



HAL
open science

Contributions aux pistages mono et multi-cibles fondés sur les ensembles finis aléatoires

Leo Legrand

► **To cite this version:**

Leo Legrand. Contributions aux pistages mono et multi-cibles fondés sur les ensembles finis aléatoires. Micro et nanotechnologies/Microélectronique. Université de Bordeaux, 2019. Français. NNT : 2019BORD0107 . tel-02297129

HAL Id: tel-02297129

<https://theses.hal.science/tel-02297129>

Submitted on 25 Sep 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE
POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

.....

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR
Spécialité : automatique, productique, signal et image, ingénierie cognitive
Par Léo LEGRAND

Contributions aux pistages mono et multi-cibles fondés sur les ensembles finis aléatoires

.....

Sous la direction de Éric GRIVEL et de Audrey GIREMUS
Soutenue le 5 juillet 2019

Membres du jury :

M. VANHEEGHE Philippe	Professeur à l'École Centrale de Lille, Lille	Président
M. SEPTIER François	Professeur à l'Université de Bretagne Sud, Vannes	Rapporteur
M. TOURNERET Jean-Yves	Professeur à l'INP-ENSEEIH, Toulouse	Rapporteur
M. RATTON Laurent	Responsable du service Algorithmie Amont à Thales Defence Mission Systems, Élancourt	Référent scientifique
M. GRIVEL Éric	Professeur à Bordeaux INP, Talence	Directeur de thèse
Mme GIREMUS Audrey	Maître de conférences à l'Université de Bordeaux, Talence	Co-directrice de thèse
M. CORRETJA Vincent	Ingénieur études algorithme Radar à Thales Defence Mission Systems, Mérignac	Membre invité
M. JOSEPH Bernard	Ingénieur études Radar, expert pistage à Thales Defence Mission Systems, Mérignac	Membre invité

Préparée à Thales, *Thales Defence Mission Systems*,
75-77 avenue Marcel Dassault, 33700 Mérignac,
et au laboratoire IMS, UMR CNRS 5218, Université de Bordeaux, Bordeaux INP,
351 avenue de la Libération, 33405 Talence.

Titre : contributions aux pistages mono et multi-cibles fondés sur les ensembles finis aléatoires.

Résumé : La détection et le pistage de cibles de surface, maritimes ou terrestres, constituent l'un des champs d'application de la surveillance par radar aéroporté. Dans ce contexte spécifique, il s'agit d'estimer les trajectoires d'un ou de plusieurs objets mobiles au cours du temps à partir de mesures radar bruitées. Cependant, plusieurs contraintes s'additionnent au problème d'estimation des trajectoires :

1. le nombre d'objets présents dans la région d'intérêt est inconnu et peut évoluer au cours du temps,
2. les mesures fournies par le radar ne correspondent pas toutes à des objets mobiles car certaines sont dues à l'environnement ; il s'agit de fausses alarmes,
3. une mesure n'est pas toujours disponible pour chaque objet à chaque instant ; il s'agit de non-détections,
4. les cibles de surface peuvent être très diverses en termes de capacité de manœuvre.

Pour tenir compte des trois premières exigences, les modèles d'ensembles finis aléatoires peuvent être envisagés pour procéder aux estimations simultanées du nombre d'objets et de leur trajectoire dans un formalisme bayésien. Pour répondre à la quatrième contrainte, une classification des objets à pister peut s'avérer utile. Aussi, dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à deux traitements adaptatifs qui intègrent ces deux principes.

Tout d'abord, nous proposons une approche conjointe de pistage et de classification dédiée au cas d'un objet évoluant en présence de fausses alarmes. Notre contribution réside dans le développement d'un algorithme incorporant un filtre fondé sur un ensemble fini aléatoire de Bernoulli. L'algorithme résultant combine robustesse aux fausses alarmes et capacité à classer l'objet. Cette classification peut être renforcée grâce à l'estimation d'un paramètre discriminant comme la longueur, qui est déduite d'une mesure d'étalement distance.

Le second traitement adaptatif présenté dans cette thèse est une technique de pistage de groupes de cibles dont les mouvements sont coordonnés. Chaque groupe est caractérisé par un paramètre commun définissant la coordination des mouvements de ses cibles. Cependant, ces dernières conservent une capacité de manœuvre propre par rapport à la dynamique de groupe. S'appuyant sur le formalisme des ensembles finis aléatoires, la solution proposée modélise hiérarchiquement la configuration multi-groupes multi-cibles. Au niveau supérieur, la situation globale est représentée par un ensemble fini aléatoire dont les éléments correspondent aux groupes de cibles. Ils sont constitués du paramètre du groupe et d'un ensemble fini aléatoire multi-cibles. Ce dernier contient les vecteurs d'état des cibles du groupe dont le nombre peut évoluer au cours du temps. L'algorithme d'estimation développé est lui-aussi organisé de manière hiérarchique. Un filtre multi-Bernoulli labélisé (LMB) permet d'estimer le nombre de groupes, puis pour chacun d'entre eux, leur probabilité d'existence ainsi que leur paramètre commun. Pour ce faire, le filtre LMB interagit avec un banc de filtres multi-cibles qui opèrent conditionnellement à une hypothèse de groupe. Chaque filtre multi-cibles estime le nombre et les vecteurs d'état des objets du groupe. Cette approche permet de fournir à l'opérationnel des informations sur la situation tactique.

Mots clés : ensembles finis aléatoires, filtre de Bernoulli, approche conjointe de pistage et de classification, estimation bayésienne, filtrage particulière, pistage mono et multi-cibles.

Title: contributions to single and multi-target tracking based on random finite sets.

Abstract: Detecting and tracking maritime or ground targets is one of the application fields for surveillance by airborne radar systems. In this specific context, the goal is to estimate the trajectories of one or more moving objects over time by using noisy radar measurements. However, several constraints have to be considered in addition to the problem of estimating trajectories:

1. the number of objects inside the region of interest is unknown and may change over time,
2. the measurements provided by the radar can arise from the environment and do not necessarily correspond to a mobile object; the phenomenon is called false detection,
3. a measurement is not always available for each object; the phenomenon is called non-detection,
4. the maneuverability depends on the surface targets.

Concerning the three first points, random finite set models can be considered to simultaneously estimate the number of objects and their trajectories in a Bayesian formalism. To deal with the fourth constraint, a classification of the objects to be tracked can be useful. During this PhD thesis, we developed two adaptive approaches that take into account both principles.

First of all, we propose a joint target tracking and classification method dedicated to an object with the presence of false detections. Our contribution is to incorporate a filter based on a Bernoulli random finite set. The resulting algorithm combines robustness to the false detections and the ability to classify the object. This classification can exploit the estimation of a discriminating parameter such as the target length that can be deduced from a target length extent measurement.

The second adaptive approach presented in this PhD dissertation aims at tracking target groups whose movements are coordinated. Each group is characterized by a common parameter defining the coordination of the movements of its targets. However, the targets keep their own capabilities of maneuvering relatively to the group dynamics. Based on the random finite sets formalism, the proposed solution represents the multi-target multi-group configuration hierarchically. At the top level, the overall situation is modeled by a random finite set whose elements correspond to the target groups. They consist of the common parameter of the group and a multi-target random finite set. The latter contains the state vectors of the targets of the group whose number may change over time. The estimation algorithm developed is also organized hierarchically. A labeled multi-Bernoulli filter (LMB) makes it possible to estimate the number of groups, and for each of them, to obtain their probability of existence as well as their common parameter. For this purpose, the LMB filter interacts with a bank of multi-target filters working conditionally to a group hypothesis. Each multi-target filter estimates the number and state vectors of the objects in the group. This approach provides operational information on the tactical situation.

Keywords: random finite sets, Bernoulli filter, joint target tracking and classification, Bayesian estimation, particle filter, mono and multi-target tracking.

Remerciements

Avec ces quelques lignes, je souhaite adresser mes remerciements à celles et ceux qui m'ont accompagné durant ces trois années de thèse.

Je commence par remercier mes rapporteurs, François Septier et Jean-Yves Tourneret, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, pour le temps consacré à la lecture de ce manuscrit et pour leurs remarques avisées. Merci également à Philippe Vanheeghe pour avoir présidé mon jury de thèse.

Je voudrais particulièrement remercier mes encadrants. Tout d'abord, Audrey Giremus, ma co-directrice de thèse, pour son implication, ses conseils, sa bienveillance et son opiniâtreté pédagogique. Également, je remercie Éric Grivel, mon directeur de thèse, pour la confiance qu'il m'a témoignée, son engagement permanent, ses conseils et son accompagnement qui m'ont permis de progresser pendant ces années de thèse.

Je remercie mes encadrants industriels, Laurent Ratton et Bernard Joseph pour leur bienveillance et l'encadrement de cette thèse Cifre du côté entreprise. Je souhaite également remercier Richard Montigny, pour l'accueil de grande qualité au sein de son service.

Je remercie mes collègues, pour leur accueil, leur bonne humeur ainsi que pour tous les plaisirs moments passés ensemble : Clément, Didier, Gilles G. & Gilles J., Jérémy, Marie, Philippe, Pierre-Albert, Sabrina, Vincent C. & Vincent M., Yoan, pour ne citer que ceux qui m'ont côtoyé quotidiennement ! Merci également aux thésardes enjouées Claire et Ema.

Les instants passés au laboratoire IMS sont aussi de bons souvenirs. Je remercie mes voisins de bureau : Brendan et Vincent ; mes voisins de l'étage : Andrei, Benjamin, Florent, Ioana, Jean-Marie, Jessica, Mireille, Roxana, Salma ; et l'équipe de permanents du groupe signal : Barna, Christian, Guillaume B. & Guillaume F., Jacques, Jean-François, Jean-Pierre, Lionel, Marc, Pascal, Rémi, Romain, Salem et Yannick !

Je remercie les frères Matthieu et Alexandre, pour leur aide logistique durant la rédaction et plus généralement pour les moments de rigolades partagés depuis plus de dix-sept ans.

Enfin, je termine en remerciant du fond du cœur mes proches, mes parents dont les conseils, l'aide et le soutien me sont toujours très précieux.

Table des matières

Liste des abréviations	12
Liste des notations	13
Introduction	25
1 Estimation bayésienne pour le pistage d’objets mobiles	29
1.1 Introduction	29
1.2 Estimation bayésienne fondée sur une représentation mono-cible	30
1.2.1 Représentation dans l’espace d’état	30
1.2.2 Filtre bayésien	31
1.2.3 Filtre de Kalman et ses variantes	32
1.2.4 Filtre particulaire	34
1.2.5 Mise en œuvre pratique, association et <i>gating</i>	39
1.3 Estimation bayésienne fondée sur les ensembles finis aléatoires	40
1.3.1 Définition des ensembles finis aléatoires (EFAs)	41
1.3.2 État multi-cibles et ensemble multi-mesures fondés sur les EFAs	42
1.3.3 Filtre bayésien multi-cibles fondé sur le formalisme des EFAs	49
1.3.4 Filtre <i>probability hypothesis density</i> (PHD)	50
1.3.5 Filtres fondés sur les EFAs multi-Bernoulli et multi-Bernoulli étiquetés	51
1.3.6 Définition de la métrique <i>optimal subpattern assignment</i> (OSPA)	58
1.4 Conclusions et axes de travail dans le cadre de la thèse	58
2 Approche conjointe de pistage et de classification	61
2.1 Introduction	61
2.2 Principe général du pistage et de la classification conjoints	62
2.3 Développements théoriques fondés sur un filtre de Bernoulli	65
2.3.1 Filtre de Bernoulli	66
2.3.2 Utilisation d’une mesure complémentaire de longueur	69
2.4 Mise en œuvre par filtrage particulaire	73
2.4.1 Mise en œuvre fondée sur un filtre Rao-Blackwellisé	73
2.4.2 Remarque sur l’utilisation simultanée de plusieurs modèles de mouvement	78
2.4.3 Pseudo-codes pour la mise en œuvre du filtre proposé	79
2.5 Simulations	83
2.5.1 Protocole de simulation	83
2.5.2 Comparaison des différentes versions de l’approche JTC	86
2.6 Conclusions et perspectives	97

3	Pistage de groupes de cibles : présentation des concepts théoriques	99
3.1	Introduction	99
3.2	Modélisation des états multi-groupes multi-cibles	101
3.2.1	Définition d'un ensemble fini aléatoire hiérarchique	101
3.2.2	Densité multi-objets pour un EFA hiérarchique	102
3.2.3	Version étiquetée d'un ensemble fini aléatoire hiérarchique	103
3.3	Filtre bayésien	104
3.3.1	Étape de prédiction : équation de Chapman-Kolmogorov	104
3.3.2	Étape de mise à jour : règle de Bayes	105
3.4	Développement théorique d'un filtre LMB/PHD	105
3.4.1	Densité multi-groupes multi-cibles	106
3.4.2	Étape de prédiction	106
3.4.3	Étape de mise à jour	109
3.5	Métrique adaptée aux ensembles finis aléatoires hiérarchiques	112
3.5.1	Définition de l'OSPA multi-groupes (MG-OSPA)	112
3.5.2	Preuve que la MG-OSPA est une métrique	113
3.5.3	Intérêt par rapport à une OSPA classique	114
3.6	Conclusions et perspectives	115
4	Pistage de groupes de cibles : mise en œuvre et simulations	117
4.1	Introduction	117
4.2	Mise en œuvre pratique du filtre LMB/PHD	118
4.2.1	Représentation de la densité multi-groupes multi-cibles	118
4.2.2	Étape de prédiction	119
4.2.3	Association des groupes de cibles aux groupes de mesures	122
4.2.4	Étape de mise à jour	123
4.2.5	Gestion des suppressions, fusions et naissances des groupes	125
4.3	Simulations	125
4.3.1	Cas d'application : cibles coordonnées en vitesse	126
4.3.2	Protocoles de simulations	127
4.3.3	Résultats	128
4.4	Conclusions et perspectives	140
	Conclusions et perspectives	143
A	Compléments sur le filtre de Kalman	147
A.1	Résultats sur les gaussiennes multi-variées	147
A.2	Étape de prédiction	148
A.3	Étape de mise à jour	149
B	Fonction intensité d'un EFA de Poisson	151
B.1	Rappels	151
B.2	Développement	151
C	Modèle elliptique	153
C.1	Configuration géométrique	153
C.2	Mesure d'étalement distance	153
C.3	Remarque sur le paramétrage <i>a priori</i> du modèle elliptique	155

D	Filtre <i>probabilistic data association</i> (PDA)	157
D.1	Positionnement du PDA	157
D.2	Filtre PDA	158
D.2.1	Étape de prédiction	158
D.2.2	Étape d'association	159
D.2.3	Étape de mise à jour	159
E	Modèles de mouvement	161
E.1	Mouvement rectiligne uniforme	161
E.2	Mouvement uniformément accéléré	163
E.3	Modèle de Singer	164
F	Fenêtres de validation	167
F.1	Fenêtre de validation	167
F.2	Fenêtre de validation pour un filtre particulière	170
F.2.1	Fenêtrage fondé sur une distance de Mahalanobis et un seuil calculé à partir d'une fonction inverse de la loi du χ^2	171
F.2.2	Fenêtrage fondé sur une distance de Mahalanobis et un seuil empirique	172

Liste des abréviations

CB-MeMBer	<i>cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli</i> - multi-Bernoulli multi-cibles avec cardinalité équilibrée.
COLA	<i>cardinalized optimal linear assignment metric</i> - métrique d'affectation linéaire optimale avec gestion du cardinal.
CPHD	<i>cardinalized probability hypothesis density</i> - densité d'hypothèse de probabilité et du cardinal.
δ -GLMB	<i>δ-generalized labeled multi-Bernoulli</i> - multi-Bernoulli étiqueté δ -généralisé.
EAP	<i>expected a posteriori</i> - moyenne <i>a posteriori</i> .
EFA	ensemble fini aléatoire - (RFS) <i>random finite set</i> .
EQM	erreur quadratique moyenne - (MSE) <i>mean square error</i> .
FKE	filtre de Kalman étendu - (EKF) <i>extended Kalman filter</i> .
FKSP	filtre de Kalman sans parfum - (UKF) <i>unscented Kalman filter</i> .
FP	filtre particulaire - <i>particle filter</i> .
GLMB	<i>generalized labeled multi-Bernoulli</i> - multi-Bernoulli étiqueté généralisé.
GNN	<i>global nearest neighbor</i> - plus proche voisin global.
GOSPA	<i>generalized optimal subpattern assignment</i> - affectation optimale généralisée.
H-OSPA	<i>Hellinger-optimal subpattern assignment</i> - affectation optimale type Hellinger.
JPDA	<i>joint probabilistic data association</i> - association de données utilisant les probabilités jointes.
JTC	<i>joint target tracking and classification</i> - pistage et classification conjoints.
LMB	<i>labeled multi-Bernoulli</i> - multi-Bernoulli étiqueté.
MHT	<i>multiple hypothesis tracking</i> - hypothèses multiples de pistage.
MG-OSPA	<i>multi-group optimal subpattern assignment</i> - affectation optimale multi-groupes.
NN	<i>nearest neighbor</i> - plus proche voisin.
OSPA	<i>optimal subpattern assignment</i> - affectation optimale.
PDA	<i>probabilistic data association</i> - association de données probabilistes.
PDF	<i>probability density function</i> - densité de probabilité.
PHD	<i>probability hypothesis density</i> - densité d'hypothèse de probabilité.
Q-OSPA	<i>quality-based optimal subpattern assignment</i> - affectation optimale utilisant une quantification de qualité.
REE	représentation dans l'espace d'état - <i>state space representation</i> .
RFS	<i>random finite set</i> - (EFA) ensembles finis aléatoires.
SIR	<i>sampling importance resampling</i> - ré-échantillonnage d'importance séquentiel.
SIS	<i>sampling importance sampling</i> - échantillonnage d'importance séquentiel.

Liste des notations

Chapitre 1 :

\mathbf{x}_k	vecteur d'état à l'instant k .
\mathbf{z}_k	vecteur de mesure à l'instant k .
$\mathbf{z}_{1:k}$	vecteurs de mesure des instants 1 à k .
$p_{k k}(\mathbf{x}_k \mathbf{z}_{1:k})$	densité de probabilité <i>a posteriori</i> sur l'état à l'instant k sachant les mesures des instants 1 à k .
f_k	fonction de transition du modèle à l'instant k .
F_k	matrice d'évolution de l'état à l'instant k .
Q_k	matrice de covariance du bruit de modèle à l'instant k .
$p_k(\mathbf{x}_k \mathbf{x}_{k-1})$	densité de probabilité de transition entre les instants $k-1$ et k .
h_k	fonction de mesure à l'instant k .
H_k	matrice de mesure à l'instant k .
R_k	matrice de covariance du bruit de mesure à l'instant k .
$g_k(\mathbf{z}_k \mathbf{x}_k)$	vraisemblance à l'instant k .
$\mathcal{N}(x; \mu, \Sigma)$	densité de probabilité gaussienne définie pour la variable x , de moyenne μ et de matrice de covariance Σ .
$p_{k k-1}(\mathbf{x}_k \mathbf{z}_{1:k-1})$	densité de probabilité prédite sur l'état à l'instant k sachant les mesures des instants 1 à $k-1$.
$\hat{\mathbf{x}}_{k k-1}$	vecteur d'état prédit à l'instant k sachant les mesures des instants 1 à $k-1$.
$P_{k k-1}$	matrice de covariance prédite de l'erreur à l'instant k sachant les mesures des instants 1 à $k-1$.
$\hat{\mathbf{x}}_{k k}$	vecteur d'état estimé à l'instant k sachant les mesures des instants 1 à k .
$P_{k k}$	matrice de covariance estimée de l'erreur à l'instant k sachant les mesures des instants 1 à k .
$K_{p,k}$	gain de prédiction à l'instant k .
K_k	gain de Kalman à l'instant k .
I	matrice identité.
$E[.]$	espérance mathématique.
\mathbb{R}	ensemble des nombres réels.
\mathcal{X}	espace d'état.

N	nombre de particules.
$\{\mathbf{x}_{1:k}^{(i)}\}_{i=1,\dots,N}$	ensemble des N particules.
$\{\mathbf{w}_{k k}^{(i)}\}_{i=1,\dots,N}$	ensemble des poids <i>a posteriori</i> associés aux N particules.
$\{\mathbf{w}_{k k-1}^{(i)}\}_{i=1,\dots,N}$	ensemble des poids prédits associés aux N particules.
$\delta_{\mathbf{x}_{1:k}}^{(i)}(\mathbf{x}_{1:k})$	mesure de Dirac.
$q_k(\mathbf{x}_k^{(i)} \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:k})$	densité d'échantillonnage.
N_{eff}	nombre efficace des particules.
X_k	ensemble fini aléatoire multi-cibles à l'instant k .
Z_k	ensemble fini aléatoire multi-mesures à l'instant k .
$\delta_Y(X)$	symbole de Kronecker valant 1 si $X = Y$ et 0 sinon.
$\mathbb{1}_Y(X)$	opérateur d'inclusion valant 1 si $X \subseteq Y$.
$\mathcal{F}(\mathbb{X})$	ensemble des ensembles finis construits à partir de \mathbb{X} .
$\mathcal{F}_n(\mathbb{X})$	ensemble des EFAs à n éléments dans $\mathcal{F}(\mathbb{X})$.
$\rho(n)$	loi sur le cardinal d'un ensemble fini aléatoire.
$p_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$	densité spatiale jointe symétrique pour un ensemble d'états $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$.
$\pi(X)$	densité multi-cibles pour un EFA X .
$\pi_f(Z)$	densité multi-objets pour un EFA Z de fausses alarmes.
λ_f	nombre moyen attendu de fausses alarmes.
$\mathcal{U}_f(\mathbf{z})$	loi uniforme du fouillis évalué en \mathbf{z} .
$D(\mathbf{x})$	fonction intensité de l'état \mathbf{x} .
$r^{(i)}$	probabilité d'existence du i ème objet.
$p^{(i)}(\mathbf{x})$	densité spatiale pour le i ème objet de l'état \mathbf{x} .
\mathbf{X}	EFA labélisé.
$\mathcal{L}(\mathbf{X})$	fonction de projection des étiquettes.
$\Delta(\mathbf{X})$	indicateur d'unicité des étiquettes.
$w(L)$	poids pour la formulation de la densité multi-cibles multi-Bernoulli labélisé défini pour un jeu d'étiquettes L .
$w^{(c)}(L)$	poids pour la formulation de la densité multi-cibles multi-Bernoulli labélisé défini pour un jeu d'étiquettes L selon une hypothèse (c).
(-)	indice signifiant $k-1 k-1$.
(+)	indice signifiant $k k-1$.
(*)	indice signifiant $k k$.
π_B	densité multi-cibles de naissance.
r_B	probabilité d'existence d'un objet naissant.
p_B	densité spatiale d'un objet naissant.
$\eta_S(i)$	terme de normalisation du i ème objet.
$p_{S,k}(\mathbf{x}_{k-1})$	probabilité de survie à l'instant k pour l'état \mathbf{x}_{k-1} .
$p_{D,k}(\mathbf{x}_k)$	probabilité de détection à l'instant k pour l'état \mathbf{x}_k .
$w_B(L)$	poids des naissances pour la formulation de la densité multi-cibles multi-Bernoulli labélisé défini pour un jeu d'étiquettes L .

$w_{(+),S}(L)$	poids prédits selon une hypothèse de survie pour la formulation de la densité multi-cibles multi-Bernoulli labélisé défini pour un jeu d'étiquettes L .
$w_{(+)}(L)$	poids prédits pour la formulation de la densité multi-cibles multi-Bernoulli labélisé défini pour un jeu d'étiquettes L .
I_+	hypothèse d'étiquettes restantes, élément de $\mathcal{F}(\mathbb{L}_{(+)})$.
Θ_{I_+}	ensemble des associations possibles entre I_+ et les mesures disponibles à l'instant k .
θ	hypothèse d'association donnée, élément de Θ_{I_+} .
$w^{I_+,\theta}(Z_k)$	poids pour la formulation de la densité multi-cibles multi-Bernoulli labélisé évaluant la vraisemblance globale selon les mesures disponibles Z_k , un jeu d'étiquettes restantes I_+ et une hypothèse d'association θ .
$r_{(*)}^{(\ell)}$	probabilité d'existence <i>a posteriori</i> de l'objet labélisé ℓ .
$p_{(*)}^{(\ell)}(\mathbf{x}_k)$	densité spatiale <i>a posteriori</i> évaluée en \mathbf{x}_k de l'objet étiqueté ℓ .
$\eta_{Z_k}^{(\theta)}(\ell)$	terme de normalisation de la vraisemblance pour un objet étiqueté ℓ avec des mesures disponibles Z_k et une hypothèse d'association θ .
$\psi_{Z_k}(\mathbf{x}_k, \ell; \theta)$	terme de vraisemblance de l'état \mathbf{x}_k pour l'objet étiqueté ℓ avec pour mesures disponibles Z_k et une hypothèse d'association θ .
$d_p^{(c)}(X, Y)$	distance OSPA d'ordre p et de paramètre de coupure c entre les EFAs X et Y .

Chapitre 2 :

$p(c \mathbf{z}_{1:k})$	distribution <i>a posteriori</i> sur la classe c .
$p(\mathbf{x}_k \mathbf{z}_{1:k}, c)$	densité de probabilité <i>a posteriori</i> de l'état conditionnellement à $\mathbf{z}_{1:k}$ et à la classe c .
$p(\mathbf{z}_k \mathbf{z}_{1:k-1}, c)$	densité de probabilité sur la mesure courante \mathbf{z}_k sachant l'historique des mesures $\mathbf{z}_{1:k-1}$ et une hypothèse de classe c .
$\pi_{(-)}(X_{k-1} c)$	densité multi-objets <i>a posteriori</i> pour l'instant $k - 1$ définie conditionnellement à une classe c et implicitement, à l'ensemble des EFAs multi-mesures des instants 1 à $k - 1$, c'est-à-dire $Z_{1:k-1}$.
$r_{(-)}^c$	probabilité d'existence/de présence de l'objet pour l'instant $k - 1$ conditionnellement à une classe c .
$p_{(-)}(\mathbf{x}_{k-1} c)$	densité spatiale <i>a posteriori</i> pour l'instant $k - 1$ de l'objet conditionnellement à une classe c .
$\pi_{(+)}(X_k c)$	densité multi-objets prédite pour l'instant k définie conditionnellement à une classe c .
$r_{(+)}^c$	probabilité d'existence/de présence prédite de l'objet pour l'instant k conditionnellement à une classe c .
$p_{(+)}(\mathbf{x}_k c)$	densité spatiale prédite pour l'instant k de l'objet conditionnellement à une classe c .
$\pi_{(*)}(X_k c)$	densité multi-objets <i>a posteriori</i> pour l'instant k définie conditionnellement à une classe c .
$r_{(*)}^c$	probabilité d'existence/de présence de l'objet pour l'instant k conditionnellement à une classe c .
$p_{(*)}(\mathbf{x}_k c)$	densité spatiale <i>a posteriori</i> pour l'instant k de l'objet conditionnellement à une classe c .
$f_k(\cdot \cdot)$	densité de transition à l'instant k , multi-objets (définition sur un EFA X) ou mono-objet (définition sur un état \mathbf{x}).
r_B^c	probabilité d'existence à la naissance conditionnellement à une classe c .
$p_B(\mathbf{x}_k c)$	densité spatiale de l'état à la naissance conditionnellement à une classe c .
$p_{S,k}(\mathbf{x}_{k-1})$ ou p_S	probabilité de survie de l'objet.
$f_k^{(m_k^c)}(\cdot \cdot)$	densité de transition à l'instant k , définie entre deux vecteurs d'état successifs et pour le modèle d'état m_k^c .
T_{FA}	taux de fausses alarmes.

Chapitre 3 :

\tilde{X}_k	ensemble fini aléatoire multi-groupes multi-cibles à l'instant k .
$X_{k,i}$	ensemble fini aléatoire multi-cibles du groupe i à l'instant k .
$\xi_{k,i}$	état du groupe i à l'instant k .
\tilde{m}	cardinal de \tilde{X}_k .
$\mathbf{x}_{k,i,j}$	vecteur d'état de la cible (i, j) à l'instant k .
m_i	cardinal de $X_{k,i}$.
$\tilde{\rho}(\tilde{m})$	loi du cardinal de l'ensemble fini aléatoire multi-groupes multi-cibles.
\tilde{X}	ensemble fini aléatoire multi-groupes multi-cibles.
$ \tilde{X} $	nombre d'éléments dans \tilde{X} .
$\tilde{q}_{\tilde{m}} \left(\begin{bmatrix} X_1 \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} X_{\tilde{m}} \\ \xi_{\tilde{m}} \end{bmatrix} \right)$	loi spatiale jointe symétrique utilisée dans la définition de la densité multi-groupes multi-cibles.
$\tilde{q}_{\tilde{m}}(X_i \xi_i)$	loi spatiale conditionnelle à l'état du groupe i .
$S_{\tilde{m}}!$	ensemble des permutations de $\{1, \dots, \tilde{m}\}$.
$p(\xi_i)$	loi de l'état du groupe i .
$\tilde{\pi}(\{X_1, \dots, X_{\tilde{m}}\} \{\xi_1, \dots, \xi_{\tilde{m}}\})$	densité multi-groupes multi-cibles conditionnellement aux états des groupes.
$\tilde{\pi}(\tilde{X})$	densité multi-groupes multi-cibles.
$\tilde{\mathbf{X}}$	ensemble fini aléatoire étiqueté multi-groupes multi-cibles.
$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{X}})$	projecteur des étiquettes de $\tilde{\mathbf{X}}$.
$\Delta(\tilde{\mathbf{X}})$	contrôle de l'unicité des étiquettes de $\tilde{\mathbf{X}}$.
\mathbb{L}	espace des étiquettes.
Z_k	ensemble fini aléatoire multi-mesures à l'instant k .
$\mathbf{z}_{k,l}$	$l^{\text{ième}}$ mesure de Z_k .
$\tilde{\pi}_{(-)}(\tilde{\mathbf{X}}_{k-1})$	densité multi-groupes multi-cibles à l'instant $k-1$ sachant tous les ensembles finis aléatoires multi-mesures jusqu'à l'instant $k-1$.
$\tilde{\pi}_{(+)}(\tilde{\mathbf{X}}_k)$	densité multi-groupes multi-cibles prédite à l'instant k sachant tous les ensembles finis aléatoires multi-mesures jusqu'à l'instant $k-1$.
$\tilde{\pi}_{(*)}(\tilde{\mathbf{X}}_k)$	densité multi-groupes multi-cibles mise à jour à l'instant k sachant tous les ensembles finis aléatoires multi-mesures jusqu'à l'instant k .
$f_k(\tilde{\mathbf{X}}_k \tilde{\mathbf{X}}_{k-1})$	densité de transition multi-objets de $\tilde{\mathbf{X}}_k$ par rapport à $\tilde{\mathbf{X}}_{k-1}$.
$g_k(Z_k \tilde{\mathbf{X}}_k)$	densité de vraisemblance multi-objets de Z_k par rapport à $\tilde{\mathbf{X}}_k$.
ℓ_i	étiquette du $i^{\text{ième}}$ groupe.
$s_{(-)}^{(\ell_i)}$	probabilité d'existence du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant $k-1$ sachant toutes les mesures des instants 1 à $k-1$.
$s_{(+)}^{(\ell_i)}$	probabilité d'existence prédite du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant k sachant toutes les mesures des instants 1 à $k-1$.
$s_{(*)}^{(\ell_i)}$	probabilité d'existence du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant k sachant toutes les mesures des instants 1 à k .

$\pi_{(-)}^{(\ell_i)}(X_{k-1,i} \xi_{k-1,i})$	densité multi-cibles du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant $k - 1$ sachant toutes les mesures des instants 1 à $k - 1$ et $\xi_{k-1,i}$.
$\pi_{(+)}^{(\ell_i)}(X_{k,i} \xi_{k,i})$	densité multi-cibles prédite du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant k sachant toutes les mesures des instants 1 à $k - 1$ et $\xi_{k,i}$.
$\pi_{(*)}^{(\ell_i)}(X_{k,i} \xi_{k,i})$	densité multi-cibles mise à jour du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant k sachant toutes les mesures des instants 1 à k et $\xi_{k,i}$.
$p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1,i})$	densité de l'état du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant $k - 1$ sachant toutes les mesures des instants 1 à $k - 1$.
$p_{(+)}^{(\ell_i)}(\xi_{k,i})$	densité prédite de l'état du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant k sachant toutes les mesures des instants 1 à $k - 1$.
$p_{(*)}^{(\ell_i)}(\xi_{k,i})$	densité mise à jour de l'état du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant k sachant toutes les mesures des instants 1 à k .
$\mathbb{L}_{(-)}$	espace des étiquettes à l'instant $k - 1$ sachant toutes les mesures des instants 1 à $k - 1$.
$\mathbb{L}_{(+)}$	espace prédit des étiquettes à l'instant k sachant toutes les mesures des instants 1 à $k - 1$.
$\mathbb{L}_{(*)}$	espace mis à jour des étiquettes à l'instant k sachant toutes les mesures des instants 1 à k .
$\lambda_{(-)}^{(\ell_i)}$	nombre moyen de cibles du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant $k - 1$ sachant toutes les mesures des instants 1 à $k - 1$.
$\lambda_{(+)}^{(\ell_i)}$	nombre moyen prédit de cibles du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant k sachant toutes les mesures des instants 1 à $k - 1$.
$\lambda_{(*)}^{(\ell_i)}$	nombre moyen mis à jour de cibles du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant k sachant toutes les mesures des instants 1 à k .
$D_{(-)}^{(\ell_i)}(\mathbf{x} \xi_{k-1,i})$	fonction intensité du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant $k - 1$ sachant toutes les mesures des instants 1 à $k - 1$ et $\xi_{k-1,i}$.
$D_{(+)}^{(\ell_i)}(\mathbf{x} \xi_{k,i})$	fonction intensité prédite du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant k sachant toutes les mesures des instants 1 à $k - 1$ et $\xi_{k,i}$.
$D_{(*)}^{(\ell_i)}(\mathbf{x} \xi_{k,i})$	fonction intensité mise à jour du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant k sachant toutes les mesures des instants 1 à k et $\xi_{k,i}$.
b_i	étiquette de naissance du groupe étiqueté ℓ_i .
$s_B^{(b_i)}$	probabilité d'existence du groupe étiqueté b_i à sa naissance.
$\pi_B^{(b_i)}(X_{k,i} \xi_{k,i})$	densité multi-cibles du groupe étiqueté b_i à sa naissance sachant $\xi_{k,i}$.
$p_B^{(b_i)}(\xi_{k,i})$	densité sur l'état du groupe étiqueté b_i à sa naissance.
\mathbb{B}	espace des étiquettes des naissances.
$p_S^{(\ell_i)}(\mathbf{x})$	probabilité de survie d'une cible du groupe étiqueté ℓ_i dont l'état est \mathbf{x} .
$p_{Sg,k}^{(\ell_i)}(X_{k-1,i}, \xi_{k-1,i})$	probabilité de survie du groupe étiqueté ℓ_i dont l'état multi-cibles est $X_{k-1,i}$ et l'état de groupe est $\xi_{k-1,i}$.
$\eta_S(\ell_i)$	terme de normalisation du groupe étiqueté ℓ_i selon l'hypothèse de sa survie.

$f_k(X_{k,i} X_{k-1,i}, \xi_{k,i})$	densité de transition multi-objets de $X_{k,i}$ sachant $X_{k-1,i}$ et $\xi_{k,i}$.
$f_k(\xi_{k,i} \xi_{k-1,i})$	densité de transition de $\xi_{k,i}$ sachant $\xi_{k-1,i}$.
$s_{(+),S}^{(\ell_i)}$	probabilité d'existence prédite du groupe étiqueté ℓ_i selon l'hypothèse de sa survie.
$\pi_{(+),S}^{(\ell_i)}(X_{k,i} \xi_{k,i})$	densité multi-cibles du groupe étiqueté ℓ_i dans l'hypothèse de sa survie sachant $\xi_{k,i}$.
$p_{(+),S}^{(\ell_i)}(\xi_{k,i})$	densité de l'état du groupe étiqueté ℓ_i dans l'hypothèse de sa survie.
$\mathcal{F}(\mathbb{L}_{(+)})$	ensemble des ensembles d'étiquettes constituables à partir de $\mathbb{L}_{(+)}$.
$\tilde{I}_{(+)}$	hypothèse d'un jeu d'étiquettes, un élément de $\mathcal{F}(\mathbb{L}_{(+)})$.
$w_{(+)}(\tilde{I}_{(+)})$	poids prédit de l'hypothèse de présence des groupes correspondants au jeu d'étiquettes $\tilde{I}_{(+)}$.
$w_B(\tilde{I}_{(+)}) \cap \mathbb{B}$	poids prédit lié aux groupes naissants de $\tilde{I}_{(+)}$.
$w_S(\tilde{I}_{(+)}) \cap \mathbb{L}_{(-)}$	poids prédit lié aux groupes survivants de $\tilde{I}_{(+)}$.
$\mathbb{1}_x(y)$	opérateur d'appartenance, il vaut 1 si $y \in x$ et 0 sinon.
$f_k(\mathbf{x}_k \mathbf{x}_{k-1}, \xi_{k,i})$	densité de transition de l'état \mathbf{x}_k sachant \mathbf{x}_{k-1} et $\xi_{k,i}$.
$b^{(\ell_i)}(\mathbf{x}_k \xi_{k,i})$	fonction intensité de l'état \mathbf{x}_k sachant $\xi_{k,i}$ selon une hypothèse de naissance.
$w_{Z_k}^{(\tilde{I}_{(+)}, \tilde{\theta})}$	poids mise à jour lié à une hypothèse $\tilde{I}_{(+)}$ dont les groupes sont associés aux sous-groupes de mesure de Z_k selon un <i>mapping</i> $\tilde{\theta}$.
$\eta_{Z_k}^{\tilde{\theta}}(\ell_i)$	terme de normalisation mis à jour pour un groupe étiqueté ℓ_i selon une hypothèse d'association $\tilde{\theta}$.
$\psi_{Z_k}(X_{k,i}, \xi_{k,i}; \tilde{\theta})$	vraisemblance multi-objets du groupe étiqueté ℓ_i selon une hypothèse d'association $\tilde{\theta}$.
$p_{D_g}^{(\ell_i)}(X_{k,i}, \xi_{k,i})$	probabilité de détection du groupe ℓ_i pour un état multi-cibles $X_{k,i}$ et un état de groupe $\xi_{k,i}$.
$p_D^{(\ell_i)}(\mathbf{x})$	probabilité de détection d'une cible du groupe ℓ_i pour un état \mathbf{x} .
$\pi_f(Z_k)$	densité multi-objets du fouillis évaluée pour un ensemble multi-mesures Z_k .
λ_f	nombre moyen de fausses alarmes.
$\mathcal{U}_f(\mathbf{z})$	loi uniforme du fouillis évaluée pour la mesure \mathbf{z} .
$g_k(Z_{\tilde{\theta}(\ell_i)} X_{k,i}, \xi_{k,i})$	vraisemblance multi-objets de $Z_{\tilde{\theta}(\ell_i)}$ par rapport à $X_{k,i}$ et $\xi_{k,i}$.
$g_k(\mathbf{z}_{\theta_j} \mathbf{x}_j)$	vraisemblance de \mathbf{z}_{θ_j} par rapport à \mathbf{x}_j .
$\pi_{(*)}^{(\ell_i, \tilde{\theta})}(X_{k,i} \xi_{k,i})$	densité multi-cibles mise à jour du groupe étiqueté ℓ_i selon une hypothèse d'association $\tilde{\theta}$ et sachant $\xi_{k,i}$.
$p_{(*)}^{(\ell_i, \tilde{\theta})}(\xi_{k,i})$	densité mise à jour de l'état du groupe étiqueté ℓ_i selon une hypothèse d'association $\tilde{\theta}$.
$\tilde{d}_r^{(\tilde{c})}(\tilde{X}, \tilde{Y})$	métrique MG-OSPA d'ordre r et de paramètre de coupure \tilde{c} .
γ	paramètre d'échelle.
$d_g(\xi, \kappa)$	distance entre les états de groupe ξ et κ .
$d_p^{(c)}(X, Y)$	distance OSPA entre les états multi-cibles X et Y .

Chapitre 4 :

$\tilde{\mathbf{X}}_{k-1}$	ensemble fini aléatoire étiqueté multi-groupes multi-cibles à l'instant $k - 1$.
$\tilde{\mathbf{X}}_k$	ensemble fini aléatoire étiqueté multi-groupes multi-cibles à l'instant k .
ℓ_i	$i^{\text{ème}}$ étiquette de groupe.
$X_{k-1,i}$	ensemble fini aléatoire multi-cibles à l'instant $k - 1$ du groupe lié à l'étiquette ℓ_i .
$X_{k,i}$	ensemble fini aléatoire multi-cibles à l'instant k du groupe lié à l'étiquette ℓ_i .
$\xi_{k-1,i}$	état de groupe à l'instant $k - 1$ du groupe lié à l'étiquette ℓ_i .
$\xi_{k,i}$	état de groupe à l'instant k du groupe lié à l'étiquette ℓ_i .
$\tilde{\pi}_{(-)}(\tilde{\mathbf{X}}_{k-1})$	densité multi-groupes multi-cibles <i>a posteriori</i> à l'instant $k - 1$ sachant toutes les mesures jusqu'à l'instant $k - 1$.
$\tilde{\pi}_{(+)}(\tilde{\mathbf{X}}_k)$	densité multi-groupes multi-cibles prédite à l'instant k sachant toutes les mesures jusqu'à l'instant $k - 1$.
$\tilde{\pi}_{(*)}(\tilde{\mathbf{X}}_k)$	densité multi-groupes multi-cibles <i>a posteriori</i> à l'instant k sachant toutes les mesures jusqu'à l'instant k .
$s_{(-)}^{(\ell_i)}$	probabilité d'existence du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant $k - 1$ sachant toutes les mesures jusqu'à l'instant $k - 1$.
$s_{(+)}^{(\ell_i)}$	probabilité d'existence du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant k sachant toutes les mesures jusqu'à l'instant $k - 1$.
$s_{(*)}^{(\ell_i)}$	probabilité d'existence du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant k sachant toutes les mesures jusqu'à l'instant k .
$\pi_{(-)}^{(\ell_i)}(X_{k-1,i} \xi_{k-1,i})$	densité multi-cibles à l'instant $k - 1$ conditionnellement à l'état de groupe $\xi_{k-1,i}$ et toutes les mesures jusqu'à l'instant $k - 1$.
$\pi_{(+)}^{(\ell_i)}(X_{k,i} \xi_{k,i})$	densité multi-cibles prédite à l'instant k conditionnellement à l'état de groupe $\xi_{k,i}$ et toutes les mesures jusqu'à l'instant $k - 1$.
$\pi_{(*)}^{(\ell_i)}(X_{k,i} \xi_{k,i})$	densité multi-cibles à l'instant k conditionnellement à l'état de groupe $\xi_{k,i}$ et toutes les mesures jusqu'à l'instant k .
$p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1,i})$	densité sur l'état de groupe à l'instant $k - 1$ sachant toutes les mesures jusqu'à l'instant $k - 1$.
$p_{(+)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1,i})$	densité sur l'état de groupe prédite à l'instant k sachant toutes les mesures jusqu'à l'instant $k - 1$.
$p_{(*)}^{(\ell_i)}(\xi_{k,i})$	densité sur l'état de groupe à l'instant k sachant toutes les mesures jusqu'à l'instant k .
$\mathbb{L}_{(-)}$	espace <i>a posteriori</i> d'étiquettes de groupe à l'instant $k - 1$.
$\mathbb{L}_{(+)}$	espace prédit d'étiquettes de groupe à l'instant k .
$\mathbb{L}_{(*)}$	espace <i>a posteriori</i> d'étiquettes de groupe à l'instant k .
$N_{\xi}^{(i)}$	nombre de particules pour l'approximation de la loi sur l'état du groupe étiqueté ℓ_i .

$\omega_{\xi,(-)}^{(i,j)}$	$j^{\text{ème}}$ poids de la $i^{\text{ème}}$ particule de l'approximation de la loi sur l'état du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant $k-1$ sachant toutes les mesures jusqu'à l'instant $k-1$.
$\omega_{\xi,(+)}^{(i,j)}$	$j^{\text{ème}}$ poids prédit de la $i^{\text{ème}}$ particule de l'approximation de la loi sur l'état du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant k sachant toutes les mesures jusqu'à l'instant $k-1$.
$\omega_{\xi,(*)}^{(i,j)}$	$j^{\text{ème}}$ poids de la $i^{\text{ème}}$ particule de l'approximation de la loi sur l'état du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant k sachant toutes les mesures jusqu'à l'instant k .
$\delta_{\xi_{k-1}}^{(i,j)}(\xi_{k-1,i})$	mesure de Dirac non-nulle en $\xi_{k-1}^{(i,j)}$ et évaluée en $\xi_{k-1,i}$.
$\lambda_{(-)}^{(i,j)}$	nombre moyen de cibles dans le groupe étiqueté ℓ_i selon l'hypothèse d'état de groupe $\xi_{k-1}^{(i,j)}$.
$\lambda_{(+)}^{(i,j)}$	nombre moyen de cibles prédit dans le groupe étiqueté ℓ_i selon l'hypothèse d'état de groupe $\xi_k^{(i,j)}$.
$\lambda_{(*)}^{(i,j)}$	nombre moyen de cibles mis à jour dans le groupe étiqueté ℓ_i selon l'hypothèse d'état de groupe $\xi_k^{(i,j)}$.
$D_{(-)}^{(i,j)}(\mathbf{x}_{k-1} \xi_{k-1}^{(i,j)})$	fonction intensité du groupe étiqueté ℓ_i selon l'hypothèse d'état de groupe $\xi_{k-1}^{(i,j)}$.
$D_{(+)}^{(i,j)}(\mathbf{x}_k \xi_k^{(i,j)})$	fonction intensité prédit du groupe étiqueté ℓ_i selon l'hypothèse d'état de groupe $\xi_k^{(i,j)}$.
$D_{(*)}^{(i,j)}(\mathbf{x}_k \xi_k^{(i,j)})$	fonction intensité mise à jour du groupe étiqueté ℓ_i selon l'hypothèse d'état de groupe $\xi_k^{(i,j)}$.
$J_{(-)}^{(i,j)}$	nombre de gaussiennes pour représenter la fonction intensité du groupe étiqueté ℓ_i selon l'hypothèse d'état de groupe $\xi_{k-1}^{(i,j)}$.
$J_{(+)}^{(i,j)}$	nombre de gaussiennes pour représenter la fonction intensité prédite du groupe étiqueté ℓ_i selon l'hypothèse d'état de groupe $\xi_k^{(i,j)}$.
$J_{(*)}^{(i,j)}$	nombre de gaussiennes pour représenter la fonction intensité mise à jour du groupe étiqueté ℓ_i selon l'hypothèse d'état de groupe $\xi_k^{(i,j)}$.
$m_{(-)}^{(i,j,\iota)}$	moyenne de la $\iota^{\text{ème}}$ gaussienne, de la $j^{\text{ème}}$ particule pour représenter la fonction intensité liée à l'hypothèse d'état de groupe $\xi_{k-1}^{(i,j)}$.
$m_{(+)}^{(i,j,\iota)}$	moyenne de la $\iota^{\text{ème}}$ gaussienne, de la $j^{\text{ème}}$ particule pour représenter la fonction intensité prédite liée à l'hypothèse d'état de groupe $\xi_k^{(i,j)}$.
$m_{(*)}^{(i,j,\iota)}$	moyenne de la $\iota^{\text{ème}}$ gaussienne, de la $j^{\text{ème}}$ particule pour représenter la fonction intensité mise à jour liée à l'hypothèse d'état de groupe $\xi_k^{(i,j)}$.
$P_{(-)}^{(i,j,\iota)}$	matrice de covariance de la $\iota^{\text{ème}}$ gaussienne, de la $j^{\text{ème}}$ particule pour représenter la fonction intensité liée à l'hypothèse d'état de groupe $\xi_{k-1}^{(i,j)}$.
$P_{(+)}^{(i,j,\iota)}$	matrice de covariance de la $\iota^{\text{ème}}$ gaussienne, de la $j^{\text{ème}}$ particule pour représenter la fonction intensité prédite liée à l'hypothèse d'état de groupe $\xi_k^{(i,j)}$.

$P_{(*)}^{(i,j,\iota)}$	matrice de covariance de la $\iota^{\text{ème}}$ gaussienne, de la $j^{\text{ème}}$ particule pour représenter la fonction intensité mise à jour liée à l'hypothèse d'état de groupe $\xi_k^{(i,j)}$.
$p_S^{(\ell_i)}$	probabilité de survie d'une cible du groupe étiqueté ℓ_i .
m_i	cardinal du groupe étiqueté ℓ_i .
$p_{Sg,k}^{(\ell_i)}(X_{k-1,i}, \xi_{k-1,i})$	probabilité de survie du groupe étiqueté ℓ_i .
$s_{(+),S}^{(\ell_i)}$	probabilité d'existence du groupe étiqueté ℓ_i selon l'hypothèse de sa survie.
$\eta_S^{(\ell_i)}$	terme de normalisation du groupe étiqueté ℓ_i selon l'hypothèse de sa survie.
$\mathcal{L}^{(\ell_i)}(\cdot \xi_{k-1}^{(i,j)})$	loi de propagation pour l'instant k à partir de la particule $\xi_{k-1}^{(i,j)}$.
$f_k^{(\ell_i)}(\mathbf{x}_k \mathbf{x}_{k-1}, \xi_{k-1,i})$	densité de transition de l'état \mathbf{x}_{k-1} vers l'état \mathbf{x}_k dépendante de l'hypothèse d'état de groupe $\xi_{k-1,i}$.
$F_k^{(i,j)}$	matrice de transition du modèle d'état dépendante de l'hypothèse d'état de groupe $\xi_{k-1,i}$.
$Q_k^{(i,j)}$	matrice de covariance du modèle d'état dépendante de l'hypothèse d'état de groupe $\xi_{k-1,i}$.
$\pi_{(+),S}^{(\ell_i)}(X_{k,i} \xi_{k,i})$	densité multi-cibles prédite du groupe étiqueté ℓ_i sous l'hypothèse de sa survie.
$\tilde{I}_{(+)}$	hypothèse d'un jeu d'étiquettes, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{F}(\mathbb{L}_{(+)})$.
$\tilde{\Theta}_{\tilde{I}_{(+)}}$	ensemble des hypothèses d'association à des groupes de mesures pour le groupe de cibles représenté par $\tilde{I}_{(+)}$.
Z_k	ensemble fini aléatoire multi-mesures de l'instant k .
$\mathbf{z}_{k,l}$	$l^{\text{ème}}$ mesure de Z_k .
$h_k(m_{(+)}^{(i,j,\iota)})$ ou $\epsilon_{(+)}^{(i,j,\iota)}$	pseudo-mesure correspondant à $m_{(+)}^{(i,j,\iota)}$.
$H_k^{(i,j,\iota)}$	matrice jacobienne calculée en $m_{(+)}^{(i,j,\iota)}$ pour linéariser $h_k(\cdot)$ autour de ce point.
$S_k^{(i,j,\iota)}$	matrice d'innovation dont l'expression dépend de $H_k^{(i,j,\iota)}$.
γ_g	seuil de <i>gating</i> .
p_g	probabilité de <i>gating</i> .
$F_{\chi_2^2}^{-1}$	fonction de répartition inverse de la loi du χ_2 à deux degrés de liberté.
$Z_k^{(i)}$	sous-groupe de mesures de Z_k associable au groupe étiqueté ℓ_i .
$\mathcal{F}(Z_k^{(i)})$	ensemble des ensembles de mesures constituables à partir de $Z_k^{(i)}$.
$\eta_{Z_k}^{(\tilde{\theta})}(\ell_i)$	terme de normalisation lié au groupe étiqueté ℓ_i selon une association $\tilde{\theta}$ pointant sur un groupe de mesures dans Z_k .
$X_{k,i}^{(j)}$	ensemble des pistes extraites à partir de la fonction intensité (i, j) .
$\psi_{Z_k}(X_{k,i}^{(j)}, \xi_k^{(i,j)}; \tilde{\theta})$	vraisemblance entre $X_{k,i}^{(j)}$ et un groupe de mesures selon une association $\tilde{\theta}$ pointant sur un groupe de mesures dans Z_k .

ρ_{PHD}	seuil d'extraction de piste.
$\mathbb{1}_{\tilde{I}_{(+)}(\ell_i)}$	fonction d'appartenance valant 1 si $\ell_i \in \tilde{I}_{(+)}$ et 0 sinon.
$K_k^{(i,j,\ell)}$	gain de Kalman pour la gaussienne correspondant au triplet (i, j, ℓ) .
$P_{*-}^{(i,j,\ell)}$	matrice de covariance mise à jour dans l'hypothèse où une détection est disponible pour la gaussienne correspondant au triplet (i, j, ℓ) .
$p_D^{(\ell_i)}$	probabilité de détection d'une cible appartenant au groupe étiqueté ℓ_i .
$\omega_{(*-)}^{(i,j,(l-1)J_{(+)}^{(i,j)}+\ell)}$	poins mis à jour pour la gaussienne correspondant au triplet (i, j, ℓ) dans le cas où la détection est $\mathbf{z}_{k,l}$.
$ Z_k $	cardinal de Z_k .
$\tilde{\mathbf{v}}_{k,i}$	vitesse du groupe étiqueté ℓ_i à l'instant k .
$v_{k,i}^{(x)}$	abscisse de $\tilde{\mathbf{v}}_{k,i}$.
$v_{k,i}^{(y)}$	ordonnée de $\tilde{\mathbf{v}}_{k,i}$.
$\beta_{k,i,j}$	variation propre de la vitesse de la cible j par rapport à $\tilde{\mathbf{v}}_{k,i}$ à l'instant k .
$\beta_{k,i,j}^{(x)}$	abscisse de $\beta_{k,i,j}$.
$\beta_{k,i,j}^{(y)}$	ordonnée de $\beta_{k,i,j}$.
$\mathbf{x}_{k,i,j}$	vecteur d'état à l'instant k de la $j^{\text{ième}}$ cible du $i^{\text{ième}}$ groupe.
$x_{k,i,j}$	abscisse de position de $\mathbf{x}_{k,i,j}$.
$\dot{x}_{k,i,j}$	abscisse de vitesse de $\mathbf{x}_{k,i,j}$.
$y_{k,i,j}$	ordonnée de position de $\mathbf{x}_{k,i,j}$.
$\dot{y}_{k,i,j}$	ordonnée de vitesse de $\mathbf{x}_{k,i,j}$.
$x_k^{(r)}$	abscisse de position du radar à l'instant k .
$y_k^{(r)}$	ordonnée de position du radar à l'instant k .
$\mathbf{u}_{k,i,j}$	bruit d'évolution de la position de la cible (i, j) .
$u_{k,i,j}^{(x)}$	abscisse de $\mathbf{u}_{k,i,j}$.
$u_{k,i,j}^{(y)}$	ordonnée de $\mathbf{u}_{k,i,j}$.
$f_k^{(v)}(\cdot, \cdot)$	fonction de transition sur la vitesse de groupe.
$f_k^{(\beta)}(\cdot, \cdot)$	fonction de transition sur les variations propres des vitesses des cibles.
$\mathbf{q}_{k,i}$	bruit d'évolution de la vitesse du groupe i .
$q_{k,i}^{(x)}$	abscisse de $\mathbf{q}_{k,i}$.
$q_{k,i}^{(y)}$	ordonnée de $\mathbf{q}_{k,i}$.
$\mathbf{w}_{k,i,j}$	bruit d'évolution de la variation propre sur la vitesse de la cible (i, j) .
$w_{k,i,j}^{(x)}$	abscisse de $\mathbf{w}_{k,i,j}$.
$w_{k,i,j}^{(y)}$	ordonnée de $\mathbf{w}_{k,i,j}$.
R	matrice de covariance du bruit de mesure.
σ_r	écart-type du bruit de mesure en distance.
σ_θ	écart-type du bruit de mesure en azimuth.

Introduction

Le radar est un système électronique permettant d'explorer une région spatiale distante en exploitant la propagation des ondes électromagnétiques. Son objectif est notamment d'évaluer les distances, les positions angulaires ou encore les vitesses d'objets présents dans la direction d'observation du radar. Il a d'abord trouvé un usage militaire durant la seconde guerre mondiale dans le cadre de la surveillance pour la défense aérienne. Son développement se traduit maintenant par son utilisation dans une grande variété de domaines comme la météorologie, l'exploration spatiale, l'automobile, le contrôle du trafic aérien, la cartographie, l'imagerie ou encore la navigation. Dans sa composante aéroportée, le radar continue d'être utilisé pour la surveillance aérienne, maritime et terrestre. Les radars modernes ne se contentent pas de fournir des mesures interprétées par un opérateur. Ils sont généralement adossés à une chaîne de traitement de signal numérique. C'est dans ce cadre que s'inscrivent les traitements de pistage. Ces derniers sont élaborés pour estimer au cours du temps les trajectoires des cibles présentes dans une région d'observation et ce, en dépit des nombreuses incertitudes. En effet, un certain nombre de facteurs peuvent avoir un impact sur un pistage, tels que :

- les bruits de mesure qui induisent un décalage entre la position réelle d'un objet et celle mesurée par le radar,
- l'incertitude sur le nombre d'objets présents dans une région d'observation,
- les détections manquées à cause d'une rétrodiffusion trop faible par les objets d'intérêt,
- les fausses alarmes, qui sont des détections consécutives à la rétrodiffusion de l'onde par l'environnement,
- ou encore, les cibles spatialement proches et dont les trajectoires peuvent se croiser.

Dans le contexte initial de surveillance aérienne, ces incertitudes étaient peu fréquentes et peu critiques pour le pistage. Ce dernier était principalement constitué de l'estimation des trajectoires des cibles avec un filtre de type Kalman. Avec l'augmentation de la sensibilité des radars et la complexification des configurations observées, des traitements de pistage plus élaborés sont apparus. Lorsque des fausses alarmes sont présentes ou que deux cibles donnent lieu à deux mesures de positions proches, la problématique de l'association des mesures à leur piste respective se pose. Pour répondre à ce type de problèmes, des algorithmes d'association tels que le *nearest neighbour* et le *global nearest neighbour* ont vu le jour permettant d'attribuer une mesure à une piste selon un critère de proximité. Cependant, ce type de décision peut mettre en défaut le pistage en cas de mauvaise décision. Pour limiter ce risque, des algorithmes fondés sur des hypothèses plus larges ont été proposés tels que les filtres *probabilistic data association*, *joint probabilistic data association* et *multiple hypothesis tracking*. Les deux premiers mettent à jour leurs pistes en utilisant toutes les mesures disponibles en fonction de leurs pertinences. Le dernier conserve plusieurs hypothèses d'associations à plusieurs instants successifs et prend une décision *a posteriori*. Dans les trois cas, il ne s'agit plus seulement d'algorithmes complémentaires à un filtre de type Kalman. La récursion bayésienne est assurée par une adaptation du filtre dont les expressions s'en trouvent modifiées. Néanmoins, avec ces algorithmes, l'évaluation du nombre de cibles présentes dans la scène d'observation est traitée séparément du reste de l'estimation. Dans un environnement dense en cibles, cela peut s'avérer problématique. Dans ce cadre, les approches fondées sur les ensembles finis aléatoires ont été proposées à partir des années 2000. Elles se différencient des autres

approches en considérant l'estimation des positions, des vitesses et éventuellement des accélérations des objets d'intérêt conditionnellement à un nombre de cibles. Ce dernier devient une variable aléatoire elle-même estimée. Tous ces éléments sont rassemblés au sein d'un unique objet, à savoir un ensemble fini aléatoire qui représente une configuration multi-cibles complète incluant ses incertitudes. Divers filtres fondés sur ce formalisme ont été élaborés, parmi lesquels les filtres de *probability hypothesis density*, de *cardinalized probability hypothesis density*, les filtres multi-Bernoulli, multi-Bernoulli étiqueté et multi-Bernoulli étiqueté généralisé. Il s'agit d'approximations de l'estimation multi-cibles selon différentes hypothèses sur le type d'ensemble fini aléatoire représentatif de la configuration multi-cibles.

Tous les filtres mentionnés jusque-là mettent en œuvre une récursion bayésienne et s'appuient sur un certain nombre d'hypothèses *a priori*. Il s'agit notamment des modèles de mouvement représentant une hypothèse sur les mouvements potentiels d'une cible. La pertinence du choix du modèle a des conséquences en termes de qualité d'estimation. Un choix erroné peut mettre en défaut le traitement de pistage. Cela devient critique dans le cas où les cibles ont une large capacité de manœuvre ou lorsque les cibles d'une région de surveillance sont disparates du point de vue de leur type de trajectoires, ce qui arrive fréquemment en surveillance terrestre ou maritime. Dans tous ces cas, une unique hypothèse de mouvement ne peut pas être représentative de tous les comportements. À nouveau, l'élaboration du traitement de pistage peut s'appuyer sur des solutions algorithmiques adaptées permettant par exemple d'utiliser des modèles multiples, ou encore de classer les cibles afin d'exploiter un jeu adapté de modèles.

D'autres axes permettent d'injecter un surcroît d'information pour améliorer le pistage, notamment avec l'utilisation de mesures complémentaires issues du radar ou d'un autre capteur. Dans ce dernier cas, il s'agit de pistage avec fusion multi-senseurs. Il est également parfois possible de construire un pistage multiplateformes multi-senseurs. L'utilisation de données supplémentaires comme des cartes de réseau routier peuvent également s'avérer pertinente pour certaines applications de pistage.

Dans le cadre de cette thèse, nous présentons deux solutions algorithmiques adaptées à deux contextes de pistage différents.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à une approche conjointe de pistage et de classification dont le but est d'être robuste aux fausses alarmes. Pour ce faire, nous nous appuyons sur des filtres de Bernoulli fondés sur le formalisme des ensembles finis aléatoires. Il s'agit de filtres mono-cibles réputés pour leur capacité à gérer les fausses alarmes et les non-détections. L'approche étudiée dans cette thèse propose également d'avoir recours à l'estimation de la longueur de la cible grâce à une mesure radar supplémentaire d'étalement distance. Cette démarche a déjà montré son intérêt dans le cadre de la classification en tant que paramètre fortement discriminant. L'algorithme développé combine une approche conjointe de pistage et de classification avec une estimation fondée sur les ensembles finis aléatoires et sur une mesure complémentaire fournie par le radar.

Dans un second temps, nous nous intéressons au pistage de différents groupes de cibles. Ces derniers sont caractérisés par la coordination des mouvements des cibles appartenant au groupe. Cela correspond à des configurations de convois, de formations ou encore de ralliement. Un état de groupe est supposé avoir une influence sur l'évolution des états de toutes les cibles du groupe. De ce point de vue là, il est indirectement observé par l'intermédiaire des mesures radar qui correspondent aux cibles du groupe. L'intérêt d'opter pour un pistage multi-groupes multi-cibles réside principalement dans l'évaluation automatique de la situation tactique en estimant la constitution de groupes. La solution proposée dans cette thèse s'appuie sur une structure d'ensembles finis aléatoires hiérarchiques décomposant le problème d'estimation multi-groupes multi-cibles en deux niveaux. L'estimation multi-cibles d'un groupe donné se fait conditionnellement à un hypothèse d'état sur ce dernier. L'estimation multi-groupes multi-cibles bénéficie alors d'une évaluation de la pertinence des hypothèses de groupes formulées.

Ce manuscrit de thèse s'organise comme suit.

Dans le chapitre 1, nous rappelons quelques généralités sur le pistage radar. Nous commençons par les éléments fondamentaux de la représentation dans l'espace d'état du système, le filtrage de Kalman et la mise en œuvre d'un filtre bayésien par une approche particulière. Cependant, ces algorithmes ne tiennent pas compte des incertitudes liées à un contexte multi-cibles ou de la présence de fausses alarmes. Nous rappelons alors les solutions pratiques envisageables pour adapter ces traitements à ces problématiques. Le chapitre se poursuit par la présentation du formalisme des ensembles finis aléatoires incorporant la gestion des incertitudes directement dans un problème global d'estimation. Les différents types d'ensembles finis aléatoires sont présentés ainsi que leurs filtres associés. L'utilisation de méthodes fondées sur les ensembles finis aléatoires constitue le fil conducteur de ce manuscrit.

Dans le chapitre 2, une approche conjointe de pistage et de classification est présentée. Les développements théoriques combinent l'aspect conjoint de pistage et de classification, l'utilisation d'un filtre de Bernoulli à modèles multiples et l'intégration de l'estimation de la longueur de la cible. Finalement, le filtre obtenu s'articule autour des étapes classiques de prédiction et de mise à jour. Sa mise en œuvre pratique s'appuie sur des filtres particuliers. Deux solutions de propagation des particules sont envisagées et donnent lieu à quatre versions de filtre selon que l'estimation de la longueur de la cible est active ou non. Le fonctionnement de ces filtres est alors évalué à partir de simulations sur données synthétiques.

Dans les chapitres 3 et 4, nous développons la solution hiérarchique d'estimation multi-groupes multi-cibles. Par souci de clarté, cette présentation est scindée en deux chapitres. Le chapitre 3 concerne le positionnement du problème et le développement théorique de l'algorithme tandis que le chapitre 4 s'attache à présenter sa mise en œuvre pratique et l'évaluation de son fonctionnement par l'intermédiaire de simulations.

De plus, ce manuscrit est composé de cinq annexes.

L'annexe A présente un complément du chapitre 1 sur le filtre de Kalman. L'annexe B donne quelques détails sur le développement de la fonction intensité d'un EFA Poisson. L'annexe C présente le modèle elliptique employé dans le chapitre 2 pour traduire le lien entre la longueur d'une cible et sa mesure d'étalement distance. L'annexe D définit les différents modèles de mouvement employés dans cette thèse. Enfin, l'annexe E présente la construction des fenêtres de validation permettant de limiter le coût calculatoire des traitements en permettant la présélection des mesures pertinentes pour les traitements.

Chapitre 1

Estimation bayésienne pour le pistage d’objets mobiles

Sommaire

1.1	Introduction	29
1.2	Estimation bayésienne fondée sur une représentation mono-cible	30
1.2.1	Représentation dans l’espace d’état	30
1.2.2	Filtre bayésien	31
1.2.3	Filtre de Kalman et ses variantes	32
1.2.4	Filtre particulaire	34
1.2.5	Mise en œuvre pratique, association et <i>gating</i>	39
1.3	Estimation bayésienne fondée sur les ensembles finis aléatoires	40
1.3.1	Définition des ensembles finis aléatoires (EFAs)	41
1.3.2	État multi-cibles et ensemble multi-mesures fondés sur les EFAs	42
1.3.3	Filtre bayésien multi-cibles fondé sur le formalisme des EFAs	49
1.3.4	Filtre <i>probability hypothesis density</i> (PHD)	50
1.3.5	Filtres fondés sur les EFAs multi-Bernoulli et multi-Bernoulli étiquetés	51
1.3.6	Définition de la métrique <i>optimal subpattern assignment</i> (OSPA)	58
1.4	Conclusions et axes de travail dans le cadre de la thèse	58

1.1 Introduction

Le pistage d’objets mobiles consiste à estimer leur trajectoire à partir de mesures bruitées provenant d’un capteur, comme un radar ou une caméra vidéo. Dans cette thèse, les modèles et les algorithmes sont appliqués à des mesures radar mais peuvent se décliner au-delà de ce cadre particulier. Différentes techniques d’estimation bayésienne pour le pistage de cibles mobiles sont présentées dans ce chapitre. Elles traduisent la dynamique des objets au travers d’hypothèses de modèles de mouvement et exploitent les informations apportées par les mesures successives pour estimer les états des objets, c’est-à-dire les variables d’intérêt comme leur position, leur vitesse ou leur accélération.

Les techniques présentées peuvent être séparées en deux catégories selon qu’une ou plusieurs cibles se trouvent dans la région d’observation ou que plusieurs mesures sont disponibles simultanément. Dans le premier cas, la trajectoire d’une unique cible est estimée et sa présence dans la région d’observation ne fait aucun doute. Dans la suite de cette thèse, ce cas est qualifié de cas mono-cible et il est traité par des filtres de type Kalman [Kal60] ou particulaire [Dou01]. Dans le second cas, une ou plusieurs cibles peuvent être présentes dans la région d’observation et il existe une incertitude sur l’origine des mesures. Cette dernière peut être consécutive à la proximité de deux objets ou au phénomène des

fausses alarmes, qui sont des mesures dues à la rétro-diffusion de l'onde radar par l'environnement et ne correspondent pas à la détection d'un objet d'intérêt. Ce second cas est désigné comme multi-cibles dans la suite de cette thèse.

Généralement, lorsque plusieurs cibles sont suffisamment éloignées les unes des autres, il est possible de décomposer un cas multi-cibles en plusieurs cas mono-cible indépendants. Cette démarche, qui requiert un pré-traitement, n'est plus applicable dès lors que les cibles se rapprochent les unes des autres.

Pour gérer une configuration multi-cibles ou des fausses alarmes, une première approche consiste à mettre en œuvre des algorithmes de type *nearest neighbor* (NN), *global nearest neighbor* (GNN) [Bla99], *probabilistic data association* (PDA) [Bar09], *joint probabilistic data association* (JPDA) [Bar11] ou *multiple hypothesis tracking* (MHT) [Rei79, Kur88, Kur91]. Ils permettent d'utiliser des techniques d'estimation directement dérivées des approches mono-cible mais ne résolvent pas l'incertitude sur le nombre de cibles présentes dans la région d'observation. Ils ne sont pas présentés dans cette thèse car une littérature importante existe sur le sujet [Bar11].

Une seconde approche, plus récente, fondée sur le formalisme des statistiques des ensembles finis (*finite set statistics*, FISST) [Mah03], consiste à se placer dans un contexte multi-objets et à estimer une situation multi-cibles globale. Cette seconde catégorie repose sur une modélisation en ensembles finis aléatoires (EFAs). Un EFA est un ensemble dont les éléments sont les vecteurs d'état de toutes les cibles présentes dans la région de surveillance. Le nombre d'éléments de l'EFA est lui-même une variable aléatoire pouvant évoluer au cours du temps. Cette particularité permet non-seulement de représenter plusieurs objets en même temps, mais également de formaliser l'évolution du nombre d'objets présents dans la région d'observation. Les estimateurs multi-objets fondés sur les EFAs rassemblent les filtres allant du filtre *probability hypothesis density* (PHD) [Mah03] au filtre δ -*generalized LMB* (δ -GLMB) [Vo13a].

Dans la suite de ce chapitre, nous rappelons d'abord quelques concepts sur l'estimation bayésienne fondée sur une représentation mono-cible. Nous présentons ensuite celle spécialement développée dans un contexte multi-objets et tirant avantage du formalisme des EFAs.

1.2 Estimation bayésienne fondée sur une représentation mono-cible

Les approches bayésiennes séquentielles s'appuient sur une modélisation particulière, dite représentation dans l'espace d'état (REE), présentée dans le paragraphe suivant. Les algorithmes les plus connus sont ensuite rappelés.

1.2.1 Représentation dans l'espace d'état

Dans cette partie, la REE à temps discret est considérée. Elle s'appuie sur la définition, à chaque instant k , d'un vecteur d'état noté \mathbf{x}_k qui prend ses valeurs dans un espace d'état noté \mathcal{X} . Nous faisons l'hypothèse que si \mathbf{x}_k est de dimension p , alors $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^p$. Pour une application de pistage, les éléments du vecteur d'état sont généralement les coordonnées de position, vitesse et accélération d'un objet mobile. Ce vecteur d'état est indirectement observé et donne lieu à un vecteur de mesure noté \mathbf{z}_k .

Le modèle d'évolution de l'état constitue une hypothèse *a priori* sur la dynamique de \mathbf{x}_k d'un instant à l'autre. Il se traduit par :

$$\mathbf{x}_k = f_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k), \quad (1.1)$$

avec $f_k(\cdot)$ la fonction de transition du modèle permettant de représenter la part déterministe de l'évolution du vecteur d'état. \mathbf{u}_k est le bruit de modèle traduisant la part aléatoire de l'évolution. Dans cette thèse, on se place dans le cas particulier où le bruit de modèle est additif blanc gaussien et centré. L'équation (1.1) devient alors :

$$\mathbf{x}_k = f_k(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{u}_k \quad (1.2)$$

Le modèle de mesure traduit le lien entre l'état et sa mesure correspondante à un instant donné. Il est défini de la manière suivante :

$$\mathbf{z}_k = h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k), \quad (1.3)$$

avec $h_k(\cdot)$ la fonction de mesure et \mathbf{w}_k le bruit de mesure. Comme pour l'équation d'état, on se place ici dans le cas particulier où le bruit de mesure est additif blanc gaussien et centré. De plus, \mathbf{w}_k n'est pas corrélé avec le bruit de modèle \mathbf{u}_k ¹. L'équation de mesure vérifie alors :

$$\mathbf{z}_k = h_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k. \quad (1.4)$$

La chaîne des états cachés décrivant cette REE est représentée sur la figure 1.1.

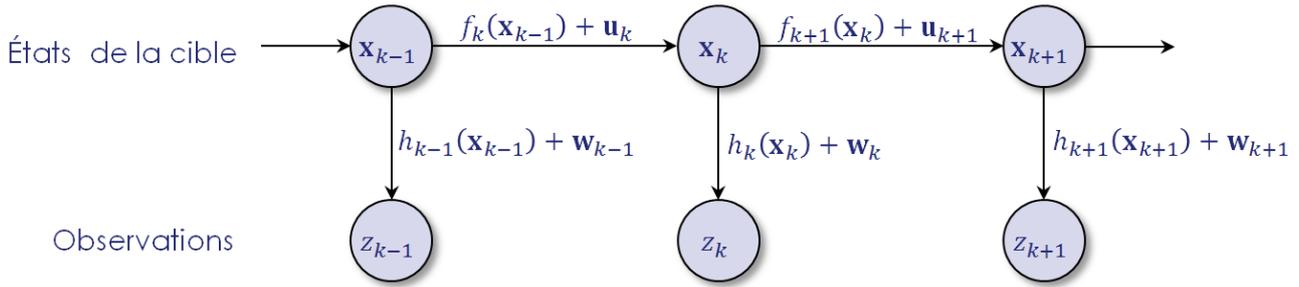


FIGURE 1.1 – Chaîne des états cachés.

1.2.2 Filtre bayésien

L'objectif d'un traitement de pistage bayésien est d'estimer récursivement la densité de probabilité *a posteriori* définie sur l'espace d'état \mathcal{X} et notée $p_{k|k}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$ pour un vecteur $\mathbf{x}_k \in \mathcal{X}$, avec $\mathbf{z}_{1:k}$ l'ensemble des mesures disponibles entre les instants 1 et k .

L'estimation à l'instant courant se fonde sur la densité de probabilité estimée à l'instant précédent, c'est-à-dire $p_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1})$, le modèle d'état (1.2), l'ensemble des mesures $\mathbf{z}_{1:k}$ jusqu'à l'instant k et le modèle de mesure (1.4). Elle est réalisée en deux étapes.

L'étape de prédiction consiste à exploiter le modèle d'état (1.2) pour exprimer la densité de probabilité prédite grâce à l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$p_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p_k(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}. \quad (1.5)$$

où $p_k(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ désigne la densité de transition qui dépend de (1.2).

De manière analogue, en fonction du modèle de mesure décrit dans l'équation (1.4), la fonction de vraisemblance entre le vecteur de mesure \mathbf{z}_k et le vecteur d'état \mathbf{x}_k est notée $g_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)$. L'étape de mise à jour s'écrit alors en exploitant la règle de Bayes :

$$p_{k|k}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{g_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})}{\int g_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k}. \quad (1.6)$$

Les intégrales intervenant dans les équations (1.5) et (1.6) ne peuvent généralement pas être calculées analytiquement. Pour résoudre cette difficulté, différents algorithmes ont été proposés dans la littérature fondés soit sur une solution valable sous certaines hypothèses, soit sur une approximation. Dans la suite, les cas spécifiques du filtre de Kalman et du filtre particulaire sont présentés.

1. Cette hypothèse n'est requise que pour certains algorithmes d'estimation dont les variantes du filtre de Kalman.

1.2.3 Filtre de Kalman et ses variantes

Le filtre de Kalman, initialement proposé dans [Kal60], est un cas particulier du filtre bayésien [Ho64] défini aux équations (1.5) et (1.6). Il s'appuie notamment sur une REE linéaire gaussienne, pour laquelle l'équation de modèle (1.2) devient :

$$\mathbf{x}_k = F_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_k, \quad (1.7)$$

avec F_k la matrice de transition traduisant l'évolution déterministe du système et \mathbf{u}_k le bruit de modèle, blanc gaussien centré et de matrice de covariance Q_k . De manière équivalente, la densité de transition peut s'écrire comme suit :

$$p_k(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; F_k \mathbf{x}_{k-1}, Q_k). \quad (1.8)$$

Sous l'hypothèse d'une forme linéaire gaussienne, l'équation de mesure (1.4) peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\mathbf{z}_k = H_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad (1.9)$$

avec H_k la matrice de mesure et \mathbf{w}_k le bruit de mesure, blanc gaussien centré de matrice de covariance R_k , non corrélé avec \mathbf{u}_k . Comme pour l'équation de modèle, cela se traduit par une forme explicite de la vraisemblance :

$$g_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; H_k \mathbf{x}_k, R_k). \quad (1.10)$$

Avec le filtre de Kalman, la densité de probabilité *a posteriori* estimée est une densité gaussienne, définie pour l'instant $k - 1$ de la manière suivante :

$$p_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}), \quad (1.11)$$

avec $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ la moyenne et $P_{k-1|k-1}$ la matrice de covariance associées à la densité de probabilité $p_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1})$. Elles vérifient :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} = \int \mathbf{x}_{k-1} p_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (1.12)$$

$$P_{k-1|k-1} = \int (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1})^T p_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}. \quad (1.13)$$

En combinant (1.5) et (1.8), la densité prédite par le filtre de Kalman s'écrit :

$$p_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; F_k \mathbf{x}_{k-1}, Q_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}. \quad (1.14)$$

L'expression (1.14) peut être reformulée comme suit :

$$\begin{aligned} p_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) &= \int \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; F_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k) \\ &\times \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + K_{p,k} (\mathbf{x}_k - F_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}), (I - K_{p,k} F_k) P_{k-1|k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

avec :

$$K_{p,k} = P_{k-1|k-1} F_k^T (F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k)^{-1}. \quad (1.16)$$

Les détails du calcul sont présentés en annexe A.2. L'équation (1.15) se simplifie alors et donne :

$$p_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; F_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k). \quad (1.17)$$

Ainsi, la densité prédite reste gaussienne. Ses paramètres de moyenne et de covariance peuvent être identifiés et notés de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= F_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \\ P_{k|k-1} &= F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k.\end{aligned}\tag{1.18}$$

La mise à jour, à partir de \mathbf{z}_k , s'effectue alors en combinant (1.6), (1.10) et (1.17), ce qui donne :

$$p_{k|k}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{z}_k; H_k \mathbf{x}_k, R_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, P_{k|k-1})}{\int \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; H_k \mathbf{x}_k, R_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k}.\tag{1.19}$$

Sous réserve que $H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k$ soit inversible, l'intégrande du numérateur de (1.19) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\mathbf{z}_k; H_k \mathbf{x}_k, R_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) &= \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k) \\ &\times \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}), (I - K_k H_k) P_{k|k-1}),\end{aligned}\tag{1.20}$$

avec K_k le gain de Kalman dont l'expression est :

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1}.\tag{1.21}$$

Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à l'annexe A.3.

Dans (1.19), le dénominateur est intégré selon \mathbf{x}_k . En tirant avantage de (1.20), (1.19) se simplifie et on aboutit à l'expression de la densité de probabilité *a posteriori* de l'état suivante :

$$p_{k|k}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}), (I - K_k H_k) P_{k|k-1}).\tag{1.22}$$

La forme conjuguée² du filtre de Kalman apparaît ici, puisque la densité de probabilité *a posteriori* est également gaussienne de paramètres de moyenne et de matrice de covariance :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}), \\ P_{k|k} &= (I - K_k H_k) P_{k|k-1}.\end{aligned}\tag{1.23}$$

Avec le filtre de Kalman, les densités de probabilité prédite et *a posteriori* sont toutes les deux gaussiennes. Dans son implémentation, l'approche classique consiste à propager uniquement les valeurs des paramètres de moyenne et de matrice covariance dont les expressions analytiques sont données en (1.18) et (1.23). Il est important de noter que la moyenne $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ correspond au vecteur d'état estimé au sens de la moyenne *a posteriori* (*expected a posteriori* - EAP). Le filtre de Kalman permet donc de minimiser l'erreur quadratique moyenne de l'estimation.

D'autres approches permettent d'obtenir les expressions des moyennes et des matrices de covariance en calculant directement $\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}]$ et $P_{k|k} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})^T (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}) | \mathbf{z}_{1:k}]$ [Naj06]. Quelle que soit la méthode utilisée, les paramètres calculés pour une récursion du filtre de Kalman sont les suivants :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1},\tag{1.24}$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k,\tag{1.25}$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1},\tag{1.26}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}),\tag{1.27}$$

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1},\tag{1.28}$$

2. La notion de forme conjuguée traduit le fait que la densité *a posteriori* de l'instant précédent est de la même famille que celle de l'instant courant. Dans le cas présent, il s'agit de gaussiennes. Ce genre de propriété permet de maintenir une même forme d'approximation de la densité au cours des itérations de filtrage.

avec $\mathbf{x}_1 \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_1; \hat{\mathbf{x}}_{1|1}, P_{1|1})$, le vecteur d'état à l'instant initial.

Si les modèles d'état et de mesure restent les mêmes au cours du temps, alors le filtre de Kalman converge vers une solution pour laquelle le gain est une constante dont la valeur s'exprime en fonction de la matrice de covariance de l'erreur vérifiant une équation de Ricatti [Naj06]. L'avantage de ce genre de filtre réside dans l'économie en termes de ressources calculatoires mobilisées pour inverser les matrices lors du calcul du gain puisque cela revient à ne propager que le moment de premier ordre de la densité de probabilité *a posteriori*.

Une autre remarque concerne les hypothèses de linéarité et de gaussianité des équations d'état et de mesure. En effet, dans le cas où ces dernières ne sont pas respectées, des approximations fondées sur le formalisme du filtre de Kalman ont été proposées. Dans le cas spécifique de faibles non-linéarités, un premier type d'approximation s'appuie sur la linéarisation des équations d'état et de mesure à partir d'un développement de Taylor au premier ou au second ordre conduisant au filtre de Kalman étendu (FKE) dans ses différentes versions [Ath68, Rot11]. Sinon, un second type d'approximations consiste à construire un filtre par sigma points comme le filtre de Kalman sans parfum (FKSP) (*unscented Kalman filter* (UKF) en anglais) [Wan01], les filtres par différence centrale (*central difference Kalman filter* (CDKF) en anglais) ou encore les filtres de Kalman quadrature ou cubature [Qui00, Ara09].

Lorsque les équations de modèle et de mesure traduisent un comportement fortement non-linéaire et/ou non-gaussien, une solution consiste à utiliser un filtre de type particulière. Avec ce genre de filtre, la distribution *a posteriori* de l'état n'est plus nécessairement gaussienne. Cette dernière doit cependant être représentée par un jeu d'échantillons qui évoluent à chaque instant. Une description générale du filtre particulière est fournie dans la partie suivante.

1.2.4 Filtre particulière

Le filtre particulière (FP) ou méthode de Monte-Carlo séquentielle (*sequential* Monte-Carlo (SMC) *method*) [Dou01] permet d'approcher n'importe quelle densité de probabilité par un ensemble fini d'échantillons. Ces échantillons se présentent sous la forme de particules et de leur poids associé. Une particule peut être vue comme une hypothèse de vecteur d'état, dont la pertinence pour représenter l'état réel est traduite par son poids. Il est important de noter qu'une particule courante est issue d'une lignée de particules antérieures. Ainsi, une particule donnée ne constitue pas seulement une hypothèse sur l'état courant mais également une hypothèse de trajectoire complète. La densité *a posteriori* pour un filtre particulière peut alors s'approximer de la manière suivante à l'instant $k - 1$:

$$p_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{1:k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) \approx \sum_{i=1}^N \omega_{k-1|k-1}^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_{1:k-1}}^{(i)}(\mathbf{x}_{1:k-1}), \quad (1.29)$$

où N désigne le nombre de particules, $\{\mathbf{x}_{1:k-1}^{(i)}\}_{i=1,\dots,N}$ est l'ensemble des historiques de particules et $\{\omega_{k-1|k-1}^{(i)}\}_{i=1,\dots,N}$ est l'ensemble des poids correspondants. En outre, $\delta_{\mathbf{x}_{1:k-1}}^{(i)}(\mathbf{x}_{1:k-1})$ renvoie à la mesure de Dirac.

Le filtre particulière opère en deux étapes : une étape de prédiction et une étape de mise à jour.

Étape de prédiction

L'étape de prédiction se construit à partir de la règle de Bayes. Il vient :

$$p_{k|k-1}(\mathbf{x}_{1:k} | \mathbf{z}_{1:k-1}) = p_k(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{1:k-1}) p_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{1:k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}). \quad (1.30)$$

La densité de transition $p_k(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{1:k-1})$ reste définie par l'équation de modèle (1.2). Si l'état de l'instant courant ne dépend que de l'état de l'instant précédent, la densité de transition se réduit à :

$$p_k(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{1:k-1}) = p_k(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}). \quad (1.31)$$

Le principe du filtre particulaire consiste à tirer des particules pour l'instant k , notées $\{\mathbf{x}_k^{(i)}\}_{i=1,\dots,N}$, afin de représenter la densité prédite. La solution la plus simple est de tirer les particules selon la densité de transition, mais ce n'est pas nécessairement la plus pertinente. Dans le cas général, il est possible de propager les particules avec une densité $q_k(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:k})$. Cette approche, appelée échantillonnage d'importance, repose sur l'équation suivante :

$$p_k(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) = q_k(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:k}) \frac{p_k(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{q_k(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:k})}, \quad (1.32)$$

à condition que le support de $p_k(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)})$ soit inclus dans celui de $q_k(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:k})$.

L'idée est alors d'effectuer le tirage des particules selon $q_k(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:k})$ et de compenser ce tirage par un calcul analytique au niveau des poids. Ainsi, la propagation des particules est effectuée comme suit :

$$\mathbf{x}_k^{(i)} \sim q_k(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:k}), \quad (1.33)$$

$$\omega_{k|k-1}^{(i)} \propto \frac{p_k(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{q_k(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:k})} \omega_{k-1|k-1}^{(i)}. \quad (1.34)$$

L'utilisation d'une densité $q_k(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:k})$ qui tient compte de la mesure courante \mathbf{z}_k , de l'équation d'état (1.2) et de l'équation de mesure (1.4) renvoie à une propagation optimale des particules. Elle permet de générer des particules pertinentes du point de vue des modèles et de la mesure.

En guise d'alternative, la propagation peut utiliser la loi de transition *a priori* $p_k(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)})$ ou encore la loi de vraisemblance issue du modèle de mesure.

Quand les particules sont tirées avec la densité de transition, leur propagation se fonde sur les expressions suivantes, pour $i = 1, \dots, N$:

$$\mathbf{x}_k^{(i)} \sim p_k(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}), \quad (1.35)$$

$$\omega_{k|k-1}^{(i)} = \omega_{k-1|k-1}^{(i)}. \quad (1.36)$$

Quelle que soit la stratégie de propagation choisie, l'équation de prédiction (1.30) se développe en utilisant (1.29) comme suit :

$$p_{k|k-1}(\mathbf{x}_{1:k}|\mathbf{z}_{1:k-1}) \approx \sum_{i=1}^N \omega_{k-1|k-1}^{(i)} p_k(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{1:k-1}^{(i)}) \delta_{\mathbf{x}_{1:k-1}^{(i)}}(\mathbf{x}_{1:k-1}). \quad (1.37)$$

Par l'intermédiaire de l'opération de propagation des particules, (1.37) devient :

$$p_{k|k-1}(\mathbf{x}_{1:k}|\mathbf{z}_{1:k-1}) \approx \sum_{i=1}^N \omega_{k|k-1}^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_{1:k}^{(i)}}(\mathbf{x}_{1:k}). \quad (1.38)$$

Une fois l'étape de prédiction terminée, l'étape de mise à jour permet de corriger la densité prédite à partir des mesures courantes.

Étape de mise à jour

L'étape de mise à jour s'écrit à partir de l'équation (1.6). Elle fait intervenir le terme de vraisemblance et l'approximation de la densité de probabilité prédite issue de (1.38) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 p_{k|k}(\mathbf{x}_{1:k}|\mathbf{z}_{1:k}) &= \frac{g_k(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k) p_{k|k-1}(\mathbf{x}_{1:k}|\mathbf{z}_{1:k-1})}{\int g_k(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k) p_{k|k-1}(\mathbf{x}_{1:k}|\mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{1:k}}, \\
 &\approx \frac{\sum_{i=1}^N \omega_{k|k-1}^{(i)} g_k(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k^{(i)}) \delta_{\mathbf{x}_{1:k}^{(i)}}(\mathbf{x}_{1:k})}{\sum_{i=1}^N \omega_{k|k-1}^{(i)} g_k(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k^{(i)})}, \\
 &\approx \sum_{i=1}^N \omega_{k|k}^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_{1:k}^{(i)}}(\mathbf{x}_{1:k}).
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

En pratique, le calcul des poids *a posteriori* s'effectue en deux étapes. La première permet de tenir compte de la vraisemblance et donne :

$$\tilde{\omega}_{k|k}^{(i)} = \omega_{k|k-1}^{(i)} g_k(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k^{(i)}). \tag{1.40}$$

La seconde étape consiste à re-normaliser ces poids, sachant que leur somme doit être égale à 1 :

$$\omega_{k|k}^{(i)} = \frac{\tilde{\omega}_{k|k}^{(i)}}{\sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_{k|k}^{(i)}}. \tag{1.41}$$

La mise en œuvre pratique du filtre particulaire introduit des problématiques spécifiques, notamment le problème de dégénérescence des particules. Ce dernier est discuté dans la suite.

Dégénérescence et re-échantillonnage

La dégénérescence du filtre particulaire se produit naturellement à cause des tirages aléatoires successifs des particules et des calculs des poids relatifs. Les tirages aléatoires tendent à disperser les particules de plus en plus au cours du temps et leur variance augmente. Après suffisamment d'itérations, une hypothèse de trajectoire, la plus proche de la trajectoire réelle, se voit affecter un poids de 1 tandis que tous les autres poids sont à 0. En effet, les hypothèses les moins pertinentes n'explorent plus qu'une partie de l'espace d'état qui ne présente pas d'intérêt pour estimer la densité *a posteriori*. Pour pallier ce problème, l'étape de re-échantillonnage a été introduite. Elle consiste à éliminer les hypothèses les moins pertinentes et à réaffecter les particules ainsi libérées pour densifier l'exploration d'hypothèses de trajectoires probables. Deux principaux types de filtres particuliers se distinguent. Ceux du type *sampling importance resampling* (SIR), aussi connus sous le nom de *bootstrap* FP, procèdent à un re-échantillonnage à chaque itération. Ceux du type *sampling importance sampling* (SIS) procède à un re-échantillonnage uniquement en cas de besoin. Pour ce faire, la notion de nombre effectif N_{eff} de particules est introduite. Il s'agit d'un indicateur de la dégénérescence du filtre. Il se définit de la manière suivante [Gus10] :

$$N_{eff} = \frac{N}{1 + \frac{\text{Var}(\omega_{k|k}^{(i)})}{(\mathbb{E}[\omega_{k|k}^{(i)}])^2}} = \frac{N}{1 + N^2 \text{Var}(\omega_{k|k}^{(i)})}. \tag{1.42}$$

En pratique cependant, l'approximation suivante est généralement utilisée :

$$N_{eff} \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\omega_{k|k}^{(i)})^2}. \tag{1.43}$$

On peut montrer que la valeur de N_{eff} est comprise entre 1 et N . Lorsque $N_{eff} = 1$, un des poids vaut 1 tandis que tous les autres valent 0. Dans cette configuration, le filtre particulaire est dans un état dit dégénéré. Lorsque $N_{eff} = N$, toutes les particules ont un poids de $1/N$. Elles explorent donc toutes des hypothèses de pertinence équivalente. Le nombre effectif de particules N_{eff} est calculé à chaque itération. S'il se trouve être en dessous d'un certain seuil, le re-échantillonnage est appliqué. Concernant le re-échantillonnage, il s'agit de tirer aléatoirement de nouvelles particules à partir des précédentes. Ainsi, pour $j = 1, \dots, N$, on a :

$$\mathbf{x}_{1:k}^{(j)} \sim \sum_{i=1}^N \omega_{k|k}^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_{1:k}^{(i)}}(\mathbf{x}_{1:k}^{(j)}). \quad (1.44)$$

Cela revient généralement à dupliquer les particules de poids forts et à éliminer les particules de poids faibles. À l'issue du re-échantillonnage, l'ensemble des poids devient $\{\omega_{k|k}^{(j)} = 1/N\}_{j=1, \dots, N}$ car les particules sont équi-distribuées selon l'approximation de la loi *a posteriori*. L'inconvénient du re-échantillonnage est l'appauvrissement de la diversité des particules. Elles se concentrent sur les hypothèses de trajectoires les plus probables au risque de laisser certaines régions de l'espace d'état sans aucune exploration. Dans certains cas, cela peut conduire le filtre particulaire à diverger.

Extraction de l'état courant

En pistage, la densité *a posteriori* d'intérêt est généralement $p_{k|k}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$ à partir de laquelle une estimation de l'état courant est extraite. Cependant, avec un filtre particulaire, comme chaque particule représente une hypothèse de trajectoire, la densité *a posteriori* disponible est $p_{k|k}(\mathbf{x}_{1:k} | \mathbf{z}_{1:k})$. Une solution consiste à marginaliser les états passés pour obtenir $p_{k|k}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$ comme suit :

$$p_{k|k}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N \omega_{k|k}^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_k}(\mathbf{x}_k). \quad (1.45)$$

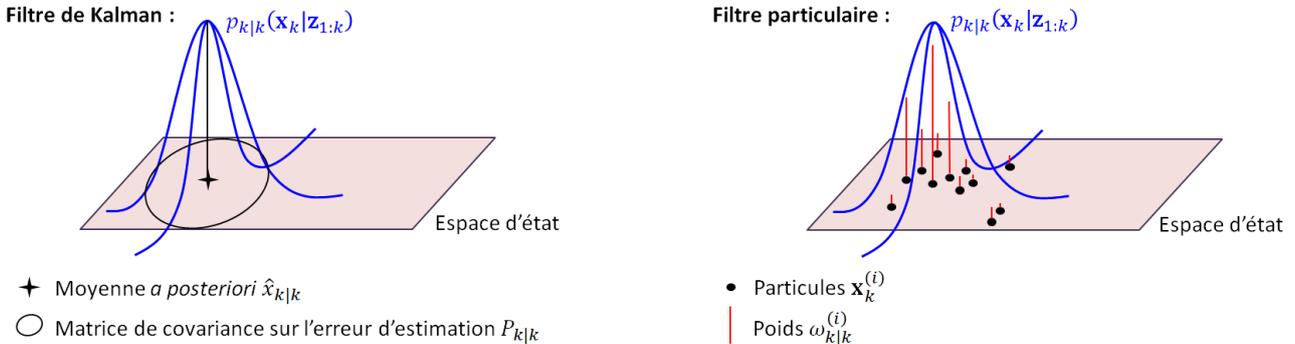


FIGURE 1.2 – Densité *a posteriori* avec un filtre de Kalman et un filtre particulaire.

Dans le paragraphe suivant, nous évoquons le filtre particulaire Rao-Blackwellisé. Cette solution permet de traiter une partie de l'estimation du vecteur d'état par filtrage de Kalman et réserve l'approximation particulaire pour le reste du vecteur d'état.

Filtre particulaire Rao-Blackwellisé

Succinctement, le filtre particulaire Rao-Blackwellisé [Che00, Dou02] s'appuie sur la décomposition de la densité *a posteriori* en différentes densités selon la règle de Bayes :

$$p_{k|k}(\mathbf{x}_{1,1:k}, \mathbf{x}_{2,1:k} | \mathbf{z}_{1:k}) = p_{k|k}(\mathbf{x}_{1,1:k} | \mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{x}_{2,1:k}) p_{k|k}(\mathbf{x}_{2,1:k} | \mathbf{z}_{1:k}). \quad (1.46)$$

Cela permet notamment de marginaliser une partie du vecteur d'état :

$$p_{k|k}(\mathbf{x}_{1,1:k}|\mathbf{z}_{1:k}) = \int p_{k|k}(\mathbf{x}_{1,1:k}|\mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{x}_{2,1:k}) p_{k|k}(\mathbf{x}_{2,1:k}|\mathbf{z}_{1:k}) d\mathbf{x}_{2,1:k}. \quad (1.47)$$

La densité marginale $p_{k|k}(\mathbf{x}_{2,1:k}|\mathbf{z}_{1:k})$ et la densité conditionnelle $p_{k|k}(\mathbf{x}_{1,1:k}|\mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{x}_{2,1:k})$ sont alors estimées en plusieurs temps. Le principe de cette approche est de sélectionner convenablement $\mathbf{x}_{1,1:k}$ et $\mathbf{x}_{2,1:k}$ afin d'estimer $p_{k|k}(\mathbf{x}_{1,1:k}|\mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{x}_{2,1:k})$ par une approche analytique telle que le filtre de Kalman. Ainsi, seule l'estimation de $p_{k|k}(\mathbf{x}_{2,1:k}|\mathbf{z}_{1:k})$ requiert l'utilisation d'un filtre particulaire. Si $p_{k|k}(\mathbf{x}_{2,1:k}|\mathbf{z}_{1:k})$ est approximée par l'ensemble de particules $\{\omega_{2,k|k}^{(i)}, \mathbf{x}_{2,1:k}^{(i)}\}_{i=1,\dots,N}$ alors (1.47) devient :

$$\begin{aligned} p_{k|k}(\mathbf{x}_{1,1:k}|\mathbf{z}_{1:k}) &\approx \int p_{k|k}(\mathbf{x}_{1,1:k}|\mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{x}_{2,1:k}) \sum_{i=1}^N \omega_{2,k|k}^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_{2,1:k}^{(i)}}(\mathbf{x}_{2,1:k}) d\mathbf{x}_{2,1:k}, \\ &\approx \sum_{i=1}^N \omega_{2,k|k}^{(i)} p_{k|k}(\mathbf{x}_{1,1:k}|\mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{x}_{2,1:k}^{(i)}). \end{aligned} \quad (1.48)$$

La figure 1.3 illustre la différence entre l'approximation particulaire classique et celle fondée sur la Rao-Blackwellisation. Avec ce genre de filtre, l'avantage principal est de diminuer la variance des estimés.

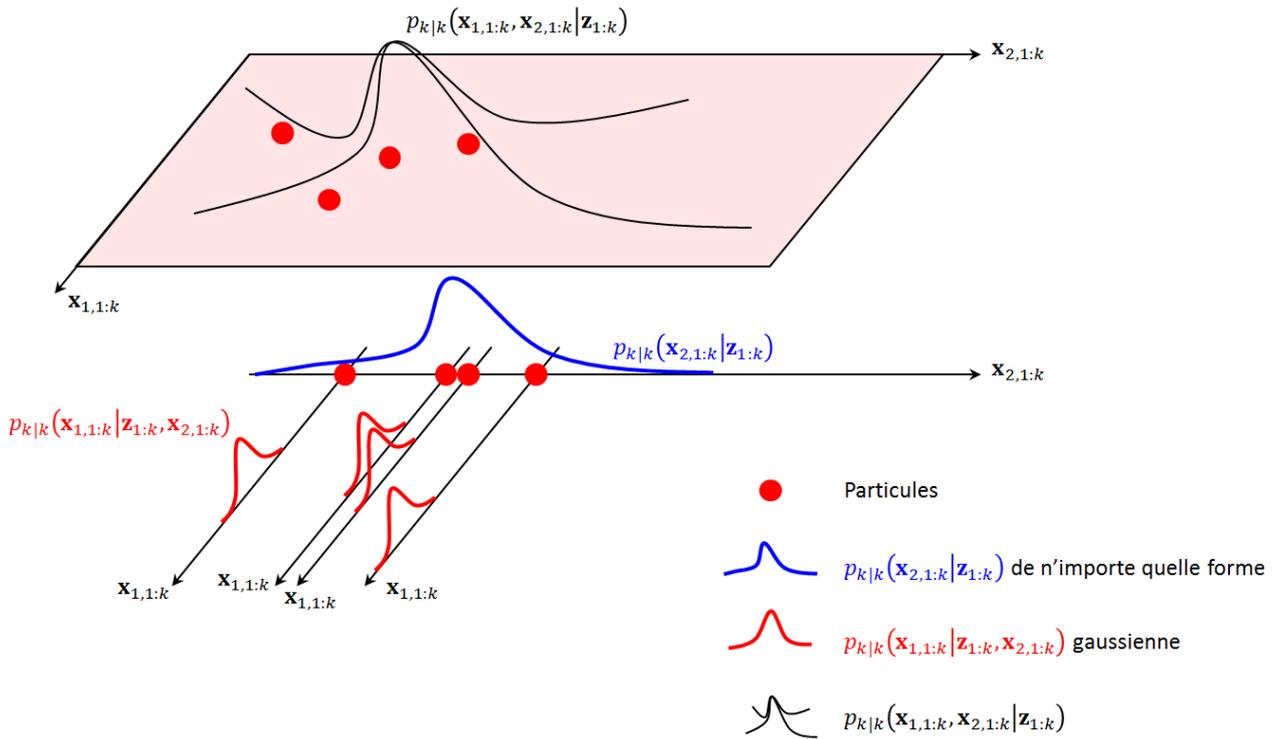


FIGURE 1.3 – Rao-Blackwellisation.

En pratique et dans le cadre du pistage, les filtres présentés jusqu'à présent sont adossés à des algorithmes supplémentaires permettant de gérer un certain nombre d'ambiguïtés et de limiter les ressources calculatoires nécessaires à l'estimation. Quelques uns de ces éléments pratiques sont présentés dans la partie suivante.

1.2.5 Mise en œuvre pratique, association et *gating*

Les filtres de Kalman et particulaire présentés précédemment sont fondés sur une REE qui ne permet généralement pas d'effectuer directement le pistage dans un contexte pratique. En effet, en pistage radar, le nombre de cibles dans la région d'observation est *a priori* inconnu. Il peut varier dans le temps et lorsque plusieurs objets sont présents et proches entre eux, il existe une incertitude quant à la provenance des mesures. Il est donc nécessaire de déterminer de quelle cible sont issues les mesures disponibles : c'est l'étape d'association. De plus, d'autres phénomènes comme les non-détections et les fausses alarmes sont à prendre en compte par le traitement.

Dans la région d'observation, chaque cible est donc représentée par une piste³ dont il convient de définir des mécanismes de création et de disparition.

Sans être exhaustif sur les techniques disponibles, les mécanismes de création et de disparition des pistes s'articulent classiquement autour de l'association mesures-pistes.

Ainsi, au démarrage du pistage, aucune piste n'a encore été créée. Toutes les mesures radar disponibles au premier instant correspondent potentiellement à un objet. Le traitement génère une piste pour chaque mesure et lui affecte un statut qualifié de "tentative". Ce statut peut évoluer vers le statut dit "confirmé" dès que plusieurs mesures successives ont été validées comme issues de la cible et ont contribué à son estimation. Le changement de statut s'effectue selon un critère, nommé critère k/n , qui prévoit au moins k associations de mesures en n instants successifs. Les associations mesures-pistes s'effectuent entre les étapes de prédiction et de mise à jour.

Pour ce faire, les algorithmes de type *nearest neighbor* (NN) et *global nearest neighbor* (GNN) [Bla99] sélectionnent la mesure la plus vraisemblable pour chacune des pistes. Lorsque plusieurs pistes sont présentes, le GNN permet également de maximiser le nombre d'associations. Ces algorithmes ne nécessitent pas de changement particulier dans la mise en œuvre des filtres et l'étape de mise à jour peut alors être appliquée pour chaque piste avec sa mesure associée. Les algorithmes *probabilistic data association* (PDA) [Bar09], *joint probabilistic data association* (JPDA) [Bar11] ou *multiple hypothesis tracking* (MHT) [Rei79, Kur88, Kur91] reprennent le formalisme des filtres de Kalman et particulaire mais nécessitent quelques modifications. Ces algorithmes évitent une association explicite. En effet, le PDA et le JPDA construisent une mesure hypothétique par piste à partir de toutes les mesures vraisemblables. En ce qui concerne le MHT, il explore une partie des hypothèses d'association mesures-pistes et n'évalue leur pertinence qu'*a posteriori* après plusieurs instants. Selon la mise en œuvre considérée, il peut être très coûteux calculatoirement. Ces algorithmes ne sont pas détaillés dans cette thèse mais le lecteur peut trouver plus de détails dans leurs références respectives.

Il peut arriver qu'aucune mesure ne soit disponible pour une piste donnée. Lorsque ce phénomène se produit à plusieurs reprises et conduit à un taux d'association inférieur au critère k/n , il est probable que l'objet a quitté la région d'observation ou que la piste a été initiée sur une fausse alarme. Dans ce cas, la piste change de statut et devient "désactivée".

Au contraire, il peut arriver qu'une mesure ne soit associée à aucune piste, notamment lorsque cette dernière se trouve éloignée des pistes existantes. Dans ce cas, l'algorithme génère une nouvelle piste avec le statut "tentative".

Pour limiter les besoins en ressources calculatoires pour le traitement et l'association, un autre bloc algorithmique nommé *gating* (ou fenêtrage en français) est généralement appliqué en amont. Il permet de sélectionner les mesures avant de procéder à tout calcul d'association ou de mise à jour. Son principe consiste à évaluer la pertinence de chaque mesure vis-à-vis de chaque piste. Les mesures jugées très faiblement vraisemblables vis-à-vis d'une piste sont écartées. Elles ne sont pas éligibles à l'association avec cette piste et ne participent pas à la mise à jour de son état. Le *gating* affecte peu la précision des estimés car les mesures exclues sont très peu vraisemblables. Son objectif est de limiter le coût

3. Une piste est un historique de vecteurs d'état supposés correspondre à une cible.

calculatoire du traitement complet. La figure 1.4 permet d'illustrer son principe :

- chaque objet est représenté par son état prédit $\hat{\mathbf{x}}_{i,k|k-1}$ avec $i = 1$ ou 2 dans l'exemple,
- les mesures pertinentes pour mettre à jour ces états sont celles à l'intérieur de la fenêtre de validation,
- les mesures à l'extérieur des fenêtres ne sont pas associables et sont écartées des traitements ultérieurs, ce qui permet de limiter le nombre d'hypothèses d'associations mesures-pistes et de réduire les besoins en ressources de calcul.

Pour plus de détails sur le *gating* mis en œuvre pour un filtre FKE ou particulière, quelques détails sont donnés en annexe F.

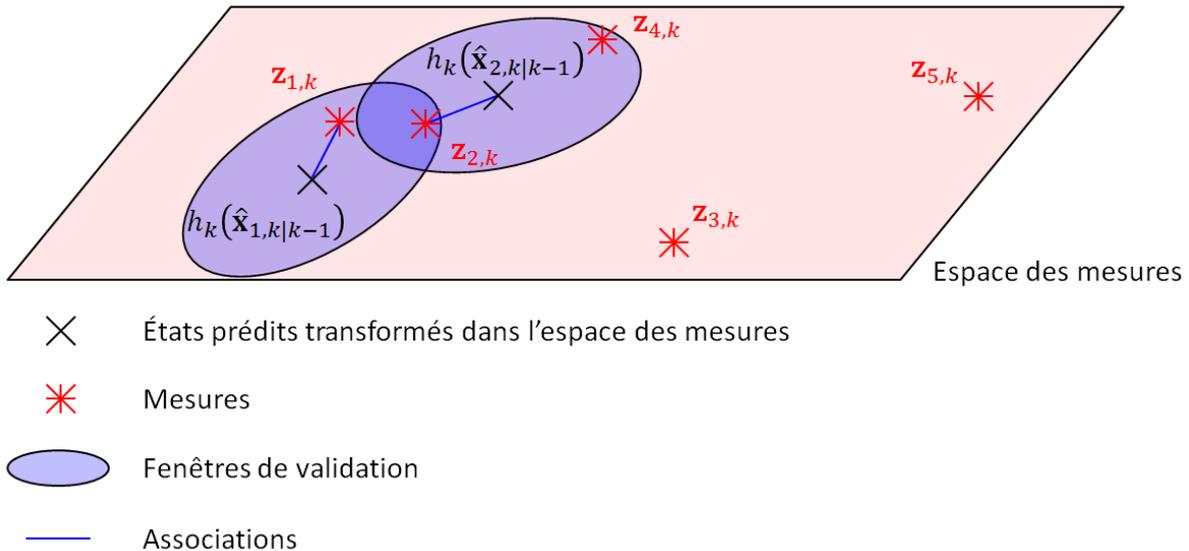


FIGURE 1.4 – Principe du *gating* et de l'association.

Pour gérer de manière unifiée toutes les problématiques spécifiques au contexte multi-cibles, un formalisme fondé sur les ensembles finis aléatoires (EFAs) [Mah03] a été proposé plus récemment. Ces EFAs permettent de modéliser et de traduire toutes les incertitudes évoquées dans cette partie. Les filtres fondés sur les EFAs reprennent le principe des filtres bayésiens mais procèdent à une estimation globale de la situation multi-cibles. Notamment, le nombre de cibles présentes dans la région de surveillance devient une variable aléatoire estimée en même temps que les états des cibles, ce qui participe à l'amélioration de la qualité moyenne des estimations. La partie suivante est donc dédiée à la présentation des EFAs et quelques-uns de leurs filtres associés.

1.3 Estimation bayésienne fondée sur les ensembles finis aléatoires

Les traitements présentés dans la partie précédente reposent sur des modèles mono-cibles, en ce sens qu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la présence d'une cible.

Cependant en pistage, il peut arriver que plusieurs cibles soient présentes et que leur nombre soit inconnu ; les instants d'apparition ou de disparition des cibles le sont aussi. De ce fait, ces incertitudes doivent faire l'objet d'une estimation ou d'une hypothèse. Dans des conditions particulières, le nombre de cibles à un instant donné peut être relié au nombre de mesures. Cependant, deux phénomènes peuvent facilement fausser le décompte :

- le premier est la fausse alarme. Il s'agit de détections ne correspondant à aucune cible d'intérêt. En radar, ces détections sont la conséquence du fouillis, c'est-à-dire la rétro-diffusion du signal par l'environnement. Ce phénomène se traduit par une probabilité de fausse alarme.

- le second phénomène est la non-détection. En effet, l'écho de signal capté par le radar provenant d'une cible n'a pas nécessairement la puissance requise pour se distinguer du fouillis ambiant et conduire à une détection. Les chances de procéder à une détection, c'est-à-dire de produire une mesure, sont traduites par une probabilité de détection.

Une autre source d'ambiguïté est la provenance des mesures. Lorsque les pistes, c'est-à-dire les estimations des trajectoires, sont suffisamment éloignées, il est possible de regrouper chaque piste avec sa mesure la plus proche et d'effectuer des traitements de pistage séparés. Cependant, dès que deux pistes sont proches, les mesures peuvent provenir de n'importe quelle cible.

Pour gérer de manière unifiée toutes ces problématiques, Mahler [Mah03] a introduit un formalisme multi-objets, nommé statistiques des ensembles finis (*finite sets statistics* (FISST)), fondé sur l'utilisation des ensembles finis aléatoires (EFAs - *random finite sets* (RFSs)).

1.3.1 Définition des ensembles finis aléatoires (EFAs)

L'introduction d'EFAs pour le pistage permet de représenter complètement un scénario multi-cibles. L'EFA multi-cibles à l'instant k se définit de la manière suivante :

$$X_k = \{\mathbf{x}_{1,k}, \dots, \mathbf{x}_{n,k}\} \text{ avec } n \in \mathbb{N}. \quad (1.49)$$

Son cardinal n représente le nombre de cibles et peut évoluer au cours du temps. Ses éléments, c'est-à-dire $\{\mathbf{x}_{i,k}\}_{j=1,\dots,n}$, correspondent aux vecteurs d'état de chacune de ces cibles et sont des vecteurs aléatoires supposés indépendants les uns des autres. Cette représentation permet d'envisager l'évolution temporelle du nombre de cibles incluant les apparitions et les disparitions d'objets de la région de surveillance. Par ailleurs, il convient de noter que les éléments d'un EFA ne sont pas ordonnés. Si \mathbb{X} est l'espace d'état, l'ensemble des configurations multi-cibles possibles, noté $\mathcal{F}(\mathbb{X})$, est l'ensemble des ensembles finis construits à partir d'éléments de \mathbb{X} . $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ constitue alors l'espace d'état multi-cibles. Comme une configuration multi-cibles peut donner lieu à plusieurs mesures simultanées, il est possible d'utiliser un EFA multi-mesures pour les représenter dans un seul objet de la manière suivante :

$$Z_k = \{\mathbf{z}_{1,k}, \dots, \mathbf{z}_{m,k}\} \text{ avec } m \in \mathbb{N}. \quad (1.50)$$

Pour un instant donné, m n'est pas nécessairement égal au cardinal n de l'EFA multi-cibles. En effet, l'EFA multi-mesures inclut les non-détections et les fausses alarmes.

Dans la suite, nous définissons différents types d'EFA. Pour ce faire, nous introduisons quelques notations.

Notations

Tout d'abord, l'introduction de l'opérateur suivant permet de simplifier les notations :

$$h^X \triangleq \prod_{x \in X} h(x), \quad (1.51)$$

où X désigne un EFA et $h(\cdot)$ doit être une fonction à valeurs dans \mathbb{R} . Par définition, $h^\emptyset = 1$.

Le symbole de Kronecker est défini de la manière suivante :

$$\delta_Y(X) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{si } X = Y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.52)$$

Enfin, le dernier opérateur introduit ici permet de vérifier l'inclusion d'un ensemble dans un autre :

$$\mathbb{1}_Y(X) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{si } X \subseteq Y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.53)$$

1.3.2 État multi-cibles et ensemble multi-mesures fondés sur les EFAs

Les EFAs ne sont pas des variables aléatoires classiques dans le sens où les éléments d'un EFA peuvent être permutés à l'écriture, mais ils renvoient à une seule configuration multi-objets. En se fondant sur la théorie des processus ponctuels [Dal03], Mahler [Mah03] a défini une densité au sens du formalisme des statistiques des ensembles finis. Cette densité multi-objets est définie sur l'espace d'état multi-objets et tient compte des permutations des éléments au sein d'un EFA. Elle incorpore également l'incertitude sur le nombre de cibles présentes dans la configuration multi-cibles ainsi que les incertitudes sur les états de chacune de ses cibles. Cette densité multi-objets est notée de manière générique $\pi(X)$ avec $X \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$.

Étant donné un EFA $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$, la densité multi-objets $\pi(X)$ peut également s'écrire à partir de la distribution de probabilité sur le cardinal et des densités jointes symétriques des éléments de l'EFA sur l'espace d'état. Ainsi, si la distribution de probabilité, notée ρ , sur le cardinal $|X|$ est définie comme suit :

$$\rho(n) = P(|X| = n), \quad (1.54)$$

et si la densité jointe symétrique associée s'exprime de la manière suivante :

$$p_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n), \quad (1.55)$$

alors la densité multi-objets est définie par :

$$\pi(X) = \pi(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}) = \rho(n) \sum_{\sigma} p_n(\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \mathbf{x}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{x}_{\sigma(n)}) = \rho(n) n! p_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n), \quad (1.56)$$

avec $\sigma(\cdot) \in S_n(\{1, \dots, n\})$ l'ensemble des permutations sur $\{1, \dots, n\}$.

Comme pour une densité de probabilité (*probability density function* - PDF) classique, l'intégration de la densité multi-objets sur toutes les configurations multi-cibles possibles vaut 1. Pour ce faire, elle tient compte des permutations à l'écriture des éléments à l'intérieur de l'ensemble :

$$\int \pi(X) \delta X = \pi(\emptyset) + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i!} \int \pi(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i\}) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_i. \quad (1.57)$$

L'intégrale (1.57) est définie au sens des statistiques des ensembles finis représentées par l'utilisation du δX .

La distribution de probabilité sur le cardinal peut s'exprimer en n'intégrant la densité multi-objets que sur les ensembles de taille n de la manière suivante :

$$\frac{1}{n!} \int \pi(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n = \frac{1}{n!} \int \rho(n) n! p_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n = \rho(n). \quad (1.58)$$

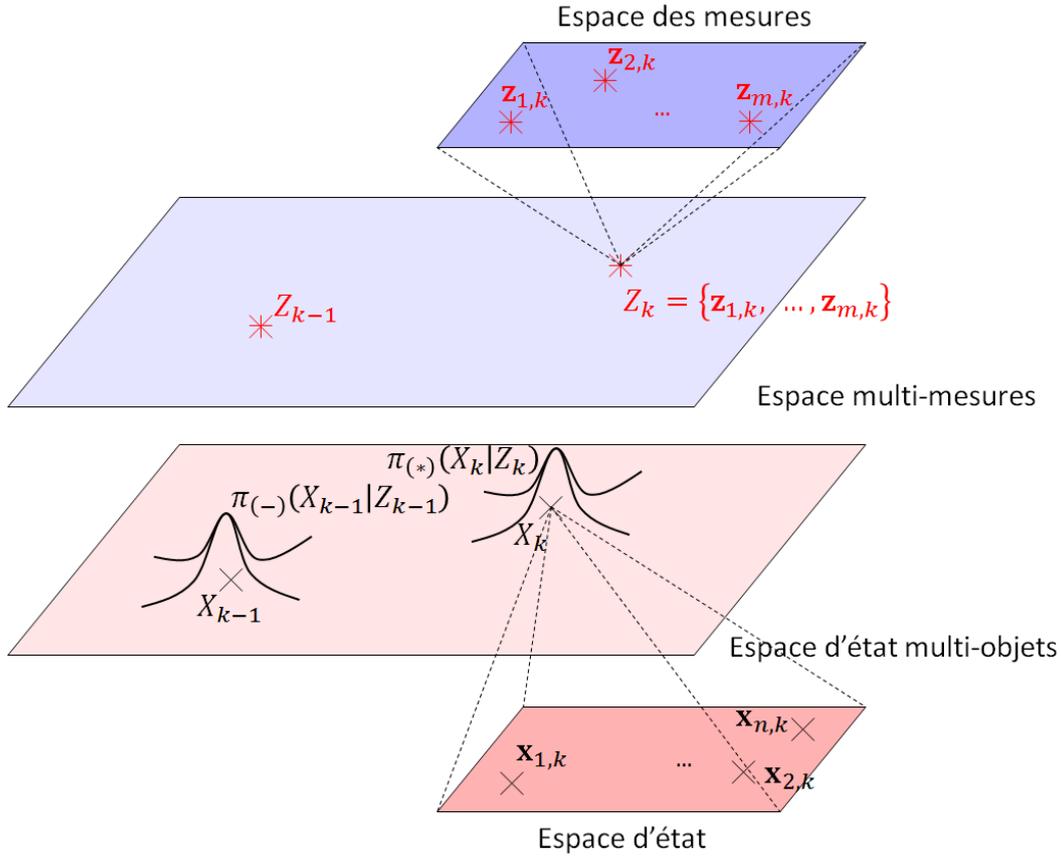
L'espace d'état multi-objets et l'espace multi-mesures sont illustrés dans la figure 1.5. Dans cette figure, la densité multi-objets *a posteriori* est définie pour deux instants successifs.

Différents EFAs peuvent être considérés et sont à l'origine des filtres multi-objets présentés ci-après.

ÉFA dont les éléments sont indépendants et identiquement distribués

Dans le cas des EFAs indépendants et identiquement distribués, les densités spatiales jointes symétriques sur les éléments de l'EFA peuvent être écrites de la manière suivante :

$$p_n(\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \mathbf{x}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{x}_{\sigma(n)}) = p(\mathbf{x}_1) p(\mathbf{x}_2) \dots p(\mathbf{x}_n), \quad (1.59)$$


 FIGURE 1.5 – Espace d'état multi-objets et espace d'état multi-mesures - (-) : $k-1|k-1$ et (*) : $k|k$.

En conséquence, la densité multi-objets devient :

$$\pi(X) = n! \rho(n) \prod_{i=1}^n p(\mathbf{x}_i). \quad (1.60)$$

Pour représenter une situation multi-cibles, les EFAs de Poisson et multi-Bernoulli ont été considérés. L'EFA de Poisson s'avère également bien adapté à la représentation de l'ensemble multi-mesures. Ce dernier est présenté dans le paragraphe suivant.

EFA de Poisson

L'EFA de Poisson est construit sur une double hypothèse : ses éléments sont indépendants et identiquement distribués et son cardinal suit une loi de Poisson de paramètre λ . La loi sur le cardinal s'exprime donc de la manière suivante :

$$\rho(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad (1.61)$$

tandis qu'en reprenant la définition (1.60), la densité multi-objets devient :

$$\pi(X) = e^{-\lambda} \lambda^n \prod_{i=1}^n p(\mathbf{x}_i). \quad (1.62)$$

Il est commun de représenter une densité multi-objets par son moment du premier ordre, aussi appelé fonction d'intensité [Mah03]. Dans le cas d'un EFA de Poisson, elle s'exprime comme suit :

$$D(\mathbf{x}) = \int \delta'_X(\mathbf{x}) \pi(X) \delta X = \lambda p(\mathbf{x}), \quad (1.63)$$

où $\delta'_X(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{w} \in X} \delta_{\mathbf{w}}(\mathbf{x})$. Les détails du calculs sont donnés dans [Mah03] et rappelés dans l'annexe B. Une propriété importante est que la fonction d'intensité caractérise complètement la distribution de Poisson au sens où elle permet de retrouver la densité multi-objets en combinant (1.62) et (1.63) :

$$\pi(X) = e^{-\lambda} \prod_{\mathbf{x} \in X} D(\mathbf{x}). \quad (1.64)$$

La figure 1.6 illustre une densité multi-objets Poisson et sa fonction intensité correspondante.

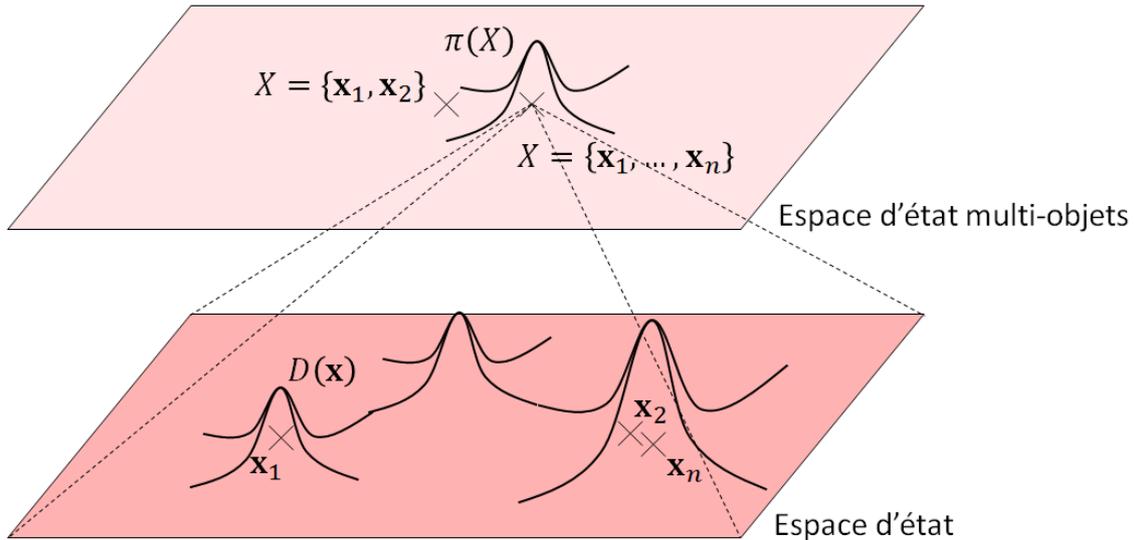


FIGURE 1.6 – Densité multi-objets Poisson et sa fonction intensité associée.

Il est important de noter qu'étant donné (1.63), λ peut également s'obtenir en intégrant la fonction intensité comme suit :

$$\lambda = \int D(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.65)$$

L'utilisation d'un EFA de Poisson convient à une modélisation des fausses alarmes reliée à un taux de fausses alarmes sans *a priori* sur leur localisation. En effet, en fonction de la taille de la région de surveillance, le taux de fausses alarmes permet d'établir un nombre moyen λ_f de fausses alarmes attendu. Sans hypothèse sur leur localisation, les fausses alarmes peuvent être considérées comme équiréparties sur la surface de surveillance. Ainsi, la densité multi-objets décrivant l'EFA de fausses alarmes s'exprime comme suit :

$$\pi_f(Z) = e^{-\lambda_f} \lambda_f^{|Z|} \prod_{z \in Z} \mathcal{U}_f(z), \quad (1.66)$$

avec $\mathcal{U}_f(\cdot)$ une densité uniforme.

Les filtres PHD [Mah03] et CPHD [Mah07] présentés ci-après sont construits autour des EFAs de Poisson. L'EFA de Bernoulli est décrit dans le paragraphe suivant. Il est à l'origine d'une famille d'EFAs et de leurs filtres associés.

EFA de Bernoulli

L'EFA de Bernoulli se construit autour d'une unique cible qui peut être présente ($X = \{\mathbf{x}\}$) ou non ($X = \emptyset$). La densité multi-objets (1.56) s'écrit alors pour $X = \{\mathbf{x}\}$:

$$\pi(\{\mathbf{x}\}) = \rho(1)p(\mathbf{x}) \triangleq rp(\mathbf{x}). \quad (1.67)$$

En intégrant selon tous les cas possibles, on peut écrire :

$$\pi(\emptyset) + \int rp(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1. \quad (1.68)$$

Cela permet d'expliciter la densité multi-objets dans le cas où la cible n'est pas présente :

$$\pi(\emptyset) = 1 - r. \quad (1.69)$$

Cette formulation donne son nom à l'EFA de Bernoulli puisque le cardinal suit une loi de Bernoulli et r correspond à une probabilité d'existence de la cible. De manière compacte, la distribution multi-objets s'écrit :

$$\pi(X) = \begin{cases} 1 - r, & \text{si } X = \emptyset, \\ rp(\mathbf{x}), & \text{si } X = \{\mathbf{x}\}. \end{cases} \quad (1.70)$$

La version multi-cibles de l'EFA de Bernoulli est présentée dans le paragraphe suivant.

EFA multi-Bernoulli

Un EFA multi-Bernoulli reprend le principe de la représentation de l'EFA Bernoulli et l'adapte au cas multi-objets. Les objets au sein d'un EFA multi-Bernoulli sont supposés indépendants les uns des autres et l'EFA multi-Bernoulli peut être construit comme l'union d'EFAs de Bernoulli. Ainsi, un EFA multi-Bernoulli, noté X , se définit comme suit :

$$X = \bigcup_{i=1}^n X^{(i)}, \quad (1.71)$$

avec $\{X^{(i)}\}_{i=1,\dots,n}$ les EFAs de Bernoulli définis pour chaque objet.

L'EFA multi-Bernoulli est caractérisé par un ensemble de paramètres $\{(r^{(i)}, p^{(i)})\}_{i=1,\dots,n}$ qui permettent de représenter les densités multi-objets $\pi^{(i)}$ d'un EFA de Bernoulli comme suit :

$$\pi^{(i)}(X) = \begin{cases} 1 - r^{(i)}, & \text{si } X = \emptyset, \\ r^{(i)}p^{(i)}(\mathbf{x}), & \text{si } |X| = 1. \end{cases} \quad (1.72)$$

La densité multi-Bernoulli $\pi(X)$ évaluée en $X = \emptyset$ correspond à la probabilité qu'aucun des objets ne soit présent ; elle vérifie donc :

$$\pi(\emptyset) = \prod_{i=1}^n (1 - r^{(i)}). \quad (1.73)$$

En tenant compte de tous les cas puis en factorisant par $\prod_{i=1}^n (1 - r^{(i)})$, il est alors possible d'écrire la densité multi-objets pour n'importe quel EFA $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n'}\}$ avec $n \geq n'$ comme suit :

$$\pi(\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n'}\}) = \prod_{i=1}^n (1 - r^{(i)}) \sum_{1 \leq i_1 \neq \dots \neq i_{n'} \leq n} \prod_{j=1}^{n'} \frac{r^{(i_j)} p^{(i_j)}(\mathbf{x}_j)}{1 - r^{(i_j)}}. \quad (1.74)$$

En intégrant (1.74) au sens des statistiques des ensembles finis sur les ensembles contenant exactement n' éléments, on obtient la loi de probabilité du cardinal suivante :

$$\rho(n') = \prod_{i=1}^n (1 - r^{(i)}) \sum_{1 \leq i_1 \neq \dots \neq i_{n'} \leq n} \prod_{j=1}^{n'} \frac{r^{(i_j)}}{1 - r^{(i_j)}}. \quad (1.75)$$

La fonction intensité pour un EFA multi-Bernoulli satisfait alors :

$$D(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n r^{(i)} p^{(i)}(\mathbf{x}). \quad (1.76)$$

Les EFAs de Poisson et multi-Bernoulli sont des ensembles multi-objets sur lesquels sont fondés plusieurs filtres multi-objets dont le filtre PHD, le filtre CPHD ainsi que les filtres de la classe multi-Bernoulli comme le CB-MeMber [Vo13b]. Cependant, deux EFAs à deux instants successifs ne permettent pas de suivre les cibles au cours du temps et de remonter directement à la notion classique de piste. Pour y remédier, les EFAs étiquetés ont été proposés [Vo13a] et sont présentés à partir du paragraphe suivant.

EFA étiqueté

Les EFAs étiquetés ou labélisés introduisent la notion d'étiquette en plus de la représentation multi-cibles, ce qui permet de suivre l'évolution de chaque élément de l'EFA en l'identifiant de manière unique. Ainsi, les éléments de l'EFA prennent la forme (\mathbf{x}, ℓ) , avec \mathbf{x} le vecteur d'état et ℓ son étiquette associée. L'EFA étiqueté est noté comme suit :

$$\mathbf{X} = \{(\mathbf{x}_1, \ell_1), \dots, (\mathbf{x}_n, \ell_n)\}. \quad (1.77)$$

L'espace d'état multi-cibles \mathbb{X} est alors augmenté de l'espace des étiquettes \mathbb{L} et forme l'espace $\mathbb{X} \times \mathbb{L}$. Cependant, dans $\mathbb{X} \times \mathbb{L}$, il n'est pas exclu que deux vecteurs d'états possèdent une même étiquette. Pour éviter ce cas de figure, les étiquettes doivent être toutes distinctes. À cet effet, la fonction $\mathcal{L}(\cdot)$ de projection d'un EFA étiqueté sur l'espace des étiquettes \mathbb{L} est définie de la façon suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}) = \{\mathcal{L}((\mathbf{x}_i, \ell_i)) = \ell_i : (\mathbf{x}_i, \ell_i) \in \mathbf{X}\}_{i=1, \dots, n}. \quad (1.78)$$

Dans la suite, nous aurons besoin de comparer le cardinal de l'EFA au nombre d'étiquettes. Pour cette raison, un indicateur d'unicité des étiquettes est introduit :

$$\Delta(\mathbf{X}) = \delta_{|\mathbf{X}|}(|\mathcal{L}(\mathbf{X})|). \quad (1.79)$$

On peut remarquer que la version sans étiquette d'un EFA revient à projeter l'espace augmenté $\mathbb{X} \times \mathbb{L}$ sur l'espace multi-cibles \mathbb{X} uniquement. En termes de densité multi-objets, cela revient à intégrer selon toutes les configurations d'étiquettes possibles :

$$\pi(\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}) = \sum_{(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{L}^n} \pi(\{(\mathbf{x}_1, \ell_1), \dots, (\mathbf{x}_n, \ell_n)\}). \quad (1.80)$$

La forme étiquetée des EFAs a notamment été développée avec les EFAs multi-Bernoulli. Il s'agit de l'objet du paragraphe suivant.

EFA multi-Bernoulli labélisé (LMB)

Comme pour un EFA multi-Bernoulli, la densité multi-objets sur un EFA multi-Bernoulli labélisé est caractérisée par un ensemble de couples qui sont cette fois-ci indexés par des variables d'étiquette :

$$\pi(\mathbf{X}) = \{(r^{(\ell)}, p^{(\ell)})\}_{\ell \in \mathbb{L}}. \quad (1.81)$$

Il est important de noter qu'un EFA multi-Bernoulli labélisé n'est pas un EFA de Bernoulli sur $\mathbb{X} \times \mathbb{L}$. En effet, la densité multi-objets s'exprime de la manière suivante :

$$\pi(\{(\mathbf{x}_1, \ell_1), \dots, (\mathbf{x}_{n'}, \ell_{n'})\}) = \delta_{n'}(|\{\ell_1, \dots, \ell_{n'}\}|) \prod_{\ell_i \in \mathbb{L}} (1 - r^{(\ell_i)}) \prod_{j=1}^{n'} \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{L}}(\ell_j) r^{(\ell_j)} p^{(\ell_j)}(\mathbf{x}_j)}{1 - r^{(\ell_j)}}. \quad (1.82)$$

Il est également possible de l'écrire sous une forme plus compacte grâce à l'indicateur d'unicité des étiquettes introduit en (1.79) comme suit :

$$\pi(\mathbf{X}) = \Delta(\mathbf{X})w(\mathcal{L}(\mathbf{X}))p^{\mathbf{X}}, \quad (1.83)$$

avec l'usage de la notation similaire à (1.51) :

$$p^{\mathbf{X}} = \prod_{(\mathbf{x}, \ell) \in \mathbf{X}} p^{(\ell)}(\mathbf{x}), \text{ où } p^{(\ell)}(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}, \ell), \quad (1.84)$$

et l'introduction d'un nouveau terme $w(\cdot)$, nommé poids, défini pour un ensemble donné $L = \{\ell_1, \dots, \ell_{n'}\}$ d'étiquettes par :

$$w(L) = \prod_{\ell_i \in L} (1 - r^{(\ell_i)}) \prod_{\ell \in L} \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{L}}(\ell)r^{(\ell)}}{1 - r^{(\ell)}}. \quad (1.85)$$

Comme pour les EFA précédents, il est possible de fournir l'expression de la loi de probabilité du cardinal. Elle vérifie :

$$\rho(n') = \sum_{L \in \mathcal{F}_{n'}(\mathbb{L})} w(L), \quad (1.86)$$

avec $\mathcal{F}_{n'}(\mathbb{L})$ l'ensemble des parties à n' éléments de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{L})$, l'ensemble des ensembles finis construits à partir de l'espace des étiquettes \mathbb{L} .

La fonction intensité d'un EFA multi-Bernoulli labélisé est obtenue en marginalisant les étiquettes :

$$D(\mathbf{x}) = \sum_{\ell \in \mathbb{L}} r^{(\ell)} p^{(\ell)}(\mathbf{x}). \quad (1.87)$$

Le filtre LMB [Reu14a] s'appuie en partie sur cet EFA. Cependant, il ne permet pas de construire une densité multi-objets conjuguée au niveau de l'étape de mise à jour. Pour résoudre ce problème, une version moins contraignante de cet EFA a été proposée sous la forme des EFAs *generalized* LMB (GLMB).

EFA *generalized* LMB

L'EFA GLMB reprend la structure de l'EFA LMB, mais modifie le poids défini de manière unique dans (1.85) à partir des probabilités d'existence des objets. En effet, avec un EFA GLMB, la densité multi-objets est intégrée selon un ensemble discret d'hypothèses arbitraires \mathbb{C} . Ces dernières permettent notamment de formaliser les hypothèses d'associations mesures-étiquettes sous la forme d'un EFA GLMB particulier présenté après le cas général de ce paragraphe.

Débutons cette brève présentation par la densité multi-objets d'un EFA GLMB dont l'expression est la suivante :

$$\pi(\mathbf{X}) = \Delta(\mathbf{X}) \sum_{c \in \mathbb{C}} w^{(c)}(\mathcal{L}(\mathbf{X})) [p^{(c)}]^{\mathbf{X}}. \quad (1.88)$$

Les différents termes de la somme de (1.88) sont conditionnellement définis à une hypothèse $c \in \mathbb{C}$. La contrainte sur leur définition n'est pas différente par rapport à la définition classique d'une loi de mélange. Ainsi, on obtient :

$$\sum_{L \subseteq \mathbb{L}} \sum_{c \in \mathbb{C}} w^{(c)}(L) = 1, \quad (1.89)$$

$$\int p^{(c)}(\mathbf{x}, \ell) d\mathbf{x} = \int p^{(\ell)}(\mathbf{x}|c) d\mathbf{x} = 1. \quad (1.90)$$

Enfin, en sélectionnant uniquement les ensembles d'étiquettes à n' éléments, on a :

$$\rho(n') = \sum_{L \in \mathcal{F}_{n'}(\mathbb{L})} \sum_{c \in \mathbb{C}} w^{(c)}(L) \quad (1.91)$$

La fonction intensité ne dépend plus ni des étiquettes ni des hypothèses et s'écrit :

$$D(\mathbf{x}) = \sum_{c \in \mathbb{C}} \sum_{\ell \in \mathbb{L}} p^{(c)}(\mathbf{x}, \ell) \sum_{L \subseteq \mathbb{L}} \mathbb{1}_L(\ell) w^{(c)}(L). \quad (1.92)$$

L'avantage de ce type d'EFA est de permettre le développement d'un filtre dont la densité multi-objets après mise à jour correspond à celle d'un EFA GLMB, comme avant filtrage. La preuve de cette forme conjuguée avec une vraisemblance multi-objets est donnée dans [Vo13a].

L'autre avantage de cette formulation est de permettre la constitution d'un ensemble arbitraire d'hypothèses d'associations mesures-étiquettes en vue de la mise en œuvre d'un filtre. À cette fin, une forme dédiée d'EFA GLMB a été proposée sous la dénomination δ -generalized LMB (δ -GLMB) [Vo13a].

EFA δ -generalized LMB

L'EFA δ -GLMB, introduit dans [Vo13a], est une version dédiée au pistage de l'EFA GLMB. Dans ce cadre, le jeu d'hypothèses arbitraires est défini comme un double jeu d'hypothèses croisées : présences d'une sélection de cibles et associations mesures-étiquettes (voire historiques d'associations mesures-étiquettes). L'ensemble des états multi-cibles $\mathcal{F}(\mathbb{L})$ est augmenté par l'ensemble des associations Ξ . Ainsi, l'ensemble des hypothèses arbitraires se définit comme suit :

$$\mathbb{C} = \mathcal{F}(\mathbb{L}) \times \Xi. \quad (1.93)$$

Le poids pour un jeu d'étiquettes L selon une hypothèse $(c) = (I, \xi)$, avec $I \in \mathcal{F}(\mathbb{L})$ et $\xi \in \Xi$, s'exprime de la manière suivante :

$$w^{(c)}(L) = w^{(I, \xi)} \delta_I(L), \quad (1.94)$$

Enfin, la densité spatiale associée à une hypothèse (c) est notée :

$$p^{(c)} = p^{(I, \xi)}. \quad (1.95)$$

Dès lors, la densité multi-objets s'écrit à partir de l'expression (1.88) :

$$\pi(\mathbf{X}) = \Delta(\mathbf{X}) \sum_{(I, \xi) \in \mathcal{F}(\mathbb{L}) \times \Xi} w^{(I, \xi)} \delta_I(\mathcal{L}(\mathbf{X})) [p^{(I, \xi)}]^{\mathbf{X}}. \quad (1.96)$$

Comme précédemment, il est possible de fournir l'expression de la densité de probabilité $\rho(\cdot)$ du cardinal :

$$\rho(n') = \sum_{(I, \xi) \in \mathcal{F}(\mathbb{L}) \times \Xi} \sum_{L \in \mathcal{F}_n(\mathbb{L})} w^{(I, \xi)} \delta_I(L) = \sum_{(I, \xi) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{L}) \times \Xi} w^{(I, \xi)}. \quad (1.97)$$

La fonction intensité s'obtient à nouveau en sommant sur toutes les hypothèses et toutes les étiquettes des objets de l'EFA :

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}) &= \sum_{(I, \xi) \in \mathcal{F}(\mathbb{L}) \times \Xi} \sum_{\ell \in \mathbb{L}} p^{(I, \xi)}(\mathbf{x}, \ell) \sum_{L \subseteq \mathbb{L}} \mathbb{1}_L(\ell) w^{(I, \xi)} \delta_I(L), \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{L}} \sum_{(I, \xi) \in \mathcal{F}(\mathbb{L}) \times \Xi} w^{(I, \xi)} \mathbb{1}_I(\ell) p^{(I, \xi)}(\mathbf{x}, \ell). \end{aligned} \quad (1.98)$$

Dans [Reu14b], l'expression de la fonction intensité pour une étiquette particulière est même proposée :

$$D^{(\ell)}(\mathbf{x}) = \sum_{(I, \xi) \in \mathcal{F}(\mathbb{L}) \times \Xi} w^{(I, \xi)} \mathbb{1}_I(\ell) p^{(I, \xi)}(\mathbf{x}, \ell), \quad (1.99)$$

avec $\mathbb{1}_I(\ell)$ qui permet de contrôler que l'étiquette ℓ est bien représentée dans l'hypothèse I . De plus, l'expression de cette fonction intensité est reliée à la probabilité d'existence de l'objet considéré :

$$\begin{aligned} r^{(\ell)} &= \int \left(\sum_{(I,\xi) \in \mathcal{F}(\mathbb{L}) \times \Xi} w^{(I,\xi)} \mathbb{1}_I(\ell) p^{(I,\xi)}(\mathbf{x}, \ell) \right) d\mathbf{x}, \\ &= \sum_{(I,\xi) \in \mathcal{F}(\mathbb{L}) \times \Xi} w^{(I,\xi)} \mathbb{1}_I(\ell) \int p^{(I,\xi)}(\mathbf{x}, \ell) d\mathbf{x}, \\ &= \sum_{(I,\xi) \in \mathcal{F}(\mathbb{L}) \times \Xi} w^{(I,\xi)} \mathbb{1}_I(\ell). \end{aligned} \quad (1.100)$$

Le filtre δ -GLMB est fondé sur l'utilisation de cet EFA. Notons que l'étape de mise à jour du filtre LMB est également fondée sur cet EFA afin d'envisager plusieurs hypothèses d'associations mesures-étiquettes.

Dans la partie suivante, les différents filtres fondés sur ces EFAs sont présentés.

1.3.3 Filtre bayésien multi-cibles fondé sur le formalisme des EFAs

Les EFAs permettent de décrire une situation multi-cibles puisque un EFA donné contient le nombre d'objets présents dans la région d'observation et leur vecteur d'état associé. En ce sens, un EFA en traitement multi-cibles est l'homologue du vecteur d'état en traitement mono-cible. Une formulation générique définit également un identifiant pour chaque objet sous la forme d'une étiquette permettant de suivre son évolution au cours du temps.

L'espace des configurations multi-cibles possibles est l'espace d'état multi-objets. Un point de cet espace est un EFA particulier décrivant une unique configuration multi-cibles. Comme pour le traitement mono-cible, l'objectif du pistage est d'estimer quelles sont les chances que chacun des points de l'espace d'état corresponde à la situation observée sachant l'information apportée par les mesures.

En traitement multi-cibles, il est possible de définir une densité multi-objets *a posteriori* sur l'état multi-objets, comme on définit une densité *a posteriori* sur l'espace d'état en traitement mono-cible. Une des particularités de l'approche est que le type d'EFA considéré est caractérisé par la forme de sa densité multi-objets associée. Dans [Vo13a], les EFAs permettant l'apparition d'une forme conjuguée pour l'estimation bayésienne de la densité multi-objets sont les EFAs de Poisson et GLMB.

L'estimation bayésienne se construit autour des deux étapes classiques de prédiction et de mise à jour. Leur présentation repose sur les notations génériques suivantes : X renvoie à un EFA multi-cibles tandis que Z renvoie à un EFA multi-mesures. Lorsque l'indexation des instants est nécessaire, k désigne l'instant courant, $k-1$ et $k+1$ les instants précédent ou suivant respectivement. Dans la suite et pour simplifier les notations, on opte pour $(-)$ pour désigner l'indice $k-1|k-1$, $(+)$ se substitue à $k|k-1$ pour faire référence à l'étape de prédiction et $(*)$ remplace $k|k$ pour la partie mise à jour. Les densités multi-objets aux différents instants sont notées de la façon suivante :

$$\pi_{(-)}(X_{k-1}) = \pi(X_{k-1}|Z_{1:k-1}), \quad (1.101)$$

$$\pi_{(+)}(X_k) = \pi(X_k|Z_{1:k-1}), \quad (1.102)$$

$$\pi_{(*)}(X_k) = \pi(X_k|Z_{1:k}). \quad (1.103)$$

L'étape de prédiction d'un filtre bayésien multi-cibles se fonde sur l'équation de Chapman-Kolmogorov et donne :

$$\pi_{(+)}(X_k) = \int f_k(X_k|X_{k-1}) \pi_{(-)}(X_{k-1}) \delta X_{k-1}, \quad (1.104)$$

avec $f_k(\cdot)$ la densité de transition multi-objets. Il convient de noter ici que l'intégrale (1.104) est définie au sens FISST de l'équation (1.57).

Quant à l'étape de mise à jour, elle repose sur la règle de Bayes :

$$\pi_{(*)}(X_k) = \frac{g_k(Z_k|X_k)\pi_{(+)}(X_k)}{\int g_k(Z_k|X_k)\pi_{(+)}(X_k)\delta X_k}, \quad (1.105)$$

avec $g_k(Z_k|X_k)$ la fonction de vraisemblance multi-objets.

La mise en œuvre d'une récursion multi-cibles s'appuie alors sur la définition des différents types d'EFAs présentés dans les parties précédentes. Selon le type d'EFA choisi, on aboutit à une densité multi-objets donnée et son filtre correspondant.

1.3.4 Filtre *probability hypothesis density* (PHD)

Le filtre PHD, présenté dans [Mah03], est fondé sur la représentation de l'espace d'état multi-cibles par un EFA de Poisson. De ce fait, la densité multi-objets π est entièrement caractérisée par la fonction intensité correspondante D . De ce point de vue et étant donné la définition de la fonction intensité (1.63), le filtre PHD ne propage que le moment d'ordre 1 de la densité multi-objets. Par ailleurs, la fonction d'intensité présente l'intérêt d'être définie sur l'espace d'état mono-cible et décrit le nombre moyen d'objets présents dans une région de cet espace. Ainsi, lorsqu'on l'intègre sur l'ensemble de l'espace d'état, on obtient le nombre d'objets présents dans la configuration multi-cibles observée. En outre, le fouillis est lui aussi représenté par un EFA multi-objets de Poisson.

À l'instant $k - 1$, l'élément disponible est la fonction intensité $D_{(-)}(\mathbf{x}_{k-1})$. La transition d'un état multi-cibles à l'instant $k - 1$ vers un état multi-cibles à l'instant k peut se produire de deux manières :

- soit les objets de l'instant k étaient déjà présents à l'instant $k - 1$,
- soit ils viennent d'apparaître dans la région de surveillance. On dit qu'ils viennent de naître.

Les deux événements sont traduits de manière probabiliste et font apparaître deux termes dans la prédiction de la fonction intensité comme suit :

$$D_{(+)}(\mathbf{x}_k) = \int p_{S,k}(\mathbf{x}_{k-1})f_k(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})D_{(-)}(\mathbf{x}_{k-1})d\mathbf{x}_{k-1} + b_k(\mathbf{x}_k), \quad (1.106)$$

avec $p_{S,k}(\cdot)$ la probabilité de survie d'un objet présent à l'instant $k - 1$, $f_k(\cdot|\cdot)$ la densité de transition entre deux états successifs liée au modèle de mouvement et $b_k(\cdot)$ l'intensité de naissance. Concernant cette dernière, elle est généralement générée selon les mesures éloignées de toute piste de l'instant précédent [Ris10, Ris12a].

La mise à jour de la fonction intensité se fait elle aussi selon deux cas de figures : un objet peut avoir été détecté ou non. Ce phénomène est traduit par une probabilité de détection $p_{D,k}(\cdot)$ et fait apparaître deux termes dans la mise à jour, l'un correspondant à une non-détection et l'autre correspondant à une détection selon une des mesures disponibles. L'expression de la mise à jour de la fonction intensité est alors donnée par :

$$D_{(*)}(\mathbf{x}_k) = (1 - p_{D,k}(\mathbf{x}_k)) D_{(+)}(\mathbf{x}_k) + \sum_{\mathbf{z}_k \in Z_k} \frac{p_{D,k}(\mathbf{x}_k)g_k(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)D_{(+)}(\mathbf{x}_k)}{\lambda_f \mathcal{U}_f(\mathbf{z}_k) + \int p_{D,k}(\mathbf{x}_k)g_k(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)D_{(+)}(\mathbf{x}_k)d\mathbf{x}_k}, \quad (1.107)$$

avec $\lambda_f \mathcal{U}_f(\cdot)$ la fonction intensité du fouillis évaluée pour une mesure donnée et $g_k(\cdot|\cdot)$ la densité de vraisemblance mono-cible reliée au modèle de mesure.

L'un des principaux avantages du filtre PHD est sa complexité calculatoire, linéaire en fonction du nombre de mesures disponibles à un instant donné.

Cependant, le filtre PHD propage uniquement la fonction intensité de la densité multi-objets. Dans [Mah07], Mahler discute tout d'abord du point soulevé dans [Erd05], selon lequel le moment d'ordre 1 propagé dans le filtre PHD ne conduit qu'à une estimation instable du nombre de cibles selon (1.65), ce qui peut être préjudiciable au pistage. Dans [Mah07], il a ensuite proposé le filtre *cardinalized* PHD (CPHD) qui propage la distribution sur le cardinal en plus de la fonction intensité.

Néanmoins, l'estimation de la distribution du cardinal reste sensible à l'*a priori* sur le taux de fausses alarmes. Une mauvaise évaluation de ce dernier peut mettre en difficulté le filtre CPHD. Pour contourner cette difficulté, l'utilisation des EFAs multi-Bernoulli a été envisagée. Au lieu de propager le moment d'ordre 1 de la densité multi-objets, les filtres fondés sur les EFAs multi-Bernoulli propagent les paramètres d'une distribution multi-Bernoulli. Ces filtres sont présentés dans la partie suivante.

1.3.5 Filtres fondés sur les EFAs multi-Bernoulli et multi-Bernoulli étiquetés

Les filtres fondés sur un EFA multi-Bernoulli propagent les paramètres d'une distribution multi-Bernoulli afin de fournir une estimation du nombre de cibles dans la région d'observation moins sensible au taux de fausses alarmes que les filtres PHD et CPHD. Plusieurs de ces filtres sont présentés dans les paragraphes suivants. Ceux fondés sur les EFAs étiquetés permettent de formaliser la notion de piste. Ils combinent alors un traitement global de la situation multi-cibles, en envisageant l'évolution du nombre d'objets au cours du temps, et un pistage au sens plus classique du terme, puisqu'il est possible d'identifier directement la trajectoire individuelle de chaque objet.

Filtre *cardinality balanced multi-target* multi-Bernoulli (CB-MeMber)

Le filtre *cardinality balanced multi-target* multi-Bernoulli [Vo13b] repose sur la représentation de l'espace d'état multi-cibles par un EFA multi-Bernoulli. Il propage les paramètres d'une densité multi-objets *a posteriori* multi-Bernoulli. Concernant les fausses alarmes, elles sont représentées par un EFA de Poisson.

À l'instant $k - 1$ les paramètres de la densité multi-objets sont notés comme suit :

$$\pi_{(-)} = \left\{ (r_{(-)}^{(i)}, p_{(-)}^{(i)}) \right\}_{i=1, \dots, n_{(-)}}, \quad (1.108)$$

avec $n_{(-)}$ le nombre d'objets dont la probabilité d'existence n'est pas égale à zéro. Il s'agit du nombre nécessaire de couples de paramètres pour représenter la densité multi-objets multi-Bernoulli. Le nombre d'objets estimé dans la configuration multi-cibles est plus petit que $n_{(-)}$ et vaut :

$$\hat{N}_{(-)} = \sum_{i=1}^{n_{(-)}} r_{(-)}^{(i)}. \quad (1.109)$$

Les objets naissants doivent eux aussi être représentés par un EFA multi-Bernoulli dont la densité multi-objets est représentée par les paramètres suivants :

$$\pi_B = \left\{ (r_B^{(i)}, p_B^{(i)}) \right\}_{i=1, \dots, n_B}. \quad (1.110)$$

L'étape de prédiction consiste alors à calculer la densité multi-objets $\pi_{(+)}$ en tenant compte de deux cas de figures. Soit les cibles de l'instant courant étaient présentes à l'instant précédent, auquel cas elles ont survécu, soit elles viennent d'apparaître et sont donc associées au processus des naissances :

$$\pi_{(+)} = \left\{ (r_{(+),S}^{(i)}, p_{(+),S}^{(i)}) \right\}_{i=1}^{n_{(-)}} \cup \left\{ (r_B^{(i)}, p_B^{(i)}) \right\}_{i=1, \dots, n_B}. \quad (1.111)$$

L'écriture sous la forme (1.111) est possible en considérant que l'EFA multi-Bernoulli des naissances et celui des objets survivants sont indépendants.

Dans le cas d'une survie, la probabilité moyenne de survie de la cible i quelle que soit sa position à l'instant $k - 1$ est calculée de la manière suivante :

$$\eta_S(i) = \int p_{S,k}(\mathbf{x}_{k-1}) p_{(-)}^{(i)}(\mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}. \quad (1.112)$$

La prédiction de la probabilité d'existence de l'objet représenté par le i ème EFA de Bernoulli s'exprime comme suit :

$$r_{(+),S}^{(i)} = r_{(-)}^{(i)} \eta_S(i), \quad (1.113)$$

et sa densité de probabilité spatiale correspondante est donnée par l'expression suivante :

$$p_{(+),S}^{(i)}(\mathbf{x}_k) = \frac{\int f_k(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p_{S,k}(\mathbf{x}_{k-1}) p_{(-)}^{(i)}(\mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}}{\eta_S(i)}. \quad (1.114)$$

Dans ces expressions, $p_{S,k}(\cdot)$ est la probabilité de survie à l'instant k potentiellement dépendante d'un état de l'instant $k-1$. Quant à $f_k(\cdot)$, c'est la densité de transition entre deux états successifs, liée au modèle de mouvement.

À l'issue de l'étape de prédiction, $n_{(+)} = n_{(-)} + n_B$. La densité multi-objets prédite est de la forme multi-Bernoulli et peut s'écrire de la façon suivante :

$$\pi_{(+)} = \left\{ (r_{(+)}^{(i)}, p_{(+)}^{(i)}) \right\}_{i=1}^{n_{(+)}}. \quad (1.115)$$

Durant l'étape de mise à jour, deux hypothèses sont considérées : les objets peuvent être détectés ou non. Lorsque les objets ne sont pas détectés, les paramètres de la densité multi-objets sont indexés par L pour faire ici référence au terme de "legacy" et valent :

$$r_{(*),L}^{(i)} = r_{(+)}^{(i)} \frac{1 - \int p_{D,k}(\mathbf{x}_k) p_{(+)}^{(i)}(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k}{1 - r_{(+)}^{(i)} \int p_{D,k}(\mathbf{x}_k) p_{(+)}^{(i)}(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k}, \quad (1.116)$$

$$p_{(*),L}^{(i)}(\mathbf{x}_k) = p_{(+)}^{(i)}(\mathbf{x}_k) \frac{1 - p_{D,k}(\mathbf{x}_k)}{1 - \int p_{D,k}(\mathbf{x}_k) p_{(+)}^{(i)}(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k}. \quad (1.117)$$

Les objets supposés détectés sont alors gérés par une autre approximation multi-Bernoulli. Selon l'hypothèse qu'une mesure correspond à un objet, un jeu de paramètres est calculé pour chaque mesure de la manière suivante :

$$r_{(*),U}(\mathbf{z}_k) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{(+)}} \frac{r_{(+)}^{(i)} (1 - r_{(+)}^{(i)}) \int g_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p_{D,k}(\mathbf{x}_k) p_{(+)}^{(i)}(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k}{\left(1 - r_{(+)}^{(i)} \int p_{D,k}(\mathbf{x}_k) p_{(+)}^{(i)}(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k\right)^2}}{\kappa_k(\mathbf{z}_k) + \sum_{i=1}^{n_{(+)}} \frac{r_{(+)}^{(i)} \int g_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p_{D,k}(\mathbf{x}_k) p_{(+)}^{(i)}(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k}{1 - r_{(+)}^{(i)} \int p_{D,k}(\mathbf{x}_k) p_{(+)}^{(i)}(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k}}, \quad (1.118)$$

$$p_{(*),U}(\mathbf{x}_k; \mathbf{z}_k) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{(+)}} \frac{r_{(+)}^{(i)}}{1 - r_{(+)}^{(i)}} g_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p_{D,k}(\mathbf{x}_k) p_{(+)}^{(i)}(\mathbf{x}_k)}{\sum_{i=1}^{n_{(+)}} \frac{r_{(+)}^{(i)}}{1 - r_{(+)}^{(i)}} \int g_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p_{D,k}(\mathbf{x}_k) p_{(+)}^{(i)}(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k}, \quad (1.119)$$

Enfin, afin de reconstruire une densité multi-objets *a posteriori* multi-Bernoulli, les paramètres dont les expressions sont fournies en (1.116)-(1.119) sont rassemblés comme suit :

$$\pi_{(*)} \approx \left\{ (r_{(*),L}^{(i)}, p_{(*),L}^{(i)}) \right\}_{i=1, \dots, n_{(+)}} \cup \left\{ (r_{(*),U}^{(i)}, p_{(*),U}^{(i)}) \right\}_{i=1, \dots, |Z_k|}. \quad (1.120)$$

À l'issue de l'étape de mise à jour, $n_{(*)} = n_{(+)} + |Z_k|$. Le nombre de paramètres à propager peut croître très rapidement. Dans les faits, dès qu'une probabilité d'existence devient proche de zéro, elle n'est plus représentée.

Ce filtre capable d'exploiter une formalisation multi-Bernoulli ne peut cependant pas être utilisé dans un environnement avec une trop forte densité de fausses alarmes [Vo13b]. Dans ce contexte, l'approximation faite au niveau de la mise à jour conduit à surestimer le nombre de cibles dans la configuration multi-cibles.

Filtre multi-Bernoulli labélisé (LMB)

Le filtre multi-Bernoulli labélisé (LMB) [Reu14a] se construit à partir des EFAs LMB et GLMB. L'EFA multi-Bernoulli classique est explicitement étiqueté afin de différencier les jeux de paramètres. Cela permet notamment de conserver l'identité de chaque couple au cours du temps et de faciliter la construction des pistes.

Le filtre LMB est apparu après le filtre δ -generalized LMB [Vo13a]. Comme il s'agit de l'approximation d'un cas particulier de ce dernier, nous le présentons ici en premier. Le filtre LMB permet de travailler sur un EFA étiqueté. Sans pouvoir égaler le filtre δ -generalized LMB, il fournit des estimations de meilleure qualité que les filtres PHD, CPHD ou CB-MeMber [Vo13b], avec une variance sur l'estimation du nombre de pistes moindre. Il se positionne comme un compromis entre qualité d'estimation et besoin en ressources calculatoires.

La densité multi-objets *a posteriori* est donnée à l'instant $k - 1$ par l'expression suivante :

$$\pi_{(-)} = \left\{ r_{(-)}^{(\ell)}, p_{(-)}^{(\ell)} \right\}_{\ell \in \mathbb{L}_{(-)}}, \quad (1.121)$$

avec $\mathbb{L}_{(-)}$ le jeu d'étiquettes courant. De manière équivalente, en mettant à profit les notations introduites précédemment, il est possible d'écrire la densité multi-objets comme suit :

$$\pi_{(-)}(X_{k-1}) = \Delta(X_{k-1}) w_{(-)} \left(\mathcal{L}(X_{k-1}) \right) p_{(-)}^{X_{k-1}}, \quad (1.122)$$

dont l'expression du poids $w_{(-)}$ se construit à partir des probabilités d'existence pour n'importe quel jeu d'étiquettes :

$$w_{(-)}(L) = \prod_{i \in \mathbb{L}_{(-)}} \left(1 - r_{(-)}^{(i)} \right) \prod_{\ell \in L} \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{L}_{(-)}}(\ell) r_{(-)}^{(\ell)}}{1 - r_{(-)}^{(\ell)}}. \quad (1.123)$$

L'étape de prédiction s'articule autour des deux hypothèses classiques : les objets de l'instant k sont nouveaux, ou alors ils sont issus de l'instant $k - 1$. La densité multi-objets des naissances est aussi multi-Bernoulli labélisée et s'écrit donc :

$$\pi_B(X_k) = \Delta(X_k) w_B \left(\mathcal{L}(X_k) \right) [p_B]^{X_k}, \quad (1.124)$$

avec l'expression du poids w_B donnée par :

$$w_B(L) = \prod_{i \in \mathbb{B}} \left(1 - r_B^{(i)} \right) \prod_{\ell \in L} \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{B}}(\ell) r_B^{(\ell)}}{1 - r_B^{(\ell)}}. \quad (1.125)$$

L'expression de la densité multi-objets prédite multi-Bernoulli labélisée est alors :

$$\pi_{(+)}(X_k) = \Delta(X_k) w_{(+)} \left(\mathcal{L}(X_k) \right) [p_{(+)}]^{X_k}, \quad (1.126)$$

avec l'expression de $w_{(+)}$ suivante :

$$w_{(+)}(I_+) = w_B(I_+ \cap \mathbb{B}) w_{(+),S}(I_+ \cap \mathbb{L}_{(-)}). \quad (1.127)$$

À ce stade, il est important de remarquer que le jeu des étiquettes prédit se construit à partir des étiquettes de l'instant précédent et des naissances comme suit :

$$\mathbb{L}_{(+)} = \mathbb{L}_{(-)} \cup \mathbb{B}, \quad (1.128)$$

avec $\mathbb{L}_{(-)} \cap \mathbb{B} = \emptyset$.

Concernant les termes se référant aux objets survivants, la prédiction des paramètres se fait de manière classique. Les probabilités d'existence sont données par :

$$r_{(+),S}^{(\ell)} = \eta_S(\ell) r_{(-)}^{(\ell)}, \quad (1.129)$$

Les densités spatiales s'expriment comme suit :

$$p_{(+),S}^{(\ell)}(\mathbf{x}_k) = \frac{\int p_{S,k}^{(\ell)}(\mathbf{x}_{k-1}) f_k^{(\ell)}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p_{(-)}^{(\ell)}(\mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}}{\eta_S(\ell)}, \quad (1.130)$$

avec $\eta_S(\ell)$ le terme de normalisation défini par :

$$\eta_S(\ell) = \int p_{S,k}^{(\ell)}(\mathbf{x}_{k-1}) p_{(-)}^{(\ell)}(\mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}. \quad (1.131)$$

Le calcul du poids lié à la survie est alors donné par :

$$w_{(+),S}(L) = [\eta_S]^L \sum_{I \supseteq L} [1 - \eta_S]^{I-L} w_{(-)}(I), \quad (1.132)$$

avec I un ensemble d'étiquettes contenant au moins L et contenu dans $\mathbb{L}_{(-)}$. Afin de pleinement expliciter (1.126), $p_{(+)}^{(\ell)}$ est alors définie de la manière suivante :

$$p_{(+)}^{(\ell)}(\mathbf{x}_k) = \mathbb{1}_{\mathbb{L}}(\ell) p_{(+),S}^{(\ell)}(\mathbf{x}_k) + \mathbb{1}_{\mathbb{B}}(\ell) p_B^{(\ell)}(\mathbf{x}_k), \quad (1.133)$$

sachant que selon une étiquette ℓ donnée, la densité spatiale est issue uniquement des objets naissants ou bien uniquement des objets survivants. La mise à jour se fait donc à partir de la densité multi-objets prédite, multi-Bernoulli labélisée, représentée par les paramètres suivants :

$$\pi_{(+)} = \left\{ (r_{(+),S}^{(\ell)}, p_{(+),S}^{(\ell)}) \right\}_{\ell \in \mathbb{L}_{(-)}} \cup \left\{ (r_B^{(\ell)}, p_B^{(\ell)}) \right\}_{\ell \in \mathbb{B}} = \left\{ (r_{(+)}^{(\ell)}, p_{(+)}^{(\ell)}) \right\}_{\ell \in \mathbb{L}_{(+)}}. \quad (1.134)$$

La densité multi-objets multi-Bernoulli labélisée ne peut pas être directement mise à jour sous une forme conjuguée. Cependant, un EFA multi-Bernoulli labélisé est un cas particulier d'EFA GLMB. Dans [Reu14a], l'étape de mise à jour nécessite d'utiliser le formalisme du GLMB, permettant ainsi de formuler une double hypothèse sur les étiquettes à mettre à jour et leur mesure associée. L'hypothèse sur la liste d'étiquettes est notée $I_+ \in \mathcal{F}(\mathbb{L}_{(+)})$ tandis que l'hypothèse de *mapping* entre I_+ et les mesures disponibles est notée $\theta \in \Theta_{I_+}$. L'ensemble des hypothèses Θ_{I_+} se définit en fonction du I_+ considéré.

La probabilité d'existence pour une étiquette ℓ se calcule alors en rassemblant les contributions des différentes hypothèses comme suit :

$$r_{(*)}^{(\ell)} = \sum_{(I_+, \theta) \in \mathcal{F}(\mathbb{L}_{(+)}) \times \Theta_{I_+}} w^{(I_+, \theta)}(Z_k) \mathbb{1}_{I_+}(\ell). \quad (1.135)$$

Il en est de même pour la densité spatiale :

$$p_{(*)}^{(\ell)}(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{r_{(*)}^{(\ell)}} \sum_{(I_+, \theta) \in \mathcal{F}(\mathbb{L}_{(+)}) \times \Theta_{I_+}} w^{(I_+, \theta)}(Z_k) \mathbb{1}_{I_+}(\ell) p^{(\theta)}(\mathbf{x}_k, \ell), \quad (1.136)$$

avec les poids $w^{(I_+, \theta)}(Z_k)$ dont l'expression dépend d'un poids *a priori* uniquement fondé sur une hypothèse de I_+ et d'un terme de vraisemblance :

$$w^{(I_+, \theta)}(Z_k) \propto w_{(+)}(I_+) \left[\eta_{Z_k}^{(\theta)} \right]^{I_+}, \quad (1.137)$$

L'expression de la densité spatiale *a posteriori*, conditionnellement à une hypothèse jointe d'étiquettes et d'association, est donnée par :

$$p^{(\theta)}(\mathbf{x}_k, \ell) = \frac{p_{(+)}^{(\ell)}(\mathbf{x}_k) \psi_{Z_k}(\mathbf{x}_k, \ell; \theta)}{\eta_{Z_k}^{(\theta)}(\ell)}. \quad (1.138)$$

Le terme de normalisation vaut :

$$\eta_{Z_k}^{(\theta)}(\ell) = \int p_{(+)}^{(\ell)}(\mathbf{x}_k) \psi_{Z_k}(\mathbf{x}_k, \ell; \theta) d\mathbf{x}_k, \quad (1.139)$$

tandis que la vraisemblance elle-même s'exprime de manière classique avec :

$$\psi_{Z_k}(\mathbf{x}_k, \ell; \theta) = \begin{cases} \frac{p_{D,k}^{(\ell)}(\mathbf{x}_k) g_k(\mathbf{z}_{\theta(\ell)} | \mathbf{x}_k, \ell)}{\kappa_k(\mathbf{z}_{\theta(\ell)})}, & \text{si } \theta(\ell) > 0, \\ 1 - p_{D,k}^{(\ell)}(\mathbf{x}_k), & \text{si } \theta(\ell) = 0, \end{cases} \quad (1.140)$$

avec $\kappa_k(\mathbf{z}_k) = \lambda_f \mathcal{U}_f(\mathbf{z}_k)$ et $g_k(\cdot, \cdot)$ la densité de vraisemblance liée au modèle de mesure.

Une fois les éléments (1.135) et (1.136) calculés, la densité multi-objets peut à nouveau être considérée comme une densité multi-objets multi-Bernoulli labélisée.

Filtre δ -generalized LMB (δ -GLMB)

Le filtre δ -generalized LMB [Vo13a] utilise une forme particulière d'un EFA *generalized LMB* dédiée au pistage. La densité multi-objets *a posteriori* est donnée par :

$$\pi_{(-)}(X_{k-1}) = \Delta(X_{k-1}) \sum_{I \in \mathcal{F}(\mathbb{L}_{(-)}), \xi \in \Xi} w_{(-)}^{(I, \xi)} \delta_I(\mathcal{L}(X_{k-1})) [p^{(\xi)}]^{X_{k-1}}, \quad (1.141)$$

avec Ξ l'ensemble des hypothèses d'historiques d'associations et $\mathcal{F}(\mathbb{L}_{(-)})$ l'ensemble des ensembles d'étiquettes constitués à partir des étiquettes disponibles à l'instant $k-1$. Selon la forme conjuguée liée aux EFAs GLMB, la densité multi-objets prédite peut alors s'écrire comme suit :

$$\pi_{(+)}(X_k) = \Delta(X_k) \sum_{L_{(-)}, \xi, B} w_{(+)}^{(L_{(-)}, \xi, B)} \delta_{L_{(-)} \cup B}(\mathcal{L}(X_k)) [p_{(+)}^{(\xi)}]^{X_k}, \quad (1.142)$$

avec $L_{(-)} \in \mathcal{F}(\mathbb{L}_{(-)})$, $\xi \in \Xi$ et $B \in \mathcal{F}(\mathbb{B})$. Concernant les étiquettes prédites $\mathbb{L}_{(+)} = \mathbb{L}_{(-)} \cup \mathbb{B}$ avec $\mathbb{L}_{(-)} \cap \mathbb{B} = \emptyset$. Les poids quant à eux sont calculés en combinant les objets naissants et survivants de la manière suivante :

$$\begin{aligned} w_{(+)}^{(L_{(-)}, \xi, B)} &\triangleq w_{(+)}^{(\xi)}(L_{(-)} \cup B) = w_B(B \cap \mathbb{B}) w_S^{(\xi)}(L_{(-)} \cap \mathbb{L}), \\ &= \mathbb{1}_{\mathcal{F}(\mathbb{B})}(B) [r_B]^B [1 - r_B]^{\mathcal{F}(\mathbb{B}) - B} \times \sum_{I \in \mathcal{F}(\mathbb{L}_{(-)})} \mathbb{1}_{\mathcal{F}(I)}(L_{(-)}) [\eta_S^{(\xi)}]^{L_{(-)}} [1 - \eta_S^{(\xi)}]^{I - L_{(-)}} w^{(I, \xi)}. \end{aligned} \quad (1.143)$$

La densité spatiale selon un historique d'association donné et une étiquette donnée s'écrit :

$$p_{(+)}^{(\xi, \ell)}(\mathbf{x}_k) = \mathbb{1}_{\mathbb{L}}(\ell) \frac{\int f_k^{(\ell)}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \ell) p_{S,k}^{(\ell)}(\mathbf{x}_{k-1}) p_{(-)}^{(\xi, \ell)}(\mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}}{\eta_S^{(\xi)}(\ell)} + \mathbb{1}_{\mathbb{B}}(\ell) p_B^{(\ell)}(\mathbf{x}_k), \quad (1.144)$$

avec $f_k^{(\ell)}(\cdot, \cdot, \ell)$ la densité de transition entre deux états successifs liée au modèle de mouvement et $p_{S,k}^{(\ell)}(\cdot)$ la probabilité de survie. L'historique des associations n'est pas modifié par l'étape de prédiction et incorpore simplement les naissances.

Le terme de normalisation s'exprime comme suit :

$$\eta_S^{(\xi)}(\ell) = \int p_{S,k}^{(\ell)}(\mathbf{x}_{k-1}) p_{(-)}^{(\xi, \ell)}(\mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}. \quad (1.145)$$

L'étape de mise à jour s'effectue en recherchant les paramètres de la densité multi-objets en prenant en compte les hypothèses d'association courantes $\{\theta_+\}$ comme suit :

$$\pi_{(*)}(X_k) \propto \Delta(X_k) \sum_{L_{(-)}, \xi, B, \theta_+} w_{(*)}^{(L_{(-)}, \xi, B, \theta_+)} \delta_{L_{(-)} \cup B}(\mathcal{L}(X_k)) [p_{(*)}^{(\xi, \theta_+)}]^{X_k}, \quad (1.146)$$

avec l'expression des poids définie par :

$$w_{(*)}^{(L_{(-)}, \xi, B, \theta_+)} = \mathbb{1}_{\Theta_+(L_{(-)} \cup B)}(\theta_+) \left[\bar{\psi}_{Z_k}^{(\xi, \theta_+)} \right]^{L_{(-)} \cup B} w_{(+)}^{(L_{(-)}, \xi, B)}. \quad (1.147)$$

Le terme de vraisemblance est donné par :

$$\bar{\psi}_{Z_k}^{(\xi, \theta_+)}(\ell) = \int p_{(+)}^{(\xi, \ell)}(\mathbf{x}_k) \psi_{Z_k}^{(\theta_+(\ell))}(\mathbf{x}_k, \ell) d\mathbf{x}_k, \quad (1.148)$$

et :

$$\psi_{Z_k}^{(\theta_+)}(\mathbf{x}_k, \ell) = \begin{cases} \frac{p_{D,k}^{(\ell)}(\mathbf{x}_k) g_k(\mathbf{z}_{\theta_+(\ell)} | \mathbf{x}_k, \ell)}{\kappa_k(\mathbf{z}_{\theta_+(\ell)})}, & \text{si } \theta_+(\ell) > 0, \\ 1 - p_{D,k}^{(\ell)}(\mathbf{x}_k), & \text{si } \theta_+(\ell) = 0, \end{cases} \quad (1.149)$$

avec $\kappa_k(\mathbf{z}_k) = \lambda_f \mathcal{U}_f(\mathbf{z}_k)$ et $g_k(\cdot | \cdot)$ la fonction de vraisemblance liée au modèle de mesure. La densité spatiale pondérée par sa vraisemblance vaut :

$$p_{(*)}^{(\xi, \theta_+)}(\mathbf{x}_k, \ell) = \frac{p_{(+)}^{(\xi, \ell)}(\mathbf{x}_k) \psi_{Z_k}^{(\theta_+(\ell))}(\mathbf{x}_k, \ell)}{\bar{\psi}_{Z_k}^{(\xi, \theta_+)}(\ell)}. \quad (1.150)$$

Une fois la mise à jour effectuée, chaque hypothèse d'association courante est utilisée pour construire le nouveau jeu d'historiques d'associations Ξ .

D'un certain point de vue, le filtre δ -GLMB se rapproche sous sa forme théorique des algorithmes de type MHT. La mise en œuvre efficace des filtres de type GLMB fait l'objet de travaux à part entière. Dans [Vo17], les auteurs proposent une implémentation de complexité linéaire par rapport au nombre de mesures et quadratique par rapport au nombre d'hypothèses d'objets.

Filtre	Identification directe des pistes	Coût calculatoire : n pistes, m mesures	Estimation du nombre d'objets	Précision globale : OSPA
PHD [Mah03]	Non	$O(mn)$	Sensible aux FAs	--
CPHD [Mah07]	Non	$O(m^3n)$	Sensible au paramétrage du taux de FAs	-
CB-MemBer [Vo13b]	Non	$O(mn)$	Sensible aux FAs	--
LMB [Reu14a]	Oui	$O(m^3n^2)$ (max rare)	Fiable	+
δ -GLMB [Vo14]	Oui	$O(m^3n^2)$ puis $O(mn^2)$ [Vo17]	Fiable	++

TABLE 1.1 – Récapitulatif sur les filtres fondés sur les EFAs.

1.3.6 Définition de la métrique *optimal subpattern assignment* (OSPA)

Initialement introduite pour les processus ponctuels dans [Sch08b], la métrique appelée *optimal subpattern assignment* (OSPA) a principalement été utilisée pour évaluer les performances des algorithmes de pistage multi-objets [Sch08]. Elle a été aussi utilisée pour construire des algorithmes d'estimation dont elle est le critère d'erreur à minimiser comme l'algorithme *minimum mean* OSPA [Gue10] par exemple. Enfin, parmi ses usages divers, l'OSPA a aussi servi de support pour effectuer de la segmentation [Bau15], de la comparaison de processus auto-régressifs [Chl14], *etc.* La métrique OSPA entre deux ensembles non ordonnés $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$ et $Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$ est définie pour $m \leq n$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, comme suit :

$$d_p^{(c)}(X, Y) = \left(\frac{1}{n} \left(\min_{\pi \in \Pi_n} \sum_{i=1}^m [d_c(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_{\pi(i)})]^p + c^p (n - m) \right) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.151)$$

avec $c > 0$ que l'on nomme paramètre de coupure, p l'ordre défini tel que $0 < p < +\infty$, Π_n est l'ensemble des permutations construites sur $\{1, 2, \dots, n\}$ et $d_c(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ la métrique entre les deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} donnée par :

$$d_c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min(c, d(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad (1.152)$$

où $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est une métrique entre les vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} . Il est à noter que les composantes des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} ne sont pas nécessairement de même dimension physique. Comme pour le calcul de l'EQM, il est commun que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ soit calculée pour les coordonnées de position et de vitesse.

En outre, le paramétrage de c et p fait l'objet d'une discussion dans [Sch08]. c s'interprète généralement comme la distance au delà de laquelle une association entre un vecteur \mathbf{x} et un vecteur \mathbf{y} n'a plus de sens. Concernant p , il augmente la pénalisation relative des grandes valeurs. Une grande valeur de p revient à augmenter la contribution des valeurs proches de c à la valeur finale de l'OSPA.

La métrique OSPA, qui est une variante de la métrique de Wasserstein d'ordre p [Hof04], est spécialement construite pour tenir compte au sein d'un même indicateur, de la différence entre le nombre d'éléments de X et Y et de la différence entre les éléments de X et ceux de Y , selon un meilleur cas d'association.

De nombreuses variantes et métriques complémentaires existent, parmi lesquelles : la Hellinger-OSPA (H-OSPA) [Nag11], la *quality-based* OSPA (Q-OSPA) [He13], l'OSPA généralisée (GOSPA) [Rah17], la C-OSPA [Shi17], l'OSPA *for tracks* [Ris10b, Ris11] ou encore la *cardinalized optimal linear assignment* (COLA) *metric* [Bar15]. Toutes ces métriques traitent de cas plus spécifiques que l'OSPA initiale.

1.4 Conclusions et axes de travail dans le cadre de la thèse

Dans ce chapitre, différentes techniques de pistage ont été présentées. La composante principale du pistage est l'estimation des trajectoires des objets d'intérêt à partir des mesures bruitées. Cependant, d'autres problématiques au-delà de l'estimation classique sont venues se greffer au fil des années. C'est le cas pour le pistage multi-cibles. En effet, le nombre d'objets présents dans la région d'observation et la provenance des mesures sont autant de nouvelles inconnues que le traitement doit gérer. Une grande diversité de solutions a été proposée dont deux des plus classiques sont le filtre *joint probabilistic data association* (JPDA) [Bar11] et le *multiple hypothesis tracking* (MHT) [Bla99]. Le premier est mis en défaut lorsque le taux de fausses alarmes est élevé et les cibles spatialement proches alors que le second requiert d'importantes ressources calculatoires. Plus récemment, les approches fondées sur les ensembles finis aléatoires (EFA) [Mah03], présentées dans ce chapitre, ont été développées comme des filtres multi-objets s'appuyant sur un formalisme adapté. Il consiste à prendre directement en compte les incertitudes liées au cadre multi-cibles dans la représentation de l'espace d'état. Dès lors, les traitements n'estiment pas des états individuels pour chacune des cibles mais plutôt une configuration multi-cibles globale. Un ensemble de nouveaux filtres a été proposé, allant du filtre

probability hypothesis density (PHD) [Mah03] au filtre δ -*generalized labeled* multi-Bernoulli [Vo13a]. Dans la suite de cette thèse, nous considérons des cas spécifiques de pistage. En particulier, dans le chapitre 2, nous nous intéressons aux approches *joint tracking and classification* (JTC) pour lesquelles des mesures complémentaires de longueur sont potentiellement disponibles. Dans les chapitres 3 et 4, nous abordons la problématique du pistage de groupes de cibles dont les mouvements sont coordonnés. Toutes les approches proposées sont fondées sur l'utilisation des EFAs présentés dans le chapitre 1.

Chapitre 2

Approche conjointe de pistage et de classification

Sommaire

2.1	Introduction	61
2.2	Principe général du pistage et de la classification conjoints	62
2.3	Développements théoriques fondés sur un filtre de Bernoulli	65
2.3.1	Filtre de Bernoulli	66
2.3.2	Utilisation d'une mesure complémentaire de longueur	69
2.4	Mise en œuvre par filtrage particulière	73
2.4.1	Mise en œuvre fondée sur un filtre Rao-Blackwellisé	73
2.4.2	Remarque sur l'utilisation simultanée de plusieurs modèles de mouvement	78
2.4.3	Pseudo-codes pour la mise en œuvre du filtre proposé	79
2.5	Simulations	83
2.5.1	Protocole de simulation	83
2.5.2	Comparaison des différentes versions de l'approche JTC	86
2.6	Conclusions et perspectives	97

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, les approches bayésiennes présentées sont fondées sur une REE comportant un modèle de mesure et un modèle d'état. Ce dernier peut s'interpréter comme une hypothèse *a priori* sur le type de trajectoire des objets en mouvement. Son adéquation par rapport au mouvement réellement suivi par les objets a une influence sur la qualité de l'estimation des trajectoires. Dans le cadre de la surveillance radar, les cibles observées ont des dynamiques variées. Dans les airs, un chasseur militaire est potentiellement sujet à de plus fortes accélérations qu'un avion de transport civil. De même en surveillance maritime, les différentes catégories de navires comme les porte-conteneurs, les bateaux de pêche ou les zodiacs ont des capacités de manœuvre très différentes. Enfin, en surveillance terrestre, il est possible de distinguer les véhicules légers comme les voitures ou les deux roues, des véhicules plus lourds tels que les camions.

Les approches conjointes de pistage et de classification (*joint target tracking and classification* en anglais - JTC) [Cha01, Mei04, Ris04] consistent à identifier le type ou la classe des cibles pistées au cours du temps. En fonction de cette classe, on utilise un ou plusieurs modèles d'évolution d'état associés pour estimer les trajectoires. Réciproquement, l'estimation des trajectoires au cours du temps permet d'estimer une probabilité d'appartenance de chaque objet pisté à une classe. Ces estimations sont menées conjointement et s'alimentent mutuellement. Outre le gain de précision, l'attribution d'une

classe à chaque objet pisté peut avoir un intérêt du point de vue de l'opérateur du radar.

Dans [Mag15a, Mag16a, Mag18], des approches JTC sont proposées pour le contexte spécifique de la surveillance maritime. Le radar délivre une mesure ponctuelle de position pour chaque objet. De plus, la résolution sur l'axe en distance permet de fournir une mesure reliée à la longueur de l'objet. L'estimation de cette longueur, discriminante du point de vue de l'attribution de la classe, est menée conjointement à celle de la classe des objets et de leurs paramètres cinématiques. Dans [Mag15a], les traitements proposés sont établis dans un environnement mono-cible. Pour tenir compte des capacités de manœuvre au sein d'une classe au cours du temps, des algorithmes à modèles multiples [Bar11] sont utilisés. Les classes sont alors caractérisées par des types prédéfinis de modèles de mouvement pour lesquels la variance du processus générateur est inconnue *a priori*. Cette dernière fait l'objet d'une estimation par l'intermédiaire de méthodes hiérarchiques d'inférence bayésienne fondées sur les processus de Dirichlet. Dans [Mag16a], une approche JTC utilisant les mesures d'étalement distance dans le cas multi-cibles est également étudiée. Une solution s'appuyant sur un filtre PHD multi-modèles par classe est proposée et permet d'obtenir un algorithme relativement peu coûteux en termes de ressources calculatoires. Il nécessite cependant un traitement additionnel pour construire des pistes et peut rencontrer des difficultés dès que le taux de fausses alarmes devient élevé.

D'autres auteurs ont proposé des solutions JTC. Elles tirent profit du formalisme des EFAs comme dans [Li16, Che17] et sont fondées sur l'utilisation d'un filtre GLMB. Un des avantages des filtres fondés sur les EFAs de Bernoulli ou multi-Bernoulli étiquetés est leur adaptabilité à des cas complexes au niveau des mesures qui les alimentent. Par exemple dans [Che17], le problème spécifique des mesures fusionnées, du fait de la proximité spatiale des cibles entre elles, est abordé. Un autre atout des approches étiquetées réside dans la construction explicite des pistes pour assurer le suivi des cibles au cours du temps.

L'approche JTC présentée dans cette thèse [Leg17] s'inscrit dans la continuité de ces différents travaux. Elle est dédiée au contexte spécifique de la surveillance de cibles maritimes ou terrestres. Comme la surveillance d'objets de surface implique généralement un taux élevé de fausses alarmes, la solution envisagée s'appuie sur un filtre de Bernoulli connu pour sa résilience vis-à-vis de ce phénomène [Ris12b]. De plus, comme dans [Mag15a, Mag16a], l'algorithme intègre des modèles multiples pour la gestion de la grande diversité des capacités de manœuvre des cibles. Il permet aussi l'utilisation d'une mesure complémentaire d'étalement distance du radar.

La suite de ce chapitre est organisée en cinq parties. La partie 2.2 rappelle le principe général des approches conjointes de pistage et de classification. Ensuite, la partie 2.3 présente les développements théoriques de l'approche JTC proposée. Elle intègre un rappel sur les algorithmes à modèles multiples et présente aussi le modèle de mesure pour l'utilisation d'une mesure complémentaire de longueur. Dans la partie 2.4, la mise en œuvre par filtrage particulière est détaillée avec une structure Rao-Blackwellisée. Les développements théoriques et la mise en œuvre permettent de construire quatre versions d'approches JTC toutes fondées sur des filtres de Bernoulli multi-modèles. Ces variantes s'articulent autour de l'utilisation ou non de la mesure complémentaire d'étalement distance et sur la propagation des particules selon une loi *a priori* ou optimale. La partie 2.5 évalue le comportement de ces quatre versions d'algorithmes sur la base de simulations de Monte Carlo. Enfin, la partie 2.6 présente les conclusions et les perspectives relatives à l'approche proposée.

2.2 Principe général du pistage et de la classification conjoints

Pour un unique objet mobile et ses observations correspondantes, les approches JTC estiment à chaque instant un jeu de densités *a posteriori* $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}, c)$ où \mathbf{x}_k désigne le vecteur d'état, c la classe supposée de l'objet et $\mathbf{z}_{1:k}$ l'ensemble des observations reçues jusqu'à l'instant k . Pour fournir une estimation indépendante d'une quelconque hypothèse, les densités *a posteriori* selon toutes les classes c sont combinées selon leur pertinence en calculant une distribution sur les classes notée $p(c | \mathbf{z}_{1:k})$.

Les estimations conjointes des classes et des états se décomposent selon deux étapes.

La première concerne la loi *a posteriori* sur la classe que l'on peut exprimer récursivement en exploitant la règle de Bayes comme suit :

$$p(c|\mathbf{z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{z}_{1:k-1}, c)p(c|\mathbf{z}_{1:k-1})}{\sum_{c' \in \mathcal{C}} p(\mathbf{z}_k|\mathbf{z}_{1:k-1}, c')p(c'|\mathbf{z}_{1:k-1})}, \quad (2.1)$$

avec \mathcal{C} l'ensemble des classes envisageables.

La distribution de la classe de l'objet à l'instant k , telle que définie en (2.1) dépend de celle de l'instant précédent, à savoir $p(c|\mathbf{z}_{1:k-1})$, et d'une vraisemblance $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{z}_{1:k-1}, c)$ relative à la nouvelle mesure \mathbf{z}_k . Pour obtenir cette vraisemblance à partir de l'estimation, des variables cinématiques de l'objet mobile doivent être marginalisées :

$$p(\mathbf{z}_k|\mathbf{z}_{1:k-1}, c) = \int p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k, c)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k-1}, c)d\mathbf{x}_k. \quad (2.2)$$

La seconde étape vise à construire la densité *a posteriori* de l'état $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k})$. Elle nécessite toutes les densités *a posteriori* $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k}, c)$ ainsi que la distribution sur les classes $p(c|\mathbf{z}_{1:k})$. Les estimations des densités $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k}, c)$ sont effectuées pour chaque classe $c \in \mathcal{C}$. La densité de l'état indépendamment de la classe de la cible peut alors s'exprimer comme une loi de mélange :

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k}) = \sum_{c \in \mathcal{C}} p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k}, c)p(c|\mathbf{z}_{1:k}). \quad (2.3)$$

Le principe d'un algorithme JTC est illustré avec la figure 2.1 et conduit à estimer récursivement deux types de lois :

- les densités *a posteriori* $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k}, c)$ de l'état conditionnellement à chaque hypothèse de classe c ,
- la distribution $p(c|\mathbf{z}_{1:k})$ des classes obtenue en marginalisant les densités prédites $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k-1}, c)$ de l'état conditionnellement aux classes c .

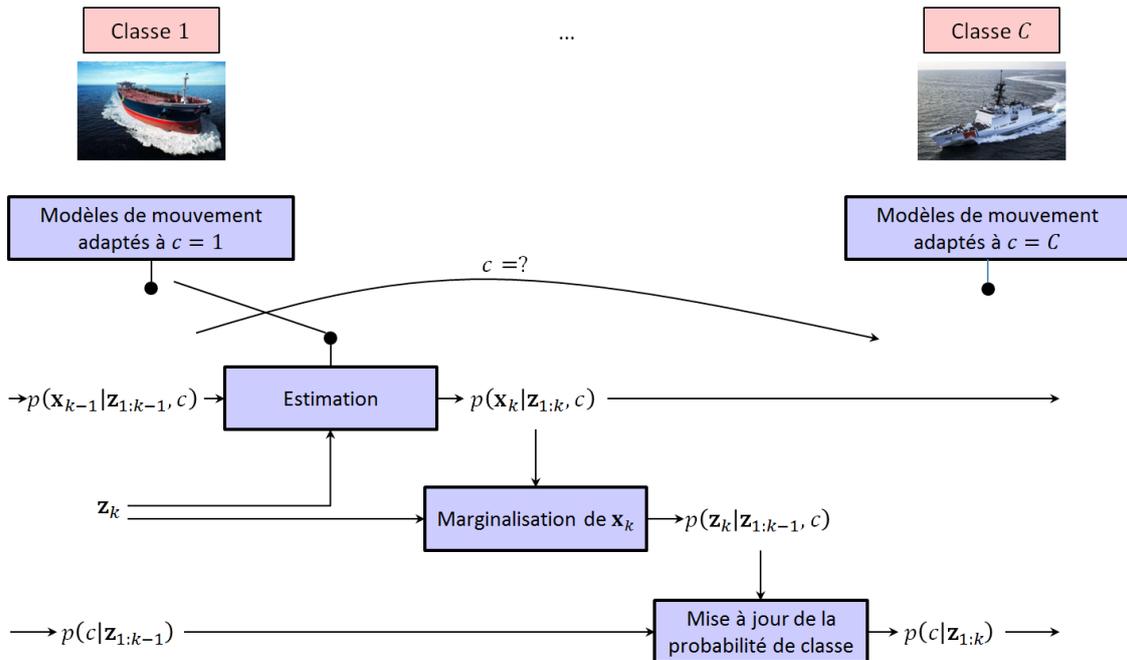


FIGURE 2.1 – Principe des approches JTC.

Dans les parties suivantes, nous adaptons le principe du JTC pour l'utilisation d'un filtre de Bernoulli. La partie 2.3 s'attache d'abord à décrire le formalisme du filtre de Bernoulli intégré à une approche JTC. Les interactions entre le pistage et la classification peuvent être représentées comme sur la figure 2.2.

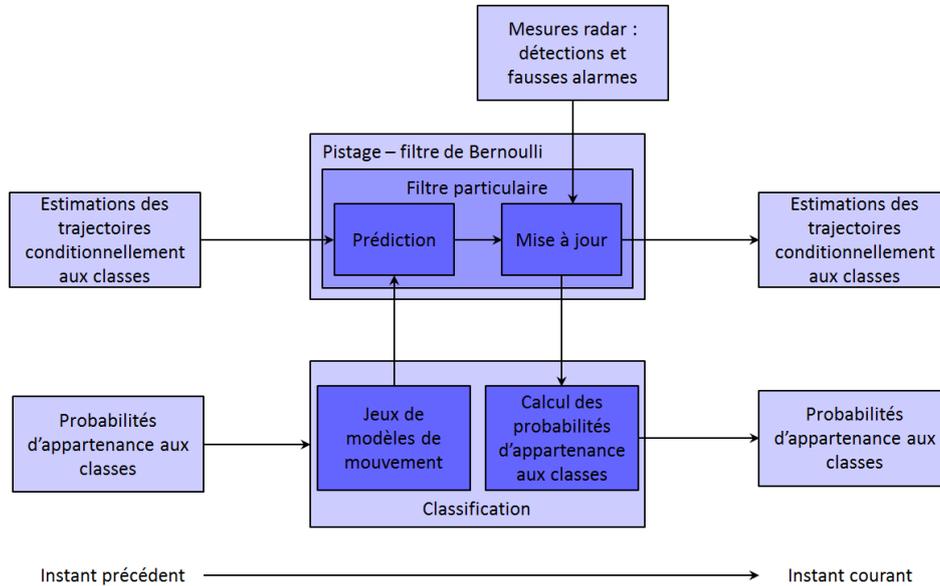


FIGURE 2.2 – Filtre de Bernoulli intégré dans une approche JTC.

Cette première solution est complétée en introduisant le formalisme permettant d'utiliser une mesure complémentaire d'étalement distance. Algorithmiquement, cela se traduit par l'ajout d'un bloc de traitement tel que représenté sur la figure 2.3.

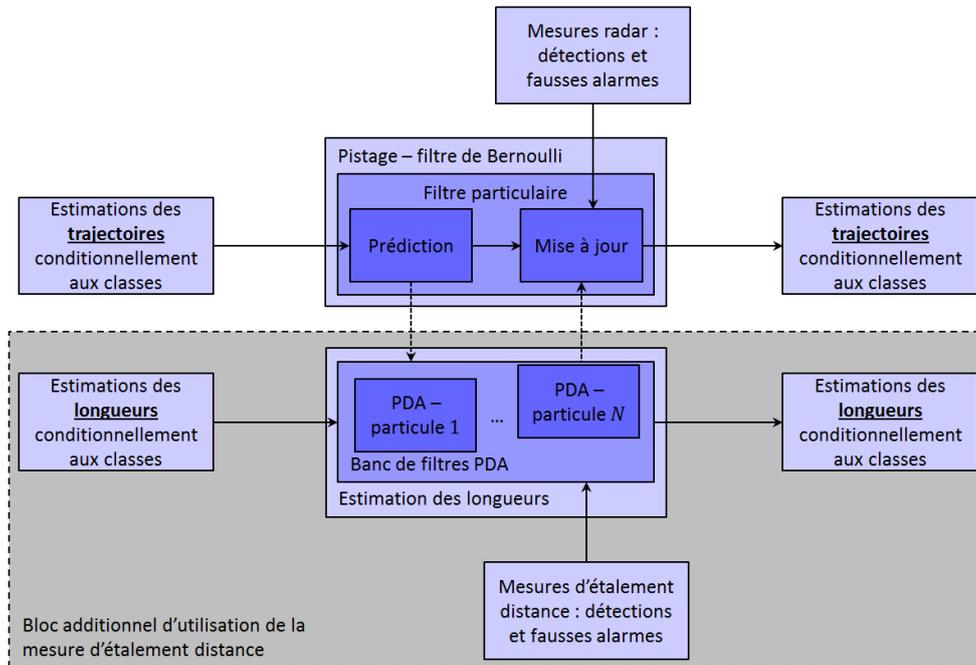


FIGURE 2.3 – Conditionnellement à une classe, stratégie Rao-Blackwellisée pour les estimations des variables cinématiques et de la longueur.

Cette partie du chapitre ne faisant qu'introduire le formalisme, la description de la mise en œuvre du traitement de pistage fait l'objet de la partie 2.4. Comme illustré sur les figures 2.2 et 2.3, le filtre de Bernoulli est géré par l'intermédiaire d'un filtre particulaire. Pour le traitement des mesures d'étalement distance, nous introduisons une approche Rao-Blackwellisée. Le filtre particulaire est alors complété d'un banc de filtres PDA qui gèrent l'estimation de la longueur de la cible. À noter que cette mise en œuvre de la Rao-Blackwellisation n'est pas classique. En effet, les filtres de Kalman habituellement utilisés sont remplacés par des filtres PDA pour prendre en compte les éventuelles fausses alarmes parmi les mesures.

L'utilisation d'un filtre particulaire ouvre la possibilité de propager les particules selon une loi *a priori* ou optimale. Selon toutes ces variations, on obtient quatre déclinaisons du filtre de Bernoulli intégré à une approche JTC. L'organisation du chapitre peut être résumée par la figure 2.4.

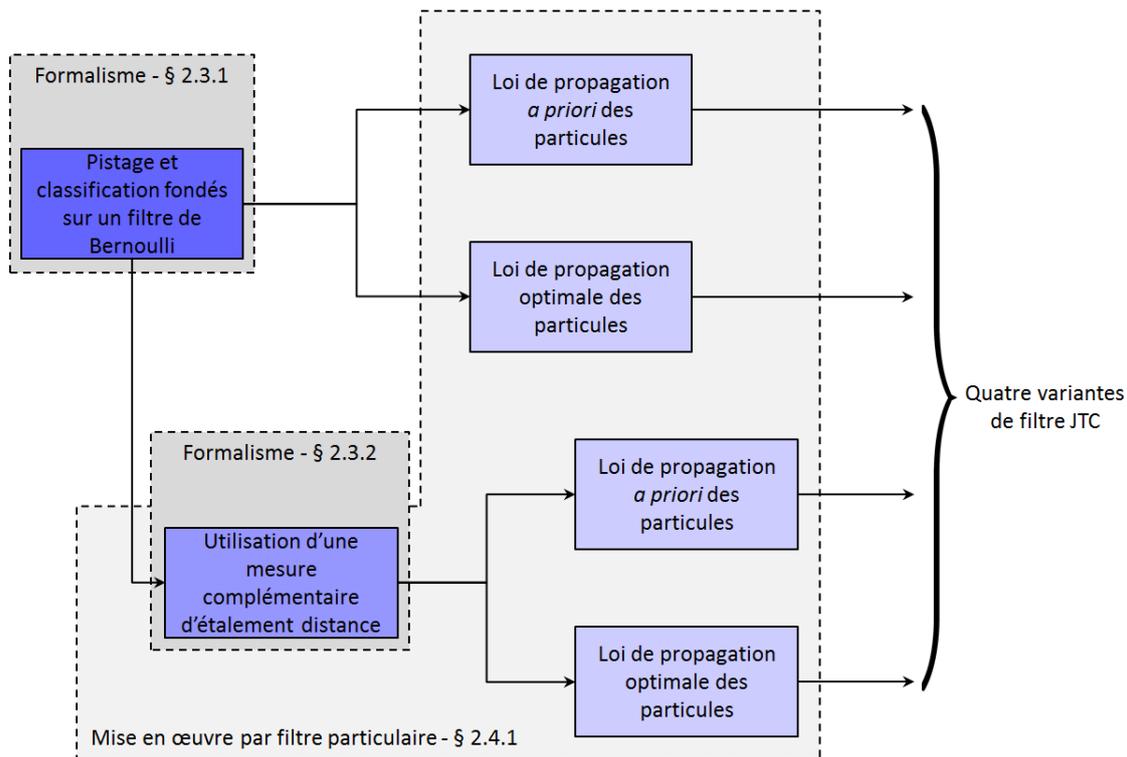


FIGURE 2.4 – Déclinaisons des variantes du filtre de Bernoulli intégré dans une approche JTC.

2.3 Développements théoriques fondés sur un filtre de Bernoulli

Comme nous l'avons précisé dans la première partie, le filtre de Bernoulli [Ris13] se construit à partir de l'EFA de Bernoulli dans lequel un seul objet est potentiellement présent ou absent. L'incertitude sur la configuration observée est gérée par l'intermédiaire d'une probabilité de présence. De plus, le filtre de Bernoulli est développé avec un EFA multi-mesures de type Poisson. Cela permet d'être robuste aux fausses alarmes dans un contexte mono-cible. Dans cette partie, nous développons les principes théoriques d'une approche JTC utilisant un filtre de Bernoulli par classe d'objet. De plus, de par la grande diversité des cibles en termes de capacité de manœuvre, les développements incluent le recours possible à des filtres à modèles multiples. Enfin, notre approche comprend aussi les développements permettant de construire des filtres alimentés par une mesure complémentaire d'étalement distance et procédant à l'estimation de la longueur de la cible.

2.3.1 Filtre de Bernoulli

Pour reprendre les notations introduites dans le chapitre précédent, l'état à l'instant $k-1$ est noté X_{k-1} avec $X_{k-1} = \{\mathbf{x}_{k-1}\}$ ou $X_{k-1} = \emptyset$. La densité multi-objets *a posteriori* de l'instant précédent $k-1$ s'écrit conditionnellement à l'hypothèse de classe c de la manière suivante :

$$\pi_{(-)}(X_{k-1}|c) = \begin{cases} 1 - r_{(-)}^c & \text{si } X_{k-1} = \emptyset, \\ r_{(-)}^c p_{(-)}(\mathbf{x}_{k-1}|c) & \text{si } X_{k-1} = \{\mathbf{x}_{k-1}\}, \end{cases} \quad (2.4)$$

où $r_{(-)}^c$ est la probabilité de présence de la cible, définie telle que $r_{(-)}^c = P\{|X_{k-1}| = 1 | Z_{1:k-1}, c\}$. De plus, $Z_{1:k-1}$ désigne l'ensemble des EFAs multi-mesures reçus jusqu'à l'instant $k-1$.

À partir de cette densité multi-objets à l'instant $k-1$, on cherche à estimer celle à l'instant k notée $\pi_{(*)}(X_k|c)$. Pour ce faire, la récursion s'appuie sur les deux étapes du filtre de Bernoulli, à savoir :

- une étape de prédiction qui tient compte des hypothèses de mouvement. Ces dernières se traduisent par des expressions particulières de la matrice de transition et de la matrice de covariance du bruit de modèle dans la représentation dans l'espace d'état,
- une étape de mise à jour alimentée par l'EFA multi-mesures de l'instant courant et qui tient compte du modèle de mesure.

Intéressons-nous à l'étape de prédiction dans le paragraphe suivant.

Étape de prédiction

La récursion du filtre de Bernoulli s'établit dans un formalisme bayésien. L'étape de prédiction s'appuie sur l'équation de Chapman-Kolmogorov. Ainsi, la densité multi-objets prédite s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \pi_{(+)}(X_k|c) &= \int f_k(X_k|X_{k-1}, c) \pi_{(-)}(X_{k-1}|c) \delta X_{k-1}, \\ &= f_k(X_k|\emptyset, c) \pi_{(-)}(\emptyset|c) + \int f_k(X_k|\{\mathbf{x}_{k-1}\}, c) \pi_{(-)}(\{\mathbf{x}_{k-1}\}|c) d\mathbf{x}_{k-1}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

avec $f_k(\cdot)$ la densité de transition multi-objets définie pour les EFAs de Bernoulli permettant de considérer tous les cas de figure de survie et de naissance. En effet pour un instant courant k , l'objet peut être présent ou bien absent. Dans le cas où l'objet est présent, c'est-à-dire $X_k = \{\mathbf{x}_k\}$, il peut être apparu à l'instant k : il s'agit d'une naissance. Au contraire, s'il correspond à un objet déjà là à l'instant $k-1$, on parle de survie. Le cas $X_k = \emptyset$ se construit comme un événement complémentaire : l'objet était là à l'instant précédent mais il n'a pas survécu ou bien il était absent et il n'est pas né. Toutes ces configurations sont illustrées par la figure 2.5 et donnent lieu à des expressions spécifiques de densité de transition.

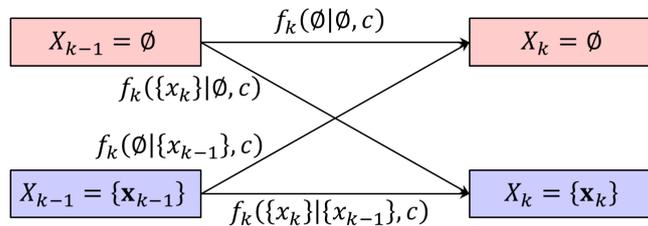


FIGURE 2.5 – Naissance et survie - les cas gérés par la densité de transition.

Dans le cas où $X_{k-1} = \emptyset$, la densité de transition multi-objets se décompose en deux cas de figure :

$$f_k(X_k|\emptyset, c) = \begin{cases} 1 - r_B^c, & \text{si } X_k = \emptyset, \\ r_B^c p_B(\mathbf{x}_k|c), & \text{si } X_k = \{\mathbf{x}_k\}, \end{cases} \quad (2.6)$$

avec r_B la probabilité de naissance et $p_B(\cdot|c)$ la densité de naissance conditionnellement à la classe c . L'indice B fait référence à *birth* désignant la naissance en anglais.

Dans le cas où $X_{k-1} = \{\mathbf{x}_{k-1}\}$, la transition s'exprime elle aussi en fonction des deux situations possibles à l'instant k :

$$f_k(X_k|\{\mathbf{x}_{k-1}\}, c) = \begin{cases} 1 - p_{S,k}(\mathbf{x}_{k-1}) & \text{si } X_k = \emptyset, \\ p_{S,k}(\mathbf{x}_{k-1})f_k(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, c) & \text{si } X_k = \{\mathbf{x}_k\}, \end{cases} \quad (2.7)$$

avec $f_k(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, c)$ la densité de transition liée au modèle de mouvement.

L'étape de prédiction vise à calculer la densité multi-objets prédite sous la forme Bernoulli suivante :

$$\pi_{(+)}(X_k|c) = \begin{cases} 1 - r_{(+)}^c & \text{si } X_k = \emptyset, \\ r_{(+)}^c p_{(+)}(\mathbf{x}_k|c) & \text{si } X_k = \{\mathbf{x}_k\}, \end{cases} \quad (2.8)$$

où $r_{(+)}^c$ est la probabilité de présence prédite de la cible et $p_{(+)}(\mathbf{x}_k|c)$ la densité spatiale prédite de l'état.

L'expression de la probabilité de présence prédite $r_{(+)}^c$ se déduit en considérant (2.5) pour $X_k = \emptyset$. En combinant (2.5), (2.6) et (2.7), la probabilité prédite que la cible ne soit pas présente à l'instant k s'exprime de la manière suivante :

$$1 - r_{(+)}^c = (1 - r_B^c) (1 - r_{(-)}^c) + \int (1 - p_{S,k}(\mathbf{x}_{k-1})) r_{(-)}^c p_{(-)}(\mathbf{x}_{k-1}|c) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (2.9)$$

En développant (2.9) et en simplifiant, il vient :

$$r_{(+)}^c = r_B^c (1 - r_{(-)}^c) + r_{(-)}^c \int p_{S,k}(\mathbf{x}_{k-1}) p_{(-)}(\mathbf{x}_{k-1}|c) d\mathbf{x}_{k-1}. \quad (2.10)$$

Étant donné l'expression (2.10) de $r_{(+)}^c$, la densité spatiale $p_{(+)}(\mathbf{x}_k|c)$ s'obtient en considérant le cas $X_k = \{\mathbf{x}_k\}$ donné dans (2.8). Cette dernière s'exprime en fonction de (2.5). Il convient alors de sélectionner les expressions de la densité de transition données dans (2.6) et (2.7) et aboutissant à $X_k = \{\mathbf{x}_k\}$. La densité spatiale $p_{(+)}(\mathbf{x}_k|c)$ s'écrit alors comme suit :

$$p_{(+)}(\mathbf{x}_k|c) = \frac{r_B^c (1 - r_{(-)}^c) p_B(\mathbf{x}_k|c)}{r_{(+)}^c} + \frac{\int p_{S,k}(\mathbf{x}_{k-1}) r_{(-)}^c f_k(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) p_{(-)}(\mathbf{x}_{k-1}|c) d\mathbf{x}_{k-1}}{r_{(+)}^c}. \quad (2.11)$$

L'étape suivante est celle de la mise à jour durant laquelle la probabilité de présence prédite de la cible $r_{(+)}^c$ et la densité spatiale de son état $p_{(+)}(\mathbf{x}_k|c)$ sont corrigées en fonction de l'EFA multi-mesures disponible à l'instant k .

Étape de mise à jour

L'étape de mise à jour s'appuie sur la règle de Bayes appliquée aux densités multi-objets du filtre de Bernoulli :

$$\pi_{(*)}(X_k|c) = \frac{g_k^c(Z_k|X_k)\pi_{(+)}(X_k|c)}{\int g_k^c(Z_k|X_k)\pi_{(+)}(X_k|c)\delta X_k}, \quad (2.12)$$

où $g_k^c(\cdot|c)$ est la vraisemblance multi-objets. Dans le cas considéré ici, l'EFA multi-mesures Z_k à un instant donné peut être constitué de la mesure relative à un objet présent ou bien de fausses alarmes. Dans le cas où l'objet est absent, c'est-à-dire $X_k = \emptyset$, les fausses alarmes sont modélisées par un EFA de Poisson. La vraisemblance multi-objets correspondante s'écrit donc en fonction du nombre

moyen λ_f de fausses alarmes attendu dans la région de surveillance et de la densité spatiale des fausses alarmes supposée suivre une loi uniforme :

$$g_k^c(Z_k|\emptyset) = \kappa_k(Z_k) = e^{-\lambda_f} \prod_{\mathbf{z}_k \in Z_k} \lambda_f \mathcal{U}_f(\mathbf{z}_k). \quad (2.13)$$

Dans le cas où l'objet est présent, c'est-à-dire $X_k = \{\mathbf{x}_k\}$, il n'est pas nécessairement détecté. On introduit alors un terme de vraisemblance $\psi_{Z_k}(\mathbf{x}_k|c)$ dépendant de la probabilité de détection $p_{D,k}^c(\mathbf{x}_k)$. Il permet de considérer deux cas : soit la cible est détectée, soit elle ne l'est pas. Dans le cas où elle l'est, on évalue la vraisemblance mono-mesure. On obtient :

$$\psi_{Z_k}(\mathbf{x}_k|c) = \begin{cases} p_{D,k}^c(\mathbf{x}_k) g_k(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k), & \text{si } Z_k = \mathbf{z}_k, \\ 1 - p_{D,k}^c(\mathbf{x}_k), & \text{si } Z_k = \emptyset, \end{cases} \quad (2.14)$$

où $g_k(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)$ est la vraisemblance de mesure liée au capteur.

Dans le cas où l'objet est présent, la vraisemblance multi-objets permet d'envisager toutes les configurations d'associations mesure-état possibles. En effet, soit l'objet n'est pas détecté et toutes les mesures de l'EFA multi-mesures sont des fausses alarmes, soit la cible est détectée et elle donne lieu à une unique mesure. Cela implique que toutes les autres mesures de l'EFA multi-mesures sont des fausses alarmes. Ainsi, chaque hypothèse d'association mesure-état, y compris le cas de la non-détection, se traduit en termes de probabilité, sous la forme du produit entre la vraisemblance (2.14) par rapport à un état donné \mathbf{x}_k et la vraisemblance multi-objets définie dans (2.13) pour laquelle toutes les mesures restantes sont des fausses alarmes. Puis, en sommant sur toutes ces configurations d'associations mesure-état, on obtient l'expression de la vraisemblance multi-mesures :

$$\begin{aligned} g_k^c(Z_k|\mathbf{x}_k) &= \sum_{Z \subseteq Z_k} \psi_Z(\mathbf{x}_k|c) \kappa_k(Z_k \setminus Z), \\ &= \psi_{\emptyset}(\mathbf{x}_k|c) \kappa_k(Z_k) + \sum_{\mathbf{z}_k \in Z_k} \psi_{\mathbf{z}_k}(\mathbf{x}_k|c) \kappa_k(Z_k \setminus \mathbf{z}_k), \end{aligned} \quad (2.15)$$

où la notation \setminus signifie "privé de".

En remplaçant dans (2.15) le terme de vraisemblance défini dans (2.14) par son expression, on obtient une vraisemblance multi-objets constituée de deux termes ; l'un fait apparaître le cas d'une non-détection tandis que l'autre envisage toutes les associations mesure-état et évalue leur pertinence :

$$\begin{aligned} g_k^c(Z_k|\mathbf{x}_k) &= \kappa_k(Z_k) \left[\left(1 - p_{D,k}^c(\mathbf{x}_k)\right) + p_{D,k}^c(\mathbf{x}_k) \sum_{\mathbf{z}_k \in Z_k} g_k(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k) \frac{\kappa_k(Z_k \setminus \mathbf{z}_k)}{\kappa_k(Z_k)} \right], \\ &= \kappa_k(Z_k) \left[\left(1 - p_{D,k}^c(\mathbf{x}_k)\right) + p_{D,k}^c(\mathbf{x}_k) \sum_{\mathbf{z}_k \in Z_k} \frac{g_k(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)}{\lambda_f \mathcal{U}_f(\mathbf{z}_k)} \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

en simplifiant le rapport $\kappa_k(Z_k \setminus \mathbf{z}_k)/\kappa_k(Z_k)$ à partir de (2.13).

Maintenant que nous avons exprimé la vraisemblance multi-objets, il s'agit d'écrire la densité multi-objets *a posteriori* donnée dans (2.12) sous une forme Bernoulli, c'est-à-dire comme suit :

$$\pi_{(*)}(X_k|c) = \begin{cases} 1 - r_{(*)}^c & \text{si } X_k = \emptyset, \\ r_{(*)}^c p_{(*)}^c(\mathbf{x}_k|c) & \text{si } X_k = \{\mathbf{x}_k\}, \end{cases} \quad (2.17)$$

La probabilité de présence de la cible est mise à jour en identifiant son expression dans (2.12) et dans (2.17) dans l'hypothèse où l'objet est absent, c'est-à-dire $X_k = \emptyset$. Cela fait intervenir d'une part les expressions de vraisemblance multi-objets données dans (2.15) et (2.16) et d'autre part, les

expressions de la densité multi-objets issue de l'étape de prédiction. La probabilité complémentaire de la probabilité de présence $r_{(*)}^c$ s'exprime alors comme suit :

$$1 - r_{(*)}^c = \frac{g_k^c(Z_k|\emptyset)\pi_{(+)}(\emptyset|c)}{\int g_k^c(Z_k|X_k)\pi_{(+)}(X_k|c)\delta X_k}, \quad (2.18)$$

ce qui donne comme probabilité de présence :

$$r_{(*)}^c = 1 - \frac{g_k^c(Z_k|\emptyset)\pi_{(+)}(\emptyset|c)}{\int g_k^c(Z_k|X_k)\pi_{(+)}(X_k|c)\delta X_k}. \quad (2.19)$$

Intéressons-nous au terme de normalisation ; ce dernier peut s'exprimer en utilisant (2.16) et en considérant la densité multi-objets prédite décrite dans (2.8) :

$$\begin{aligned} & \int g_k^c(Z_k|X_k)\pi_{(+)}(X_k|c)\delta X_k \\ &= \kappa_k(Z_k) \left[1 - r_{(+)}^c \left(\underbrace{\int p_{D,k}^c(\mathbf{x}_k)p_{(+)}(\mathbf{x}_k|c)d\mathbf{x}_k - \sum_{\mathbf{z}_k \in Z_k} \frac{\int p_{D,k}^c(\mathbf{x}_k)g_k(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)p_{(+)}(\mathbf{x}_k|c)d\mathbf{x}_k}{\lambda_f \mathcal{U}_f(\mathbf{z}_k)}}_{\Delta_k^c} \right) \right], \\ &\triangleq \kappa_k(Z_k) \left[1 - r_{(+)}^c \Delta_k^c \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ainsi dans (2.19), en combinant les expressions données dans (2.8), (2.13) et (2.20) et notamment en simplifiant par $\kappa_k(Z_k)$, on obtient l'expression analytique de $r_{(*)}^c$ suivante :

$$r_{(*)}^c = 1 - \frac{1 - r_{(+)}^c}{1 - r_{(+)}^c \Delta_k^c} = \frac{1 - \Delta_k^c}{1 - r_{(+)}^c \Delta_k^c} r_{(+)}^c. \quad (2.21)$$

La densité spatiale est alors mise à jour à partir de (2.12) quand $X_k = \{\mathbf{x}_k\}$. Cela fait à nouveau intervenir l'expression de la vraisemblance multi-objets (2.16) et celle de la densité multi-objets prédite (2.8). On remarque que la division par $r_{(*)}^c$ permet de simplifier une partie du terme de normalisation donné dans (2.20) ainsi que $r_{(+)}^c$. En simplifiant également le rapport des $\kappa_k(Z_k)$, il vient :

$$p_{(*)}(\mathbf{x}_k|c) = \frac{1 - p_{D,k}^c(\mathbf{x}_k) + p_{D,k}^c(\mathbf{x}_k) \sum_{\mathbf{z}_k \in Z_k} \frac{g_k(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)}{\lambda_f \mathcal{U}_f(\mathbf{z}_k)}}{1 - \Delta_k^c} p_{(+)}(\mathbf{x}_k|c). \quad (2.22)$$

La mise en œuvre pratique de l'approche proposée ici est détaillée dans la partie 2.4 de ce chapitre. Elle repose notamment sur la combinaison de calculs analytiques et d'une approximation par filtre particulière.

Par ailleurs, l'approche JTC peut fonctionner en exploitant uniquement l'estimation de la trajectoire de l'objet. Cependant, dans [Mag15a] et [Mag16a], l'état considéré est un état étendu comprenant aussi la longueur de l'objet mobile. Cela permet de tirer profit du surcroît d'information apportée par une mesure d'étalement distance et renforce la discrimination entre les différentes classes. L'utilisation de cette mesure complémentaire est détaillée dans la sous-section suivante.

2.3.2 Utilisation d'une mesure complémentaire de longueur

Dans [Sal03], l'introduction d'un modèle de mesure est proposé et concerne la mesure d'étalement distance d'une cible, reliée à son orientation vis-à-vis du capteur et à sa longueur. Ce modèle est réutilisé dans [Mag15a], [Mag16a] et [Mag18], pour proposer des solutions de pistage JTC dans un contexte de surveillance maritime. Dans cette partie, nous adaptons notre approche JTC fondée sur un filtre de Bernoulli pour qu'elle puisse exploiter une mesure complémentaire d'étalement distance et estimer la longueur de la cible suivie.

Représentation d'état étendue à la mesure d'étalement distance

L'utilisation de la mesure de longueur repose sur l'introduction d'un vecteur d'état étendu de la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \left[\mathbf{x}_k^T, \ell \right]^T, \quad (2.23)$$

avec \mathbf{x}_k le vecteur d'état contenant les variables cinématiques et ℓ la longueur de l'objet. L'évolution du vecteur d'état \mathbf{x}_k entre deux instants successifs reste représentée par un modèle de mouvement. La longueur ℓ est une grandeur fixe et ne varie pas dans le temps.

Le vecteur de mesure est lui aussi augmenté de la mesure d'étalement distance L_k et s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{z}}_k = \left[\mathbf{z}_k^T, L_k \right]^T. \quad (2.24)$$

La vraisemblance entre le vecteur de mesure $\tilde{\mathbf{z}}_k$ et son état associé $\tilde{\mathbf{x}}_k$ peut se construire comme le produit entre :

- la vraisemblance de la mesure de position \mathbf{z}_k par rapport aux variables cinématiques \mathbf{x}_k de l'état,
- et la vraisemblance de la mesure d'étalement distance L_k par rapport à l'état étendu $\tilde{\mathbf{x}}_k$.

Cela est possible parce que nous supposons l'indépendance conditionnelle, c'est-à-dire l'indépendance des bruits entre les mesures de position et celles d'étalement distance. On obtient alors :

$$\tilde{g}_k(\tilde{\mathbf{z}}_k|\tilde{\mathbf{x}}_k) = \tilde{g}_k(\mathbf{z}_k, L_k|\mathbf{x}_k, \ell) = g_k(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k) g'_k(L_k|\mathbf{x}_k, \ell). \quad (2.25)$$

La vraisemblance $g_k(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)$ par rapport aux variables cinématiques s'exprime selon le modèle de mesure de la manière suivante :

$$g_k(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; h_k(\mathbf{x}_k), R_k), \quad (2.26)$$

avec h_k la fonction de mesure et R_k la matrice de covariance du bruit de mesure.

Dans le cadre du pistage de cibles de surface, nous considérons le cas en 2 dimensions. Le vecteur des variables cinématiques \mathbf{x}_k est de la forme $\mathbf{x}_k = [x_k, \dot{x}_k, y_k, \dot{y}_k]^T$ ou $\mathbf{x}_k = [x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k, y_k, \dot{y}_k, \ddot{y}_k]^T$. La fonction de mesure prend la forme explicite suivante :

$$h_k(\mathbf{x}_k) = \left[\begin{array}{c} \sqrt{(x_k - x_k^r)^2 + (y_k - y_k^r)^2} \\ \tan^{-1} \left(\frac{y_k - y_k^r}{x_k - x_k^r} \right) \end{array} \right], \quad (2.27)$$

où (x_k^r, y_k^r) sont les coordonnées de position du radar. Les variables de position de la cible sont donc mesurées relativement à la position du radar et exprimées dans un système de coordonnées polaires¹. La configuration géométrique radar-cible est illustrée sur la figure 2.6.

Concernant la vraisemblance sur l'étalement distance $g'_k(L_k|\mathbf{x}_k, \ell)$ introduite dans (2.25), elle est définie à partir d'un modèle de cibles de forme ellipsoïdale [Sal03] comme suit :

$$g'_k(L_k|\mathbf{x}_k, \ell) = \mathcal{N}(L_k; \alpha_k \ell, \sigma_{u,\ell}^2), \quad (2.28)$$

où $\sigma_{u,\ell}^2$ est la variance sur le bruit de mesure de l'étalement distance et α_k est un paramètre permettant de traduire le lien géométrique entre ℓ et L_k . La grandeur α_k peut s'exprimer à chaque instant en considérant les variables cinématiques de la cible de la manière suivante [Sal03] :

$$\alpha_k = \frac{\sqrt{(\dot{y}_k \Delta_{y_k} + \dot{x}_k \Delta_{x_k})^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 (\dot{y}_k \Delta_{x_k} - \dot{x}_k \Delta_{y_k})^2}}{\sqrt{\Delta_{x_k}^2 + \Delta_{y_k}^2} \sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2}}, \quad (2.29)$$

1. Dans le cas d'un vecteur d'état en 3D, il s'agit de coordonnées sphériques.

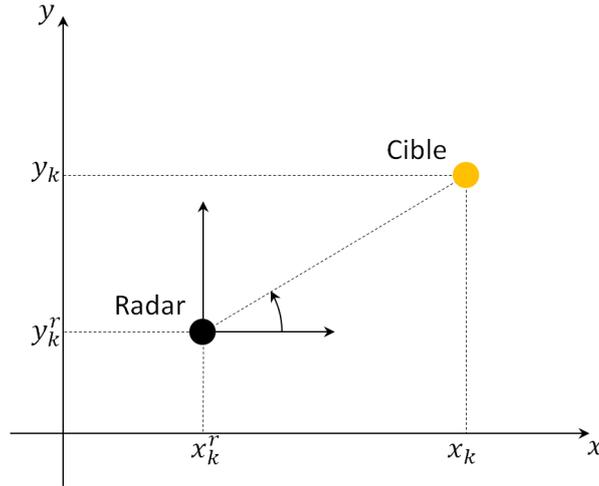


FIGURE 2.6 – Configuration géométrique radar-cible.

avec $\Delta_{x_k} = x_k - x_k^r$, $\Delta_{y_k} = y_k - y_k^r$. Le rapport b/a est lié à la représentation de la forme de l'objet par une ellipse où a est la longueur du demi-grand axe et b la longueur du demi-petit axe. Les détails du modèle elliptique sont donnés dans l'annexe C. Il est important de noter qu'il s'agit d'une hypothèse pour représenter géométriquement la cible. Le principe de la mesure d'étalement distance est illustré sur la figure 2.7.

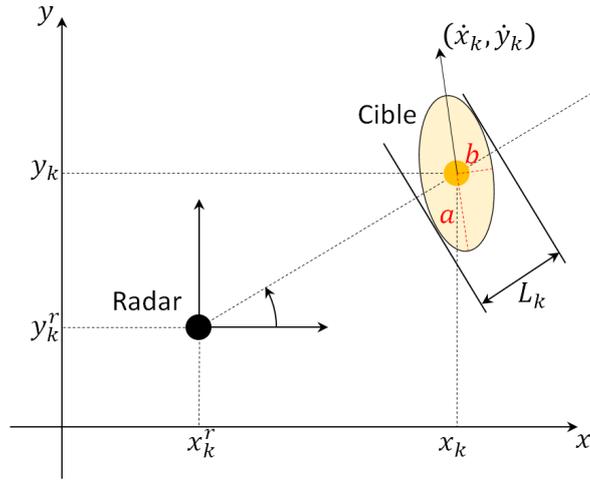


FIGURE 2.7 – Illustration de l'étalement distance.

Dans le paragraphe suivant, l'adaptation du filtre de Bernoulli pour l'utilisation d'une mesure complémentaire de longueur est présentée.

Extension du filtre de Bernoulli

À l'instant $k - 1$, la densité multi-objets sur l'état étendu peut être décomposée selon les variables cinématiques et la longueur. Elle s'écrit alors de la manière suivante :

$$\tilde{\pi}_{(-)}(X_{k-1}, \ell|c) = \pi'_{(-)}(\ell|X_{k-1}, c)\pi_{(-)}(X_{k-1}|c). \quad (2.30)$$

La densité multi-objets $\pi_{(-)}(X_{k-1}|c)$ est une densité multi-objets de Bernoulli définie par (2.4). Conditionnellement à X_{k-1} , l'incertitude sur la présence ou l'absence de la cible est levée. Ainsi, la densité

multi-objets $\pi'_{(-)}(\ell|X_{k-1}, c)$ se ramène à une densité classique. Sachant que la longueur est un paramètre fixe dans le temps, l'étape de prédiction est définie à partir des équations (2.5) à (2.11). L'étape de mise à jour quant à elle fait intervenir les mesures d'étalement distance et s'appuie sur la règle de Bayes pour donner :

$$\tilde{\pi}_{(*)}(X_k, \ell|c) = \frac{\tilde{g}_k^c(\tilde{Z}_k|X_k, \ell)\tilde{\pi}_{(+)}(X_k, \ell|c)}{\int \tilde{g}_k^c(\tilde{Z}_k|X_k, \ell)\tilde{\pi}_{(+)}(X_k, \ell|c)\delta X_k d\ell}, \quad (2.31)$$

où \tilde{Z}_k est l'ensemble multi-mesures des mesures étendues.

Il est possible d'effectuer la mise à jour en deux étapes, en considérant la densité multi-objets $\tilde{\pi}_{(*)}(X_k, \ell|c)$ sous la forme :

$$\tilde{\pi}_{(*)}(X_k, \ell|c) = \pi'_{(*)}(\ell|X_k, c)\pi_{(*)}(X_k|c). \quad (2.32)$$

La décomposition présentée dans (2.32) fait apparaître :

- la densité multi-objets Bernoulli des paramètres cinématiques,
- la densité sur la longueur conditionnellement aux paramètres cinématiques.

La mise à jour est donc construite en deux étapes. La correction de la densité prédite multi-objets Bernoulli des paramètres cinématiques doit tenir compte de la vraisemblance vis-à-vis des mesures d'étalement distance. Elle reprend les expressions fournies pour le terme de normalisation (2.20), la probabilité de présence (2.21) et la densité spatiale (2.22) et introduit une marginalisation par rapport à la longueur. Le terme de normalisation donné dans (2.20) devient :

$$\Delta_k^c = \int p_{D,k}^c(\mathbf{x}_k)p_{(+)}(\mathbf{x}_k|c)d\mathbf{x}_k - \sum_{\tilde{\mathbf{z}}_k \in \tilde{Z}_k} \frac{\iint p_{D,k}^c(\mathbf{x}_k)\tilde{g}_k(\tilde{\mathbf{z}}_k|\tilde{\mathbf{x}}_k)\pi'_{(+)}(\ell|\mathbf{x}_k, c)p_{(+)}(\mathbf{x}_k|c)d\mathbf{x}_k d\ell}{\lambda_f \mathcal{U}_f(\tilde{\mathbf{z}}_k)}, \quad (2.33)$$

où $\mathcal{U}_f(\tilde{\mathbf{z}}_k)$ est la densité de fausse alarme évaluée en $\tilde{\mathbf{z}}_k$. Aussi, malgré l'augmentation de dimension liée à la mesure étendue, les fausses alarmes restent modélisées par un EFA de Poisson. La probabilité de présence s'établit à partir de (2.19) et son expression (2.21) reste vraie en prenant la nouvelle valeur du terme de normalisation donné dans (2.33). On a donc :

$$r_{(*)}^c = \frac{1 - \Delta_k^c}{1 - r_{(+)}^c \Delta_k^c} r_{(+)}^c. \quad (2.34)$$

La densité spatiale est adaptée à partir des équations (2.22), (2.33) et (2.34) :

$$p_{(*)}(\mathbf{x}_k|c) = \frac{1 - p_{D,k}^c(\mathbf{x}_k) + p_{D,k}^c(\mathbf{x}_k) \sum_{\tilde{\mathbf{z}}_k \in \tilde{Z}_k} \frac{\int \tilde{g}_k(\tilde{\mathbf{z}}_k|\mathbf{x}_k, \ell)\pi'_{(+)}(\ell|\mathbf{x}_k, c)d\ell}{\lambda_f \mathcal{U}_f(\tilde{\mathbf{z}}_k)}}{1 - \Delta_k^c} p_{(+)}(\mathbf{x}_k|c). \quad (2.35)$$

La seconde étape de la mise à jour consiste à estimer la densité sur la longueur conditionnellement à une hypothèse d'état cinématique X_k . Cela fait intervenir une nouvelle fois la règle de Bayes comme suit :

$$\pi'_{(*)}(\ell|X_k, c) = \frac{g'_k(L_k|X_k, \ell, c)\pi'_{(+)}(\ell|X_k, c)}{\int g'_k(L_k|X_k, \ell, c)\pi'_{(+)}(\ell|X_k, c)d\ell}. \quad (2.36)$$

Comme ℓ est une constante, on a :

$$\pi'_{(+)}(\ell|X_k, c) = \pi'_{(-)}(\ell|X_k, c). \quad (2.37)$$

Conditionnellement à un état cinématique X_k , $\pi'_{(*)}(\ell|X_k, c)$ reste une gaussienne si $\pi'_{(+)}(\ell|X_k, c)$ l'est, du fait de l'expression de $g'_k(L_k|X_k, \ell, c)$ donnée dans (2.28). L'estimation de $\pi'_{(*)}(\ell|X_k, c)$ peut alors être gérée par un filtre de type Kalman. Cependant, pour gérer la présence des fausses alarmes, nous proposons d'utiliser un filtre PDA.

Dans la partie suivante, la mise en œuvre algorithmique par filtrage particulière Rao-Blackwellisé est présentée.

2.4 Mise en œuvre par filtrage particulaire

Dans [Leg17], nous développons une mise en œuvre de l'algorithme présenté dans ce chapitre fondée sur un filtre particulaire. Comme la longueur de l'objet est un paramètre fixe dans le temps, l'utilisation d'un filtre Rao-Blackwellisé [Che00, Dou02] est proposée afin d'éviter la dégénérescence des particules. Étant donné les équations (2.28) et (2.29), les modèles d'état et de mesure pour le paramètre de longueur ℓ sont linéaires gaussiens conditionnellement à l'état cinématique. L'estimation de ℓ peut donc être menée par filtrage de Kalman. Cependant dans notre cas, nous avons aussi à traiter des fausses alarmes. Pour conserver une solution sans association mesure-piste explicite, nous avons développé une estimation du paramètre de longueur fondée sur un banc de filtres PDA. Une partie de l'architecture de l'algorithme proposé est illustrée par le schéma figure 2.8 où l'estimation de la probabilité de présence n'est pas représentée.

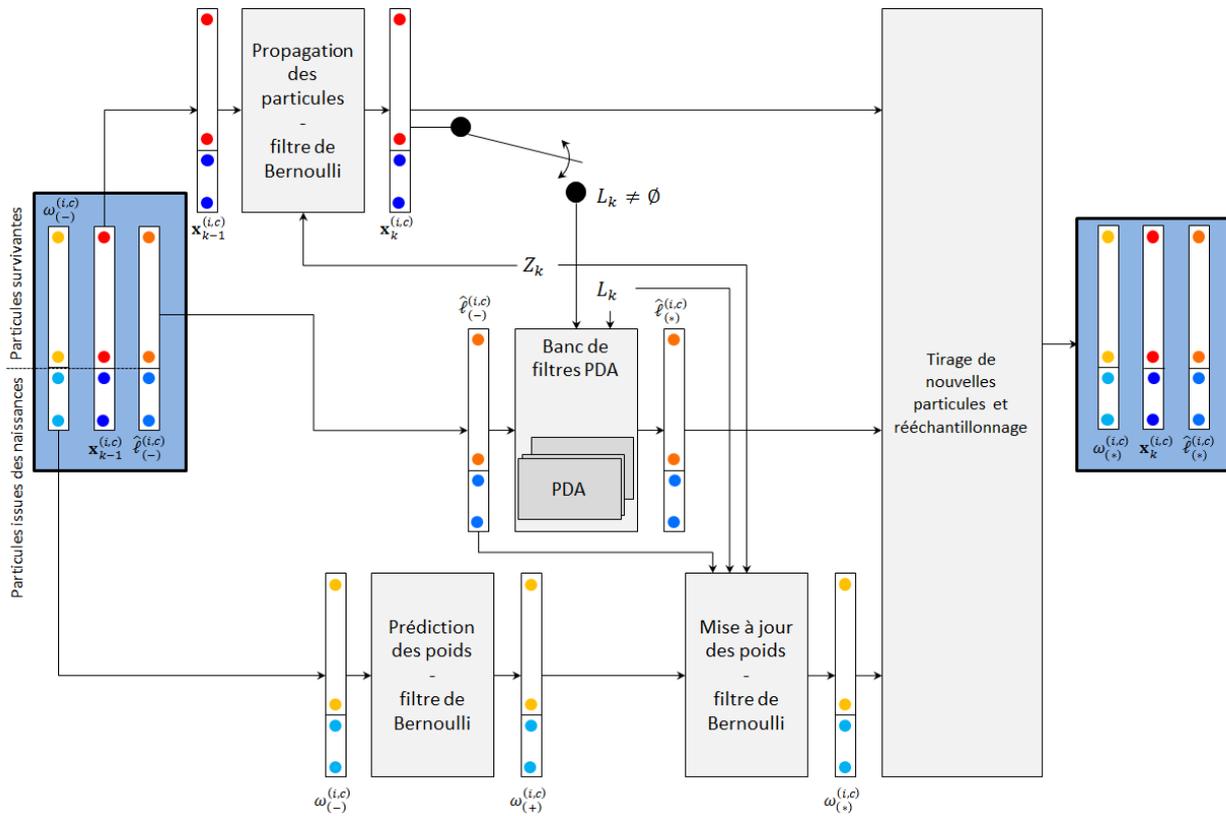


FIGURE 2.8 – Gestion des particules pour une classe donnée dans la solution de mise en œuvre du filtre de Bernoulli Rao-Blackwellisé.

2.4.1 Mise en œuvre fondée sur un filtre Rao-Blackwellisé

Dans cette partie, nous présentons une mise en œuvre par filtre particulaire Rao-Blackwellisé avec l'hypothèse d'un seul modèle de mouvement par classe pour simplifier les notations. Un paragraphe en fin de partie permet d'introduire les amendements nécessaires au développement de la solution à modèles multiples.

Dans la suite, les probabilités de naissance, de survie et de détection sont supposées être des constantes et sont respectivement notées p_B , p_S et p_D .

Approximation de la densité Bernoulli

À l'instant $k - 1$, la densité multi-objets devant être représentée est la suivante :

$$\tilde{\pi}_{(-)}(X_{k-1}, \ell | c) = \pi'_{(-)}(\ell | X_{k-1}, c) \pi_{(-)}(X_{k-1} | c). \quad (2.38)$$

Comme $\pi_{(-)}(X_{k-1} | c)$ est supposée Bernoulli, elle peut également être caractérisée par le couple composé de la probabilité de présence et de la densité spatiale de l'état :

$$\left(r_{(-)}^c, p_{(-)}(\mathbf{x}_{k-1} | c) \right). \quad (2.39)$$

La probabilité de présence et la densité spatiale sont estimées à chaque instant. Pour ce faire, un jeu de poids et de particules sont introduits pour approximer $p_{(-)}(\mathbf{x}_{1:k-1} | c)$ de la manière suivante :

$$p_{(-)}(\mathbf{x}_{1:k-1} | c) \approx \sum_{i=1}^N \omega_{(-)}^{(i,c)} \delta_{\mathbf{x}_{1:k-1}^{(i,c)}}(\mathbf{x}_{1:k-1}), \quad (2.40)$$

où N est le nombre de particules, $\{\mathbf{x}_{1:k-1}^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}$ est l'ensemble des particules et $\{\omega_{(-)}^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}$ est l'ensemble des poids correspondants qui satisfont :

$$\sum_{i=1}^N \omega_{(-)}^{(i,c)} = 1. \quad (2.41)$$

La densité $\pi'_{(-)}(\ell | \mathbf{x}_{1:k-1}, c)$ pour une hypothèse de particule $\mathbf{x}_{1:k-1}^{(i,c)}$ est alors supposée gaussienne :

$$\pi'_{(-)}(\ell | \mathbf{x}_{1:k-1}^{(i,c)}, c) = \mathcal{N}\left(\ell; \hat{\ell}_{(-)}^{(i,c)}, P_{(-)}^{(i,c)}\right), \quad (2.42)$$

où $\hat{\ell}_{(-)}^{(i,c)}$ désigne la moyenne et $P_{(-)}^{(i,c)}$ la matrice de covariance caractérisant la densité de probabilité de la longueur. Ces paramètres sont définis pour chaque particule (i, c) .

Prédiction - propagation des particules et calculs des poids

L'étape de prédiction s'effectue en deux étapes. La première consiste à construire pour chaque particule une nouvelle hypothèse d'exploration de l'état :

$$\mathbf{x}_k^{(i,c)} \sim q_k^c(\mathbf{x}_k^{(i,c)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, Z_{1:k}), \quad (2.43)$$

avec $q_k^c(\mathbf{x}_k^{(i,c)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, Z_{1:k})$ la densité de tirage dépendante de $\mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}$ et des modèles de mouvement envisagés pour la classe c .

Nous avons étudié deux options. La première repose sur une densité de propagation *a priori* tandis que la seconde s'appuie une densité de propagation optimale. L'intérêt de cette dernière est de tirer des particules à la fois pertinentes du point de vue du modèle de mouvement et vraisemblables par rapport à la mesure courante.

Dans le cas de la densité de propagation *a priori*, les particules sont tirées selon :

$$\mathbf{x}_k^{(i,c)} \sim f_k^c(\mathbf{x}_k^{(i,c)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}), \quad (2.44)$$

avec $f_k^c(\mathbf{x}_k^{(i,c)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)})$ la densité de transition associée au modèle de mouvement de la classe c , supposée ici gaussienne :

$$f_k^c(\mathbf{x}_k^{(i,c)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}) = \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_k^{(i,c)}; F_k^c \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, Q_k^c\right), \quad (2.45)$$

où F_k^c est la matrice de transition du modèle et Q_k^c la matrice de covariance. Les modèles de mouvement envisagés dans ce document sont détaillées dans l'annexe E. Dans le cas d'une propagation *a priori*, les poids associés sont directement donnés par :

$$\omega_{(+)}^{(i,c)} = \omega_{(-)}^{(i,c)}. \quad (2.46)$$

Dans le cas d'une propagation selon une loi optimale, le modèle d'état est aussi linéaire gaussien. Ce n'est cependant pas le cas du modèle de mesure décrit en (2.27). En supposant connaître l'historique exact des mesures $\mathbf{z}_{1:k}$ sans les fausses alarmes, l'échantillonnage optimal se fait selon une vraisemblance linéarisée [Gus10] de la forme suivante :

$$\begin{aligned} q_k^c(\mathbf{x}_k^{(i,c)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, \mathbf{z}_{1:k}) &= q_k^c(\mathbf{x}_k^{(i,c)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, \mathbf{z}_k), \\ &= \mathcal{N} \left(\mathbf{x}_k^{(i,c)}; F_k^c \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)} + K_k^{(i,c)} (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^{(i,c)}), \left(H_k^{(i,c)T} R_k^{-1} H_k^{(i,c)} + (Q_k^c)^{-1} \right)^{-1} \right), \end{aligned} \quad (2.47)$$

où $K_k^{(i,c)}$ correspond à un gain défini à partir des modèles d'état et de mesure par :

$$K_k^{(i,c)} = Q_k^c H_k^{(i,c)T} \left(H_k^{(i,c)} Q_k^c H_k^{(i,c)T} + R_k \right)^{-1}. \quad (2.48)$$

La matrice $H_k^{(i,c)}$ est le jacobien permettant de linéariser l'expression de la fonction de mesure h_k . Elle dépend de la prédiction déterministe de la particule $F_k^c \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}$ et se note :

$$H_k^{(i,c)} = \left. \frac{\partial h_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = F_k^c \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}}, \quad (2.49)$$

Enfin, le vecteur $\hat{\mathbf{z}}_k^{(i,c)}$ est une pseudo-mesure, générée à partir de la prédiction déterministe de la particule, c'est-à-dire $F_k^c \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}$. Son expression est donc la suivante :

$$\hat{\mathbf{z}}_k^{(i,c)} = h_k \left(F_k^c \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)} \right) \quad (2.50)$$

Les poids doivent alors être corrigés en comparant la vraisemblance du tirage optimal par rapport à celle liée au modèle d'état, ce qui nous donne :

$$\omega_{(+)}^{(i,c)} \propto \frac{f_k^c \left(\mathbf{x}_k^{(i,c)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)} \right)}{q_k^c \left(\mathbf{x}_k^{(i,c)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, \mathbf{z}_k \right)} \omega_{(-)}^{(i,c)}. \quad (2.51)$$

Cependant, avec la présence des fausses alarmes, plusieurs mesures peuvent être disponibles à l'instant k . Il convient alors de considérer les différentes hypothèses d'association mesure-particule.

Prédiction - propagation des particules selon une loi optimale malgré les fausses alarmes

Lorsque des fausses alarmes sont présentes, on considère deux types d'hypothèses :

- H_0 : la cible n'est pas détectée. Toutes les mesures de Z_k sont des fausses alarmes.
- H_j : la mesure j de Z_k est associée à la cible.

Ainsi, pour une particule donnée, une mesure est *a priori* disponible avec la probabilité de détection p_D . Sans information supplémentaire, si Z_k contient m mesures, la probabilité de non-détection vaut $1 - p_D$ et la probabilité qu'une mesure corresponde à la particule $\mathbf{x}_k^{(i,c)}$ est égale à p_D/m . Cependant,

le modèle de mesure permet d'évaluer la pertinence de chacune des mesures vis-à-vis de la particule courante de la manière suivante :

$$p(H_0|\mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, Z_k) \propto p(H_0)p(Z_k|H_0, \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}) = (1 - p_D)e^{-\lambda_f} \prod_{\mathbf{z}_k \in Z_k} \lambda_f \mathcal{U}_f(\mathbf{z}_k), \quad (2.52)$$

$$p(H_j|\mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, Z_k) \propto p(H_j)p(Z_k|H_j, \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}) \quad (2.53)$$

$$= \frac{p_D}{m} e^{-\lambda_f} \left(\prod_{\mathbf{z}_k \in Z_k \setminus \mathbf{z}_{k,j}} \lambda_f \mathcal{U}_f(\mathbf{z}_k) \right) \mathcal{N} \left(\mathbf{z}_k; \hat{\mathbf{z}}_k^{(i,c)}, H_k^{(i,c)} Q_k^c H_k^{(i,c)T} + R_k \right)_{|\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_{k,j}}, \quad (2.54)$$

où H_0 est l'hypothèse selon laquelle aucune mesure n'est disponible, tandis que les hypothèses H_j correspondent à une détection et une association de la particule i avec la mesure j . Un tirage aléatoire dépendant des $p(H_j)p(Z_k|H_j, \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)})$ et traduisant la pertinence de chacune des hypothèses, permet de sélectionner une hypothèse H_j et de procéder à la propagation selon la loi optimale donnée dans (2.47). Dans le cas de la sélection de l'hypothèse H_0 , la loi de propagation est simplement la densité de transition du modèle *a priori*.

Quelle que soit l'hypothèse sélectionnée, le tirage aléatoire affecte le calcul des poids dont l'expression devient :

$$\omega_{(+)}^{(i,c)} \propto \frac{f_k^c(\mathbf{x}_k^{(i,c)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)})}{p(H_0|\mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, Z_k) f_k^c(\mathbf{x}_k^{(i,c)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}) + \sum_j p(H_j|\mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, Z_k) q_k^c(\mathbf{x}_k^{(i,c)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, \mathbf{z}_{k,j})} \omega_{(-)}^{(i,c)}. \quad (2.55)$$

À l'issue du calcul des poids, ces derniers peuvent être renormalisés.

Prédiction de la probabilité de présence et des paramètres liés à la longueur de la cible

L'étape de prédiction se poursuit avec le calcul de la probabilité de présence qui se déduit directement de (2.10) :

$$r_{(+)}^c \approx r_B^c (1 - r_{(-)}^c) + r_{(-)}^c \sum_{i=1}^N p_{S,k}(\mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}) \omega_{(-)}^{(i,c)}. \quad (2.56)$$

En particulier, dans le cas où $p_{S,k}(\cdot)$ est une constante, notée p_S , on obtient :

$$r_{(+)}^c = r_B^c (1 - r_{(-)}^c) + r_{(-)}^c p_S. \quad (2.57)$$

Enfin, les paramètres des densités sur les longueurs restent inchangés à l'étape de prédiction puisque la longueur est censée être fixe dans le temps ; les paramètres définis dans (2.42) sont prédits selon les expressions suivantes :

$$\hat{\ell}_{(+)}^{(i,c)} = \hat{\ell}_{(-)}^{(i,c)}, \quad (2.58)$$

$$P_{(+)}^{(i,c)} = P_{(-)}^{(i,c)}. \quad (2.59)$$

L'étape de mise à jour s'organise selon deux axes puisqu'après tirage, l'exploration de l'espace d'état reste concentré sur les particules $\{\mathbf{x}_k^{(i,c)}\}_{i=1, \dots, N}$. On distingue :

- la mise à jour des longueurs effectuée conditionnellement à chaque particule $\mathbf{x}_k^{(i,c)}$. Comme plusieurs mesures sont potentiellement disponibles, nous proposons une mise à jour par un banc de filtres PDA² [Bar09],
- l'évaluation des pertinences des particules prédites fondée sur un calcul de vraisemblance par rapport aux mesures radar incluant celles d'étalement distance.

2. Le principe d'un filtre PDA est rappelé dans l'annexe D.

Mise à jour des paramètres liés à la longueur pour une particule donnée

Un filtre PDA est exécuté par particule. La première étape consiste à calculer le paramètre du modèle de mesure $\alpha_k^{(i,c)}$ défini en (2.29) conditionnellement à la particule $\mathbf{x}_k^{(i,c)}$. Les autres opérations successives sont celles d'un filtre PDA permettant la mise à jour des paramètres de moyenne et de covariance des lois de la longueur $\pi'_{(*)}(\ell|\mathbf{x}_{1:k}^{i,c}, c)$ supposées gaussiennes :

$$\pi'_{(*)}(\ell|\mathbf{x}_{1:k}^{(i,c)}, c) = \mathcal{N}\left(\ell; \hat{\ell}_{(*)}^{(i,c)}, P_{(*)}^{(i,c)}\right). \quad (2.60)$$

Comme la longueur ℓ n'est pas un vecteur mais un nombre réel, les équations du filtre PDA impliquent des inversions de nombres scalaires et non de matrices. La mise en œuvre d'un banc de filtres PDA a donc une influence limitée sur le coût calculatoire de l'algorithme.

Ainsi, le terme de variance de l'innovation $S_{k,\alpha}^{(i,c)}$ correspond à la variance de la loi de l'étalement distance L_k centrée sur la pseudo-mesure $\alpha_k^{(i,c)} \hat{\ell}_{(+)}^{(i,c)}$. Elle est donnée par :

$$S_{k,\alpha}^{(i,c)} = \left(\alpha_k^{(i,c)}\right)^2 P_{(+)}^{(i,c)} + \sigma_{u,\ell}^2. \quad (2.61)$$

Le gain associé s'écrit quant à lui de la manière suivante :

$$K_{k,\alpha}^{(i,c)} = \frac{P_{(+)}^{(i,c)} \alpha_k^{(i,c)}}{S_{k,\alpha}^{(i,c)}}. \quad (2.62)$$

Une probabilité *a posteriori* vis-à-vis des mesures disponibles dans Z_k est alors introduit et traduit la pertinence de chaque association de mesure d'étalement distance vis-à-vis d'une hypothèse de longueur liée à une particule (i, c) . Ce terme distingue deux cas puisque l'objet pisté peut être détecté avec une probabilité p_D ou non. Il s'exprime alors comme suit :

$$\beta_{k,j}^{(i,c)} = \begin{cases} \frac{\mathcal{L}_{k,j}^{(i,c)}}{1-p_D + \sum_{j'=1}^m \mathcal{L}_{k,j'}^{(i,c)}}, & \text{pour } j = 1, \dots, m, \\ \frac{1-p_D}{1-p_D + \sum_{j'=1}^m \mathcal{L}_{k,j'}^{(i,c)}}, & \text{pour } j = 0, \end{cases} \quad (2.63)$$

où :

$$\mathcal{L}_{k,j}^{(i,c)} \triangleq \frac{p_D \mathcal{N}\left(L_k; \alpha_k^{(i,c)} \hat{\ell}_{(+)}^{(i,c)}, S_{k,\alpha}^{(i,c)}\right)_{|L_k=L_{k,j}}}{\mathcal{U}_f(\bar{\mathbf{z}}_{k,j})}. \quad (2.64)$$

Les innovations traduisent la différence entre chaque mesure d'étalement distance et la pseudo-mesure associée à la particule (i, c) . Ainsi, pour chaque mesure j , l'innovation vaut :

$$\nu_{k,j}^{(i,c)} = L_{k,j} - \alpha_k^{(i,c)} \hat{\ell}_{(+)}^{(i,c)}. \quad (2.65)$$

L'innovation combinée est définie comme un mélange des innovations dont les contributions sont pondérées par leur probabilité *a posteriori* respective calculée dans (2.63). Elle vaut :

$$\nu_k^{(i,c)} = \sum_{j=1}^m \beta_{k,j}^{(i,c)} \nu_{k,j}^{(i,c)}. \quad (2.66)$$

Enfin, les paramètres de la densité *a posteriori* sont corrigés grâce à toutes les mesures disponibles selon leur pertinence et on obtient :

$$\hat{\ell}_{(*)}^{(i,c)} = \hat{\ell}_{(+)}^{(i,c)} + K_{k,\alpha}^{(i,c)} \nu_k^{(i,c)}, \quad (2.67)$$

$$P_{(*)}^{(i,c)} = \beta_{k,0}^{(i,c)} P_{(+)}^{(i,c)} (1 - \beta_{k,j}^{(i,c)}) P_{(*),1}^{(i,c)} + P_{(*),2}^{(i,c)}, \quad (2.68)$$

où :

$$P_{(*) ,1}^{(i,c)} = P_{(+)}^{(i,c)} - (K_{k,\alpha}^{(i,c)})^2 S_{k,\alpha}^{(i,c)}, \quad (2.69)$$

$$P_{(*) ,2}^{(i,c)} = (K_{k,\alpha}^{(i,c)})^2 \left[\sum_{j=1}^m \beta_{k,j}^{(i,c)} (\nu_{k,j}^{(i,c)})^2 - (\nu_k^{(i,c)})^2 \right]. \quad (2.70)$$

Mises à jour de la probabilité de présence et des poids des particules

La mise à jour de la probabilité de présence nécessite de calculer Δ_k^c selon (2.33) dans laquelle on remplace la densité prédite des paramètres cinématiques par son approximation particulière. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \Delta_k^c &= p_D \left(1 - \sum_{\tilde{\mathbf{z}}_k \in \tilde{Z}_k} \frac{\int \sum_{i=1}^N \tilde{g}_k(\tilde{\mathbf{z}}_k | \mathbf{x}_k^{(i,c)}, \ell) \pi'_{(+)}(\ell | \mathbf{x}_k^{(i,c)}, c) \omega_{(+)}^{(i,c)} d\ell}{\lambda_f \mathcal{U}_f(\tilde{\mathbf{z}}_k)} \right), \\ &= p_D \left(1 - \sum_{\tilde{\mathbf{z}}_k \in \tilde{Z}_k} \frac{\sum_{i=1}^N g_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{(i,c)}) \omega_{(+)}^{(i,c)} \int g'_k(L_k | \mathbf{x}_k^{(i,c)}, \ell) \mathcal{N}(\ell; \hat{\ell}_{(+)}^{(i,c)}, P_{(+)}^{(i,c)}) d\ell}{\lambda_f \mathcal{U}_f(\tilde{\mathbf{z}}_k)} \right), \\ &= p_D \left(1 - \sum_{\tilde{\mathbf{z}}_k \in \tilde{Z}_k} \frac{\sum_{i=1}^N \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; h_k(\mathbf{x}_k^{(i,c)}), R_k) \omega_{(+)}^{(i,c)} \mathcal{N}(L_k; \alpha_k^{(i,c)} \hat{\ell}_{(+)}^{(i,c)}, S_{k,\alpha}^{(i,c)})}{\lambda_f \mathcal{U}_f(\tilde{\mathbf{z}}_k)} \right). \end{aligned} \quad (2.71)$$

La probabilité de présence est alors donnée par (2.34) en utilisant la valeur de Δ_k^c calculée dans (2.71) :

$$r_{(*)}^c = \frac{1 - \Delta_k^c}{1 - r_{(+)}^c \Delta_k^c} r_{(+)}^c. \quad (2.72)$$

Finalement, la mise à jour des poids est mise en œuvre en utilisant (2.35) et en évaluant les différentes loi selon les mesures disponibles et chaque hypothèse (i, c) :

$$\omega_{(*)}^{(i,c)} = \frac{1 - p_D + p_D \sum_{\tilde{\mathbf{z}}_k \in \tilde{Z}_k} \frac{\int \tilde{g}_k(\tilde{\mathbf{z}}_k | \mathbf{x}_k^{(i,c)}, \ell) \pi'_{(+)}(\ell | \mathbf{x}_k^{(i,c)}, c) d\ell}{\lambda_f \mathcal{U}_f(\tilde{\mathbf{z}}_k)}}{1 - \Delta_k^c} \omega_{(+)}^{(i,c)}. \quad (2.73)$$

Toutes les variables permettant de caractériser la densité multi-objets *a posteriori* sont donc estimés pour l'instant k . Les poids peuvent être renormalisés.

Le paragraphe suivant revient sur l'utilisation des modèles multiples et détaille les adaptations additionnelles pour sa mise en œuvre.

2.4.2 Remarque sur l'utilisation simultanée de plusieurs modèles de mouvement

L'utilisation de modèles multiples peut s'incorporer rapidement de deux manières différentes dans l'algorithme décrit ci-dessus. Les deux méthodes sous-entendent qu'on étend le vecteur d'état avec la variable de modèle et qu'on l'échantillonne ou qu'on la parcourt systématiquement.

Ainsi, la première solution consiste à dupliquer le nombre de particules en fonction du nombre de modèles utilisés. Chaque particule initiale est donc propagée selon tous les modèles possibles. Dans les équations (2.45) à (2.55), cela se traduit par l'utilisation des matrices $F_k^{(i,c)}$ et $Q_k^{(i,c)}$ au lieu des

matrices F_k^c et Q_k^c . De plus, les poids sont pondérés par la probabilité de transition entre modèles de mouvement, notée $p_{m_{k-1}^{(i,c)}, m_k^{(i,c)}}^{(mod)}$. Les équations (2.46) et (2.55) deviennent donc :

$$\omega_{(+)}^{(i,c)} = p_{m_{k-1}^{(i,c)}, m_k^{(i,c)}}^{(mod)} \omega_{(-)}^{(i,c)}. \quad (2.74)$$

$$\omega_{(+)}^{(i,c)} = \frac{p_{m_{k-1}^{(i,c)}, m_k^{(i,c)}}^{(mod)} f_k^{(mod,c)}(\mathbf{x}_k^{(i,c)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)})}{p(H_0 | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, Z_k) f_k^{(mod,c)}(\mathbf{x}_k^{(i,c)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}) + \sum_j p(H_j | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, Z_k) q_k^{(mod,c)}(\mathbf{x}_k^{(i,c)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, \mathbf{z}_{k,j})} \omega_{(-)}^{(i,c)}. \quad (2.75)$$

Le retour au nombre initial de particules se fait alors par l'intermédiaire d'un re-échantillonnage systématique à l'issue de chaque étape de mise à jour.

Une autre solution consiste à tirer un modèle au hasard pour chaque particule et à chaque propagation. Le tirage se fait selon les probabilités de transition $p_{m_{k-1}^{(i,c)}, m_k^{(i,c)}}^{(mod)}$. Pour les équations (2.45) à (2.55), $F_k^{(i,c)}$ et $Q_k^{(i,c)}$ sont utilisées au lieu des matrices F_k^c et Q_k^c . Les équations (2.74) et (2.75) restent vraies. Il n'est pas systématiquement nécessaire de procéder à un re-échantillonnage, ce dernier pouvant être géré selon un calcul du nombre de particules efficaces comme introduit au premier chapitre.

La partie suivante détaille la mise en œuvre par filtrage particulière Rao-Blackwellisée sous la forme de pseudo-codes.

2.4.3 Pseudo-codes pour la mise en œuvre du filtre proposé

Dans ce paragraphe, nous résumons la mise en œuvre de l'algorithme proposé sous la forme de pseudo-codes. Ces derniers ne visent pas une exécution optimisée. L'ensemble des séquences d'algorithme permettent de détailler une récursion, de l'instant $k-1$ à l'instant k . De manière séquentielle et arbitraire, le traitement complet est découpé en différents blocs.

Le premier bloc **Algo. 1** permet de tirer les nouvelles particules et de calculer les poids prédits selon une loi *a priori*.

Le deuxième traitement **Algo. 2** décrit la propagation des particules et le calcul des poids associés selon une loi de propagation optimale.

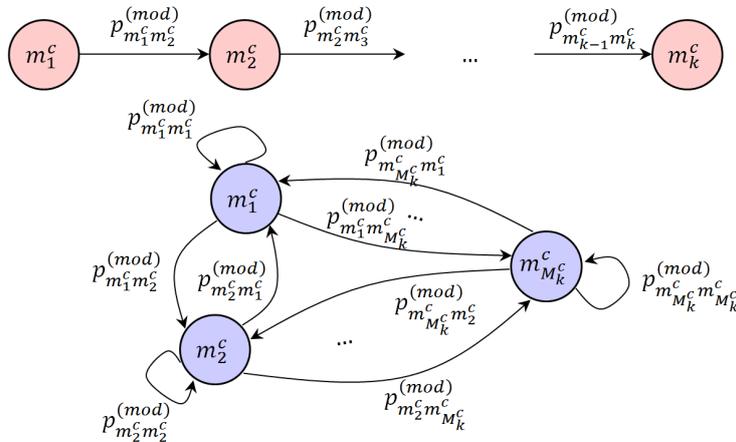


FIGURE 2.9 – Succession des modèles au cours du temps pour une classe donnée et chaîne de Markov définissant les probabilités de transition.

Algorithme 1 - Propagation des particules selon une loi *a priori* et calculs des poids prédits

Entrées : $\{\omega_{(-)}^{(i,c)}, \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}$, $\left\{p_{m_{k-1}^{(i,c)}, m_k^{(i,c)}}^{(mod)}\right\}_{m_{k-1}^{(i,c)}=1,\dots,M_{k-1}^c}$, $\left\{m_k^{(i,c)}\right\}_{m_k^{(i,c)}=1,\dots,M_k^c}$, $\{m_{k-1}^{(i,c)}\}_{1,\dots,M_{k-1}^c}$.

Sorties : $\{\omega_{(+)}^{(i,c)}, \mathbf{x}_k^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}$, $\{m_k^{(i,c)}\}_{1,\dots,M_k^c}$.

pour $i = 1$ jusqu'à N **faire**

- tirage aléatoire de $m_k^{(i,c)}$ selon $p_{m_{k-1}^{(i,c)}, m_k^{(i,c)}}^{(mod)}$,
- récupération de $F_k^{(i,c)}$ et $Q_k^{(i,c)}$ en fonction de $m_k^{(i,c)}$,
- tirage d'un bruit aléatoire $u_k^{(i,c)} \sim \mathcal{N}(u_k^{(i,c)}; 0, Q_k^{(i,c)})$,
- propagation de la particule $\mathbf{x}_k^{(i,c)} \leftarrow F_k^{(i,c)} \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)} + u_k^{(i,c)}$,
- prédiction du poids $\omega_{(+)}^{(i,c)} \leftarrow p_{m_{k-1}^{(i,c)}, m_k^{(i,c)}}^{(mod)} \omega_{(-)}^{(i,c)}$.

fin pour

Le troisième traitement **Algo. 3** permet d'effectuer les prédictions des éléments restants, à savoir la probabilité de présence $r_{(+)}^c$, la longueur prédite pour chaque particule $\hat{\ell}_{(+)}^{(i,c)}$ et sa matrice de covariance associée $P_{(+)}^{(i,c)}$.

Les deux blocs suivants permettent d'effectuer la mise à jour.

Le quatrième traitement **Algo. 4** permet d'estimer la longueur pour chaque particule $\hat{\ell}_{(*)}^{(i,c)}$ et sa matrice de covariance associée $P_{(*)}^{(i,c)}$.

Le cinquième traitement **Algo. 5** estime la probabilité de présence *a posteriori* $r_{(*)}^c$ ainsi que les nouveaux poids $\omega_{(*)}^{(i,c)}$.

Les blocs algorithmiques présentés dans cette partie permettent de construire quatre versions de filtre de Bernoulli. Il est possible d'utiliser la mesure complémentaire d'étalement distance ou non et de propager les particules selon une loi *a priori* ou selon une loi optimale. Dans tous les cas, ces filtres sont ensuite intégrés dans une approche JTC. La partie suivante présente les résultats sur données simulées du pistage et de la classification conjoints pour les différentes versions de filtre.

Algorithme 2 - Propagation des particules selon une loi optimale et calculs des poids prédits

Entrées : $\{\omega_{(-)}^{(i,c)}, \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}$, Z_k , $\left\{p_{m_{k-1}^{(i,c)}, m_k^{(i,c)}}^{(mod)}\right\}_{m_{k-1}^{(i,c)}=1,\dots,M_k^c}$, $\{m_{k-1}^{(i,c)}\}_{1,\dots,M_{k-1}^c}$, p_D , λ_f , $\mathcal{U}_f(\cdot)$.

Sorties : $\{\omega_{(+)}^{(i,c)}, \mathbf{x}_k^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}$, $\{m_k^{(i,c)}\}_{1,\dots,M_k^c}$.

pour $i = 1$ jusqu'à N **faire**

- tirage aléatoire de $m_k^{(i,c)}$ selon $p_{m_{k-1}^{(i,c)}, m_k^{(i,c)}}^{(mod)}$,
- récupération de $F_k^{(i,c)}$ et $Q_k^{(i,c)}$ en fonction de $m_k^{(i,c)}$,
- calcul de $\hat{\mathbf{z}}_k^{(i,c)} = h_k\left(F_k^{(i,c)} \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}\right)$,
- calcul de $H_k^{(i,c)} = \left.\frac{\partial h_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k}\right|_{\mathbf{x}_k = F_k^{(i,c)} \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}}$,
- calcul de $K_k^{(i,c)} = Q_k^c H_k^{(i,c)T} \left(H_k^{(i,c)} Q_k^c H_k^{(i,c)T} + R_k\right)^{-1}$,
- récupération de m en fonction de la taille de Z_k ,
- calcul de $p(H_0 | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, Z_k) = (1 - p_D) e^{-\lambda_f} \prod_{\mathbf{z}_k \in Z_k} \lambda_f \mathcal{U}_f(\mathbf{z}_k)$,

- calcul de $p(H_j | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, Z_k)$:

$$p(H_j | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, Z_k) = \frac{p_D e^{-\lambda_f}}{m} \left(\prod_{\mathbf{z}_k \in Z_k \setminus \mathbf{z}_{k,j}} \lambda_f \mathcal{U}_f(\mathbf{z}_k) \right) \mathcal{N} \left(\mathbf{z}_k; \hat{\mathbf{z}}_k^{(i,c)}, H_k^{(i,c)} Q_k^c H_k^{(i,c)T} + R_k \right) \Big|_{\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_{k,j}},$$

- construction d'hypothèses normalisées $\tilde{p}(H_j | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, Z_k) = \frac{p(H_j | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, Z_k)}{\sum_{j'=0}^m p(H_{j'} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, Z_k)}$,
- tirage aléatoire d'une hypothèse H_j en fonction de $\{\tilde{p}(H_j | \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)}, Z_k)\}_{j=0,\dots,m}$,

si $H_j \neq H_0$ **alors**

- tirage d'un bruit aléatoire $u_k^{(i,c)} \sim \mathcal{N} \left(u_k^{(i,c)}; 0, \left(H_k^{(i,c)T} R_k^{-1} H_k^{(i,c)} + (Q_k^c)^{-1} \right)^{-1} \right)$,
- propagation de la particule $\mathbf{x}_k^{(i,c)} \leftarrow F_k^{(i,c)} \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)} + K_k^{(i,c)} \left(\mathbf{z}_{k,j} - \hat{\mathbf{z}}_k^{(i,c)} \right) + u_k^{(i,c)}$,
- prédiction du poids $\omega_{(+)}^{(i,c)}$.

sinon

- tirage d'un bruit aléatoire $u_k^{(i,c)} \sim \mathcal{N} \left(u_k^{(i,c)}; 0, Q_k^{(i,c)} \right)$,
- propagation de la particule $\mathbf{x}_k^{(i,c)} \leftarrow F_k^{(i,c)} \mathbf{x}_{k-1}^{(i,c)} + u_k^{(i,c)}$,
- prédiction du poids $\omega_{(+)}^{(i,c)}$.

fin si

fin pour

Algorithme 3 - Finalisation de l'étape de prédiction

Entrées : $\{\omega_{(-)}^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}$, $r_{(-)}^c$, r_b^c , p_S , $\{\hat{\ell}_{(-)}^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}$, $\{P_{(-)}^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}$.

Sorties : $r_{(+)}^c$, $\{\hat{\ell}_{(+)}^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}$, $\{P_{(+)}^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}$.

- calcul de $r_{(+)}^c \leftarrow r_B^c (1 - r_{(-)}^c) + r_{(-)}^c p_S$,

pour $i = 1$ jusqu'à N **faire**

- $\hat{\ell}_{(+)}^{(i,c)} \leftarrow \hat{\ell}_{(-)}^{(i,c)}$,
- $P_{(+)}^{(i,c)} \leftarrow P_{(-)}^{(i,c)}$.

fin pour

Algorithme 4 - Mise à jour de la longueur et de sa covariance associée

Entrées : $\{\hat{\ell}_{(+)}^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}$, $\{P_{(+)}^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}$, p_D , $\mathcal{U}_f(\cdot)$, \tilde{Z}_k , $\sigma_{u,\ell}^2$, $\{\mathbf{x}_k^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}$.

Sorties : $\{\hat{\ell}_{(*)}^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}$, $\{P_{(*)}^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}$.

pour $i = 1$ jusqu'à N **faire**

• calcul de $\Delta_{x_k}^{(i,c)} = x_k^{(i,c)} - x_k^r$ et de $\Delta_{y_k}^{(i,c)} = y_k^{(i,c)} - y_k^r$,

• calcul de $\alpha_k^{(i,c)} = \frac{\sqrt{\left(y_k^{(i,c)} \Delta_{y_k}^{(i,c)} + \hat{x}_k^{(i,c)} \Delta_{x_k}^{(i,c)}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(y_k^{(i,c)} \Delta_{x_k}^{(i,c)} - \hat{x}_k^{(i,c)} \Delta_{y_k}^{(i,c)}\right)^2}}{\sqrt{(\Delta_{x_k}^{(i,c)})^2 + (\Delta_{y_k}^{(i,c)})^2} \sqrt{(\hat{x}_k^{(i,c)})^2 + (\hat{y}_k^{(i,c)})^2}}$,

• calcul de $S_{k,\alpha}^{(i,c)} = \left(\alpha_k^{(i,c)}\right)^2 P_{(+)}^{(i,c)} + \sigma_{u,\ell}^2$,

• calcul de $K_{k,\alpha}^{(i,c)} = \frac{P_{(+)}^{(i,c)} \alpha_k^{(i,c)}}{S_{k,\alpha}^{(i,c)}}$,

• récupération de m le nombre de mesures dans \tilde{Z}_k ,

pour $j = 1, \dots, m$ **faire**

• calcul de $\mathcal{L}_{k,j}^{(i,c)} \triangleq \frac{p_D \mathcal{N}\left(L_k; \alpha_k^{(i,c)} \hat{\ell}_{(+)}^{(i,c)}, S_{k,\alpha}^{(i,c)}\right) |_{L_k=L_{k,j}}}{\mathcal{U}_f(\tilde{\mathbf{z}}_{k,j})}$,

• calcul de $\nu_{k,j}^{(i,c)} = L_{k,j} - \alpha_k^{(i,c)} \hat{\ell}_{(+)}^{(i,c)}$

fin pour

pour $j = 1, \dots, m$ **faire**

• calcul de $\beta_{k,j}^{(i,c)} = \frac{\mathcal{L}_{k,j}^{(i,c)}}{1-p_D + \sum_{j'=1}^m \mathcal{L}_{k,j'}^{(i,c)}}$,

fin pour

• calcul de $\beta_{k,0}^{(i,c)} = \frac{1-p_D}{1-p_D + \sum_{j'=1}^m \mathcal{L}_{k,j'}^{(i,c)}}$,

• calcul de $\nu_k^{(i,c)} = \sum_{j=1}^m \beta_{k,j}^{(i,c)} \nu_{k,j}^{(i,c)}$,

• calcul de $\hat{\ell}_{(*)}^{(i,c)} \leftarrow \hat{\ell}_{(+)}^{(i,c)} + K_{k,\alpha}^{(i,c)} \nu_k^{(i,c)}$,

• calcul de $P_{(*)}^{(i,c)} = P_{(+)}^{(i,c)} - (K_{k,\alpha}^{(i,c)})^2 S_{k,\alpha}^{(i,c)}$,

• calcul de $P_{(*)}^{(i,c)} = (K_{k,\alpha}^{(i,c)})^2 \left[\sum_{j=1}^m \beta_{k,j}^{(i,c)} (\nu_{k,j}^{(i,c)})^2 - (\nu_k^{(i,c)})^2 \right]$,

• calcul de $P_{(*)}^{(i,c)} \leftarrow \beta_{k,0}^{(i,c)} P_{(+)}^{(i,c)} (1 - \beta_{k,j}^{(i,c)}) P_{(*)}^{(i,c)} + P_{(*)}^{(i,c)}$.

fin pour

Algorithme 5 - Mise à jour de la longueur et de sa covariance associée

Entrées : $r_{(+)}^c, \{\omega_{(+)}^{(i,c)}, \mathbf{x}_k^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}, \{\hat{\ell}_{(+)}^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}, \{\alpha_k^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}, \{S_{k,\alpha}^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}, p_D, \lambda_f, \mathcal{U}_f(\cdot), \tilde{Z}_k, R_k.$

Sorties : $r_{(*)}^c, \{\omega_{(*)}^{(i,c)}\}_{i=1,\dots,N}.$

• calcul de $\Delta_k^c = p_D \left(1 - \sum_{\tilde{\mathbf{z}}_k \in \tilde{Z}_k} \frac{\sum_{i=1}^N \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; h_k(\mathbf{x}_k^{(i,c)}), R_k) \omega_{(+)}^{(i,c)} \mathcal{N}(L_k; \alpha_k^{(i,c)} \hat{\ell}_{(+)}^{(i,c)}, S_{k,\alpha}^{(i,c)})}{\lambda_f \mathcal{U}_f(\tilde{\mathbf{z}}_k)} \right),$

• calcul de $r_{(*)}^c \leftarrow \frac{1 - \Delta_k^c}{1 - r_{(+)}^c \Delta_k^c} r_{(+)}^c,$

pour $i = 1$ jusqu'à N **faire**

• calcul de $\omega_{(*)}^{(i,c)} \leftarrow \frac{1 - p_D + p_D \sum_{\tilde{\mathbf{z}}_k \in \tilde{Z}_k} \frac{\mathcal{N}(\mathbf{z}_k; h_k(\mathbf{x}_k^{(i,c)}), R_k) \mathcal{N}(L_k; \alpha_k^{(i,c)} \hat{\ell}_{(+)}^{(i,c)}, S_{k,\alpha}^{(i,c)})}{\lambda_f \mathcal{U}_f(\tilde{\mathbf{z}}_k)}}{1 - \Delta_k^c} \omega_{(+)}^{(i,c)}.$

fin pour

2.5 Simulations

Dans cette partie, nous proposons d'évaluer la pertinence de notre approche JTC fondée sur un filtre de Bernoulli. Différentes versions peuvent être construites. Elles se distinguent par :

- l'emploi d'une loi de propagation optimale des particules ou d'une loi *a priori* d'une part,
- l'utilisation ou non d'une mesure complémentaire d'étalement distance d'autre part.

Les paramètres des simulations sont détaillés dans la partie suivante.

2.5.1 Protocole de simulation

Les données ont été simulées de manière à générer aléatoirement la trajectoire d'un objet, les mesures radars correspondantes et les fausses alarmes. Chaque simulation comprend 100 instants séparés par une période d'échantillonnage constante $T_s = 2$ s. Un objet peut être potentiellement manœuvrant ou non-manœuvrant.

Caractéristiques des objets mobiles

Les objets de la classe des cibles non-manœuvrantes sont caractérisés par une longueur de 200 m. Ils sont de forme elliptique et le rapport b/a entre le demi-petit axe et le demi-grand axe est supposé connu et vaut $1/3$. Concernant la cinématique, la position initiale de l'objet est tirée aléatoirement à 20 km de distance du porteur du radar. La vitesse initiale est quant à elle générée selon une loi uniforme avec un module maximum de 20 m/s, soit 76 km/h. Les objets de cette classe évoluent selon un mouvement de type rectiligne uniforme (MRU), défini dans l'annexe E, avec un écart-type pour le processus générateur $\sigma_{MRU} = 0.2 \text{ m.s}^{-3/2}$.

Les objets de la classe des cibles potentiellement manœuvrantes sont caractérisés par une longueur de 50 m. Eux aussi sont de forme elliptique avec un rapport b/a égal à $1/3$. Leur position initiale est à 20 km du porteur du radar et leur vitesse initiale est également tirée uniformément avec un module

maximum de 20 m/s. Cependant, leur trajectoire est générée selon un enchaînement établi de modèles de mouvement incluant deux phases non-manceuvrantes qui encadrent une phase manœuvrante. Plus précisément, des instants 1 à 40 l'objet suit un mouvement m_1 de type MRU caractérisé par un écart-type du processus générateur $\sigma_{MRU} = 0.2 \text{ m.s}^{-3/2}$. Des instants 41 à 60, il s'agit de la phase manœuvrante durant laquelle le mouvement de l'objet suit un modèle m_2 de Singer, défini lui-aussi dans l'annexe E, avec un écart-type du processus générateur $\sigma_{Sin} = 1.0 \text{ m.s}^{-2}$ et une constante de temps $\tau = 5 \text{ s}$. Des instants 61 à 100, le modèle utilisé est à nouveau le MRU avec un écart-type $\sigma_{MRU} = 0.2 \text{ m.s}^{-3/2}$.

L'enchaînement entre les phases de mouvement aurait pu être piloté de manière aléatoire par une matrice contenant les probabilités de transitions entre les deux modèles. Cependant, sans perte de généralité, l'enchaînement des phases de mouvement est ici toujours le même. Cela permet de fournir des moyennes pour chaque instant établies à partir d'un seul type de modèle de mouvement.

Le tableau 2.1 résume les caractéristiques des cibles.

Classes de cibles	Non-manceuvrantes	Manceuvrantes
Position et vitesse initiales	20 km du radar - $\mathcal{U}(0, 20)$ m/s dans toutes les directions	20 km du radar - $\mathcal{U}(0, 20)$ m/s dans toutes les directions
Longueur	200 m	50 m
Rapport b/a	1/3	1/3
Modèle de génération m_1	MRU : $\sigma_{MRU} = 0.2 \text{ m.s}^{-3/2}$	MRU : $\sigma_{MRU} = 0.2 \text{ m.s}^{-3/2}$
Modèle de génération m_2	-	Singer : $\sigma_{Sin} = 1.0 \text{ m.s}^{-2}$, $\tau = 5 \text{ s}$
Enchaînement des modèles	Instants 1 à 100 : m_1 .	Instants 1 à 40 : m_1 , Instants 41 à 60 : m_2 , Instants 61 à 100 : m_1 .

TABLE 2.1 – Récapitulatif sur la génération des trajectoires des cibles.

Les filtres fonctionnent selon les modèles de mouvement générateurs des trajectoires. L'approche JTC présentée dans cette partie fait donc intervenir deux classes : une représentative des cibles non-manceuvrantes et l'autre des cibles potentiellement manœuvrantes. Pour les filtres fonctionnant avec des modèles multiples, les probabilités de rester avec le même modèle sont fixées à 0.95, la probabilité de changer est donc de 0.05.

Dans le paragraphe suivant, les caractéristiques de la génération des mesures sont présentées.

Caractéristiques de la génération des mesures

Les mesures sont constituées d'une distance et d'un angle d'azimut reliés à l'état de la cible selon les équations (2.26) et (2.27). Ainsi, le bruit de mesure est blanc gaussien et centré. Sa matrice de covariance R_k peut s'écrire comme une matrice diagonale :

$$R_k = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

avec l'écart-type en distance $\sigma_r = 20 \text{ m}$ et l'écart-type en azimut $\sigma_\theta = 5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$. Les objets sont détectés selon une probabilité constante $p_D = 0.95$.

Lorsqu'une mesure d'étalement distance est disponible, son lien avec la longueur de l'objet et son vecteur d'état est donné par (2.28) et (2.29). L'écart-type du bruit de mesure de l'étalement distance σ_{ed} est choisi pour être du même ordre de grandeur que celui en distance. Ainsi, $\sigma_{ed} = \sigma_r/2$.

Les mesures issues des détections de la cible ne sont cependant pas les seules générées dans une simulation. En effet, le phénomène des fausses alarmes est pris en compte par l'intermédiaire de la définition du taux de fausses alarmes. Il varie entre 10^{-6} fausses alarmes par m^2 (FA.m^{-2}) et 10^{-5} FA.m^{-2} , selon le cas étudié. Le taux de 10^{-6} FA.m^{-2} est usuel dans la littérature pour démontrer la capacité d'un algorithme à fonctionner dans un environnement comprenant du fouillis. Cependant, cette partie présente quelques cas avec des taux de fausses alarmes plus élevés, jusqu'à 10^{-5} FA.m^{-2} afin d'éprouver la robustesse du filtre de Bernoulli vis-à-vis de ce phénomène. Il est important de rappeler qu'un taux de fausses alarmes n'a qu'une signification relative et doit être analysé en tenant compte de la période d'échantillonnage ainsi que des dynamiques des mouvements représentés. D'une manière générale, pour un même taux de fausses alarmes, plus la période d'échantillonnage est grande, plus on a de chances qu'une fausse alarme soit vraisemblable avec l'état prédit par le modèle de mouvement. Une grande dynamique du modèle de mouvement conduit exactement au même résultat. Concernant la génération des fausses alarmes, elles font l'objet d'un tirage aléatoire à chaque instant. Leur nombre est supposé suivre une loi de Poisson dont le paramètre est calculé en multipliant la surface de surveillance par le taux de fausses alarmes. Les positions sont tirées selon une loi uniforme sur toute la région de surveillance. Lorsque des mesures d'étalement distance sont disponibles pour les cibles, les fausses alarmes incorporent elles aussi des étalements distance dont la valeur est tirée selon une loi gaussienne centrée sur le véritable étalement distance de la cible et de variance σ_{ed}^2 . De ce fait, les fausses alarmes sont très vraisemblables par rapport à l'étalement distance réel de la cible et constituent réellement des éléments perturbateurs pour le pistage dès que leur position est proche de la trajectoire réelle de l'objet.

Dans le paragraphe suivant, des exemples de générations aléatoires des trajectoires et des mesures incluant les fausses alarmes sont proposés.

Exemples de générations des trajectoires et des mesures

Deux réalisations de trajectoires de cibles potentiellement manœuvrantes, des mesures et des fausses alarmes sont présentées dans la figure Fig 2.10. La première réalisation a été générée pour un taux de fausses alarmes T_{FA} de 10^{-6} FA.m^{-2} tandis que la seconde l'a été avec 10^{-5} FA.m^{-2} . Les mesures issues des cibles sont représentées par des cercles rouges tandis que les fausses alarmes le sont par des croix noires.

Sur la figure 2.10, l'ensemble de la simulation est représentée sur la surface de surveillance sans faire apparaître la dimension temporelle. Afin de compléter ces figures, les réalisations des trajectoires, des

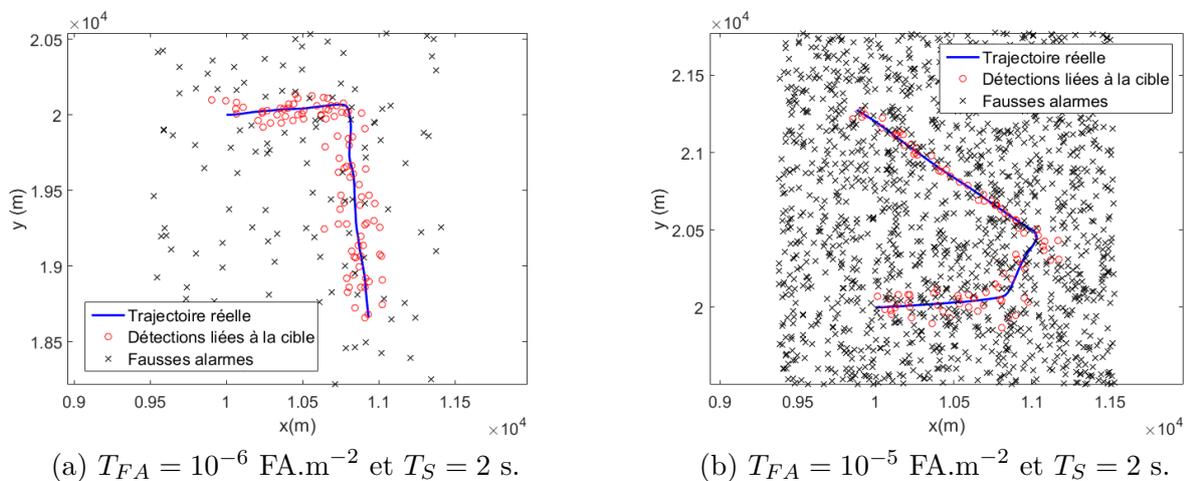
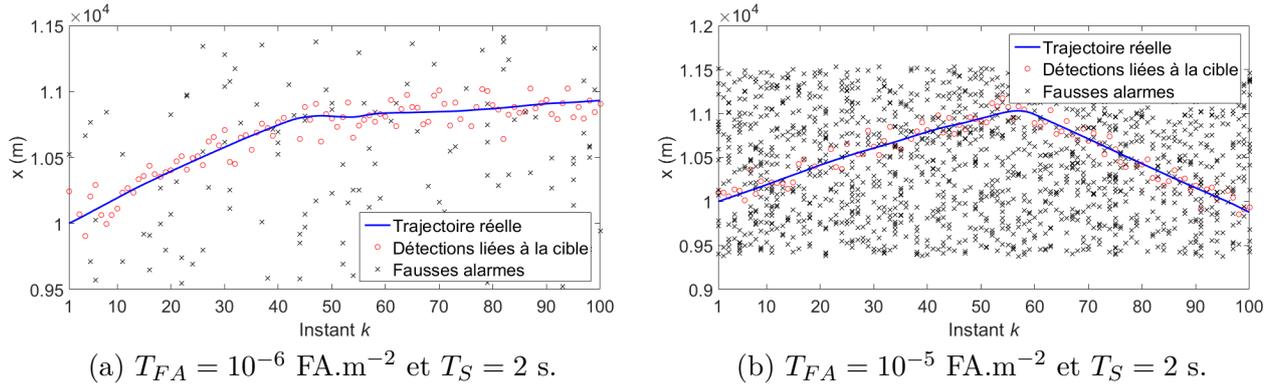
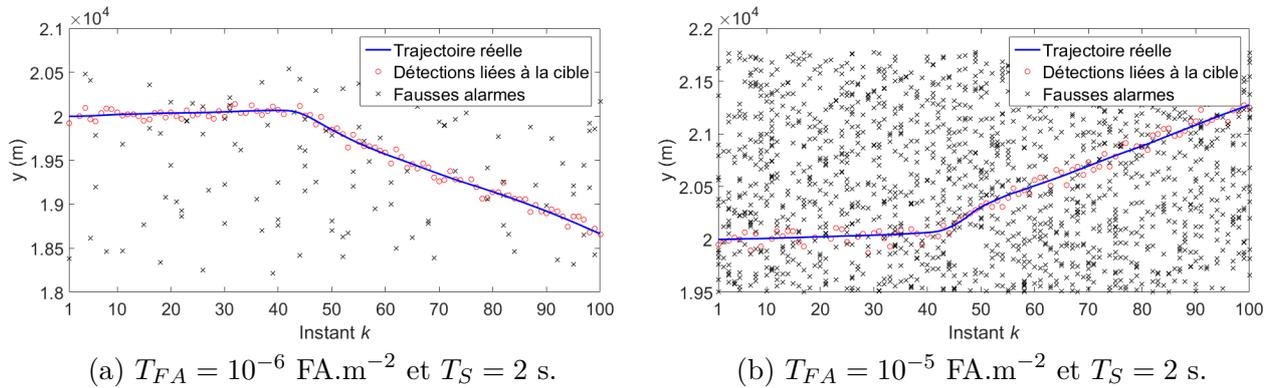


FIGURE 2.10 – Réalisations de trajectoires, de détections et de fausses alarmes générées aléatoirement.


 FIGURE 2.11 – Réalisations représentées selon la coordonnée x en fonction du temps.

 FIGURE 2.12 – Réalisations représentées selon la coordonnée y en fonction du temps.

détections et des fausses alarmes sont tracées selon leur coordonnée en x en fonction du temps sur la figure 2.11. Il en est de même pour la coordonnée y en fonction du temps sur la figure 2.12.

L'ensemble des figures 2.10, 2.11 et 2.12 permettent de jauger la nature de la phase manœuvrante intervenant entre les instants 41 et 60 d'une part, ainsi que de la cohérence temporelle des détections issues des cibles d'autre part. Dans la suite, comme les détections issues des cibles et les fausses alarmes sont indifférenciées en entrée de l'algorithme d'estimation, elles ne sont plus représentées de manière séparées sur les prochaines figures.

Dans le paragraphe suivant, les différentes versions de l'approche JTC sont comparées.

2.5.2 Comparaison des différentes versions de l'approche JTC

L'approche JTC proposée dans ce chapitre se fonde sur l'utilisation de filtres de Bernoulli. Les estimateurs fonctionnent avec les modèles de mouvement utilisés pour la génération aléatoire des données. Par conséquent, le filtre de Bernoulli dédié à la classe des objets non-manœuvrants n'est alimenté que par un seul modèle de mouvement tandis que celui pour les objets potentiellement manœuvrants est un filtre à modèles multiples.

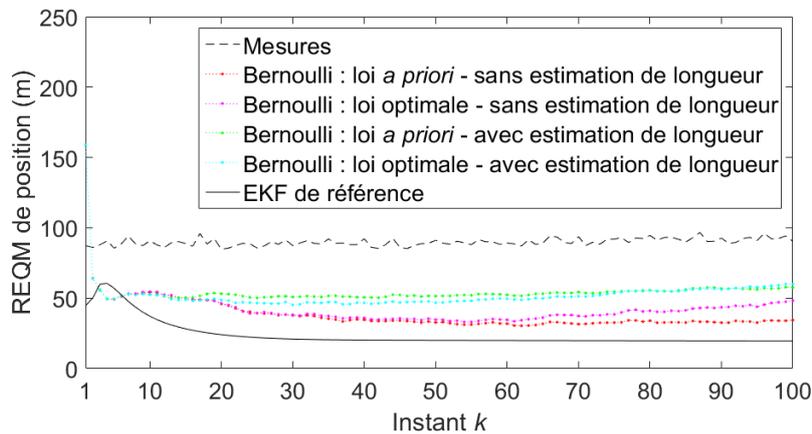
Les différentes versions de l'approche se déclinent en fonction du type de propagation des particules avec une loi *a priori* ou une loi optimale mais également en fonction de l'utilisation ou non d'une mesure complémentaire d'étalement distance. La comparaison porte donc sur quatre versions différentes :

- la première utilise une loi de propagation *a priori* des particules,
- la deuxième utilise une loi de propagation optimale des particules,
- la troisième utilise une loi de propagation *a priori* des particules et la mesure complémentaire d'étalement distance,

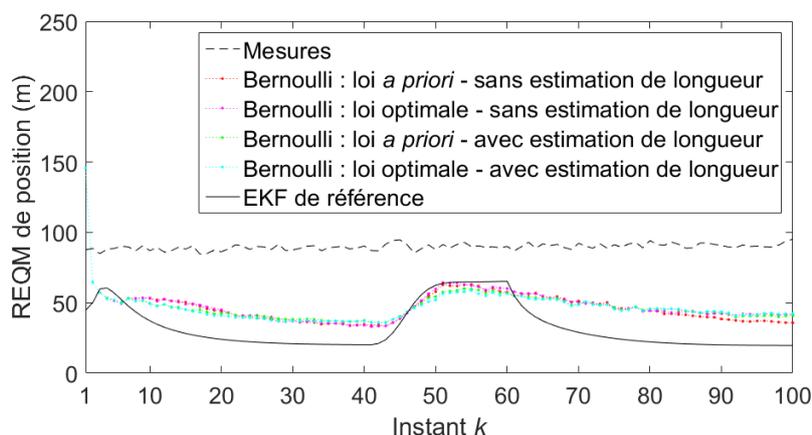
- la quatrième utilise une loi de propagation optimale des particules et la mesure complémentaire d'étalement distance.

Plusieurs indicateurs sont évalués pour étudier le comportement des différentes versions et ce pour chacune des deux classes. Ainsi, les résultats présentent l'évolution des racines carrées de l'EQM de position et de l'EQM de vitesse en fonction du temps. Ils présentent également les probabilités moyennes d'appartenance aux deux classes. Ces moyennes sont réalisées à partir de 1000 simulations de Monte Carlo pour chaque classe d'objet. Cependant, à cause des fausses alarmes, il est possible que les filtres fournissent des estimations de trajectoires aberrantes, se traduisant notamment par des valeurs d'erreur quadratique plus élevées. Dans ce cas, ces simulations ne participent pas aux calculs des moyennes mais sont comptabilisées grâce au taux de décrochage. Ce dernier indique le pourcentage de simulations pour lesquelles le filtre n'a pas pu maintenir une estimation de trajectoire fiable. Dans notre cas, l'estimation de trajectoire n'est plus considérée comme fiable dès que l'erreur sur l'estimation de position dépasse trois fois l'erreur moyenne des mesures par rapport à la position réelle de l'objet. Dans un premier temps, le taux de fausses alarmes est fixé à 10^{-6} FA.m⁻².

Erreurs en position et taux de décrochage



(a) Objet non-manceuvrant.



(b) Objet potentiellement manœuvrant.

FIGURE 2.13 – Racines des EQMs de position.

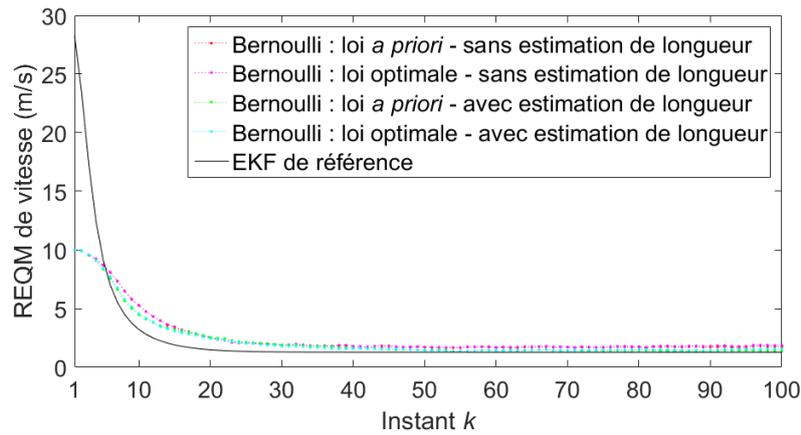
Le premier jeu de figures 2.13 représente l'évolution des racines carrées d'EQM (REQM) de position

en fonction du temps. À titre de comparaison, la REQM déduite des mesures bruitées de position est représentée et la REQM d'un EKF de référence l'est également. En effet, ce dernier fonctionne toujours avec le modèle de mouvement générateur et une mesure de position de l'objet disponible. En outre, les fausses alarmes ne viennent pas perturber son estimation.

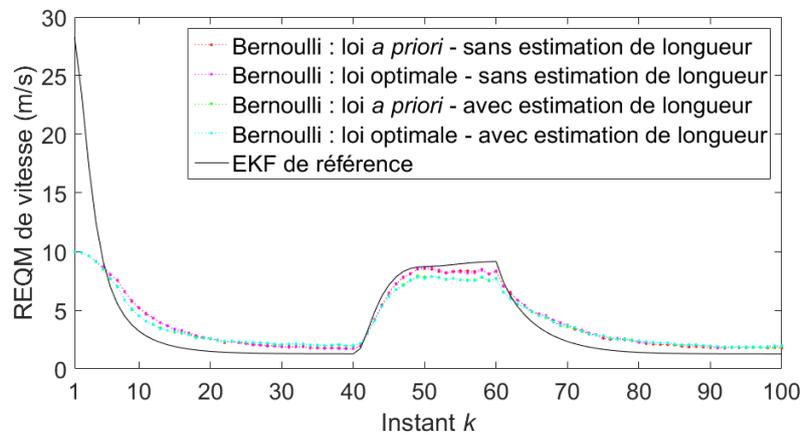
Les taux de décrochage se différencient selon les versions de filtres utilisant les mesures complémentaires d'étalement distance ou non. Pour les premiers, ce taux vaut 10% à 10^{-6} FA.m⁻² pour les cibles non-manceuvrantes et 12% à 10^{-6} FA.m⁻² pour les cibles potentiellement manœuvrantes. Pour les seconds, il vaut 6% à 10^{-6} FA.m⁻² pour les cibles non-manceuvrantes et 8% à 10^{-6} FA.m⁻² pour les cibles potentiellement manœuvrantes.

Les REQMs de position des objets non-manceuvrants sont présentées sur la figure 2.13 (a). Comme pour le taux de décrochage, les versions des filtres utilisant les mesures complémentaires d'étalement distance ou non ont des comportements séparables en deux catégories. En effet, en vert et en cyan, les filtres qui incorporent une estimation de la longueur convergent vers la même REQM de position d'environ 50 m quelle que soit la manière dont sont propagées les particules. Concernant les filtres sans estimations de longueur, représentés en rouge et en magenta, les filtres présentant la plus petite REQM de position sont ceux fonctionnant avec une loi de propagation *a priori* avec une REQM de 30 m. Cela s'explique par la dispersion des particules nettement plus importante avec la loi de propagation optimale. En effet, cette dernière tend à explorer des régions de l'espace d'état proches des fausses alarmes et conduit à des valeurs de REQM entre 30 m et 45 m. Quelle que soit la version du filtre, le temps de convergence est aux alentours de 25 scans, soit 50 s.

Les REQMs de position des objets potentiellement manœuvrants sont présentées sur la figure 2.13 (b). Cette fois, tous les filtres ont un comportement similaire et ceux utilisant l'estimation de la longueur en tire pleinement profit. Cela conduit à une convergence des REQMs à 40 m aux instants 40 et 100. Pendant la phase de manœuvre, les REQMs remontent à 55 m.



(a) Objet non-manœuvrant.



(b) Objet potentiellement manœuvrant.

FIGURE 2.14 – Racines des EQMs de vitesse.

Erreurs en vitesse

Le deuxième jeu de figures 2.14 représente l'évolution des racines carrées d'EQM de vitesse en fonction du temps. Comme pour la position, il est possible de tracer la REQM de l'EKF de référence. Sur la figure 2.14 (a) les REQMs de vitesse de toutes les versions des filtres convergent vers 2 m/s après 25 scans, soit 50 s. C'est également la valeur atteinte par le filtre EKF de référence. Sur la figure 2.14 (b), avec les cibles potentiellement manœuvrantes, les résultats sont similaires. En effet tous les filtres ont le même comportement, ils convergent vers 2 m/s après 25 scans jusqu'à l'instant 40 ainsi qu'après la phase de manœuvre, aux alentours du scan 90. Entre ces deux instants, la phase de manœuvre intervient des instants 40 à 61 et conduit à une augmentation de la REQM de vitesse pour toutes les versions des filtres et de l'EKF. Ils atteignent 10 m/s à l'instant 48.

Classification

Le troisième jeu de figures 2.15 représente l'évolution des probabilités d'appartenance des objets aux deux classes. C'est le jeu de figures le plus discriminant pour les différentes versions de filtres proposés. Pour chacune d'entre elles, la probabilité d'appartenir à la classe des objets non-manœuvrants, notée classe 1 sur les graphes, est tracée. De plus, la probabilité d'appartenir à l'autre classe des objets potentiellement manœuvrants, nommée classe 2, est également visible et constitue la probabilité complémentaire d'appartenir à la classe 1.

Concernant les simulations avec des objets non-manœuvrants, les filtres optent pour la classe 1 avec des probabilités différentes :

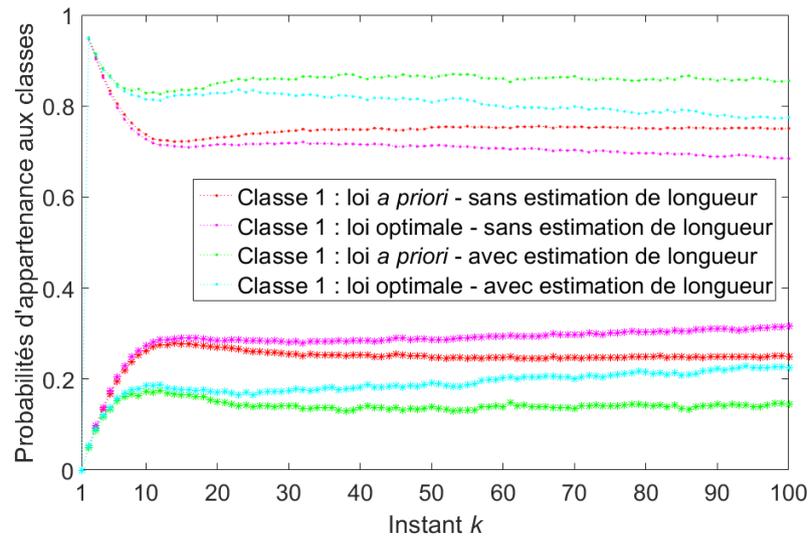
- En vert, les filtres utilisant une mesure complémentaire d'étalement distance et une loi de propagation *a priori* convergent vers une probabilité de 0.85 d'appartenir à la classe 1.
- En cyan, avec des mesures d'étalement distance mais une loi de propagation optimale, cette probabilité tend plutôt vers 0.78.
- Enfin, avec les versions des filtres qui n'utilisent pas les mesures complémentaires d'étalement distance, les filtres fonctionnant avec une loi de propagation *a priori*, en rouge, convergent vers une probabilité d'appartenir à la classe 1 de 0.77 tandis qu'en magenta, avec une loi de propagation optimale, ils atteignent 0.68.

Pour la classe des objets non-manœuvrants, tous les filtres conduisent à une classification correcte des objets. Cependant, les filtres capables de tirer profit des mesures d'étalement distance prennent une décision plus tranchée d'affectation de classe. C'est également les cas des filtres avec une loi de propagation *a priori* par rapport à ceux fonctionnant avec une loi optimale.

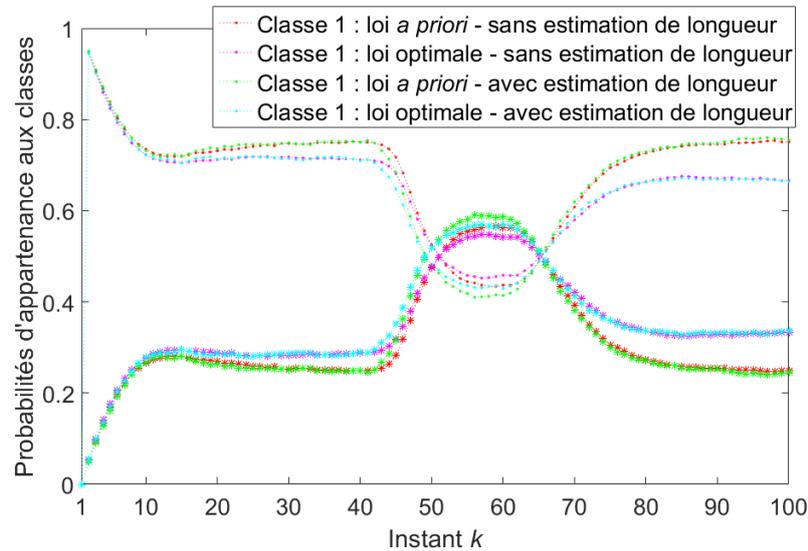
Les simulations de trajectoires avec des objets potentiellement manœuvrants conduisent à des résultats moyennés de classification présentés sur la figure 2.15 (b). On peut noter que :

- Pour les filtres utilisant les mesures complémentaires de longueur, l'estimation de la longueur de l'objet ne conduit pas à une décision plus marquée pour la classification. Cela s'explique par une longueur moindre de l'objet relativement à l'écart-type du bruit de mesure d'étalement distance.
- En rouge et vert, les filtres utilisant une loi de propagation *a priori* convergent vers une probabilité d'appartenir à la classe 1 de 0.77 environ des instants 20 à 40 puis des instants 80 à 100. Cela correspond bien aux phases non-manœuvrantes.
- En magenta et cyan, cette même probabilité durant ces mêmes instants vaut d'abord 0.70 avant de tendre vers 0.68.

Durant la phase de manœuvre, des instants 41 à 60, toutes les versions des filtres optent pour la classe 2 avec une probabilité moyenne d'appartenance proche de 0.58. Les transitions d'une classe à l'autre s'opèrent avec un délai d'une dizaine de scans.



(a) Objet non-manœuvrant.

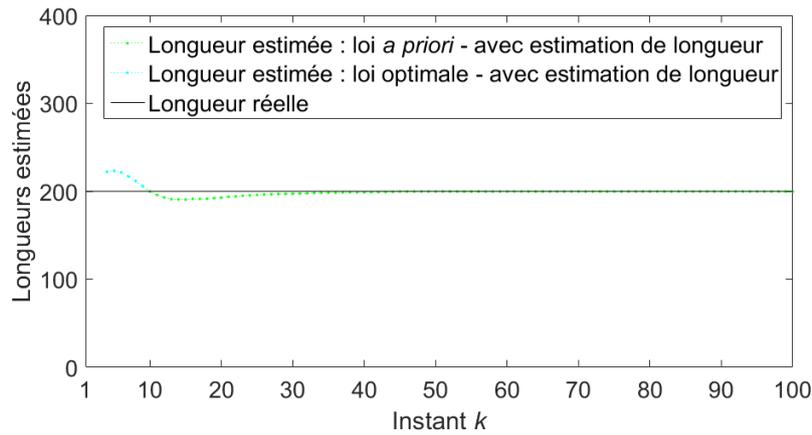


(b) Objet potentiellement manœuvrant.

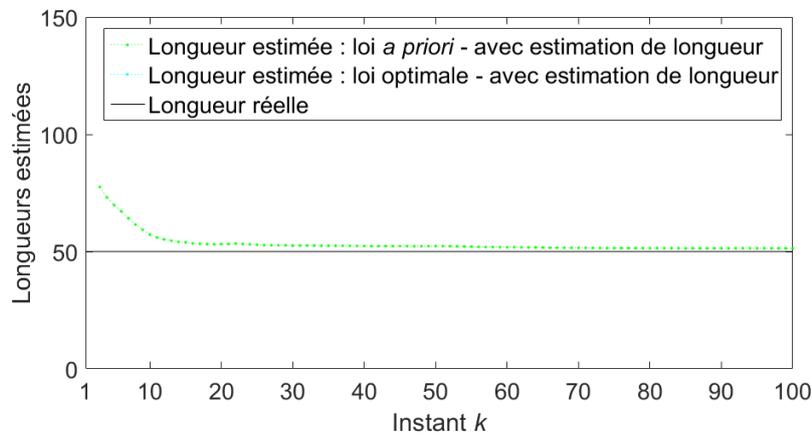
FIGURE 2.15 – Probabilités d'appartenance aux deux classes.

Estimations des longueurs

Les deux derniers résultats moyens présentés ici sont les estimations moyennes de la longueur des objets illustrées par le jeu de figures 2.16. Sur la figure 2.16 (a) en rapport avec les cibles simulées non-manœuvrantes, les deux filtres en vert et en cyan convergent bien vers la bonne longueur de 200 m après une quinzaine de scans, soit 30 s. Pour les objets potentiellement manœuvrants, les résultats présentés sur la figure 2.16 (b) montrent bien une convergence moyenne vers la bonne longueur de cible valant 50 m toujours après une quinzaine de scans. La phase de manœuvre intervenant entre les instants 41 et 60 n'a aucun impact sur l'estimation de longueur.



(a) Objet non-manœuvrant.



(b) Objet potentiellement manœuvrant.

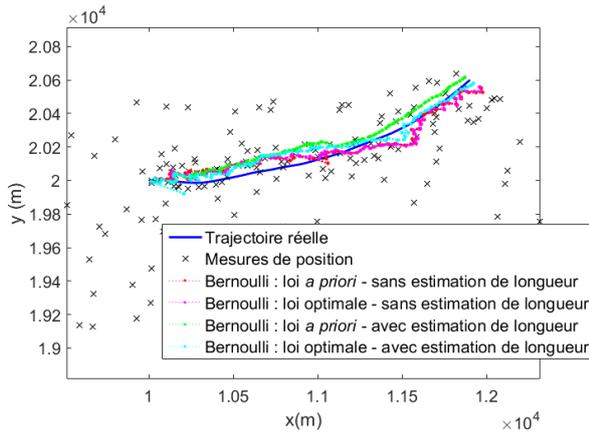
FIGURE 2.16 – Moyenne des longueurs estimées des objets.

Résultats du pistage sur une simulation donnée

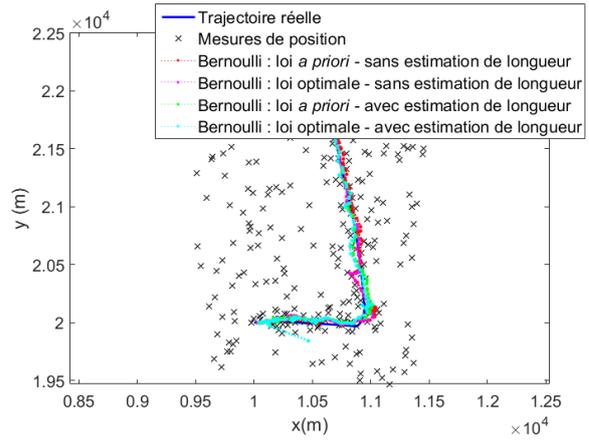
Les résultats présentés dans ce paragraphe sont des moyennes. Le filtrage d'une réalisation donnée pour chacun des deux types d'objet est présenté sur les figures 2.17-2.19. On y retrouve les résultats de filtrages représentés sur la surface de surveillance sur la figure 2.17 ainsi que représentés selon les coordonnées x et y sur leur figure respective 2.18 et 2.19.

Aussi, les probabilités d'appartenance aux classes sont données pour ces mêmes réalisations sur les figures 2.20. Par rapport aux moyennes présentées sur les figures 2.15, on retrouve la décision plus marquée de classification des filtres utilisant une mesure d'étalement distance dans le cas des objets non manœuvrants.

Tous ces résultats sont produits pour un taux de fausses alarmes $T_{FA} = 10^{-6}$ FA.m⁻². Dans le paragraphe suivant, les simulations avec $T_{FA} = 10^{-5}$ FA.m⁻² permettent de constater la robustesse de l'approche.

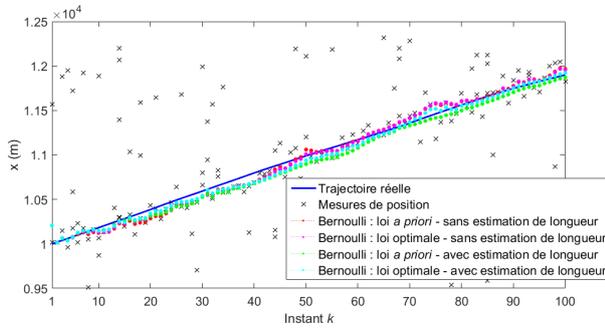


(a) Objet non-manceuvrant.

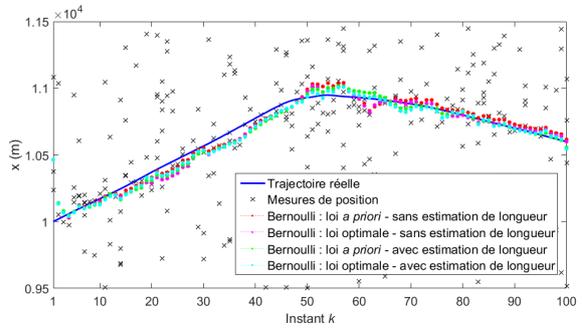


(b) Objet potentiellement manœuvrant.

FIGURE 2.17 – Résultats de pistage représentés sur la surface de surveillance.

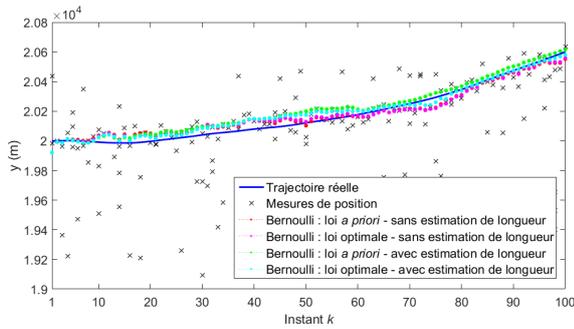


(a) Objet non-manceuvrant.

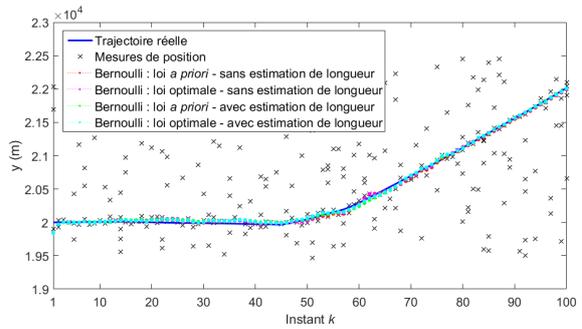


(b) Objet potentiellement manœuvrant.

FIGURE 2.18 – Résultats de pistage selon la coordonnée x en fonction du temps.

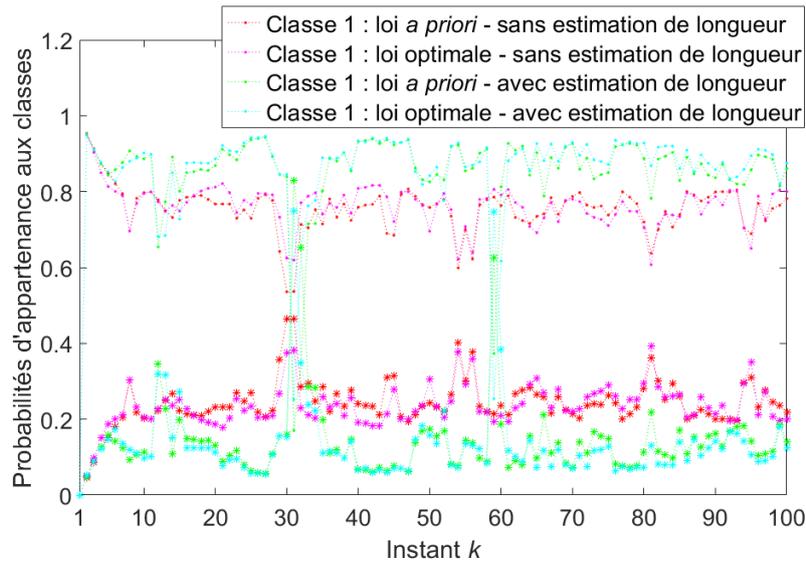


(a) Objet non-manceuvrant.

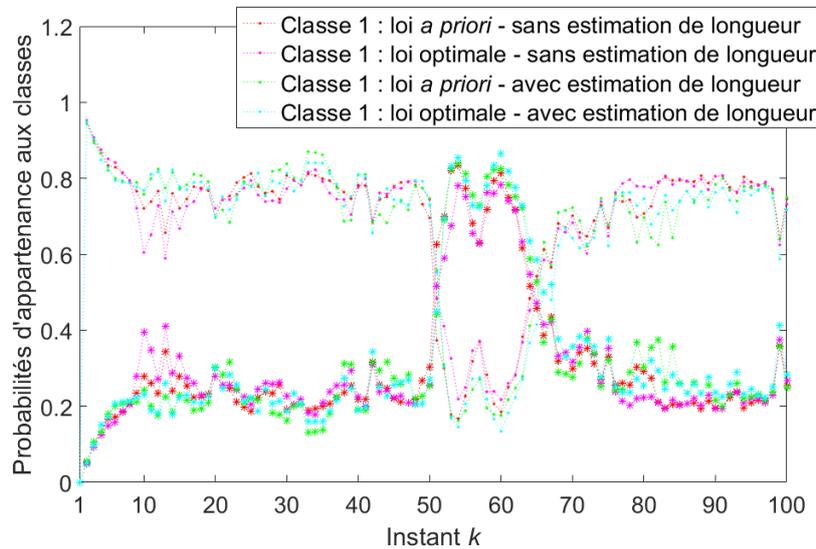


(b) Objet potentiellement manœuvrant.

FIGURE 2.19 – Résultats de pistage selon la coordonnée y en fonction du temps.



(a) Objet non-manœuvrant.



(b) Objet potentiellement manœuvrant.

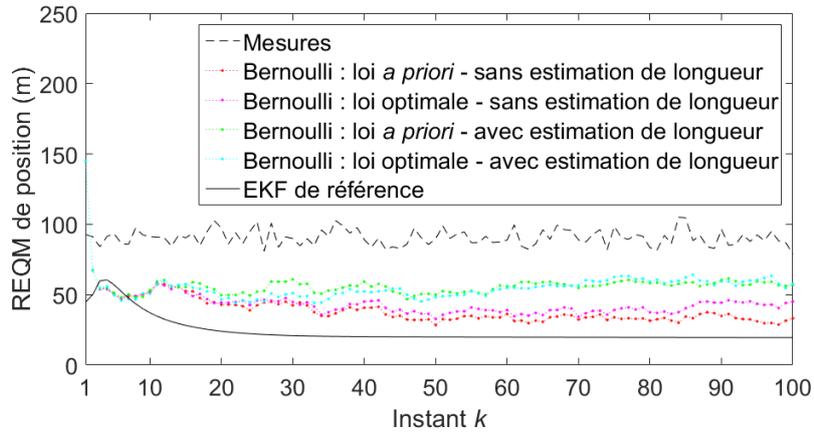
FIGURE 2.20 – Probabilités d'appartenance aux deux classes.

Robustesse vis-à-vis du taux de fausses alarmes

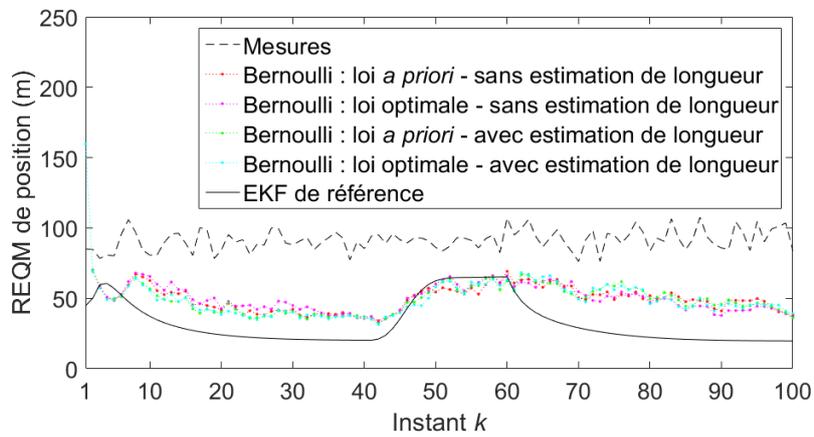
Les résultats présentés ici sont regroupés sur les figures 2.21-2.23. Ils comprennent les REQMs de position et de vitesse sur les figures 2.21 et 2.22 respectivement. Ils représentent également les probabilités d'appartenance aux deux classes présentées sur le jeu de figures 2.23. Les commentaires du paragraphe précédent restent identiques puisque les différentes versions des filtres se comportent de manière très similaire à $T_{FA} = 10^{-6} \text{ FA.m}^{-2}$ et $T_{FA} = 10^{-5} \text{ FA.m}^{-2}$.

Du fait de l'augmentation du nombre de fausses alarmes, les taux de décrochage augmentent eux aussi mais se différencient encore selon les versions de filtres utilisant les mesures complémentaires d'étalement distance ou non. Pour les premiers, ce taux vaut maintenant 15% à $10^{-5} \text{ FA.m}^{-2}$ pour les cibles non-manœuvrantes et 19% à $10^{-5} \text{ FA.m}^{-2}$ pour les cibles potentiellement manœuvrantes. Pour les seconds, il vaut 10% à $10^{-5} \text{ FA.m}^{-2}$ pour les cibles non-manœuvrantes et 15% à $10^{-5} \text{ FA.m}^{-2}$

pour les cibles potentiellement manœuvrantes.

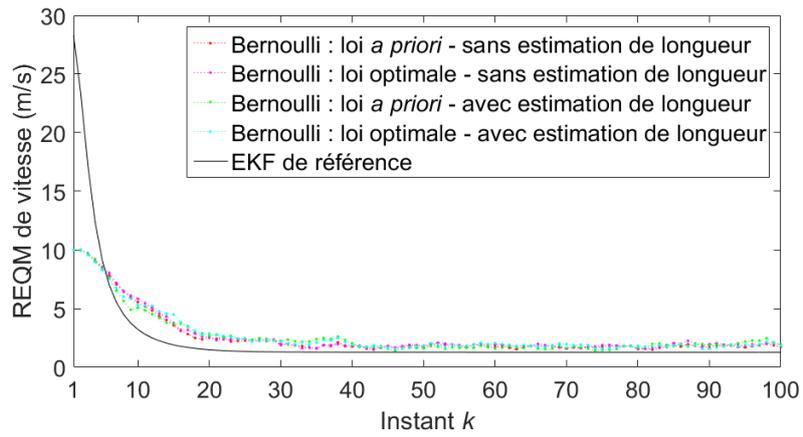


(a) Objet non-manœuvrant.

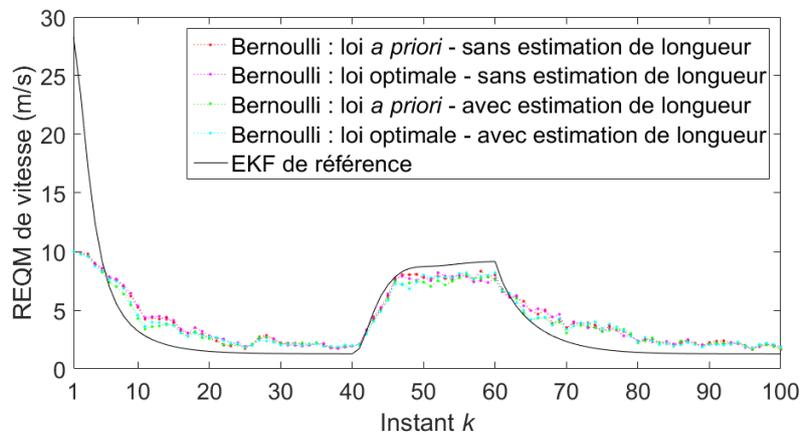


(b) Objet potentiellement manœuvrant.

FIGURE 2.21 – Racines des EQMs de position, $T_{FA} = 10^{-5}$ FA.m⁻².

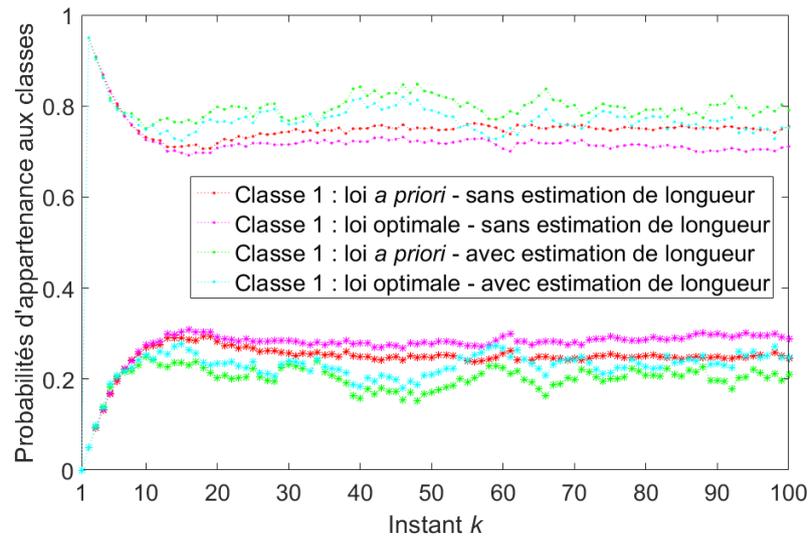


(a) Objet non-manœuvrant.

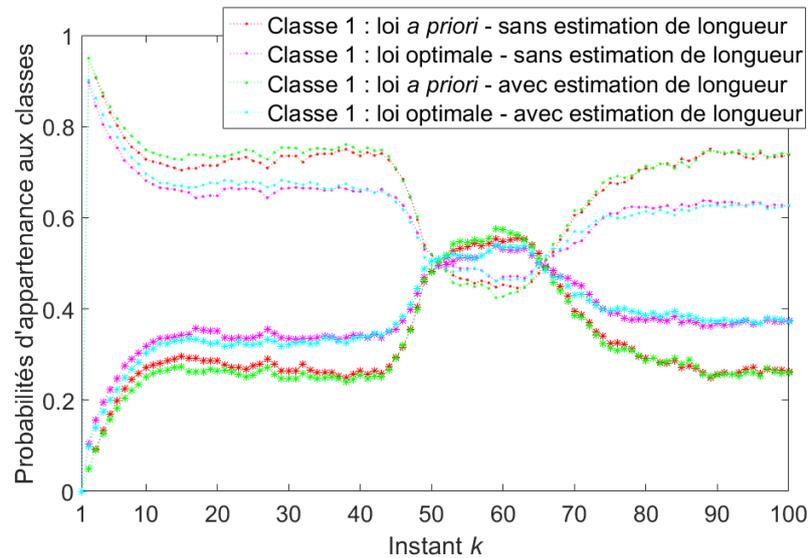


(b) Objet potentiellement manœuvrant.

FIGURE 2.22 – Racines des EQMs de vitesse, $T_{FA} = 10^{-5}$ FA.m⁻².



(a) Objet non-manœuvrant.



(b) Objet potentiellement manœuvrant.

FIGURE 2.23 – Probabilités d'appartenance aux deux classes, $T_{FA} = 10^{-5}$ FA.m⁻².

2.6 Conclusions et perspectives

Ce chapitre est consacré au développement d'une approche JTC pour le pistage mono-cible dans un environnement dense en fausses alarmes. Le filtre de Bernoulli, fondé sur l'utilisation d'un EFA du même nom, est connu pour être robuste à ce genre de perturbation. Ainsi, la solution envisagée et développée théoriquement dans ce chapitre est l'adaptation du filtre de Bernoulli pour son utilisation au sein d'un algorithme JTC. Dans le contexte particulier de la surveillance de cibles de surface, les cibles peuvent présenter des capacités de manœuvre diverses, ce qui conduit à envisager une version à modèles d'état multiples pour certaines classes d'objet. La mise en œuvre est alors réalisée par l'intermédiaire d'un filtre particulière permettant d'approximer la densité spatiale de l'état, ce dernier étant composé des variables cinématiques qui décrivent la trajectoire de l'objet suivi. Le tirage aléatoire des particules est possible selon une loi de propagation *a priori* ou une loi de propagation optimale.

Dans ce chapitre, les deux solutions sont développées. Dans le cas où les modèles d'état ne représentent que grossièrement le mouvement de la cible, il est préférable d'opter pour une propagation selon une loi optimale qui a tendance à renforcer le tirage des particules dans les régions d'intérêt de l'espace d'état. Dans le cas où les modèles d'état sont suffisamment représentatifs, l'utilisation de la loi de propagation *a priori* ne porte pas préjudice en termes d'exploration de l'espace d'état et offre une solution alternative à la loi de propagation optimale pour un coût moindre en ressources calculatoires.

De plus, l'algorithme proposé est capable d'utiliser une mesure complémentaire d'étalement distance fournie par le radar. Cette dernière est reliée à la longueur de la cible en supposant que la forme de cette dernière puisse être représentée par une ellipse. L'utilisation de la mesure complémentaire d'étalement distance s'accompagne donc de l'estimation de la longueur de l'objet suivi. Ce paramètre supplémentaire est intégré au sein d'un vecteur d'état étendu. Cependant, dans la mesure où la longueur est une grandeur fixe au cours du temps son estimation par filtrage particulaire peut conduire à une dégénérescence. Pour pallier ce problème, l'estimation de la longueur est menée en construisant un filtre particulaire Rao-Blackwellisé. L'approximation particulaire concerne les variables cinématiques de l'état tandis que conditionnellement à chaque particule, un filtre PDA permet d'estimer une longueur de cible. Le choix d'utiliser des filtres de type PDA s'explique par la volonté de conserver un système d'association probabiliste cohérent avec le filtre Bernoulli.

En résumé, les travaux présentés dans ce chapitre permettent de construire une approche JTC fondée sur l'utilisation des filtres de Bernoulli à modèles multiples et déclinable en quatre versions différentes. D'une part, il est possible d'utiliser une loi de propagation *a priori* ou optimale. D'autre part, le traitement d'une mesure complémentaire d'étalement distance est active ou non.

La partie simulation permet d'étudier le comportement de ces différentes versions pour le pistage d'objets différenciables en deux classes. Tous les filtres proposés permettent de suivre les objets et de les classer de manière efficace y compris avec une densité élevée de fausses alarmes. L'estimation de la longueur permet de renforcer la décision de classification.

Les perspectives de ces travaux concernent principalement l'extension de l'approche proposée au cas multi-cibles. En effet, des approches JTC fondées sur des EFAs de Bernoulli étiquetés ont été développés par d'autres auteurs mais ne proposent pas d'utiliser ni des modèles multiples, ni une mesure complémentaire de longueur. De plus, les solutions sont fondées sur des filtres δ -GLMB dont une alternative pourrait être des filtres de type LMB pour limiter la complexité calculatoire.

Chapitre 3

Pistage de groupes de cibles : présentation des concepts théoriques

Sommaire

3.1	Introduction	99
3.2	Modélisation des états multi-groupes multi-cibles	101
3.2.1	Définition d'un ensemble fini aléatoire hiérarchique	101
3.2.2	Densité multi-objets pour un EFA hiérarchique	102
3.2.3	Version étiquetée d'un ensemble fini aléatoire hiérarchique	103
3.3	Filtre bayésien	104
3.3.1	Étape de prédiction : équation de Chapman-Kolmogorov	104
3.3.2	Étape de mise à jour : règle de Bayes	105
3.4	Développement théorique d'un filtre LMB/PHD	105
3.4.1	Densité multi-groupes multi-cibles	106
3.4.2	Étape de prédiction	106
3.4.3	Étape de mise à jour	109
3.5	Métrique adaptée aux ensembles finis aléatoires hiérarchiques	112
3.5.1	Définition de l'OSPA multi-groupes (MG-OSPA)	112
3.5.2	Preuve que la MG-OSPA est une métrique	113
3.5.3	Intérêt par rapport à une OSPA classique	114
3.6	Conclusions et perspectives	115

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une approche dédiée à une situation spécifique : le pistage de groupes de cibles dont les mouvements sont coordonnés au sein d'un même groupe. En effet, dans certains scénarios multi-objets, les cibles sont susceptibles d'évoluer en convoi ou en colonne, de coordonner leur vitesse ou leur accélération. Ce sont par exemple des convois militaires ou bien des véhicules proches roulant sur une autoroute. Parmi les scénarios moins classiques, on peut penser à un essaim de drones volant au ras du sol qui se dispersent pour explorer un lieu tout en cherchant à maintenir une certaine distance entre eux. Dans tous ces cas, les mouvements des cibles au sein du groupe sont plus ou moins coordonnés. Les cibles partagent ainsi des caractéristiques cinématiques telles qu'une vitesse d'ensemble ou encore un taux de virage. Par la suite, ces caractéristiques sont dénommées états de groupe. Un algorithme d'estimation adapté à ce genre de scénario doit alors estimer :

- le nombre de groupes qui est inconnu et peut évoluer au cours du temps,
- les dynamiques des groupes,
- au sein de chaque groupe, le nombre de cibles qui est lui aussi inconnu et peut évoluer au cours du temps,
- au sein de chaque groupe, les états respectifs des différentes cibles.

Une revue de l'état de l'art sur l'estimation bayésienne de groupes de cibles est disponible dans [Mih14]. Une grande partie des méthodes repose sur l'hypothèse que les cibles d'un même groupe sont spatialement proches, ce qui implique également une proximité de leurs mesures respectives. De ce point de vue, les pistages de groupes de cibles et de cibles étendues sont similaires.

Cependant, les incertitudes liées au nombre de groupes doivent également être gérées. En pistage multi-cibles, une problématique comparable porte sur le nombre de cibles et les filtres fondés sur le formalisme des EFAs permettent d'y répondre.

Ainsi, le modèle que nous considérons s'appuie sur une structure hiérarchique d'EFAs. La situation globale dite multi-groupes multi-cibles est représentée par un premier niveau d'EFA dont le cardinal correspond au nombre de groupes. Chacun de ses éléments est lui-même constitué de l'état du groupe et d'un EFA. Ce dernier permet de modéliser la configuration multi-cibles de chacun des groupes. Ainsi, son cardinal correspond au nombre de cibles présentes en son sein et ses éléments sont leurs vecteurs d'état associés.

L'idée de construire un EFA hiérarchique pour représenter des groupes de cibles n'est pas nouvelle [Swa13]. Elle s'articule autour de la notion de processus de groupes (*cluster processes* en anglais) qui sont un cas particulier des processus ponctuels [Dal03] sur lesquels est fondé le formalisme des EFAs multi-objets introduit par Mahler [Mah03]. Dans [Swa13], les groupes de cibles restent constitués en considérant que les objets à rassembler sont spatialement proches. Cela revient à pouvoir établir une relation directe entre les états des cibles et l'état du groupe. Par exemple, l'état du groupe peut être déduit du barycentre des positions des différents objets. La solution de filtrage proposée s'appuie sur des filtres de type PHD.

Dans ce manuscrit de thèse et dans [Leg18b], nous ne faisons pas d'hypothèse sur la proximité spatiale des cibles. Notre vision du problème d'estimation multi-groupes est illustrée par la figure 3.1. Cela permet d'envisager le traitement de formes de coordination plus larges comme un ensemble de cibles éloignées les unes des autres et ralliant le même lieu. La solution d'estimation que nous proposons cherche également à suivre les groupes au cours du temps et s'appuie sur une modélisation fondée sur un EFA multi-Bernoulli étiqueté.

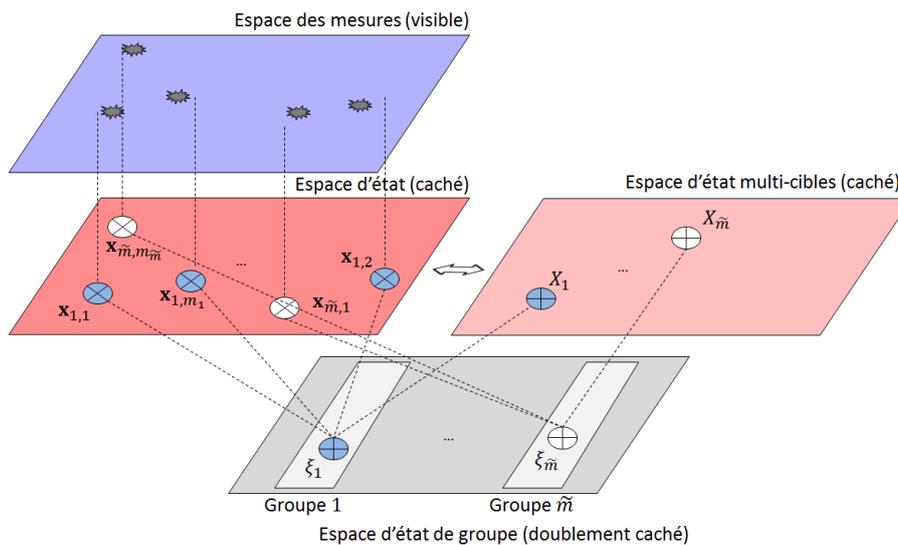


FIGURE 3.1 – Vision du problème d'estimation multi-groupes dans cette thèse.

La suite de ce chapitre est consacrée au développement théorique de cette approche de pistage de groupes de cibles. La partie 3.2 rappelle la définition d'un EFA hiérarchique et introduit celle de sa version étiquetée. Elle présente également comment un tel EFA peut modéliser des groupes de cibles. La partie 3.3 permet d'établir la récursion bayésienne d'un filtre multi-groupes multi-cibles fondé sur des EFAs hiérarchiques. Puis dans la partie 3.4, un filtre hiérarchisé est proposé pour approcher la solution théorique optimale. Au niveau multi-groupes multi-cibles, l'EFA utilisé est de type multi-Bernoulli labélisé tandis qu'au niveau multi-cibles l'EFA choisi est de type Poisson. Dans la partie 3.5, une métrique adaptée aux EFAs hiérarchiques est proposée en s'inspirant de la distance OSPA. Enfin, dans la partie 3.6, des conclusions et perspectives concernant la mise en œuvre pratique de l'algorithme sont présentées.

3.2 Modélisation des états multi-groupes multi-cibles

3.2.1 Définition d'un ensemble fini aléatoire hiérarchique

Un EFA hiérarchique se caractérise par l'incorporation d'EFAs comme éléments d'un EFA de plus haut niveau. Il s'avère adapté pour représenter des groupes de cibles. En effet, l'EFA de plus haut niveau décrit la situation globale multi-groupes multi-cibles. Son cardinal correspond au nombre de groupes tandis que chaque élément contient l'état du groupe ainsi qu'un EFA de plus bas niveau décrivant une situation multi-cibles par groupe.

De manière générale, les quantités rattachées aux EFAs hiérarchiques sont représentées avec un tilde dans la suite du manuscrit. Ainsi, un EFA hiérarchique multi-groupes multi-cibles se définit de la manière suivante :

$$\tilde{X} = \left\{ \left[\begin{array}{c} X_1 \\ \xi_1 \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{c} X_{\tilde{m}} \\ \xi_{\tilde{m}} \end{array} \right] \right\} \text{ avec } \tilde{m} \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

où \tilde{m} désigne le nombre de groupes, $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,\tilde{m}}$ est l'ensemble des états des groupes et $\{X_i\}_{i=1,\dots,\tilde{m}}$ est l'ensemble des états multi-cibles associés.

Pour le groupe i , l'état multi-objets est lui-même représenté par un EFA multi-cibles noté :

$$X_i = \{\mathbf{x}_{i,1}, \dots, \mathbf{x}_{i,m_i}\} \text{ avec } m_i \in \mathbb{N}, \quad (3.2)$$

où m_i désigne le nombre d'objets à l'intérieur du groupe i .

La structure de l'EFA hiérarchique est illustrée par la figure 3.2. Cette structure est introduite dans [Leg18a] et définit l'état des groupes comme un vecteur aléatoire contenant tous les paramètres nécessaires à leur caractérisation. En outre, le contenu et la dimension de ce vecteur dépendent du type de groupe à représenter.

Dans la suite, les cibles rattachées à un même groupe sont supposées indépendantes conditionnellement à l'état du groupe. Ainsi, l'indépendance mutuelle des états des groupes est garante de l'indépendance des groupes.

Nous poursuivons dans le paragraphe suivant par la définition d'une densité multi-objets pour un EFA hiérarchique.

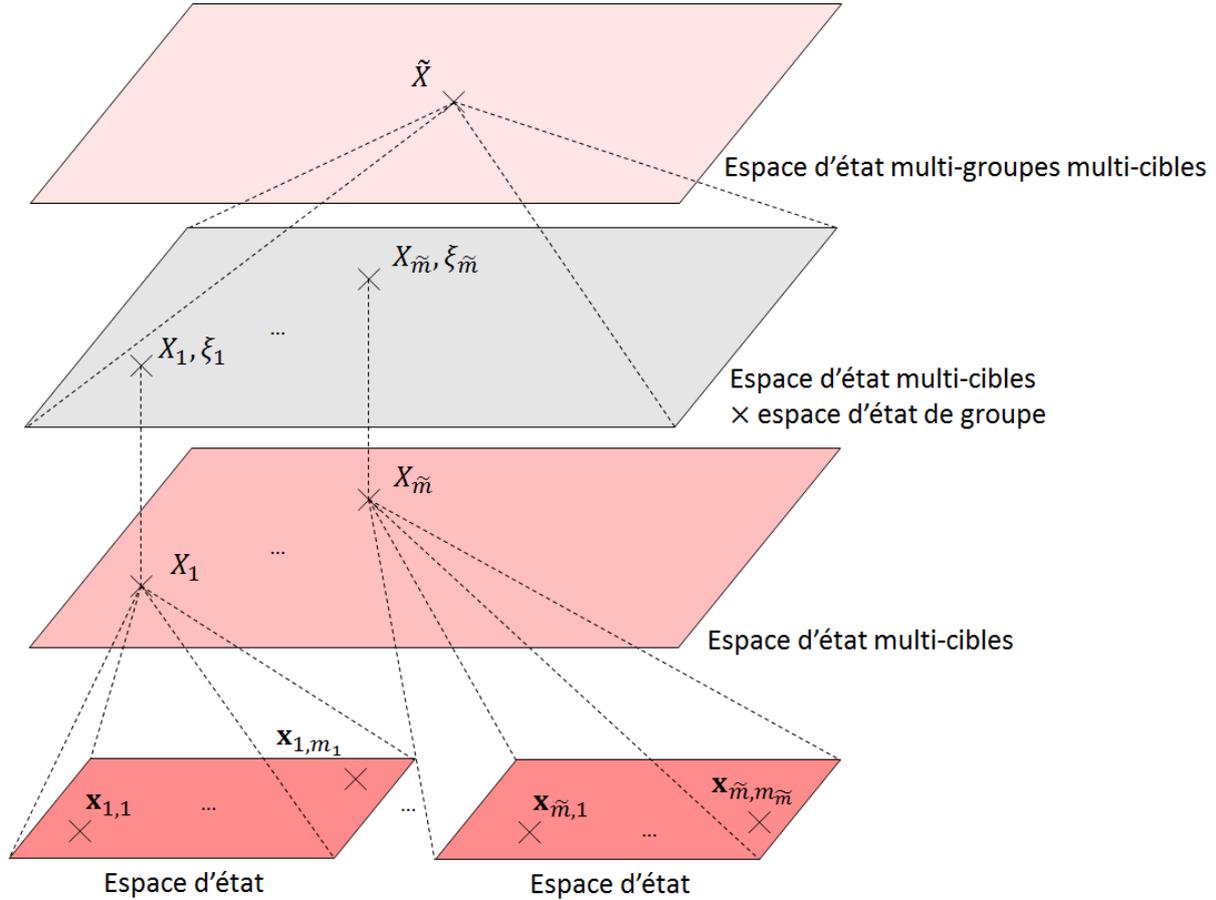


FIGURE 3.2 – EFA hiérarchique multi-groupes multi-cibles.

3.2.2 Densité multi-objets pour un EFA hiérarchique

Dans cette partie, les définitions présentées dans les équations (1.54) à (1.58) sont adaptées au cas d'un EFA hiérarchique. Un certain nombre de notations sont tout d'abord introduites. Comme tout EFA, l'EFA hiérarchique \tilde{X} peut être caractérisé par la distribution de probabilité de son cardinal, notée $\tilde{\rho}$ et définie comme suit :

$$\tilde{\rho}(\tilde{m}) = P(|\tilde{X}| = \tilde{m}). \quad (3.3)$$

Les éléments d'un EFA hiérarchique générique \tilde{X} sont donnés par $\{(X_i, \xi_i)\}_{i=1, \dots, \tilde{m}}$. Il s'agit d'éléments de l'espace d'état multi-cibles augmenté de l'espace d'état de groupe. De ce fait, une fois le cardinal de la densité multi-groupes multi-cibles fixé, il convient d'établir l'expression d'une densité jointe symétrique définie pour $\{(X_i, \xi_i)\}_{i=1, \dots, \tilde{m}}$. Cette densité est elle-même définie en partie sur un espace multi-objets : l'espace multi-cibles contenant les $\{X_i\}_{i=1, \dots, \tilde{m}}$. En conséquence, il s'agit d'une densité multi-objets qui permet de tenir compte des variations du cardinal des X_i ainsi que des permutations d'éléments à l'intérieur de ces derniers. On définit donc la densité multi-objets jointe associée de la manière suivante :

$$\tilde{q}_{\tilde{m}} \left(\begin{bmatrix} X_1 \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} X_{\tilde{m}} \\ \xi_{\tilde{m}} \end{bmatrix} \right) = \prod_{i=1}^{\tilde{m}} q_i(X_i | \xi_i) p(\xi_i), \quad (3.4)$$

où l'on a tiré partie de l'indépendance des états des groupes entre eux pour exprimer la densité multi-objets conditionnellement à ces derniers. D'autre part, comme $\{\xi_i\}_{i=1, \dots, \tilde{m}}$ sont des vecteurs aléatoires, l'ensemble $\{p(\xi_i)\}_{i=1, \dots, \tilde{m}}$ sont des densités classiques tandis que $q_i(X_i | \xi_i)$ est une densité

jointe symétrique multi-objets définie conditionnellement à ξ_i . Le qualificatif multi-objets porte ici sur les éléments $\{X_i\}_{i=1,\dots,\tilde{m}}$. Il concerne le niveau multi-cibles et non le niveau multi-groupes multi-cibles. On retrouve alors l'expression de la densité multi-objets définie sur l'espace multi-groupes multi-cibles :

$$\tilde{\pi}(\tilde{X}) = \tilde{\rho}(\tilde{m}) \sum_{\sigma \in S_{\tilde{m}!}} \tilde{q}_{\tilde{m}} \left(\begin{bmatrix} X_{\sigma(1)} \\ \xi_{\sigma(1)} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} X_{\sigma(\tilde{m})} \\ \xi_{\sigma(\tilde{m})} \end{bmatrix} \right), \quad (3.5)$$

$$= \tilde{\rho}(\tilde{m}) \sum_{\sigma \in S_{\tilde{m}!}} \prod_{i=1}^{\tilde{m}} q_i \left(X_{\sigma(i)} | \xi_{\sigma(i)} \right) p(\xi_{\sigma(i)}), \quad (3.6)$$

où $S_{\tilde{m}!}$ est l'ensemble des permutations sur $\{1, \dots, \tilde{m}\}$.

Dans (3.6), en rassemblant la distribution sur le cardinal et la somme sur les permutations des éléments de \tilde{X} , il est possible de construire une densité multi-objets au niveau multi-groupes multi-cibles conditionnellement définie aux états des groupes. Il vient :

$$\tilde{\rho}(\tilde{m}) \sum_{\sigma \in S_{\tilde{m}!}} \prod_{i=1}^{\tilde{m}} q_{\tilde{m}} \left(X_{\sigma(i)} | \xi_{\sigma(i)} \right) = \tilde{\pi}(\{X_1, \dots, X_{\tilde{m}}\} | \{\xi_1, \dots, \xi_{\tilde{m}}\}). \quad (3.7)$$

L'intégrale au sens des ensembles finis aléatoires fait alors intervenir l'expression introduite dans (3.7) et s'écrit comme suit :

$$\int \tilde{\pi}(\tilde{X}) \delta \tilde{X} = \tilde{\pi}(\emptyset) + \sum_{\tilde{m}=1}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{m}!} \int \tilde{\pi}(\{X_1, \dots, X_{\tilde{m}}\} | \{\xi_1, \dots, \xi_{\tilde{m}}\}) p(\xi_1) \dots p(\xi_{\tilde{m}}) \delta X_1 \dots \delta X_{\tilde{m}} d\xi_1 \dots d\xi_{\tilde{m}}. \quad (3.8)$$

Tout l'intérêt de la démarche présentée dans ce chapitre est de suivre au cours du temps l'évolution des groupes. Notre contribution repose sur l'utilisation d'un EFA hiérarchique étiqueté dans ce contexte. Cette version étiquetée est définie dans le paragraphe suivant.

3.2.3 Version étiquetée d'un ensemble fini aléatoire hiérarchique

Comme pour un EFA multi-cibles, une version étiquetée d'un EFA hiérarchique se fonde sur l'introduction d'un espace d'étiquettes noté \mathbb{L} . Ainsi, chaque élément de \tilde{X} se voit complété d'une étiquette et permet de constituer un nouvel EFA noté $\tilde{\mathbf{X}}$ dont l'expression est la suivante :

$$\tilde{\mathbf{X}} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} X_1 \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \ell_1 \right), \dots, \left(\begin{bmatrix} X_{\tilde{m}} \\ \xi_{\tilde{m}} \end{bmatrix}, \ell_{\tilde{m}} \right) \right\}. \quad (3.9)$$

Cette définition générique n'interdit pas que deux groupes partagent la même étiquette. Pour éviter de considérer ces cas-ci, et comme nous l'avons précisé dans le chapitre 1, il est nécessaire d'introduire un opérateur de vérification d'unicité des étiquettes. Pour ce faire, un projecteur permet de récupérer l'ensemble des étiquettes de $\tilde{\mathbf{X}}$ comme suit :

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{X}}) = \left\{ \mathcal{L} \left(\left(\begin{bmatrix} X_i \\ \xi_i \end{bmatrix}, \ell_i \right) \right) = \ell_i : \left(\begin{bmatrix} X_i \\ \xi_i \end{bmatrix}, \ell_i \right) \in \tilde{\mathbf{X}} \right\}_{i=1,\dots,\tilde{m}}. \quad (3.10)$$

La prise en compte des étiquettes modifie la densité de probabilité multi-objets de l'EFA car elle lève l'incertitude sur les permutations de ses éléments.

Pour terminer cette partie introductive, la densité d'un EFA multi-groupes multi-cibles sans étiquetage peut se déduire à partir de la densité multi-objets sur l'EFA étiqueté par marginalisation :

$$\tilde{\pi} \left(\left\{ \left[\begin{array}{c} X_1 \\ \xi_1 \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{c} X_{\tilde{m}} \\ \xi_{\tilde{m}} \end{array} \right] \right\} \right) = \sum_{(\ell_1, \dots, \ell_{\tilde{m}}) \in \mathbb{L}^{\tilde{m}}} \tilde{\pi} \left(\left\{ \left(\left[\begin{array}{c} X_1 \\ \xi_1 \end{array} \right], \ell_1 \right), \dots, \left(\left[\begin{array}{c} X_{\tilde{m}} \\ \xi_{\tilde{m}} \end{array} \right], \ell_{\tilde{m}} \right) \right\} \right), \quad (3.11)$$

où $\mathbb{L}^{\tilde{m}} = \underbrace{\mathbb{L} \times \mathbb{L} \times \dots \times \mathbb{L}}_{\tilde{m} \text{ fois}}$.

Dans la partie suivante, les équations d'un filtre bayésien fondé sur un EFA hiérarchique sont présentées.

3.3 Filtre bayésien

Dans cette partie, nous construisons un filtre bayésien adapté à la gestion des EFAs hiérarchiques. L'objectif est de propager une densité multi-groupes multi-cibles au cours du temps. Le filtre s'articule autour des étapes de prédiction et de mise à jour.

Avant de les présenter, un certain nombre de notations sont introduites ou rappelées.

Le traitement dispose notamment des mesures radar dont le nombre à un instant donné dépend à la fois du nombre d'objets présents, des non-détections et des fausses alarmes. L'hypothèse que les cibles sont ponctuelles est conservée dans ce chapitre. Les mesures à un instant k peuvent donc être rassemblées au sein d'un EFA multi-mesures noté :

$$Z_k = \{\mathbf{z}_{k,1}, \dots, \mathbf{z}_{k,p}\} \text{ avec } p \in \mathbb{N}. \quad (3.12)$$

Puisqu'aucune information sur la provenance des mesures n'est disponible, l'EFA Z_k rassemble indifféremment les mesures issues des cibles détectées de tous les groupes ainsi que les fausses alarmes.

À partir de ces mesures bruitées, l'objectif du filtre est de propager séquentiellement la densité multi-groupes multi-cibles désignée sous trois notations selon les différentes étapes de la récursion :

$$\tilde{\pi}_{(-)}(\tilde{\mathbf{X}}_{k-1}), \tilde{\pi}_{(+)}(\tilde{\mathbf{X}}_k) \text{ et } \tilde{\pi}_{(*)}(\tilde{\mathbf{X}}_k). \quad (3.13)$$

À titre de rappel, les notations $(-)$, $(+)$ et $(*)$ permettent d'alléger les écritures et signifient respectivement $k-1|k-1$, $k|k-1$ et $k|k$. Elles contiennent également le conditionnement implicite par rapport aux historiques des EFAs multi-mesures.

Une description synthétique des étapes du filtre est donnée sur la figure 3.3.

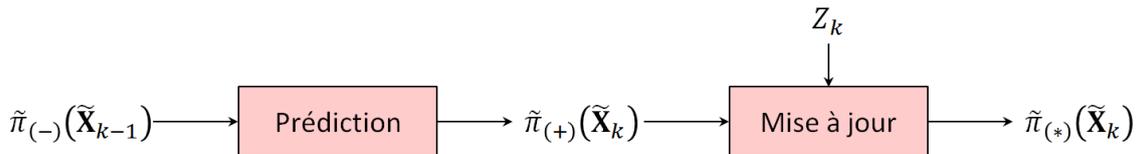


FIGURE 3.3 – Densités multi-groupes multi-cibles en entrée et sortie des étapes de prédiction et de mise à jour.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons l'étape de prédiction.

3.3.1 Étape de prédiction : équation de Chapman-Kolmogorov

L'étape de prédiction s'appuie sur l'équation de Chapman-Kolmogorov. Il s'agit de faire évoluer la densité multi-objets *a posteriori* de l'instant précédent vers la densité multi-objets prédite selon l'équation :

$$\tilde{\pi}_{(+)}(\tilde{\mathbf{X}}_k) = \int f_k(\tilde{\mathbf{X}}_k | \tilde{\mathbf{X}}_{k-1}) \tilde{\pi}_{(-)}(\tilde{\mathbf{X}}_{k-1}) \delta \tilde{\mathbf{X}}_{k-1}. \quad (3.14)$$

Dans la suite de cette thèse, toutes les densités de transition sont notées f_k sans ambiguïté, dans la mesure où elles sont accompagnées de leurs arguments. Ainsi pour $f_k(\tilde{\mathbf{X}}_k|\tilde{\mathbf{X}}_{k-1})$, il s'agit de la densité de transition multi-groupes multi-cibles. L'enjeu de l'étape de prédiction consiste à développer l'expression de cette dernière en fonction des densités de transition connues, à savoir :

- la densité de transition de l'état de groupe définie par le type de groupe,
- la densité de transition de l'état des cibles qui dépend en partie de l'état du groupe mais également des capacités de manœuvre propres à chaque cible.

Ces deux densités font l'objet d'un choix *a priori* par l'intermédiaire des équations d'état. La densité de transition globale doit aussi tenir compte des variations du nombre d'éléments entre les EFAs multi-groupes multi-cibles de deux instants successifs. Ainsi, un groupe présent à un instant k provient d'une naissance ou bien d'une survie d'un groupe déjà présent à l'instant $k - 1$. Le phénomène inverse peut également se produire, c'est-à-dire qu'un groupe peut disparaître.

L'étape suivante consiste à appliquer une correction à la densité prédite en fonction de l'ensemble des mesures reçues.

3.3.2 Étape de mise à jour : règle de Bayes

L'étape de mise à jour repose sur la règle de Bayes en faisant apparaître une vraisemblance $g_k(Z_k|\tilde{\mathbf{X}}_k)$. La densité multi-groupes multi-cibles *a posteriori* de l'instant k s'exprime alors comme suit :

$$\tilde{\pi}_{(*)}(\tilde{\mathbf{X}}_k) = \frac{g_k(Z_k|\tilde{\mathbf{X}}_k)\tilde{\pi}_{(+)}(\tilde{\mathbf{X}}_k)}{\int g_k(Z_k|\tilde{\mathbf{X}}_k)\tilde{\pi}_{(+)}(\tilde{\mathbf{X}}_k)\delta\tilde{\mathbf{X}}_k}. \quad (3.15)$$

Comme pour l'étape de prédiction, tout l'enjeu de la mise à jour est de développer l'expression de la vraisemblance $g_k(Z_k|\tilde{\mathbf{X}}_k)$. Il s'agit ici de considérer tous les groupes de mesures possibles et de les mettre en vis-à-vis avec les groupes de cibles afin d'évaluer la pertinence de chaque association. Dans la suite de ce manuscrit de thèse, les vraisemblances sont notées génériquement g_k , sans ambiguïté tant qu'elles sont accompagnées de leurs arguments.

La partie suivante développe les équations théoriques d'un filtre hiérarchisé pour le pistage multi-groupes multi-cibles en se fondant sur un EFA multi-Bernoulli labélisé au niveau supérieur et sur des EFAs de Poisson au niveau des cibles. Ce filtre s'appuie également sur les équations génériques données dans cette partie, à savoir (3.14) et (3.15).

3.4 Développement théorique d'un filtre LMB/PHD

Pour développer un filtre de pistage multi-groupes multi-cibles, il convient de sélectionner le type d'EFA que nous souhaitons utiliser dans l'EFA hiérarchique multi-groupes multi-cibles et les filtres associés.

Comme le suivi des groupes est une exigence dans notre approche, l'EFA de niveau supérieur pour lequel nous optons est un EFA LMB. Concernant le type de filtre à appliquer, deux possibilités peuvent être envisagées pour l'estimation : un filtre LMB ou un filtre δ -GLMB. Dans cette thèse, nous avons sélectionné le filtre LMB qui est moins coûteux calculatoirement. En effet, pour l'étape de mise à jour, les opérations peuvent parfois être appliquées indépendamment sur des groupes d'objets et leurs mesures pertinentes associées. Dans le cas du pistage multi-groupes multi-cibles, cela signifie que pour chaque groupe de cibles, un ensemble de mesures associables aux objets est constitué. Si deux groupes de mesures ne contiennent aucune mesure en commun alors la mise à jour peut être appliquée de manière indépendante aux deux groupes de cibles correspondants.

De plus, conditionnellement à l'état de groupe, les cibles sont supposées indépendantes et suivent le même modèle de mouvement. Ainsi, un EFA de Poisson, dont les éléments sont indépendants et identiquement distribués, est bien adapté au niveau des cibles, d'autant plus que l'état multi-cibles

peut être estimé par un filtre PHD peu coûteux calculatoirement. Sélectionner des filtres relativement économiques est une manière de compenser la combinatoire potentiellement très grande en estimation multi-groupes multi-cibles.

Enfin, le choix d'un filtre LMB/PHD implique une écriture particulière de la densité multi-groupes multi-cibles dont le détail est donné dans le paragraphe suivant.

3.4.1 Densité multi-groupes multi-cibles

Un EFA LMB permet de représenter la densité multi-groupes multi-cibles par trois éléments distincts. À l'instant k , la densité *a posteriori* s'exprime comme suit :

$$\tilde{\pi}_{(*)}(\tilde{\mathbf{X}}_k) = \left\{ \left(s_{(*)}^{(\ell_i)}, \pi_{(*)}^{(\ell_i)}(X_{k,i}|\xi_{k,i}) p_{(*)}^{(\ell_i)}(\xi_{k,i}) \right) \right\}_{\ell_i \in \mathbb{L}_{(*)}}, \quad (3.16)$$

où :

- $\mathbb{L}_{(*)}$ est l'espace des étiquettes disponibles,
- $s_{(*)}^{(\ell_i)}$ est la probabilité d'existence du groupe étiqueté ℓ_i ,
- $\pi_{(*)}^{(\ell_i)}(X_{k,i}|\xi_{k,i})$ est la densité multi-objets du groupe étiqueté ℓ_i conditionnellement à l'état de groupe $\xi_{k,i}$,
- $p_{(*)}^{(\ell_i)}(\xi_{k,i})$ est la densité classique d'un état de groupe étiqueté ℓ_i .

L'utilisation de filtres PHD au niveau cibles impose des EFAs *a posteriori* de type Poisson. Le principal avantage est que la densité multi-cibles $\pi_{(*)}^{(\ell_i)}(X_{k,i}|\xi_{k,i})$ est complètement caractérisée par sa fonction intensité $D_{(*)}^{(\ell_i)}(\mathbf{x}|\xi_{k,i})$:

$$\pi_{(*)}^{(\ell_i)}(X_{k,i}|\xi_{k,i}) = e^{-\lambda_{(*)}^{(\ell_i)}} \prod_{\mathbf{x} \in X_{k,i}} D_{(*)}^{(\ell_i)}(\mathbf{x}|\xi_{k,i}), \quad (3.17)$$

où $\lambda_{(*)}^{(\ell_i)}$ est le nombre moyen de cibles dans le groupe et peut lui aussi être déduit de la fonction intensité comme suit :

$$\lambda_{(*)}^{(\ell_i)} = \int D_{(*)}^{(\ell_i)}(\mathbf{x}|\xi_{k,i}) d\mathbf{x}. \quad (3.18)$$

Réaliser le pistage consiste alors à estimer les éléments donnés dans les équations (3.16), (3.17) et (3.18) d'un instant à l'autre. Le principe du filtre proposé est illustré par la figure 3.4. Il s'agit de traduire l'évolution de chacun des éléments pour reconstituer la récursion multi-objets présentée dans les équations (3.14) et (3.15). Sur cette figure, MAJ signifie "mise à jour".

Commençons par l'étape de prédiction, que l'on détaille dans la sous-partie suivante.

3.4.2 Étape de prédiction

À l'issue de l'étape $k - 1$, on dispose des éléments caractérisant la densité multi-groupes multi-cibles *a posteriori* suivants :

$$\tilde{\pi}_{(-)}(\tilde{\mathbf{X}}_{k-1}) = \left\{ \left(s_{(-)}^{(\ell_i)}, \pi_{(-)}^{(\ell_i)}(X_{k-1,i}|\xi_{k-1,i}) p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1,i}) \right) \right\}_{\ell_i \in \mathbb{L}_{(-)}} \quad (3.19)$$

Les densités *a posteriori* multi-cibles de l'instant $k - 1$ définies conditionnellement à l'état des groupes sont disponibles par l'intermédiaire de la fonction intensité et du nombre moyen d'objets à l'intérieur du groupe. En particulier, on a :

$$\pi_{(-)}^{(\ell_i)}(X_{k-1,i}|\xi_{k-1,i}) = e^{-\lambda_{(-)}^{(\ell_i)}} \prod_{\mathbf{x} \in X_{k-1,i}} D_{(-)}^{(\ell_i)}(\mathbf{x}|\xi_{k-1,i}), \quad (3.20)$$

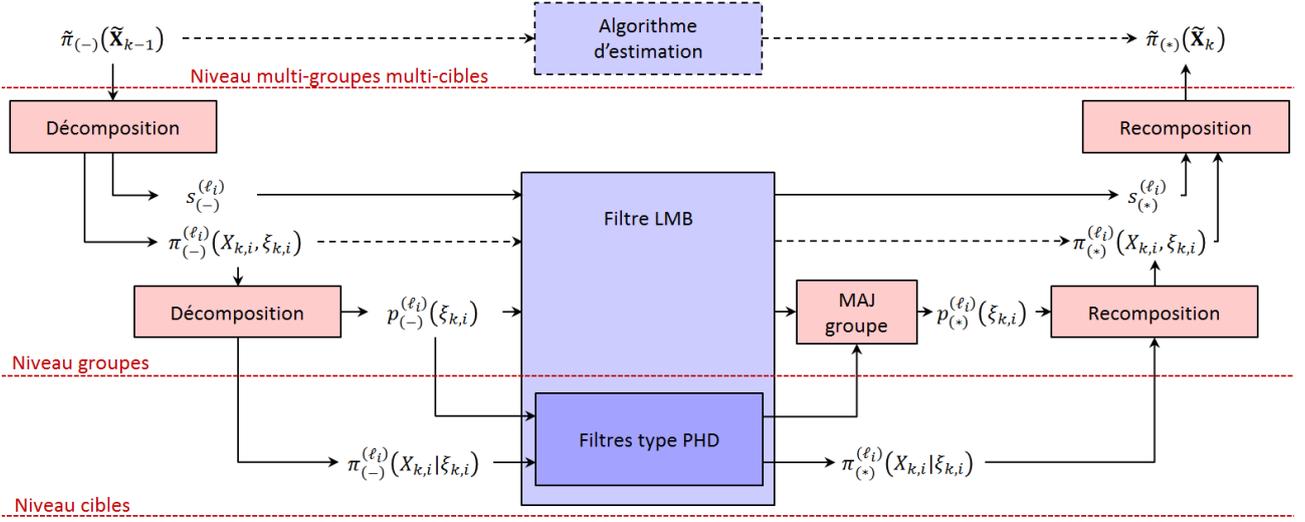


FIGURE 3.4 – Principe de la récursion proposée par l'intermédiaire d'un filtre LMB/PHD.

Les dépendances du modèle hiérarchique se traduisent par des prédictions imbriquées des différentes variables inconnues. Il en résulte la structure hiérarchique du filtre présentée en figure 3.4. Elle s'articule autour des deux événements possibles : un groupe existe à l'instant k parce qu'il est né ou bien parce qu'il a survécu.

Concernant les naissances, il s'agit d'un paramétrage *a priori* défini par :

$$\left\{ \left(s_B^{(b_i)}, \pi_B^{(b_i)}(X_{k,i} | \xi_{k,i}) p_B^{(b_i)}(\xi_{k,i}) \right) \right\}_{b_i \in \mathbb{B}}, \quad (3.21)$$

où \mathbb{B} est l'espace des étiquettes naissantes, $s_B^{(b_i)}$ la probabilité d'existence du groupe b_i à la naissance, $p_B^{(b_i)}(\xi_{k,i})$ la densité de probabilité de l'état de groupe et $\pi_B^{(b_i)}(X_{k,i} | \xi_{k,i})$ la densité multi-objets conditionnelle associée.

Concernant les survies, il convient d'abord d'établir l'expression de la probabilité de survie. Un groupe de cibles est supposé subsister si au moins une des cibles qui le compose survit, ce qui donne :

$$p_{S_g, k}^{(\ell_i)}(X_{k-1, i}) = 1 - \prod_{\mathbf{x} \in X_{k-1, i}} \left(1 - p_S^{(\ell_i)}(\mathbf{x}) \right), \quad (3.22)$$

où $p_S^{(\ell_i)}(\mathbf{x})$ est la probabilité de survie individuelle d'une cible appartenant au groupe ℓ_i et positionnée en \mathbf{x} .

Puis, la densité multi-cibles d'un groupe ℓ_i dans le cas d'une survie se construit autour de deux transitions :

- la première concerne l'évolution de l'état de groupe passant de $\xi_{k-1, i}$ à $\xi_{k, i}$,
- la seconde traite de l'évolution de l'état multi-cibles $X_{k-1, i}$ vers $X_{k, i}$ en tenant compte du pilotage lié à l'état du groupe $\xi_{k, i}$.

La densité multi-cibles s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \pi_{(+), S}^{(\ell_i)}(X_{k, i} | \xi_{k, i}) p_{(+), S}^{(\ell_i)}(\xi_{k, i}) \\ &= \frac{\iint p_{S_g, k}^{(\ell_i)}(X_{k-1, i}) f_k(X_{k, i}, \xi_{k, i} | X_{k-1, i}, \xi_{k-1, i}) \pi_{(-)}^{(\ell_i)}(X_{k-1, i} | \xi_{k-1, i}) p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1, i}) \delta X_{k-1, i} d\xi_{k-1, i}}{\iint p_{S_g, k}^{(\ell_i)}(X_{k-1, i}) \pi_{(-)}^{(\ell_i)}(X_{k-1, i} | \xi_{k-1, i}) p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1, i}) \delta X_{k-1, i} d\xi_{k-1, i}}, \\ &= \frac{\iint p_{S_g, k}^{(\ell_i)}(X_{k-1, i}) f_k(X_{k, i} | X_{k-1, i}, \xi_{k, i}) f_k(\xi_{k, i} | \xi_{k-1, i}) \pi_{(-)}^{(\ell_i)}(X_{k-1, i} | \xi_{k-1, i}) p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1, i}) \delta X_{k-1, i} d\xi_{k-1, i}}{\eta_S(\ell_i)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

où $\eta_S(\ell_i)$ est un terme de normalisation. Il correspond aux chances de survies cumulées du groupe étiqueté ℓ_i selon tous les états multi-cibles et tous les états de groupes antérieurs envisageables. Ainsi, on le retrouve dans l'expression de la probabilité d'existence de groupe prédite :

$$s_{(+),S}^{(\ell_i)} = s_{(-)}^{(\ell_i)} \eta_S(\ell_i). \quad (3.24)$$

À titre de rappel, les indices S et B renvoient respectivement aux phénomènes de survie et de naissance - *survival* et *birth* en anglais.

En rassemblant les paramètres liés aux naissances et ceux liés aux survies, on obtient la densité multi-groupes multi-cibles prédite :

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{(+)}(\tilde{\mathbf{X}}_k) &= \left\{ \left(s_{(+),S}^{(\ell_i)}, \pi_{(+),S}^{(\ell_i)}(X_{k,i} | \xi_{k,i}) p_{(+),S}^{(\ell_i)}(\xi_{k,i}) \right) \right\}_{\ell_i \in \mathbb{L}_{(-)}} \cup \left\{ \left(s_B^{(b_i)}, \pi_B^{(b_i)}(X_{k,i} | \xi_{k,i}) p_B^{(b_i)}(\xi_{k,i}) \right) \right\}_{b_i \in \mathbb{B}}, \\ &= \left\{ \left(s_{(+)}^{(\ell_i)}, \pi_{(+)}^{(\ell_i)}(X_{k,i} | \xi_{k,i}) p_{(+)}^{(\ell_i)}(\xi_{k,i}) \right) \right\}_{\ell_i \in \mathbb{L}_{(+)}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

où \mathbb{B} est l'espace des étiquettes naissantes, nécessairement différentes des étiquettes existantes $\mathbb{L}_{(-)}$. Il en résulte : $\mathbb{L}_{(+)} = \mathbb{L}_{(-)} \cup \mathbb{B}$ avec $\mathbb{L}_{(-)} \cap \mathbb{B} = \emptyset$.

Avant de passer à l'étape de mise à jour, introduisons l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{L}_{(+)})$ des ensembles d'étiquettes.

Un jeu donné d'étiquettes est noté $\tilde{I}_{(+)}$ et correspond à une configuration multi-groupes multi-cibles particulière. Pour chaque élément $\tilde{I}_{(+)} \in \mathcal{F}(\mathbb{L}_{(+)})$, on peut calculer un poids qui correspond aux chances qu'une telle configuration soit effective en sortie de prédiction. Ce poids est construit en effectuant le produit de deux termes :

$$w_{(+)}(\tilde{I}_{(+)}) = w_B(\tilde{I}_{(+)} \cap \mathbb{B}) w_S(\tilde{I}_{(+)} \cap \mathbb{L}_{(-)}), \quad (3.26)$$

où $w_B(\tilde{I}_{(+)} \cap \mathbb{B})$ concerne les naissances. Le poids lié aux naissances pour un ensemble d'étiquettes L s'écrit comme suit :

$$w_B(L) = \prod_{b_i \in \mathbb{B}} (1 - s_B^{(b_i)}) \prod_{b_j \in L} \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{B}}(b_j) s_B^{(b_j)}}{1 - s_B^{(b_j)}}. \quad (3.27)$$

L'autre terme $w_S(\tilde{I}_{(+)} \cap \mathbb{L}_{(-)})$ concerne quant à lui les survies de groupes. Comme pour le terme de naissance, on repère les étiquettes de $\tilde{I}_{(+)}$ contenues dans $\mathbb{L}_{(-)}$. Chacune d'elles contribue au poids $w_S(\tilde{I}_{(+)} \cap \mathbb{L}_{(-)})$ comme un groupe survivant tandis que les autres étiquettes de $\mathbb{L}_{(-)}$ correspondent à des groupes qui ne survivent pas ou alors qui n'existent pas. Ainsi, le poids $w_S(L)$ pour un ensemble d'étiquettes L s'exprime par :

$$w_S(L) = [\eta_S]^L \sum_{I \supseteq L} [1 - \eta_S]^{I-L} \left[\prod_{\ell_i \in \mathbb{L}_{(-)}} (1 - s_{(+)}^{(\ell_i)}) \prod_{\ell \in I} \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{L}_{(-)}}(\ell) s_{(+)}^{(\ell)}}{1 - s_{(+)}^{(\ell)}} \right], \quad (3.28)$$

où le premier terme $[\eta_S]^L$ correspond au produit des chances de survie des groupes étiquetés dans L :

$$[\eta_S]^L = \prod_{\ell \in L} \eta_S(\ell). \quad (3.29)$$

La somme dans (3.28) énumère alors les configurations dans lesquelles les éléments de L peuvent être survivants. Pour ce faire, on constitue tous les ensembles d'étiquettes I à partir de $\mathbb{L}_{(-)}$ qui contiennent au moins L . Pour chaque jeu d'étiquettes I , celles qui ne font pas partie de L correspondent à des groupes qui ne sont pas censés survivre :

$$[1 - \eta_S]^{I-L} = \prod_{\ell \in I-L} (1 - \eta_S(\ell)). \quad (3.30)$$

Bien que n'étant pas survivants, les groupes listés par $I - L$ sont néanmoins existants et participent au produit des probabilités d'existence. Les éléments listés dans I sont donc tous existants tandis que ceux listés dans $L_{(-)} - I$ ne le sont pas, ce qui donne la probabilité d'existence globale d'un jeu d'étiquettes I :

$$\prod_{\ell_i \in \mathbb{L}_{(-)}} (1 - s_{(+)}^{(\ell_i)}) \prod_{\ell \in I} \frac{1_{\mathbb{L}_{(-)}}(\ell) s_{(+)}^{(\ell)}}{1 - s_{(+)}^{(\ell)}}. \quad (3.31)$$

Au niveau cible, il convient également de prédire la fonction intensité définie conditionnellement à l'état du groupe. Cela s'effectue en appliquant les équations du filtre PHD à (3.23) comme suit :

$$\begin{aligned} D_{(+)}^{(\ell_i)}(\mathbf{x}_k | \xi_{k,i}) p_{(+)}^{(\ell_i)}(\xi_{k,i}) = & \quad (3.32) \\ & \iint p_S^{(\ell_i)}(\mathbf{x}_{k-1}) f_k(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \xi_{k,i}) D_{(-)}^{(\ell_i)}(\mathbf{x}_{k-1} | \xi_{k-1,i}) f_k(\xi_{k,i} | \xi_{k-1,i}) p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1,i}) d\xi_{k-1,i} d\mathbf{x}_{k-1} \\ & + \int b^{(\ell_i)}(\mathbf{x}_k | \xi_{k,i}) p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1,i}) d\xi_{k-1,i}, \end{aligned}$$

où $b^{(\ell_i)}(\mathbf{x}_k | \xi_{k,i})$ est une intensité de naissance choisie *a priori*.

Le nombre moyen de cibles contenues dans le groupe étiqueté ℓ_i est alors donné par :

$$\lambda_{(+)}^{(\ell_i)} = \int D_{(+)}^{(\ell_i)}(\mathbf{x}_k | \xi_{k,i}) d\mathbf{x}_k. \quad (3.33)$$

L'étape de prédiction ayant été traitée, nous abordons l'étape de mise à jour dans la partie suivante.

3.4.3 Étape de mise à jour

L'étape de mise à jour vise à corriger les éléments caractérisant la densité multi-groupes multi-cibles prédite en utilisant l'ensemble des mesures disponibles à un instant donné. Toutefois, l'organisation de cette étape est renversée par rapport à l'étape de prédiction. En effet dans cette dernière, le calcul des paramètres de la densité multi-objets prédite permet *in fine* de construire un poids évaluant la pertinence *a priori* d'une configuration multi-groupes multi-cibles prédite. Dans l'étape de mise à jour au contraire, on commence par constituer toutes les configurations globales possibles et en évaluer la pertinence par rapport aux mesures. Ce n'est qu'ensuite que l'on peut mettre à jour les paramètres individuels liés aux groupes en considérant la contribution de chaque configuration envisagée.

À l'instant k , un groupe est existant soit parce qu'il est né, soit parce qu'il existait déjà et qu'il a survécu. Dans le paragraphe précédent, ces groupes sont désignés par des étiquettes rassemblées dans $\tilde{I}_{(+)} \in \mathcal{F}(\mathbb{L}_{(+)})$. Chaque groupe de cibles doit être mis en vis-à-vis avec un groupe de mesures. Il convient donc de constituer ces derniers à partir de Z_k , l'EFA multi-mesures défini en (3.12). Ainsi, si p est le cardinal de Z_k , le nombre de groupes de mesures non vides vaut :

$$\sum_{i=1}^p \binom{p}{i} = \left[\sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \right] - 1 = 2^p - 1. \quad (3.34)$$

De manière arbitraire, le premier groupe de $\tilde{I}_{(+)}$ peut correspondre à $2^p - 1$ groupes de mesures auxquels s'ajoute la possibilité de n'être représenté par aucune détection. Le deuxième groupe de $\tilde{I}_{(+)}$ a quant à lui un choix restreint lié aux groupes de mesures encore constituables après avoir prélevé p' mesures pour le premier groupe. Cela découle de l'hypothèse qu'une mesure ne peut provenir que d'une seule cible et par conséquent, une même mesure ne peut pas mettre à jour deux groupes différents au sein d'une même hypothèse d'association θ . Le nombre de groupes de mesures restant est donc $2^{p-p'} - 1$. Et ainsi de suite. La combinatoire de ce genre d'association grossit très rapidement et de manière exponentielle. Toutes les hypothèses d'association groupe de cibles - groupe de mesures sont définies

conditionnellement à une hypothèse $\tilde{I}_{(+)}$. L'ensemble des *mapping* est noté $\tilde{\Theta}_{\tilde{I}_{(+)}}$. Afin d'illustrer le propos, deux exemples de *mapping* sont proposés sur la figure 3.5 où l'un est valable et l'autre non en raison d'un conflit sur une mesure rattachée à deux groupes différents.

Pour réduire la combinatoire de l'association, une étape de *gating* est généralement introduite. Elle s'appuie sur la présélection des mesures avec des fenêtres de validation pour restreindre les hypothèses de *mapping* envisageables. Elle se rattache à la mise en œuvre pratique du filtre et sa présentation est détaillée dans le chapitre suivant.

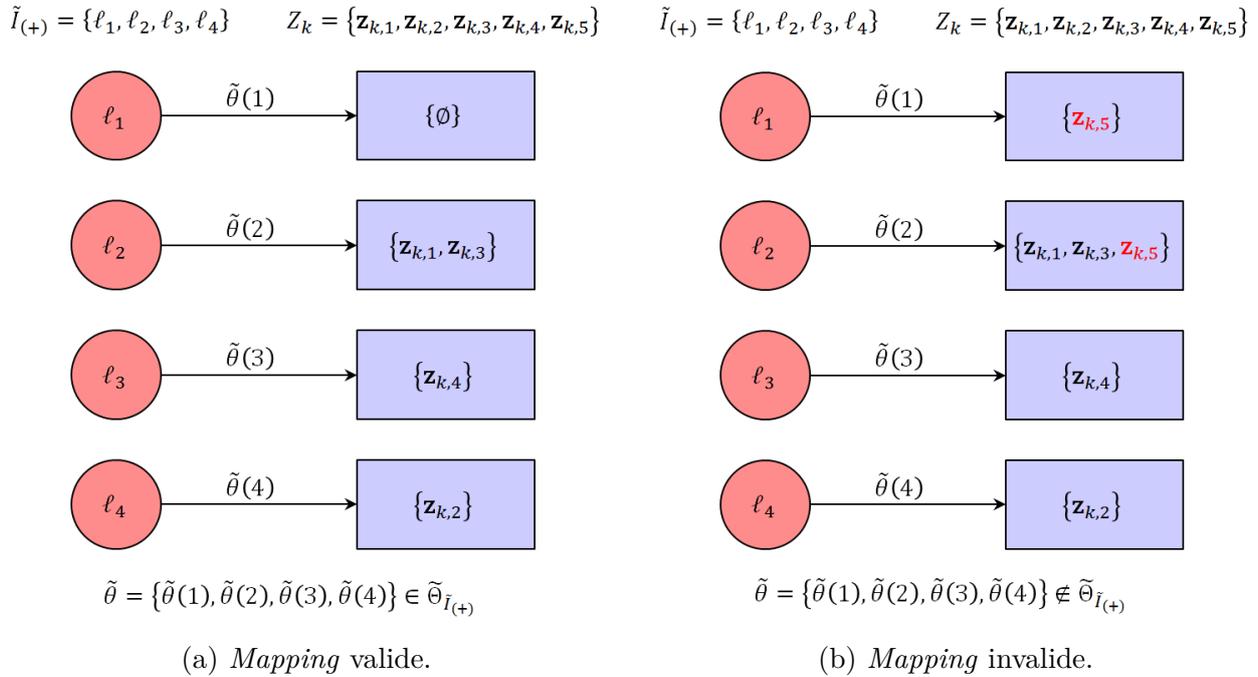


FIGURE 3.5 – Exemples de *mapping* entre des groupes de cibles et des groupes de mesures.

Pour chaque hypothèse $\tilde{I}_{(+)} \in \mathcal{F}(\mathbb{L}_{(+)})$ et pour chaque hypothèse d'association $\tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}_{\tilde{I}_{(+)}}$, un poids $w_{Z_k}^{(\tilde{I}_{(+)}, \tilde{\theta})}$ évaluant la pertinence de cette situation doit être calculé. D'une part, il fait intervenir le poids *a priori* sur la situation $\tilde{I}_{(+)}$ donné par (3.28) et d'autre part un terme de vraisemblance entre le groupe de cibles et le groupe de mesures, on a donc :

$$w_{Z_k}^{(\tilde{I}_{(+)}, \tilde{\theta})} \propto w_{(+)}(\tilde{I}_{(+)}) \left[\eta_{Z_k}^{(\tilde{\theta})} \right]^{\tilde{I}_{(+)}} , \quad (3.35)$$

où l'on rappelle que :

$$\left[\eta_{Z_k}^{(\tilde{\theta})} \right]^{\tilde{I}_{(+)}} = \prod_{\ell_i \in \tilde{I}_{(+)}} \eta_{Z_k}^{(\tilde{\theta})}(\ell_i). \quad (3.36)$$

Le terme lié à la vraisemblance globale est un produit des vraisemblances des groupes indépendants grâce au *mapping* $\tilde{\theta}$ qui ne permet pas qu'une mesure puisse mettre à jour deux groupes différents. La vraisemblance d'un groupe se calcule en parcourant les états multi-cibles et les états de groupe possibles comme suit :

$$\eta_{Z_k}^{(\tilde{\theta})}(\ell_i) = \iint \pi_{(+)}^{(\ell_i)}(X_{k,i} | \xi_{k,i}) p_{(+)}^{(i)}(\xi_{k,i}) \psi_{Z_k}(X_{k,i}, \xi_{k,i}; \tilde{\theta}) \delta X_{k,i} d\xi_{k,i}, \quad (3.37)$$

où $\psi_{Z_k}(X_{k,i}, \xi_{k,i}; \tilde{\theta})$ est la vraisemblance multi-objets entre un EFA de mesure Z_k et un EFA multi-cibles $X_{k,i}$. Pour la définir, on introduit préalablement une probabilité de détection de groupe. Un

groupe est considéré comme détecté si au moins un des objets qui le compose est détecté, ce qui donne :

$$p_{D_g}^{(\ell_i)}(X_{k,i}) = 1 - \prod_{\mathbf{x} \in X_{k,i}} (1 - p_D^{(\ell_i)}(\mathbf{x})). \quad (3.38)$$

On introduit également la densité multi-objets traduisant le cas où tous les éléments d'un EFA multi-mesures sont des fausses alarmes :

$$\pi_f(Z_k) = e^{-\lambda_f} \prod_{\mathbf{z} \in Z_k} \lambda_f \mathcal{U}_f(\mathbf{z}). \quad (3.39)$$

Fort de ces définitions, la vraisemblance multi-objets entre un EFA multi-mesures Z_k et un EFA multi-cibles $X_{k,i}$ lié à un groupe est construite pour chaque hypothèse de *mapping* $\tilde{\theta}$. On a alors :

$$\psi_{Z_k}(X_{k,i}, \xi_{k,i}; \tilde{\theta}) = \begin{cases} \frac{g_k(Z_{\tilde{\theta}(i)} | X_{k,i}, \xi_{k,i})}{\pi_f(Z_{\tilde{\theta}(i)})} & \text{si } \tilde{\theta}(i) \neq \emptyset, \\ 1 - p_{D_g}^{(\ell_i)}(X_{k,i}) & \text{si } \tilde{\theta}(i) = \emptyset. \end{cases} \quad (3.40)$$

Dans l'équation (3.40), $Z_{\tilde{\theta}(i)}$ est un sous-ensemble de Z_k dépendant du *mapping* $\tilde{\theta}(i)$. À ce stade, une remarque s'impose et anticipe déjà la mise en œuvre de ces équations. En effet, le calcul de $\psi_{Z_k}(X_{k,i}, \xi_{k,i}; \tilde{\theta})$ n'a pas à être itéré pour chaque $\tilde{\theta} \in \tilde{\mathcal{I}}_{(+)}$. Dans le pire cas, il suffit de le calculer pour chaque sous-groupe de mesures constituable à partir de Z_k . Ainsi, en supposant que tous les groupes de cibles sont associables à tous les sous-groupes de mesures, le nombre d'opérations à mener est $\tilde{m} \times 2^p$.

On retrouve également la vraisemblance multi-objets définie dans l'hypothèse où $Z_{\tilde{\theta}(i)} \neq \emptyset$:

$$g_k(Z_{\tilde{\theta}(i)} | X_{k,i}, \xi_{k,i}) = \pi_f(Z_{\tilde{\theta}(i)}) \times \left(\prod_{\mathbf{x} \in X_{k,i}} (1 - p_D^{(\ell_i)}(\mathbf{x})) \right) \times \sum_{\theta} \prod_{j: \theta(j) > 0} \frac{p_D^{(\ell_i)}(\mathbf{x}_j) g_k(\mathbf{z}_{\theta(j)} | \mathbf{x}_j)}{(1 - p_D^{(\ell_i)}(\mathbf{x}_j)) \lambda_f \mathcal{U}_f(\mathbf{z}_{\theta(j)})}. \quad (3.41)$$

Dans (3.41), il s'agit de parcourir l'ensemble des hypothèses d'association θ au niveau des cibles. Pour une hypothèse donnée, la vraisemblance multi-objets est le produit de deux types de termes :

- ceux traduisant la vraisemblance des non-détections,
- et ceux traduisant la vraisemblance des objets détectés selon un *mapping* (cibles-mesures, ici) donné.

Pour simplifier l'écriture, il est commode de factoriser par le cas où aucune cible du groupe ℓ_i n'est détectée :

$$\pi_f(Z_{\tilde{\theta}(i)}) \times \left(\prod_{\mathbf{x} \in X_{k,i}} (1 - p_D^{(\ell_i)}(\mathbf{x})) \right), \quad (3.42)$$

puis de compenser sur les termes correspondants à des détections en neutralisant le fait que :

- l'objet ne soit pas détecté : en divisant par $(1 - p_D^{(\ell_i)}(\mathbf{x}_j))$;
- et que sa mesure associée soit une fausse alarme : en divisant par $\lambda_f \mathcal{U}_f(\mathbf{z}_{\theta(j)})$.

La probabilité d'existence d'un groupe se met alors à jour en rassemblant tous les cas de figure où ce groupe est présent puis en sommant les pertinences évaluées dans chacun des cas. On obtient :

$$s_{(*)}^{(\ell_i)} = \sum_{(\tilde{I}_{(+)}, \tilde{\theta}) \in \mathcal{F}(\mathbb{L}_{(+)}) \times \tilde{\Theta}_{\tilde{I}_{(+)}}} w_{Z_k}^{(\tilde{I}_{(+)}, \tilde{\theta})} \mathbb{1}_{\tilde{I}_{(+)}}(\ell_i). \quad (3.43)$$

De la même manière, pour un groupe ℓ_i donné, les mises à jour de la densité multi-cibles et de la densité sur l'état sont effectuées simultanément grâce à :

$$\pi_{(*)}^{(\ell_i)}(X_{k,i} | \xi_{k,i}) p_{(*)}^{(\ell_i)}(\xi_{k,i}) = \sum_{(\tilde{I}_{(+)}, \tilde{\theta}) \in \mathcal{F}(\mathbb{L}_{(+)}) \times \tilde{\Theta}_{\tilde{I}_{(+)}}} \frac{w_{Z_k}^{(\tilde{I}_{(+)}, \tilde{\theta})} \pi_{(*)}^{(\ell_i, \tilde{\theta})}(X_{k,i} | \xi_{k,i}) p_{(*)}^{(\ell_i, \tilde{\theta})}(\xi_{k,i}) \mathbb{1}_{\tilde{I}_{(+)}}(\ell_i)}{s_{(*)}^{(\ell_i)}}, \quad (3.44)$$

où les densités mises à jour selon un hypothèse d'association $\tilde{\theta}$ sont données par :

$$\pi_{(*)}^{(\ell_i, \tilde{\theta})}(X_{k,i} | \xi_{k,i}) p_{(*)}^{(\ell_i, \tilde{\theta})}(\xi_{k,i}) = \frac{\pi_{(+)}^{(\ell_i)}(X_{k,i} | \xi_{k,i}) p_{(+)}^{(\ell_i)}(\xi_{k,i}) \psi_{Z_k}(X_{k,i}, \xi_{k,i}; \tilde{\theta})}{\eta_{Z_k}^{(\tilde{\theta})}(\ell_i)}. \quad (3.45)$$

La mise à jour de la densité de l'état de groupe se déduit grâce à la relation suivante :

$$p_{(*)}^{(\ell_i, \tilde{\theta})}(\xi_{k,i}) \propto \int p_{(+)}^{(\ell_i)}(\xi_{k,i}) \psi_{Z_k}(X_{k,i}, \xi_{k,i}; \tilde{\theta}) \delta X_{k,i}. \quad (3.46)$$

La mise en œuvre pratique de ces équations est détaillée dans le chapitre suivant. Elle repose sur plusieurs approximations notamment pour pouvoir représenter les différentes lois et les propager au cours du temps.

Une fois l'algorithme implémenté et testé, se pose la question d'évaluer ses performances et notamment de s'assurer que les groupes de cibles ont été correctement constitués et que leurs éléments ont été précisément estimés. À notre connaissance, il n'existe pas de métrique permettant de comparer deux états multi-groupes multi-objets. Dans la partie suivante, nous proposons donc une métrique adaptée pour évaluer la ressemblance entre des EFAs hiérarchiques.

3.5 Métrique adaptée aux ensembles finis aléatoires hiérarchiques

3.5.1 Définition de l'OSPA multi-groupes (MG-OSPA)

Si l'on ne tient pas compte des groupes, une configuration multi-groupes multi-cibles se ramène à une situation multi-cibles. Il est donc toujours possible d'utiliser la métrique OSPA introduite dans [Sch08] dans un contexte d'estimation multi-groupes multi-cibles pour comparer un EFA estimé à la réalité. Cependant, cette métrique ne pénalise pas les erreurs au niveau des groupes. Dans le chapitre 1, de nombreuses variantes de l'OSPA sont évoquées et permettent de l'adapter à un contexte spécifique comme par exemple la comparaison d'EFAs étiquetés avec l'OSPA *for tracks* [Ris10b] [Ris11]. Dans cette variante, la métrique proposée permet de pénaliser une erreur d'étiquetage tout en conservant la structure originelle de l'OSPA. Dans cette partie, nous présentons une variante de l'OSPA initialement introduite dans [Leg18a]. Cette métrique nommée OSPA multi-groupes (*multi-group OSPA* (MG-OSPA) en anglais) est adaptée à la comparaison de deux EFAs hiérarchiques et pénalise dans le cadre de l'estimation multi-groupes multi-cibles :

- une erreur sur le nombre de groupes, c'est-à-dire une différence de cardinal sur les EFAs de plus haut niveau dans la hiérarchie,
- les erreurs sur les états des groupes,
- les erreurs sur les nombres de cibles au sein des groupes, c'est-à-dire les différences de cardinaux sur les EFAs multi-cibles conditionnellement définis à chaque état de groupe,
- les erreurs sur les états des cibles de chacun des groupes.

Considérons deux EFAs hiérarchiques \tilde{X} et \tilde{Y} :

$$\tilde{X} = \left\{ \left[\begin{array}{c} X_1 \\ \xi_1 \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{c} X_{\tilde{m}} \\ \xi_{\tilde{m}} \end{array} \right] \right\} \text{ et } \tilde{Y} = \left\{ \left[\begin{array}{c} Y_1 \\ \kappa_1 \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{c} Y_{\tilde{n}} \\ \kappa_{\tilde{n}} \end{array} \right] \right\}. \quad (3.47)$$

L'expression de la MG-OSPA permettant d'évaluer les différences entre \tilde{X} et \tilde{Y} fait apparaître une structure hiérarchique. Ainsi, sa définition est la suivante pour $\tilde{m} \leq \tilde{n}$:

$$\tilde{d}_r^{(\tilde{c})}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \left(\frac{1}{\tilde{n}} \left(\min_{\tilde{\sigma} \in S_{\tilde{n}}} \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \left[\tilde{d}_{\tilde{c}}^q \left(\left[\begin{array}{c} X_i \\ \xi_i \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} Y_{\tilde{\sigma}(i)} \\ \kappa_{\tilde{\sigma}(i)} \end{array} \right] \right) \right]^r + \tilde{c}^r (\tilde{n} - \tilde{m}) \right) \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (3.48)$$

où \tilde{c} est le paramètre de coupure, r est l'ordre, $S_{\tilde{n}}$ est l'ensemble des permutations sur $\{1, 2, \dots, \tilde{n}\}$ et $\tilde{d}_{\tilde{c}}^q(\cdot)$ une métrique entre deux états multi-cibles étendus par un état de groupe. Elle est définie par :

$$\tilde{d}_{\tilde{c}}^q \left(\begin{bmatrix} X \\ \xi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y \\ \kappa \end{bmatrix} \right) = \min \left(\tilde{c}, \left[\left(d_p^{(c)}(X, Y) \right)^q + \left(\gamma d_g(\xi, \kappa) \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} \right), \quad (3.49)$$

où $d_p^{(c)}(\cdot)$ est une métrique OSPA définie dans (1.151), q est l'ordre tandis que $d_g(\cdot)$ est une métrique euclidienne entre les éléments des vecteurs d'état des deux groupes ξ et κ . De plus, γ est un paramètre d'échelle permettant de ramener la quantité $\gamma d_g(\cdot)$ dans un intervalle de valeurs $[0, c]$.

La métrique proposée dans (3.48) est construite de manière similaire à l'OSPA. $\tilde{d}_r^{(\tilde{c})}$ permet de prendre en compte simultanément différents éléments :

- l'erreur sur le nombre de groupes est pénalisée par $\tilde{c}^r(\tilde{n} - \tilde{m})$,
- l'erreur sur le vecteur d'état de groupe l'est au travers de $\gamma d_g(\xi, \kappa)$ (3.49),
- les erreurs sur la composition des groupes le sont par l'intermédiaire de $d_p^{(c)}(X, Y)$ (3.49).

Plus les ordres p , q et r sont grands, plus les grandes valeurs de leur métrique correspondante sont pénalisées. Comme pour le paramétrage de c , \tilde{c} représente la valeur maximale de la métrique globale. Il est important de remarquer que les différentes erreurs ne sont pas toutes exprimées dans la même unité, notamment l'erreur entre les états des groupes et les erreurs entre les états individuels des cibles. C'est donc γ qui joue le rôle de paramètre d'échelle et qui garantit que l'expression de la métrique globale reste homogène en termes de dimensions. Ce paramètre permet également de régler l'influence relative des différentes sources d'erreur dans la valeur globale de la métrique.

Enfin, comme la structure de la métrique proposée est héritée de celle de l'OSPA, la méthode Hongroise [Kuh55] peut être utilisée pour mener le calcul de la métrique globale à moindre coût. Le procédé est usuel pour le calcul de l'OSPA. Dans notre cas, il consiste à compléter l'EFA hiérarchique dont le cardinal est le plus petit pour que \tilde{m} soit égal à \tilde{n} . Les éléments de remplissage sont sélectionnés de telle manière que la métrique $\tilde{d}_{\tilde{c}}^q(\cdot)$ entre un de ces éléments et n'importe quel autre vaille \tilde{c} . Ainsi, le problème d'affectation consistant à trouver l'ensemble des distances qui aboutissent au coût global le plus faible peut être résolu en appliquant la méthode Hongroise.

Dans le paragraphe suivant, nous fournissons une démonstration pour montrer que la MG-OSPA est une métrique.

3.5.2 Preuve que la MG-OSPA est une métrique

Dans (3.48), la distance prend la forme classique d'une métrique OSPA [Sch08]. D'après [Sch08], cet élément est une métrique si (3.49) est une métrique à valeur dans $[0, \tilde{c}]$. Les éléments de preuve sont donnés dans la suite :

1) la plage des valeurs de $\tilde{d}_{\tilde{c}}^q(\cdot, \cdot)$ est $[0, \tilde{c}]$ par définition. Voir (3.49).

2) $\tilde{d}_{\tilde{c}}^q(\cdot, \cdot)$ est une métrique si $\left[\left(d_p^{(c)}(\cdot, \cdot) \right)^q + \left(\gamma d_g(\cdot, \cdot) \right)^q \right]^{\frac{1}{q}}$ est une métrique. Comme $d_p^{(c)}(\cdot, \cdot)$ et $d_g(\cdot, \cdot)$ sont deux métriques définies sur leur espace respectif, $q \in [1, +\infty[$ et $\gamma > 0$, la non-négativité, l'identité des indiscernables et la symétrie sont des propriétés directement héritées. Pour ce qui est de l'inégalité triangulaire, considérons trois ensembles étendus $\begin{bmatrix} X \\ \xi \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} Y \\ \kappa \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} Z \\ \zeta \end{bmatrix}$. En tirant profit de l'inégalité triangulaire sur $d_p^{(c)}(X, Y)$ et $d_g(\xi, \kappa)$ avec $q \geq 1$, on obtient :

$$\left[\left(d_p^{(c)}(X, Z) \right)^q + \left(\gamma d_g(\xi, \zeta) \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} \leq \left[\left(d_p^{(c)}(X, Y) + d_p^{(c)}(Y, Z) \right)^q + \left(\gamma d_g(\xi, \kappa) + \gamma d_g(\kappa, \zeta) \right)^q \right]^{\frac{1}{q}}. \quad (3.50)$$

D'après l'équation (3.50) ci-dessus, l'inégalité de Minkowski permet de conclure que :

$$\begin{aligned} & \left[\left(d_p^{(c)}(X, Y) + d_p^{(c)}(Y, Z) \right)^q + \left(\gamma d_g(\xi, \kappa) + \gamma d_g(\kappa, \zeta) \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \left[\left(d_p^{(c)}(X, Y) \right)^q + \left(\gamma d_g(\xi, \kappa) \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\left(d_p^{(c)}(Y, Z) \right)^q + \left(\gamma d_g(\kappa, \zeta) \right)^q \right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ainsi, $\left[\left(d_p^{(c)}(\cdot, \cdot) \right)^q + \left(\gamma d_g(\cdot, \cdot) \right)^q \right]^{\frac{1}{q}}$ est une métrique et $\tilde{d}_c^q(\cdot, \cdot)$ aussi.

Étant donné les points 1) et 2) mentionnés ci-dessus, $\tilde{d}_r^{(\tilde{c})}(\cdot, \cdot)$ est une métrique.

Dans la partie suivante, quelques exemples de comparaisons d'EFAs hiérarchiques sont proposés.

3.5.3 Intérêt par rapport à une OSPA classique

Dans cette partie, nous présentons quatre exemples de comportement des métriques OSPA et MG-OSPA pour des EFAs hiérarchiques construits pour des groupes de cibles à vitesse coordonnée. Les situations sont représentées sur la figure 3.6 sur laquelle cinq cibles sont présentes à chaque fois. Trois d'entre elles appartiennent à un premier groupe tandis que les deux restantes appartiennent à un second. Les valeurs d'OSPA et de MG-OSPA sont données dans le tableau 3.1 avec comme jeu de paramètres $\gamma = 1$, $c = 100$, $\tilde{c} = 200$, $p = 1$, $q = 1$ et $r = 1$.

Sur la figure 3.6 (a), deux EFAs hiérarchiques sont comparés pour lesquels seules les positions des objets diffèrent alors que la répartition en groupes et leur vitesse associée sont identiques. La MG-OSPA

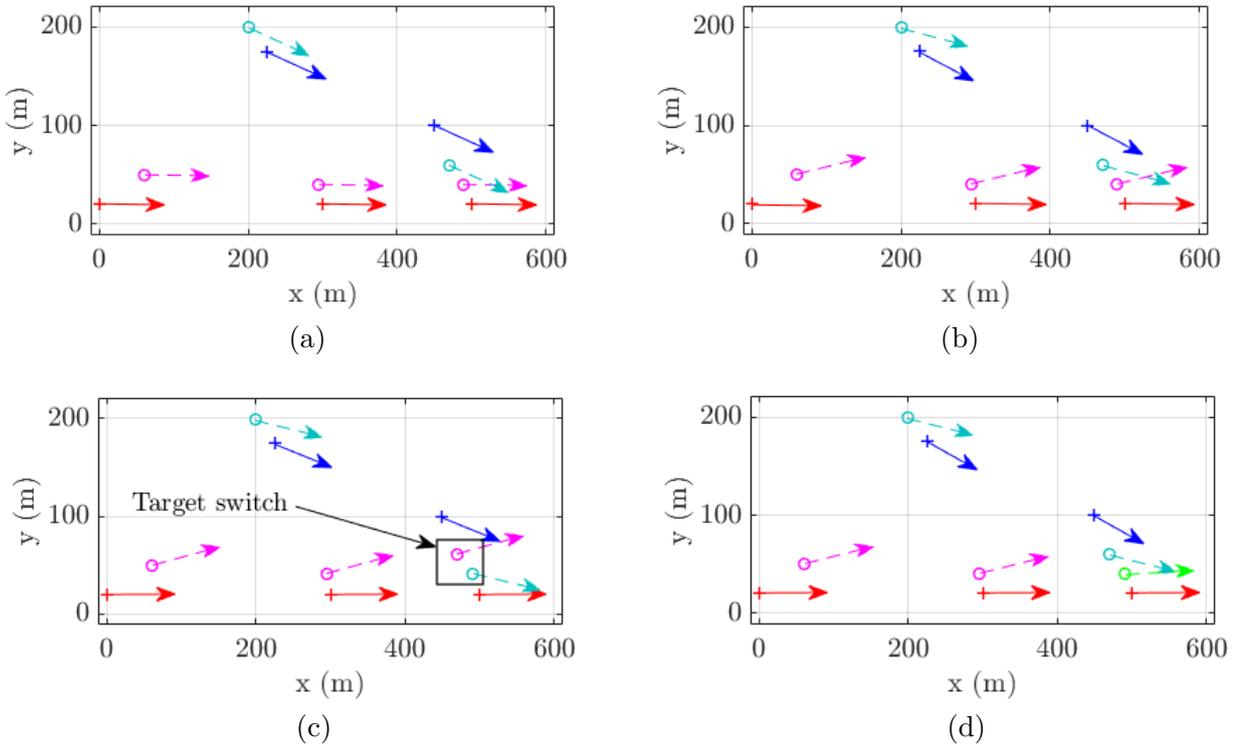


FIGURE 3.6 – Quatre exemples d'EFAs hiérarchiques sont représentés. Les cibles d'un même groupe partagent la même couleur. Les flèches représentent des vitesses de groupe associées à chaque cible. Le premier EFA hiérarchique contient les cibles en rouge et en bleu tandis que le second EFA hiérarchique contient celles en magenta et en cyan (et aussi en vert sur la figure (d)).

est plus grande que l’OSPA parce qu’elle somme une OSPA par groupe.

Sur la figure 3.6 (b), ce ne sont plus seulement les positions des cibles qui diffèrent entre les deux EFAs hiérarchiques, mais également les vitesses de groupe. Cet exemple illustre comment la MG-OSPA évolue quand les erreurs sur les états de groupes grandissent.

Sur la figure 3.6 (c) et 3.6 (d), les erreurs au niveau des groupes sont considérées. Dans le premier cas, le nombre de groupes est le même pour les deux EFAs comparés, mais deux cibles sont affectées au mauvais groupe. Dans le second cas, une des cibles forme un groupe additionnel à elle toute seule. Dans les deux cas, l’OSPA ne pénalise pas ces erreurs alors que la valeur de la MG-OSPA croît.

Le comportement de la métrique proposé est résumé avec les résultats présentés dans le tableau 3.1. Ils montrent que la MG-OSPA permet de quantifier les erreurs de position, de vitesse et d’assignation aux groupes dans un scénario multi-cibles. Il est important de noter que l’analyse séparée des différents termes constitutifs de la MG-OSPA permet d’identifier la source des erreurs.

Scénarios	Fig. 3.6 (a)	Fig. 3.6 (b)	Fig. 3.6 (c)	Fig. 3.6 (d)
OSPA (m)	42.14	42.14	42.14	42.14
MG-OSPA (m)	43.50	50.01	61.47	268.41

TABLE 3.1 – Valeurs d’OSPA et de MG-OSPA pour les différents exemples illustrés sur Fig. 3.6.

3.6 Conclusions et perspectives

Ce chapitre est consacré à la présentation d’un modèle d’EFA hiérarchique pour le pistage de groupes de cibles dont les mouvements sont coordonnés. La situation globale est une configuration multi-cibles. Cependant, la particularité réside dans l’inter-dépendance des évolutions des états des cibles au sein d’un même groupe. En effet, ces dernières sont au moins en partie pilotées par un paramètre caractéristique du groupe. L’EFA hiérarchique proposé s’organise alors sur deux niveaux. Au niveau le plus haut, la configuration multi-groupes multi-cibles est entièrement représentée par un premier EFA étiqueté. Son cardinal correspond au nombre de groupes tandis que ses éléments modélisent les caractéristiques des différents groupes. Ils sont composés de l’état de groupe et un EFA de niveau inférieur. Le premier regroupe les paramètres communs d’évolution tandis que le second modélise une configuration multi-cibles. En s’appuyant sur les EFAs hiérarchiques, nous développons alors les équations théoriques d’un filtre LMB/PHD capable d’estimer une configuration multi-groupes multi-cibles. La structure de ce filtre est elle-aussi hiérarchique. Au niveau multi-groupes multi-cibles, un filtre LMB est employé et permet notamment d’étiqueter les groupes pour un suivi au cours du temps. Conditionnellement à un groupe donné, c’est-à-dire conditionnellement à un état de groupe, un filtre PHD permet d’estimer une configuration multi-cibles par groupe. Les filtres LMB et PHD sont les moins coûteux en termes de ressources de calcul dans leur catégorie. Ce choix se justifie notamment du fait de la combinatoire *a priori* très grande du problème multi-groupes multi-cibles. Enfin, nous introduisons la métrique MG-OSPA adaptée à la comparaison de deux EFAs hiérarchiques.

Dans le chapitre suivant, nous détaillons la mise en œuvre pratique du filtre LMB/PHD présenté dans ce chapitre et nous fournissons également quelques simulations pour étudier son fonctionnement.

Chapitre 4

Pistage de groupes de cibles : mise en œuvre et simulations

Sommaire

4.1	Introduction	117
4.2	Mise en œuvre pratique du filtre LMB/PHD	118
4.2.1	Représentation de la densité multi-groupes multi-cibles	118
4.2.2	Étape de prédiction	119
4.2.3	Association des groupes de cibles aux groupes de mesures	122
4.2.4	Étape de mise à jour	123
4.2.5	Gestion des suppressions, fusions et naissances des groupes	125
4.3	Simulations	125
4.3.1	Cas d'application : cibles coordonnées en vitesse	126
4.3.2	Protocoles de simulations	127
4.3.3	Résultats	128
4.4	Conclusions et perspectives	140

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, l'élaboration d'une solution de filtrage multi-groupes multi-cibles est présentée. Elle concerne les scénarios où les cibles appartenant à un même groupe coordonnent leur mouvement. Cela correspond à la constitution de convois, à l'évolution contrainte de cibles proches sur un réseau routier, à la coordination selon une vitesse ou une accélération commune dans l'objectif d'évoluer en formation, *etc.* La configuration globale pourrait être représentée et traitée d'un point de vue multi-cibles. Cependant, comme certaines cibles se coordonnent dans leur mouvement, elles ne sont plus indépendantes les unes par rapport aux autres, ce qui se traduit par une redondance d'information dans les observations des états des cibles d'un même groupe.

Ce dernier point est potentiellement exploitable dans un algorithme d'estimation de trajectoires sous réserve d'adopter une modélisation adaptée du système. L'objectif du chapitre précédent est de formaliser la représentation d'une configuration multi-groupes multi-cibles grâce à des EFAs hiérarchiques. Au niveau supérieur, l'EFA représente la configuration complète et son cardinal correspond au nombre de groupes. Ses éléments sont constitués :

- de l'état du groupe qui paramètre la coordination des mouvements des cibles en son sein,
- d'un EFA représentant une configuration multi-cibles par groupe.

Le cardinal de l'EFA de niveau inférieur donne le nombre de cibles à l'intérieur du groupe tandis que ses éléments correspondent à leur état.

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les développements théoriques d'un algorithme d'estimation fondé sur un filtre hiérarchique LMB/PHD. Le LMB permet d'estimer le nombre et l'état des groupes. Il interagit avec un banc de filtres PHD qui sont dédiés à l'estimation de la configuration multi-cibles du groupe conditionnellement à son état.

Dans ce chapitre, nous détaillons la mise en œuvre pratique du filtre hiérarchique LMB/PHD. Une partie dédiée à des essais sur données simulées permet d'illustrer son fonctionnement.

Ainsi, le chapitre est organisé de la manière suivante : dans la partie 4.2, les mises en œuvre des étapes de prédiction, de constitution des groupes de traitement et de mise à jour sont présentées. Dans la partie 4.3, nous proposons un ensemble de simulations pour évaluer le fonctionnement du filtre proposé et commentons les résultats obtenus, avant de conclure et de donner quelques perspectives à ces travaux.

4.2 Mise en œuvre pratique du filtre LMB/PHD

Dans cette partie, le système de notations introduit dans le chapitre précédent reste valable. La description de la mise en œuvre pratique du filtre LMB/PHD s'appuie notamment sur la définition d'un EFA hiérarchique multi-groupes multi-cibles étiqueté, noté à l'instant $k - 1$ comme suit :

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k-1} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} X_{k-1,1} \\ \xi_{k-1,1} \end{bmatrix}, \ell_1 \right), \dots, \left(\begin{bmatrix} X_{k-1,\tilde{m}} \\ \xi_{k-1,\tilde{m}} \end{bmatrix}, \ell_{\tilde{m}} \right) \right\}. \quad (4.1)$$

Cet EFA est à valeur dans l'espace multi-groupes multi-cibles et l'estimation d'une telle configuration se fonde sur l'introduction d'une densité multi-objets supposée multi-Bernoulli labélisée dont l'expression est la suivante :

$$\tilde{\pi}_{(-)}(\tilde{\mathbf{X}}_{k-1}) = \left\{ \left(s_{(-)}^{(\ell_i)}, \pi_{(-)}^{(\ell_i)}(X_{k-1,i} | \xi_{k-1,i}) p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1,i}) \right) \right\}_{\ell_i \in \mathbb{L}_{(-)}} \quad (4.2)$$

La densité multi-objets LMB s'écrit sous la forme de trois paramètres par groupe. La probabilité d'existence $s_{(-)}^{(\ell_i)}$ est un nombre réel compris dans l'intervalle $[0, 1]$. Les deux autres paramètres sont deux densités, l'une au sens classique et l'autre au sens des statistiques des ensembles finis. Nous explicitons leur expression dans la suite. Comme dans le chapitre précédent, $\mathbb{L}_{(-)}$ est l'ensemble des étiquettes disponibles à l'instant $k - 1$.

4.2.1 Représentation de la densité multi-groupes multi-cibles

Pour un groupe étiqueté ℓ_i , la loi sur l'état du groupe est représentée par l'approximation particulière suivante :

$$p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1,i}) = \sum_{j=1}^{N_{\xi}^{(i)}} \omega_{\xi,(-)}^{(i,j)} \delta_{\xi_{k-1}^{(i,j)}}(\xi_{k-1,i}), \quad (4.3)$$

où $N_{\xi}^{(i)}$ est le nombre de particules, $\{\xi_{k-1}^{(i,j)}\}_{j=1,\dots,N_{\xi}^{(i)}}$ est l'ensemble des particules et $\{\omega_{\xi,(-)}^{(i,j)}\}_{j=1,\dots,N_{\xi}^{(i)}}$ est l'ensemble des poids associés.

Il est important de noter que le nombre de particules est variable en fonction du type de groupe et dépend en particulier de la dimension de l'espace d'état de groupe. L'utilisation d'une approximation particulière se justifie ici par l'absence d'information quant à la forme de la loi à représenter.

Chaque particule $\xi_{k-1}^{(i,j)}$ permet d'envisager une hypothèse d'état de groupe. Conditionnellement à chacune d'entre elles, une situation multi-cibles est représentée par une densité multi-objets. L'EFA multi-cibles choisi est de type Poisson ce qui permet d'exprimer la densité multi-objets conditionnelle grâce à une fonction intensité comme suit :

$$\pi_{(-)}^{(\ell_i)}(X_{k-1,i} | \xi_{k-1}^{(i,j)}) = e^{-\lambda_{(-)}^{(i,j)}} \prod_{\mathbf{x}_{k-1} \in X_{k-1,i}} D_{(-)}^{(i,j)}(\mathbf{x}_{k-1} | \xi_{k-1}^{(i,j)}), \quad (4.4)$$

où $\lambda_{(-)}^{(i,j)}$ et $D_{(-)}^{(i,j)}(\mathbf{x}_{k-1}|\xi_{k-1}^{(i,j)})$ se trouvent maintenant définis par rapport à une hypothèse $\xi_{k-1}^{(i,j)}$.

Dans la mise en œuvre considérée, chaque fonction intensité est approchée par un mélange de gaussiennes, il vient :

$$D_{(-)}^{(i,j)}(\mathbf{x}_{k-1}|\xi_{k-1}^{(i,j)}) \approx \sum_{\iota=1}^{J_{(-)}^{(i,j)}} \omega_{(-)}^{(i,j,\iota)} \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; m_{(-)}^{(i,j,\iota)}, P_{(-)}^{(i,j,\iota)}), \quad (4.5)$$

où $J_{(-)}^{(i,j)}$ est le nombre de gaussiennes dont chacune d'elles est identifiée de manière unique par le triplet (i, j, ι) , avec $m_{(-)}^{(i,j,\iota)}$ leur moyenne et $P_{(-)}^{(i,j,\iota)}$ leur matrice de covariance. Cette approximation permet également de représenter $\lambda_{(-)}^{(i,j)}$ comme suit :

$$\lambda_{(-)}^{(i,j)} = \int D_{(-)}^{(i,j)}(\mathbf{x}_{k-1}|\xi_{k-1}^{(i,j)}) d\mathbf{x}_{k-1} \approx \sum_{\iota=1}^{J_{(-)}^{(i,j)}} \omega_{(-)}^{(i,j,\iota)}. \quad (4.6)$$

Grâce à (4.3)-(4.6), il est possible de reconstruire pour chaque groupe la densité multi-objets liée au type multi-Bernoulli de l'EFA multi-groupes multi-cibles comme suit :

$$\begin{aligned} & \pi_{(-)}^{(\ell_i)}(X_{k-1,i}|\xi_{k-1,i}) p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1,i}) \quad (4.7) \\ & \stackrel{(4.3)}{=} \pi_{(-)}^{(\ell_i)}(X_{k-1,i}|\xi_{k-1,i}) \sum_{j=1}^{N_{\xi}^{(i)}} \omega_{\xi,(-)}^{(i,j)} \delta_{\xi_{k-1}^{(i,j)}}(\xi_{k-1,i}), \\ & \stackrel{(4.4)}{=} \sum_{j=1}^{N_{\xi}^{(i)}} \left[e^{-\lambda_{(-)}^{(i,j)}} \prod_{\mathbf{x}_{k-1} \in X_{k-1,i}} D_{(-)}^{(i,j)}(\mathbf{x}_{k-1}|\xi_{k-1}^{(i,j)}) \right] \omega_{\xi,(-)}^{(i,j)} \delta_{\xi_{k-1}^{(i,j)}}(\xi_{k-1,i}), \\ & \stackrel{(4.5)}{=} \sum_{j=1}^{N_{\xi}^{(i)}} \left[e^{-\lambda_{(-)}^{(i,j)}} \prod_{\mathbf{x}_{k-1} \in X_{k-1,i}} \left(\sum_{\iota=1}^{J_{(-)}^{(i,j)}} \omega_{(-)}^{(i,j,\iota)} \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; m_{(-)}^{(i,j,\iota)}, P_{(-)}^{(i,j,\iota)}) \right) \right] \omega_{\xi,(-)}^{(i,j)} \delta_{\xi_{k-1}^{(i,j)}}(\xi_{k-1,i}). \end{aligned}$$

La finalité de l'algorithme de filtrage LMB/PHD est alors d'estimer pour chaque groupe étiqueté ℓ_i l'ensemble des variables suivantes :

- $s_{(*)}^{(\ell_i)}$ la probabilité d'existence du groupe,
- $\{\omega_{\xi,(*)}^{(i,j)}, \xi_k^{(i,j)}\}_{j=1, \dots, N_{\xi}^{(i)}}$ les poids et les particules qui permettent l'approximation particulière de $p_{(*)}^{(\ell_i)}(\xi_{k,i})$,
- $\{J_{(*)}^{(i,j)}\}_{j=1, \dots, N_{\xi}^{(i)}}$ l'ensemble des nombres de gaussiennes nécessaires aux mélanges qui représentent $\{D_{(*)}^{(i,j)}(\mathbf{x}_k|\xi_k^{(i,j)})\}_{j=1, \dots, N_{\xi}^{(i)}}$,
- $\{\{\omega_{(*)}^{(i,j,\iota)}, m_{(*)}^{(i,j,\iota)}, P_{(*)}^{(i,j,\iota)}\}_{\iota=1, \dots, J_{(*)}^{(i,j)}}\}_{j=1, \dots, N_{\xi}^{(i)}}$ les ensembles des poids, des moyennes et des matrices de covariance des mélanges de gaussiennes.

La démarche présentée ici reprend une organisation en deux temps avec une étape de prédiction et une étape de mise à jour. La première est décrite dans la partie suivante.

4.2.2 Étape de prédiction

Comme décrit dans le chapitre précédent, lors de l'étape de prédiction, il s'agit de faire évoluer l'ensemble des variables aléatoires pour représenter la densité multi-groupes multi-cibles prédite. Il convient théoriquement d'envisager deux types d'évènements pour des groupes présents à l'instant k . Ils

sont soit issus d'une naissance, soit issus de la survie d'un groupe existant. Dans la mise en application proposée ici, ces deux événements sont traités de manière différenciée. En effet, les hypothèses de naissance de groupes sont gérées en fin de récursion, à partir des mesures non-utilisées pour l'estimation de l'instant courant. De ce fait, l'étape de prédiction ne concerne ici que le volet "survie" matérialisé par l'indice S . Pour une cible donnée, la probabilité correspondante à cet événement est supposée être une constante $p_S^{(i)}$. L'expression de la probabilité de survie du groupe ℓ_i définie dans (3.22) est rappelée dans l'équation suivante :

$$p_{S_g,k}^{(\ell_i)}(X_{k-1,i}) = 1 - \left(1 - p_S^{(\ell_i)}\right)^{m_i}, \quad (4.8)$$

où m_i est le cardinal de $X_{k-1,i}$, c'est-à-dire $m_i = |X_{k-1,i}|$.

Nous commençons par évaluer la probabilité d'existence des groupes. Pour chaque groupe ℓ_i , le terme de normalisation $\eta_S(\ell_i)$ se construit à partir de son expression (3.23) en utilisant (4.3) et (4.8) comme suit :

$$\begin{aligned} \eta_S(\ell_i) &\stackrel{(3.23)}{=} \iint \pi_{(-)}^{(\ell_i)}(X_{k-1,i}|\xi_{k-1,i}) p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1,i}) p_{S_g,k}^{(\ell_i)}(X_{k-1,i}) \delta X_{k-1,i} d\xi_{k-1,i}, & (4.9) \\ &\stackrel{(4.8)}{=} \iint \pi_{(-)}^{(\ell_i)}(X_{k-1,i}|\xi_{k-1,i}) p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1,i}) \left(1 - \left(1 - p_S^{(\ell_i)}\right)^{m_i}\right) \delta X_{k-1,i} d\xi_{k-1,i}, \\ &= \int \pi_{(-)}^{(\ell_i)}(\{\emptyset\}|\xi_{k-1,i}) p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1,i}) d\xi_{k-1,i} \\ &+ \int \left[\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \int \pi_{(-)}^{(\ell_i)}(\{\mathbf{x}_{k-1,i,1}, \dots, \mathbf{x}_{k-1,i,m}\}|\xi_{k-1,i}) \left(1 - \left(1 - p_S^{(\ell_i)}\right)^m\right) d\mathbf{x}_{k-1,i,1} \dots d\mathbf{x}_{k-1,i,m} \right] \\ &\times p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1,i}) d\xi_{k-1,i}, \\ &= \int e^{-\lambda_{(-)}^{(i,j)}} p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1,i}) d\xi_{k-1,i} + \int \left[\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\left(1 - \left(1 - p_S^{(\ell_i)}\right)^m\right) e^{-\lambda_{(-)}^{(i,j)}} \lambda_{(-)}^{(i,j)m}}{m!} \right] p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1,i}) d\xi_{k-1,i}, \\ &\stackrel{(4.3)}{=} \sum_{j=1}^{N_\xi^{(i)}} e^{-\lambda_{(-)}^{(i,j)}} \omega_{\xi,(-)}^{(i,j)} + \sum_{j=1}^{N_\xi^{(i)}} \left[\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\left(1 - \left(1 - p_S^{(\ell_i)}\right)^m\right) e^{-\lambda_{(-)}^{(i,j)}} \lambda_{(-)}^{(i,j)m}}{m!} \right] \omega_{\xi,(-)}^{(i,j)}, \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{N_\xi^{(i)}} \omega_{\xi,(-)}^{(i,j)} \left[e^{-\lambda_{(-)}^{(i,j)}} - e^{-p_S^{(i)} \lambda_{(-)}^{(i,j)}} \right]. \end{aligned}$$

Il est important de noter que la valeur des $\{\lambda_{(-)}^{(i,j)}\}_{j=1,\dots,N_\xi^{(i)}}$ est accessible par l'intermédiaire de leur approximation (4.6).

Maintenant que l'expression du terme de normalisation est disponible, on déduit celle de la probabilité d'existence des groupes survivants à partir de (3.24) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} s_{(+),S}^{(\ell_i)} &= s_{(-)}^{(\ell_i)} \iint \pi_{(-)}^{(\ell_i)}(X_{k-1,i}|\xi_{k-1,i}) p_{(-)}^{(\ell_i)}(\xi_{k-1,i}) p_{S_g,k}^{(\ell_i)}(X_{k-1,i}) \delta X_{k-1,i} d\xi_{k-1,i}, & (4.10) \\ &\stackrel{(4.9)}{=} s_{(-)}^{(\ell_i)} \left(1 + \sum_{j=1}^{N_\xi^{(i)}} \omega_{\xi,(-)}^{(i,j)} \left[e^{-\lambda_{(-)}^{(i,j)}} - e^{-p_S^{(i)} \lambda_{(-)}^{(i,j)}} \right] \right) = s_{(-)}^{(\ell_i)} \eta_S(\ell_i). \end{aligned}$$

Du fait de la structure hiérarchique multi-groupes multi-cibles, les états des cibles d'un groupe sont définis conditionnellement à l'état de ce groupe. Ainsi, il convient d'abord de tirer les particules $\{\xi_k^{(i,j)}\}_{j=1,\dots,N_\xi^{(i)}}$. Pour $j = 1, \dots, N_\xi^{(i)}$:

$$\xi_k^{(i,j)} \sim \mathcal{L}^{(\ell_i)}(\cdot | \xi_{k-1,i}^{(i,j)}), \quad (4.11)$$

où $\mathcal{L}^{(\ell_i)}(\cdot|\xi_{k-1}^{(i,j)})$ est ici une notation générique pour la loi d'échantillonnage. Son expression est déduite du modèle d'évolution de l'état de groupe. Dans le cas d'une loi de propagation *a priori*, les poids des particules restent inchangés, ce qui donne :

$$\omega_{\xi,(+)}^{(i,j)} = \omega_{\xi,(-)}^{(i,j)}. \quad (4.12)$$

La loi sur l'état de groupe prédite est représentée par l'approximation suivante :

$$p_{(+)}^{(\ell_i)}(\xi_{k,i}) = \sum_{j=1}^{N_{\xi}^{(i)}} \omega_{\xi,(+)}^{(i,j)} \delta_{\xi_k^{(i,j)}}(\xi_{k,i}). \quad (4.13)$$

La suite de l'étape de prédiction consiste à approximer les densités multi-cibles $\pi_{(+)}^{(\ell_i)}(X_{k,i}|\xi_{k,i})$ pour chaque groupe ℓ_i . L'hypothèse Poisson sur les EFAs multi-cibles conduit à conserver à l'instant k la relation entre la densité multi-objets et une fonction intensité comme dans (4.4). L'approximation passe par l'intermédiaire d'un mélange de gaussiennes (4.5)-(4.6). La prédiction suit donc celle d'un filtre PHD par mélange de gaussiennes [Bea12]. Conformément au modèle hiérarchique proposé, la fonction de transition d'état dépend de l'état de groupe. Dans notre cas, elle se définit conditionnellement à chaque particule :

$$f_k^{(\ell_i)}(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \xi_k^{(i,j)}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; F_k^{(i,j)}\mathbf{x}_{k-1}, Q_k^{(i,j)}). \quad (4.14)$$

Le conditionnement vis-à-vis de la particule $\xi_k^{(i,j)}$ est matérialisée par la définition des matrices particulières du modèle d'état des cibles, à savoir $F_k^{(i,j)}$ et $Q_k^{(i,j)}$, qui intègrent la dépendance à l'état de groupe. Grâce à elles, les paramètres de chaque gaussienne (i, j, ι) du mélange sont prédits. Le premier d'entre eux est la moyenne. Elle vérifie :

$$m_{(+)}^{(i,j,\iota)} = F_k^{(i,j)} m_{(-)}^{(i,j,\iota)}. \quad (4.15)$$

Le deuxième est la matrice de covariance de l'erreur sur l'état :

$$P_{(+)}^{(i,j,\iota)} = Q_k^{(i,j)} + F_k^{(i,j)} P_{(-)}^{(i,j,\iota)} \left(F_k^{(i,j)}\right)^T. \quad (4.16)$$

Enfin, le troisième est le poids associé à chaque gaussienne :

$$\omega_{(+)}^{(i,j,\iota)} = p_S^{(\ell_i)} \omega_{(-)}^{(i,j,\iota)}. \quad (4.17)$$

À partir de ces poids, on exprime le nombre moyen de cibles dans un groupe ℓ_i selon une hypothèse d'état de groupe j comme suit :

$$\lambda_{(+)}^{(i,j)} = \sum_{\iota=1}^{J_{(+)}^{(i,j)}} \omega_{(+)}^{(i,j,\iota)}, \quad (4.18)$$

où $J_{(+)}^{(i,j)} = J_{(-)}^{(i,j)}$ puisqu'aucune naissance de cibles n'est envisagée à ce niveau-là.

Tous ces paramètres permettent de reconstruire la densité multi-objets de chaque groupe ℓ_i :

$$\begin{aligned} \pi_{(+),S}^{(\ell_i)}(X_{k,i}|\xi_{k,i}) p_{(+)}^{(\ell_i)}(\xi_{k,i}) &= \pi_{(+),S}^{(\ell_i)}(X_{k,i}|\xi_{k,i}) \sum_{j=1}^{N_{\xi}^{(i)}} \omega_{\xi,(+)}^{(i,j)} \delta_{\xi_k^{(i,j)}}(\xi_{k,i}), \\ &= \sum_{j=1}^{N_{\xi}^{(i)}} \left[e^{-\lambda_{(+)}^{(i,j)}} \prod_{\mathbf{x}_k \in X_{k,i}} D_{(+)}^{(i,j)}(\mathbf{x}_k|\xi_k^{(i,j)}) \right] \omega_{\xi,(+)}^{(i,j)} \delta_{\xi_k^{(i,j)}}(\xi_{k,i}), \\ &= \sum_{j=1}^{N_{\xi}^{(i)}} \left[e^{-\lambda_{(+)}^{(i,j)}} \prod_{\mathbf{x}_k \in X_{k,i}} \left(\sum_{\iota=1}^{J_{(+)}^{(i,j)}} \omega_{(+)}^{(i,j,\iota)} \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; m_{(+)}^{(i,j,\iota)}, P_{(+)}^{(i,j,\iota)}) \right) \right] \omega_{\xi,(+)}^{(i,j)} \delta_{\xi_k^{(i,j)}}(\xi_{k,i}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

À partir du jeu d'étiquettes prédites $\mathbb{L}_{(+)}$, il s'agit maintenant d'établir l'ensemble des hypothèses à considérer au niveau de la mise à jour. À l'instant k , le groupe représenté par l'EFA Bernoulli étiqueté ℓ_i peut être soit présent soit absent. Ainsi, l'ensemble des hypothèses est noté $\mathcal{F}(\mathbb{L}_{(+)})$ et rassemble les groupes supposés présents. Par exemple, si les groupes issus de la prédiction sont nommés ℓ_1 , ℓ_2 et ℓ_3 alors les éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{L}_{(+)})$, notés $\tilde{I}_{(+)}$, sont les suivants : $\{\ell_1\}$, $\{\ell_2\}$, $\{\ell_3\}$, $\{\ell_1, \ell_2\}$, $\{\ell_1, \ell_3\}$, $\{\ell_2, \ell_3\}$ et $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$.

La mise en œuvre de l'étape de prédiction se conclut par l'évaluation des poids *a priori* (3.26) du niveau LMB pour chaque configuration $\tilde{I}_{(+)}$. Les naissances de groupes apparaissent en fin de récursion et ne sont donc pas considérées ici. L'expression des poids *a priori* reprend (3.28) et devient :

$$w_{(+)}(\tilde{I}_{(+)}) = [\eta_S]^{\tilde{I}_{(+)}} \sum_{I \supseteq \tilde{I}_{(+)}} \left([1 - \eta_S]^{I - \tilde{I}_{(+)}} \left[\prod_{\ell_i \in \mathbb{L}_{(+)}} \left(1 - s_{(+)}^{(\ell_i)} \right) \prod_{\ell \in I} \frac{\mathbb{1}(\ell) s_{(+)}^{(\ell)}}{1 - s_{(+)}^{(\ell)}} \right] \right). \quad (4.20)$$

Dans cette partie dédiée à la mise en œuvre, l'étape de mise à jour ne s'enchaîne pas directement après l'étape de prédiction. En effet, une étape d'association entre des groupes de cibles et des groupes de mesures est d'abord appliquée.

4.2.3 Association des groupes de cibles aux groupes de mesures

Théoriquement, avant d'envisager l'étape de mise à jour, on considère l'ensemble des mesures disponibles à l'instant courant :

$$Z_k = \{\mathbf{z}_{k,1}, \dots, \mathbf{z}_{k,p}\}. \quad (4.21)$$

À partir de Z_k , il est possible de construire l'ensemble des sous-groupes de mesures puis d'établir l'ensemble des associations valides désignées par un *mapping* $\tilde{\Theta}_{\tilde{I}_{(+)}}$. La combinatoire de ce genre d'opération est élevée et pour en limiter les effets, une étape de *gating* est proposée dans cette mise en œuvre du filtre LMB/PHD. Elle s'organise en deux étapes. La première consiste à vérifier l'associabilité de chaque cible par rapport à chaque mesure, c'est-à-dire à identifier quelles mesures sont susceptibles de mettre à jour quelles cibles. Cela dépend du modèle de mesure adopté.

Étant donné la représentation au niveau cibles du filtre, l'associabilité concerne chaque gaussienne des mélanges de chaque groupe. L'étape de *gating* est fondée sur la comparaison d'une distance de Mahalanobis avec une valeur de seuil pour chaque mesure $l = 1, \dots, p$ comme suit :

$$\left(\mathbf{z}_{k,l} - h_k \left(m_{(+)}^{(i,j,\ell)} \right) \right)^T S_k^{(i,j,\ell)^{-1}} \left(\mathbf{z}_{k,l} - h_k \left(m_{(+)}^{(i,j,\ell)} \right) \right) < \gamma_g, \quad (4.22)$$

où $\gamma_g = F_{\chi_2^2}^{-1}(p_g)$ est le seuil déduit de la fonction de répartition inverse d'une loi du χ^2 , ici à deux degrés de liberté. La probabilité de *gating* p_g est fixée à 0,9973. La matrice d'innovation $S^{(i,j,\ell)}$ est calculée pour chaque triplet (i, j, ℓ) grâce à :

$$S^{(i,j,\ell)} = H_k^{(i,j,\ell)} P_{(+)}^{(i,j,\ell)} H_k^{(i,j,\ell)T} + R, \quad (4.23)$$

où $H_k^{(i,j,\ell)}$ est la matrice Jacobienne de h_k calculée en $m_{(+)}^{(i,j,\ell)}$ et R est la matrice de covariance du bruit de mesure.

On définit ensuite $Z_k^{(i)}$ l'ensemble des mesures disponibles pour le groupe ℓ_i qui contient toutes les mesures vérifiant (4.22). Les *mapping* au niveau des groupes comme au niveau des cibles tiennent compte de l'associabilité et ne considèrent pas les configurations improbables. Cela permet de réduire le nombre de configurations à envisager.

De plus au niveau des groupes, le *mapping* consiste pour chaque groupe ℓ_i à sélectionner un sous-groupe de mesures $\mathcal{F}(Z_k^{(i)})$ sachant qu'aucune mesure ne peut être contenue dans deux sous-groupes

de mesures simultanément pour deux groupes de cibles différents.

L'étape de mise à jour consiste alors à confronter les hypothèses de groupes à leurs hypothèses d'association et d'en déduire des vraisemblances. Ces dernières permettent ensuite de réévaluer les paramètres de la densité multi-groupes multi-cibles.

4.2.4 Étape de mise à jour

L'étape de mise à jour est construite sur la correction des éléments prédits par des termes de vraisemblance. La correction des poids des hypothèses des groupes présents (4.20) est décrite par (3.35) et nécessite dévaluer (3.37) dont l'expression adaptée à notre mise en œuvre est la suivante :

$$\eta_{Z_k}^{(\tilde{\theta})}(\ell_i) = \sum_{j=1}^{N_{\xi}^{(i)}} \left[\omega_{\xi, (+)}^{(i,j)} \psi_{Z_k} \left(X_{k,i}^{(j)}, \xi_k^{(i,j)}; \tilde{\theta} \right) e^{-\lambda_{(+)}^{(i,j)}} \times \prod_{\mathbf{x}_k \in X_{k,i}^{(j)}} \left(\sum_{\iota=1}^{J_{(+)}^{(i,j)}} \omega_{(+)}^{(i,j,\iota)} \mathcal{N} \left(\mathbf{x}_k; m_{(+)}^{(i,j,\iota)}, P_{(+)}^{(i,j,\iota)} \right) \right) \right], \quad (4.24)$$

où $\tilde{\theta}$ est une hypothèse d'association donnée. De plus, l'évaluation de la vraisemblance multi-objets $\psi_{Z_k} \left(X_{k,i}^{(j)}, \xi_k^{(i,j)}; \tilde{\theta} \right)$ dont l'expression est donnée dans (3.40) requiert de définir un EFA $X_{k,i}^{(j)}$ multi-cibles prédit pour chaque hypothèse d'état de groupe. Nous proposons ici de constituer les $X_{k,i}^{(j)}$ en se fondant sur l'extraction des pistes des mélanges de gaussiennes comme suit :

$$X_{k,i}^{(j)} = \left\{ m_{(+)}^{(i,j,\iota)} \mid \omega_{(+)}^{(i,j,\iota)} > \rho_{PHD} \right\}_{\iota=1, \dots, J_{(+)}^{(i,j)}}, \quad (4.25)$$

où ρ_{PHD} est un seuil au arbitraire, généralement proche de un, signifiant qu'une gaussienne représente au moins une piste. Dans le cas où $\omega_{(+)}^{(i,j,\iota)} > 1$, le nombre moyen de cibles associé à la gaussienne ι est supérieur à un et il convient de dupliquer $m_{(+)}^{(i,j,\iota)}$ au sein de $X_{k,i}^{(j)}$ en fonction de l'entier dont $\omega_{(+)}^{(i,j,\iota)}$ est le plus proche.

En combinant (4.20) et (4.24) les poids corrigés sont calculés selon (3.35). Ils permettent de déduire la probabilité d'existence de chaque groupe d'après (3.43) que l'on rappelle :

$$s_{(*)}^{(\ell_i)} = \sum_{(\tilde{I}_{(+)}, \tilde{\theta}) \in \mathcal{F}(\mathbb{L}_{(+)}) \times \tilde{\Theta}_{\tilde{I}_{(+)}}} w_{Z_k}^{(\tilde{I}_{(+)}, \tilde{\theta})} \mathbb{1}_{\tilde{I}_{(+)}}(\ell_i). \quad (4.26)$$

La suite de l'étape de mise à jour consiste à corriger les approximations des lois spatiales multi-objets des éléments Bernoulli indépendants. Cependant, les calculs relatifs à (3.44) et (3.45) doivent être menés en tenant compte des mises à jour au niveau multi-cibles.

La mise à jour du niveau multi-cibles concerne :

- la loi sur l'état de groupe,
- les densités conditionnelles sur l'état multi-cibles.

Concernant ces dernières, la mise à jour se fonde sur la correction des fonctions intensité des mélanges de gaussiennes à la manière de [Bea12].

Pour ce faire, on commence par définir quelques éléments. Le premier d'entre eux est la pseudo-mesure associée à la moyenne $m_{(+)}^{(i,j,\iota)}$:

$$\epsilon_{(+)}^{(i,j,\iota)} = h_k^{(i)} \left(m_{(+)}^{(i,j,\iota)} \right). \quad (4.27)$$

Le deuxième élément est le gain de filtrage $K^{(i,j,\iota)}$:

$$K_k^{(i,j,\iota)} = P_{(+)}^{(i,j,\iota)} H_k^{(i,j,\iota)T} S_k^{(i,j,\iota)-1}. \quad (4.28)$$

Et enfin, la matrice de covariance de l'erreur *a posteriori* anticipée (*-) :

$$P_{(*)}^{(i,j,\ell)} = \left[I - K_k^{(i,j,\ell)} H_k^{(i,j,\ell)} \right] P_{(+)}^{(i,j,\ell)}. \quad (4.29)$$

Une remarque importante concerne l'étape de *gating*. En effet, les éléments nécessaires à la mise à jour définis dans (4.27) - (4.29) sont précisément ceux utilisés dans (4.22) et (4.23) pour réaliser le *gating*. Sous réserve de pouvoir conserver ces éléments en mémoire, l'étape de *gating* permet de réduire la combinatoire des hypothèses d'association à considérer sans augmenter le coût calculatoire de l'ensemble du traitement puisqu'il n'utilise par ailleurs que des éléments nécessaires au filtrage.

La mise à jour des paramètres des mélanges de gaussiennes est menée selon les hypothèses d'une non-détection puis d'une détection. Dans le cas d'une non-détection, on obtient :

$$m_{(*)}^{(i,j,\ell)} = m_{(+)}^{(i,j,\ell)}, \quad (4.30)$$

$$P_{(*)}^{(i,j,\ell)} = P_{(+)}^{(i,j,\ell)}, \quad (4.31)$$

$$\omega_{(*)}^{(i,j,\ell)} = (1 - p_D^{(\ell)}) \omega_{(+)}^{(i,j,\ell)}. \quad (4.32)$$

Dans le cas d'une détection, il convient d'envisager toutes les mesures disponibles $\mathbf{z}_{k,l}$ de $Z_{\hat{\theta}^{(i),k}}^{(i)}$ comme suit :

$$m_{(*)}^{(i,j,(l-1)J_{(+)}^{(i,j)} + \ell)} = m_{(+)}^{(i,j,\ell)} + K_k^{(i,j,\ell)} (\mathbf{z}_{k,l} - \epsilon_{(+)}^{(i,j,\ell)}), \quad (4.33)$$

$$P_{(*)}^{(i,j,(l-1)J_{(+)}^{(i,j)} + \ell)} = P_{(*)}^{(i,j,\ell)}, \quad (4.34)$$

$$\omega_{(*)}^{(i,j,(l-1)J_{(+)}^{(i,j)} + \ell)} = p_D^{(i)} \omega_{(+)}^{(i,j,\ell)} \mathcal{N}(\mathbf{z}_{k,l}; \epsilon_{(+)}^{(i,j,\ell)}, S_k^{(i,j,\ell)}). \quad (4.35)$$

Sachant qu'une mesure $\mathbf{z}_{k,l}$ n'est censée provenir que d'une seule cible, on procède à la normalisation des poids de la manière suivante :

$$\omega_{(*)}^{(i,j,lJ_{(+)}^{(i,j)} + \ell)} = \frac{\omega_{(*)}^{(i,j,lJ_{(+)}^{(i,j)} + \ell)}}{\lambda_f \mathcal{U}_f(\mathbf{z}_{k,l}) + \sum_{k=1}^{J_{(+)}^{(i,j)}} \omega_{(*)}^{(i,j,lJ_{(+)}^{(i,j)} + \ell)}}. \quad (4.36)$$

Le nombre de gaussiennes dans le mélange croît en fonction du nombre de mesures selon :

$$J_{(*)}^{(i,j)} = |Z_k^{(i)}| J_{(+)}^{(i,j)} + J_{(+)}^{(i,j)}. \quad (4.37)$$

Pour éviter l'augmentation exponentielle de la complexité calculatoire, le nombre de gaussiennes est réduit par une opération de fusion pour les gaussiennes proches entre elles et d'élagage pour les gaussiennes de poids faibles qui sont simplement supprimées. Dans ce dernier cas, cela permet de tenir compte du cas de figure où une cible quitte le groupe.

La mise à jour de la loi sur l'état de groupe décrite dans (3.44) passe par la mise à jour de ses poids comme suit :

$$\omega_{\xi,(*)}^{(i,j)} \propto \omega_{\xi,(+)}^{(i,j)} \sum_{(\tilde{I}_{(+),\tilde{\theta}}) \in \mathcal{F}(\mathbb{L}_{(+)} \times \tilde{\Theta}_{\tilde{I}_{(+)}})} \left[\psi_{Z_k} \left(X_{k,i}^{(j)}, \xi_k^{(i,j)}; \tilde{\theta} \right) e^{-\lambda_{(+)}^{(i,j)}} \times \prod_{\mathbf{x}_k \in X_{k,i}^{(j)}} \left(\sum_{\ell=1}^{J_{(+)}^{(i,j)}} \omega_{(+)}^{(i,j,\ell)} \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; m_{(+)}^{(i,j,\ell)}, P_{(+)}^{(i,j,\ell)}) \right) \right]. \quad (4.38)$$

Cette dernière opération conclut l'étape de mise à jour. Cependant, la récursion n'est pas tout à fait terminée. En effet, il reste à considérer les éventuelles suppressions, fusions et naissances des groupes. Ces mécanismes sont l'objet du paragraphe suivant.

4.2.5 Gestion des suppressions, fusions et naissances des groupes

Ce paragraphe a pour but de décrire succinctement et de manière générique les mécanismes de suppressions, fusions et naissances des groupes.

Concernant le mécanisme de suppression, on dispose pour chaque groupe du nombre moyen de cibles qui le compose à l'issue de la récursion. Il se calcule en combinant les hypothèses d'états de ce groupe comme suit :

$$\lambda_{(*)}^{(i)} \approx \sum_{j=1}^{N_{\xi}^{(i)}} \omega_{\xi, (*)}^{(i,j)} \lambda_{(*)}^{(i,j)} \approx \sum_{j=1}^{N_{\xi}^{(i)}} \omega_{\xi, (*)}^{(i,j)} \sum_{\iota=1}^{J_{(*)}^{(i,j)}} \omega_{(*)}^{(i,j,\iota)}. \quad (4.39)$$

Dès que la valeur de $\lambda_{(*)}^{(i)}$ est inférieure à un certain seuil, le groupe est considéré comme inexistant. Dans notre cas, nous avons opté pour un seuil de 0.4. Il convient d'être vigilant sur la valeur de ce seuil et de l'adapter en fonction de la probabilité de détection du scénario envisagé.

Concernant les fusions, après une étude statistique entre les groupes de même type, si deux lois sur les états de deux groupes sont proches, alors ils sont rassemblés en un seul. Les particules des deux groupes sont re-échantillonnées pour n'en conserver que $N_{\xi}^{(i)}$. Les fonctions intensités correspondantes sont conservées. Par ce mécanisme de fusion, des cibles ou un groupe de cibles peuvent rejoindre un autre groupe existant. Par commodité, l'identifiant de groupe conservé lors d'une fusion est celui apparu en premier.

Concernant les naissances des groupes, elles reposent sur les naissances des cibles. En effet à l'issue d'une récursion, chaque mesure non-associable est potentiellement une cible nouvellement présente dans la scène. De ce fait, pour chacune d'entre elles, un groupe contenant une unique piste est créé. Dans les premiers instants, cette nouvelle piste est mise à jour grâce à un filtre de type EKF fonctionnant avec des modèles multiples interactifs. Selon la cohérence cinématique des mesures disponibles, il est possible d'éliminer une grande partie des initialisations sur des fausses alarmes. Dans le cas où la piste est alimentée par plusieurs mesures successives, le filtre converge et permet d'initialiser une loi sur l'état de groupe. Cette stratégie est requise dès que l'état de groupe n'est pas directement observable. Dans le cas contraire, la loi sur l'état de groupe peut directement être représentée par un nuage de particules.

Dans tous les cas, la densité *a posteriori* ou la fonction intensité de l'état de la cible est supposée être une gaussienne centrée sur la mesure de position dont les coordonnées sont reconverties dans l'espace d'état cartésien et dont la matrice de covariance reste à initialiser. Pour ce faire, on tient notamment compte du bruit de mesure et on s'appuie sur une conversion adaptée [Ler93].

Une fois le groupe représenté par une loi sur son état, il devient éligible à la fusion avec les groupes existants. C'est grâce à ce mécanisme d'agrégation que les groupes se constituent petit à petit.

La réactivité de ce mécanisme est donc dépendante de la vitesse de convergence du filtrage de la piste individuelle. Aussi, lorsqu'une cible quitte un groupe pour en rejoindre un autre, la continuité de la piste est rompue et doit passer par la naissance d'un nouveau groupe avant fusion. Cette solution présente donc l'inconvénient de ne pas permettre le changement direct de groupe à groupe.

Dans le paragraphe suivant, nous nous intéressons au cas d'une application de cibles coordonnées en vitesse.

4.3 Simulations

Dans cette partie, nous étudions le fonctionnement de l'algorithme LMB/PHD sur des cas d'école. Dans un premier paragraphe, le modèle générateur permettant de simuler les trajectoires des cibles est

décrit. Il est fondé sur le cas de cibles coordonnées en vitesse et comprend la description de l'évolution des états des groupes et celle des états des cibles. Dans un deuxième paragraphe, les protocoles de simulation spécifient les trois scénarios considérés, les jeux de paramètres de génération des données et ceux employés pour effectuer le pistage. Enfin, le dernier paragraphe présente des résultats de simulation.

4.3.1 Cas d'application : cibles coordonnées en vitesse

Dans ce type de scénario, toutes les cibles appartenant à un même groupe ont des vitesses coordonnées. Pour une cible donnée, cela se traduit par le fait que sa vitesse est en grande partie caractérisée par le mouvement du groupe bien qu'elle puisse conserver une capacité de manœuvre propre. La surface de surveillance est considérée être un plan en deux dimensions et l'état du groupe étiqueté ℓ_i est ici une vitesse de groupe notée :

$$\tilde{\mathbf{v}}_{k,i} = [v_{k,i}^{(x)}, v_{k,i}^{(y)}]^T, \quad (4.40)$$

où $v_{k,i}^{(x)}$ est la coordonnée de vitesse en abscisse et $v_{k,i}^{(y)}$ celle en ordonnée. L'état de groupe $\xi_{k,i}$ de l'EFA hiérarchique multi-groupes multi-cibles est uniquement composé de $\tilde{\mathbf{v}}_{k,i}$. La composante variable de la vitesse propre à chaque cible par rapport à la vitesse de groupe est notée $\beta_{k,i,j}$. Elle est définie par :

$$\beta_{k,i,j} = [\beta_{k,i,j}^{(x)}, \beta_{k,i,j}^{(y)}]^T. \quad (4.41)$$

Les vecteurs d'état au niveau des cibles sont de la forme :

$$\mathbf{x}_{k,i,j} = [x_{k,i,j}, \dot{x}_{k,i,j}, y_{k,i,j}, \dot{y}_{k,i,j}]^T. \quad (4.42)$$

L'équation d'état régissant l'évolution d'un vecteur d'état est dépendante de la vitesse de groupe (4.40) et de la variation propre (4.41). Elle est définie avec le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x_{k,i,j} = x_{k-1,i,j} + (v_{k-1,i}^{(x)} + \beta_{k-1,i,j}^{(x)})T + u_{k,i,j}^{(x)}, \\ \dot{x}_{k,i,j} = v_{k,i}^{(x)} + \beta_{k,i,j}^{(x)}, \\ y_{k,i,j} = y_{k-1,i,j} + (v_{k-1,i}^{(y)} + \beta_{k-1,i,j}^{(y)})T + u_{k,i,j}^{(y)}, \\ \dot{y}_{k,i,j} = v_{k,i}^{(y)} + \beta_{k,i,j}^{(y)}. \end{cases} \quad (4.43)$$

où $u_{k,i,j}^{(x)}$ et $u_{k,i,j}^{(y)}$ sont les deux composantes d'un bruit blanc gaussien centré, noté $\mathbf{u}_{k,i,j} = [u_{k,i,j}^{(x)}, u_{k,i,j}^{(y)}]^T$, de matrice de covariance $Q_{k,u}$. Les composantes en vitesse ont chacune leur marche aléatoire indépendante que l'on définit de manière générique comme suit :

$$\begin{cases} \beta_{k,i,j}^{(x)} = f_k^{(\beta)}(\beta_{k-1,i,j}^{(x)}, w_{k,i,j}^{(x)}), \\ v_{k,i}^{(x)} = f_k^{(v)}(v_{k-1,i}^{(x)}, q_{k,i}^{(x)}), \\ \beta_{k,i,j}^{(y)} = f_k^{(\beta)}(\beta_{k-1,i,j}^{(y)}, w_{k,i,j}^{(y)}), \\ v_{k,i}^{(y)} = f_k^{(v)}(v_{k-1,i}^{(y)}, q_{k,i}^{(y)}), \end{cases} \quad (4.44)$$

où $\mathbf{w}_{k,i,j} = [w_{k,i,j}^{(x)}, w_{k,i,j}^{(y)}]^T$ et $\mathbf{q}_{k,i} = [q_{k,i}^{(x)}, q_{k,i}^{(y)}]^T$ sont deux bruits blancs gaussiens centrés de matrices de covariance respectives $Q_{k,w}$ et $Q_{k,q}$. Tous ces bruits $\mathbf{u}_{k,i,j}$, $\mathbf{w}_{k,i,j}$ et $\mathbf{q}_{k,i}$ sont décorrélés.

Cette évolution générique se décline ici dans la version spécifique suivante :

$$\begin{cases} \beta_{k,i,j}^{(x)} = \beta_{k-1,i,j}^{(x)} + w_{k,i,j}^{(x)}, \\ v_{k,i}^{(x)} = v_{k-1,i}^{(x)} + q_{k,i}^{(x)}, \\ \beta_{k,i,j}^{(y)} = \beta_{k-1,i,j}^{(y)} + w_{k,i,j}^{(y)}, \\ v_{k,i}^{(y)} = v_{k-1,i}^{(y)} + q_{k,i}^{(y)}. \end{cases} \quad (4.45)$$

Une fois les équations des états définies, le modèle génératif est complété par des probabilités de naissance et de survie des cibles. Dans notre cas, les positions et les vitesses de naissance sont tirées uniformément dans la région de surveillance et dans le domaine des vitesses considérées. Cependant, il est également possible de sélectionner des positions et des vitesses initiales selon des critères arbitraires pour favoriser des naissances pertinentes : autour d'une zone de stationnement par exemple. La structure hiérarchique de l'EFA multi-groupes multi-cibles nécessite de définir le même type de probabilités pour les naissances et les suppressions de groupes. Une réalisation d'un scénario de cibles coordonnées en vitesse est présentée sur la figure 4.1.

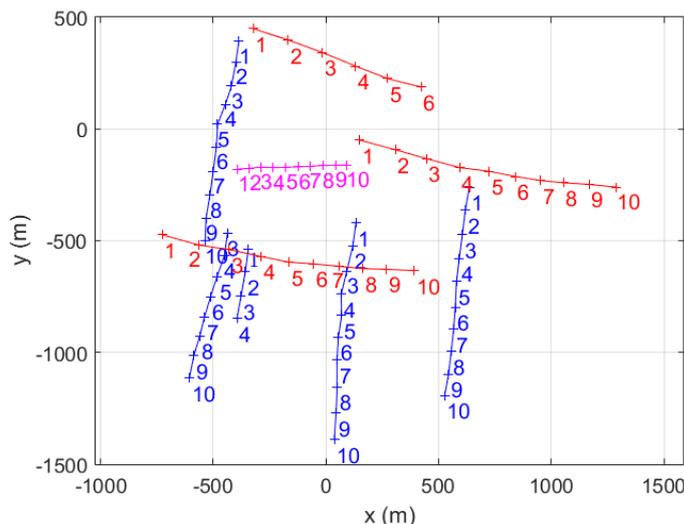


FIGURE 4.1 – Réalisation du modèle génératif hiérarchique où chaque couleur permet d'identifier un groupe et les positions des cibles sont représentées par des croix. L'instant correspondant est indiqué par le nombre le plus proche.

Dans le paragraphe suivant, nous détaillons les protocoles de simulation sélectionnés pour étudier le filtre LMB/PHD.

4.3.2 Protocoles de simulations

Nous considérons ici deux scénarios. Le premier fait intervenir deux groupes de deux cibles et permet de valider les mécanismes de l'algorithme LMB/PHD, notamment tous les aspects de constitution et d'évolution des compositions des groupes. Dans ce scénario, les dynamiques propres des cibles sont du même ordre de grandeur que celles des groupes. Dans le second scénario, nous considérons le cas où les vitesses imposées par les groupes deviennent prédominantes sur les capacités de manœuvre propres des cibles.

Les deux scénarios durent 100 scans avec une période fixée à $T = 2$ s. Les mesures radar ne comportent que des mesures en distance et en azimuth. Pour rappel, elles sont reliées au vecteur d'état $\mathbf{x}_{k,i,j} = [x_{k,i,j}, \dot{x}_{k,i,j}, y_{k,i,j}, \dot{y}_{k,i,j}]^T$ de la $j^{\text{ème}}$ cible du $i^{\text{ème}}$ groupe grâce à la fonction de mesure suivante :

$$h_k(\mathbf{x}_{k,i,j}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\left(x_{k,i,j} - x_k^{(r)}\right)^2 + \left(y_{k,i,j} - y_k^{(r)}\right)^2} \\ \arctan\left(\frac{y_{k,i,j} - y_k^{(r)}}{x_{k,i,j} - x_k^{(r)}}\right) \end{bmatrix}, \quad (4.46)$$

où $(x_k^{(r)}, y_k^{(r)})$ sont les coordonnées du radar dans le plan 2D. Le bruit de mesure venant s'ajouter à cette transformation géométrique est un bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance R définie

par :

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

où $\sigma_r = 20$ m est l'écart-type en distance du bruit de mesure tandis que $\sigma_\theta = 4.10^{-3}$ rad est l'écart-type en azimut.

La probabilité pour chaque cible de générer une détection à un instant donné est $p_D = 0.98$. Le taux de fausses alarmes est fixé à 10^{-6} FA.m⁻².

Lorsque des moyennes sont calculées, elles le sont sur 100 réalisations de simulations de Monte Carlo. Les paramètres dynamiques des cibles et leur configuration sont détaillés selon chaque scénario.

Concernant les deux scénarios de simulation, ils sont construits sur une base commune. Il s'agit à chaque fois de deux groupes de deux cibles. Selon les variations aléatoires liées aux tirages, deux cibles de deux groupes différents sont susceptibles de se croiser entre les instants $k = 55$ et $k = 65$. Cela permet d'évaluer le comportement de l'algorithme face à une ambiguïté multi-cibles liée à la proximité entre deux objets. Pour le LMB/PHD, c'est aussi l'occasion d'éprouver le système d'association des mesures aux différents groupes. Les initialisations des états des groupes du modèle génératif sont les suivants :

$$\xi_{k=0,i=1} = [10, -3]^T, \quad (4.48)$$

$$\xi_{k=0,i=2} = [-3, 10]^T, \quad (4.49)$$

où les composantes des $\xi_{i,k=0}$ sont exprimées en m.s⁻¹.

Dans (4.45), les équations introduisent des bruits d'évolution pour les vitesses de groupe et pour les variations propres des cibles. Les écart-types des processus générateurs sont dépendants des scénarios et sont rassemblés dans le tableau 4.1.

Les filtres LMB/PHD fonctionnent avec des dynamiques identiques à celles de la génération des données. Sur les phases d'initialisation, les dynamiques de filtrage sont ajustées pour tenir compte de la variance des vitesses des groupes et des cibles. Leur variance globale vaut : $\sigma_{q_i}^2 + \sigma_{w_{i,j}}^2$.

Scénario	Écart-type σ_{q_i}	Écart-type $\sigma_{w_{i,j}}$
n° 1	0.05 m.s ^{-$\frac{3}{2}$}	0.05 m.s ^{-$\frac{3}{2}$}
n° 2	0.5 m.s ^{-$\frac{3}{2}$}	0.05 m.s ^{-$\frac{3}{2}$}

TABLE 4.1 – Récapitulatif sur les écart-types des processus générateurs selon les différents scénarios de simulation.

Enfin, il nous reste à décrire les instants d'apparition et de disparition des différentes cibles rassemblés dans le tableau 4.2.

Nous présentons dans la suite des résultats de simulation selon les deux scénarios envisagés.

4.3.3 Résultats

Dans ce paragraphe, les résultats des différents scénarios sont présentés de manière simultanée pour pouvoir les comparer. Nous commençons par donner deux exemples de réalisation du tirage aléatoire des trajectoires, des mesures et des fausses alarmes.

Sur la figure 4.2 (a), les cibles sont faiblement manœuvrantes du fait des dynamiques sur les vitesses. Les mouvements MRU ainsi caractérisés permettent de se faire croiser les cibles (1, 1) et (2, 1) très régulièrement. Ce n'est pas le cas lorsque la dynamique sur la vitesse de groupe est plus élevée, comme dans le scénario 2 représenté sur la figure 4.2 (b). Cependant, lorsque la dynamique est plus

Scénario	Groupe 1	Groupe 2
n° 1	Cible (1,1) : apparition à $k = 1$ - disparition à $k = 100$ Cible (1,2) : apparition à $k = 1$ - disparition à $k = 70$	Cible (2,1) : apparition à $k = 1$ - disparition à $k = 100$ Cible (2,2) : apparition à $k = 20$ - disparition à $k = 90$
n° 2	Cible (1,1) : apparition à $k = 1$ - disparition à $k = 100$ Cible (1,2) : apparition à $k = 1$ - disparition à $k = 70$	Cible (2,1) : apparition à $k = 1$ - disparition à $k = 100$ Cible (2,2) : apparition à $k = 20$ - disparition à $k = 90$

TABLE 4.2 – Récapitulatif sur les écart-types des processus générateurs selon les différents scénarios de simulation.

forte, l'incertitude liée au modèle de mouvement augmente aussi et rend les phases de croisement plus difficiles à gérer pour le filtre. Afin de compléter la description des scénarios, nous précisons que la cible (1,1) se trouve en position ($x = 12$ km, $y = 10$ km) à $k = 1$ et la cible (1,2) en ($x = 11,75$ km, $y = 9,25$ km) à $k = 1$. Pour le second groupe, la cible (2,1) se trouve en ($x = 13,5$ km, $y = 8,5$ km) à $k = 1$ et la la cible (2,2) en ($x = 13$ km, $y = 9,5$ km) à $k = 20$.

Ces figures 4.2 (a) et (b) sont complétées par les figures 4.3-4.8 représentant l'évolution des coordonnées x et y en fonction du temps.

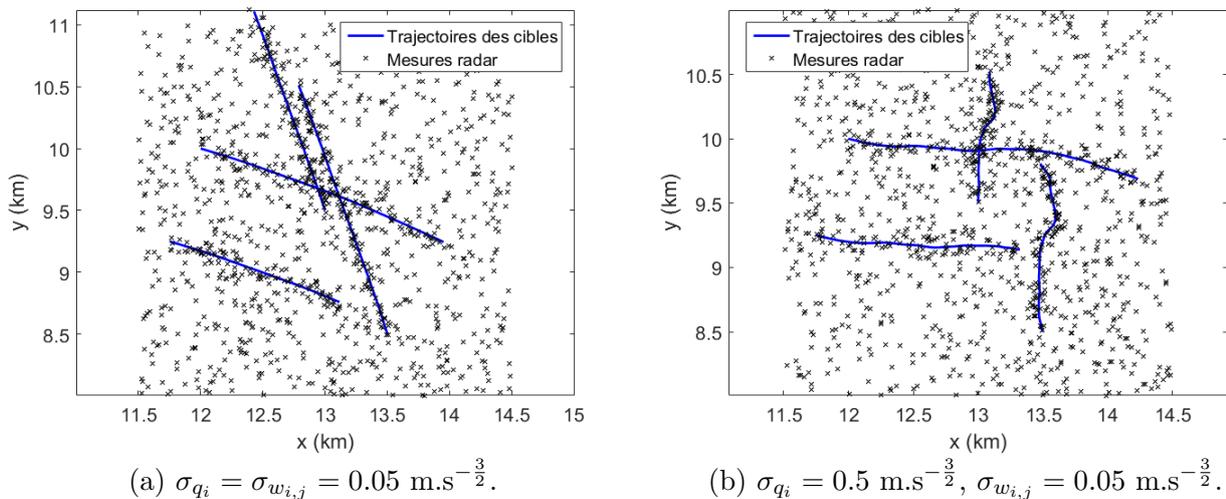


FIGURE 4.2 – Réalisations de trajectoires, de détections et de fausses alarmes générées aléatoirement.

Pour le premier scénario, c'est-à-dire pour $\sigma_{q_i} = 0.05 \text{ m.s}^{-\frac{3}{2}}$, les résultats d'estimation du filtre LMB/PHD sont présentés sur les figures 4.3 (a) et (b). Une couleur différente est attribuée à chaque groupe. Durant les phases d'initialisation, les groupes ne peuvent être constitués que d'une seule cible, ce qui donne lieu à la création de quatre groupes en début de simulation. De par notre paramétrage, le mécanisme de fusion des groupes n'est disponible que 20 scans après une initialisation de piste. Dès qu'il est disponible, le LMB/PHD rassemble les pistes qui correspondent à un même groupe.

À titre de comparaison, les résultats de l'estimation d'un filtre PHD, fondé sur des mélanges de gaussiennes, sont fournis sur les figures 4.4 (a) et (b). Le scénario ne présente pas de difficulté particulière si ce n'est le croisement entre les instants 55 et 65.

Sur les figures 4.3 et 4.4, les filtres LMB/PHD et PHD se comportent bien et semblent converger vers des estimations de positions quasi-identiques.

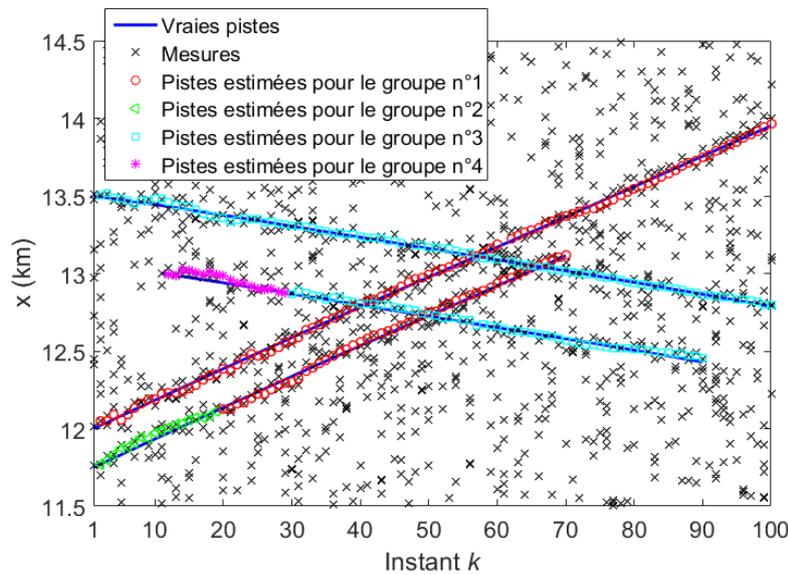
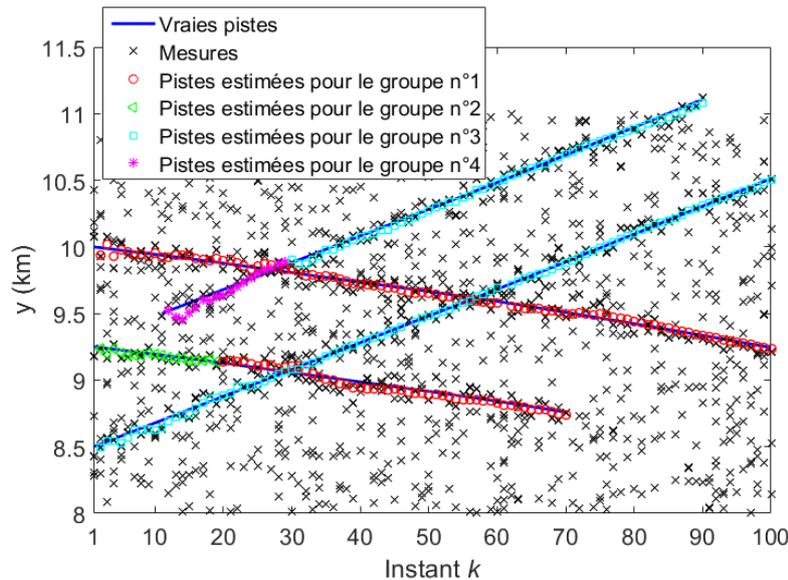
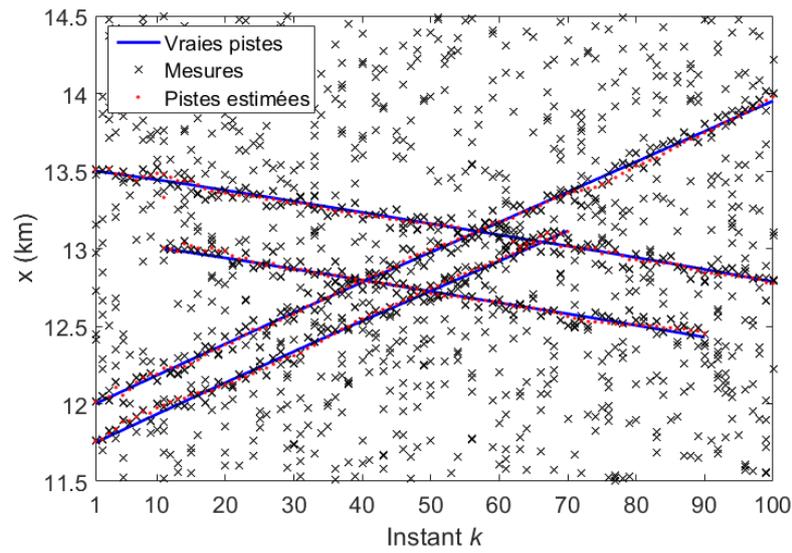
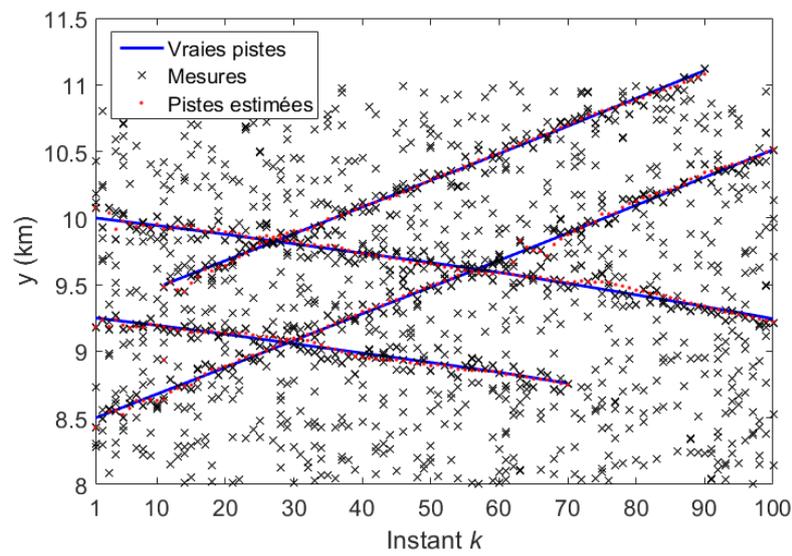
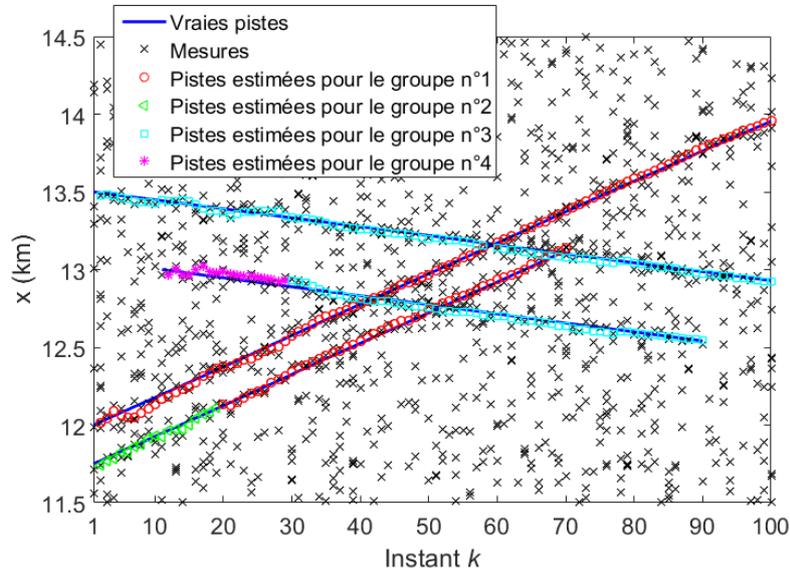

 (a) Coordonnée x .

 (b) Coordonnée y .

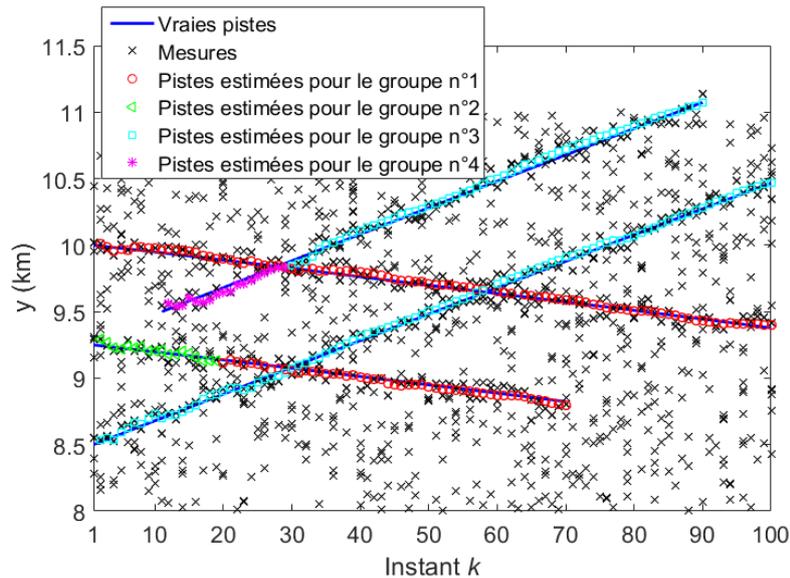
 FIGURE 4.3 – Trajectoires en fonction du temps - filtre LMB/PHD - $\sigma_{q_i} = 0.05 \text{ m.s}^{-\frac{3}{2}}$.

(a) Coordonnée x .(b) Coordonnée y .FIGURE 4.4 – Trajectoires en fonction du temps - filtre PHD - $\sigma_{q_i} = 0.05 \text{ m.s}^{-\frac{3}{2}}$.

Dans certains cas, l'incertitude liée au croisement reste forte et le filtre PHD perd un peu de précision. Un exemple de ce genre de scénario est fourni sur les figures 4.5 et 4.6. La configuration est fortement incertaine et le LMB/PHD n'en souffre pas, notamment grâce aux autres cibles des groupes qui apportent chacune leur mesure et permettent ainsi de lever l'ambiguïté.

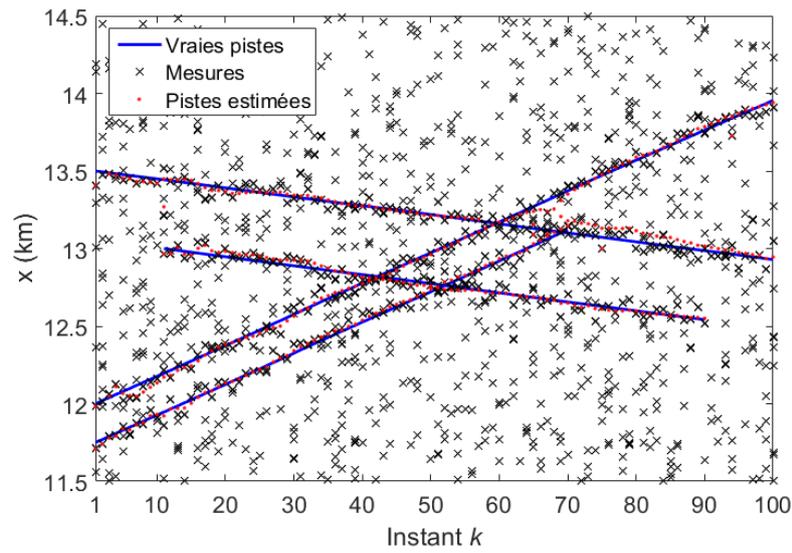
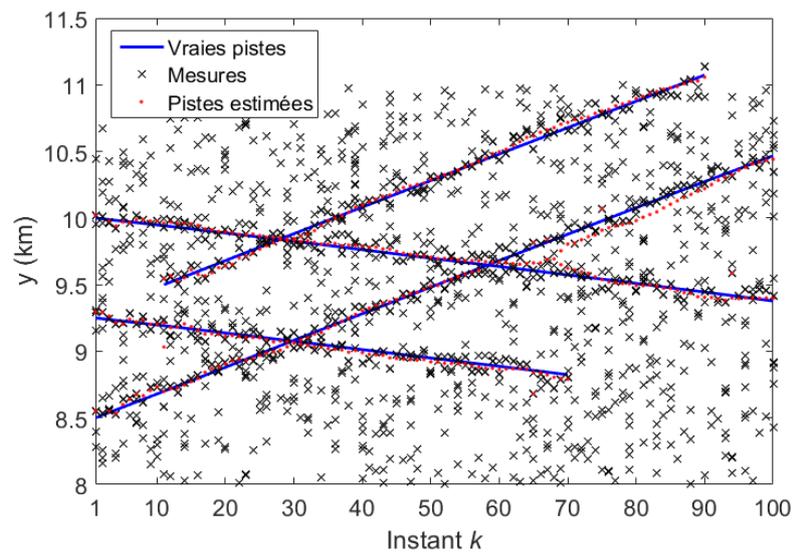


(a) Coordonnée x .

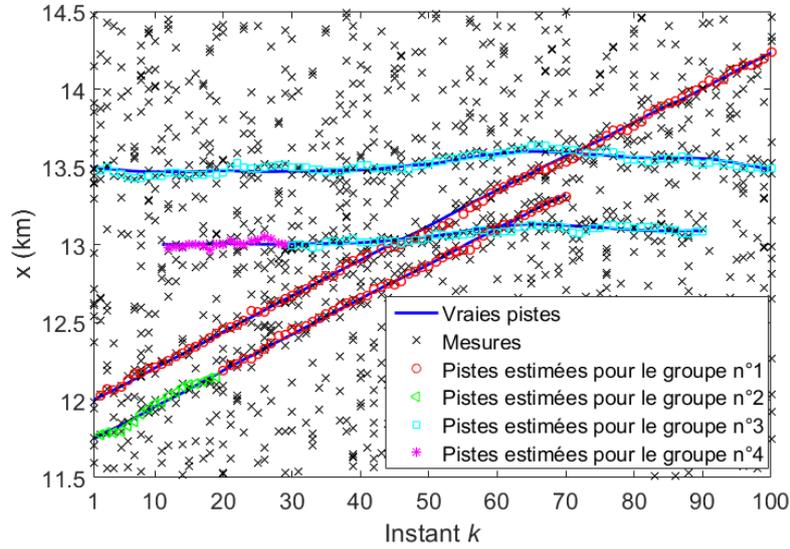


(b) Coordonnée y .

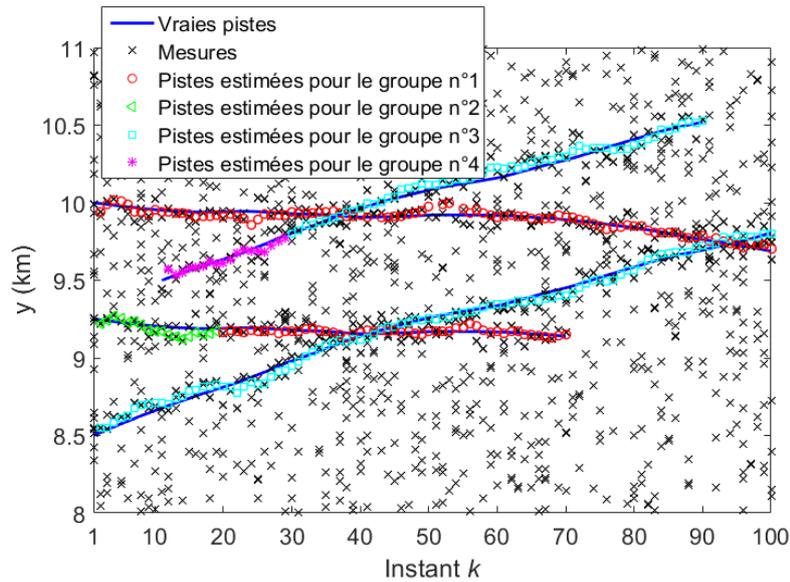
FIGURE 4.5 – Trajectoires en fonction du temps - filtre LMB/PHD - $\sigma_{q_i} = 0.05 \text{ m.s}^{-\frac{3}{2}}$.

(a) Coordonnée x .(b) Coordonnée y .FIGURE 4.6 – Trajectoires en fonction du temps - filtre PHD - $\sigma_{q_i} = 0.05 \text{ m.s}^{-\frac{3}{2}}$.

Enfin pour le second scénario, les résultats d'estimation sont présentés sur les figures 4.7 et 4.8. Comme pour le premier scénario, les filtres LMB/PHD et PHD estiment correctement les positions et le filtre LMB/PHD parvient à identifier les groupes de cibles. Soulignons qu'en comparaison du PHD, le LMB/PHD permet en outre d'identifier les groupes de cibles et donc fournit une interprétation de la scène observée, précieuse dans un contexte de surveillance.

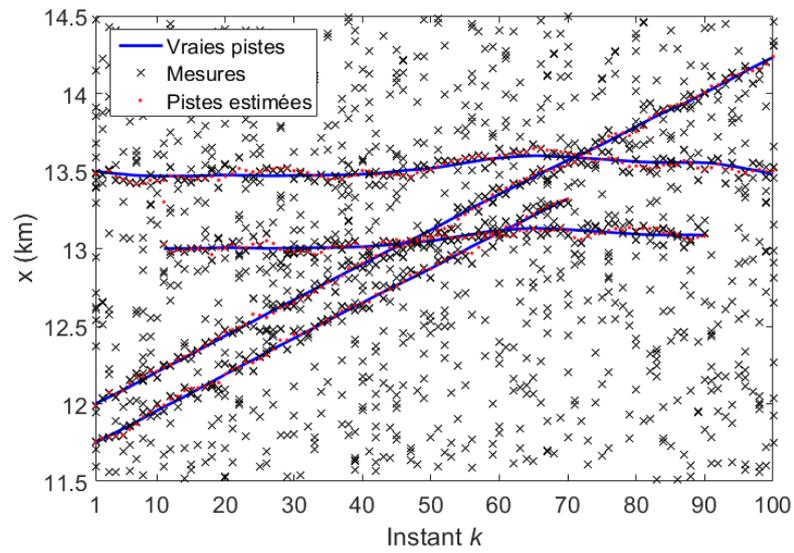
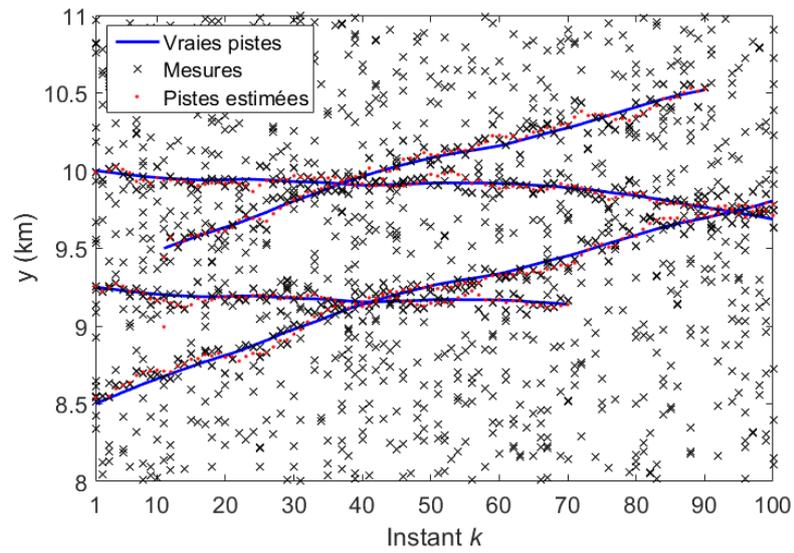


(a) Coordonnée x .

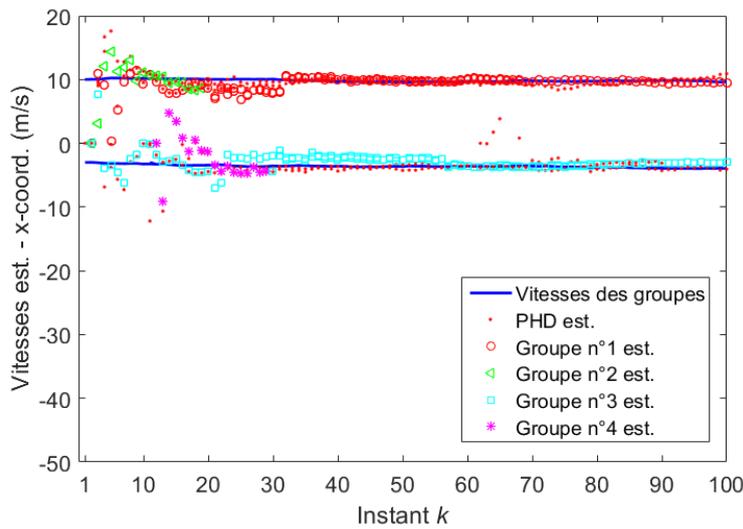


(b) Coordonnée y .

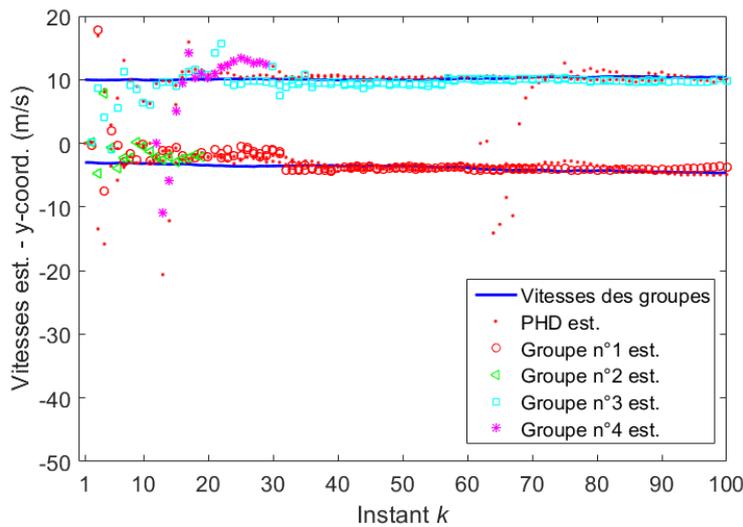
FIGURE 4.7 – Trajectoires en fonction du temps - filtre LMB/PHD - $\sigma_{q_i} = 0.5 \text{ m.s}^{-\frac{3}{2}}$.

(a) Coordonnée x .(b) Coordonnée y .FIGURE 4.8 – Trajectoires en fonction du temps - filtre PHD - $\sigma_{q_i} = 0.5 \text{ m.s}^{-\frac{3}{2}}$.

Toujours selon nos deux scénarios, nous fournissons maintenant les estimations des vitesses en fonction du temps sur les figures 4.9 et 4.10. Pour les deux scénarios, les convergences des estimations de vitesse nécessitent plus de 10 scans, ce qui justifie le blocage des mécanismes de fusion des pistes 20 scans après leur création. D'autre part, les estimations fournies par le filtre PHD sont légèrement plus dispersées que celles fournies par le filtre LMB/PHD. De plus, sur la figure 4.9 concernant le premier scénario dont les estimations de positions sont représentées sur les figures 4.3 et 4.4, on se rend compte que le filtre PHD perd en qualité d'estimation de la vitesse pour une des cibles à partir de $k = 60$. Cela correspond au croisement des trajectoires des instants 55 à 65. La perte de précision sur l'estimation de position n'est pas flagrante sur la figure 4.4, mais l'estimation de vitesse fait bien apparaître l'ambiguïté multi-cibles de ce scénario. Le filtre LMB/PHD tire alors profit de son estimation dépendante des groupes. En effet dans les deux groupes, les cibles éloignées du croisement de trajectoires apportent de l'information sans ambiguïté sur l'évolution de la vitesse des groupes.

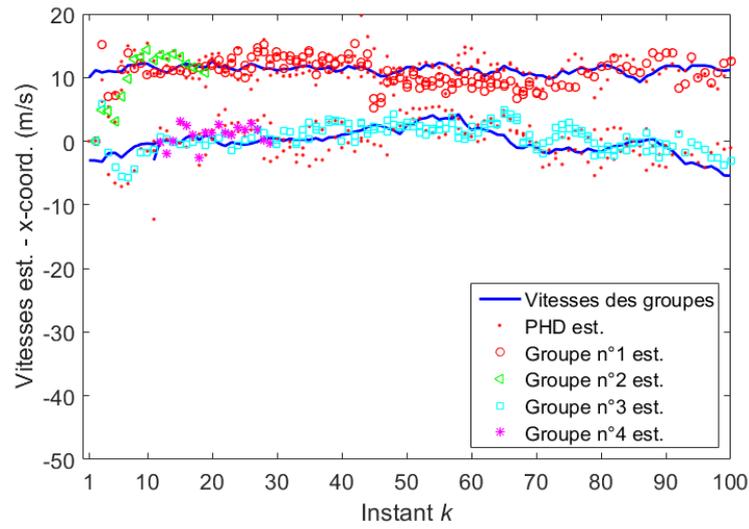
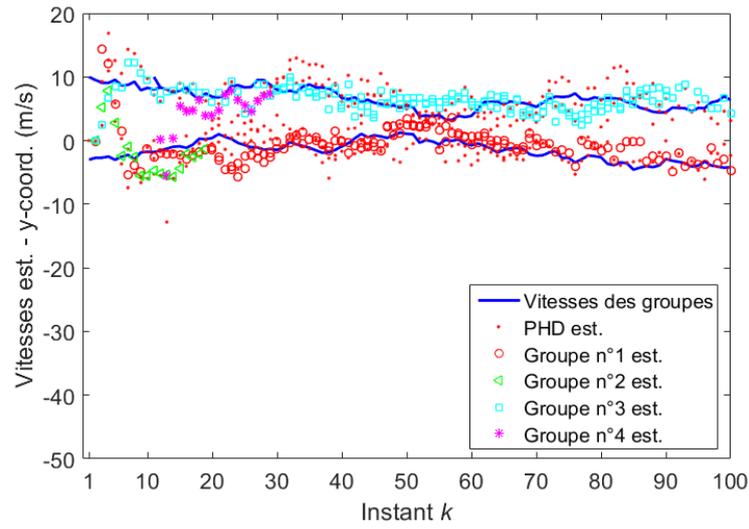


(a) Coordonnée x .

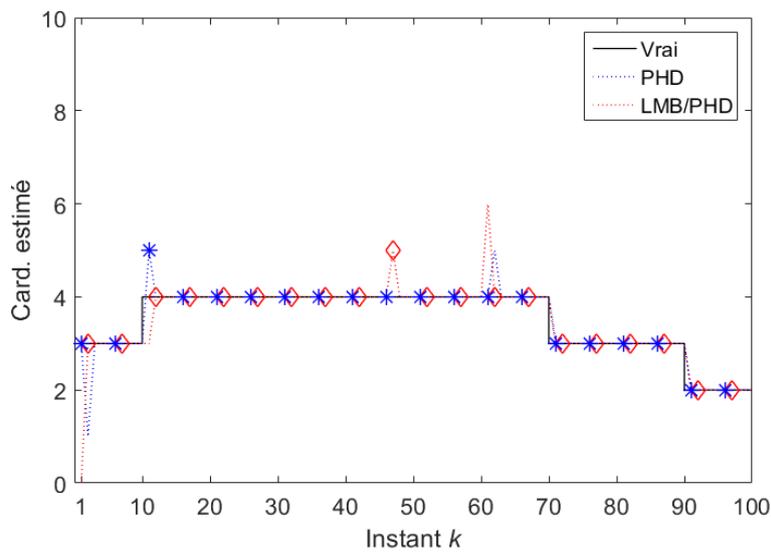


(b) Coordonnée y .

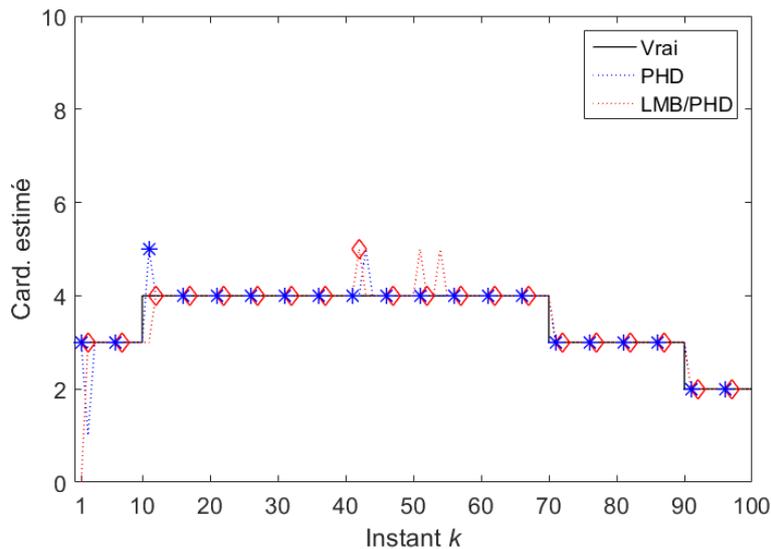
FIGURE 4.9 – Vitesses estimées - filtres LMB/PHD et PHD - $\sigma_{q_i} = 0.05 \text{ m.s}^{-\frac{3}{2}}$.

(a) Coordonnée x .(b) Coordonnée y .FIGURE 4.10 – Vitesses estimées - filtres LMB/PHD et PHD - $\sigma_{q_i} = 0.5 \text{ m.s}^{-\frac{3}{2}}$.

Nous nous intéressons maintenant à deux autres indicateurs de performances, à savoir le nombre total estimé de cibles et les moyennes des distances OSPA réalisées sur 100 simulations de Monte Carlo. Commençons par l'évolution du cardinal estimé représenté sur les figures 4.11 (a) et (b). Son calcul ne tient compte que des gaussiennes dont le poids est suffisamment élevé et élimine les autres. Moyennant un poids à la naissance arbitrairement faible, seules les pistes confirmées, c'est-à-dire ayant été mises à jour par une mesure pertinente sur plusieurs instants successifs, sont conservées. Ainsi les pistes initiées sur des fausses alarmes sont très souvent éliminées. De ce fait, le cardinal estimé correspond au moins au nombre de pistes affichées sur les figures 4.3, 4.4, 4.7 et 4.8. Il peut arriver qu'une gaussienne ait un poids supérieur à 1, ce qui conduit sporadiquement à la sur-estimation du nombre de cibles. Sur les réalisations présentées ici, les filtres LMB/PHD et PHD sont tous deux capables de fournir une estimation correcte du nombre total de cibles en dépit de la présence des fausses alarmes.



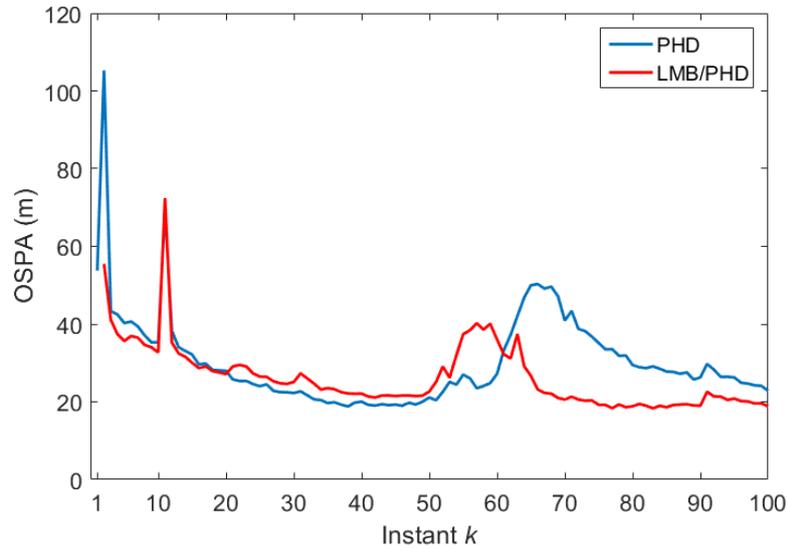
(a) Scénario 1 - $\sigma_{q_i} = 0.05 \text{ m.s}^{-\frac{3}{2}}$.



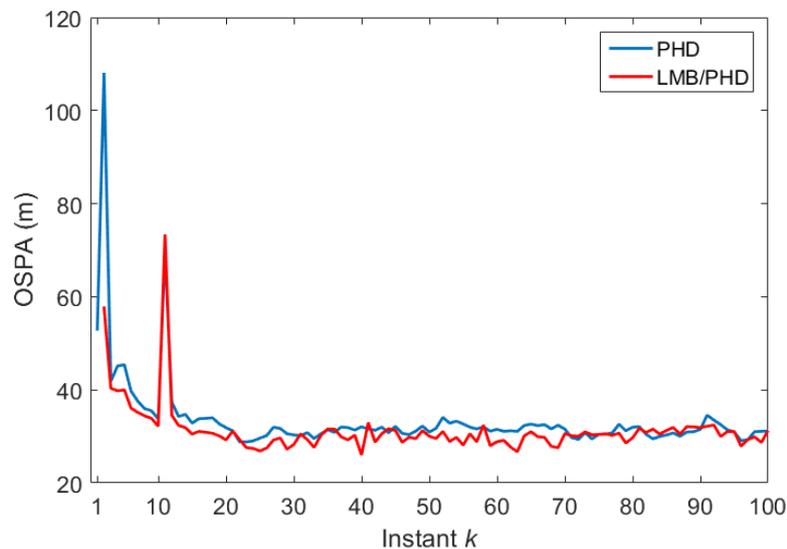
(b) Scénario 2 - $\sigma_{q_i} = 0.5 \text{ m.s}^{-\frac{3}{2}}$.

FIGURE 4.11 – Nombre estimé de cibles - filtres LMB/PHD et PHD.

Concernant les moyennes des distances OSPA, elles sont représentées sur les figures 4.12 (a) et (b). Les distances OSPA pénalisent ici les erreurs d'estimation en position et les erreurs d'estimation de cardinal. Son paramètre de coupure c vaut 200 m et son ordre p vaut 1. Dans les deux scénarios, on observe une augmentation initiale de l'OSPA à l'ouverture des pistes puis une convergence progressive. Aussi à l'instant $k = 10$, une nouvelle augmentation de l'OSPA est constatée et correspond à l'apparition de la cible (2,2). Pour le reste, les deux scénarios doivent être discriminés.



(a) Scénario 1 - $\sigma_{q_i} = 0.05 \text{ m.s}^{-\frac{3}{2}}$.



(b) Scénario 2 - $\sigma_{q_i} = 0.5 \text{ m.s}^{-\frac{3}{2}}$.

FIGURE 4.12 – Distances OSPA - filtres LMB/PHD et PHD.

En effet, lorsque la dynamique sur la vitesse est faible, c'est-à-dire $\sigma_{q_i} = 0.05 \text{ m.s}^{-\frac{3}{2}}$, le croisement des cibles entre les instants 55 et 65 est quasi systématique. De ce fait, on constate une augmentation de l'OSPA pour le LMB/PHD et pour le PHD mais elles correspondent à des erreurs différentes. En effet, le LMB/PHD a plutôt tendance à sur-estimer le nombre de cibles, notamment dans la phase de croisement. Ainsi, l'erreur se trouve être centrée sur l'instant 60. Pour le PHD, c'est une erreur

liée à l'estimation des positions. Le filtre PHD se trouve alors pénalisé en fin de croisement lorsque les trajectoires s'éloignent à nouveau, le temps que ses gaussiennes puissent à nouveau représenter convenablement les états des cibles. Dans les deux scénarios, les filtres tendent vers une OSPA de 20 m.

Dans le second scénario, lorsque la dynamique sur la vitesse est plus forte, le croisement des cibles ne peut pas être garanti et se produit beaucoup plus rarement. Cela se traduit par une convergence quasi-identique des OSPAs du LMB/PHD et du PHD autour de 30 m.

Notons que le filtre LMB/PHD présente plusieurs limites. De par sa structure, il nécessite un choix sur les modèles d'état de groupe et des cibles. Si ces derniers ne sont pas pertinents, ce filtre dilue donc fortement l'information liée aux modèles *a priori*. De plus, sa mise en œuvre requiert d'ajuster différents paramètres comme le nombre de particules par groupe qui est fortement impactant sur le temps de calcul. Pour notre part, nous nous sommes limités ici à 200 particules. Un nombre trop faible de particules est préjudiciable à l'estimation de l'état de groupe. Enfin, l'emploi de filtres PHD limite la robustesse du filtre dans la mesure où l'estimation du nombre de cibles par groupe peut être faussée par les fausses alarmes.

4.4 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, nous présentons la mise en œuvre pratique du filtre LMB/PHD. L'algorithme est organisé selon une structure hiérarchique. Grâce à l'utilisation d'un EFA LMB au niveau multi-groupes multi-cibles, il s'agit pour chaque groupe de représenter une probabilité d'existence, une loi sur l'état du groupe et conditionnellement à ce dernier, une densité multi-cibles. La loi sur l'état de groupe est représentée par l'intermédiaire d'un jeu de particules et leur poids associé. Une densité multi-cibles doit alors être propagée par particule. Dans notre cas, cela se traduit par l'estimation d'une fonction intensité grâce à l'utilisation d'un EFA Poisson au niveau multi-cibles. Comme nous avons opté pour une mise en œuvre du filtre PHD par mélange de gaussiennes, il s'agit de propager un certain nombre de gaussiennes pour chaque particule, par l'intermédiaire de leur moyenne et de leur matrice de covariance.

La récursion du filtre LMB/PHD développe alors les étapes de prédiction et de mise à jour d'un filtre Bayésien. Cependant, afin de limiter le nombre d'opérations à fournir au niveau de la mise à jour, des groupes de traitement sont constitués en se fondant sur des fenêtres de validation. Grâce à ces dernières, seuls des groupes de mesures pertinentes sont utilisés pour les différents groupes de cibles. Cela revient à générer des hypothèses d'association entre des groupes de mesures et des groupes de cibles, tenant compte des conflits potentiels au niveau des cibles : une mesure donnée ne peut pas appartenir à deux groupes de mesures simultanément.

En plus de ce traitement d'association, le filtre LMB/PHD met en œuvre des mécanismes de création, fusion et disparition des groupes. Lors de sa création, un groupe n'est constitué que d'une seule cible dont la piste est elle-même initialisée à partir d'une mesure non associée. Après convergence de l'estimation de l'état de cette cible, le filtre permet l'exploration de l'espace d'état des groupes. À partir de ce moment-là, le groupe nouvellement créé est éligible à la fusion avec un autre groupe existant. Une fusion intervient lorsque les statistiques sur les états des groupes sont suffisamment proches. Ainsi, la constitution des premiers groupes de plusieurs cibles est systématiquement le résultat d'une création suivie d'une fusion. Le mécanisme de suppression d'un groupe est activé dès qu'un groupe ne contient plus de cibles.

La partie simulation proposée dans ce chapitre permet d'illustrer puis d'évaluer le fonctionnement du filtre LMB/PHD. Les scénarios envisagés sont construits sur une base commune de deux groupes de deux cibles coordonnées en vitesse. Dans le premier scénario, la dynamique de groupe est du même ordre de grandeur que la dynamique propre des cibles. Dans le second scénario, la dynamique de

groupe est plus importante et se trouve être prépondérante par rapport aux dynamiques propres des cibles. Dans les deux scénarios, les trajectoires de deux cibles appartenant à deux groupes différents peuvent potentiellement se croiser. Les simulations permettent de valider les mécanismes de création, fusion et suppression des groupes. Par rapport à un filtre PHD multi-cibles, le filtre LMB/PHD permet de limiter les ambiguïtés liées aux croisements des trajectoires. En outre, il fournit une interprétation de la scène observée en identifiant automatiquement les groupes de cibles présentant un mouvement coordonné, même si elles sont physiquement éloignées les unes des autres.

Concernant les perspectives à ces travaux, l'emploi d'autres filtres multi-objets fondés sur les EFAs peut être envisagé notamment pour remplacer les filtres de type PHD. En effet, ces derniers présentent l'inconvénient de ne pas permettre l'identification directe des cibles de manière individuelle au cours de temps et sont sensibles aux fausses alarmes. Notre choix s'est porté sur des filtres de type PHD pour limiter les besoins en termes de ressources calculatoires. Il s'agit inévitablement d'un enjeu important dans un problème d'estimation multi-groupes multi-cibles.

Une autre perspective de développement de ces travaux concerne l'adaptation du filtre LMB/PHD au cas du pistage exploitant les informations sur le réseau routier. En effet, l'environnement routier contraint régulièrement les cibles proches entre elles à adopter des mouvements coordonnés. De ce point de vue-là, un filtre multi-groupes multi-cibles tirerait profit des informations sur le réseau routier et des interactions entre les véhicules.

Conclusions et perspectives

Cette thèse porte sur le développement de nouvelles méthodes de pistage adaptées à deux situations spécifiques. Dans un premier temps, nous considérons un scénario mono-cible pour lequel il s'agit de fournir une classification de l'objet pisté dans un environnement dense en fausses alarmes et avec la possibilité d'exploiter l'estimation de la longueur de la cible. Dans un second temps, nous nous intéressons au cas de cibles évoluant en groupes et présentant une forme de coordination dans leurs mouvements. Ce genre de scénario correspond à des cibles évoluant en convoi, en formation ou cherchant à rejoindre un même point.

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous commençons par présenter des algorithmes classiques d'estimation à savoir le filtre de Kalman et le filtre particulaire. Ces solutions permettent d'obtenir une estimation bayésienne d'une trajectoire mais n'incorporent pas la gestion d'incertitudes courantes en pistage comme l'incertitude sur le nombre de cibles présentes dans la scène, les mesures auxquelles elles sont rattachées, ou encore les fausses alarmes. Le premier chapitre évoque les compléments algorithmiques et les alternatives utilisées pour gérer ces indéterminations et perturbations. Il présente ensuite une alternative fondée sur les ensembles finis aléatoires qui permet de gérer de façon unifiée toutes les problématiques inhérentes à un problème de pistage multi-cibles. Grâce à ce formalisme, les incertitudes font partie intégrante d'un problème global d'estimation. Ces approches plus récentes ont donné lieu à différents filtres également présentés dans ce chapitre. La suite de la thèse s'appuie sur le formalisme des ensembles finis aléatoires.

Dans le deuxième chapitre de cette thèse, nous nous sommes intéressés au développement d'une approche conjointe de pistage et de classification mono-cible. En se fondant sur un formalisme existant, notre contribution consiste à intégrer un filtre de Bernoulli pour gérer la présence de nombreuses fausses alarmes. De plus, notre approche est également adaptée pour tirer profit d'une mesure complémentaire d'étalement distance fournie par le radar. Cette dernière permet l'estimation de la longueur de la cible. Le modèle de mesure traduisant le lien entre la mesure d'étalement distance et la longueur de la cible fait intervenir ses variables cinématiques comme sa position et sa vitesse. La mise en œuvre s'appuie sur un filtre particulaire pour estimer les variables cinématiques de la cible et permet de gérer une densité *a posteriori* non gaussienne de son vecteur d'état. Cependant, comme la longueur de la cible est un paramètre constant au cours du temps, son estimation par filtre particulaire présente un risque de dégénérescence. Pour pallier ce problème nous avons donc choisi un filtre particulaire Rao-Blackwellisé. Cependant, les fausses alarmes sont gérées sans association explicite au niveau cinématique grâce au filtre de Bernoulli. Pour préserver cette démarche, l'estimation de la longueur de la cible n'est pas conduite par un banc de filtres de Kalman mais par un banc de filtres *probabilistic data association*. Aussi, la propagation des particules est envisagée selon deux lois de propagation différentes. Finalement, ce sont quatre algorithmes que nous proposons avec deux types de propagation de particules et la possibilité ou non d'utiliser l'estimation de la longueur de la cible. Les solutions sont alors évaluées sur des scénarios à deux classes de cibles : une classe d'objets non-manceuvrants et une classe d'objets potentiellement manœuvrants. Nous considérons également deux taux de fausses alarmes pour mesurer la robustesse de l'algorithme à ces dernières. Lors de la génération des fausses

alarmes de la mesure d'étalement distance, nous tirons aléatoirement ces dernières volontairement proches de l'étalement distance réel de la cible, ce qui permet d'évaluer le comportement de l'algorithme à un niveau de stress élevé. En pratique, estimer la longueur de la cible revient à augmenter les dimensions du vecteur d'état et du vecteur de mesure, ce qui induit normalement une diminution de l'ambiguïté d'association entre les mesures et l'état et revient à considérer un taux de fausses alarmes réduit. Les résultats de simulations montre la capacité de l'algorithme à classer convenablement les cibles selon leur phase de manœuvre. Malgré un taux élevé de fausses alarmes, l'estimation et la classification restent pertinentes. L'utilisation de la mesure complémentaire d'étalement distance permet en outre de prendre une décision plus tranchée quant à la classification des cibles.

Les perspectives à ces travaux concernent leur extension au cas multi-cibles, où les ensembles finis aléatoires étiquetés permettent de suivre individuellement chaque cible. Ainsi, il est possible de tirer profit de la classification d'une cible d'un instant sur l'autre pour son pistage. Cependant, dans le cas d'une classification probabiliste, le nombre des choix possibles est potentiellement ingérable. Plusieurs leviers existent pour limiter cet aspect négatif. Par exemple, des attributs estimés comme la longueur ont une forte sémantique et permettent d'envisager une classification définitive une fois leur estimation convergée.

Dans les chapitres 3 et 4, nous nous sommes ensuite intéressés au développement d'un algorithme de pistage multi-groupes multi-cibles. Les cibles d'un même groupe sont supposées avoir des mouvements coordonnés. Pour développer notre algorithme, nous nous sommes appuyés sur une structure hiérarchique d'ensembles finis aléatoires. Au niveau le plus haut, c'est-à-dire au niveau multi-groupes multi-cibles, un premier ensemble fini aléatoire permet de représenter l'incertitude sur le nombre de groupes présents dans la scène. Conditionnellement à ce cardinal, des hypothèses d'états de groupes sont formulées. En fonction de ces dernières, le deuxième niveau d'ensembles finis aléatoires capte l'incertitude sur le nombre de cibles au sein de chaque groupe et sur leurs mouvements.

Le filtre proposé et dédié l'estimation d'une telle configuration est lui aussi construit sur une structure hiérarchique. Au niveau multi-groupes multi-cibles, nous avons opté pour un filtre multi-Bernoulli étiqueté dont l'avantage est d'identifier les groupes au cours du temps et de permettre d'effectuer des traitements parallélisés pour les groupes n'ayant aucune mesure radar en commun. Les hypothèses sur les états des groupes sont gérées par un filtre particulaire et un état multi-cibles est estimé par particule. À ce niveau-là, nous avons choisi des filtres de type PHD, principalement pour limiter les besoins en ressources calculatoires. La mise en œuvre pratique et l'évaluation sur données simulées est l'objet du chapitre 4. Le développement de la mise en œuvre repose sur trois approximations. Au niveau multi-groupes multi-cibles, ce sont les expressions analytiques d'un filtre multi-Bernoulli étiqueté qui sont employées. Pour représenter la densité spatiale de chaque groupe sur l'espace d'état multi-cibles augmenté de l'espace d'état des groupes, nous optons pour :

- une représentation particulaire de la loi de l'état de chaque groupe,
- un filtre PHD par mélange de gaussiennes par particule.

Les simulations considèrent deux scénarios différents permettant d'évaluer les mécanismes de création, de fusion et de suppression des groupes. Dans les deux scénarios, les cibles d'un même groupe sont coordonnées en vitesse. Dans le premier, les dynamiques propres des cibles sont du même ordre de grandeur que les dynamiques de groupes. Dans le second scénario, la dynamique de groupe est prépondérante. Les résultats de simulations permettent de vérifier la bonne évaluation de la composition des groupes. De plus, dans les cas où deux cibles de deux groupes se croisent, le filtre multi-groupes multi-cibles s'avère peu sensible à l'incertitude provoquée et reste stable dans son estimation des positions des cibles.

Les perspectives à ces travaux sont multiples. On peut envisager l'utilisation d'autres filtres au niveau multi-cibles à la place du PHD qui peut être mis en défaut par des fausses alarmes trop nombreuses.

Une autre perspective est l'utilisation de cartes de réseau routier. En effet, les cibles sont souvent amenées à évoluer de manière groupées à cause des contraintes de circulation. L'incorporation de cartes de réseau routier dans un filtre multi-groupes multi-cibles pourrait donc être particulièrement adaptée en apportant simultanément une information sur la dynamique d'un groupe donné et sur sa constitution. Aussi, dans le cas où les groupes sont fortement différenciés, il est possible d'envisager de changer de coordination pour toutes les cibles du groupe en même temps. On peut penser par exemple aux formations qui exécutent des mouvements complexes sans se rompre.

Dans une extension à un scénario multi-capteurs, chaque senseur ne verrait qu'une partie de la scène et des cibles. L'échange d'information permettrait de construire des groupes d'intérêt. On pense ici à des scénarios comme une interception longue distance.

Enfin, dans une perspective générale à l'ensemble de ces travaux, il est possible d'envisager un traitement hétérogène du pistage en fonction de régions, de dynamiques ou de caractéristiques d'intérêt qui impliquerait d'utiliser un algorithme différent à chaque fois. Un des avantages d'une telle approche serait de permettre de limiter l'utilisation des algorithmes coûteux calculatoirement aux cas qui en ont vraiment besoin. Un autre avantage serait d'avoir recours à des approches spécifiques dans les cas adaptés.

Annexe A

Compléments sur le filtre de Kalman

Sommaire

A.1 Résultats sur les gaussiennes multi-variées	147
A.2 Étape de prédiction	148
A.3 Étape de mise à jour	149

Dans cette partie, l'exploitation des résultats sur les gaussiennes multi-variées permet d'obtenir les expressions des densités prédites et mises à jour du filtre de Kalman.

A.1 Résultats sur les gaussiennes multi-variées

Soit \mathbf{x} un vecteur aléatoire colonne de taille n à valeurs dans \mathbb{R}^n . La densité de probabilité de \mathbf{x} , gaussienne de moyenne μ et de matrice de covariance Σ , se définit de la manière suivante :

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}; \mu, \Sigma) = \frac{1}{|2\pi\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right). \quad (\text{A.1})$$

Une décomposition du vecteur \mathbf{x} , avec $p \leq n$, peut être envisagée comme suit :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \text{ dont les dimensions sont : } \begin{bmatrix} p \times 1 \\ (n-p) \times 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Le vecteur μ peut alors s'écrire de façon similaire :

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \text{ dont les dimensions sont : } \begin{bmatrix} p \times 1 \\ (n-p) \times 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Enfin, la matrice de covariance est donnée par :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \text{ avec les dimensions associées : } \begin{bmatrix} p \times p & p \times (n-p) \\ (n-p) \times p & (n-p) \times (n-p) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Sous la forme marginalisée, les densités de probabilité de \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 sont alors les suivantes :

$$p(\mathbf{x}_1) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_1; \mu_1, \Sigma_{11}), \quad (\text{A.5})$$

$$p(\mathbf{x}_2) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_2; \mu_2, \Sigma_{22}). \quad (\text{A.6})$$

D'après [Eat83], les densités de probabilité conditionnelles sont données par :

$$p(\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_j) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_i; \mu_{i|j}, \Sigma_{i|j}), \quad (\text{A.7})$$

avec :

$$\mu_{i|j} = \mu_i + \Sigma_{ij}\Sigma_{jj}^{-1}(\mathbf{x}_j - \mu_j), \quad (\text{A.8})$$

et :

$$\Sigma_{i|j} = \Sigma_{ii} - \Sigma_{ij}\Sigma_{jj}^{-1}\Sigma_{ji}. \quad (\text{A.9})$$

Dans les deux parties suivantes, nous exploitons ces résultats pour retrouver les expressions du filtre de Kalman.

A.2 Étape de prédiction

Dans l'étape de prédiction, les densités connues sont la densité *a posteriori* sur l'état à l'instant $k - 1$ et la densité de transition liée au modèle de mouvement. La première est donnée par :

$$p_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{z}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}), \quad (\text{A.10})$$

et la seconde est définie comme suit :

$$p_k(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) = p_k(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{z}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; F_k\mathbf{x}_{k-1}, Q_k). \quad (\text{A.11})$$

À partir de (A.10) et de (A.11), il s'agit de déduire l'expression de la densité de probabilité de l'état prédite à l'instant k sachant les observations jusqu'à l'instant $k - 1$. Cette dernière est notée $p_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k-1})$. Les éléments à construire sont les suivants :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{z}_{1:k-1} \\ \mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_{\mathbf{x}_{k-1}} \\ \mu_{\mathbf{x}_k} \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} \Sigma_{\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k-1}} & \Sigma_{\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k} \\ \Sigma_{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}} & \Sigma_{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

La densité *a posteriori* donnée dans (A.10) permet déjà d'identifier la moyenne du vecteur d'état à l'instant $k - 1$ conditionnellement aux observations jusqu'à l'instant $k - 1$ et la matrice de covariance associée :

$$\mu_{\mathbf{x}_{k-1}} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \text{ et } \Sigma_{\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k-1}} = P_{k-1|k-1}. \quad (\text{A.13})$$

La densité de transition (A.11) correspond à la loi de l'état à l'instant k conditionnellement à l'état de l'instant $k - 1$. En exploitant (A.8), en accord avec les notations introduites dans (A.12), on a :

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}} &\stackrel{(\text{A.8})}{=} \mu_{\mathbf{x}_k} + \Sigma_{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}}\Sigma_{\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k-1}}^{-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \mu_{\mathbf{x}_{k-1}}), \\ &\stackrel{(\text{A.11})}{=} F_k\mathbf{x}_{k-1} = \underbrace{F_k\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}}_{\mu_{\mathbf{x}_k}} + \underbrace{F_kP_{k-1|k-1}^T}_{\Sigma_{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}}}P_{k-1|k-1}^{-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Concernant la matrice de covariance, on cherche à identifier les termes de (A.9) à partir de (A.11) comme suit :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}} &\stackrel{(\text{A.9})}{=} \Sigma_{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k} - \Sigma_{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}}\Sigma_{\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k-1}}^{-1}\Sigma_{\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k}, \\ &\stackrel{(\text{A.11})}{=} Q_k, \\ &= Q_k + F_kP_{k-1|k-1}F_k^T - F_kP_{k-1|k-1}F_k^T, \\ &= \underbrace{Q_k + F_kP_{k-1|k-1}F_k^T}_{\Sigma_{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k}} - \underbrace{F_kP_{k-1|k-1}^T}_{\Sigma_{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}}}P_{k-1|k-1}^{-1}\underbrace{P_{k-1|k-1}F_k^T}_{\Sigma_{\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k}}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Maintenant que les expressions de $\mu_{\mathbf{x}_k}$ et de $\Sigma_{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k}$ sont disponibles, en utilisant à nouveau (A.8), il est possible d'exprimer la moyenne de la probabilité conditionnelle restante :

$$\mu_{\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{x}_k} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + P_{k-1|k-1} F_k^T \left(Q_k + F_k P_{k-1|k-1} F_k^T \right)^{-1} \left(\mathbf{x}_k - F_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \right), \quad (\text{A.16})$$

ainsi que sa matrice de covariance associée en tirant profit de (A.9) comme suit :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{x}_k} &= P_{k-1|k-1} - P_{k-1|k-1} F_k^T \left(Q_k + F_k P_{k-1|k-1} F_k^T \right)^{-1} F_k P_{k-1|k-1}, \\ &= (I - K_{p,k} F_k) P_{k-1|k-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

avec $K_{p,k}$ le gain défini de la manière suivante :

$$K_{p,k} = P_{k-1|k-1} F_k^T \left(Q_k + F_k P_{k-1|k-1} F_k^T \right)^{-1}. \quad (\text{A.18})$$

Dans la suite, la même séquence de calculs et d'identifications permet d'établir les expressions des différentes densités pour l'étape de mise à jour du filtre de Kalman.

A.3 Étape de mise à jour

Au moment de la mise à jour, on dispose de la densité prédite sur l'état à l'instant k conditionnellement aux observations jusqu'à l'instant $k-1$ dont l'expression est la suivante :

$$p_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \mathcal{N} \left(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, P_{k|k-1} \right), \quad (\text{A.19})$$

La densité de vraisemblance est définie comme suit :

$$g_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; H_k \mathbf{x}_k, R_k). \quad (\text{A.20})$$

À partir de ces deux densités (A.19) et (A.20), il s'agit de déduire celle de l'état à l'instant k conditionnellement aux observations jusqu'à l'instant k et notée $p_{k|k}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$. Pour ce faire, on introduit les notations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1} \\ \mathbf{z}_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_{\mathbf{x}_k} \\ \mu_{\mathbf{z}_k} \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} \Sigma_{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k} & \Sigma_{\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k} \\ \Sigma_{\mathbf{z}_k, \mathbf{x}_k} & \Sigma_{\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_k} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

La densité prédite (A.19) permet déjà d'identifier la moyenne du vecteur d'état à l'instant k conditionnellement aux observations jusqu'à l'instant $k-1$ et la matrice de covariance associée :

$$\mu_{\mathbf{x}_k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \text{ et } \Sigma_{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k} = P_{k|k-1}. \quad (\text{A.22})$$

La densité de vraisemblance (A.20) correspond à la loi de l'observation à l'instant k conditionnellement à l'état de l'instant k . Ainsi, d'après (A.8) en utilisant les notations introduites dans (A.21), on a :

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k} &\stackrel{(\text{A.8})}{=} \mu_{\mathbf{z}_k} + \Sigma_{\mathbf{z}_k, \mathbf{x}_k} \Sigma_{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \mu_{\mathbf{x}_k}), \\ &\stackrel{(\text{A.20})}{=} H_k \mathbf{x}_k = \underbrace{H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}_{\mu_{\mathbf{z}_k}} + \underbrace{H_k P_{k|k-1}^T}_{\Sigma_{\mathbf{z}_k, \mathbf{x}_k}} P_{k|k-1}^{-1} \left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Concernant la matrice de covariance, on identifie les éléments de (A.9) en utilisant (A.20) de la manière suivante :

$$\Sigma_{\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k} \stackrel{(\text{A.9})}{=} \Sigma_{\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_k} - \Sigma_{\mathbf{z}_k, \mathbf{x}_k} \Sigma_{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k}^{-1} \Sigma_{\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(\text{A.20})}{=} R_k, \\ &= R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T - H_k P_{k|k-1} H_k^T, \\ &= \underbrace{R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T}_{\Sigma_{\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_k}} - \underbrace{H_k P_{k|k-1}^T}_{\Sigma_{\mathbf{z}_k, \mathbf{x}_k}} P_{k|k-1}^{-1} \underbrace{P_{k|k-1} H_k^T}_{\Sigma_{\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k}}. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Maintenant que les expressions de $\mu_{\mathbf{z}_k}$ et de $\Sigma_{\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_k}$ sont disponibles, il est possible d'exprimer la moyenne de la probabilité $p_{k|k}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$ conditionnelle restante à partir de (A.8) :

$$\mu_{\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + P_{k|k-1} H_k^T \left(R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T \right)^{-1} \left(\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right), \quad (\text{A.26})$$

ainsi que sa matrice de covariance en exploitant (A.9) :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_k} &= P_{k|k-1} - P_{k|k-1} H_k^T \left(R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T \right)^{-1} H_k P_{k|k-1}^T, \\ &= (I - K_k H_k) P_{k|k-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

avec K_k le gain de Kalman défini de la manière suivante :

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T \left(R_k + H_k P_{k|k-1} H_k^T \right)^{-1}. \quad (\text{A.28})$$

Annexe B

Fonction intensité d'un EFA de Poisson

Sommaire

B.1 Rappels	151
B.2 Développement	151

Dans cette partie, nous détaillons le développement de (1.63) issu de [Mah03].

B.1 Rappels

Pour rappel, la définition de la loi du cardinal (1.61) pour un EFA de Poisson est la suivante :

$$\rho(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}. \quad (\text{B.1})$$

La densité multi-objets associée (1.62) est définie par :

$$\pi(X) = e^{-\lambda} \lambda^n \prod_{i=1}^n p(\mathbf{x}_i). \quad (\text{B.2})$$

L'intégrale (1.57) au sens des statistiques des ensembles finis permet de tenir compte des permutations possibles des éléments à l'intérieur de l'ensemble et se définit comme :

$$\int \pi(X) \delta X = \pi(\emptyset) + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i!} \int \pi(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i\}) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_i. \quad (\text{B.3})$$

Si on parcourt tous les ensembles $X \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$, alors :

$$\int \pi(X) \delta X = 1. \quad (\text{B.4})$$

B.2 Développement

La fonction intensité (1.63) se déduit de la densité multi-objets (B.2) selon l'expression suivante :

$$D(\mathbf{x}) = \int \delta'_X(\mathbf{x}) \pi(X) \delta X = \lambda p(\mathbf{x}), \quad (\text{B.5})$$

avec $\delta'_X(\mathbf{x})$ défini par :

$$\delta'_X(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{w} \in X} \delta_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}), \quad (\text{B.6})$$

où $\delta_{\mathbf{w}}(\mathbf{x})$ vaut selon les cas :

$$\begin{cases} \delta_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = 0, & \text{si } \mathbf{w} \neq \mathbf{x}, \\ \delta_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = 1, & \text{si } \mathbf{w} = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

En prenant la première partie de (B.5), on a :

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}) &= \int \delta_X(\mathbf{x}) \pi(X) \delta X, & (\text{B.8}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int \delta_X(\mathbf{x}) \pi(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int \left(\sum_{\mathbf{w} \in \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}} \delta_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \right) e^{-\lambda} \lambda^n \prod_{i=1}^n p(\mathbf{x}_i) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_n. \end{aligned}$$

Avant de procéder à toute simplification, on organise l'équation (B.8) de la manière suivante :

$$D(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \int \left(\sum_{\mathbf{w} \in \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}} \delta_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \right) \prod_{i=1}^n p(\mathbf{x}_i) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_n, \quad (\text{B.9})$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \int [\delta_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}) + \dots + \delta_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{x})] p(\mathbf{x}_1) \dots p(\mathbf{x}_n) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n. \quad (\text{B.10})$$

À ce stade, il convient de noter que pour obtenir un résultat non nul, on a $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \neq \dots \neq \mathbf{x}_n$. Cela découle du II.D.2) *probability laws of point processes* de [Mah03] (p. 1160).

Ainsi, si $\{\mathbf{x}_i\} \neq \mathbf{x}$, alors :

$$[\delta_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}) + \dots + \delta_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{x})] p(\mathbf{x}_1) \dots p(\mathbf{x}_n) = 0. \quad (\text{B.11})$$

Sinon, les $\{\mathbf{x}_i\}$ valent \mathbf{x} à tour de rôle mais jamais en même temps, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \times np(\mathbf{x}), & (\text{B.12}) \\ &= e^{-\lambda} p(\mathbf{x}) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \times n, \\ &= e^{-\lambda} p(\mathbf{x}) \left[\frac{1}{1} \times 0 + \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \right], \\ &= e^{-\lambda} p(\mathbf{x}) \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}, \\ &= \lambda p(\mathbf{x}). & (\text{B.13}) \end{aligned}$$

D'où le résultat fourni en (1.63) et rappelé en (B.5).

Annexe C

Modèle elliptique

Sommaire

C.1	Configuration géométrique	153
C.2	Mesure d'étalement distance	153
C.3	Remarque sur le paramétrage <i>a priori</i> du modèle elliptique	155

Dans cette annexe, nous présentons un modèle elliptique introduit dans [Sal03]. La cible est supposée être de forme ellipsoïdale. En fonction de l'orientation de l'ellipse et de la ligne de vue du radar, il est possible de définir l'étalement distance de l'objet et de relier cette grandeur à sa longueur. L'étalement distance peut être mesurable par un radar si sa résolution selon l'axe distance, c'est-à-dire selon son axe de visée, est suffisamment fine.

C.1 Configuration géométrique

La configuration géométrique se caractérise par un ensemble de paramètres. Toute ellipse est définie par son demi-grand axe a et son demi-petit axe b . La direction du demi-grand axe est donnée par le vecteur vitesse de l'objet, c'est-à-dire par (\dot{x}_k, \dot{y}_k) . La direction de l'axe distance, donnée par $(\cos(\theta_k), \sin(\theta_k))$, est reliée à l'azimut θ_k de la cible. Enfin, il est possible de définir un angle ϕ_k entre les deux droites de vecteurs directeurs respectifs (\dot{x}_k, \dot{y}_k) et $(\cos(\theta_k), \sin(\theta_k))$. ϕ_k permet de passer du repère centré sur le radar à celui centré sur l'ellipse de centre (r_k, θ_k) . La configuration géométrique est résumée sur la figure C.1.

C.2 Mesure d'étalement distance

L'étalement distance L_k est défini dans le modèle elliptique comme la distance entre les deux droites de vecteur directeur $(-\sin(\theta_k), \cos(\theta_k))$, orthogonales à l'axe distance et tangentes à l'ellipse. Géométriquement, la situation est représentée sur la figure C.1. Il est alors possible d'exprimer L_k en fonction de la longueur de la cible $\ell = 2a$.

Dans le repère de l'ellipse, l'ellipse est définie par son équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{C.1}$$

Les deux droites parallèles permettant de définir l'étalement distance sont quant à elles de la forme suivante :

$$y = -\frac{1}{\tan(\phi_k)}x + \beta, \tag{C.2}$$

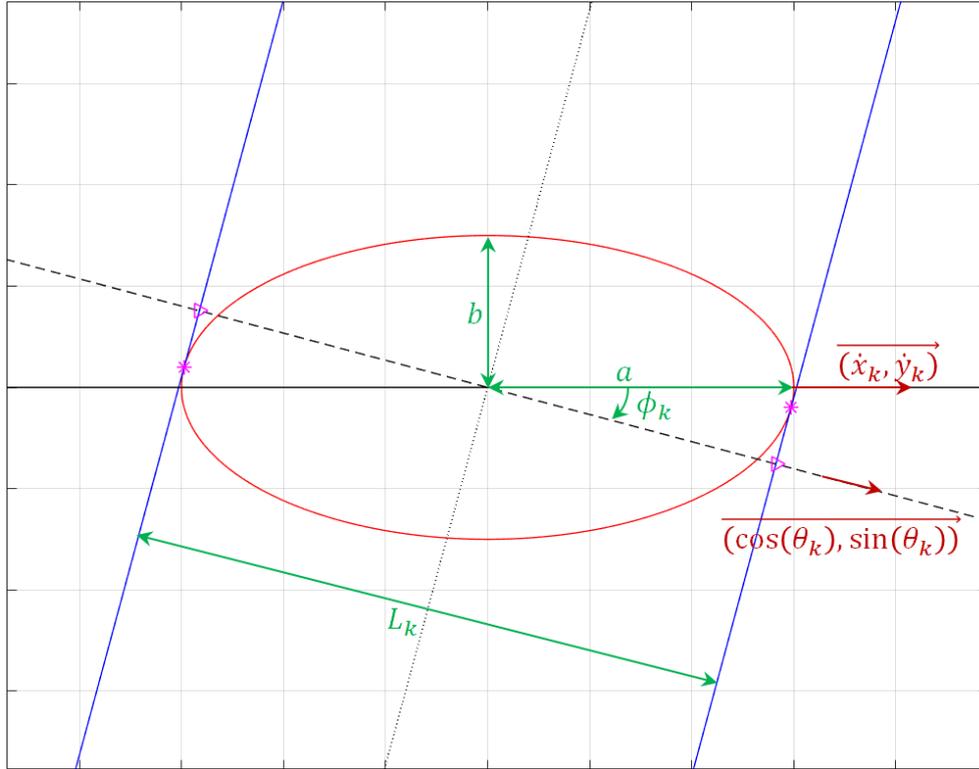


FIGURE C.1 – Configuration géométrique.

avec β l'inconnue permettant de contraindre ces droites à être tangentes à l'ellipse. En combinant les équations (C.1) et (C.2), le système devient :

$$\left(b^2 + \frac{a^2}{\tan^2(\phi_k)}\right) \frac{1}{a^2 b^2} x^2 - \frac{2\beta}{\tan(\phi_k) b^2} x + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (\text{C.3})$$

Comme les droites doivent être tangentes à l'ellipse, les solutions recherchées pour β doivent donner un discriminant nul, on obtient alors :

$$\beta^2 = b^2 + \frac{a^2}{\tan^2(\phi_k)}. \quad (\text{C.4})$$

Les coordonnées des points d'intersection entre l'ellipse et les droites définissant l'étalement distance sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} \beta_1 = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{\tan^2(\phi_k)}}, \\ x_1 = \frac{a^2}{\beta_1 \tan(\phi_k)}, \\ y_1 = -\frac{1}{\tan(\phi_k)} x_1 + \beta_1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \beta_2 = -\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{\tan^2(\phi_k)}}, \\ x_2 = \frac{-a^2}{\beta_2 \tan(\phi_k)}, \\ y_2 = -\frac{1}{\tan(\phi_k)} x_2 + \beta_2, \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Maintenant, pour obtenir l'étalement distance, c'est-à-dire la distance entre ces deux droites, on recherche par exemple deux couples de coordonnées, telles que :

$$\begin{cases} y = \tan(\phi_k) x, \\ y = -\frac{1}{\tan(\phi_k)} x + \beta, \text{ avec } \beta = \beta_1 \text{ puis } \beta = \beta_2. \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

On obtient alors :

$$x_i = \beta_i \cos(\phi_k) \sin(\phi_k), \text{ et } y_i = \beta_i \sin^2(\phi_k), \text{ pour } i = 1, 2. \quad (\text{C.7})$$

L'étalement distance est donnée par :

$$L_k = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \underbrace{2a}_\ell \sqrt{\cos^2(\phi_k) + \frac{b^2}{a^2} \sin^2(\phi_k)}. \quad (\text{C.8})$$

Enfin, les droites de vecteurs directeurs (\dot{x}_k, \dot{y}_k) et $(\cos(\theta_k), \sin(\theta_k))$ peuvent aussi être définies par leur vecteur directeur unitaire respectif $(\dot{x}_k/\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2}, \dot{y}_k/\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2})$ et $(\Delta_x/\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}, \Delta_y/\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2})$ avec $\Delta_x = x_k - x_k^r$, $\Delta_y = y_k - y_k^r$ et (x_k^r, y_k^r) les coordonnées du radar. La grandeur $\cos(\phi_k)$ est alors la projection de $(\Delta_x/\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}, \Delta_y/\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2})$ sur $(\dot{x}_k/\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2}, \dot{y}_k/\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2})$ et vaut :

$$\cos(\phi_k) = \frac{\dot{x}_k \Delta_x + \dot{y}_k \Delta_y}{\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2} \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}}. \quad (\text{C.9})$$

Quant à $\sin(\phi_k)$, c'est la projection de $(\Delta_x/\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}, \Delta_y/\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2})$ sur le vecteur orthogonal de $(\dot{x}_k/\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2}, \dot{y}_k/\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2})$, c'est-à-dire $(-\dot{y}_k/\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2}, \dot{x}_k/\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2})$ et il vaut :

$$\sin(\phi_k) = \frac{\dot{x}_k \Delta_y - \dot{y}_k \Delta_x}{\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2} \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}}. \quad (\text{C.10})$$

Finalement, (C.8) devient :

$$L_k = \ell \frac{\sqrt{(\dot{x}_k \Delta_x + \dot{y}_k \Delta_y)^2 + \frac{b^2}{a^2} (\dot{x}_k \Delta_y - \dot{y}_k \Delta_x)^2}}{\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2} \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}}. \quad (\text{C.11})$$

C.3 Remarque sur le paramétrage *a priori* du modèle elliptique

Le ratio b/a est un paramètre supplémentaire nécessaire à la modélisation du système. Il peut faire l'objet d'un choix *a priori* et peut s'interpréter, dans le contexte de la surveillance maritime, comme un paramètre de proportion entre longueur et largeur du navire.

Annexe D

Filtre *probabilistic data association* (PDA)

Sommaire

D.1	Positionnement du PDA	157
D.2	Filtre PDA	158
D.2.1	Étape de prédiction	158
D.2.2	Étape d'association	159
D.2.3	Étape de mise à jour	159

Cette annexe décrit la récursion bayésienne d'un filtre PDA [Bar09] dans un contexte de densité élevée de fausses alarmes. Un premier paragraphe positionne le filtre PDA par rapport aux autres approches disponibles tandis qu'un second paragraphe donne le détail de son fonctionnement.

D.1 Positionnement du PDA

En pistage, il arrive qu'une ambiguïté liée à l'origine des mesures disponibles apparaisse, notamment lorsque de nombreuses fausses alarmes sont présentes. Il n'est pas possible de d'identifier de manière certaine la mesure qui correspond à la détection de la cible, à cause du bruit de mesure aléatoire. Plusieurs stratégies permettent de mener l'étape de mise à jour de l'estimation de l'état de la cible malgré l'ambiguïté sur l'origine de la mesure. Dans un contexte mono-cible, sous réserve que la piste soit déjà initialisée, trois solutions sont disponibles :

- l'association mesure-piste grâce à un algorithme de type *nearest neighbor* (NN) [Bar11],
- le recours à une approche de type *multiple hypothesis tracking* (MHT) [Rei79, Kur88, Kur91],
- l'utilisation d'un filtre *probabilistic data association* (PDA) [Bar09].

L'utilisation de l'association NN se fonde sur le calcul d'une distance construite sur la vraisemblance de chacune des mesures vis-à-vis de la piste. Dans le cas d'un modèle gaussien, il s'agit d'une distance de Mahalanobis. L'association sélectionne alors la mesure la plus proche au sens de la vraisemblance pour effectuer la mise à jour de la piste. Cette approche, peu coûteuse calculatoirement, a l'inconvénient de propager une unique hypothèse pour le pistage. Dans le cas où la densité des fausses alarmes est élevée, l'association peut sélectionner régulièrement une fausse alarme, ce qui réduit la fiabilité du pistage et peut aussi le mettre en défaut. Dans ce contexte, une solution consiste à propager une hypothèse d'association par mesure disponible et à prendre une décision *a posteriori* sur la pertinence des associations effectuées. Les approches MHT sont fondées sur ce principe. Elles permettent théoriquement d'envisager toutes les hypothèses mais sont limitées à l'usage par une croissance de type factorielle sur le nombre d'hypothèses à envisager. De ce fait, les approches MHT, bien qu'elles ne conservent pas

en pratique toutes les hypothèses de manière systématique, restent très coûteuses calculatoirement. Les filtres PDA peuvent alors apparaître comme une solution de compromis. En effet, ils permettent de propager une unique hypothèse pour le pistage construite sur l'utilisation de toutes les mesures disponibles. Cependant, cela se fait au prix d'une incertitude plus grande sur l'état estimé. Dans le paragraphe suivant, nous donnons quelques détails sur le fonctionnement de ce filtre.

D.2 Filtre PDA

Dans ce paragraphe, nous présentons les expressions de la récursion d'un filtre de type PDA. Les mesures disponibles à un instant k sont les suivantes :

$$\left\{ \mathbf{z}_{k,1}, \dots, \mathbf{z}_{k,m(k)} \right\}, \quad (\text{D.1})$$

où $m(k)$ est le nombre de mesures disponibles à l'instant k .

De manière générique, les vecteurs d'état estimés ou prédit sont notés aux différents instants :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{(-)}, \quad (\text{D.2})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{(+)}, \quad (\text{D.3})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{(*)}. \quad (\text{D.4})$$

Les matrices de covariance sur l'erreur d'estimation associées permettant de caractériser les densités gaussiennes sur l'état sont données par :

$$P_{k-1|k-1} = P_{(-)}, \quad (\text{D.5})$$

$$P_{k|k-1} = P_{(+)}, \quad (\text{D.6})$$

$$P_{k|k} = P_{(*)}. \quad (\text{D.7})$$

L'objet du filtre PDA est alors de construire la densité sur l'état en utilisant toutes les mesures disponibles en fonction de leur pertinence et ainsi d'obtenir :

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{k,1}, \dots, \mathbf{z}_{k,m(k)}) = p_{(*)}(\mathbf{x}_k) = \sum_{i=0} m(k) \beta_{(*)}(i) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{k,i}). \quad (\text{D.8})$$

Le filtre s'organise en deux phases : une phase de prédiction et une phase de mise à jour. Dans le cadre de cette annexe nous faisons l'hypothèse d'une REE semblable à celle utilisée pour présenter le filtre de Kalman, c'est-à-dire des équations d'état et de mesure linéaires gaussiennes.

D.2.1 Étape de prédiction

L'étape de prédiction exploite le modèle de mouvement pour déterminer le vecteur d'état prédit :

$$\hat{\mathbf{x}}_{(+)} = F_k \hat{\mathbf{x}}_{(-)}, \quad (\text{D.9})$$

pour lequel il est possible de définir une pseudo-mesure prédite comme suit :

$$\hat{\mathbf{z}}_{(+)} = H_k \hat{\mathbf{x}}_{(+)}. \quad (\text{D.10})$$

La matrice de covariance sur l'erreur se déduit selon la formulation suivante :

$$P_{(+)} = F_k P_{(-)} F_k^T + Q_k. \quad (\text{D.11})$$

Avant de procéder à la mise à jour de l'état, le filtre PDA s'appuie sur une étape d'association.

D.2.2 Étape d'association

Dans un filtre PDA, cette étape consiste à envisager toutes les hypothèses d'association mesure-piste, à exclure celles qui sont peu vraisemblables et à calculer la probabilité d'association de celles qui sont pertinentes. Tout cela repose sur l'évaluation de la matrice de covariance de l'innovation donnée par :

$$S_k = H_k P_{(+)} H_k^T + R_k. \quad (\text{D.12})$$

Elle peut alors être utilisée pour déterminer l'associabilité de chaque mesure en calculant une distance de Mahalanobis puis en comparant cette dernière à une probabilité de *gating*.

Elle intervient également dans le calcul des probabilités d'association définies comme suit :

$$\beta_i(k) = \begin{cases} \frac{\mathcal{L}_i(k)}{1-p_D + \sum_{j=1}^{m(k)} \mathcal{L}_j(k)} & i = 1, \dots, m(k), \\ \frac{1-p_D}{1-p_D + \sum_{j=1}^{m(k)} \mathcal{L}_j(k)} & i = 0 \end{cases}, \quad (\text{D.13})$$

où :

$$\mathcal{L}_i(k) \triangleq \frac{\mathcal{N}(\mathbf{z}_{k,i}; \hat{\mathbf{z}}_{(+)}, S_k) p_D}{\lambda \mathcal{U}_f(\mathbf{z}_{k,i})}, \quad (\text{D.14})$$

avec p_D la probabilité de détection, λ le nombre attendu de fausses alarmes et $\mathcal{U}_f(\cdot)$ la loi uniforme de la position des détections issues du fouillis dans la région de surveillance.

Fort de ces probabilités d'association, il est possible de procéder à la mise à jour de l'état.

D.2.3 Étape de mise à jour

L'état estimé se met à jour à partir de la prédiction qui est corrigée par une innovation combinée. Elle-même est construite à partir de toutes les mesures disponibles. On obtient :

$$\hat{\mathbf{x}}_{(*)} = \hat{\mathbf{x}}_{(+)} + W_k \nu_k, \quad (\text{D.15})$$

où W_k est le gain et ν_k est l'innovation combinée définie par :

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{m(k)} \beta_{k,i} \nu_{k,i}. \quad (\text{D.16})$$

Les innovations sont construites dans chaque hypothèse d'association mesure-piste :

$$\nu_{k,i} = \mathbf{z}_{k,i} - \hat{\mathbf{z}}_{(+)}. \quad (\text{D.17})$$

Le gain est défini comme pour un filtre de Kalman par :

$$W_k = P_{(+)} H_k^T S_k^{-1}. \quad (\text{D.18})$$

Néanmoins, il reste à mettre à jour la matrice de covariance sur l'erreur d'estimation en tenant compte des contributions de chacune des hypothèses d'association :

$$P_{(*)} = \beta_{k,0} P_{(+)} + (1 - \beta_{k,0}) P_{(*)}^c + \tilde{P}_{(*)}, \quad (\text{D.19})$$

où $P_{(*)}^c$ est la matrice de covariance de l'erreur sur l'état estimé avec la mesure véritablement issue de la cible :

$$P_{(*)}^c = P_{(+)} - W_k S_k W_k^T, \quad (\text{D.20})$$

et $\tilde{P}_{(*)}$ est la matrice liée à la propagation des innovations [Bar01] :

$$\tilde{P}_{(*)} \triangleq W_k \left[\sum_{i=1}^{m(k)} \beta_{k,i} \nu_{k,i} \nu_{k,i}^T - \nu_k \nu_k^T \right] W_k^T. \quad (\text{D.21})$$

L'utilisation du filtre PDA dans cette thèse concerne un cas scalaire, ce qui simplifie très fortement les équations notamment en évitant toute inversion matricielle.

Annexe E

Modèles de mouvement

Sommaire

E.1	Mouvement rectiligne uniforme	161
E.2	Mouvement uniformément accéléré	163
E.3	Modèle de Singer	164

Dans cette annexe, nous nous intéressons à la description de trois types de modèles de mouvement, utilisés dans les représentations dans l'espace d'état de cette thèse. Il s'agit du mouvement rectiligne uniforme (MRU), du mouvement uniformément accéléré (MUA) et du modèle de Singer. Ils correspondent aux modèles présentés dans [Bar09].

Dans cette thèse, les représentations dans l'espace d'état utilisent un vecteur d'état \mathbf{x}_k dont les éléments sont les variables cinématiques décrivant la position, la vitesse et éventuellement l'accélération d'une cible à l'instant k . Dans un contexte de pistage de cible de surface en 2D, \mathbf{x}_k est donc de la forme suivante :

$$\mathbf{x}_k = [x_k, \dot{x}_k, y_k, \dot{y}_k]^T \text{ ou alors } \mathbf{x}_k = [x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k, y_k, \dot{y}_k, \ddot{y}_k]^T, \quad (\text{E.1})$$

avec (x_k, y_k) les coordonnées de position dans le plan d'observation, (\dot{x}_k, \dot{y}_k) celles de vitesse et enfin, (\ddot{x}_k, \ddot{y}_k) les coordonnées d'accélération.

Les représentations dans l'espace d'état sont également fondées sur une équation de modèle du type :

$$\mathbf{x}_k = f_k(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{u}_k, \quad (\text{E.2})$$

avec $f_k(\cdot)$ la fonction de transition et \mathbf{u}_k le bruit additif, tous deux dépendants du modèle de mouvement employé. Les trois modèles présentés dans cette annexe fournissent des équations de modèle linéaires. Cela implique la re-écriture de (E.2) sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}_k = F_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_k, \quad (\text{E.3})$$

avec F_k la matrice de transition liée au modèle de mouvement.

Dans la suite, nous développons les expressions de F_k et de la loi caractérisant le bruit de modèle pour les trois types considérés : MRU, MUA et modèle de Singer.

E.1 Mouvement rectiligne uniforme

Le mouvement rectiligne uniforme désigne un mouvement pour lequel la vitesse est pratiquement constante. Ainsi, l'accélération est représentée par $w(\cdot)$, un bruit blanc gaussien centré de variance σ_w^2 .

L'équation différentielle liée à l'état à temps continu t selon la coordonnée x est la suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B w(t). \quad (\text{E.4})$$

La solution générale de cette équation différentielle (E.4), dans le cas d'un système excité par une entrée $w(\cdot)$, supposée continue par morceau, est donnée par l'équation suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \exp[A(t - t_0)] \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \exp[A(t - \tau)] B w(\tau) d\tau, \quad (\text{E.5})$$

avec l'opérateur $\exp(\cdot)$, défini pour une matrice dans le cadre du calcul fonctionnel, tel que :

$$\exp[A] = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i!} A^i. \quad (\text{E.6})$$

En prenant $t = (k + 1)T$ et $t_0 = kT$, avec k l'instant discrétisé et T la période d'échantillonnage, (E.5) devient :

$$\mathbf{x}((k + 1)T) = \exp[AT] \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \exp[A((k + 1)T - \tau)] B w(\tau) d\tau. \quad (\text{E.7})$$

En effectuant le changement de variable $\tau = kT + \tau$, (E.7) s'écrit alors de la façon suivante :

$$\mathbf{x}((k + 1)T) = \exp[AT] \mathbf{x}(kT) + \int_0^T \exp[A(T - \tau)] B w(kT + \tau) d\tau. \quad (\text{E.8})$$

À ce stade du développement, en tirant profit de l'expression de la matrice A et du développement de Mc Laurin de $\exp[AT]$, on obtient :

$$\exp[AT] = I + AT = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.9})$$

En combinant (E.8) et (E.9), il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((k + 1)T) &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(kT + \tau) d\tau, \\ &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \int_0^T \begin{bmatrix} T - \tau \\ 1 \end{bmatrix} w(kT + \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

En passant d'une analyse à temps continu à une analyse à temps discret, on retrouve une équation de la forme de (E.3), telle que :

$$\mathbf{x}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F_k} \mathbf{x}_{k-1} + \underbrace{\int_0^T \begin{bmatrix} T - \tau \\ 1 \end{bmatrix} w(kT + \tau) d\tau}_{\mathbf{u}_k}. \quad (\text{E.11})$$

Dans le cas où $w(t)$ est constant sur une période T :

$$Q_k = E[\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T] = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} \frac{T^4}{4} & \frac{T^3}{2} \\ \frac{T^3}{2} & T^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.12})$$

La matrice Q_k dont l'expression est donnée dans (E.12) n'est pas inversible et n'admet pas de décomposition de Cholesky.

Dans le cas où $w(t)$ n'est pas constant sur une période T , on a alors :

$$\begin{aligned} Q_k &= E [\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T] = \sigma_w^2 \int_0^T \begin{bmatrix} T - \tau \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T - \tau \\ 1 \end{bmatrix} d\tau, \\ &= \sigma_w^2 \int_0^T \begin{bmatrix} (T - \tau)^2 & T - \tau \\ T - \tau & 1 \end{bmatrix} d\tau, \\ &= \sigma_w^2 \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Dans la sous-section suivante, le cas du mouvement uniformément accéléré est présenté.

E.2 Mouvement uniformément accéléré

Le modèle de mouvement uniformément accéléré permet de décrire un mouvement pour lequel l'accélération est pratiquement constante au cours du temps. Ainsi, la dérivée de l'accélération, appelée *jerk*, est représentée par $w(\cdot)$, un bruit blanc gaussien centré de variance σ_w^2 . L'équation différentielle liée à l'état à temps continu t selon la coordonnée x est la suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \\ \ddot{\ddot{x}}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B w(t). \quad (\text{E.14})$$

Comme pour le mouvement uniformément accéléré, la solution générale de cette équation différentielle (E.14), dans le cas d'un système excité par une entrée $w(\cdot)$, supposée continue par morceau, est donnée par l'équation suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \exp [A(t - t_0)] \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \exp [A(t - \tau)] B w(\tau) d\tau. \quad (\text{E.15})$$

En tirant profit de l'expression de la matrice A et du développement de Mc Laurin de $\exp [AT]$, on obtient :

$$\exp [AT] = I + AT + \frac{A^2 T^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.16})$$

En prenant $t = (k + 1)T$ et $t_0 = kT$, puis en combinant (E.15) et (E.16), il vient :

$$\mathbf{x}((k + 1)T) = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & T - \tau & \frac{(T - \tau)^2}{2} \\ 0 & 1 & T - \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(kT + \tau) d\tau. \quad (\text{E.17})$$

En passant d'une analyse à temps continu à une analyse à temps discret, on retrouve une équation de la forme de (E.3), telle que :

$$\mathbf{x}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F_k} \mathbf{x}_{k-1} + \underbrace{\int_0^T \begin{bmatrix} 1 & T - \tau & \frac{(T - \tau)^2}{2} \\ 0 & 1 & T - \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(kT + \tau) d\tau}_{\mathbf{u}_k}. \quad (\text{E.18})$$

Dans le cas où $w(t)$ est constant sur une période T , la matrice de covariance du bruit de modèle s'écrit :

$$Q_k = E \left[\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \right] = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} \frac{T^3}{6} \\ \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T^3}{6} & \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} \frac{T^6}{36} & \frac{T^5}{12} & \frac{T^4}{6} \\ \frac{T^5}{12} & \frac{T^4}{4} & \frac{T^3}{2} \\ \frac{T^4}{6} & \frac{T^3}{2} & T^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.19})$$

La matrice Q_k dont l'expression est donnée dans (E.19) n'est pas inversible et n'admet pas de décomposition de Cholesky.

Dans le cas où $w(t)$ n'est pas constant sur une période T :

$$\begin{aligned} Q_k &= E \left[\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \right] = \sigma_w^2 \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{(T-\tau)^2}{2} \\ T - \tau \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(T-\tau)^2}{2} & T - \tau & 1 \end{bmatrix} d\tau, \\ &= \sigma_w^2 \int_0^T \begin{bmatrix} -\frac{(T-\tau)^5}{20} & -\frac{(T-\tau)^4}{8} & -\frac{(T-\tau)^3}{6} \\ -\frac{(T-\tau)^4}{8} & -\frac{(T-\tau)^3}{3} & T\tau - \frac{\tau^2}{2} \\ -\frac{(T-\tau)^3}{6} & T\tau - \frac{\tau^2}{2} & \tau \end{bmatrix} d\tau, \\ &= \sigma_w^2 \begin{bmatrix} \frac{T^5}{20} & \frac{T^4}{8} & \frac{T^3}{6} \\ \frac{T^4}{8} & \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^3}{6} & \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Enfin, le dernier modèle de mouvement présenté dans cette annexe est le modèle de Singer.

E.3 Modèle de Singer

Dans le cas du mouvement rectiligne uniforme, l'accélération est représentée par un bruit blanc gaussien centré. Dans le cas du modèle de Singer, le vecteur d'état selon la coordonnée x est de la forme suivante :

$$\mathbf{x}(t) = [x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)]^T. \quad (\text{E.21})$$

L'accélération à l'instant t est supposée corrélée avec celle des instants précédents et suivants. Sa fonction d'autocorrélation est définie par rapport à sa variance σ_m^2 de la manière suivante :

$$r_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau) = \sigma_m^2 \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_m}\right), \quad (\text{E.22})$$

avec τ_m la constante de temps caractérisant le modèle. Pour déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'accélération, l'accélération est supposée résulter du filtrage d'un bruit blanc gaussien centré $w(\cdot)$ de variance σ_w^2 par un filtre de réponse impulsionnelle $h(\cdot)$ tel que :

$$\ddot{x}(t) = h(t) * w(t). \quad (\text{E.23})$$

Dans le domaine fréquentiel, (E.23) devient :

$$\text{TF} [\ddot{x}(t)] = H(f).W(f), \quad (\text{E.24})$$

avec $\text{TF}[\cdot]$ la transformée de Fourier. La relation entre la densité spectrale de puissance de $w(\cdot)$ et la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $r_{\ddot{x}\ddot{x}}(\cdot)$ s'exprime de la manière suivante :

$$S_{\ddot{x}\ddot{x}}(f) = \text{TF} [r_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau)] = |H(f)|^2 S_{ww}(f). \quad (\text{E.25})$$

En appliquant la transformée de Fourier à (E.22), il vient :

$$\text{TF} [r_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau)] = \frac{\frac{2\sigma_m^2}{\tau_m}}{\left(\frac{1}{\tau_m} + j2\pi f\right)\left(\frac{1}{\tau_m} - j2\pi f\right)}. \quad (\text{E.26})$$

En procédant par identification entre (E.25) et (E.26), on obtient :

$$S_{ww}(f) = \frac{2\sigma_m^2}{\tau_m} = \sigma_w^2, \quad (\text{E.27})$$

$$H(f) = \frac{1}{\frac{1}{\tau_m} + j2\pi f}. \quad (\text{E.28})$$

En reprenant l'expression (E.3), il vient :

$$W(f) = \text{TF} [\ddot{x}(t)] \left(\frac{1}{\tau_m} + j2\pi f \right). \quad (\text{E.29})$$

Dans le domaine temporel, cela équivaut à :

$$w(t) = \frac{1}{\tau_m} \ddot{x}(t) + \frac{d\dot{x}(t)}{dt}. \quad (\text{E.30})$$

Dans la suite de cette annexe, on pose $\alpha = 1/\tau_m$. L'équation différentielle à temps continu est donc la suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B w(t). \quad (\text{E.31})$$

En tirant profit de l'expression de la matrice A et du développement de Mc Laurin de $\exp[AT]$, il vient :

$$\exp[AT] = I + AT + \frac{A^2T^2}{2} + \dots = I + \begin{bmatrix} 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & -\alpha T \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & T^2 \\ 0 & 0 & -\alpha T^2 \\ 0 & 0 & \alpha^2 T^2 \end{bmatrix} + \dots \quad (\text{E.32})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T - \frac{\alpha T^2}{2} + \dots \\ 0 & 0 & 1 - \alpha T + \frac{\alpha^2 T^2}{2} + \dots \end{bmatrix}. \quad (\text{E.33})$$

Il est alors possible de montrer que dans la représentation du système dans l'espace d'état à temps discret, la matrice F_k dans le cas d'un modèle de Singer a la forme suivante :

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{1}{\alpha^2} (-1 + \alpha T + e^{-\alpha T}) \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T}) \\ 0 & 0 & e^{-\alpha T} \end{bmatrix}. \quad (\text{E.34})$$

Concernant le bruit de modèle, \mathbf{u}_k s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{u}_k = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & T - \tau & \frac{1}{\alpha^2} (-1 + \alpha(T - \tau) + e^{-\alpha(T-\tau)}) \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(T-\tau)}) \\ 0 & 0 & e^{-\alpha(T-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(kT + \tau) d\tau, \quad (\text{E.35})$$

$$= \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha^2} (-1 + \alpha(T - \tau) + e^{-\alpha(T-\tau)}) \\ \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(T-\tau)}) \\ e^{-\alpha(T-\tau)} \end{bmatrix} w(kT + \tau) d\tau. \quad (\text{E.36})$$

Ainsi, la matrice de covariance sur le bruit d'état s'écrit :

$$Q_k = 2\alpha\sigma_m^2 \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}, \quad (\text{E.37})$$

avec :

$$\begin{cases} q_{11} = \frac{1}{2\alpha^5} \left(2\alpha T - 2\alpha^2 T^2 + \frac{2\alpha^3 T^3}{3} - 4\alpha T e^{-\alpha T} - e^{-2\alpha T} + 1 \right), \\ q_{12} = \frac{1}{2\alpha^4} \left(\alpha^2 T^2 + 1 + e^{-2\alpha T} + e^{-\alpha T} (-2 + 2\alpha T) - 2\alpha T \right), \\ q_{13} = \frac{1}{2\alpha^3} \left(1 - 2\alpha T e^{-\alpha T} - e^{-2\alpha T} \right), \\ q_{22} = \frac{1}{2\alpha^3} \left(2\alpha T - 3 + 4e^{-\alpha T} - e^{-2\alpha T} \right), \\ q_{23} = \frac{1}{2\alpha^2} \left(1 - e^{-\alpha T} \right)^2, \\ q_{33} = -\frac{1}{2\alpha} \left(e^{-2\alpha T} - 1 \right). \end{cases} \quad (\text{E.38})$$

Annexe F

Fenêtres de validation

Sommaire

F.1	Fenêtre de validation	167
F.2	Fenêtre de validation pour un filtre particulière	170
F.2.1	Fenêtrage fondé sur une distance de Mahalanobis et un seuil calculé à partir d'une fonction inverse de la loi du χ^2	171
F.2.2	Fenêtrage fondé sur une distance de Mahalanobis et un seuil empirique	172

Dans cette annexe, le principe général du *gating* et de la construction des fenêtres de validation sont présentés. L'objectif du *gating* est de réduire le coût global d'un traitement de pistage sans en modifier le résultat. Pour ce faire, les mesures non-pertinentes du point de vue du traitement sont écartées. Cependant, il convient de sélectionner toutes celles potentiellement correspondantes à l'état de la cible que l'on souhaite estimer et de veiller à n'en écarter aucune sans quoi le reste du traitement est induit en erreur.

Cette présentation se limite aux cas des filtres FKE et particulière employés dans un contexte radar. Cela se traduit notamment au niveau des mesures, comprenant typiquement une mesure de distance et une mesure angulaire d'azimut. Les expressions données peuvent éventuellement s'étendre à d'autres mesures angulaires comme le site ou aux mesures de vitesse radiale relative.

F.1 Fenêtre de validation

Une fenêtre de validation, telle que nous l'entendons dans cette thèse, délimite une région dans l'espace des mesures. Si une mesure se trouve à l'intérieur, il est possible que cette dernière provienne de la cible représentée par l'état courant ; ainsi, la mesure peut être associée à cet état.

Étant donné l'état 2D \mathbf{x}_k d'une cible, en considérant (1.4), une mesure \mathbf{z}_k peut être vue comme une variable aléatoire suivant une loi gaussienne multi-variée de moyenne $h_k(\mathbf{x}_k)$ et de matrice de covariance¹ R_k . Dans la suite de l'annexe, on considère l'expression particulière de h_k suivante :

$$h_k(\mathbf{x}_k) = \left[\begin{array}{c} \sqrt{(x_k - x_{r,k})^2 + (y_k - y_{r,k})^2} \\ \arctan\left(\frac{y_k - y_{r,k}}{x_k - x_{r,k}}\right) \end{array} \right], \quad (\text{F.1})$$

où $(x_{r,k}, y_{r,k})$ sont les coordonnées du radar à l'instant k .

Pour construire la fenêtre de validation, un paramètre à choisir est la probabilité de *gating* notée p_g . La fenêtre de validation coïncide avec les $p_g \times 100$ % d'effectifs les plus proches du centre de la distribution de \mathbf{z}_k . Généralement, on opte pour $p_g = 0.99$ ou bien² $p_g = 0.9973$. Dans le cas (1.4), la

1. Si θ_k est défini modulo 2π , la loi gaussienne devient une *semi wrapped-Gaussian* [Mar99, Bah06].

2. Avec $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 99.73 % des effectifs correspondent à l'intervalle caractéristique $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$.

fenêtre de validation est une ellipse représentée sur la figure F.1.

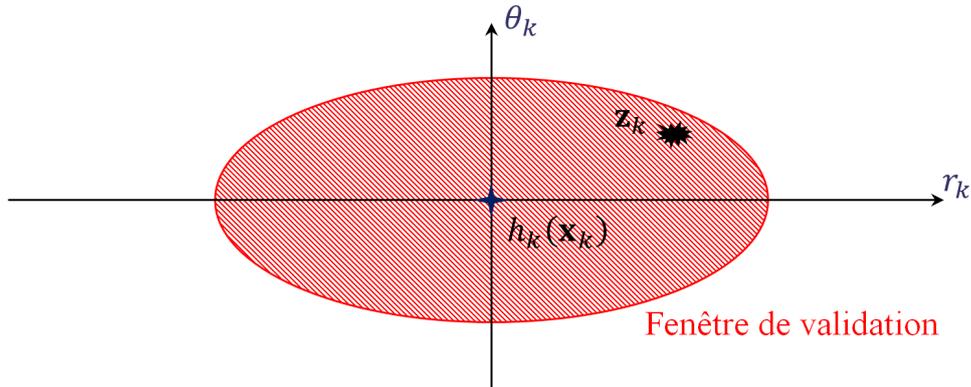


FIGURE F.1 – Fenêtre de validation dans le cas (1.4).

Le test permettant de savoir si une mesure est effectivement dans la fenêtre de validation repose sur la distance de Mahalanobis [Bar11] définie comme suit :

$$d_{Maha}^2 = (\mathbf{z}_k - h_k(\mathbf{x}_k))^T R_k^{-1} (\mathbf{z}_k - h_k(\mathbf{x}_k)). \quad (\text{F.2})$$

La variable \mathbf{z}_k suit une loi normale multi-variée conditionnellement à \mathbf{x}_k définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) &= \frac{1}{\det(2\pi R_k)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_k - h_k(\mathbf{x}_k))^T R_k^{-1} (\mathbf{z}_k - h_k(\mathbf{x}_k))\right) \\ &= \frac{1}{\det(2\pi R_k)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} d_{Maha}^2\right), \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Ainsi, une distance d_{Maha}^2 donnée définit une courbe d'équiprobabilité pour $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)$. De plus comme \mathbf{z}_k suit une loi normale multi-variée conditionnellement à \mathbf{x}_k , d_{Maha}^2 suit une loi du χ^2 à 2 degrés de liberté³. Ainsi la frontière de la fenêtre de validation est donnée par la fonction de répartition inverse de la loi du χ^2 évaluée pour l'effectif cumulé p_g . Les aires associées à 68.27%, 95.45% et 99.73% des effectifs pour une loi gaussienne $\mathcal{N}([\mu_r, \mu_\theta]^T, \text{diag}(\sigma_r^2, \sigma_\theta^2))$ sont représentées sur la figure F.2. Les distances de Mahalanobis au carré associées aux frontières 68.27%, 95.45% et 99.73% sont représentées sur la figure F.3.

Cependant dans la pratique, lors d'une estimation de trajectoire, nous n'avons pas directement accès à l'état réel \mathbf{x}_k , mais à son estimation reposant sur des instants précédents. Par exemple avec un FKE, pour décider si \mathbf{z}_k peut correspondre à l'état estimé $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$, un état prédit $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ est déduit de (1.7) ainsi que sa matrice de covariance sur l'erreur d'estimation prédite notée $P_{k|k-1}$. On peut alors donner le développement de Taylor d'ordre 1 suivant :

$$h_k(\mathbf{x}_k) \approx h_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + H_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (\text{F.4})$$

avec H_k le jacobien permettant de linéariser l'expression de h_k (F.1). En remplaçant \mathbf{x}_k dans (1.4) par son expression donnée dans (F.4), on obtient :

$$\mathbf{z}_k \approx h_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + H_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{v}_k, \quad (\text{F.5})$$

Ainsi, une mesure plausible serait centrée sur $h_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$. Cette fois, la matrice de covariance du bruit de mesure R_k ne suffit pas pour décrire l'incertitude que l'on a sur l'état dans l'espace des mesures. En

3. Le nombre de degrés de liberté dépend de la taille du vecteur \mathbf{z}_k , dans notre cas il vaut 2.

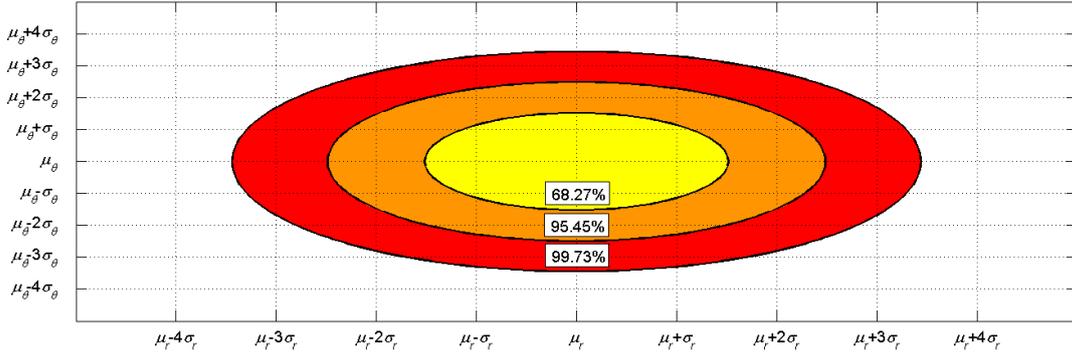


FIGURE F.2 – Aires associées à 68.27%, 95.45% et 99.73% des effectifs pour une loi gaussienne de moyenne $[\mu_r, \mu_\theta]^T$ et de matrice de covariance $\text{diag}(\sigma_r^2, \sigma_\theta^2)$.

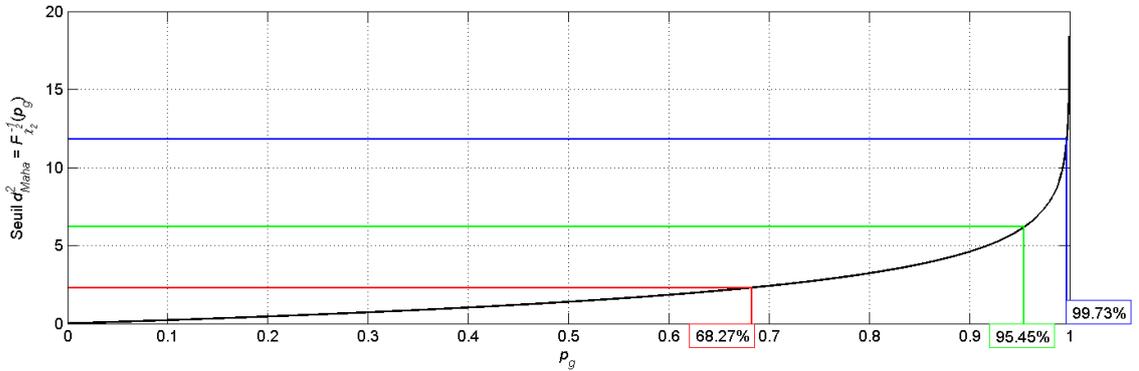


FIGURE F.3 – Distances de Mahalanobis au carré associées aux frontières 68.27%, 95.45% et 99.73%.

effet, l'incertitude liée aux prédictions précédentes doit être prise en compte. On aboutit à la matrice de covariance⁴ représentative suivante :

$$\begin{aligned}
 S_k &= \text{E} \left[\left(\mathbf{z}_k - h_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \right) \left(\mathbf{z}_k - h_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \right)^T \right] \\
 &= \text{E} \left[\left(H_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{v}_k \right) \left(H_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{v}_k \right)^T \right] \\
 &= H_k \text{E} \left[\left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right)^T \right] H_k^T + 0 + 0 + \text{E} \left[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \right] \\
 &= H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k.
 \end{aligned} \tag{F.6}$$

La distance de Mahalanobis réellement calculée est alors la suivante :

$$d_{Maha}^2 = \left(\mathbf{z}_k - h_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \right)^T S_k^{-1} \left(\mathbf{z}_k - h_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \right). \tag{F.7}$$

Cette distance est comparée au seuil calculé à partir de la fonction de répartition inverse de la loi du χ^2 et d'une probabilité de *gating* p_g . Cela revient à faire l'approximation que \mathbf{z}_k suit une loi normale centrée sur $h_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$ et de matrice de covariance S_k . La situation est résumée par la figure F.4. Dans (F.6), une trop forte non-linéarité liée au modèle de mesure ne permet pas d'obtenir une matrice d'innovation S_k représentative de la réalité. Dès lors, la fenêtre de validation est trop grande ou trop petite. Cela peut conduire à rejeter une mesure qui serait en réalité bien issue de la cible

4. Dénommée matrice de covariance de l'innovation.

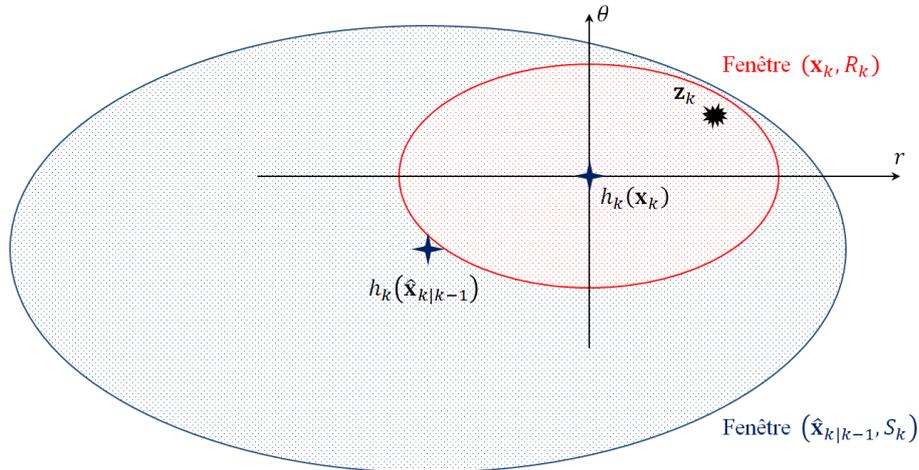


FIGURE F.4 – Fenêtre de validation d'un EKF dans le cas (1.4).

d'intérêt. De plus, la vraie distribution conditionnelle des mesures n'est pas nécessairement gaussienne de sorte qu'utiliser directement une distance de Mahalanobis pour définir les contours de la fenêtre n'est pas nécessairement pertinent. Il est important de noter que dans le cas d'une forte non-linéarité, l'estimation du vecteur d'état par un FKE est directement affectée par une mauvaise évaluation de S_k qui intervient dans le calcul du gain de Kalman.

Dans la sous-section suivante, nous nous intéressons à la construction d'une fenêtre de validation pour un filtre particulière.

F.2 Fenêtre de validation pour un filtre particulière

Avec un filtre de Kalman, la distribution estimée sur l'état à un instant k est représentée par un vecteur d'état $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ et une matrice de covariance sur l'erreur d'estimation $P_{k|k}$. Cela revient à considérer une gaussienne multi-variée. Avec un filtre particulière, la distribution estimée sur l'état est représentée par un nuage de particules :

$$\left\{ \omega_{k|k}^{(i)}, \mathbf{x}_{k|k}^{(i)} \right\}_{i=1, \dots, N}, \quad (\text{F.8})$$

avec N le nombre de particules, $\{\mathbf{x}_{k|k}^{(i)}\}_{i=1, \dots, N}$ l'ensemble des particules et $\{\omega_{k|k}^{(i)}\}_{i=1, \dots, N}$ l'ensemble de leur poids. $\mathbf{x}_{k|k}^{(i)}$ est un élément de l'espace d'état. Dès lors, la distribution sur l'état est approchée par :

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \sum_{i=1}^N \omega_{k|k}^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_{k|k}^{(i)}}(\mathbf{x}_k). \quad (\text{F.9})$$

Les deux manières de représenter l'état sont résumées sur la figure F.5 : (a) pour un filtre de Kalman et (b) pour un filtre particulière.

Le principe du filtre particulière est d'explorer les régions pertinentes de l'espace d'état (là où la distribution sur l'état est non nulle) en y plaçant aléatoirement des particules, puis en calculant un poids pour chacune d'elles. Ces poids dépendent de la distribution à estimer et sont d'autant plus grands que la particule qui leur est associée est pertinente du point de vue de l'exploration de l'espace d'état. Grâce à cette représentation (F.9), il est possible de représenter une distribution sur l'état non-gaussienne. L'incertitude sur l'estimation de l'état est contenue dans la dispersion spatiale des particules ainsi que dans leur poids. Dans le cas où la distribution sur l'état est bien une gaussienne multi-variée, il est possible de lier les éléments de représentation du filtre de Kalman et du filtre

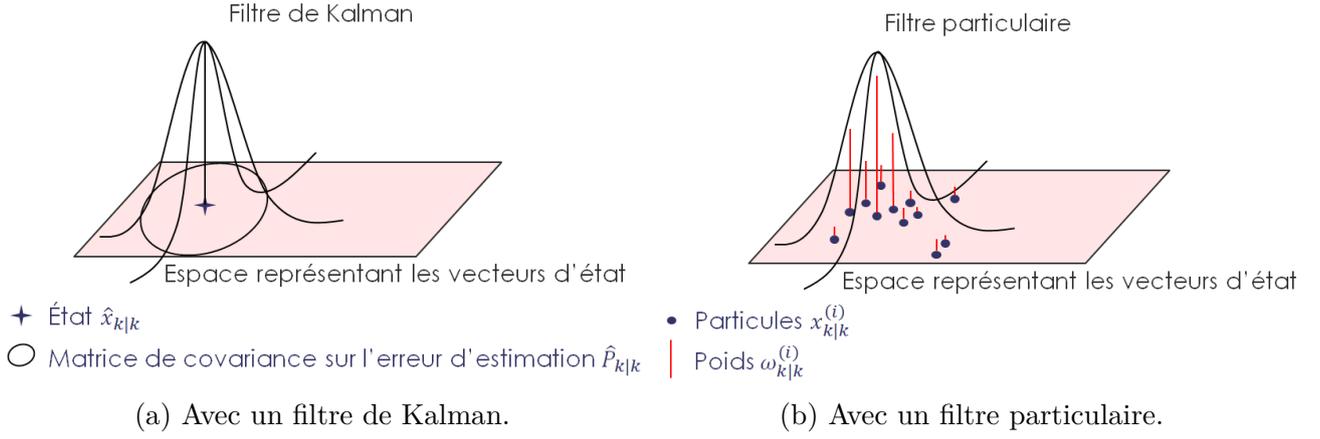


FIGURE F.5 – Représentation des distributions sur l'espace d'état.

particulaire. Ainsi, l'état estimé $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ coïncide avec le barycentre des particules pondérées par leur poids. La matrice de covariance $P_{k|k}$ trouve son homologue dans la matrice de covariance empirique calculée comme suit :

$$\tilde{P}_{k|k} = \sum_{i_1=1}^N \omega_{k|k}^{(i_1)} \left(\mathbf{x}_{k|k}^{(i_1)} - \left[\sum_{i_2=1}^N \omega_{k|k}^{(i_2)} \mathbf{x}_{k|k}^{(i_2)} \right] \right) \left(\mathbf{x}_{k|k}^{(i_1)} - \left[\sum_{i_2=1}^N \omega_{k|k}^{(i_2)} \mathbf{x}_{k|k}^{(i_2)} \right] \right)^T. \quad (\text{F.10})$$

Dans les sous-sections suivantes, nous présentons deux méthodes pour construire des fenêtres de validation pour un filtre particulaire.

F.2.1 Fenêtrage fondé sur une distance de Mahalanobis et un seuil calculé à partir d'une fonction inverse de la loi du χ^2

Une fenêtre de validation analogue à la fenêtre d'un FKE peut être construite. Les particules et les poids après l'étape de prédiction sont considérés, *i.e.* $\{\omega_{k|k-1}^{(i)}, \mathbf{x}_{k|k-1}^{(i)}\}_{i=1,\dots,N}$. La première étape consiste à passer les particules dans l'espace des mesures, ce qui revient à calculer $\{h_k(\mathbf{x}_{k|k-1}^{(i)})\}_{i=1,\dots,N}$. En y ajoutant des termes de bruit tirés selon R_k , on obtient des pseudo mesures $\tilde{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{(i)}$. Il s'agit de particules représentatives de la connaissance *a priori* sur la distribution des mesures de l'instant k . Plus précisément, il s'agit de réalisations de la loi $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})$. Le centre de la distribution est donné par la somme pondérée $\boldsymbol{\mu}_{swg}$ des pseudo mesures $\tilde{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{(i)} = [\tilde{r}_{k|k-1}^{(i)}, \tilde{\theta}_{k|k-1}^{(i)}]^T$, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{\mu}_{swg} = [\mu_r, \mu_\theta]^T = \left[\sum_{i=1}^N \omega_{k|k-1}^{(i)} \tilde{r}_{k|k-1}^{(i)}, \arg \left(\sum_{i=1}^N \omega_{k|k-1}^{(i)} e^{j\tilde{\theta}_{k|k-1}^{(i)}} \right) \right]^T. \quad (\text{F.11})$$

La matrice analogue à la matrice de covariance de l'innovation est la suivante :

$$\tilde{S}_k = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \omega_{k|k-1}^{(i)} (\tilde{r}_{k|k-1}^{(i)} - \mu_r)^2 & \sum_{i=1}^N \omega_{k|k-1}^{(i)} (\tilde{r}_{k|k-1}^{(i)} - \mu_r) d_{swg}(\tilde{\theta}_{k|k-1}^{(i)} - \mu_\theta) \\ \sum_{i=1}^N \omega_{k|k-1}^{(i)} d_{swg}(\tilde{\theta}_{k|k-1}^{(i)} - \mu_\theta) (\tilde{r}_{k|k-1}^{(i)} - \mu_r) & \sum_{i=1}^N \omega_{k|k-1}^{(i)} d_{swg}^2(\tilde{\theta}_{k|k-1}^{(i)} - \mu_\theta) \end{bmatrix}, \quad (\text{F.12})$$

avec :

$$d_{swg}(\theta) = \begin{cases} -2\pi + \theta, & \text{si } \theta > \pi, \\ 2\pi + \theta, & \text{si } \theta < -\pi, \end{cases} \quad \text{et } \theta \in] -2\pi, 2\pi]. \quad (\text{F.13})$$

Les calculs de moyenne et de covariance dans (F.11) et (F.12) sont menés dans le cadre des statistiques directionnelles [Bah06]. Pour une mesure $\mathbf{z}_k = [r_k, \theta_k]^T$, il est alors possible de calculer la distance de Mahalanobis suivante :

$$d_{Maha,PF}^2 = \begin{bmatrix} r_k - \mu_r \\ d_{swg}(\theta_k - \mu_\theta) \end{bmatrix}^T \tilde{S}_k^{-1} \begin{bmatrix} r_k - \mu_r \\ d_{swg}(\theta_k - \mu_\theta) \end{bmatrix}. \quad (\text{F.14})$$

En considérant que \mathbf{z}_k suit une loi gaussienne de moyenne $\boldsymbol{\mu}_{swg}$ et de matrice de covariance \tilde{S}_k , la distance au carré $d_{Maha,PF}^2$ (F.14) est comparée au seuil calculé à partir de la fonction de répartition inverse de la loi du χ^2 et d'une probabilité de *gating* p_g .

Dans certains cas cependant, approcher la distribution de \mathbf{z}_k par une loi *semi-wrapped Gaussian* est une trop forte simplification à cause d'une non-linéarité trop importante introduite par le modèle de mesure. La distance de Mahalanobis peut continuer à être calculée sans approximation, mais elle ne suit plus une loi du χ^2 de sorte que le seuil considéré n'est plus valide. Dans la sous-partie suivante, nous proposons de définir différemment le seuil de validation.

F.2.2 Fenêtrage fondé sur une distance de Mahalanobis et un seuil empirique

Dans cette partie, nous proposons de calculer un seuil à partir des pseudo mesures $\tilde{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{(i)}$. En effet, $\{\omega_{k|k-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{(i)}\}_{i=1,\dots,N}$ représente la loi de prédiction $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})$. Pour chaque pseudo-mesure, une distance de Mahalanobis au carré peut être calculée de la manière suivante :

$$\left(d_{Maha}^{(i)}\right)^2 = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{k|k-1}^{(i)} - \mu_r \\ d_{swg}(\tilde{\theta}_{k|k-1}^{(i)} - \mu_\theta) \end{bmatrix}^T \tilde{S}_k^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{r}_{k|k-1}^{(i)} - \mu_r \\ d_{swg}(\tilde{\theta}_{k|k-1}^{(i)} - \mu_\theta) \end{bmatrix}. \quad (\text{F.15})$$

Il est possible de déterminer l'effectif empirique cumulé des distances au carré. Le seuil empirique est alors donné par la distance au carré pour laquelle $p_g \times 100\%$ des distances sont inférieures. Le principe de cette méthode est illustrée par la figure F.6. Comme p_g est généralement plus grand que 0.9, il peut être utile d'utiliser une méthode d'estimation à noyau de la fonction de répartition [Ser09] pour compenser la rareté des particules en queue de distribution.

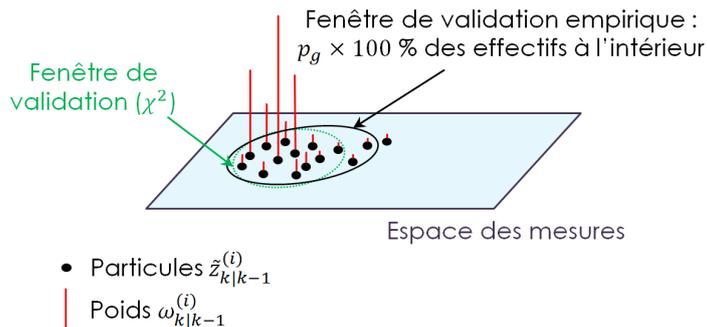


FIGURE F.6 – Fenêtre de validation empirique.

Dans certains cas, cette approche montre également ses limites. Par exemple, lorsque les trajectoires de deux cibles sont proches pendant plusieurs instants. À ce moment-là, deux mesures apparaissent relativement proches à plusieurs reprises et participent potentiellement toutes les deux à l'estimation des deux pistes. La distribution sur l'état devient bi-modale. Lorsque les deux cibles s'éloignent, les deux modes deviennent nettement séparés. La fenêtre de validation décrite ci-dessus a alors tendance à grossir sans pour autant décrire fidèlement l'incertitude dans l'espace des mesures. Des mesures pertinentes pour l'estimation peuvent alors être rejetées.

Bibliographie

- [Ara09] I. Arasaratnam et S. Haykin. *Cubature Kalman Filters*. Transactions on Automatic Control, vol. 54, pages 1254–1259, 2009.
- [Ath68] M. Athans, R. Wishner, et A. Bertolini. *Suboptimal state estimation for continuous-time nonlinear systems from discrete noisy measurements*. Transactions on Automatic Control, vol. 13, pages 504–514, 1968.
- [Bah06] C. Bahlmann. *Directional features in online handwriting recognition*. Pattern Recognition, vol. 39, no.1, pages 115–125, 2006.
- [Bar01] Y. Bar-Shalom, X. R. Li, et T. Kirubarajan. *Estimation with applications to tracking and navigation: theory, algorithms and software*. John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [Bar09] Y. Bar-Shalom, F. Daum, et J. Huang. *The probabilistic data association filter*. Control Systems, vol. 29, pages 82–100, 2009.
- [Bar11] Y. Bar-Shalom, P. Willett, et X. Tian. *Tracking and data fusion: a handbook of algorithms*. YBS Publishing, 2011.
- [Bar15] P. Barrios, G. Naqvi, M. Adams, K. Leung, et F. Inostroza. *The cardinalized optimal linear assignment (COLA) metric for multi-object error evaluation*. Conference on Information Fusion, pages 271–279, 2015.
- [Bau15] M. Baum, B. Balasingam, P. Willett, et U. Hanebeck. *OSPA barycenters for clustering set-valued data*. Conference on Information Fusion, pages 1375–1381, 2015.
- [Bea12] M. Beard, B.-T. Vo, B.-N. Vo, et S. Arulampalam. *Gaussian mixture PHD and CPHD filtering with partially uniform target birth*. Conference on Information Fusion, pages 535–541, 2012.
- [Bla99] S. Blackman et R. Popoli. *Design and analysis of modern tracking systems*. Artech House Publishers, 1999.
- [Cha01] S. Challa et G. W. Pulford. *Joint target tracking and classification using radar and ESM sensors*. Transactions on Aerospace and Electronics Systems, vol. 37, pages 1039–1055, 2001.
- [Che00] R. Chen et S. J. Liu. *Mixture Kalman filters*. Journal of the Royal Statistical Society, vol. 62, no. 3, pages 493–508, 2000.
- [Che17] D. Chen, C. Li, et H. Ji. *Multi-target joint detection, tracking and classification with merged measurements using generalized labeled multi-Bernoulli filter*. Conference on Information Fusion, pages 1–8, 2017.
- [Chl14] C. Chlebek et U. D. Hanebeck. *Pole-based distance measure for change detection in linear dynamic systems*. Conference on Information Fusion, 2014.
- [Dal03] D. Daley et D. Vere-Jones. *An introduction to the theory of point processes, volume 1: Elementary theory and methods*. Springer, second edition, 2003.
- [Dou01] A. Doucet, N. de Freitas, et N. Gordon. *Sequential Monte Carlo methods in practice*. Springer-Verlag, 2001.

- [Dou02] A. Doucet et C. Andrieu. *Particle filtering for partially observed gaussian state space models*. Journal of the Royal Statistical Society, vol. 64, no. 4, pages 827–836, 2002.
- [Eat83] M. L. Eaton. *Multivariate statistics: a vector space approach*, pages 116–117. John Wiley and Sons, 1983.
- [Erd05] O. Erdinc, P. Willett, et Y. Bar-Shalom. *Probability hypothesis density filter for multitarget multisensor tracking*. Conference on Information Fusion, 2005.
- [Gue10] M. Guerriero, L. Svensson, D. Svensson, et P. Willett. *Shooting two birds with two bullets: how to find minimum mean OSPA estimates*. Conference on Information Fusion, pages 1–8, 2010.
- [Gus10] F. Gustafsson. *Particle filter theory and practice with positioning applications*. Aerospace and Electronic Systems Magazine, vol. 25, no. 7, pages 53–82, 2010.
- [He13] X. He, R. Tharmarasa, T. Kirubarajan, et T. Thayaparan. *A track quality based metric for evaluating performance of multitarget filters*. Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 49, no. 49, pages 610–616, 2013.
- [Ho64] Y.-C. Ho et R. Lee. *A Bayesian approach to problems in stochastic estimation and control*. Transactions on Automatic Control, vol. 9, no. 4, pages 333–339, 1964.
- [Hof04] J. Hoffman et R. Mahler. *Multitarget miss distance via optimal assignment*. Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol. 34, no. 3, pages 327–336, 2004.
- [Kal60] R. Kalman. *A new approach to linear filtering and prediction problems*. ASME-Journal of Basic Engineering, vol. 82, pages 35–45, 1960.
- [Kuh55] H. W. Kuhn. *The Hungarian method for the assignment problem*. Naval Research Logistics Quarterly, vol. 2, pages 83–97, 1955.
- [Kur88] T. Kurien et M. Liggins. *Report-to-target assignment in multisensor multitarget tracking*. Conference on Decision and Control, pages 2484–2488, 1988.
- [Kur91] T. Kurien. *Framework for integrated tracking and identification of multiple targets*. Conference on Digital Avionics Systems, pages 362–366, 1991.
- [Leg17] L. Legrand, A. Giremus, E. Grivel, L. Ratton, et B. Joseph. *Bernoulli filter based algorithm for joint target tracking and classification in a cluttered environment*. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2017.
- [Leg18a] L. Legrand, A. Giremus, E. Grivel, L. Ratton, et B. Joseph. *Generative model and associated metric for coordinated-motion target groups*. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2018.
- [Leg18b] L. Legrand, A. Giremus, E. Grivel, L. Ratton, B. Joseph, et C. Magnant. *A hierarchical LMB/PHD filter for multiple groups of targets with coordinated motions*. Conference on Information Fusion, 2018.
- [Ler93] D. Lerro et Y. Bar-Shalom. *Tracking with debiased consistent converted measurements versus EKF*. Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 29, no. 3, pages 1015–1022, 1993.
- [Li16] M. Li, Z. Jing, P. Dong, et H. Pan. *Multi-target joint detection, tracking and classification using generalized labeled multi-Bernoulli filter with Bayes risk*. Conference on Information Fusion, pages 680–687, 2016.
- [Mag15a] C. Magnant, A. Giremus, E. Grivel, L. Ratton, et B. Joseph. *Joint tracking and classification based on kinematic and target extent measurements*. Conference on Information Fusion, pages 1748–1755, 2015.
- [Mag16a] C. Magnant, A. Giremus, E. Grivel, L. Ratton, et B. Joseph. *Multi-target tracking using a PHD-based joint tracking and classification algorithm*. Radar Conference, 2016.

- [Mag18] C. Magnant, S. Kemkemian, et L. Zimmer. *Joint tracking and classification for extended targets in maritime surveillance*. Radar Conference, pages 1117–1122, 2018.
- [Mah03] R. Mahler. *Multitarget Bayes filtering via first-order multitarget moments*. Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 39, no. 4, pages 1152–1178, 2003.
- [Mah07] R. Mahler. *PHD filters of higher order in target number*. Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 43, no. 4, pages 1523–1543, 2007.
- [Mar99] K. Mardia et P. E. Jupp. *Directional Statistics*. Wiley, 1999.
- [Mei04] W. Mei, G.-L. Shan, et X. R. Li. *An efficient Bayesian algorithm for joint target tracking and classification*. Conference on Signal Processing, pages 2090–2098, 2004.
- [Mih14] L. Mihaylova, A. Y. Carmi, F. Septier, A. Gning, S. K. Pang, et S. Godsill. *Overview of Bayesian sequential Monte Carlo methods for group and extended object tracking*. Digital Signal Processing, vol. 25, pages 1–16, 2014.
- [Nag11] S. Nagappa, D. E. Clark, et R. Mahler. *Incorporating track uncertainty into the OSPA metric*. Conference on Information Fusion, pages 1–8, 2011.
- [Naj06] M. Najim. *Modélisation, estimation et filtrage optimal en traitement du signal*. Hermes Science Publications, 2006.
- [Qui00] B. M. Quine. *A derivative-free implementation of the extended Kalman filter*. Automatica, vol. 42, pages 1927–1934, 2000.
- [Rah17] A. S. Rahmathullah, Á. F. García-Fernández, et L. Svensson. *Generalized optimal sub-pattern assignment metric*. Conference on Information Fusion, pages 1–8, 2017.
- [Rei79] D. Reid. *An algorithm for tracking multiple targets*. Transactions on Automatic Control, vol. 24, no. 6, pages 843–854, 1979.
- [Reu14a] S. Reuter, B.-T. Vo, B.-N. Vo, et K. Dietmayer. *The labeled multi-Bernoulli filter*. Transactions on Signal Processing, vol. 62, no. 12, pages 3246–3260, 2014.
- [Reu14b] S. Reuter. *Multi-object tracking using random finite sets*. Thèse de doctorat, Ulm university, 2014.
- [Ris04] B. Ristic, N. Gordon, et A. Bessel. *On target classification using kinematic data*. Journal on Information Fusion, vol. 5, pages 15–21, 2004.
- [Ris10] B. Ristic, D. Clark, et B.-N. Vo. *Improved SMC implementation of the PHD filter*. Conference on Information Fusion, pages 1–8, 2010.
- [Ris10b] B. Ristic, B.-N. Vo, et D. Clark. *Performance evaluation of multi-target tracking using the OSPA metric*. Conference on Information Fusion, pages 1–7, 2010.
- [Ris11] B. Ristic, B.-N. Vo, D. Clark, et B.-T. Vo. *A metric for performance evaluation of multi-target tracking algorithms*. Transactions on Signal Processing, vol. 59, no. 7, pages 3452–3457, 2011.
- [Ris12a] B. Ristic, D. Clark, B.-N. Vo, et B.-T. Vo. *Adaptive target birth intensity for PHD and CPHD filters*. Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 48, no. 2, pages 1656–1668, 2012.
- [Ris12b] B. Ristic et A. Farina. *Joint detection and tracking using multi-static doppler-shift measurements*. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, pages 3881–3884, 2012.
- [Ris13] B. Ristic, B.-T. Vo, B.-N. Vo, et A. Farina. *A tutorial on Bernoulli filters: theory, implementation and applications*. Transactions on Signal Processing, pages 3406–3430, 2013.
- [Rot11] M. Roth et F. Gustafsson. *An efficient implementation of the second order extended Kalman filter*. Conference on Information Fusion, pages 1–6, 2011.

- [Sal03] D. J. Salmond et M. C. Parr. *Track maintenance using measurements of target extent*. Radar, Sonar and Navigation, vol. 150, pages 389–395, 2003.
- [Sch08] D. Schuhmacher, B.-T. Vo, et B.-N. Vo. *A consistent metric for performance evaluation of multi-object filters*. Transactions on Signal Processing, vol. 56, no. 8, pages 3447–3457, 2008.
- [Sch08b] D. Schuhmacher et A. Xia. *A new metric between distributions of point processes*. Advances in Applied Probability, vol. 40, no. 3, pages 651–672, 2008.
- [Ser09] R. Servien. *Estimation de la fonction de répartition : revue bibliographique*. Journal de la Société Française de Statistique, vol. 150, no.2, pages 84–104, 2009.
- [Shi17] X. Shi, F. Yang, F. Tong, et H. Lian. *A comprehensive performance metric for evaluation of multi-target tracking algorithms*. Conference on Information Management, pages 373–377, 2017.
- [Swa13] A. Swain. *Group and extended target tracking with the probability hypothesis density filter*. Thèse de doctorat, Heriot Watt University, 2013.
- [Vo13a] B.-T. Vo et B.-N. Vo. *Labeled random finite sets and multi-object conjugate priors*. Transactions on Signal Processing, vol. 61, no. 13, pages 3460–3475, 2013.
- [Vo13b] B.-T. Vo, B.-N. Vo, et A. Cantoni. *The cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli filter and its implementations*. Transactions on Signal Processing, vol. 7, no. 3, pages 399–409, 2013.
- [Vo14] B.-N. Vo, B.-T. Vo, et D. Phung. *Labeled random finite sets and the Bayes multi-target tracking filter*. Transactions on Signal Processing, vol. 62, no. 24, pages 6554–6567, 2014.
- [Vo17] B.-N. Vo, B.-T. Vo, et H. G. Hoang. *An efficient implementation of the generalized labeled multi-Bernoulli filter*. Transactions on Signal Processing, vol. 65, no. 8, pages 1975–1987, 2017.
- [Wan01] E. A. Wan et R. V. de Merve. *Kalman filtering and neural networks*, chapitre 7. Wiley, 2001.