



Gestion en futaie régulière d'une forêt à plusieurs classes d'âge et allocation des terres en présence d'un risque de tempête : caractérisation des états stationnaires et rôle des préférences

Gaspard Dumollard

► To cite this version:

Gaspard Dumollard. Gestion en futaie régulière d'une forêt à plusieurs classes d'âge et allocation des terres en présence d'un risque de tempête : caractérisation des états stationnaires et rôle des préférences. Economies et finances. Université Paris Saclay (COMUE), 2016. Français. NNT : 2016SACLA019 . tel-02303244

HAL Id: tel-02303244

<https://theses.hal.science/tel-02303244>

Submitted on 2 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2016SACLA019

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY
PRÉPARÉE À AGROPARISTECH

Ecole doctorale n°581
ABIES

Spécialité de doctorat : Sciences économiques

par

M. GASPARD DUMOLLARD

Gestion en futaie régulière d'une forêt à plusieurs classes d'âge et
allocation des terres en présence d'un risque de tempête :
caractérisation des états stationnaires et rôle des préférences

Thèse présentée et soutenue à Paris, le 2 décembre 2016.

Composition du Jury :

Mme	KATHELINE SCHUBERT	Professeur Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne	(Présidente)
Mme	MABEL TIDBALL	Directrice de recherche INRA Montpellier	(Rapporteure)
Mme	MARIELLE BRUNETTE	Chargée de recherche INRA Nancy-Lorraine	(Rapporteure)
M.	STÉPHANE DE CARA	Directeur de recherche INRA Grignon	(Directeur de thèse)
M.	PIERRE-ALAIN JAYET	Directeur de recherche INRA Grignon	(Directeur de thèse)

Remerciements

Je tiens à remercier Mabel Tidball, Marielle Brunette ainsi que Katheline Schubert d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse, respectivement en temps que rapporteuses/rapportrices/rapporteuses¹ et examinatrice.

Je remercie également mes directeurs de thèse Pierre-Alain Jayet et Stéphane De Cara de m'avoir fait confiance et de m'avoir épaulé, y compris moralement, quand il le fallait. Je remercie aussi Pierre-Alain pour le skiminaire, dont il devrait faire breveter le nom et le concept.

J'adresse un grand merci à Barbara, Brigitte/Maman et Ophélie pour leurs relectures attentives de mon manuscrit.

Je remercie évidemment mes collègues et amis d'EcoPub avec qui j'ai passé un temps certain en pause café, à la cantine ou au soleil, à rigoler et à refaire le monde ! Merci à Anne que j'ai eu bien du mal à suivre à la course, à Anna ma camarade aux champs comme à la ville, à Barbara toujours partante pour rire aux éclats et boire un canon, à Céline ma poteasse, à Coline qui partage mon amour de la Chouffe(!), à Clément mon camarade de couloir qui m'aura rendu (un peu) moins mauvais au tennis, à Delphine jamais à court d'anecdotes, à Elvire pour son cheese-cake, à Géraldine pour sa gentillesse et ses bons conseils, à Juliette qui nous apporte tant de gâteaux, à Maria pour les séances potins, à Myriam qui rigole à toutes mes blagues même quand elles sont franchement ratées, à Nosra pour sa bonne humeur et son sourire communicatifs, à Parisa toujours tirée à quatre épingles, à Pierre mon coach muscu, à Poly le nouveau gardien du temple, à Stello pour ses talents d'imitateur, à Sylvie L. l'ancienne gardienne du temple. Un grand merci aussi à Ancuta, Estelle, Guy, Loïc, Maia, Mathis, Pierre-Alain, Stéphane, Sylvie B., Théo et Vincent !

J'adresse également un immense merci à tous ceux qui ont partagé ma vie à Grignon pendant ces trois années et l'ont rendue fort plaisante. Je pense en particulier à mes colocs,

1. D'après de longues recherches approfondies sur internet, il semblerait que les trois formes soient correctes.

anciens ou actuels : Anna grâce à qui j'ai réussi à prendre un peu de poids, Clémence ma coloc au long cours, Leticia qui m'a aidé à descendre "quelques" bières mais aussi Armindo, Xochitl et Romain. Mais je pense aussi à toute la "communauté" grignonnaise, à Ophélie "Kiki", à Nadège toujours à l'affût d'une bonne vanne mais pourtant toujours à l'écoute, à Mathilde une vraie Ch'tite, à Julie dont la bonne humeur est inaltérable, à Damien un athlète, à Laure au calme légendaire et à tous les autres dont la liste est longue... Merci à tous pour votre promptitude à l'apéro, votre enthousiasme à organiser des soirées aux thèmes incongrus, pour les barbecs et les repas de famille du dimanche, pour les séances de psychothérapie collective autour d'une bonne tisane, pour les sorties sportives de l'extrême dans le parc de Grignon, ... $+\infty$

Enfin, un grand merci à toute ma famille, à mes parents Brigitte et Roland, à ma soeur Eugénie, et à Alban, pour leur soutien indéfectible et pour m'avoir écouté geindre avec patience dans les moments où ma thèse n'avancait pas assez vite... Pour finir, un grand merci à Gaillarde qui est probablement la seule à ne pas m'avoir posé les questions qui fâchent : "C'est quoi ton sujet de thèse ?" ou pire encore "Elle avance bien ta thèse ?".

Table des matières

Introduction générale	13
Contexte	13
Problématiques	16
Chapitre 1 : Etat de l'art en économie forestière	21
1.1 Panorama sur l'économie forestière	21
1.1.1 Gestion forestière en contexte déterministe	21
1.1.2 Gestion forestière en contexte stochastique	27
1.2 Gestion forestière, changement climatique et anticipations	34
1.3 Les préférences récursives dans un contexte dynamique et stochastique	36
1.4 Usage des sols et changement d'usage des sols	38
1.5 Eléments de conclusion	41
Chapitre 2 : Gestion d'une forêt à plusieurs classes d'âge en présence d'un risque de perturbation et de préférences récursives	43
2.1 Introduction	48
2.2 The stochastic dynamic forest management program	52
2.3 Analytical characterization of stationary forests	56
2.3.1 Conditions of stationarity of normal forests and characterization of rotation ages	57

2.3.2	Demonstration	60
2.3.3	Alternative stationary forests	67
2.4	Sensitivity of the optimal rotation age to preferences : a numerical application	69
2.4.1	The stochastic dynamic programming model	70
2.4.2	Results	72
2.5	Discussion	78
2.6	Appendices	79
2.7	Gestion d'une forêt en futaie régulière et en temps continu	87
2.7.1	Introduction	87
2.7.2	Un modèle de gestion forestière en temps continu	88
2.7.3	Caractérisation analytique des états stationnaires dans un cadre continu	89
2.7.4	Démonstration	91
2.7.5	Discussion	94
 Chapitre 3 : Gestion forestière et changement climatique : le rôle des anticipations		 97
3.1	Introduction	97
3.2	Modélisation du changement climatique et des anticipations dans un cadre dynamique stochastique	100
3.2.1	Scénarios d'évolution du risque de tempête	100
3.2.2	Un modèle dynamique stochastique de gestion forestière avec chan- gement climatique et anticipations	104

3.3	Résultats	108
3.3.1	Statique comparative sur les probabilités de tempête	108
3.3.2	Changement climatique et anticipations dynamiques	111
3.4	Discussion	115
 Chapitre 4 : Allocation des terres entre une forêt à plusieurs classes d'âge et un usage agricole en présence d'un risque de perturbation et de préférences récursives		119
4.1	Introduction	124
4.2	A stochastic land allocation and forest management program	126
4.3	Analytical characterization of stationary land allocations	132
4.3.1	Stationary land allocations and normal forests	132
4.3.2	Demonstration	136
4.4	Stationary land allocation and forest management : a numerical application	144
4.4.1	A stochastic dynamic programming model	145
4.4.2	Results	147
4.5	Discussion	151
4.6	Appendices	153
 Conclusion générale		163
	Synthèse des résultats	163
	Contributions et limites	165

Perspectives	167
Annexe 1 : Un modèle dynamique stochastique de gestion forestière	171
Script 1 : Script GAMS de résolution du modèle dynamique stochastique . .	179
Script 2 : Ensemble $\mathbb{D}$ des états discrets de la forêt	193
Références	195

Liste des figures

1	Rendements marginaux décroissants et allocation des sols	40
2	Timeline of decisions and realizations between t and $t + 1$	53
3	Recursive aggregation and the binomial tree	62
4	Examples of stationary forests with multiple harvest ages	73
5	Impact of risk aversion on the stationary average rotation age	74
6	Impact of intertemporal preferences on the stationary average rotation age .	76
7	Joint impact of preferences on the stationary average rotation age	77
8	Scénarios d'évolution du risque de tempête	103
9	Chronologie des décisions, et de la résolution du risque et de l'incertitude . .	105
10	Statique comparative sur les probabilités de tempête et aversion au risque .	109
11	Statique comparative sur les probabilités de tempête et préférences inter- temporelles	110
12	Aversion au risque et scénarios climatiques	112
13	Préférences intertemporelles et scénarios climatiques	113
14	Trajectoires d'ajustement de l'âge moyen de rotation stationnaire : adapta- tion réactive contre anticipations dynamiques	115
15	Timeline of decisions and realizations between t and $t + 1$	128
16	Recursive aggregation and the binomial tree	138
17	Impact of risk aversion on land allocation	148

18	Impact of intertemporal preferences on land allocation	149
19	Joint impact of preferences on land allocation	150
20	Chronologie des évènements entre t et $t + 1$	172

Liste des tableaux

1	Timber revenue in function of the age	70
2	Storms and probabilities	71
3	Le risque de tempête à l'état initial	101
4	Timber revenue in function of the age	145
5	Storms and probabilities	146
6	Les tempêtes, leurs probabilités et leurs conséquences	172
7	Evolution de la valeur du bois en fonction de l'âge	174

Introduction générale

Contexte

Afin de se convaincre de l'importance du risque climatique sur les forêts, il suffit de considérer l'ampleur des dégâts provoqués par certaines tempêtes récentes. Dans le cas de la France, les conséquences sur le long terme de deux tempêtes majeures survenues à dix ans d'intervalle, Lothar et Martin en 1999, et Klaus en 2009, illustrent bien le phénomène. En particulier, le massif des Landes de Gascogne, qui représente environ 5.3% de la surface forestière française et 5.1% du volume de la production annuelle de bois (IFN, Résultats Standards, campagnes 2009 à 2013), a été particulièrement touché. A la suite de la tempête Klaus, l'inventaire détaillé des dégâts dans le quart Sud-Ouest de la France, réalisé par l'Inventaire Forestier National, a en effet montré que dans le seul massif des Landes, 63% des surfaces en pin maritime avaient été touchées par la tempête et, sur plus de 60% de ce sous-total, au moins 20% du stock de bois était endommagé. Ces dommages ont eu un impact direct sur les producteurs touchés et indirect sur le secteur par une baisse temporaire mais significative des prix pour le pin maritime (cf. [Caurila et al. \(2015\)](#)). Enfin, ces dommages ont eu un impact sur les finances publiques puisque l'Etat a subventionné à hauteur de 465 millions d'euros un plan "chablis" dont le but a été d'aider au nettoyage et à la reconstitution des surfaces forestières les plus touchées.

En plus de la gestion à court-terme de leurs conséquences, ces tempêtes ont amené à une remise en cause plus large des schémas de production classiques. Ils ont conduit au lancement d'un certain nombre de programmes de recherche, ainsi que d'initiatives pratiques, afin de mieux comprendre les enjeux du risque de tempête sur les forêts et d'identifier des leviers d'adaptation. En particulier, cette question s'est posée sous l'angle du changement climatique. Par exemple, le programme CLIMAQ (2008-2012) (voir [Lesgourgues \(2012\)](#)), réunissant des acteurs de la filière forestière ainsi que l'INRA, porte sur l'adaptation des forêts d'Aquitaine au changement climatique. Ce programme propose des solutions techniques afin de se prémunir contre les événements extrêmes dont les fréquences pourraient être accrues par le changement climatique, dont les tempêtes, la sécheresse ou les risques

sanitaires. Les conclusions de ce programme recommandent un raccourcissement des rotations, une diversification des essences et plus largement une modification des itinéraires techniques en sylviculture. Par ailleurs, il est suggéré de développer des débouchés alternatifs pour le bois, tels que le bois énergie par exemple, allant de pair avec l'évolution des choix d'essence et des techniques sylvicoles.

Si la sylviculture du pin maritime dans les Landes de Gascogne est un cas d'école particulièrement éclairant, la question de l'adaptation aux risques destructifs se pose toutefois à une échelle géographique et sectorielle bien plus large. Sur la base d'une revue de littérature, [Schelhaas et al. \(2003\)](#) dressent un panorama des dégâts imputables à diverses "perturbations" sur les forêts européennes de 1950 à 2000. Au total, ils dénombrent 35 millions de m³ de bois endommagés, soit 8.1% du volume total des arbres abattus sur la même période. 53% du volume total endommagé l'a été par des tempêtes, 16% par des incendies et 16% par des facteurs biotiques (parasites, maladies, etc.), le reste se divisant entre les autres facteurs abiotiques et les dégâts dus à des causes multiples.

Selon [Schelhaas et al. \(2010\)](#), un risque destructif ou une "perturbation" pour la forêt peut être appréhendé à travers trois composantes : la probabilité (*hazard*), l'exposition et la vulnérabilité. La composante probabiliste est directement liée au changement climatique et [Schelhaas et al. \(2010\)](#) suggèrent que la probabilité des incendies de forêt devrait augmenter à travers toute l'Europe et que la probabilité des tempêtes devrait augmenter au moins en Europe de l'Ouest. Dans le même article, l'exposition est définie comme la totalité du volume de bois exposé aux risques de perturbation. La vulnérabilité est, elle, définie comme la sensibilité d'un peuplement donné à un risque donné, elle est donc différenciée en fonction de l'essence, de l'âge du peuplement, du lieu et du risque considéré. [Schelhaas et al. \(2010\)](#) prévoient que les composantes exposition et vulnérabilité devraient également augmenter du fait d'une expansion des surfaces forestières liées à la déprise agricole et du vieillissement des forêts.

En ce qui concerne l'adaptation au risque d'incendie, [Schelhaas et al. \(2010\)](#) préconisent en priorité de réduire la vulnérabilité, notamment par des changements d'essence des conifères aux feuillus. S'agissant du risque de tempête, le raccourcissement des rotations doit

permettre de réduire et l'exposition et la vulnérabilité. Ainsi, l'adaptation au risque de tempête est en partie un problème de gestion forestière. Parmi les autres risques destructifs pesant sur la forêt, [Amacher et al. \(2009\)](#) listent la neige et la glace, le gel, la sécheresse, les glissements de terrain, les inondations ou encore les volcans.

D'un point de vue économique, la question de la gestion forestière en présence d'un risque de perturbation est un problème à la fois dynamique et stochastique. En effet, le producteur forestier doit arbitrer à chaque instant entre revenus présents et futurs, et cet arbitrage dépend entre autres du risque car le fait de reporter la récolte d'un stock de bois donné l'expose à un risque de dégâts dans le futur. Par ailleurs, le producteur arbitre quant à la régularité de son revenu au fil du temps et cette régularité peut également être affectée par la survenue d'un événement destructif.

Dans le cadre de ces arbitrages, autant il peut être admis qu'un gestionnaire de forêt publique cherche à maximiser l'espérance de la valeur actuelle nette des revenus (et possiblement des aménités) générés par une forêt donnée, autant la gestion par un producteur privé est probablement affectée par un ensemble de préférences subjectives. Or les producteurs privés représentent 75% des surfaces forestières en France et près de 95% dans le massif des Landes de Gascogne.

Il existe un réel enjeu à bien comprendre voire à estimer ces préférences, dans une perspective aussi bien normative que positive. D'une part, au moins en France, la puissance publique est très impliquée dans le secteur forestier, que ce soit pour des raisons économiques (développement du secteur), financières (en France, l'Etat joue souvent le rôle d'assureur en dernier ressort), territoriales (pérennisation d'une activité forestière dans certains territoires ruraux) ou pour des raisons environnementales. Or la régulation d'un secteur privé passe par la bonne anticipation des réactions des agents de ce secteur à différents signaux ou politiques. D'autre part, d'autres agents privés, en particulier les assureurs, que l'Etat souhaite voir jouer un rôle plus important dans le secteur forestier à l'avenir, ont également intérêt à mieux comprendre le comportement des producteurs forestiers.

Enfin, il est important de noter que l'impact du risque et des préférences des producteurs

sur la gestion forestière peut et doit être considéré au sens large. En effet, une surface forestière peut être abandonnée ou convertie à un autre usage du sol tel que l’agriculture. La possibilité d’abandon ou l’existence d’un usage alternatif est de nature à affecter la relation entre risque, préférences et gestion forestière, et inversement.

Problématiques

Cette thèse aborde le problème de la gestion forestière à plusieurs classes d’âge à l’échelle du producteur et à travers le prisme de la futaie régulière (*even-aged forestry*). Ce type d’approche a le double avantage d’être plus général que les modèles de rotation à classe d’âge unique (voir [Faustmann \(1849\)](#)) et d’une plus grande tractabilité, analytique et numérique, que les modèles de futaie irrégulière (*uneven-aged forestry*). En effet, les modèles à la Faustmann ne traitent que du problème de la rotation optimale quand les modèles à plusieurs classes d’âge abordent également la question de la structure forestière optimale. Par ailleurs, les modèles de futaie régulière sont mathématiquement plus simples à représenter que les modèles de futaie irrégulière et requièrent moins d’hypothèses. En outre, la futaie régulière est de fait un mode de gestion très répandu, par exemple en Scandinavie ou, en France, dans la forêt des Landes de Gascogne.

L’étude de la gestion d’une forêt à plusieurs classes d’âge en présence d’un risque de perturbation est relativement peu abordée dans la littérature (voir le chapitre [1](#)). En particulier, il n’y a pas à notre connaissance de résultats analytiques forts sur ce sujet.

Il existe deux principales manières d’appréhender la gestion forestière : i) la caractérisation des équilibres stationnaires, et ii) la caractérisation des dynamiques transitoires à partir d’un état initial non stationnaire, jusqu’au moment où la forêt atteint l’équilibre.

Un équilibre stationnaire est tel, qu’une fois atteint, le système n’en dévie pas. Un tel équilibre est atteint sur le long terme (au moins asymptotiquement) par un système de production forestière en l’absence prolongée de choc exogène. Il est donc pertinent de s’intéresser aux équilibres stationnaires dans un contexte de risque de perturbation dont la probabilité est faible. Et même dans les cas de figure où l’équilibre stationnaire est rarement

atteint, il constitue un horizon vers lequel tendent les choix du producteur. L'équilibre stationnaire est ainsi le révélateur du comportement et donc des préférences du producteur. En outre, d'un point de vue pratique, la caractérisation des équilibres stationnaires se prête en général plus facilement à des approches analytiques que l'étude des dynamiques transitoires (cf. [Salo and Tahvonen \(2002b\)](#)). Le choix a ainsi été fait d'orienter cette thèse vers l'étude des équilibres stationnaires.

Une autre contribution importante de cette thèse consiste en l'usage généralisé des préférences récursives (cf. [Kreps and Porteus \(1978\)](#)) pour modéliser le comportement des producteurs forestiers. L'avantage des préférences récursives sur l'espérance d'utilité est d'une part de ne pas être neutre quant à la chronologie de résolution du risque (une résolution plus précoce du risque pourra par exemple être préférée), et d'autre part de distinguer aversion au risque (préférence pour un revenu sûr) et préférences intertemporelles (préférence pour un revenu régulier au cours du temps). Ces deux éléments paraissent indispensables à la représentation des préférences dans un modèle dynamique et stochastique. En outre, l'utilisation des préférences récursives justifie l'absence d'arbitrage entre consommation et épargne dans les modèles utilisés dans cette thèse. En effet, comme il est expliqué dans la revue de littérature (cf. [Spence and Zeckhauser \(1972\)](#)), les préférences récursives sur le flux de revenu sont une conséquence de cet arbitrage. Il serait donc redondant de considérer en plus des préférences récursives et un arbitrage consommation/épargne.

Au sein de la question générale de la gestion d'une forêt à plusieurs classes d'âge en présence d'un risque de perturbation, cette thèse se propose de répondre à trois questions plus spécifiques, abordées dans trois chapitres distincts.

La première question est abordée dans le chapitre 2 et porte sur la caractérisation des modes stationnaires de gestion forestière en présence d'un risque de tempête lorsque le producteur a des préférences récursives. Concrètement, il s'agit de déterminer la structure en classes d'âge et le ou les âges de rotation à l'équilibre stationnaire, ainsi que leurs déterminants. Cette problématique est fondamentale dans le cadre de cette thèse et sert de point de départ à la compréhension des chapitres suivants. Ce problème a déjà été abordé numériquement dans [Couture and Reynaud \(2008\)](#) mais nous complétons leur approche par

des résultats analytiques et par une caractérisation claire des rôles respectifs de l'aversion au risque et des préférences intertemporelles. Le modèle de [Couture and Reynaud \(2008\)](#) permet en effet un arbitrage entre consommation et épargne qui masque l'influence des préférences sur la gestion forestière.

L'approche analytique est basée sur les conditions de Karush-Kuhn-Tucker. Cette approche a déjà été utilisée dans des problèmes dynamiques de gestion forestière à classes d'âge multiples, mais dans un cadre déterministe, par exemple dans [Salo and Tahvonen \(2002b\)](#). Il s'agit donc d'adapter cette approche à la présence d'un risque de perturbation. Dans ce cadre, la prise en compte de tous les scénarios futurs possibles pose un défi méthodologique. Les résultats analytiques obtenus doivent permettre d'identifier les déterminants de l'équilibre stationnaire. En outre, une attention particulière est portée aux conditions d'unicité de l'âge de rotation.

En parallèle, un modèle numérique de programmation dynamique stochastique, basé sur la sylviculture du pin maritime dans les Landes de Gascogne, est développé afin d'illustrer et de compléter les résultats analytiques. En outre, ce modèle est utilisé pour mesurer la sensibilité des états stationnaires, en particulier la sensibilité de l'âge de rotation, respectivement à l'aversion au risque et aux préférences intertemporelles. Les modèles numériques utilisés dans les autres chapitres sont tous des extensions de ce premier modèle, qui est décrit en détail dans l'annexe [1](#).

La transposition de cette première question dans un cadre en temps continu est abordée dans la section [2.7](#). Le cadre continu pose certaines questions additionnelles par rapport au cadre discret. Tout d'abord, le nombre de classes d'âge n'est plus limité *a priori* et il est ainsi possible que l'état stationnaire soit une forêt dans laquelle chaque classe d'âge occupe une surface infinitésimale. Ce type de résultat remettrait en cause l'approche en futaie régulière qui repose sur l'hypothèse que les dynamiques de croissance des différentes classes d'âge sont indépendantes les unes des autres. Par ailleurs, des continuums d'âge de récolte pourraient exister à l'état stationnaire.

Pour tenter de répondre à ces questions par une approche analytique, les conditions de stationnarité obtenues en temps discret sont transposées en temps continu par passage à

la limite, lorsque le pas de temps devient infiniment petit.

La deuxième question est abordée dans le chapitre 3 et traite de l'impact du changement climatique et de l'incertitude qui en découle sur les décisions du producteur au moment présent. En effet, selon [Schelhaas et al. \(2010\)](#), les probabilités de tempête devraient augmenter en Europe de l'Ouest du fait du changement climatique, ce qui pourrait avoir un impact sur la gestion forestière à travers les anticipations des producteurs sur ces hausses de probabilités. Par ailleurs, l'augmentation de ces probabilités est elle-même un processus aléatoire, ce qui pourrait en décupler les effets face à des producteurs forestiers averses au risque. Il s'agit de déterminer les rôles respectifs de l'évolution tendancielle et de la variabilité des probabilités de tempête sur les états stationnaires au moment présent, et de caractériser l'effet des préférences.

Dans ce but, le modèle numérique de programmation dynamique stochastique du chapitre 2 est adapté afin d'intégrer les anticipations rationnelles (cf. [Muth \(1961\)](#)) du producteur forestier en ce qui concerne l'évolution du risque de tempête.

La troisième et dernière question, traitée dans le chapitre 4, aborde le problème de l'allocation des terres entre une forêt à plusieurs classes d'âge soumise à un risque de tempête, et un usage alternatif non risqué et générant un revenu régulier dans le temps. [Parks \(1995\)](#) a démontré que le risque, associé aux préférences, peut conduire à des allocations mixtes des terres. Il s'agit ainsi de caractériser l'allocation des terres et la gestion forestière à l'état stationnaire, ainsi que leurs déterminants, et de comprendre comment elles interagissent. Enfin, il s'agit de déterminer le rôle de l'aversion au risque et des préférences intertemporelles.

Les méthodes employées sont les mêmes que dans le chapitre 2. Ainsi, des conditions de stationnarité pour l'allocation des terres et la gestion forestière sont formulées à partir des conditions de Karush-Kuhn-Tucker, ce qui permet d'identifier leurs déterminants.

En parallèle, une extension du modèle numérique du chapitre 2, intégrant une allocation des terres endogène, permet de caractériser les différents types d'équilibres stationnaires et de déterminer l'influence respective de l'aversion au risque et des préférences intertemporelles

sur l'allocation des terres.

Chapitre 1 :

Etat de l'art en économie forestière

La revue de la littérature porte sur plusieurs points. Tout d'abord, un panorama général des travaux en économie forestière est dressé, présentant les principales questions et les principales approches, déterministes et stochastiques, rencontrées dans la littérature. Une attention toute particulière est portée à la gestion forestière avec classes d'âge multiples car c'est principalement dans ce cadre qu'ont été réalisés les différents travaux présentés dans cette thèse. Ensuite, une revue plus spécifique portant sur la forêt et le changement climatique est réalisée, un lien étant par ailleurs établi avec la question des anticipations. Puis, le concept des préférences récursives et leur pertinence dans des contextes dynamiques et stochastiques sont présentés à travers une revue des articles ayant contribué à leur développement théorique et appliqué. Enfin, le dernier volet de cette revue porte sur l'usage des sols et le changement d'usage des sols, des bases théoriques jusqu'aux études empiriques réalisées sur le sujet.

1.1 Panorama sur l'économie forestière

Ce panorama ne se veut pas exhaustif en ce qui concerne la diversité des questions traitées en économie forestière. En revanche il présente les principaux types d'approches méthodologiques employées pour modéliser les problèmes de gestion forestière à l'échelle du producteur, qu'elles soient déterministes ou stochastiques. A ce titre, [Amacher et al. \(2009\)](#) constitue un ouvrage de référence qui synthétise très bien ces approches.

1.1.1 Gestion forestière en contexte déterministe

Dans son article séminal de l'économie forestière, [Faustmann \(1849\)](#) s'intéresse à l'âge de rotation optimal (en temps continu) d'un peuplement forestier comportant une classe d'âge unique (*single-stand*) dont la rotation se répète indéfiniment. Les travaux de Faustmann

ont par la suite été complétés par [Pressler \(1860\)](#) and [Ohlin \(1921\)](#). Le principal résultat des travaux de Faustmann est une règle qui caractérise analytiquement l'âge de rotation optimal. Cette règle est donnée, en temps continu, par l'équation 1 :

$$F = \arg \max_a \left\{ \frac{R(a)}{e^{\rho a} - 1} \right\} \quad (1)$$

F est l'âge de rotation optimal, $R(a)$ est la fonction de revenu (par unité de surface) associée à la récolte d'un peuplement forestier d'âge a , et ρ est le taux instantané d'actualisation.

L'approche de Faustmann a été -et est toujours- très utilisée en économie forestière. Une extension bien connue du modèle de Faustmann prenant en compte la présence d'aménités offertes par la forêt est par exemple proposée par [Hartman \(1976\)](#). Le modèle de Faustmann est basé sur un simple mécanisme d'actualisation, toutefois il prend en compte le coût d'opportunité qu'il y a à repousser les rotations futures. En ce sens, il offre une caractérisation assez satisfaisante de l'âge de rotation optimal, qui est le paramètre clé historique de la gestion forestière.

Toutefois, l'hypothèse du peuplement forestier d'âge unique est très forte et le modèle de Faustmann est insuffisant pour étudier la réalité des forêts à classes d'âge multiples. En particulier, la question se pose de savoir s'il existe des distributions en classes d'âge au sein d'une forêt qui soient préférables à d'autres pour le producteur.

A partir de résultats numériques (en temps discret et horizon fini), [Kemp and Moore \(1979\)](#) conjecturent que lorsque la fonction d'utilité intertemporelle U est une somme d'utilités instantanées actualisées telle que décrite dans l'équation 2, et que la fonction d'utilité instantanée u est strictement concave, alors l'état stationnaire semble être une forêt normale.

$$U(c_1, c_2, \dots, c_T) = \sum_{t=1}^T \beta^t u(c_t) \quad (2)$$

Lorsque la fonction d'utilité instantanée u est strictement concave, le producteur a tendance à préférer les flux de revenus réguliers, autrement dit il a des préférences intertemporelles.

Une forêt normale² est une forêt dans laquelle toutes les classes d'âge jusqu'à l'âge de récolte occupent la même proportion de la surface totale. Une forêt normale génère donc un revenu parfaitement régulier au cours du temps.

Par la suite, des modèles numériques de programmation dynamique, flexibles en ce qui concerne la structure en classes d'âge, ont été utilisés, mais cette fois l'attention a porté sur les dynamiques transitoires entre un état initial donné et un état final exogène devant être atteint en un temps fini. Cette approche est présentée dans [Lyon and Sedjo \(1983, 1986\)](#) et dans [Sedjo and Lyon \(1990\)](#), où l'état final imposé est une forêt normale. Sachant qu'une fonction d'utilité instantanée concave est introduite dans ces modèles, l'hypothèse de l'état final normal est cohérent avec les résultats de [Kemp and Moore \(1979\)](#).

La stationnarité de la forêt normale, en temps discret, est ensuite démontrée formellement dans [Mitra and Wan \(1985\)](#) et [Mitra and Wan \(1986\)](#). Par ailleurs, il est démontré que sans mécanisme d'actualisation, la forêt normale stationnaire est celle dont l'âge de rotation correspond au rendement équilibré maximal (*Maximum Sustainable Yield*) alors qu'avec actualisation, l'âge de rotation est celui donné par la règle de Faustmann. Ce résultat est totalement indépendant des préférences intertemporelles. Cependant [Mitra and Wan \(1985\)](#) montrent numériquement que la forêt normale de Faustmann n'est pas le seul état stationnaire et que des forêts dont la structure en classes d'âge n'est pas normale mais qui suivent la règle de Faustmann peuvent l'être également. Dans ce cas, les différentes classes d'âge n'occupent pas toutes la même surface mais elles sont toutes récoltées à l'âge de Faustmann et donc la forêt repasse périodiquement par les mêmes structures (de période égale à l'âge de Faustmann). Ces forêts sont donc qualifiées de forêts périodiques stationnaires. [Wan Jr \(1994\)](#) démontre ensuite analytiquement grâce à un modèle à deux classes d'âge que des forêts périodiques peuvent être stationnaires.

Intuitivement, l'existence de forêts périodiques stationnaires est liée à la question des transitions forestières depuis un état initial. Ainsi, si l'état initial n'est pas contraint, la forêt normale suivant la règle de Faustmann est la seule gestion stationnaire possible. En revanche, si un état initial différent est imposé, alors il n'est pas nécessairement optimal de

2. En réalité, il s'agit d'une distribution uniforme mais le terme de forêt normale bien qu'ambigu est consacré par l'usage.

tendre vers la forêt normale car la transition correspondante peut nécessiter de récolter du bois à un âge sous-optimal.

Finalement, [Salo and Tahvonen \(2002a\)](#) démontrent analytiquement, grâce à un modèle à deux classes d'âge et en temps discret, l'existence d'un continuum de forêts périodiques stationnaires proches de la forêt normale. Chaque état forestier au sein de ce continuum peut être atteint comme état stationnaire à partir d'un ensemble d'états initiaux donnés. [Salo and Tahvonen \(2002a\)](#) caractérisent par ailleurs cet ensemble de forêts stationnaires par une formule analytique donnant la déviation (*radius*) maximale de ces forêts par rapport à la forêt normale. Cette déviation maximale dépend entre autres des préférences intertemporelles. [Salo and Tahvonen \(2002b\)](#) généralisent cette démonstration à un nombre quelconque de classes d'âge. Par ailleurs, ils montrent que l'existence de forêts périodiques stationnaires est due à la représentation discrète du temps car elles disparaissent quand les pas de temps tendent vers zéro. Enfin, [Salo and Tahvonen \(2003\)](#) démontrent qu'il n'y a pas de forêts périodiques stationnaires quand l'âge de Faustmann n'est pas unique (ce qui constitue un cas limite). Les démonstrations proposées dans [Salo and Tahvonen \(2002a,b, 2003\)](#) s'appuient sur les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, qui peuvent être utilisées dans des problèmes d'optimisation dynamique où le temps est discret, voir [Chow \(1997\)](#).

La représentation discrète du temps dans la plupart des articles traitant de forêts à classes d'âge multiples est initialement un choix méthodologique, qui n'est pas anodin quant aux résultats. Cependant, selon [Getz and Haight \(1989\)](#), il peut trouver une justification en écologie forestière du fait par exemple de la saisonnalité des récoltes (justifiées par exemple par les conditions climatiques) ou de l'existence de cycles de reproduction.

Certaines études portent néanmoins sur le problème des structures forestières stationnaires en temps et en âge continus. L'optimisation d'une intégrale d'utilité actualisée sous contrainte(s) est un problème classique de contrôle optimal tant que le système en question peut être décrit par un ensemble discret de variables d'état. Par exemple, [Berck \(1981\)](#) traite du problème d'une ressource renouvelable générique dont l'état est caractérisé par une unique variable de stock. Ce type de modèles a été initialement développé pour traiter de problèmes de ressource halieutique (cf. [Schaefer \(1954\)](#)) et peut en effet être appliqué à

la forêt mais ne permet pas de distinguer différentes classes d'âge. Dès lors que la présence simultanée de plusieurs classes d'âge est rendue possible, le modélisateur est face à un dilemme. Si l'âge est représenté de manière discrète, alors l'approche reste un problème classique de contrôle optimal, cf. [Tahvonen and Salo \(1999\)](#) et [Tahvonen et al. \(2001\)](#), mais il y a une incohérence de principe à représenter le temps de manière continue et l'âge de manière discrète. Au contraire, si l'âge est continu, cette incohérence disparaît mais le problème est méthodologiquement plus compliqué à traiter.

Toutefois, ce problème de gestion forestière en temps et en âge continus a été abordé, au moins dans un contexte déterministe. [Heaps \(1984\)](#) a montré que dans un tel contexte et en l'absence de préférences intertemporelles, la forêt était toujours récoltée à l'âge donné par la règle de Faustmann mais que sa structure pouvait être périodique. Ce résultat est cohérent avec les conclusions obtenues par [Hritonenko and Yatsenko \(2007\)](#) qui appliquent l'approche mathématique développée par [Brokate \(1985\)](#). Récemment, [Heaps \(2015\)](#) a montré que dans le même contexte mais avec des préférences intertemporelles concaves, la forêt convergerait toujours vers la forêt normale de Faustmann.

Les modèles présentés jusqu'ici considèrent tous que la dynamique de croissance forestière est entièrement déterminée par l'âge (*pure-aging process*). Cela suppose que la croissance d'un arbre ou d'un ensemble d'arbres d'âge homogène est indépendante de l'état du reste de la forêt. Cette hypothèse est raisonnable quand les différentes classes d'âge sont séparées spatialement, c'est pourquoi cette approche de modélisation correspond à la sylviculture en futaie régulière (*even-aged forestry*). En revanche, cette hypothèse ne tient plus dans le cas des forêts où les différentes classes d'âge se partagent un même espace (*uneven-aged forestry*). Dans ce cas, les dynamiques de croissance des différentes classes d'âge sont interdépendantes du fait de phénomènes de compétition (difficultés d'accès à la lumière, à l'eau, ainsi qu'aux autres ressources trophiques). Les forêts gérées par régénération naturelle et qui sont récoltées à l'échelle de l'arbre ou du petit groupe d'arbres, telles que les futaies irrégulières sont dans ce cas de figure. Le modèle utilisé dans [Heaps \(1984, 2015\)](#) apparaît donc comme un cas limite où chaque classe d'âge est supposée pouvoir occuper une surface infiniment petite sans pour autant qu'il y ait d'interdépendance entre classes d'âge.

La modélisation des futaies irrégulières est mathématiquement plus complexe et requiert davantage de données (ou à défaut davantage d'hypothèses) quant aux dynamiques de croissance forestière. Néanmoins il existe tout un pan de la littérature traitant de ce sujet, à commencer par le travail fondateur de Liocourt (1898). Sur la base de données empiriques, celui-ci formule l'hypothèse que la forêt optimale est une futaie "jardinée"³ pour laquelle les arbres récoltés ne sont pas tous du même âge.

Une première formalisation mathématique de cette question en tant que problème d'optimisation est présentée dans le papier séminal de Adams and Ek (1974). Ceux-ci font l'hypothèse que l'état final est une futaie jardinée produisant le rendement maximal équilibré (*Maximum Sustainable Yield*) et s'intéressent aux dynamiques transitoires à partir d'états initiaux donnés. Plus tard, Haight (1987) et Getz and Haight (1989) présentent une approche similaire mais où l'état final est endogénéisé et consiste effectivement en une futaie jardinée.

Plus récemment, Tahvonen (2009, 2011) a présenté une approche tentant de réconcilier les deux types de sylviculture, *even-aged* et *uneven-aged* en endogénéisant le choix entre ces deux options au sein d'un même modèle. Les résultats montrent que le taux d'actualisation, le prix du bois, ainsi que les coûts de plantation peuvent influencer ce choix.

Cependant, les modèles utilisés par Tahvonen (2009, 2011) considèrent le problème en temps discret. Or les récoltes de bois peuvent être continues dans le temps ou se faire ponctuellement à une série de dates données et les modèles en temps discret ne permettent pas de trancher. Tahvonen (2015, 2016) se propose de répondre à cette question sur la base de modèles de biomasse à une seule variable d'état, similaires au modèle développé par Schaefer (1954). Il en conclut que les deux cas de figure peuvent être obtenus de manière endogène en fonction de la valeur des paramètres exogènes.

3. Une futaie jardinée est un cas particulier de futaie irrégulière dont la structure en classes d'âge et la production de bois sont constantes au cours du temps.

1.1.2 Gestion forestière en contexte stochastique

Les articles portant sur la gestion forestière dans un cadre stochastique peuvent quant à eux être divisés en trois principales catégories : i) les modèles de rotation à classe d'âge unique (i.e. principalement les modèles à la Faustmann), ii) les modèles à deux périodes, et iii) les modèles de programmation dynamique stochastique, en particulier les modèles à classes d'âge multiples.

Outre les modèles de Faustmann, d'autres modèles de rotation, dits wickselliens, ont été utilisés dans un cadre stochastique. Ces modèles cherchent à définir la durée optimale d'une unique rotation forestière. L'unicité de la rotation a l'avantage de rendre le modèle plus facilement tractable. Ainsi, [Alvarez and Koskela \(2005\)](#) utilisent ce type de modèle pour caractériser l'impact d'un taux d'intérêt stochastique sur la durée de rotation. Ils en concluent que si le producteur est neutre au risque, la volatilité du taux d'intérêt fait augmenter l'âge de rotation. Puis, dans [Alvarez and Koskela \(2006\)](#), ils montrent que l'aversion au risque réduit la rotation par rapport au cas neutre.

Malgré ces exceptions, les modèles de rotation à la Faustmann sont les plus largement utilisés pour traiter de problèmes stochastiques. Basé sur cette approche, [Reed \(1984\)](#) est le papier séminal en ce qui concerne les risques destructifs. Reed introduit dans son modèle un risque d'incendie via un processus de Poisson. Ce processus stochastique est un processus de saut qui convient bien à la description d'un phénomène aléatoire destructif (cf. [Dixit and Pindyck \(1994\)](#)) et son utilisation est à la suite de ce papier devenue standard. Reed montre analytiquement que lorsque la destruction de la forêt est supposée totale en cas d'incendie, la rotation est raccourcie et l'âge de rotation est donné par une formule de Faustmann modifiée où le taux d'actualisation est augmenté d'une "prime" qui est égale à la probabilité instantanée d'incendie (i.e. le paramètre du processus de Poisson). Ce résultat est présenté dans l'équation 3 :

$$F = \arg \max_a \left\{ \frac{R(a)}{e^{(\rho+\lambda)a} - 1} \right\} \quad (3)$$

λ est la probabilité instantanée de survenue d'un incendie.

Cette approche a connu beaucoup d’extensions. Par exemple, [Englin et al. \(2000\)](#) introduisent la production d’aménités dans le modèle de Reed et montrent que cela a pour effet de rallonger la rotation. En ce qui concerne le risque de tempête, [Haight et al. \(1995\)](#) introduisent dans leur modèle de rotation une probabilité d’impact ainsi qu’une fonction de récupération (*salvage function* qui représente la proportion de bois qu’il est possible de récupérer après le passage de la tempête) qui dépendent toutes deux de l’âge du peuplement. L’augmentation de la vulnérabilité en fonction de l’âge est en effet une caractéristique fondamentale du risque de tempête sur les peuplements forestiers (cf. [Schelhaas et al. \(2010\)](#)). [Haight et al. \(1995\)](#) démontrent ainsi que l’âge de rotation diminue à cause du risque. [Stainback and Lavalapati \(2004\)](#) utilisent également une fonction de récupération et introduisent une rémunération pour le producteur qui dépend de la quantité de carbone séquestré dans sa forêt. Ils montrent encore une fois que le risque réduit l’âge de rotation mais que celui-ci augmente avec le prix du carbone. Ce résultat est par ailleurs confirmé numériquement dans [Couture and Reynaud \(2011\)](#) sur la base d’une approche dynamique stochastique.

Toutefois, ces articles sont tous basés sur une hypothèse de neutralité au risque. Curieusement, il y a assez peu d’articles qui traitent le problème de l’aversion au risque dans le cadre du modèle de Faustmann. Certaines études sont réalisées dans le cadre de l’utilité espérée mais via une spécification plus restreinte des préférences. Ainsi, [Caulfield \(1988\)](#) définit un ensemble d’âges de rotation efficaces, d’abord sur la base de la dominance stochastique puis sur la base d’un critère d’espérance-variance. Toutefois, ces critères sont insuffisants pour déterminer un âge optimal unique. L’approche espérance-variance est reprise par [Valsta \(1992\)](#) qui ne traite pas du risque de perturbation mais considère que le taux de croissance de la valeur du peuplement forestier suit un processus stochastique de diffusion.

Une autre manière d’introduire du risque dans les modèles forestiers est en effet d’utiliser des processus stochastiques de diffusion. Au contraire du processus de Poisson qui est un processus de saut, un processus de diffusion décrit une évolution continue dans le temps. Ce type de processus est par exemple approprié pour décrire l’évolution des prix qui selon [Washburn and Binkley \(1990\)](#) ne saurait être modélisée par des tirages indépendants à chaque

date. Les études du risque en gestion forestière basées sur des processus stochastiques de diffusion⁴ sont très nombreuses.

L'incertitude sur les prix est par exemple abordée dans [Thomson \(1992\)](#) qui montre que lorsque le producteur est neutre au risque et le coefficient de dérive temporelle est positif, la rotation optimale est plus longue que la rotation de Faustmann.

Les processus de diffusion ont aussi été utilisés pour décrire l'incertitude sur la croissance biologique de la forêt. Au delà du risque de perturbation qui est un risque destructif, les conditions météorologiques (ensoleillement, précipitations, ...) sont en effet d'une période à l'autre plus ou moins favorables à la croissance de la forêt. Ce processus est continu et peut donc être décrit par des processus stochastiques de diffusion. Ce type de problème peut être abordé à travers des modèles à une variable représentant le stock de bois en forêt. Ce genre de modèle est une extension du modèle de rotation où le stock de bois en forêt ne dépend plus uniquement de l'âge. [Clarke and Reed \(1989a\)](#) et [Reed and Clarke \(1990\)](#) considèrent un modèle de ce type dans le cas où la croissance biologique suit des processus de diffusion dont les termes de dérive sont respectivement dépendants de l'âge ou dépendants du stock de bois. Les résultats montrent encore une fois que l'aversion au risque, introduite par une espérance d'utilité, tend à réduire la durée de rotation. Cependant, ces modèles ne considèrent qu'une seule rotation (modèle wicksellien).

[Clarke and Reed \(1989a\)](#) et [Reed and Clarke \(1990\)](#), tout comme [Thomson \(1992\)](#) cherchent à déterminer la rotation optimale du point de vue d'une situation initiale et sans information sur les réalisations futures des prix. Sur la base de prix stochastiques, [Gong \(1998\)](#) propose une extension de cette approche où le producteur prend la décision de récolter ou non à chaque instant en comparant le prix réalisé à un prix de réserve endogène. Les résultats montrent que l'aversion au risque tend à réduire ce prix de réserve. Sur la base d'une croissance biologique stochastique, [Willassen \(1998\)](#) propose un cadre analytique reprenant l'idée que les décisions s'ajustent aux réalisations mais dans un cadre à plusieurs rotations successives.

4. Parmi les processus de diffusion couramment utilisés, on trouve le mouvement brownien géométrique, la marche aléatoire ou encore le retour à la moyenne.

Les modèles à deux périodes constituent la deuxième grande catégorie de modèles de gestion forestière en contexte de risque. Ces modèles permettent d’aborder les problèmes d’arbitrage intertemporel en situation de risque. Cette approche fut par exemple utilisée dans [Koskela \(1989b\)](#), qui cherche à déterminer l’impact du risque sur les décisions de récolte. Dans le modèle utilisé, les prix futurs sont incertains et il y a possibilité d’un arbitrage entre consommation et épargne, sachant que le marché du capital est parfait. Les résultats montrent qu’en l’absence de risque, les décisions de récolte sont indépendantes des préférences intertemporelles du producteur (c’est-à-dire de la fonction d’utilité) mais qu’en présence de risque et d’aversion au risque, les décisions deviennent dépendantes de ces préférences. [Koskela \(1989a\)](#) montre ensuite qu’en cas de rationnement du crédit, les décisions dépendent des préférences même en l’absence de risque. Cette approche a ensuite été reprise dans un certain nombre d’études, par exemple dans [Koskela and Ollikainen \(1997\)](#) où la production d’aménités est prise en compte.

Ces trois derniers papiers représentent les préférences des producteurs à travers le cadre de l’espérance d’utilité. [Koskela and Ollikainen \(1999\)](#) fait exception en faisant l’hypothèse de préférences récursives (voir la section 1.3). Ce cadre de préférences initialement spécifié en contexte stochastique par [Kreps and Porteus \(1978\)](#) permet de distinguer aversion au risque et préférences intertemporelles. La principale conclusion de cet article est que l’aversion au risque (introduit encore une fois sur les prix) augmente le niveau de récolte présent aux dépens de la récolte future, ce qui révèle un comportement de précaution.

Un autre résultat important obtenu par un modèle à deux périodes est présenté dans [Brunette et al. \(2013\)](#). Cet article montre qu’en présence d’un risque naturel destructif, il existe un effet de substitution entre une couverture financière via l’arbitrage entre consommation et épargne, et une couverture par une adaptation des pratiques sylviculturales. Par ailleurs, il est montré, hors cas limite, que le choix se portait sur un seul instrument. Par une méthodologie différente, des résultats du même type sont obtenus par [Hyytiäinen and Penttinen \(2008\)](#) qui appliquent la théorie du portefeuille de [Markowitz \(1952\)](#) à un producteur forestier gérant une forêt à classes d’âge multiples et ayant accès à des actifs financiers. Il est montré que lorsque la richesse financière du producteur augmente, certains

modes de gestion à rotations plus longues deviennent efficaces. Cela reflète encore une fois un mécanisme de substitution entre couverture financière et pratique sylviculturale. Ces résultats tendent à montrer que pour étudier l'effet du risque et des préférences sur la gestion forestière, ce qui est le sujet principal de cette thèse, il vaut mieux s'en tenir au principe de parcimonie et mettre de côté l'arbitrage entre consommation et épargne.

Le troisième et dernier grand type d'approche présenté dans cette revue est plus ambigu à définir. Il correspond davantage à une méthode, la programmation dynamique stochastique qu'à un type de problème envisagé. Toutefois, cette approche sied bien à l'étude des forêts à classes d'âge multiples. La programmation stochastique dynamique est une approche qui sied particulièrement aux applications numériques, généralement utilisée en temps discret (et c'est le cas dans tous les papiers présentés dans le reste de cette section), c'est une extension de la théorie et des méthodes de programmation dynamique initialement développées par [Bellman \(1957\)](#). C'est une approche qui permet de déterminer les transitions optimales d'un pas de temps à l'autre à partir de n'importe quel état initial. Ainsi, elle permet d'analyser à la fois les dynamiques transitoires et les états stationnaires (donnés par les équilibres de long-terme). En revanche, elle se prête en général plus difficilement à une approche analytique des problèmes considérés.

Formellement parlant, la programmation dynamique est adaptée à la description des processus de Markov⁵. Les processus de Poisson et certains processus de diffusion couramment utilisés comme le mouvement brownien ou la marche aléatoire (ainsi que leurs équivalents en temps discret) sont markoviens donc cette méthode peut servir pour l'analyse du risque en forêt de manière assez générale.

La première application pratique de la programmation dynamique stochastique à un modèle forestier à plusieurs classes d'âge est décrite dans [Lembersky and Johnson \(1975\)](#). Le modèle utilisé dans cet article prend en compte à la fois le risque de production et le risque de prix. En ce qui concerne les risques destructifs, [Spring et al. \(2008\)](#) considèrent le risque d'incendie et la nécessité de préserver un niveau d'habitat minimal pour la faune

5. Un processus de Markov est tel que ses états futurs ne dépendent que de l'état présent et non des états passés. Autrement dit, la connaissance des états passés de ce processus n'apporte aucune information sur ses états futurs.

sauvage (lié aux arbres les plus vieux). Cette exigence de préservation tient quelles que soient les circonstances naturelles et constitue donc une forme d'aversion au risque. Dans ces conditions, le risque d'incendie tend à allonger les durées de rotation. Cependant, l'approche de [Spring et al. \(2008\)](#) est limitée car d'une part leur modèle ne considère que quatre parcelles de surfaces égales et homogènes en âge et d'autre part, l'aversion au risque n'y est pas modélisée de manière flexible et ne permet donc pas de réaliser une analyse de sensibilité.

D'autres études basées sur la programmation dynamique ont en revanche intégré des préférences de risque plus explicitement dans leurs modèles. Ainsi, [Brunette et al. \(2015\)](#) considèrent l'impact du risque de tempête sur une forêt dont l'état est décrit par la quantité de biomasse (une seule variable d'état) et dont le propriétaire cherche à maximiser son espérance d'utilité. Les résultats montrent que le stock de biomasse tend à baisser quand le risque de tempête augmente, ce qui permet de réduire l'exposition de la forêt. Quant à l'aversion au risque, elle tend à augmenter le stock de biomasse (en réduisant parallèlement les récoltes). Cela permet en fait de mieux lisser les futures consommations en cas de tempête. En effet, dans un cadre d'espérance d'utilité, l'aversion au risque est l'inverse de l'élasticité intertemporelle de substitution (voir la section sur les préférences récursives) donc augmenter l'aversion au risque réduit cette élasticité, d'où la préférence accrue pour une consommation lissée.

Toujours sur la base de l'espérance d'utilité, [Tahvonen and Kallio \(2006\)](#) cherchent à déterminer l'effet du risque de prix (processus de diffusion) et des préférences sur la gestion d'une forêt à classes d'âge multiples. Cette fois-ci, la structure en classes d'âge est totalement flexible, chaque classe d'âge occupant une proportion quelconque de la surface totale. À noter qu'à la différence des papiers précédents, Tahvonen et Kallio introduisent un arbitrage entre consommation et épargne et considèrent un horizon temporel fini. Les résultats montrent qu'en l'absence d'aversion au risque, l'âge de rotation est plus élevé du fait de la volatilité des prix, retrouvant ainsi le résultat classique obtenu grâce au modèle de Faustmann. En revanche, l'aversion au risque a ici deux effets, d'une part elle réduit la rotation et d'autre part elle provoque une convergence de la forêt vers une structure normale.

Par ailleurs, [Brunette et al. \(2015\)](#) et [Tahvonen and Kallio \(2006\)](#) mettent tous les deux en avant le problème de la non-séparation de l'aversion au risque et des préférences intertemporelles dans un cadre d'utilité espérée. Ainsi, dans [Tahvonen and Kallio \(2006\)](#), la convergence vers une forêt normale paraît davantage liée aux préférences intertemporelles qu'à l'aversion au risque mais le modèle ne permet pas de démêler leurs influences respectives.

De ce fait, d'autres articles ont fait l'hypothèse de préférences récursives. Sur la base d'un modèle de biomasse (une seule variable d'état), [Peltola and Knapp \(2001\)](#) montrent qu'une augmentation de l'aversion au risque ou une diminution de l'élasticité de substitution intertemporelle diminuent toutes deux le stock de biomasse à l'équilibre stationnaire mais que les préférences intertemporelles semblent avoir un impact beaucoup plus significatif. [Couture and Reynaud \(2008\)](#) supposent également des préférences récursives mais utilisent un modèle à classes d'âge multiples similaire au modèle de [Tahvonen and Kallio \(2006\)](#), avec toutefois un horizon temporel infini. Ils montrent que les préférences intertemporelles ont un impact significatif sur l'arbitrage entre consommation et épargne. Une baisse de l'élasticité de substitution intertemporelle provoque ainsi une baisse de la consommation et une hausse de l'épargne, le producteur s'assurant ainsi de pouvoir lisser sa consommation future en cas de tempête. En revanche, l'aversion au risque ne semble pas avoir d'effet significatif sur la gestion forestière et l'arbitrage financier. Cependant, encore une fois, la possibilité d'un arbitrage financier ne permet de caractériser l'impact direct des préférences sur la gestion forestière.

Malgré la prépondérance des approches numériques dans l'analyse de la gestion forestière à plusieurs classes d'âge en contexte de risque, il existe aussi certains résultats analytiques. Par exemple, [Piazza and Pagnoncelli \(2015\)](#) montrent qu'en cas de risque sur les prix représenté par un processus de diffusion, il existe un âge de rotation stationnaire pour un niveau de prix observé. Les résultats sont cohérents avec la littérature : la volatilité des prix allonge la rotation mais l'aversion au risque la réduit. Toutefois, [Piazza and Pagnoncelli \(2015\)](#) déterminent une seule séquence de décisions optimales à partir d'un prix initial donné. Ainsi, ils ne prennent pas en compte les éventuels ajustements futurs basés sur l'observation des prix réalisés comme le font les modèles numériques de programmation

dynamique stochastique.

De manière générale et en temps continu, [Dixit and Pindyck \(1994\)](#) expliquent que dans le cas de processus de diffusion, le lemme d'Itô est un outil puissant permettant de développer certains termes d'espérance et de se ramener à un problème de contrôle optimal déterministe. Cependant, le lemme d'Itô ne se prête pas à la description de processus stochastiques de saut qui décrivent les risques de perturbation. Par ailleurs, cela ne règle pas le problème de la prise en compte des observations futures.

1.2 Gestion forestière, changement climatique et anticipations

Dans [Schelhaas et al. \(2010\)](#), il est question des impacts que les changements climatiques pourraient avoir sur la forêt, notamment à travers un risque accru d'événements destructifs tels que tempêtes et incendies. Si la survenue de ces événements est incertaine par nature, l'augmentation (ou éventuellement la baisse) de leurs probabilités dans le futur l'est également car les changements climatiques ne peuvent être prédits de manière certaine.

En toute rigueur, le terme de risque est utilisé pour décrire un type d'évènement destructif associé à une probabilité, une exposition et une vulnérabilité (cf. [Schelhaas et al. \(2010\)](#)), alors que le terme d'incertitude est associé au caractère aléatoire de la probabilité de ce risque. Cependant, dans nombre de publications scientifiques, et dans une certaine mesure dans la présente thèse, ces deux termes sont utilisés de manière interchangeable.

[Yousefpour et al. \(2012\)](#) proposent une revue de littérature portant à la fois sur le traitement du risque et de l'incertitude en gestion forestière dans un contexte de changement climatique. Selon eux, le problème de l'incertitude a été relativement peu abordé en tant que tel. Il est certes pris implicitement en compte lorsque certains processus stochastiques de diffusion (voir paragraphe précédent) sont utilisés pour modéliser l'évolution de certaines variables. Ainsi, le mouvement brownien géométrique qui est le plus utilisé des processus de diffusion dans la littérature forestière a une espérance et une variance qui changent au cours du temps. Parfois, l'incertitude est même prise explicitement en compte, comme dans [Jacobsen and Thorsen \(2003\)](#) qui traitent du problème de la diversification en es-

sences forestières dans un contexte où le climat futur est incertain (ce qui occasionne une incertitude sur les taux de croissance biologiques relatifs de deux essences données dans le futur). Il est montré que cette incertitude entraîne une diversification accrue en essences dans le présent.

Cependant, l'approche par les processus de diffusion ne permet pas de modéliser les risques destructifs de manière satisfaisante du fait de leur nature discontinue. Par ailleurs, cette approche est également critiquée par [Yousefpour et al. \(2012\)](#) qui lui reproche d'être fondamentalement non-stationnaire, y compris en ce qui concerne les tendances moyennes. Les processus de diffusion décrivent ainsi un système à la dérive alors que le changement climatique consiste selon Yousefpour et al. en un mécanisme de transition d'un état stable à un autre état potentiellement stable. Les mêmes auteurs proposent ainsi pour de futures recherches de modéliser les variables climatiques comme des processus stochastiques dont la tendance est stationnaire⁶. Cette approche permettrait également d'introduire dans le modèle d'éventuelles informations sur les changements climatiques futurs dont pourraient disposer les producteurs, issues par exemple de projections climatiques.

L'incertitude sur le climat pose en parallèle la question des anticipations des producteurs forestiers. Ces derniers basent en effet leurs décisions présentes sur des hypothèses concernant le climat futur. Ces hypothèses ou anticipations peuvent être bâties de différentes manières en utilisant différents types d'informations. Le premier grand type d'anticipations dynamiques (c'est-à-dire qui évoluent dans le temps, en fonction des nouvelles informations disponibles) introduit dans la littérature sont les anticipations adaptatives. Ces anticipations, décrites dans [Nerlove \(1958\)](#) sont basées sur les observations passées du producteur, qui les ajustent au fur et à mesure que de nouvelles informations sont observées. Ce mécanisme purement adaptatif peut être en partie justifié empiriquement car le futur s'avère souvent dépendant du passé mais il ne permet pas de prendre en compte toute l'information disponible, par exemple les projections climatiques.

Le deuxième grand type d'anticipations sont les anticipations rationnelles, décrites tout d'abord dans [Muth \(1961\)](#) puis popularisées par [Lucas \(1972\)](#). Les anticipations ration-

6. Rappelons que stationnarité n'est pas synonyme de constance.

nelles sont basées sur l'hypothèse que le producteur va utiliser de manière appropriée toute l'information dont il dispose. Dans la pratique, il est couramment supposé que le producteur a les mêmes informations que le modélisateur, c'est-à-dire qu'il connaît parfaitement les processus stochastiques tels qu'introduits dans le modèle. C'est une hypothèse forte mais neutre, au contraire des anticipations adaptatives pour lesquelles une forme fonctionnelle particulière doit être spécifiée. Cette neutralité est probablement ce qui fait le succès des anticipations rationnelles qui sont très largement utilisées.

1.3 Les préférences récursives dans un contexte dynamique et stochastique

Dans [Spence and Zeckhauser \(1972\)](#) et dans [Kreps and Porteus \(1979\)](#), il est fait la démonstration que le cadre de l'utilité espérée ne peut pas être généralement utilisé pour décrire les préférences sur le revenu dans un contexte dynamique et stochastique. Plus précisément, si les préférences "primitives"⁷ sur le flux de consommation sont représentées par une espérance d'utilité et qu'il est possible d'arbitrer entre épargne et consommation, alors les préférences "induites"⁸ sur le flux (stochastique) de revenu ne peuvent pas être représentées de manière pertinente par une espérance d'utilité. En effet, une résolution précoce de l'incertitude sur le revenu est dans ce cas préférable car elle permet une meilleure planification de l'arbitrage entre consommation et épargne. Or l'espérance d'utilité est incapable de représenter cette préférence pour une résolution précoce de l'incertitude. En réalité, l'espérance d'utilité est totalement indifférente à la chronologie de résolution du risque.

Un autre problème majeur de l'espérance d'utilité dans un cadre dynamique est son incapacité à représenter distinctement les préférences intertemporelles et l'aversion au risque. En effet, les deux effets sont indémêlables car tous deux liés à la concavité de la fonction d'utilité.

Les préférences récursives permettent de régler ces deux problèmes. Les fonctions d'utilité

7. Les préférences primitives sont directement liées à la psychologie du consommateur/producteur.

8. Les préférences induites sur le revenu sont une conséquence des préférences primitives sur la consommation et sont donc liées à la psychologie du consommateur/producteur mais indirectement.

récurives ont d'abord été décrites dans un contexte déterministe par [Koopmans \(1960\)](#). Dans ce cas, le cadre de l'utilité réursive généralise l'approche par la somme des utilités actualisées, en permettant au taux d'actualisation d'être variable (cf. [Mas-Colell et al. \(1995\)](#)). Concrètement, l'utilité réursive n'est pas *state-separable* mais représente l'utilité de l'agent apportée par tous les revenus présents et futurs à partir d'une date donnée. La formulation de cette fonction d'utilité est basée sur une relation réursive, donnée par l'équation 4, qui définit l'agrégation temporelle du revenu (ou *payoff*) à l'instant présent avec l'utilité au temps d'après.

$$U_t = W(\Pi_t, U_{t+1}) \quad (4)$$

Ainsi, U_t (resp. U_{t+1}) est l'utilité apportée à l'agent à partir de la date t (resp. $t + 1$), Π_t est le revenu à l'instant t et W est un agrégateur temporel (qui peut être défini par une forme fonctionnelle).

Par la suite, les fonctions d'utilité récurives ont été adaptées au contexte stochastique par [Kreps and Porteus \(1978\)](#) qui en posent les bases théoriques et redéfinissent la relation de récurrence comme définie dans l'équation 5 :

$$U_t = W(\Pi_t, \mu(\tilde{U}_{t+1})) \quad (5)$$

L'utilité $\tilde{U}_{t+1}$ à la date $t + 1$ est maintenant une loterie car l'évolution du système de t à $t + 1$ est en partie aléatoire. En outre, μ est un opérateur d'équivalence certaine sur cette loterie.

Ce cadre de préférences généralise l'espérance d'utilité et prend en compte la chronologie de résolution du risque. Par ailleurs, l'équation 5 montre clairement que les préférences intertemporelles et l'aversion au risque sont portées par deux opérateurs distincts, respectivement W et μ .

Sur la base des travaux de Kreps et Porteus, [Epstein and Zin \(1989\)](#) développent certaines formes fonctionnelles rentrant dans le cadre de l'équation 5, dont une forme paramétrique est utilisée dans l'estimation d'un modèle d'évaluation des actifs financiers (*Capital Asset Pricing Model*) dans [Epstein and Zin \(1991\)](#). Cette forme paramétrique, présentée dans

l'équation 6 a l'avantage de posséder un paramètre représentant les préférences intertemporelles (σ) et un paramètre distinct représentant l'aversion au risque (α).

$$U_t = \left((1 - \beta) \Pi_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta [E(\tilde{U}_{t+1}^{1-\alpha})]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (6)$$

β est le facteur d'actualisation, l'agrégateur temporel est spécifié par une fonction CES (*Constant Elasticity of Substitution*) dont le paramètre est σ , et l'opérateur d'équivalence certaine est une espérance d'utilité dont le coefficient d'aversion relative au risque α est constant (forme "CRRA"). A noter que dans le cas particulier où $\alpha = \frac{1}{\sigma}$, les préférences récursives décrites par l'équation 6 se ramènent à une espérance d'utilité.

Cette forme fonctionnelle est largement utilisée dans la littérature appliquée portant sur les préférences récursives et c'est aussi celle qui est utilisée dans cette thèse.

Précisons que par préférences, il est surtout question dans cette thèse de préférences intertemporelles et d'aversion au risque, la question des préférences subjectives quant à l'actualisation n'étant pas directement abordée.

1.4 Usage des sols et changement d'usage des sols

Le livre écrit par [Bell et al. \(2006\)](#) portant sur l'économie du changement d'usage des sols en milieu rural comporte une compilation des principaux concepts théoriques qui sous-tendent l'usage et le changement d'usage des sols. Par ailleurs, il constitue une bonne source de références, en tout cas en ce qui concerne la littérature empirique sur l'usage des sols.

Dans la logique ricardienne, [Bell et al. \(2006\)](#) expliquent que l'allocation des sols est fondamentalement liée aux rendements (*returns*). Chaque usage procurant un rendement différent, il s'agit d'allouer les sols de manière à maximiser le rendement global. Dans le cas simple (et improbable) où les rendements sont des fonctions linéaires des surfaces, toutes les terres disponibles sont allouées à l'usage dont le rendement par hectare est le plus élevé, ce qui constitue une solution en coin. En revanche, des solutions mixtes sont possibles dès lors que les rendements marginaux sont décroissants.

Par exemple, [Salo and Tahvonen \(2004\)](#) présentent une approche analytique de l'allocation des sols entre une forêt à classes d'âge multiples et un usage alternatif des sols de période annuelle tel que l'agriculture. La représentation de la forêt est basée sur le modèle (déterministe) décrit dans [Salo and Tahvonen \(2002b\)](#) (voir la section 1.1.1). A chaque pas de temps, les rendements sont agrégés via des fonctions concaves, ce qui introduit des rendements marginaux décroissants dans le modèle. La fonction objectif utilisée dans [Salo and Tahvonen \(2004\)](#) est présentée dans l'équation 7 :

$$\max \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t [u(\Pi_{for,t}) + v(\Pi_{agr,t})] \quad (7)$$

$\Pi_{for,t}$ et $\Pi_{agr,t}$ sont les revenus générés respectivement par la forêt et l'agriculture à la date t et les fonctions u et v sont les fonctions croissantes et concaves qui agrègent ces revenus.

[Salo and Tahvonen \(2004\)](#) montrent qu'à l'équilibre stationnaire, la forêt suit dans tous les cas la règle de Faustmann. Concernant la structure de la forêt, quand il est optimal d'allouer toutes les terres à la forêt, les équilibres stationnaires sont périodiques tels que décrits dans [Salo and Tahvonen \(2002b\)](#). En revanche, la périodicité de la forêt disparaît dès lors que l'allocation stationnaire des sols est mixte. Cette situation s'explique par l'existence de coûts de transition relatifs à la "normalisation" d'une forêt périodique. Ces coûts sont dus à certaines récoltes réalisées à des âges sous-optimaux mais qui permettent cette transition. La possibilité d'un usage alternatif des terres, s'il est suffisamment rentable permet des transitions qui évitent ces récoltes sous-optimales.

Si la décroissance des rendements marginaux est clairement *ad hoc* dans le modèle de [Salo and Tahvonen \(2004\)](#), elle peut dans la réalité s'appuyer sur certains fondements, par exemple l'hétérogénéité des sols. Ainsi, le rendement marginal associé à un usage donné est une fonction décroissante de la qualité des sols (et le rendement une fonction croissante et concave). Toutefois, cette fonction diffère d'un usage des sols à l'autre. Par exemple, les cultures et la forêt ne sont pas sensibles de la même manière à la qualité des sols. De ce fait, des allocations mixtes des sols peuvent être optimales comme l'illustre la figure 1 :

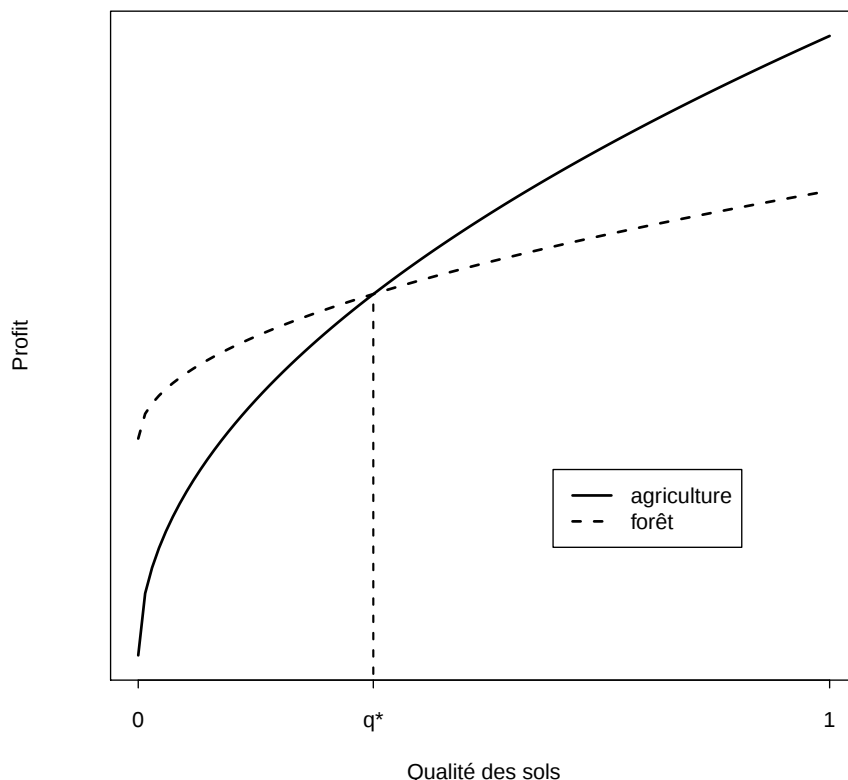


FIGURE 1 – Rendements marginaux décroissants et allocation des sols

La situation décrite par la figure 1 illustre le fait que les terres les plus productives ont été historiquement allouées en priorité à l'agriculture alors que la forêt occupait les terres marginales. La décroissance du rendement marginal des terres liée à l'hétérogénéité de leur qualité a initialement été théorisée par [Ricardo \(1891\)](#).

Le rôle de l'hétérogénéité des sols dans leur allocation a fait l'objet de nombreuses études empiriques, en particulier en ce qui concerne l'allocation entre forêt et agriculture, voir par exemple [Stavins and Jaffe \(1990\)](#) et [Plantinga \(1996\)](#). Les modèles économétriques utilisés peuvent être plus ou moins structurés selon l'étude en question. Par exemple, dans [Stavins and Jaffe \(1990\)](#), les équations à estimer sont dérivées directement d'un modèle dynamique d'allocation des sols, qui entre autres prend en compte explicitement les coûts de conversion. Dans [Plantinga \(1996\)](#), en revanche, les équations à estimer sont spécifiées directement sous forme réduite.

Cependant, dans ces deux articles et bien d'autres, le but est de déterminer l'usage des sols à l'état stationnaire et d'utiliser les modèles estimés pour faire de la statique comparative. Ce type d'analyses ne dit rien sur les mécanismes de changement d'usage des sols. D'une part, si plus de deux usages sont pris en compte, il peut être intéressant d'identifier les flux de changements d'usage des sols entre chaque paire d'usages possible. Ce problème est par exemple abordé empiriquement dans [Plantinga and Miller \(1997\)](#). D'autre part, la question du *timing* optimal de conversion est également importante. [Parks \(1995\)](#) propose ainsi un modèle dynamique théorique de changement d'usage des sols avec lequel il aborde cette question.

Toutefois, l'apport principal de [Parks \(1995\)](#) est de prendre en compte l'incertitude qui pèse sur les revenus forestiers et agricoles ainsi que l'aversion au risque (à travers une fonction d'utilité espérée). Il montre que lorsque les risques pesant sur les deux secteurs ne sont pas corrélés positivement, l'allocation des sols est mixte à l'équilibre stationnaire. Ainsi, le risque, en présence d'aversion au risque, est un facteur de diversification de l'usage des sols. Cette conclusion est cohérente avec certains résultats élémentaires de l'économie du risque portant sur la diversification d'un portefeuille d'actifs, voir [Mas-Colell et al. \(1995\)](#). [Parks and Kramer \(1995\)](#) proposent une application économétrique de ce modèle.

La question de la diversification due au risque évoque également la théorie du portefeuille initialement développée dans [Markowitz \(1952\)](#). Cette théorie a également été adaptée à des problèmes d'allocation des sols, par exemple dans [Brunette et al. \(2014\)](#) qui traitent de la conformité à la théorie du portefeuille de la distribution en essences forestières dans chaque unité administrative française. Les résultats semblent montrer que la distribution en essences peut effectivement être expliquée en partie par cette théorie.

1.5 Eléments de conclusion

La question du risque de perturbation a été relativement peu abordée dans le cadre d'une gestion forestière à plusieurs classes d'âge, en comparaison du nombre conséquent d'études basées sur des modèles de rotation à classe d'âge unique. En particulier, les résultats

analytiques sur ce sujet sont à notre connaissance pratiquement inexistantes. Cette thèse propose une approche analytique qui vise à combler ce manque.

En outre, les travaux basés sur des préférences récursives, qui permettent de distinguer aversion au risque et préférences intertemporelles sont rares et n'offrent pas de caractérisation claire de l'influence de ces préférences sur la gestion forestière. Les modèles numériques développés dans le cadre de cette thèse se proposent de déterminer le rôle respectif de ces préférences en présence d'un risque de tempête.

Chapitre 2 :

Gestion d'une forêt à plusieurs classes d'âge en présence d'un risque de perturbation et de préférences récursives

La gestion forestière est intrinsèquement un problème dynamique et stochastique dans lequel les préférences de temps et de risque jouent un rôle. En effet, déterminer la meilleure séquence de récoltes et de replantations d'une forêt est un problème dynamique qui est influencé par la préférence pour le présent et par les préférences intertemporelles du producteur. Par ailleurs, la production forestière comporte des risques : des risques de production tels que le risque climatique et des risques de marché tels que le risque sur les prix ou les taux d'intérêt. Le risque et l'aversion au risque du producteur forestier influencent donc également sa gestion. En outre, les dimensions dynamiques et stochastiques sont entremêlées car toute décision modifiant le flux de revenu au cours du temps affecte également l'exposition et la vulnérabilité au risque de la forêt.

L'objectif de l'analyse présentée dans ce chapitre est de caractériser les états stationnaires d'une forêt à plusieurs classes d'âge en présence d'un risque de perturbation et avec un producteur ayant des préférences récursives. Plus précisément, la gestion d'une forêt à plusieurs classes d'âge pose deux principales questions : i) quel est l'âge de rotation à l'état stationnaire ? Et ii) quelle est la structure en classes d'âge de la forêt à l'état stationnaire ?

Se concentrer sur la détermination des états stationnaires en présence d'un risque de perturbation est d'autant plus pertinent que la probabilité de ce risque est faible car cela rend plus probable la convergence et le maintien de la forêt dans un état stationnaire. Cependant, l'état stationnaire constitue dans tous les cas un horizon vers lequel tendent les décisions du producteur, ce qui en fait un bon indicateur du comportement de ce dernier.

Par ailleurs, dans un cadre dynamique et stochastique, les préférences récursives sont plus générales que l'espérance d'utilité car elles prennent en compte la chronologie de résolu-

tion du risque (voir [Kreps and Porteus \(1979\)](#)) et permettent de distinguer préférences intertemporelles et aversion au risque (voir [Kreps and Porteus \(1978\)](#) et [Epstein and Zin \(1989\)](#)).

La question du risque de perturbation en forêt a été abordée sur la base de modèles de rotation à la Faustmann. Par exemple le risque d'incendie est traité dans l'article séminal de [Reed \(1984\)](#). Ces études ont montré analytiquement que le risque et l'aversion au risque réduisent tous deux l'âge de rotation optimal (voir le chapitre 1).

La question de la gestion stationnaire de forêts à plusieurs classes d'âge a été abordée analytiquement et de manière assez exhaustive dans un contexte déterministe, par exemple dans [Salo and Tahvonen \(2002a\)](#), et [Salo and Tahvonen \(2002b\)](#). Il a été montré que l'âge de rotation respecte la règle de Faustmann et qu'il existe un continuum de forêts périodiques stationnaires autour de la forêt normale de Faustmann.

En revanche, la gestion forestière d'une forêt à plusieurs classes d'âge en contexte de risque n'a pas été traitée de manière analytique mais uniquement par des modèles numériques. Par exemple, [Couture and Reynaud \(2008\)](#) ont abordé le problème du risque de tempête grâce à un modèle de programmation dynamique stochastique et sur la base de préférences récursives.

D'une part, l'étude présentée dans ce chapitre se propose d'adapter l'approche analytique (par les conditions de Karush-Kuhn-Tucker) développée dans [Salo and Tahvonen \(2002b\)](#) à un contexte stochastique. D'autre part, un modèle numérique de programmation dynamique stochastique est utilisé pour illustrer ces résultats analytiques ainsi que pour mesurer la sensibilité de l'état stationnaire aux paramètres de préférence. Ce modèle est présenté en détail en annexe 1.

Les résultats montrent qu'en présence d'un risque de perturbation, l'âge moyen de rotation dépend du risque et des préférences et que cet âge est utilisé par le producteur comme un levier pour moduler l'exposition et la vulnérabilité de la forêt au risque. Par ailleurs, la coexistence de plusieurs âges de rotation permet de "lisser" cette modulation malgré le caractère discret de l'âge dans ces modèles. Enfin, il est montré que l'aversion au risque et

les préférences intertemporelles ont un effet analogue et tendent à diminuer l'âge moyen de rotation.

Multiple-Stand Forest Management under Perturbation Risk and Recursive Preferences

G. Dumollard

Résumé

This paper focuses on the characterization of stationary states for a multiple-stand forest that is subject to a risk of perturbation and managed by a producer who has recursive preferences. This preferences framework generalizes the expected utility approach and enables us to distinguish between intertemporal preferences and risk aversion. It is shown analytically that the rotation age of a stationary forest depends on the risk and on both risk aversion and intertemporal preferences. A numerical application, based on a stochastic dynamic programming model, is implemented so as to complete analytical findings and to assess the sensitivity of the optimal rotation age to preferences.

Keywords : Multiple-stand forest management, Recursive preferences, Risk, Stationarity, Stochastic dynamic programming

NB : This article has been submitted to the Journal of Forest Economics and is currently under review.

2.1 Introduction

Forest management is intrinsically an issue in which both time and risk preferences play an important role. Determining the right temporal sequence in harvesting and renewing forest stands is indeed a dynamic problem in which time preferences influence the producer's decisions. Forest management also entails both production and market risks. Production risks primarily concern the possible occurrence of perturbations (e.g. storms, fires) that may damage the forest. In addition, the time and risk dimensions are intertwined, since altering the harvesting of a given forest over time also has an impact on the forest exposure and vulnerability to a risk of perturbation.

The aim of the present study is to characterize stationary states of an even-aged forest with multiple age-classes in the presence of a perturbation risk and when the producer has recursive preferences. The management of a forest with multiple age-classes raises two main questions : i) what is (are) the rotation age(s) at stationary ? And ii) what is the optimal age-class structure at stationarity ? In addition, the study aims at determining the respective impact of intertemporal preferences and risk aversion on these stationary states.

Focusing on stationary states in presence of a perturbation risk is particularly relevant when the probability of this risk is low as the forest is then more likely to converge and to remain in a stationary state. However, in any case, the stationary state is a horizon to which the producer's decisions tend to lead, and is as such a good indicator of the producer's behavior.

In a stochastic context, recursive preferences have two major advantages over expected utility preferences : i) they take into account preferences on the timing of risk resolution, and ii) they distinguish between intertemporal preferences and risk preferences.

As for preferences on the timing of risk resolution, [Spence and Zeckhauser \(1972\)](#) and [Kreps and Porteus \(1979\)](#) show that if a consumer has expected utility preferences on a dynamic flow of consumption and can arbitrate between consumption and savings, then his "induced" preferences on the dynamic flow of income cannot be properly described by an expected utility framework. Expected utility preferences are indeed indifferent to

the timing of risk resolution, that is to say to the moments when the consumer learns about given random realizations. In this case, this assumption is unrealistic because prior knowledge of realized incomes enables the consumer to better plan his consumption stream, and should therefore be preferred. Lotteries for which an agent is not indifferent to the timing of risk resolution are called temporal lotteries (cf. [Epstein and Zin \(1989\)](#) and [Chew and Epstein \(1989\)](#) for formal discussions on the matter).

The first formal analysis of recursive utility structures was carried out in a deterministic setting by [Koopmans \(1960\)](#). Koopmans proves that recursive utility functions can represent time preferences, including discounted utility functions as a particular case. Later, [Kreps and Porteus \(1978\)](#) show that it is possible to describe risk preferences in temporal lotteries using recursive utility functions. These functions are able to represent preferences as to the timing of risk resolution and can then overcome the problems raised by expected utility functions. Building on this, [Epstein and Zin \(1989\)](#) propose a parameterized sub-class of Kreps and Porteus functions, which allows them to disentangle risk and time preferences, as each of those are represented through distinct parameters. [Epstein and Zin \(1991\)](#) use a function of this class to formulate and estimate a generalized CAPM (Capital Asset Pricing Model). This function is the one used in the present study. Overall, the preferences framework developed by Epstein and Zin is a good compromise between flexibility and tractability.

The issue of risk in forest management can be addressed using different types of models. The oldest and most prominent category of forest management models consists of Faustmann's rotation models (see [Faustmann \(1849\)](#)). [Reed \(1984\)](#) is a seminal paper that deals with the risk of forest fires using a Faustmann's rotation model and a Poisson jump process to describe the risk. It shows analytically that the risk of fire reduces the optimal rotation length. Using a similar setting, [Haight et al. \(1995\)](#) focus on the risk of hurricanes and introduce in their model a probability of destruction (that is to say a vulnerability) that is age-dependent. The fact that the vulnerability of a forest increases over its age is a fundamental characteristic of the risk of storm on forests (see [Schelhaas et al. \(2010\)](#)). The results also show a reduction in the rotation age due to the risk.

However, [Reed \(1984\)](#) and [Haight et al. \(1995\)](#) consider risk-neutral producers. On the contrary, [Caulfield \(1988\)](#) proposes a mean-variance approach to represent the producer's risk aversion. He shows that risk aversion tends to shorten rotations but the mean-variance framework is by definition not able to determine a unique solution.

In some other studies, the risk is modeled using diffusion processes. In [Clarke and Reed \(1989a\)](#) and [Reed and Clarke \(1990\)](#), the forest biological growth and the price both follow geometric brownian motions that are respectively age-dependent in the first study and size-dependent in the latter. In both studies, the producer is risk averse (with expected utility preferences) and aversion is shown to shorten the rotation age. However, these studies are based on single rotation models in which continuation values are introduced but not flexibly determined. [Willassen \(1998\)](#) extends this analysis and proposes an analytical solution when future rotations are completely endogenous but deals neither with risk aversion nor with stochastic prices. These three studies address the issue of optimal rotation length from an initial date standpoint. On the contrary, [Gong \(1998\)](#), on the basis of stochastic prices, derives a reservation price rule that gives optimal harvests for a given state of the forest at a given time. The results again show that risk aversion tends to reduce harvest ages.

Another type of models used in forest management under risk consists of two-period models. These models are focused on the analysis of intertemporal trade-offs. [Koskela and Ollikainen \(1999\)](#) use a two-period model and recursive utility preferences, they show that risk aversion increases the present consumption at the expense of the future one, which reveals a precautionary behavior.

Rotation models and two-period models are adapted to deal respectively with optimal rotation ages and intertemporal trade-offs but they do not answer to questions on optimal age-class structures.

The optimal management of a forest with multiple age-classes in a discrete time setting and a deterministic context is the focus of many studies. [Mitra and Wan \(1985\)](#) and [Mitra and Wan \(1986\)](#) analytically show that in presence of discounting, the optimal rotation

age is given by Faustmann's rule and thus does not depend on intertemporal preferences. Moreover, they provide numerical evidence that shows the existence of stationary periodic forests following Faustmann's rule. Supporting this observation, [Wan Jr \(1994\)](#) shows that the normal forest following Faustmann's rule is an unstable equilibrium. Later, [Salo and Tahvonen \(2002a\)](#) and [Salo and Tahvonen \(2002b\)](#), using Karush-Kuhn-Tucker conditions, demonstrate the existence of a continuum of stationary periodic forests around Faustmann's normal forest. Unlike the rotation age, this set of stationary forests depends on intertemporal preferences. The stationarity of periodic forests is due to the discrete time setting as they tend to disappear when time steps tend to zero. In addition, [Salo and Tahvonen \(2003\)](#) show that there are no stationary periodic forests whenever Faustmann's age is not unique, which is a limit case.

In a similar multiple-stand setting, [Piazza and Pagnoncelli \(2015\)](#) address the issue of stochastic prices analytically. They are able to characterize an optimal harvest rule and show that all age-classes above a given rotation age should be harvested and none of the others. However, [Piazza and Pagnoncelli \(2015\)](#) compute optimal decisions from an initial standpoint as a single sequence of harvest decisions, which does not take into account future adjustments based on the observation of realized prices.

Thus, the issue of multiple age-class forest management in a context of perturbation risk has mainly been addressed using numerical approaches. For example, [Couture and Reynaud \(2008\)](#) have developed a stochastic dynamic programming model that is used to analyze both stationary states and transitory dynamics of a forest with multiple age-classes whose owner has recursive preferences.

The aim of this article is two-fold : i) providing analytical results on the management of a forest with multiple age-classes subject to a risk of perturbation, and ii) providing clear numerical evidence on stationary rotation ages and age-class structures, as well as on the role of preferences.

In section 2.3, the analytical approach proposed in [Salo and Tahvonen \(2002b\)](#) and based on Karush-Kuhn-Tucker conditions is adapted to the stochastic context and is used to identify

the determinants of optimal forest ages and in particular to understand the influence of preferences. In section 2.4, a stochastic dynamic programming model is used to identify the different types of stationary states and to assess the sensitivity of the rotation age to preference parameters.

2.2 The stochastic dynamic forest management program

The model considered in the present study is based on even-aged forest management. In this model, the forest management is flexible and allows for forests with multiple age-classes. There is no possibility for thinning in the model : on a given land acreage, timber is either totally harvested or not harvested at all. However, an age-class may be harvested only on a fraction of the total land acreage it covers. Moreover, as the different age-classes are spatially separated (even-aged forestry), there are no interaction effects between age-classes in terms of growth dynamics. In addition, it is assumed that a random perturbation may at any time destroy completely some age-classes (with neither growth potential nor timber value left) and leaves the others untouched.

These assumptions ensure that the state of the forest at a given time can be completely described by the land shares corresponding to the different age-classes, noted $x_{a,t}$ with $a \in \mathbb{N}^*$ the age-class index and $t \in \mathbb{N}$ the time index.

The problem faced by the producer is set in discrete time, it is sequential and is identical from every period of time. At a given time t , the producer observes the state of his forest, it is defined by the vector of land shares $X_t = (x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{a,t}, \dots)$. On the basis of this observation, he makes harvest and planting decisions. These decisions determine the income Π_t received at time t , which is certain from a time t perspective. These decisions also determine the land shares $X_{t+1} = (x_{1,t+1}, x_{2,t+1}, \dots, x_{a,t+1}, \dots)$ that will be realized at time $t + 1$ if no perturbation occurs between t and $t + 1$ and after age-classes grew older by one period. Once decisions are made and executed, a random perturbation occurs with probability p and does not occur with probability $(1 - p)$. If it does not occur, state X_{t+1} is actually realized at $t + 1$, otherwise state $X_{t+1}^e = (x_{1,t+1}^e, x_{2,t+1}^e, \dots, x_{a,t+1}^e, \dots)$ is realized instead. Moreover,

we assume that state X_{t+1}^e is a function of "decided" land shares X_{t+1} . We assume that there are real-valued functions $(d_1, d_2, \dots, d_a, \dots)$ describing the effect of the perturbation, such that $(x_{1,t+1}^e, x_{2,t+1}^e, \dots, x_{a,t+1}^e, \dots) = (d_1(x_{1,t+1}), d_2(x_{2,t+1}), \dots, d_a(x_{a,t+1}, \dots))$, which we conveniently rewrite $X_{t+1}^e = D(X_{t+1})$.

This sequence of decisions and realization is represented in figure 2 :

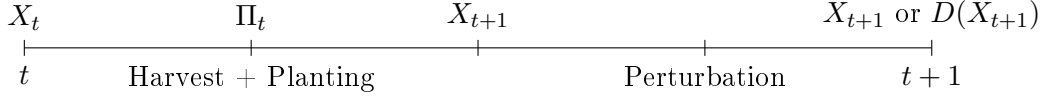


FIGURE 2 – Timeline of decisions and realizations between t and $t + 1$

Once the state at $t + 1$ is realized, the producer observes it and the same sequence of decisions and realization reproduces, and so forth indefinitely.

The problem faced by the producer can be analyzed using the framework proposed by [Epstein and Zin \(1989\)](#), which involves similar temporal lotteries. For such temporal lotteries, [Epstein and Zin \(1989\)](#) define a new preference framework named recursive preferences. More precisely, [Epstein and Zin \(1991\)](#) define a recursive utility function U_t on the basis of the recursive relation presented in equation 8 :

$$U_t = \left((1 - \beta) \Pi_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta [E(\tilde{U}_{t+1}^{1-\alpha})]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (8)$$

This functional form combines a Constant Elasticity of Substitution (CES) function and a Constant Relative Risk Aversion (CRRA) expected utility function.

U_t is the utility brought to the producer by all possible incomes received from time t onwards. Equation 8 indeed defines a way of aggregating all these possible future incomes (corresponding to all perturbation scenarios that can realize as of time t). It is a generalization of the expected utility framework, which is obtained as a particular case when $\alpha = \frac{1}{\sigma}$ (see [Epstein and Zin \(1991\)](#)).

Thus, Π_t is the (certain) payoff at time t , $\tilde{U}_{t+1}$ is the uncertain recursive utility of the

forest producer as of time $t + 1$, and E the corresponding expectation operator. $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$ is the intertemporal preferences parameter (the greater σ , the more flexible intertemporal substitutions), $\alpha \in \mathbb{R}^+$ is the risk aversion parameter (the greater σ , the more risk-averse the producer), and β is the subjective discount rate.

Epstein and Zin (1989) prove that it is possible to maximize U_t by adjusting, under constraints, all possible future incomes (as of time t) for all possible perturbation scenarios. As the maximization program is sequential, they also prove that it is possible to determine an optimal decision rule at a given time t as a function of the observed state of the forest X_t . This decision rule is shown to be independent from t and we denote it by $d(X_t)$.

In addition, Epstein and Zin (1989) show that it is possible to determine this optimal decision rule using dynamic programming on the basis of a modified Bellman equation. The general form of this modified Bellman equation, as presented in Epstein and Zin (1991), is given in equation 9 :

$$V(X_t) = \max_{d \in \mathbb{D}_t} \left\{ \left((1 - \beta)\Pi(X_t, d)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[E(V(\tilde{X}_{t+1} | X_t, d))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \right\} \quad (9)$$

Considering state X_t , decisions d must belong to the feasible set $\mathbb{D}_t$. $\Pi(X_t, d)$ is the certain income received by the producer at t . It depends on both state X_t and decisions d . $(\tilde{X}_{t+1} | X_t, d)$ is the distribution of the forest state at $t + 1$ conditional on state X_t and decisions d .

The value function $V(X_t)$ that verifies equation 9 gives the maximum value of U_t when the initial state at time t is X_t and when all subsequent decisions are optimal regardless of the perturbation scenario that will realize.

Equation 9 as well as feasible decision sets $\mathbb{D}_t$ can be further specified in the context of our model.

As for decisions, the acreage of age-class a that is harvested between t and $t + 1$ is noted

$h_{a,t}$. It corresponds to the difference between the acreage $x_{a,t}$ allocated to age-class a at time t and the acreage $x_{a+1,t+1}$ allocated to age-class $a + 1$ at $t + 1$ if no perturbation occurs between t and $t + 1$, that is the same age-class but one time-step older and one time-step later. The acreage planted with new forest between t and $t + 1$ is denoted s_t , it corresponds to the acreage of land allocated to age-class 1 at the next time step if no perturbation occurs by then, that is $x_{1,t+1}$. Thus, the relation between control variables $h_{a,t}$ and s_t , and land shares $x_{a,t}$ (observed at t) and $x_{a,t+1}$ (realized at $t + 1$ in the absence of perturbation between t and $t + 1$) can be expressed as follows :

$$\text{For all } a \in \mathbb{N}^* \text{ and } t \in \mathbb{N} : \quad h_{a,t} = x_{a,t} - x_{a+1,t+1} \quad (10)$$

$$\text{For all } t \in \mathbb{N} : \quad s_t = x_{1,t+1} \quad (11)$$

Therefore, for a given state $X_t = (x_{1,t}, \dots, x_{a,t}, \dots)$ observed at t , decisions made between t and $t + 1$, $s_t, h_{1,t}, \dots, h_{a,t}, \dots$, can also be represented by decided land shares $X_{t+1} = (x_{1,t+1}, \dots, x_{a,t+1}, \dots)$ (that will be realized if no perturbation occurs between t and $t + 1$) as they contain all the information regarding the decisions.

As harvest decisions are made and executed before the perturbation may occur, Π_t is certain from a time t standpoint and can be expressed in function of harvested acreages $h_{a,t}$ or equivalently in function of land shares as follows :

$$\Pi_t = \sum_{a=1}^{+\infty} R_a h_{a,t} = \sum_{a=1}^{+\infty} R_a (x_{a,t} - x_{a+1,t+1}) = \Pi(X_t, X_{t+1}) \quad (12)$$

R_a is the income generated by harvesting one land unit of age-class a . Note that timber value results from a pure aging process, which is a consequence of the even-aged management hypothesis. Incidentally, equation 12 reflects the absence of harvest and planting costs in the model.

After harvest and planting decisions are executed, the perturbation occurs with probability p or does not occur with probability $(1 - p)$. Thus, the perturbation process is a succession of Bernoulli trials that are identically and independently distributed over time.

In addition, as assumed above, if decided land shares are $X_{t+1} = (x_{1,t+1}, x_{2,t+1}, \dots, x_{a,t+1}, \dots)$, then realized land shares at $t + 1$ may be $X_{t+1} = (x_{1,t+1}, x_{2,t+1}, \dots, x_{a,t+1}, \dots)$ with probability $(1 - p)$ or $D(X_{t+1}) = (d_1(x_{1,t+1}), d_2(x_{2,t+1}), \dots, d_a(x_{a,t+1}), \dots)$ with probability p .

On the basis of these clarifications, the Bellman equation can be rewritten as follows :

$$V(X_t) = \max_{X_{t+1}} \left\{ \left((1-\beta)\Pi(X_t, X_{t+1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1-p)V(X_{t+1})^{1-\alpha} + pV(D(X_{t+1}))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \right\} \quad (13)$$

Moreover, decided land shares $X_{t+1} = (x_{1,t+1}, x_{2,t+1}, \dots, x_{a,t+1}, \dots)$ are subject to two types of constraints.

The acreages of land $h_{a,t}$ that are harvested from the different age-classes are by definition positive. On the basis of equation 10, these constraints can be expressed as follows :

$$\text{For all } a \in \mathbb{N}^* \text{ and } t \in \mathbb{N} : \quad x_{a,t} \geq x_{a+1,t+1} \quad (14)$$

The total land acreage available for forest production is normalized to one, without loss of generality :

$$\text{For all } t \in \mathbb{N}^* : \quad \sum_{a=1}^{+\infty} x_{a,t} \leq 1 \quad (15)$$

The Bellman equation 13, as well as constraints 14 and 15, define the optimization program faced by the forest producer.

This optimization program can be solved numerically using dynamic programming methods as performed in section 2.4. However, it is also possible to derive a few analytical results using Karush-Kuhn-Tucker conditions as shown in section 2.3.

2.3 Analytical characterization of stationary forests

Section 2.3.1 presents a necessary condition for the stationarity of a normal forest of rotation age F . This condition is demonstrated in section 2.3.2 using Karush-Kuhn-Tucker

conditions.

2.3.1 Conditions of stationarity of normal forests and characterization of rotation ages

We write $X_s = (x_{1,s}, x_{2,s}, \dots, x_{a,s}, \dots)$ the vector of land shares describing a normal forest of rotation age F , which means that $x_{a,s} \leq \frac{1}{F}$ for $a \leq F$ and $x_{a,s} = 0$ for $a > F$.

Π_s is the income generated at each time step by a normal forest of age F as long as it remains in this state, which means that $\Pi_s = \Pi(X_s, X_s) = \frac{R_F}{F}$.

V is the value function that verifies the dynamic program defined by the Bellman equation 13 subject to constraints 14 and 15.

V^e is a function such that $V^e(x_1, x_2, \dots, x_a, \dots) = V(d_1(x_1), d_2(x_2), \dots, d_a(x_a), \dots)$ where functions $d_1, d_2, \dots, d_a, \dots$ describe the impact of the perturbation on the different land shares (see section 2.2).

Hypothesis 1 *If the forest is initially a normal forest of rotation age F , then it is optimal that it remains a normal forest of age F as long as no perturbation occurs.*

Alternatively, hypothesis 1 states that the normal forest of age F is stationary as long as no perturbation occurs.

Hypothesis 2 $\beta(1-p) \left(\frac{[(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{V(X_s)} \right)^{\alpha - \frac{1}{\sigma}} < 1.$

Hypothesis 2 allows us to perform the calculations up to condition 16 below. It is a weak hypothesis that is for example verified when $\alpha \geq \frac{1}{\sigma}$ (although it is not necessary).

Proposition 1 *Considering a forest producer facing the optimization program defined by*

the Bellman equation 13 under constraints 14 and 15, then under hypotheses 1 and 2, condition 16 necessarily holds :

For all $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - \gamma^F} \left[(1 - \beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \gamma^F R_F + \frac{p}{1 - p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^F \frac{\partial V^e}{\partial x_F} \Big|_{X_s} \right) \right] \\ & \geq \frac{1}{1 - \gamma^j} \left[(1 - \beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \gamma^j R_j + \frac{p}{1 - p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^j \frac{\partial V^e}{\partial x_j} \Big|_{X_s} \right) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

where

$$\gamma = \beta(1 - p) \left(\frac{[(1 - p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{V(X_s)} \right)^{\alpha - \frac{1}{\sigma}} \quad (17)$$

Condition 16 shows that if a normal forest is stationary, then its rotation age depends on the risk (parameter p and functions $d_1, d_2, \dots, d_a, \dots$), and on both intertemporal preferences (parameter σ) and risk aversion (parameter α). Indeed, for a given age F , condition 16 does not generally hold for all possible values of (α, σ, p, d_a) and if condition 16 does not hold, the normal forest of rotation age F cannot be stationary. Instead, another forest (or other forests), possibly a normal forest with a different rotation age may be stationary.

This observation contrasts with the results obtained by Salo and Tahvonen (2002b) who show in a deterministic setting that the rotation age of any stationary forest (including the normal forest) always follows Faustmann's rule, regardless of intertemporal preferences.

As shown numerically in section 2.4, changing the rotation age indeed allows the producer to modulate the exposure and the vulnerability (see Schelhaas et al. (2010) for definitions) of a forest to the risk of perturbation. The dependence of the rotation age on the risk and on preferences thus reflects the existence of precautionary behaviors.

Unfortunately, it is not generally possible to derive a practical expression giving the rotation age F from inequality 16, nor is it generally possible to determine the sign of variations of

the rotation age to changes in the parameters. Nevertheless, it is possible to derive more information for some particular cases.

First, when the occurrence of a perturbation is assumed to destroy completely all age-classes in the forest, equation 16 can be rewritten as follows :

$$F = \arg \max_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\gamma^j}{1 - \gamma^j} R_j \right\} \quad (18)$$

Indeed, if the perturbation completely destroys the forest regardless of its state, we have $d_1(x_1) = d_2(x_2) = \dots = d_a(x_a) = \dots = 0$ for all states $X = (x_1, x_2, \dots, x_a, \dots)$. Consequently, $\frac{\partial d_a(x_a)}{\partial x_a} = 0$ for all a and we then have $\frac{\partial V^e}{\partial x_a} = \frac{\partial V}{\partial d_a(x_a)} \frac{\partial d_a(x_a)}{\partial x_a} = 0$ for all states $X = (x_1, x_2, \dots, x_a, \dots)$, including X_s .

In these conditions, equation 18 indicates that the rotation age of a stationary normal forest still depends on preferences (through γ).

In case the producer has expected utility preferences, that is when $\alpha = \frac{1}{\sigma}$, $\gamma = \beta(1 - p)$ and equation 18 reduces to equation 19 :

$$F = \arg \max_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{(\beta(1 - p))^j}{1 - (\beta(1 - p))^j} R_j \right\} \quad (19)$$

Equation 19 indicates that in presence of a risk of total destruction and when the producer has expected utility preferences, the rotation age of a stationary normal forest does not depend on preferences (but depends on the probability of the perturbation). This observation is consistent with the results obtained by Reed (1984) on the basis of a single-stand rotation model. However, when the destructive potential of the perturbation is not total, the rotation age depends on preferences, even in an expected utility framework.

Moreover, unlike equation 18 that depends on endogenous land shares (through γ), equation 19 is a limit condition on exogenous parameters from which the age F can be easily determined. It shows that F is unique (except for limit cases). The consequence of the latter statement is discussed in section 2.3.3.

Equations 18 and 19 also illustrate the fact that unlike expected utility preferences, recursive preferences take into account the timing in risk resolution and that the preference for an earlier resolution is held by the factor $\left(\frac{[(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{V(X_s)} \right)^{\alpha - \frac{1}{\sigma}}$ that appears in γ .

Finally, in the absence of risk, that is when $p = 0$, equation 16 reduces to equation 20, that is Faustmann's rule in a discrete time setting :

$$F = \arg \max_{j \in \mathbb{N}} \left\{ R_j \frac{\beta^j}{1 - \beta^j} \right\} \quad (20)$$

2.3.2 Demonstration

In order to prove proposition 1, we use an alternative formulation of the producer's objective to the Bellman equation.

Recursive relation 21 describes how future possible incomes are aggregated to form the producer's utility, that is so far not maximized :

$$U_t = \left((1 - \beta)\Pi_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[E(\tilde{U}_{t+1})^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (21)$$

U_t is an aggregate of the income Π_t received by the producer at time t (that is certain from a time t standpoint) and of the utility $\tilde{U}_{t+1}$ brought by all possible incomes following time $t + 1$. From a time t perspective, the utility $\tilde{U}_{t+1}$ is uncertain. It can either be U_{t+1} if no perturbation occurs between t and $t + 1$ (probability $(1 - p)$) or U_{t+1}^e if the perturbation occurs (probability p). U_{t+1} and U_{t+1}^e do not need to be equal as future possible incomes do not need to be the same whether a perturbation has occurred between t and $t + 1$ or not.

We consider an initial date $t = 0$, at which the state of the forest is described by the vector of land shares $X_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{a,0}, \dots)$. Then, the forest producer makes decisions, that are

not necessarily optimal, which leads the forest to state $X_1 = (x_{1,1}, \dots, x_{a,1}, \dots)$ at $t = 1$ if no perturbation occurs between t and $t + 1$ or to state $D(X_1) = (d_1(x_{1,1}), \dots, d_a(x_{a,1}, \dots))$ if the perturbation occurs. On this basis, recursive relation 21 leads to equation 22 :

$$U_0 = \left((1 - \beta)\Pi(X_0, X_1)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1 - p)U_1^{1-\alpha} + pU_1^{\epsilon 1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (22)$$

So far, neither the decisions taken between $t = 0$ and $t = 1$ nor any following decisions are optimized.

However, we now suppose that all decisions made from $t = 1$ onwards are optimal but only when a perturbation has occurred between $t = 0$ and $t = 1$. After section 2.2, we know that the value function $V(X_t)$ (that verifies the optimization program described by the Bellman equation 13 and by constraints 14 and 15) is the maximum recursive utility U_t given an initial state X_t and given the specifications and constraints of our model, therefore we have $V(X_t) = \max\{U_t\}$.

After the perturbation has occurred between $t = 0$ and $t = 1$, the state of the forest is $D(X_1)$ and the maximum recursive utility that can be derived starting from this state is $V(D(X_1))$. Consequently, equation 22 can be written as follows :

$$U_0 = \left((1 - \beta)\Pi(X_0, X_1)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1 - p)U_1^{1-\alpha} + pV(D(X_1))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (23)$$

If the perturbation does not occur, the state of the forest at $t = 1$ is X_1 and the producer makes decisions to apply between $t = 1$ and $t = 2$ that are not necessarily optimal. Considering these decisions, state X_2 is realized at $t = 2$ if no perturbation occurs between $t = 1$ and $t = 2$, otherwise state $D(X_2)$ is realized. If we assume that all decisions following $t = 2$ are optimal when the perturbation has not occurred between $t = 0$ and $t = 1$ but that it has occurred between $t = 1$ and $t = 2$, we can write :

$$U_1 = \left((1 - \beta)\Pi(X_1, X_2)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1 - p)U_2^{1-\alpha} + pV(D(X_2))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (24)$$

The same rationale can be applied again and indefinitely, we can therefore obtain recursive relation 25 for all $t \in \mathbb{N}$:

$$U_t = \left((1 - \beta)\Pi(X_t, X_{t+1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1 - p)U_{t+1}^{1-\alpha} + pV(D(X_{t+1}))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (25)$$

Figure 3 shows how this way of expressing the sequential problem can be represented on the binomial tree corresponding to the perturbation :

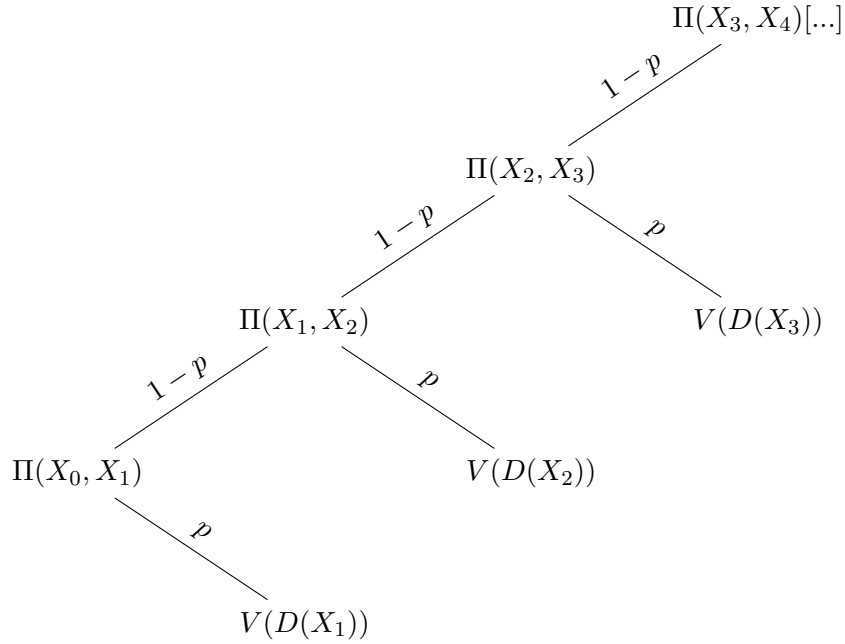


FIGURE 3 – Recursive aggregation and the binomial tree

The fact that U_1 is nested in U_0 , U_2 in U_1 and so forth indefinitely provides us with an expression $U_0(X_0, X_1, \dots, X_t, \dots)$ that depends on the initial state X_0 (constrained) and on vectors of land shares $X_1, \dots, X_t, \dots$ that will be realized if the perturbation never occurs.

$U_0(X_0, X_1, \dots, X_t, \dots)$ is the objective function of the forest producer at time $t = 0$ and $(X_1, \dots, X_t, \dots)$ are the vector of control variables that can be used to maximize it (under constraints). $(X_1, \dots, X_t, \dots)$ are the only variables that are left to be maximized as all the decisions following the first occurrence of a perturbation in all other perturbation scenarios are implicitly maximized through the use of the value function V . More generally, similar objective functions $U_t(X_t, X_{t+1}, \dots)$ can actually be defined when considering the problem

from any initial state X_t starting from any time $t \in \mathbb{N}$.

This approach for expressing U_0 allows us to isolate vectors of land shares $(X_1, \dots, X_t, \dots)$ that are realized when the perturbation never occurs. This is appropriate as we want to obtain a condition of stationarity for the normal forest of rotation age F provided that the perturbation never occurs.

The demonstration of necessary condition 16 is based on Karush-Kuhn-Tucker conditions. First, the Lagrangian corresponding to the maximization of $U_0(X_0 = X_s, X_1, X_2, \dots, X_t, \dots)$ (the initial state X_0 is constrained) under constraints 14 and 15 can be written as follows :

$$L(X_1, \dots, X_t, \dots, \{\mu_{a,t}\}, \{\eta_t\}) = U_0(X_0 = X_s, X_1, \dots, X_t, \dots) \\ + \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{a=1}^{+\infty} \mu_{a,t}(x_{a,t} - x_{a+1,t+1}) + \sum_{t=0}^{+\infty} \eta_t(1 - \sum_{a=1}^{+\infty} x_{a,t}) \quad (26)$$

$\{\mu_{a,t}\}$ and $\{\eta_t\}$ are the dual variables respectively associated with constraints 14 and 15 introduced in section 2.2.

We assume that the forest is initially a normal forest of rotation age F ($X_0 = X_s$ where X_s is the vector of land shares describing a normal forest of rotation age F) and we also assume that it is optimal that the forest remains in this state as long as the perturbation does not occur, which means that decisions $X_1 = X_2 = \dots = X_t = \dots = X_s$ are optimal.

The Lagrangian derivatives evaluated at $(X_0 = X_1 = X_2 = \dots = X_t = \dots = X_s, \{\mu_{a,t}\}, \{\eta_t\})$ are written as follows :

For $a > 1$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_0=X_1=\dots=X_s, \{\mu_{a,t}\}, \{\eta_t\}} = \frac{\partial U_0}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_0=X_1=\dots=X_s} + \mu_{a,t} - \mu_{a-1,t-1} - \eta_t \quad (27)$$

For $a = 1$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{1,t}} \Big|_{X_0=X_1=\dots=X_s, \{\mu_{a,t}\}, \{\eta_t\}} = \frac{\partial U_0}{\partial x_{1,t}} \Big|_{X_0=X_1=\dots=X_s} + \mu_{1,t} - \eta_t \quad (28)$$

As demonstrated in appendix 1, recursive relations 25 allow us to determine derivatives $\frac{\partial U_0}{\partial x_{a,t}}$. In particular, it is demonstrated that the value of $\frac{\partial U_0}{\partial x_{a,t}}$ when $X_0 = X_1 = \dots = X_t = \dots = X_s$ can be written as follows :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_0=X_1=\dots=X_t=\dots=X_s} &= \gamma^{t-1}(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (-R_{a-1}) + \gamma^t(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_a \\ &\quad + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_s} \end{aligned} \quad (29)$$

With

$$\gamma = \beta(1-p) \left(\frac{[(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{V(X_s)} \right)^{\alpha - \frac{1}{\sigma}} \quad (30)$$

$\Pi_s = \Pi(X_s, X_s) = \frac{R_F}{F}$ is the income generated by the normal forest of rotation age F at every time step and as long as no perturbation occurs. V^e is a function such that $V^e(X) = V(D(X))$ for all X , then $\frac{\partial V^e}{\partial x_a} \Big|_{X_s} = \frac{\partial V(D)}{\partial x_a} \Big|_{X_s}$.

However, expression 29 holds only for $a > 1$. For $a = 1$, the expression becomes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial x_{1,t}} \Big|_{X_0=X_1=\dots=X_s} &= \gamma^t(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_1 + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_{1,t}} \Big|_{X_s} \end{aligned} \quad (31)$$

Karush-Kuhn-Tucker conditions state that at the optimum, the following two conditions 32 and 33 on the Lagrangian derivatives must be respected for all $a \geq 1$ and $t \geq 1$:

$$x_{a,t}^* \frac{\partial L}{\partial x_{a,t}} = 0 \quad (32)$$

where $\{x_{a,t}^*\}$ are land shares at the optimum, and :

$$\frac{\partial L}{\partial x_{a,t}} \leq 0 \quad (33)$$

As we assume that when $X_0 = X_s$, it is optimal that $X_1 = X_2 = \dots X_- = \dots = X_s$, where $x_{a,s} = \frac{1}{F}$ for $a \leq F$ and $x_{a,s} = 0$ for $a > F$, Karush-Kuhn-Tucker conditions translate as conditions 34 and 35 :

For $1 \leq a \leq F$:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_0=X_1=\dots=X_s, \{\mu_{a,t}\}, \{\eta_t\}} = 0 \quad (34)$$

For $a > F$:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_0=X_1=\dots=X_s, \{\mu_{a,t}\}, \{\eta_t\}} \leq 0 \quad (35)$$

By replacing the Lagrangian derivatives by their values, we finally obtain conditions 36, 37 and 38 :

For $1 < a \leq F$ and $t \geq 1$:

$$\begin{aligned} & \gamma^{t-1}(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (-R_{a-1}) + \gamma^t(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (+R_a) \\ & + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left. \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_s} + \mu_{a,t} - \mu_{a-1,t-1} - \eta_t = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

For $a > F$ and $t \geq 1$:

$$\begin{aligned} & \gamma^{t-1}(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (-R_{a-1}) + \gamma^t(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (+R_a) \\ & + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left. \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_s} + \mu_{a,t} - \mu_{a-1,t-1} - \eta_t \leq 0 \end{aligned} \quad (37)$$

For $t \geq 1$:

$$\gamma^t(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (+R_1) + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left. \frac{\partial V^e}{\partial x_{1,t}} \right|_{X_s} + \mu_{1,t} - \eta_t = 0 \quad (38)$$

The subscript t in terms $\frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_s}$ is unnecessary, we can write $V^e(x_{1,t}, \dots, x_{a,t}, \dots) = V^e(x_1, \dots, x_a, \dots)$

and then $\frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_s} = \frac{\partial V^e}{\partial x_a} \Big|_{X_s}$.

As demonstrated in Appendix 2, it is possible to combine conditions 36, 37 and 38 to obtain following conditions 39 and 40 :

For $j \in \mathbb{N}$ and $j \leq F$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \gamma^j} \left[\gamma^j (1 - \beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_j + \frac{p}{1 - p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^j \frac{\partial V^e}{\partial x_j} \Big|_{X_s} \right) \right] \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_{j,kj} - \sum_{t'=0}^{+\infty} \eta_{t'} = 0 \quad (39) \end{aligned}$$

For $j \in \mathbb{N}$ and $j > F$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \gamma^j} \left[\gamma^j (1 - \beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_j + \frac{p}{1 - p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^j \frac{\partial V^e}{\partial x_j} \Big|_{X_s} \right) \right] \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_{j,kj} - \sum_{t'=0}^{+\infty} \eta_{t'} \leq 0 \quad (40) \end{aligned}$$

Karush-Kuhn-Tucker conditions also state that at the optimum, all dual variables must be positive, that is $\mu_{a,t} \geq 0$ for all $a \geq 1$ and all $t \geq 1$, and $\eta_t \geq 0$ for all $t \geq 1$. In addition, at the optimum, we must have $\mu_{a,t}(x_{a,t} - x_{a+1,t+1}) = 0$ for all $a \geq 1$ and $t \geq 1$ and $\eta_t(1 - \sum_{a=1}^{+\infty} x_{a,t}) = 0$ for all $t \geq 1$. As, at the optimum, we have $x_{F+1,t} = 0 < \frac{1}{F} = x_{F,t}$

for all t , then $\mu_{F,t} = 0$ for all t and subsequently $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_{F,kF} = 0$.

Therefore, for any $j \in \mathbb{N}$, the following inequality must hold :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - \gamma^F} \left[\gamma^F (1 - \beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_F + \frac{p}{1 - p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \left(\gamma \frac{\partial V^e(X_s)}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^F \frac{\partial V^e}{\partial x_F} \Big|_{X_s} \right) \right] \\ & \geq \frac{1}{1 - \gamma^j} \left[\gamma^j (1 - \beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_F + \frac{p}{1 - p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^j \frac{\partial V^e}{\partial x_j} \Big|_{X_s} \right) \right] \end{aligned} \quad (41)$$

Condition 41 is the condition we aimed at demonstrating. It is a necessary condition¹ for $X_1 = \dots = X_t = \dots = X_s$ to be optimal when $X_0 = X_s$. In words, if it is optimal to keep the forest as a normal forest of rotation age F when it is initially in this state and as long as the perturbation does not occur, then condition 41 must hold.

2.3.3 Alternative stationary forests

So far, only normal forests have been considered as potential stationary states, while the numerical results presented in section 2.4 identify two types of stationary forests : i) forests with constant age-class structures but with multiple rotation ages, and ii) periodic forests with single rotation ages.

As an example of type i) forests, a forest with two rotation ages, say j and F is such that at all times, $x_1 = x_2 = \dots = x_j = p_1$ and $x_{j+1} = \dots = x_F = p_2$ with $p_1 > p_2$ (and $j p_1 + (F - j) p_2 = 1$). This means that at all times t , a given proportion of age-class j is harvested, as well as the totality of age-class F .

In a deterministic environment, it has been shown analytically in [Salo and Tahvonen \(2003\)](#) that if F is the only age that satisfies Faustmann's rule, no forest having other harvest ages can be stationary. However, if two successive ages verify Faustmann's rule, which is a limit condition, there exists a continuum of stationary forests with a constant age structure, for which the harvest is indifferently distributed between ages j and F .

1. As the constraints are linear, the constraint qualifications are met for the program (see [Leonard and Van Long \(1992\)](#)) and Karush-Kuhn-Tucker conditions are indeed necessary.

Analogically, it can be shown using a similar demonstration as in section 2.3.2 and appendices 1 and 2 that in a stochastic environment and under recursive preferences, a forest with rotation ages j and F (for example) and a constant age-class structure is stationary if and only if both j and F satisfy condition 16. This leads to the following equality condition :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-\gamma^F} \left[\gamma^F (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_F + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \left(\gamma \frac{\partial V^e(X_s)}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^F \frac{\partial V^e}{\partial x_F} \Big|_{X_s} \right) \right] \\ &= \frac{1}{1-\gamma^j} \left[\gamma^j (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_j + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^j \frac{\partial V^e}{\partial x_j} \Big|_{X_s} \right) \right] \end{aligned} \quad (42)$$

The major difference from the deterministic environment is that condition 42 is not a limit condition on exogenous parameters, but also depends on land shares X_s , which are endogenous. As a consequence, the set of values for exogenous parameters that allow the stationarity of dual (or multiple) rotation forests may well be expanded in a stochastic environment and not be reduced anymore to a limit condition.

This consideration can be illustrated with the particular cases introduced in section 2.3.1. When the forest is subject to a risk of total destruction, condition 42 can be written as follows (see condition 18 in section 2.3.1) :

$$R_F \frac{\gamma^F}{1-\gamma^F} = R_j \frac{\gamma^j}{1-\gamma^j} \quad (43)$$

As γ depends on endogenous land shares, condition 43 might allow for multiple harvest ages in a stationary state, which is confirmed numerically on the basis of the approach presented in section 2.4.

However, when we make the further assumption that the producer has expected utility preferences, condition 43 becomes :

$$R_F \frac{(\beta(1-p))^F}{1-(\beta(1-p))^F} = R_j \frac{(\beta(1-p))^j}{1-(\beta(1-p))^j} \quad (44)$$

Condition 44 is a limit condition on exogenous parameters and does not generally allow

for multiple harvest ages. This is also confirmed numerically.

The fact that numerical results presented in section 2.4 show that stationary forests with multiple rotation ages have a constant structure may derive from the fact that equality 42 cannot hold at all times when land shares $\{x_{a,t}\}$ are not constant.

The existence of periodic stationary forests with single rotation ages (type ii)) is not addressed analytically, as it would significantly complicate the calculations. However, these forests have received much attention in the deterministic literature and it has been shown in Salo and Tahvonen (2002b,a, 2003)) that the periodicity is due to the discrete time setting.

The analytical characterization of the different types of stationary states is difficult if feasible at all in the general case, but numerical evidence presented in section 2.4 helps answer this issue.

2.4 Sensitivity of the optimal rotation age to preferences : a numerical application

As mentioned in section 2.3.1, formula 16 cannot generally be used to derive rotation ages analytically. Instead, we propose using a numerical stochastic dynamic programming approach to conduct sensitivity analyses on preference parameters.

This approach builds on the work presented in Couture and Reynaud (2008). However, in the model used here, the producer cannot save money. The absence of a trade-off between savings and consumption in our model is justified by the fact that recursive preferences on the income stream are actually induced by such a trade-off (see Spence and Zeckhauser (1972) and Kreps and Porteus (1979)). Thus, it would be redundant to consider both recursive preferences on forestry income and the possibility to save money.

2.4.1 The stochastic dynamic programming model

The model is analogous to the dynamic program introduced by the Bellman equation 13 and by constraints 14 and 15 in section 2.2 but a few differences are introduced.

The constraints are the same as in the analytical model except that, for ease of programming, the total land available is not normalized at 1 but at 100.

The income function remains the same (see equation 12) and the data on timber revenues (that is the sequence R_a) corresponds to the maritime pine forestry in southwestern France, it is taken from Couture and Reynaud (2011) and presented in table 1 :

Age-class	Age (in years)	Timber revenue (euros/ha)
1	5	0
2	10	11
3	15	29
4	20	97
5	25	390
6	30	1378
7	35	2917
8	40	4083
9	45	4782
10	50	5191

TABLE 1 – Timber revenue in function of the age

The perturbation introduced in the model is aimed to represent a risk of storm. Unlike the analytical model described in section 2.3, where only one type of perturbation can occur, there are 9 types of storms that can occur in the numerical model. The first type of storm (#1) impacts only the oldest age-class, the second (#2) impacts the two oldest, and so on, with the last type of storm (#10) impacting all age classes. When an age-class is impacted, it is completely destroyed and no timber can be retrieved. This representation of risk ensures that the probability of destruction of an age-class, that is its vulnerability, increases over its age. This is a fundamental characteristic of the risk of storm in forests (see Schelhaas et al. (2010)).

The probabilities of occurrence of these different storms are heuristically calibrated and

are presented in Table 2 :

#event (e)	Destroyed age-classes (d_e)	Prob of occurrence (p_e)
0	None	0.895
1	9	0.020
2	8+9	0.018
3	7+8+9	0.016
4	6+7+8+9	0.014
5	5+6+7+8+9	0.012
6	4+5+6+7+8+9	0.009
7	3+4+5+6+7+8+9	0.007
8	2+3+4+5+6+7+8+9	0.005
9	1+2+3+4+5+6+7+8+9	0.003
10	All	0.001

TABLE 2 – Storms and probabilities

The Bellman equation associated with this program is given in equation 45 :

$$V(X_t) = \max_{X_{t+1}} \left\{ \left((1 - \beta) \Pi(X_t, X_{t+1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta \left[\sum_{e=0}^{10} p_e V(d_e(X_{t+1}))^{1-\alpha} \right]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \right\} \quad (45)$$

$X_{t+1} = (x_{1,t+1}, x_{2,t+1}, \dots, x_{a,t+1}, \dots)$ are the land shares that are realized at $t + 1$ in the absence of perturbation between t and $t+1$ (see Figure 2), d_e are the functions that describe the consequences on these decided land shares of the different events e presented in table 2, and p_e their associated probabilities.

The program is solved using a value function iteration algorithm (see Judd (1998)) written in GAMS, which implicitly assumes an infinite time horizon. The use of this algorithm relies on the Contraction Mapping Theorem (see Judd (1998)) that ensures its convergence.

Within the algorithm, the value function is given a third order polynomial form :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=i}^{10} \sum_{k=j}^{10} \alpha_{i,j,k} \cdot x_i \cdot x_j \cdot x_k + \sum_{l=1}^{10} \sum_{m=l}^{10} \alpha_{l,m} \cdot x_l \cdot x_m + \sum_{n=1}^{10} \alpha_n \cdot x_n \quad (46)$$

The space of possible states for land distribution is discretized into 1316 states, which is a good compromise between flexibility and tractability. The discount rate is 2%/year, which

leads to a discount factor of 0.904 for a time-step of 5 years.

2.4.2 Results

For different values of parameters α (risk aversion) and σ (intertemporal preferences), the model is used to generate an optimal sequence of decisions and states starting arbitrarily from Faustmann's normal forest (so as to speed up the convergence). The sequence is 100 time-steps long and the last time-steps provide the stationary state (aka the long-term steady-state equilibrium). Note that the risk of storms is taken into account in the producer's decisions, but that storms do not actually occur in the numerical simulations, thus ensuring that the equilibrium state can be reached.

The first fundamental result from these simulations, that echoes the discussion on alternative stationary states in section 2.3.3, is that both single-rotation and multiple-rotation forests are shown to exist as long-term equilibria.

Forests with multiple rotation ages all have a constant age-class structure. Again, this is due to the fact that equality 42, which is a condition to the coexistence of several rotation ages, cannot hold when land shares vary over time.

Furthermore, for given preferences, if a forest with multiple rotations is shown to be the long-term equilibrium starting from Faustmann's normal forest, it is also the long-term equilibrium for any other initial state and is therefore the only possible stationary state under these preferences. This characteristic is a consequence of the absence of periodicity when there are multiple rotation ages. Figure 4 shows two examples of stationary states with multiple harvest ages :

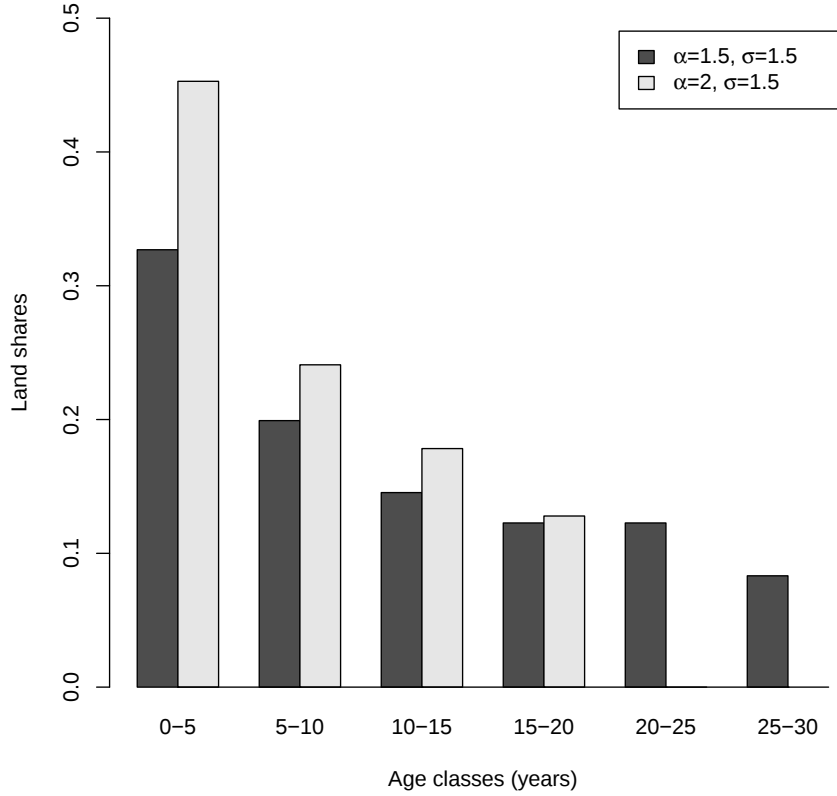


FIGURE 4 – Examples of stationary forests with multiple harvest ages

Figure 4 reveals gradual age structures resulting from the multiplicity of harvest ages. These gradual structures are efficient as they permit to reduce exposure, vulnerability, and also the potential income irregularity while minimizing the income loss. Among all efficient forest structures, the two examples presented in Figure 4 are preferred when the producer has the corresponding preferences.

In addition, as the forest structure is constant in these circumstances, it is possible to calculate an average harvest age weighted by the respective acreages that are harvested from the different age-classes.

On the other hand, single rotation forests can also be efficient and preferred. However, those forests allow for periodic stationarity (see [Salo and Tahvonen \(2002b\)](#)). Therefore, for given preferences that lead to a single-rotation equilibrium, there in fact exists a continuum of stationary states with the same rotation age that can all be reached as long-term equilibria

starting from alternative initial states. The normal forest with the given rotation age exists as a particular case within this continuum.

Thus, whether the long-term stationary state is a multiple-rotation or a single-rotation forest, it is possible to determine a unique average rotation age, for given preferences.

The sensitivity of this stationary average rotation age to risk aversion is presented in Figure 5 (note that $\sigma=100$ so that intertemporal preferences are very low). Incidentally, considering timber revenues given in Table 1 and the 2% discount rate, Faustmann's age is 40 years (age-class 8).

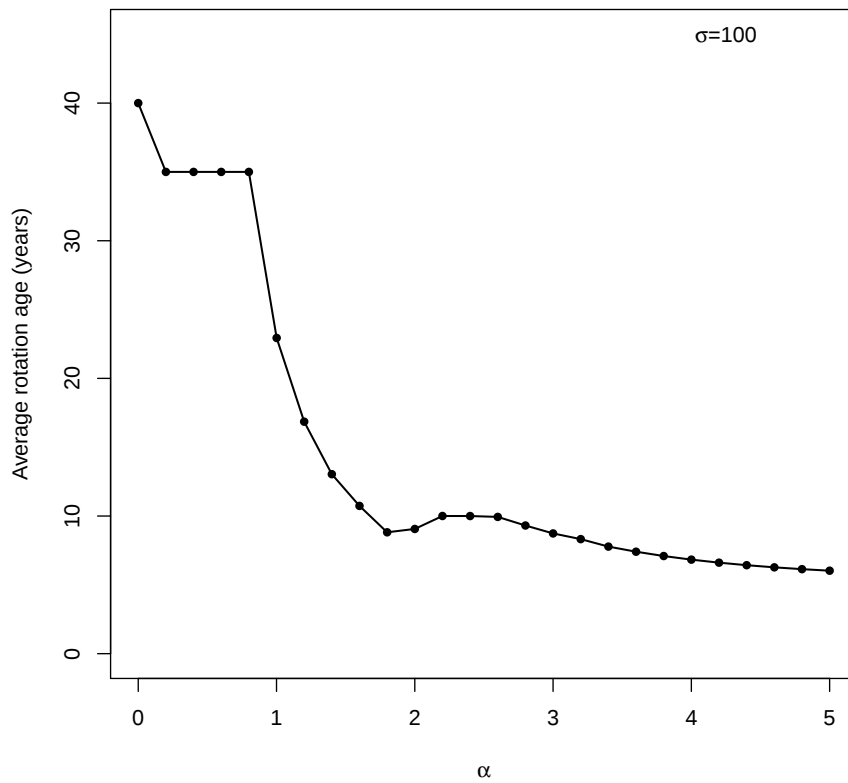


FIGURE 5 – Impact of risk aversion on the stationary average rotation age

Figure 5 shows that the rotation age decreases when risk aversion increases. Indeed, the higher the rotation age, the more exposed and vulnerable a forest is to storm (see Schelhaas et al. (2010)). Thus, Figure 5 reveals that decreasing the rotation age is a precautionary

behavior.

The results also reveal that distributing the harvest along different age-classes smoothes down the response of the rotation age to changes in risk aversion or risk preferences. This strategy avoids "jumping" between discrete age-classes and leads to "smooth" Figures 5 and 6.

However, the decreasing relation between the stationary rotation age and risk aversion does not seem to hold for values of α between 1.8 and 2.2. A closer look on land allocations and payoff values shows that the producer is actually more cautious for $\alpha = 2.2$ than for $\alpha = 1.8$ but that it is not reflected in the average rotation age. This observation shows that precautionary behaviors expressed through rearrangements in land allocation do not necessarily require a decrease in the average rotation age. Nevertheless, the results as a whole suggest that average rotation age and risk aversion are strongly related.

Similarly, Figure 6 illustrates the impact of intertemporal preferences (the smaller σ , the stronger intertemporal preferences) on the stationary average rotation age in the absence of risk preferences (i.e. $\alpha = 0$) :

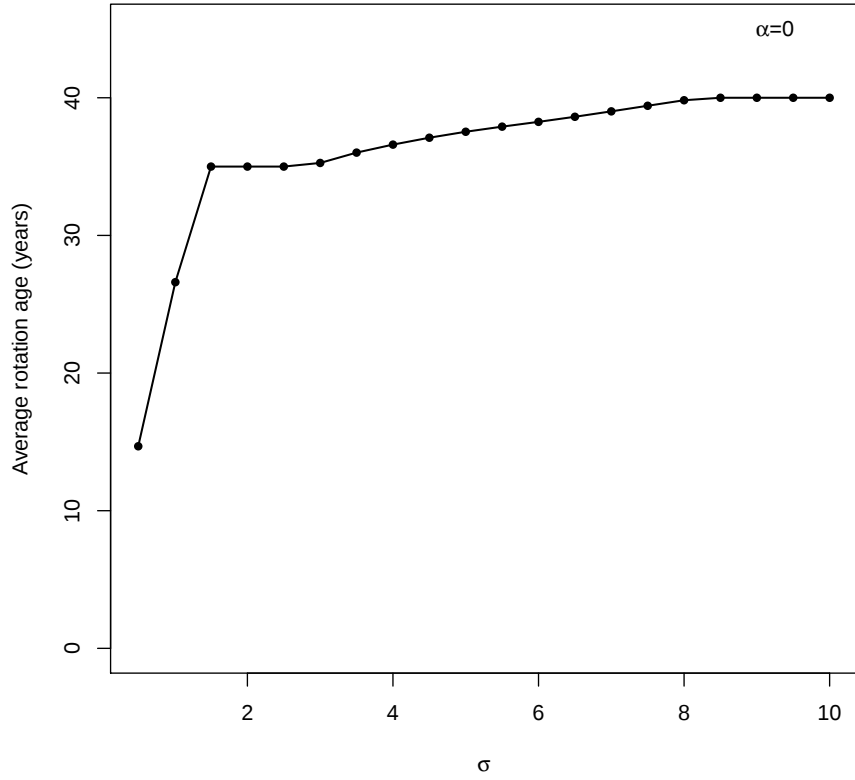


FIGURE 6 – Impact of intertemporal preferences on the stationary average rotation age

Figure 6 shows that tightening intertemporal preferences tends to decrease the rotation age. Indeed, the occurrence of storm causes irregularities in the income stream and these irregularities have more impact when intertemporal preferences are strong, hence the precautionary behavior.

To give an idea of how risk aversion and intertemporal preferences combine, Figure 7 shows the results for a number of simulations in which both preferences are present :

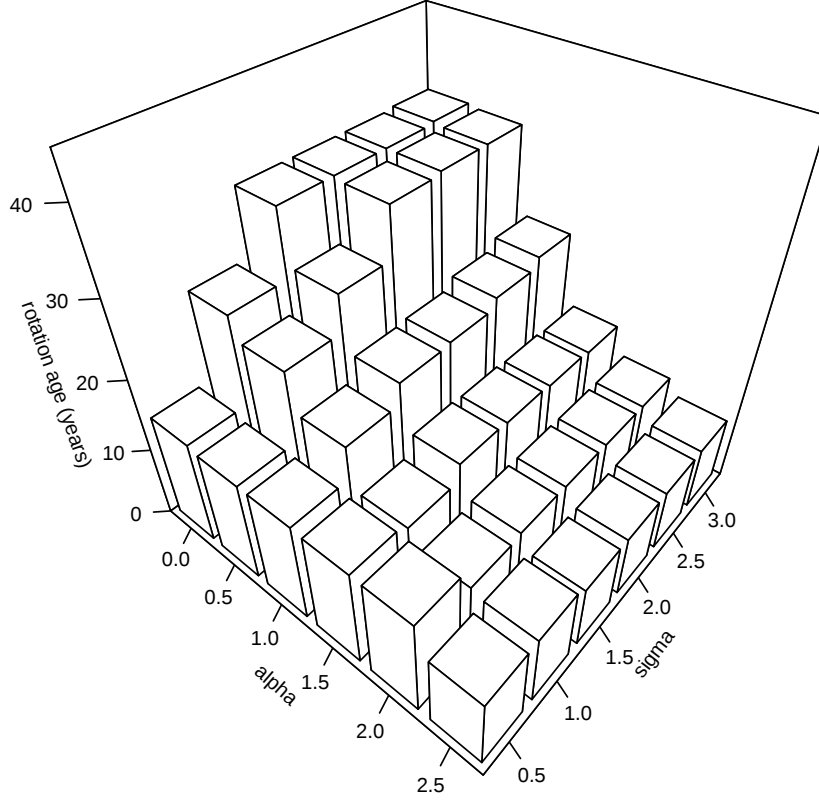


FIGURE 7 – Joint impact of preferences on the stationary average rotation age

The results show that the effects of the two preferences do not combine additively. They do not even perfectly combine in terms of direction of variation. For example, for $\alpha = 2$, Figure 7 shows that intertemporal preferences tend to increase the rotation age, which contradicts Figure 6. The fact that there exists a strong risk aversion on irregular income due to the presence of both types of preferences could justify that the producer increases the volume of timber in the forest as a precautionary form of saving that could help smooth down the income in case a storm occurred.

2.5 Discussion

The main conclusion of this study is that in presence of a perturbation risk, the rotation age or average rotation age of a forest with multiple age-classes depends on the risk and on preferences, and that the rotation age is shown to be a lever to modulate the exposure and vulnerability to risk. In addition, the possible coexistence of several rotation ages permits to the average rotation age to respond smoothly to changes in the exogenous parameters, despite the discrete time and discrete age setting. Finally, risk aversion and intertemporal preferences are shown to have analogous effects on the rotation age.

The literature on multiple-stand forest management in a deterministic context has well explained the existence of stationary periodic forests and has pointed out the fact that the forest structure is constant when Faustmann's age is not unique (see [Salo and Tahvonen \(2003\)](#)). These two results are shown to keep a signification in a stochastic context with the latter being particularly important as it explains that a unique average rotation age can be associated to a given level of risk and preferences.

For its part, the literature on single-stand rotation models has well identified the impact of risk and preferences on the rotation age, and conversely the role of the rotation age as a lever to reduce the exposition and the vulnerability of the forest. These results are shown to hold for multiple-stand forests, which is the main contribution of this article.

At last, the use of recursive preferences in a stochastic context justifies focusing on multiple-stand forests as it is crucial to consider both endogenous rotation age and age-class structure for disentangling the role of risk aversion and intertemporal preferences. Conversely, the clear results obtained in [Figures 5 and 6](#) when these two types of preferences are considered separately in opposition to the mixed results obtained in [Figure 7](#) when both preferences are considered together show that disentangling risk aversion and intertemporal preferences are essential to understand the role of preferences on multiple-stand forest management in a context of risk.

2.6 Appendices

Appendix 1 : The derivatives of the objective function U_0

Let us recall equations 25 given in section 2.3.2 :

$$U_0(X_0, X_1, \dots, X_t, \dots) = \left((1 - \beta)\Pi(X_0, X_1)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1-p)U_1^{1-\alpha} + pV(D(X_1))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (47)$$

$$U_1(X_1, X_2, \dots, X_t, \dots) = \left((1 - \beta)\Pi(X_1, X_2)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1-p)U_2^{1-\alpha} + pV(D(X_2))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (48)$$

[...]

$$U_{t-1}(X_{t-1}, X_t, \dots) = \left((1 - \beta)\Pi(X_{t-1}, X_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1-p)U_t^{1-\alpha} + pV(D(X_t))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (49)$$

$$U_t(X_t, X_{t+1}, \dots) = \left((1 - \beta)\Pi(X_t, X_{t+1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1-p)U_{t+1}^{1-\alpha} + pV(D(X_{t+1}))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (50)$$

[...]

From these equations, using the chain rule, we know that :

$$\frac{\partial U_0}{\partial x_{a,t}} = \frac{\partial U_0}{\partial U_1} \frac{\partial U_1}{\partial U_2} \dots \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}} \quad (51)$$

In addition, by deriving equation 49, we can write :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}} &= \frac{\sigma}{\sigma-1} \left((1-\beta)\Pi(X_{t-1}, X_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1-p)U_t^{1-\alpha} + pV(D(X_t))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \\
&\quad \left[(1-\beta)\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)\Pi(X_{t-1}, X_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} \frac{\partial \Pi(X_{t-1}, X_t)}{\partial x_{a,t}} \right. \\
&\quad \left. + \beta \frac{\frac{\sigma-1}{\sigma}}{1-\alpha} * [(1-p)U_t^{1-\alpha} + pV(D(X_t))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}-1} \right. \\
&\quad \left. \left((1-\alpha)(1-p)U_t^{-\alpha} \frac{\partial U_t}{\partial x_{a,t}} + p(1-\alpha)V(D(X_t))^{-\alpha} \frac{\partial V(D(X_t))}{\partial x_{a,t}} \right) \right] \quad (52)
\end{aligned}$$

By deriving equation 50, we can also write :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_t}{\partial x_{a,t}} &= \frac{\sigma}{\sigma-1} \left((1-\beta)\Pi(X_t, X_{t+1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1-p)U_{t+1}^{1-\alpha} + pV(D(X_{t+1}))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \\
&\quad (1-\beta)\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)\Pi(X_t, X_{t+1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} \frac{\partial \Pi(X_t, X_{t+1})}{\partial x_{a,t}} \quad (53)
\end{aligned}$$

In addition, after equation 12 (see section 2.2), we know that $\frac{\partial \Pi(X_{t-1}, X_t)}{\partial x_{a,t}} = -R_{a-1}$ (for $a > 1$ and 0 otherwise) and that $\frac{\partial \Pi(X_t, X_{t+1})}{\partial x_{a,t}} = R_a$. Moreover, we define a function V^e such that $V^e(X) = V(D(X))$ for all X , then we can write $\frac{\partial V(D)}{\partial x_{a,t}} = \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}}$.

Then, we want to evaluate $\frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}}$ when $X_{t-1} = X_t = \dots = X_s$ where X_s is the vector of land acreages describing the normal forest of rotation age F . Considering this, the income provided by the forest as long as no perturbation occurs is constant over time and we can write : $\Pi(X_t, X_{t+1}) = \Pi(X_s, X_s) = \Pi_s$ for all t .

In addition, we assume that when the forest is a normal forest of rotation age F at a given time t , it is optimal to remain in this state as long as the perturbation does not occur. This means that when $X_t = X_s$ (which is constrained from a time t standpoint), decisions $X_{t+1} = X_{t+2} = \dots = X_s$ are optimal, in the sense that U_t but also $U_{t+1}, U_{t+2}, \dots$, as defined by equations 50,... are maximized under constraints 14 and 15. We then have

$$\max_{X_{t+1}, X_{t+2}, \dots} \{U_t\} = \max_{X_{t+2}, X_{t+3}, \dots} \{U_{t+1}\} = \dots = V(X_s).$$

As the producer faces the same program at every time step, this assumption holds for all t . In particular, if $X_0 = X_s$ (constrained), then decisions $X_1 = X_2 = \dots = X_t = \dots = X_s$ are optimal and $\max_{X_1, X_2, \dots} \{U_0\} = \max_{X_2, X_3, \dots} \{U_1\} = \dots = V(X_s)$.

Moreover, as defined above, we have $V^e(X_s) = V(D(X_s))$.

Under these conditions, at $X_{t-1} = X_t = \dots = X_s$, the derivative $\frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}}$ takes the following value :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_{t-1}=X_t=\dots=X_s} &= \frac{\sigma}{\sigma-1} \left(V(X_s)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \\ &\quad \left[(1-\beta) \left(\frac{\sigma-1}{\sigma} \right) \Pi_s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} (-R_{a-1}) \right. \\ &\quad \left. + \beta \frac{\frac{\sigma-1}{\sigma}}{1-\alpha} [(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{\frac{\sigma-1}{\sigma}}{1-\alpha}-1} \right. \\ &\quad \left. \left((1-\alpha)(1-p)V(X_s)^{-\alpha} \frac{\sigma}{\sigma-1} \left(V(X_s)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} (1-\beta) \frac{\sigma-1}{\sigma} \Pi_s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} (R_a) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p(1-\alpha)V^e(X_s)^{-\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_s} \right) \right] \\ &= (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (-R_{a-1}) \\ &\quad + \beta(1-p) \left(\frac{[(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{V(X_s)} \right)^{\alpha-\frac{1}{\sigma}} \\ &\quad \left[(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_a + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_s} \right] \quad (54) \end{aligned}$$

We then define γ as follows :

$$\gamma = \beta(1-p) \left(\frac{[(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{V(X_s)} \right)^{\alpha-\frac{1}{\sigma}} \quad (55)$$

At last, we obtain :

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_{t-1}=X_t=\dots=X_s} \\ &= (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (-R_{a-1}) + \gamma \left[(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_a + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left. \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_s} \right] \end{aligned} \quad (56)$$

Then, we want to express the derivative $\frac{\partial U_{t-2}}{\partial x_{a,t}}$. Using the chain rule, we can write it as follows :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{t-2}}{\partial x_{a,t}} &= \frac{\partial U_{t-2}}{\partial U_{t-1}} \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}} \\ &= \frac{\sigma}{\sigma-1} \left((1-\beta) \Pi(X_{t-2}, X_{t-1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta [(1-p)U_{t-1}^{1-\alpha} + pV(D(X_{t-1}))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \\ &\quad \frac{\frac{\sigma-1}{\sigma}}{1-\alpha} \beta [(1-p)U_{t-1}^{1-\alpha} + pV(D(X_{t-1}))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}-1} (1-\alpha) (1-p) U_{t-1}^{-\alpha} \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}} \end{aligned} \quad (57)$$

We assume that the forest is a normal forest of rotation age F at $t-2$, that is $X_{t-2} = X_s$. Moreover, we recall our previous assumption stating that if the forest is a normal forest of rotation age F at a given time ($t-2$ in this case), it is optimal that it remains in this state as long as the perturbation does not occur, which means that decisions $X_{t-1} = X_t = \dots = X_s$ are optimal and that we have $\max_{X_{t-1}, X_t, \dots} \{U_{t-2}\} = V(X_s)$.

Therefore, at $X_{t-2} = X_{t-1} = X_t = \dots = X_s$, $\frac{\partial U_{t-2}}{\partial x_{a,t}}$ takes the following value :

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial U_{t-2}}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_{t-2}=X_{t-1}=\dots=X_s} \\
&= \beta(1-p) \left(\frac{[(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{V(X_s)} \right)^{\alpha - \frac{1}{\sigma}} \left. \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_{t-1}=X_t=\dots=X_s} \\
&= \gamma \left. \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_{t-1}=X_t=\dots=X_s} \\
&= \gamma \left((1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (-R_{a-1}) + \gamma(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_a \right. \\
&\quad \left. + \gamma \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left. \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_s} \right) \quad (58)
\end{aligned}$$

By repeating the same rationale recursively and by assuming that the forest at $t = 0$ is a normal forest of rotation age F , that is $X_0 = X_s$, we show that :

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial U_0}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_0=X_1=\dots=X_s} \\
&= \gamma^{t-1} \left((1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (-R_{a-1}) + \gamma(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_a \right. \\
&\quad \left. + \gamma \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left. \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_s} \right) \quad (59)
\end{aligned}$$

Expression 59 holds for $a > 1$. When $a = 1$, we have $\frac{\partial \Pi(X_{t-1}, X_t)}{\partial x_{1,t}} = 0$ for all t as mentioned above and expression 59 becomes :

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial U_0}{\partial x_{1,t}} \right|_{X_0=X_1=\dots=X_s} \\
&= \gamma^t (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_1 + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left. \frac{\partial V^e}{\partial x_{1,t}} \right|_{X_s} \quad (60)
\end{aligned}$$

These expressions would actually hold true for all stationary states X^* (that are states which are optimal to carry on as long as no perturbation occurs) and not only for state X_s .

Appendix 2 : Combining the conditions on the Lagrangian derivatives

– Demonstration of :

For $j \leq F$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\gamma^j} \left[(1-\beta) \gamma^j \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_j + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V(X_s)^e} \right)^\alpha \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^j \frac{\partial V^e}{\partial x_j} \Big|_{X_s} \right) \right] \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_{j,kj} - \sum_{t'=0}^{+\infty} \eta_{t'} = 0 \quad (61) \end{aligned}$$

We start from conditions 62 and 63 below (see section 2.3.2) :

For $1 < a \leq F$ and $t \geq 1$:

$$\begin{aligned} C_{a,t} = \gamma^{t-1} (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (-R_{a-1}) + \gamma^t (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (+R_a) \\ + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \frac{\partial V^e}{\partial x_a} \Big|_{X_s} + \mu_{a,t} - \mu_{a-1,t-1} - \eta_t = 0 \quad (62) \end{aligned}$$

For $t \geq 1$:

$$C_{1,t} = \gamma^t (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (+R_1) + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \mu_{1,t} - \eta_t = 0 \quad (63)$$

Then, for any $j \leq F$ and any $t \geq j$, we sum the equations $C_{a,t'} = 0$ over $\{(a, t')\} \in \{(1+k, t-j+1+k) | k \in [0; j-1]\}$. We obtain the following equation :

$$\begin{aligned} \gamma^t (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_j + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \gamma^{t-j} \left(\gamma \frac{\partial V^e(X_s)}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^j \frac{\partial V^e(X_s)}{\partial x_j} \Big|_{X_s} \right) \\ + \mu_{j,t} - \sum_{t'=t-j+1}^t \eta_{t'} = 0 \quad (64) \end{aligned}$$

We then sum this equation over $t \in \{kj | k \in \mathbb{N}^*\}$ to obtain :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\gamma^j} \left[(1-\beta) \gamma^j \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_j + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^j \frac{\partial V^e}{\partial x_j} \Big|_{X_s} \right) \right] \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_{j,kj} - \sum_{t'=0}^{+\infty} \eta_{t'} = 0 \quad (65) \end{aligned}$$

The last sum can be written only if the geometric series $\{\gamma^{kj}\}_{k \in \mathbb{N}}$ is convergent. This is the case when $\gamma < 1$, which we assume.

– Demonstration of :

For $j > F$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \gamma^j} \left[(1 - \beta) \gamma^j \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_j + \frac{p}{1 - p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^j \frac{\partial V^e}{\partial x_j} \Big|_{X_s} \right) \right] \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_{j,kj} - \sum_{t'=0}^{+\infty} \eta_{t'} \leq 0 \quad (66) \end{aligned}$$

The demonstration is similar, except that for $a > F$ and for all t , we have the inequality [67](#) :

$$\begin{aligned} \gamma^{t-1} (1 - \beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (-R_{a-1}) + \gamma^t (1 - \beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (+R_a) \\ + \gamma^t \frac{p}{1 - p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \frac{\partial V^e}{\partial x_a} \Big|_{X_s} + \mu_{a,t} - \mu_{a-1,t-1} - \eta_t \leq 0 \quad (67) \end{aligned}$$

Hence the inequality [66](#).

2.7 Gestion d’une forêt en futaie régulière et en temps continu

2.7.1 Introduction

Le fait de conférer au temps une dimension continue impose en toute logique de considérer également l’âge comme une grandeur continue.

Toutefois, si l’âge est continu, les surfaces associées aux différentes classes d’âge peuvent devenir infiniment petites et l’hypothèse que la croissance des différentes classes dépend seulement de l’âge et qu’il n’existe pas d’effets d’interaction entre elles, est potentiellement caduque. Ainsi, d’un point de vue sylvicole, l’usage d’un modèle en temps et en âge continus pour décrire une gestion en futaie régulière est discutable, ce qui justifie l’usage d’un modèle en temps discret.

Néanmoins, ce problème a été abordé de manière analytique dans un contexte déterministe. Ainsi, [Heaps \(1984\)](#) a montré qu’en l’absence de préférences intertemporelles, la forêt suivait toujours la règle de Faustmann quelle que fût sa structure. Ce résultat est cohérent avec la description des états stationnaires périodiques réalisés par [Salo and Tahvonen \(2002b\)](#). Par la suite, [Heaps \(2015\)](#) a montré qu’en présence de préférences intertemporelles (concaves), le système convergerait toujours vers la forêt normale respectant la règle de Faustmann. Ce dernier résultat illustre bien le problème décrit ci-dessus, la surface allouée à chaque classe d’âge est infinitésimale mais le modèle ne prend pas en compte les effets d’interaction entre les classes d’âge. Dans ce cas, la forêt normale de Faustmann est davantage un cas limite de futaie régulière qu’une futaie irrégulière et son existence réelle est discutable.

Toutefois, il est pertinent de s’intéresser à l’effet du risque et des préférences dans ce cadre de modélisation. Les résultats numériques présentés dans la section [2.4](#) suggèrent en effet que le risque et les préférences font coexister plusieurs âges de récolte et conduisent à des forêts stationnaires à la structure graduelle. Ainsi, en mettant de côté les effets d’interaction, un modèle de gestion forestière en temps continu pourrait être capable de mesurer l’effet du risque et des préférences seuls sur la structure en classes d’âge d’une

futaie régulière "limite". Cela permettrait d'être plus précis qu'un modèle en temps discret et permettrait surtout de déterminer si les stratégies stationnaires de gestion consistent toujours en un ensemble discret d'âges de récolte ou s'il peut exister des continuums d'âges de récolte.

2.7.2 Un modèle de gestion forestière en temps continu

Le modèle de gestion forestière considéré dans cette section est une transposition en temps continu du modèle analytique en temps discret présenté dans la section 2.2, à la différence que les préférences sont maintenant définies par une espérance d'utilité. Ainsi, la fonction objectif à maximiser est donnée par l'équation 68 :

$$\max \mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} u(H(t)) e^{-\rho t} dt \right] \quad (68)$$

u est une fonction d'utilité concave, $\mathbb{E}_0$ est l'opérateur d'espérance étant données les informations disponibles au temps 0 sur la distribution des événements climatiques futures, ρ est un taux d'actualisation instantanée. $H(t)$ est le flux de revenu perçu par le producteur au cours du temps, c'est une grandeur stochastique.

La distribution des terres aux différentes classes d'âge peut être décrite grâce à une fonction de densité $x(a, t)$ telle que la surface allouée aux arbres dont l'âge est compris entre a_1 et a_2 est égale à $\int_{a_1}^{a_2} x(a, t) da$. Cette fonction de densité peut être continue ou discontinue. Par conséquent, la forme de la fonction de payoff $H(t)$ est *a priori* inconnue, elle pourrait s'écrire comme une intégrale définie sur une "densité de récolte" $h(a, t)$ telle que $H(t) = \int_0^{+\infty} R(a) h(a, t) da$ ou résulter d'un ensemble discret d'âges de récolte.

Le fait que les revenus par unité de surface $R(a)$ ne dépendent que de l'âge est la traduction directe de l'absence d'effets d'interaction entre les classes d'âge.

Le risque de perturbation est introduit dans le modèle à travers un processus de Poisson

défini comme suit :

$$dP = \begin{cases} -D & \text{avec une probabilité } \lambda dt \\ 0 & \text{avec une probabilité } 1 - \lambda dt \end{cases} \quad (69)$$

λ est la probabilité instantanée de la perturbation. $0 \leq D \leq 1$ est la proportion de la surface forestière touchée par la perturbation (qui détruit complètement les arbres) et s'applique à la fonction de densité $x(a, t)$ de telle manière que si une perturbation survient à la date t , la densité devient $(1 - D)x(a, t)$ pour tout âge a .

En résumé, la dynamique de la densité $x(a, t)$ est donnée par l'équation 70 :

$$\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial t} = -h(a, t) + x(a, t) \frac{dP}{dt} \quad (70)$$

A cela s'ajoute une contrainte de disponibilité des sols donnée par l'équation 71 :

$$\int_0^{+\infty} x(a, t) da = 1 \quad (71)$$

2.7.3 Caractérisation analytique des états stationnaires dans un cadre continu

Sur la base du modèle décrit dans la section précédente, une condition nécessaire et suffisante à la stationnarité d'une forêt normale d'âge de rotation a^* est établie et donnée par l'équation 72. Dans un cadre continu, une forêt normale est telle que sa distribution peut s'écrire $x(a) = \frac{1}{a^*}$ pour $a \leq a^*$ et $x(a) = 0$ pour $a > a^*$.

$$\{a^*\} = \arg \max_{a \in \mathbb{R}^+} \left\{ u' \left(\frac{R(a^*)}{a^*} \right) \frac{R(a)}{e^{a(\rho+\lambda)} - 1} + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{e^{a(\rho+\lambda)}}{e^{a(\rho+\lambda)} - 1} \left[\int_0^a e^{-s(\rho+\lambda)} (1 - D) \frac{\delta V}{\delta x(s)} \Big|_{(1-D)x(s)} ds \right] \right\} \quad (72)$$

V est la fonction de valeur du programme d'optimisation définie pour un état donné. V dépend ici de l'état stationnaire défini par la fonction de densité $x(a)$, et rigoureusement

parlant elle n'est donc pas une fonction mais une fonctionnelle, et $\frac{\delta V}{\delta x(a)}$ est sa dérivée. L'état $(1 - D)x(a)$ décrit la forêt directement après qu'une perturbation l'a fait dévier de l'état stationnaire $x(a)$.

Cependant, la fonctionnelle V est généralement inconnue. Par conséquent, l'équation 72 n'est pas une formule analytique tractable caractérisant l'âge de rotation et ne garantit pas que l'âge de rotation est unique et qu'une forêt normale peut être stationnaire. En effet, il n'est pas possible de montrer de manière générale que la fonction $u' \left(\frac{R(a^*)}{a^*} \right) \frac{R(a)}{e^{a(\rho+\lambda)} - 1} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{e^{a(\rho+\lambda)}}{e^{a(\rho+\lambda)} - 1} \left[\int_0^a \dots ds \right]$ définie sur a ne peut avoir qu'un unique maximum global. Ainsi, l'équation 72 ne permet pas d'infirmer l'existence de plusieurs âges de rotation à l'équilibre stationnaire.

A fortiori, il n'est pas possible non plus de montrer que cette même fonction ne peut pas atteindre son maximum global pour un ensemble continu de valeurs de a . Ainsi, l'équation 72 ne permet pas non plus de réfuter l'existence d'un continuum d'âges de récolte à l'équilibre stationnaire.

Toutefois, elle démontre que l'âge de rotation d'une forêt normale stationnaire, si elle existe, dépend du risque et des préférences. D'autre part, appliquée à certains cas particuliers, l'équation 72 peut fournir davantage d'information.

Ainsi, quand la perturbation considérée détruit complètement la forêt lorsqu'elle survient, $D = 1$ et l'équation 72 peut donc être réécrite comme suit :

$$a^* = \arg \max_{a \in \mathbb{R}^+} \left\{ \frac{R(a)}{e^{a(\rho+\lambda)} - 1} \right\} \quad (73)$$

L'équation 73 indique que lorsque $\frac{R(a)}{e^{a(\rho+\lambda)} - 1}$ est strictement concave, ce qui est en général le cas avec des données forestières, l'âge de rotation est unique et la forêt normale récoltée à cet âge est stationnaire. Cette équation correspond en fait à la règle de Faustmann lorsqu'une prime correspondant à la probabilité instantanée de la perturbation (λ) est ajoutée au taux d'actualisation. L'âge de rotation dans ce cas est inférieur à l'âge de Faustmann, ce qui

reflète un comportement de précaution. La même formule a été démontrée par [Reed \(1984\)](#) mais sur la base d'un modèle de rotation à classe d'âge unique (modèle de Faustmann).

Dans ce cas bien précis, l'équation [73](#) montre que l'âge de rotation stationnaire ne dépend pas des préférences intertemporelles.

Par ailleurs, quand il y a absence de risque, c'est-à-dire lorsque $\lambda = 0$, la condition [72](#) est réduite à la règle de Faustmann :

$$a^* = \arg \max_{a \in \mathbb{R}^+} \left\{ \frac{R(a)}{e^{a\rho} - 1} \right\} \quad (74)$$

La validité de la règle de Faustmann pour une forêt à plusieurs classes d'âge dans un cadre continu et dans un contexte déterministe a été démontrée par [Heaps \(1984\)](#) et [Heaps \(2015\)](#).

2.7.4 Démonstration

Le caractère continu de l'âge rend difficile un traitement analytique du problème. Par exemple, le fait que l'état du système ne puisse pas être décrit par un ensemble de variables réelles mais par une fonction de densité, empêche l'utilisation des outils classiques de contrôle optimal tels que le principe du maximum de Pontryagin. Afin de contourner cette difficulté, le programme d'optimisation présenté dans la section [2.7.2](#) est transposé dans un cadre où le temps et l'âge sont discrets.

Ce programme en temps discret est très proche du modèle analytique présenté dans la section [2.2](#) à l'exception près que les préférences y sont représentées par une espérance d'utilité et non plus par une fonction d'utilité récursive. Ainsi, sur la base de la formulation récursive de la fonction objectif U_0 présentée dans la section [2.3.2](#), la fonction objectif qui nous intéresse peut être réécrite comme suit :

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{+\infty} e^{-\rho t} u(\Pi_t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\rho k} \mathbb{E}_0[u(\Pi_k)] = \sum_{t=0}^{+\infty} e^{-\rho t} [(1-\lambda)^t u(\Pi(X_t, X_{t+1})) + (1-\lambda)^{t-1} \lambda V^p(X_t)] \quad (75)$$

V^p est la fonction de valeur résiduelle consécutive à la réalisation d'une perturbation, telle que $V^p(X_t) = V((1 - D)X_t)$ où $X_t = (x_{1,t}; x_{2,t}; \dots; x_{a,t}; \dots)$ est le vecteur des *land shares* représentant l'état de la forêt à l'instant t quand aucune perturbation n'est survenue entre la date 0 et la date t , et où V est la fonction de valeur du programme d'optimisation en temps discret (voir section 2.2).

La fonction de revenu $\Pi(X_t, X_{t+1})$ est donnée par l'équation 76 et les contraintes 77 et 78 définissent respectivement le mécanisme de vieillissement des classes d'âge et la surface totale des terres disponibles.

Pour tout t :

$$\Pi_t = \Pi(X_t, X_{t+1}) = \sum_{a=1}^{+\infty} R_a(x_{a,t} - x_{a+1,t+1}) \quad (76)$$

Pour tout $a \geq 1$ et tout t :

$$x_{a+1,t+1} \leq x_{a,t} \quad (77)$$

Pour tout t :

$$\sum_{a=1}^{+\infty} x_{a,t} \leq 1 \quad (78)$$

Ainsi, le Lagrangien correspondant à ce programme d'optimisation est donné par l'équation 79 :

$$\begin{aligned} L(\{x_{a,t}\}) = & \sum_{t=0}^{+\infty} e^{-\rho t} [(1 - \lambda)^t u(\Pi_t) + (1 - \lambda)^{t-1} \lambda V_t^p] \\ & + \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{a=1}^{+\infty} \mu_{a,t} (x_{a,t} - x_{a+1,t+1}) + \sum_{t=0}^{+\infty} \eta_t (1 - \sum_{a=1}^{+\infty} x_{a,t}) \quad (79) \end{aligned}$$

$\mu_{a,t}$ et η_t sont les variables duales respectivement associées aux contraintes 77 et 78.

Les dérivées du Lagrangien sont données par l'équation 80 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_{a,t}} &= e^{-\rho(t-1)}(1-\lambda)^{t-1} \left[u'(\Pi_t) \left(e^{-\rho}(1-\lambda)R(a) - R(a-1) \right) + e^{-\rho}\lambda \frac{\partial V^p}{\partial x_{a,t}} \right] \\
&\quad + \mu_{a,t} - \mu_{a-1,t-1} + \eta_t \\
&= \gamma^{t-1} \left[u'(\Pi_t) \left(\gamma R(a) - R(a-1) \right) + \gamma \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{\partial V^p}{\partial x_{a,t}} \right] \\
&\quad + \mu_{a,t} - \mu_{a-1,t-1} - \eta_t \quad (80)
\end{aligned}$$

où $\gamma = e^{-\rho}(1-\lambda)$.

On suppose ensuite que la forêt est initialement dans un état stationnaire, en l'occurrence une forêt normale de rotation a^* . Ainsi, les conditions de Karush-Kuhn-Tucker peuvent être utilisées pour démontrer la condition 81 :

$$a^* = \arg \max_{a \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{1-\gamma^a} \left[u'(\Pi_s) \gamma^a R_a + \frac{\lambda}{1-\lambda} \left(\gamma \frac{\partial V^p}{\partial x_1} + \dots + \gamma^a \frac{\partial V^p}{\partial x_a} \right) \right] \right\} \quad (81)$$

$\Pi_s = \frac{R_{a^*}}{a^*}$ est le revenu généré par une forêt normale d'âge de rotation a^* , V^p est la fonction de valeur résiduelle qui dépend de l'état stationnaire $X_s = (x_1, \dots, x_{a^*})$ telle que $V^p(x_1, \dots, x_{a^*}, 0, \dots) = V((1-D)x_1, \dots, (1-D)x_{a^*}, 0, \dots)$ où V est la fonction de valeur du programme d'optimisation. Ainsi, $\frac{\partial V^p}{\partial x_a} = (1-D) \frac{\partial V}{\partial x_a} \Big|_{(1-D)X_s}$.

La démonstration de la condition 81 est similaire à celle décrite dans la section 2.3.2. Cette condition est nécessaire et suffisante à la stationnarité de la forêt normale d'âge a^* .

Afin d'étendre ces résultats au cadre continu, nous nous proposons de déterminer la limite de la condition 81 quand le pas de temps dans le cadre discret, Δt , tend vers 0.

Ainsi, on suppose que $a = k\Delta t$, ce qui ne pose pas de problème combinatoire lorsque $\Delta t \rightarrow 0$. Par ailleurs, lorsque Δt n'est pas égal à 1, $\gamma = e^{-\rho\Delta t}(1-\lambda\Delta t)$. Grâce à un développement limité sur $\ln(1-\lambda\Delta t)$, il est possible de montrer que $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \gamma^{k\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} e^{-\rho k\Delta t}(1-\lambda\Delta t)^k =$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} e^{-\rho k\Delta t} e^{k \ln(1-\lambda\Delta t)} = e^{-a(\rho+\lambda)}.$$

D'autre part, la limite du terme $\gamma^{\Delta t} \frac{\partial V^p}{\partial x_{\Delta t}} + \dots + \gamma^a \frac{\partial V^p}{\partial x_a}$ peut être exprimée de manière plus compacte comme le montre l'équation 82 :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\gamma^{\Delta t} \frac{\partial V^p}{\partial x_{\Delta t}} + \gamma^{2\Delta t} \frac{\partial V^p}{\partial x_{2\Delta t}} + \dots + \gamma^a \frac{\partial V^p}{\partial x_a} \right) = \int_0^a e^{-s(\rho+\lambda)} \frac{\delta V^p}{\delta x(s)} ds \quad (82)$$

Dans le membre de droite, V^p est l'équivalent en temps continu de la fonction de valeur résiduelle définie en temps discret. C'est une fonctionnelle, à laquelle s'applique les mêmes règles de dérivation que pour les fonctions. Ainsi, la dérivée de V^p par rapport à $x(a)$ peut être reformulée comme suit :

$$\frac{\delta V^p}{\delta x(a)} = (1 - D) \frac{\delta V}{\delta x(a)} \Big|_{(1-D)x(a)} \quad (83)$$

En résumé, on peut écrire l'équation 84 :

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{1 - \gamma^a} \left[u'(\Pi_s) \gamma^a R_a + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \left(\gamma^{\Delta t} \frac{\partial V^p}{\partial x_{\Delta t}} + \dots + \gamma^a \frac{\partial V^p}{\partial x_a} \right) \right] \right\} \\ &= u' \left(\frac{R(a^*)}{a^*} \right) \frac{R(a)}{e^{a(\rho+\lambda)} - 1} + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{e^{a(\rho+\lambda)}}{e^{a(\rho+\lambda)} - 1} \left[\int_0^a e^{-s(\rho+\lambda)} (1 - D) \frac{\delta V}{\delta x(s)} \Big|_{(1-D)x(s)} ds \right] \end{aligned} \quad (84)$$

En remplaçant ce résultat dans la condition 81, on obtient finalement la condition 72.

2.7.5 Discussion

L'approche analytique en temps et en âge continus présentée ci-dessus montre que l'âge ou les âges de rotation à l'équilibre stationnaire dépendent, dans le cas général, du risque et des préférences. Par ailleurs, elle permet de faire le lien d'une part avec de [Reed \(1984\)](#) en ce qui concerne la gestion optimale en présence d'un risque de destruction totale, et d'autre part avec les résultats de [Heaps \(1984\)](#) et [Heaps \(2015\)](#) en contexte déterministe.

Dans ces deux derniers cas, les états stationnaires sont des forêts normales dont chaque classe d'âge occupe une surface infinitésimale. Il s'agit donc de cas limites de gestion en

futaie régulière dont l'existence réelle est discutable au vu de l'absence supposée d'effets d'interaction entre les classes d'âge. Ces résultats suggèrent que les préférences conduisent à des futaies irrégulières à l'état stationnaire.

Néanmoins, les résultats analytiques présentés dans la section 2.7.3 ne permettent pas de caractériser les différents types d'état stationnaires dans le cas général. Par ailleurs, ils ne réfutent pas non plus la coexistence de plusieurs âges de récolte ou de continuums d'âges de récolte à l'état stationnaire.

De fait, les résultats numériques présentés dans la section 2.4 montrent la multiplicité des âges de rotation stationnaires dans un cadre discret. Ainsi, la figure 4 montre des structures en classes d'âge graduelles qui résultent de la récolte progressive des arbres au fur et à mesure de leur vieillissement.

Ces structures graduelles ne sont pas sans rappeler les futaies irrégulières jardinées décrites par de Liocourt (1898) ou Haight (1987). Selon eux, dans un contexte déterministe, les états stationnaires sont des futaies jardinées présentant plusieurs âges de récolte lorsque des effets d'interaction existent entre les classes d'âge en ce qui concerne la croissance biologique des arbres. Ces effets d'interaction sont dus à la compétition entre les arbres de différents âges pour l'accès aux ressources (lumière, eau, nutriments).

Les résultats numériques présentés dans la figure 4 suggèrent donc que le risque de tempête (associé aux préférences) est un facteur pouvant expliquer la stationnarité de forêts à la structure graduelle, au même titre que les effets d'interaction entre classes d'âge.

En résumé, un modèle en temps continu, qu'il prenne en compte un risque de tempête en présence de préférences ou des effets d'interaction entre les classes d'âge ou bien les deux, montrerait probablement que l'état stationnaire dans le cas général est une futaie irrégulière jardinée à la structure graduelle.

Afin de décrire la structure de ces forêts de manière plus fine et à défaut de modèles analytiques ou numériques exploitables en temps continu, il serait intéressant d'améliorer la précision du modèle de programmation dynamique présenté dans l'annexe 1 en y ajoutant

des classes d'âge supplémentaires. Cependant, cela poserait à un certain stade des problèmes de tractabilité car les temps de calcul s'allongent exponentiellement avec le nombre de classes d'âge.

Une solution à ce problème pourrait être par exemple d'interpoler les fonctions de valeur obtenues grâce à un modèle de programmation dynamique sur une partition plus fine de l'échelle des âges.

Chapitre 3 :

Gestion forestière et changement climatique, le rôle des anticipations

3.1 Introduction

Le risque climatique exerce une influence forte sur la gestion forestière. D'une part, les tempêtes ont un impact direct sur la forêt à travers les dégâts qu'elles occasionnent. D'autre part, les producteurs intègrent le risque climatique dans leurs décisions et cherchent à réduire l'exposition et la vulnérabilité de leurs forêts (cf. [Schelhaas et al. \(2010\)](#)), par exemple en raccourcissant les rotations.

En parallèle, le changement climatique devrait affecter ce risque climatique. [Schelhaas et al. \(2010\)](#) prévoient par exemple que les probabilités de tempête devraient augmenter en Europe de l'Ouest. Et de la même manière que les producteurs prennent en compte le risque climatique, ils prennent ou devraient prendre en compte les effets du changement climatique sur ce risque.

Toutefois, le changement climatique n'est pas instantané mais dynamique et progressif. En outre, il est par nature incertain. Ainsi, l'objectif du travail présenté dans ce chapitre est d'intégrer dans un modèle de gestion forestière les anticipations dynamiques du producteur forestier quant à l'effet du changement climatique sur le risque de tempête. En particulier, il s'agit d'en déterminer les effets sur les états stationnaires.

L'analyse des états stationnaires est d'autant plus pertinente que la probabilité d'une tempête est faible car ainsi la forêt a plus de chances d'atteindre un état stationnaire et d'y demeurer. Toutefois, l'état stationnaire constitue dans tous les cas un horizon vers lequel tendent les choix du producteur et en tant que tel il reflète de manière concise l'adoption de certains comportements, par exemple de précaution.

Il s'agit de comparer les états stationnaires au moment présent avec et sans anticipation sur

le changement climatique, ainsi que de distinguer les effets du changement climatique imputables à son évolution tendancielle et ceux imputables à l'incertitude qu'il génère. Enfin, il s'agit de déterminer le rôle des préférences, que ce soient les préférences intertemporelles ou l'aversion au risque.

Dans certains modèles, les risques destructifs sont représentés par des processus aléatoires de saut, en particulier le processus de Poisson (ou son équivalent discret consistant en une succession d'épreuves de Bernoulli). Par exemple, [Reed \(1984\)](#) pour le risque d'incendie et [Haight et al. \(1995\)](#) pour le risque de tempête ont introduit un processus de Poisson dans des modèles de rotation à la Faustmann. [Couture and Reynaud \(2008\)](#) ont de leur côté introduit un risque climatique via des épreuves de Bernoulli au sein d'un modèle dynamique stochastique de gestion d'une forêt à plusieurs classes d'âge.

Tels quels, ces modèles sont adaptés pour décrire le risque mais en considérant des probabilités constantes. Ils peuvent être utilisés pour faire de la statique comparative sur ces probabilités mais ne prennent pas en compte le caractère dynamique du changement climatique.

Dans d'autres études, le risque de production n'est pas destructif et est représenté par des processus stochastiques de diffusion. Par exemple, dans [Clarke and Reed \(1989b\)](#), [Reed and Clarke \(1990\)](#) ou [Willassen \(1998\)](#), des modèles de rotation sont proposés dans lequel le taux de croissance biologique des arbres suit un mouvement brownien géométrique. Ce processus inclut un terme de dérive temporelle qui fait que le taux de croissance biologique va évoluer en tendance. Cette dérive peut être implicitement liée par le modélisateur au changement climatique. Dans d'autres études basées sur le même processus stochastique, l'incertitude sur le changement climatique est abordée explicitement. Par exemple, [Jacobsen and Thorsen \(2003\)](#) traitent du problème de la diversification des essences forestières dans une forêt lorsque le climat futur est incertain.

Toutefois, selon [Yousefpour et al. \(2012\)](#), la représentation du changement climatique par un mouvement brownien ou par d'autres processus de diffusion est insatisfaisante. Selon eux, le changement climatique devrait être modélisé comme une transition entre un état

climatique initial donné et un état final futur potentiellement stationnaire. Surtout, ils recommandent pour de futures recherches que le changement climatique soit représenté par des processus stochastiques stationnaires en tendance (*trend-stationary*), mais pas nécessairement homoscédastiques.

Le travail présenté dans ce chapitre se propose de suivre cette approche grâce à un ensemble de scénarios climatiques possibles dont l'espérance est stationnaire en tendance. Ces scénarios sont décrits dans la section 3.2.1.

Un modèle de programmation dynamique stochastique est développé afin de prendre en compte les anticipations rationnelles (cf. Muth (1961) et Lucas (1972)) du producteur sur ces scénarios. Ce modèle est développé à partir de celui présenté en annexe 1, qui est un modèle de futaie régulière à plusieurs classes d'âge où le risque climatique est statique et les préférences des producteurs sont récursives.

Les préférences récursives, initialement définies en contexte stochastique par Kreps and Porteus (1978), prennent en compte la chronologie de résolution du risque et permettent de distinguer préférences intertemporelles et aversion au risque. En particulier, la forme paramétrique définie dans Epstein and Zin (1989) et Epstein and Zin (1991), et utilisée dans ce chapitre, possède deux paramètres distincts correspondant respectivement à ces deux types de préférences.

Le nouveau modèle avec changement climatique et anticipations est résolu par une combinaison de l'algorithme itératif de la fonction de valeur (*Value Function Iteration Algorithm*, voir annexe 1) et de rétro-induction, il est décrit dans la section 3.2.2.

Le modèle est utilisé pour déterminer les modes stationnaires de gestion au moment présent pour trois scénarios climatiques différents : i) absence de changement climatique, ii) changement climatique certain, iii) changement climatique incertain. En outre, des analyses de sensibilité de l'âge de rotation aux paramètres de préférence sont conduites dans le cadre de ces trois scénarios. Les résultats sont présentés dans la section 3.3.

3.2 Modélisation du changement climatique et des anticipations dans un cadre dynamique stochastique

3.2.1 Scénarios d'évolution du risque de tempête

Afin d'établir un point de comparaison, le modèle dynamique stochastique de l'annexe 1 peut être utilisé directement pour réaliser une analyse de statique comparative sur les probabilités de tempête. Les résultats ainsi obtenus correspondent aux états stationnaires atteints sur le long-terme pour différentes anticipations statiques sur les probabilités de tempête.

Ce résultat est en soi intéressant et, associé à des analyses de sensibilité sur les paramètres de préférence, il permet de déterminer les effets d'interaction entre risque, aversion au risque et préférences intertemporelles.

Toutefois, cette approche est fondamentalement statique et ne permet pas de prendre en compte les effets du changement climatique, qui est dynamique et progressif par nature. Afin de remédier à ce problème, des scénarios futurs de changement climatique ont été définis. Le point de départ de ces scénarios est le moment présent, associé à l'année 2015.

Il est supposé que jusqu'en 2015, les probabilités de tempête qui prévalent sont celles utilisées dans le modèle de l'annexe 1. Dans ce modèle, le risque climatique repose sur un ensemble de tempêtes possibles ayant chacune leur probabilité et leurs conséquences, qui sont présentées dans le tableau 3 :

Tempête	Classes d'âge détruites	Probabilité (/5 ans)
0	Aucune	0.895
1	10	0.020
2	9+10	0.018
3	8+9+10	0.016
4	7+8+9+10	0.014
5	6+7+8+9+10	0.012
6	5+6+7+8+9+10	0.009
7	4+5+6+7+8+9+10	0.007
8	3+4+5+6+7+8+9+10	0.005
9	2+3+4+5+6+7+8+9+10	0.003
10	Toutes	0.001

TABLE 3 – Le risque de tempête à l'état initial

Comme le montre ce tableau, les tempêtes se distinguent par les classes d'âge qu'elles détruisent. Comme cela est expliqué dans l'annexe 1, une classe d'âge donnée est soit totalement détruite soit laissée totalement intacte.

Cette modélisation du risque est *ad hoc* car il est difficile de trouver des statistiques fiables sur des événements par définition rares. Néanmoins, ces données reflètent le fait que la vulnérabilité d'un peuplement forestier augmente avec son âge, ce qui est une caractéristique fondamentale du risque de tempête sur la forêt (cf. Schelhaas et al. (2010)).

De la même manière, il est difficile de trouver des scénarios quantitatifs sur l'évolution du risque de tempête. Schelhaas et al. (2010)² mentionnent tout juste une probable augmentation des probabilités de tempête en Europe de l'Ouest d'ici 2100. En outre, le changement climatique est par essence incertain donc il ne suffirait pas de raisonner en tendance mais en distributions de probabilité. En l'absence d'information suffisante, des scénarios *ad hoc* sont définis.

Ces scénarios supposent que les probabilités dépeintes dans le tableau 3 prévalent jusqu'en 2015 et qu'ensuite elles évoluent de manière aléatoire jusqu'en 2050, date à laquelle le producteur considère que le climat a atteint un nouvel état stationnaire et donc que les probabilités deviennent constantes.

2. Les scénarios du GIEC (Groupe d'experts Intergouvernemental sur l'Evolution du Climat) ne sont pas plus précis à cet égard.

Le choix de 2050 comme horizon stationnaire est essentiellement un choix méthodologique qui permet la tractabilité du modèle présenté en section 3.2.2. Cependant, cela laisse une fenêtre de 35 ans pour le changement climatique, soit environ la durée d'une rotation de Faustmann (pour la forêt de pins maritimes considérée) et il n'est pas aberrant de penser que les anticipations du producteur se font sur une durée de cet ordre plutôt que sur un horizon temporel infini.

Concrètement, le changement climatique est introduit par des coefficients multiplicatifs sur les probabilités du tableau 3. A état du climat donné w correspond ainsi un coefficient unique appliqué indifféremment aux probabilités pour 2015 des 10 tempêtes possibles (l'absence de tempête ayant une probabilité résiduelle), c'est-à-dire que $Pr_w(\text{"tempête i"}) = c_w \cdot Pr_{2015}(\text{"tempête i"})$.

Le coefficient évolue de manière aléatoire en suivant un processus de saut par période de 5 ans. A une date donnée et pour un état du climat donné, le coefficient est soumis à une épreuve de Bernoulli : il a une chance sur deux de rester inchangé et une chance sur deux d'augmenter, les sauts réalisés au cours du temps étant cumulatifs. A partir de 2050, le coefficient est supposé se stabiliser à l'état atteint.

Plus précisément, l'ensemble des trajectoires possibles pour le coefficient de changement climatique est présenté de manière quantitative dans la figure 8 (voir "Uncertain CC") :

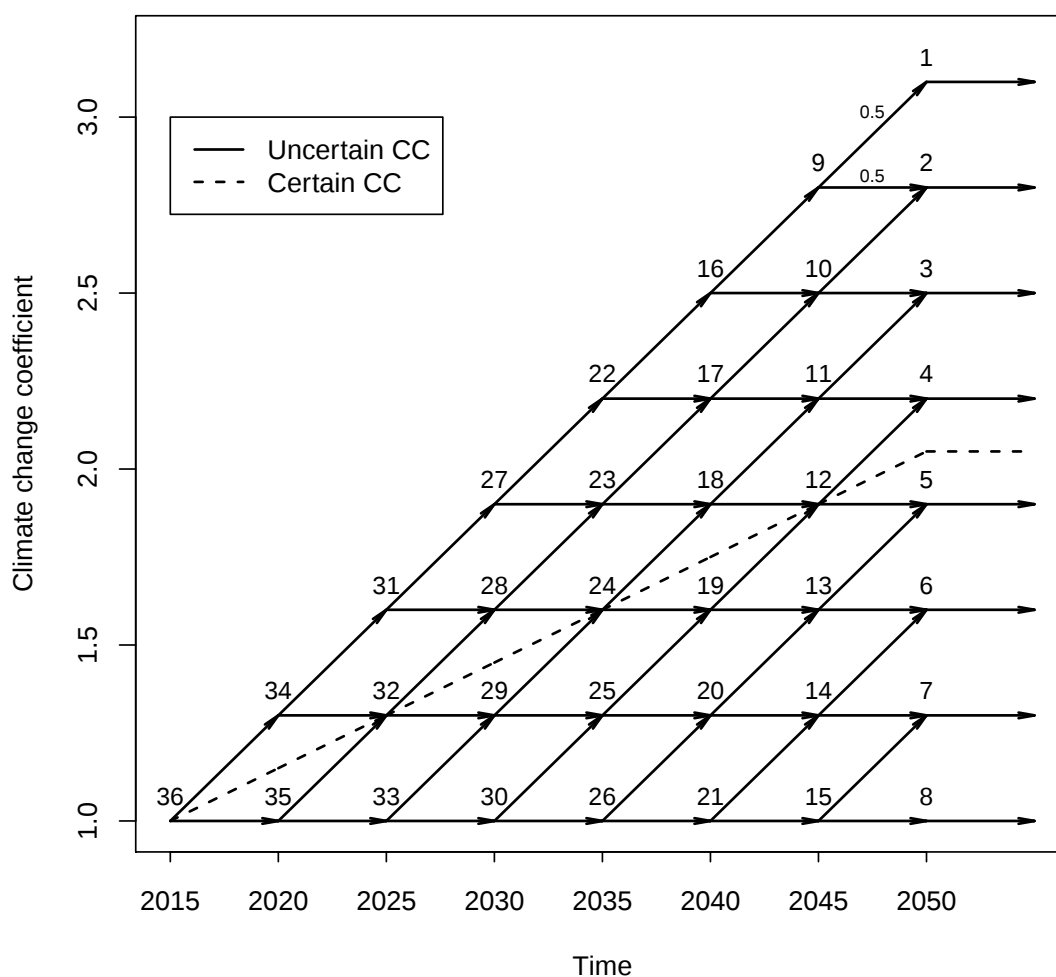


FIGURE 8 – Scénarios d'évolution du risque de tempête

Les conditions initiales prévalent jusqu'en 2015 (coefficient de 1), puis les probabilités de tempête au moment de la réalisation climatique entre 2015 et 2020 sont incertaines et correspondent soit à celles du point 34 (coefficient de 1.3), soit à celles du point 35 (coefficient de 1, c'est-à-dire les conditions initiales), avec des probabilités égales (0.5/0.5). Et ainsi de suite, jusqu'en 2050 où les probabilités demeurent dans un des huit états finaux possibles (points 1 à 8 dans la figure 8).

Les espérances du coefficient de changement climatique calculées aux différentes dates donnent une trajectoire moyenne ou une tendance du changement climatique qui est linéaire

et donnée par la courbe "Certain CC". Cette représentation du changement climatique, stationnaire en tendance (*trend-stationary*) mais hétéroscédastique est en totale cohérence avec le point de vue de [Yousefpour et al. \(2012\)](#) (voir dans l'introduction).

En outre, il est supposé que le producteur a en 2015 une information parfaite sur ces scénarios, ce qui est une hypothèse forte mais neutre, car elle ne nécessite pas de préciser un biais particulier en ce qui concerne les anticipations du producteur. Cette hypothèse que l'agent dispose des mêmes informations que le modélisateur va dans la littérature souvent de pair avec la rationalité des anticipations qui suppose que l'agent tire le meilleur parti de l'information disponible.

La figure 8 montre par ailleurs que l'ensemble des valeurs possibles pour le coefficient climatique est discret et que leur nombre est volontairement limité, ce qui améliore la tractabilité du modèle.

La section suivante présente un modèle de programmation dynamique stochastique prenant en compte les scénarios climatiques présentés ci-dessus ainsi que les anticipations correspondantes du producteur forestier.

3.2.2 Un modèle dynamique stochastique de gestion forestière avec changement climatique et anticipations

Le modèle utilisé dans ce chapitre est construit sur la base du modèle de l'annexe 1 qui permet de déterminer les états stationnaires quand les probabilités de tempête sont statiques. Ce modèle a comme caractéristiques de représenter une forêt gérée en futaie régulière³ à plusieurs classes d'âge dans laquelle les différentes tempêtes détruisent totalement certaines classes d'âge et en laissent d'autres totalement intactes. Ces trois hypothèses permettent de décrire l'état de la forêt à une date donnée grâce aux surfaces allouées aux différentes classes d'âge, c'est-à-dire par le vecteur de variables $X = \{x_a\}$.

Les données utilisées dans ce modèle concernant la valeur du stock forestier à un âge donné

3. Une futaie régulière (*even-aged forest*) est une forêt divisée en plusieurs parcelles d'âge homogène.

sont basées sur la sylviculture du pin maritime dans les Landes de Gascogne et sont tirées de [Couture and Reynaud \(2011\)](#). La sylviculture du pin maritime est effectivement réalisée le plus souvent en futaie régulière et l'exemple des Landes de Gascogne est devenu un cas d'école en ce qui concerne le risque climatique en forêt (voir l'annexe 1 pour plus de détails).

Le nouveau modèle intègre le changement climatique dont la réalisation (discrète) à chaque pas de temps est antérieure à la réalisation du risque de tempête et s'insère comme suit dans la chronologie du modèle :

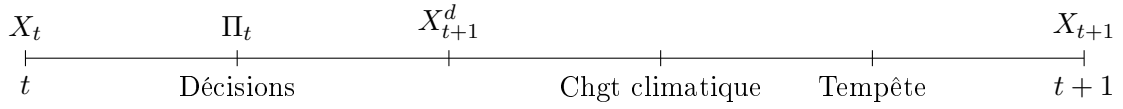


FIGURE 9 – Chronologie des décisions, et de la résolution du risque et de l'incertitude

Cette chronologie est cohérente avec les scénarios décrits dans la section 3.2.1. Ainsi, les coefficients climatiques donnés pour une date t dans la figure 8 prévalent entre $t-1$ et t . Par exemple, les coefficients climatiques donnés pour 2015 sont valables jusqu'en 2015 mais le risque de tempête entre 2015 et 2020 dépend des coefficients donnés pour 2020 et ainsi de suite.

La résolution du modèle est effectuée pour un horizon temporel infini. En 2050, comme le changement climatique est supposé être terminé (cf. section 3.2.1), les anticipations sur le risque climatique deviennent statiques et la fonction de valeur en 2050 (V^{2050}) peut être déterminée grâce à un algorithme itératif de la fonction de valeur sur la base de l'équation de Bellman suivante :

$$V^{2050}(X_t) = \max_{X^d} \left\{ \left((1 - \beta) \Pi(X_t, X^d)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta [E_{2050}(V^{2050}(\tilde{X}_{t+1} | X^d)^{1-\alpha})]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \right\} \quad (85)$$

X^d est le vecteur de décisions, $(\tilde{X}_{t+1} | X^d)$ est la distribution de l'état de la forêt à $t+1$ conditionnelle aux décisions X^d , et E_{2050} est l'opérateur d'espérance sur cette distribution

qui dépend des probabilités de tempête prévalant à partir 2050. $\Pi(X_t, X^d)$ est la fonction de revenu qui dépend de l'état initial X_t et des décisions X^d .

Puis, sur la base de valeurs finales données par V^{2050} , les fonctions de valeur antérieures, c'est-à-dire V^{2045} , V^{2040} , V^{2035} , V^{2030} , V^{2025} , V^{2020} et V^{2015} peuvent être déterminées par rétro-induction (*backward induction*).

La résolution du modèle est différente selon que le changement climatique est certain ou incertain (respectivement "Certain CC" et "Uncertain CC" dans la figure 8). Dans un premier temps, le cas certain est plus facile à expliquer.

Changement climatique certain

La fonction de valeur en 2050 peut être déterminée directement par l'algorithme itératif présenté en annexe 1, avec une valeur pour le coefficient de changement climatique de 2.05. Plus précisément, cet algorithme permet d'estimer les paramètres $\alpha_{i,j,k}^{2050}$, $\alpha_{l,m}^{2050}$ et α_n^{2050} de la forme polynomiale associée à la fonction de valeur en 2050 (V^{2050}) et présentée dans l'équation 86 :

$$V^{2050}(X) = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=i}^{10} \sum_{k=j}^{10} \alpha_{i,j,k}^{2050} \cdot x_i \cdot x_j \cdot x_k + \sum_{l=1}^{10} \sum_{m=l}^{10} \alpha_{l,m}^{2050} \cdot x_l \cdot x_m + \sum_{n=1}^{10} \alpha_n^{2050} \cdot x_n \quad (86)$$

Les variables x_i sont les proportions de la surface totale attribuées aux différentes classes d'âge i (*land shares*).

Une fois la fonction de valeur pour 2050 connue, les fonctions correspondant aux dates antérieures peuvent être déterminées par rétro-induction. La rétro-induction est une méthode classique de programmation dynamique en horizon temporel fini (cf. Judd (1998)), elle permet de retracer des séquences de décision optimales de manière rétroactive en partant d'un état final donné.

Ainsi, la valeur de la fonction de valeur en 2045 pour un état X_{2045} est donnée par la

fonction de Bellman suivante :

$$V^{2045}(X_{2045}) = \max_{X^d} \left\{ \left((1-\beta)\Pi(X_{2045}, X^d)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[E_{2050}(V^{2050}(\tilde{X}_{2050} | X^d)^{1-\alpha})]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \right\} \quad (87)$$

X^d est le vecteur des décisions prises en 2045, qui décrit aussi l'état de la forêt en 2050 en l'absence de tempête, $(\tilde{X}_{2050} | X^d)$ est la distribution de l'état en 2050 conditionnelle aux décisions prises en 2045, et E_{2050} est l'opérateur d'espérance sur cette distribution qui dépend des probabilités de tempête prévalant en 2050 (coefficient de changement climatique de 2.05). Π est la fonction de *payoff* qui dépend de l'état initial X_{2045} et des décisions X^d .

L'équation 87 est utilisée pour définir les valeurs de V^{2045} pour un ensemble discret de 1316 états présentés dans l'annexe 1 et noté $\mathbb{D}$. Une fois ces 1316 valeurs déterminées, elles sont régressées sur la forme polynomiale donnée en équation 86, ce qui permet d'estimer les coefficients $\alpha_{i,j,k}^{2045}$, $\alpha_{l,m}^{2045}$ et α_n^{2045} . Cette procédure est réalisée grâce à un script GAMS.

En procédant ainsi récursivement pour les autres dates, il est possible de remonter jusqu'en 2015. La fonction V^{2015} étant connue, il est possible de déterminer le ou les équilibres stationnaires en 2015 en suivant la procédure donnée en annexe 1. Ces équilibres stationnaires reflètent ainsi les anticipations du producteur quant à l'augmentation du risque de tempête.

Changement climatique incertain

Une méthodologie similaire peut-être appliquée dans le cas où le changement climatique est incertain. Les fonctions de valeur en 2050 pour les différents états climatiques finaux décrits par les points 1 à 8 de la figure 8 sont déterminés de la même manière par l'algorithme présenté dans l'annexe 1.

En revanche, la détermination des fonctions de valeur pour les dates antérieures nécessite une version modifiée de l'équation 87. En effet, avant 2050, pour un état climatique donné, il existe deux états climatiques possibles au pas de temps suivant. Par exemple, l'état au point 9 peut mener aux états finaux 1 et 2, avec des probabilités égales. L'équation de Bellman permettant de déterminer V^9 , la fonction de valeur au point 9, s'écrit comme

suit :

$$V^9(X_9) = \max_{X^d} \left\{ \left((1 - \beta) \Pi(X_9, X^d)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta \left[\frac{1}{2} E_1(V^1(\tilde{X}_{2050} | X^d)^{1-\alpha}) + \frac{1}{2} E_2(V^2(\tilde{X}_{2050} | X^d)^{1-\alpha}) \right]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \right\} \quad (88)$$

E_1 et E_2 sont les opérateurs d'espérance sur la distribution $(\tilde{X}_{2050} | X^d)$ correspondant respectivement aux probabilités de tempête aux points 1 et 2.

L'équation 88 est utilisée pour déterminer la forme polynomiale de V^9 en suivant la procédure déjà décrite dans le paragraphe précédent.

Cette opération est répétée pour les fonctions de valeurs correspondant aux points 9 à 36 décrits dans la figure 8. Par ailleurs, l'ordre des points dans cette figure est l'ordre dans lequel le script GAMS détermine les fonctions de valeur.

La fonction de valeur en 2015, V^{36} , permet de déterminer les états stationnaires à cette date. Ces états stationnaires reflètent les anticipations du producteur sur le changement climatique, à la fois en termes de tendance moyenne et d'incertitude.

3.3 Résultats

3.3.1 Statique comparative sur les probabilités de tempête

Cette section présente les résultats obtenus en statique comparative grâce au modèle de l'annexe 1. Afin de produire ces résultats, le modèle est exécuté pour différentes probabilités de tempête. Les probabilités de tempête du tableau 3 sont toutes multipliées par un même coefficient (le coefficient climatique) et l'âge de rotation stationnaire est déterminé pour différentes valeurs de ce coefficient et sous différents niveaux de préférence.

Les états stationnaires obtenus dans les différentes simulations sont soit des forêts périodiques (mais proches de la forêt normale) dont l'âge de rotation est unique, soit des forêts

à la structure constante mais dans lesquelles les prélèvements sont réalisés sur plusieurs classes d'âge à chaque période. Dans le premier cas, l'âge de rotation est évident, et dans le second cas, un âge de rotation moyen peut être calculé comme une moyenne pondérée par les surfaces de chaque classe d'âge respectivement récoltées. Ces âges de rotation, uniques ou moyens fournissent un indicateur synthétique reflétant le comportement des producteurs.

La figure 10 présente l'impact du coefficient climatique sur l'âge moyen de rotation et son interaction avec l'aversion au risque (α est le coefficient d'aversion au risque, $\sigma = 20$ afin que les préférences intertemporelles soient faibles) :

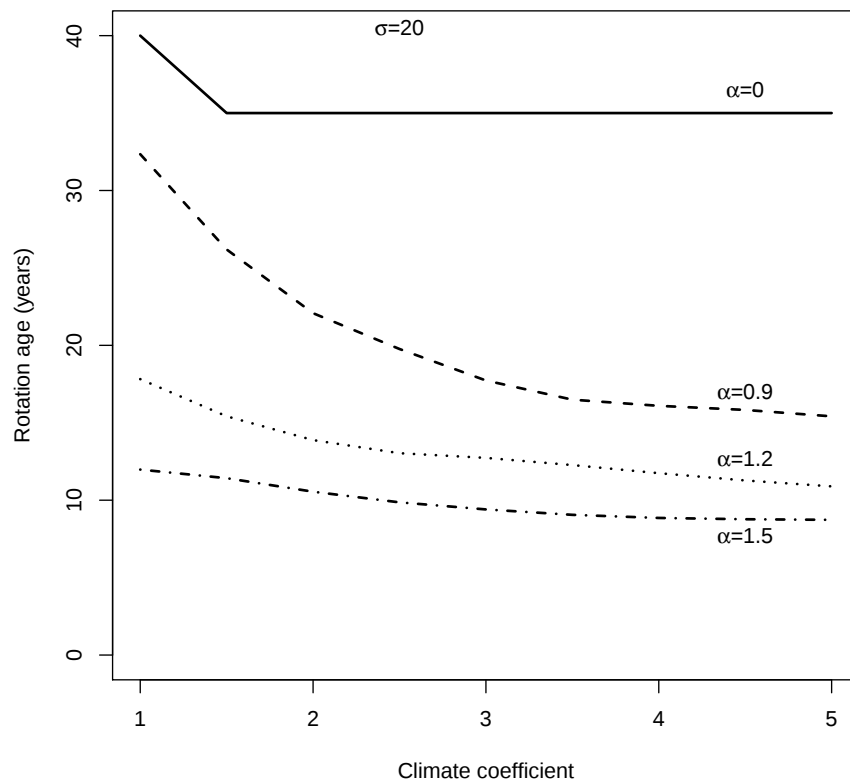


FIGURE 10 – Statique comparative sur les probabilités de tempête et aversion au risque

La figure 10 révèle que lorsque les probabilités de tempête augmentent, l'âge moyen de rotation stationnaire diminue. Cela reflète un comportement de précaution visant à réduire

l'exposition et la vulnérabilité de la forêt. Cette relation n'est pas linéaire et l'élasticité de l'âge de rotation au coefficient climatique semble plus grande pour des valeurs plus faibles de ce coefficient.

L'aversion au risque tend d'une part à réduire l'âge de rotation et affecte d'autre part la relation entre âge de rotation et risque climatique. Ainsi, quand l'aversion au risque est relativement élevée, l'âge de rotation semble moins sensible aux variations des probabilités de tempête.

La figure 11 présente l'impact du coefficient climatique sur l'âge de rotation moyen et son interaction avec les préférences intertemporelles (σ est le coefficient de préférences intertemporelles, plus il est faible moins les substitutions intertemporelles sont flexibles, $\alpha = 0$ afin qu'il n'y ait pas d'aversion au risque) :

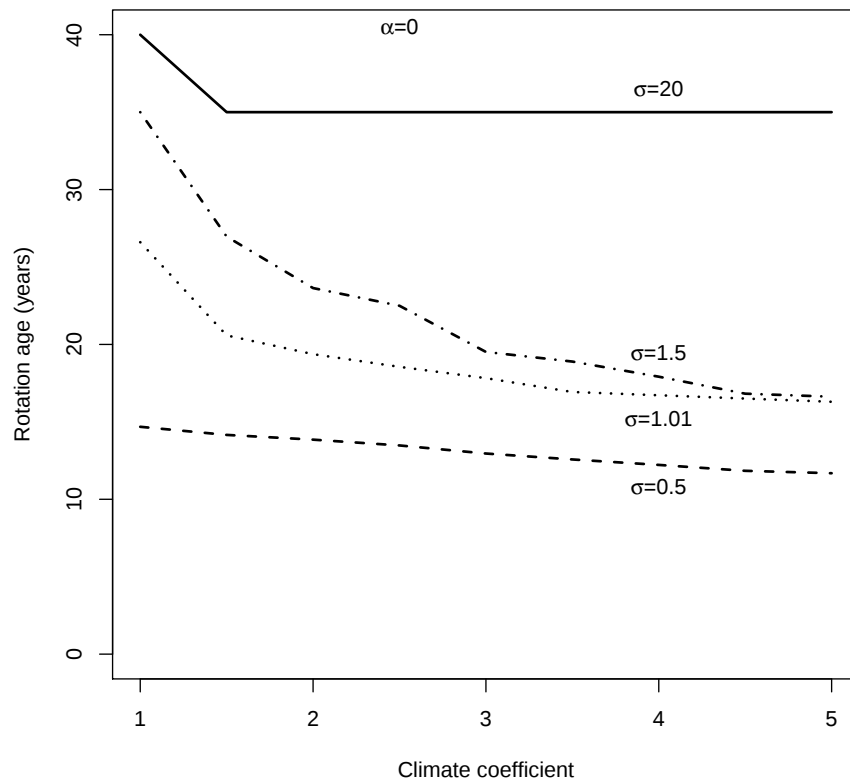


FIGURE 11 – Statique comparative sur les probabilités de tempête et préférences intertemporelles

La figure 11 révèle que les préférences intertemporelles ont un effet analogue à l'aversion au risque sur l'âge de rotation moyen. Elles le réduisent d'une part et affectent sa relation avec le risque de tempête d'autre part.

Le fait que l'âge de rotation réponde plus faiblement quand le risque est élevé ou quand les préférences sont fortes est probablement dû aux dynamiques de croissance forestière. La croissance marginale (en valeur) d'un peuplement forestier décroît avec son âge, il est donc de plus en plus "coûteux" d'abaisser l'âge de rotation par précaution.

3.3.2 Changement climatique et anticipations dynamiques

Les résultats présentés dans cette section se proposent de comparer l'impact des préférences sur l'âge de rotation stationnaire en 2015 pour trois scénarios : i) un scénario où le producteur a des anticipations statiques (et "myopes") qui correspondent aux probabilités du tableau 3, ii) un scénario où le producteur anticipe un changement climatique certain qui correspond au scénario "Certain CC" de la figure 8, et iii) un scénario où le producteur anticipe un changement climatique incertain qui correspond au scénario "Uncertain CC" de la même figure.

La figure 12 montre l'influence de l'aversion au risque sur l'âge moyen de rotation stationnaire pour ces trois scénarios ($\sigma = 100$ afin que les préférences intertemporelles soient faibles) :

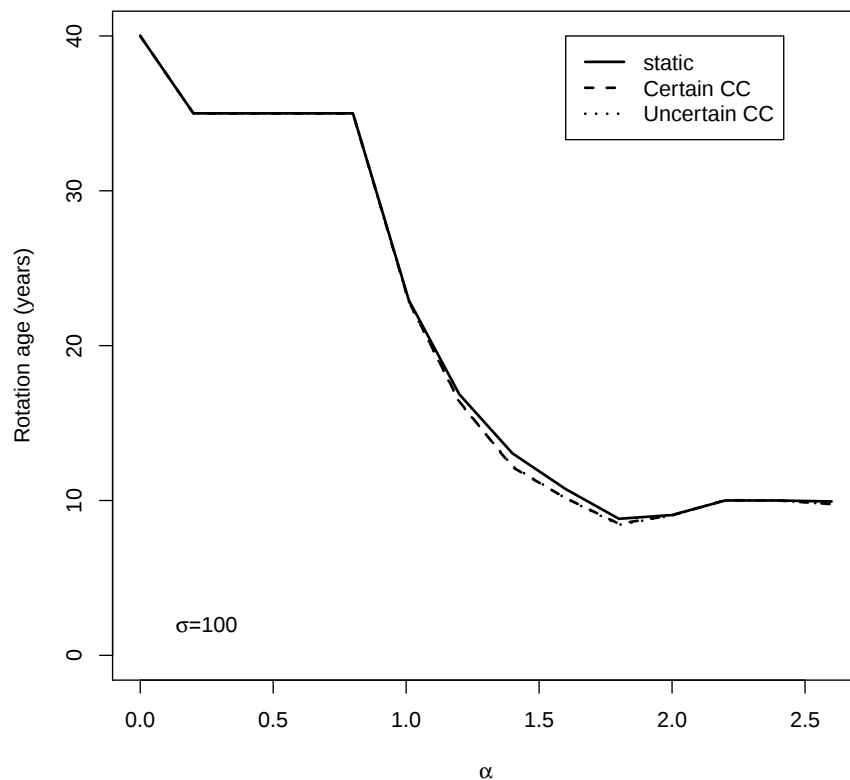


FIGURE 12 – Aversion au risque et scénarios climatiques

La figure 12 montre encore une fois clairement que l'aversion au risque pousse le producteur à faire preuve de précaution en réduisant l'âge de rotation moyen (sauf pour certaines valeurs du coefficient d'aversion au risque, voir chapitre 1).

L'autre enseignement apporté par la figure 12 est qu'il y a très peu de différence entre les trois scénarios d'anticipations considérés. Certes les anticipations sur le changement climatique mènent à des âges de rotation très légèrement plus faibles que dans le cas statique mais la significativité de ces écarts est discutable.

Quant à l'effet de l'incertitude sur le changement climatique, il semble négligeable car les âges de rotation obtenus respectivement pour les scénarios "Certain CC" et "Uncertain CC" sont quasiment identiques.

La faiblesse de ces écarts peut surprendre au vu des scénarios climatiques envisagés qui

prévoient en moyenne un doublement des probabilités de tempêtes entre 2015 et 2050. Toutefois, il faut rappeler que les probabilités initiales sont faibles et que leur doublement ne résulte pas en des valeurs élevées dans l'absolu. Surtout, les âges de rotation en question, en particulier lorsque l'aversion au risque est élevée, sont faibles en comparaison de la vitesse du changement climatique. Par conséquent, les conditions climatiques dans un futur lointain ont une influence relativement faible sur les âges de rotation au moment présent.

La figure 13 montre l'influence des préférences intertemporelles sur les trois scénarios (plus σ est faible, plus les préférences intertemporelles sont fortes) :

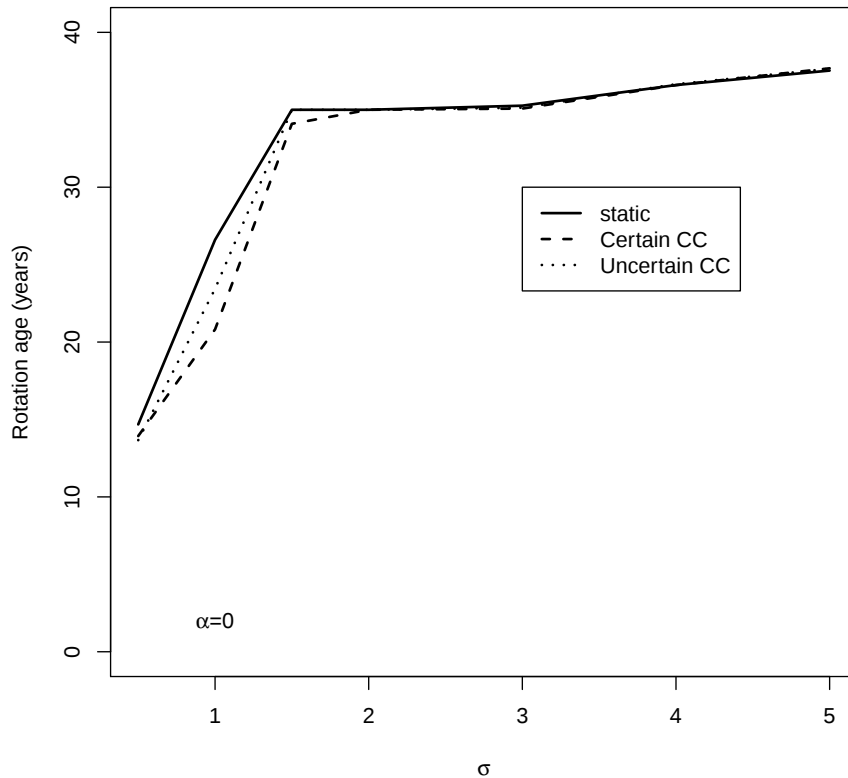


FIGURE 13 – Préférences intertemporelles et scénarios climatiques

La figure 13 illustre le fait que l'âge moyen de rotation stationnaire diminue lorsque les préférences intertemporelles sont plus fortes (ou moins flexibles), c'est-à-dire lorsque σ diminue. Cela s'explique par le fait que les tempêtes provoquent des irrégularités temporelles

dans le revenu forestier. Lorsque le producteur a des préférences fortes pour un revenu régulier au fil du temps, il va donc avoir tendance à réduire son exposition et sa vulnérabilité au risque et donc diminuer son âge de rotation stationnaire.

L'autre point important qui ressort de la figure 13 est que les âges de rotation stationnaires pour les trois scénarios d'anticipation différent lorsque les préférences intertemporelles sont fortes. Le scénario avec les anticipations statiques, qui est le scénario le moins risqué, présente ainsi les âges de rotation les plus élevés.

En revanche, le scénario de changement climatique certain présente des âges de rotation plus faibles que le scénario de changement climatique incertain. Au vu de ce qui vient d'être dit, cela peut sembler surprenant car le scénario certain présente par définition moins d'incertitude. Toutefois, l'incertitude sur le changement climatique n'est pas analogue à l'incertitude due au risque de tempête lui-même. En effet, les probabilités de tempête sont différentes d'une classe d'âge à l'autre alors que le coefficient de changement climatique est le même pour toutes les classes d'âge. Dès lors, l'hypothèse peut être formulée qu'en présence de préférences intertemporelles, le risque climatique réduit l'âge de rotation à cause de la vulnérabilité qui augmente avec l'âge. Et qu'au contraire, l'incertitude sur le changement climatique qui s'applique de manière uniforme à toutes les classes d'âge a l'effet inverse car augmenter le stock de bois en forêt est une forme d'épargne de précaution qui permet de lisser le revenu en cas de tempête.

Les figures 12 et 13 présentent des résultats concernant les âges de rotation stationnaires en 2015 mais le modèle développé dans ce chapitre peut également décrire l'évolution de ces âges au cours du temps pour les différents scénarios. Par exemple, la figure 14 ci-dessous décrit l'évolution de l'âge moyen de rotation stationnaire entre 2015 et 2045 dans le cas où le producteur a des anticipations statiques mais s'adapte de manière réactive au changement climatique ("Responsive") et le cas où il a des anticipations dynamiques ("Certain CC") :

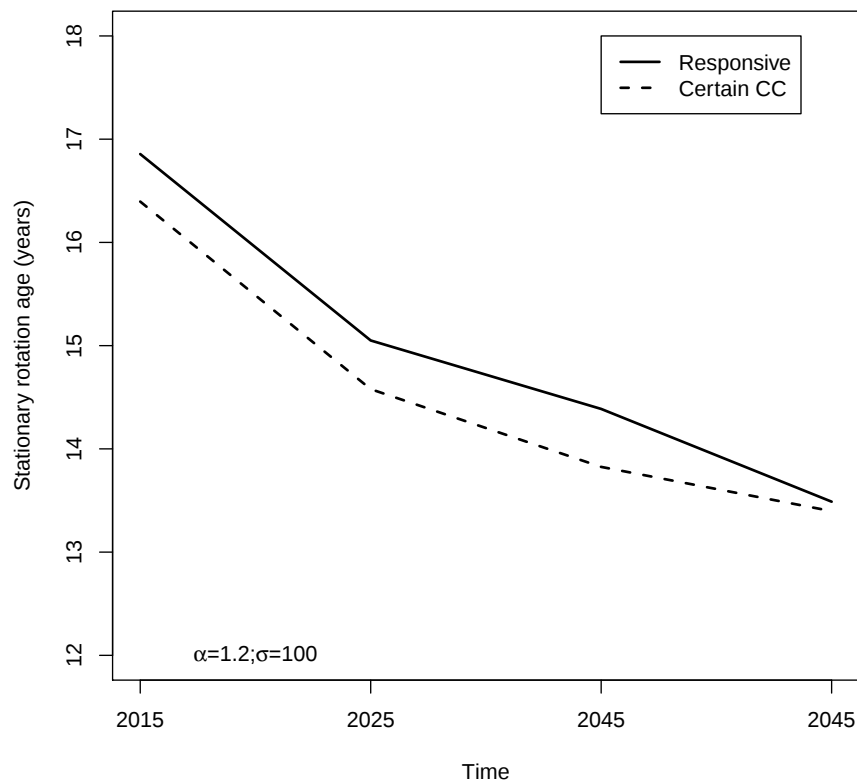


FIGURE 14 – Trajectoires d'ajustement de l'âge moyen de rotation stationnaire : adaptation réactive contre anticipations dynamiques

La figure 14 montre sans surprise que les anticipations dynamiques ont tendance à avancer dans le temps l'ajustement à la baisse de l'âge de rotation moyen. Le fait que les âges de rotation convergent à l'approche de 2050 est dû à l'hypothèse que le changement climatique cessera à cette date. Les résultats pour le scénario "Uncertain CC" ne sont pas reportés sur la figure 14 à cause de leur très forte similitude avec les résultats du scénario "Certain CC", montrant encore une fois que l'incertitude sur le changement climatique n'a que très peu d'effets sur l'âge de rotation stationnaire en l'absence de préférences intertemporelles.

3.4 Discussion

Ce chapitre présente un modèle de programmation dynamique stochastique de gestion forestière capable de prendre en compte le changement climatique et les anticipations

dynamiques rationnelles du producteur.

Dans ce modèle, le changement climatique est vu comme une transition entre deux états stationnaires entre lesquels les variables climatiques (en l'occurrence les probabilités de tempête) évoluent de manière aléatoire mais sont stationnaires en tendance. Cette représentation est cohérente avec la vision du changement climatique proposée dans [Yousefpour et al. \(2012\)](#) et constitue un apport méthodologique par rapport à la littérature existante.

En présence d'anticipations statiques, les résultats montrent que l'aversion au risque et les préférences intertemporelles tendent à réduire l'âge de rotation, ce qui reflète un comportement de précaution visant à réduire l'exposition et la vulnérabilité au risque de tempête. Le même phénomène est observé en présence d'anticipations dynamiques. Par ailleurs, il semble que le raccourcissement des rotations dû aux préférences intertemporelles s'explique uniquement par le fait que la vulnérabilité d'une forêt au risque de tempête augmente avec son âge.

En outre, il est montré que l'anticipation d'un changement climatique n'a qu'un effet limité sur la gestion forestière au moment présent. En particulier, les anticipations semblent n'avoir qu'un effet négligeable en l'absence de préférences intertemporelles, même lorsque l'aversion au risque est forte. Toutefois, il existe un effet significatif des anticipations lorsque les préférences intertemporelles sont fortes. Dans ce cas, l'effet du changement climatique est double, d'une part l'augmentation tendancielle du risque de tempête raccourcit les rotations, d'autre part l'incertitude quant au changement climatique les allongent, le premier effet l'emportant dans les simulations présentées dans ce chapitre. Ces deux effets reflètent chacun un comportement de précaution mais le premier s'applique à un risque différencié entre les classes d'âge et le second à une incertitude s'appliquant uniformément à toutes les classes d'âge.

Néanmoins, il faut remarquer que la sylviculture du pin maritime est à courte rotation (environ 35 ans), ce qui constitue un horizon temporel relativement faible au regard des dynamiques du changement climatique. L'impact des anticipations climatiques sur des forêts à rotation beaucoup plus longue, telles que les chênaies (jusqu'à 200 ans) serait

probablement beaucoup plus fort.

Sur la base de ces résultats, il semble donc que le raccourcissement des rotations observé dans la forêt des Landes à la suite des tempêtes de 1999 et de 2009 soit plutôt à mettre sur le compte d'une mise à jour aux conditions économiques et climatiques actuelles de rotations trop longues que d'une prise de conscience du changement climatique.

Chapitre 4 :

Allocation des terres entre une forêt à plusieurs classes d'âge et un usage agricole en présence d'un risque de perturbation et de préférences récursives

L'allocation des terres entre une forêt à plusieurs classes d'âge et un usage agricole est un problème à la fois dynamique et stochastique dans lequel les deux secteurs n'ont pas le même rapport aux dimensions de risque et de temps. La sylviculture est en effet une activité nécessitant une planification sur plusieurs décennies (voire plusieurs siècles pour certaines essences) alors que l'agriculture est principalement basée sur des cycles de production annuels. En outre, les deux secteurs ne sont pas sensibles aux risques de la même manière. Les cultures sont par exemple moins exposées et moins vulnérables que les forêts au risque de tempête (voir [Schelhaas et al. \(2010\)](#)). Ainsi, l'allocation des terres entre forêt et agriculture est un arbitrage qui prend en compte ces dimensions de risque et de temps et qui subit l'influence des préférences associées.

L'objectif du travail présenté dans ce chapitre est la caractérisation des allocations des terres stationnaires entre une activité agricole annuelle sans risque et une forêt à plusieurs classes d'âge, soumise à un risque de perturbation quand le propriétaire terrien a des préférences récursives. En parallèle, cela pose la question de l'interaction entre allocation des terres et gestion forestière à l'état stationnaire. Par ailleurs, ce travail a également pour objectif de déterminer l'influence respective de l'aversion au risque et des préférences intertemporelles sur l'état stationnaire.

La question de l'allocation des terres entre une forêt à plusieurs classes d'âge et un usage alternatif non dynamique a été abordée dans un contexte déterministe par [Salo and Tahvonen \(2004\)](#). Dans leur modèle, les équilibres mixtes sont rendus possibles par l'introduction de rendements marginaux décroissants. En effet, dans le cas où les rendements sont des

fonctions linéaires des surfaces, les allocations mixtes n'existent pas hors cas limites (voir [Bell et al. \(2006\)](#)).

A l'inverse, le problème de l'allocation des terres dans un contexte stochastique a été traité par certains modèles ne prenant pas explicitement en compte la gestion d'une forêt à plusieurs classes d'âge. Ainsi, [Parks \(1995\)](#) présente un modèle dynamique d'allocation des terres entre forêt et agriculture dans le cas où les rendements tirés des deux secteurs sont stochastiques, et montre que des allocations mixtes peuvent être stationnaires à condition que les risques respectifs portant sur les deux secteurs ne soient pas positivement corrélés. Cependant, ce modèle ne dit rien de la gestion forestière à l'état stationnaire ni du lien entre allocation des terres et gestion forestière.

Le travail présenté dans ce chapitre se propose de combiner ces deux dernières approches en traitant conjointement les problèmes de l'allocation des terres et de la gestion forestière en présence de risque. L'approche analytique utilisée par [Salo and Tahvonen \(2004\)](#) est transposée dans un contexte stochastique afin d'identifier les déterminants de l'allocation des sols et de la gestion forestière à l'état stationnaire. En parallèle, un modèle numérique de programmation dynamique stochastique est utilisé pour identifier les différents types d'états stationnaires existants et mesurer leur sensibilité à l'aversion au risque et aux préférences intertemporelles du propriétaire terrien.

Les résultats montrent que l'allocation des terres et la gestion forestière à l'état stationnaire dépendent toutes deux du risque et des préférences, et qu'elles sont interdépendantes. Il est également montré qu'allocation des terres et gestion forestière peuvent être alternativement utilisées par le propriétaire terrien pour adopter des comportements de précaution. Cependant, dans le contexte du modèle numérique utilisé dans cette étude, ces comportements de précaution s'expriment uniquement à travers la diversification de l'usage des terres.

Enfin, les résultats montrent que l'aversion au risque et les préférences intertemporelles ont des influences différentes sur l'allocation des terres et qu'il existe des effets d'interaction entre ces deux types de préférences. Ces deux caractéristiques rendent indispensables l'usage des préférences récursives pour étudier le problème de l'allocation des terres dans

un contexte dynamique et stochastique.

Land Allocation between a Multiple-Stand Forest and Agriculture under Perturbation Risk and Recursive Preferences

G. Dumollard

Résumé

This study aims to characterize optimal land allocations between a multiple-stand forest and agriculture, as well as the interdependence between land allocation and forest management, when the forest is subject to a risk of perturbation. The landowner is supposed to have recursive preferences, which permits to distinguish between intertemporal preferences and risk aversion. We show analytically that both land allocation and forest management at stationarity depend on the risk and on both types of preferences and that they are interdependent. Moreover, numerical results from a stochastic dynamic programming model shows that land allocation is used as a means of diversification against risk.

Keywords : Land allocation, Forest management, Recursive preferences, Stochastic Dynamic Programming

JEL : C61, C62, D81, Q24

4.1 Introduction

Land allocation between forestry and agriculture is a dynamic and stochastic issue in which the two sectors do not relate in the same way to the time and risk dimensions. Forestry is indeed an activity that requires planning over several decades (or even centuries for certain species) while agriculture is mostly an activity based on annual cycles. In addition, forestry and agriculture are not equally sensitive to given risks. Cropland is for example less exposed and vulnerable than forests to a risk of storms (see [Schelhaas et al. \(2010\)](#)). Therefore, land allocation is a trade-off that should take into account both time and risk dimensions and corresponding preferences.

The objective of the present study is to characterize stationary land allocations between cropland (or any other annual activity) and a forest with multiple age-classes when the forest is subject to a risk of perturbation and the landowner has recursive preferences. This raises the parallel question of the relationship between land allocation and forest management. In addition, the study aims at determining the respective impact of intertemporal preferences and risk aversion on stationary states.

Focusing on stationary states in presence of a perturbation risk is particularly relevant when the probability of this risk is low as the land system is then more likely to converge and to remain in a stationary state. However, in any case, the stationary state is a horizon to which the producer's decisions tend to lead, and is as such a good indicator on the producer's behavior.

In a dynamic and stochastic context, recursive preferences are more general than expected utility preferences as they take into account preferences on the timing of risk resolution and they permit to distinguish between intertemporal preferences and risk aversion.

As for the preferences on the timing of risk resolution, [Spence and Zeckhauser \(1972\)](#) and [Kreps and Porteus \(1979\)](#) show that if a consumer has expected utility preferences on a dynamic flow of consumption and he can arbitrate between consumption and savings, then his "induced" preferences on the dynamic flow of income cannot be properly described by an expected utility framework. Expected utility preferences are indeed indifferent to the

timing of risk resolution, that is to say to the moments when the consumer learns about given random income realizations. In this case, this assumption is unrealistic because prior knowledge of realized incomes enables the consumer to better plan his consumption stream, and should therefore be preferred.

[Kreps and Porteus \(1978\)](#) propose a class of recursive utility functions that are able to represent preferences as to the timing of risk resolution and can then overcome the problems raised by expected utility preferences. Building on this, [Epstein and Zin \(1989\)](#) propose a parameterized sub-class of Kreps and Porteus functions, which allows them to disentangle risk and time preferences, as each of those are represented through distinct parameters. [Epstein and Zin \(1991\)](#) use a function of this sub-class to formulate and estimate a generalized CAPM (Capital Asset Pricing Model). This function is used in the present study.

As for the literature on land allocation, [Bell et al. \(2006\)](#) discuss the main theoretical concepts that underlie land allocation issues. The main point is that land allocation is related to the concept of returns associated to the different land uses. When returns are linear functions of land acreages, the resulting land allocation is a corner solution, which means that all land is allocated to the use presenting the highest return per land unit. On the contrary, diminishing marginal returns (relative to acreages) may result in mixed allocations.

In a deterministic context, [Salo and Tahvonen \(2004\)](#) have developed an analytical model of land allocation and forest management in which both sectors feature diminishing marginal returns. The forest management is flexible and allows for multiple stands. The results show that the stationary rotation age of the forest always follows Faustmann's rule. However, the stationary age-class structure is affected by land allocation. Whenever all land is allocated to forestry, there exists a continuum of stationary periodic forests around the normal forest. The existence of such stationary periodic forests have been extensively discussed in [Salo and Tahvonen \(2002a\)](#), [Salo and Tahvonen \(2002b\)](#) et [Salo and Tahvonen \(2003\)](#). However, whenever land allocation is mixed, the forest is normal.

The introduction of diminishing marginal returns in [Salo and Tahvonen \(2004\)](#) is *ad hoc*

but in reality they can be justified on different bases, for example the heterogeneity in soil and climate conditions. There is a large empirical literature on land allocation and many articles that deal with soil heterogeneity. For example, [Stavins and Jaffe \(1990\)](#) propose an econometric estimation of unobserved soil quality distribution based on observed land allocation. The econometric model developed by Stavins and Jaffe is structured by a dynamic model of land allocation.

The presence of risk is another factor that can explain mixed land allocations. On the basis of a dynamic and stochastic model of land allocation, [Parks \(1995\)](#) shows that when risks held by two different land uses are not positively correlated and the landowner is risk-averse, then land allocation is mixed. This reflects a diversification behavior.

The aim of this article is two-fold : i) providing analytical results, in particular identifying the determinants of stationary land allocation and forest management, and ii) providing clear numerical evidence on the different types of land allocation and forest management at stationarity. In addition, numerical results are aimed to determine the respective role of intertemporal preferences and risk aversion and to determine which of land allocation or forest management is the lever used as a cover against risk by the landowner.

In section [4.3](#), the analytical approach proposed in [Salo and Tahvonen \(2004\)](#) and based on Karush-Kuhn-Tucker conditions is adapted to a stochastic context and is used to identify the determinants of stationary states. In section [4.4](#), a stochastic dynamic programming model is used to identify the different types of stationary states and to assess the sensitivity of land allocation to preference parameters.

4.2 A stochastic land allocation and forest management program

In the model considered in this study, land allocation and forest management are the two endogenous decisions. Forest management is even-aged and allows for multiple age-classes. The even-aged management implies that age-classes are spatially separated and there are subsequently no interaction effects between them in terms of biological growth. Moreover, thinning is ruled out, the landowner can only harvest by clear-cutting. However,

at a given time, an age-class may be harvested only on a fraction of the total acreage it covers. In addition, a random perturbation may occur at any time. The occurrence of this perturbation is assumed to destroy completely certain age-classes, with no residual value left, and to leave the other age-classes, as well as the entire agricultural land, completely untouched.

These hypotheses ensure that the state of the land system at a given time can be fully described by the land acreages allocated to agriculture and to the different age-classes of the forest, that are respectively noted $x_{agr,t}$ and $x_{a,t}$ with $t \in \mathbb{N}$ the time index and $a \in \mathbb{N}$ the age-class index.

The model is defined in a discrete time setting and the program faced by the landowner is sequential and repeats at every time-step. At time t , the landowner observes the state of his land system, which is defined by the vector of land shares $X_t = (x_{agr,t}, x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{a,t}, \dots)$. On the basis of this observation, he makes decisions concerning timber harvest, forest planning and land allocation to agriculture. These decisions determine the income from timber harvest received at time t , $\Pi_{for,t}$, as well as the state $X_{t+1} = (x_{agr,t+1}, x_{1,t+1}, x_{2,t+1}, \dots, x_{a,t+1}, \dots)$ that is realized at $t + 1$ when the perturbation does not occur between t and $t + 1$. The agricultural income $\Pi_{agr,t}$ received at time t is a function of the agricultural land acreage at time t , $x_{agr,t}$, it does not depend on decisions and is certain from a time t perspective. The forest income is also certain from a time t perspective as harvest decisions are made and executed before the perturbation may occur.

At each time step, the perturbation occurs with probability p or does not occur with probability $(1 - p)$, it is an independently and identically distributed Bernoulli trial. If it does not occur, decided land shares $X_{t+1} = (x_{agr,t+1}, x_{1,t+1}, x_{2,t+1}, \dots, x_{a,t+1}, \dots)$ are realized at $t + 1$. If it occurs, decided land shares are modified to become $D(X_{t+1}) = (d_{agr}(x_{agr,t+1}), d_1(x_{1,t+1}), d_2(x_{2,t+1}), \dots, d_a(x_{a,t+1}), \dots)$. Functions $d_1, \dots, d_a, \dots$ are functions describing the impact of the perturbation on the different age-classes. Knowing that the perturbation completely destroys given age-classes and leaves the others untouched, then for any age-class a , either $d_a(x_{a,t}) = x_{a,t}$ or $d_a(x_{a,t}) = 0$ depending on how the perturbation is specified. As we assume that agricultural activities are not impacted by the perturbation,

we have $d_{agr}(x_{agr,t+1}) = x_{agr,t+1}$. Once state $t + 1$ is realized, either X_{t+1} or $D(X_{t+1})$, the landowner observes it and the same sequence reproduces.

This sequential program is represented on the timeline given in figure 15 :

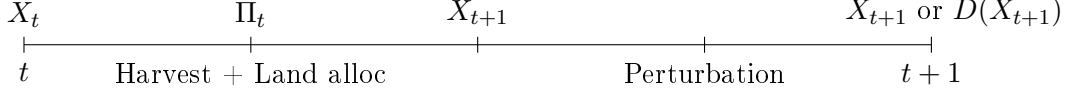


FIGURE 15 – Timeline of decisions and realizations between t and $t + 1$

This sequential problem can be analyzed using the framework proposed by [Epstein and Zin \(1989\)](#), which involves similar temporal lotteries. For such temporal lotteries, [Epstein and Zin \(1989\)](#) define a new preference framework based on recursive utility functions. More precisely, [Epstein and Zin \(1991\)](#) define a recursive utility function, U_t , on the basis of the following recursive relation :

$$U_t = \left((1 - \beta)\Pi_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[E(\tilde{U}_{t+1}^{1-\alpha})]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (89)$$

This functional relation combines a Constant Elasticity of Substitution (CES) function and a Constant Relative Risk Aversion (CRRA) expected utility function.

U_t is the utility brought to the landowner by all possible future income streams following time t . This way of aggregating future possible incomes is an alternative to the use of the standard expected utility framework. Recursive preferences actually generalize expected utility preferences, which are obtained as a particular case when $\alpha = \frac{1}{\sigma}$.

Π_t is the certain (from a time t standpoint) income received at time t , $\tilde{U}_{t+1}$ is the uncertain recursive utility brought to the landowner by all possible incomes received from $t + 1$ onwards, and E the expectation operator corresponding to our Bernoulli trial. This uncertainty reflects the fact that the sets of possible income streams as of $t + 1$ do not need to be the same whether a perturbation occurs between t and $t + 1$ or not. $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$ is the intertemporal preferences parameter (the greater σ , the more flexible intertemporal

substitutions), $\alpha \in \mathbb{R}^+$ is the risk aversion parameter (the greater α , the more risk-averse the producer), and β is the subjective discount rate.

Epstein and Zin (1989) have proven that it is possible to maximize U_t by adjusting, under constraints, all possible future incomes for all possible perturbation scenarios. As the program is sequential, they have also shown that it is possible to determine an optimal decision rule at time t given the observed state of the land system X_t . This decision rule is stationary (independent from t) and denoted $d(X_t)$.

In addition, Epstein and Zin (1989) have demonstrated that this optimal decision rule can be determined using a modified Bellman equation. The general form of this modified Bellman equation, as introduced by Epstein and Zin (1991) is given in equation 90 :

$$V(X_t) = \max_{d \in \mathbb{D}_t} \left\{ \left((1 - \beta) \Pi(X_t, d)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta [E(V((\tilde{X}_{t+1} | X_t, d))^{1-\alpha})]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \right\} \quad (90)$$

Considering state X_t , decisions d must belong to the feasible set $\mathbb{D}_t$. $\Pi(X_t, d)$ is the certain income received by the producer at t from both forestry and agriculture. It depends on both state X_t and decisions d . $(\tilde{X}_{t+1} | X_t, d)$ is the distribution over the random state of the land system at $t + 1$ conditional on state X_t and decisions d .

The value function $V(X_t)$ that verifies equation 90 gives the maximum value of U_t when the initial state at time t is X_t and when all subsequent decisions are optimal regardless of the perturbation scenario that will be realized.

Equation 90 as well as the feasible decision set $\mathbb{D}_t$ can be further specified in the context of our model.

As for decisions, the acreage of age-class a that is harvested between t and $t + 1$ is noted $h_{a,t}$. It corresponds to the difference between the acreage $x_{a,t}$ allocated to age-class a at time t and the acreage $x_{a+1,t+1}$ allocated to age-class $a + 1$ at $t + 1$ if no perturbation occurs between t and $t + 1$, that is the same age-class but one time-step older and one time-step later. The acreage planted with new forest between t and $t + 1$ is denoted s_t , it corresponds to the acreage of land allocated to age-class 1 at the next time step if no

perturbation occurs by then, that is $x_{1,t+1}$. At last, at time t , the landowner decides to allocate a land share ag_t to agriculture. This allocation is realized with certainty at $t+1$ and corresponds to land share $x_{agr,t+1}$.

Thus, the relation between control variables $h_{a,t}$, s_t and ag_t , and land shares $(x_{agr,t}, x_{1,t}, \dots, x_{a,t}, \dots)$ observed at t , and land shares $(x_{agr,t+1}, x_{1,t+1}, \dots, x_{a,t+1}, \dots)$ realized at $t+1$ in the absence of perturbation between t and $t+1$, can be expressed as follows :

$$\text{For all } a \in \mathbb{N}^* \text{ and } t \in \mathbb{N} : \quad h_{a,t} = x_{a,t} - x_{a+1,t+1} \quad (91)$$

$$\text{For all } t \in \mathbb{N} : \quad s_t = x_{1,t+1} \quad (92)$$

$$\text{For all } t \in \mathbb{N} : \quad ag_t = x_{agr,t+1} \quad (93)$$

Therefore, for a given state $X_t = (x_{agr}, x_{1,t}, \dots, x_{a,t}, \dots)$ observed at t , decisions made between t and $t+1$, that are $(ag_t, s_t, h_{1,t}, \dots, h_{a,t}, \dots)$, can also be represented by decided land shares $X_{t+1} = (x_{agr,t+1}, x_{1,t+1}, \dots, x_{a,t+1}, \dots)$ (that will be realized if no perturbation occurs between t and $t+1$) as they contain all the information regarding the decisions.

As mentioned above, the income Π_t is certain from a time t standpoint as both components $\Pi_{agr,t}$ and $\Pi_{for,t}$ are certain.

$\Pi_{for,t}$ can be expressed in function of harvested acreages $h_{a,t}$ or equivalently in function of land shares as follows :

$$\Pi_{for,t} = \sum_{a=1}^{+\infty} R_a h_{a,t} = \sum_{a=1}^{+\infty} R_a (x_{a,t} - x_{a+1,t+1}) \quad (94)$$

R_a is the income generated by harvesting one land unit of age-class a . Note that timber value results from a pure-aging process, which is a consequence of the even-aged management hypothesis. Incidentally, equation 94 reflects the absence of harvest and planting costs in the model.

$\Pi_{agr,t}$ depends only on the agricultural land share at time t , $x_{agr,t}$ and is written as follows :

$$\Pi_{agr,t} = R_{agr} x_{agr,t} \quad (95)$$

R_{agr} is the income generated during one time-step by one agricultural land unit. R_{agr} is independent from land allocation, which means that we assume constant marginal returns to land. This is a major difference from [Salo and Tahvonen \(2004\)](#) who consider the problem in a deterministic context but with decreasing marginal returns to land.

As a consequence, the total income received by the landowner at time t can be expressed as a function of observed land shares X_t and decided land shares X_{t+1} as shown in equation 96 :

$$\Pi_{agr,t} + \Pi_{for,t} = R_{agr}x_{agr,t} + \sum_{a=1}^{+\infty} R_a(x_{a,t} - x_{a+1,t+1}) = \Pi(X_t, X_{t+1}) \quad (96)$$

In addition, as assumed above, the perturbation is an independently and identically distributed Bernoulli trial which leads to state X_{t+1} with probability $(1 - p)$ and to state $D(X_{t+1})$ with probability p .

On the basis of these clarifications, the Bellman equation can be rewritten as follows :

$$V(X_t) = \max_{X_{t+1}} \left\{ \left((1-\beta)\Pi(X_t, X_{t+1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1-p)V(X_{t+1})^{1-\alpha} + pV(D(X_{t+1}))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \right\} \quad (97)$$

Moreover, decided land shares $X_{t+1} = (x_{agr,t+1}, x_{1,t+1}, x_{2,t+1}, \dots, x_{a,t+1}, \dots)$ are subject to two types of constraints.

The acreages of land $h_{a,t}$ that are harvested from the different age-classes are by definition positive. On the basis of equation 10, these constraints can be expressed as follows :

$$\text{For all } a \in \mathbb{N}^* \text{ and } t \in \mathbb{N} : \quad x_{a,t} \geq x_{a+1,t+1} \quad (98)$$

The total land acreage available for both agricultural and forest production is normalized to one, without loss of generality :

$$\text{For all } t \in \mathbb{N}^* : \quad x_{agr,t} + \sum_{a=1}^{+\infty} x_{a,t} \leq 1 \quad (99)$$

The Bellman equation 97, as well as constraints 98 and 99, define the optimization program faced by the landowner.

This optimization program can be solved numerically using dynamic programming methods as performed in section 4.4. However, it is also possible to derive a few analytical results using Karush-Kuhn-Tucker conditions as shown in section 4.3.

4.3 Analytical characterization of stationary land allocations

Necessary conditions for the stationarity of a mixed land allocation between agriculture and a normal forest is presented in section 4.3.1. This condition is demonstrated in section 4.3.2.

4.3.1 Stationary land allocations and normal forests

We write $X_s = (x_{agr,s}, x_{1,s}, x_{2,s}, \dots, x_{a,s}, \dots)$ a vector of land shares describing a mixed land allocation between agriculture and a normal forest of rotation age F . Land allocation is mixed when both activities coexist, that is $x_{agr,s} > 0$ and $\sum_{a=1}^{+\infty} x_{a,s} = 1 - x_{agr,s} > 0$. As the forest is normal and has a rotation age F , $x_{a,s} = \frac{1-x_{agr,s}}{F}$ for $a \leq F$ and $x_{a,s} = 0$ for $a > F$.

Π_s is the income generated at each time step by the land system X_s as long as it remains in this state, which means that $\Pi_s = R_{agr}x_{agr,s} + \frac{(1-x_{agr,s})R_F}{F}$ (see equation 96).

V is the value function that verifies the dynamic program defined by the Bellman equation 97 under constraints 98 and 99.

V^e is a function such that $V^e(x_{agr}, x_1, x_2, \dots, x_a, \dots) = V(d_{agr}(x_{agr}), d_1(x_1), d_2(x_2), \dots, d_a(x_a), \dots)$ where functions $d_{agr}, d_1, d_2, \dots, d_a, \dots$ describe the impact of the perturbation on the different land shares (see section 4.2).

Hypothesis 1 *If the land system is initially in a state X_s , then it is optimal that it remains*

in the same state X_s as long as no perturbation occurs.

Hypothesis 1 states that we consider a mixed land allocation between agriculture and a normal forest of rotation age F , X_s , that is stationary as long as no perturbation occurs.

Hypothesis 2 $\beta(1-p) \left(\frac{[(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{V(X_s)} \right)^{\alpha - \frac{1}{\sigma}} < 1.$

Hypothesis 2 allows us to perform the calculations up to conditions 100 and 101 below. It is a weak hypothesis that is for example verified when $\alpha \geq \frac{1}{\sigma}$ (although it is not necessary).

Proposition 1 *Considering a landowner facing the optimization program defined by the Bellman equation 97 and by constraints 98 and 99, then under hypotheses 1 and 2, conditions 100 and 101 necessarily hold :*

For all $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-\gamma^F} \left[(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \gamma^F R_F + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^F \frac{\partial V^e}{\partial x_F} \Big|_{X_s} \right) \right] \\ & \geq \frac{1}{1-\gamma^j} \left[(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \gamma^j R_j + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^j \frac{\partial V^e}{\partial x_j} \Big|_{X_s} \right) \right] \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{1-\gamma} \left[(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_{agr} + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_{agr}} \Big|_{X_s} \right] \\ & = \frac{1}{1-\gamma^F} \left[(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \gamma^F R_F + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^F \frac{\partial V^e}{\partial x_F} \Big|_{X_s} \right) \right] \end{aligned} \quad (101)$$

with :

$$\gamma = \beta(1-p) \left(\frac{[(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{V(X_s)} \right)^{\alpha - \frac{1}{\sigma}} \quad (102)$$

Conditions 100 and 101 show that if a mixed land allocation between agriculture and a normal forest X_s is stationary, then both land allocations and forest management depend on the perturbation probability and consequences (parameter p and functions $(d_{agr}, d_1, \dots, d_a, \dots)$), on intertemporal preferences (parameter σ) and on risk aversion (parameter α). Indeed, for a given state X_s , when these parameters are changed, conditions 100 and 101 do not necessarily hold anymore and in this case X_s can no longer be stationary.

In addition, both equations 100 and 101 depend on land acreages $X_s = (x_{agr}, x_1, x_2, \dots, x_a, \dots)$, through the value function V and its derivatives. As a consequence, condition 100 on the rotation age F of the normal forest on land allocation and condition 101 that allows for mixed land allocation depends on the rotation age F . In other words, in a stationary state X_s , forest management and land allocation are interdependent. This observation differs from the results obtained by Salo and Tahvonen (2004) who show in a deterministic setting that forest management always respect Faustmann's rule regardless of land allocation.

Unfortunately, it is not generally possible to derive tractable expressions giving the rotation age F and land allocation in function of exogenous parameters from equations 100 and 101. However, further information can be derived for some particular cases.

When the perturbation is assumed to destroy completely the whole forest and all crops, equations 103 and 104 can be respectively rewritten as follows :

$$F = \arg \max_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\gamma^j}{1 - \gamma^j} R_j \right\} \quad (103)$$

$$\frac{\gamma}{1 - \gamma} R_{agr} = \frac{\gamma^F}{1 - \gamma^F} R_F \quad (104)$$

Indeed, if the perturbation destroys completely the forest and the crops, we have $d_{agr}(x_{agr}) = d_1(x_1) = \dots = d_a(x_a) = \dots = 0$ for all states $X = (x_{agr}, x_1, \dots, x_a, \dots)$. Subsequently, $\frac{\partial d_a}{\partial x_a} = 0$ for all a and $\frac{\partial d_{agr}}{\partial x_{agr}} = 0$, then $\frac{\partial V^e}{\partial x_a} = \frac{\partial V}{\partial d_a(x_a)} \frac{\partial d_a(x_a)}{\partial x_a} = 0$ for all a and $\frac{\partial V^e}{\partial x_{agr}} = \frac{\partial V}{\partial d_{agr}(x_{agr})} \frac{\partial d_{agr}(x_{agr})}{\partial x_{agr}} = 0$.

As γ depends on the risk and on preferences, equations 103 and 104 show that the rotation

age and land allocation in a stationary state X_s still depend on risk and preferences in presence of a risk of total destruction.

In addition, both equations depend on land shares, which means that equality 104 is not a limit condition on exogenous parameters (see below).

Further simplifying, we assume that the landowner has expected utility preferences, which means that $\alpha = \frac{1}{\sigma}$ (see section 4.2) and therefore that $\gamma = \beta(1-p)$. In this case, equations 103 and 104 reduce to equations 105 and 106 :

$$F = \arg \max_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{[\beta(1-p)]^j}{1 - [\beta(1-p)]^j} R_j \right\} \quad (105)$$

$$\frac{\beta(1-p)}{1 - \beta(1-p)} R_{agr} = \frac{[\beta(1-p)]^F}{1 - [\beta(1-p)]^F} R_F \quad (106)$$

Equations 105 and 106 do not depend on land shares but exclusively on exogenous parameters and they are tractable.

Equation 105 shows that the rotation age of the normal forest does not depend on preferences but only on the perturbation probability p . As it is a limit condition on exogenous parameters, it also shows that there is only one possible rotation age for the normal forest (except for limit cases), regardless of land allocation.

Equation 106 is also a limit condition on exogenous parameters, it shows that mixed land allocations cannot exist (except for limit cases) in presence of a risk of total destruction and when the landowner has expected utility preferences while they may exist when the landowner has recursive preferences. This difference between recursive and expected utility preferences is confirmed numerically (see the numerical approach in section 4.4).

This difference between recursive preferences and expected utility preferences in presence of a risk of total destruction is due to the fact that recursive preferences, unlike expected utility preferences, take into account the timing in risk resolution through the term

$$\left(\frac{[(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{V(X_s)} \right)^{\alpha - \frac{1}{\sigma}} \text{ that appears in } \gamma.$$

Finally, in the absence of risk, that is when $p = 0$, equations 100 and 101 can be written as follows :

$$F = \arg \max_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\beta^j}{1 - \beta^j} R_j \right\} \quad (107)$$

$$\frac{\beta}{1 - \beta} R_{agr} = \frac{\beta^F}{1 - \beta^F} R_F \quad (108)$$

Equation 107 is Faustmann's rule expressed in a discrete time setting. It is consistent with Salo and Tahvonen (2002b) who show in a deterministic setting that stationary forests (including the normal forest) necessarily follow Faustmann's rule.

Similarly to equation 106, equation 108 is a threshold condition allowing us to distinguish between all-agriculture and all-forestry land allocations. Equation 108 states that in a deterministic setting, all land is allocated to the use offering the highest series of discounted returns. This result is consistent with the corner solutions described by Bell et al. (2006).

4.3.2 Demonstration

In order to prove proposition 1, we use an alternative formulation of the landowner's objective to the Bellman equation.

Recursive relation 109 describes how future possible incomes are aggregated to form the landowner's utility, that is so far not maximized :

$$U_t = \left((1 - \beta) \Pi_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta [E(\tilde{U}_{t+1})^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (109)$$

U_t is an aggregate of the income Π_t received by the landowner at time t (that is certain from a time t standpoint) and of the utility $\tilde{U}_{t+1}$ brought by all possible incomes received from time $t + 1$ onwards. From a time t perspective, the utility $\tilde{U}_{t+1}$ is uncertain. It can either be U_{t+1} if no perturbation occurs between t and $t + 1$ (probability $(1 - p)$) or U_{t+1}^e

if the perturbation occurs (probability p). U_{t+1} and U_{t+1}^e do not need to be equal as future possible income streams do not need to be the same whether a perturbation has occurred between t and $t + 1$ or not.

We consider an initial date $t = 0$, at which the state of the land system is described by the vector of land shares $X_0 = (x_{agr,0}, x_{1,0}, \dots, x_{a,0}, \dots)$. Then, the landowner makes decisions, that are not necessarily optimal, which leads the system to state $X_1 = (x_{agr,1}, x_{1,1}, \dots, x_{a,1}, \dots)$ at $t = 1$ if no perturbation occurs between t and $t + 1$ or to state $D(X_1) = (d_{agr}(x_{agr,1}), d_1(x_{1,1}), \dots, d_a(x_{a,1}, \dots))$ if the perturbation occurs. On this basis, recursive relation 109 leads to :

$$U_0 = \left((1 - \beta)\Pi(X_0, X_1)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1 - p)U_1^{1-\alpha} + pU_1^{e1-\alpha}]^{\frac{\frac{\sigma-1}{\sigma}}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (110)$$

So far, neither the decisions taken between $t = 0$ and $t = 1$ nor any following decisions are optimized.

However, we now suppose that all decisions taken from $t = 1$ onwards are optimal but only when a perturbation has occurred between $t = 0$ and $t = 1$. After section 4.2, we know that the value function $V(X_t)$ (that verifies the optimization program described by equations 97, 98 and 99) is the maximum recursive utility U_t given an initial state X_t and given the specifications and constraints of our model, that is $V(X_t) = \max\{U_t\}$.

After the perturbation has occurred between $t = 0$ and $t = 1$, the state of the system is $D(X_1)$ and the maximum recursive utility that can be derived starting from this state is $V(D(X_1))$. Consequently, equation 22 can be written as follows :

$$U_0 = \left((1 - \beta)\Pi(X_0, X_1)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1 - p)U_1^{1-\alpha} + pV(D(X_1))^{1-\alpha}]^{\frac{\frac{\sigma-1}{\sigma}}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (111)$$

If the perturbation does not occur, the state of the forest at $t = 1$ is X_1 and the landowner makes decisions to apply between $t = 1$ and $t = 2$ that are not necessarily optimal. Considering these decisions, the state X_2 is realized at $t = 2$ if no perturbation occurs

between $t = 1$ and $t = 2$, otherwise state $D(X_2)$ is realized. If we assume that all decisions following $t = 2$ are optimal when the perturbation has not occurred between $t = 0$ and $t = 1$ but that it has occurred between $t = 1$ and $t = 2$, we can write :

$$U_1 = \left((1 - \beta)\Pi(X_1, X_2)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1 - p)U_2^{1-\alpha} + pV(D(X_2))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (112)$$

The same rationale can be applied again and indefinitely, we can therefore obtain recursive relation 113 for all $t \in \mathbb{N}$:

$$U_t = \left((1 - \beta)\Pi(X_t, X_{t+1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1 - p)U_{t+1}^{1-\alpha} + pV(D(X_{t+1}))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (113)$$

Figure 16 shows how this way of expressing the sequential problem can be represented on the binomial tree corresponding to our perturbation :

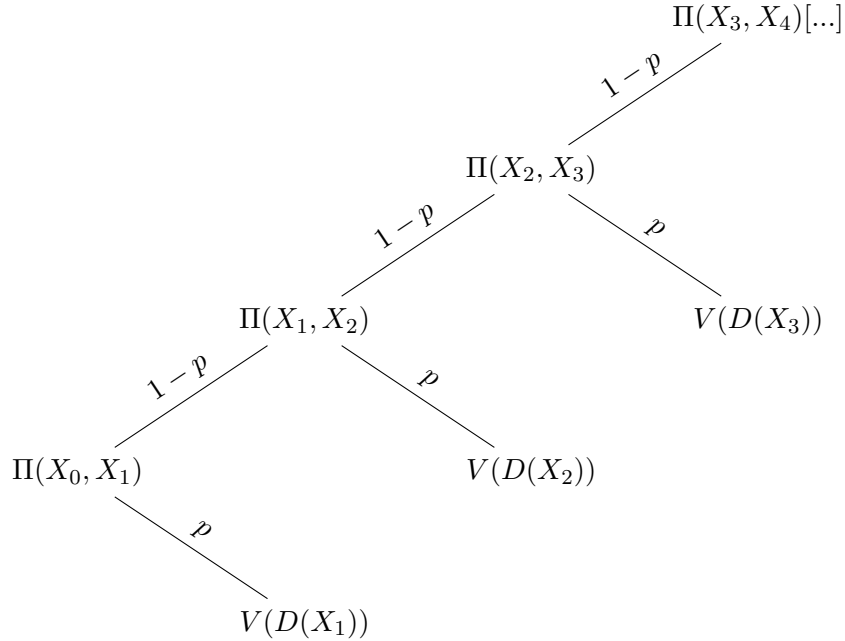


FIGURE 16 – Recursive aggregation and the binomial tree

The fact that U_1 is nested in U_0 , U_2 in U_1 and so forth indefinitely provides us with an expression $U_0(X_0, X_1, \dots, X_t, \dots)$ that depends on the initial state X_0 (constrained) and on vectors of land shares $(X_1, \dots, X_t, \dots)$ that will be realized if the perturbation never occurs.

$U_0(X_0, X_1, \dots, X_t, \dots)$ is the objective function of the landowner at time $t = 0$ and $(X_1, \dots, X_t, \dots)$ are the vector of control variables that can be used to maximize it (under constraints). $(X_1, \dots, X_t, \dots)$ are the only variables that are left to be maximized as all the decisions following the first occurrence of a perturbation in all other perturbation scenarios are implicitly maximized through the use of the value function V . More generally, a similar objective function $U_t(X_t, X_{t+1}, \dots)$ can actually be defined when considering the problem from any initial state X_t starting from any time $t \in \mathbb{N}$.

This approach for expressing U_0 allows us to isolate vectors of land shares $(X_1, \dots, X_t, \dots)$ that are realized when a perturbation never occurs. This is appropriate as we want to obtain a condition of stationarity for the land system provided that the perturbation never occurs.

The demonstration of necessary conditions 100 and 101 is based on Karush-Kuhn-Tucker conditions. First, the Lagrangian corresponding to the maximization of $U_0(X_0 = X_s, X_1, X_2, \dots, X_t, \dots)$ (the initial state X_0 is constrained) under constraints 98 and 99 can be written as follows :

$$L(X_1, \dots, X_t, \dots, \{\mu_{a,t}\}, \{\eta_t\}) = U_0(X_0 = X_s, X_1, \dots, X_t, \dots) \\ + \sum_{t=0}^{+\infty} \sum_{a=1}^{+\infty} \mu_{a,t} (x_{a,t} - x_{a+1,t+1}) + \sum_{t=0}^{+\infty} \eta_t (1 - x_{agr,t} - \sum_{a=1}^{+\infty} x_{a,t}) \quad (114)$$

$\{\mu_{a,t}\}$ and $\{\eta_t\}$ are the dual variables respectively associated with constraints 98 and 99 introduced in section 4.2.

We assume that the system is initially a mixed land allocation between agriculture and a normal forest of rotation age F , noted $X_s = (x_{agr,s}, x_{1,s}, \dots, x_{a,s}, \dots)$, that is $X_0 = X_s$. Land allocation is mixed so $0 < x_{agr,s} < 1$ and the forest is normal and has a rotation age F so $x_{a,s} = (1 - x_{agr,s}) \frac{1}{F}$ for $a \leq F$ and $x_{a,s} = 0$ for $a > F$.

In addition, we assume that it is optimal that the system remains in this state as long as the perturbation does not occur, which means that decisions $X_1 = X_2 = \dots = X_t = \dots = X_s$ are optimal when $X_0 = X_s$.

The Lagrangian derivatives evaluated at $(X_0 = X_1 = X_2 = \dots = X_t = \dots = X_s, \{\mu_{a,t}\}, \{\eta_t\})$ are written as follows :

$$\left. \frac{\partial L}{\partial x_{agr,t}} \right|_{X_0=X_1=\dots=X_s, \{\mu_{a,t}\}, \{\eta_t\}} = \left. \frac{\partial U_0}{\partial x_{agr,t}} \right|_{X_0=X_1=\dots=X_s} - \eta_t \quad (115)$$

For $a > 1$:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_0=X_1=\dots=X_s, \{\mu_{a,t}\}, \{\eta_t\}} = \left. \frac{\partial U_0}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_0=X_1=\dots=X_s} + \mu_{a,t} - \mu_{a-1,t-1} - \eta_t \quad (116)$$

For $a = 1$:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial x_{1,t}} \right|_{X_0=X_1=\dots=X_s, \{\mu_{a,t}\}, \{\eta_t\}} = \left. \frac{\partial U_0}{\partial x_{1,t}} \right|_{X_0=X_1=\dots=X_s} + \mu_{1,t} - \eta_t \quad (117)$$

As demonstrated in appendix 1, recursive relations 113 allow us to determine derivatives $\frac{\partial U_0}{\partial x_{agr,t}}$ and $\frac{\partial U_0}{\partial x_{a,t}}$. In particular, it is demonstrated that the values of $\frac{\partial U_0}{\partial x_{agr,t}}$ and $\frac{\partial U_0}{\partial x_{a,t}}$ when $X_0 = X_1 = \dots = X_t = \dots = X_s$, can be written as follows :

$$\left. \frac{\partial U_0}{\partial x_{agr,t}} \right|_{X_0=X_1=\dots=X_t=\dots=X_s} = \gamma^t(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_{agr} + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left. \frac{\partial V^e}{\partial x_{agr,t}} \right|_{X_s} \quad (118)$$

For $a > 1$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U_0}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_0=X_1=\dots=X_t=\dots=X_s} &= \gamma^{t-1}(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (-R_{a-1}) + \gamma^t(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_a \\ &\quad + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left. \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_s} \end{aligned} \quad (119)$$

For $a = 1$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U_0}{\partial x_{1,t}} \right|_{X_0=X_1=\dots=X_s} &= \gamma^t(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_1 + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left. \frac{\partial V^e}{\partial x_{1,t}} \right|_{X_s} \end{aligned} \quad (120)$$

With

$$\gamma = \beta(1-p) \left(\frac{[(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{V(X_s)} \right)^{\alpha - \frac{1}{\sigma}} \quad (121)$$

$\Pi_s = \Pi(X_s, X_s) = R_{agr}x_{agr_s} + \frac{(1-x_{agr,s})R_F}{F}$ is the income generated by the stationary state X_s at each time step as long as the perturbation does not occur. $R_{agr}x_{agr_s}$ is the agricultural income when the land share $x_{agr,s}$ is allocated to agriculture. $\frac{(1-x_{agr,s})R_F}{F}$ is the income generated at each time step by a normal forest of rotation age F which land share is $(1 - x_{agr,s})$.

V^e is a function such that $V^e(X) = V(D(X))$ for all X , then $\frac{\partial V^e}{\partial x_a} \Big|_{X_s} = \frac{\partial V(D)}{\partial x_a} \Big|_{X_s}$.

Karush-Kuhn-Tucker conditions state that at the optimum, the following four conditions [122](#), [123](#), [124](#) and [125](#) on the Lagrangian derivatives must be respected for all $a \geq 1$ and $t \geq 1$:

$$x_{agr,t}^* \frac{\partial L}{\partial x_{agr,t}} = 0 \quad (122)$$

$$x_{a,t}^* \frac{\partial L}{\partial x_{a,t}} = 0 \quad (123)$$

where $\{x_{a,t}^*\}$ are land shares at the optimum, and :

$$\frac{\partial L}{\partial x_{agr,t}} \leq 0 \quad (124)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{a,t}} \leq 0 \quad (125)$$

As we assume that when $X_0 = X_s$, it is optimal that $X_1 = X_2 = \dots X_- = \dots = X_s$, then $x_{agr,t}^* > 0$ for all t , $x_{a,t}^* > 0$ for all t and for all $a \leq F$, and $x_{a,t}^* = 0$ for all t and for all $a > F$. Consequently, Karush-Kuhn-Tucker conditions translate as conditions [126](#), [127](#) and [128](#) : For $t \geq 1$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{agr,t}} \Big|_{X_0=X_1=\dots=X_s, \{\mu_{a,t}\}, \{\eta_t\}} = 0 \quad (126)$$

For $t \geq 1$ and $1 \leq a \leq F$:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_0=X_1=\dots=X_s, \{\mu_{a,t}\}, \{\eta_t\}} = 0 \quad (127)$$

For $t \geq 1$ and $a > F$:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_0=X_1=\dots=X_s, \{\mu_{a,t}\}, \{\eta_t\}} \leq 0 \quad (128)$$

By replacing the Lagrangian derivatives by their values, we finally obtain conditions [129](#), [130](#), [131](#) and [132](#) :

For $t \geq 1$:

$$\gamma^t(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_{agr} + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left. \frac{\partial V^e}{\partial x_{agr,t}} \right|_{X_s} - \eta_t = 0 \quad (129)$$

For $1 < a \leq F$ and $t \geq 1$:

$$\begin{aligned} & \gamma^{t-1}(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (-R_{a-1}) + \gamma^t(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (+R_a) \\ & + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left. \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_s} + \mu_{a,t} - \mu_{a-1,t-1} - \eta_t = 0 \end{aligned} \quad (130)$$

For $a > F$ and $t \geq 1$:

$$\begin{aligned} & \gamma^{t-1}(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (-R_{a-1}) + \gamma^t(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (+R_a) \\ & + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left. \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_s} + \mu_{a,t} - \mu_{a-1,t-1} - \eta_t \leq 0 \end{aligned} \quad (131)$$

For $a = 1$ and $t \geq 1$:

$$\gamma^t(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (+R_1) + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left. \frac{\partial V^e}{\partial x_{1,t}} \right|_{X_s} + \mu_{1,t} - \eta_t = 0 \quad (132)$$

The subscript t in terms $\left. \frac{\partial V^e}{\partial x_{agr,t}} \right|_{X_s}$ and $\left. \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_s}$ is unnecessary, we can write $V^e(x_{1,t}, \dots, x_{a,t}, \dots) =$

$V^e(x_1, \dots, x_a, \dots)$ and then $\left. \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \right|_{X_s} = \left. \frac{\partial V^e}{\partial x_a} \right|_{X_s}$.

As demonstrated in Appendix 2, it is possible to combine conditions 129, 130, 131 and 132 to obtain following conditions 133, 134 and 135 :

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} \left[(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_{agr} + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_{agr}} \Big|_{X_s} \right] - \sum_{t'=0}^{+\infty} \eta_{t'} = 0 \quad (133)$$

For $j \in \mathbb{N}$ and $j \leq F$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\gamma^j} \left[\gamma^j (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_j + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^j \frac{\partial V^e}{\partial x_j} \Big|_{X_s} \right) \right] \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_{j,kj} - \sum_{t'=0}^{+\infty} \eta_{t'} = 0 \quad (134) \end{aligned}$$

For $j \in \mathbb{N}$ and $j > F$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\gamma^j} \left[\gamma^j (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_j + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^j \frac{\partial V^e}{\partial x_j} \Big|_{X_s} \right) \right] \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_{j,kj} - \sum_{t'=0}^{+\infty} \eta_{t'} \leq 0 \quad (135) \end{aligned}$$

Karush-Kuhn-Tucker conditions also state that at the optimum, all dual variables must be positive, that is $\mu_{a,t} \geq 0$ for all $a \geq 1$ and all $t \geq 1$, and $\eta_t \geq 0$ for all $t \geq 1$. In addition, at the optimum, we must have $\mu_{a,t}(x_{a,t} - x_{a+1,t+1}) = 0$ for all $a \geq 1$ and $t \geq 1$ and $\eta_t(1 - x_{agr,t} - \sum_{a=1}^{+\infty} x_{a,t}) = 0$ for all $t \geq 1$. As, at the optimum, we have $x_{F+1,t} = 0 < \frac{1}{F} = x_{F,t}$

for all t , then $\mu_{F,t} = 0$ for all t and subsequently $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_{F,kF} = 0$.

As a consequence, from equation 134, we can write equation 136 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\gamma^F} \left[\gamma^F (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_F + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^F \frac{\partial V^e}{\partial x_F} \Big|_{X_s} \right) \right] \\ - \sum_{t'=0}^{+\infty} \eta_{t'} = 0 \quad (136) \end{aligned}$$

As $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_{j,kj} \geq 0$ for any $j \in \mathbb{N}$, the following inequality must hold :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-\gamma^F} \left[\gamma^F (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_F + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \left(\gamma \frac{\partial V^e(X_s)}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^F \frac{\partial V^e}{\partial x_F} \Big|_{X_s} \right) \right] \\ & \geq \frac{1}{1-\gamma^j} \left[\gamma^j (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_F + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^j \frac{\partial V^e}{\partial x_j} \Big|_{X_s} \right) \right] \end{aligned} \quad (137)$$

Moreover, equation 133 and 136 show that :

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{1-\gamma} \left[(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_{agr} + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \frac{\partial V^e}{\partial x_{agr}} \Big|_{X_s} \right] \\ & = \frac{1}{1-\gamma^F} \left[\gamma^F (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_F + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \right. \\ & \quad \left. \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \gamma^2 \frac{\partial V^e}{\partial x_2} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^F \frac{\partial V^e}{\partial x_F} \Big|_{X_s} \right) \right] \end{aligned} \quad (138)$$

Conditions 137 and 138 are the conditions we aimed at demonstrating. They are necessary conditions⁴ for $X_1 = \dots = X_t = \dots = X_s$ to be optimal when $X_0 = X_s$.

4.4 Stationary land allocation and forest management : a numerical application

Equations 100 and 101 presented in section 4.3 help identify the determinants of stationary land allocation and forest management. However, they do not allow us to characterize the different types of stationary states nor do they allow us to assess the sensitivity of stationary states to preference parameters. The numerical approach used in this sections is aimed to answer these questions.

4. As the constraints are linear, the constraint qualifications are met for the program (see [Leonard and Van Long \(1992\)](#)) and Karush-Kuhn-Tucker conditions are indeed necessary.

4.4.1 A stochastic dynamic programming model

The model is analogous to the dynamic program introduced by the Bellman equation 97 and by constraints 98 and 99 in section 4.2 but a few differences are introduced.

The constraints are the same as in the analytical model except that, for ease of programming, the total land available is not normalized at 1 but at 100.

The income function remains the same (see equation 96) and the data on timber revenues (that is the sequence R_a) corresponds to the maritime pine forestry in southwestern France, it is taken from Couture and Reynaud (2011) and presented in table 4 :

Age-class	Age (in years)	Timber revenue (euros/ha)
1	5	0
2	10	11
3	15	29
4	20	97
5	25	390
6	30	1378
7	35	2917
8	40	4083

TABLE 4 – Timber revenue in function of the age

Assuming a 2%/year discount rate, Faustmann’s age is 40 years. The agricultural income per land unit and per 5-year time step is 325. This value is *ad hoc* and is chosen so that the sum of discounted returns from agriculture is slightly smaller than the sum of deterministic discounted returns from the forest when it follows Faustmann’s rule. Consequently, in the absence of risk, all land is allocated to forestry (see section 4.3) but the presence of a perturbation risk on the forest alone may affect this result, which is exactly what is investigated here.

The perturbation introduced in the numerical model is aimed to be a risk of storm. Several types of storms are specified and presented in table 5 below. The first type of storm (#1) destroys completely the age-class 8 (the oldest possible one), the second type (#2) destroys completely age-classes 7 and 8 (the two oldest ones), and so on. This representation of

risk reflects the fact that the vulnerability of the forest increases over its age, which is a fundamental characteristic of the risk of storm on forests (see [Schelhaas et al. \(2010\)](#)). Agriculture is assumed not to be affected by storms.

#event (e)	Destroyed age classes (d_e)	Prob of occurrence (p_e)
0	None	0.933
1	8	0.016
2	7+8	0.014
3	6+7+8	0.012
4	5+6+7+8	0.009
5	4+5+6+7+8	0.007
6	3+4+5+6+7+8	0.005
7	2+3+4+5+6+7+8	0.003
8	All	0.001

TABLE 5 – Storms and probabilities

The Bellman equation associated with this program is given in equation [139](#) :

$$V_t = \max_{X_{t+1}} \left\{ \left((1 - \beta) \Pi(X_t, X_{t+1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta \left[\sum_{e=0}^{10} p_e V(d_e(X_{t+1}))^{1-\alpha} \right]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \right\} \quad (139)$$

$X_{t+1} = (x_{agr,t+1}, x_{1,t+1}; x_{2,t+1}; \dots; x_{a,t+1}; \dots)$ are the land shares that are realized at $t + 1$ in the absence of perturbation between t and $t + 1$ (see [Figure 2](#)), d_e are the functions that describe the consequences on these decided land shares of the different events e presented in [table 2](#), and p_e their associated probabilities.

The program is solved using a value function iteration algorithm (see [Judd \(1998\)](#)) that is computed using the GAMS language and solvers. This algorithm supposes an infinite time horizon, which is necessary as the focus is put on stationary states. The convergence of the algorithm is ensured by the Contraction Mapping Theorem (see [Judd \(1998\)](#)). In addition,

within the algorithm, the value function is given a third order polynomial form :

$$\begin{aligned}
V(X) = & \alpha_{agr} \cdot x_{agr} + \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=i}^{10} \sum_{k=j}^{10} \alpha_{i,j,k} \cdot x_i \cdot x_j \cdot x_k + \sum_{l=1}^{10} \sum_{m=l}^{10} \alpha_{l,m} \cdot x_l \cdot x_m \\
& + \sum_{n=1}^{10} \alpha_n \cdot x_n + \sum_{o=1}^{10} \sum_{p=o}^{10} \alpha_{agr,o,p} \cdot x_{agr} \cdot x_o \cdot x_p + \sum_{q=1}^{10} \alpha_{agr,q} \cdot x_{agr} \cdot x_q \quad (140)
\end{aligned}$$

The algorithm is run for a given set of exogenous parameters and determines the corresponding value function. Once the value function is known, an optimal sequence of decisions can be computed on the basis of the Bellman equation, starting from bare land, and a stationary state is given as the long-term steady state.

4.4.2 Results

The results presented below reveal the existence of two types of stationary states : i) periodic forests following Faustmann's rule, and ii) mixed land allocations between agriculture and a normal forest following Faustmann's rule.

The existence of stationary periodic forests in a deterministic context is well documented (see for example [Salo and Tahvonen \(2002b\)](#)) and is shown to be related to the discrete time setting. Although it is not formally demonstrated here, the same reason probably applies in a stochastic context.

The fact that mixed land allocations can be stationary in a risky context is permitted by the endogeneity of condition [101](#) (see section [4.3](#)), which is not a limit condition on exogenous parameters as in the deterministic case.

In addition, the absence of periodicity in the forest management when land allocation is mixed also seems to be related to condition [101](#). Indeed, it consists of an equality constraint that depends on land variables that cannot generally be verified when land variables are not constant.

The fact that stationary mixed land allocations are constant over time allows us to as-

sociate a single land allocation to a given set of exogenous parameters. Thus, the role of preferences on land allocation is assessed through sensitivity analyses. The role of risk aversion (parameter α) is presented in Figure 17 ($\sigma = 100$ so that intertemporal preferences are very low) :

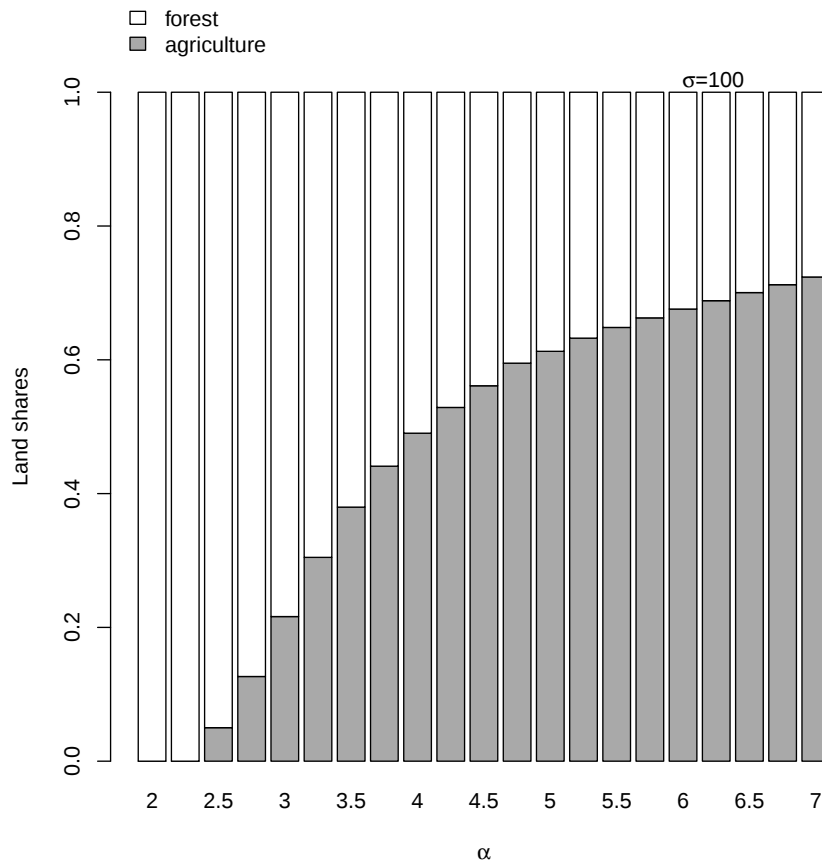


FIGURE 17 – Impact of risk aversion on land allocation

Figure 17 shows that land allocation responds gradually to risk aversion and that there exists a continuum of mixed land allocations. Moreover, the fact that risk aversion fosters agriculture reveals that mixed land allocation are used by the landowner as a diversification strategy against the risk of perturbation.

A similar figure is obtained, although with higher agricultural land shares, when the destruction of the forest is total in case any storm described in Table 5 occurs. The existence of mixed land allocations under these circumstances confirms the specificity of recursive

preferences in comparison to expected utility preferences for which mixed land allocations do not exist in presence of a risk of total destruction (see section 4.3.1 for an analytical discussion on this matter).

The role of intertemporal preferences is presented in Figure 18 (the smaller σ is, the less flexible intertemporal substitutions are) :

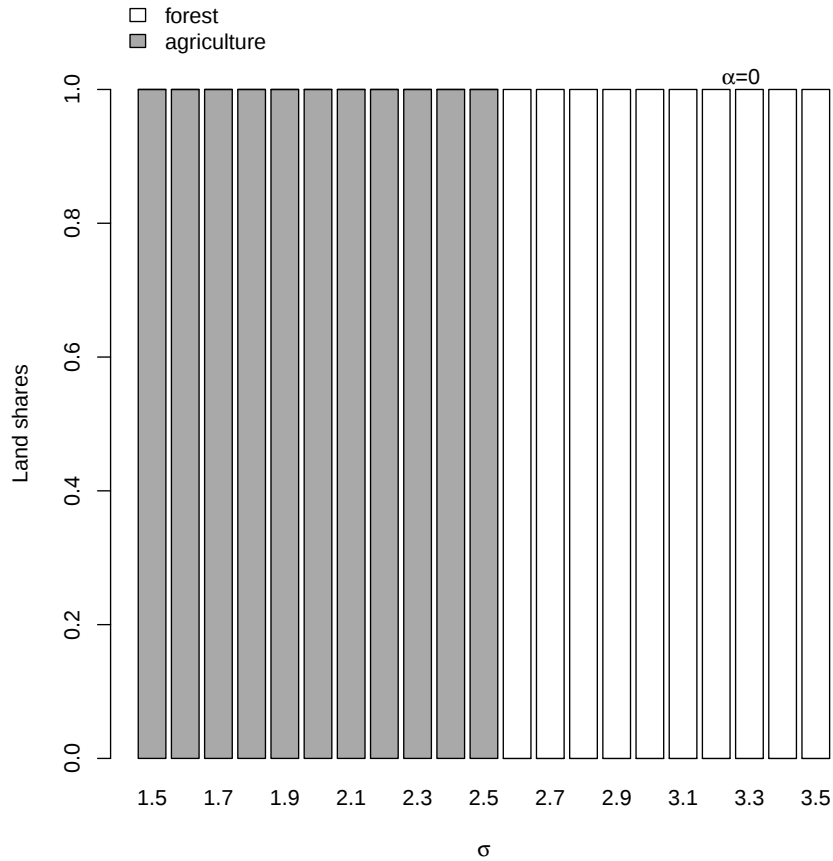


FIGURE 18 – Impact of intertemporal preferences on land allocation

Unlike risk aversion, the impact of intertemporal preferences on land allocation seems to be discontinuous with a threshold value for σ separating pure agriculture and pure forestry land allocations. Apart from this discontinuity property, intertemporal preferences also seem to foster agriculture. As agriculture is not subject to the risk of storm, allocating land to agriculture is indeed a precautionary behavior that avoids future incomes to be irregular over time in case a storm occurs.

The joint influence of both types of preferences is shown on Figure 19 :

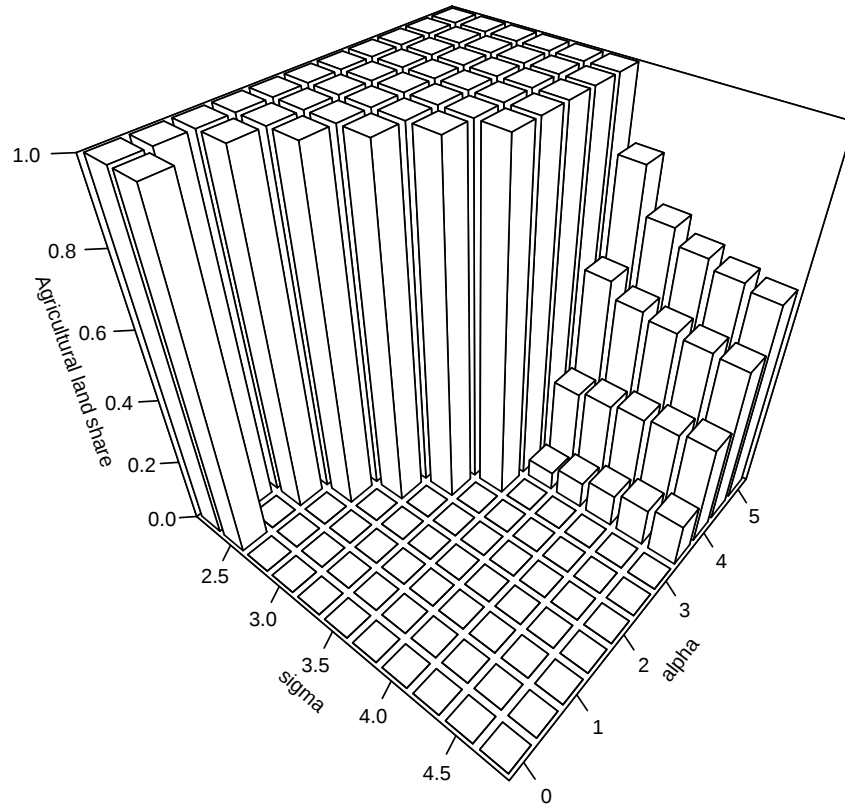


FIGURE 19 – Joint impact of preferences on land allocation

Figure 19 reveals that the "threshold effect" linked to intertemporal preferences (σ) is still observable when the landowner is also risk-averse. However, the threshold value for σ is dependent on risk aversion (α). In fact, there seems to be a substitutability between risk aversion and intertemporal preferences, at least for relatively low levels of risk aversion. However, for higher levels of risk aversion, the threshold value seems to be stabilized but separates pure agriculture and mixed land allocations.

In addition, within these mixed land allocations, intertemporal preferences seem to accen-

tuate the effect of risk aversion. The elasticity of the agricultural land share to risk aversion is for example larger for $\sigma = 3.75$ than for $\sigma = 4.75$.

In any case, Figure 19 shows that the respective roles of risk aversion and intertemporal preferences on stationary land allocation are different and that there are interaction effects between these two types of preferences. This is a clear demonstration that recursive preferences are crucial to understand the role of preferences on allocating land between agriculture and forestry, or between any two sectors of which at least one is dynamic.

With regard to forest management, in all the simulations carried out to draw Figures 17, 18 and 19, the forest is always shown to follow Faustmann's rule, that is to say the rotation age is unique and is 40 years. However, when an alternative land use is not possible, forest management does not necessarily follows Faustmann's rule and is affected by preferences. More precisely, the stationary rotation age may not be unique and may be lower than Faustmann's age. This reduction in rotation ages reflects a precautionary behavior. In conclusion, precautionary behaviors can be expressed through both land allocation and forest management but in the context of our numerical model, land allocation is consistently preferred by the landowner.

4.5 Discussion

The first important result of this study is that land allocation between agriculture and a multiple age-class forest that is subject to a risk of perturbation depends on the risk and on preferences. More precisely, it is shown that to a given set of values for exogenous parameters (including the probability of the risk and preference parameters) corresponds a single stationary land allocation. Most importantly, land allocation is revealed to be used as a means of diversification against risk by the landowner.

The other important result is that land allocation and forest management are interdependent. Precautionary behaviors can indeed be adopted through these two levers and it is shown that in the context of our numerical model, the land allocation lever when available is preferred over the forest management lever.

This study extends the deterministic approach presented in [Salo and Tahvonen \(2004\)](#) to a stochastic setting, and demonstrates and clarifies the joint role of risk and preferences in allocating land. In parallel, it also extends studies such as [Parks \(1995\)](#) that are based on stochastic models of land allocation that do not take into account the dynamic nature of forestry.

This study also shows that recursive preferences are essential in the understanding of land allocation between a dynamic activity such as forestry and an alternative use. Risk aversion and intertemporal preferences are indeed shown to have different effects on land allocation and should therefore be distinguished.

4.6 Appendices

Appendix 1

Let us recall equations 113 given in section 4.3.2 :

$$U_0(X_0, X_1, \dots, X_t, \dots) = \left((1 - \beta)\Pi(X_0, X_1)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1-p)U_1^{1-\alpha} + pV(D(X_1))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (141)$$

$$U_1(X_1, X_2, \dots, X_t, \dots) = \left((1 - \beta)\Pi(X_1, X_2)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1-p)U_2^{1-\alpha} + pV(D(X_2))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (142)$$

[...]

$$U_{t-1}(X_{t-1}, X_t, \dots) = \left((1 - \beta)\Pi(X_{t-1}, X_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1-p)U_t^{1-\alpha} + pV(D(X_t))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (143)$$

$$U_t(X_t, X_{t+1}, \dots) = \left((1 - \beta)\Pi(X_t, X_{t+1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1-p)U_{t+1}^{1-\alpha} + pV(D(X_{t+1}))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (144)$$

[...]

From these equations, using the chain rule, we know that :

$$\frac{\partial U_0}{\partial x_{agr,t}} = \frac{\partial U_0}{\partial U_1} \frac{\partial U_1}{\partial U_2} \dots \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{agr,t}} \quad (145)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial x_{a,t}} = \frac{\partial U_0}{\partial U_1} \frac{\partial U_1}{\partial U_2} \dots \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}} \quad (146)$$

In addition, by deriving equation 143, we can write :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{agr,t}} &= \frac{\sigma}{\sigma-1} \left((1-\beta)\Pi(X_{t-1}, X_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1-p)U_t^{1-\alpha} + pV(D(X_t))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \\
&\quad \left[(1-\beta)\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)\Pi(X_{t-1}, X_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} \frac{\partial \Pi(X_{t-1}, X_t)}{\partial x_{agr,t}} \right. \\
&\quad \left. + \beta \frac{\frac{\sigma-1}{\sigma}}{1-\alpha} * [(1-p)U_t^{1-\alpha} + pV(D(X_t))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}-1} \right. \\
&\quad \left. \left((1-\alpha)(1-p)U_t^{-\alpha} \frac{\partial U_t}{\partial x_{agr,t}} + p(1-\alpha)V(D(X_t))^{-\alpha} \frac{\partial V(D(X_t))}{\partial x_{agr,t}} \right) \right] \quad (147)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}} &= \frac{\sigma}{\sigma-1} \left((1-\beta)\Pi(X_{t-1}, X_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1-p)U_t^{1-\alpha} + pV(D(X_t))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \\
&\quad \left[(1-\beta)\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)\Pi(X_{t-1}, X_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} \frac{\partial \Pi(X_{t-1}, X_t)}{\partial x_{a,t}} \right. \\
&\quad \left. + \beta \frac{\frac{\sigma-1}{\sigma}}{1-\alpha} * [(1-p)U_t^{1-\alpha} + pV(D(X_t))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}-1} \right. \\
&\quad \left. \left((1-\alpha)(1-p)U_t^{-\alpha} \frac{\partial U_t}{\partial x_{a,t}} + p(1-\alpha)V(D(X_t))^{-\alpha} \frac{\partial V(D(X_t))}{\partial x_{a,t}} \right) \right] \quad (148)
\end{aligned}$$

By deriving equation 144, we can also write :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_t}{\partial x_{agr,t}} &= \frac{\sigma}{\sigma-1} \left((1-\beta)\Pi(X_t, X_{t+1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1-p)U_{t+1}^{1-\alpha} + pV(D(X_{t+1}))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \\
&\quad (1-\beta)\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)\Pi(X_t, X_{t+1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} \frac{\partial \Pi(X_t, X_{t+1})}{\partial x_{agr,t}} \quad (149)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_t}{\partial x_{a,t}} &= \frac{\sigma}{\sigma-1} \left((1-\beta)\Pi(X_t, X_{t+1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta[(1-p)U_{t+1}^{1-\alpha} + pV(D(X_{t+1}))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \\
&\quad (1-\beta)\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)\Pi(X_t, X_{t+1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} \frac{\partial \Pi(X_t, X_{t+1})}{\partial x_{a,t}} \quad (150)
\end{aligned}$$

In addition, after equation 96 (see section 4.2), we know that $\frac{\partial \Pi(X_{t-1}, X_t)}{\partial x_{a,t}} = -R_{a-1}$ (for

$a > 1$ and 0 otherwise), $\frac{\partial \Pi(X_t, X_{t+1})}{\partial x_{a,t}} = R_a$, $\frac{\partial \Pi(X_{t-1}, X_t)}{\partial x_{agr,t}} = 0$ and $\frac{\partial \Pi(X_t, X_{t+1})}{\partial x_{agr,t}} = R_{agr}$.

Moreover, we define a function V^e such that $V^e(X) = V(D(X))$ for all X , then we can write $\frac{\partial V(D(X_t))}{\partial x_{agr,t}} = \frac{\partial V^e(X_t)}{\partial x_{agr,t}}$ and $\frac{\partial V(D(X_t))}{\partial x_{a,t}} = \frac{\partial V^e(X_t)}{\partial x_{a,t}}$.

Then, we want to evaluate $\frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{agr,t}}$ and $\frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}}$ when $X_{t-1} = X_t = \dots = X_s$ where $X_s = (x_{agr,s}, x_{1,s}, \dots, x_{a,s}, \dots)$ describes a mixed land allocation between agriculture and a normal forest of rotation age F (see section 4.3.2). Considering this, the income provided by the land system in the stationary state X_s as long as no perturbation occurs is constant over time and we can write : $\Pi X_t, X_{t+1} = \Pi(X_s, X_s) = \Pi_s = R_{agr}x_{agr,s} + (1 - x_{agr,s})\frac{R_F}{F}$ for all t .

In addition, we assume that when the land system is in the state X_s at a given time t , it is optimal to remain in this state as long as the perturbation does not occur. This means that when $X_t = X_s$ (which is constrained from a time t standpoint), decisions $X_{t+1} = X_{t+2} = \dots = X_s$ are optimal, in the sense that U_t but also $U_{t+1}, U_{t+2}, \dots$, as defined by equations 144,... are maximized under constraints 98 and 99. We then have

$$\max_{X_{t+1}, X_{t+2}, \dots} \{U_t\} = \max_{X_{t+2}, X_{t+3}, \dots} \{U_{t+1}\} = \dots = V(X_s).$$

As the landowner faces the same program at every time step, this assumption holds for all t . In particular, if $X_0 = X_s$ (constrained), then decisions $X_1 = X_2 = \dots = X_t = \dots = X_s$ are optimal and $\max_{X_1, X_2, \dots} \{U_0\} = \max_{X_2, X_3, \dots} \{U_1\} = \dots = V(X_s)$.

Under these conditions, at $X_{t-1} = X_t = \dots = X_s$, the derivative $\frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{agr,t}}$ and $\frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}}$ takes

the following value :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{agr,t}} \Big|_{X_{t-1}=X_t=\dots=X_s} &= \frac{\sigma}{\sigma-1} \left(V(X_s)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \\
&\quad \left[\beta \frac{\frac{\sigma-1}{\sigma}}{1-\alpha} [(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{\frac{\sigma-1}{\sigma}}{1-\alpha}-1} \right. \\
&\quad \left. \left((1-\alpha)(1-p)V(X_s)^{-\alpha} \frac{\sigma}{\sigma-1} \left(V(X_s)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} (1-\beta) \frac{\sigma-1}{\sigma} \Pi_s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} (R_{agr}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p(1-\alpha)V^e(X_s)^{-\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_{agr,t}} \Big|_{X_s} \right) \right] \\
&= \beta(1-p) \left(\frac{[(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{V(X_s)} \right)^{\alpha-\frac{1}{\sigma}} \\
&\quad \left[(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_{agr} + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_{agr,t}} \Big|_{X_s} \right] \quad (151)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_{t-1}=X_t=\dots=X_s} &= \frac{\sigma}{\sigma-1} \left(V(X_s)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \\
&\quad \left[(1-\beta) \left(\frac{\sigma-1}{\sigma} \right) \Pi_s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} (-R_{a-1}) \right. \\
&\quad \left. + \beta \frac{\frac{\sigma-1}{\sigma}}{1-\alpha} [(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{\frac{\sigma-1}{\sigma}}{1-\alpha}-1} \right. \\
&\quad \left. \left((1-\alpha)(1-p)V(X_s)^{-\alpha} \frac{\sigma}{\sigma-1} \left(V(X_s)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} (1-\beta) \frac{\sigma-1}{\sigma} \Pi_s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} (R_a) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p(1-\alpha)V^e(X_s)^{-\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_s} \right) \right] \\
&= (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (-R_{a-1}) \\
&\quad + \beta(1-p) \left(\frac{[(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{V(X_s)} \right)^{\alpha-\frac{1}{\sigma}} \\
&\quad \left[(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_a + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_s} \right] \quad (152)
\end{aligned}$$

We then define γ as follows :

$$\gamma = \beta(1-p) \left(\frac{[(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{V(X_s)} \right)^{\alpha - \frac{1}{\sigma}} \quad (153)$$

At last, we obtain :

$$\frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{agr,t}} \Big|_{X_{t-1}=X_t=\dots=X_s} = \gamma \left[(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_{agr} + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_{agr,t}} \Big|_{X_s} \right] \quad (154)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_{t-1}=X_t=\dots=X_s} \\ &= (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (-R_{a-1}) + \gamma \left[(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_a + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_s} \right] \end{aligned} \quad (155)$$

Then, we want to express derivatives $\frac{\partial U_{t-2}}{\partial x_{agr,t}}$ and $\frac{\partial U_{t-2}}{\partial x_{a,t}}$. Using the chain rule, we can write them as follows :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{t-2}}{\partial x_{agr,t}} &= \frac{\partial U_{t-2}}{\partial U_{t-1}} \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{agr,t}} \\ &= \frac{\sigma}{\sigma-1} \left((1-\beta) \Pi(X_{t-2}, X_{t-1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta [(1-p)U_{t-1}^{1-\alpha} + pV(D(X_{t-1}))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \\ & \quad \frac{\frac{\sigma-1}{\sigma} \beta [(1-p)U_{t-1}^{1-\alpha} + pV(D(X_{t-1}))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}-1} (1-\alpha)(1-p)U_{t-1}^{-\alpha}}{1-\alpha} \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{agr,t}} \end{aligned} \quad (156)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{t-2}}{\partial x_{a,t}} &= \frac{\partial U_{t-2}}{\partial U_{t-1}} \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}} \\ &= \frac{\sigma}{\sigma-1} \left((1-\beta) \Pi(X_{t-2}, X_{t-1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta [(1-p)U_{t-1}^{1-\alpha} + pV(D(X_{t-1}))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \\ & \quad \frac{\frac{\sigma-1}{\sigma} \beta [(1-p)U_{t-1}^{1-\alpha} + pV(D(X_{t-1}))^{1-\alpha}]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}-1} (1-\alpha)(1-p)U_{t-1}^{-\alpha}}{1-\alpha} \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}} \end{aligned} \quad (157)$$

We assume that $X_{t-2} = X_s$. As assumed above, decisions $X_{t-1} = X_t = \dots = X_s$ are then optimal and we have $\max_{X_{t-1}, X_t, \dots} \{U_{t-2}\} = V(X_s)$.

Therefore, at $X_{t-2} = X_{t-1} = X_t = \dots = X_s$, $\frac{\partial U_{t-2}}{\partial x_{agr,t}}$ and $\frac{\partial U_{t-2}}{\partial x_{a,t}}$ take the following values :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U_{t-2}}{\partial x_{agr,t}} \Big|_{X_{t-2}=X_{t-1}=\dots=X_s} \\
&= \beta(1-p) \left(\frac{[(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{V(X_s)} \right)^{\alpha - \frac{1}{\sigma}} \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{agr,t}} \Big|_{X_{t-1}=X_t=\dots=X_s} \\
&= \gamma \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{agr,t}} \Big|_{X_{t-1}=X_t=\dots=X_s} \\
&= \gamma \left(\gamma(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_{agr} + \gamma \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_{agr,t}} \Big|_{X_s} \right) \quad (158)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U_{t-2}}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_{t-2}=X_{t-1}=\dots=X_s} \\
&= \beta(1-p) \left(\frac{[(1-p)V(X_s)^{1-\alpha} + pV^e(X_s)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{V(X_s)} \right)^{\alpha - \frac{1}{\sigma}} \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_{t-1}=X_t=\dots=X_s} \\
&= \gamma \frac{\partial U_{t-1}}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_{t-1}=X_t=\dots=X_s} \\
&= \gamma \left((1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (-R_{a-1}) + \gamma(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_a \right. \\
&\quad \left. + \gamma \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_s} \right) \quad (159)
\end{aligned}$$

By repeating the same rationale recursively and by assuming that $X_0 = X_s$, we show that :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U_0}{\partial x_{agr,t}} \Big|_{X_0=X_1=\dots=X_s} = \gamma^t (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_{agr} \\
&\quad + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_{agr,t}} \Big|_{X_s} \quad (160)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U_0}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_0=X_1=\dots=X_s} \\
&= \gamma^{t-1} \left((1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (-R_{a-1}) + \gamma(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_a \right. \\
&\quad \left. + \gamma \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_{a,t}} \Big|_{X_s} \right) \quad (161)
\end{aligned}$$

Expression 161 holds for $a > 1$, when $a = 1$ we have $\frac{\partial \Pi(X_{t-1}, X_t)}{\partial x_{1,t}} = 0$ for all t as mentioned above and expression 161 becomes :

$$\frac{\partial U_0}{\partial x_{1,t}} \Big|_{X_0=X_1=\dots=X_s} = \gamma^t (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_1 + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_{1,t}} \Big|_{X_s} \quad (162)$$

These expressions would actually hold true for all stationary states X^* (that are states which are optimal to carry on as long as no perturbation occurs) and not only for state X_s .

Appendix 2

– Demonstration of :

For $j \leq F$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1-\gamma^j} \left[(1-\beta) \gamma^j \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_j + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V(X_s)^e} \right)^{\alpha} \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^j \frac{\partial V^e}{\partial x_j} \Big|_{X_s} \right) \right] \\
& \quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_{j,kj} - \sum_{t'=0}^{+\infty} \eta_{t'} = 0 \quad (163)
\end{aligned}$$

We start from conditions 164 and 165 below (see section 4.3.2) : For $1 < a \leq F$ and $t \geq 1$:

$$\begin{aligned}
C_{a,t} &= \gamma^{t-1} (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (-R_{a-1}) + \gamma^t (1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (+R_a) \\
& \quad + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^{\alpha} \frac{\partial V^e}{\partial x_a} \Big|_{X_s} + \mu_{a,t} - \mu_{a-1,t-1} - \eta_t = 0 \quad (164)
\end{aligned}$$

For $t \geq 1$:

$$C_{1,t} = \gamma^t(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} (+R_1) + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \mu_{1,t} - \eta_t = 0 \quad (165)$$

Then, for any $j \leq F$ and any $t \geq j$, we sum the equations $C_{a,t'} = 0$ over $\{(a, t') \in \{(1+k, t-j+1+k) | k \in [0; j-1]\}\}$. We obtain the following equation :

$$\begin{aligned} \gamma^t(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_j + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \gamma^{t-j} \left(\gamma \frac{\partial V^e(X_s)}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^j \frac{\partial V^e(X_s)}{\partial x_j} \Big|_{X_s} \right) \\ + \mu_{j,t} - \sum_{t'=t-j+1}^t \eta_{t'} = 0 \quad (166) \end{aligned}$$

We then sum this equation over $t \in \{kj | k \in \mathbb{N}^*\}$ to obtain :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\gamma^j} \left[(1-\beta) \gamma^j \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_j + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^j \frac{\partial V^e}{\partial x_j} \Big|_{X_s} \right) \right] \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_{j,kj} - \sum_{t'=0}^{+\infty} \eta_{t'} = 0 \quad (167) \end{aligned}$$

The last sum can be written only if the geometric series $\{\gamma^{kj}\}_{k \in \mathbb{N}}$ is convergent. This is the case when $\gamma < 1$, which we assume.

– Demonstration of :

For $j > F$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\gamma^j} \left[(1-\beta) \gamma^j \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s} \right)^{\frac{1}{\sigma}} R_j + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)} \right)^\alpha \left(\gamma \frac{\partial V^e}{\partial x_1} \Big|_{X_s} + \dots + \gamma^j \frac{\partial V^e}{\partial x_j} \Big|_{X_s} \right) \right] \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_{j,kj} - \sum_{t'=0}^{+\infty} \eta_{t'} \leq 0 \quad (168) \end{aligned}$$

The demonstration is similar, except that for $a > F$ and for all t , we have the inequality

169 :

$$\begin{aligned} & \gamma^{t-1}(1-\beta)\left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}(-R_{a-1}) + \gamma^t(1-\beta)\left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}(+R_a) \\ & + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)}\right)^\alpha \frac{\partial V^e}{\partial x_a} \Big|_{X_s} + \mu_{a,t} - \mu_{a-1,t-1} - \eta_t \leq 0 \end{aligned} \quad (169)$$

Hence the inequality 168.

– Demonstration of :

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} \left[(1-\beta) \left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s}\right)^{\frac{1}{\sigma}} R_{agr} + \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)}\right)^\alpha \frac{\partial V^e}{\partial x_{agr}} \Big|_{X_s} \right] - \sum_{t'=0}^{+\infty} \eta_{t'} = 0 \quad (170)$$

We start from equation 171 below (see section 4.3.2) :

$$\gamma^t(1-\beta)\left(\frac{V(X_s)}{\Pi_s}\right)^{\frac{1}{\sigma}} R_{agr} + \gamma^t \frac{p}{1-p} \left(\frac{V(X_s)}{V^e(X_s)}\right)^\alpha \frac{\partial V^e}{\partial x_{agr}} \Big|_{X_s} - \eta_t = 0 \quad (171)$$

We sum these equations over $t \in \mathbb{N}^*$ and we obtain equation 170 (with $\gamma < 1$).

Conclusion générale

Synthèse des résultats

Les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse portent sur la sylviculture en futaie régulière d'une forêt à plusieurs classes d'âge en présence d'un risque de tempête.

Le résultat le plus important issu de ces travaux est que plusieurs âges de rotation peuvent coexister à l'état stationnaire et qu'ils dépendent dans le cas général du risque et des préférences, que ce soit de l'aversion au risque (préférence pour un revenu sûr) ou des préférences intertemporelles (préférence pour un revenu régulier). Lorsque l'âge de rotation est unique, la forêt est périodiquement stationnaire, en lien avec les résultats en contexte déterministe proposés par [Salo and Tahvonen \(2002b\)](#). En revanche, lorsque plusieurs âges de rotation coexistent, la forêt présente toujours une structure en classes d'âge qui est constante au cours du temps. Dans ce cas, il est possible de calculer un âge de rotation moyen pondéré par les surfaces de chaque classe d'âge respectivement récoltées à chaque période.

L'existence de plusieurs âges de récolte à l'état stationnaire fait apparaître des forêts à la structure graduelle dans lesquelles la surface occupée par une classe donnée diminue avec son âge. Ce type de gestion peut être justifié en contexte de risque et en présence de préférences car elle permet de réduire l'exposition et la vulnérabilité au risque, tout en réduisant le moins possible le revenu forestier.

En outre, comme dans le cas déterministe (voir [Salo and Tahvonen \(2002b\)](#)), le ou les âges de rotation dépendent également des dynamiques de croissance biologique de la forêt, des prix et du taux d'actualisation mais pas de l'état initial de la forêt. Ainsi, pour un type de sylviculture donné et dans un contexte économique donné, il est possible d'associer un âge de rotation stationnaire, unique ou moyen, à un niveau de risque et de préférences donné.

Il apparaît que l'âge moyen de rotation à l'état stationnaire décroît lorsque l'aversion au risque ou les préférences intertemporelles se renforcent. Ce résultat révèle que l'âge de ro-

tation est un levier majeur dans l'adoption de comportements de précaution en réponse au risque de tempête et aux préférences. Par ailleurs, la possibilité de répartir les prélèvements de bois entre plusieurs âges de récolte permet à l'âge moyen de rotation de répondre de manière graduelle (ou continue) à des variations des paramètres de risque et de préférences, bien que l'ensemble des âges de récolte possibles soit discret. Ces résultats constituent une extension dans un cadre à plusieurs classes d'âge des conclusions obtenues sur la base de modèles de rotation à classe d'âge unique (modèle de Faustmann).

Un deuxième résultat important est qu'en parallèle des préférences, la composante probabiliste du risque (*hazard*) a également une influence majeure sur la gestion forestière. Une analyse de statique comparative montre qu'un risque de tempête plus important entraîne un comportement plus précautionneux et par voie de conséquence un âge moyen de rotation plus faible.

L'existence d'anticipations dynamiques sur un risque de tempête dont la probabilité est à la hausse entraîne également un comportement de précaution et une baisse de l'âge de rotation. Toutefois, l'impact de ces anticipations est faible voire même négligeable lorsque les préférences sont faibles. Ce résultat vaut au moins pour la sylviculture du pin maritime (considérée dans le modèle) pour laquelle les âges de rotation sont faibles au regard des dynamiques de changement climatique.

En outre, l'effet des anticipations dépend des préférences. L'aversion au risque contribue à réduire l'âge de rotation mais très faiblement et la composante d'incertitude du changement climatique n'a pas dans ce cas d'effet additionnel par rapport à sa composante tendancielle. En revanche, il existe un effet significatif des anticipations lorsque les préférences intertemporelles sont fortes. Dans ce cas, l'effet du changement climatique est double, d'une part l'augmentation tendancielle du risque de tempête raccourcit les rotations, d'autre part l'incertitude quant au changement climatique les allonge.

Enfin, un troisième et dernier résultat important est que lorsqu'un usage alternatif des terres sans risque et offrant un rendement régulier est possible, l'allocation des terres entre la forêt et cet usage alternatif est potentiellement mixte lorsque le propriétaire terrien a des préférences. Dans ce cas, l'allocation dépend du risque et des préférences. Plus précisément,

l'aversion au risque et les préférences intertemporelles favorisent toutes deux l'allocation des terres à l'usage alternatif mais leurs effets respectifs sont clairement distincts. L'allocation des terres répond en effet de manière graduelle à l'aversion au risque alors qu'il existe un effet de seuil pour les préférences intertemporelles.

L'existence d'allocations mixtes des terres en contexte de risque détonne avec les solutions en coin obtenues en contexte déterministe. Cette diversification est un comportement de précaution qui permet de réduire l'exposition et la vulnérabilité globales du système au risque en allouant une partie des terres à l'usage alternatif non risqué, bien que le rendement (certain) de cet usage alternatif soit inférieur au rendement espéré de la forêt. Ces résultats sont une illustration de la théorie du portefeuille (voir [Markowitz \(1952\)](#)).

Cependant, dans le cas présent, la diversification de l'usage des terres n'est qu'un seul des deux leviers permettant de s'adapter au risque, l'autre étant la gestion forestière. Il est montré que ces deux leviers sont interdépendants. En particulier, il est montré dans le contexte des modèles numériques utilisés dans cette thèse, que lorsqu'il est disponible, seul le levier de l'allocation des terres est utilisé et que dans ce cas, la gestion forestière n'est pas affectée par le risque et les préférences.

De manière générale, il est montré que l'aversion au risque et les préférences intertemporelles ont des effets distincts, que ce soit sur la gestion forestière, sur la prise en compte du changement climatique ou sur l'allocation des terres. Ces résultats prouvent la pertinence des préférences récursives dans l'étude de ce type de problèmes.

Contributions et limites

Par rapport à la littérature existante, la contribution majeure de cette thèse est de considérer de manière générale la gestion d'une forêt à plusieurs classes d'âge dans un contexte de risque climatique. Les résultats proposent une caractérisation claire des équilibres stationnaires en termes de gestion forestière et d'allocation des terres, en lien avec les résultats de [Salo and Tahvonen \(2002b\)](#) et [Salo and Tahvonen \(2004\)](#) obtenus en contexte déterministe. En particulier, des résultats analytiques jusqu'alors manquants sont proposés et des

résultats numériques originaux viennent clarifier certains points, en particulier en ce qui concerne le rôle de certains déterminants tels que les préférences du producteur. L'usage généralisé des préférences récursives permet par ailleurs de caractériser les rôles distincts et conjoints de l'aversion au risque et des préférences intertemporelles.

Cependant, la portée de ces travaux est limitée à plusieurs égards. Tout d'abord, les résultats analytiques obtenus facilitent l'interprétation des résultats numériques mais ne définissent pas en général de formules analytiques tractables permettant de caractériser les états stationnaires. Il paraît néanmoins difficile de résoudre analytiquement le problème de la gestion forestière en contexte de risque dans le cas général considéré dans cette thèse. Toute la difficulté de cette approche réside dans la prise en compte des ajustements futurs que pourrait faire le producteur sur la base de l'observation des réalisations climatiques et ce, pour un horizon temporel infini.

Toutefois, dans un cadre plus restreint, des outils analytiques potentiellement tractables pourraient être utilisés. Par exemple, dans le cas où les préférences sont représentées par une espérance d'utilité et que l'utilité est une fonction quadratique (des variables d'état), le programme se ramène à un contrôle stochastique linéaire quadratique (*Linear Quadratic Stochastic Control*). Dans ce cas, la fonction de valeur est également une fonction quadratique des variables d'état dont les paramètres peuvent être déterminés grâce à l'équation de Bellman. Cependant, les fonctions d'utilité quadratiques sont un cas particulier et restreignent l'étude à des préférences pour lesquelles l'aversion absolue au risque est croissante (IARA) et dont l'existence réelle est discutable.

Une deuxième limite importante concerne cette fois le volet numérique. Elle est liée aux problèmes de dimensionnalité (*the curse of dimensionality*) rencontrés dans les modèles de programmation dynamique. Les temps de calcul liés à la résolution de ce genre de programme augmentent en effet exponentiellement en fonction de la dimension de l'ensemble des états possibles, qui dépend en l'occurrence du nombre de classes d'âge représentées.

L'existence de moyens informatiques de plus en plus puissants répond partiellement à ce problème et il existe des marges d'amélioration par rapport aux modèles présentés dans

cette thèse. Toutefois, cette marge est à l’heure actuelle réduite et ne permet pas d’envisager des modèles numériques basés, par exemple, sur un pas de temps annuel. Ainsi, il serait opportun de développer des méthodes permettant de contourner ce problème de dimensionnalité. Par exemple, une fonction de valeur obtenue grâce à un modèle de programmation dynamique pourrait être interpolée sur une partition plus fine de l’échelle des âges.

Enfin, au delà des limites méthodologiques rencontrées, une remarque de fond peut également être formulée. Les modèles utilisés dans cette thèse présupposent en effet une gestion en futaie régulière. La gestion en futaie régulière est de fait très répandue, notamment en ce qui concerne les forêts de résineux (forêt des Landes de Gascogne, Scandinavie, etc.), ce qui justifie l’usage de tels modèles. Toutefois, les résultats discutés dans la section 2.7 suggèrent qu’en présence d’aversion au risque ou de préférences intertemporelles, les états stationnaires pourraient en réalité être des futaies irrégulières. Les travaux de thèse présentés dans ce manuscrit sont donc conditionnés à l’hypothèse que la gestion en futaie régulière est économiquement pertinente.

Perspectives

En réponse à la remarque précédente, il pourrait être intéressant d’étudier la question du risque dans un modèle de gestion en futaie irrégulière ou dans un modèle où le choix entre futaie régulière et futaie irrégulière est endogène.

Un modèle de futaie irrégulière prend en compte les effets d’interaction entre les différentes classes d’âges résultant de la compétition entre les arbres pour l’accès aux ressources (lumière, eau, nutriments). Ces effets d’interaction sont modélisés à travers des matrices de transition définissant les dynamiques de croissance des différentes classes d’âge (voir [Tahvonen \(2009\)](#)). Dans ce cas de figure, les états stationnaires sont des futaies irrégulières jardinées⁵ comptant potentiellement plusieurs âges de récolte. Les récoltes sont réalisées à différents âges de sorte que les processus de renouvellement et de croissance de la futaie

5. Les futaies irrégulières sont des forêts dans lesquelles des arbres de différents âges se partagent un même espace (à l’échelle de la parcelle). Une futaie irrégulière est jardinée lorsqu’elle est gérée de manière à avoir une structure constante et à générer un revenu constant au cours du temps.

irrégulière soient optimisés.

Les résultats présentés dans la section 2.4.2 montrent que la présence de risque et de préférences (aversion au risque comme préférences intertemporelles) conduit également à des états stationnaires à plusieurs âges de récolte et ce, sans effets d'interaction. Il pourrait donc être intéressant dans un modèle de futaie irrégulière d'identifier les effets respectifs et combinés du risque et des effets d'interaction sur la structure forestière.

Cette thèse a porté exclusivement sur la détermination des états stationnaires. L'autre grand volet de la gestion forestière en présence d'un risque de perturbation concerne les dynamiques transitoires de la forêt quand celle-ci n'est pas à l'équilibre stationnaire. L'étude des dynamiques transitoires est d'autant plus pertinente que la probabilité de la perturbation est élevée et que son potentiel destructif est fort, car ainsi la forêt n'a que peu de chances d'atteindre un équilibre stationnaire.

En particulier, il serait intéressant d'étudier les dynamiques de reconstitution de la forêt et du revenu forestier à la suite d'une perturbation, et d'identifier dans ce cas le rôle de certains déterminants tels que l'aversion au risque ou les préférences intertemporelles. Les modèles numériques présentés dans cette thèse peuvent être utilisés pour déterminer ces dynamiques transitoires.

Une autre question importante concernant les dynamiques transitoires porte sur l'existence d'effets d'irréversibilité à la suite d'une perturbation. Des effets d'irréversibilité sont observés lorsque plusieurs états initiaux n'aboutissent pas au même état stationnaire, toutes choses égales par ailleurs. Ces effets d'irréversibilité existent dans un contexte déterministe (voir [Salo and Tahvonen \(2002b\)](#)) mais leur étude est d'autant plus pertinente en présence d'un risque de perturbation. L'existence de coûts fixes (sur les récoltes ou les plantations) entravant certaines transitions forestières pourraient par exemple être sources d'irréversibilité. Il est en outre très probable que les préférences jouent un rôle dans ces phénomènes.

Ensuite, tous les modèles utilisés dans cette thèse décrivent le comportement d'un unique producteur forestier (ou d'un propriétaire terrien) mais ils pourraient être utilisés dans le

perfectionnement de modèles macroéconomiques, par exemple des modèles de production à l'échelle du massif forestier. Dans ce cas, l'utilisation de l'approche microéconomique décrite dans cette thèse, au sein d'un modèle macroéconomique de programmation mathématique, nécessiterait de connaître la distribution des préférences au sein de la population de producteurs considérée. Or cette distribution est généralement inconnue. Néanmoins, ces préférences pourraient en principe être révélées grâce à des modèles économétriques structurés par notre modèle microéconomique, mais cela requerrait d'importantes données sur la gestion forestière.

De ce point de vue, les perturbations en forêt, en particulier les tempêtes, sont l'occasion de recueillir une information importante sur la gestion forestière mais aussi sur les changements d'usage des sols. D'une part, ces tempêtes sont source de variabilité dans le système forestier dont les dynamiques de production sont en temps normal très lentes. D'autre part, cela pousse les organismes en charge des statistiques forestières à recueillir davantage de données qu'à la normale. Ce fut le cas, par exemple à la suite de la tempête Klaus qui a touché le massif des Landes de Gascogne en 2009.

Par ailleurs, ce type de données peut également permettre de répondre à certaines questions qui portent plus particulièrement sur les perturbations. Ainsi, la survenue d'une perturbation peut être à l'origine de certains effets qui lui sont propres, ce qui est le cas lorsque les conséquences de la perturbation sont irréversibles, ou être simplement un accélérateur révélant une tendance de fond qui se serait produite lentement en son absence. Par exemple, l'abandon de surfaces forestières au profit d'un usage alternatif peut être dû à une tempête si la destruction de la forêt est irréversible au regard des coûts réels et d'opportunité qui incomberaient à sa reconstitution. Mais elle peut aussi être progressive par la non-replantation systématique des parcelles forestières parvenues à maturité, dans ce cas, la tempête accélère simplement le processus. La réponse à ce genre de questions est importante car elle peut conditionner certaines politiques publiques, par exemple les politiques de soutien au secteur forestier.

Enfin, de manière générale, cette thèse a abordé le problème de la gestion forestière uniquement d'un point de vue positif. Pourtant, les outils numériques développés dans ce cadre

pourraient aussi être utilisés dans un but normatif. Ils pourraient en effet aider certains acteurs publics (L'Etat, les collectivités locales) ou privés (acteurs de la filière bois, assureurs) à mieux comprendre les liens qui existent entre la mise en oeuvre de certains instruments réglementaires, fiscaux ou contractuels, et les décisions prises par les producteurs.

Annexe 1 :

Un modèle de programmation dynamique stochastique de gestion forestière

Le modèle numérique de gestion forestière utilisé dans le chapitre 1 décrit une forêt à plusieurs classes d'âge dans un contexte où le temps et par conséquent l'âge sont des espaces discrets, définis sur $\mathbb{N}^+$, et où l'état de la forêt à une date donnée est totalement décrit par des variables de surface continues. Ces variables correspondent aux surfaces allouées aux différentes classes d'âge. Il s'agit donc d'un ensemble discret de variables continues, notées $x_{a,t}$ où a est l'indice de la classe d'âge et t l'indice de la date.

Dans un contexte déterministe, le fait de pouvoir décrire l'état d'une forêt uniquement par les surfaces allouées aux différentes classes d'âge suppose d'une part que les récoltes soient réalisées par coupes franches⁶ et d'autre part qu'il n'existe pas d'effets d'interaction entre les classes d'âge en ce qui concerne la croissance biologique. Dans le cas d'une sylviculture en futaie régulière, la coupe franche est la règle et il n'y a effectivement pas d'effets d'interaction, les classes d'âge étant séparées spatialement.

Cependant, le modèle est stochastique et entre chaque pas de temps, une tempête peut survenir. Pour que la représentation de la forêt par des variables de surface tienne dans ce contexte, il faut supposer que les dégâts dus aux tempêtes sont réalisés en termes de surface. C'est-à-dire que lors d'une tempête, certaines surfaces sont complètement détruites et d'autres surfaces sont laissées complètement intactes. Dix types de tempête possibles sont introduits dans le modèle, tous respectent cette hypothèse. Ces tempêtes sont définies par leurs conséquences et leurs probabilités, qui sont présentées dans le tableau 6 :

6. Cela signifie qu'une surface forestière donnée est à une date donnée soit complètement récoltée soit laissée intacte. En revanche, il est possible de ne couper qu'une partie de la surface allouée à une classe d'âge.

Tempête	Classes d'âge détruites	Probabilité (/5 ans)
0	Aucune	0.895
1	9	0.020
2	8+9	0.018
3	7+8+9	0.016
4	6+7+8+9	0.014
5	5+6+7+8+9	0.012
6	4+5+6+7+8+9	0.009
7	3+4+5+6+7+8+9	0.007
8	2+3+4+5+6+7+8+9	0.005
9	1+2+3+4+5+6+7+8+9	0.003
10	Toutes	0.001

TABLE 6 – Les tempêtes, leurs probabilités et leurs conséquences

Les évènements sont numérotés de 0 à 10, de l'absence de tempête jusqu'à la tempête la plus destructrice. Par ailleurs, ils sont mutuellement exclusifs. Les tempêtes se distinguent par les classes d'âge qu'elles détruisent totalement et celles qu'elles laissent totalement intactes, ainsi que par leurs probabilités. Ces données sont *ad hoc* mais reflètent le fait que la vulnérabilité d'une forêt augmente avec son âge, ce qui est une propriété fondamentale du risque de tempête sur la forêt (cf. [Schelhaas et al. \(2010\)](#)). Les probabilités sont identiquement et indépendamment distribuées au cours du temps, ce qui est une hypothèse raisonnable sur le court-terme pour ce genre de risque. En outre, par simplification, il est également supposé que le bois endommagé n'a aucune valeur résiduelle et que le "nettoyage" d'une parcelle après une tempête n'engendre aucun coût.

Ainsi, l'état de la forêt à la date t dépend bien du vecteur $X_t = \{x_{a,t}\}$ des surfaces allouées à chaque classe d'âge.

La chronologie des évènements entre t et $t + 1$, telle qu'introduite dans le modèle, est représentée dans la figure 20 :

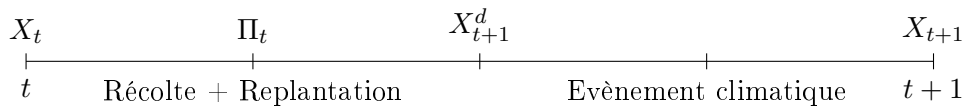


FIGURE 20 – Chronologie des évènements entre t et $t + 1$

Les récoltes et les replantations, toutes deux sans coût, sont décidées et concrétisées avant la réalisation climatique aléatoire. Les décisions prises entre t et $t + 1$ sont donc décrites par un vecteur de décision $X_{t+1}^d = \{x_{a,t+1}^d\}$ qui décrit également l'état à $t + 1$ en l'absence de tempête. Par ailleurs, cela signifie que le payoff à l'instant t , Π_t , est certain et dépend de l'état $X_t = \{x_{a,t}\}$ et des décisions $X_{t+1}^d = \{x_{a,t+1}^d\}$.

Ces définitions des variables d'état et de décision permettent de formuler l'équation de Bellman du modèle. Dans le cas des préférences récursives et lorsque les décisions futures sont supposées optimales, l'utilité récursive à une date t , U_t , est équivalente à la fonction de valeur correspondant à l'état du système à la date t , c'est-à-dire $U_t = V(X_t)$. Ainsi, l'équation de Bellman, donnée par l'équation 172, dérive très directement de la relation définissant les préférences récursives (voir équation 6) :

$$V(X_t) = \max_{X_{t+1}^d} \left((1 - \beta) \Pi(X_t, X_{t+1}^d)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta [E(V(\tilde{X}_{t+1} \mid X_{t+1}^d)^{1-\alpha})]^{\frac{\frac{\sigma-1}{\sigma}}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (172)$$

$(\tilde{X}_{t+1} \mid X_{t+1}^d)$ est la loterie sur l'état à $t + 1$ conditionnelle aux décisions X_{t+1}^d , et E l'opérateur d'espérance défini sur les probabilités des différentes tempêtes.

La fonction de payoff est connue et peut s'écrire comme suit :

$$\Pi(X_t, X_{t+1}^d) = \sum_{a=1}^9 R_a(x_{a,t} - x_{a+1,t+1}^d) + R_{10}x_{10,t} \quad (173)$$

La séquence R_a correspond au revenu tiré de la récolte d'une unité de surface d'une forêt d'âge a . Cette séquence n'a de sens que dans le cadre des hypothèses faites plus haut (coupes franches, pas d'effets d'interaction, dégâts sur les surfaces). Les données sur le revenu utilisées dans le modèle correspondent à la sylviculture en futaie régulière du pin maritime dans la forêt des Landes de Gascogne, elles sont tirées de [Couture and Reynaud \(2011\)](#) et présentées dans le tableau 7 :

Classe d'âge	Age (en années)	Valeur de la récolte en euros/ha
1	5	0
2	10	11
3	15	29
4	20	97
5	25	390
6	30	1378
7	35	2917
8	40	4083
9	45	4782
10	50	5191

TABLE 7 – Evolution de la valeur du bois en fonction de l'âge

Contrairement à la formulation analytique du problème, le nombre de classes d'âge est fini dans le modèle numérique. Cela ne pose pas de problème d'interprétation tant que les âges de rotation stationnaires sont strictement inférieurs à cinquante ans, ce qui peut être vérifié *a posteriori*. Par ailleurs, comme l'âge de Faustmann est de 40 ans pour un taux d'actualisation de 2%/an, taux utilisé dans le modèle, et que d'après la littérature le risque de perturbation a plutôt tendance à raccourcir les rotations, le problème ne devrait et ne s'est effectivement pas posé.

Tous les éléments dans l'équation de Bellman sont connus, mise à part la fonction de valeur V qui est justement à déterminer. En sus de cette équation, deux contraintes complètent le modèle. Tout d'abord, la contrainte correspondant au mécanisme de vieillissement des classes d'âge, qui est donnée par l'équation 174. Et la contrainte qui limite la surface totale de sol disponible, donnée par l'équation 175. Dans les modèles analytiques, ce total est normalisé à l'unité mais dans les modèles numériques il est de 100, ce qui n'en change pas la logique mais facilite la programmation en évitant les nombres décimaux.

Pour tout $a \geq 1$ et $t \geq 0$:

$$x_{a+1,t+1} \leq x_{a,t} \quad (174)$$

Pour tout $t \geq 0$:

$$\sum_{a=1}^{10} x_{a,t} \leq 100 \quad (175)$$

Le modèle ainsi spécifié est résolu sur la base d'un algorithme itératif sur la fonction de valeur (*Value Function Iteration Algorithm*). La structure générale de cet algorithme est décrite dans Judd (1998) qui constitue un bon ouvrage de référence en ce qui concerne les méthodes numériques utilisées en économie. La convergence de cet algorithme est assurée par le *Contraction Mapping Theorem* (cf. Judd (1998)). Cet algorithme s'applique à un modèle en temps discret et à horizon temporel infini. L'horizon temporel infini est adapté à la caractérisation des états stationnaires. En effet, en horizon fini, ceux-ci reflèteraient le biais introduit par la spécification exogène d'un état final donné.

Cet algorithme, également appelé algorithme du point fixe, permet de déterminer la fonction de valeur V et par extension de déterminer les transitions optimales d'un pas de temps à l'autre à partir de n'importe quel état initial donné. Toutefois, la caractérisation de la fonction de valeur nécessite de lui attribuer une forme fonctionnelle. Les formes polynomiales sur les variables d'état sont particulièrement adaptées car à la fois simples à estimer et flexibles (cf Judd (1998)). Dans le cas de notre modèle, un polynôme de degré 3 est choisi, ainsi la fonction de valeur s'écrit comme suit :

$$V(X_t) = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=i}^{10} \sum_{k=j}^{10} \alpha_{i,j,k} \cdot x_{i,t} \cdot x_{j,t} \cdot x_{k,t} + \sum_{l=1}^{10} \sum_{m=l}^{10} \alpha_{l,m} \cdot x_{l,t} \cdot x_{m,t} + \sum_{n=1}^{10} \alpha_n \cdot x_{n,t} \quad (176)$$

Les paramètres $\alpha_{i,j,k}$, $\alpha_{l,m}$ et α_n deviennent ainsi les grandeurs à estimer.

L'ensemble des états possibles du système considéré peut être un espace discret ou continu. Cependant, dans le cas continu, l'algorithme est résolu sur la base d'une approximation discrète de cet espace. Les variables $x_{a,t}$ de notre modèle étant continues, une grille discrète d'états possibles $\mathbb{D}$ est ainsi utilisée comme approximation. Cette grille comporte 1316 états et un extrait en est donné dans le script 2 ci-après. Ce nombre a été choisi car il permet une approximation satisfaisante de l'espace continu des états (ceci étant jugé *a posteriori* sur la base des résultats générés par le modèle) et est raisonnable du point de vue de la tractabilité.

L'algorithme se décompose en quatre étapes :

1. Des valeurs initiales sont choisies pour les paramètres α de la fonction de valeur. En l'absence d'"intuition" sur les valeurs de ces paramètres, des valeurs nulles sont choisies par défaut. La fonction de valeur ainsi définie est notée V^0 .

Les étapes 2. et 3. définissent le processus itératif à proprement parler :

2. Pour chaque état initial X_t de la grille $\mathbb{D}$, on pose :

$$V^{i+1}(X_t) = \max_{X_{t+1}^d} \left((1 - \beta) \Pi(X_t, X_{t+1}^d)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta [E(V^i(\tilde{X}_{t+1} | X_{t+1}^d)^{1-\alpha})]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (177)$$

Sur la base de la fonction V^i ($= V^0$ lors de la première itération), l'optimisation du membre de droite de l'équation 177 sous les contraintes 174 et 175, permet de déterminer V^{i+1} pour chaque $X_t \in \mathbb{D}$.

Ensuite, les paramètres $\alpha_{i,j,k}$, $\alpha_{l,m}$ et α_n sont réestimés par régression linéaire des valeurs de V^{i+1} sur la forme polynomiale donnée par l'équation 176.

3. La boucle se termine lorsque la fonction de valeur a convergé, c'est-à-dire que pour un seuil exogène ϵ donné (décidé par le modélisateur), on a $\| V^{i+1} - V^i \| \leq \epsilon$. Si l'algorithme a convergé, alors l'étape 4. est exécutée, sinon la nouvelle fonction de valeur se substitue à l'ancienne, c'est-à-dire $V^i = V^{i+1}$ et l'étape 3. est de nouveau exécutée.

Cependant, vu que notre modèle et ses différentes extensions sont exécutés de nombreuses fois avec des valeurs différentes pour les paramètres exogènes, le choix a été fait de définir un nombre d'itérations constant (30 en l'occurrence) plutôt que de se baser sur un seuil ϵ . Ces 30 itérations permettent une convergence satisfaisante, vérifiable *a posteriori*, pour un temps d'exécution raisonnable et constant.

4. La fonction de valeur V^* étant connue, les décisions optimales X_{t+1}^d sont les solutions du terme de droite de l'équation de Bellman (toujours sous les contraintes 174 et 175) :

$$\max_{X_{t+1}^d} \left((1 - \beta) \Pi(X_t, X_{t+1}^d)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta [E(V^*(\tilde{X}_{t+1} | X_{t+1}^d)^{1-\alpha})]^{\frac{\sigma-1}{1-\alpha}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (178)$$

Les décisions optimales peuvent être déterminées à partir de n'importe quel état initial X_t pris dans l'espace continu décrivant l'état de la forêt (et pas seulement

dans la grille $\mathbb{D}$). En l'absence de tempête, les décisions correspondent à l'état de la forêt à $t + 1$, c'est-à-dire que $X_{t+1} = X_{t+1}^d$. Ainsi, une séquence optimale de décisions peut être reconstituée à partir de n'importe quel état initial. Et si cette séquence est suffisamment longue (100 intervalles dans le modèle), l'équilibre stationnaire de long-terme est atteint.

Cet algorithme est programmé dans le langage GAMS et le script correspondant est présenté ci-après. Les scripts GAMS sont exécutés en parallèle sur un serveur récent (sous UNIX), ce qui permet un gain de temps considérable par rapport aux capacités d'un ordinateur personnel. Toutefois, le nombre de scripts pouvant être exécutés simultanément et à une vitesse satisfaisante est limité (une dizaine environ) même sur ce type de serveur.

Script 1 : Script GAMS de résolution du modèle dynamique stochastique

NB : Pour des raisons d'espace, le script présenté dans cette section a été abrégé à certains endroits.

**** Définition des sets

* Numérotation de l'ensemble des états discrets de la grille D

SET REFS/0*1315/;

ALIAS (REFS,REFS2);

* Indice de classe d'âge (0=5 ans, 1=10 ans, ...)

SET AGE/0*9/;

ALIAS (AGE,AGE2,AGE3);

* Ensembles de définition des variables d'état à l'état initial

SET

For0/0*100/

For1/0*100/

For2/0*100/

For3/0*100/

For4/0*100/

For5/0*100/

For6/0*100/

For7/0*100/

For8/0*100/

For9/0*100/

;

* Indice correspondant aux différents types de tempête

SET IMPACT/0*10/;

**** Déclaration et initialisation des paramètres

```

* Nombre d'itérations de l'algorithme
PARAMETER NB_LOOPS/30/;

** Paramètres de préférences

*Paramètre d'aversion au risque
PARAMETER Alpha;

* La valeur est chargée depuis un script shell utilisé pour lancer
* en parallèle plusieurs scripts GAMS
Alpha=%alpha%;

*Paramètre de préférences intertemporelles
PARAMETER Sigma;

* Idem
Sigma=%sigma%;

** Paramètres physiques et économiques

* Surface totale disponible (en ha)
PARAMETER Total_Land/100/;

* Revenus par ha en fonction de l'âge (0=5 ans, 1=10 ans, ...)
PARAMETER Wood_Revenues(AGE)
/
0  0
1  11
2  29
3  97
4  390
5  1378
6  2917
7  4083

```

8 4782

9 5191

/;

* Facteur d'actualisation (calculé sur 5 ans pour

* un taux d'actualisation de 2%/an)

PARAMETER Beta/0.903920797/;

** Probabilités et dégâts des différentes tempêtes

* Probabilité d'occurrence des tempêtes (pour une tranche de 5 ans)

PARAMETER P(IMPACT);

P('1')=0.001;

P('2')=0.003;

P('3')=0.005;

P('4')=0.007;

P('5')=0.009;

P('6')=0.012;

P('7')=0.014;

P('8')=0.016;

P('9')=0.018;

P('10')=0.020;

* Probabilité de non-occurrence de tempête

P('0')=1-P('1')-P('2')-P('3')-P('4')-P('5')-P('6')-P('7')-P('8')
-P('9')-P('10');

* Conséquences des tempêtes sur les différentes classes d'âge

* 0=aucun impact, 1=destruction totale

* Echelle 0-9=classes d'âge, Echelle 0-10=tempêtes

TABLE DESTRUCTION(AGE,IMPACT)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
4	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
5	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
6	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
7	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
8	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
9	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

;

** Paramètres de modélisation

* Paramètres de la forme polynomiale de la fonction de valeur

PARAMETER

Alpha_For (AGE)

Alpha_For_For (AGE, AGE2)

Alpha_For_For_For (AGE, AGE2, AGE3)

;

* Initialisation à 0

Alpha_For (AGE)=0

Alpha_For_For (AGE, AGE2)=0;

Alpha_For_For_For (AGE, AGE2, AGE3)=0;

* Surfaces allouées aux différentes classes d'âge à l'état initial

* Ce paramètre parcourt les 1316 états initiaux définis dans D.

PARAMETER

For_Land_Init (AGE)

;

* Chargement du script 2 donnant les 1316 états de l'ensemble D

\$include States_Ref.gms

* Paramètre de stockage de la valeur de V pour les 1316 états

```

* initiaux possibles
PARAMETER
Value_Function_Model (REFS)
;

*Paramètre de stockage des décisions optimales pour les
* 1316 états initiaux possibles
PARAMETER
Results_For_Land (REFS, AGE, IMPACT)
Results_Income (REFS)
Residu
;

**** Définition du programme d'optimisation à deux périodes basé
* sur l'équation de Bellman (Voir étape 2 de l'algorithme)

** Définition des variables

* Variable objectif
VARIABLES
Obj_Var;

* Les variables For_Land_Var (AGE, IMPACT) correspondent aux
* décisions  $X^d(t+1)$ .

* Income_For_Var est le payoff, il dépend
* des décisions For_Land_Var (AGE, IMPACT)
* et de l'état initial For_Land_Init (AGE).

* Value_Function (IMPACT) est la fonction de valeur à t+1,
* elle dépend des décisions For_Land_Var (AGE, IMPACT) et
* d'un opérateur d'espérance correspondant
* au risque de tempête
POSITIVE VARIABLES
For_Land_Var (AGE, IMPACT)

```

```

Income_For_Var
Value_Function(IMPACT)
;

* Définition des équations
EQUATIONS
OBJ_EQU
INCOME_FOR_EQU
VALUE_FUNCTION_EQU(IMPACT)
FOREST_DYNAMICS(AGE)
FOREST_IMPACT(AGE,IMPACT)
LAND_BALANCE(IMPACT)
;

* Terme de droite de l'équation de Bellman
OBJ_EQU..
Obj_Var=E=
( (1-Beta)*(Income_For_Var
* Pour éviter les valeurs nulles interdites
+0.0000000001
)**(((Sigma-1)/Sigma))
+ Beta *(
SUM(IMPACT,P(IMPACT)*(0000000001+Value_Function(IMPACT))**(1-Alpha))
)**(((Sigma-1)/Sigma)/(1-Alpha))
)**(Sigma/(Sigma-1)));

* Fonction de payoff
INCOME_FOR_EQU..
Income_For_Var=E=(SUM(AGE$(AGE.val<9),
(For_Land_Init(AGE)-For_Land_Var(AGE+1,'0'))*Wood_Revenues(AGE))
+(For_Land_Init('9'))*Wood_Revenues('9'));

* Fonction de valeur, définie par sa forme polynomiale
VALUE_FUNCTION_EQU(IMPACT)..
Value_Function(IMPACT)=E=SUM(AGE,Alpha_For(AGE)

```

```

*For_Land_Var (AGE, IMPACT) )

+SUM( (AGE,AGE2) $(AGE2.val ge AGE.val),
Alpha_For_For (AGE,AGE2) *For_Land_Var (AGE, IMPACT)
*For_Land_Var (AGE2, IMPACT) )

+SUM( (AGE,AGE2,AGE3) $( (AGE3.val ge AGE2.val)
AND (AGE2.val ge AGE.val)),
Alpha_For_For_For (AGE,AGE2,AGE3) *For_Land_Var (AGE, IMPACT)
*For_Land_Var (AGE2, IMPACT) *For_Land_Var (AGE3, IMPACT) ) ;

* Contrainte de vieillissement sur les classes d'âge
FOREST_DYNAMICS (AGE) $(AGE.val<9) ..
For_Land_Var (AGE+1, '0') =L=For_Land_Init (AGE);

* A partir des décisions, calculs des variables réalisées à t+1
* conditionnellement aux différentes tempêtes
FOREST_IMPACT (AGE, IMPACT) $(IMPACT.val>0) ..
For_Land_Var (AGE, IMPACT) =E=For_Land_Var (AGE, '0')
*(1-DESTRUCTION (AGE, IMPACT) ) ;

* Contrainte sur la surface totale disponible
LAND_BALANCE (IMPACT) ..
SUM (AGE, For_Land_Var (AGE, IMPACT) ) =L=Total_Land;

** Définition du modèle

MODEL CONTINUOUS_MODEL
/
OBJ_EQU
INCOME_FOR_EQU
VALUE_FUNCTION_EQU
FOREST_DYNAMICS
FOREST_IMPACT

```

LAND_BALANCE

/;

**** Définition de la régression des valeurs de $V^{(i+1)}$

* sur la forme polynomiale

* (deuxième partie de l'étape 2 de l'algorithme)

* Définition des variables dont les paramètres alpha du polynôme

VARIABLES

Obj_Regress_Var

Value_Regress_Calc(REFS)

Alpha_For_Var(AGE)

Alpha_For_For_Var(AGE, AGE2)

Alpha_For_For_For_Var(AGE, AGE2, AGE3)

;

EQUATIONS

Obj_Regress_Equ

Value_Regress_Equ(REFS)

;

* La fonction objectif est la somme du carré des erreurs

* entre les valeurs $V^{(i+1)}$ précédemment déterminées et les

* valeurs calculées à partir du polynôme

* Les valeurs d'alpha sont choisies afin de minimiser cette somme.

Obj_Regress_Equ..

Obj_Regress_Var=E=(sqrt(SUM(REFS,

(Value_Function_Model(REFS)-Value_Regress_Calc(REFS))

*(Value_Function_Model(REFS)-Value_Regress_Calc(REFS)))));

* Cette équation donne les valeurs de la fonction de valeur telles

* que calculées à partir de la formule polynomiale.

* La version de cette équation présentée ci-dessous a été abrégée

```

Value_Regress_Equ (REFS) ..
Value_Regress_Calc (REFS) =E=

SUM ( (For0,For1,For2,For3,For4,For5,For6,For7,For8,For9)
$MAP_REFS (REFS,For0,For1,For2,For3,For4,For5,For6,For7,For8,For9) ,

Alpha_For_Var ('0') *For0.val
*...
+Alpha_For_Var ('9') *For9.val

+ Alpha_For_For_Var ('0','0') *For0.val*For0.val
+ Alpha_For_For_Var ('0','1') *For0.val*For1.val
*...
+ Alpha_For_For_Var ('1','1') *For1.val*For1.val
*...
+ Alpha_For_For_Var ('9','9') *For9.val*For9.val

+ Alpha_For_For_For_Var ('0','0','0') *For0.val*For0.val*For0.val
+ Alpha_For_For_For_Var ('0','0','1') *For0.val*For0.val*For1.val
*...
+ Alpha_For_For_For_Var ('0','1','1') *For0.val*For1.val*For1.val
*...
+ Alpha_For_For_For_Var ('9','9','9') *For9.val*For9.val*For9.val);

* Définition du modèle
MODEL Regression/
Obj_Regress_Equ
Value_Regress_Equ
/;

**** Exécution des itérations

* Compteur d'itérations
SCALAR ITERATION/0/;

```

```

* Test si le nombre d'itération est < 30
WHILE(ITERATION<NB_LOOPS,

* Boucle sur les différentes états initiaux possibles définis
* dans D
        LOOP(REFS,

* Les états initiaux définis dans States_Ref.gms sont chargés
* dans le paramètre For_Land_Init
For_Land_Init('0')=SUM((For0,For1,For2,For3,For4,For5,For6,
                        For7,For8,For9)
$MAP_REFS(REFS,For0,For1,For2,For3,For4,For5,For6,
                        For7,For8,For9),For0.val);

For_Land_Init('1')=SUM((For0,For1,For2,For3,For4,For5,For6,
                        For7,For8,For9)
$MAP_REFS(REFS,For0,For1,For2,For3,For4,For5,For6,
                        For7,For8,For9),For1.val);

*...

For_Land_Init('9')=SUM((For0,For1,For2,For3,For4,For5,For6,
                        For7,For8,For9)
$MAP_REFS(REFS,For0,For1,For2,For3,For4,For5,For6,
                        For7,For8,For9),For9.val);

* Le modèle d'optimisation est résolu
SOLVE CONTINUOUS_MODEL using NLP maximizing Obj_Var;

* Les résultats sont stockés (non indispensable, pour info)
Results_For_Land(REFS,AGE,IMPACT)=For_Land_Var.L(AGE,IMPACT);
Results_Income(REFS)=Income_For_Var.L;
Value_Function_Model(REFS)=Obj_Var.L;

);

```

```

* Les nouvelles valeurs  $V^{i+1}$  sont connues donc la régression
* sur la forme polynomiale est exécutée
SOLVE Regression using NLP minimizing Obj_Regress_Var;

* Les nouvelles valeurs des paramètres alpha se substituent
* aux anciennes. ( $V^i = V^{i+1}$ )
Alpha_For(AGE)=Alpha_For_Var.L(AGE);
Alpha_For_For(AGE,AGE2)=Alpha_For_For_Var.L(AGE,AGE2);
Alpha_For_For_For(AGE,AGE2,AGE3)
    =Alpha_For_For_For_Var.L(AGE,AGE2,AGE3);

* Stockage de la valeur de la somme des carrées des erreurs
* (pour contrôle ex post)
Residu=Obj_Regress_Var.L;

* Une itération est ajoutée au compteur
ITERATION=ITERATION+1;

);

* La fonction V est connue, il reste à reconstituer une séquence
* optimale de 100 transitions

* Sets et paramètres servant à décrire les résultats
SET Item_Results /Sav,Forest,Cons,Obj/;
SET TIME /0*99/;

PARAMETER
Compile2(Item_Results,TIME)
Compile3(Item_Results,TIME,AGE)
;

* L'état initial importe peu mais en choisissant la forêt
* normale de Faustmann, on peut supposer que la convergence
* sera plus rapide.

```

* (tout du moins pour des niveaux de préférences peu exigeants)

For_Land_Init('0')=14.2;

For_Land_Init('1')=14.2;

For_Land_Init('2')=14.2;

For_Land_Init('3')=14.2;

For_Land_Init('4')=14.2;

For_Land_Init('5')=14.2;

For_Land_Init('6')=14.2;

For_Land_Init('7')=0;

For_Land_Init('8')=0;

For_Land_Init('9')=0;

* Détermination de la première transition

SOLVE CONTINUOUS_MODEL using NLP maximizing Obj_Var;

* Chargement des résultats

Compile3('Forest','1',AGE)=For_Land_Var.L(AGE,'0');

Compile2('Cons','1')=Income_For_Var.L;

Compile2('Obj','1')=Obj_Var.L;

* Détermination des 99 autres transitions

LOOP(TIME\$(TIME.val ge 1),

For_Land_Init('0')=Compile3('Forest',TIME,'0');

For_Land_Init('1')=Compile3('Forest',TIME,'1');

For_Land_Init('2')=Compile3('Forest',TIME,'2');

For_Land_Init('3')=Compile3('Forest',TIME,'3');

For_Land_Init('4')=Compile3('Forest',TIME,'4');

For_Land_Init('5')=Compile3('Forest',TIME,'5');

For_Land_Init('6')=Compile3('Forest',TIME,'6');

For_Land_Init('7')=Compile3('Forest',TIME,'7');

For_Land_Init('8')=Compile3('Forest',TIME,'8');

For_Land_Init('9')=Compile3('Forest',TIME,'9');

```

SOLVE CONTINUOUS_MODEL using NLP maximizing Obj_Var;

Compile3('Forest',TIME+1,AGE)=For_Land_Var.L(AGE,'0');
Compile2('Cons',TIME+1)=Income_For_Var.L;
Compile2('Obj',TIME+1)=Obj_Var.L;

);

* Affichage des résultats
DISPLAY Compile2,Compile3,Value_Function_Model;

* Dans la pratique, les résultats sont sauvegardés
* dans un fichier.gdx

```


Script 2 : Ensemble $\mathbb{D}$ des états discrets de la forêt

NB : Ce script est généré en distribuant entre les différentes classes d'âge des surfaces par lots de 10, 50 ou 100 unités, le total distribué devant atteindre 100 exactement.

```
SET MAP_REFS (REFS, For0, For1, For2, For3, For4, For5, For6, For7, For8, For9)
/
0.      0.0.0.0.0.0.0.0.0.0.100
1.      0.0.0.0.0.0.0.0.0.50.50
2.      0.0.0.0.0.0.0.0.0.100.0
3.      0.0.0.0.0.0.0.0.50.0.50
4.      0.0.0.0.0.0.0.0.50.50.0
5.      0.0.0.0.0.0.0.0.100.0.0
6.      0.0.0.0.0.0.0.50.0.0.50
7.      0.0.0.0.0.0.0.50.0.50.0

*...

500.    0.50.0.10.0.10.10.10.10.0
501.    0.50.0.10.10.0.0.10.10.10
502.    0.50.0.10.10.0.10.0.10.10
503.    0.50.0.10.10.0.10.10.0.10
504.    0.50.0.10.10.0.10.10.10.0
505.    0.50.0.10.10.10.0.0.10.10
506.    0.50.0.10.10.10.0.10.0.10
507.    0.50.0.10.10.10.0.10.10.0

*...

1308.   50.10.10.10.0.10.10.0.0.0
1309.   50.10.10.10.10.0.0.0.0.10
1310.   50.10.10.10.10.0.0.0.10.0
1311.   50.10.10.10.10.0.0.10.0.0
1312.   50.10.10.10.10.0.10.0.0.0
```

```
1313. 50.10.10.10.10.10.0.0.0.0
1314. 50.50.0.0.0.0.0.0.0.0
1315. 100.0.0.0.0.0.0.0.0.0
/;
```

Références

- Adams, D. M. and Ek, A. R. (1974). Optimizing the management of uneven-aged forest stands. *Canadian Journal of Forest Research*, 4(3) :274–287.
- Alvarez, L. H. and Koskela, E. (2005). Wicksellian theory of forest rotation under interest rate variability. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29(3) :529–545.
- Alvarez, L. H. and Koskela, E. (2006). Does risk aversion accelerate optimal forest rotation under uncertainty? *Journal of Forest Economics*, 12(3) :171–184.
- Amacher, G. S., Ollikainen, M., Koskela, E., et al. (2009). *Economics of forest resources*. Mit Press Cambridge.
- Bell, K. P., Boyle, K. J., and Rubin, J. (2006). *Economics of rural land-use change*. Ashgate Publishing, Ltd.
- Bellman, R. (1957). *E. 1957. dynamic programming*.
- Berck, P. (1981). Optimal management of renewable resources with growing demand and stock externalities. *Journal of Environmental Economics and Management*, 8(2) :105–117.
- Brokate, M. (1985). Pontryagin’s principle for control problems in age-dependent population dynamics. *Journal of Mathematical Biology*, 23(1) :75–101.
- Brunette, M., Couture, S., et al. (2013). Risk management behaviour of a forest owner to address growth risk. *Agricultural and Resource Economics Review*, 42(2) :349–364.
- Brunette, M., Couture, S., and Laye, J. (2015). Optimising forest management under storm risk with a markov decision process model. *Journal of Environmental Economics and Policy*, 4(2) :141–163.
- Brunette, M., Dragicevic, A., Lenglet, J., Niedzwiedz, A., Badeau, V., and Dupouey, J.-L. (2014). Portfolio management of mixed-species forests. Technical report, Laboratoire d’Economie Forestiere, AgroParisTech-INRA.
- Caulfield, J. P. (1988). A stochastic efficiency approach for determining the economic rotation of a forest stand. *Forest Science*, 34(2) :441–457.

- Caurla, S., Garcia, S., and Niedzwiedz, A. (2015). Store or export ? an economic evaluation of financial compensation to forest sector after windstorm. the case of hurricane klaus. *Forest Policy and Economics*, 61 :30–38.
- Chew, S. H. and Epstein, L. G. (1989). The structure of preferences and attitudes towards the timing of the resolution of uncertainty. *International Economic Review*, pages 103–117.
- Chow, G. C. (1997). *Dynamic economics : optimization by the Lagrange method*. Oxford University Press.
- Clarke, H. R. and Reed, W. J. (1989a). The tree-cutting problem in a stochastic environment : the case of age-dependent growth. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 13(4) :569–595.
- Clarke, H. R. and Reed, W. J. (1989b). The tree-cutting problem in a stochastic environment : the case of age-dependent growth. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 13(4) :569–595.
- Couture, S. and Reynaud, A. (2008). Multi-stand forest management under a climatic risk : do time and risk preferences matter ? *Environmental Modeling & Assessment*, 13(2) :181–193.
- Couture, S. and Reynaud, A. (2011). Forest management under fire risk when forest carbon sequestration has value. *Ecological Economics*, 70(11) :2002 – 2011. Special Section - Earth System Governance : Accountability and Legitimacy.
- de Liocourt, F. D. (1898). De l’aménagement des sapinières. *Bull. Soc. Franche-Comté et Belfort*, pages 396–409.
- Dixit, A. K. and Pindyck, R. (1994). *Investment under uncertainty*. Princeton university press.
- Englin, J., Boxall, P., and Hauer, G. (2000). An empirical examination of optimal rotations in a multiple-use forest in the presence of fire risk. *Journal of agricultural and resource economics*, pages 14–27.
- Epstein, L. G. and Zin, S. E. (1989). Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns : A theoretical framework. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 937–969.

- Epstein, L. G. and Zin, S. E. (1991). Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns : An empirical analysis. *Journal of Political Economy*, pages 263–286.
- Faustmann, M. (1849). Berechnung des wertes welchen waldboden sowie noch nicht haubare holzbestände für die waldwirtschaft besitzen. *Allgemeine Forst-und Jagd-Zeitung*, 15(1849) :7–44.
- Getz, W. M. and Haight, R. G. (1989). *Population harvesting : demographic models of fish, forest, and animal resources*, volume 27. Princeton University Press.
- Gong, P. (1998). Risk preferences and adaptive harvest policies for even-aged stand management. *Forest Science*, 44(4) :496–506.
- Haight, R. G. (1987). Evaluating the efficiency of even-aged and uneven-aged stand management. *Forest science*, 33(1) :116–134.
- Haight, R. G., Smith, W. D., and Straka, T. J. (1995). Hurricanes and the economics of loblolly pine plantations. *Forest Science*, 41(4) :675–688.
- Hartman, R. (1976). The harvesting decision when a standing forest has value. *Economic inquiry*, 14(1) :52–58.
- Heaps, T. (1984). The forestry maximum principle. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 7(2) :131–151.
- Heaps, T. (2015). Convergence of optimal harvesting policies to a normal forest. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 54 :74–85.
- Hritonenko, N. and Yatsenko, Y. (2007). The structure of optimal time-and age-dependent harvesting in the lotka–mckendrik population model. *Mathematical biosciences*, 208(1) :48–62.
- Hyytiäinen, K. and Penttinen, M. (2008). Applying portfolio optimisation to the harvesting decisions of non-industrial private forest owners. *Forest Policy and Economics*, 10(3) :151–160.
- Jacobsen, J. B. and Thorsen, B. J. (2003). A danish example of optimal thinning strategies in mixed-species forest under changing growth conditions caused by climate change. *Forest Ecology and Management*, 180(1) :375–388.

- Judd, K. L. (1998). *Numerical methods in economics*. MIT press.
- Kemp, M. C. and Moore, E. J. (1979). Biological capital theory : a question and a conjecture. *Economics Letters*, 4(2) :141–144.
- Koopmans, T. C. (1960). Stationary ordinal utility and impatience. *Econometrica*, pages 287–309.
- Koskela, E. (1989a). Forest taxation and timber supply under price uncertainty : credit rationing in capital markets. *Forest Science*, 35(1) :160–172.
- Koskela, E. (1989b). Forest taxation and timber supply under price uncertainty : Perfect capital markets. *Forest Science*, 35(1) :137–159.
- Koskela, E. and Ollikainen, M. (1997). Optimal design of forest taxation with multiple-use characteristics of forest stands. *Environmental and Resource Economics*, 10(1) :41–62.
- Koskela, E. and Ollikainen, M. (1999). Timber supply, amenity values and biological risk. *Journal of Forest Economics (Sweden)*.
- Kreps, D. M. and Porteus, E. L. (1978). Temporal resolution of uncertainty and dynamic choice theory. *Econometrica : journal of the Econometric Society*, pages 185–200.
- Kreps, D. M. and Porteus, E. L. (1979). Temporal von neumann-morgenstern and induced preferences. *Journal of Economic Theory*, 20(1) :81–109.
- Lembersky, M. R. and Johnson, K. N. (1975). Optimal policies for managed stands : an infinite horizon markov decision process approach. *Forest Science*, 21(2) :109–122.
- Leonard, D. and Van Long, N. (1992). *Optimal control theory and static optimization in economics*. Cambridge University Press.
- Lesgourgues, Y. (2012). Programme climaq : Rapport final. Technical report.
- Lucas, R. E. (1972). Expectations and the neutrality of money. *Journal of economic theory*, 4(2) :103–124.
- Lyon, K. S. and Sedjo, R. A. (1983). An optimal control theory model to estimate the regional long-term supply of timber. *Forest Science*, 29(4) :798–812.
- Lyon, K. S. and Sedjo, R. A. (1986). Binary-search spoc : an optimal control theory version of echo. *Forest science*, 32(3) :576–584.

- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection*. *The journal of finance*, 7(1) :77–91.
- Mas-Colell, A., Whinston, M. D., Green, J. R., et al. (1995). *Microeconomic theory*, volume 1. Oxford university press New York.
- Mitra, T. and Wan, H. Y. (1985). Some theoretical results on the economics of forestry. *The Review of Economic Studies*, 52(2) :263–282.
- Mitra, T. and Wan, H. Y. (1986). On the faustmann solution to the forest management problem. *Journal of Economic Theory*, 40(2) :229–249.
- Muth, J. F. (1961). Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 315–335.
- Nerlove, M. (1958). Adaptive expectations and cobweb phenomena. *The Quarterly Journal of Economics*, 72(2) :227–240.
- Ohlin, B. (1921). Till frågan om skogarnas omloppstid. *Ekonomisk Tidskrift*, 23(12) :89–113.
- Parks, P. J. (1995). Explaining" irrational" land use : risk aversion and marginal agricultural land. *Journal of Environmental Economics and Management*, 28(1) :34–47.
- Parks, P. J. and Kramer, R. A. (1995). A policy simulation of the wetlands reserve program. *Journal of Environmental Economics and Management*, 28(2) :223–240.
- Peltola, J. and Knapp, K. C. (2001). Recursive preferences in forest management. *Forest Science*, 47(4) :455–465.
- Piazza, A. and Pagnoncelli, B. K. (2015). The stochastic mitra–wan forestry model : risk neutral and risk averse cases. *Journal of Economics*, 115(2) :175–194.
- Plantinga, A. J. (1996). The effect of agricultural policies on land use and environmental quality. *American Journal of Agricultural Economics*, 78(4) :1082–1091.
- Plantinga, A. J. and Miller, D. J. (1997). Maximum entropy estimation of land use shares and transitions. *Technical Bulletin*, 166.
- Pressler, M. R. (1860). Aus der holzzuwachslehre. *Allgemeine Forst und Jagd Zeitung*.
- Reed, W. J. (1984). The effects of the risk of fire on the optimal rotation of a forest. *Journal of Environmental Economics and Management*, 11(2) :180–190.

- Reed, W. J. and Clarke, H. R. (1990). Harvest decisions and asset valuation for biological resources exhibiting size-dependent stochastic growth. *International Economic Review*, pages 147–169.
- Ricardo, D. (1891). *Principles of political economy and taxation*. G. Bell and sons.
- Salo, S. and Tahvonen, O. (2002a). On equilibrium cycles and normal forests in optimal harvesting of tree vintages. *Journal of Environmental Economics and Management*, 44(1) :1–22.
- Salo, S. and Tahvonen, O. (2002b). On the optimality of a normal forest with multiple land classes. *Forest Science*, 48(3) :530–542.
- Salo, S. and Tahvonen, O. (2003). On the economics of forest vintages. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27(8) :1411–1435.
- Salo, S. and Tahvonen, O. (2004). Renewable resources with endogenous age classes and allocation of land. *American Journal of Agricultural Economics*, 86(2) :513–530.
- Schaefer, M. B. (1954). Some aspects of the dynamics of populations important to the management of the commercial marine fisheries. *Inter-American Tropical Tuna Commission Bulletin*, 1(2) :23–56.
- Schelhaas, M.-J., Hengeveld, G., Moriondo, M., Reinds, G. J., Kundzewicz, Z. W., Ter Maat, H., and Bindi, M. (2010). Assessing risk and adaptation options to fires and windstorms in european forestry. *Mitigation and Adaptation Strategies for Global Change*, 15(7) :681–701.
- Schelhaas, M.-J., Nabuurs, G.-J., and Schuck, A. (2003). Natural disturbances in the european forests in the 19th and 20th centuries. *Global Change Biology*, 9(11) :1620–1633.
- Sedjo, R. and Lyon, K. (1990). The long-term adequacy of timber supply. *Washington : Resources for the Future*, pages 180–186.
- Spence, M. and Zeckhauser, R. (1972). The effect of the timing of consumption decisions and the resolution of lotteries on the choice of lotteries. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 401–403.
- Spring, D. A., Kennedy, J., Lindenmayer, D. B., McCarthy, M. A., and Mac Nally, R.

- (2008). Optimal management of a flammable multi-stand forest for timber production and maintenance of nesting sites for wildlife. *Forest Ecology and Management*, 255(11) :3857–3865.
- Stainback, G. A. and Lavalapati, J. R. (2004). Modeling catastrophic risk in economic analysis of forest carbon sequestration. *Natural Resource Modeling*, 17(3) :299–317.
- Stavins, R. N. and Jaffe, A. B. (1990). Unintended impacts of public investments on private decisions : the depletion of forested wetlands. *American Economic Review*, 80(3) :337–52.
- Tahvonen, O. (2009). Optimal choice between even-and uneven-aged forestry. *Natural resource modeling*, 22(2) :289–321.
- Tahvonen, O. (2011). Optimal structure and development of uneven-aged norway spruce forests. *Canadian Journal of Forest Research*, 41(12) :2389–2402.
- Tahvonen, O. (2015). Economics of naturally regenerating, heterogeneous forests. *Economics*, 2(2).
- Tahvonen, O. (2016). Economics of rotation and thinning revisited : the optimality of clearcuts versus continuous cover forestry. *Forest Policy and Economics*, 62 :88–94.
- Tahvonen, O. and Kallio, M. (2006). Optimal harvesting of forest age classes under price uncertainty and risk aversion. *Natural Resource Modeling*, 19(4) :557–585.
- Tahvonen, O. and Salo, S. (1999). Optimal forest rotation with in situ preferences. *Journal of Environmental Economics and Management*, 37(1) :106–128.
- Tahvonen, O., Salo, S., and Kuuluvainen, J. (2001). Optimal forest rotation and land values under a borrowing constraint. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25(10) :1595–1627.
- Thomson, T. A. (1992). Optimal forest rotation when stumpage prices follow a diffusion process. *Land Economics*, pages 329–342.
- Valsta, L. T. (1992). A scenario approach to stochastic anticipatory optimization in stand management. *Forest Science*, 38(2) :430–447.
- Wan Jr, H. (1994). Revisiting the mitra-wan tree farm. *International Economic Review*, pages 193–198.

- Washburn, C. L. and Binkley, C. S. (1990). Informational efficiency of markets for stumpage. *American Journal of Agricultural Economics*, 72(2) :394–405.
- Willassen, Y. (1998). The stochastic rotation problem : A generalization of faustmann’s formula to stochastic forest growth. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22(4) :573–596.
- Yousefpour, R., Jacobsen, J. B., Thorsen, B. J., Meilby, H., Hanewinkel, M., and Oehler, K. (2012). A review of decision-making approaches to handle uncertainty and risk in adaptive forest management under climate change. *Annals of forest science*, 69(1) :1–15.

Titre : Gestion en futaie régulière d'une forêt à plusieurs classes d'âge et allocation des terres en présence d'un risque de tempête : caractérisation des états stationnaires et rôle des préférences

Mots clefs : Gestion forestière, Risque de tempête, Allocation des terres, Préférences récursives

Résumé : Le risque de tempête a un impact fort sur la gestion forestière, de manière directe à travers les dégâts qu'une tempête peut occasionner, et de manière indirecte à travers les comportements de précaution qu'il induit chez les producteurs forestiers.

Cette thèse aborde le problème de la gestion en futaie régulière d'une forêt à plusieurs classes d'âge en présence d'un risque de tempête et quand le producteur a des préférences récursives. Au contraire de l'espérance d'utilité, les préférences récursives permettent de distinguer aversion au risque et préférences intertemporelles. Une approche analytique originale basée sur les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, ainsi qu'une approche numérique de programmation dynamique stochastique sont utilisées afin de caractériser les différents états stationnaires possibles et de clarifier le rôle de différents déterminants, en particulier les préférences. L'analyse

est par ailleurs étendue aux problèmes de l'allocation des terres et du changement climatique.

Les résultats montrent que le risque de tempête associé aux préférences pousse les producteurs à abaisser l'âge moyen de rotation par précaution, car cela permet de diminuer l'exposition et la vulnérabilité de la forêt. La diversification de l'usage des terres au profit d'activités non risquées et procurant un revenu régulier constitue par ailleurs un levier alternatif d'adaptation au risque. Enfin, les anticipations des producteurs sur une hausse de la probabilité du risque de tempête accompagnant le changement climatique sont également à l'origine de comportements de précaution.

Dans tous les cas de figure envisagés dans cette thèse, aversion au risque et préférences intertemporelles ont des rôles distincts, confirmant la pertinence des préférences récursives dans l'étude de ce type de problèmes.

Title : Even-aged management of a multiple-stand forest and land allocation under storm risk: characterization of stationary states and role of preferences

Keywords : Forest management, Storm risk, Land allocation, Recursive preferences

Abstract : The storm risk has a strong impact on forest management, directly through the damages a storm can cause and indirectly through induced precautionary behaviors.

This PhD thesis addresses the issue of even-aged forest management with multiple age-classes in presence of a storm risk and when the producer has recursive preferences. Unlike expected utility preferences, recursive preferences distinguish between risk aversion and intertemporal preferences.

An original analytical approach based on Karush-Kuhn-Tucker conditions, as well as a numerical stochastic dynamic programming approach are used to characterize stationary states and to clarify the role of determinants, in particular the role of preferences. In addition, the analysis is extended to the issues of land allocation and

climate change.

Results show that the storm risk combined with preferences leads forest producers to reduce the average rotation age out of precaution, as it permits to reduce the forest exposure and vulnerability. Moreover, land use diversification in favor of activities without risk and providing a regular income is shown to be another option to adapt to the storm risk. Finally, producers' expectations of an increase in the storm risk probability, which comes along climate change, are revealed as another source of precautionary behavior.

In all the situations considered, risk aversion and intertemporal preferences are shown to have distinct roles, confirming that recursive preferences are relevant to deal with this type of issues.