurelle la plus défavorable, retenue pour la suite de l'étude.

## 6.4 Modélisation retenue

Les conditions réelles d'utilisation que nous venons de voir sont difficiles à mettre en place analytiquement, notamment les conditions limites plancher-cadre dont on ne maîtrise pas réellement les degrés de liberté. Ainsi, le chargement et les conditions limites sont modélisés de sorte que l'ensemble de la structure soit sollicité le plus défavorablement possible.

### 6.4.1 Conditions limites

L'utilisation de mousse expansive permettant la liaison entre le plancher en verre et le cadre en profilé aluminium complexifie la modélisation des conditions limites réelles. En effet, la mousse va d'abord permettre des déplacements hors-plan et dans le plan, avant d'être entièrement comprimée entre le plancher et le cadre et ainsi empêcher ces déplacements. Analytiquement, cette variation de condition limite n'est pas prise en compte. Ainsi, on considère que le plancher

est en appui simple sur le cadre, ce qui limite la reprise d'efforts et de moments par les conditions de liaison.

### 6.4.2 Chargement et température

Dans la Section 6.3.1, deux chargements statiques ont été mis en avant : le poids propre du plancher, et la charge liée aux usagers. Le poids propre est une charge connue, aussi bien dans l'application que dans l'intensité. Les charges de service (poids des usagers principalement) peuvent être estimées en intensité mais leurs points d'application sont indéterminés.

**Poids propre** Il est modélisé par une charge linéique cylindrique qui s'applique sur toute la longueur (voir l'étude du cas de la flexion cylindrique sous charge linéique dans le Chapitre 3). Il vaut pour le plancher  $P_1$  pouvant accueillir 5 personnes

$$q_1 = F_P * l_1 = 1.44kN/m$$

et pour le plancher  $P_2$  pouvant accueillir 10 personnes

$$q_2 = F_P * l_2 = 1.84kN/m$$

**Poids des usagers** Devant la difficulté à modéliser la disposition aléatoire des usagers, on considère le cas défavorable où cette charge est appliquée selon l'axe de symétrie du plancher dans sa plus grande portée. En conséquence, cette charge sollicite le plancher en flexion cylindrique trois points, symétrique (Section 3.1.1). On retient que le poids moyen d'un usager est de 800N, par conséquent les charges appliquées au plancher  $P_1$  et  $P_2$  sont respectivement :

$$F_1 = 4kN \quad \text{et} \quad F_2 = 8kN$$

**Conditions extérieures de température et modèle de plaque** On rappelle que, en l'absence de donnée sur les plages d'utilisation, la température retenue pour la suite de l'étude est  $T = 40^\circ\text{C}$ . A cette température, le module de cisaillement tend vers ses valeurs très faibles soit  $|G| \simeq 10^4 \text{ Pa}$ , ce qui correspond à un comportement de type "plaque sandwich" d'après la Figure 6.8. Cependant, pour des questions de sécurité, on retiendra que le comportement du plancher tend vers un comportement de plaque "bi-couche" de Kirchhoff, modèle acceptant des efforts avant rupture les plus faibles.

### 6.4.3 Schéma de la modélisation retenue

Pour la suite de l'étude, on considère donc deux plaques  $P_1$  et  $P_2$  bi-appuyées, sollicitées par une charge répartie modélisant le poids propre ainsi que le poids de la surcouche de protection et une charge ponctuelle à mi-travée modélisant le poids des usagers, dont les intensités varient en fonction de la capacité d'accueil du plancher. La Figure 6.9 résume la modélisation retenue en terme d'efforts appliqués et de conditions limites.

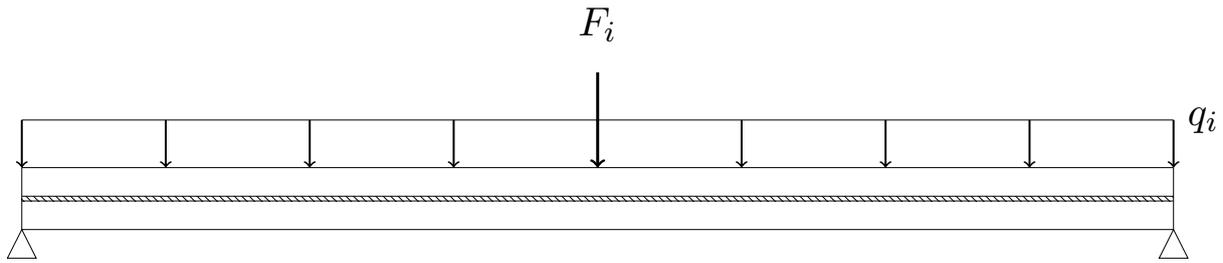


FIGURE 6.9 – Modélisation retenue pour l'étude des planchers en verre feuilleté avec  $i = 1$  pour le planche  $P_1$  et  $i = 2$  pour le plancher  $P_2$ .

Cette configuration est considérée comme la plus défavorable structurellement et permet de vérifier la résistance mécanique des deux planchers sans prise en compte d'éventuels coefficients de sécurité.

## 6.5 Vérification du dimensionnement proposé

Dans cette section, les calculs des efforts et des déplacements ne sont pas développés et les résultats sont tirés du Chapitre 2.

Pour l'étude du comportement du plancher, on applique le principe de superposition des efforts, soit un comportement d'ensemble qui est somme du comportement du plancher  $P_i$  sous la charge  $F_i$  et de son comportement sous la charge linéique  $q_i$ .

L'objectif de cette section est d'exprimer les déformations maximales sous ses chargements, à  $T = 40^\circ\text{C}$  et de les comparer avec les déformations maximales autorisées par le verre trempé avant rupture.

### 6.5.1 Rappel des déformations induites sous flexion trois points

Comme vu dans le Chapitre 2, la section la plus déformée est la section à mi-travée. On s'intéresse donc à la déformation de cette section. Sous l'effort  $F_i$  de flexion 3 points symétrique, on rappelle (Section 3.1.2) qu'elle s'écrit :

$$\varepsilon_{F_i, \pm}(y) = -\frac{\nu_s}{1 - \nu_s} \frac{F_i L_i}{8E'_s I_i} \left(-y \pm \frac{h + c}{2}\right) \quad (6.1)$$

où l'indice "+" (resp. "-") dénote les déformations dans la couche raide supérieure (resp. inférieure) avec  $y \in [-h - \frac{c}{2}; h + \frac{c}{2}]$ . On rappelle que  $E'_s = 74.6\text{GPa}$  est le module d'Young réduit du verre, que  $\nu_s = 0.25$  son coefficient de Poisson, et que  $I_i = \frac{l_i h^3}{12}$  est l'inertie de section d'une couche de verre d'épaisseur  $h$ .

### 6.5.2 Déformations induites sous charge répartie

Déterminons les déformations induites par le poids des usagers et de la couche de protection, non déterminée dans les chapitres précédents pour ce type de chargement. Pour cela, on revient à la définition de la déformée d'une section qui s'exprime en tout point de la plaque de verre feuilleté en fonction de la flèche  $W_{q_i}(x)$  et  $\alpha_{q_i}(x)$  pour  $x \in [-\frac{L_i}{2}; \frac{L_i}{2}]$  et  $y \in [-h - \frac{c}{2}; h + \frac{c}{2}]$  :

$$\varepsilon_{q_i}(x,y) = -\frac{\nu_s}{1-\nu_s} \left( -\phi_W(y)W''_{q_i}(x) + \phi_D(y)\frac{h+c}{2} (W''_{q_i}(x) - \alpha'_{q_i}(x)) \right) \quad (6.2)$$

où l'on rappelle les fonctions de forme :

$$\phi_W(y) = y \quad \text{et} \quad \phi_D(y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y \in [\frac{c}{2}; h + \frac{c}{2}] \\ \frac{2y}{c} & \text{pour } y \in [-\frac{c}{2}; \frac{c}{2}] \\ -1 & \text{pour } y \in [-h - \frac{c}{2}; -\frac{c}{2}] \end{cases}$$

Le tableau récapitulatif des cinématiques sous différents cas de charge de la Section 3.2 rappelle les expressions des champs  $W_{q_i}(x)$  et  $\alpha_{q_i}(x)$ . Pour notre cas d'étude, dans les conditions de température défavorable, leurs dérivées se simplifient pour tout  $x \in [-\frac{L_i}{2}; \frac{L_i}{2}]$  :

$$W''_{q_i}(x) = -\frac{q_i L_i^2}{2E'_s I_i} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L_i} \right)^2 - \frac{1}{8} \right)$$

$$\alpha'_{q_i}(x) = 0$$

Ainsi, dans les couches verres supérieure "+" et inférieure "-", la déformation de la section sous charge répartie  $q_i$  s'écrit :

$$\varepsilon_{q_i,\pm}(x,y) = -\frac{\nu_s}{1-\nu_s} \left( -y \pm \frac{h+c}{2} \right) W''_{q_i}(x) \quad (6.3)$$

soit à mi-travée ( $x = 0$ ) :

$$\varepsilon_{q_i,\pm}(0,y) = -\frac{\nu_s}{1-\nu_s} \frac{q_i L_i^2}{16E'_s I_i} \left( -y \pm \frac{h+c}{2} \right) \quad (6.4)$$

### 6.5.3 Principe de superposition et maximum de déformation

Dans les conditions d'utilisation du plancher en verre feuilleté, le rôle structural de la couche d'interface est négligé. Ainsi, le comportement du stratifié est celui de deux couches de verres superposées. Le verre étant un matériau linéaire, on détermine les déformations totales de la section à mi-travée en appliquant le principe de superposition des efforts : les déformations totales sont égales à la somme des déformations dues au chargement ponctuel  $F_i$  et des déformations induites par la charge linéique  $q_i$ .

Par conséquent, on peut exprimer les déformations totales en tout point de la section  $x = 0$  :

$$\varepsilon_{toti,\pm}(0,y) = -\frac{\nu_s}{1-\nu_s} \frac{L_i}{8E'_s I_i} \left( F_i + \frac{q_i L_i}{2} \right) \left( -y \pm \frac{h+c}{2} \right) \quad (6.5)$$

Ces déformations sont maximales en fibre supérieure (compression maximale) et inférieure (traction maximale) de chaque couche de verre. La déformation maximale en traction s'écrit pour la couche inférieure (indice "-") :

$$\varepsilon_{maxi}(0, -h - \frac{c}{2}) = -\frac{\nu_s}{1-\nu_s} \frac{L_i}{8E'_s I_i} \left( F_i + \frac{q_i L_i}{2} \right) \frac{h}{2} \quad (6.6)$$

### 6.5.4 Applications numériques aux planchers P1 et P2

Pour calculer la déformation des planchers P1 et P2 en situation réelle d'utilisation, on rappelle les caractéristiques mécaniques du verre feuilleté :

$$E'_s = \frac{E_s}{(1 - \nu_s)^2} = 74.6 \text{ GPa} \quad \text{avec} \quad \nu_s = 0.25$$

On rappelle également les caractéristiques géométriques de chacun des planchers et des chargements à prendre en compte pour notre modélisation de poutre bi-appuyée :

$$P1 = \begin{cases} L_1 = 1.45\text{m} \\ l_1 = 1.25\text{m} \\ F_1 = 4\text{kN} \\ q_1 = 1.44\text{kN/m} \end{cases} ; \quad P2 = \begin{cases} L_2 = 1.68\text{m} \\ l_2 = 1.60\text{m} \\ F_2 = 8\text{kN} \\ q_2 = 1.84\text{kN/m} \end{cases}$$

De plus, les couches de verre ont la même épaisseur  $h = 19\text{mm}$ . L'inertie de section de chaque plancher est  $I_1 = \frac{l_1 h^3}{12} = 7.14 * 10^{-7} \text{m}^4$  et  $I_2 = \frac{l_2 h^3}{12} = 9.15 * 10^{-7} \text{m}^4$

L'application numérique de la formule (6.6) exprimant la déformation maximale en extension (fibre inférieure) de la couche inférieure donne pour chaque plancher :

$$|\varepsilon_{max,1}| = 54.4 \mu\text{def} \quad ; \quad |\varepsilon_{max,2}| = 80.3 \mu\text{def}$$

Dans le Chapitre 5, la limite de déformation en extension du verre trempé est exprimée par la formulation 5.6 que l'on rappelle ici :

$$|\varepsilon_{n,r}| = 1880 \mu\text{def}$$

Ainsi, les planchers P1 et P2 sont largement dimensionnés pour ne pas rompre dans les conditions d'utilisation les plus défavorables. En conséquence l'épaisseur de verre pourrait être diminuée sans pour autant que le plancher n'atteigne cette limite de rupture.

## 6.6 Optimisation : critère de dimensionnement

L'objectif de cette section est de déterminer l'épaisseur théorique minimale des couches de verre trempé pour chaque plancher telle que le plancher ne rompe pas.

On rappelle que la charge linéique  $q_i$  vaut en fonction de  $h_i$  :

$$q_i = (\rho_v(2h_i + h_s) + \rho_c c) g l_i$$

En l'introduisant sous cette forme et en exprimant l'inertie de section  $I_i$ , la formulation (6.6) s'écrit en fonction de l'épaisseur  $h_i$  du plancher  $P_i$  :

$$\varepsilon_{max_i}(0, -h - \frac{c}{2}) = -\frac{\nu_s}{1 - \nu_s} \frac{3L_i}{4E'_s l_i} \left( F_i + (\rho_v(2h_i + h_s) + \rho_c c) g l_i \frac{L_i}{2} \right) \frac{1}{h_i^2} \quad (6.7)$$

On souhaite que cette déformation soit inférieure à la limite de rupture en extension du verre trempé, soit :

$$|\varepsilon_{max_i}(0, -h - \frac{c}{2})| < |\varepsilon_{n,r}|$$

Une résolution numérique donne pour les planchers  $P_1$  et  $P_2$  :

$$h_1 > 3.0\text{mm} \quad \text{et} \quad h_2 > 4.0\text{mm} \quad (6.8)$$

Ainsi, le modèle de plaque dégénéré du modèle de plaque HCS montre que l'épaisseur des couches de verre trempé du plancher  $P_1$  pourrait théoriquement être divisée par 6 avant que le chargement le plus défavorable implique une rupture du plancher. Pour le plancher  $P_2$ , plus long, plus large, et pouvant accueillir deux fois plus de passagers, l'épaisseur peut être divisée par 4.5. Il est clair qu'une telle réduction ne respecterait pas les critères de sécurité (par exemple, seul un chargement statique est considéré, mais la dynamique du passager en mouvement accroît la charge). Cependant, cet exemple montre qu'une épaisseur réduite de moitié serait encore suffisante pour un fonctionnement sûr.

## 6.7 Cas des planchers soumis à de faibles températures

Cette section reprend les différents calculs de la section précédente pour des planchers soumis à de faibles températures, comme cela pourrait être le cas dans des stations de haute montagne. L'objectif ici est de montrer l'influence de la température sur le dimensionnement des planchers. On se place à  $T = 0^\circ\text{C}$ , soit un module de cisaillement  $|G| \simeq 10^8\text{Pa}$  par conséquent le modèle retenu est donc un modèle monolithique de Kirchhoff MK (voir Figure 6.8). Afin de comparer les deux cas  $T = 40^\circ\text{C}$  et  $T = 0^\circ\text{C}$ , on fait l'hypothèse que la dilatation thermique du verre est absorbée par les joints en mousse, bien plus souple que le verre.

### 6.7.1 Rappel des déformations induites sous flexion trois points

Un fois encore, la section la plus déformée est la section à mi-travée et sa déformation sous un effort ponctuel  $F_i$  s'écrit (voir Section 3.1.2) :

$$\varepsilon_{F_i}(y) = \frac{\nu_s}{1 - \nu_s} \frac{F_i L_i}{4E'_s \mathcal{I}_i} y \quad (6.9)$$

$$\text{avec } \mathcal{I}_i = 2I_i + \frac{h_i(h_i+c)^2}{2}.$$

### 6.7.2 Déformations induites sous charge répartie

Les déformations induites par le poids des usagers et de la couche de protection s'exprime toujours en tout point de la plaque de verre feuilleté en fonction de la flèche  $W_{q_i}(x)$  et  $\alpha_{q_i}(x)$  pour  $x \in [-\frac{L_i}{2}; \frac{L_i}{2}]$  et  $y \in [-h - \frac{c}{2}; h + \frac{c}{2}]$  :

$$\varepsilon_{q_i}(x,y) = -\frac{\nu_s}{1 - \nu_s} \left( -\phi_W(y) W''_{q_i}(x) + \phi_D(y) \frac{h+c}{2} (W''_{q_i}(x) - \alpha'_{q_i}(x)) \right) \quad (6.10)$$

où l'on rappelle les fonctions de forme :

$$\phi_W(y) = y \quad \text{et} \quad \phi_D(y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y \in [\frac{c}{2}; h + \frac{c}{2}] \\ \frac{2y}{c} & \text{pour } y \in [-\frac{c}{2}; \frac{c}{2}] \\ -1 & \text{pour } y \in [-h - \frac{c}{2}; -\frac{c}{2}] \end{cases}$$

Dans le cas d'une modélisation monolithique, leurs dérivées se simplifient :

$$W_{q_i}''(x) = \alpha'_{q_i}(x) = -\frac{q_i L_i^2}{2E'_s \mathcal{I}_i} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L_i} \right)^2 - \frac{1}{8} \right)$$

Ainsi la déformation de la section sous charge répartie  $q_i$  s'écrit :

$$\varepsilon_{q_i}(x, y) = \frac{\nu_s}{1 - \nu_s} W_{q_i}''(x) y \quad (6.11)$$

soit à mi-travée ( $x = 0$ ) :

$$\varepsilon_{q_i}(0, y) = \frac{\nu_s}{1 - \nu_s} \frac{q_i L_i^2}{8E'_s \mathcal{I}_i} y \quad (6.12)$$

### 6.7.3 Principe de superposition et maximum de déformation

Avec les mêmes hypothèses que pour la section précédente, on applique le principe de superposition : les déformations totales sont égales à la somme des déformations dues au chargement ponctuel  $F_i$  et des déformations induites par la charge linéique  $q_i$ .

Par conséquent, on peut exprimer les déformations totales en tout point de la section  $x = 0$  :

$$\varepsilon_{tot_i}(0, y) = \frac{\nu_s}{1 - \nu_s} \frac{L_i}{4E'_s \mathcal{I}_i} \left( F_i + \frac{q_i L_i}{2} \right) y \quad (6.13)$$

Ces déformations sont maximales en fibre supérieure (compression maximale) et inférieure (traction maximale) du plancher. La déformation maximale en traction s'écrit :

$$\varepsilon_{max_i}(0, -h - \frac{c}{2}) = \frac{\nu_s}{1 - \nu_s} \frac{L_i}{4E'_s \mathcal{I}_i} \left( F_i + \frac{q_i L_i}{2} \right) \left( -h - \frac{c}{2} \right) \quad (6.14)$$

### 6.7.4 Applications numériques aux planchers P1 et P2

Les caractéristiques géométriques et mécaniques des matériaux des planchers restent identiques à ceux de la section précédente. L'inertie globale  $\mathcal{I}_i$  de section de chaque plancher est  $\mathcal{I}_1 = 6.81 * 10^{-6} m^4$  et  $\mathcal{I}_2 = 8.71 * 10^{-6} m^4$

L'application numérique de la formule (6.14) exprimant la déformation maximale en extension (fibre inférieure) donne pour chaque plancher :

$$|\varepsilon_{max,1}| = 24.2 \mu\text{def} \quad ; \quad |\varepsilon_{max,2}| = 41.4 \mu\text{def}$$

Une fois encore, nous sommes loin de la déformation maximale du verre en extension  $|\varepsilon_{n,r}| = 1880 \mu\text{def}$ . Les déformations obtenues sont plus faibles que dans le cas des hautes températures (cas le plus défavorables). Par conséquent, on voit que le facteur température est un des critères dimensionnant si le constructeur souhaite optimiser le ratio poids/performance mécanique de son plancher.

Dans le cas des basses températures, l'épaisseur des plaques de verre pourraient largement être diminuées sans pour autant que le plancher n'atteigne sa limite de rupture.

## 6.8 Influence d'une plaque supérieure brisée

Nous venons de voir qu'à haute ou basse température, les planchers  $P_1$  et  $P_2$  sont largement dimensionnés. Intéressons-nous maintenant à son comportement si une plaque de verre du stratifié venait à rompre. On fait l'hypothèse que cette plaque ne joue plus aucun rôle mécanique, mais qu'elle représente une simple charge tout comme la plaque de protection du plancher (dans le cas où ce serait la plaque inférieure, on considère que c'est le PVB qui transmet la charge à la plaque supérieure). Néanmoins, le poids de la plaque brisée étant déjà inclus dans la charge linéique  $q_i$ , les charges appliquées au plancher ne change pas.

On applique ainsi le modèle monolithique utilisé dans la section précédente dans les conditions de faibles températures. Cependant, il est nécessaire d'adapter les inerties  $\mathcal{I}_i$ . En effet, l'inertie globale de section est maintenant équivalente à l'inertie locale d'une seule plaque, soit :

$$\mathcal{I}_1 = I_1 = 7.14 * 10^{-7} \text{m}^4 \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_2 = I_2 = 9.15 * 10^{-7} \text{m}^4$$

Dans ces conditions, la formule (6.14) devient :

$$\varepsilon_{max_i}(0, -h - \frac{c}{2}) = \frac{\nu_s}{1 - \nu_s} \frac{L_i}{4E'_s I_i} \left( F_i + \frac{q_i L_i}{2} \right) \left( -\frac{h}{2} \right) \quad (6.15)$$

et son application numérique donne :

$$|\varepsilon_{max,1}| = 108.1 \mu\text{def} \quad ; \quad |\varepsilon_{max,2}| = 186.0 \mu\text{def}$$

Ainsi, même après une rupture de la plaque supérieure du plancher et en faisant l'hypothèse forte que cette dernière ne joue plus aucun rôle mécanique, il subsiste une réserve de sécurité importante puisqu'une fois encore les valeurs obtenues des déformations maximales en extension sont loin de la limite de rupture  $|\varepsilon_{n,r}| = 1880 \mu\text{def}$ .

## 6.9 Conclusion

L'objectif global de ce chapitre était d'étudier le dimensionnement d'un plancher de télécabine suspendue en verre feuilleté en fonction des conditions d'utilisation et d'en optimiser le ratio poids/performance mécanique. Pour cela, deux cas réels ont été étudiés dans les conditions les plus défavorables : charge des usagers concentrée, température élevée, conditions limites d'appuis simples, rôle structurel de la couche de protection négligé.

Le modèle dégénéré du modèle HCS montre que les deux planchers étudiés sont surdimensionnés et que les épaisseurs peuvent être largement réduites (rapport théorique de 6 pour le plancher  $P_1$  et de 4.5 pour le plancher  $P_2$ ). Bien que le calcul de ces épaisseurs soit mené dans les conditions d'utilisation de la télécabine les plus défavorables mécaniquement, aucun coefficient de sécurité n'a été intégré au calcul, ni sur les charges, ni sur la limite de rupture. De plus, les incertitudes de la géométrie ont été négligées. Les normes de dimensionnement ne précisant pas ces coefficients de sécurité, le constructeur devra prendre cette initiative, en s'appuyant no-

tamment sur les normes utilisées dans d'autres domaines où le verre est utilisé comme que le bâtiment.

Dans le cas où ces planchers seraient utilisés dans un environnement à basse température, les calculs des déformations montrent que cette différence de température peut influencer sur le dimensionnement des planchers. En revanche, même si cette influence est notable, les déformations des planchers tels qu'ils sont proposés par les constructeurs sont loin de la limite à la rupture.

Enfin, on montre également que même si une des plaques de verre venait à se briser, il persiste encore une réserve de sécurité importante permettant au plancher de ne pas rompre totalement. Nous avons réalisé des essais en laboratoire montrant qu'il subsiste une résistance mécanique de la part de la plaque brisée, probablement due au frottement entre les morceaux de verre restants en place grâce au PVB. Pour une meilleure estimation de la résistance qui subsiste dans ce cas de rupture partielle du plancher, il conviendrait d'affiner cette donnée et de l'intégrer au modèle.



## Synthèse

Les développements de cette thèse ont conduit à la construction d'un modèle asymptotique décrivant le comportement d'une plaque stratifiée à composants élastiques et viscoélastiques (plaques HCS). L'approche asymptotique combinée à l'introduction d'un fort contraste de rigidité entre les constituants ont fourni un cadre de travail permettant d'analyser le comportement dans le plan et hors plan.

L'essentiel des travaux porte sur l'étude des plaques stratifiées symétriques constituées de deux couches externes rigides élastiques et d'une couche centrale souple viscoélastique. L'approche asymptotique, sous l'hypothèse fondamentale de séparation d'échelle, qui suppose que la taille caractéristique  $L$  d'évolution d'un phénomène dans le plan de la plaque est bien supérieure à l'épaisseur  $h$  de la plaque ( $\varepsilon = \frac{h}{L} \ll 1$ ), permet de bâtir les cinématiques internes et d'accéder ainsi au comportement de ce type de plaque.

La méthode employée fournit une formulation rigoureuse et synthétique incluant et explicitant les différents mécanismes locaux et globaux de flexion et de cisaillement. Sa construction permet de définir le domaine de validité du modèle complet Tri-Laplacien de plaque HCS et de ses formes dégénérés Bi-Laplacienne (telles que les plaques de Reissner-Mindlin ou les plaques "sandwich" de flexion-cisaillement), en fonction des propriétés géométriques et mécaniques de chacune des couches et du chargement de la plaque.

Le rapport d'ordre  $\varepsilon^2$  entre les rigidités des couches externes et de la couche centrale joue un rôle déterminant dans notre approche. En effet, la formulation mathématique exprime que, physiquement, l'effort de cisaillement résultant de la distorsion de la couche souple et du même ordre de grandeur que l'effort de cisaillement résultant de la flexion des couches rigides, *indépendamment* du rapport d'échelle  $\varepsilon$ . Par conséquent, les deux effets apparaissent nécessairement dans le modèle établi à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . De plus, en considérant les épaisseurs des couches du même ordre de grandeur, l'inertie globale de la plaque et les inerties des couches le sont également et les effets de flexion locale et globale persistent dans le modèle. Cela explique en quoi le modèle généralisé diffère du modèle de Kirchhoff, erroné, qui serait obtenu en homogénéisant la plaque sans mise à l'échelle, puis en rendant la rigidité centrale  $\mu_c$  nulle. En effet, dans cette approche "non mise à l'échelle", l'effet de cisaillement est *éliminé* lors du passage à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  et impossible à retrouver ensuite en imposant  $\mu_c \rightarrow 0$ . Inversement, comme tout les mécanismes

sont impliqués dans notre modèle généralisé, on peut en déduire un modèle simplifié en prenant différentes limites des paramètres.

La formulation obtenue définit les efforts duaux des descripteurs macroscopiques (équations constitutives), les équations d'équilibres régissant le comportement hors-plan et dans le plan et les différentes lois de comportements du stratifié. Aussi, l'intégration des effets viscoélastiques dans le modèle HCS ne complexifie pas la résolution des équations d'équilibres.

Cette méthode a été généralisée aux plaques stratifiées symétriques à  $N$  couches rigides. La formulation synthétique du modèle obtenu présente les caractéristiques suivantes :

- la cinématique complète de la plaque est composée d'un descripteur cinématique hors-plan (la déflexion) et de  $N - [N/2]$  et  $[N/2]$  descripteurs cinématiques dans le plan associés à des fonctions de forme respectivement antisymétriques et symétriques ;
- en parallèle de cette cinématique enrichie, des nouveaux torseurs d'efforts duaux ayant une signification physique claire sont identifiés ;
- les équations d'équilibre correspondantes sont systématiquement séparées en i)  $N + 1 - [N/2]$  équations couplées régissant le comportement hors-plan de la plaque et impliquant la déflexion et les descripteurs "antisymétriques", et ii)  $[N/2]$  équations différentielles du second ordre découplées, régissant le comportement dans le plan de la plaque et impliquant cette fois les descripteurs "symétriques" ;
- les paramètres effectifs des lois de comportement explicitement liés aux paramètres géométriques et mécaniques des constituants ;
- le modèle proposé englobe de manière rigoureuse et cohérente les mécanismes globaux et locaux de cisaillement et de flexion. En conséquence, le modèle peut dégénérer en modèle de plaque de Reissner-Mindlin ou en modèle de plaques de cisaillement, en fonction des paramètres de la plaque HCS considérée.

Cette formulation est adaptée pour modéliser des plaques stratifiées avec des constituants viscoélastiques. En particulier, elle permet de prouver que le principe de superposition temps-température du PVB s'applique également, avec le même facteur de temps, au verre feuilleté en régime quasi-statique. Cependant, en raison de l'interaction du PVB avec les couches de verre élastiques, ni la fonction fluage ni celle de relaxation du PVB ne peuvent être transposées directement au verre feuilleté.

Une étude dynamique des plaques HCS symétriques à deux couches raides a également été menée. Grâce à la méthode de Cardan, nous avons montré dans le cas d'oscillations libres qu'il existe un mode propagatif oscillant et deux modes évanescents sans oscillation. Ensuite, l'application des conditions limites pour une plaque encastrée-libre a permis de préciser les différents champs cinématiques dans la plaque. La détermination des fréquences et déformées propres est lourde et se complexifie dans le cas d'une plaque à constituant viscoélastique. En effet, le module de cisaillement du PVB varie en fonction de la fréquence de sollicitation, or celle-ci est fonction du même module. Ainsi, un système itératif est mis en place pour affiner les calculs.

La comparaison avec les modes des modèles dégénérés montre que les fréquences fondamentales du modèle Tri-Laplacien tendent bien vers celles des modèles monolithique et bicouche pour des températures extrêmes. De plus, elle confirme que ce modèle complet est nécessaire sur une grande plage de température (de 15 à 45°C), bien que les modèles classiques de Reissner-

Mindlin et de Flexion/Cisaillement suffisent à décrire le comportement dynamique de la plaque en dehors de cette plage malgré leur divergence rapide.

Afin de valider le modèle Tri-Laplacien de plaque HCS symétrique, une campagne expérimentale a été menée sur des plaques de verre feuilleté. Dans le domaine statique, les expériences réalisées sur du verre feuilleté à deux et trois couches de verre sont en bon accord qualitatif et quantitatif avec les prédictions théoriques. Les essais de fluage en flexion démontrent clairement le passage du comportement (quasi)-monolithique aux des temps courts au comportement (quasi)-bi-couches à long terme. L'influence de la température et de la fréquence est également bien identifiée. Ces données expérimentales sont facilement interprétables en terme de formulation bi-torsorielle et de descripteurs cinématiques correspondants.

Les essais dynamiques sur table vibrante avaient pour objectif de retrouver les caractéristiques dynamiques du verre feuilleté telles que les fréquences propres et les déformées modales et de vérifier si une sollicitation à un mode propre apportait une variation du comportement dans le temps causée par la viscoélasticité de la couche centrale. Des écarts avec la théorie ont été observés que ce soit dans la détermination des fréquences propres ou dans la mesure du coefficient d'amortissement. Une des raisons principale identifiée est la non-homogénéité du champ de température au sein de la plaque (et particulièrement du PVB) observée grâce à une caméra thermique lors des essais.

Cette caméra a également permis d'observer au sein du PVB et de l'encastrement une variation de température durant les essais cycliques à différentes fréquences propres. Ces échauffements constatés, probablement à l'origine de la variation du comportement dans le temps, ont deux origines différentes. L'échauffement observé dans le PVB est d'origine mécanique, dû à la distorsion forte du PVB lorsque la plaque est sollicitée à une fréquence propre. L'échauffement au sein de l'encastrement est *a priori* dû à une mauvaise mise en place de la condition limite. Il est cependant difficile avec nos données de déterminer lequel joue le rôle le plus prépondérant dans la variation du comportement d'ensemble lors de l'essai.

Enfin, les résultats analytiques présentés permettent de déterminer la conception rationnelle des éléments structuraux en verre feuilleté tels que les planchers en verre feuilleté, permettant d'allier esthétique et optimisation des performances mécaniques.

## Perspectives et applications

Les résultats obtenus lors de ces travaux de thèse permettent de dégager plusieurs axes d'étude, à la fois pour améliorer le modèle mis en place, mais également pour l'appliquer dans différents domaines.

Comme nous l'avons vu lors de l'étude dynamique, le comportement de la plaque est rapidement influencé par les variations de la température extérieure. Une des piste d'amélioration du modèle asymptotique de plaque HCS est donc d'intégrer le volet thermique, en étudiant la variation de la température au sein de la plaque, et particulièrement du PVB, lorsque celle-ci est soumise à un champ de température homogène sur toute sa surface et à une source de chaleur interne (échauffement à la distorsion maximale dans le PVB). Ainsi, il sera possible d'intégrer les variations de module de cisaillement en fonction du temps dans le modèle, pour une meilleure

précision sur l'évolution du comportement réelle de la plaque. Aussi, lorsque ce modèle couplé devra être validé expérimentalement, il conviendra de porter une attention particulière à la condition limite d'encastrement afin d'éviter tout échauffement interne à la liaison.

D'une manière plus générale, le développement d'un modèle stratifié à fort contraste a permis de bâtir un cadre théorique qui englobe à la fois les modèles ou les mécanismes de flexion et cisaillement opérant en parallèle (plaque de Reissner Mindlin) ou en série (plaque "sandwich"), dans un contexte élastique et/ou viscoélastique. Ce type de modèle, qui fait simplement appel à un descripteur cinématique supplémentaire, peut trouver des applications dans d'autres domaines. On peut penser à des situations de stratifiés présentant un délaminage partiel suffisamment marqué pour que la zone affectée ait un module effectif beaucoup plus faible que celui des parties restantes intégrées, à des plaques d'isolation en néoprène fretté par des lames d'acier, mais aussi à certains types de structures composites (telles que les ponts mixtes acier-béton ou bois-béton), où les connecteurs répartis périodiquement peuvent jouer le rôle effectif d'une couche souple. Enfin, il peut également s'adapter à tout type de matériau composite à matrice, qu'elle soit organique, céramique ou métallique.

- [1] Auriault J.-L., Boutin C. and Geindreau C. ‘*Homogenization of Coupled Phenomena in Heterogenous Media*, ISTE and Wiley, (2009).
- [2] Bennison SJ., Jagota A, Smith CA. Fracture of glass/polyvinyl butyral laminates in biaxial flexure. *J. Am. Ceram. Soc.*, **82**, pp.1761-1770, (1999)
- [3] Berdichevsky V.L An asymptotic theory of sandwich plates *Int. Journal of Engineering Science*, **48**, pp. 383-404, (2010).
- [4] Boutin C., Soubestre J. Generalized bending continua for linear fiber reinforced materials. *Int. Journal of Solids and Structures*, **48** (3) pp. 517-534, (2011).
- [5] Boutin C., Viverge K. Generalized plate model for highly contrasted laminates *European Journal of Mechanics - A/Solids*, **55** pp. 149-166, (2016).
- [6] Viverge K., Boutin C., Sallet F. Model of highly contrasted plates versus experiments on laminated glass *Int. Journal of Solids and Structures*, **102-103** pp. 238-258, (2016).
- [7] Viverge K., Boutin C. Generalized plate model - application to laminated glass *International Conference on Shells, Plates and Beams (SPB 2015)*, Bologne - Italie (2015)
- [8] Viverge K., Boutin C. Modèle de plaque généralisé - Application au verre feuilleté *Congrès Français de Mécanique (CFM 2015)*, Lyon - France (2015)
- [9] Caillerie D. Thin elastic plates of periodic structure with comparable period and thickness *C.R. Acad. Sci. Paris*, **294II** pp. 159-162, (1982).
- [10] Caillerie D. Thin elastic and periodic plates. *Math. Meth. Apl. Sci.*, **6** pp. 159-191, (1984).
- [11] Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, **56**, 3, pp. 287-308, (2003)
- [12] Carrera E. On the use of the Murakami’s zig-zag function in the modeling of layered plates and shells *Computers and Structures*, **82**(7-8), pp. 541-554, (2004)
- [13] Carrera E., Ciuffreda A., Bending of composites and sandwich plates subjected to localized lateral loading : a comparison of various theories *Composite Structures* **68** pp.185-202 (2005).

- [14] Ciarlet, P.G., Destuynder, P. A justification of the two-dimensional linear plate model. *J. Mec.*, **18** pp. 315-344, (1979).
- [15] Ciarlet, P.G. *Theory of plates - Mathematical elasticity Vol.2*, North-Holland (1997).
- [16] Foraboschi P. Analytical model for laminated-glass plate. *Composites : Part B* **43** pp. 2094-2106, (2012).
- [17] Galuppi L., Royer-Carfagni G. Laminated beams with viscoelastic interlayer *International Journal of Solids and Structures* , **49** (18), pp. 2637-2645, (2012).
- [18] Galuppi L., Royer-Carfagni G. Enhanced effective thickness of multi-layered laminated glass *Composites Part B : Engineering* , **34**, pp. 202-213, (2014).
- [19] Hans S., Boutin C. Dynamics of discrete framed structures : An unified homogenized description *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, **3** (9), pp1709-1739 , (2008).
- [20] Ivanov I.V. Analysis, modelling, and optimization of laminated glasses as plane beam. *International Journal of Solids and Structures* , **43**, pp. 6887-6907, (2006).
- [21] L  b  e A., Sab K. Homogenization of thick periodic plates : Application of the Bending-Gradient plate theory to a folded core sandwich panel, *International Journal of Solids and Structures*, **49** (19-20), pp. 2778-2792, (2012).
- [22] Lewinsky T., Telega, J.J. *Plates, laminates and shells - Asymptotic analysis and homogenization*, World scientific - Singapour - London (2000).
- [23] d'Haene P., Savineau G. *Mechanical properties of laminated safety glass - FEM Study*, Glass Performance Day - Finland (2007).
- [24] Sanchez-Palencia E., *Non Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer-Verlag, Berlin. (1980)
- [25] Reissner E., Reflexion on the theory of elastic plates. *Appl. Mech. Rev.*, **38** pp.1453-1464, (1995).
- [26] Trabucho L., Viano J.L., *Mathematical modelling of rod*, North-Holland, Amsterdam, (1996).
- [27] Chambon P., *Comportement    la fatigue du verre comme   l  ment de structure*, Master's thesis, ENTPE, France, (2011).
- [28] Cappon F., *Comportement en rupture et    la fatigue du verre feuillet  *, Master's thesis, ENTPE, France, (2012).
- [29] Chesnais C., *Dynamique de milieux r  ticul  s non contrevent  s Application aux b  timents*, PhD thesis, ENTPE, France, (2010).
- [30] Haldimann M., *Fracture strength of structural glass element - analytical and numerical modelign, testing and design*, PhD thesis, Ecole Polytechnique F  d  rale de Lausanne, Suisse, (2006).

- [31] Love A. E. H., *On the small free vibrations and deformations of elastic shells*, Philosophical trans. of the Royal Society (London), 1888, Vol. série A, No 17 p. 491–549.
- [32] Reddy J.N., A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*, **51**, pp. 745-752, (1984).
- [33] Ren J.G., A new theory of laminated plate, *Composites Science and Technology*, **26**(3), pp. 225-239, (1986).
- [34] Whitney J.M., Shear correction factors for orthotropic laminates under static load, *Journal of Applied Mechanics*, **40**, pp. 302-304, (1973).
- [35] Murakami H., Laminated composite plate theory with improved in-plane responses, *Journal of Applied Mechanics*, **53**(3), pp. 661-666, (1986).
- [36] Kirchhoff G., Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, **40**, pp. 51-88, (1850).
- [37] Newmark N.M., Siess C.P., Viest I.M., Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction, *Proc. Soc. Exp. Stress Anal*, **9**, pp. 75-92, (1951).