



**HAL**  
open science

# Calage en ligne d'un modèle dynamique de trafic routier pour l'estimation en temps réel des conditions de circulation

Aurélien Clairais

► **To cite this version:**

Aurélien Clairais. Calage en ligne d'un modèle dynamique de trafic routier pour l'estimation en temps réel des conditions de circulation. Infrastructures de transport. Université de Lyon, 2019. Français. NNT : 2019LYSET004 . tel-02301763

**HAL Id: tel-02301763**

**<https://theses.hal.science/tel-02301763>**

Submitted on 30 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2019LYSET004

## **THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON**

opérée au sein de

**l'École Nationale des Travaux Publics de l'Etat**

**École Doctorale ED162**

**Mécanique – Energétique – Génie Civil – Acoustique**

**Spécialité de doctorat : Génie Civil**

Soutenue publiquement le 12/04/2019, par :

**Aurélien CLAIRAIS**

---

# **Calage en ligne d'un modèle dynamique de trafic routier pour l'estimation en temps réel des conditions de circulation**

---

Devant le jury composé de :

Laure TOUGNE, Professeur, Université Lyon 2..... Présidente de jury  
Florian DE VUYST, Professeur, Université Technologique de Compiègne..... Examineur  
Vincent AGUILERA, Ingénieur Divisionnaire des TPE, DIRIF..... Rapporteur  
Lyudmila MIHAYLOVA, Professeur, University of Sheffield..... Rapporteur

Nour-Eddin EL FAOUZI, Directeur de Recherche, IFSTTAR-ENTPE..... Directeur de thèse  
Aurélien DURET, Ingénieur des TPE, IFSTTAR-ENTPE..... Directeur de thèse



*Thèse préparée au sein du laboratoire*

**LICIT**

Laboratoire Ingénierie Circulation Transports

UMR T\_E IFSTTAR-ENTPE

Université de Lyon

IFSTTAR

COSYS/LICIT

25 Avenue François Mitterrand

Case 24

Cité des mobilités

69675 Bron Cedex, France

ENTPE

LICIT

Rue Maurice Audin

69518 Vaulx-en-Velin Cedex, France

# CALAGE EN LIGNE D'UN MODÈLE DYNAMIQUE DE TRAFIC ROUTIER POUR L'ESTIMATION EN TEMPS RÉEL DES CONDITIONS DE CIRCULATION.

## Résumé :

Les modèles de trafic ont une importance capitale pour la compréhension et la prévision des phénomènes liés aux conditions de circulation. Ils représentent une aide précieuse à tous les niveaux de gestion du trafic. Cette thèse s'attache aux problématiques liées à la gestion du trafic au quotidien. Pour les gestionnaires de réseaux, quatre enjeux sont traités. L'enjeu de **rapidité** renvoie au choix de l'échelle de représentation et la formulation du modèle d'écoulement. Le modèle retenu est le modèle LWR lagrangien-spatial. La **fiabilité** est un enjeu relatif à la prise en compte des erreurs de modèles dans les estimations des conditions de circulation. La **réactivité** est décrite comme la capacité de la méthode à prendre en compte en temps réel les états de trafic captés. Enfin, l'**adaptabilité** renvoie à la capacité des paramètres de la méthode à évoluer en tenant compte des situations de trafic observées.

Les verrous scientifiques que les travaux présentés cherchent à lever s'articulent autour des quatre enjeux décrits précédemment. L'intégration de la propagation des incertitudes directement dans le modèle d'écoulement représente un premier verrou. Ensuite, la production d'indicateurs opérationnels rendant compte de la fiabilité des résultats. Concernant l'enjeu de réactivité, les verrous scientifiques traités sont la mise en place d'un schéma d'assimilation de données séquentiel et le calage des conditions internes du modèle d'écoulement intégrant les erreurs de modèle et d'observation. Enfin, concernant l'enjeu de réactivité, le verrou scientifique associé est le calage en ligne des paramètres du modèle d'écoulement.

Un modèle de suivi d'erreur où les variables du modèle d'écoulement sont distribuées selon des mélanges de gaussienne est développé. Le suivi des erreurs dans le modèle est réalisé grâce à une méthode de perturbation adaptée à la formulation multi-composantes des mélanges de gaussiennes. Une analyse de sensibilité est menée afin d'établir le lien entre la robustesse de la méthode proposée et la discrétisation du réseau, le nombre de composantes dans le mélange de gaussiennes et les erreurs sur les paramètres du modèle d'écoulement. Ce modèle permet la production d'indicateurs opérationnels et leurs erreurs associées rendant compte de la fiabilité des conditions de circulation ainsi estimées. Les indicateurs opérationnels proposés sont les temps de parcours avec intervalle de confiance, et les diagrammes espace-temps avec intégration des écarts-types des variables de débit et de vitesse.

Le processus d'assimilation séquentielle permet d'estimer et de prévoir les conditions de trafic en accord avec les observations en cas de demande et d'offre non calées. L'état *a posteriori* est calculé à l'aide d'une formulation bayésienne connaissant les états *a priori* et les observations. Deux méthodes de mise à jour du modèle ont été testées. Devant les incohérences du modèle, introduites par la méthode de substitution des états *a priori* par les états *a posteriori*, la mise à jour agit aussi sur les véhicules via l'ajout, la suppression, l'avancement ou le retardement de leurs temps de passage. La validation des concepts étudiés est réalisée sur un réseau composé d'un simple lien homogène sans discontinuité.

Lorsque les paramètres de l'écoulement du trafic ne sont pas calés, l'assimilation de données seule ne permet pas de propager correctement les états de trafic en accord avec la situation observée. Le calage des paramètres d'écoulement est traité dans un chapitre d'ouverture dans lequel des pistes de recherche sont suggérées afin de proposer des solutions à ce dernier verrou scientifique.

Les travaux de cette thèse ouvrent la voie à des perspectives de recherche et opérationnelles. En effet, il est intéressant de quantifier le renforcement apporté par les méthodes modèle-centrées aux méthodes données-centrées usuelles dans l'estimation en temps réel et la prévision à court-terme des conditions de circulation. De plus, les méthodes développées, associées aux pistes de recherche évoquées, pourraient représenter un apport considérable aux outils d'aide à la gestion du trafic au quotidien.

## Mots-clés :

trafic routier, modélisation, dynamique, mésoscopique, propagation d'erreurs, assimilation de données, calage

# ONLINE CALIBRATION OF A DYNAMIC TRAFFIC MODEL FOR REAL TIME TRAFFIC STATES ESTIMATION.

## Abstract :

Traffic models are of paramount importance for understanding and forecasting traffic dynamics. They represent a significant decision support tool for all stages of traffic management. This thesis focuses on issues related to daily traffic management. For road network managers, four challenges are addressed. The **speed** refers to the choice of the scale of representation and formulation of the flow model. The selected model is the Lagrangian-Space LWR model. The **reliability** is associated to the integration of model errors into the traffic estimation process. The **reactivity** is described as the capacity of the method to account for prevailing traffic states in real time. Finally, the **versatility** refers to the capability of the mode and its parameters to evolve dynamically by considering the observed traffic situations.

The scientific challenges that the presented works aim are based on these four issues. The integration of uncertainties into the flow model is a first challenge. Then, the production of operational indicators that account for the reliability of the results is discussed. Concerning the reactivity, the addressed scientific challenges are the estimation of vehicle indexes based sequential data assimilation process and the calibration of the model's internal conditions. Finally, concerning the versatility, the associated scientific question is the online parameter calibration within the traffic flow model.

A model for tracking the errors, under the hypothesis of Gaussian mixtures distributions, is developed. The error tracking is achieved thanks to an original perturbation method designed for multi-modal Gaussian mixtures. A sensitivity analysis is performed in order to establish a link between the designed method's robustness and the discretization of the network, the number of components in the Gaussian mixture and the errors within the flow model parameters. This model enables the production of operational indicators and their associated errors accounting for reliability of the calculated traffic conditions. The proposed operational indicators are travel times with its associated confidence interval and space-time diagrams with visualization of the standard deviations of the aggregated variables : speed and flow.

The data assimilation process enables the propagate of traffic conditions in accordance with the observed situation in case of non-calibrated demand and supply. The *posterior* state is calculated by means of a Bayesian inference formulation knowing the *prior* and observed states. Two methods for model update have been tested. Facing model inconsistencies introduced by the method of substituting *prior* states by *posterior* states, the update acts

also on the vehicles by means of addition, deletion, advancing and delaying of the passing times. The validation of the proposed solutions is achieved on a network composed of a simple homogeneous link without discontinuity.

When parameters of the traffic flow models are not calibrated, the data assimilation itself is not able to propagate the traffic states in accordance with the observed situation. The calibration of the parameters is addressed in an opening chapter in which several research directions are proposed to tackle this last scientific question.

The works in this thesis pave the way to perspectives in both research and operational domains. Indeed, it is interesting to quantify the reinforcement brought by model centered methods to usual data centered methods for the real time estimation and the short term forecasting of traffic conditions. Furthermore, the developed methods, associated to the cited research possibilities, may represent a significant intake in the daily traffic management tools.

## Keywords :

road traffic, modelling, dynamic, mesoscopic, error propagation, data assimilation, calibration

# Remerciements :

Je tiens à remercier Monsieur Aurélien Duret, chercheur à l'IFSTTAR, qui m'a encadré tout au long de ces années de thèse en tant que directeur de thèse. Je salue particulièrement sa pédagogie, sa patience, ses capacités de compréhension techniques et humaines ainsi que ses encouragements sans lesquels je n'aurais pas pu proposer de tels travaux.

Je remercie Monsieur Nour-Eddin El Faouzi, Directeur du LICIT, pour avoir accepté et suivi son rôle de directeur de thèse. Nos discussions, même si moins fréquentes, se révélèrent toujours pertinentes et apportèrent la prise de recul nécessaire pour appréhender certaines problématiques.

Mes prochains remerciements vont à Madame Lyudmila Mihaylova, Professeur à l'Université de Sheffield, ainsi qu'à Monsieur Vincent Aguilera, Chef d'Arrondissement à la DIRIF, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'accepter d'être rapporteurs de cette thèse.

Je remercie également, Madame Laure Tougne, Professeur à l'Université Lyon 2, et Monsieur Florian De Vuyst, Professeur à l'Université Technologique de Compiègne, pour avoir accepté le rôle d'examineur pour ma soutenance.

J'aimerais aussi remercier Madame Anne-Christine Demanny et Monsieur Andres Ladino pour la plus-value tant sur la forme que sur le fond, qu'ils ont apporté à ma thèse lors des relectures.

Les prochains remerciements vont aux soutiens que j'ai pu avoir durant ma thèse. Tant de personnes peuplent cette catégorie qu'il serait impossible de ne pas en oublier. J'opte ainsi pour des remerciements groupés. Les personnes concernées se reconnaîtront.

Je remercie l'ensemble des personnes que j'ai connu au LICIT et plus particulièrement dans l'équipe MOMI pour l'accueil, la bonne ambiance et le soutien dont j'ai pu bénéficier. Un petit mot particulier pour ceux qui ont eu la (mal)chance de partager mon bureau : Raphaël et Maxime.

Je termine les remerciements sur de brefs mots pour ma famille et mes amis sur qui j'ai pu compter en toutes circonstances, dans les bons moments, mais aussi, dans les périodes de difficulté.





# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xv</b>
<b>Notations</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Contexte et Positionnement</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction aux problèmes de trafic . . . . .	1
1.1.1 La congestion et ses conséquences . . . . .	1
1.1.2 Des solutions . . . . .	2
1.2 Contexte de la gestion de réseau . . . . .	4
1.2.1 Différents niveaux de planification . . . . .	5
1.2.2 Gestion de trafic au quotidien . . . . .	6
1.3 Modèle de trafic . . . . .	8
1.3.1 Formulations . . . . .	10
1.3.2 Résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi [74, 72] . . . . .	14
1.4 Approche méthodologique . . . . .	16
1.4.1 Méthodologie synthétique . . . . .	16
1.4.2 Plan du manuscrit . . . . .	17
<b>2 Propagation d'erreurs au sein du modèle LWR Lagrangien-Spatial</b>	<b>21</b>
2.1 Propagation d'erreurs dans les systèmes dynamiques . . . . .	22
2.2 Cadrage méthodologique . . . . .	24
2.2.1 Introduction de stochasticité dans le modèle LWR lagrangien-spatial	25
2.2.2 Observation de la distribution du terme d'offre par un processus de Monte Carlo . . . . .	26
2.3 Mélanges de Dirac . . . . .	28
2.3.1 Définitions . . . . .	28

2.3.2	Propagation d'incertitudes par un mélange de Dirac . . . . .	30
2.3.3	Propagation des incertitudes par un mélange de Dirac . . . . .	31
2.4	Propagation des erreurs par des mélanges de gaussiennes . . . . .	36
2.4.1	L'algorithme EM . . . . .	36
2.4.2	Propagation d'incertitudes dans le terme de demande . . . . .	38
2.4.3	Propagation d'incertitudes dans le terme d'offre . . . . .	41
2.4.4	Solution du GM-LS-LWR . . . . .	44
2.4.5	Avantages et inconvénients . . . . .	47
2.5	Analyse de sensibilité . . . . .	48
2.5.1	Scénario de référence . . . . .	48
2.5.2	Définition des critères . . . . .	49
2.5.3	Sensibilité à la géométrie du réseau . . . . .	50
2.5.4	Sensibilité aux erreurs sur les paramètres du Diagramme Fondamental . . . . .	51
2.5.5	Sensibilité au nombre de composantes gaussiennes . . . . .	53
2.6	Construction d'indicateurs opérationnels . . . . .	54
2.6.1	Temps de parcours . . . . .	55
2.6.2	Diagramme Espace-Temps . . . . .	56
2.7	Conclusions du chapitre . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Calage en ligne des conditions internes du modèle</b>	
	<b>Partie I : Fusion de données</b>	<b>63</b>
3.1	Assimilation de données : Etat de l'art . . . . .	64
3.1.1	Méthodes variationnelles . . . . .	64
3.1.2	Les méthodes de filtrages séquentiels . . . . .	66
3.1.3	Sources de données . . . . .	68
3.2	Applications du filtre de Kalman . . . . .	70
3.2.1	Application à un schéma eulérien . . . . .	70
3.2.2	Application à un schéma Lagrangien Temporel . . . . .	73
3.2.3	Application à un schéma Lagrangien Spatial . . . . .	75
3.3	Processus de fusion de données séquentiel en indice de véhicule . . . . .	77
3.3.1	Séquencement . . . . .	77
3.3.2	Processus de fusion de données . . . . .	78
3.4	Conclusion du chapitre . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Calage en ligne des conditions internes du modèle</b>	
	<b>Partie II : Bouclage de l'assimilation de données</b>	<b>87</b>
4.1	Présentation des méthodes . . . . .	88
4.1.1	Simple substitution des états <i>a priori</i> par les états <i>a posteriori</i> dans le modèle d'écoulement (M.1) . . . . .	88
4.1.2	Manipulation des indices des véhicules (M.2) . . . . .	89
4.2	Processus de validation . . . . .	94
4.2.1	Support . . . . .	95

4.2.2	Conception des scénarios . . . . .	98
4.2.3	Indicateurs pour la validation . . . . .	101
4.3	Comparaison des méthodes . . . . .	103
4.3.1	Méthode (M.1) . . . . .	103
4.3.2	Méthode (M.2) . . . . .	105
4.3.3	Choix d'une méthode de mise à jour . . . . .	110
4.4	Conclusions du chapitre . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Calage en ligne du diagramme fondamental</b>	<b>115</b>
5.1	Rappels et motivations . . . . .	115
5.2	Méthodes de calage des paramètres . . . . .	116
5.2.1	Technique d'augmentation du vecteur d'état . . . . .	117
5.2.2	Processus d'optimisation . . . . .	121
5.2.3	Analyse synthétique des méthodes de calage . . . . .	126
5.3	Applications et perspectives relatives au calage . . . . .	127
5.3.1	Influence des aléas sur les paramètres . . . . .	127
5.3.2	Supervision du modèle : détection automatique d'incidents . . . . .	128
5.3.3	Vers un calage rapide par apprentissage . . . . .	129
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>131</b>
	Synthèse des recherches . . . . .	132
	Limites . . . . .	134
	Poursuites de recherche . . . . .	135
	Perspectives . . . . .	137
	<b>Bibliographie</b>	<b>139</b>
	<b>A Glossaire</b>	<b>153</b>
	<b>B Valorisations scientifiques soumises pendant la thèse</b>	<b>155</b>
	<b>C Table de quantiles de la loi normale</b>	<b>157</b>
	<b>D Généralités sur les Dirac</b>	<b>159</b>
	<b>E Démonstration de la méthode de fusion de données</b>	<b>161</b>
	E.1 Formulation du problème . . . . .	161
	E.2 Calculs . . . . .	161
	<b>F Quelques mots d'implémentation algorithmique</b>	<b>167</b>
	F.1 Partie relative aux algorithmes sans assimilation de données . . . . .	168
	F.2 Partie relative aux algorithmes avec assimilation de données . . . . .	170
	<b>G Carte mentales du plan de thèse</b>	<b>173</b>
	Chapitre 1 . . . . .	175

Chapitre 2 . . . . .	177
Chapitre 3 . . . . .	179
Chapitre 4 . . . . .	181
Chapitre 5 . . . . .	183

# Table des figures

1.1	Les différents niveaux de planification . . . . .	5
1.2	Schéma de la structure de l'assimilation . . . . .	9
1.3	Représentation en 3 dimensions du trafic routier . . . . .	10
1.4	Diagramme fondamental triangulaire en échelle de représentation eulérienne	11
1.5	Diagramme fondamental triangulaire en échelle de représentation lagrangienne- temporelle . . . . .	12
1.6	Diagramme fondamental triangulaire en échelle de représentation lagrangienne- spatiale . . . . .	13
1.7	Résolution du modèle LWR mesoscopique avec la théorie de Hamilton-Jacobi	16
1.8	Vision schématique des différents éléments développés dans la thèse . . . . .	18
2.1	Méthodes de propagation d'erreurs, source : [110] . . . . .	23
2.2	Simulations de Monte Carlo . . . . .	24
2.3	Propagation d'incertitudes pour le terme d'offre par des tirages de Monte Carlo	26
2.4	n-index error (left) n-index error propagation, (right) probability distribution of n-index error with a grey scale . . . . .	28
2.5	Description schématique de l'EI discrète (à gauche) et distribution des proba- bilités correspondantes en nuances de gris (à droite) . . . . .	28
2.6	Graphique d'un mélange de Dirac . . . . .	29
2.7	Graphique d'un mélange de Heaviside, primitive d'un mélange de Dirac . . . . .	30
2.8	Illustration de l'approximation d'une loi normale par un mélange de Dirac avec 20 composantes . . . . .	32
2.9	Résultats de l'algorithme EM pour diverses itérations (2000 particules, 3 com- posantes) . . . . .	39
2.10	Géométrie du sous-réseau relatif à la propagation d'incertitude dans le sens de la circulation . . . . .	39
2.11	Géométrie du sous-réseau relatif à la propagation d'incertitude dans le sens inverse de la circulation . . . . .	41
2.12	Combinaison sous forme d'arbre . . . . .	44
2.13	Géométrie considérée pour le calcul du résultat du GM-LS-LWR . . . . .	45
2.14	Estimation de la distribution du résultat de la fonction maximum . . . . .	46

2.15	Résultat brut pour un véhicule sous la forme d'un mélange de gaussienne à 3 composantes [29] . . . . .	47
2.16	Géométrie du réseau . . . . .	48
2.17	Sensibilité au nombre de cellules intermédiaires $N$ . . . . .	51
2.18	Sensibilité au facteur d'erreur multiplicatif $\mathcal{F}$ . . . . .	52
2.19	Analyse de sensibilité au nombre de composantes gaussiens . . . . .	53
2.20	Temps de parcours sur le réseau . . . . .	55
2.21	Définition des cellules $(\Delta n, \Delta x)$ dans le plan $(x, t)$ . . . . .	56
2.22	Définition des cellules $(\Delta n, \Delta x)$ dans le plan $(x, t)$ . . . . .	58
2.23	Diagramme XT pour le débit . . . . .	60
2.24	Diagramme XT pour la vitesse . . . . .	60
3.1	Schéma de la structure de l'assimilation de données adapté de [64, 114] . . . . .	65
3.2	Boucles électromagnétiques sous la chaussée - Source : transport-intelligent.net	69
3.3	Diagramme fondamental triangulaire en formulation eulérienne . . . . .	71
3.4	Discrétisation du réseau pour le CTM . . . . .	71
3.5	Diagramme fondamental triangulaire en formulation Lagrangienne-Temporelle	73
3.6	Discrétisation du réseau pour l'application à l'échelle Lagrangienne-Temporelle	74
3.7	Diagramme fondamental triangulaire en formulation Lagrangienne-Spatiale .	76
3.8	Diagramme fondamental inversé . . . . .	77
3.9	Schéma de concept du processus de fusion de données avec les notations adaptées au LS-LWR-EP . . . . .	79
3.10	Illustration du processus de fusion de données. Dans (a), la variance de l'observation est inférieure à la variance de la prévision. Dans (c), c'est strictement l'inverse. Dans (b), les deux variances sont quasiment égales. . . . .	84
4.1	Assimilation de données au terme du Chapitre 3 . . . . .	88
4.2	Représentation schématique de la méthode de simple substitution . . . . .	89
4.3	Cas de suppression de véhicules . . . . .	94
4.4	Cas d'ajout d'un véhicule . . . . .	95
4.5	Cas où des véhicules sont retardés . . . . .	95
4.6	Cas où un véhicule est avancé . . . . .	96
4.7	Réseau expérimental pour la validation sur données synthétiques . . . . .	99
4.8	Graphiques du scénario de référence . . . . .	100
4.9	Graphiques du scénario (S.1) . . . . .	102
4.10	Graphiques du scénario (S.2) . . . . .	103
4.11	Test de la méthode de substitution sur le scénario S1. . . . .	104
4.12	Test de la méthode de substitution sur le scénario S1. . . . .	105
4.13	Comparaison en termes de courbes de véhicules cumulés [30] . . . . .	106
4.14	Comparaison en termes de temps de parcours [30] . . . . .	107
4.15	Comparaison en termes de courbes de véhicules cumulés [30] . . . . .	108
4.16	Comparaison en termes de temps de parcours [30] . . . . .	109

4.17	Schéma rendant compte de l'avantage du calage des paramètres . . . . .	112
5.1	Concept du calage rapide par apprentissage du processus d'optimisation . .	117
5.2	Schéma d'un processus de calage par optimisation . . . . .	121
5.3	Exemple de <i>GoF</i> obtenu pour une optimisation sur 2 paramètres - Source : [28]	124
5.4	Ensembles de métaheuristiques - Source : <a href="http://metah.nojhan.net/post/2007/10/12/Classification-of-metaheuristics">http://metah.nojhan.net/post/2007/10/12/Classification-of-metaheuristics</a> . . . . .	125
5.5	Concept du calage rapide par apprentissage du processus d'optimisation . .	130
5.6	Chronologie du TRL [84] . . . . .	136
D.1	Graphique de la fonction de dirac . . . . .	159
D.2	Graphique de la fonction de Heaviside . . . . .	160





## Liste des tableaux

2.1	Paramètres du scénario de référence . . . . .	49
3.1	Equations du filtre de Kalman [63, 62] . . . . .	67
4.1	Résumé des 8 cas possibles [45] . . . . .	92
4.2	Résumé des 8 cas possibles . . . . .	94
4.3	Table des niveaux de maturité technologiques dans [84] . . . . .	97
4.4	Paramétrage des scénarios . . . . .	99
5.1	Avantages et inconvénients de la technique d'augmentation du vecteur d'état	126
5.2	Avantages et inconvénients de la méthode d'optimisation . . . . .	127



# Notations

---

Notations Relatives aux modèles d'écoulement	
$n$	Indice de véhicule
$x$	Position (m)
$t$	Temps (s)
$q$	Débit de véhicule (veh/s)
$k$	Concentration de véhicules (veh/m)
$s$	Ecart spatial intervéhiculaire (m)
$v$	Vitesse d'un véhicule (m/s)
$p$	Rythme (s/m)
$h$	Ecart temporel intervéhiculaire (s)
$u$	Vitesse fluide (m/s)
$w$	Vitesse maximale de remontée de congestion (m/s)
$k_x$	Concentration de véhicule maximale (veh/m)
$C$	Capacité d'un lien (veh/s)
$N(x, t)$	Indice du véhicule en $x$ à l'instant $t$
	Courbe de véhicule cumulé en $x$
$X(n, t)$	Position du véhicule $n$ à l'instant $t$
	Trajectoire du véhicule $n$
$T(n, x)$	Instant de passage du véhicule $n$ à la position $x$

---

---

### Notations Relatives aux mélanges de lois

---

$\mathbb{P}_X(x)$	Probabilité de la réalisation $x$ de la variable aléatoire $X$
$f_X(x)$	Fonction de fréquence de la loi de distribution de $X$
$F_X(x)$	Fonction de répartition de la loi de distribution de $X$
$\delta(\cdot)$	Fonction de Dirac
$H(\cdot)$	Fonction de Heaviside
$J$	Nombre de composantes du mélange
$\pi_j$	Poids du mode $j$ dans un mélange de lois de probabilité
$\bar{x}_X^{(j)}$	Valeur de la composante $j$ du mélange de Dirac définissant la VA
$f(x) = \sum_{j=1}^J \pi_j \delta(x - \bar{x})$	Fréquence d'une VA suivant un mélange de Dirac
$\mathcal{N}(\cdot; \cdot, \cdot)$	Fréquence d'une variable aléatoire suivant une loi normale
$\mu_x^{(j)}$	Moyenne de la composante $j$ de $X$
$\sigma_x^{(j)}$	Ecart-type de la composante $j$ de $X$
$f(x) = \sum_{j=1}^J \pi_j \mathcal{N}(X; \mu_X^{(j)}, \sigma_X^{(j)})$	Fréquence d'une VA suivant un mélange de gaussiennes

---

---

### Notations Relatives aux mélanges de lois

---

$X_1 X_2$	Variable aléatoire représentant une VA $X_1$ sachant une autre $X_2$
$(\cdot)^f$	Etat <i>a priori</i> ( $f$ pour <i>forecast</i> )
$(\cdot)^o$	Etat observé
$(\cdot)^a$	Etat <i>a posteriori</i> ( $a$ pour <i>assimilation</i> )

---

# Contexte et Positionnement

## 1.1 Introduction aux problèmes de trafic

### 1.1.1 La congestion et ses conséquences

Depuis la démocratisation de l'automobile, la demande en déplacement n'a pas cessé de croître. L'étalement urbain est en grande partie responsable de l'augmentation du trafic routier dans les villes et leurs périphéries. Concernant le réseau routier inter-urbain, le trafic de marchandise a subi une augmentation considérable en raison de la liberté des échanges au sein de l'Union Européenne. Le rapport de 2016 de DATALAB concernant "*Les infrastructures linéaires de transport : évolution depuis 25 ans*" [108] annonce une augmentation de 39.3% de la circulation routière entre 1990 et 2015 toutes catégories de véhicules confondue. Durant le même temps, l'augmentation du linéaire routier était de 15.9%. On assiste donc à une croissance à deux vitesses entre la mobilité et les infrastructures routières. Ce déséquilibre entre l'offre et la demande est à l'origine de la dégradation des conditions de circulation sur l'ensemble du réseau routier urbain ou inter-urbain.

Les chiffres précédents montrent des tendances générales. Cependant, les phénomènes de congestion sont plus ou moins marqués en fonction des situations. Au quotidien, le trafic pendulaire entre des zones urbaines (bassins d'emplois) et en périphérie des villes (abondance de zones d'habitations) cause des ralentissements en périphérie et à l'intérieur des grands centres urbains. De manière régulière mais à plus basse fréquence, durant les périodes de vacances, le trafic s'intensifie particulièrement entre les grandes agglomérations (forte concentration d'habitations) et les zones à fort attrait touristique (littoral, montagne, ...). L'exemple le plus parlant est le "chassé-croisé" du dernier week-end de juillet. Lors d'événements exceptionnels (expositions, concerts, manifestations sportives, etc), le trafic routier est intense autour des zones concernées.

Les congestions ont des conséquences pour les usagers. En effet, les congestions sont à l'origine des temps perdus sur la route. Ces retards peuvent être considérables notamment pour des trajets courts comme les trajets domicile-travail. De plus, cette gêne a des conséquences sur le stress et le confort des usagers et détériore ainsi la vigilance. Elle favorise ainsi les situations accidentogènes impactant la sécurité. Du point de vue

de l'environnement, le trafic intense provoque des cycles d'accélération et décélération aux conséquences environnementales négatives. Les zones de trafic intenses sont caractérisées par une pollution importante : la pollution de l'air est causée par le dioxyde de carbone ( $CO_2$ ) et les particules fines (PM10 et PM2.5) rejetées par les véhicules. Les congestions sont également source de pollution sonore, dérangeante, notamment dans les zones urbaines à forte concentration d'habitations.

Les enjeux de gêne, de sécurité et de pollution sont au centre des préoccupations des gestionnaires de réseaux. Pour répondre à ces enjeux, il s'agit de disposer d'outils d'aide à la gestion du réseau routier.

## 1.1.2 Des solutions

### 1.1.2.1 Agir sur l'offre

Les problèmes de congestion sont les conséquences d'un problème de prépondérance de la demande en déplacement sur l'offre proposée par les infrastructures. Une solution est de rétablir un équilibre en augmentant la capacité des infrastructures. Ceci nécessite la construction de nouvelles routes ou l'élargissement des routes existantes par la construction de nouvelles voies. Cependant, deux problèmes viennent limiter ces possibilités :

- la construction de nouvelles infrastructures ne peut se faire qu'au prix de coûts considérables dans un contexte où les gestionnaires disposent de financements limités. A titre d'exemple, [80] annonce un coût proche de 300K€ au kilomètre pour la construction d'une chaussée bidirectionnelle (2x1 voies avec BAU).
- la place disponible pour la construction de nouvelles infrastructures routières est limitée, notamment dans les zones urbaines.

### 1.1.2.2 Agir sur la demande

Face aux difficultés relatives à l'augmentation de la capacité des infrastructures routières, une deuxième option repose sur la diminution de la demande incombant aux infrastructures routières par le report modal. Le report modal, correspond au transfert de la part des déplacements d'un mode vers un autre. Ce terme est souvent utilisé pour désigner le transfert de la part des déplacements du mode *véhicule particulier* (VP) vers les transports en commun ou les modes doux. Les alternatives au VP sont multiples et peuvent être classées en trois catégories :

1. Les modes actifs, sont des modes possédant une empreinte écologique faible de par leur absence de motorisation. La marche et l'utilisation du vélo sont des modes actifs particulièrement adaptés à de courtes, voire très courtes, distances.
2. Les modes collectifs prennent appui sur le principe de massification afin de décharger les routes de la charge des VP. En milieu urbain, les transports collectifs sont particulièrement adaptés pour effectuer les trajets domicile-travail reliant les zones d'habitations importantes aux zones de travail. Dans un contexte inter-urbain, les trains et les lignes de bus nationales représentent les alternatives collectives au VP.
3. Le mode partagé est le terme utilisé pour parler du covoiturage. Cette pratique, même si elle repose sur le VP permet aussi de réduire la charge en véhicules sur les réseaux routiers. Le covoiturage est adapté tout autant pour les trajets courts que pour les trajets longs.

L'enjeu principal relatif aux modes alternatifs est l'attractivité. En effet, afin de gagner de la part de marché sur le véhicule particulier, il faut rendre les modes alternatifs plus compétitifs.

L'enjeu de l'interfaçage entre les différents modes occupe les pouvoirs publics par la volonté de réduire la part de déplacements incombant au VP. C'est ainsi que les grands pôles multimodaux ont vu le jour. En effet, ces pôles regroupent une multitude de modes alternatifs comme des métros, des tramways, des bus ou encore des vélos en libre service. Les parkings-relais (P+R), véritables symboles de ce transfert du VP vers les modes alternatifs sont maintenant monnaie courante en périphérie des grands centres urbains.

Les technologies de l'information jouent aussi un rôle important dans cette facilité d'accès aux modes alternatifs. En effet, les applications mobiles permettant la planification des trajets en modes alternatifs sont nombreuses : des applications des gestionnaires de transports en commun permettant l'accès en temps réel à la carte du réseau et aux temps d'attente et de parcours.

### 1.1.2.3 Régulation dynamique

La dernière solution exposée dans cette section repose sur la modulation de l'offre et de la demande de manière dynamique. La régulation dynamique vise à optimiser l'utilisation des infrastructures existantes en fonction des situations dynamiques de demande. L'optimisation vient de la minimisation d'un indicateur rendant compte de l'état des conditions de circulation pour l'ensemble des usagers. Les mesures de régulation peuvent pénaliser certains usagers au bénéfice de la collectivité. Une analogie peut être faite dans le domaine de l'affectation avec les principes de Wardrop [125] : dans une situation d'optimum individuel, les usagers minimisent leur propre trajet alors que sous condition d'optimum collectif, ce sont les temps de parcours globaux qui sont minimisés au prix de retard pour certains usagers.



Les mesures de régulation dynamique sont multiples. Sans viser l'exhaustivité des mesures de régulation dynamique, on peut évoquer les mesures suivantes :

- *La régulation dynamique des vitesses* propose d'optimiser l'usage de toutes les voies de circulation en diminuant la vitesse réglementaire afin de retarder l'instant d'apparition de la congestion. Elle repose sur l'observation du fait que plus la vitesse réglementaire est élevée, plus la voie de droite est sous-utilisée [69]. En diminuant la vitesse réglementaire, la capacité est donc augmentée. Cependant, la communauté scientifique n'est pas unanime à propos du gain de capacité. En revanche, les mesures de régulation dynamique des vitesses représentent un atout en terme de sécurité puisqu'elles peuvent être utilisées pour protéger les queues de bouchons. Un exemple de régulation dynamique des vitesses est celle de la Rocade-Est de Lyon (RN346) [2]. Des mesures similaires sont déployées aussi sur les autoroutes A6, A7, A9, A13, A25, A31, A33 et A63.
- *La régulation dynamique d'accès* propose de contrôler les insertions sur des axes structurants en présence d'un trafic dense. Cette mesure est motivée par les enjeux liés au phénomène de chute de capacité (*capacity drop* [75]) au niveau des convergents. La régulation d'accès consiste à réduire le débit des véhicules entrant afin de ne pas dépasser la capacité du convergent. Ainsi, le phénomène de chute de capacité est évité. Une régulation d'accès est déployée sur la rocade sud de Grenoble (RN 87) [3] et sur l'A57 au niveau de Toulon [1], .
- *La gestion dynamique des voies* permet de modifier temporairement l'offre d'une route en modifiant dynamiquement le nombre de voies. Le principe est de modifier la capacité de la route dynamiquement en fonction des conditions de circulation. Dans cette catégorie on retrouve l'ouverture à la circulation sur bande d'arrêt d'urgence (BAU) ou encore les voies réversibles comme sur le pont de Saint-Nazaire [17].
- *L'interdiction de dépasser pour les poids lourds* repose sur la limitation du phénomène de goulot d'étranglement mobile (*moving bottleneck* [94]) limitant la capacité du réseau lors de dépassements de poids lourds à vitesse plus faible que les autres véhicules. L'interdiction de dépasser pour les poids lourds est déployé en complément d'autres méthodes de régulation lors d'épisodes de trafic intense.

Les mesures de régulation dynamique permettent d'agir sur la capacité des réseaux afin de limiter l'impact de la congestion. Elles interviennent dans le contexte de la gestion du trafic routier.

## 1.2 Contexte de la gestion de réseau

## 1.2.1 Différents niveaux de planification

Dans un premier temps, nous allons proposer une explication de la gestion du trafic du routier en prenant appui sur les différents niveaux de planification. Cette notion de niveau de planification est utilisée dans le domaine du management. Elle consiste à séparer les objectifs liés à la planification selon les horizons temporels. La figure 1.1 présente une vision schématique des différents niveaux de planification.

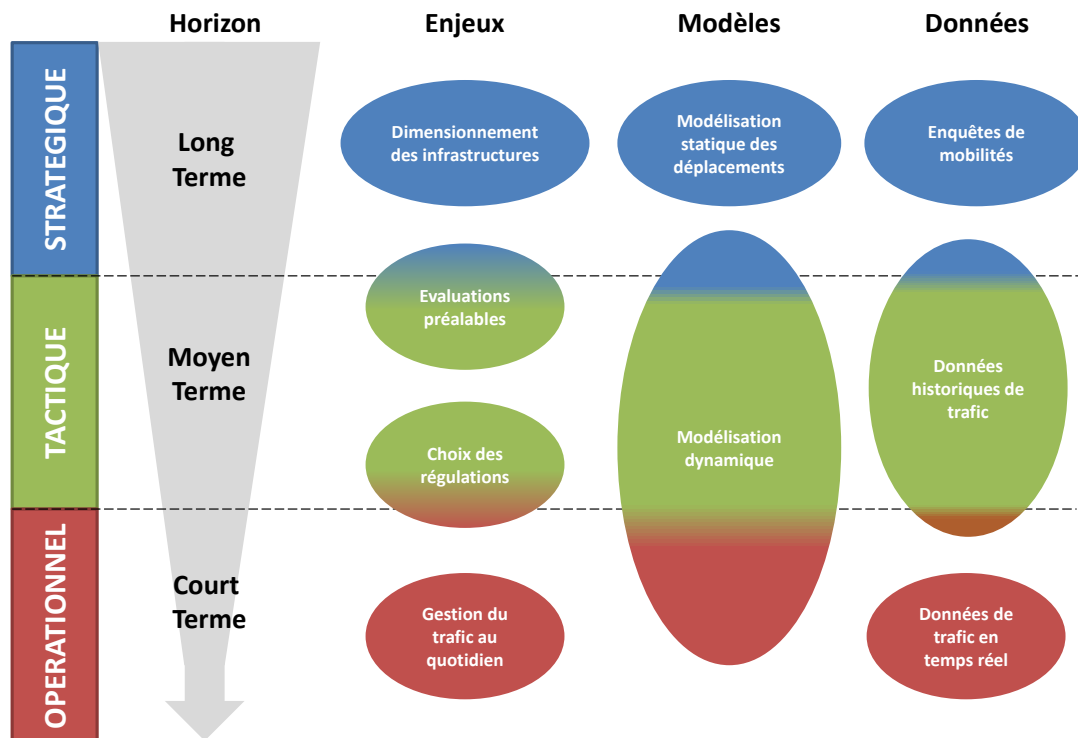


Fig. 1.1.: Les différents niveaux de planification

Le niveau **stratégique** correspond à la planification des mesures de gestion de trafic à long terme. Elle passe par la quantification des charges de trafic sur le réseau à l'horizon de plusieurs années voire décennies. Des modèles de déplacement, reposant sur des enquêtes de mobilité et des modèles démographiques, ont la vocation d'aider à la quantification de l'évolution de la mobilité. Par exemple, le modèle 4 étapes, nommé ainsi en raison des 4 étapes que sont la génération, la distribution, le choix modal et enfin l'affectation est un modèle statique de trafic utilisé pour quantifier la demande de déplacement sur un réseau à un horizon temporel éloigné [11].

Le niveau **tactique** correspond à toutes les actions de planification à moyen terme : pour des durées de l'ordre de l'année au mois. En effet, si les modèles de déplacement ont

démontré la nécessité de construire une nouvelle infrastructure, le niveau tactique consiste à évaluer au préalable l'influence de cette nouvelle infrastructure sur le trafic routier. Ce niveau regroupe aussi toutes les actions de mise en place et d'évaluation des mesures de régulation dynamique tant en termes de développement d'algorithmes que de déploiement de systèmes de recueil de données.

Le niveau **opérationnel** correspond à la gestion du trafic au quotidien. Ce niveau regroupe donc l'ensemble des pratiques de gestion du trafic en temps réel. Entre autres, les problématique de recueil de données en temps réel et d'utilisation des mesures régulation dynamique du trafic appartiennent à ce niveau de planification

## 1.2.2 Gestion de trafic au quotidien

### 1.2.2.1 Enjeux

Les mesures de gestion de trafic au niveau opérationnel doivent :

- Être rapides afin de pouvoir être compatible avec des problématiques de contrôle en temps réel ;
- Prendre en compte les incertitudes afin de d'estimer la fiabilité des concepts mis en œuvre ;
- Être réactives afin de pouvoir proposer des indicateurs et actions cohérents avec la situation réelle en toute circonstance ;
- Être adaptables pour évoluer en fonction des situations rencontrées. Elle permet une plus grande cohérence dans les prévisions des conditions de circulation à venir.

La satisfaction de ces enjeux implique des bénéfices pour les gestionnaires mais aussi pour les usagers. Pour les gestionnaires, ces enjeux représentent l'opportunité de disposer d'une image en temps réel des conditions de circulation sur le réseau pour pouvoir proposer et évaluer des mesures de régulation. Pour les usagers, ces enjeux entrent dans les caractéristiques d'un système d'aide à la décision. En effet, les usagers adaptent leurs trajets en fonction des gains potentiels en termes de temps de parcours. Il est donc important de connaître les conditions de circulation en temps réel et de proposer des prévisions à court terme. Au regard de ces enjeux, les outils d'aide à la décision peuvent reposer sur 2 approches complémentaires.

### 1.2.2.2 Approches données-centrées (*data-oriented*)

Les méthodes basées sur les données sont multiples. Le contexte actuel de profusion des données trafic disponibles implique une popularité des méthodes basées sur les données. Laharotte [70] propose un état de l'art des approches basées sur les données.

A l'origine, ces méthodes sont cantonnées aux méthodes paramétriques basées sur l'étude de séries temporelles. Le principe de ces méthodes est de décrire les interactions statistiques entre une variable à expliquer et un ensemble de variables explicatives. A l'instar d'un modèle physique, les méthodes paramétriques reposent sur un jeu de paramètres calés sur un ensemble de données historiques. La famille de méthode ARIMA [5] est la plus populaire dans le domaine du trafic. Quelle que soit la déclinaison (SARIMA [107], STARIMA [91], ARMAX [118] ou encore VARMA [50]) elle propose les deux actions suivantes [70] :

- un modèle Auto-Régressif (AR) qui consiste à prévoir un état en fonction de la somme d'une moyenne fixe, d'une combinaison linéaire des états antérieurs et d'un bruit blanc ;
- un modèle à moyenne mobile (MA) qui consiste à affiner les résultats préalablement établis en modulant la moyenne à partir du bruit blanc.

Avec l'évolution des capacités de calcul et de la quantité de données disponibles, les méthodes par apprentissage statistique viennent proposer une alternative aux méthodes statistiques classiques sans apprentissage. Ces méthodes font écho aux problématiques de classification non-supervisée ou supervisée [70]. Les paramètres du modèle sont calés, à l'origine, de façon à optimiser un critère de performance relatif à l'écart entre la variable expliquée prédite et la variable expliquée réelle. Selon les situations observées, les paramètres vont évoluer en fonction des performances de la méthode : c'est l'apprentissage statistique. Cette catégorie regroupe des méthodes basées sur l'historique comme les réseaux de neurones artificiels (ANN) [42, 122], les méthodes de réseaux bayésiens [112] et les méthodes de forêts aléatoires [77]. Aussi, les méthodes de régressions non-paramétriques, dont la structure évolue en fonction de l'historique et des situations rencontrées, font partie de cette catégorie. Les méthodes des K plus proches voisins ou de régressions à noyaux peuvent être citées dans cette section [70].

D'autres évolutions sont à citer comme le fait que la tendance est à la modélisation spatio-temporelle plus qu'à l'utilisation de séries temporelles. Les méthodes basées sur les données sont donc multiples et leurs performances dépendent des données disponibles et de leurs structures. Il est à noter que des dérives sont observées au fil du temps et que les performances des méthodes citées s'affaiblissent en présence d'événements non-récurrents comme les accidents de la route [70]. Les méthodes d'apprentissage sont, cependant, plus performantes sur des événements non récurrents.

### 1.2.2.3 Approches phénoménologiques et mixtes

Ces approches sont basées sur des mises en équations des phénomènes physiques que représente le trafic. Afin de proposer des prévisions cohérentes avec la réalité, un travail de calage important en amont est à prévoir. Le calage est basé sur des données historiques et le modèle est validé lorsque les sorties sont proches des données. Il existe plusieurs échelles de représentation du trafic allant de la représentation du flux à la modélisation

de chaque véhicule indépendamment. Ainsi, concernant l'enjeu de rapidité, l'échelle de représentation est importante puisqu'elle va influencer sur les temps de calcul. Les approches phénoménologiques pures peuvent être renforcées par l'utilisation de données permettant de considérer les situations de trafic réelles. En conséquences, ces méthodes sont mixtes en le sens où elles prennent appui à la fois sur une mise en équation des phénomènes et des données.

Concernant l'enjeu de prise en compte de l'incertitude, les modèles de trafic sont des approximations de la réalité et le calage est effectué sur des données historiques. De plus, il existe des méthodes permettant de propager la stochasticité dans les modèles dynamiques. Ces méthodes feront l'objet d'une section dédiée dans le prochain chapitre (Section 2.1). Concernant l'adaptabilité et la réactivité, les modèles de trafic, seuls, ne permettent pas de répondre à ces enjeux, si bien que la tendance actuelle est l'utilisation de données en temps réel afin de venir alimenter et corriger les modèles. Ces approches centrées sur une modélisation dynamique d'un phénomène physique enrichi par des données captées en temps réel, sont appelées assimilation de données ou encore modélisation enrichie capteur. Telle qu'elle est décrite dans [64, 114], l'assimilation de données est un processus séquentiel permettant de diminuer les erreurs de modèle dans les prévisions. Les méthodes d'assimilation de données sont particulièrement présentes dans les domaines de l'océanographie et de la météorologie. La figure 1.2 présente la structure d'un schéma d'assimilation de données séquentielle tel qu'il est décrit dans [64, 114] :

- La pièce centrale de la structure est le modèle dynamique de trafic. Il permet de prédire les états du système physique.
- Le modèle d'observation consiste à récupérer les valeurs numériques des variables observées en fonction de la réalité.
- La fusion de données consiste à déterminer l'état le plus probable du système en fonction des prédictions et des observations.
- La mise à jour du modèle consiste à corriger les variables d'état du modèle en adéquation avec les sorties de la fusion de données.

Les méthodes d'assimilation de données séquentielles semblent être adaptées à la réalisation du critère d'adaptabilité. Afin de respecter le critère de rapidité, il s'agit de choisir une échelle de représentation adaptée.

## 1.3 Modèle de trafic

Le modèle LWR, pour Lighthill-Whitham-Richards, est un modèle dynamique de trafic routier inspiré de la mécanique des fluides. Les travaux fondateurs de [78] et [104] permettent l'analogie entre la mécanique des congestions sur les voies rapides et les ondes de chocs visibles dans les écoulements des systèmes hydrodynamiques. Ce modèle propose une **caractérisation tri-dimensionnelle** du trafic [72] :

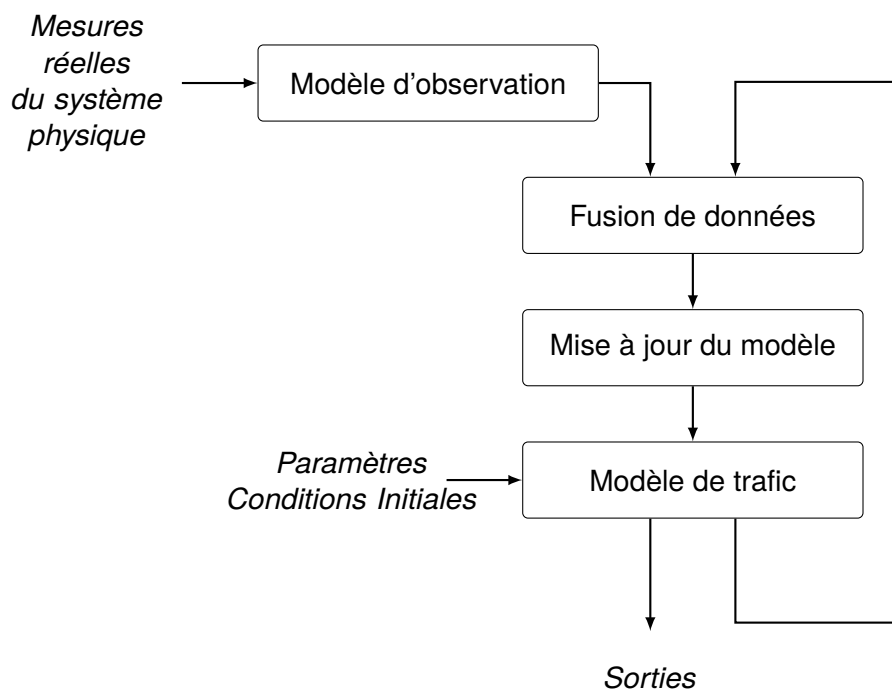


Fig. 1.2.: Schéma de la structure de l'assimilation

- **l'indice de véhicule**, noté  $n$ , permet de numérotter les véhicules circulant sur le réseau, dans leur ordre d'arrivée sur le réseau ;
- **la variable de temps**  $t$  permet de caractériser la propagation temporelle des conditions de circulations ;
- **la variable d'espace**  $x$  permet de situer les conditions de circulation sur le réseau et ainsi caractériser la propagation spatiale des ondes de trafic.

Le modèle LWR étant un modèle ondulatoire du trafic, il repose sur le couplage des variables précédentes. A partir des trois variables présentées, il est possible de créer **trois espaces-plans de résolution** à deux dimensions. Dans chacun de ses plans, l'objectif du modèle LWR est d'estimer l'évolution de la troisième variable selon les deux choisies pour la résolution. Afin d'illustrer ces considérations, la Figure 1.3 représente les axes *indice-espace-temps* et les différentes déclinaisons 2D, que l'on appelle les **échelles de représentation**.

- Le plan  $(t, x)$  permettant l'estimation de l'indice des véhicules  $N(t, x)$  comme une fonction du temps et de l'espace. Cette échelle de représentation est l'échelle **Eulérienne**, ou macroscopique.
- Le plan  $(n, t)$  dans lequel la position des véhicules  $X(n, t)$  est estimée comme une fonction de l'indice du véhicule et du temps. Cette échelle de représentation est l'échelle **Lagrangienne-Temporelle**, ou microscopique.

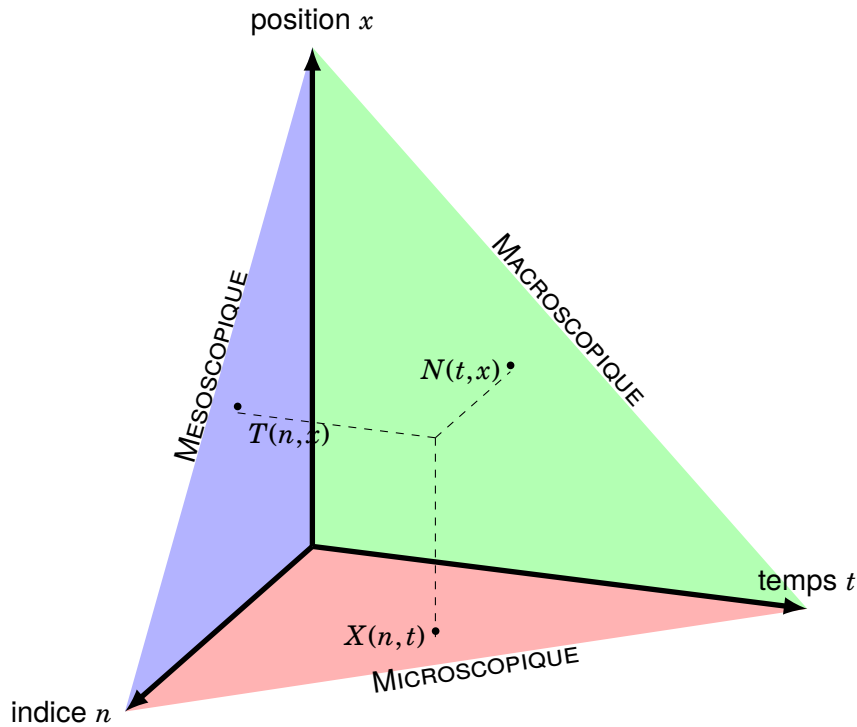


Fig. 1.3.: Représentation en 3 dimensions du trafic routier

- Le plan  $(n, x)$  dans lequel le temps de passage des véhicules  $T(n, x)$  est estimé comme une fonction de l'indice du véhicule et de la localisation sur le réseau. Cette échelle de représentation est l'échelle **Lagrangienne-Spatiale**, ou mésoscopique.

Dans chaque plan, le modèle LWR lie les variables par le biais de **deux relations**. La première est l'**équation de conservation** de véhicules stipulant, comme pour les équations de conservation de la matière, comment les éléments présents sur le réseaux s'écoulent. La deuxième est un opérateur décrivant les états d'équilibre du trafic. Cet opérateur est appelé **diagramme fondamental**. La section suivante vise à exprimer les différentes relations pour les trois échelles de représentation.

## 1.3.1 Formulations

### 1.3.1.1 Échelle Eulérienne

Dans l'échelle Eulérienne, ou **macroscopique**, l'indice de véhicule  $n$  est exprimé comme une fonction du temps  $t$  et de la position  $x$ . Même si en réalité l'indice de véhicule est une variable discrète, pour la formulation du modèle LWR, il est généralement convenu d'utiliser une vision continue et dérivable de cette grandeur physique. Ainsi, deux variables sont construites, basées sur les dérivées partielles de l'indice de véhicule suivant les deux autres variables. Le **débit de véhicule** est défini comme la dérivée partielle de l'indice de

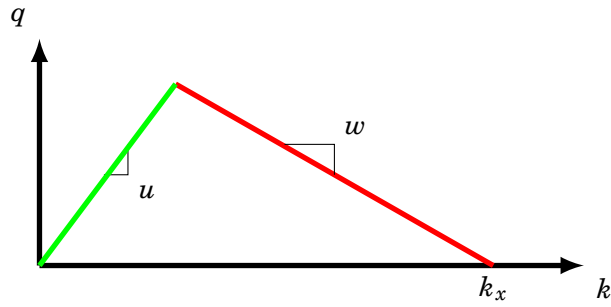


Fig. 1.4.: Diagramme fondamental triangulaire en échelle de représentation eulérienne

véhicule par rapport au temps à emplacement fixé :  $q = \partial_t n$ . La **concentration de véhicule** est définie comme la dérivée partielle de l'indice de véhicule par rapport à l'espace à un instant donnée :  $k = -\partial_x n$ .

L'**équation de conservation** exprime la relation entre les dérivées partielles du débit et de la concentration de la manière suivante :

$$\partial_t k + \partial_x q = 0 \quad (1.1)$$

Le diagramme fondamental exprime le débit de véhicules en fonction de la concentration de véhicules. Il représente aussi les états de trafic à l'équilibre. Cette relation est concave et peut être exprimée en fonction de 3 paramètres *a minima* sous l'hypothèse qu'elle est triangulaire. Les paramètres choisis pour l'ensemble de la thèse sont **la vitesse fluide**  $u$ , **la concentration maximale**  $k_x$  et **la vitesse maximale de remontée de congestion**  $w$ . Le diagramme fondamental est composé d'une branche fluide en vert sur la Figure 1.4 et d'une branche congestionnée en rouge sur la Figure 1.4.

L'échelle Eulérienne possède l'avantage de reposer sur des variables agrégées. Ainsi, cette échelle est économe en temps de calcul. De plus, elle est particulièrement adapté pour des études de trafic sur des réseaux de grande envergure. Cependant, elle possède aussi des inconvénients. La considération du trafic comme un flux continu de véhicules ne permet pas le suivi individuel des véhicules et possède donc un intérêt limité pour les problématiques d'affectation et de choix d'itinéraire.

### 1.3.1.2 Échelle Lagrangienne-Temporelle

Dans l'échelle Lagrangienne-Temporelle, ou microscopique, les trajectoires  $x(t)$  des différents véhicules  $n$  sont simulées. Les états de trafic dans cette échelle de représentation sont décrits grâce à deux variables : la vitesse et l'espace inter-véhiculaire. La **vitesse d'un véhicule** est définie comme la dérivée partielle de la position d'un véhicule par rapport



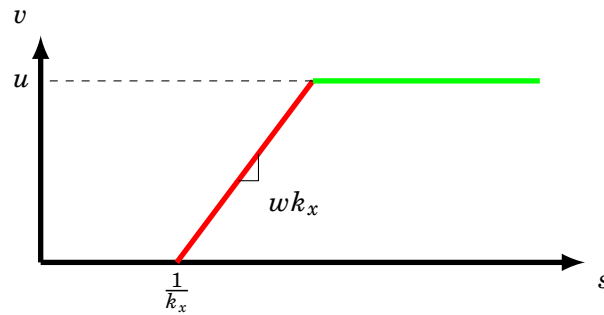


Fig. 1.5.: Diagramme fondamental triangulaire en échelle de représentation lagrangienne-temporelle

au temps :  $v = \partial_t x$ . L'**espace inter-véhiculaire** est défini comme la différence de position entre deux véhicules consécutifs. Pour information, il est généralement convenu de prendre pour référence l'avant du véhicule. En conséquence, la distance inter-véhiculaire est bien définie comme l'écart de position entre les avants de deux véhicules consécutifs et non comme le vide entre les-dits véhicules. Dans un contexte de continuité et de dérivabilité adéquat, l'espace inter-véhiculaire ( $s$  pour *spacing*) est défini comme la dérivée partielle de la position des véhicules par rapport à l'indice de véhicule :  $s = \partial_n x$ .

L'**équation de conservation** exprime la relation entre les dérivées partielles de l'espace inter-véhiculaire et de la vitesse selon l'équation suivante :

$$\partial_t s + \partial_n v = 0 \quad (1.2)$$

Le diagramme fondamental dans l'échelle de représentation microscopique définit la vitesse comme fonction de l'espace inter-véhiculaire. Avec l'aide des paramètres définis dans la définition du modèle LWR macroscopique, à savoir  $u$ ,  $w$  et  $k_x$ , une définition des paramètres du diagramme fondamental microscopique est proposée. Ce diagramme exprime qu'en situation fluide, quelle que soit la valeur de l'espace inter-véhiculaire, la vitesse des véhicules est égale à la vitesse fluide (branche verte sur la Figure 1.5). En situation congestionnée, plus l'espace inter-véhiculaire se réduit, plus la vitesse est faible (branche rouge sur la Figure 1.5).

L'échelle Lagrangienne-Temporelle possède l'avantage considérable de donner l'information la plus précise sur le trafic, à savoir les trajectoires individuelles de tous les véhicules. Avec ce type d'information, on peut déduire l'ensemble des variables de trafic agrégées ou désagrégées. L'inconvénient majeur de cette échelle de représentation est le temps de calculs dépendant du nombre de véhicules et du pas de temps. Or, sur de larges réseaux et avec un pas de temps de l'ordre de la seconde, les temps de calcul deviennent vite très importants. Cette échelle n'est donc pas adaptée pour la gestion de trafic en temps réel sur de large réseaux.

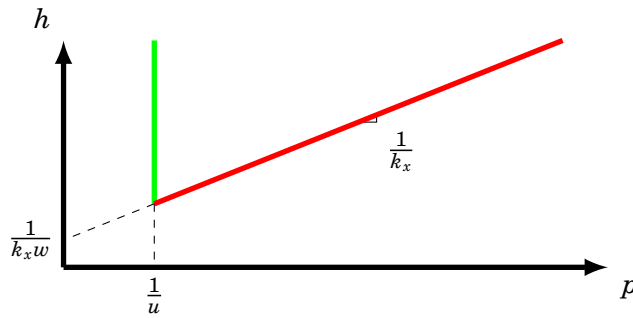


Fig. 1.6.: Diagramme fondamental triangulaire en échelle de représentation lagrangienne-spatiale

### 1.3.1.3 Échelle Lagrangienne-Spatiale

Dans l'échelle Lagrangienne-Spatiale, ou mésoscopique, les instants de passage des véhicules  $t(n)$  sont simulés à différents emplacements sur le réseau. Les états de trafic sont décrits à l'aide de deux variables : le temps inter-véhiculaire et le rythme (inverse de la vitesse). Le **temps inter-véhiculaire** est défini comme la différence de temps séparant deux véhicules consécutifs. Par convention de continuité et dérivabilité, le temps ( $h$  pour *headway*) inter-véhiculaire est exprimé comme la dérivée partielle du temps de passage par rapport à l'indice du véhicule :  $h = \partial_n t$ . Le **rythme** ( $p$  pour *pace*) est défini comme la dérivée partielle du temps de passage par rapport à la position sur réseau :  $p = \partial_x t$  et correspond à l'inverse de la vitesse.

L'**équation de conservation** exprime la relation entre les dérivées partielles du temps inter-véhiculaire et du rythme selon l'équation suivante :

$$\partial_n p - \partial_x h = 0 \quad (1.3)$$

Dans cette échelle de représentation, le **diagramme fondamental** représente le temps inter-véhiculaire comme une fonction convexe du rythme. La branche fluide (en vert sur la Figure 1.6) représente le fait qu'en situation fluide, quelle que soit la valeur du temps inter-véhiculaire, le rythme est toujours égal à l'inverse de la vitesse fluide. Dans cette échelle de représentation aussi, les paramètres du diagramme fondamental sont exprimés en fonction des trois paramètres choisis dans l'échelle macroscopique et largement utilisés dans la littérature. La branche congestionnée (en rouge sur la Figure 1.6) définit le fait que plus le rythme (et donc l'inverse de la vitesse) est important, plus les véhicules sont espacés dans le temps (et donc le débit réduit).

L'échelle Lagrangienne-Spatiale remplit le critère de rapidité puisque les calculs ne concernent que les instants de passage des véhicules à des emplacements prédéfinis sur le réseau. Ce gain en termes de temps de calcul se fait au prix du fait que les trajectoires des véhicules

ne sont pas connues. L'échelle Lagrangienne-Spatiale propose des variables de sorties particulièrement compatibles avec une source de données majeure que sont les données de boucles électromagnétiques. De plus, la vision individuelle des véhicules permet leur suivi et facilite donc les problématiques d'affectation et de choix d'itinéraire. Enfin, le LICIT a initié le développement d'une plateforme de modélisation mésoscopique en lien avec le CEREMA depuis 2013 [44]. La modélisation dynamique choisi pour le développement de la thèse sera un modèle LWR Lagrangien-Spatial.

### 1.3.2 Résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi [74, 72]

en L-S

Le modèle retenu pour cette thèse est le modèle LWR dans l'échelle de représentation Lagrangienne-Spatiale. Il s'agit de la résolution de l'**équation de Hamilton-Jacobi** par les formules de Lax-Hopf développée dans [72] et [74].

L'**équation de conservation** dans l'échelle de représentation LS (1.3) peut être réécrite en rappelant que le rythme  $p$  est défini comme l'inverse de la vitesse. De plus, considérant que la vitesse  $v$  comme une fonction du temps inter-véhiculaire  $v = V(h)$ , l'équation devient la suivante :

$$\partial_x h - \partial_n \left( \frac{1}{V(h)} \right) = 0 \quad (1.4)$$

Le principe de la modélisation mésoscopique est d'exprimer les instants de passages des véhicules dans le plan des indices de véhicules et des positions :  $T(n, x)$ . Ainsi, la prochaine étape est de remplacer, dans l'équation précédente, le temps inter-véhiculaire  $h$  par sa définition en termes de dérivée partielle,  $\partial_n T$ . En simplifiant l'équation obtenue on obtient l'**équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi Lagrangienne-Spatiale** suivante :

$$\partial_x T = \frac{1}{V(\partial_n T)} \quad (1.5)$$

Dorénavant, le plan  $(n, x)$  est discrétisé dans les deux dimensions. Dans la **dimension spatiale**, les calculs sont effectués sur des cellules de longueur  $\Delta x$ . D'après la **condition de Courant-Friedrich-Levy (CFL)** [32], la discrétisation spatiale et la longueur des pelotons de véhicules sont liés par une relation nécessaire afin de garantir la stabilité du schéma de résolution. En l'occurrence, cette relation est la suivante pour le schéma de résolution mésoscopique :

$$\Delta x \geq \frac{\Delta n}{k_x} = \frac{1}{k_x} \quad (1.6)$$

Il est important de noter que la discrétisation spatiale n'a pas lieu d'être régulière. Pour plus de clarté, la discrétisation spatiale dans cette section est considérée régulière. Dans la **dimension relative aux indices de véhicules**, les véhicules sont discrétisés par peloton de longueur  $\Delta n$ . Cependant, pour toute la suite de cette thèse, les véhicules seront considérés à l'unité :  $\Delta n = 1$ . Ce choix est motivé par la volonté de disposer d'informations individuelles sur l'ensemble des véhicules,. Ce qui, pour l'application à des grands réseaux, permet le suivi des véhicules le long de leur itinéraire complet.

La résolution de l'équation (1.5) associée à cette discrétisation présentée est réalisée à l'aide des équations de Lax-Hopf. La théorie [72] stipule que l'équation de Hamilton-Jacobi doit être associée à un **opérateur Hamiltonien**. Dans le cas présent, le Hamiltonien est le diagramme fondamental mésoscopique triangulaire présenté dans la Figure 1.6.

La résolution par les équations de Lax-Hopf consiste à estimer le chemin de moindre coût dans le plan  $(n, x)$  parmi l'ensemble des chemins permis par le Hamiltonien. Dans le cadre mésoscopique, le Hamiltonien est convexe donc le chemin de moindre coût est déterminé par le maximum des intégrations de l'équation de Hamilton-Jacobi suivant les chemins permis. Dans le plan  $(n, x)$  il existe deux chemins permis. La Figure 1.7 illustre ces deux chemins. Le premier chemin permis est défini par la branche fluide du Hamiltonien et est tracé en vert sur la Figure 1.7. Ce premier terme calculé à partir du paramètre de vitesse fluide  $u$  est appelé **terme de demande** et est noté  $T^D(n, x)$ . Il représente une propagation des conditions de circulation dans le sens de circulation (de l'amont vers l'aval). Le résultat de l'intégration est le suivant :

$$T^D(n, x) = T(n, x - \Delta x) + \frac{\Delta x}{u} \quad (1.7)$$

Le deuxième chemin permis est calculé par l'intégration de l'équation de Hamilton-Jacobi suivant la branche congestionnée du Hamiltonien. Le raisonnement est illustré en rouge sur la Figure 1.7. Ce terme dépendant des paramètres relatifs à la congestion,  $k_x$  et  $w$ , est appelé **terme d'offre**. Il représente la propagation des conditions de circulation dans le sens inverse de la circulation (de l'aval vers l'amont). Après intégration et réduction, l'équation du terme d'offre prend la forme suivante :

$$T^O(n, x) = T(n - k_x \Delta x, x + \Delta x) + \frac{\Delta x}{w} \quad (1.8)$$

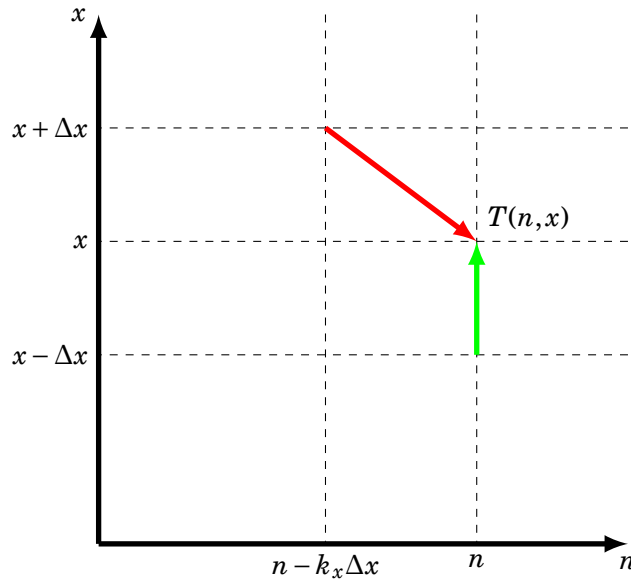


Fig. 1.7.: Résolution du modèle LWR mesoscopique avec la théorie de Hamilton-Jacobi

Le temps de passage effectif du véhicule  $n$  à l'emplacement  $x$  est le maximum (en raison de la convexité du Hamiltonien) entre le terme d'offre et le terme de demande :

$$T(n, x) = \max(T^D(n, x), T^O(n, x)) \quad (1.9)$$

## 1.4 Approche méthodologique

Dans cette section, le plan du manuscrit est annoncé en reposant sur une approche méthodologique. Cette approche méthodologique est choisie en adéquation avec les contextes opérationnels et scientifiques dans lesquels la thèse s'inscrit.

### 1.4.1 Méthodologie synthétique

La Figure 1.8 illustre de manière schématique le cheminement scientifique du travail réalisé dans cette thèse. D'après la partie précédente on propose de répondre à un ensemble de problématiques.

#### 1.4.1.1 Propagation des incertitudes dans le modèle d'écoulement

Les modèles d'écoulement dans la littérature sont classiquement présentés comme déterministes. Lorsque de la stochasticité est intégrée, il s'agit souvent d'effectuer des répliques

du modèle d'écoulement en tirant de manière aléatoire les paramètres du modèle. La problématique qui occupera la partie suivante du manuscrit est la problématique de la propagation des incertitudes dans un modèle d'écoulement. L'idée est de formuler une nouvelle approche stochastique d'un modèle d'écoulement afin d'obtenir des prévisions de trafic ainsi que des indications sur leurs erreurs associées. Cette problématique fait l'objet du bloc en rouge sur le schéma de la figure 1.8.

#### 1.4.1.2 Problématique relative au calage des conditions internes

Le modèle d'écoulement est un modèle de propagation de conditions de trafic en fonction de conditions internes. Ainsi, la problématique suivante est liée à la question de la fusion de données. En effet, l'idée est de profiter de données disponibles sur le terrain afin de caler en temps réel les conditions internes du modèle. En conséquence, les sorties du modèles seront cohérentes avec la réalité observée et les erreurs devront être réduites par ajout d'observations. La fusion de données prend appui sur les sorties du modèle d'écoulement et d'un modèle d'observation. Enfin, pour compléter le calage des conditions internes du modèle d'écoulement, il est nécessaire de prévoir une étape de mise à jour du modèle venant substituer les états calés aux états prédits. Le bloc bleu sur la Figure 1.8 est consacré à cette problématique.

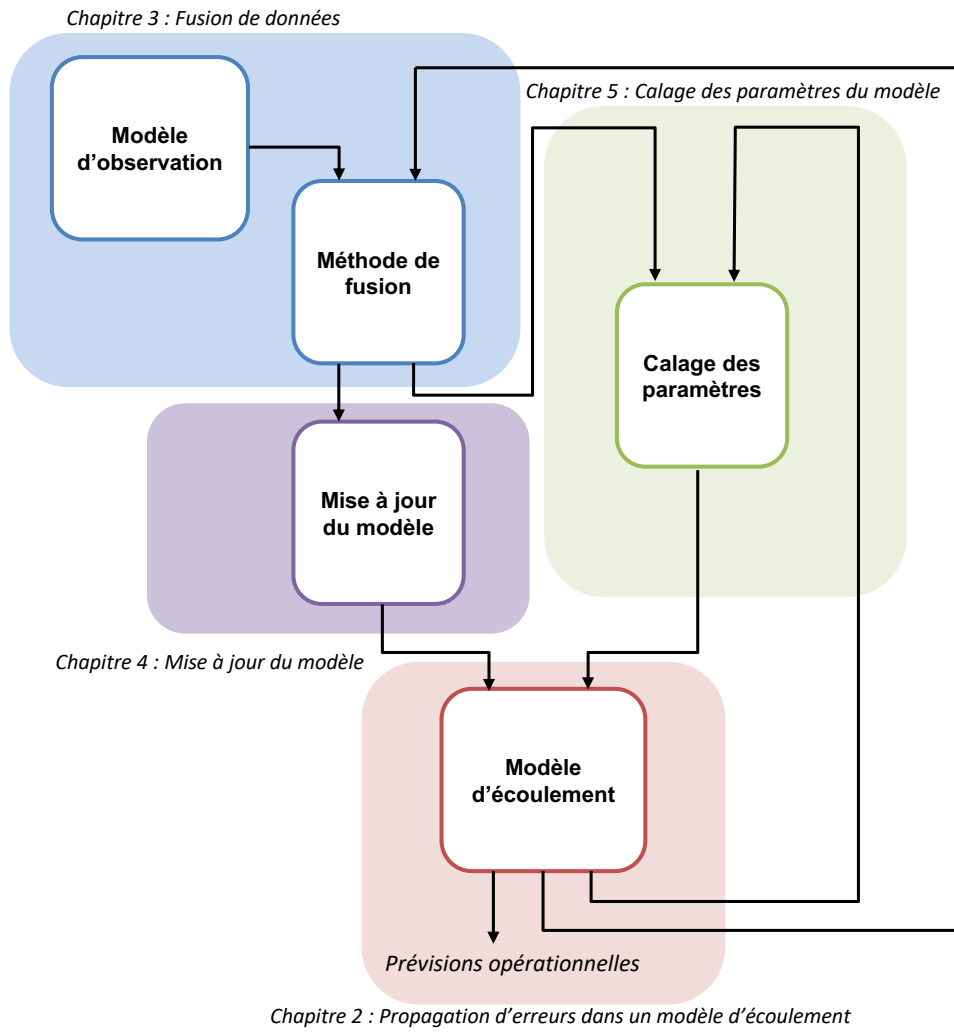
#### 1.4.1.3 Problématique relative au calage des paramètres du modèle

Le calage des conditions internes permet, en théorie, d'éviter une divergence entre la réalité et les états simulés en temps réel. Cependant, s'il y a eu un écart important entre les états calés et les états simulés à la séquence précédente, alors le paramétrage du modèle d'écoulement peut être en cause. La problématique suivante est donc relative à la réduction de ces écarts par le calage des paramètres du modèle. Cette dernière étape permet de proposer des prévisions à court terme cohérentes avec la situation observée. Cette dernière partie correspond au bloc en vert sur la figure 1.8.

### 1.4.2 Plan du manuscrit

La suite du manuscrit est organisée de la manière suivante :

- Le chapitre 2 propose le développement d'une méthode de modélisation mésoscopique du trafic avec suivi des erreurs de modèle. Il repose sur une analyse de l'état de l'art en matière des échelles de modélisation et de propagation d'incertitudes dans les modèles dynamiques. Les sorties du modèle de trafic sont des variables aléatoires distribuées suivant des mélanges de Gaussiennes. Des analyses de sensibilités sont proposées en fin de chapitre afin d'analyser l'efficacité et l'efficacé de la méthode



**Fig. 1.8.:** Vision schématique des différents éléments développés dans la thèse

développée. Enfin, des indicateurs opérationnels avec incertitudes sont définis et analysés sur des scénarios test.

- Dans le chapitre 3, un cadre d'assimilation de données est développé reposant sur le modèle dynamique avec propagation d'erreurs développé dans le chapitre 2. L'état de l'art en matière de fusion de données permet à la méthode développée de reposer sur des bases scientifiques solides. Ensuite, la méthode de fusion de données est formalisée. L'utilisation d'une méthode de mise à jour du modèle est proposée afin d'assurer une cohérence entre les variables issues de la fusion de donnée et du modèle d'écoulement avec propagation d'erreurs. Enfin, des scénarios de test sont montés et les résultats analysés au regard de la congestion.
- Le chapitre 4 est le chapitre consacré au calage des paramètres du modèle d'écoulement. Il s'agit d'un chapitre d'ouverture. Plusieurs catégories de méthodes de calage sont proposées afin d'orienter les futures recherches : l'augmentation du vecteur d'état et un processus d'optimisation. Dans ce chapitre, trois propositions de perspectives relatives au calage des paramètres du modèle sont proposées.
- Le chapitre 5, résume les travaux de la thèse. Dans une première partie, les résultats obtenus au cours de la thèse sont analysés en termes de performance et de potentielles limites. Ensuite, les différentes contributions sont rappelées. La dernière partie propose des pistes de recherche en perspective de l'amélioration et de la poursuite des travaux développés dans la thèse.





## Propagation d'erreurs au sein du modèle LWR Lagrangien-Spatial

Le modèle dynamique de trafic que nous sélectionnons est le modèle LWR Lagrangien-Spatial déterministe. Cependant, le modèle repose sur des hypothèses fortes. En effet, la composition du trafic est considérée homogène. En réalité les véhicules qui circulent sur le réseau possèdent des caractéristiques différentes. De même, les usagers ont des comportements différents. Un usager dit agressif aura tendance à rouler plus vite et à réduire sa distance le séparant du véhicule leader. Un usager plus précautionneux, au contraire, aura une conduite qui laisse une grande distance le séparant du véhicule leader. Toutes ces considérations sont retranscrites dans les paramètres des modèles de trafic. En conséquence, les paramètres du modèle sont sujets à des erreurs. Ces erreurs se propagent dans le modèles dynamique et affectent les sorties du modèle. Ce chapitre concerne l'étude de la propagation d'erreurs au sein du modèle LWR Lagrangien-Spatial.

Les motivations de ce chapitre sont multiples. Pour la gestion du trafic au quotidien, la connaissance des états de trafic anticipés permet d'être proactif dans le choix des décisions de contrôle du trafic. Les modèles déterministes permettent de disposer de prévisions sans données sur leur fiabilité. De plus, la connaissance des variances des états de trafic *a priori* est primordiale pour correctement enrichir le modèle à l'aide de données captées en temps réel (cf. chapitre 3). Pour l'ensemble de ces raisons, la connaissance des états de trafic et de leurs erreurs associées représente un prérequis important pour la gestion du trafic et l'exploitation efficiente des infrastructures.

Du point de vue méthodologique, il est préconisé d'effectuer des répliques afin de proposer une estimation des incertitudes sur les indicateurs produits. Ces répliques représentent un procédé très largement utilisé dans l'étude des erreurs de modèles qui repose sur la méthode de Monte Carlo. Cette méthode est présentée dans la première section de ce chapitre. Le verrou scientifique étudié est la propagation d'incertitudes directement dans le modèle LWR Lagrangien-Spatial. De ce fait, les attentes sont multiples :

- comprendre les sources d'accentuation des erreurs dans le modèle dynamique ;
- réduire la quantité d'informations à stocker pour le suivi des erreurs de modèles ;
- réduire la charge de calcul nécessaire pour la propagation des erreurs de modèles.

Pour ce faire, ce chapitre est divisé en plusieurs sections. La section 1 propose une introduction relative à la propagation d'erreurs dans les systèmes dynamiques. La section 2 est

consacrée à l'introduction de stochasticité dans le modèle LWR Lagrangien-Spatial. Entre autres, on présentera un ensemble de définitions et d'outils nécessaires pour appréhender les parties suivantes. La section 3 est consacrée à la modélisation des erreurs de modèle en tant que mélange de Dirac. Dans la section 4, le modèle GM-LS-LWR est développé. La section 5 propose une analyse de sensibilité du modèle de propagation d'erreurs. Enfin, la section 6 présente la construction d'indicateurs opérationnels reposant sur le modèle développé.

## 2.1 Propagation d'erreurs dans les systèmes dynamiques

L'étude de la propagation d'erreurs dans le modèle sélectionné s'introduit par une revue de la littérature à propos de la propagation d'erreurs dans les systèmes dynamiques. A l'issue de cette revue, nous pourrions choisir les méthodes que nous développerons.

Dans le domaine du trafic, la recherche s'est focalisée sur la représentation des phénomènes physiques régissant l'écoulement des véhicules. Ces modèles se sont perfectionnés et la diversité des modèles disponibles permet de représenter un ensemble large de phénomènes liés à l'écoulement des véhicules sur le réseau. En parallèle, les erreurs de modèles et leur propagation ont été largement étudiées dans des domaines divers tels que la modélisation de la dynamique de l'atmosphère [103, 92, 121], de l'hydrologie [24, 6] ou encore du génie civil [4, 9]. Les moyens de propager les erreurs dans les modèles dynamiques sont multiples. Sudret ([110]) classe les méthodes de propagation d'erreurs en trois catégories illustrées en Figure 2.1 : les méthodes spectrales, les méthodes de fiabilité et les méthodes basées sur la variabilité des réponses.

La connaissance complète de la distribution d'une variable aléatoire constitue le meilleur moyen pour connaître les erreurs de modèles. Les méthodes estimant la densité de probabilité dans sa globalité sont appelées des méthodes spectrales [110]. En effet, lorsque la stochasticité est introduite dans un modèle, les sorties deviennent des variables aléatoires. Dans la méthode de Monte Carlo [86], les erreurs sont estimées grâce à des répliques du modèle dynamique déterministe avec des valeurs de paramètres choisies aléatoirement dans leur distribution respective. Contrairement à ce que peut laisser penser le schéma de la Figure 2.1, la méthode de Monte Carlo ne permet pas d'estimer la distribution de probabilité continue mais sa version empirique (histogramme). Un histogramme de densité de probabilité représente la densité de probabilité moyenne pour un ensemble d'intervalles de valeurs permettant de couvrir l'ensemble du domaine de définition de la variable aléatoire. La Figure 2.2 illustre un processus de Monte Carlo permettant l'estimation des distributions des sorties d'un modèle dynamique sous la forme d'histogramme.

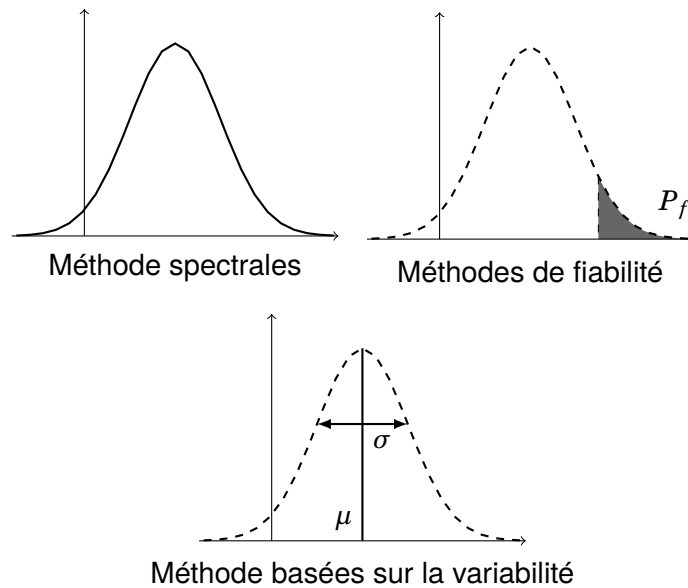


Fig. 2.1.: Méthodes de propagation d'erreurs, source : [110]

Les méthodes de fiabilité sont des méthodes permettant de donner la probabilité qu'un événement particulier se réalise. Ces méthodes sont particulièrement utilisées dans les calculs de structure afin d'estimer la résistance des structures [13]. Sur la Figure 2.1, en deuxième position les méthodes de fiabilité sont illustrées par le calcul de la partie grisée correspondant à la probabilité que la variable aléatoire dépasse un seuil. Ces méthodes ne nous intéressent pas particulièrement puisque nous ne cherchons pas à estimer la fiabilité d'une hypothèse mais plutôt la forme des distributions. Pour plus de détails concernant les méthodes de fiabilités, le lecteur peut se reporter aux références suivantes concernant la méthode de fiabilité du premier ordre (*First Order Reliability Method* ou FORM) : [60, 116]. Les références suivantes concernent les méthodes de fiabilité du second ordre (*Second Order Reliability Method* ou SORM) : [40, 68, 15].

Les méthodes basées sur la variabilité des réponses reposent sur l'estimation des moments statistiques que sont l'espérance et la variance. La méthode de perturbation [100] consiste à linéariser le modèle dynamique, souvent non linéaire, grâce à un développement de Taylor. Le calcul de la variance de la variable physique estimée fait appel aux dérivées partielles du modèle physique et aux variances des variables mises en jeu. D'autres méthodes rentrent dans cette catégorie et ont été appliquées notamment aux calculs de structure, telles que la méthode de quadrature [8, 111] ou encore la méthode de l'intégrale pondérée [38, 39, 113].

L'ensemble des méthodes citées sont particulièrement adaptées pour des modèles linéaires ou linéarisables. Dans le cas des études de trafic, la méthode de Monte Carlo est la méthode

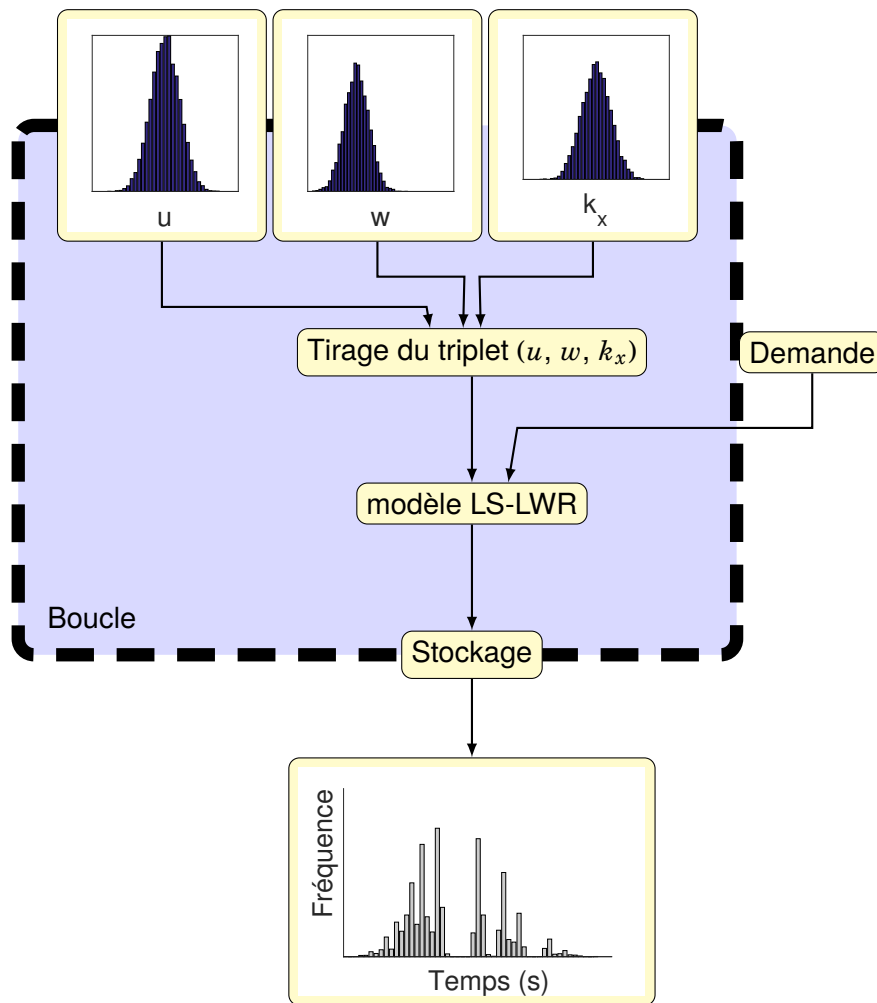


Fig. 2.2.: Simulations de Monte Carlo

la plus utilisée [16] et représente un bon point de départ pour la réflexion sur la propagation d'incertitudes dans le modèle LWR lagrangien-spatial.

## 2.2 Cadrage méthodologique

La méthode de Monte Carlo constitue un moyen efficace pour estimer les distributions de probabilités dans le cas de modèles dynamiques. En conséquence, nous proposons d'étudier la forme des distributions des termes d'offre et de demande du modèle LWR mesoscopique lorsque les paramètres du modèles sont sujets à des erreurs. La première étape consiste à introduire formellement de la stochasticité dans le modèle LWR Lagrangien-Spatial.

## 2.2.1 Introduction de stochasticité dans le modèle LWR lagrangien-spatial

Afin d'introduire les erreurs dans le modèle LWR lagrangien-spatial, nous proposons une hypothèse concernant la forme des distributions des paramètres aléatoires et des conditions aux bornes du modèle :

- (H1) Les paramètres du diagramme fondamental sont distribués suivant des gaussiennes.
- (H2) Les distributions des temps de passage des véhicules à l'entrée du réseau sont supposées connues.

La distribution gaussienne est une distribution de probabilité continue définie par deux paramètres :

- une moyenne  $\mu$ ;
- un écart-type  $\sigma$ .

On la note  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . Sa fonction de densité est définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier de la manière suivante :

$$\mathcal{N}(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Concernant l'hypothèse (H1), une étude empirique a permis d'étudier la forme des distributions des paramètres du diagramme fondamental [43]. En accord avec ces études, et pour des considérations de commodité mathématique, l'hypothèse (H1) a été considérée. L'hypothèse (H2) a été formulée puisque nous ne connaissons pas, en réalité, la forme des distributions des temps de passage individuels des véhicules à l'entrée du réseau. Faute de preuves empiriques, les distributions utilisées pour les temps de passage à l'entrée du réseau sont régulières comme des gaussiennes ou des mélanges de gaussiennes.

Pour rendre faisable l'ensemble des calculs nécessaires au développement des méthodes des sections suivantes, nous devons faire une hypothèse d'indépendance sur les variables aléatoires :

- (H3) L'ensemble des variables aléatoires prises en compte dans les modèles développés sont considérées indépendantes.
- (H4) Enfin, une dernière hypothèse propose de considérer les véhicules selon le principe du premier arrivé premier sorti (ou *First In First Out - FIFO*).

Ces hypothèses permettent de mener à bien les recherches de cette partie. Cependant, elles sont effectivement limitatives. Elles sont discutées lors des discussions et des limites présentées dans les chapitres suivants.

## 2.2.2 Observation de la distribution du terme d'offre par un processus de Monte Carlo

Afin de comprendre les choix qui ont été faits dans la suite de la thèse en termes de modélisation des incertitudes, on propose une étude de la propagation des incertitudes par le terme d'offre. Cette étude est faite avec la méthode de Monte Carlo.

### 2.2.2.1 Visualisation d'un histogramme

Dans cette sous-section, on propose d'observer un histogramme des erreurs réalisé à partir de répliquions du terme d'offre. Le terme d'offre est rappelé dans l'équation suivante :

$$T^O(n, x) = T(n - k_x \Delta x, x + \Delta x) + \frac{\Delta x}{w}. \quad (2.2)$$

La Figure 2.3 illustre l'estimation de la densité de probabilité du terme d'offre pour 10000 répliquions regroupées en 50 intervalles de valeurs. La simulation a été effectuée pour un débit au noeud aval faible afin de mettre en évidence le comportement particulier de pics de probabilités espacés. Les temps de passage au noeud aval sont distribués selon des gaussiennes. Il est à noter que le paramétrage exact n'est pas important puisque l'observation que nous menons est de nature qualitative plutôt que quantitative. Les explications accompagnées de considérations qualitatives seront menées dans les parties suivantes.

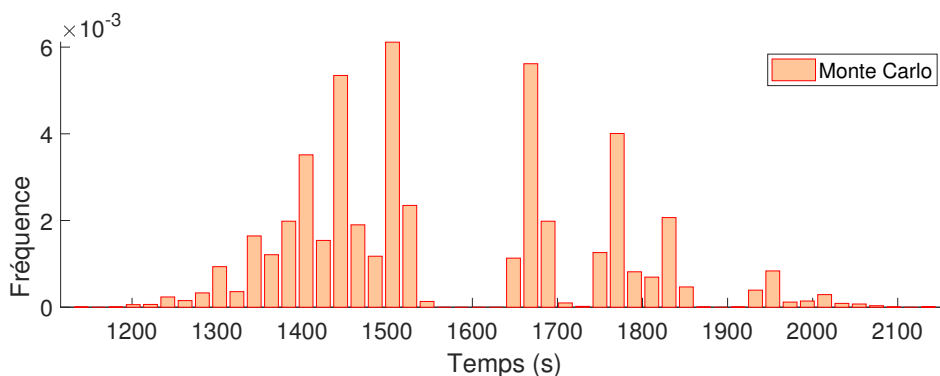


Fig. 2.3.: Propagation d'incertitudes pour le terme d'offre par des tirages de Monte Carlo

On observe en effet que la distribution du temps d'offre simulée n'est pas gaussienne. Des pics de probabilités espacés apparaissent. Les hauteurs des pics semblent être contenus dans une enveloppe qui n'est pas sans rappeler une gaussienne. Cette observation implique

une distribution de probabilité faisant intervenir plusieurs composantes. La sous-section suivante propose une explication de ce phénomène.

### 2.2.2.2 Explication : Erreur d'Indice (EI)

Dans le modèle LWR Lagrangien-Spatial déterministe, l'information sur le temps d'offre du véhicule  $n$  au point  $x$  dépend du temps de passage du véhicule dont l'indice est décalé de  $k_x \Delta x$  parmi les véhicules passés. L'incertitude sur la densité maximale de véhicule peut entraîner une différence entière sur ce décalage. La méthode proposée dans cette partie est illustrée en Figure 2.5. La variable aléatoire  $\Delta x(k_x - \mu_{k_x})$  suit une gaussienne centrée d'écart-type  $\Delta x \sigma_{k_x}$  :

$$f_{\Delta x(k_x - \mu_{k_x})}(\tilde{j}) = \mathcal{N}(\tilde{j}, 0, \Delta x \sigma_{k_x}) \quad (2.3)$$

où  $\tilde{j}$  définit l'erreur d'indice (EI) continu. Pour des raisons physiques et de cohérence entre la modélisation et la réalité, l'EI doit être un entier relatif. Soit  $j$  la partie entière de l'EI :  $j = [EI]$ . On définit la probabilité de  $j$  comme celles de  $\tilde{j}$  compris entre  $j - 0.5$  et  $j + 0.5$  dans l'équation (2.3), soit :

$$\pi(j) = \mathbb{P}(j - 0.5 \leq \tilde{j} \leq j + 0.5) = \int_{j-0.5}^{j+0.5} f_{\Delta x(k_x - \mu_{k_x})}(\tilde{j}) d\tilde{j}. \quad (2.4)$$

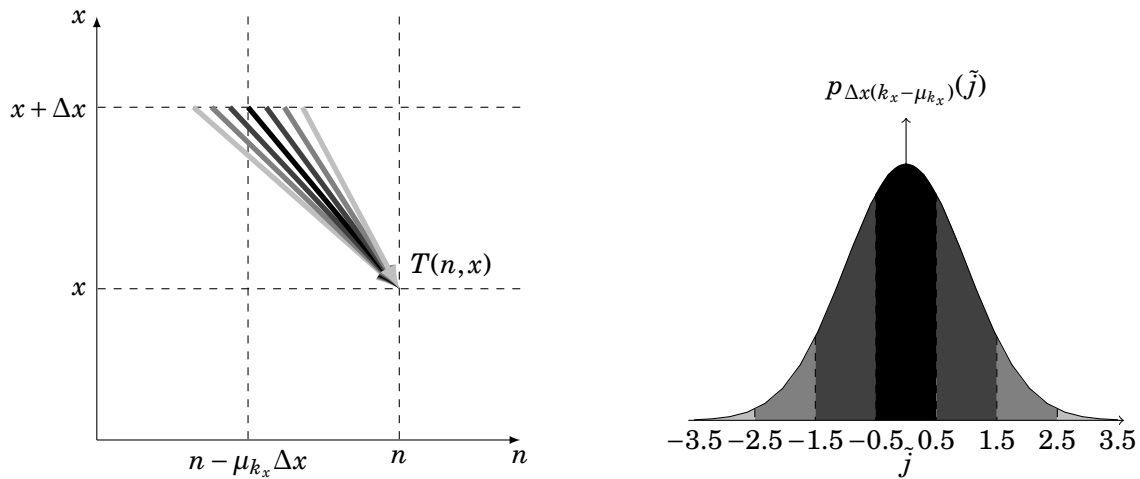
Il est à noter que la somme des probabilités pour tous les entiers est la suivante :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \pi(j) = \int_{\mathbb{R}} f_{\Delta x(k_x - \mu_{k_x})}(\tilde{j}) d\tilde{j} = 1 \quad (2.5)$$

ce qui représente l'axiome des probabilités. En raison de la concentration de la distribution gaussienne autour de sa moyenne, en se limitant à un intervalle comprenant quelques multiples de  $\sigma$ , on peut approcher 1. Par exemple, d'après les quantiles de la loi normale en Annexe C, afin de garder au minimum 99,9% de la distribution, il suffit de limiter les EI discrètes dans un intervalle de nombres entiers contenant l'intervalle réel  $[-3\sigma, 3\sigma]$ .

Le terme d'offre présente une forme de distribution complexe même si les paramètres sont distribués selon des gaussiennes. Cette forme présente des composantes qui peuvent être expliqués par des décalages d'indice de véhicule dans la formule du terme d'offre. Une distribution de probabilité prenant la forme d'une combinaison convexe d'autres distributions est appelée un mélange de lois. Dans la partie suivante, on présente l'approche suivie pour





**Fig. 2.4.:** n-index error (left) n-index error propagation, (right) probability distribution of n-index error with a grey scale

**Fig. 2.5.:** Description schématique de l'EI discrète (à gauche) et distribution des probabilités correspondantes en nuances de gris (à droite)

modéliser les incertitudes par des mélanges de Dirac. Ensuite, la piste suivie est celle des mélanges de gaussiennes.

## 2.3 Mélanges de Dirac

La première méthode étudiée consiste à modéliser les distributions des erreurs sur les états de trafic suivant des mélanges de Dirac. L'annexe D présente des généralités sur la fonction Dirac. Ainsi, la section suivante entre dans le vif du sujet des mélanges de Dirac.

### 2.3.1 Définitions

Un mélange de Dirac est défini comme la combinaison convexe de fonctions de Dirac. En d'autres termes, il s'agit d'une somme de fonctions de Dirac pondérées par des poids dont la somme est égale à 1. Soit  $f$  une fonction résultant de la combinaison convexe de fonctions de Dirac. On définit maintenant :

- $J$  le nombre de fonctions de Dirac étudiées composant la somme ;
- $\mathbf{x} = [x^{(1)}, \dots, x^{(J)}]$ , un vecteur composé de  $J$  valeurs réelles ;
- $\mathbf{w} = [\pi^{(1)}, \dots, \pi^{(J)}]$ , un vecteur composé de  $J$  valeurs comprises entre 0 et 1 ;

$f$  est un mélange de Dirac si et seulement si les deux équations suivantes sont vraies :

$$f(x, \mathbf{x}, \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^J \pi^j \delta_{x^{(j)}}(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

et

$$\sum_{j=1}^J \pi^j = 1 \quad (2.7)$$

Afin de représenter graphiquement les poids, on décide de représenter les flèches des Dirac avec une longueur correspondant au poids du mode. Ainsi, la Figure 2.6 illustre un mélange de Dirac arbitraire composé de 3 composantes.

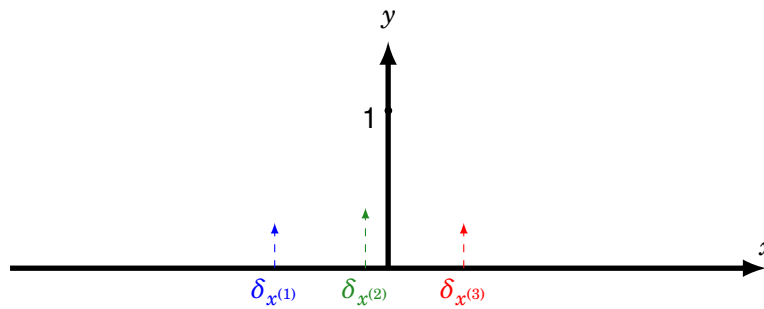


Fig. 2.6.: Graphique d'un mélange de Dirac

D'après les propriétés d'additivité et de multiplication par un scalaire de l'intégrale, l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  d'un mélange de Dirac est un mélange de Heaviside. Soit  $F$  la primitive de constante additive nulle de la fonction  $f$  ; elle est définie par les équations suivantes :

$$F(x, \mathbf{x}, \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^J \pi^j H_{x^{(j)}}(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

et,

$$\sum_{j=1}^J \pi^j = 1 \quad (2.9)$$

La figure 2.7 illustre le mélange de Heaviside correspondant au mélange de Dirac illustré en Figure 2.6.

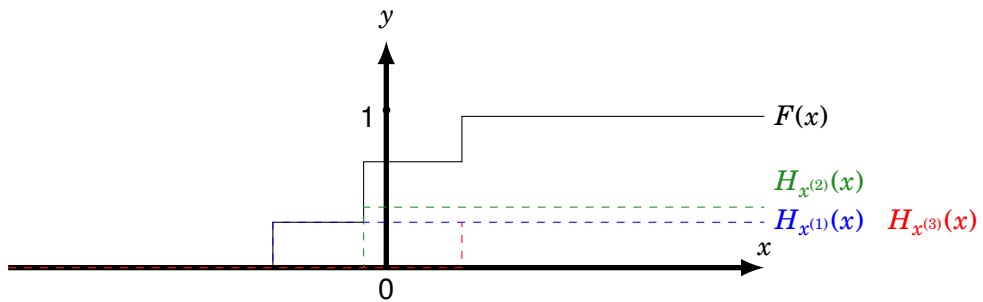


Fig. 2.7.: Graphique d'un mélange de Heaviside, primitive d'un mélange de Dirac

Il est important de noter qu'un mélange de Heaviside est croissant et compris entre 0 et 1. Sa limite à l'infini se rapporte à la somme des poids et est égale à 1. Cette propriété est vérifiable dans l'équation (2.9).

### 2.3.2 Propagation d'incertitudes par un mélange de Dirac

Un mélange de Heaviside possède des propriétés similaires à la fonction de répartition d'une variable aléatoire définie sur  $\mathbb{R}$ . En effet, les trois propriétés suivantes, communes aux deux fonctions, ont un intérêt particulier :

1. elles sont toutes deux croissantes ;
2. leur limite en  $-\infty$  est 0 ;
3. leur limite en  $+\infty$  est 1.

Ces trois propriétés permettent d'établir qu'un mélange de Heaviside est un moyen d'approximation d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire. Soit  $X$  une variable aléatoire continue définie sur  $\mathbb{R}$ . Les fonctions de densité et de répartition de  $X$  sont respectivement notées  $f_x$  et  $F_X$ . Il s'agit maintenant de paramétrer un mélange de Heaviside  $G_X$  permettant l'approximation de  $F_X$ . Partant d'un choix du nombre de composantes  $J$ , représentant la finesse de l'approximation, la fonction de répartition est estimée à l'aide d'un mélange d'échelons de poids égaux.

L'approximation d'une fonction de densité par un mélange de Dirac est présentée dans [106]. Ici, le vecteur des points de définition est  $\mathbf{x} = [x^{(j)}]_{1 \leq j \leq J}$ . Le vecteur des poids est plus simple de par la propriété de poids égaux :  $\mathbf{w} = (1/J) \cdot [1, \dots, 1]$ . La distribution optimale des

points de définition est calculée à partir de la minimisation de la distance entre la fonction de répartition  $F_X$  et le mélange de Heaviside. La formulation mathématique est la suivante :

$$dist(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (F_X(x) - G(x, \mathbf{x}))^2 dx \quad (2.10)$$

La distribution optimale des composantes de  $\mathbf{x}$  est atteinte lorsque la relation suivante est vérifiée [106] :

$$F_X(x_j) = \frac{2j-1}{2J} \quad (2.11)$$

pour  $j = 1, \dots, J$ . Afin d'illustrer cette méthode d'approximation, on propose de l'appliquer afin de faire l'approximation d'une distribution gaussienne de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ . On appelle la fonction de répartition d'une telle loi :

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \right) \quad (2.12)$$

où erf est la fonction d'erreur de Gauss définie comme :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (2.13)$$

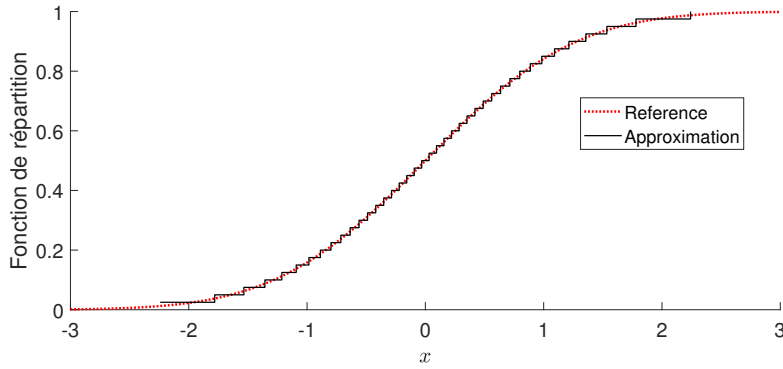
Ainsi, pour tout  $j$  entier entre 1 et  $J$  :

$$x^{(j)} = \sigma \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1} \left( \frac{2j-1-J}{J} \right) + \mu \quad (2.14)$$

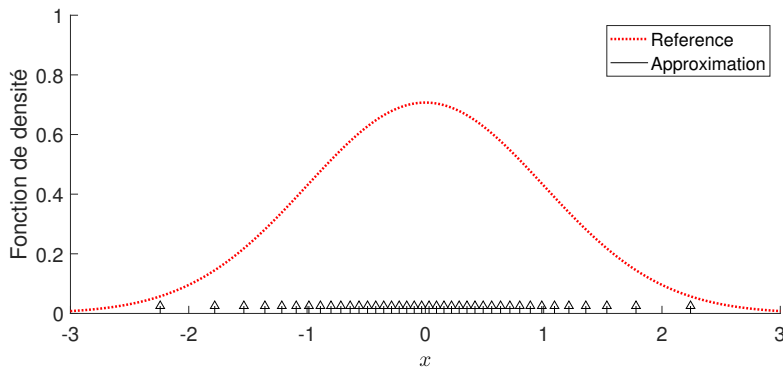
Les fonctions erf et erf<sup>-1</sup> sont implémentées dans MatLab® et permettent donc l'illustration en figure 2.8.

### 2.3.3 Propagation des incertitudes par un mélange de Dirac

On cherche une formulation analytique permettant d'effectuer une propagation d'incertitudes au sein du modèle LWR mésoscopique. Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires continues définies respectivement par leurs fonctions de densité  $f_X$  et  $f_Y$  ainsi que par leur fonction de répartition  $F_X$  et  $F_Y$ . Soit  $g$  une fonction de deux variables. La variable aléatoire  $Z$  est



(a) Fonction de répartition



(b) Fonction de densité

**Fig. 2.8.:** Illustration de l'approximation d'une loi normale par un mélange de Dirac avec 20 composantes

définie comme la variable aléatoire résultant de la fonction  $g$  appliquée sur les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  :

$$Z = g(X, Y) \quad (2.15)$$

**On fait l'hypothèse d'indépendance des variables  $X$  et  $Y$ .** La fonction de répartition de la variable  $Z$  est la suivante :

$$F_Z(z) = \iint_{D_z} f_X(x)f_Y(y)dx dy \quad (2.16)$$

où  $D_Z$  est défini comme le sous-ensemble de l'espace des paramètres :

$$D_z = \{(x, y), g(x, y) \leq z\} \quad (2.17)$$

D'après le corollaire précédent, les fonctions de répartition de Heaviside permettent d'exprimer des variables sans comportement aléatoire. C'est ainsi que pour des valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  de

fonctions de densité respectives  $\delta(x - \alpha)$  et  $\delta(y - \beta)$ , la fonction de répartition de la variable  $g(\alpha, \beta)$  non-aléatoire peut être exprimée de la manière suivante :

$$F_{g(\alpha, \beta)}(z) = \iint_{\mathbb{R}^2} \delta(x - \alpha) \delta(y - \beta) dx dy = H(z - g(\alpha, \beta)) \quad (2.18)$$

**On fait l'hypothèse que  $X$  et  $Y$  sont distribuées suivant des mélanges de Dirac.** La fonction de densité  $f_X$  s'exprime donc :

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^I \pi^{(i)} \delta(x - x^{(i)}); \quad (2.19)$$

et la fonction de densité  $f_Y$  :

$$F_Y(y) = \sum_{j=1}^J \Pi^{(j)} \delta(y - y^{(j)}). \quad (2.20)$$

D'après (2.16) :

$$F_Z(z) = \iint_{D_z} \sum_{i=1}^I \pi^{(i)} \delta(x - x^{(i)}) \sum_{j=1}^J \Pi^{(j)} \delta(y - y^{(j)}) dx dy \quad (2.21)$$

Et ainsi de par les propriétés de l'intégrale et (2.18) :

$$F_Z(z) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \pi^{(i)} \Pi^{(j)} H(z - f(x^{(i)}, y^{(j)})) \quad (2.22)$$

et aussi :

$$f_Z(z) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \pi^{(i)} \Pi^{(j)} \delta(z - f(x^{(i)}, y^{(j)})) \quad (2.23)$$

On conclut ainsi que la variable aléatoire  $Z$  est distribuée selon un mélange de Dirac. Les points de définition des Dirac sont les  $f(x^{(i)}, y^{(j)})$  et les poids sont les  $\pi^{(i)} \Pi^{(j)}$ . Le nombre de composantes de la distribution résultante est  $I \times J$ .

### Propagation du terme de demande

Le terme de demande est exprimé par la variable  $T^D$  et est défini dans l'équation (1.7). Le paramètre de vitesse fluide est distribué selon une gaussienne approximée par un

mélange de Dirac. La condition aux bornes est distribuée selon un mélange de Dirac comme présenté :

$$f_{T(n,x-\Delta x)}(t) = \sum_{i=1}^I \pi_{T(n,x-\Delta x)}^{(i)} \delta \left( t - \tau_{T(n,x-\Delta x)}^{(i)} \right) \quad (2.24)$$

Les deux distributions de Dirac sont composées de  $I$  composantes afin de réduire le nombre d'indices dans les formulations. D'après la théorie, le terme de demande s'exprime sous la forme d'un mélange de Dirac :

$$f_{T^D(n,x)}(t) = \sum_{i=1}^I \sum_{l=i}^I \pi_{T(n,x-\Delta x)}^{(i)} \pi_u^{(l)} \delta \left( t - \tau_{T(n,x-\Delta x)}^{(i)} - \frac{\Delta x}{u^{(l)}} \right) \quad (2.25)$$

$u^{(l)}$  est la valeur du  $l$ -ième Dirac de la distribution de la vitesse fluide  $u$ . Le nombre de composantes Dirac de la distribution du terme de demande est  $I^2$ .

### Propagation du terme d'offre

La propagation du terme d'offre repose sur plusieurs étapes consécutives :

1. Calculer les erreurs de l'indice discrètes comme présentés dans la section 2.2.2.2;
2. Calculer la propagation d'incertitudes par la vitesse maximale de remontée de congésion pour une EI discrète ;
3. Combiner les deux approches.

On dispose de  $J$  EI discrètes et de leurs probabilités associées :  $\pi(j)$  (cf. section 2.2.2.2). Soit  $j$  une EI discrète particulière. Sous cette condition, la condition aux bornes est simplifiée :  $T(n - \Delta x \mu_{k_x} + j, x + \Delta x)$ . Cette condition aux bornes est distribuée selon un mélange de Dirac à  $I_j$  composantes :

$$f_{T(n-\mu_{k_x} \Delta x + j, x + \Delta x)}(t) = \sum_{i=1}^{I_j} \pi_{T(n-\mu_{k_x} \Delta x + j, x + \Delta x)}^{(i)} \delta \left( t - \tau_{T(n-\mu_{k_x} \Delta x + j, x + \Delta x)}^{(i)} \right) \quad (2.26)$$

Pour chaque EI discrète, la distribution partielle du terme d'offre associée à l'EI  $j$  est  $T^{O,(j)}(n,x)$ . D'après la théorie, elle est de la forme du mélange de Dirac suivant :

$$f_{T^{O,(j)}(n,x)}(t) = \sum_{i=1}^{I_j} \sum_{l=1}^L \pi_{T(n-\mu_{k_x} \Delta x + j, x + \Delta x)}^{(i)} \pi_w^{(l)} \delta \left( t - \tau_{T(n-\mu_{k_x} \Delta x + j, x + \Delta x)}^{(i)} - \frac{\Delta x}{w^{(l)}} \right) \quad (2.27)$$

$L$  est le nombre de composantes Dirac de la distribution de la vitesse fluide  $u$ . La notation  $u^{(l)}$  correspond à la valeur du  $l$ -ième Dirac de la distribution de la vitesse fluide  $u$ .

On combine maintenant la propagation pour une EI discrète et le calcul des probabilités des EI discrètes (2.5) :

$$f_{T^O(n,x)}(t) = \sum_{i=1}^{I_j} \sum_{l=1}^L \sum_j \pi(j) \pi_{T(n-\mu_{k_x} \Delta x + j, x + \Delta x)}^{(i)} \pi_w^{(l)} \delta \left( t - \tau_{T(n-\mu_{k_x} \Delta x + j, x + \Delta x)}^{(i)} - \frac{\Delta x}{w^{(l)}} \right) \quad (2.28)$$

On a en particulier :

$$\sum_{i=1}^{I_j} \sum_{l=1}^L \sum_j \pi(j) \pi_{T(n-\mu_{k_x} \Delta x + j, x + \Delta x)}^{(i)} \pi_w^{(l)} = 1 \quad (2.29)$$

Ainsi, le résultat est un mélange de Dirac. A l'aide d'une réindexation, l'équation peut être simplifiée sous la forme classique d'un mélange de Dirac. Le nombre de composantes de cette distribution est  $\hat{I} = I_j \times L \times J$ .

### La fonction maximum

Le résultat du modèle LS-LWR est le maximum de l'offre et de la demande. Les équations (2.25) et (2.28) donnent respectivement la distribution du terme d'offre et la distribution du terme de demande. D'après la théorie, le résultat du modèle dynamique avec propagation d'incertitudes avec mélange de Dirac est :

$$f_{T(n,x)}(t) = \sum_{i=1}^{I^2} \sum_{j=1}^{\hat{I}} \pi_{T^D(n,x)}^{(i)} \pi_{T^O(n,x)}^{(j)} \delta \left( t - \max \left( \tau_{T^D(n,x)}^{(i)}, \tau_{T^O(n,x)}^{(j)} \right) \right) \quad (2.30)$$

où les distributions ont été paramétrées en adéquation avec les simplifications proposées. Le nombre de composantes vaut :  $I^2 \hat{I}$  avec les notations précédentes.

#### 2.3.3.1 Avantages et inconvénients

Les équations précédentes proposent de suivre les erreurs de modèles lorsqu'elles sont estimées sous la forme de mélanges de Dirac. Cette méthode possède des avantages mais aussi des inconvénients.

#### Avantages

Le premier avantage de la méthode que nous pouvons citer est la simplicité des calculs. Même si les équations proposées semblent compliquées, la méthode est analytique et découle directement des équations du modèle sans effectuer d'hypothèses supplémentaires pour les calculs. Un deuxième avantage est le fait que les calculs des différents Diracs sont complètement indépendants sous les hypothèses prises en début de chapitre. Ainsi, les



calculs peuvent être parallélisés ou effectués sous forme matriciels sous MatLab® ou le package *numpy* de Python.

### Inconvénients

L'inconvénient principal de cette méthode est la multiplication des composantes dans les calculs. Lors d'une seule itération du modèle, on a vu que le nombre de composantes s'est grandement multiplié. En l'état, cela entraîne donc une augmentation considérable du temps de calcul au fil des itérations du modèle. Cette augmentation du temps de calcul n'est pas limitée. De plus, le stockage d'informations nécessaire pour représenter l'ensemble des composantes est considérable.

### Conclusion

Pour conclure quant à la méthode de propagation des incertitudes par un mélange de Dirac, les avantages et inconvénients de la méthode rappellent fortement ceux de la méthode de Monte Carlo. De plus, vu les limites de cette approche, une autre méthode de propagation a été développée. Cette deuxième méthode repose sur des mélanges de gaussiennes.

## 2.4 Propagation des erreurs par des mélanges de gaussiennes

Le modèle développé dans la thèse est un modèle reposant sur des distributions sous la forme de mélanges de gaussiennes. En référence à ses caractéristiques, le modèle a été nommé *Gaussian Mixture Lagrangian Space LWR model* ou *GM-LS-LWR* en abrégé.

### 2.4.1 L'algorithme EM

Une variable aléatoire suit une distribution de la forme d'un mélange de gaussiennes lorsque sa distribution est une combinaison convexe de gaussiennes. En d'autres termes, il s'agit d'une somme pondérée de gaussiennes dont la somme des poids est égale à 1. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de la forme d'un mélange de gaussiennes. Sa fonction de densité  $f_X$  est définie de la manière suivante :

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^J \pi_X^{(i)} \mathcal{N}\left(x; \mu_X^{(i)}, \sigma_X^{(i)}\right) \quad (2.31)$$

et

$$\sum_{i=1}^J \pi_X^{(i)} = 1 \quad (2.32)$$

faisant intervenir les paramètres suivants :

- $J$  le nombre de composantes gaussiennes du mélange
- $\boldsymbol{\mu}_X = [\mu_X^{(1)}, \dots, \mu_X^{(J)}]$ , un vecteur composé des moyennes des composantes ;
- $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_X^{(1)}, \dots, \sigma_X^{(J)}]$ , un vecteur composé des écarts-types des composantes ;
- $\boldsymbol{\pi} = [\pi_X^{(1)}, \dots, \pi_X^{(J)}]$ , un vecteur composé des poids des composantes, compris entre 0 et 1.

Les mélanges de gaussiennes proposent des avantages mathématiques proches de ceux des gaussiennes. De plus, le fait d'utiliser un mélange permet l'estimation de fonctions de densité plus complexes.

L'algorithme de Maximisation d'Espérance (EM) permet d'approcher une distribution de probabilité définie par une distribution paramétrable. Il s'agit d'un processus d'optimisation basé sur la maximisation d'une vraisemblance. Dans [109], l'algorithme EM est utilisé afin de caler une distribution quelconque sous la forme d'un mélange de gaussiennes à  $J$  composantes, sur un jeu de particules.

Le point de départ de l'algorithme EM est de disposer d'un jeu  $\mathcal{X}$  de  $N$  particules. Ces particules peuvent être générées à partir d'une distribution définie ou bien d'une simulation associée à un processus de Monte Carlo. Les particules sont définies par le vecteur suivant :

$$\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_J\}. \quad (2.33)$$

L'algorithme est initialisé par le choix arbitraire des paramètres  $\theta$  du mélange de gaussienne à  $J$  composantes :

$$\theta^{(0),0} = \{\pi^{(1),0}, \dots, \pi^{(J),0}, \mu^{(1),0}, \dots, \mu^{(J),0}, \sigma^{(1),0}, \dots, \sigma^{(J),0}\} \quad (2.34)$$

Le processus qui suit est un processus itératif s'étendant sur  $K$  itérations. L'objectif est d'obtenir une convergence des paramètres au fil des itérations. Pour le passage de l'itération  $k$  à  $k+1$  les étapes sont les suivantes [109] :

1. On calcule la vraisemblance de l'appartenance de  $x_i$  à la composante  $j$  pour tout  $i \leq N$  et  $j \leq J$  :

$$\tau_j(x_i, \theta^{(k)}) = \frac{\pi^{(j),k} \mathcal{N}(x_i, \mu^{(j),k}, \sigma^{(j),k})}{\sum_{m=1}^J \pi^{(m),k} \mathcal{N}(x_i, \mu^{(m),k}, \sigma^{(m),k})} \quad (2.35)$$

2. Pour tout  $j \leq J$ , on calcule le nouveau poids de la composante correspondante :

$$\pi_j^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^N \tau_j(x_i, \theta^{(k)})}{N} \quad (2.36)$$

3. On calcule le nouveau paramètre de moyenne de la composante  $j$  :

$$\mu_j^{(k+1)} = \frac{1}{N_j^{(k)}} \sum_{i=1}^N \tau_j(x_i, \theta^{(k)}) \times x_i \quad (2.37)$$

4. On calcule le nouveau paramètre d'écart type de la composante  $j$  :

$$\sigma_j^{(k+1)} = \sqrt{\frac{1}{N_j^{(k)}} \sum_{i=1}^N \tau_j(x_i, \theta^{(k)}) \times (x_i - \mu_j^{(k+1)})^2} \quad (2.38)$$

Afin d'illustrer l'algorithme EM, un ensemble de 2000 particules a été généré à partir d'une distribution suivant un mélange de 3 gaussiennes. L'initialisation de l'algorithme est réalisée en choisissant des composantes identiques en écarts-types et poids mais dont les moyennes ont été choisies aléatoirement parmi l'ensemble des particules. Les résultats de l'algorithme EM pour les itérations 1, 10, 20 et 30 sont illustrés en Figure 2.9. On peut remarquer que l'algorithme converge rapidement vers la distribution des particules. Ainsi, un nombre faible d'itérations permet une estimation précise d'une distribution sous la forme d'un mélange de gaussiennes.

## 2.4.2 Propagation d'incertitudes dans le terme de demande

Dans le sens de la circulation, la propagation d'incertitudes se fait via le terme de demande. La figure 2.10 illustre la géométrie du sous-réseau utilisé pour cette partie. On rappelle la formule (1.7) :

$$\mathbf{T}^D(n, x) = T(n, x - \Delta x) + \frac{\Delta x}{u} \quad (2.39)$$

Où  $\Delta x$  est la longueur de la cellule et  $u$  le paramètre de vitesse fluide du diagramme fondamental. Aussi,  $T(n, x - \Delta x)$  est la condition aux bornes. Sous les hypothèses relatives à l'intégration d'erreurs dans le modèle dynamique (cf. 2.2.1), le paramètre  $u$  est une variable

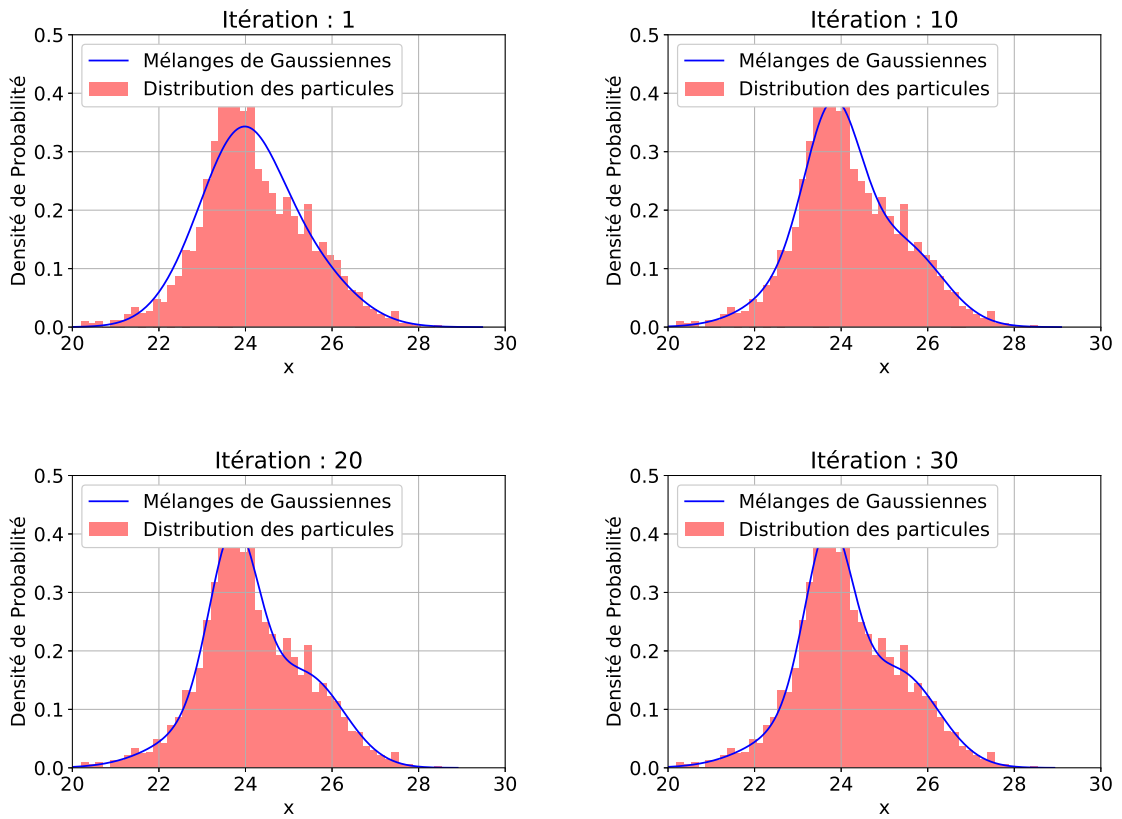


Fig. 2.9.: Résultats de l'algorithme EM pour diverses itérations (2000 particules, 3 composantes)

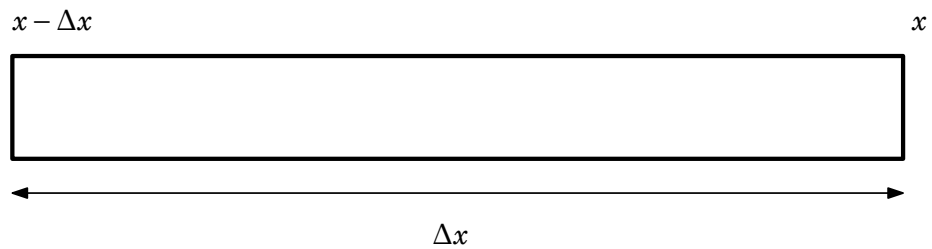


Fig. 2.10.: Géométrie du sous-réseau relatif à la propagation d'incertitude dans le sens de la circulation

aléatoire distribuée selon une gaussienne de moyenne  $\mu_u$  et un écart-type  $\sigma_u$ . Sa fonction de densité, notée  $f_u$  s'exprime à l'aide de la fonction  $\mathcal{N}$  :

$$f_u(\tilde{u}) = \mathcal{N}(\tilde{u}, \mu_u, \sigma_u) \quad (2.40)$$

La condition aux bornes est une variable aléatoire distribuée selon un mélange de gaussiennes. Soit  $f_{T^D(n, x - \Delta x)}$  sa fonction de densité et  $I$  le nombre de composantes. On note  $\pi_{T^D(n, x - \Delta x)}^{(i)}$ ,  $\mu_{T^D(n, x - \Delta x)}^{(i)}$  et  $\sigma_{T^D(n, x - \Delta x)}^{(i)}$  respectivement le poids, la moyenne et l'écart-type de la  $i$ -ème composante gaussienne de la distribution de  $T(n, x - \Delta x)$ . Elle s'exprime, grâce à la fonction  $\mathcal{N}$ , comme suivant :

$$f_{T(n, x - \Delta x)}(t) = \sum_{i=1}^I \pi_{T(n, x - \Delta x)}^{(i)} \mathcal{N}\left(t; \mu_{T(n, x - \Delta x)}^{(i)}, \sigma_{T(n, x - \Delta x)}^{(i)}\right) \quad (2.41)$$

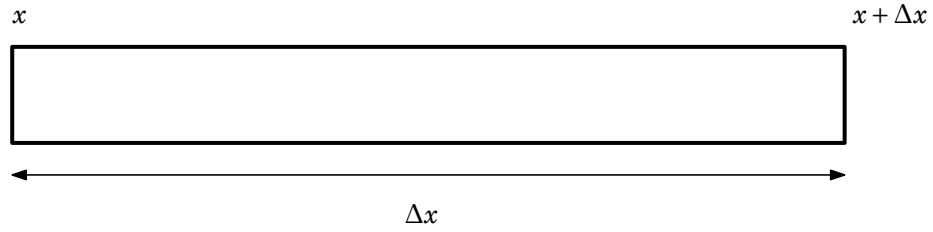
On recherche la distribution du terme de demande sous la forme d'un mélange de gaussiennes. On définit ainsi la fonction de densité  $f_{T^D(n, x)}$  en accord :

$$f_{T^D(n, x)}(t) = \sum_{i=1}^I \pi_{T^D(n, x)}^{(i)} \mathcal{N}\left(t; \mu_{T^D(n, x)}^{(i)}, \sigma_{T^D(n, x)}^{(i)}\right) \quad (2.42)$$

Où  $\pi_{T^D(n, x)}^{(i)}$ ,  $\mu_{T^D(n, x)}^{(i)}$  et  $\sigma_{T^D(n, x)}^{(i)}$  sont les paramètres de la nouvelle distribution. Ici, le paramètre de vitesse fluide  $u$  étant distribué suivant une simple gaussienne, le nombre de composantes de la distribution résultant est le fruit de la multiplication de  $I$  et de 1. La méthode de perturbation appliquée à un mélange de gaussiennes donne :

$$\begin{aligned} \mu_{T^D(n, x)}^{(i)} &= \mu_{T(n, x - \Delta x)}^{(i)} + \frac{\Delta x}{\mu_u} \\ \sigma_{T^D(n, x)}^{(i)} &= \sqrt{\left(\frac{\delta T^D(n, x)}{\delta T(n, x - \Delta x)}(\mu_{T(n, x - \Delta x)}^{(i)}, \mu_u)\right)^2 \left(\sigma_{T(n, x - \Delta x)}^{(i)}\right)^2 + \left(\frac{\delta T^D(n, x)}{\delta u}(\mu_{T(n, x - \Delta x)}^{(i)}, \mu_u)\right)^2 (\sigma_u)^2} \\ &= \sqrt{\left(\sigma_{T(n, x - \Delta x)}^{(i)}\right)^2 + \frac{\Delta x^2}{\mu_u^4} (\sigma_u)^2} \\ \pi_{T^D(n, x)}^{(i)} &= \pi_{T(n, x - \Delta x)}^{(i)} \end{aligned} \quad (2.43)$$

L'analyse de ces équations conduit à plusieurs conclusions :



**Fig. 2.11.:** Géométrie du sous-réseau relatif à la propagation d'incertitude dans le sens inverse de la circulation

- le nombre de composantes n'augmente pas avec la propagation d'incertitudes dans le sens de circulation et les poids du résultat sont identiques aux poids de la condition aux bornes ;
- la propagation d'incertitudes dans le sens de circulation n'engage pas de divergence en moyenne puisque les moyennes du résultat sont les résultats de l'équation déterministe appliquée aux moyennes ;
- l'incertitude sur le temps de demande évolue dans le même sens que la longueur de la cellule et avec l'incertitude sur la vitesse fluide.

### 2.4.3 Propagation d'incertitudes dans le terme d'offre

Dans le sens inverse de la circulation, la propagation d'incertitudes se fait via le terme d'offre. La figure 2.11 illustre la géométrie du sous-réseau utilisé pour cette partie. On rappelle la formule (2.2) :

$$\mathbf{T}^O(n, x) = T(n - \mathbf{k}_x \Delta x, x + \Delta x) + \frac{\Delta x}{\mathbf{w}} \quad (2.44)$$

Où  $\Delta x$  est la longueur de la cellule,  $k_x$  la densité maximale de véhicule et  $w$  la vitesse maximale de remontée de congestion. Les hypothèses s'expriment par le fait que les paramètres sont distribués suivant des gaussiennes. On définit ainsi :

$$f_w(\tilde{w}) = \mathcal{N}(\tilde{w}, \mu_w, \sigma_w) \quad (2.45)$$

et,

$$f_{k_x}(\tilde{k}_x) = \mathcal{N}(\tilde{k}_x, \mu_{k_x}, \sigma_{k_x}) \quad (2.46)$$

les fonctions de densité de  $w$  et  $k_x$ . Cela permet, par la même occasion, de définir les paramètres de moyennes et d'écart-types des distributions. La gestion du terme de conditions aux bornes est plus complexe que pour le terme de demande. En effet ici, l'incertitude sur  $k_x$  entraîne une incertitude sur l'indice de véhicule discret. Du fait de l'intégration de ce paramètre dans la définition de la condition à la borne aval  $T(n - k_x \Delta x, x + \Delta x)$ , l'incertitude sur le décalage dans l'indice du véhicule entraîne donc une incertitude sur le temps de passage. Afin de gérer cette difficulté, on propose une solution en deux temps :

1. propagation d'incertitudes avec la méthode de perturbation ;
2. combinaison des deux résultats.

### Propagation d'incertitudes considérant une EI discrète

Dorénavant,  $j$  désigne une EI discrète choisie dans l'intervalle défini précédemment (cf. Section 2.2.2.2). On note  $J$  le cardinal de l'ensemble des EI discrètes considérées. Sous ces conditions, le terme de condition aux bornes est simplifié :  $T(n - \Delta x \mu_{k_x} + j, x + \Delta x)$ . Sa distribution est de la forme d'un mélange de gaussienne puisqu'il s'agit d'un temps de passage :

$$f_{T(n - \mu_{k_x} \Delta x + j, x - \Delta x)}(t) = \sum_{i=1}^{I_j} \pi_{T(n - \mu_{k_x} \Delta x + j, x - \Delta x)}^{(i)} \mathcal{N} \left( t; \mu_{T(n - \mu_{k_x} \Delta x + j, x - \Delta x)}^{(i)}, \sigma_{T(n - \mu_{k_x} \Delta x + j, x - \Delta x)}^{(i)} \right) \quad (2.47)$$

où les paramètres de poids, de moyennes et d'écart-types sont définis comme dans les paragraphes précédents. La suite est similaire au terme de demande. En effet, la méthode de propagation du terme d'offre associé à l'EI  $j$  est la méthode de perturbation faisant appel aux dérivées partielles de l'équation (2.2). Les erreurs sont sur le temps de passage et la vitesse maximale de remontée de congestion. En conséquence, la forme de la distribution partielle du terme d'offre est un mélange de gaussienne de même nombre de composantes que la distribution de la condition aux bornes associée à l'EI  $j : I_j$ . La formulation mathématique recherchée est la suivante :

$$f_{T^{o,(j)}(n,x)}(t) = \sum_{i=1}^{I_j} \pi_{T^{o,(j)}(n,x)}^{(i)} \mathcal{N} \left( t; \mu_{T^{o,(j)}(n,x)}^{(i)}, \sigma_{T^{o,(j)}(n,x)}^{(i)} \right) \quad (2.48)$$

Le paramétrage du mélange de gaussiennes est donné par les trois équations suivantes définissant les moyennes, les écarts-types et les poids pour tout  $i \leq I_j$ .

$$\begin{aligned}\mu_{T^{O,(i)}(n,x)}^{(i)} &= \mu_{T(n-\mu_{k_x}\Delta x+j,x-\Delta x)}^{(i)} + \frac{\Delta x}{\mu_w} \\ \sigma_{T^{O,(i)}(n,x)}^{(i)} &= \sqrt{\left(\sigma_{T(n-\mu_{k_x}\Delta x+j,x-\Delta x)}^{(i)}\right)^2 + \frac{\Delta x^2}{\mu_w^4}(\sigma_w)^2} \\ \pi_{T^{O,(i)}(n,x)}^{(i)} &= \pi_{T(n-\mu_{k_x}\Delta x+j,x-\Delta x)}^{(i)}\end{aligned}\quad (2.49)$$

### Combinaison des deux résultats

Les deux résultats précédents sont les suivants :

1. on dispose de toute une gamme d'EI discrètes pour rendre compte de l'erreur sur le décalage en termes d'indice de véhicule ;
2. on dispose de la formulation du mélange de gaussiennes résultant de la propagation d'incertitudes par la méthode de perturbation pour chaque EI discrète.

Afin de rendre compte de manière globale de la propagation d'incertitude dans le sens inverse de la circulation, il faut combiner les deux résultats. Le résultat 1 donne la probabilité d'une EI discrète  $j$  par rapport au décalage d'indice déterministe. Le problème de combinaison est un problème qui peut être modélisé par l'arbre en Figure 2.12. Chaque branche possède la probabilité de l'EI discrète associée. D'après les équations (2.4) et (2.48), la fonction de distribution du terme d'offre est définie selon l'équation suivante :

$$f_{T^O(n,x)}(t) = \sum_j \sum_{i=1}^{I_j} \pi(j)\pi_{T^{O,(i)}(n,x)}^{(i)} \mathcal{N}\left(t; \mu_{T^{O,(i)}(n,x)}^{(i)}, \sigma_{T^{O,(i)}(n,x)}^{(i)}\right) \quad (2.50)$$

avec :

$$\sum_j \sum_{i=1}^{I_j} \pi(j)\pi_{T^{O,(i)}(n,x)}^{(i)} = 1. \quad (2.51)$$

Ainsi, le résultat de la propagation d'incertitudes dans le sens inverse de la circulation est distribué suivant un mélange de gaussiennes. Avec l'aide d'une réindexation, la distribution du terme d'offre peut être exprimée simplement sous la forme :

$$p_{T^O(n,x)}(t) = \sum_{i=1}^I \pi_{T^O(n,x)}^{(i)} \mathcal{N}\left(t; \mu_{T^O(n,x)}^{(i)}, \sigma_{T^O(n,x)}^{(i)}\right) \quad (2.52)$$



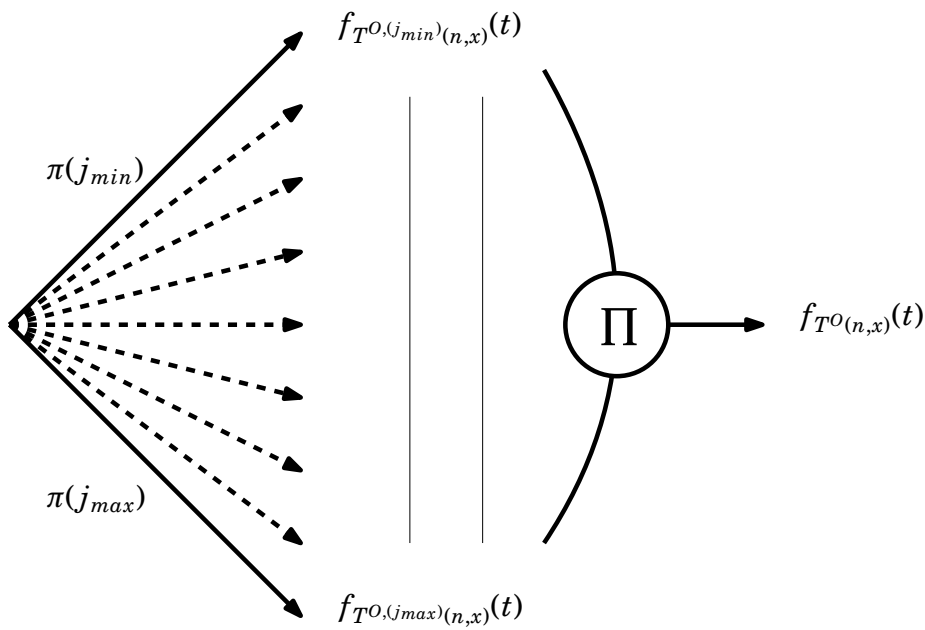


Fig. 2.12.: Combinaison sous forme d'arbre

où les paramètres sont définis dans l'ensemble des résultats précédents et où  $I = \sum_j I_j$ . Pour faire un point sur ce que nous apprend la propagation d'incertitudes dans le terme d'offre, les conclusions sont les suivantes :

- Le nombre de composantes augmente considérablement avec la propagation d'incertitudes dans le sens inverse de la circulation. Il augmente en adéquation avec le choix de l'intervalle pour les EI discrètes.
- La propagation d'incertitudes dans le sens inverse de la circulation n'engage pas de divergence en moyenne. En effet, dans le cas déterministe, l'EI discrète ne peut être que 0 et la suite est prouvée dans la partie relative à la propagation d'incertitudes par le terme de demande.
- L'incertitude sur le temps d'offre augmente avec la longueur de la cellule, l'incertitude sur la densité maximale de véhicules et l'incertitude sur la vitesse maximale de remontée de congestion.
- L'incertitude sur le temps d'offre augmente aussi avec la dispersion des temps de passage au niveau de la borne aval. En effet, plus les écarts inter véhiculaires sont importants au niveau de la borne aval, plus les composantes relatives aux EI seront espacés et donc plus la distribution résultante sera large dans le temps.

#### 2.4.4 Solution du GM-LS-LWR

Dans le modèle LWR Lagrangien-Spatial déterministe, le temps de passage  $T(n, x)$  est donné par le maximum du terme de demande  $T^D(n, x)$  et du terme d'offre  $T^O(n, x)$  (cf.

Equation (1.9)). Le réseau, illustré en Figure 2.13 est étendu afin de faire apparaître la partie relative au terme de demande (en vert) et la partie relative au terme d'offre (en rouge). L'estimation de la distribution du temps de passage passe donc par la propagation de l'incertitude par la fonction *maximum*.

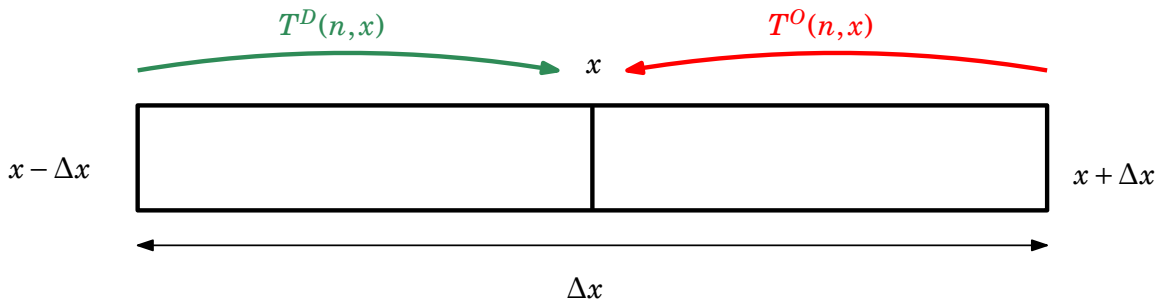


Fig. 2.13.: Géométrie considérée pour le calcul du résultat du GM-LS-LWR

La fonction *maximum* n'est pas dérivable donc l'utilisation d'une méthode de perturbation n'est pas une option. De plus, la fonction de répartition de la variable aléatoire  $Z$  définie comme le maximum de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est définie comme le produit des deux fonctions de répartition :

$$F_Z(t) = F_X(t)F_Y(t) \quad (2.53)$$

Or, dans l'éventualité où les deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont distribuées suivant des gaussiennes, la distribution de  $Z$  n'est pas une gaussienne d'après (2.53). Par extension, si  $X$  et  $Y$  sont distribuées selon des mélanges de gaussiennes, alors il est impossible que  $Z$  soit effectivement distribuée suivant un mélange de gaussiennes. Il n'est donc pas possible de propager les incertitudes grâce à une méthode analytique, il faut utiliser une méthode d'estimation. Comme précisé pour l'estimation de la distribution des paramètres, l'algorithme EM [109] permet d'estimer la distribution d'une fonction sous la forme d'un mélange de gaussiennes à partir d'un ensemble de particules définissant la distribution marginale.

Les avantages de l'utilisation de l'algorithme EM dans ce contexte sont multiples.

- Il permet d'apporter une cohérence au modèle dans son ensemble dans la mesure où le résultat obtenu est amené à être réintroduit en tant que condition aux bornes. Ainsi, le modèle de propagation ne gère que des mélanges de gaussiennes.
- Il permet aussi de réduire le nombre de composantes dans les distributions. En effet, la propagation d'incertitudes dans le terme d'offre entraîne une augmentation considérable du nombre de composantes gaussiennes dans la distribution. Avec l'algorithme EM, on peut fixer un nombre de composantes et donc éviter une augmentation infinie du nombre d'informations à stocker.

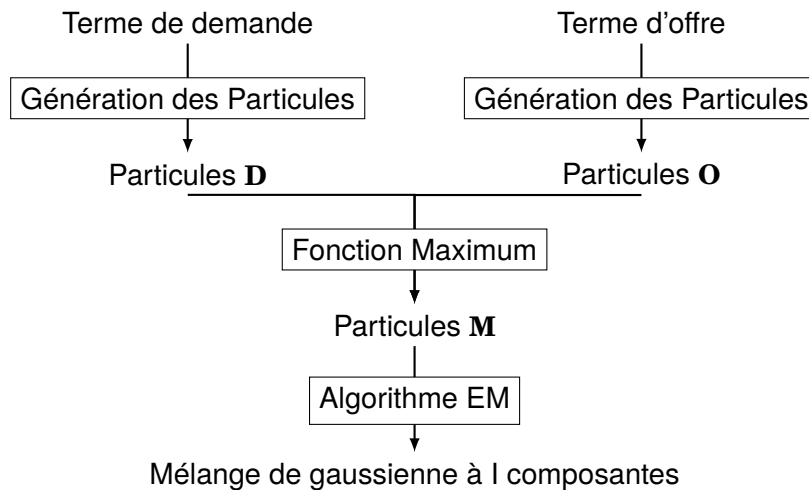


Fig. 2.14.: Estimation de la distribution du résultat de la fonction maximum

- Il utilise un ensemble de particules pouvant être généré simplement à partir de distributions connues comme des mélanges de gaussiennes.

La limite majeure à l'utilisation de l'algorithme EM est que ce n'est pas une méthode analytique. Par le principe d'optimisation contenu dans cet algorithme, de l'incertitude sur les distributions est introduite. On peut parler d'erreurs sur la distribution des erreurs. Contrairement aux erreurs de modèle étudiées, il s'agit d'incertitudes artificielles sur les distributions résultantes qui ne possèdent pas de sens physique. Le risque potentiel est de voir ces erreurs prendre de l'ampleur au fil du temps réduisant la précision du modèle d'écoulement. Lors de nos expérimentations, nous n'avons pas observé de divergences notables dues à des erreurs d'estimation de distribution des erreurs.

L'algorithme EM a besoin d'un ensemble de particules. La Figure 2.14 illustre le fonctionnement global du GM-LS-LWR. A partir des distributions des termes de demande et d'offre, deux jeux de particules **D** et **O** distincts sont générés. Un troisième jeu de particule **M** est calculé en choisissant consécutivement le maximum entre une particule tirée dans **D** et tirée dans **O**. Le tirage est sans remise. Enfin, l'algorithme EM est appliqué au jeu de particules **M** en précisant le nombre de composantes gaussiennes  $I$  voulu.

Le résultat brut de la méthode est une estimation de la distribution du temps de passage du véhicule  $n$  au point d'abscisse  $x$ . Cette distribution est sous la forme d'un mélange de gaussiennes à  $I$  composantes. La Figure 2.15 illustre le résultat brut pour un mélange de gaussiennes à 3 composantes. Les différents composantes sont dessinés en pointillés et la distribution résultante de la somme convexe est dessinée en trait plein.

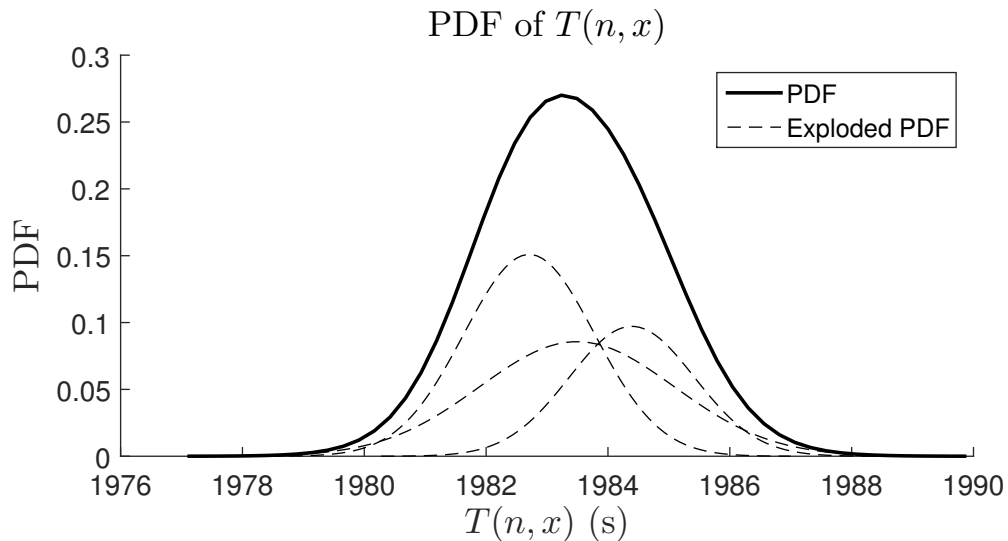


Fig. 2.15.: Résultat brut pour un véhicule sous la forme d'un mélange de gaussienne à 3 composantes [29]

## 2.4.5 Avantages et inconvénients

Cette méthode, tout comme la méthode de propagation des incertitudes par des mélanges de Dirac possède des avantages et des inconvénients.

### Avantages

Un des avantages de cette méthode est que le nombre de composantes gaussiennes n'évolue pas au fil des itérations du modèle. Ainsi, la charge de calcul est facilement calculable avant la simulation. Les mélanges de gaussiennes permettent l'estimation de fonction de densités diverses avec un nombre de composantes réduit. Le stockage d'information est donc plus intéressant dans cette méthode que dans celle citée précédemment.

### Inconvénients

L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle n'est pas optimale. En effet, plusieurs étapes du modèles viennent apporter leur lot d'approximation. La méthode de perturbation appliquée aux mélanges de gaussiennes estime la distribution de probabilité à partir d'une approximation de l'équation du modèle (linéarisation). De plus, l'algorithme EM est un algorithme reposant sur une méthode d'optimisation itérative. Elle augmente fortement la charge de calcul et limite la précision sur les incertitudes de modèle.

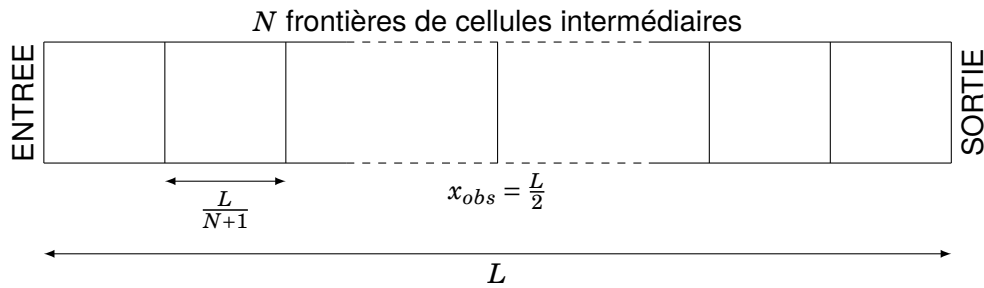


Fig. 2.16.: Géométrie du réseau

## Conclusion

Cette méthode a été choisie pour ses avantages et considérant que les inconvénients cités ne sont pas rédhibitoires. De plus, les mélanges de gaussiennes sont parfaitement adaptés à l'enrichissement du modèle par des données captées en temps réel. Cette dernière considération est le sujet du chapitre suivant. Le GM-LS-LWR a fait l'objet d'une analyse de sensibilité au regard de la précision et de l'efficacité des calculs.

## 2.5 Analyse de sensibilité

Les caractéristiques des sorties du modèle développé dépendent de tout un jeu de paramètres sur lesquels l'utilisateur a la main. Afin d'analyser les performances du modèle au regard de ces paramètres on propose de l'évaluer au regard de deux critères : précision et efficacité. Ces deux critères doivent être satisfaits pour espérer proposer des applications en temps réel.

### 2.5.1 Scénario de référence

Le réseau considéré est un simple lien homogène de longueur  $L$  sans entrée/sortie. Il est divisé à l'aide de  $N$  frontières de cellules intermédiaires en  $N+1$  cellules. La Figure 2.16 illustre la géométrie du réseau considéré.

La table 4.4 présente les paramètres de la simulation pour le scénario de référence. Concernant le matériel informatique, les tests ont été effectués sur une machine disposant d'un processeur *i7 4 coeurs avec une fréquence de 2.2Ghz*, et d'une *RAM de 16Go en DDR3L*. Les performances du GM-LS-LWR sont affectées par les paramètres du modèle cité dans la table 4.4. Cette table regroupe les paramètres en trois catégories. L'analyse de sensibilité sera séparée en plusieurs parties suivant ces catégories :

1. la géométrie du réseau en termes de frontières de cellules intermédiaires ;

2. l'amplitude des incertitudes sur les paramètres ;
3. le nombre de composantes dans les mélanges de gaussiennes  $I$ .

La performance de la méthode proposée comparée à une méthode de Monte Carlo a été testée sous les angles de la vitesse d'exécution et du stockage de résultats. Les résultats nous permettent d'établir que la différence entre la méthode de Monte Carlo et le GM-LS-LWR est de l'ordre de 10% pour un scénario identique en termes de temps de calculs. Concernant le stockage, là où toutes les particules sont stockées pour une méthode de Monte Carlo, seulement les moyennes, écarts-types et poids des distributions des temps de passage sont stockés avec le GM-LS-LWR. En conséquence, le stockage nécessaire pour le GM-LS-LWR est considérablement inférieur au stockage nécessaire pour une méthode de Monte-Carlo. On observe une diminution d'environ 98% des données stockées pour la même information. Ces informations sont valides pour un scénario donné. Or, pour une méthode de Monte-Carlo, le nombre de réplifications est un paramètre. Avec une diminution du nombre de réplifications, on peut réduire le temps de calcul et le stockage au prix d'une perte de fiabilité sur les sorties du modèles et leurs incertitudes. De plus, les résultats présentés pour la thèse ont été produits dans un contexte de recherche scientifique. Ainsi, les algorithmes développés pour le GM-LS-LWR peuvent être optimisés avec des compétences en informatiques plus poussées.

Conception du Réseau	
$N$	1
Paramètres du modèle	
$\mu_u$	20 m/s
$\sigma_u$	1 m/s
$\mu_w$	5 m/s
$\sigma_w$	0.25 m/s
$\mu_{k_x}$	0.14 veh/m
$\sigma_{k_x}$	0.002 veh/m
Paramètre du modèle d'incertitude	
$I$	3

Tab. 2.1.: Paramètres du scénario de référence

## 2.5.2 Définition des critères

### Critère d'efficience

Le premier critère est lié à l'efficience du modèle, en termes de temps de simulation. Une des qualités d'un système de gestion du trafic au quotidien cité dans le premier chapitre est la rapidité. La propagation d'erreurs dans des modèles dynamiques possédant de très grandes non linéarités est coûteuse en temps de calcul (cf. Méthode de Monte Carlo). La méthode développée est censée être compétitive avec une méthode de propagation d'incertitudes par tirage de Monte Carlo.

En conséquence, on définit le premier critère comme le quotient du temps de simulation  $T^{sim}$  sur le temps de simulation du scénario de référence  $T^{ref}$ .

$$C_T = \frac{T^{sim}}{T^{ref}} \quad (2.54)$$

### Critère de précision

Le deuxième critère est lié à la précision du modèle. La deuxième qualité d'un système de gestion du trafic au quotidien est la prise en compte des incertitudes. Cependant, si cette connaissance est un critère, son utilité réside dans la volonté de proposer des états de trafic possédant des erreurs réduites. L'enjeu de précision est en effet important pour proposer des informations fiables sur le trafic. Il s'agit ici de vérifier que le modèle reste dans une marge précise lorsque ses paramètres sont modifiés.

L'idée du deuxième critère est d'estimer la précision de l'ensemble des états de trafic produits. Ainsi, le critère de précision défini est un indicateur agrégé. La norme 1 de l'ensemble des écarts-types du modèle est utilisée. Le critère de précision est donc défini comme le quotient de la variance maximale parmi tous les temps de passage simulés  $\sigma_{max,sim}^2$  sur la variance maximale parmi tous les temps de passage du scénario de référence  $\sigma_{max,ref}^2$ .

$$C_\sigma = \frac{\sigma_{max,sim}^2}{\sigma_{max,ref}^2} \quad (2.55)$$

### 2.5.3 Sensibilité à la géométrie du réseau

Concernant la sensibilité à la géométrie du réseau, on étudie l'influence du nombre de frontières de cellules intermédiaires  $N$  (cf. Figure 2.16) sur les critères de performances. Des simulations ont été faites pour des valeurs de  $N$  comprises entre 1 et 13. Les résultats sont illustrés par les graphiques en Figure 2.17.

La Figure 2.17a représente l'évolution du critère d'efficacité  $C_T$  en fonction de  $N$ . Le temps de calcul est en relation linéaire avec l'évolution du nombre de cellules intermédiaires. Le GM-LS-LWR calcule les temps de passage de tous les véhicules au niveau de toutes les frontières de cellules. Le résultat est cohérent puisque l'augmentation du nombre de cellules augmente la quantité de calculs qui doivent être menés au cours de la simulation.

La Figure 2.17b représente l'évolution du critère de précision  $C_\sigma$  en fonction de  $N$ . Les résultats montrent que la précision du modèle croît lorsque l'on augmente le nombre de

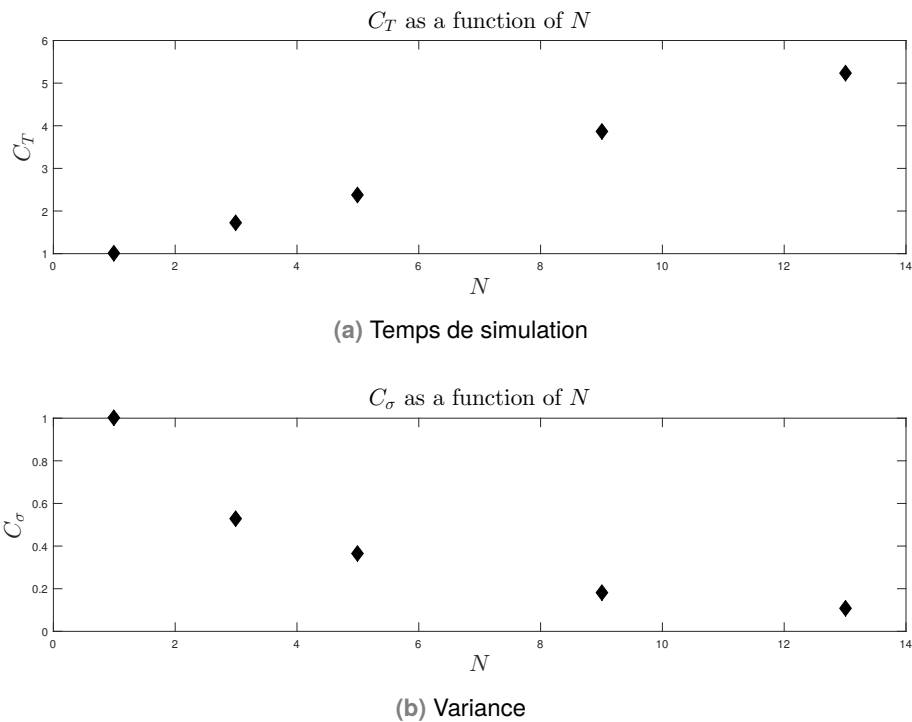


Fig. 2.17.: Sensibilité au nombre de cellules intermédiaires  $N$

cellules intermédiaires. Il s'agit d'un résultat cohérent au regard des formules de propagation d'incertitudes. Lors du calcul de propagation des incertitudes pour les termes de demande et d'offre pour une cellule particulière, on remarque que l'augmentation de la variance en fonction de la longueur de la cellule n'est pas une relation linéaire. Or, l'augmentation du nombre de points de calculs est une transformation linéaire. C'est pourquoi la variance des résultats diminue avec une augmentation du nombre de points de calcul intermédiaires.

En conclusion, la discrétisation du réseau a une influence sur la propagation des incertitudes et sur le temps de calcul. De par leurs directions respectives, il est possible de rechercher un compromis entre l'efficacité et la précision dans un objectif opérationnel. Le nombre de cellules ne peut augmenter indéfiniment puisque la contrainte de la condition CFL (cf. Equation 1.6) impose une longueur minimale pour les cellules pour assurer la stabilité numérique du modèle d'écoulement.

## 2.5.4 Sensibilité aux erreurs sur les paramètres du Diagramme Fondamental

La prochaine étape consiste à analyser la sensibilité des performances du GM-LS-LWR quant aux incertitudes sur les paramètres du Diagramme Fondamental. La table 4.4 regroupe les paramètres par défaut du Diagramme Fondamental. Pour cette analyse, la précision des paramètres a été dégradée par un facteur multiplicatif  $1/\mathcal{F}$  en termes de



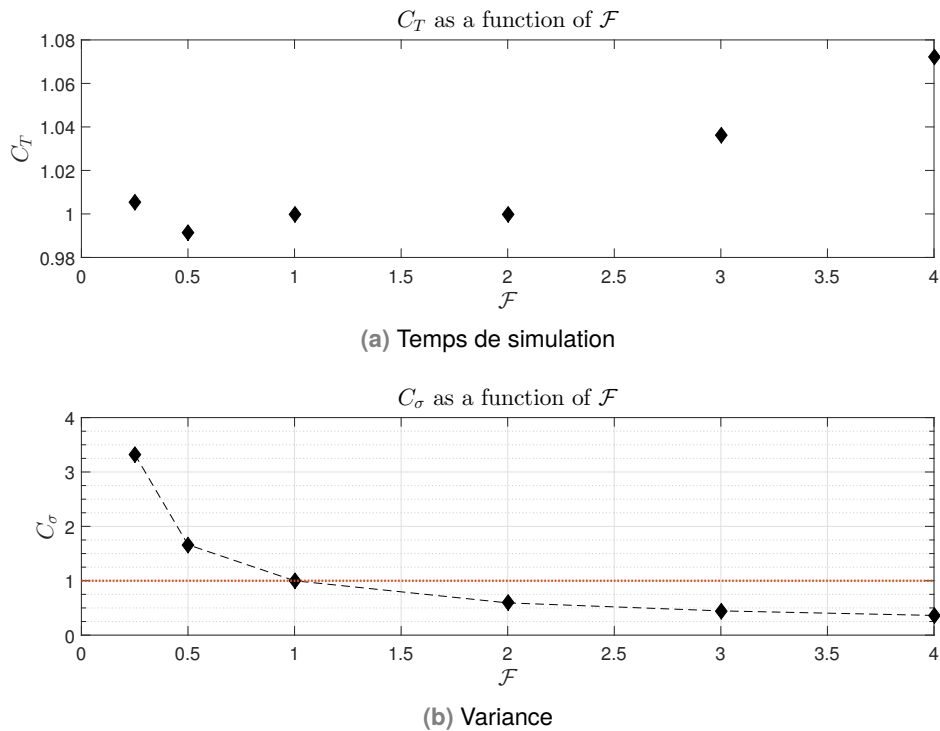


Fig. 2.18.: Sensibilité au facteur d'erreur multiplicatif  $\mathcal{F}$

variance. Les valeurs testées s'étendent de 1/4 pour des paramètres 4 fois plus précis en variances à 4 pour des paramètres 4 fois moins précis. Les résultats sont illustrés en Figure 2.18.

La Figure 2.18a montre que le temps de simulation varie légèrement en fonction de la précision des paramètres. Deux régions se découpent :

- pour  $\mathcal{F}$  entre 1/4 et 2, la variation est marginale et sans tendance montrant que la variation est aléatoire ;
- pour  $\mathcal{F}$  entre 2 et 4, la variation est bien plus prononcée et atteint 8% pour des paramètres 4 fois moins précis en variance.

L'augmentation visible dans la deuxième région du graphique peut être expliquée par l'influence du paramètre  $k_x$  dans le calcul de propagation d'incertitudes dans le terme d'offre. En effet, comme expliqué dans la section 2.4.3, l'incertitude sur  $k_x$  fait varier le nombre d'erreurs de l'indice discrètes et donc le nombre de véhicules considérés dans le calcul de la distribution du temps d'offre. Ainsi, le temps de calcul augmente.

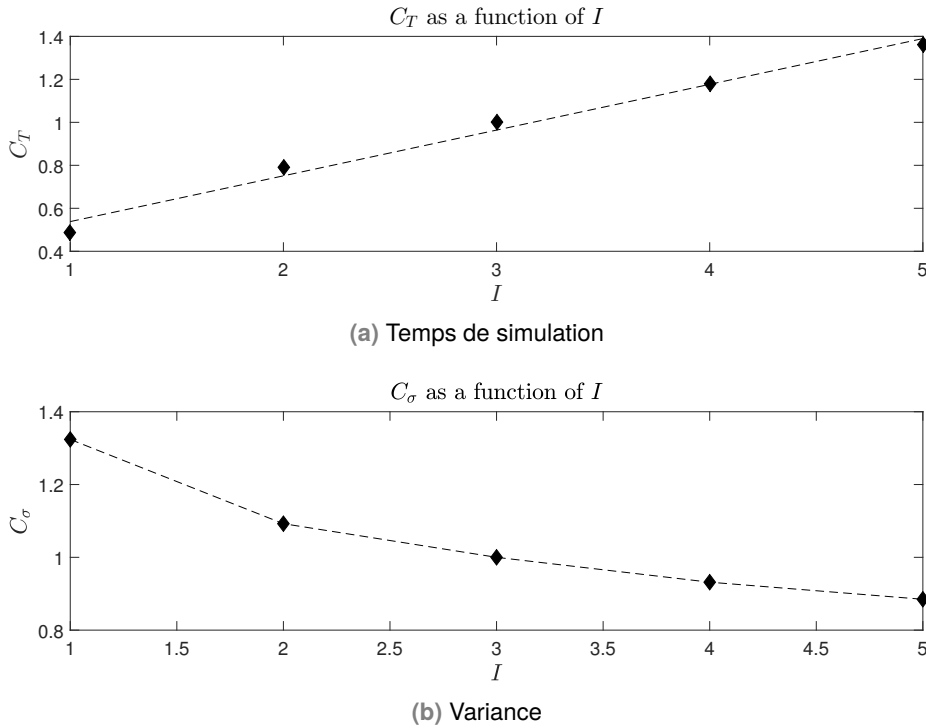


Fig. 2.19.: Analyse de sensibilité au nombre de composantes gaussiens

La Figure 2.18b illustre un résultat attendu. La sensibilité de la précision du modèle dépend grandement de la précision des paramètres. La relation telle qu'elle est illustrée est quasiment hyperbolique :

$$C_\sigma \sim \frac{1}{\mathcal{F}}. \quad (2.56)$$

Cette observation renforce l'intérêt d'un processus de calage correct permettant une réduction de l'incertitude sur les paramètres. Cette réduction d'incertitudes améliorera grandement les prévisions du modèle. Le modèle GM-LS-LWR donne les temps de passage des véhicules aux frontières intermédiaires du lien et une estimation des erreurs associées. Ces résultats ouvrent la voie pour le développement d'une méthode de calage des conditions internes. Il s'agit de l'objet des chapitres suivants.

## 2.5.5 Sensibilité au nombre de composantes gaussiennes

La solution du modèle LWR Lagrangien-Spatial est le maximum entre le terme de demande et le terme d'offre. Pour des termes d'offre et de demande distribués suivant des mélanges de gaussiennes, le résultat n'est pas un mélange de gaussiennes. Des expérimentations à l'aide de la méthode de Monte Carlo ont permis de montrer que la distribution est concentrée

autour de la moyenne déterministe. Cependant, les décroissances autour ne sont pas symétriques et empêchent donc la formulation sous forme de gaussienne sans perte importante d'information. Ainsi, partant sur une base de trois composantes gaussiennes afin de pouvoir rendre compte de la composante principale et des décroissances asymétriques, nous avons développé le scénario de référence. Les valeurs du nombre de composantes gaussiennes testé vont de 1 (gaussienne simple) à 5. Les résultats sont illustrés dans les graphiques de la Figure 2.19.

La Figure 2.19a se concentre sur l'évolution du critère d'efficacité en fonction du nombre de composantes gaussiennes. Le nombre de composantes gaussiennes intervient à toute étape du modèle GM-LS-LWR. Il intervient sur le nombre de composantes à calculer analytiquement pour la propagation d'erreur dans les termes d'offre et de demande. Il intervient aussi dans le nombre de composantes à estimer dans l'algorithme EM. Ainsi, le temps de calcul augmente avec le nombre de composantes gaussiennes à simuler. Il est à noter qu'augmenter le nombre de composantes gaussiennes augmente aussi la quantité d'informations à stocker. Sur ce dernier point, il y a une marge importante avant de rattraper une propagation d'incertitude par méthode de Monte Carlo.

La Figure 2.19b illustre une diminution du critère de précision avec une augmentation du nombre de composantes gaussiennes. Cela peut s'expliquer par le fait qu'augmenter le nombre de composantes permet une estimation plus fine de la distribution des résultats. Utiliser une seule gaussienne semble en effet insuffisant.

La vision simple du résultat brut n'est pas suffisante pour une analyse opérationnelle de la propagation des incertitudes au sein du modèle LWR LS. Afin de rendre possible l'analyse, il faut voir le GM-LS-LWR à l'œuvre pour générer divers indicateurs opérationnels.

## 2.6 Construction d'indicateurs opérationnels

Le scénario de référence conçu à la section précédente nous permet une base pour proposer de nouveaux indicateurs opérationnels et leurs incertitudes. Deux indicateurs seront traités dans cette partie :

1. les temps de parcours, un indicateur individuel ;
2. des diagrammes espace-temps, un indicateur agrégé ;

## 2.6.1 Temps de parcours

Le temps de parcours est un indicateur qui peut être utilisé à la fois par le gestionnaire d'infrastructure et pour les usagers des dites infrastructures. Les choix d'itinéraires dépendent à la fois du temps de parcours et de la fiabilité du temps de parcours. Dans ce contexte, le modèle GM-LS-LWR est utile pour proposer des temps de parcours et des marges d'erreurs.

Pour les gestionnaires de réseau, les temps de parcours constituent un indicateur particulièrement utilisé pour la détection de congestions sur le réseau. Aussi, ils se révèlent utiles pour quantifier les bénéfices de la mise en place de mesures de régulation du trafic. Le modèle développé trouve son intérêt dans les systèmes d'aide à la décision.

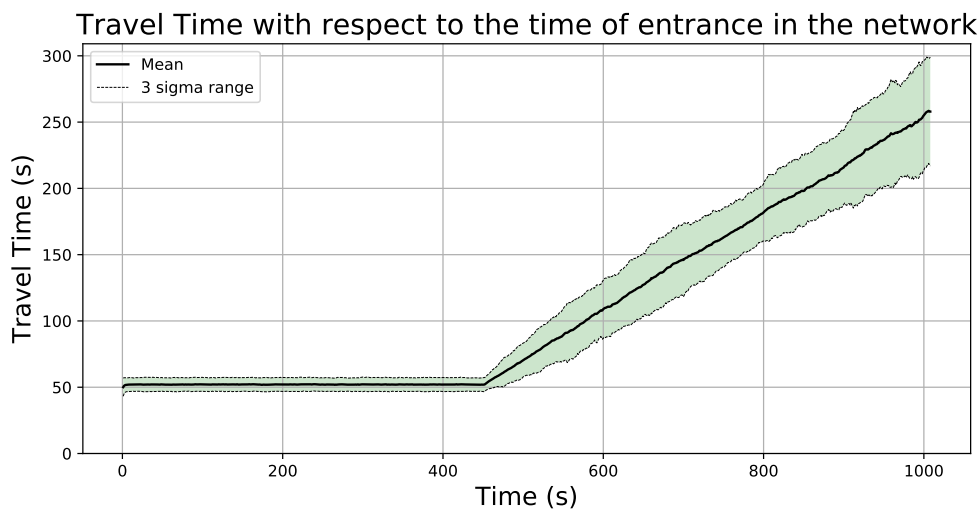


Fig. 2.20.: Temps de parcours sur le réseau

Le temps de parcours du véhicule  $n$  sur le réseau est calculé en effectuant la différence entre son temps de sortie et son temps d'entrée. Une méthode de perturbation a été utilisée afin de calculer l'incertitude sur le temps de parcours. Le scénario sur lequel la simulation s'est effectuée est le même que celui décrit dans la section 2.5.1 modélisant une augmentation du débit en entrée au dessus de la capacité en sortie. Les résultats illustrés dans la Figure 2.20 sont donc caractéristiques de ce genre de scénario mettant en scène la création et la remontée d'une onde de congestion. La courbe en gras représente la valeur moyenne du temps de parcours tandis que la zone verte autour représente la zone de confiance à 99% définie par une amplitude de 6 fois l'écart-type (règle des  $3\sigma$ ). Le graphique peut se lire en deux temps :

1. Dans un premier temps, entre 0s et 450s, le temps de parcours est stable et égal au temps de parcours en condition fluide (1000m à 20m/s). L'incertitude sur les temps de passage en entrée étant choisie constante au fil de la simulation, on observe une stabilité des incertitudes sur les temps de parcours.

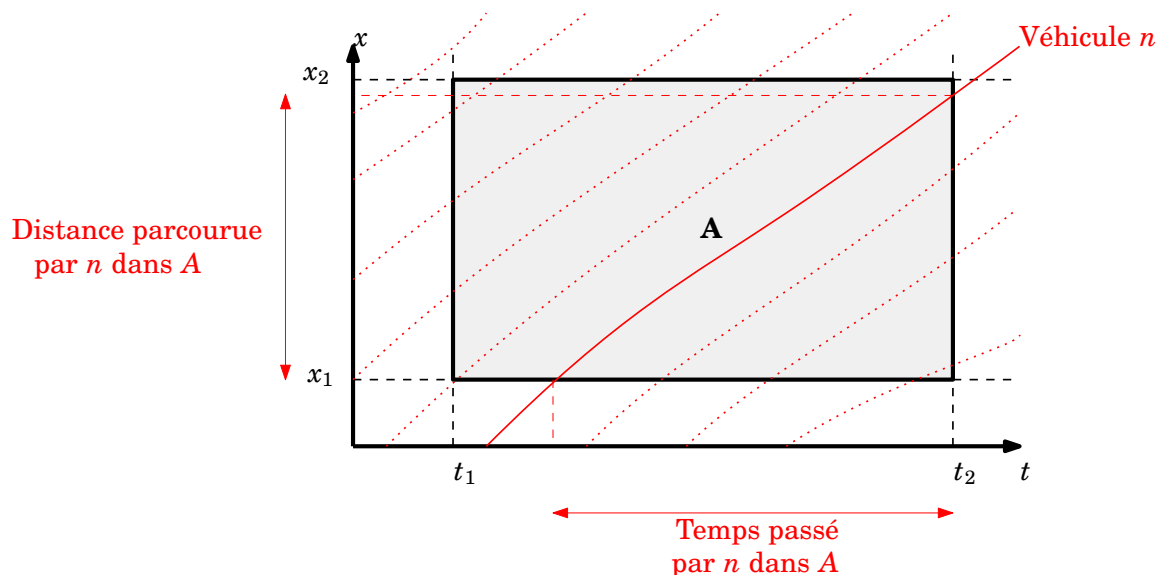


Fig. 2.21.: Définition des cellules  $(dn, dx)$  dans le plan  $(x, t)$

2. Dans le deuxième temps, entre 450s et la fin de la simulation, les temps de parcours augmentent en adéquation avec la remontée de l'onde de congestion. Les incertitudes croissent au fil du temps signifiant que les prévisions perdent en précision lorsque les conditions de trafic sont dégradées.

Ce dernier constat renforce l'idée de développer une méthode permettant de réduire les incertitudes sur les temps de passage pendant la simulation. Dans le prochain chapitre, une méthode d'assimilation de données est développée afin de caler les conditions internes du modèle en fonction d'observations et de contrôler les incertitudes sur les états de trafic calculés.

## 2.6.2 Diagramme Espace-Temps

Un diagramme espace temps est un diagramme représentant les états de trafic dans le plan de l'espace  $x$  et du temps  $t$ . Le nom du diagramme espace-temps est communément abrégé *Diagramme XT* en référence aux deux variables composant le plan. Lorsque les résultats sont disponibles sous forme de trajectoires individuelles de véhicules, le diagramme espace-temps regroupant l'ensemble des trajectoires est un outil particulièrement intéressant pour analyser les comportements de suivi ou les remontées d'ondes de congestion. Il est un outil de validation utilisé pour rendre compte de l'utilité des mesures de contrôle du trafic. Les résultats obtenus en termes de diagramme XT sont déterministes. Nous allons donc proposer une méthode permettant d'apporter une plus-value sous la forme d'une indication sur les incertitudes associées aux variables du diagramme espace-temps.

Nous ne possédons pas l'ensemble des trajectoires des véhicules sur le lien. La méthode proposée des diagrammes XT est de discrétiser les états de trafic et d'appliquer les formules d'Edie [46]. La discrétisation usuelle consiste à diviser l'espace-temps en cellules dans le sens du temps et de l'espace :  $(dt, dx)$ . La Figure 2.21 illustre la configuration pour l'estimation d'un diagramme XT en choisissant une discrétisation temps-espace. Une cellule **A** est caractérisée par son aire  $A$  :

$$A = dx \times dt \quad (2.57)$$

Les véhicules représentés par leurs trajectoires  $X(t)$ , en rouge sur la Figure 2.21, peuvent effectuer une partie de leur voyage au sein de la cellule **A**. Le voyage des véhicules au sein de la cellule est caractérisé par le temps passé dans la cellule  $T$  et la distance parcourue dans la cellule  $D$ . Les deux variables citées étant calculées pour l'ensemble des véhicules passant dans la cellule **A** les formules d'Edie permettent de déterminer le débit moyen  $Q$ , la densité moyenne en véhicule  $K$ , et la vitesse moyenne [46] :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\sum D}{A} \\ K &= \frac{\sum T}{A} \\ V &= \frac{Q}{K} \end{aligned} \quad (2.58)$$

où  $\sum D$  désigne la distance totale parcourue et  $\sum T$  le temps total passé dans la cellule. Il y a cependant un problème avec ce choix de discrétisation. En effet, les passages des véhicules étant incertains, il faudrait rendre compte de la probabilité d'un véhicule d'appartenir ou non à une cellule. Cette probabilité a une influence sur la moyenne des valeurs des variables agrégées mais aussi leurs incertitudes rendant la somme  $\sum$  incertaine sur le nombre de véhicules à compter.

Afin d'éviter le problème d'appartenance à une cellule, nous proposons une autre discrétisation de l'espace. La deuxième discrétisation repose sur la construction de cellules de dimension  $(dn, dx)$ . Dans des cellules de ce type, le nombre des véhicules contenus est constant et égal à  $dn$ . La Figure 2.22 illustre la construction de telles cellules. Dans le plan *espace-temps* (XT), l'aire de la cellule de la forme d'un trapèze **A** est calculée de la manière suivante :

$$A = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)[T(n_2, x_2) + T(n_2, x_1) - T(n_1, x_2) - T(n_1, x_1)] \quad (2.59)$$

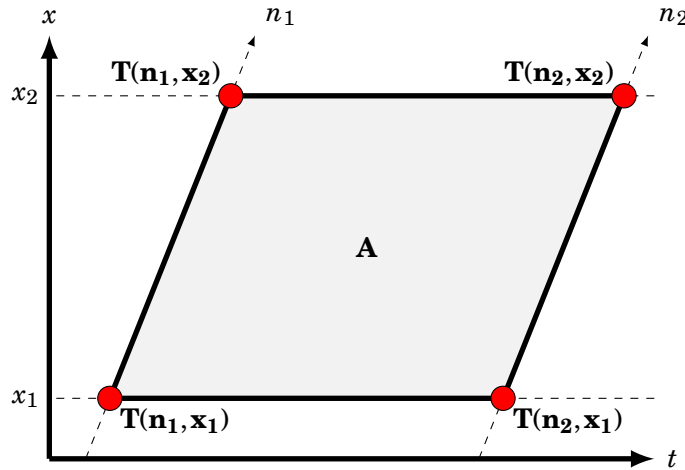


Fig. 2.22.: Définition des cellules ( $dn, dx$ ) dans le plan  $(x, t)$

Le calcul de l'aire fait appel à des temps de passage qui ne sont pas forcément définis puisque relatifs à des emplacements intermédiaires aux frontières des cellules dans la simulation. Ainsi, les temps de passage doivent être estimés par le modèle GM-LS-LWR en considérant des frontières de cellules intermédiaires placées en  $x_1$  et  $x_2$ . On propose d'utiliser une méthode de perturbation pour propager les incertitudes sur les temps de passage vers l'incertitude sur l'aire. On en déduit l'écart-type de l'aire du parallélogramme sous couvert d'indépendance des variables :

$$\sigma_A = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \sqrt{(\sigma_{T(n_2, x_2)})^2 + (\sigma_{T(n_2, x_1)})^2 + (\sigma_{T(n_1, x_2)})^2 + (\sigma_{T(n_1, x_1)})^2} \quad (2.60)$$

Dans ce choix de discrétisation, les équations (2.58) sont aussi valables. Par conséquent, en utilisant la méthode de perturbation, les moyennes des variables aléatoires  $\mu_Q$ ,  $\mu_K$  et  $\mu_V$  sont données par les équations (2.58). Quant aux écarts-types, ils sont calculés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_Q &= \frac{dn \cdot dx}{\mu_A} \sigma_A \\ \sigma_K &= \sqrt{\left(\frac{\sum \mu_T}{\mu_A^2}\right)^2 \sigma_A^2 + \frac{1}{\mu_A^2} \sum \sigma_T^2} \\ \sigma_V &= \sqrt{\frac{1}{\mu_K^2} \sigma_Q^2 + \frac{\mu_Q^2}{\mu_K^4} \sigma_K^2} \end{aligned} \quad (2.61)$$

## Débit

La Figure 2.23 décrit le diagramme espace-temps relatif à l'estimation des débits agrégés par cellules ( $dx, dn$ ) dans le plan  $(x, t)$ . La Figure 2.23a représente les débits agrégés moyens. L'onde de congestion démarrante autour de  $t = 2000s$  à la frontière aval du réseau et se propageant dans le sens inverse de la circulation est visible. À l'intérieur de cette onde le débit de véhicules est inférieur au débit en entrée en raison de la capacité en sortie de réseau.

La Figure 2.23b représente les écarts-types des débits agrégés tels qu'ils sont calculés dans l'équation (2.61). La couleur bleue des états de trafic en condition fluide démontre une faible incertitude. À l'inverse, les couleurs jaune et rouge des états de trafic représentent une plus grande incertitude. Hormis les effets de bord au niveau de la borne aval du réseau, les conditions de trafic les plus sujettes aux grandes incertitudes sont les états de trafic en queue de bouchon. Cette analyse est cohérente avec l'analyse des temps de parcours proposée par la Figure 2.20.

Des ondes de grandes incertitudes voyageant à la vitesse des ondes de sur-congestion apparaissent autour de 3000s quand la congestion s'est installée. Ces ondes peuvent venir de composantes aléatoires de l'algorithme EM. Elles sont présentes en situations congestionnées puisque dans ces situations, les termes de demande et d'offre sont plus susceptibles d'entrer en compétition par la fonction maximum que dans une situation fluide.

## Vitesse

La Figure 2.24 illustre des diagrammes espace-temps concernant la vitesse agrégée dans les cellules. L'analyse des Figures 2.24a et 2.24b est similaire à l'analyse précédente en termes de dynamique du trafic.

## 2.7 Conclusions du chapitre

La prise en compte des erreurs de modèles dans les modèles dynamiques est souvent réalisée à l'aide de méthodes reposant sur des répliques. Dans un tel contexte, les paramètres du modèle dynamique sont stochastiques. À chaque itération, des valeurs pour les paramètres sont choisies dans leurs distributions. Concernant l'application à un modèle LWR dans l'échelle lagrangienne-spatiale, l'observation des distributions du terme d'offre laisse entendre qu'une distribution possédant plusieurs composantes serait appropriée pour suivre les distributions des erreurs dans le modèle.



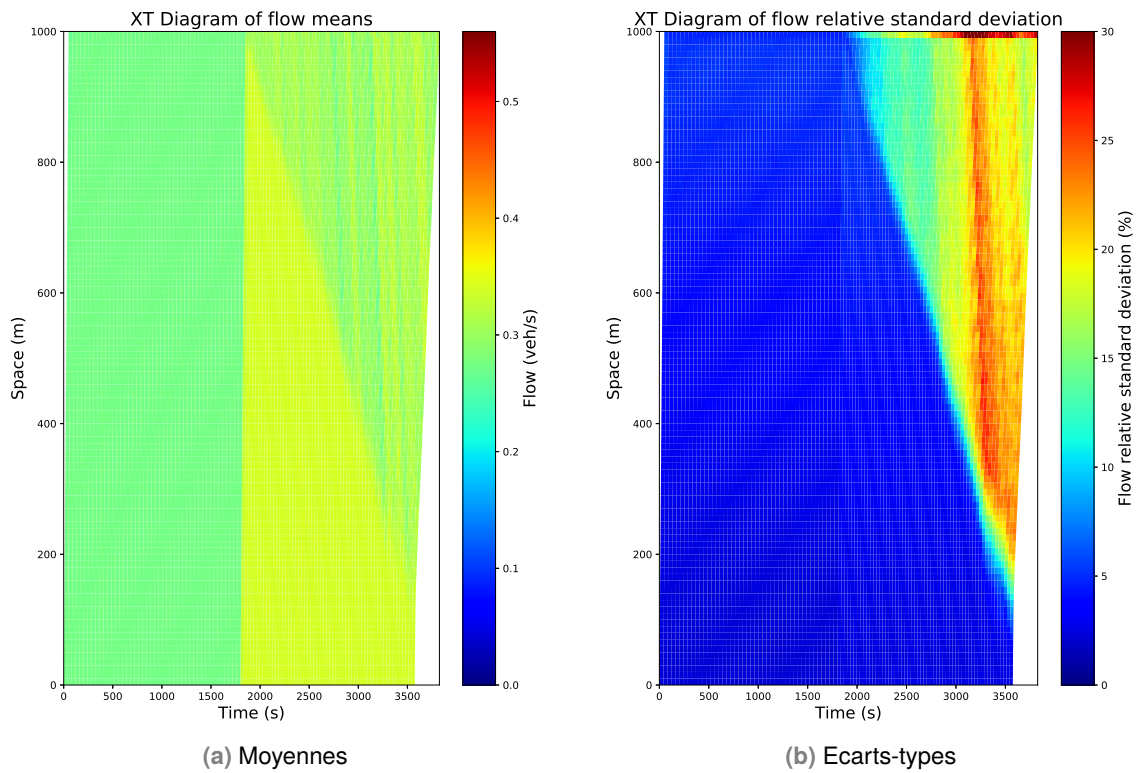


Fig. 2.23.: Diagramme XT pour le débit

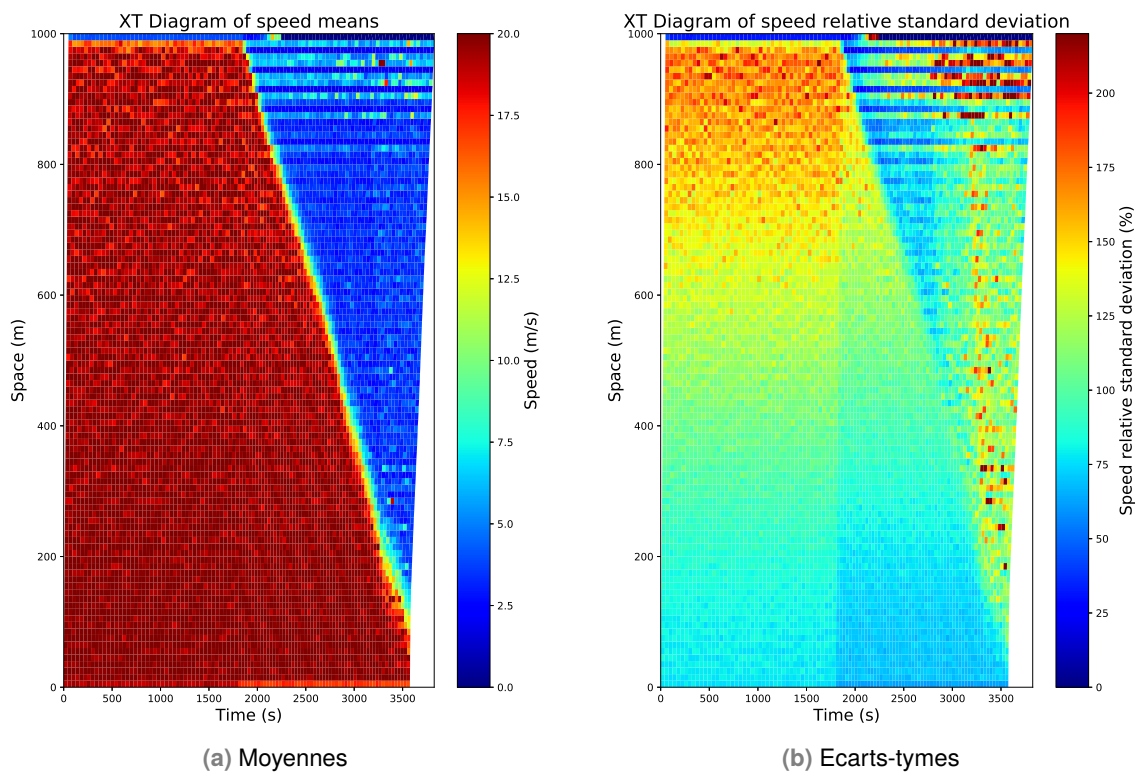


Fig. 2.24.: Diagramme XT pour la vitesse

Dans un premier temps, une méthode basée sur des mélanges de Dirac a été développée. Cette méthode possède l'avantage de la simplicité mathématique puisque les distributions de Dirac se rapprochent fortement d'un cas déterministe. Cependant, l'augmentation considérable du nombre de composantes dans les distributions des sorties du modèle limite l'intérêt de mélanges de Dirac par rapport aux tirages de Monte Carlo. En conséquence, cette méthode a été abandonnée au profit d'une méthode de propagation d'erreurs sous une forme continue.

En parallèle de la propagation d'erreurs par les mélanges de Dirac, nous avons développé un deuxième modèle basé sur des distributions sous la forme de mélanges de Loi gaussiennes. Les mélanges de loi gaussiennes possèdent l'avantage de profiter de propriétés mathématiques proches de gaussiennes simples. De plus, le fait de proposer plusieurs composantes permet l'estimation de distributions non symétriques et non régulières. Le nombre d'information stockées est réduit en conséquence du nombre faible de composantes gaussiennes utilisés. Cependant, l'algorithme EM permettant l'estimation de la distribution résultant du maximum du terme de demande et d'offre ralentit considérablement le processus.

Une des limites d'un tel modèle d'écoulement réside dans le fait qu'au final, la méthode proposée ne présente pas un avantage considérable en temps de calcul devant une méthode de Monte Carlo. Deuxièmement, l'estimation des lois de distribution n'est pas parfaite en raison de l'utilisation de l'algorithme EM reposant sur un ensemble de particules générées à partir des termes de demande et d'offre. Cependant, la connaissance parfaite des lois de distributions n'est pas possible. Des estimations empiriques sont possibles [43].

Concernant les pistes de recherche envisagées pour la propagation d'erreurs dans le modèle mésoscopique, on peut citer des travaux permettant de relâcher certaines hypothèses prises comme l'aspect gaussien des paramètres afin de proposer un modèle d'erreur plus complet. Aussi, des recherches supplémentaires sont nécessaires afin de développer le comportement du modèle d'écoulement avec suivi d'erreur dans le cas de discontinuités sur le réseau comme les divergents et les convergents. Pour le moment, l'étape suivante propose d'inscrire le modèle développé au centre d'un processus d'assimilation de données séquentiel afin d'estimer en ligne les conditions internes du modèle.



# Calage en ligne des conditions internes du modèle

## Partie I : Fusion de données

Les motivations de cette partie sont liées au critère de réactivité pour la gestion du trafic au quotidien. En effet, le modèle dynamique de trafic propose des prévisions à partir de conditions initiales et d'une estimation *a priori* des conditions aux bornes. Des événements imprévus par le calage des conditions initiales peuvent se produire et modifier les conditions aux bornes et les conditions internes du modèle. La seconde motivation liée à l'enrichissement du modèle par des données captées est une volonté de réduire les erreurs de modèle, notamment lors d'occurrence de la congestion. Le Chapitre 2 a permis de mettre en évidence que les conditions de trafic congestionnées propageaient des erreurs importantes. La précision et la fiabilité des prévisions lors de congestion est fortement diminuée de par la variabilité importante des sorties du modèle.

L'enjeu de cette partie est de développer une méthode de fusion de données basée sur un modèle LWR Lagrangien-Spatial avec propagation d'erreurs. Un des verrous scientifiques à lever est celui de la fusion de données dans un modèle qui n'est pas dépendant du temps mais de l'indice de véhicule discret (cf. Chapitre 2). L'estimation des états de trafic et des erreurs associées à des emplacements où les données ne sont pas recueillies représente un verrou scientifique. Enfin la réduction des incertitudes, notamment pendant des périodes de congestion, représente un verrou scientifique lié à l'enrichissement du modèle par des données captées.

### Plan du chapitre

La section 3.1 propose un état de l'art des méthodes d'assimilation de données dans des domaines autres que celui du trafic. La section 3.2 explore la piste de l'application d'un filtre de Kalman au modèle LWR et explique les raisons pour lesquelles ce filtre ne peut être appliqué en l'état. La section 3.3 propose une méthode de fusion de données compatible avec le LS-LWR-EP. La dernière section 3.4 conclut le chapitre sur la nécessité de considérer une méthode de mise à jour pour boucler le processus séquentiel d'assimilation de données.

## 3.1 Assimilation de données : Etat de l'art

L'utilisation de données pour corriger un modèle dynamique est un concept datant du milieu du vingtième siècle. Le processus d'assimilation de données peut être résumé par la Figure 3.1. Il est détaillé dans [114, 64]. De plus ces références présentent les deux courants dans le domaine de l'assimilation de données :

1. les méthodes variationnelles, aussi appelées méthodes d'interpolation ;
2. les méthodes de filtrage séquentiel.

### 3.1.1 Méthodes variationnelles

Historiquement, l'assimilation de données est utilisée dans le domaine de la météorologie pour traiter des problèmes de Prévision Numérique de la Météo<sup>1</sup>. En effet, les modèles dynamiques de météorologie sont des modèles complexes résolus à l'aide de méthodes aux volumes finis. Les états du modèle dynamique comme la dynamique des masses d'air dans une cellule particulière à tout instant dépendent des paramètres du modèle et des états dans les cellules environnantes. De plus, un ensemble de capteurs est déployé dans la région d'étude comme des capteurs barométriques ou des capteurs hygrométriques. Les modèles météorologiques subissent les travers caractéristiques de toute simplification mathématique de phénomènes physiques, à savoir : les erreurs de modèle. L'assimilation de données consiste donc à utiliser des données réelles dans le modèle météorologique afin de corriger les conditions internes aux points d'observation. En conséquence, les états calculés par le modèle sont corrigés en valeur. De plus, la fiabilité des prévisions à court terme est améliorée. Les problèmes de Prévisions Numériques de la Météo sont résolus en utilisant des méthodes d'interpolation optimale telles que la méthode variationnelle pour décrire la structure tri-dimensionnelle de l'atmosphère (3D-Var) ou à quatre dimensions (4D-Var).

Le Centre Européen pour les Prévisions Météorologiques à Moyen Terme (CEPMET) propose une implémentation d'une méthode 3D-Var [101, 33]. De même, le Centre météorologique canadien propose l'implémentation de la méthode 3D-Var [49]. Dans [65], la méthode 3D-Var est expliquée comme la recherche d'un jeu de variables permettant la minimisation des erreurs de modèle et des erreurs d'observation. La méthode utilisée est celle dite des moindres carrées :

$$J(\mathbf{x}) = \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f)^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_f)}_{\text{Erreurs de modèle}} + \underbrace{(\mathcal{H}(\mathbf{x}) - \mathbf{y})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathcal{H}(\mathbf{x}) - \mathbf{y})}_{\text{Erreurs d'observation}} \quad (3.1)$$

où  $J$  est la fonction de coût,  $\mathbf{x}$  est le vecteur des variables,  $\mathbf{x}_f$  le vecteur des variables *a priori* à court-terme,  $\mathbf{y}$  le vecteur des observations,  $\mathcal{H}$  l'opérateur de transformation des variables

1. Appelé, en anglais, "Numerical Weather Prediction"

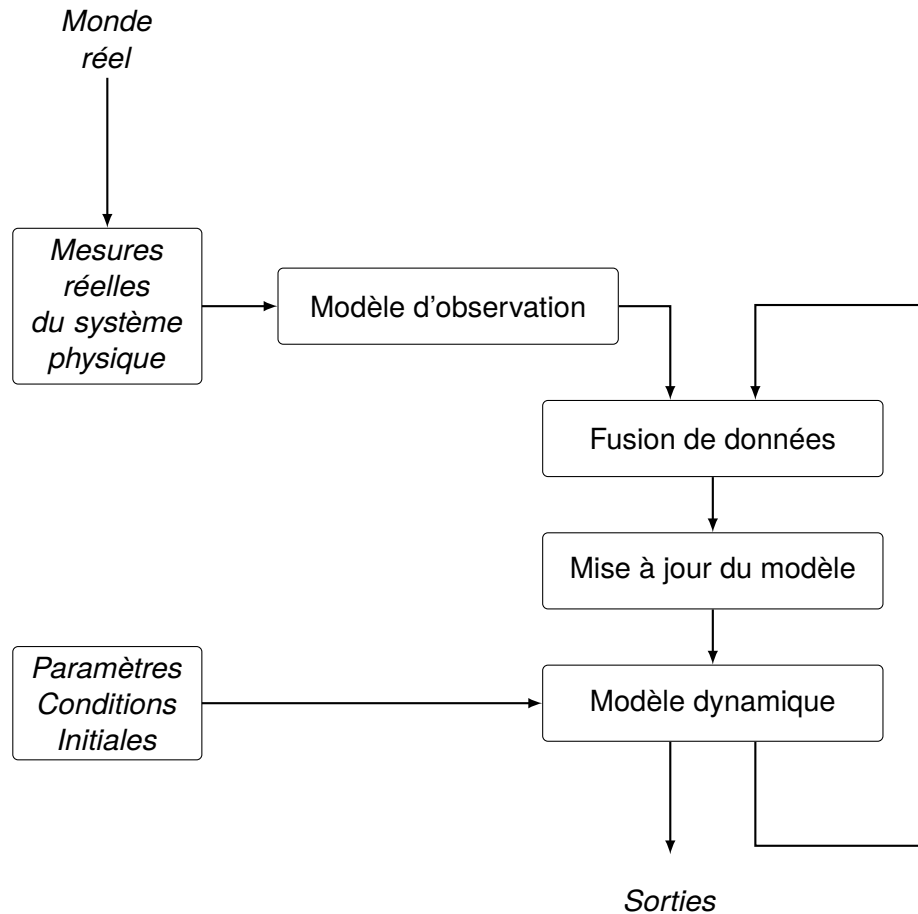


Fig. 3.1.: Schéma de la structure de l'assimilation de données adapté de [64, 114]

du modèle vers les observations (généralement un modèle adapté aux capteurs),  $\mathbf{R}$  la matrice de covariance des erreurs d'observation,  $\mathbf{B}$  la matrice de covariance des erreurs de modèle. La minimisation est atteinte lorsque le gradient de  $J$  est nul. Les modèles météorologiques et les modèles d'observation étant non linéaires, l'annulation du gradient n'est pas directe : l'utilisation d'une méthode itérative est recommandée.

La méthode 3D-Var prend en considération des prévisions pour un instant donné. Plus l'assimilation de données est fréquente, plus les prévisions sont fiables. Cependant, les modèles de météorologie sont composés de millions voire de dizaines de millions de variables. Les processus de minimisation de la fonction de coût demandent donc un temps de calcul important. Un moyen de réduire les temps de calcul est de considérer dans la méthode plusieurs pas de temps. Ainsi, la méthode intègre la variable temporelle dans le processus portant le nombre de dimensions considérées à quatre (4D-Var). Dans la pratique, cette méthode est étudiée pour des problèmes de prévisions numériques de la

météo [34, 81]. Mathématiquement, l'ajout de prévisions à divers instants se caractérise par l'ajout de termes dans la fonction de coût (3.1) [65] :

$$J(\mathbf{x}) = \dots + \underbrace{(\mathcal{H}_2(\mathcal{M}(\mathbf{x})) - \mathbf{y}_2)^T \mathbf{R}_2^{-1} (\mathcal{H}_2(\mathcal{M}(\mathbf{x})) - \mathbf{y}_2)}_{\text{Erreurs liées à un horizon temporel différent}} \quad (3.2)$$

Ici aussi, le processus de minimisation n'est pas direct et nécessite des itérations. Les méthodes variationnelles n'ont pas été explorées dans le milieu du trafic en raison du succès des méthodes de filtrage séquentiel pour l'estimation des conditions de circulation.

Les méthodes variationnelles sont intéressantes lorsqu'il s'agit de substituer les états *a priori* par les *a posteriori* dans le modèle dynamique. La façon dont elles sont dissociées du modèle requiert une mise à jour du modèle [64]. Dans un premier temps, une autre variété d'assimilation de données a été explorée. La méthode proposée dans ce chapitre et dans le chapitre 4 se rapproche cependant des méthodes variationnelles.

### 3.1.2 Les méthodes de filtrages séquentiels

Alors que les météorologues développent les méthodes variationnelles pour répondre au problème de l'assimilation de données, d'autres méthodes voient le jour dans le domaine du traitement du signal. Le filtrage séquentiel a été introduit dans les recherches de Kalman dans les années 60 [63, 62]. Le filtre de Kalman se décompose en plusieurs étapes permettant de corriger dynamiquement un modèle linéaire séquentiellement par intégration d'observations. Il est défini historiquement par une équation d'état décrivant le transfert de la variable d'état de l'instant  $k$  à  $k + 1$  par la dynamique du système :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (3.3)$$

où  $\mathbf{x}$  désigne le vecteur des variables d'état,  $\mathbf{F}_k$  la matrice de l'opérateur linéaire décrivant la dynamique du système,  $\mathbf{w}_k$  un bruit blanc de matrice de covariance  $\mathbf{Q}_k$ .  $\mathbf{B}_k \mathbf{u}_k$  est un terme correspondant à la commande du système dynamique. Afin de faciliter les équations suivantes, nous n'évoquerons plus le terme de commande (i.e. le système décrit est un système non commandé). Des capteurs permettent d'effectuer des mesures. Ces mesures sont liées aux variables d'état par l'équation de mesure linéaire suivante :

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (3.4)$$

où  $\mathbf{y}_k$  est le vecteur des variables mesurées,  $\mathbf{H}_k$  est l'opérateur linéaire permettant de passer des mesures aux variables d'état et  $\mathbf{v}_k$  est un bruit blanc de matrice de covariance  $\mathbf{R}_k$ . Le processus se décline en plusieurs étapes. Dans un premier temps, l'étape de prévision permet d'estimer *a priori* l'état du modèle et la matrice de covariance associée grâce à l'équation d'état. Dans un second temps, le modèle est mis à jour. Le gain de Kalman est

<b>Prévision</b>	
Estimation <i>a priori</i> de l'état	$\mathbf{x}_{k k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1 k-1}$
Estimation <i>a priori</i> de la covariance	$\mathbf{P}_{k k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1 k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k$
<b>Mise à jour</b>	
Gain de Kalman	$K_k = \mathbf{P}_{k k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k k-1} \mathbf{H}_k^T)^{-1}$
Estimation <i>a posteriori</i> de l'état	$\mathbf{x}_{k k} = \mathbf{x}_{k k-1} + K_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_{k k-1})$
Estimation <i>a posteriori</i> de la covariance	$\mathbf{P}_{k k} = (\mathbf{I} - K_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k k-1} (\mathbf{I} - K_k \mathbf{H}_k)^T + K_k \mathbf{R}_k K_k^T$

Tab. 3.1.: Equations du filtre de Kalman [63, 62]

un scalaire compris entre 0 et 1 permettant de formuler le compromis entre l'état *a priori* et l'apport de l'observation récente.

Le filtre de Kalman propose une estimation optimale des états d'un système dynamique linéaire. Cependant, de manière générale, et notamment dans les modèles dynamiques de trafic, les modèles ne sont pas linéaires. Ces considérations ont motivé la recherche d'extensions au filtre de Kalman permettant de relaxer l'hypothèse de linéarité moyennant la perte de l'optimalité. De plus, les erreurs considérées dans le filtre de Kalman originel sont gaussiennes. Des travaux ont aussi été menés afin de s'affranchir de cette condition. [10] présente une vue d'ensemble des déclinaisons du filtre de Kalman et de leurs utilisations dans le domaine du trafic.

Le filtre de Kalman étendu (EKF) repose sur une linéarisation du modèle dynamique par un procédé de Taylor [61]. Dans cette extension du filtre, la matrice de l'opérateur linéaire est remplacée par la matrice jacobienne de l'opérateur non linéaire décrivant la dynamique du système. Le filtre de Kalman étendu a été utilisé pour des problématiques d'estimation d'états de trafic associées à un modèle dynamique de trafic Eulérien [124, 105]. Une autre extension du filtre de Kalman levant l'hypothèse de linéarité est le filtre de Kalman "sans odeur" (UKF) [123]. Elle repose sur l'approximation linéaire par un ensemble de points lorsque le modèle n'est pas linéarisable. Ce dernier filtre a été utilisé pour l'estimation des conditions de trafic dans [88]. Il est à noter que les équations de la Table 3.1 sont adaptées aux changements évoqués dans le filtre de Kalman. Dans sa structure, le filtre est identique.

Concernant l'hypothèse d'erreurs gaussiennes dans le filtre de Kalman, diverses options sont présentées dans la littérature permettant de la lever. Sous couvert de linéarité du modèle dynamique, le *Mixture Kalman Filter* (MKF) [19] a été introduit. Il permet d'utiliser le filtre de Kalman avec des erreurs distribuées suivant des mélanges de gaussiennes. [89] présente une application du MKF pour l'estimation des conditions de trafic. Le moyen de s'affranchir de l'hypothèse de linéarité et des erreurs gaussiennes est de considérer des méthodes d'ensemble [48]. Elles sont caractérisées par des réplifications du modèle



dynamique stochastique. Le filtre particulaire repose sur un procédé de répliques pour la propagation des incertitudes dans le modèle. Ensuite, le jeu de particules est corrigé en fonction des observations. Pour l'estimation des conditions de trafic, [79] propose une solution basée sur un filtre particulaire. Une méthode profitant à la fois de la simplicité du filtre de Kalman et de l'adaptabilité des méthodes d'ensemble est le filtre de Kalman d'ensemble (EnKF). Ce dernier filtre séquentiel a été utilisé dans l'estimation des conditions de trafic dans [133, 132, 131].

Les méthodes d'assimilation de données sont multiples mais les modèles d'observation le sont tout autant. Dans le domaine du trafic, les données disponibles sont issues de capteurs placés sur le réseau ou embarqués à l'intérieur des véhicules. La section suivante propose de discuter des données utilisées dans les différentes recherches sur l'assimilation de données dans le domaine du trafic routier.

### 3.1.3 Sources de données

Le modèle d'observation peut être exprimé dans les trois échelles de représentation présentées dans le chapitre introductif, tout comme le modèle d'écoulement. Pour rappel, les trois échelles de représentation sont (cf. Chapitre 1) :

- l'échelle eulérienne ;
- l'échelle lagrangienne-temporelle ;
- l'échelle lagrangienne-spatiale ;

Pour les deux premières échelles, des travaux sur l'assimilation de données associée à des modèles d'observation issus de l'échelle de représentation concernés ont été menés. Dans cette section, nous proposons d'évoquer ces travaux comme des références pour des échelles de représentation non traitées dans les travaux de thèse. De plus, des moyens techniques sont proposés, associés aux échelles de représentation.

Traditionnellement, les données trafic captées sont eulériennes et le moyen technologique associé est la boucle électromagnétique. La boucle électromagnétique est un capteur placé sous la chaussée permettant de détecter le passage des véhicules (cf. Figure 3.2). La détection du passage d'un véhicule se fait par la détection de la déformation d'un champ magnétique entraîné par le passage de la masse métallique que représente le véhicule. Généralement, les données de boucle électromagnétique sont agrégées temporellement et permettent de calculer des débits, vitesses moyennes et taux d'occupation ; ce qui en fait une source de données eulériennes. Concernant l'assimilation de données, pendant longtemps les données de boucles étaient la seule source de données utilisées dans les modèles d'observations lorsqu'elles sont associées à un modèle d'écoulement dans l'échelle de représentation eulérienne [90, 127, 18, 95, 96, 99, 115, 120, 124, 54].



Fig. 3.2.: Boucles électromagnétiques sous la chaussée - Source : transport-intelligent.net

Avec l'essor des technologies embarquées de l'information, les modèles d'observation ont évolués vers des représentations plus fines du trafic. Ainsi, des modèles d'observation ont commencé à prendre en compte l'échelle Lagrangienne-Temporelle. Des moyens techniques comme les données issues de GPS embarqués, sont de plus en plus utilisés pour renforcer les données eulériennes dans des schéma d'assimilation basés sur un modèle d'écoulement eulérien [41, 25, 14, 55, 93]. Les données issues de réseaux mobiles ont aussi été utilisées [102, 126, 55]. Ces données peuvent être issues, entre autres, du projet européen STRIP [?] ou de l'expérimentation de Berkeley : *Mobile millenium* [119]. Les données lagrangiennes-temporelles peuvent être recueillies à l'aide caméra en altitude. C'est le cas des données issues du projet *Next Generation Simulation* (NGSIM) utilisées dans [31] où une caméra était placée en haute d'un immeuble. Les données du projet MoCoPo de l'IFSTTAR [56] sont issues d'images récupérées depuis un hélicoptère. Plus récemment des expérimentations sont en cours afin de récupérer des images grâce à un drone. Les données lagrangiennes ont aussi été utilisées dans des schémas d'assimilation de données associant un modèle d'écoulement dans une échelle lagrangienne [133, 131, 130, 44, 45].

Les données lagrangiennes-spatiales ne sont pas utilisées pour l'assimilation de données. Cependant des moyens technologiques permettant de récupérer des données de ce type existent. Les données de boucles électromagnétiques non agrégées donnent les temps de passage des véhicules aux emplacements où elles sont situées. Les systèmes LAPI pour *Lecture Automatique de Plaque d'Immatriculation* repèrent les véhicules passant dans le champ d'une caméra et enregistrent leurs temps de passage. Les données d'antennes Bluetooth détectent le passage des véhicules contenant un appareil équipé de la technologie Bluetooth lorsqu'ils passent dans le rayon de détection de l'antenne. Ce type de données est utilisé pour calculer des temps de parcours [47, 128] et pour l'estimation de la demande (matrice Origine-Destination) [71]. Dans la thèse, le moyen de recueil importe peu puisque le cadre d'évaluation des méthodes développées utilisent des données synthétiques (i.e. issues d'un modèle). Cependant, le type d'observations simulées correspond à des temps de passage aux points d'observation.

Concernant les erreurs d'observation, en raison du manque de preuves analytiques ou empiriques, nous considérerons des erreurs gaussiennes. En effet, pour pouvoir mesurer les erreurs d'une donnée LS il faudrait pouvoir répliquer le temps de passage d'un même véhicule au même endroit dans les mêmes conditions d'expérience. Cette forme de distribution possède des avantages mathématiques permettant de développer la méthode de fusion. En conclusion, le modèle d'observation représente les temps de passage des véhicules au point d'observation distribués selon des Gaussiennes.

## 3.2 Applications du filtre de Kalman

Dans l'objectif de développer un schéma d'assimilation de données prenant en compte les erreurs du modèle LWR Lagrangien-Spatial, la formulation du modèle sous la forme d'équation de Kalman a été explorée. La section 3.2.1 est consacrée à l'application à un schéma eulérien, la section 3.2.2 est consacrée à l'application à un schéma Lagrangien-Temporel et la section 3.2.3 à un schéma Lagrangien-Spatial.

### 3.2.1 Application à un schéma eulérien

Le filtre de Kalman repose sur le modèle LWR dans sa formulation eulérienne (dans l'espace  $(t, x)$ ) liant le débit  $q$  et la concentration  $k$ . L'équation de conservation est rappelée :

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3.5)$$

L'élément permettant de résoudre cette équation aux dérivées partielles est le diagramme fondamental (DF). Nous proposons de faire l'hypothèse d'un DF triangulaire. Il est présenté en Figure 3.3. Les paramètres du diagramme fondamental dans le système de coordonnées eulérien sont :  $u$  la vitesse libre,  $\kappa_x$  la densité maximale et  $w$  la vitesse maximale de remontée d'onde de congestion. Avec adjonction du diagramme fondamental, l'équation de conservation (3.5) devient :

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial(Q(\kappa))}{\partial x} = 0 \quad (3.6)$$

L'objectif est de résoudre l'équation grâce à un schéma aux volumes finis : le schéma de Godunov [51]. Pour cela, on discrétise l'espace  $(t, x)$  en cellules  $(\Delta t, \Delta x)$  et on obtient la relation :

$$\kappa(t + \Delta t, x) - \kappa(t, x) = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ Q(\kappa(t, x - \Delta x)) - Q(\kappa(t, x)) \right] \quad (3.7)$$

Pour la stabilité d'un tel schéma numérique, la condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) [32] impose :  $\Delta t \leq \Delta x/u$ . Cela signifie qu'un état de trafic ne doit pas traverser plus d'un intervalle spatial pendant un intervalle de temps. Le *Cell Transmission Model* (CTM) [36, 37]

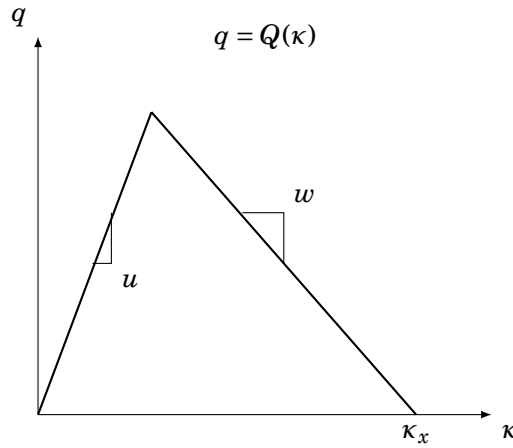


Fig. 3.3.: Diagramme fondamental triangulaire en formulation eulérienne



Fig. 3.4.: Discrétisation du réseau pour le CTM

proposé par Daganzo en 1995 est une implémentation du schéma aux volumes finis défini dans l'équation (3.7). En effet, le réseau est divisé en un ensemble de  $m$  cellules de longueur  $\Delta x$  tel qu'il est présenté en Figure 3.4. Le débit d'entrée est une condition aux limites. Avec cette formulation, l'équation d'état devient :

$$\begin{cases} \kappa_1(t + \Delta t) = \kappa_1(t) + \frac{\Delta t}{\Delta x} [q_0(t) - Q(\kappa_1(t))] \\ \kappa_i(t + \Delta t) = \kappa_i(t) + \frac{\Delta t}{\Delta x} [Q(\kappa_{i-1}(t)) - Q(\kappa_i(t))], \text{ si } 2 \leq i \leq m \end{cases} \quad (3.8)$$

On définit la discrétisation temporelle comme un ensemble d'instantes espacés de  $\Delta t$  et indexés par  $k$  pour correspondre aux formulations usuelles du filtre de Kalman. Le diagramme fondamental tel qu'il est présenté en Figure 3.3 présente des régularités intéressantes :

- (i) pour chaque valeur de densité  $k$  il existe une et une seule valeur de débit  $q$ ,
- (ii) les branches du diagramme fondamental sont linéaires.

Ainsi, soit un instant  $k$  arbitraire, soit une cellule  $2 \leq i \leq m$ , on peut réécrire l'équation d'état :

$$\kappa_{i,k+1} = \begin{cases} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} u\right) \kappa_{i,k} + \frac{\Delta t}{\Delta x} u \kappa_{i,k-1} & , \text{ si } \kappa_{i,k} \leq \kappa_c \text{ et } \kappa_{i-1,k} \leq \kappa_c \\ \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} w\right) \kappa_{i,k} + \frac{\Delta t}{\Delta x} u \kappa_{i,k-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} w \kappa_x & , \text{ si } \kappa_{i,k} \geq \kappa_c \text{ et } \kappa_{i-1,k} \leq \kappa_c \\ \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} u\right) \kappa_{i,k} - \frac{\Delta t}{\Delta x} w \kappa_{i,k-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} w \kappa_x & , \text{ si } \kappa_{i,k} \leq \kappa_c \text{ et } \kappa_{i-1,k} \geq \kappa_c \\ \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} w\right) \kappa_{i,k} - \frac{\Delta t}{\Delta x} w \kappa_{i,k-1} & , \text{ si } \kappa_{i,k} \geq \kappa_c \text{ et } \kappa_{i-1,k} \geq \kappa_c \end{cases} \quad (3.9)$$

et pour le cas restant :

$$\kappa_{1,k+1} = \begin{cases} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} u\right) \kappa_{1,k} + \frac{\Delta t}{\Delta x} q_0 & , \text{ si } \kappa_{i,k} \leq \kappa_c \\ \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} w\right) \kappa_{1,k} + \frac{\Delta t}{\Delta x} q_0 - \frac{\Delta t}{\Delta x} w \kappa_x & , \text{ si } \kappa_{i,k} \geq \kappa_c \end{cases} \quad (3.10)$$

On définit le vecteur d'état  $\mathbf{x} = (\kappa_1, \dots, \kappa_m, \kappa_x)$ .  $\kappa_x$  a été ajouté au vecteur d'état afin de rendre les équations linéaires. Sans ça, les équations auraient un caractère affine puisque la densité maximum de véhicule est une constante et un paramètre du modèle. De manière directe, l'équation d'état associée à  $\kappa_x$  est :  $\kappa_{x,k+1} = \kappa_{x,k}$ . On remarque que les équations (3.9) et (3.10) possèdent des termes linéaires au vu du vecteur d'état  $\mathbf{x}$  et des termes indépendants de celui-ci. Ainsi, on peut créer  $\mathbf{F}_k$ ,  $\mathbf{B}_k$ ,  $\mathbf{u}_k$ ,  $\mathbf{Q}_k$  et  $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$  tels que l'équation d'état vectorielle soit :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (3.11)$$

Concernant le modèle d'observation, faisons l'hypothèse que le réseau est équipé de boucles électromagnétiques permettant de récupérer des informations de débit, de vitesse et de taux d'occupation. La relation liant le taux d'occupation et la densité de véhicule est la suivante [67] :

$$\tau = (L + l) \kappa \quad (3.12)$$

où  $L$  est la largeur moyenne des véhicules et  $l$  la longueur de la boucle. Soit un instant  $k$ , définissons  $\mathbf{y}_k = (\tau_{1,k}, \dots, \tau_{o,k}, \dots, \tau_{O,k})$  le vecteur des mesures des taux d'occupation des  $o$  boucles installées sur le réseau. On fait l'hypothèse qu'une cellule  $i$  ne contient au maximum qu'une boucle. Pour chaque boucle  $o$ , on définit  $i_o$  comme l'unique cellule qu'elle définit. Dans ces cas, la relation (3.12) est définie et linéaire. Ainsi, on crée la matrice  $\mathbf{H}_k$ , de dimension  $O \times m$  permettant de faire correspondre les  $m$  variables d'états aux  $O$  variables de mesure. On introduit un vecteur de bruit gaussien :  $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$ . Finalement, avec les indications données, l'équation de mesure est :

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (3.13)$$

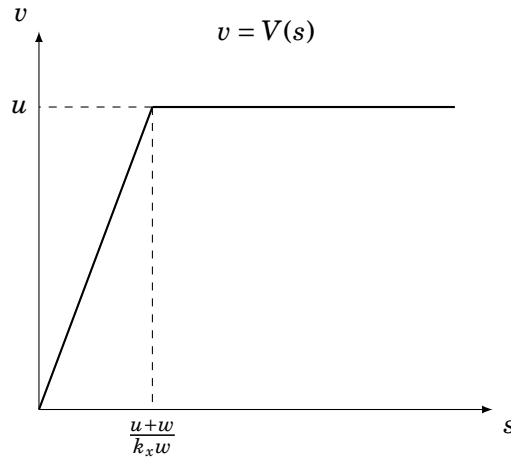


Fig. 3.5.: Diagramme fondamental triangulaire en formulation Lagrangienne-Temporelle

Sous réserve d'estimer les matrices de covariances  $\mathbf{Q}_k$  et  $\mathbf{R}_k$ , le filtre de Kalman est complètement défini pour résoudre le modèle LWR dans le système de coordonnées eulérien.

### 3.2.2 Application à un schéma Lagrangien Temporel

Le filtre de Kalman repose sur le modèle LWR dans sa formulation eulérienne (dans l'espace  $(t, x)$ ) liant la vitesse  $v$  et l'espace inter-véhiculaire  $s$ . L'équation de conservation est rappelée :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad (3.14)$$

Le diagramme fondamental triangulaire dans l'échelle Lagrangienne-Temporelle est présenté en Figure 3.5. Les paramètres du diagramme fondamental dans le système de coordonnées eulérien sont :  $u$  la vitesse libre et  $s_c$  l'espace inter-véhiculaire critique. Pour des raisons de cohérence, nous continuerons à utiliser les paramètres  $u$ ,  $w$  et  $\kappa_x$ . On note notamment que :

$$s_c = \frac{1}{\kappa_c} = \frac{u+w}{w\kappa_x} \quad (3.15)$$

Avec le diagramme fondamental, l'équation de conservation (3.14) devient :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial(V(s))}{\partial x} = 0 \quad (3.16)$$



**Fig. 3.6.:** Discrétisation du réseau pour l'application à l'échelle Lagrangienne-Temporelle

L'objectif est de résoudre l'équation toujours grâce au schéma de Godunov [51]. Pour cela, on discrétise l'espace  $(t, n)$  en cellules  $(\Delta t, \Delta n)$  et on obtient la relation :

$$s(t + \Delta t, n) - s(t, n) = \frac{\Delta t}{\Delta n} \left[ V(s(t, n - \Delta n)) - V(s(t, n)) \right] \quad (3.17)$$

Dans un modèle microscopique, il est intéressant de s'intéresser aux trajectoires de l'ensemble des véhicules. Ainsi, le choix  $\Delta n = 1$  s'impose et l'équation devient :

$$s(t + \Delta t, n) - s(t, n) = \Delta t \left[ V(s(t, n - 1)) - V(s(t, n)) \right] \quad (3.18)$$

Pour la stabilité d'un tel schéma numérique, la condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) [32] impose dans (3.18) :  $\Delta t \leq 1/C$  où  $C$  représente la capacité du lien ( $C = u\kappa_c$ ). Cela signifie qu'un véhicule ne doit pas pouvoir être confondu avec un autre lors de deux instants consécutifs. La discrétisation du problème ainsi que la représentation graphique des variables sont présentées en Figure 3.6. La vitesse du véhicule leader  $v_1$  est une condition aux limites. Avec cette formulation, l'équation d'état devient :

$$\begin{cases} s_1(t + \Delta t) = +\infty \\ s_i(t + \Delta t) = s_i(t) + \Delta t [V(s_{i-1}(t)) - V(s_i(t))], \text{ si } 2 \leq i \leq m \end{cases} \quad (3.19)$$

On définit la discrétisation temporelle comme un ensemble d'instantanés espacés de  $\Delta t$  et indexés par  $k$  pour correspondre aux formulations usuelles du filtre de Kalman. Le diagramme fondamental tel qu'il est présenté en Figure 3.5 présente des régularités intéressantes :

- (i) pour toute valeur d'écart inter-véhiculaire  $s$  il existe une et une seule valeur de vitesse  $v$ ,
- (ii) les branches du diagramme fondamental sont linéaires.

Ainsi, soit un instant  $k$  arbitraire, soit un véhicule  $2 \leq i \leq N$ , on peut réécrire l'équation d'état :

$$s_{i,k+1} = \begin{cases} (1 + C\Delta t)s_{i,k} - C\Delta t s_{i,k-1} & , \text{ si } s_{i,k} \leq s_c \text{ et } s_{i-1,k} \leq s_c \\ u\Delta t - C\Delta t s_{i-1,k} & , \text{ si } s_{i,k} \geq s_c \text{ et } s_{i-1,k} \leq s_c \\ \left(1 + \frac{\Delta t}{C}\right)s_{i,k} - u\Delta t & , \text{ si } s_{i,k} \leq s_c \text{ et } s_{i-1,k} \geq s_c \\ s_{i,k} & , \text{ si } s_{i,k} \geq \kappa_c \text{ et } s_{i-1,k} \geq \kappa_c \end{cases} \quad (3.20)$$

On définit le vecteur d'état  $\mathbf{x} = (s_1, \dots, s_m, u)$ .  $u$  a été ajouté au vecteur d'état afin de rendre les équations linéaires. Sans cet ajustement, les équations auraient un caractère affine puisque la vitesse fluide est une constante et un paramètre du modèle. De manière directe, l'équation d'état associée à  $u$  est :  $u_{k+1} = u_k$ . On remarque que les équations (3.20) possèdent des termes linéaires au vu du vecteur d'état  $\mathbf{x}$  et des termes indépendants de celui-ci. Ainsi, on peut créer  $\mathbf{F}_k$ ,  $\mathbf{B}_k$ ,  $\mathbf{u}_k$ ,  $\mathbf{Q}_k$  et  $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$  tels que l'équation d'état vectorielle soit :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (3.21)$$

### Réflexions sur le modèle d'observation

Pour le filtre de Kalman, l'équation de mesure doit avoir la forme :

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (3.22)$$

Elle doit être linéaire en fonction du vecteur d'état comme pour l'échelle de représentation eulérienne et les données de boucle électromagnétiques. En l'état, la variable d'état prend en compte l'ensemble des espaces inter-véhiculaires des véhicules. On peut imaginer une solution basée sur des mesures par caméra. Les véhicules équipés de radar peuvent aussi capter leurs espaces inter-véhiculaires et agir en conséquence pour le contrôle [53].

Dans [130], Yuan propose un schéma d'assimilation de données dans l'échelle de représentation lagrangienne-temporelle. Le processus développé repose sur un filtre de Kalman étendu. La formulation de l'équation d'état n'est pas rigoureusement identique dans la mesure où le diagramme fondamental considéré n'est pas triangulaire. Une version non linéaire par morceau est utilisée : la formulation de Greenshield [52]. De plus, le modèle d'observation est discuté en détail ainsi que les données disponibles appartenant aux trois échelles de représentation.

### 3.2.3 Application à un schéma Lagrangien Spatial

Dans la mesure ou les formulations proposées dans le Chapitre 2 relèvent de l'échelle Lagrangienne-Spatiale, la possibilité de retranscrire les formulation d'un filtre de Kalman dans cette échelle de représentation doit être discutée. L'objectif est maintenant d'adapter la démarche proposée pour l'échelle eulérienne dans l'échelle Lagrangienne-Spatiale. Pour cela, on utilise le système de coordonnées Lagrangien-Spatial :  $(n, x)$ . Dans ce système de coordonnées, l'équation de conservation est la suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (3.23)$$



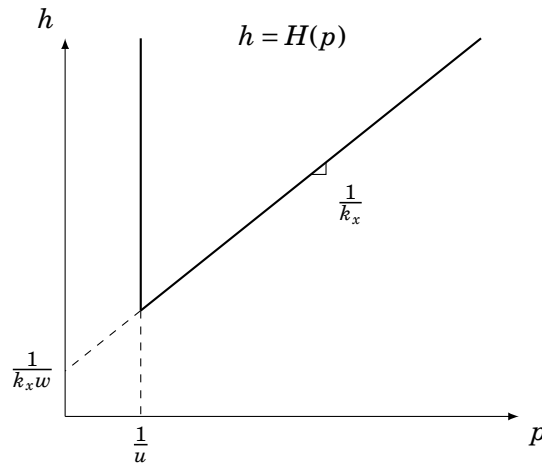


Fig. 3.7.: Diagramme fondamental triangulaire en formulation Lagrangienne-Spatiale

Où  $p$  est l'inverse de la vitesse (*pace*) et  $h$  l'écart temporel (*headway*). Le diagramme fondamental en échelle mésoscopique est convexe. Faisons l'hypothèse d'un DF triangulaire défini par les mêmes paramètres  $u$ ,  $w$  et  $k_x$ . Le FD est illustré en Figure 3.7.

La résolution de l'équation de conservation par un schéma aux volumes finis passe par la discrétisation de l'espace en cellules  $(\Delta n, \Delta x)$ . En intégrant sur ces cellules, l'équation de conservation devient :

$$p(n + \Delta n, x) - p(n, x) = \frac{\Delta n}{\Delta x} [H(p(n, x + \Delta x)) - H(p(n, x))] \quad (3.24)$$

La branche fluide du diagramme fondamental pose problème. En effet, en situation fluide, le diagramme fondamental ne possède pas les propriétés requises pour résoudre le modèle LWR à l'aide d'un schéma de Godunov. Pour un rythme valant  $1/u$  il existe une infinité de temps inter-véhiculaires. Une symétrie axiale du problème par rapport à la première bissectrice du plan ( $h = p$ ) n'améliore guère la solution. La raison vient encore de la forme du diagramme fondamental. Dans le cas où le diagramme fondamental aurait été transformé (cf. Figure 3.8) on remarque qu'il existe plusieurs valeurs de rythme pour chaque temps inter-véhiculaire. Ainsi, l'équation d'état du filtre de Kalman ne peut être définie avec le diagramme fondamental de l'échelle Lagrangien-Spatial.

### Conclusion

Cette étude des différentes échelles de filtre de Kalman pour l'assimilation de données appliquée à un modèle de trafic routier ne marque pas la fin des possibilités d'enrichissement du GM-LS-LWR par des données captées. En effet, même si un filtre de Kalman tel quel ne peut être appliqué, certaines étapes propres de ce type de filtre peuvent être appliquées.

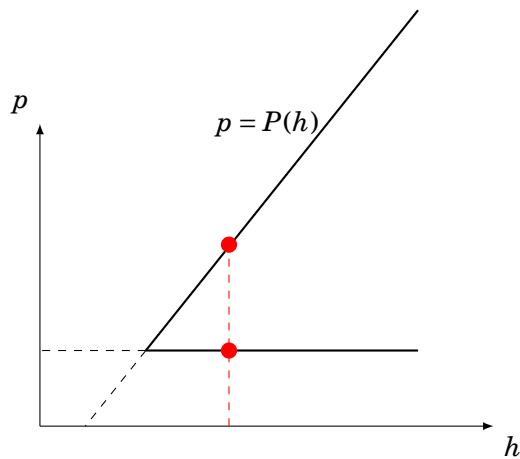


Fig. 3.8.: Diagramme fondamental inversé

Ainsi, dans la suite du chapitre, nous proposons de définir une méthode de fusion de données compatible avec le modèle développé dans le Chapitre 2. Ce processus de fusion de données pourra rappeler, de par certaines formulations, un filtre de Kalman.

### 3.3 Processus de fusion de données séquentiel en indice de véhicule

Un filtre de Kalman pour une méthode d'assimilation de données n'est pas envisageable pour le cas de l'échelle de représentation Lagrangienne-Spatiale. Nous avons alors développé une méthode de fusion de données séquentielle en indice de véhicule a été utilisée. Cette méthode a été développée afin de correspondre aux sorties du modèle GM-LS-LWR développé dans le chapitre précédent. Les différentes étapes du filtre de Kalman (cf. Table 3.1) ne sont pas oubliées pour autant. En effet, la méthode utilisée possède des analogies fortes avec un filtre de Kalman. Dans un premier temps, il est intéressant de reprendre la vision globale de l'assimilation de données.

#### 3.3.1 Séquencement

Le schéma d'assimilation de données est décrit dans [114] et [64], et illustré en Figure 3.1. Le modèle de trafic, au centre du processus est décrit dans le Chapitre 2. Une observation importante peut être faite en comparant les processus d'assimilation de données décrits dans l'état de l'art et le modèle de trafic développé. Il s'agit d'expliquer la notion de séquence. Que ce soit dans le domaine du trafic ou dans d'autres domaines (météorologie, traitement du signal, ...) les séquences sont relatives au temps. Cette notion de séquence est cohérente avec la dynamique du modèle dépendante de la variable temporelle.

Dans [45], une méthode d'assimilation de données basée sur le modèle LWR Lagrangien-Spatial a été développée. Ces travaux ont permis de montrer qu'il est possible d'enrichir le modèle LWR Lagrangien-Spatial avec des données captées. L'assimilation de données séquentielle est faite par pas de temps. Le modèle de base est toujours discrétisé en indice de véhicule mais l'assimilation de données est déclenchée à intervalle de temps régulier. Dans ces travaux, les erreurs de modèle et d'observation ne sont pas prises en compte. Ainsi, le calcul dans le cas déterministe est plus simple et offre donc plus de liberté quant au choix des variables utilisées pour l'assimilation de données. En effet, dans [45] les pas d'assimilation permettent de caler des débits agrégés en fonction de données de boucles captées. Dans le cas où les indices de véhicules sont discrets mais que les distributions de probabilités sont continues, le problème de l'agrégation et de la mise à jour du modèle devient complètement différent. Un des moyens de résoudre ce problème est de ne pas agréger les véhicules. Le fait de considérer les véhicules indépendamment les uns des autres implique un autre choix de séquençement pour la méthode d'assimilation de données : le séquençement en indice de véhicules.

Pour résumer, l'avantage du séquençement par pas de temps est que la méthode a été validée dans le cas d'un modèle dynamique sans suivi des erreurs de modèle. Cependant, elle possède aussi un inconvénient en termes de condition CFL [32] pour des larges réseaux. En effet, afin d'assurer la stabilité du schéma numérique, le pas de temps d'assimilation doit être divisé en plusieurs pas de plus petite amplitude afin de respecter la condition CFL pour les courtes cellules. Cet inconvénient est traité dans [45] dans la mise à jour du modèle. Concernant l'avantage du séquençement en indice de véhicule, il permet de développer une méthode d'assimilation basée sur un modèle discrétisé en indice de véhicule avec suivi d'erreurs de modèles. De plus, les formulations sont proches des formulations du filtre de Kalman. L'originalité de ce choix de séquençement est qu'il n'a pas été développé, et par conséquent validé, dans la littérature. Au regard de la formulation du modèle dynamique développé dans le chapitre précédent et parce qu'il représente un verrou scientifique, nous faisons le choix d'un séquençement en indices de véhicules.

### 3.3.2 Processus de fusion de données

Le processus de fusion de données prend en compte :

- des états observés issus du modèle d'observation sous la forme de temps de passages aléatoires distribués suivant des Gaussiennes ;
- des états *a priori* issus du LS-LWR-EP sous la forme de temps de passages aléatoires distribués suivant des mélanges de Gaussiennes ;

Dans la suite du développement, le point du réseau considéré pour l'assimilation, désigné par  $x$ , est le point où le capteur est placé.

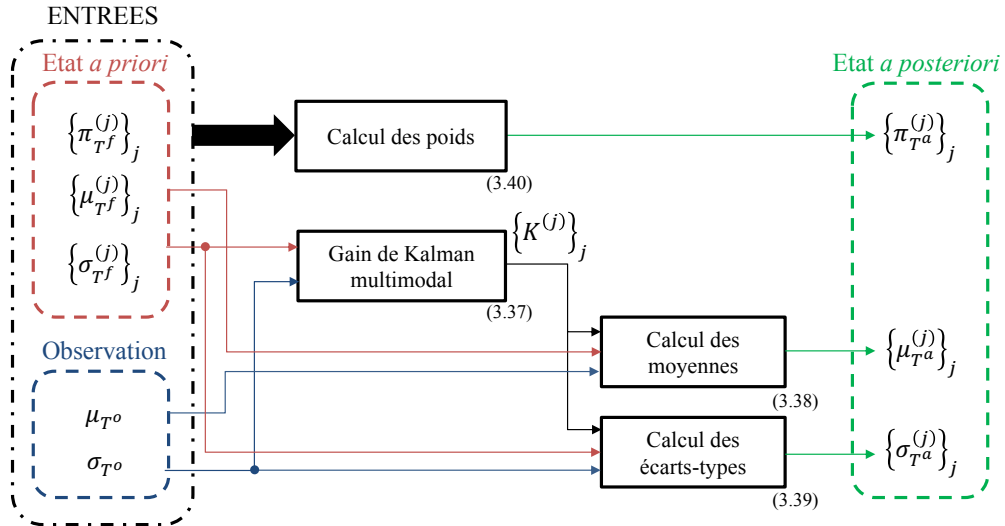


Fig. 3.9.: Schéma de concept du processus de fusion de données avec les notations adaptées au LS-LWR-EP

La Figure 3.9 représente une version schématique du processus de fusion de données. Le code couleur : rouge pour les états *a priori*, bleu pour les états observés et vert pour les états *a posteriori* se retrouveront en fin de chapitre dans les tests unitaires. Les flèches représentent la façon dont les variables vont intervenir dans les différentes étapes du processus. Les références aux équations qui correspondent aux différentes étapes du processus de fusion de données sont écrites à côté du processus correspondant.

### 3.3.2.1 Base théorique : Processus multivarié

Dans un premier temps, nous présentons la théorie telle qu'elle est présentée dans [109]. Il s'agit de la fusion de données pour un état *a priori* défini par plusieurs variables. L'ensemble de ces variables forme un mélange multivarié de Gaussiennes. Les moyennes sont donc remplacées par des vecteurs de moyennes et les écarts-types sont remplacés par des matrices de variances-covariances.

#### Notations

Soit  $\mathbf{X}$  le vecteur des variables aléatoires.  $\mathbf{X}$  est supposé être distribué suivant un mélange multivarié de lois gaussiennes, soit :

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M \pi_j \mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_{\mathbf{x},j}, \mathbf{V}_{\mathbf{x},j}) \quad (3.25)$$

$\mathbf{e}_{\mathbf{x},j}$  est le vecteur des espérances de la composante  $j$ .  $\mathbf{V}_{\mathbf{x},j}$  est la matrice des variances-covariances de la composante  $j$ .  $M$  est le nombre de composantes.  $\pi_j$  est le poids associé à la composante  $j$  (scalaire entre 0 et 1) avec :

$$\sum_{j=1}^M \pi_j = 1 \quad (3.26)$$

$\mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \mathbf{V})$  désigne la distribution Gaussienne pour les paramètres correspondants. Sa formulation multivariée est la suivante :

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \mathbf{V}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{V}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{e})^T \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{e})} \quad (3.27)$$

### Développement mathématique

Les notations précédentes sont maintenant utilisées dans un contexte de fusion de données. La fusion de données consiste en 3 étapes :

- la définition de l'état *a priori*  $(\cdot)^f$  par le modèle dynamique ;
- la définition du modèle d'observation permettant de lier les mesures brutes aux états observés  $(\cdot)^o$  ;
- la définition de l'état *a posteriori*  $(\cdot)^a$  résultat de la fusion de données.

L'état *a priori*  $X^f$  est calculé grâce au modèle. Dans le cadre actuel, on considère que le modèle est capable d'estimer l'état *a priori* sous la forme d'une variable aléatoire distribuée suivant un mélange de lois gaussiennes :

$$p_{\mathbf{X}^f}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M \pi_j^f \mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_{\mathbf{X}^f,j}, \mathbf{V}_{\mathbf{X}^f,j}) \quad (3.28)$$

Le modèle d'observation est défini comme multivarié et suivant une loi gaussienne.

$$p_{\mathbf{X}^o|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}, \mathbf{H}\mathbf{x}, \mathbf{R}) \quad (3.29)$$

avec  $\mathbf{H}$  la matrice de l'opérateur linéaire envoyant les données brutes sur les états observés. Le modèle d'observation doit être linéaire ou linéarisable. Dans le cas où la fonction d'observation n'est pas linéaire mais linéarisable,  $\mathbf{H}$  est la matrice Jacobienne de la fonction d'observation.

L'état *a posteriori* est défini comme  $\mathbf{X}^a = \mathbf{X}|\mathbf{X}^o$ . Cette notation stipule que l'état d'analyse est l'état du système sachant les états observés. Il est formulé sous la forme d'un mélange de lois gaussiennes paramétré comme suivant :

$$p_{\mathbf{X}|\mathbf{X}^o}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^M \pi_j^a \mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_{\mathbf{X}^a,j}, \mathbf{V}_{\mathbf{X}^a,j}) \quad (3.30)$$

Dans [64], les méthodes des moindres carrés, de maximum de vraisemblance ou le théorème de Bayes sont comparées. La conclusion qui en ressort est que les paramètres permettant de minimiser la fonction de coût (moindres carrés), de maximiser la vraisemblance sont les mêmes que ceux calculés grâce au théorème de Bayes. Les paramètres  $\pi_j^a$ ,  $\mathbf{e}_{\mathbf{X}^a,j}$  et  $\mathbf{V}_{\mathbf{X}^a,j}$  sont calculés en utilisant la formule d'inférence bayésienne [109]. D'après cet article, les calculs sont les suivants :

$$\begin{cases} \pi_j^a = \frac{\pi_j^f \times \mathcal{N}(\mathbf{y}, \mathbf{H}\mathbf{e}_{\mathbf{X}^f,j}, \mathbf{H}\mathbf{V}_{\mathbf{X}^f,j}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})}{\sum_{m=1}^M \pi_m^f \times \mathcal{N}(\mathbf{y}, \mathbf{H}\mathbf{e}_{\mathbf{X}^f,m}, \mathbf{H}\mathbf{V}_{\mathbf{X}^f,m}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})} \\ \mathbf{e}_{\mathbf{X}^a,j} = \mathbf{e}_{\mathbf{X}^f,j} + \mathbf{K}_j (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{e}_{\mathbf{X}^f,j}) \\ \mathbf{V}_{\mathbf{X}^a,j} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_j\mathbf{H}) \mathbf{V}_{\mathbf{X}^f,j} \end{cases} \quad (3.31)$$

où  $\mathbf{K}_j$  est la composante  $j$  du gain :

$$\mathbf{K}_j = \mathbf{V}_{\mathbf{X}^f,j} \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{V}_{\mathbf{X}^f,j} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (3.32)$$

Cette formulation multivariée sert de base pour la méthode de fusion de données utilisée dans les parties suivantes. Cependant, dans notre cas d'étude, l'utilisation d'un processus multivarié n'est pas nécessaire. En effet, les temps de passage sont indépendant et considérés individuellement les uns des autres. D'après les résultats de cette partie, on peut définir les formulations recherchées dans le processus de fusion de données mono-variable.

### 3.3.2.2 Formulations adaptée au LS-LWR-EP

On part du principe que l'on dispose à la fois de l'observation et de la prédiction pour le temps de passage du véhicule  $n$  au point  $x$ . D'après les hypothèses, le modèle d'observation permet de disposer d'un état observé prenant la forme d'un temps de passage observé distribué selon une Gaussienne simple. On définit ainsi l'état observé par sa moyenne  $\mu_{T^o(n,x)}$  et son écart-type  $\sigma_{T^o(n,x)}$  :

$$T^o(n,x) \sim \mathcal{N}(\mu_{T^o(n,x)}, \sigma_{T^o(n,x)}) \quad (3.33)$$

L'état *a priori* est défini comme une variable aléatoire distribuée selon un mélange de gaussiennes à  $J > 0$  composantes gaussiennes. Il est donc défini par l'ensemble des paramètres composant sa distribution : l'ensemble des poids, moyennes et écarts-types :

$$T^f(n, x) \sim \sum_{j=1}^J \pi_{T^f(n, x)}^{(j)} \mathcal{N}\left(\mu_{T^f(n, x)}^{(j)}, \sigma_{T^f(n, x)}^{(j)}\right) \quad (3.34)$$

L'état *a posteriori* est recherché tel que sa distribution ait aussi la forme d'un mélange de Gaussienne à  $J$  composantes. D'après [109], le nombre de composantes de l'état *a posteriori* est le même que le nombre de composantes de l'état *a priori*.

$$T^a(n, x) \sim \sum_{j=1}^J \pi_{T^a(n, x)}^{(j)} \mathcal{N}\left(\mu_{T^a(n, x)}^{(j)}, \sigma_{T^a(n, x)}^{(j)}\right) \quad (3.35)$$

L'ensemble des variables recherchées est décrit dans l'équation suivante :

$$\left\{ \pi_{T^a(n, x)}^{(1)}, \dots, \pi_{T^a(n, x)}^{(J)}, \mu_{T^a(n, x)}^{(1)}, \dots, \mu_{T^a(n, x)}^{(J)}, \sigma_{T^a(n, x)}^{(1)}, \dots, \sigma_{T^a(n, x)}^{(J)} \right\} \quad (3.36)$$

### 3.3.2.3 Développement

Les formulations relatives au LS-LWR-EP sont adaptées des formulations générales avec des mélanges multivariés de Gaussiennes. La démarche proposée est mono-variable. La démonstration des formules pour une démarche de ce type est présentée dans la section E. D'après l'équation (3.32), la  $j^{\text{ème}}$  composante du gain de Kalman multi-modal est :

$$K_j = \left( \sigma_{T^p(n, x)}^{(j)} \right)^2 \left( \left( \sigma_{T^p(n, x)}^{(j)} \right)^2 + \left( \sigma_{T^o(n, x)} \right)^2 \right)^{-1} \quad (3.37)$$

La  $j^{\text{ème}}$  composante du gain est un scalaire compris entre 0 et 1. Il est exclusivement défini par les  $j^{\text{ème}}$  variances des états *a priori* et observés. L'analyse des variations de  $K_j$  en fonction des variances des variables d'entrée permet de souligner un comportement que l'on peut décrire en trois cas.

1. Les observations sont bien moins précises que les prédictions. Mathématiquement cela se traduit par une prépondérance de la variance de l'état observé sur l'état *a priori*<sup>2</sup> :  $\sigma_{T^p(n, x)}^{(j)} = o(\sigma_{T^o(n, x)}^{(j)})$ . Dans ce cas,  $K_j$  tend vers 0.
2. Dans le cas contraire où les prédictions sont bien moins précises que les observations, la formulation mathématique décrit une prépondérance de la variance de l'état *a priori* sur la variance de l'état observé :  $\sigma_{T^o(n, x)}^{(j)} = o(\sigma_{T^p(n, x)}^{(j)})$ . Dans ce cas,  $K_j$  tend vers 1.

2. Le  $o(\cdot)$  représente ici la notation de Landau signifiant que la variable étudiée est négligeable devant la variable à l'intérieur des parenthèses.

3. Dans le cas limite où les deux variances sont identiques,  $K_j$  tend vers 1/2.

Les cas extrêmes 0 et 1 ne sont jamais atteints puisqu'ils correspondent à des cas sans erreur. Ainsi,  $K_j$  est strictement compris entre 0 et 1.

Les équations du groupe (3.31), fournissent les formulations des moyennes, des variances et des poids de l'état *a posteriori*. Dans le cas scalaire, la formule permettant le calcul de la moyenne de la composante  $j$  du mélange de Gaussienne de l'état *a posteriori* est :

$$\mu_{T^a(n,x)}^{(j)} = \mu_{T^p(n,x)}^{(j)} + K^{(j)} \left( \mu_{T^o(n,x)} - \mu_{T^p(n,x)}^{(j)} \right) \quad (3.38)$$

Elle est définie en fonction de la moyenne de la  $j^{\text{ème}}$  composante du temps de passage *a priori*, de la moyenne du temps de passage observé et de la  $j^{\text{ème}}$  composante du gain. D'après la définition du gain, la moyenne de l'état *a posteriori* est forcément comprise entre la moyenne de l'état *a priori* et la moyenne de l'état observé. Dans le cas 1, la moyenne de l'état *a posteriori* tend vers l'état *a priori*. Dans le cas 2, la moyenne de l'état *a posteriori* tend vers l'état observé. Dans le cas 3, lorsque les erreurs sont les mêmes sur les états *a priori* et observés, la moyenne de l'état *a posteriori* tend vers le juste milieu entre la moyenne de l'état *a priori* et la moyenne de l'état observé.

L'équation suivante donne la variance de la composante  $j$  de l'état *a posteriori* en fonction de la composante  $j$  du gain de Kalman et de la variance de la composante  $j$  de la distribution de l'état *a priori*.

$$\left( \sigma_{T^a(n,x)}^{(j)} \right)^2 = (1 - K^{(j)}) \left( \sigma_{T^p(n,x)}^{(j)} \right)^2 \quad (3.39)$$

Sachant que la composante  $j$  du gain de Kalman est compris entre 0 et 1, la variance de la composante  $j$  de l'état *a posteriori* est toujours inférieure à la variance de la composante  $j$  de l'état *a priori*. Cette propriété est classique pour un processus de fusion de données bayésien comme la méthode utilisée ou le filtre de Kalman classique.

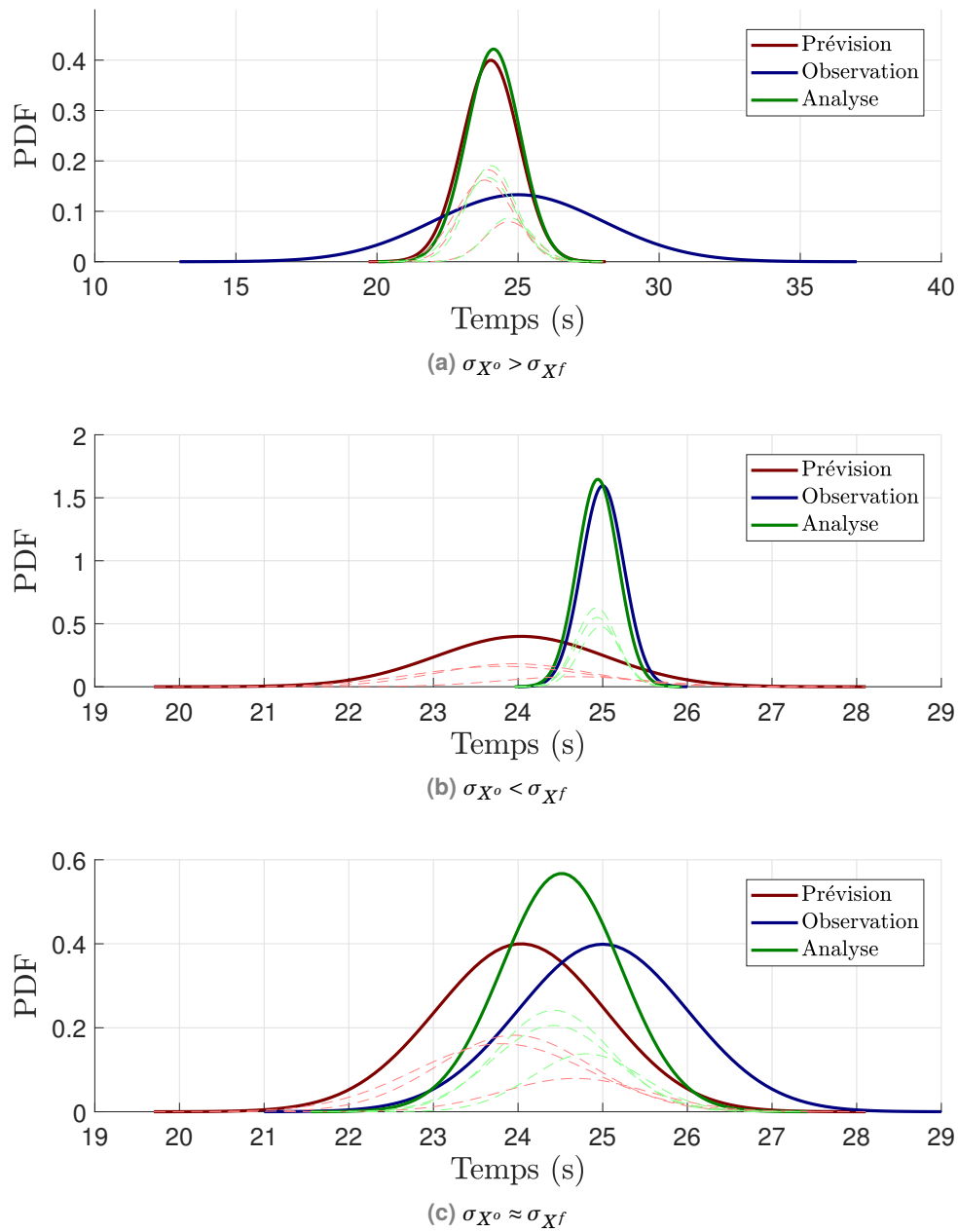
La dernière équation décrit le calcul des poids de la distribution de l'état *a posteriori* :

$$\pi_{T^a(n,x)}^{(j)} = \frac{\pi_{T^p(n,x)}^{(j)} \times \mathcal{N}(\mu_{T^o(n,x)}, \mu_{T^p(n,x)}^{(j)}, (\sigma_{T^p(n,x)}^{(j)})^2 + (\sigma_{T^o(n,x)})^2)}{\sum_{m=1}^M \pi_{T^p(n,x)}^{(m)} \times \mathcal{N}(\mu_{T^o(n,x)}, \mu_{T^p(n,x)}^{(m)}, (\sigma_{T^p(n,x)}^{(m)})^2 + (\sigma_{T^o(n,x)})^2)} \quad (3.40)$$

Il est à noter que par sa définition, chaque poids est compris entre 0 et 1. De plus, la somme de tous les poids est égale à 1. On obtient donc comme convenu un mélange de gaussiennes pour l'état *a posteriori*. Le calcul des poids est expliqué en détail dans la section suivante.

Des tests unitaires ont été effectués avec des distributions arbitraires permettant d'explorer les 3 cas décrits. Les illustrations sont présentées en Figure 3.10. L'état *a priori* est décrit par la distribution rouge, l'état observé par la distribution bleue et l'état *a posteriori* par la





**Fig. 3.10.:** Illustration du processus de fusion de données. Dans (a), la variance de l'observation est inférieure à la variance de la prévision. Dans (c), c'est strictement l'inverse. Dans (b), les deux variances sont quasiment égales.

distribution verte. Pour les états distribués suivant des mélanges de Gaussiennes (prédiction et synthèse), une courbe en trait plein représente la vision globale du mélange de Gaussiennes. Les courbes en tirets représentent les composantes des distributions.

La Figure 3.10a représente le cas 1 décrit précédemment. Pour les entrées, les distributions parlent d'elles mêmes. La distribution de l'état observé est beaucoup plus étalée que la distribution de l'état *a priori* ce qui signifie que la prédiction est plus précise que l'observation. Dans ce cas, la distribution de l'état *a posteriori* est très proche de celle de l'état *a priori*. Ce qui est cohérent avec l'équation des moyennes (3.38). De plus, la distribution de l'état *a posteriori* semble légèrement plus resserrée que la distribution de l'état *a priori* et son maximum est plus haut. En conclusion, l'état *a posteriori* est plus précis que l'état *a priori* et par conséquent plus précis que l'état observé. Dans la Figure 3.10b, le cas 2 est illustré. Les conclusions sont symétriques aux conclusions précédentes. En effet, ici, l'état *a posteriori* est proche de l'état observé et plus précis que les deux entrées de la fusion de données.

La dernière illustration en Figure 3.10c illustre le cas 3. Dans ce cas, les deux distributions en entrée ont la même variance globale. L'état *a posteriori* résultant du processus de fusion de données est placé au juste milieu entre les distributions des états *a priori* et observé. De plus, la variance de l'état *a posteriori* est réduite fortement comparativement aux deux autres variances. D'après les équations (3.39) et (3.37), la variance est même réduite de moitié. L'annexe E expose et justifie les formules utilisées dans la méthode de fusion.

### 3.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons développé un processus de fusion de données prenant place à l'intérieur d'un processus d'assimilation de données séquentiel. D'après l'omniprésence des déclinaisons du filtre de Kalman dans les problématiques d'assimilation de données liées au trafic tant dans l'échelle eulérienne que Lagrangienne-Temporelle, le verrou scientifique à lever est la transposition de la méthode à une échelle lagrangienne spatiale. Le diagramme fondamental dans cette échelle de représentation possède une irrégularité qui n'est pas présente dans le diagramme fondamental dans l'échelle de représentation eulérienne. En effet, la branche fluide du diagramme fondamental triangulaire en échelle Lagrangienne-Spatiale est verticale, ce qui empêche l'utilisation d'un schéma de Godunov pour résoudre le modèle.

Prenant appui sur un processus bayésien proche du filtre de Kalman, une méthode de fusion de données associées à des états *a priori* distribués selon des mélanges de Gaussiennes a été développée. Elle permet d'obtenir des états *a posteriori* possédant la forme de mélange de Gaussiennes décrites par leurs poids, moyennes et écarts types. L'ensemble des variables de sortie du processus de fusion est calculé en fonction des caractéristiques

des distributions observées et *a priori*. La méthode de fusion de données permet de se rapprocher des états *a priori* ou observés en fonction de leurs précisions. Les illustrations fournies permettent d'avoir une idée pratique du concept.

Afin de pouvoir correctement caler les conditions internes du modèle, il faut boucler le processus d'assimilation de données. La dernière étape de la boucle est la mise à jour du modèle afin de corriger les états du modèle en adéquation avec les résultats de la fusion de données. Dans le chapitre suivant, nous pourrons valider la méthode d'assimilation de données avec suivi des incertitudes dans sa globalité.

# Calage en ligne des conditions internes du modèle

## Partie II : Bouclage de l'assimilation de données

Le schéma d'assimilation de données, fil rouge des chapitres 2 à 4, est rappelé en Figure 4.1. Les cases ont été colorées selon l'avancement au terme des trois premiers chapitres. Le modèle d'écoulement Lagrangien-Spatial avec suivi des erreurs de modèle est disponible en Chapitre 2. Les formulations de la méthode de fusion de données sont le sujet du Chapitre 3. En sortie de fusion de données, les états *a posteriori* sont calculés en fonction des états *a priori* et des observations. Cependant, les formulations proposées dans le Chapitre 3 n'ont pas de lien direct avec le modèle d'écoulement. En effet, les états sont décrits par leurs caractéristiques mathématiques mais n'ont pas de sens physique.

Ce chapitre présente la méthode de mise à jour du modèle ; c'est à dire la manière dont les états *a posteriori* doivent être réinjectés dans le modèle d'écoulement. Cette étape est critique pour le bouclage du schéma d'assimilation. Ainsi, ce qui est proposé est un modèle d'écoulement proposant un suivi des erreurs de modèle et un calage séquentiel et automatique des conditions internes en fonction de données captées sur le terrain. Pour rappel, le contexte et l'état de l'art de l'assimilation de données et de la mise à jour de modèle notamment pour des applications de type filtre de Kalman est en Chapitre 3.

L'organisation du chapitre est la suivante. La Section 4.1 présente les deux méthodes de mise à jour du modèle en compétition pour le bouclage du schéma d'assimilation de données. La Section 4.2 s'attache à la conception du processus de validation utilisé pour mettre à l'épreuve les méthodes proposées. La Section 4.3 compare les résultats des méthodes appliquées aux scénarios conçus. Dans la Section 4.4, une discussion autour de la capacité du schéma d'assimilation à correctement propager les états de trafic en présence d'un défaut de calage dans les paramètres du modèle d'écoulement est menée. Enfin, la Section 4.5 conclut sur les avancées du chapitre et démontre la nécessité de caler les paramètres du modèle en temps réel faisant le lien avec le dernier chapitre de la thèse.

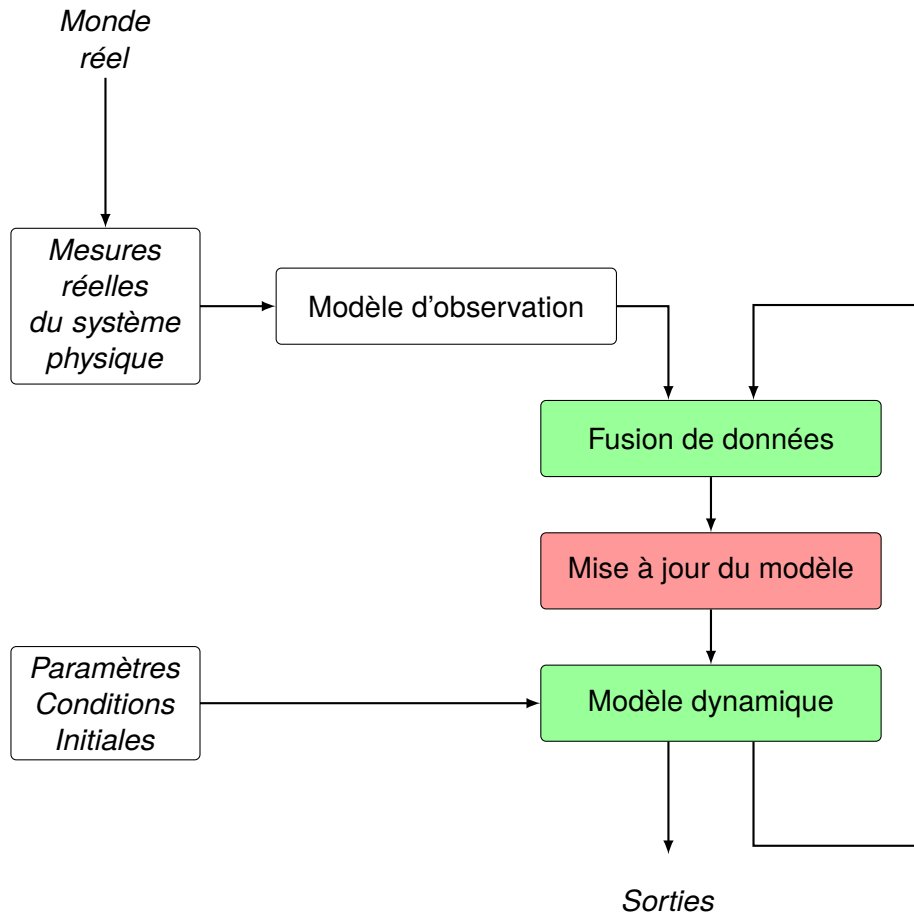


Fig. 4.1.: Assimilation de données au terme du Chapitre 3

## 4.1 Présentation des méthodes

Dans cette section, les deux méthodes de mise à jour du modèle sont présentées. La première méthode est simple et directe. La deuxième méthode est plus complexe et fait appel à des remaniements dans le comptage des véhicules en simulation.

### 4.1.1 Simple substitution des états *a priori* par les états *a posteriori* dans le modèle d'écoulement (M.1)

Dans un premier temps, la méthode de mise à jour du modèle explorée est une méthode directe et présentant une faible complexité. Cette méthode se résume par la simple substitution des états *a priori* par les états *a posteriori* dans le modèle d'écoulement. Le schéma en Figure 4.2 représente une vision simple de la méthode de mise à jour. Elle consiste en une correspondance absolue entre chaque véhicule simulé et chaque véhicule observé.

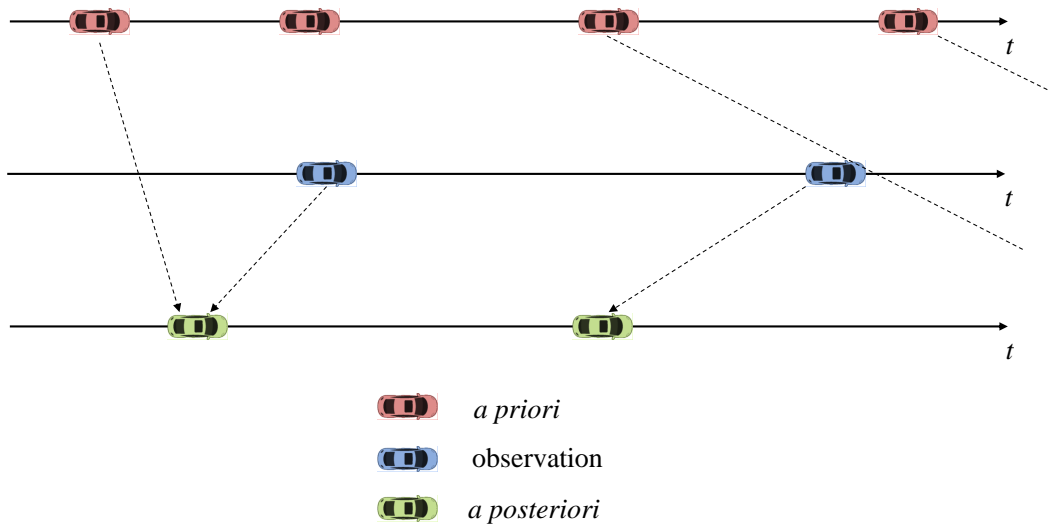


Fig. 4.2.: Représentation schématique de la méthode de simple substitution

Cette méthode est appelée (M.1) dans la suite du chapitre. Afin de tester la méthode, des scénarios sont conçus dans la section suivante. Pour les résultats relatifs à cette méthode, il faut d'abord présenter la deuxième méthode de la compétition.

#### 4.1.2 Manipulation des indices des véhicules (M.2)

Le processus de simple substitution des états *a priori* par les états *a posteriori* propose une correspondance de tout véhicule simulé avec un véhicule observé. Des questions sont légitimes quant à la cohérence de l'hypothèse fondamentale de la méthode (M.1). Entre autres, deux questions méritent d'être explicitées :

- Un véhicule simulé non détecté a-t-il sa place dans la simulation ?
- Un véhicule n'aurait pas sa place dans la simulation lorsqu'un véhicule est détecté mais pas simulé ?

Ces questions nous incitent à partir à la recherche d'une méthode de mise à jour du modèle agissant sur le nombre de véhicules dans la simulation. Cette deuxième méthode sera notée (M.2) dans les sections suivantes.

##### 4.1.2.1 Granularité du trafic : flux

Une base théorique de la méthode de mise à jour manipulant des indices de véhicules est représentée par [131, 44]. Afin de comprendre la façon dont cette méthode a été source

d'inspiration, nous proposons de présenter le contexte de la méthode de mise à jour dans les travaux qui font office de référence.

Dans [131, 44], la fusion de données est faite par intervalle de temps  $P$  sur un vecteur composé du temps inter-véhiculaire moyen  $h$  sur la période et d'une variable binaire représentant le régime fluide ou congestionné. Le modèle LS-LWR classique proposant des résultats sous forme de temps de passage, il est proposé **un opérateur de transformation** permettant le passage des temps de passage prévus par le modèle à l'opérateur *a priori*. Il est régi par l'équation suivante :

$$H^f(T(n,x),X,P) = \begin{cases} h^f(X,P) = \frac{\Delta t}{Card(S)} \\ r^f(X,P) = \begin{cases} 0 & \text{si } T(n^*,X) - T(n^*,X - \Delta x) = \frac{\Delta x}{u} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad (4.1)$$

Où  $S$  est l'ensemble des véhicules ayant passé le point d'observation durant la période  $P$ .  $h^f$  est l'écart temporel inter-véhiculaire *a priori*.  $n^*$  est l'indice du dernier véhicule passé. Le régime *a priori*  $r^f$  étant donc déterminé selon que le dernier véhicule ait vu son temps imposé par l'offre (1) ou bien par la demande (0).

Du côté de l'observation, les données de boucles électromagnétiques sont les seules données considérées. Les boucles électromagnétiques renvoyant un débit moyen sur la période  $P$ , un **opérateur de transformation de l'observation** a dû être défini. Il repose sur l'équation suivante :

$$H^o(T(n,x),X,P) = \begin{cases} h^o(X,P) = \frac{1}{q^o(X,P)} \\ r^o(X,P) = \begin{cases} 0 & \text{si } v^o(X,P) \geq v_c \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad (4.2)$$

Où  $q^o(X,P)$  est le débit moyen relevé par la boucle sur la période  $P$ ,  $v^o$  la vitesse moyenne des véhicules passés durant la période  $P$  et  $v_c$  est une vitesse critique dérivée de données historiques.

Pour rappel, l'étape d'analyse globale repose sur les équations suivantes :

$$\begin{cases} h^a = h^f + W^h \cdot (h^o - h^f) \\ r^a = r^f + W^r \cdot (r^o - r^f) \end{cases} \quad (4.3)$$

Où  $W^h$  est une pondération relative aux *headways*.  $W^r$  est une pondération relative au régime et de par la nature binaire de la variable, l'opérateur est lui aussi binaire. Dans

[131, 44], les  $W$  ne sont pas exprimés. Cette formulation n'est pas sans rappeler le **Gain de Kalman**.

Finalement, afin de modifier les temps de passage en fonction des variables *a posteriori*, il fallait définir une étape de mise à jour du modèle. C'est ici que la condition CFL [32] intervient. En effet selon [45], la condition CFL borne les pas de résolutions en fonction de la longueur des liens. Mettre à jour le modèle sur l'ensemble de la période  $P$  peut conduire à de l'instabilité. Pour pallier cette instabilité il est proposé de mettre à jour le modèle sur plusieurs périodes  $P^u$  respectant la condition CFL.

### Les 8 cas possibles

Afin de caler les temps de passage des différents véhicules sur la période  $P^u$  de longueur  $\Delta T^u$ , la différence nette de véhicule entre les états *a priori* et *a posteriori* est introduite :

$$\delta n = \Delta T^u \cdot \left( \frac{1}{h^a} - \frac{1}{h^f} \right) \quad (4.4)$$

Ensuite, selon les combinaisons des régimes (fluide ou congestionné), les règles régissant les modifications sur les véhicules reposent sur les 8 cas présentés dans la Table 4.1 :

1. Lorsqu'à la fois les états *a priori* et *a posteriori* sont fluides et que  $h^a > h^f$ , des véhicules sont supprimés :

$$T(n, X) = T(n-1, X) + h^a \quad \forall n \in \{S \setminus [n^* - \delta n + 1 : n^*]\}$$

2. Lorsqu'à la fois les états *a priori* et *a posteriori* sont fluides et que  $h^a < h^f$ , des véhicules sont ajoutés :

$$T(n, X) = T(n-1, X) + h^a \quad \forall n \in \{S \cup [n^* - \delta n + 1 : n^*]\}$$

3. Lorsqu'à la fois les états *a priori* et *a posteriori* sont congestionnés et que  $h^a > h^f$ , des véhicules sont retardés :

$$T(n, X) = T(n-1, X) + h^a \quad \forall n \in \{S \setminus [n^* - \delta n + 1 : n^*]\}$$

4. Lorsqu'à la fois les états *a priori* et *a posteriori* sont congestionnés et que  $h^a < h^f$ , des véhicules sont avancés :

$$T(n, X) = T(n-1, X) + h^a \quad \forall n \in \{S \cup [n^* - \delta n + 1 : n^*]\}$$

5. L'état *a priori* est en congestion avec un fort débit et l'état *a posteriori* est fluide avec un faible débit : on ne fait rien.



	$r^f = 0$	$r^f = 1$
$r^a = 0$	$h^a > h^f \dots (1)$ $h^a < h^f \dots (2)$	$h^a > h^f \dots (5)$ $h^a < h^f \dots (6)$
$r^a = 1$	$h^a > h^f \dots (7)$ $h^a < h^f \dots (8)$	$h^a > h^f \dots (3)$ $h^a < h^f \dots (4)$

Tab. 4.1.: Résumé des 8 cas possibles [45]

6. L'état *a priori* est en congestion avec un faible débit et l'état *a posteriori* est fluide avec un haut débit : le goulot d'étranglement est supprimé en avançant des véhicules comme dans le cas **4.**.
7. L'état *a priori* est fluide avec un haut débit et l'état *a posteriori* est en congestion avec un bas débit : le goulot d'étranglement est créé en retardant des véhicules comme dans le cas **3.**.
8. L'état *a posteriori* est en congestion avec un fort débit et l'état *a priori* est fluide avec un faible débit : on ne fait rien.

Dans 2 des 8 cas possibles aucune modification n'est faite. Tout l'intérêt maintenant est d'adapter la méthode pour des temps de passage possédant des distributions de probabilité continues. La considération binaire du régime rajoute une difficulté supplémentaire. Nous pouvons faire l'hypothèse que le régime observé est considéré comme vrai.

#### 4.1.2.2 Granularité du trafic : particules

Ici la granularité est telle qu'elle a été établie dans les parties précédentes du manuscrit. Les véhicules sont considérés comme des particules indépendantes. Pour ce qui est du modèle d'écoulement, le lecteur peut se reporter au Chapitre 2. Pour le chapitre correspondant à la formulation de la méthode de fusion de données, le lecteur peut se référer au Chapitre 3. Ainsi, les véhicules simulés sont considérés indépendants les uns des autres et sont considérés comme des variables aléatoires distribuées selon des mélanges de Gaussiennes. La méthode de fusion de données prévoit de produire un temps de passage stochastique *a posteriori* en fonction d'un temps de passage stochastique observé et d'un temps de passage stochastique *a priori*.

Lorsque les véhicules sont pris indépendamment les uns des autres, il n'est pas nécessaire de passer par des variables agrégées. Ainsi, la solution proposée ne fait pas appel au temps inter véhiculaire moyen. En revanche, les notions développées dans la section précédente sont retranscrites dans le cas où les véhicules sont discrets et indépendants. Notamment, nous proposons une reprise des 8 cas possibles vus dans la section précédente.

## Reprise des 8 cas possibles

L'assimilation de données est déclenchée lorsqu'une donnée est disponible. C'est à dire, chaque nouvelle séquence est déclenchée par la détection du passage d'un nouveau véhicule au point d'observation. Afin de se ramener aux 8 cas possibles, nous proposons d'établir une convention pour la période d'assimilation de données. Cette convention consiste à initier la période entre deux observations consécutives et la terminer entre les deux observations suivantes. Mathématiquement, soit  $T^o(n-1)$ ,  $T^o(n)$ ,  $T^o(n+1)$  les temps de passage observés de trois véhicules consécutifs, on définit la période  $P(n)$  comme l'intervalle temporel suivant :

$$P(n) = [T^o(n) - T^o(n-1), T^o(n+1) - T^o(n)] \quad (4.5)$$

Cette définition de la période permet d'appliquer la fusion de données sur le temps de passage *a priori* le plus proche du temps de passage observé. La période est dessinée dans les Figures 4.3 à 4.6. Au vu du calcul de la période, et contrairement à la méthode précédente qui donnait une influence majeure au modèle d'écoulement, cette méthode donne une importance fondamentale aux données. On choisit ainsi que le régime *a posteriori* correspond au régime observé :  $r^a = r^o$ .

Dans cette période, une analogie est faite entre le temps inter véhiculaire moyen agrégé  $h$  de la section précédente et le nombre de véhicules  $N_p$  *a priori* durant la période  $P$ .

- Une relation du type  $h_1 < h_2$  signifie que durant une période de temps, le temps intervéhiculaire dans la situation 1 est moins important que dans la situation 2. Ainsi, on en déduit que le débit ( $q = 1/h$ ) est plus important dans la situation 1 que dans la situation 2. En termes de nombre de véhicules, il y a plus de véhicules passant durant la période considérée dans la situation 1 que dans la situation 2. Ainsi, une relation du type  $h^a < h^f$  se traduit par une relation  $N^o > N^f$  dans cette section.
- A l'inverse, une relation du type  $h_1 > h_2$  signifie que durant une période de temps, le temps intervéhiculaire dans la situation 1 est plus important que dans la situation 2. Ainsi, on en déduit que le débit ( $q = 1/h$ ) est moins important dans la situation 1 que dans la situation 2. En termes de nombre de véhicules, il y a moins de véhicules passant durant la période considérée dans la situation 1 que dans la situation 2. Ainsi, une relation du type  $h^a > h^f$  se traduit par une relation  $N^o < N^f$  dans cette section.

Ces deux points permettent de proposer une table de déclinaison des huit cas (cf. Table 4.2) par analogie avec la Table 4.1.

Les 8 cas possibles sont les mêmes que ceux présentés en section 4.1.2.1. Pour une compréhension des différents concepts mis en jeu dans le cas présent, le lecteur est invité à se reporter aux figures suivantes :

- Figure 4.4 pour l'ajout de véhicules.

	$r^f = 0$	$r^f = 1$
$r^o = 0$	$N^o < N^f \dots(1)$	$N^o < N^f \dots(5)$
	$N^o > N^f \dots(2)$	$N^o > N^f \dots(6)$
$r^o = 1$	$N^o < N^f \dots(7)$	$N^o < N^f \dots(3)$
	$N^o > N^f \dots(8)$	$N^o > N^f \dots(4)$

Tab. 4.2.: Résumé des 8 cas possibles

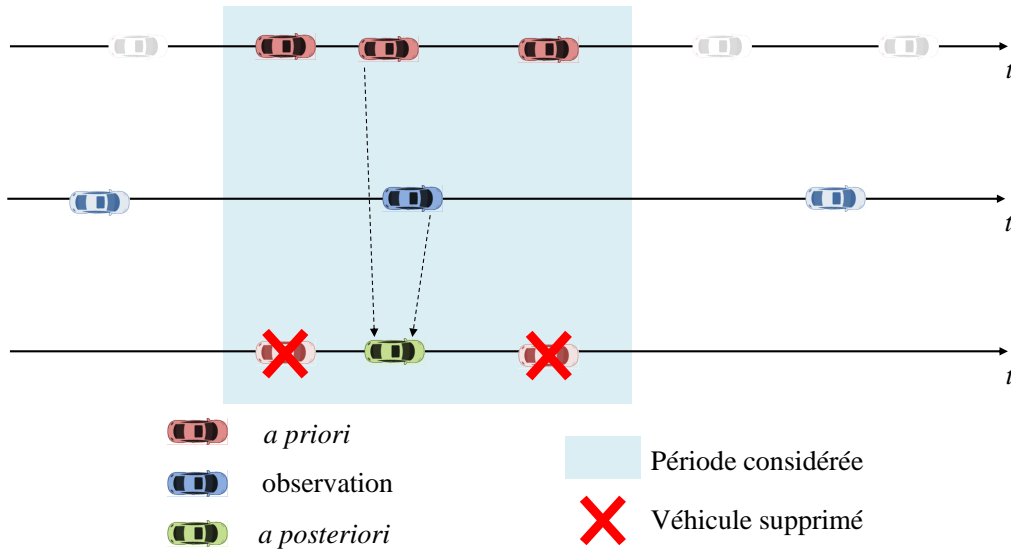


Fig. 4.3.: Cas de suppression de véhicules

- Figure 4.3 pour la suppression de véhicules.
- Figure 4.5 pour le retard de véhicules.
- Figure 4.6 pour l'avance de véhicules.

Les cas 5. et 8 sont des cas qui ne devraient pas être rencontrés. Lorsque ces situations sont rencontrées, l'outil doit renvoyer des alertes afin d'analyser la source d'une telle occurrence (algorithme, données présentant des biais, etc). Avec l'expression de ces huit cas, la boucle d'assimilation de données est terminée. Il reste encore à comparer les méthodes sur un panel de simulations.

## 4.2 Processus de validation

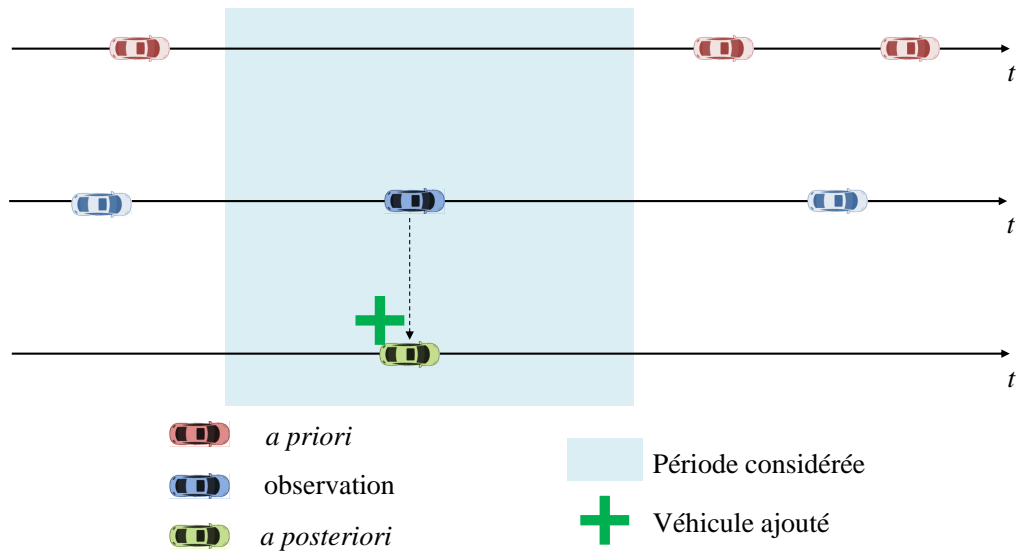


Fig. 4.4.: Cas d'ajout d'un véhicule

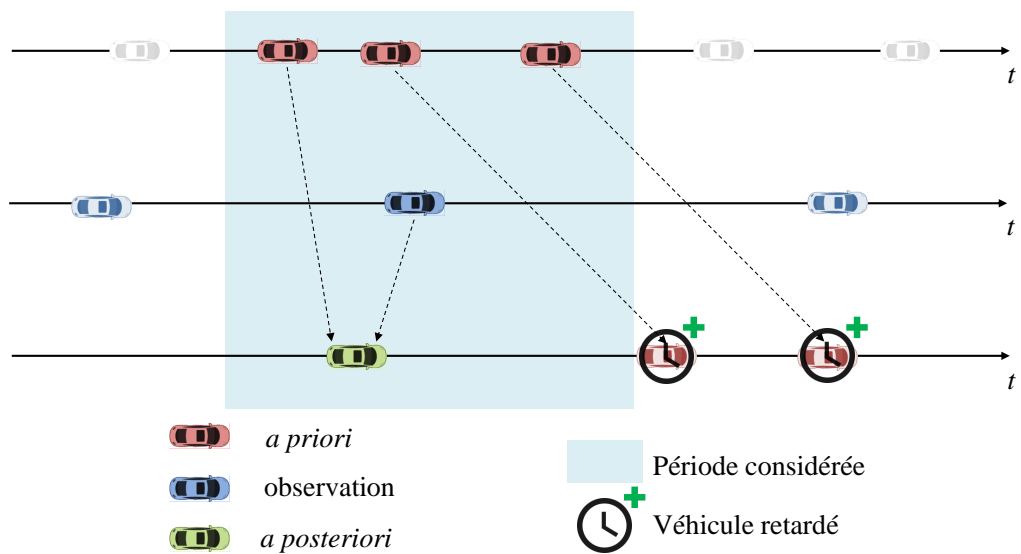


Fig. 4.5.: Cas où des véhicules sont retardés

### 4.2.1 Support

Pour valider la méthode d'assimilation de données avec propagation d'erreur, deux choix de support de données sont possibles, chacun présentant des avantages et des inconvénients :

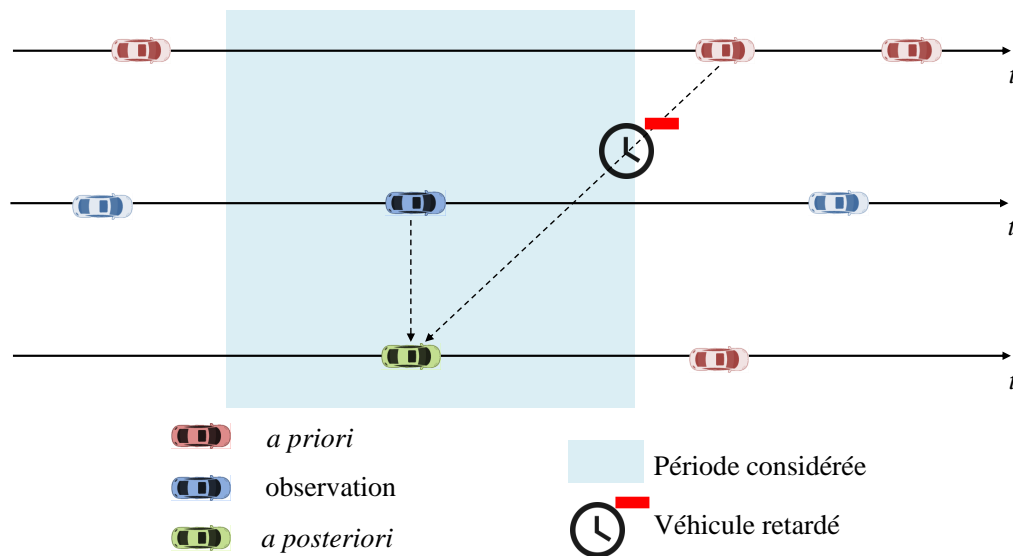


Fig. 4.6.: Cas où un véhicule est avancé

- support basé sur des données réelles ;
- support basé sur des données synthétiques.

### Support synthétique

Un avantage offert par ce support est de pouvoir contrôler un ensemble de paramètres qui ne sont pas disponibles avec des données réelles. Les variables dont le contrôle apporte une plus-value dans les scénarios de validation sont : la demande, l'offre et les paramètres du diagramme fondamental dans le scénario que l'on assimilera à la "réalité terrain". De plus, les scénarios de test peuvent être conçus afin d'analyser comment la méthode développée réagit à la modification d'un ou plusieurs paramètres. Pour une telle analyse, le reste des paramètres demeure inchangé. Enfin, la qualité des données est aussi paramétrable. Dans un support synthétique, des problématiques comme l'exhaustivité ou les moyens de recueil des données ne sont pas contraignantes pour la mise en place de scénarios tests. Par ailleurs, cette flexibilité permet d'étudier la sensibilité de la méthode développée par rapport à la qualité des données disponibles.

Le principal inconvénient est que la situation représentée n'est pas réelle. Elle relève d'une étape d'abstraction supplémentaire par la modélisation. De plus, concernant les données, le manque de données empiriques concernant les incertitudes sur les valeurs captées empêche une modélisation fidèle des capteurs et donc une validation sur données synthétiques complètement cohérente avec les phénomènes réels. Dans un support opérationnel,

<b>TRL 1</b>	Principes de base observés et rapportés
<b>TRL 2</b>	Concepts ou applications de la technologie formulés
<b>TRL 3</b>	Fonction critique analysée et expérimentée ou preuve caractéristique du concept
<b>TRL 4</b>	Validation en laboratoire du composant ou de l'artefact produit
<b>TRL 5</b>	Validation dans un environnement significatif du composant ou de l'artefact produit
<b>TRL 6</b>	Démonstration du modèle système / sous-système ou du prototype dans un environnement significatif
<b>TRL 7</b>	Démonstration du système prototype en environnement opérationnel
<b>TRL 8</b>	Système réel complet qualifié à travers des tests et des démonstrations
<b>TRL 9</b>	Système réel prouvé à travers des opérations / missions réussies

Tab. 4.3.: Table des niveaux de maturité technologiques dans [84]

la validation basée sur des données synthétiques ne permet pas une preuve suffisante pour la validation des méthodes développées.

### Support réel

L'avantage principal de cette solution est qu'elle se rapproche de la réalité. En termes de mise en place opérationnelle, cette solution représente un passage obligatoire. En effet, les données réelles sont bruitées, non exhaustives et peuvent présenter des biais systématiques. Une validation sur données réelles permet donc d'avoir la certitude que la méthode testée sera valable une fois mise en place. L'utilisation de données historiques possède l'avantage de la possibilité de rejouer des situations réelles en différé. Un algorithme est requis, permettant de simuler l'arrivée des données comme dans une situation réelle.

Deux inconvénients majeurs du support basé sur des données réelles peuvent être cités. Concernant le recueil des données, il faut que les données soient compatibles avec la méthode développée. Dans le cas où les données ne sont pas compatibles, des travaux supplémentaires sont nécessaires pour adapter les données à la méthode d'assimilation. De plus, l'infrastructure et la configuration des capteurs sur lesquels les données sont captées peuvent représenter une contrainte. Dans le cas où la méthode développée présente des hypothèses fortes, comme celles présentées dans les travaux menés, la probabilité de souffrir de difficultés pour trouver un scénario alliant infrastructures et données recueillies cohérentes avec le prototype développé est forte. De plus, les scénarios proposés par les données réelles manquent de flexibilité et donc de points de comparaison puisqu'on ne possède pas la liberté de conception des scénarios de test.

## Choix

Prenons en référence le *Technology Readiness Level* ou niveau de maturité technologique proposé par la NASA<sup>1</sup> [84]. En effet, en Table 4.3, les différents niveaux de maturité reposant sur les données synthétiques sont représentés par les **TRL 1** à **TRL 4**. Les **TRL 5** et plus, correspondent aux niveaux de maturité reposant sur des données réelles. De plus, l'objectif ici est la validation d'un concept d'assimilation de données avec suivi des erreurs de modèle dans un univers contrôlable et contrôlé. En conséquence, cet objectif fait écho à un **TRL 4** seulement et donc la validation sera menée sur un support de données réelles. Concernant une potentielle mise en place opérationnelle, des pistes d'ouverture sont proposées en conclusion afin d'ouvrir sur la possibilité d'étendre l'outil vers des **TRL** plus élevés.

### 4.2.2 Conception des scénarios

Afin de mener à bien la validation avec un support synthétique, on propose dans cette section la conception des scénarios. Les scénarios de test reposent sur un paramétrage classé en trois catégories :

1. géométrie du réseau ;
2. paramétrage du diagramme fondamental ;
3. paramétrage de l'offre et de la demande.

Le principe est d'agir sur des paramètres afin d'étudier la capacité de la méthode d'assimilation de données à caler les conditions internes (temps de passage aux nœuds) et à proposer des incertitudes révisées en adéquation avec les données. Les étapes de conception du scénario composant la *réalité terrain* sont les suivantes. L'ensemble des valeurs est résumé dans la Table 4.4.

#### Géométrie du réseau

Le réseau utilisé repose sur les mêmes hypothèses que pour le modèle d'écoulement. En conséquence, il s'agit d'une section de route homogène sans entrée ni sortie. La route est discrétisée en 4 cellules de 1000m chacune pour une longueur totale de 4000m. Afin de proposer des données synthétiques, deux boucles sont simulées aux emplacements du deuxième noeud (à 1000 m) et du quatrième noeud (à 3000 m). La géométrie du réseau est présentée dans la Figure 4.7.

#### 4.2.2.1 Conception du scénario de référence ou *réalité terrain*

---

1. National Aeronautics and Space Administration

Conception du réseau		
Longueur totale	$L$	4000 m
Longueur de la cellule 1	$L_1$	1000 m
Longueur de la cellule 2	$L_2$	1000 m
Longueur de la cellule 3	$L_3$	1000 m
Longueur de la cellule 4	$L_4$	1000 m
Emplacement de la boucle dans (S.1)		3000 m
Emplacement de la boucle dans (S.2)		1000 m
Paramètres du diagramme fondamental		
Moyenne de la vitesse fluide	$\mu_u$	30 m/s
Ecart-type de la vitesse fluide	$\sigma_u$	1 m/s
Moyenne la vitesse maximale de remontée de congestion	$\mu_w$	5 m/s
Ecart-type de la vitesse maximale de remontée de congestion	$\sigma_w$	0.25 m/s
Moyenne de la densité maximale de véhicules	$\mu_{k_x}$	0.17 veh/m
Ecart-type de la densité maximale de véhicules	$\sigma_{k_x}$	0.007 veh/m
Scénario d'offre et demande		
Valeur basse de la demande		0.0729 veh/s
Valeur haute de la demande		0.5464 veh/s
Moyenne de la capacité en sortie pour (S.1)	$\mu_C$	0.36425 veh/s
Moyenne de la capacité en sortie pour (G.T, S.2)	$\mu_C$	0.2186 veh/s
Ecart-type de la capacité en sorti	$\sigma_C$	0.05 veh/s

Tab. 4.4.: Paramétrage des scénarios

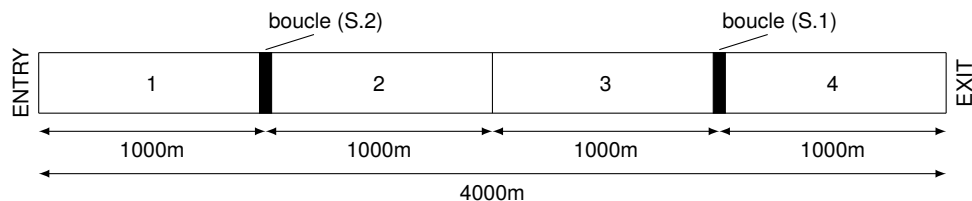
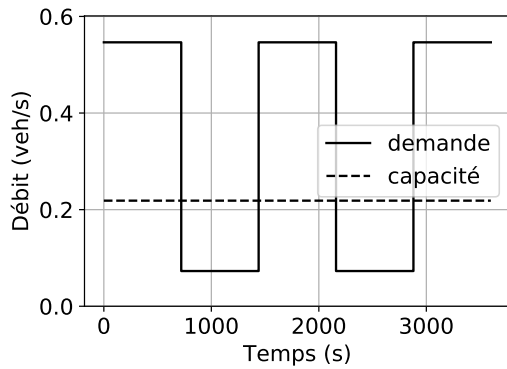


Fig. 4.7.: Réseau expérimental pour la validation sur données synthétiques

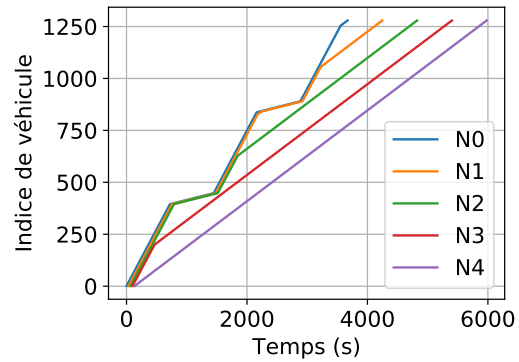
#### Paramètres du diagramme fondamental

Concernant les paramètres du diagramme fondamental, pour cette analyse en données synthétiques où l'ensemble des paramètres peut être modifié, un processus de calage n'est pas nécessaire. De plus, les paramètres du diagramme fondamental sont susceptibles de varier grandement selon la composition du trafic ou d'autres paramètres comme la météo. Il est donc impossible de prétendre à utiliser des paramètres optimaux pour une *réalité terrain* absolue. Les paramètres utilisés peuvent correspondre à une situation bien particulière qu'on ne peut décrire. Pour autant, les valeurs utilisées restent cohérentes avec ce qui peut être observé sur le terrain, en général. En effet, une vitesse fluide moyenne de 30 m/s est de l'ordre de grandeur de 100km/h. Cette vitesse est cohérente avec le cadre de la recherche : une longue section de route sans entrée ni sortie correspond plutôt à un contexte de circulation sur réseau interurbain que citadin. Concernant les paramètres

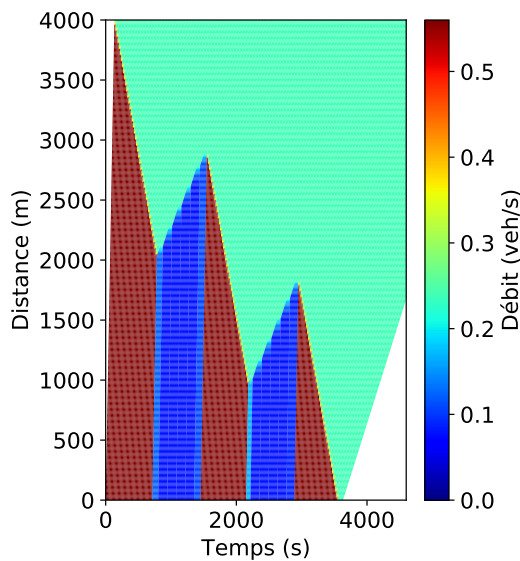




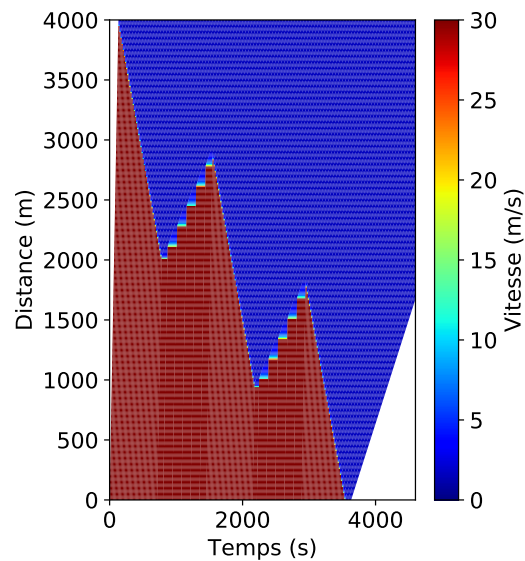
(a) Chroniques de demande et de capacité



(b) Indices des véhicules en fonction du temps



(c) Diagramme XT du débit



(d) Diagramme XT de la vitesse

Fig. 4.8.: Graphiques du scénario de référence

relatifs à la propagation de la congestion, des valeurs de 5 m/s pour la vitesse maximum de remontée de congestion et de 0.17 veh/m pour la densité maximale de véhicules sont considérées. Ces valeurs sont aussi cohérentes avec les travaux réalisés précédemment [29, 30].

#### Paramètres d'offre et de demande

Le paramétrage de l'offre et de la demande pour la *réalité terrain* est fait de façon à voir apparaître une congestion en sortie de réseau. Cette congestion remonte jusqu'à l'entrée du lien. La Figure 4.8a présente la chronique de débit espéré en entrée du réseau (en trait continu) et la chronique de capacité en sortie du réseau (en trait discontinu). Ces valeurs sont visibles sur la Figure 4.8b présentant les indices des véhicules sur le réseau

en fonction du temps pour l'ensemble des nœuds. Elles sont aussi visibles sur la Figure 4.8c représentant le diagramme espace-temps en débit du scénario de référence. Sur le diagramme espace-temps en vitesse, en Figure 4.8d, la congestion initiée en sortie de lien, visible par l'onde de vitesse réduite, remonte effectivement jusqu'à l'entrée du réseau.

#### 4.2.2.2 Conception des scénarios de test

Le principe de création des scénarios de test repose sur la considération suivante : seulement un type de caractéristique est modifié dans le scénario de test par rapport au scénario de la *réalité terrain*. En conséquence, on propose 4 scénarios différents :

1. L'offre en sortie diffère du scénario de la *réalité terrain*.
2. La demande en entrée du réseau diffère du scénario de la *réalité terrain*.

##### (S.1)

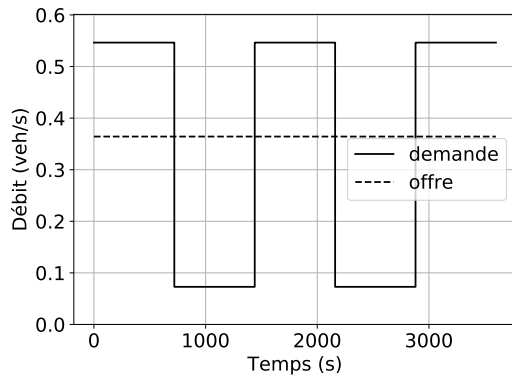
Le scénario (S.1) permet de simuler un défaut de calage de l'offre en sortie de réseau. Ce scénario prévoit d'augmenter la capacité en sortie de réseau à 0.36425 veh/s (cf. Table 4.4). De ce fait, la congestion entraînée par le fait que la demande est plus importante que l'offre en sortie de réseau est moins importante. En accord avec la théorie de trafic, pour ce scénario, sans assimilation de données, on doit observer une vitesse de propagation de la congestion plus lente et une vitesse des véhicules dans le bouchon plus importante. Sachant qu'en congestion les états de trafic se propagent de l'aval vers l'amont, nous proposons d'observer les états de trafic au niveau du nœud correspondant sur la Figure 2.16 (3ème nœud).

##### (S.2)

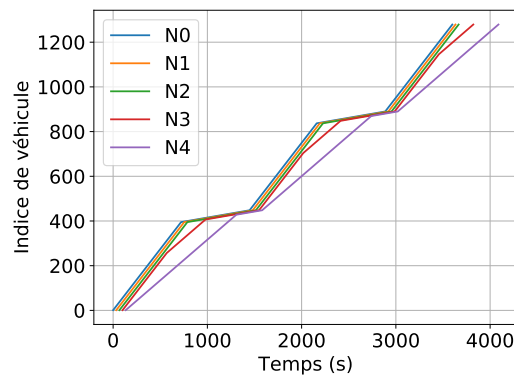
Le scénario (S.2) permet de simuler un défaut de calage de la demande en entrée de réseau. Afin d'analyser si la méthode d'assimilation de données développée réussit à propager les états de trafic correctement, dans cette situation, on propose de simuler un cas où la demande n'implique pas l'apparition d'une congestion se propageant de la sortie vers l'entrée du lien. La demande est donc choisie constante et égale à la valeur basse de l'échelon proposé en Figure 4.8a : 0.0729 veh/s.

### 4.2.3 Indicateurs pour la validation

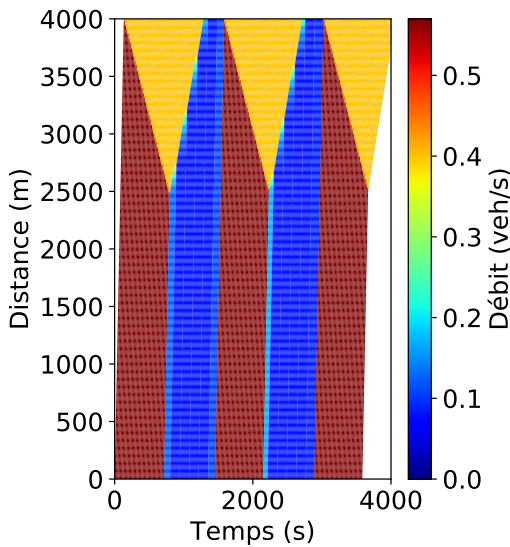
La validation s'effectue sur les scénarios présentés. Les résultats sont analysés au regard de deux indicateurs pour permettre une estimation de la performance de la méthode d'assimilation de données développée.



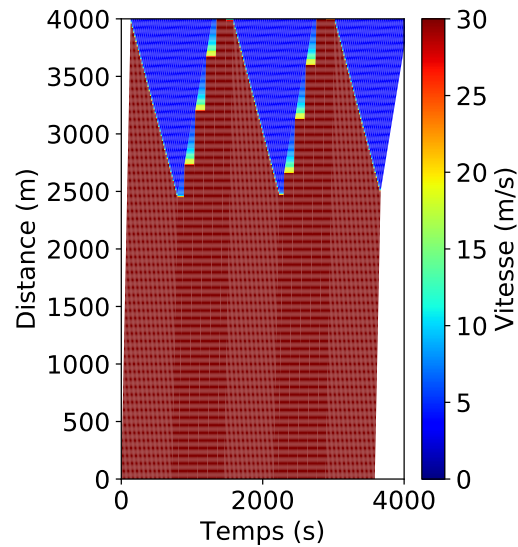
(a) Chroniques de demande et de capacité



(b) Indices des véhicules en fonction du temps



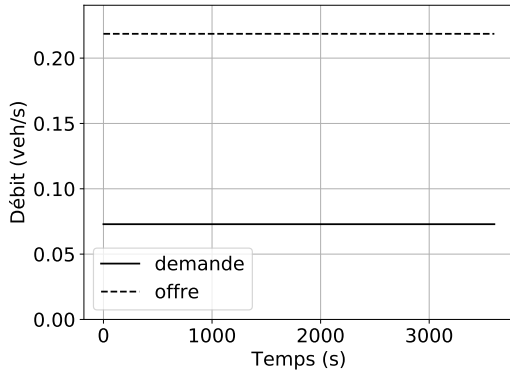
(c) Diagramme XT du débit



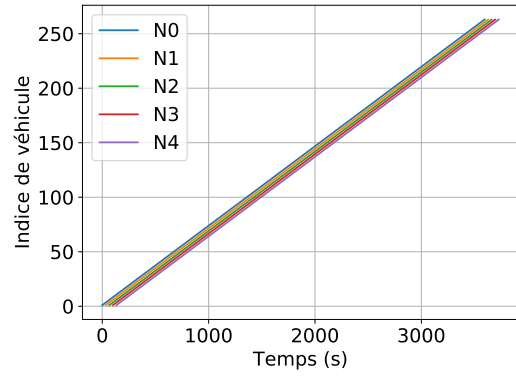
(d) Diagramme XT de la vitesse

Fig. 4.9.: Graphiques du scénario (S.1)

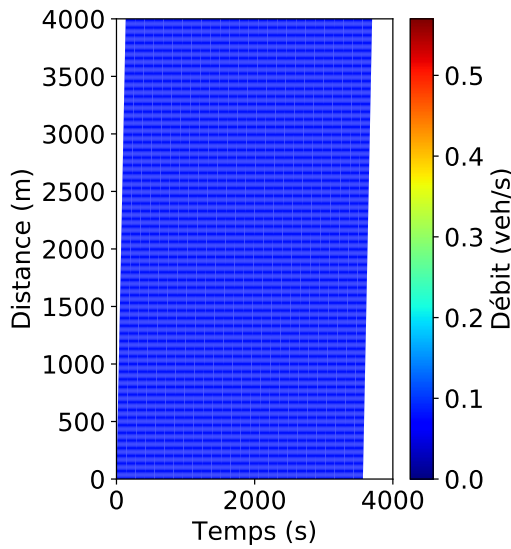
Les Courbes de Véhicules Cumulées (CVC) représentent les indices des véhicules en fonction du temps. Une CVC correspond aux temps de passage des véhicules à un emplacement donné. Ces emplacements sont généralement choisis de manière stratégique comme les points de discontinuité du réseau. Les CVC aident à la visualisation des variations des débits de véhicules au fil du temps et à la propagation des ondes de congestion sur le réseau lorsque la congestion atteint les points de calcul de la CVC. Le deuxième indicateur est l'indicateur de temps de parcours. Les temps de parcours sont calculés comme la différence des temps de passage des véhicules entre 2 points du réseau. Cet indicateur a déjà été expérimenté pour visualiser les résultats du GM-LS-LWR dans le chapitre 2. Les temps de parcours permettent de visualiser les durées de congestion et les chutes de vitesse moyenne sur le réseau. L'ensemble des méthodes développées dans les



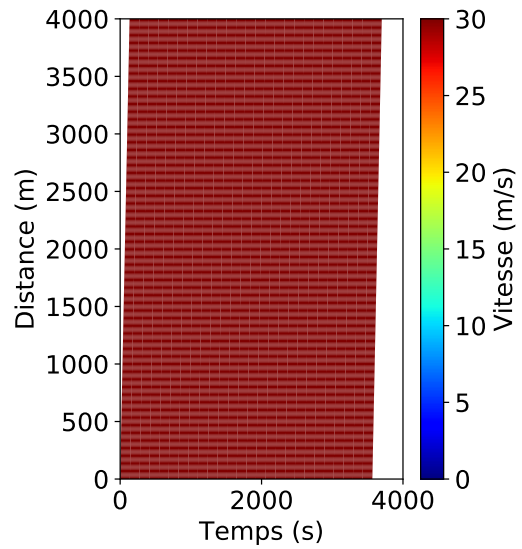
(a) Chroniques de demande et de capacité



(b) Indices des véhicules en fonction du temps



(c) Diagramme XT du débit



(d) Diagramme XT de la vitesse

Fig. 4.10.: Graphiques du scénario (S.2)

chapters précédents permet de proposer les temps de parcours et les erreurs de modèle associées.

## 4.3 Comparaison des méthodes

Cette section vise à choisir une méthode parmi les deux proposées. Les différents scénarios tests sont appliqués consécutivement aux deux méthodes.

### 4.3.1 Méthode (M.1)

#### 4.3.1.1 Scénario (S.1)

Pour le scénario (S.1) l'offre est volontairement surestimée (cf. Table 4.4). Le nœud d'observation est placé en début de dernier lien (à 3000m). L'attente en termes d'assimilation de données dans ce cas repose sur la propagation des états de trafic en amont du nœud d'observation. En effet, elle doit être cohérente avec le scénario *terrain*. Les résultats pour ce scénario sont illustrés en Figure 4.11.

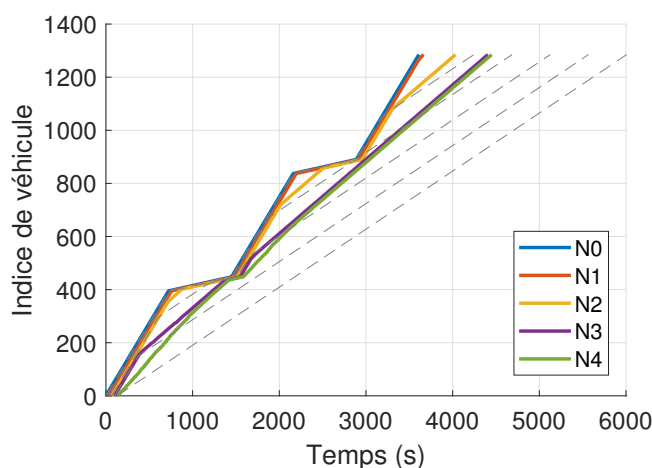


Fig. 4.11.: Test de la méthode de substitution sur le scénario S1.

On remarque que le graphique des courbes des indices de véhicules en fonction du temps est bien plus proche des courbes de (S.1) sans assimilation de données (cf. Figure 4.9b) que de la réalité terrain (cf. Figure 4.8b). Afin de proposer une comparaison dans le graphique, les courbes relatives au scénario de réalité terrain sont représentées directement sur le graphique en Figure 4.11 en pointillés. En conclusion, dans ce cas précis, la méthode proposée a peu d'influence sur les états de trafic. La correction des états de trafic dans le modèle est faible.

#### 4.3.1.2 Scénario (S.2)

Pour le scénario (S.2) la demande est volontairement sous-estimée (cf. Table 4.4). Le nœud d'observation est placé en fin de première partie du lien (à 1000m). L'attente en termes d'assimilation de données dans ce cas repose sur la propagation des états de trafic en aval du nœud d'observation. En effet, elle doit être cohérente avec le scénario *terrain*. Les résultats pour ce scénario sont illustrés en Figure 4.11.

Au nœud d'observation (courbe orange *N1*), des incohérences de modèles apparaissent. Des véhicules ne semblent pas respecter l'ordre dans lequel ils doivent arriver. Ces problèmes d'incohérences sont critiques pour la mise en place d'un schéma d'assimilation de

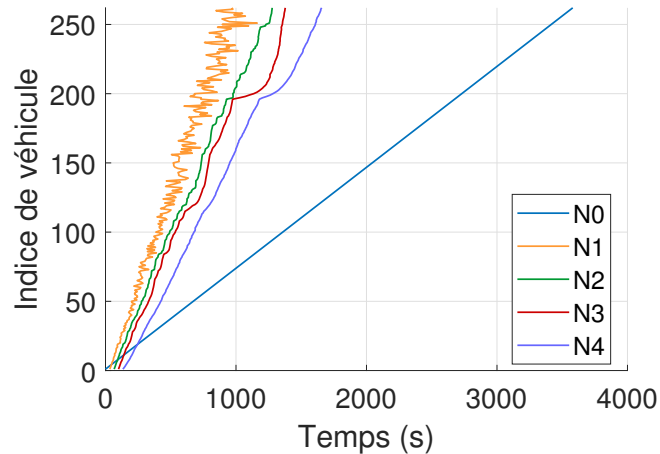


Fig. 4.12.: Test de la méthode de substitution sur le scénario S1.

données. En effet, il ne s'agit pas seulement d'une dérive comme on peut l'observer dans le scénario (S.1).

#### 4.3.1.3 Conclusions sur la méthode (M.1)

Au vu des résultats en simulation proposés, plusieurs observations peuvent être faites. Dans le scénario (S.2), des incohérences de modèles apparaissent. Il s'agit du bruit que l'on observe sur la courbe relative au nœud d'observation. Ces incohérences de modèles montrent que la méthode de mise à jour peut faire en sorte que des véhicules arrivent avant leurs prédécesseurs. Cette caractéristique n'est pas cohérente avec le modèle d'écoulement qui est régi par l'hypothèse *FIFO*<sup>2</sup>.

Cependant, dans le scénario (S.1) aucune incohérence de modèle n'est à soulever. Un tout autre type d'observation peut être fait. Les états de trafic ne sont que très peu corrigé par le modèle. Le schéma de congestion en résultant ne se rapproche pas de la réalité terrain. Devant ces observations, la motivation d'utiliser une autre méthode de mise à jour est réelle.

### 4.3.2 Méthode (M.2)

#### 4.3.2.1 Scénario (S.1)

Pour (S.1), la demande paramétrée dans le modèle dynamique est similaire à la vérité terrain. Cependant, l'offre est paramétrée de façon à ce qu'elle soit similaire à l'offre de la

2. *First In First Out* : premier entrant, premier sortant

vérité terrain. Ainsi, on attend du modèle une différence avec la vérité terrain à propos des conditions de trafic congestionnées.

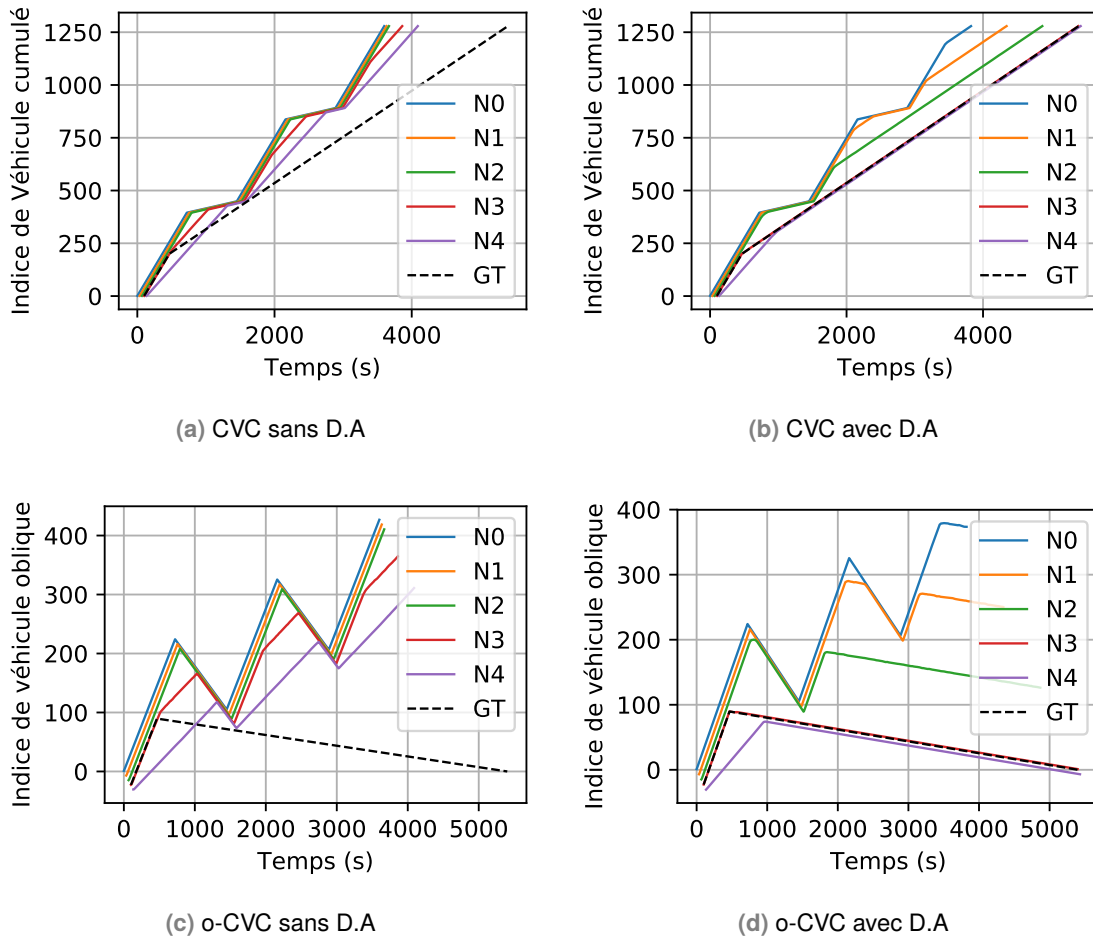


Fig. 4.13.: Comparaison en termes de courbes de véhicules cumulés [30]

Les courbes de véhicules cumulés pour les points internes du réseau sont illustrées en Figure 4.13a pour la simulation pure, sans assimilation de données. La Figure 4.13b représente les résultats pour la simulation avec assimilation de données. La simulation est paramétrée avec une capacité en sortie de réseau plus importante que pour la vérité terrain synthétique (voir Table 4.4). La première observation que l'on peut faire quant à la simulation sans assimilation de données est que la congestion semble moins importante que dans la simulation avec assimilation de données. En effet, sans assimilation de données, on observe 3 ondes de congestion distinctes atteignant  $N3$  (la courbe rouge) respectivement autour de  $t = 500s$ ,  $1950s$  et  $3300s$ . Cependant, les ondes de congestion n'atteignent pas  $N2$  vu que la CVC en ce point n'est que la CVC en  $N1$  translaturée du temps de parcours en conditions fluides. Dans la simulation avec assimilation de données, l'onde de congestion générée en  $N4$  remonte en  $N3$  vers  $450s$  et atteint l'entrée  $N0$  vers  $3500s$ . La CVC en  $N3$  correspond à la réalité terrain. Les CVC montrent que la méthode d'assimilation de données développée est capable de correctement estimer les temps de passage des véhicules au

point d'observation. De plus, les états de trafic qui en découlent sont correctement propagés vers les zones où les données ne sont pas disponibles. Cependant, il est important de noter que, dans ce scénario précis, le débit de véhicule est correctement propagé en aval du point d'observation mais le régime est incorrect. Cette remarque est faite en observant les écarts entre les CVC en  $N3$  et en  $N4$ . L'écart correspond au temps de parcours en situation fluide alors qu'en théorie l'ensemble du réseau entre ces deux points est congestionné. Cette observation a été remarquée dans les travaux de Duret et Yuan [44, 45].

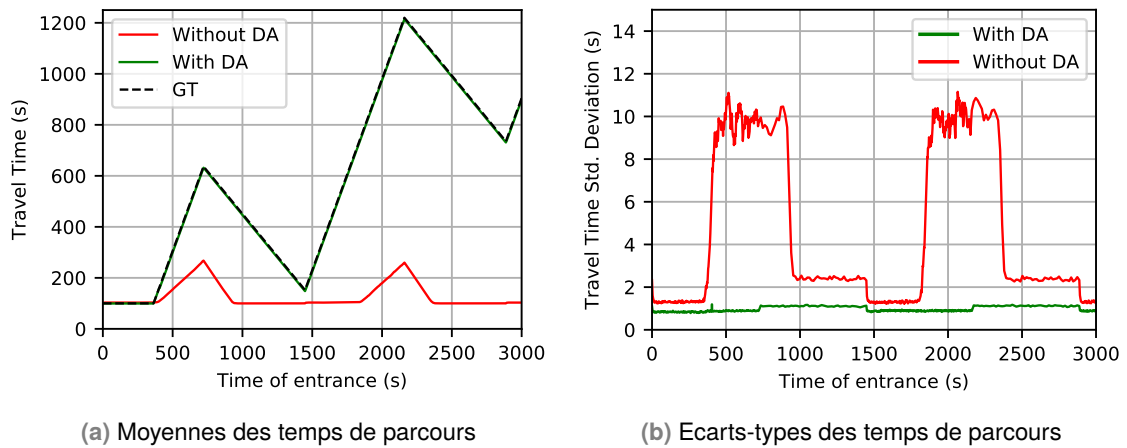


Fig. 4.14.: Comparaison en termes de temps de parcours [30]

Concernant les temps de parcours, au vu du fait que le processus d'assimilation de données ne permet pas de propager le régime au-delà de  $N3$ , l'analyse est faite seulement entre l'entrée  $N0$  et le point  $N3$ . La Figure 4.14a illustre la moyenne des temps de parcours entre l'entrée  $N0$  et le point  $N3$  pour la simulation sans assimilation de données (en rouge) et la simulation avec assimilation de données (en vert). La vérité terrain est représentée par la courbe en tirets noirs. Sans assimilation, on observe deux ondes de congestion entre 400s et 800s et entre 1300s et 2300s. Cependant, les temps de parcours et les retards sont sous-estimés comparés à la réalité terrain. Cette observation est cohérente avec l'analyse des CVC puisqu'un faible retard implique une onde de congestion de courte longueur. Les temps de parcours avec assimilation de données sont cohérents avec la réalité terrain. On en déduit que la correction des temps de passage au nœud d'observation permet l'estimation des temps de parcours en amont du nœud d'observation dans le cas où la demande est calée. La forme de la courbe implique que l'onde de congestion se résorbe à intervalles réguliers sans disparaître, cela accentue la dégradation des conditions de circulation. Dans la Figure 4.14b, les écarts-types des temps de parcours sont tracés en fonction du temps. Dans le scénario sans assimilation de données, les erreurs sont importantes lors des épisodes de congestion. Il est à noter que les erreurs propagées par la congestion sont très importantes. Elles sont 9 fois plus importantes qu'en situation fluide ce qui est cohérent avec les résultats précédents (cf. chapitre 2 et [29]). Avec assimilation de données, l'erreur sur les temps de parcours est réduite en raison du processus de fusion



de données. Cette observation montre que le résultat est cohérent avec ce qui est attendu dans le chapitre 3. La méthode d'assimilation de données permet d'améliorer la fiabilité de la connaissance des temps de parcours sur le réseau.

#### 4.3.2.2 Scénario (S.2)

Pour (S.2), l'offre paramétrée dans le modèle dynamique est similaire à la vérité terrain. Cependant, la demande est paramétrée de façon à ce qu'elle soit différente de la demande de la vérité terrain. Ainsi, on attend du modèle une différence avec la vérité terrain à propos des conditions en fluide et en congestion.

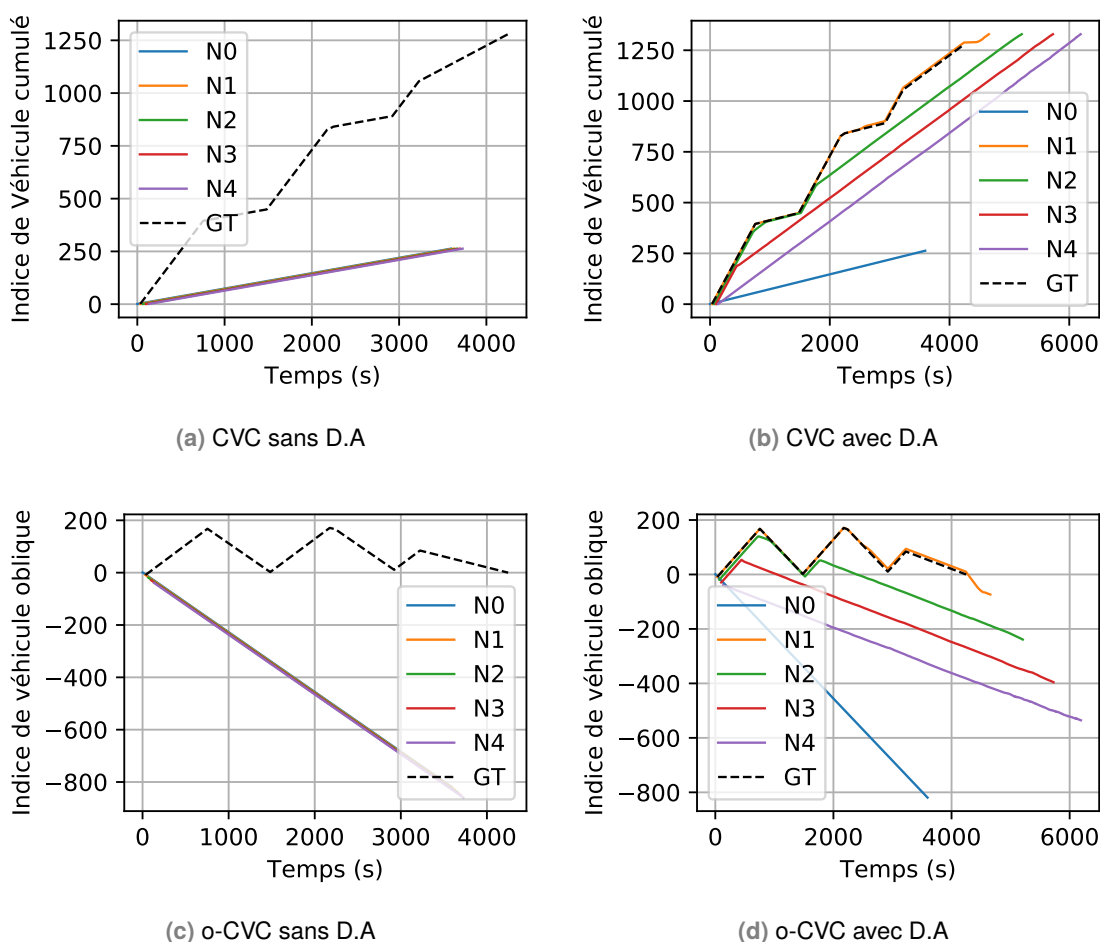


Fig. 4.15.: Comparaison en termes de courbes de véhicules cumulés [30]

Les CVC pour l'ensemble des points du lien sont illustrées en Figure 4.15a pour la pure simulation sans assimilation de données et en Figure 4.15b pour la simulation avec assimilation de données. Le scénario est paramétré afin que la demande soit inférieure à la demande de la vérité terrain synthétique. Dans la Figure 4.15a, les CVC ont un comportement croissant et monotone. Le décalage horizontal entre les CVC correspond au temps de parcours en

situation fluide. Ainsi, aucune congestion n'est simulée lorsque le modèle n'est pas enrichi de données capteurs. La vérité terrain est observée en  $N1$ . Dans la Figure 4.15b, deux observations importantes doivent être mentionnées. La première concerne le fait que la CVC au point d'observation  $N1$  correspond à la CVC de la vérité terrain. Cela signifie que la méthode d'assimilation de données permet d'estimer les temps de passage des véhicules au point d'observation. Deuxièmement, dans le scénario avec assimilation de données, les CVC aux points  $N1$  à  $N4$  sont caractéristiques de la propagation d'une congestion. On observe en effet une congestion se propageant de la sortie du réseau ( $N4$ ) vers l'entrée. Par contre, dans ce scénario, l'assimilation de données n'a aucune influence sur le point en amont du point d'observation car les états de trafic ne se propagent pas de l'aval vers l'amont depuis le noeud d'observation. Il s'agit d'une conséquence du caractère fluide du trafic.

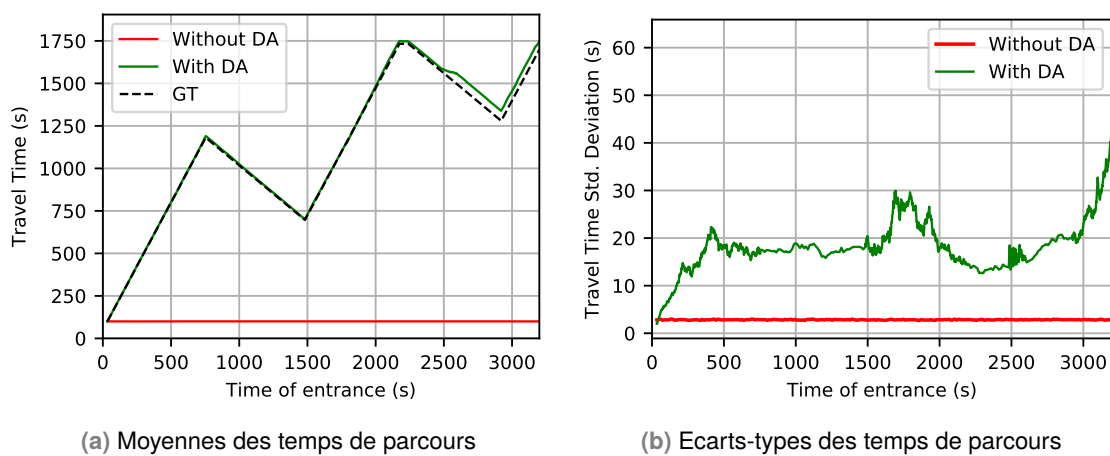


Fig. 4.16.: Comparaison en termes de temps de parcours [30]

Comme la méthode d'assimilation de données ne modifie pas le point  $N0$ , on analyse les temps de parcours entre les points  $N1$  et  $N4$ . On garde à l'esprit que la méthode d'assimilation de données n'est pas capable de correctement mettre à jour les états de trafic en amont du point d'observation dans ce scénario précis. La Figure 4.16a illustre les moyennes des temps de parcours entre les points  $N1$  et  $N4$ . Dans la simulation sans assimilation de données, les observations sont cohérentes avec les CVC. Le temps de parcours est constant et égal au temps de parcours en situation fluide ce qui dénote une absence de phénomène de congestion sur le réseau. Dans la simulation avec assimilation de données, les temps de parcours sont proches de la vérité terrain. Dans le cas où la demande n'est pas calée, l'assimilation de données permet donc de propager correctement les états de trafic en fluide et en congestion en amont du point d'observation. Concernant les écart-types des temps de parcours (cf. Figure 4.16b), la situation est différente comparée au scénario (S.1). Les ondes de congestion propagent plus d'erreurs de modèle que les ondes de trafic fluide comme démontré dans le chapitre 2. Ainsi, comme la simulation sans assimilation de données est complètement fluide, les erreurs simulées sont faibles. A l'inverse, la simulation

avec assimilation de données contient une propagation de congestion. Même si les erreurs de modèle sont réduites au point d'observation par le processus de fusion de données (cf. chapitre 3), les temps de passage aux points en aval souffrent d'erreurs de modèle importantes. Les temps de parcours souffrent, par conséquent, d'erreurs importantes. Il faut garder à l'esprit que l'erreur sur les temps de parcours dépend aussi en grande partie du paramétrage du modèle d'écoulement.

### 4.3.3 Choix d'une méthode de mise à jour

Ce chapitre propose plusieurs apports permettant de conclure sur la méthode de fusion de données développée. Dans un premier temps, la méthode de mise à jour du modèle est discutée au regard de l'intégration du processus de fusion de données et du modèle d'écoulement développé. Une deuxième méthode de mise à jour agissant aussi sur le nombre de véhicules par pas d'assimilation est proposée. Les deux méthodes ont été mises à l'épreuve dans un support synthétique.

Il est ressorti de cette expérience le fait qu'une mise à jour du modèle par simple actualisation des temps de passage *a priori* par les temps de passages *a posteriori* au point d'observation (M.1) entraîne des incohérences dans les sorties du modèles. A l'inverse, les résultats montrent que la méthode (M.2) est tout indiquée pour caler les conditions internes du modèle en cas de conditions aux bornes non calées. En effet, les schémas de congestion sont correctement propagés le long du réseau. C'est donc la méthode (M.2) qui ressort largement au dessus de son *alter ego* dont la simplicité ne permettait pas de garder une cohérence dans le modèle d'écoulement.

## 4.4 Conclusions du chapitre

### Contributions

Ce chapitre représente la deuxième partie de la thèse consacrée à l'assimilation de données. Avec les considérations évoquées ici, le schéma d'assimilation est bouclé et auto-consistant dans le contexte associé aux hypothèses prises tout au long des travaux menés. La principale contribution de ce chapitre est dans l'adaptation d'une méthode de mise à jour de modèles permettant une cohérence le modèle d'écoulement conçu précédemment. En effet, la première méthode de mise à jour du modèle est soit insuffisante dans le cas d'une offre non calée, soit initiatrice d'incohérences dans le modèle d'écoulement pour une demande non calée.

La méthode développée possède des avantages considérables quant aux objectifs fixés dans le chapitre introductif. En effet, la méthode en entier permet de répondre aux critères suivants :

- Rapidité : la méthode développée reste compatible avec le temps réel dans les scénarios étudiés.
- Prise en compte des incertitudes : le modèle d'écoulement développé permet de satisfaire ce critère.
- Réactivité : la boucle d'assimilation de données dans son ensemble permet de prendre en compte les états de trafic captés sur le terrain.

De plus, d'un point plus recentré sur la méthode d'assimilation de données, elle permet d'estimer des états de trafic aux emplacements où des données ne sont pas captées. Elle permet aussi de réduire les incertitudes sur les sorties du modèle d'écoulement en augmentant la précision des états de trafic au point d'observation. Dans les scénarios (S.1) et (S.2) la méthode est concluante quant aux indicateurs proposés. Les limites de la méthodes font l'objet d'une section dédiée en conclusion de la thèse.

#### Quid des paramètres du diagramme fondamental ?

Les scénarios (S.1) et (S.2) présupposent que les paramètres du diagramme fondamental sont correctement calés. La question que l'on se pose à présent est la suivante : Que se passe-t-il si les paramètres du diagramme fondamental ne sont pas calés ? Afin de répondre à cette question, il faut revoir les formules régissant le modèles d'écoulement telles qu'elles sont présentées dans les parties précédentes du manuscrit. On rappelle ainsi la formule de propagation en fluide en mettant en avant les variables et paramètres sujets à erreurs :

$$\mathbf{T}^D(n, x) = T(n, x - \Delta x) + \frac{\Delta x}{\mathbf{u}} \quad (4.6)$$

ainsi que la formulation du terme d'offre régissant la propagation des véhicules en congestion :

$$\mathbf{T}^O(n, x) = T(n - \mathbf{k}_x \Delta x, x + \Delta x) + \frac{\Delta x}{\mathbf{w}}. \quad (4.7)$$

Respectivement dans les équations 4.6 et 4.7 les temps de passages aux bornes amont et aval sont sujets à des incertitudes. Ces problèmes sont réglés dans les scénarios (S.1) et (S.2) puisque le calage des conditions aux bornes permet le calage des conditions internes de proche en proche. Cependant, les variables  $u$ ,  $w$  et  $k_x$  sont aussi sujets à des incertitudes. Ces variables sont des paramètres de l'écoulement des véhicules à l'intérieur des liens, ils régissent la dynamique du flux entre les différents nœuds. L'assimilation de données permet le calage ponctuel des temps de passage au nœud d'observation, cependant la dynamique des liens est laissée pour compte. Ainsi, le calage des conditions internes de proche en proche ne peut se faire puisque la dynamique du modèle est faussée.

La Figure 4.17 présente une version schématique des considérations citées. Dans la partie haute du schéma, la situation sans assimilation est présentée. Sans surprises, aucune condition interne n'est calée et la dynamique du lien est fausse. Dans la partie du milieu, le calage des conditions internes est réalisé par le schéma d'assimilation de données. Dans cette situation, les temps de passage sont calés au nœud d'observation ("OK" vert), mais le calage des conditions internes ne peut passer de proche en proche vers les nœuds aval et amont (croix rouges). La dernière partie présente la situation si les paramètres du diagramme fondamental sont calés, l'ensemble des conditions internes sont calées.

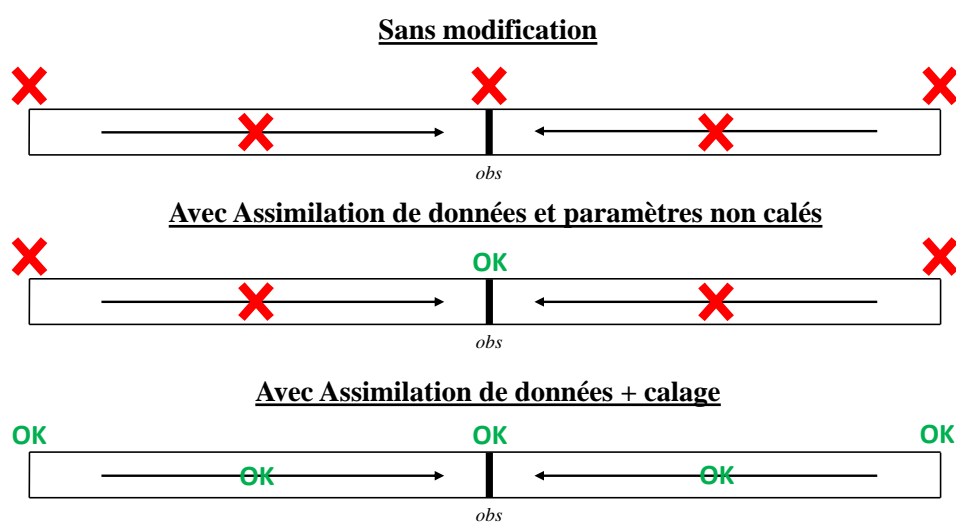


Fig. 4.17.: Schéma rendant compte de l'avantage du calage des paramètres

Lorsque les paramètres du diagramme fondamental ne correspondent pas à la réalité terrain, la méthode d'assimilation ne peut convenablement propager les états de trafic même lorsque les conditions aux bornes sont correctement calées. Deux propositions s'imposent donc :

- multiplier les nœuds d'observation ;
- caler les paramètres du diagramme fondamental.

La première proposition encourage la multiplication des nœuds d'observation. Cette proposition a l'avantage de ne pas avoir à proposer de calage des paramètres. Cependant, l'intérêt de proposer une méthode modèle-centrée où les paramètres sont continuellement faux est faible. La plus-value sur les méthodes données-centrées n'existe plus. Cette conclusion encourage la recherche de méthodes de calage en ligne des paramètres du diagramme fondamental. L'objectif en découlant est de proposer des pistes de recherche d'une méthode

d'assimilation et de calage combinés permettant l'estimation des conditions de trafic sur l'ensemble du lien en toutes circonstances.



# Calage en ligne du diagramme fondamental

En introduction, quatre caractéristiques désirables ont été évoquées pour les systèmes d'aide à la gestion du trafic au quotidien. Ces caractéristiques sont : la rapidité, la fiabilité, la réactivité et l'adaptabilité. Pour une définition des indicateurs, le lecteur peut se référer au Chapitre 1 ou au glossaire en Annexe A. Alors que les caractéristiques de rapidité et de fiabilité sont traitées dans le Chapitre 2, les Chapitres 3 et 4 proposent de traiter la réactivité par le développement d'un schéma d'assimilation séquentiel. Ce présent chapitre propose d'étudier la problématique de l'adaptabilité.

## 5.1 Rappels et motivations

L'adaptabilité, dans le contexte de la thèse, est définie comme la capacité de la méthode à évoluer en fonction des situations de trafic observées. Cet enjeu est fondamental pour la prise en compte des aléas ou des situations non récurrentes dégradant les conditions de circulation. Ces situations sont diverses et peuvent être aléatoires comme la météorologie ou les accidents. Elles peuvent aussi être planifiées, comme des chantiers temporaires par exemple. L'enjeu d'adaptabilité permet d'enrichir le processus de calage global du modèle par des recalages en ligne des paramètres. De plus, il permet d'obtenir l'évolution des paramètres du modèle en temps réel.

Les chapitres précédents s'inscrivent dans une volonté de développer un schéma d'assimilation de données fondé sur un modèle d'écoulement Lagrangien-Spatial prenant en compte les erreurs de modèles. Ce dernier chapitre est une ouverture sur des possibilités de résolution des problèmes soulevés dans la conclusion du Chapitre 4 que l'on rappelle ici. La méthode d'assimilation de données développée permet de :

- propager les erreurs des paramètres vers les sorties du modèle que sont les temps de passages des véhicules ;
- caler les conditions internes du modèle à chacun des points d'observation.

En revanche, la méthode ne permet pas le calage de la dynamique du modèle, lorsque les paramètres régissant la dynamique du modèle ne sont pas calés.

En effet, les scénarios précédents ont montré que lorsque les paramètres du diagramme fondamental ne sont pas calés, les états de trafic ne se propagent pas en cohérence avec



ce qui est observé dans la réalité. Les paramètres du diagramme fondamental n'ont pas la même influence que les conditions internes du modèle. Caler ponctuellement les conditions internes seulement ne permet pas d'estimer la dynamique interne des liens, de propager les conditions de trafic et donc d'estimer l'ensemble des conditions internes. La Figure 4.17 schématise ces considérations.

Les motivations de ce chapitre sont donc multiples. D'un côté, les motivations liées à la gestion de trafic au quotidien nous incitent à développer une méthode permettant de proposer une meilleure adaptabilité du modèle d'écoulement. De l'autre côté, les travaux précédents ont montré l'insuffisance du calage des conditions internes par la méthode d'assimilation de données. L'objectif du chapitre est de proposer une ouverture sur des perspectives de calage des paramètres du modèle d'écoulement et sur les applications qui en découlent.

Le chapitre s'articule autour des sections suivantes. La section 5.2 présente deux méthodes possibles pour le calage des paramètres du modèle. La première méthode est l'augmentation du vecteur d'état. La seconde méthode est l'utilisation de processus d'optimisation. La section 5.3 propose des perspectives de travaux réalisés dans cette thèse avec trois volets relatifs à des sujets d'approfondissement.

## 5.2 Méthodes de calage des paramètres

La littérature propose plusieurs types de méthodes pour le calage des paramètres d'un modèle de façon dynamique. Dans cette section nous avons choisi de présenter et analyser les possibilités de calage de paramètres offertes par la littérature et les travaux précédents. Nous citons 3 types de méthodes :

- augmentation du vecteur d'état : l'opportunité est offerte par le schéma d'assimilation de données développé en Chapitre 3 et 4. La section 5.2.1 analyse la possibilité de caler le modèle grâce à ce type de méthode.
- méthodes d'optimisation : elles représentent les méthodes les plus populaires pour le calage de modèles dynamiques. La section 5.2.2 présente ces méthodes et analyse les opportunités et les craintes liées à ces méthodes dans le contexte établi par les travaux de thèse.
- méthodes de calage bayésienne : elles reposent sur un processus d'inférence bayésienne, comme pour l'assimilation de données. Cependant, l'utilisation de telles méthodes demande un travail conséquent pour la conception du modèle inverse. De plus, le modèle conçu dans le Chapitre 2 contient diverses étapes d'approximation (méthode de perturbation) et de processus d'optimisation (algorithme EM). Le GM-LS-LWR ne peut donc être inversé en l'état. Des travaux supplémentaires sont nécessaires pour inverser le modèle LS-LWR en repartant de la base des formulations

déterministes établies [72]. En conséquence, nous n'aborderons pas les méthodes de calage bayésiennes dans ce chapitre.

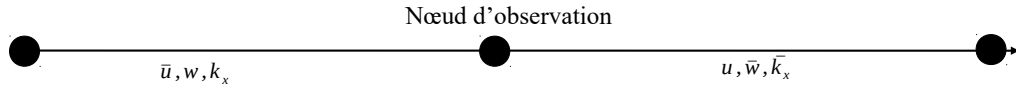


Fig. 5.1.: Concept du calage rapide par apprentissage du processus d'optimisation

Une considération indépendante de la méthode de calage est la détermination des paramètres à caler en fonction de la position relative du lien par rapport au nœud d'observation. D'après les formulations du modèle d'écoulement, la vitesse fluide  $u$  influence le temps de passage aval et l'ensemble de deux paramètres  $w$  et  $k_x$  influence le temps de passage amont. Ainsi, le temps de passage au nœud d'observation influence la vitesse fluide du lien en amont et les deux autres paramètres du lien en aval. La Figure 5.1 schématise ces considérations. Soit  $\bar{p}$  l'ensemble des paramètres ciblés par la méthode de calage :  $\bar{p} = \{\bar{u}\}$  en amont et  $\bar{p} = \{\bar{w}, \bar{k}_x\}$  en aval. Si l'hypothèse d'homogénéité des paramètres du diagramme fondamental sur la totalité du lien est respectée, l'ensemble du diagramme fondamental est alors calé grâce aux processus sur les deux sous-liens amont et aval.

### 5.2.1 Technique d'augmentation du vecteur d'état

L'augmentation du vecteur d'état vise à intégrer les paramètres du modèle dans le vecteur d'état du système pour les estimer simultanément avec l'état du système. Dans les formulations multi-variables énoncées dans le Chapitre 3 [109], l'état du modèle est décrit par un vecteur de plusieurs variables qui est défini par bloc :

$$\beta^{(j),f} = \begin{bmatrix} \mu_{Tf}^{(j)} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad \text{où } \mathbf{V} \in \mathcal{M}_{card(\bar{p}) \times 1}(\mathbb{R}) \quad (5.1)$$

où  $\mu_{Tf}^{(j)}$  est la moyenne de la composante  $j$  de l'état *a priori* et  $\mathbf{V}$  correspond au bloc vecteur de l'état des paramètres du modèle écoulement. Il est des moyennes des paramètres considérés. Ce bloc vecteur est de dimension  $1 \times 1$  quand il décrit la vitesse fluide  $u$  et de dimension  $2 \times 1$  quand il décrit  $w$  et  $k_x$ . Le vecteur d'observation ne change pas :

$$\mathbf{y} = [\mu_{T^o}] \quad (5.2)$$

tout comme la matrice de variance-covariance des observations :

$$\mathbf{R} = [\sigma_{T^o}] \quad (5.3)$$

La matrice de l'opérateur d'observation est donc :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \quad \text{où } \mathbf{Z} \in \mathcal{M}_{1 \times \text{card}(\bar{p})}(\mathbb{R}) \quad (5.4)$$

Où  $\sigma_{Tf}^{(j)}$  est l'écart type de la composante  $j$  de l'état *a priori* et  $\mathbf{Z}$  est le vecteur nul de dimension  $1 \times 1$  quand on cherche à caler  $u$  et  $1 \times 2$  lorsque  $w$  et  $k_x$  sont les paramètres à caler. Ainsi on obtient la formulation de l'équation d'observation :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\beta + \mathbf{R} \quad (5.5)$$

### 5.2.1.1 Cas de covariances non nulles

Deux cas doivent être distingués par les régimes de circulation observés afin de caler les paramètres fluides ou congestionnés du diagramme fondamental.

#### Calage de la vitesse fluide $u$

Lorsque le régime observé est fluide, la formulation du modèle LWR prévoit que les paramètres fluides du diagramme fondamental du lien amont intervient dans le calcul du temps de passage au nœud d'observation. En conséquence, la composante  $j$  de la matrice de variance-covariance  $\mathbf{P}^{(j)}$  multi-composante est une matrice  $2 \times 2$  dont les cellules sont définies dans l'équation suivante :

$$\mathbf{P}^{(j)} = \begin{bmatrix} \sigma_{Tf}^{(j)} & c \\ c & \sigma_u^{(j)} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

où  $c$  désigne la valeur de la  $j$ ème composante de la covariance entre le temps de passage *a priori* et la vitesse fluide  $u$ . Le calcul de la  $j$ ème composante du gain de Kalman connaissant les variances des états *a priori* et observé est décrit dans le Chapitre 3 et rappelé dans l'équation suivante :

$$\mathbf{K}^{(j)} = \begin{bmatrix} \frac{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2}{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2 + (\sigma_{To}^{(j)})^2} \\ \frac{c}{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2 + (\sigma_{To}^{(j)})^2} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

L'innovation est définie comme le changement du vecteur d'état entre son état *a priori* et *a posteriori*. De manière synthétique, sa  $j$ ème composante est définie dans l'équation suivante :

$$\epsilon^{(j)} = \beta^{(j),a} - \beta^{(j),f} = \mathbf{K}^{(j)} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\beta^{(j),f}) \quad (5.8)$$

Et d'un point de vue matriciel :

$$\epsilon^{(j)} = \begin{bmatrix} \frac{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2}{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2 + (\sigma_{To}^{(j)})^2} (\mu_{To}^{(j)} - \mu_{Tf}^{(j)}) \\ \frac{c}{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2 + (\sigma_{To}^{(j)})^2} (\mu_{To}^{(j)} - \mu_{Tf}^{(j)}) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

### Calage de la vitesse maximale de remontée de congestion $w$ et de la concentration maximale $k_x$

Lorsque le régime est congestionné, les paramètres intervenant sont  $w$  et  $k_x$  du diagramme fondamental en aval du nœud d'observation. En suivant le même raisonnement que précédemment (cf. (5.6), (5.7) et (5.9)), on obtient la matrice de variance-covariance 3x3 suivante :

$$\mathbf{P}^{(j)} = \begin{bmatrix} \sigma_{Tf}^{(j)} & c & c'' \\ c & \sigma_w^{(j)} & c' \\ c'' & c' & \sigma_{k_x}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

où  $c$  désigne la valeur de la  $j$ ème composante de la covariance entre le temps de passage *a priori* et la vitesse maximale de remontée de congestion  $w$ .  $c''$  désigne la valeur de la  $j$ ème composante de la covariance entre le temps de passage *a priori* et la vitesse maximale de remontée de congestion  $k_x$ . Enfin,  $c'$  désigne la  $j$ ème composante de la covariance entre  $w$  et  $k_x$ . La  $j$ ème composante du gain de Kalman devient :

$$\mathbf{K}^{(j)} = \begin{bmatrix} \frac{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2}{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2 + (\sigma_{To}^{(j)})^2} \\ \frac{c}{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2 + (\sigma_{To}^{(j)})^2} \\ \frac{c''}{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2 + (\sigma_{To}^{(j)})^2} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Et enfin la  $j$ ème composante de l'innovation :

$$\epsilon^{(j)} = \begin{bmatrix} \frac{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2}{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2 + (\sigma_{To}^{(j)})^2} (\mu_{To}^{(j)} - \mu_{Tf}^{(j)}) \\ \frac{c}{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2 + (\sigma_{To}^{(j)})^2} (\mu_{To}^{(j)} - \mu_{Tf}^{(j)}) \\ \frac{c''}{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2 + (\sigma_{To}^{(j)})^2} (\mu_{To}^{(j)} - \mu_{Tf}^{(j)}) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

#### 5.2.1.2 Problème de covariance

Lorsque les variables et paramètres du système sont tous indépendants, ce qui représente une des hypothèses du modèle d'écoulement développé dans le chapitre 2, les termes  $c$

(pour le calage de  $u$ ) et  $(c, c', c'')$  (pour le calage de  $w$  et  $k_x$ ) de la matrice de covariance sont tous nuls. Considérons le cas le plus simple qui ne fait intervenir qu'un paramètre de diagramme fondamental : le cas fluide. Dans le gain de Kalman, l'indépendance des variables se traduit de la manière suivante :

$$\mathbf{K}^{(j)} = \begin{bmatrix} \frac{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2}{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2 + (\sigma_{To}^{(j)})^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Soit pour l'innovation :

$$\epsilon^{(j)} = \begin{bmatrix} \frac{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2}{(\sigma_{Tf}^{(j)})^2 + (\sigma_{To}^{(j)})^2} (\mu_{To}^{(j)} - \mu_{Tf}^{(j)}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

On remarque ici qu'il n'y a pas d'innovation sur le paramètre à caler.

### 5.2.1.3 Conclusions quant à la méthode

L'indépendance des variables telle qu'elle est considérée depuis le Chapitre 2 ne permet pas d'apporter de l'information sur les paramètres du modèle d'écoulement par une technique d'augmentation du vecteur d'état. De plus, cette hypothèse a permis de simplifier grandement les calculs effectués dans la totalité des travaux menés. La question qu'il est légitime de poser à ce stade est celle de la possibilité de relaxer cette hypothèse. Dans le modèle d'écoulement, des termes de covariances interviendraient dans les formulations proposées, reposant sur une méthode de perturbation multi-composantes. Pour plus de détails quant aux formulations du modèle d'écoulement et se rendre compte de l'importance de l'hypothèse d'indépendance des variables, il faut se référer au Chapitre 2. Les risques majeurs associés à la levée de l'indépendance des variables peuvent être décrits en deux points :

- complexification des formulations proposées ;
- difficultés d'estimation précises des termes de covariances dans les formulations et dans les observations.

Enfin, même si des travaux proposent d'estimer de manière empirique la distribution des paramètres du diagramme fondamental, l'estimation des covariances des paramètres du diagramme fondamental ne semble pas être présente dans la littérature. En conclusion, le calage en ligne des paramètres du diagramme fondamental par augmentation du vecteur d'état est possible mais demande des travaux de recherche complémentaires. La prise en compte des covariances complexifiera grandement la formulation de l'écoulement.

## 5.2.2 Processus d'optimisation

La littérature présente de nombreuses applications de calage de simulateur microscopique par des méthodes d'optimisation. Une vue d'ensemble du calage de simulateur microscopique à l'aide de telles méthodes est disponible dans [129]. Il est décrit comme un processus itératif faisant appel à plusieurs étapes. Le schéma de concept d'un processus d'optimisation est décrit dans la figure 5.2.

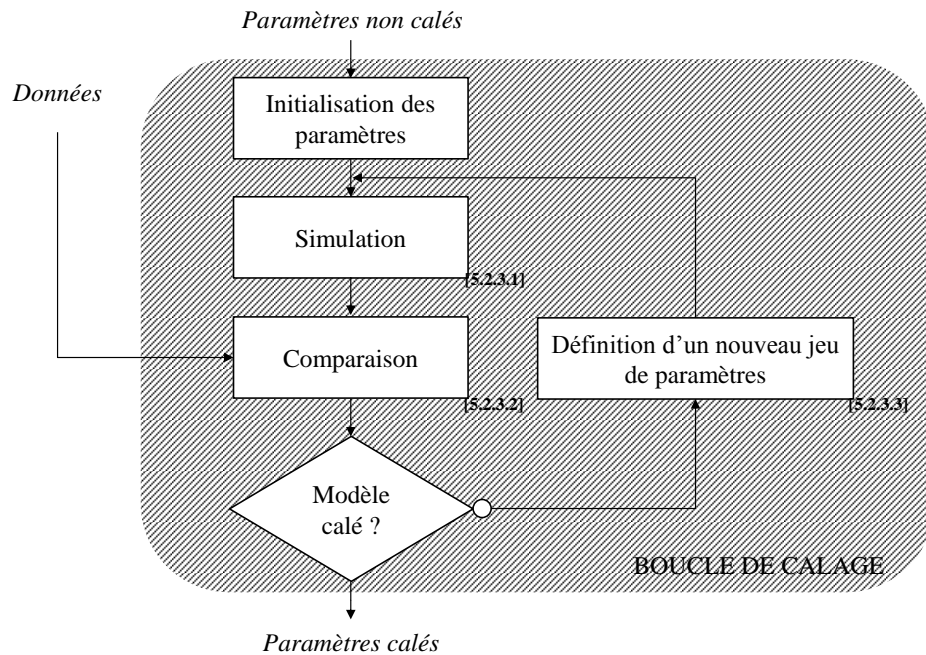


Fig. 5.2.: Schéma d'un processus de calage par optimisation

Les méthodes d'optimisation sont itératives, et la première itération considère un jeu initial de paramètres, *a priori* non calés. Une itération est lancée, et elle consiste à lancer une simulation afin d'obtenir les variables de sortie du modèle. Le processus de simulation et le choix de la mesure de performance sont décrits en section 5.2.2.1. Ensuite, les observations des conditions de circulation réelles sont considérées et comparées aux variables de sortie du modèle, grâce à un indicateur de qualité d'ajustement appelé aussi *GoF*. La définition et les propriétés requises pour celui-ci sont discutées en section 5.2.2.2. Le jeu de paramètres qui le minimise (ou le maximise) se substitue au jeu de paramètres initial, puis une nouvelle itération est lancée. Lorsque le processus d'optimisation converge, alors les paramètres sont considérés comme calés. Les règles de convergence décrites par la brique de condition "Modèle calé ?" dans la Figure 5.2 sont multiples. Elles dépendent du design des autres briques et de la connaissance du système à caler. En conséquence, nous ne décrivons pas les règles de convergence. Il est à noter, néanmoins, que la rigueur demandée quant à la convergence de la méthode influera largement sur le nombre d'itérations et donc le temps

de calcul. Le processus d'optimisation peut demander des temps de calculs importants si le nombre de paramètres à caler est grand et si la règle de convergence est stricte. Pour réduire le nombre d'itérations, il est intéressant de parcourir l'espace des paramètres de manière judicieuse via une méta-heuristique.

La section 5.2.2.3 est consacrée aux algorithmes d'accélération.

### 5.2.2.1 Mesure de performance

La mesure de performance (en anglais *Measure of Performance* soit *MoP*) correspond à la variable sur laquelle le calage se base. Il s'agit de la variable qui est directement confrontée aux observations des capteurs. Il existe autant de *MoP* qu'il existe de variables pour représenter le trafic. En conséquence, nous ne proposons pas une liste exhaustive de *MoP* mais nous nous attacherons à décrire certaines variables intéressantes dans le contexte de la thèse parce que disponibles grâce au modèle d'écoulement développé. La disponibilité en termes de sortie de modèle n'est pas le seul critère de choix pour le *MoP*. Il faut aussi que la mesure de performance soit compatible avec les moyens de récolte sur le terrain.

Une discussion des variables disponibles à partir du modèle d'écoulement développé en Chapitre 2 s'impose. La sortie directe du modèle d'écoulement utilisé est caractérisée par les temps de passage aux nœuds définis sur le réseau. Ce type de variables est utilisé dans l'assimilation de données. D'un point de vue capteurs, ces données sont disponibles à partir de capteurs de type lagrangien-spatial comme les capteurs Bluetooth ou LAPI. Les boucles électromagnétiques peuvent aussi donner des données de temps de passage non-agrégés (cf. hypothèses du Chapitre 3). A partir des sorties du modèle, nous avons produit d'autres types de variables en fin de Chapitre 2. Les temps de parcours sur le lien peuvent représenter une mesure de performance dans le contexte de la thèse. Ils sont calculés directement comme la différence entre les temps de passage des véhicules à plusieurs endroits. Dans un tel cadre, les capteurs nécessaires pour des mesures de temps de parcours se rejoignent avec ceux nécessaires au recueil des temps de passage.

Concernant des indicateurs agrégés, les travaux dans le Chapitre 2 nous ont permis d'établir une méthode de calcul des débits, concentration et vitesse agrégés dans le plan de l'espace et du temps. Les capteurs permettant de calculer les indicateurs agrégés sont les boucles électromagnétiques pour les variables agrégées au niveau du capteur. Le taux de pénétration des capteurs types GPS ne permet pas de calculer les variables agrégées sur l'ensemble du lien. De plus, le modèle GM-LS-LWR ne permet pas de reconstituer des trajectoires complètes qui pourraient être comparées aux mesures lagrangiennes-temporelles des capteurs GPS.

D'autres mesures de performances peuvent être déduites des différentes variables disponibles à partir du modèle d'écoulement. Elles ont fait l'objet de travaux relatifs au calage. On peut citer les courbes de véhicules cumulées [12], les taux de dépassement [22] ou encore la trajectoire d'une onde de congestion [28]. La pluralité de *MoP* disponibles ou concevables permet la construction d'une grande quantité de méthodes d'optimisation différentes. Des indicateurs de la qualité de l'ajustement sont aussi très nombreux.

Concernant des pistes de recherche quant au calage des paramètres dans le cadre des recherches proposées, nous préconisons de commencer les recherches du côté des mesures de performances telles que les temps de parcours ou les courbes de véhicules cumulées. Néanmoins, l'utilisation d'autres types de données, si elles sont disponibles, pourra enrichir la qualité du calage.

### 5.2.2.2 Indicateur de qualité de l'ajustement

L'indicateur de qualité de l'ajustement est appelé *Goodness of Fit (GoF)* dans la littérature. Il s'agit d'une fonction-objectif donnant une indication de la différence entre les *MoP* issues du modèle et les *MoP* issues des données. Cette différence prend la forme d'une somme pondérée des erreurs entre le modèle et les données. Il existe de nombreux *GoF* possédant chacun ses points forts et ses faiblesses. Pour une analyse détaillée des différents *GoF*, le lecteur peut se reporter à [26, 35]. Nous allons cependant tenter d'esquisser des orientations de recherche en explicitant les qualités recherchées pour les *GoF*.

- Certains *GoF* proposent de ne pas prendre en compte les signes des différents termes de la somme pondérée. Cette considération permet d'obtenir une somme positive dont le minimum théorique est 0. Un *GoF* possédant cette caractéristique doit être préféré pour une optimisation.
- Certains *GoF* comme le RMSE (*Root Mean Square Error*) proposent d'élever les termes composant la somme au carré. Cette opération permet à la fois d'assurer la positivité de l'indicateur et d'accentuer les erreurs de grande ampleur.

Il est à noter que les *GoF* peuvent être modifiés en fonction du cadre d'étude. En effet dans [28] un RMSE modifié est utilisé en appliquant un facteur afin de discriminer certains termes dans la somme pondérée. Dans le cas où le *GoF* possède les propriétés citées, le problème d'optimisation est un problème de minimisation :

$$\Gamma_{opti} = \operatorname{argmin}_{\{\Gamma\}} [GoF(MoP_{mod}(\Gamma), MoP_{data})] \quad (5.15)$$

où  $\Gamma$  désigne un vecteur de paramètre,  $MoP_{mod}(\Gamma)$  les points issus du modèle pour ce jeu de données et  $MoP_{data}$  les points issus des données captées.

La Figure 5.3 présente un exemple de surface représentative sur un espace à 2 paramètres. Cette surface est issue de précédents travaux sur le calage hors-ligne du diagramme



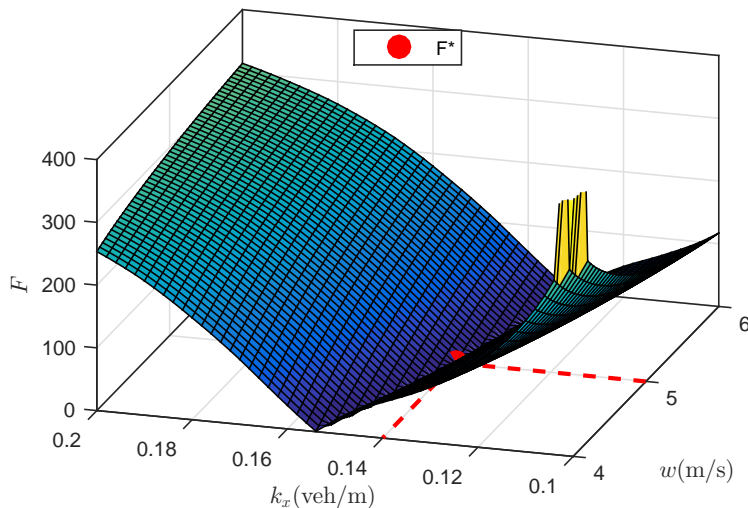


Fig. 5.3.: Exemple de  $GoF$  obtenu pour une optimisation sur 2 paramètres - Source : [28]

fondamental à l'aide de données issues de stations de comptage et GPS [28]. Il s'agit d'un exemple d'utilisation de méthode d'optimisation. Cette nappe présente une caractéristique avantageuse que toutes les applications ne présentent pas. En effet, la fonction semble ne présenter qu'un seul minimum sur l'ensemble des paramètres. Cependant, le tracé de la nappe entière, intéressant d'un point de vue pédagogique, nécessite le calcul du  $GoF$  dans tout l'espace des paramètres et nécessite donc un grand nombre d'itérations de la boucle d'optimisation (cf. Figure 5.2). Il existe un nombre considérable de méthodes permettant d'accélérer le processus.

### 5.2.2.3 Méthodes d'accélération

Lorsque le nombre de paramètres est limité et que l'espace de recherche des valeurs l'est tout autant, l'estimation du  $GoF$  pour tout l'espace des paramètres peut être réalisée. Par contre, lorsque le nombre de paramètres augmente, le temps de calcul devient exponentielle. Ainsi, il faut réfléchir à une méthode d'accélération permettant l'exploration de l'espace des paramètres de manière judicieuse et efficace. La méthode d'accélération par descente de gradient offre lorsque l'indicateur peut être dérivé ou lorsqu'un hyperespace tangent peut être estimé. Des méthodes de recherches stochastiques peuvent donc s'appliquer en alternative aux méthodes de recherche déterministes.

Pour une exploration stochastique mais efficace de l'espace des paramètres, les méta-heuristiques (MH) ont prouvé leur efficacité [129, 27, 117, 57]. Faire un inventaire complet des méta-heuristiques ici serait long et représenterait peu de plus-value sans travaux poussés permettant de les classer dans le contexte du calage de paramètres du diagramme fondamental. Cependant, un classement des MH est proposé en Figure 5.4 (source dans

la légende). Ce classement propose de délimiter les différentes MH dans différents ensembles.

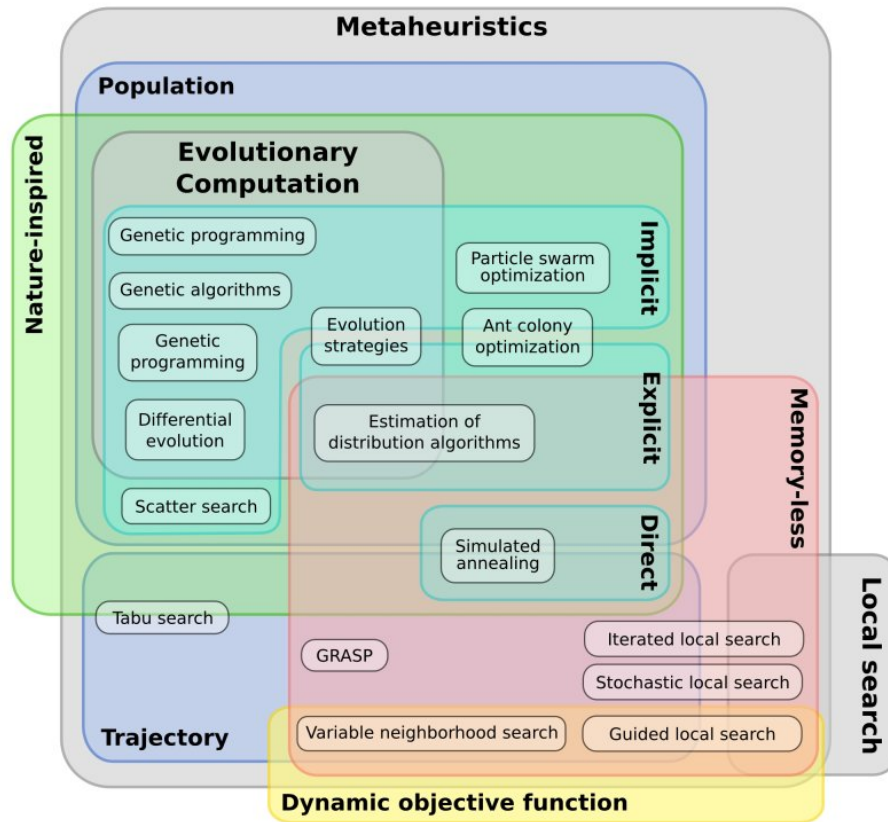


Fig. 5.4.: Ensembles de métaheuristiques - Source : <http://metah.nojhan.net/post/2007/10/12/Classification-of-metaheuristics>

Parmi les algorithmes les plus connus figurent les algorithmes génétiques [20, 82, 66, 83, 23, 87], l'algorithme de recherche tabou et l'algorithme *SPSA*<sup>1</sup> [82, 97, 7, 76, 98]. Pour une liste plus exhaustive de travaux concernant le calage de modèle microscopique grâce à des métaheuristiques, le lecteur intéressé pourra se reporter à [129]. L'algorithme génétique est inspiré de la théorie de l'évolution. Les paramètres sont codés sous la forme de mots composés de bits. L'ensemble des vecteurs de paramètres ainsi composé représente une population. Les individus sont ensuite comparés en termes de performance avec le *GoF*. Enfin, les étapes suivantes permettent la génération de la population suivante : sélection, croisement et mutation. L'algorithme de recherche tabou consiste à estimer une performance pour un vecteur de paramètres aléatoire. Ensuite, le voisinage de ce vecteur est analysé et le prochain jeu de paramètres est choisi par le voisinage en fonction de la minimisation de la fonction objective. Ces algorithmes ont l'avantage d'accélérer la vitesse de convergence sans nécessité de connaître le gradient du *GoF*. De plus, le caractère

1. *Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation*

stochastique permet de réduire le risque de converger vers un optimum local. Cependant, le fait que ces algorithmes n'assurent pas l'optimalité de la solution objet de la convergence représente le contre-coup des avantages.

Dans le cadre présenté, les modèles sont déterministes. Plusieurs questions quant à l'introduction du suivi d'erreurs sont légitimes. En effet, le fait que les sorties du modèle soient considérées stochastiques tout comme les données à disposition a une influence sur le calcul de la mesure de la performance. Tout comme les sorties du modèle, des méthodes de suivi d'erreurs telles que la méthode de perturbation peuvent être utilisées. Pour la partie relative à la propagation d'erreurs dans les modèles dynamiques, le lecteur est invité à se référer au Chapitre 2 du manuscrit. De plus, les *MoP* étant stochastiques, l'indicateur de qualité de l'ajustement l'est tout autant. Cela signifie que pour tout point dans l'espace des paramètres, il n'y a pas qu'une valeur déterministe d'indicateur de qualité de l'ajustement. Enfin, il est important de réfléchir à la question du résultat de l'optimisation. En effet, sachant que la totalité des variables en jeu sont stochastiques, alors l'optimum l'est tout autant. Ces verrous scientifiques n'ont pas été levés dans la littérature propre aux méthodes d'optimisation pour le calage de modèles dynamiques de trafic.

### 5.2.3 Analyse synthétique des méthodes de calage

Compte tenu des discussions précédentes, il est intéressant d'avoir une vision synthétique des méthodes de calage étudiées. La table 5.1 présente l'analyse en termes d'avantages et inconvénients de la technique de vecteur d'état augmenté et la table 5.2 l'analyse similaire pour la méthode d'optimisation.

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Intégration directe au schéma d'assimilation de données</li> <li>- Ne nécessite pas beaucoup de calculs supplémentaires dans l'outil</li> <li>- Recherche sur la propagation de covariances</li> <li>- Outil en un seul bloc permettant le calage entier du modèle (conditions internes + paramètres)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Pas d'assurance de convergence vers les paramètres optimaux</li> <li>- Risque de sur-ajustement et de perte de sens physique des paramètres</li> <li>- Pas de certitude sur la levée de l'hypothèse d'indépendance des variables</li> <li>- Pas d'assurance sur la stabilité des erreurs de modèle</li> </ul>

**Tab. 5.1.:** Avantages et inconvénients de la technique d'augmentation du vecteur d'état

Il est donc difficile d'orienter le choix vers l'une ou l'autre des méthodes. Des travaux de recherche supplémentaires sont nécessaires pour mettre en pratique les considérations évoquées dans le discours de cette section. Si le but recherché est de proposer un outil "tout en un" rapide et utilisant une seule source de données, alors l'orientation des recherches se

Avantages	Inconvénients
- Littérature abondante sur le sujet	- Méthode extérieure à la boucle d'assimilation
- Fiabilité de la méthode dans la convergence	- Méthode récursive et donc gourmande en calculs
- Utilisation d'autres types de données	- Difficultés à déduire les erreurs sur les paramètres du modèle
- Recherche sur un couple <i>Mop/GoF</i> adapté	- Sensibilité de la méthode à la qualité des données

Tab. 5.2.: Avantages et inconvénients de la méthode d'optimisation

fera dans le sens de l'augmentation du vecteur d'état. Sinon, les recherches s'orienteront dans le sens des méthodes d'optimisation.

## 5.3 Applications et perspectives relatives au calage

Partons du principe que la problématique de calage a obtenu une réponse et qu'un processus de calage en ligne des paramètres du diagramme fondamental a été conçu et validé. Il est intéressant de s'interroger sur les pistes opérationnelles et scientifiques découlant de ces avancées. Pour ce faire nous proposons de réaliser l'exercice d'identifier des pistes de recherches comme extension de ce travail de thèse. Ces propositions sont sous la forme de fiches de sujet donnant les grandes lignes du travail de recherche à initier. Les travaux menés et les ouvertures sur le calage permettent une grande quantité de travaux d'amélioration, de poursuite de recherche ou de travaux de mise en place opérationnelle. Nous proposons 3 fiches sur des sujets qui nous paraissent importants.

### 5.3.1 Influence des aléas sur les paramètres

Les aléas que peut subir un réseau routier, comme les incidents ou les perturbations externes, telles que la météo, ont une incidence sur l'écoulement des véhicules. Un des objectifs des gestionnaires des réseaux est d'être pro-actifs quant à ce qui pourrait détériorer les performances du réseau. Une connaissance approfondie des influences des aléas sur le modèle d'écoulement permettrait de réagir vite et de proposer des prévisions en adéquation avec les situations à venir.

Dans un contexte actuel de profusion des données allié à la facilité d'y accéder, les méthodes données-centrées sont les méthodes statistiques majoritairement utilisées pour étudier l'influence des externalités sur les conditions de circulation. En parallèle, les méthodes modèles-centrées permettent, par le biais de la simulation, de prévoir tout un éventail de situations théoriques. Grâce à l'ajout des données dans la simulation, les processus

d'assimilation de données ont permis d'établir une réactivité quant aux observations sur le terrain.

L'objectif est d'étudier l'apport des méthodes modèles-centrées aux méthodes données-centrées en présence de conditions de circulations dégradées par des aléas intérieurs ou extérieurs (accident, météo, travaux, etc). Ces apports doivent être quantifiés afin d'évaluer un potentiel intérêt d'implémentation opérationnelle.

Pour cela, les outils à disposition comprennent le prototype d'assimilation de données et de calage en ligne permettant de simuler des situations de trafic dégradées. De plus, on devra disposer de données trafic correspondant aux situations étudiées. La démarche proposée est de comparer directement les prévisions des méthodes données-centrées et des méthodes modèles-centrées. Un indicateur de qualité de prévision doit ainsi être conçu et devra rendre compte cette différence.

Les résultats attendus permettront d'élargir les connaissances relatives aux influences des divers aléas sur le trafic et ses paramètres. De plus, ils permettront une application plus opérationnelle des méthodes de calage développées précédemment dans un environnement contrôlé. De plus, ils représentent une première recherche d'opportunité d'application opérationnelle du calage en ligne par la validation dans un cadre contrôlé.

### 5.3.2 Supervision du modèle : détection automatique d'incidents

Afin de garantir des conditions de circulation les plus fluides possibles les exploitants de réseau doivent intervenir rapidement lorsqu'un incident survient. Le risque majeur est l'augmentation du risque de sur-incidents lorsque la durée d'intervention augmente. Néanmoins, le maintien du confort des usagers représente aussi un objectif qu'il est important de citer.

Le calage en ligne ouvre plusieurs possibilités. En effet, il permet une adaptabilité des paramètres du modèle en fonction des situations observées. A l'aide d'un tel simulateur adaptable, il est possible d'observer les évolutions des paramètres sur le réseau en temps réel.

L'objectif des recherches proposées est d'étudier l'influence des incidents sur les paramètres du modèle. Aussi, le développement de méthode de détection automatique d'incidents non récurrents à partir des résultats de l'assimilation de données et du calage en ligne est à discuter. La détection d'incident chercherait à être la plus fine possible à l'instant  $t$  mais aussi en termes de prévisions à court terme. Ces méthodes sont à valider dans un cadre synthétique avant de réfléchir à la mise en place opérationnelle.

Nous proposons un ensemble de pistes pour mener à bien le projet :

- recherche sur l'introduction d'incidents dans un simulateur de trafic ;
- recherche sur l'influence en temps réel des incidents sur les paramètres du diagramme fondamental ;
- recherche sur l'opportunité de détecter automatiquement les incidents avec un support de données synthétique ;
- à l'aide d'un jeu de données adéquat, simuler le temps réel.

Une méthode de détection d'incidents ouvrirait la voie à des applications opérationnelles relatives à la détection d'incidents et à la prise de décision qui en découle. Elle pourra venir renforcer les processus d'aide à la décision des gestionnaires de réseau routier.

### 5.3.3 Vers un calage rapide par apprentissage

Le Chapitre 4 a conclu sur l'insuffisance du processus d'assimilation sans calage en ligne des paramètres du modèle pour obtenir des états de trafic cohérents avec la situation observée en tout point du réseau. Ainsi, il y a un décalage présent entre les valeurs issues du modèle non calé et celles issues de la réalité.

De plus, un des processus de calage proposé est une méthode d'optimisation. Ce processus possède comme caractéristique d'être gourmand en temps de calcul. Il repose justement sur le décalage entre le modèle et la réalité observée et propose une adaptation des paramètres en conséquence. Dans le contexte d'un outil, en ligne, il est intéressant de s'intéresser à un moyen de réduire la nécessité d'appeler constamment le processus d'optimisation. La motivation ici est de réduire, à terme, les temps de calculs alloués au calage de manière significative par le développement d'une méthode de calage parallèle, plus rapide, mais reposant sur les résultats des processus d'optimisation.

Le verrou scientifique à lever dans ces travaux est le développement d'une méthode permettant un apprentissage du calage des paramètres à effectuer en fonction des différences observées entre l'assimilation de données et les données terrain. La question sous-jacente étant relative à la possibilité de s'affranchir du processus d'optimisation.

La Figure 5.5 illustre le système au complet avec la proposition de l'ajout d'un calage rapide par apprentissage du processus d'optimisation. Les recherches pour ces objectifs peuvent prendre plusieurs directions. Les paramètres du modèle peuvent être dégradés, par rapport au calage, de manière méthodique afin d'apprendre des innovations pour certains défauts de calage de modèle. On peut aussi utiliser des éléments de littérature sur les méthodes d'apprentissage afin de les comparer et de choisir une méthode adéquate si le processus est réalisable.

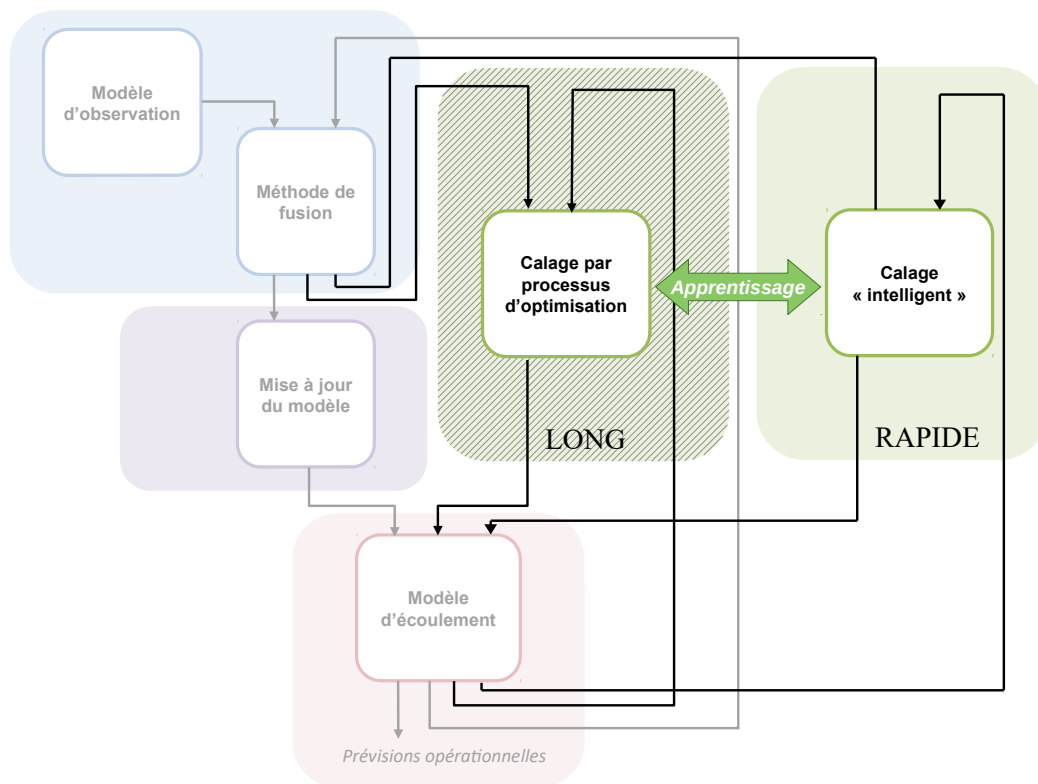


Fig. 5.5.: Concept du calage rapide par apprentissage du processus d'optimisation

## Conclusion Générale

L'augmentation constante de la demande en déplacement routier en plus des limites actuelles dans les moyens d'augmentation de l'offre disponible entraîne la dégradation régulière des conditions de circulation sur les infrastructures routières. Les conséquences sur la sécurité, l'environnement et le confort des usagers réinterroge les missions des gestionnaires de réseaux routiers. Des outils d'aide à la décision, reposant sur des modèles dynamiques de trafic, peuvent les aider à mieux comprendre l'origine des congestions, et prendre les mesures de trafic les plus adaptées. Ces mesures peuvent consister à augmenter les capacités d'écoulement de nos infrastructures par la création de nouvelles voies. Mais elles sont coûteuses et entraînent une hausse des déplacements routiers. Ces mesures peuvent aussi agir sur la demande, en encourageant des transferts vers des modes plus doux grâce à des nouvelles solutions d'aide à la mobilité ou de nouveaux services. Mais l'exploitant a généralement peu de leviers d'action sur ces sujets. Enfin, l'exploitant peut moduler le trafic par des mesures de régulation dynamique, qui sont des solutions opérationnelles ayant fait leurs preuves ces trois dernières décennies.

Pour la mise en oeuvre de ces mesures, les gestionnaires de réseau ont besoin d'outils d'évaluation pour mener les études de trafic en amont des déploiements. Et lorsque les mesures de régulation sont opérationnelles, le gestionnaire a besoin d'outils d'aide à la décision pour la gestion des trafic qui soient : rapides, fiables, réactifs et adaptatifs. Ces quatre enjeux ont été traduits en quatre objectifs de recherche durant la thèse :

- le choix d'une échelle de représentation du trafic ;
- la recherche d'un modèle dynamique de trafic proposant un suivi des erreurs de modèle ;
- la recherche d'une méthode d'assimilation de données permettant de caler les conditions internes du modèle ;
- la recherche d'une méthode de calage en ligne des paramètres du modèle d'écoulement.

Concernant le choix d'une échelle de représentation du trafic, les 3 échelles (microscopique, mésoscopique et macroscopique) ont été analysées et le choix s'est porté sur la modélisation



mésoscopique aussi appelée Lagrangienne-Spatiale. La résolution du modèle LWR est effectuée grâce à l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi [72, 74].

## Synthèse des recherches

La première contribution concerne l'enjeu de fiabilité renvoyant à des notions d'erreurs sur les prévisions. Ces erreurs de modèle possèdent plusieurs sources comme les erreurs sur les conditions initiales ou les erreurs sur les paramètres. Les conditions initiales sont caractérisées par la demande en entrée de réseau et par l'offre en sortie de réseau. Concernant les paramètres du modèle d'écoulement, le choix de 3 paramètres que sont la vitesse fluide  $u$ , la densité maximale de véhicules  $k_x$  et la vitesse maximale de remontée de congestion  $w$  est motivé par les recherches faisant office de référence pour les présents travaux. L'idée de cette partie est d'introduire des erreurs de modèles dans les CI et les paramètres de l'écoulement et d'analyser leur propagation vers les résultats du modèle mésoscopique : les temps de passage aux nœuds. Concernant la modélisation des erreurs, plusieurs possibilités ont été comparées : une méthode basée sur des réplifications (type Monte Carlo), une méthode basée sur des mélanges de Dirac, et une méthode basée sur des mélanges de Gaussiennes. Au regard des avantages et inconvénients de chaque type de modélisation, le choix s'est porté sur la conception d'un modèle de trafic dynamique mésoscopique propageant les erreurs sous la forme de mélanges de Gaussiennes : le GM-LS-LWR. Ce modèle a été mis à l'épreuve avec des tests de sensibilité au regard de deux indicateurs rendant compte respectivement de la précision et de l'efficacité du modèle. L'analyse de sensibilité avait pour but de comparer les performances du modèle quant au nombre de composantes Gaussiennes, au nombre de nœuds sur le réseau et à la précision des paramètres. Pour finir, cette partie a proposé deux indicateurs opérationnels, stochastiques, permettant d'estimer les variables d'état du système mais aussi la fiabilité de cette estimation. Les temps de parcours sur le réseau sont proposés avec une enveloppe liée à l'intervalle de confiance sur la moyenne de l'estimation. Les diagrammes espace-temps représentent les états de trafic agrégés dans l'espace et le temps en moyenne et en écart-type. L'analyse de ces indicateurs montre que la fiabilité d'un modèle d'écoulement seul se détériore dans le temps, en particulier lors d'épisodes de congestion.

La contribution suivante concerne la mise en place d'un schéma d'assimilation de données séquentiel où les variables d'état sont distribuées suivant des mélanges de Gaussiennes. Devant la popularité du filtre de Kalman et de ses diverses extensions, une opportunité de formulation d'un filtre de Kalman séquentiel adapté au modèle LWR Lagrangien-Spatial a été explorée. Cependant, les propriétés de notre modèle, en particulier la description des états fluides par le diagramme fondamental, empêche la formulation d'un filtre de Kalman dans cette échelle de représentation. Une méthode alternative de fusion de données a été proposée. Les états *a priori* sont les instants de passage des véhicules au nœud d'obser-

vation. Les observations sont définies comme des temps de passage stochastiques captés en des points fixes du réseau (par exemple des stations de comptage). Les distributions de probabilité des observations sont Gaussiennes. Les états *a posteriori* sont définis comme un compromis entre les états *a priori* et les observations. Ce compromis est établi grâce à une formulation Bayésienne permettant de calculer l'état le plus probable connaissant les observations et l'état *a priori*. La formulation a été adaptée afin de correspondre à une formulation mono-variable associée à des mélanges de Gaussiennes. L'idée majeure de cette méthode de fusion de données est que l'état *a posteriori* converge automatiquement vers l'état *a priori* lorsque la variance des observations est importante. A l'inverse, lorsque les observations sont beaucoup plus précises que l'état *a priori*, l'état *a posteriori* converge vers l'état *a priori*.

Afin de boucler le schéma d'assimilation de données, une étape de mise à jour des états internes du modèle est nécessaire afin de réinjecter les états *a posteriori* dans le modèle d'écoulement. Pour ce faire, la proposition de cette thèse est une méthode de mise à jour compatible avec le modèle d'écoulement. Dans cette partie, deux méthodes sont en compétition. La première méthode consiste en une simple substitution des états *a priori* par les états *a posteriori* dans le modèle d'écoulement. La deuxième méthode agit aussi sur les véhicules eux même et est inspirée de [44]. En effet, dans cette méthode, selon les régimes *a priori* et observés, il est proposé d'ajouter, supprimer, avancer ou reculer des véhicules. Les deux méthodes sont comparées sur deux scénarios différents d'une simulation appelée *réalité terrain*, ou référence, censée représenter la réalité. Dans le premier scénario, l'offre en sortie de réseau diffère du scénario de référence. Les états de trafic doivent se propager correctement dans le sens inverse du trafic en amont du nœud d'observation. Dans le second scénario, la demande en entrée de réseau est différente du scénario de référence. En conséquence, la méthode d'assimilation de données doit pouvoir propager correctement les états de trafic dans le sens de la circulation en aval du nœud d'observation. Sur les deux scénarios, la première méthode n'est pas satisfaisante. Sur le premier scénario, le calage des conditions internes n'est pas suffisant et sur le deuxième scénario : des incohérences de modèle apparaissent. Concernant la second méthode, aucune incohérence de modèle n'est à noter sur les deux scénarios proposés. De plus, la méthode d'assimilation de données permet de caler les conditions internes du modèle en amont du nœud d'observation pour le premier scénario et en aval du nœud d'observation pour le second scénario. Devant ces résultats satisfaisants pour cette méthode, nous avons proposé de la tester sur deux autres scénarios. Ces deux autres scénarios correspondent à un défaut de calage de la branche fluide du DF et de la branche congestionnée du DF respectivement.

Lorsque les paramètres du diagramme fondamental ne sont pas calés, les états de trafic ne sont pas correctement propagés. En effet, la dynamique interne des liens est gérée par ces paramètres et donc le calage ponctuel des conditions internes au nœud d'observation est insuffisant. La nécessité suivante est le développement d'une méthode en ligne de calage

des paramètres du DF. Ce calage permettrait un écoulement des véhicules sur le réseau en accord avec les observations. Ainsi, le calage répond à l'enjeu d'adaptabilité de la gestion de trafic en temps réel. Le chapitre 5 consiste donc à ouvrir sur le calage des paramètres du diagramme fondamental. Les recherches du côté de l'augmentation du vecteur d'état ne peuvent aboutir en raison de l'hypothèse d'indépendance des variables établie dans les parties précédentes. L'analyse de l'état de l'art permet de repérer un schéma récurrent de calage des modèles. Ce schéma récursif passe par une suite d'étapes que sont : le choix d'un ensemble initial de paramètres, la simulation avec ces paramètres, le calcul de la qualité de l'ajustement (*GOF*), le choix d'un nouvel ensemble de paramètres. Il est terminé lorsque la simulation est proche des observations. Le choix de l'indicateur de la qualité de l'ajustement et le choix de la méthode d'évolution de l'ensemble des paramètres font qu'il existe une grande diversité de méthodes de calage. Des pistes de calage sont ainsi proposées.

## Limites

Afin d'analyser les limites des méthodes développées dans cette thèse, revenons dans un premier temps sur les hypothèses formulées. La première hypothèse est celle de l'indépendance des variables. Cette hypothèse a des répercussions sur plusieurs plans des travaux. L'hypothèse d'indépendance des variables stipulent que les variables et paramètres du modèle d'écoulement sont indépendants, statistiquement parlant. Cela se traduit par des covariances toutes nulles. Dans la formulation du GM-LS-LWR, cette hypothèse est primordiale au stade du calcul des variances des composantes Gaussiennes des variables. En effet, un terme de covariance est nécessaire pour utiliser la méthode de perturbation (cf. Chapitre 2) avec des variables interdépendantes. Cette hypothèse réduit l'exactitude des formulations proposées. Cette hypothèse intervient aussi au niveau de la méthode de calage. En effet, comme annoncé dans la section précédente, l'indépendance des variables, entre autres, empêche l'intégration des paramètres dans le vecteur d'état.

Les hypothèses suivantes concernent la forme des distributions de probabilité proposées dans les travaux. Pour rappel, les variables du modèle d'écoulement sont distribuées suivant des mélanges de Gaussiennes et les observations sont considérées comme étant distribuées suivant des Gaussiennes. L'avantage de la formulation sous la forme de mélange de Gaussiennes permet l'estimation d'un large éventail de distributions complexes et non conventionnelles. Cependant, la forme des mélanges de Gaussiennes lisse les distributions de probabilité. Par exemple, le calcul du terme d'offre dans le Chapitre 2 fait apparaître un nombre de composantes beaucoup plus importants que le nombre de composantes Gaussiennes proposé dans le modèle d'écoulement. Pour le modèle d'observation, aucune preuve empirique de la distribution des temps de passage captés sur un réseau n'est

disponible pour le moment. Selon l'avancée des recherches, la modélisation des erreurs d'observation dans cette thèse pourra être contredite.

Pour information, l'implémentation algorithmique des modèles proposés est disponible en Annexe F. Cette implémentation algorithmique est donnée à titre indicatif puisque les concepts expliqués dans la thèse ont été mis à l'épreuve grâce à cette implémentation. A noter que cette implémentation n'est pas la seule possible. Cependant, l'implémentation algorithmique amène à des limites. L'implémentation algorithmique du modèle d'écoulement repose sur l'hypothèse *FIFO*. En effet, les événements ne sont pas traités dans l'ordre chronologique mais dans l'ordre des indices des véhicules. Pour chaque véhicule entrant, les passages aux différents nœuds sont traités successivement avant le passage au véhicule suivant. Cette implémentation algorithmique entraîne une limite dans l'algorithme de l'assimilation de données. En effet, afin de corriger le modèle d'écoulement, celui-ci retourne à l'événement concerné. Ainsi, l'assimilation de données traite les événements dans l'ordre chronologique (ce qui est cohérent avec la cadence d'arrivée des données en temps réel), à l'inverse donc du modèle d'écoulement. En conséquence, lors de passages de véhicules au nœud d'observation aval, le modèle remonte jusqu'au traitement d'un véhicule au début de la liste alors que la prochaine observation concerne un véhicule en fin de liste. Ceci entraîne deux phénomènes. Le premier est le fait que le véhicule en fin de liste va être géré par le modèle d'écoulement plusieurs fois. Le deuxième, plus critique et basé sur la puissance de calcul fait que si la différence entre les deux indices des véhicules observés est importante (lorsque la concentration en véhicules est importante), le modèle d'écoulement avec propagation d'erreur ne peut pas rattraper son retard. Des travaux supplémentaires sont nécessaires afin d'implémenter une gestion chronologique des événements dans le modèle d'écoulement.

Les méthodes développées durant la thèse s'appliquent uniquement dans le contexte d'un lien homogène sans discontinuité (convergençs et divergençs). Ce type de réseau ne permet que peu d'applications à des réseaux réels. En effet, certains cadres de validation peuvent correspondre aux hypothèses prises sur le réseau notamment sur des tronçons de route en interurbains ou sur autoroute entre deux sorties. Par contre, des applications en milieu urbain ou sur des portions de réseaux maillés ne sont pas possibles directement sans travaux supplémentaires.

## Poursuites de recherche

Les recherches menées durant ces 3 ans peuvent se prolonger sur plusieurs axes :

### — Levées d'hypothèses

Lors des travaux menés, nous avons formulé tout un ensemble d'hypothèses afin de simplifier le problème tout en restant cohérent avec les concepts physiques et

mathématiques manipulés. Concernant le modèle d'écoulement, la solution proposée dans cette thèse est un modèle LWR LS où les variables sont distribuées selon des mélanges de Gaussiennes. Les mélanges de Dirac étant aussi évoqués, il existe un ensemble de formes de distributions à explorer pour la modélisation des erreurs de modèles. Au regard de l'état de l'art sur les méthodes de propagation des erreurs (cf. Chapitre 2), il existe un ensemble de méthodes permettant de suivre les erreurs dans les modèles dynamiques. Concernant la dynamique de l'écoulement en particulier, la première hypothèse est celle d'indépendance des variables. Comme nous l'avons noté dans les chapitres précédents, cette hypothèse entraîne des limites dans les concepts développés comme dans le calage et l'assimilation de données. Des travaux complémentaires permettraient de lever l'hypothèse d'indépendance des variables et de proposer une méthode de calage par augmentation du vecteur d'état.

— **Développement de méthodes pour complexifier les réseaux**

Afin que notre méthode soit adaptée à des réseaux plus complexes, il faut proposer des modèles d'écoulement avec suivi d'erreurs pour des convergents ou des divergents. De plus, une étude de l'interface entre les liens et les discontinuités peut être intéressante puisque dans le cas stochastique, cette continuité peut ne pas être directe. Une piste d'étude possible est de partir de l'existant, c'est à dire de ce qui se fait traditionnellement en termes de modélisation des convergents et des divergents. Pour ce faire, il est intéressant de regarder du côté de ce qui est fait dans la littérature pour les convergents. En effet, des modèles de convergent tels que celui de Daganzo [37] ont été développés pour être compatibles avec le modèle LWR [73, 59]. La même chose est remarquable pour les divergents où des modèles sont compatibles avec le modèle LWR [94, 58]. D'autres types de discontinuité sont présents sur les réseaux. On peut citer les carrefours à feux, les ronds-points [21] ou encore les zones d'entrecroisement [85]. Ces modèles de discontinuité s'adaptent parfaitement au modèle LWR déterministe. La problématique de l'adaptation à un modèle LWR stochastique est une poursuite de recherche intéressante.

— **Travaux dans la direction d'une implémentation opérationnelle**

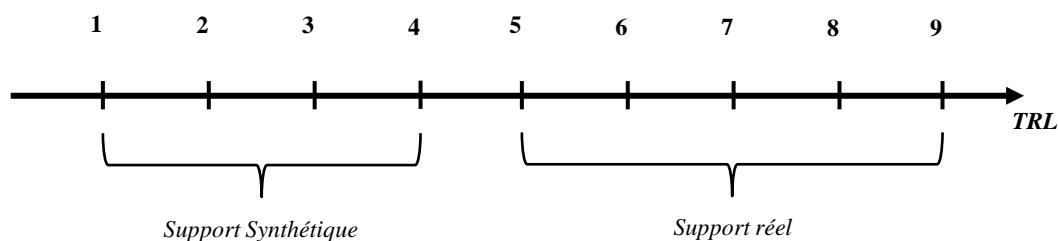


Fig. 5.6.: Chronologie du TRL [84]

La dernière catégorie de perspectives concerne donc les travaux dans la direction d'une implémentation opérationnelle des méthodes. La Figure 5.6 rappelle les niveaux de *Technology Readiness Level* exposés dans le Chapitre 4. L'objectif de la thèse était le développement d'un prototype et sa validation dans un contexte contrôlé en laboratoire. Afin de prétendre à des niveaux de maturation technologiques plus élevés, plusieurs perspectives peuvent être explorées. D'abord, le développement d'une méthode de calage avec estimation des erreurs sur les paramètres du modèle d'écoulement est nécessaire. Ensuite, la validation des méthodes développées a été réalisée sur des scénarios ne correspondant pas à la réalité. En effet, dans la réalité, l'ensemble des paramètres (offre, demande, DF) ne sont pas forcément calés. Des travaux supplémentaires sont nécessaires pour proposer une validation des méthodes sur un support synthétique proche de la réalité. Ensuite, un jeu de données réelles permettra de réaliser les premières validations sur un support réel. Dans un objectif de mise en place opérationnelle, un prototype doit être développé et validé en situation.

## Perspectives

Le choix du modèle LWR est justifié dans le chapitre introductif, tout comme le choix de l'échelle de représentation mésoscopique. Cependant, il existe une quantité considérable de modèles de trafic existant dans les différentes échelles de représentation. En effet, pour une application très locale, la création d'une approche de gestion de trafic modèle-centrée à l'échelle microscopique et basée sur les travaux et les ouvertures de cette thèse peut représenter une opportunité d'application intéressante. La même observation peut être faite pour des applications plus larges et une échelle de représentation macroscopique.

Devant la croissance de la puissance de calculs et des tailles des bases de données trafic disponibles, les approches données centrées sont particulièrement appréciées dans les problématiques de prévisions. Cependant, des opportunités d'approches modèle-centrées comme celle proposée dans la thèse ne sont pas à négliger. Les travaux menés vont dans le sens de modèles de trafics prenant en compte des données captées sur le terrain. Ainsi, les approches données-centrées et modèles-centrées ne sont pas à opposer. Des processus tels que la mise à jour bayésienne des états de trafic (cf. Chapitre 3 et 4) peuvent venir renforcer les approches purement données-centrées. La qualification et la quantification du renfort apporté par des approches modèles-centrées aux approches données-centrées sont des sujets de recherches conséquents et qui méritent un approfondissement.

Du point de vue des caractéristiques opérationnelles potentielles dans la gestion du trafic au quotidien, les approches modèles centrées peuvent apporter une aide précieuse. Lors d'événements aléatoires comme des épisodes de fortes intempéries ou des accidents,

l'adaptabilité des approches modèles-centrées pourrait permettre de les détecter et d'estimer leurs conséquences. Lors d'événements prévus mais non récurrents comme des travaux, les approches modèles centrées permettraient de mesurer aussi leurs impacts sur le trafic et d'estimer les futures conditions de circulations. De plus, dans un but de recherche, ces approches permettraient d'analyser l'évolution des paramètres du modèle d'écoulement. Il ne faut pas oublier non plus le suivi des erreurs de modèle rendant compte de la fiabilité des précisions d'un point de vue opérationnel. Ces indicateurs représentent des aides considérables pour évaluer les stratégies de régulation.

Concernant les stratégies de régulation dynamique, les approches initiées dans la thèse aideraient à leur mise en place en temps réel. L'avantage d'avoir un modèle adaptable et réactif est que l'on peut profiter des avantages du calage du modèle en temps réel et de la souplesse d'un cadre simulé permettant de tester une infinité de configurations pour la régulation dynamique, lors d'évaluations *a priori*. Ces perspectives représentent une projection à un horizon lointain dans la mesure où elles demandent des recherches approfondies sur la mise en place opérationnelle des méthodes et la qualification du renfort apporté par ces méthodes sur la mise en place des stratégies de régulation.

## Bibliographie

- [1] Régulation dynamique liée à l'ouverture du tube Sud. [Page 4]
- [2] DOSSIER DE PRESSE Régulation dynamique des vitesses sur la Rocade Est (RN346). [Page 4]
- [3] Dossier de presse RN87-ROCADE SUD DE GRENOBLE Mise en place de la régulation d'accès. [Page 4]
- [4] Acharjee, S., and Zabarar, N. A non-intrusive stochastic Galerkin approach for modeling uncertainty propagation in deformation processes. *Computers & structures* 85, 5 (2007), 244–254. [Page 22]
- [5] Ahmed, M. S., and Cook, A. R. Analysis of freeway traffic time-series data by using Box-Jenkins techniques. *Transportation Research Record*, 722 (1979), 116. [Page 7]
- [6] Ajami, N. K., Duan, Q., and Sorooshian, S. An integrated hydrologic Bayesian multimodel combination framework : Confronting input, parameter, and model structural uncertainty in hydrologic prediction. *Water Resources Research* 43, 1 (2007). [Page 22]
- [7] Balakrishna, R., Antoniou, C., Ben-Akiva, M., Koutsopoulos, H., and Wen, Y. Calibration of Microscopic Traffic Simulation Models : Methods and Application. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 1999 (jan 2007), 198–207. [Page 125]
- [8] Baldeweck, H. *Methodes des elements finis stochastiques. Applications a la geotechnique et a la mecanique de la rupture*. PhD thesis, 1998. [Page 23]
- [9] Beck, J. L., and Au, S.-K. Bayesian updating of structural models and reliability using Markov chain Monte Carlo simulation. *Journal of Engineering Mechanics* 128, 4 (2002), 380–391. [Page 22]
- [10] Blandin, S., Couque, A., Bayen, A., and Work, D. On sequential data assimilation for scalar macroscopic traffic flow models. *Physica D : Nonlinear Phenomena* 241, 17 (2012), 1421–1440. [Page 67]
- [11] Bonnel, P. Prévion de la demande de transport. *Cybergeo : European Journal of Geography* (2002). [Page 5]



- [12] Bretin, T. Identification et caractérisation des ondes se propageant dans le trafic à l'aide de la méthode d'inter-corrélation. Tech. rep., ENTPE, Lyon, France, 2007. [Page 123]
- [13] Broniatowski, M., and Hermann, K. G. Méthodes Form et Sorm. [Page 23]
- [14] Byon, Y.-J., Shalaby, A., Abdulhai, B., and El-Tantawy, S. Traffic Data Fusion using SCAAT Kalman Filters. *Trb 2010* (2010), 1–16. [Page 69]
- [15] Cai, G. Q., and Elishakoff, I. Refined second-order reliability analysis. *Structural Safety* 14, 4 (1994), 267–276. [Page 23]
- [16] CEREMA. *Etudes de simulation dynamique de trafic - Guide de réalisation*. 2016. [Page 24]
- [17] Certu. Certu Gestion dynamique du trafic Fiche n° 2 Contexte et objectifs de l'aménagement. [Page 4]
- [18] Chen, H., Rakha, H. A., and Sadek, S. Real-time freeway traffic state prediction : A particle filter approach. In *IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, Proceedings, ITSC* (2011), pp. 626–631. [Page 68]
- [19] Chen, R., and Liu, J. S. Mixture kalman filters. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)* 62, 3 (2000), 493–508. [Page 67]
- [20] Cheu, R.-L., Jin, X., Ng, K.-C., and Ng, Y.-L. Calibration of FRESIM for Singapore Expressway Using a Genetic Algorithm. *Journal of Transportation Engineering* 124, 6 (nov 1998), 526–535. [Page 125]
- [21] Chevallier, E., Leclercq, L., Chevallier, E., and Leclercq, L. A macroscopic single-lane roundabout model to account for insertion delays and O-D patterns. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* (2008). [Page 136]
- [22] Chiabaut, N., Buisson, C., and Leclercq, L. Fundamental diagram estimation through passing rate measurements in congestion. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 10, 2 (2009), 355–359. [Page 123]
- [23] Chiappone, S., Giuffrè, O., Granà, A., Mauro, R., and Sferlazza, A. Traffic simulation models calibration using speed–density relationship : An automated procedure based on genetic algorithm. *Expert Systems with Applications* 44 (feb 2016), 147–155. [Page 125]
- [24] Christiaens, K., and Feyen, J. Analysis of uncertainties associated with different methods to determine soil hydraulic properties and their propagation in the distributed hydrological MIKE SHE model. *Journal of Hydrology* 246, 1 (2001), 63–81. [Page 22]
- [25] Chu, L. Adaptive Kalman Filter Based Freeway Travel time Estimation. *TRB* (2005), 1–21. [Page 69]
- [26] Ciuffo, B., and Punzo, V. Verification of traffic micro-simulation model calibration procedures : analysis of Goodness-of-Fit measures. [Page 123]

- [27] Ciuffo, B., Punzo, V., and Torrieri, V. Comparison of Simulation-Based and Model-Based Calibrations of Traffic-Flow Microsimulation Models. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board 2088* (dec 2008), 36–44. [Page 124]
- [28] Clairais, A., Duret, A., and El Faouzi, N.-E. Calibration of the Fundamental Diagram Based on Loop and Probe Data. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board 2560*, 1 (jan 2016), 17–25. [Pages xiii, 123, 124]
- [29] Clairais, A., Duret, A., and El Faouzi, N.-E. Error propagation in traffic modelling : Solutions for the mesoscopic LWR model. *Transportmetrica B : Transport Dynamics* (apr 2018), 1–20. [Pages xii, 47, 100, 107]
- [30] Clairais, A., Duret, A., and El Faouzi, N.-E. Traffic Data Assimilation based on a mesoscopic-LWR modeling with error propagation. 2018. [Pages xii, 100, 106, 107, 108, 109]
- [31] Coric, V., Djuric, N., and Vucetic, S. Traffic State Estimation from Aggregated Measurements with Signal Reconstruction Techniques. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board 2315*, 1 (jan 2012), 121–130. [Page 69]
- [32] Courant, R., Friedrichs, K., and Lewy, H. On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics. *IBM Journal of Research and Development 11*, 2 (mar 1967), 215–234. [Pages 14, 70, 74, 78, 91]
- [33] Courtier, P., Andersson, E., Heckley, W., Vasiljevic, D., Hamrud, M., Hollingsworth, A., Rabier, F., Fisher, M., and Pailleux, J. The ECMWF implementation of three-dimensional variational assimilation (3D-Var). I : Formulation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society 124*, 550 (1998), 1783–1807. [Page 64]
- [34] Courtier, P., Thépaut, J.-N., and Hollingsworth, A. A strategy for operational implementation of 4D-Var, using an incremental approach. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society 120*, 519 (1994), 1367–1387. [Page 66]
- [35] Daamen, W., Buisson, C., and Hoogendoorn, S. P. *Traffic Simulation and Data Validation Methods and Applications*. CRC Pr I Llc, 2014. [Page 123]
- [36] Daganzo, C. F. The cell transmission model : A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory. *Transportation Research Part B : Methodological 28*, 4 (1994), 269–287. [Page 70]
- [37] Daganzo, C. F. The cell transmission model, part II : network traffic. *Transportation Research Part B : Methodological 29*, 2 (1995), 79–93. [Pages 70, 136]
- [38] Deodatis, G. Weighted integral method. I : stochastic stiffness matrix. *Journal of Engineering Mechanics 117*, 8 (1991), 1851–1864. [Page 23]
- [39] Deodatis, G., and Shinozuka, M. Weighted integral method. II : response variability and reliability. *Journal of Engineering Mechanics 117*, 8 (1991), 1865–1877. [Page 23]
- [40] DER KIUREGHIAN, A., Lin, H.-Z., and Hwang, S.-J. Second-order reliability approximations. *Journal of Engineering Mechanics 113*, 8 (1987), 1208–1225. [Page 23]

- [41] Di, X., Liu, H. X., and Davis, G. A. Hybrid Extended Kalman Filtering Approach for Traffic Density Estimation along Signalized Arterials. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 2188, 1 (jan 2010), 165–173. [Page 69]
- [42] Dougherty, M. A review of neural networks applied to transport. *Transportation Research Part C : Emerging Technologies* 3, 4 (aug 1995), 247–260. [Page 7]
- [43] Duret, A., Buisson, C., and Chiabaut, N. Estimating individual speed-spacing relationship and assessing ability of Newell’s car-following model to reproduce trajectories. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board*, 2088 (2008), 188–197. [Pages 25, 61]
- [44] Duret, A., Leclercq, L., and El Faouzi, N.-E. Data Assimilation Using a Mesoscopic Lighthill–Whitham–Richards Model and Loop Detector Data : Methodology and Large-Scale Network Application. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board*, 2560 (2016), 26–36. [Pages 14, 69, 89, 90, 91, 107, 133]
- [45] Duret, A., and Yuan, Y. Traffic state estimation based on Eulerian and Lagrangian observations in a mesoscopic modeling framework. *Transportation Research Part B : Methodological* 101 (2017), 51–71. [Pages xv, 69, 78, 91, 92, 107]
- [46] Edie, L. Discussion of traffic stream measurements and definitions. In *Proceedings of the 2nd International Symposium on the Theory of Traffic Flow* (1965), pp. 139–154. [Page 57]
- [47] Erkan, I., and Hastemoglu, H. Bluetooth as a traffic sensor for stream travel time estimation under Bogazici Bosphorus conditions in Turkey. *Journal of Modern Transportation* 24, 3 (sep 2016), 207–214. [Page 69]
- [48] Evensen, G. The ensemble Kalman filter : Theoretical formulation and practical implementation. *Ocean dynamics* 53, 4 (2003), 343–367. [Page 67]
- [49] Gauthier, P., Charette, C., Fillion, L., Koclas, P., and Laroche, S. Implementation of a 3D variational data assimilation system at the Canadian Meteorological Centre. Part I : The global analysis. *Atmosphere-Ocean* 37, 2 (1999), 103–156. [Page 64]
- [50] Ghosh, B., Basu, B., and O’Mahony, M. Multivariate Short-Term Traffic Flow Forecasting Using Time-Series Analysis. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 10, 2 (jun 2009), 246–254. [Page 7]
- [51] Godunov, S. K. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Matematicheskii Sbornik* 89, 3 (1959), 271–306. [Pages 70, 74]
- [52] Greenshields, B., Channing, W., Miller, H., et al. A study of traffic capacity. In *Highway research board proceedings* (1935), vol. 1935, National Research Council (USA), Highway Research Board. [Page 75]

- [53] Guériau, M., Billot, R., El Faouzi, N.-E., Monteil, J., Armetta, F., and Hassas, S. How to assess the benefits of connected vehicles ? A simulation framework for the design of cooperative traffic management strategies. *Transportation Research Part C : Emerging Technologies* 67 (jun 2016), 266–279. [Page 75]
- [54] Hegyi, A., Girimonte, D., Babuska, R., and De Schutter, B. A comparison of filter configurations for freeway traffic state estimation. In *2006 IEEE Intelligent Transportation Systems Conference (2006)*, IEEE, pp. 1029–1034. [Page 68]
- [55] Herrera, J. C., Work, D. B., Herring, R., Ban, X. J., Jacobson, Q., and Bayen, A. M. Evaluation of traffic data obtained via GPS-enabled mobile phones : The Mobile Century field experiment. *Transportation Research Part C : Emerging Technologies* 18, 4 (aug 2010), 568–583. [Page 69]
- [56] IFSTTAR. Projet MOCOPo. [Page 69]
- [57] Jha, M., Gopalan, G., Garms, A., Mahanti, B., Toledo, T., and Ben-Akiva, M. Development and Calibration of a Large-Scale Microscopic Traffic Simulation Model. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 1876 (jan 2004), 121–131. [Page 124]
- [58] Jin, W.-L. Analysis of kinematic waves arising in diverging traffic flow models. Tech. rep., 2010. [Page 136]
- [59] Jin, W. L., and Zhang, H. M. On the distribution schemes for determining flows through a merge. *Transportation Research Part B : Methodological* 37, 6 (2003), 521–540. [Page 136]
- [60] Juang, C. H., Fang, S. Y., and Khor, E. H. First-order reliability method for probabilistic liquefaction triggering analysis using CPT. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 132, 3 (2006), 337–350. [Page 23]
- [61] Julier, S. J., and Uhlmann, J. K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems. In *Int. symp. aerospace/defense sensing, simul. and controls* (1997), vol. 3, Orlando, FL, pp. 182–193. [Page 67]
- [62] Kalman, R. E., and Bucy, R. S. New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of basic engineering* 83, 1 (1961), 95–108. [Pages xv, 66, 67]
- [63] Kalman, R. E., and Others. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering* 82, 1 (1960), 35–45. [Pages xv, 66, 67]
- [64] Kalnay, E. *Atmospheric modeling, data assimilation and predictability*. Cambridge university press, 2003. [Pages xii, 8, 64, 65, 66, 77, 81]
- [65] Kepert, J. D. Maths @ work in Meteorology. *Gazette of the Australian Mathematical Society* 34 (2007), 150–155. [Pages 64, 66]
- [66] Kim, S.-J., Kim, W., and Rilett, L. Calibration of Microsimulation Models Using Nonparametric Statistical Techniques. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 1935 (jan 2005), 111–119. [Page 125]

- [67] Kim, Y., and Hall, F. Relationships Between Occupancy and Density Reflecting Average Vehicle Lengths. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 1883, 1 (jan 2004), 85–93. [Page 72]
- [68] Kiureghian, A. D., and Stefano, M. D. Efficient algorithm for second-order reliability analysis. *Journal of engineering mechanics* 117, 12 (1991), 2904–2923. [Page 23]
- [69] Knoop, V. L., Duret, A., Buisson, C., and Van Arem, B. Lane distribution of traffic near merging zones influence of variable speed limits. In *IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, Proceedings, ITSC* (sep 2010), IEEE, pp. 485–490. [Page 4]
- [70] Laharotte, P.-A. *Contributions à la prévision court-terme, multi-échelle et multi-variée, par apprentissage statistique du trafic routier*. PhD thesis, Université de Lyon, 2016. [Pages 6, 7]
- [71] Laharotte, P.-A., Billot, R., Come, E., Oukhellou, L., Nantes, A., and El Faouzi, N.-E. Spatiotemporal Analysis of Bluetooth Data : Application to a Large Urban Network. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 16, 3 (jun 2015), 1439–1448. [Page 69]
- [72] Laval, J. A., and Leclercq, L. The Hamilton–Jacobi partial differential equation and the three representations of traffic flow. *Transportation Research Part B : Methodological* 52 (2013), 17–30. [Pages vii, 8, 14, 15, 117, 132]
- [73] Lebacque, J.-P. Intersection Modeling, Application to Macroscopic Network Traffic Flow Models and Traffic Management. *Traffic and Granular Flow '03* (2003), 261–278. [Page 136]
- [74] Leclercq, L., and Becarie, C. Meso Lighthill-Whitham and Richards model designed for network applications. In *Transportation Research Board 91st Annual Meeting* (2012), no. 12-0387. [Pages vii, 14, 132]
- [75] Leclercq, L., Laval, J. A., and Chiabaut, N. Capacity Drops at Merges : an endogenous model. *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 17 (jan 2011), 12–26. [Page 4]
- [76] Lee, J., and Ozbay, K. New calibration methodology for microscopic traffic simulation using enhanced simultaneous perturbation stochastic approximation approach. ... *Research Record : Journal of the Transportation ...* 2124 (dec 2009), 233–240. [Page 125]
- [77] Leshem, G., and Ritov, Y. Traffic Flow Prediction using Adaboost Algorithm with Random Forests as a Weak Learner. *International Journal of Mathematical and Computational Sciences*. [Page 7]
- [78] Lighthill, M. J., and Whitham, G. B. On Kinematic Waves. II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 229, 1178 (may 1955), 317–345. [Page 8]
- [79] Liu, J. S., and Chen, R. Sequential Monte Carlo methods for dynamic systems. *Journal of the American statistical association* 93, 443 (1998), 1032–1044. [Page 68]

- [80] Loire, A. B.-p. D. Coûts des techniques de construction et d'entretien des chaussées Analyse Bretagne-Pays de la Loire Coûts des techniques de construction et d'entretien des chaussées. [Page 2]
- [81] Lorenc, A. C. The potential of the ensemble Kalman filter for NWP—a comparison with 4D-Var. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 129, 595 (2003), 3183–3203. [Page 66]
- [82] Ma, J., Dong, H., and Zhang, H. Calibration of Microsimulation with Heuristic Optimization Methods. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 1999 (jan 2007), 208–217. [Page 125]
- [83] Ma, T., and Abdulhai, B. Genetic Algorithm-Based Optimization Approach and Generic Tool for Calibrating Traffic Microscopic Simulation Parameters. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 1800 (jan 2002), 6–15. [Page 125]
- [84] Mankins, J. Technology Readiness Levels—A White Paper. *Office of Space Access and Technology, NASA, ...* (1995), 4–8. [Pages xiii, xv, 97, 98, 136]
- [85] Marczak, F., Leclercq, L., and Buisson, C. Advanced Computational Methods for Traffic Modeling, Data Processing and ITS. 464–477. [Page 136]
- [86] Melchers, R. E., and Ahammed, M. A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte Carlo structural reliability. *Computers & Structures* 82, 1 (2004), 55–61. [Page 22]
- [87] Menneni, S., Sun, C., and Vortisch, P. Microsimulation Calibration Using Speed-Flow Relationships. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 2088 (dec 2008), 1–9. [Page 125]
- [88] Mihaylova, L., Boel, R., and Hegyi, A. An unscented Kalman filter for freeway traffic estimation. *IFAC Proceedings Volumes* 39, 12 (2006), 31–36. [Page 67]
- [89] Mihaylova, L., Boel, R., and Hegyi, A. Freeway traffic estimation within particle filtering framework. *Automatica* 43, 2 (2007), 290–300. [Page 67]
- [90] Mihaylova, L., Hegyi, A., Gning, A., and Boel, R. K. Parallelized Particle and Gaussian Sum Particle Filters for Large-Scale Freeway Traffic Systems. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 13, 1 (mar 2012), 36–48. [Page 68]
- [91] Min, X., Hu, J., Chen, Q., Zhang, T., and Zhang, Y. Short-term traffic flow forecasting of urban network based on dynamic STARIMA model. In *2009 12th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems* (oct 2009), IEEE, pp. 1–6. [Page 7]
- [92] Moore, G. E., and Londergan, R. J. Sampled Monte Carlo uncertainty analysis for photochemical grid models. *Atmospheric Environment* 35, 28 (2001), 4863–4876. [Page 22]
- [93] Nanthawichit, C., Nakatsuji, T., and Suzuki, H. Application of Probe-Vehicle Data for Real-Time Traffic-State Estimation and Short-Term Travel-Time Prediction on a

- Freeway. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 1855 (jan 2003), 49–59. [Page 69]
- [94] Newell, G. A moving bottleneck. *Transportation Research Part B : Methodological* 32, 8 (nov 1998), 531–537. [Pages 4, 136]
- [95] Ngoduy, D. Applicable filtering framework for online multiclass freeway network estimation. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 387, 2-3 (jan 2008), 599–616. [Page 68]
- [96] Ngoduy, D. Low-Rank Unscented Kalman Filter for Freeway Traffic Estimation Problems. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 2260, 1 (jan 2011), 113–122. [Page 68]
- [97] Paz, A., Molano, V., and Gaviria, C. Calibration of CORSIM models considering all model parameters simultaneously. In *IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, Proceedings, ITSC* (sep 2012), IEEE, pp. 1417–1422. [Page 125]
- [98] Paz, A., Molano, V., Martinez, E., Gaviria, C., and Arteaga, C. Calibration of traffic flow models using a memetic algorithm. *Transportation Research Part C : Emerging Technologies* 55 (jun 2015), 432–443. [Page 125]
- [99] Pueboobpaphan, R., Nakatsuji, T., and Suzuki, H. Unscented Kalman Filter-Based Real-Time Traffic State Estimation. In *Transportation Research Board 86th Annual Meeting* (2007). [Page 68]
- [100] Qiu, Z., and Wang, X. Parameter perturbation method for dynamic responses of structures with uncertain-but-bounded parameters based on interval analysis. *International journal of solids and structures* 42, 18 (2005), 4958–4970. [Page 23]
- [101] Rabier, F., McNally, A., Andersson, E., Courtier, P., Uden, P., Eyre, J., Hollingsworth, A., and Bouttier, F. The ECMWF implementation of three-dimensional variational assimilation (3D-Var). II : Structure functions. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 124, 550 (1998), 1809–1829. [Page 64]
- [102] Ran, B. Traffic Estimation Based on Particle Filtering with Stochastic State Reconstruction Using Mobile Network Data. 1–15. [Page 69]
- [103] Rao, K. S. Uncertainty analysis in atmospheric dispersion modeling. *Pure and applied geophysics* 162, 10 (2005), 1893–1917. [Page 22]
- [104] Richards, P. I. Shock Waves on the Highway. *Operations Research* 4, 1 (feb 1956), 42–51. [Page 8]
- [105] Schreiter, T., Van Hinsbergen, C., Zuurbier, F. S., Van Lint, J. W. C., and Hoogendoorn, S. P. Data-model synchronization in extended Kalman filters for accurate online traffic state estimation. In *TFTC Summer Meeting 2010* (2010), no. EPFL-CONF-155495. [Page 67]
- [106] Schrempf, O. C., Brunn, D., and Hanebeck, U. D. Density approximation based on dirac mixtures with regard to nonlinear estimation and filtering. In *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on* (2006), IEEE, pp. 1709–1714. [Pages 30, 31]

- [107] Smith, B. L., Williams, B. M., and Keith Oswald, R. Comparison of parametric and nonparametric models for traffic flow forecasting. *Transportation Research Part C : Emerging Technologies* 10, 4 (aug 2002), 303–321. [Page 7]
- [108] SOeS. Les infrastructures linéaires de transport : évolutions depuis 25 ans. [Page 1]
- [109] Sondergaard, T., and Lermusiaux, P. F. J. Data assimilation with Gaussian mixture models using the dynamically orthogonal field equations. Part I : Theory and scheme. *Monthly Weather Review* 141, 6 (2013), 1737–1760. [Pages 37, 45, 79, 81, 82, 117, 161, 162]
- [110] Sudret, B. Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models—Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods. *Habilitationa diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France* (2007). [Pages xi, 22, 23]
- [111] Sudret, B., and Cherradi, I. Quadrature method for finite element reliability analysis. *Proc. of the 9th ICASP-Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, San Francisco, USA* (2003), 387–394. [Page 23]
- [112] Sun, S., Zhang, C., and Zhang, Y. Traffic Flow Forecasting Using a Spatio-Temporal Bayesian Network Predictor. [Page 7]
- [113] Takada, T. Weighted integral method in stochastic finite element analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics* 5, 3 (1990), 146–156. [Page 23]
- [114] Talagrand, O. Assimilation of Observations, an Introduction (gtSpecial Issue>Data Assimilation in Meteorology and Oceanography : Theory and Practice). *Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II* 75, 1B (1997), 191–209. [Pages xii, 8, 64, 65, 77]
- [115] Tampere, C. M., and Immers, L. H. An Extended Kalman Filter Application for Traffic State Estimation Using CTM with Implicit Mode Switching and Dynamic Parameters. In *2007 IEEE Intelligent Transportation Systems Conference* (sep 2007), IEEE, pp. 209–216. [Page 68]
- [116] Thorndahl, S., and Willems, P. Probabilistic modelling of overflow, surcharge and flooding in urban drainage using the first-order reliability method and parameterization of local rain series. *Water research* 42, 1 (2008), 455–466. [Page 23]
- [117] Toledo, T., Ben-Akiva, M., Darda, D., Jha, M., and Koutsopoulos, H. Calibration of Microscopic Traffic Simulation Models with Aggregate Data. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 1876 (jan 2004), 10–19. [Page 124]
- [118] Tsirigotis, L., Vlahogianni, E. I., and Karlaftis, M. G. Does Information on Weather Affect the Performance of Short-Term Traffic Forecasting Models? *International Journal of Intelligent Transportation Systems Research* 10, 1 (jan 2012), 1–10. [Page 7]
- [119] UC Berkeley. Mobile Millenium, 2008. [Page 69]



- [120] Van Lint, J., Hoogendoorn, S. P., and Hegyi, A. Dual EKF State and Parameter Estimation in Multi-Class First-Order Traffic Flow Models. *IFAC Proceedings Volumes* 41, 2 (jan 2008), 14078–14083. [Page 68]
- [121] Vivoni, E. R., Entekhabi, D., and Hoffman, R. N. Error propagation of radar rainfall nowcasting fields through a fully distributed flood forecasting model. *Journal of Applied Meteorology and Climatology* 46, 6 (2007), 932–940. [Page 22]
- [122] Vlahogianni, E. I., Karlaftis, M. G., and Golias, J. C. Short-term traffic forecasting : Where we are and where we're going. *Transportation Research Part C : Emerging Technologies* 43 (jun 2014), 3–19. [Page 7]
- [123] Wan, E. A., and Van Der Merwe, R. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation. In *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium 2000. AS-SPCC. The IEEE 2000* (2000), IEEE, pp. 153–158. [Page 67]
- [124] Wang, Y., and Papageorgiou, M. Real-time freeway traffic state estimation based on extended Kalman filter : a general approach. *Transportation Research Part B : Methodological* 39, 2 (2005), 141–167. [Pages 67, 68]
- [125] Wardrop, J. G. Some theoretical aspects of road traffic research. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 1, 3 (may 1952), 325–362. [Page 3]
- [126] Work, D. B., Tossavainen, O.-P., Blandin, S., Bayen, A. M., Iwuchukwu, T., and Tracton, K. An ensemble Kalman filtering approach to highway traffic estimation using GPS enabled mobile devices. In *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control* (2008), IEEE, pp. 5062–5068. [Page 69]
- [127] Xiaotian, S., Munoz, L., and Horowitz, R. Highway traffic state estimation using improved mixture kalman filters for effective ramp metering control. In *42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No.03CH37475)*, vol. 6, IEEE, pp. 6333–6338. [Page 68]
- [128] Yasin, A. M., Karim, M. R., and Abdullah, A. S. Travel Time Measurement in Real-Time using Automatic Number Plate Recognition for Malaysian Environment. *Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies* 8 (2010), 1738–1751. [Page 69]
- [129] Yu, M., and (David) Fan, W. Calibration of microscopic traffic simulation models using metaheuristic algorithms. *International Journal of Transportation Science and Technology* 6, 1 (jun 2017), 63–77. [Pages 121, 124, 125]
- [130] Yuan, Y. *Lagrangian Multi-Class Traffic State Estimation*. PhD thesis, TUDelft, 2013. [Pages 69, 75]
- [131] Yuan, Y., Duret, A., and Van Lint, H. Mesoscopic traffic state estimation based on a variational formulation of the LWR model in Lagrangian-space coordinates and Kalman filter. *Transportation Research Procedia* 10 (2015), 82–92. [Pages 68, 69, 89, 90, 91]
- [132] Yuan, Y., Scholten, F., and van Lint, H. Efficient Traffic State Estimation and Prediction Based on the Ensemble Kalman Filter with a Fast Implementation and Localized

Deterministic Scheme. In *Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2015 IEEE 18th International Conference on* (2015), IEEE, pp. 477–482. [Page 68]

- [133] Yuan, Y., Van Lint, J. W. C., Wilson, R. E., van Wageningen-Kessels, F., and Hoogendoorn, S. P. Real-time Lagrangian traffic state estimator for freeways. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 13, 1 (2012), 59–70. [Pages 68, 69]



## Annexes



**Rapidité** La rapidité d'une mesure de gestion de trafic représente sa qualité à être accompli dans un temps très bref.

**Réactivité** La réactivité d'une mesure de gestion de trafic est sa qualité à réagir à une stimulation extérieure comme un changement drastique des états de trafic dû à un incident.

**Fiabilité** La fiabilité d'une mesure de gestion de trafic correspond à la confiance que l'ensemble des acteurs concernés puissent lui donner. Ici, elle désigne la capacité à prendre en compte et suivre les erreurs de modèles.

**Adaptabilité** L'adaptabilité fait référence à la capacité du modèle à évoluer en fonction des situations pour lesquelles il a dû réagir, notamment en changeant les valeurs des paramètres.

**Etat a priori** Valeurs du vecteur d'état prédite par le modèle dans un schéma d'assimilation de données.

**Etat a posteriori** Valeurs du vecteur d'état en sortie de fusion de données, après la prise en compte de l'état observé.

**Mélange de lois** Loi de probabilité sous la forme d'une somme convexe de lois de probabilité. Une somme convexe est une somme pondérée dont les poids sont positifs, inférieurs à 1 et leur somme vaut 1.

**Composantes** Loi composant le mélange de lois de probabilité.

**MoP** Mesure de performance. Il s'agit de la variable sur laquelle le modèle et les données sont comparées dans un processus d'optimisation.

**GoF** Indicateur de la qualité de l'ajustement. Il s'agit de la fonction objectif dans un processus d'optimisation. Dans la majorité des cas, le processus d'optimisation vise à minimiser cet indicateur.

**Meta-heuristique** Algorithme permettant la recherche d'un jeu de paramètre optimal dans tout l'espace des paramètres.



## Valorisations scientifiques soumises pendant la thèse

### Revue Internationale

- [A1] CLAIRAIS, Aurélien, DURET, Aurélien, et EL FAOUZI, Nour-Eddin. Calibration of the fundamental diagram based on loop and probe data. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board*, 2016, no 2560, p. 17-25.
- [A2] Clairais, A., Duret, A., El Faouzi, N.-E. (2018). Error propagation in traffic modeling : solutions for the mesoscopic LWR model. *Transportmetrica B : Transport Dynamics*, 1–20.
- [A3] CLAIRAIS, Aurélien, DURET, Aurélien, et EL FAOUZI, Nour-Eddin. Sequential data assimilation for a Lagrangian Space LWR model with error propagations. Soumis à *Transportmetrica B : Transport Dynamics*.

### Conférences Internationales

- [A4] CLAIRAIS, Aurélien, DURET, Aurélien, et EL FAOUZI, Nour-Eddin. Errors propagation within the Lagrangian-Space LWR model : Analytical solutions. *Symposium of the European Association for Research in Transportation*, At Delft, 2016.
- [A5] CLAIRAIS, Aurélien, DURET, Aurélien, et EL FAOUZI, Nour-Eddin. Sequential data assimilation for a Lagrangian Space LWR model with error propagations. *ABMTRANS 2018*, At Porto, 2018.

### Article Court

- [A6] CLAIRAIS, Aurélien, DURET, Aurélien, et EL FAOUZI, Nour-Eddin. Sequential data assimilation for a Lagrangian Space LWR model with error propagations. *Procedia computer science*, 2018, vol. 130, p. 810-815





## Table de quantiles de la loi normale

$$\mathbb{P}[X \leq x] = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
0,00	0,500	1,10	0,864	2,05	0,980
0,05	0,520	1,15	0,875	2,10	0,982
0,10	0,540	1,20	0,885	2,15	0,984
0,15	0,560	1,25	0,894	2,20	0,986
0,20	0,579	1,282	0,900	2,25	0,988
0,25	0,599	1,30	0,903	2,30	0,989
0,30	0,618	1,35	0,911	2,326	0,990
0,35	0,637	1,40	0,919	2,35	0,991
0,40	0,655	1,45	0,926	2,40	0,992
0,45	0,674	1,50	0,933	2,45	0,993
0,50	0,691	1,55	0,939	2,50	0,994
0,55	0,709	1,60	0,945	2,55	0,995
0,60	0,726	1,645	0,950	2,576	0,995
0,65	0,742	1,65	0,951	2,60	0,995
0,70	0,758	1,70	0,955	2,65	0,996
0,75	0,773	1,75	0,960	2,70	0,997
0,80	0,788	1,80	0,964	2,75	0,997
0,85	0,802	1,85	0,968	2,80	0,997
0,90	0,816	1,90	0,971	2,85	0,998
0,95	0,829	1,95	0,974	2,90	0,998
1,00	0,841	1,96	0,975	2,95	0,998
1,05	0,853	2,00	0,977	3,00	0,999



## Généralités sur les Dirac

La fonction de Dirac est aussi appelé la fonction impulsion ; elle est particulièrement populaire dans les domaines de l'électronique et du contrôle des systèmes automatisés. Le symbole usuel de la fonction de Dirac est la lettre grecque "delta" :  $\delta$ . Les caractéristiques mathématiques de cette fonction sont les suivantes :

- elle est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en 0 ;
- elle est égale à 0 sur  $\mathbb{R}$  sauf en 0 ;
- en 0, sa valeur est infinie.

Graphiquement, elle est représentée par une flèche verticale en 0 représentant son comportement infini en ce point singulier (cf. Figure D.1). La flèche représentant la fonction de Dirac est de longueur 1 sur le graphique.

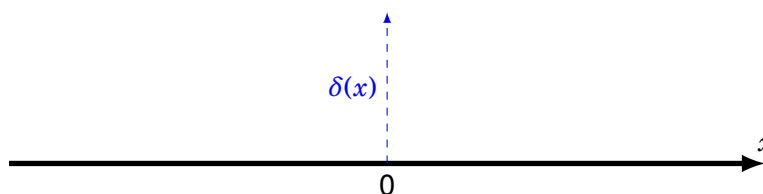


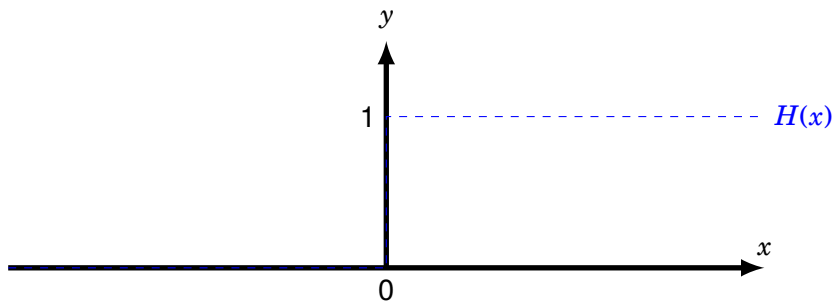
Fig. D.1.: Graphique de la fonction de dirac

La fonction échelon, dite fonction de Heaviside, est définie comme l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  de la fonction de Dirac. Elle est notée  $H$ .

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt \quad (\text{D.1})$$

Ses caractéristiques mathématiques sont les suivantes :

- elle est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en 0 ;
- elle est égale à 0 sur  $\mathbb{R}^{-*}$  ;
- elle est égale à 1 sur  $\mathbb{R}^+$  ;



**Fig. D.2.:** Graphique de la fonction de Heaviside

Graphiquement, elle prend la forme d'un échelon en 0 (cf. Figure D.2).

Les fonctions de Dirac et de Heaviside peuvent être définies en un autre point que 0 par translation selon l'axe des abscisses. Soit  $\alpha$  un réel arbitraire. La fonction de Dirac  $\delta_\alpha$  est définie comme la fonction impulsion nulle partout sauf en  $\alpha$  à valeur infinie en  $\alpha$ .

$$\delta_\alpha(x) = \delta(x - \alpha) \quad (\text{D.2})$$

Par conséquent, la fonction de Heaviside  $H_\alpha$  est définie comme la fonction de Heaviside traditionnelle traduite de  $\alpha$  suivant l'axe des abscisses.

$$H_\alpha(x) = H(x - \alpha) \quad (\text{D.3})$$

De par les propriétés de l'intégrale, les considérations de l'équation (D.1) persistent pour les fonctions  $\delta_\alpha$  et  $H_\alpha$ .

# Démonstration de la méthode de fusion de données

L'objectif de cette section est de justifier les formulations apportées dans la section précédente. Il s'agit d'une section très calculatoire aboutissant aux formulations des caractéristiques des modes de la distribution de l'état *a posteriori*. Pour information, la conclusion du chapitre est en page 85.

## E.1 Formulation du problème

Le modèle dynamique avec propagation d'erreurs renvoie une estimation de la distribution de la variable aléatoire  $X$  selon un mélange de loi Gaussiennes. Soit  $\mathcal{N}(\cdot; \cdot, \cdot)$  la valeur en un point de la fonction de densité de la loi Gaussienne paramétrée par sa moyenne et sa variance. On formalise le mélange de Gaussiennes suivant :

$$p_X(x) = \sum_{j=1}^M \pi_j^f \mathcal{N}\left(x; \bar{x}_j^f, (\sigma_j^f)^2\right) \quad (\text{E.1})$$

Le modèle d'observation renvoie une Gaussienne centrée sur la variable à estimer. Il constitue l'estimation de la variable aléatoire d'observation  $Y$  sachant  $X$ .

$$p_{Y|x}(y|x) = \mathcal{N}(y; x, r^2) \quad (\text{E.2})$$

En anglais,  $p_X(x)$  est appelé le *prior*,  $p_{Y|x}(y|x)$  constitue l'observation et ainsi  $p_{X|Y}(x|y)$  constitue la meilleur estimation de  $X$  sachant l'observation : le *posterior*.

## E.2 Calculs

La suite des calculs a été effectuée dans [109] avec des modèles de variables aléatoires plus compliqués (multi-dimension). Dans notre cas d'étude, on se contente de variables aléatoires scalaires. Les calculs ont été refaits partant des formulations de base présentes

dans la thèse [109]. Ils nous permettent de comprendre le processus de fusion de données dans les moindres détails. Par ailleurs, cela nous a permis de corriger quelques fautes de signes dans le document original. D'après le théorème de Bayes, la distribution de l'état de synthèse est donnée par :

$$\begin{aligned}
p_{X|Y}(x|y) &= \frac{p_{Y|X}(y|x)p_X(x)}{p_Y(y)} \\
&\propto p_{Y|X}(y|x)p_X(x) \\
&= \mathcal{N}(y; x, r^2) \times \sum_{j=1}^M \pi_j^f \mathcal{N}\left(x; \bar{x}_j^f, (\sigma_j^f)^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi r^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-x)^2}{r^2}} \times \sum_{j=1}^M \pi_j^f \frac{1}{\sqrt{2\pi (\sigma_j^f)^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\bar{x}_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2}} \\
&= \sum_{j=1}^M \frac{\pi_j^f}{2\pi \sqrt{(\sigma_j^f)^2 r^2}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(y-x)^2}{r^2} + \frac{(x-\bar{x}_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2} \right)}
\end{aligned} \tag{E.3}$$

On va développer l'exposant, pour tout  $j$  entre 1 et  $M$  :

$$\text{exposant} = \frac{(y-x)^2}{r^2} + \frac{(x-\bar{x}_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2} = x^2 \left( \frac{1}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{1}{r^2} \right) - 2x \left( \frac{\bar{x}_j^f}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{y}{r^2} \right) + \frac{(\bar{x}_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{y^2}{r^2} \tag{E.4}$$

Afin de faire apparaître une identité remarquable, on ajoute et on soustrait le terme suivante :

$$\left( \frac{\bar{x}_j^f}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{y}{r^2} \right)^2 \left( \frac{1}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{1}{r^2} \right)^{-1} \tag{E.5}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\text{exposant} &= x^2 \left( \frac{1}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{1}{r^2} \right) - 2x \left( \frac{\bar{x}_j^f}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{y}{r^2} \right) \\
&\quad + \left( \frac{\bar{x}_j^f}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{y}{r^2} \right)^2 \left( \frac{1}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{1}{r^2} \right)^{-1} - \left( \frac{\bar{x}_j^f}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{y}{r^2} \right)^2 \left( \frac{1}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{1}{r^2} \right)^{-1} \\
&\quad + \frac{(\bar{x}_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{y^2}{r^2}
\end{aligned} \tag{E.6}$$

On factorise le carré obtenu par identité remarquable l'exposant devient :

$$\begin{aligned} \text{exposant} = & \left[ x - \left( \frac{\bar{x}_j^f}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{y}{r^2} \right) \left( \frac{1}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{1}{r^2} \right)^{-1} \right]^2 \left( \frac{1}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{1}{r^2} \right) \\ & - \left( \frac{\bar{x}_j^f}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{y}{r^2} \right)^2 \left( \frac{1}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{1}{r^2} \right)^{-1} + \frac{(\bar{x}_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{y^2}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Sachant que :

$$\left( \frac{1}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{1}{r^2} \right)^{-1} = \left( 1 - \frac{(\sigma_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2 + r^2} \right) (\sigma_j^f)^2 = \left( 1 - \frac{r^2}{(\sigma_j^f)^2 + r^2} \right) r^2 \quad (\text{E.8})$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \text{exposant} = & \underbrace{\left[ x - \bar{x}_j^f \left( 1 - \frac{(\sigma_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2 + r^2} \right) - y \left( 1 - \frac{r^2}{(\sigma_j^f)^2 + r^2} \right) \right]^2}_{A} \left( \frac{1}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{1}{r^2} \right) \\ & - \underbrace{\left( \frac{\bar{x}_j^f}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{y}{r^2} \right)^2 \left( \frac{1}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{1}{r^2} \right)^{-1} + \frac{(\bar{x}_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{y^2}{r^2}}_B \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Pour plus de clarté dans les calculs, des termes ont été nommés respectivement  $A$  et  $B$ . Ces deux parties de l'équation vont être développées et réduites indépendamment l'une de l'autre puis réintroduites dans l'équation de l'exposant. On développe et réduit le terme  $A$  :

$$\begin{aligned} A = & \left[ x - \bar{x}_j^f \left( 1 - \frac{(\sigma_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2 + r^2} \right) - y \left( 1 - \frac{r^2}{(\sigma_j^f)^2 + r^2} \right) \right]^2 \\ = & \left[ x - \left( \bar{x}_j^f + y - \frac{(\sigma_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2 + r^2} \bar{x}_j^f - \frac{r^2}{(\sigma_j^f)^2 + r^2} y \right) \right]^2 \\ = & \left[ x - \left( \bar{x}_j^f + \frac{(\sigma_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2 + r^2} (y - \bar{x}_j^f) \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$



Ensuite, on développe et réduit maintenant le terme  $B$  :

$$\begin{aligned}
 B &= - \left( \frac{\bar{x}_j^f}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{y}{r^2} \right)^2 \left( \frac{1}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{1}{r^2} \right)^{-1} + \frac{(\bar{x}_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{y^2}{r^2} \\
 &= - \left[ \frac{(\bar{x}_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2 (\sigma_j^f)^2} + \frac{y^2}{r^2 r^2} + \frac{2\bar{x}_j^f y}{(\sigma_j^f)^2 r^2} \right] \left( \frac{(\sigma_j^f)^2 r^2}{(\sigma_j^f)^2 + r^2} \right) + \frac{(\bar{x}_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{y^2}{r^2} \\
 &= - \left[ \frac{(\bar{x}_j^f)^2 r^2}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{y^2 (\sigma_j^f)^2}{r^2} + 2\bar{x}_j^f y \right] \left( (\sigma_j^f)^2 + r^2 \right)^{-1} + \frac{(\bar{x}_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{y^2}{r^2}
 \end{aligned} \tag{E.11}$$

On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
 B &= - [\dots] \left( (\sigma_j^f)^2 + r^2 \right)^{-1} + \frac{(\bar{x}_j^f)^2 \left( 1 + \frac{r^2}{(\sigma_j^f)^2} \right)}{(\sigma_j^f)^2 \left( 1 + \frac{r^2}{(\sigma_j^f)^2} \right)} + \frac{y^2 \left( 1 + \frac{(\sigma_j^f)^2}{r^2} \right)}{r^2 \left( 1 + \frac{(\sigma_j^f)^2}{r^2} \right)} \\
 &= \left[ (\bar{x}_j^f)^2 \left( 1 + \frac{r^2}{(\sigma_j^f)^2} \right) + y^2 \left( 1 + \frac{(\sigma_j^f)^2}{r^2} \right) - \frac{(\bar{x}_j^f)^2 r^2}{(\sigma_j^f)^2} - \frac{y^2 (\sigma_j^f)^2}{r^2} - 2\bar{x}_j^f y \right] \left( (\sigma_j^f)^2 + r^2 \right)^{-1} \\
 &= (y - \bar{x}_j^f)^2 \left( (\sigma_j^f)^2 + r^2 \right)^{-1}
 \end{aligned} \tag{E.12}$$

On réintroduit maintenant les deux termes dans l'équation de l'exposant :

$$\text{exposant} = \underbrace{\left[ x - \left( \bar{x}_j^f + \frac{(\sigma_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2 + r^2} (y - \bar{x}_j^f) \right) \right]^2}_A \left( \frac{1}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{1}{r^2} \right) + \underbrace{(y - \bar{x}_j^f)^2 \left( (\sigma_j^f)^2 + r^2 \right)^{-1}}_B \tag{E.13}$$

Cette formulation de l'exposant est réintroduite dans la formule de l'état de synthèses :

$$p_{X|Y}(x|y) \propto \sum_{j=1}^M \frac{\pi_j^f}{2\pi \sqrt{(\sigma_j^f)^2 r^2}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \left[ x - \left( \bar{x}_j^f + \frac{(\sigma_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2 + r^2} (y - \bar{x}_j^f) \right) \right]^2 \left( \frac{1}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{1}{r^2} \right) + (y - \bar{x}_j^f)^2 \left( (\sigma_j^f)^2 + r^2 \right)^{-1} \right]} \tag{E.14}$$

On procède maintenant par identification. Les deux grandeurs suivantes sont définies afin de faire apparaître la moyenne et la variance de l'état de synthèse. On définit les grandeurs suivantes :

$$\begin{cases} \bar{x}_j^a = \bar{x}_j^f + \frac{(\sigma_j^f)^2}{(\sigma_j^f)^2 + r^2} (y - \bar{x}_j^f) \\ (\sigma_j^a)^2 = \left( \frac{1}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{1}{r^2} \right)^{-1} \end{cases} \quad (\text{E.15})$$

L'expression de l'état de synthèse est simplifiée :

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x|y) &\propto \sum_{j=1}^M \frac{\pi_j^f (2\pi)^{\left(\frac{1}{(\sigma_j^f)^2} + \frac{1}{r^2}\right)^{-1/2}} \left((\sigma_j^f)^2 + r^2\right)^{1/2}}{(2\pi) \left((\sigma_j^f)^2 + r^2\right)^{1/2}} \mathcal{N}\left(x; \bar{x}_j^a, (\sigma_j^a)^2\right) \mathcal{N}\left(y; \bar{x}_j^f, (\sigma_j^f)^2 + r^2\right) \\ &= \sum_{j=1}^M \pi_j^f \mathcal{N}\left(x; \bar{x}_j^a, (\sigma_j^a)^2\right) \mathcal{N}\left(y; \bar{x}_j^f, (\sigma_j^f)^2 + r^2\right) \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

On définit la grandeur suivante pour tout  $j$  :

$$\pi_j^a = \frac{\pi_j^f \times \mathcal{N}\left(y; \bar{x}_j^f, (\sigma_j^f)^2 + r^2\right)}{\sum_{i=1}^M \pi_i^f \times \mathcal{N}\left(y; \bar{x}_i^f, (\sigma_i^f)^2 + r^2\right)} \quad (\text{E.17})$$

Cette grandeur est cohérente avec la définition de poids dans les mélanges de distributions. En effet, la valeur de  $\pi_j^a$  est comprise entre 0 et 1. De plus, la somme des  $\pi_j^a$  est 1. On obtient ainsi l'expression de l'état de synthèse :

$$p_{X|Y}(x|y) = \sum_{j=1}^M \pi_j^a \mathcal{N}\left(x; \bar{x}_j^a, (\sigma_j^a)^2\right) \quad (\text{E.18})$$

L'état de synthèse est donc distribué selon un mélange de Gaussiennes défini par les valeurs de moyennes, de variances et de poids calculées dans les équations (E.15) et (E.17).

On définit  $K_j$  le mode  $j$  du gain de Kalman comme suivant :

$$K_j = (\sigma_j^f)^2 \left( (\sigma_j^f)^2 + r^2 \right)^{-1} \quad (\text{E.19})$$

Les équations des moyennes et des variances des modes de la distribution de l'état de synthèse sont transformées non sans rappeler les formulations usuelles utilisées dans le filtre de Kalman.

$$\begin{cases} \bar{x}_j^a = \bar{x}_j^f + K_j(y - \bar{x}_j^f) \\ (\sigma_j^a)^2 = (1 - K_j)(\sigma_j^f)^2 \end{cases} \quad (\text{E.20})$$

Cette section de démonstration nous a permis de démontrer que l'estimation de l'état *a posteriori* découle d'une méthode d'inférence Bayésienne. Les formulations permettent de faire l'analogie avec les formulations usuelles du filtre de Kalman.

## Quelques mots d'implémentation algorithmique

Cette Annexe rassemble une description détaillée de l'implémentation algorithmique de la méthode d'assimilation de données développée dans la thèse. Le prototype a été codé en langage Python. La section F.1 décrit les algorithmes mis en place pour le modèle d'écoulement. Elle fait référence à des notions développées dans le chapitre 2. La section F.2 décrit les algorithmes mis en place pour l'assimilation de données. Elle fait référence aux notions expliquées dans les chapitre 3 et 4.



---

**Algorithme 3** Calcul du terme de demande

---

**si** Le noeud **ACTUEL** est le noeud d'entrée **alors**  
Le terme de demande est le temps d'entrée du véhicule sur le réseau  
**sinon**  
Récupération du noeud amont  
Calcul du mélange de Gaussiennes du terme de demande  
**fin si**

---

---

**Algorithme 4** Calcul du terme d'offre

---

**si** Le noeud **ACTUEL** est le noeud de sortie **alors**  
Récupération du temps de passage du véhicule précédent  
Calcul du mélange de Gaussienne du terme d'offre relatif à la capacité  
**sinon**  
Récupération du noeud aval  
Récupération des indices de véhicules liées aux EI<sup>1</sup> discrètes  
Calcul des probabilités liées aux EI discrètes  
**pour** l'ensemble des indices de véhicules concernés **faire**  
Calcul du mélange de Gaussiennes du terme liée à l'EI discrète concernée  
Pondération par la probabilité liée à l'EI discrète concernée  
Ajout du résultat dans le mélange de Gaussiennes du terme d'offre  
**fin pour**  
**fin si**

---

---

**Algorithme 5** Calcul du temps de passage

---

Génération des particules relatives au terme de demande  
Génération des particules relatives au terme d'offre  
Calcul du maximum sur l'ensemble des particules  
Appel de l'algorithme EM pour calculer le mélange de Gaussiennes calé sur les particules  
  
**si** la moyenne du terme de demande est supérieure à la moyenne du temps d'offre **alors**  
Le régime de l'écoulement est fluide  
**sinon**  
Le régime de l'écoulement est congestionné  
**fin si**

---

## F.2 Partie relative aux algorithmes avec assimilation de données

---

### Algorithme 6 Algorithme Principal Avec Assimilation de données

---

```
Récupération des paramètres de simulation
Initialisation du prochain événement :  $[i_1, N0]$ 
Initialisation du prochain temps de départ : 0
Initialisation des événements passés :  $\emptyset$ 
Initialisation des sorties de la simulation :  $\emptyset$ 
Récupération des observations au noeud d'observation
Calcul du temps jusqu'à la première observation # Simulation du temps réel
tant que Le modèle d'écoulement n'a pas terminé ou que les observations ne sont pas
toutes passées faire
  si La simulation n'est pas terminée alors
    Appel de l'algorithme 8 # Mise à jour
  fin si
  si Les observations ne sont pas toutes passées alors
    si le temps d'arrivée d'une nouvelle donnée est dépassé alors
      Mise à jour du prochain temps d'arrivée d'une donnée
      Appel de l'algorithme 7 # Fusion de données
    tant que l'évènement recherché n'a pas été trouvé faire
      Récupération de l'évènement précédent
      si l'évènement précédent est l'évènement recherché alors
        L'évènement recherché a été trouvé
      sinon
        L'évènement récupéré est supprimé
      fin si
    fin tant que
    si un véhicule est à ajouter alors
      Le véhicule ACTUEL est le véhicule à ajouter
      L'évènement suivant est le véhicule ACTUEL au noeud d'observation
    fin si
  fin si
fin tant que
```

---

---

**Algorithme 7** Algorithme de fusion de données

---

Calcul de la période de fusion

Calcul de l'événement à retrouver parmi les événements passés

**si** le régime de l'observation est fluide **alors**

**si** le régime de l'écoulement simulé est fluide **alors**

**si** il n'y a pas de véhicule simulés pendant la période de fusion **alors**

      Le véhicule observé doit être ajouté dans la simulation

**sinon**

      On récupère le véhicule le plus proche de l'observation

      Calcul de l'état de synthèse

      L'état simulé doit être mis à jour par l'état de synthèse dans la simulation

      L'ensemble des autres véhicules contenus dans la période de fusion doivent être supprimés

**fin si**

**sinon**

**si** il n'y a pas de véhicule simulés pendant la période de fusion **alors**

      Le véhicule observé doit être ajouté dans la simulation

**sinon**

      On récupère le premier véhicule de la période de fusion

      Calcul de l'état de synthèse

      L'état simulé doit être mis à jour par l'état de synthèse dans la simulation

      L'ensemble des autres véhicules contenus dans la période de fusion doivent être retardés

**fin si**

**fin si**

**sinon**

**si** le régime de l'écoulement simulé est congestionné **alors**

**si** il n'y a pas de véhicule simulés pendant la période de fusion **alors**

      On avance le temps de passage du véhicule suivant la période de fusion à l'instant observé

**sinon**

      On récupère le premier véhicule de la période de fusion

      Calcul de l'état de synthèse

      L'état simulé doit être mis à jour par l'état de synthèse dans la simulation

      L'ensemble des autres véhicules contenus dans la période de fusion doivent être retardés

**fin si**

**sinon**

**si** il n'y a pas de véhicule simulés pendant la période de fusion **alors**

      On avance le temps de passage du véhicule suivant la période de fusion à l'instant observé

**sinon**

      On récupère le véhicule le plus proche de l'observation

      Calcul de l'état de synthèse

      L'état simulé doit être mis à jour par l'état de synthèse dans la simulation

      L'ensemble des autres véhicules contenus dans la période de fusion doivent être supprimés

**fin si**

**fin si**

**fin si**

---



---

**Algorithme 8** Algorithme de mise à jour du modèle d'écoulement

---

**si** le véhicule **ACTUEL** doit être ajouté et que le noeud **ACTUEL** est le noeud d'observation **alors**

Le véhicule **ACTUEL** est ajouté dans la simulation

L'événement suivant est le véhicule **ACTUEL** au noeud **SUIVANT**

**sinon si** le véhicule **ACTUEL** doit être supprimé et que le noeud **ACTUEL** est le noeud d'observation **alors**

Le véhicule **ACTUEL** est supprimé de la simulation

L'événement suivant est le véhicule **SUIVANT** au noeud d'entrée

**sinon si** le véhicule **ACTUEL** doit être mis à jour et que le noeud **ACTUEL** est le noeud d'observation **alors**

Le temps de passage du véhicule **ACTUEL** est mis à jour

L'événement suivant est le véhicule **ACTUEL** au noeud **SUIVANT**

**sinon si** le véhicule **ACTUEL** doit être avancé et que le noeud **ACTUEL** est le noeud d'observation **alors**

Le temps d'offre du véhicule **ACTUEL** est mis à jour

Appel de l'algorithme 3 # Calcul du temps de demande

Appel de l'algorithme 5 # Calcul du temps de passage

L'événement suivant est le véhicule **ACTUEL** au noeud **SUIVANT**

**sinon si** le véhicule **ACTUEL** doit être retardé et que le noeud **ACTUEL** est le noeud d'observation **alors**

Le temps d'offre du véhicule **ACTUEL** est mis à jour

Appel de l'algorithme 3 # Calcul du temps de demande

Appel de l'algorithme 5 # Calcul du temps de passage

L'événement suivant est le véhicule **ACTUEL** au noeud **SUIVANT**

**sinon**

Écoulement sans assimilation de données comme dans l'Algorithme 1

**fin si**

---

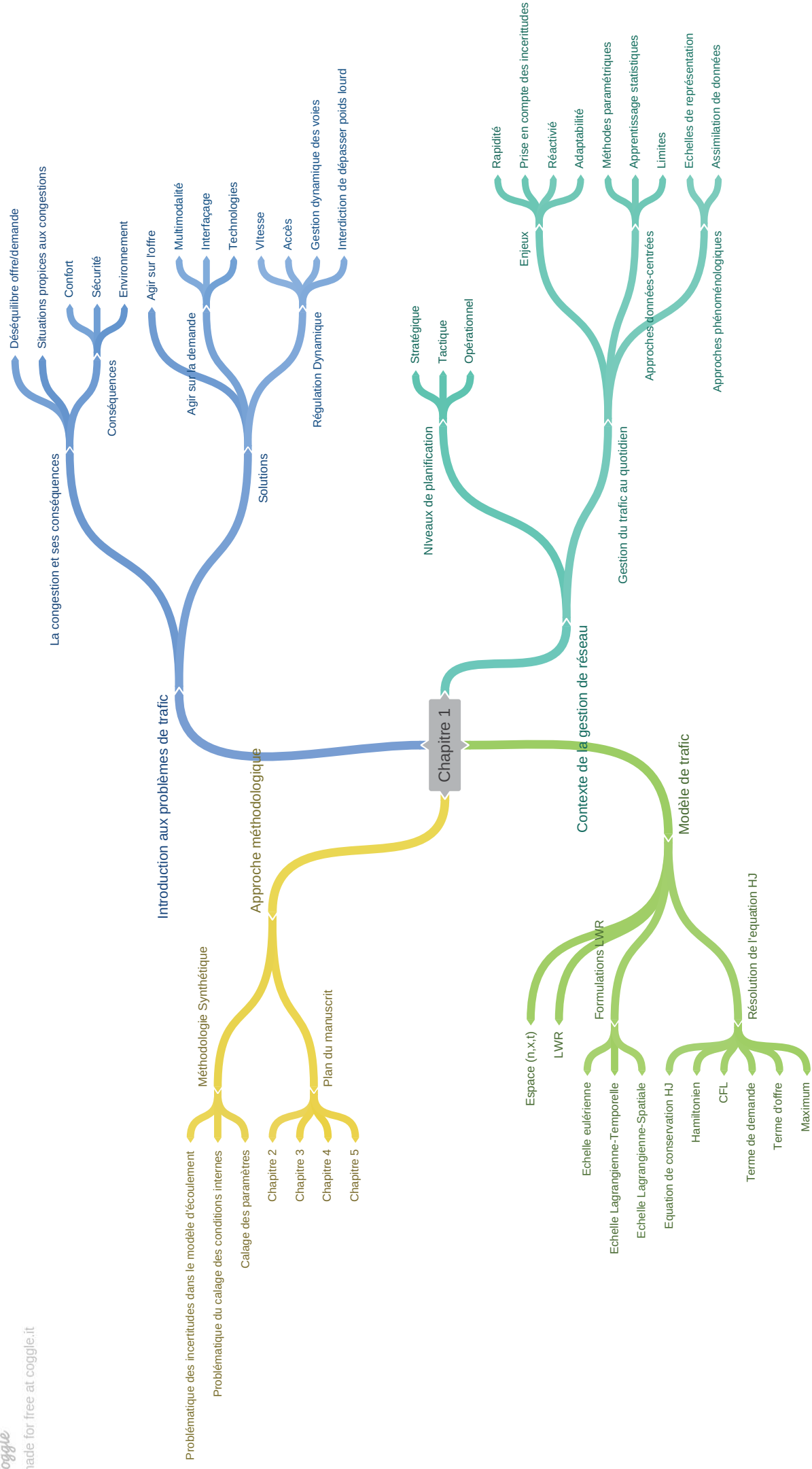
## Carte mentales du plan de thèse

## Table des matières

Chapitre 1 . . . . .	175
Chapitre 2 . . . . .	177
Chapitre 3 . . . . .	179
Chapitre 4 . . . . .	181
Chapitre 5 . . . . .	183

---

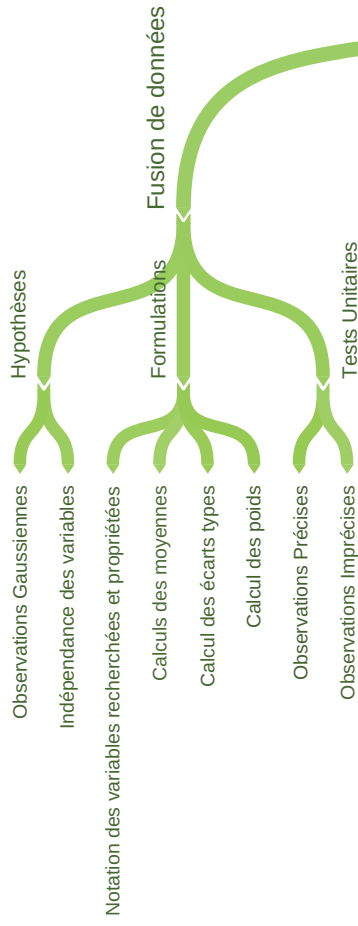




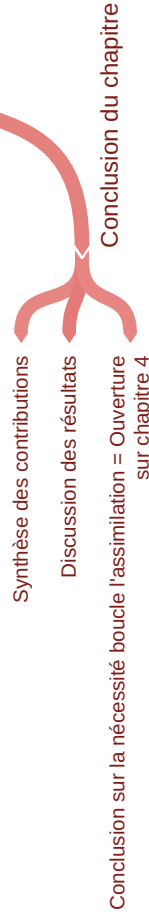






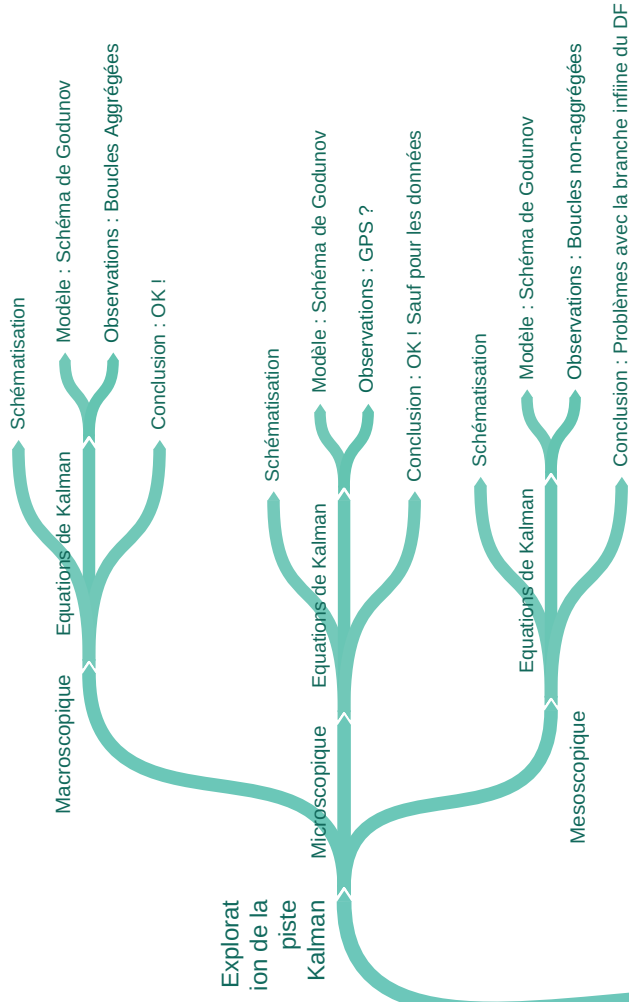


### Démonstration de la formule de fusion de données

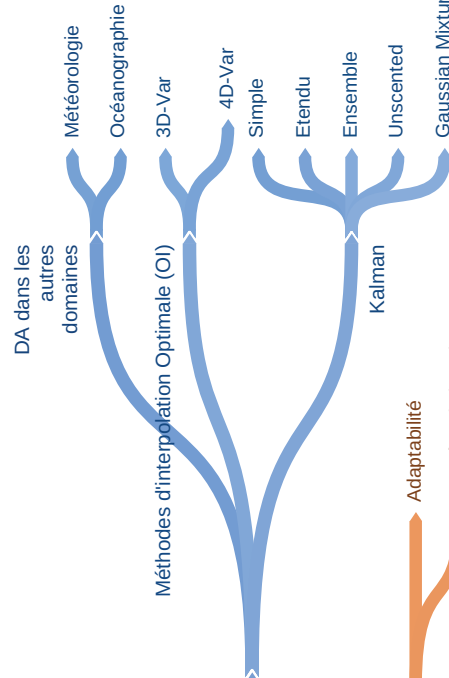


## Chapitre 3

### Exploration de la piste Kalman



### Etat de l'art



### Introduction

