



**HAL**  
open science

# Vibrations hydroélastiques de réservoirs élastiques couplés à un fluide interne incompressible à surface libre autour d'un état précontraint

Christophe Hoareau

► **To cite this version:**

Christophe Hoareau. Vibrations hydroélastiques de réservoirs élastiques couplés à un fluide interne incompressible à surface libre autour d'un état précontraint. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Conservatoire national des arts et métiers - CNAM, 2019. Français. NNT : 2019CNAM1241 . tel-02303327

**HAL Id: tel-02303327**

**<https://theses.hal.science/tel-02303327>**

Submitted on 2 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE Sciences et Métiers de l'Ingénieur  
Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés

## THÈSE DE DOCTORAT

présentée par : **Christophe HOAREAU**  
soutenue le : **16 juillet 2019**

pour obtenir le grade de : **Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers**

*Discipline* : Mécanique, génie mécanique, génie civil

*Spécialité* : Mécanique

**Vibrations hydroélastiques de réservoirs élastiques  
couplés à un fluide interne incompressible à surface  
libre autour d'un état précontraint**

**THÈSE dirigée par**

M. DEÛ Jean-François

*Professeur des Universités, CNAM*

**RAPPORTEURS**

M. DOARÉ Olivier

*Professeur, ENSTA ParisTech*

M. NÉRON David

*Professeur des Universités, ENS Paris-Saclay*

**PRÉSIDENT DU JURY**

M. HAMDOUNI Aziz

*Professeur des Universités, Université de la Rochelle*

**EXAMINATEURS**

Mme. CAPIEZ-LERNOUT Évangéline

*Maître de Conférence, UPEM*

M. GRAVOUIL Anthony

*Professeur des Universités, INSA Lyon*



# Remerciements

Cette thèse a été effectuée au Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés du Conservatoire national des arts et métiers à Paris, dans le cadre d'un Contrat Doctoral Spécifique pour Normalien (CDSN).

Tout d'abord, je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Jean-François Deü, pour sa confiance et sa gentillesse. Il a été un véritable mentor pour moi et je garde en tête ses nombreux conseils.

Je remercie Olivier Doaré et David Néron pour avoir accepté de rapporter mon manuscrit. Je remercie également mes examinateurs Anthony Gravouil, Evangéline Capiez-Lernout, ainsi que le président du jury, Aziz Hamdouni, qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury. Je les remercie tous pour les discussions et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux de thèse.

Merci à tous mes collègues et amis du laboratoire, et plus généralement du Cnam. Faire une liste exhaustive serait beaucoup trop longue. Les rencontres quotidiennes avec eux font partie de mes plus beaux souvenirs de cette période de ma vie. Je remercie infiniment Roger Ohayon pour tant de choses. Je sais que ces mots ne seront pas suffisants pour mesurer ce que je lui dois.

Je remercie ma compagne Sewsan avec qui je vis des expériences créatives au-delà de ce que j'aurais pu imaginer. Merci aussi à sa sœur Loubna pour les relectures et les excellentes idées cadeaux.

Je remercie mes deux grands frères, Jérôme et Patrice, pour me donner l'occasion de lâcher prise et de faire baisser la pression.

Enfin, je remercie infiniment mes parents pour tout. Aucun obstacle n'est insurmontable quand ils sont à mes côtés. J'ai de la chance.

## REMERCIEMENTS

---

# Résumé

Cette thèse de doctorat porte sur le calcul par la méthode des éléments finis du comportement dynamique de réservoirs élastiques précontraints contenant un liquide interne à surface libre. Nous considérons que la pression hydrostatique exercée par le fluide interne incompressible sur les parois flexibles du réservoir est à l'origine de grands déplacements, conduisant ainsi à un état d'équilibre non-linéaire géométrique. Le changement de raideur lié à cet état précontraint induit un décalage des fréquences de résonances du problème de vibrations linéaires couplées. L'objectif principal du travail est donc d'estimer, par des approches numériques précises et efficaces, l'influence des non-linéarités géométriques sur le comportement hydroélastique du système réservoir/liquide interne autour de différentes configurations d'équilibre. La méthodologie développée s'effectue en deux étapes. La première consiste à calculer l'état statique non-linéaire par une approche éléments finis lagrangienne totale. L'action du fluide sur la structure est ici modélisée par des forces suiveuses hydrostatiques. La deuxième étape porte sur le calcul des vibrations couplées linéarisées. Un modèle d'ordre réduit original est notamment proposé pour limiter les coûts de calcul associés à l'estimation de l'effet de masse ajoutée. Enfin, divers exemples sont proposés et comparés à des résultats de la littérature (issus de simulations numériques ou d'essais expérimentaux) pour montrer l'efficacité et la validité des différentes approches numériques développées dans ce travail.

Mots-clés : Interaction fluide-structure, Méthode des éléments-finis, Forces suiveuses hydrostatiques, Précontrainte, Hydroélasticité, Masse ajoutée, Modèle d'ordre réduit

## RESUME

---

# Abstract

This doctoral thesis focuses on the calculation by the finite element method of the dynamic behavior of prestressed elastic tanks containing an internal liquid with a free surface. We consider that the hydrostatic pressure exerted by the incompressible internal fluid on the flexible walls of the tank causes large displacements, thus leading to a geometric non-linear equilibrium state. The change of stiffness related to this prestressed state induces a shift in the resonance frequencies of the coupled linear vibration problem. The main objective of the work is therefore to estimate, through precise and efficient numerical approaches, the influence of geometric non-linearities on the hydroelastic behavior of the reservoir/internal liquid system around different equilibrium configurations. The methodology developed is carried out in two stages. The first one consists in calculating the non-linear static state by a total Lagrangian finite element approach. The action of the fluid on the structure is modelled here by hydrostatic following forces. The second step is the calculation of linearized coupled vibrations. In particular, an original reduced order model is proposed to limit the calculation costs associated with the estimation of the added mass effect. Finally, various examples are proposed and compared with results from the literature (from numerical simulations or experimental tests) to show the effectiveness and validity of the different numerical approaches developed in this work.

Keywords : Fluid-structure interaction, Finite element method, Hydrostatic follower forces, Prestressing, Hydroelasticity, Added mass, Reduced order model



## ABSTRACT

---

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Résumé</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>37</b>
1.1 Contexte et applications industrielles . . . . .	38
1.1.1 Modélisation du comportement mécanique de réservoirs couplés à des liquides internes . . . . .	38
1.2 Enjeux de la thèse : hydroélasticité et état précontraint . . . . .	41
1.2.1 Dynamique d'un système fluide-structure autour d'états d'équilibre statiques . . . . .	41
1.2.2 Enjeux de la thèse et problématique : prise en compte d'une précontrainte . . . . .	44
1.3 Approche proposée et contenu des chapitres . . . . .	47
1.4 Contributions originales de la thèse et valorisations . . . . .	50
<b>I État d'équilibre non-linéaire géométrique d'un réservoir rempli de liquide</b>	<b>53</b>
<b>2 Calcul de l'état d'équilibre statique non-linéaire géométrique avec forces suiveuses hydrostatiques</b>	<b>55</b>
2.1 Introduction et état de l'art . . . . .	56

TABLE DES MATIÈRES

---

2.1.1	Calculer l'état précontraint d'un réservoir par la MEF . . . . .	56
2.2	Formulation du problème avec forces suiveuses . . . . .	58
2.2.1	Configuration de référence et configuration courante . . . . .	58
2.2.2	Charge suiveuse hydrostatique . . . . .	59
2.2.3	Lois de comportement hyperélastiques . . . . .	59
2.2.4	Équations locales et formulation variationnelle . . . . .	61
2.2.5	Notations de Voigt . . . . .	62
2.2.6	Vecteur des efforts intérieurs . . . . .	63
2.2.7	Vecteur des efforts extérieurs . . . . .	64
2.2.8	Expression du problème EF non-linéaire discrétisé . . . . .	65
2.3	Linéarisation des travaux virtuels internes et externes . . . . .	65
2.3.1	Notations associées à la linéarisation . . . . .	65
2.3.2	Linéarisation des travaux virtuels internes . . . . .	66
2.3.3	Opérateurs de raideur avec notations de Voigt . . . . .	67
2.3.4	Matrices tangentes matériaux et géométriques . . . . .	68
2.3.5	Linéarisation du travail virtuel des efforts extérieurs . . . . .	68
2.3.6	Symétries des formes linéarisées $\Delta\delta W_\Sigma$ et $\Delta\delta W_V$ . . . . .	69
2.3.7	Matrice tangente des forces suiveuses . . . . .	70
2.3.8	Matrices tangentes et problème linéaire tangent discrétisé . . . . .	72
2.4	Méthodes de résolution numériques . . . . .	73
2.4.1	Déplacements imposés et multiplicateurs de Lagrange . . . . .	73
2.4.2	Calcul du volume de fluide à partir du maillage de l'interface . . . . .	73
2.4.3	Méthode de continuation par longueur d'arc . . . . .	76
2.4.4	Remarque sur l'intégration numérique . . . . .	77
2.5	Méthode de ligne de niveau pour l'intégration numérique . . . . .	77

TABLE DES MATIÈRES

---

2.5.1	Éléments surfaciques partiellement mouillés . . . . .	77
2.5.2	Définition de la ligne de niveau . . . . .	78
2.5.3	Difficulté de recherche d'intersection entre un plan et un élément quadratique à 8 nœuds . . . . .	79
2.5.4	Découpage d'un élément partiellement mouillé . . . . .	79
2.5.5	Exemple d'utilisation de la ligne de niveau . . . . .	82
2.5.6	Conclusion sur la méthode de ligne de niveau . . . . .	83
2.6	Exemples numériques de problèmes statiques non-linéaires . . . . .	84
2.6.1	Pb1 : Remplissage d'un crochet creux élastique . . . . .	85
2.6.2	Pb2 : Déplacement imposé d'un parallélépipède creux . . . . .	88
2.6.3	Pb 3 : Remplissage d'un cylindre en caoutchouc pré-étiré . . . . .	90
2.6.4	Pb 4 : Remplissage d'une membrane circulaire instable . . . . .	94
2.6.5	Pb 5 : Remplissage et rotation d'un réservoir hémisphérique couvert par une membrane pré-étirée . . . . .	95
2.7	Conclusion et contributions . . . . .	104
<b>3</b>	<b>Équilibre statique non-linéaire géométrique avec forces suiveuses uniformes par construction d'une base réduite PGD <i>a priori</i></b> . . . . .	<b>107</b>
3.1	Introduction et état de l'art . . . . .	108
3.1.1	Enjeu : Réduction de modèle <i>a priori</i> . . . . .	108
3.2	Problème NL géométrique avec forces suiveuses . . . . .	110
3.2.1	Rappel : Discrétisation du principe des travaux virtuels . . . . .	110
3.3	PGD <i>a priori</i> avec pression uniforme . . . . .	111
3.3.1	PGD avec champ de pression uniforme et grandes transformations . . . . .	112
3.3.2	Génération de la $(k + 1)^{\text{ème}}$ approximation sachant les $k$ premières . . . . .	113
3.3.3	Travail virtuel des efforts intérieurs intégré sur l'intervalle de pression . . . . .	114
3.3.4	Travail virtuel des efforts extérieurs . . . . .	115

TABLE DES MATIÈRES

---

3.3.5	Formulations variationnelles séparées et algorithme de point fixe . . . . .	116
3.3.6	Conclusion sur la formulation . . . . .	117
3.4	Discrétisation EF du problème en espace . . . . .	118
3.4.1	Forme discrète de $\delta G_{\text{int}}$ . . . . .	118
3.4.2	Forme discrétisée de $\delta G_{\text{ext}}$ . . . . .	119
3.4.3	Équation non-linéaire discrétisée du problème spatial . . . . .	120
3.4.4	Linéarisation de $\delta G$ fonction de $\mathbf{\Lambda}$ sachant $\lambda$ . . . . .	121
3.4.5	Contributions analogues aux matrices de raideurs matériaux, géométriques et de forces suiveuses . . . . .	121
3.4.6	Résolution du problème linéaire tangent en espace . . . . .	122
3.5	Sous-problème en paramètre de pression . . . . .	123
3.5.1	Expression de $\delta H$ en considérant une pression uniforme . . . . .	123
3.5.2	Résolution de $\delta H$ avec $\mathbf{\Lambda}$ connu . . . . .	123
3.5.3	Conclusion sur la formulation en paramètre de pression . . . . .	124
3.6	Exemples numériques avec pression uniforme . . . . .	125
3.6.1	Plaque circulaire tri-dimensionnelle soumise à une pression uniforme . . . . .	125
3.6.2	Construction d'une base réduite PGD <i>a priori</i> . . . . .	127
3.6.3	Analyse de la convergence globale du problème . . . . .	129
3.6.4	Analyse de la convergence du sous-problème non-linéaire en espace . . . . .	131
3.6.5	Analyse de la convergence du point fixe . . . . .	131
3.6.6	Instabilité du problème non-linéaire en paramètre de pression . . . . .	134
3.6.7	Réservoir pressurisé avec non-linéarité géométrique . . . . .	135
3.6.8	Conclusion des exemples numériques . . . . .	139
3.7	Conclusions et valorisation . . . . .	139

<b>II</b>	<b>Vibrations hydroélastiques sans et avec précontrainte</b>	<b>141</b>
<b>4</b>	<b>Vibrations hydroélastiques linéaires : formulation EF et calcul de la matrice réduite de masse ajoutée</b>	<b>143</b>
4.1	Introduction et état de l'art . . . . .	144
4.2	Formulations du problème hydroélastique . . . . .	145
4.2.1	Notations des domaines de définition du problème . . . . .	145
4.2.2	Convention sur les indices des bases réduites . . . . .	147
4.2.3	Équations locales linéaires . . . . .	147
4.2.4	Formulation variationnelle en $(\mathbf{u}_s, p)$ . . . . .	149
4.2.5	Formulation variationnelle en $(\mathbf{u}_s, \varphi)$ . . . . .	151
4.2.6	Discrétisation EF . . . . .	151
4.2.7	Discrétisation EF des champs . . . . .	152
4.2.8	Discrétisation des opérateurs . . . . .	154
4.2.9	Problème discrétisé $(\mathbf{U}_s, \mathbf{P})$ non-symétrique . . . . .	154
4.2.10	Problème dynamique en régime forcé . . . . .	154
4.2.11	Vecteurs propres et valeurs propres associées . . . . .	155
4.2.12	Problème discrétisé $(\mathbf{U}_s, \varphi)$ symétrique . . . . .	156
4.2.13	Opérateur de masse ajoutée . . . . .	158
4.3	Exemple numérique : effet de masse ajoutée . . . . .	161
4.3.1	Cylindre partiellement rempli de liquide . . . . .	161
4.3.2	Récapitulatif de l'exemple numérique . . . . .	168
4.4	Projection du problème hydroélastique sur base <i>in vacuo</i> . . . . .	169
4.4.1	Approche continue de la projection sur base sèche . . . . .	170
4.4.2	Approche EF discrétisée de la projection sur base <i>in vacuo</i> . . . . .	171
4.5	Retour sur l'exemple numérique sans précontrainte . . . . .	175

TABLE DES MATIÈRES

---

4.5.1	Contribution des modes secs aux modes hydroélastiques . . . . .	175
4.5.2	Calculs par projection sur $N$ premiers modes <i>in vacuo</i> . . . . .	175
4.5.3	Temps de calcul . . . . .	180
4.6	Conclusion . . . . .	181
<b>5</b>	<b>Vibrations hydroélastiques autour d'un état précontraint</b>	<b>183</b>
5.1	Introduction et état de l'art . . . . .	184
5.2	Configurations du fluide et de la structure . . . . .	186
5.2.1	Notations et définitions des configurations de la structure . . . . .	186
5.2.2	Notations et définitions des configurations du fluide . . . . .	188
5.3	Problème hydroélastique autour d'un état précontraint . . . . .	190
5.3.1	Petites perturbations dynamiques autour de l'état précontraint . . . . .	190
5.3.2	Rappels : formulation variationnelle en $p$ côté fluide . . . . .	194
5.3.3	Formulation variationnelle du problème couplé hydroélastique linéarisé . . . . .	195
5.4	Discrétisation éléments finis . . . . .	195
5.4.1	Formulation du problème précontraint avec matrice de masse ajoutée . . . . .	198
5.4.2	Rappels : effet de masse ajoutée sans précontrainte . . . . .	199
5.4.3	Effets de la précontrainte sur les fréquences propres . . . . .	199
5.5	Validation de l'approche proposée : Expérience de Chiba . . . . .	200
5.5.1	Exemple 1 : Vibrations hydroélastiques d'une plaque circulaire . . . . .	201
5.5.2	Temps de calcul . . . . .	212
5.5.3	Réponse en fréquence . . . . .	213
5.6	Réservoir ellipsoïdal avec précontrainte . . . . .	213
5.6.1	Géométrie et maillage de la structure . . . . .	213
5.6.2	Vibrations avec précontrainte sans effet de masse ajoutée . . . . .	214
5.6.3	Vibrations sans précontrainte avec effet de masse ajoutée . . . . .	215

## TABLE DES MATIÈRES

---

5.6.4	Vibrations hydroélastiques avec précontrainte . . . . .	219
5.7	Conclusion . . . . .	220
<b>6</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>221</b>
6.1	Conclusion générale . . . . .	222
6.1.1	Rappels : problématique et résultats de l'approche proposée . . . . .	222
6.2	Perspectives : statique non-linéaire . . . . .	225
6.2.1	Perspectives : calculs statiques non-linéaires . . . . .	225
6.2.2	Perspectives : réduction de modèle en statique non-linéaire . . . . .	225
6.3	Perspectives : vibrations couplées fluide-structure . . . . .	227
6.3.1	Perspectives : vibrations hydroélastiques sans précontrainte . . . . .	227
6.3.2	Perspectives : hydroélasticité et non-linéarités . . . . .	228
	<b>Bibliographie</b>	<b>229</b>
	<b>Liste des annexes</b>	<b>240</b>
<b>A</b>	<b>Lois de comportement hyperélastiques quasi-incompressibles</b>	<b>241</b>
A.1	Potentiels hyperélastiques et invariants . . . . .	241
A.2	Dérivée première d'un potentiel hyperélastique . . . . .	241
A.3	Dérivée seconde d'un potentiel hyperélastique . . . . .	242
A.4	Exemples de potentiels retrouvés dans la littérature . . . . .	243
A.4.1	Potentiels volumiques . . . . .	243
A.4.2	Potentiels isochores . . . . .	243
A.4.3	Dérivées premières des potentiels . . . . .	244
A.4.4	Dérivées secondes des potentiels . . . . .	244
A.5	Formes de Voigt . . . . .	245



<b>B</b>	<b>Symétrie de <math>\Delta\delta W_\Sigma</math></b>	<b>247</b>
B.1	Preuve 1 . . . . .	247
<b>C</b>	<b>Ligne de niveau</b>	<b>251</b>
C.1	Discrétisation EF de la ligne de niveau . . . . .	251
C.2	Découpage d'éléments quadratiques à 8 nœuds . . . . .	252
C.2.1	Cas à deux racines distinctes . . . . .	254
C.2.2	Ligne de contact . . . . .	256
C.3	Interface graphique pour la détection de cas . . . . .	257
<b>D</b>	<b>Développements mathématiques associés à la PGD</b>	<b>259</b>
D.1	Développement des formes continues . . . . .	260
D.1.1	Développement de $\delta G_{\text{int}}$ . . . . .	260
D.1.2	Développement de $\delta H_{\text{int}}$ . . . . .	261
D.1.3	Développement de $\delta G_{\text{ext}}$ . . . . .	262
D.1.4	Développement de $\delta H_{\text{ext}}$ . . . . .	262
D.2	Opérateurs discrétisés et coefficients associés . . . . .	263
D.2.1	Coefficients de $\mathbf{G}_{\text{int}}$ qui dépendent de $\lambda$ . . . . .	263
D.2.2	Termes de $\mathbf{G}_{\text{int}}$ . . . . .	263
D.2.3	Coefficients de $\mathbf{G}_{\text{ext}}$ dépendant de $\lambda$ . . . . .	264
D.2.4	Forme discrète de $\mathbf{G}_{\text{ext}}$ . . . . .	265
D.3	Opérateurs tangents . . . . .	265
D.3.1	Matrice analogue à une raideur matériau . . . . .	265
D.3.2	Matrice analogue à une raideur géométrique . . . . .	265
D.3.3	Matrice analogue à une raideur des forces suiveuses . . . . .	266
D.4	Coefficients de $\delta H$ dépendant de $\mathbf{\Lambda}$ . . . . .	267

TABLE DES MATIÈRES

---

<b>E Projection de champs EF entres maillages</b>	<b>269</b>
E.1 Projection entre deux maillages volumiques . . . . .	270

## TABLE DES MATIÈRES

---

# Liste des tableaux

2.1	Algorithme de Newton Raphson . . . . .	72
2.2	Chargement par hauteur de fluide . . . . .	72
2.3	Algorithme de dichotomie . . . . .	75
2.4	Algorithme de Newton Raphson avec $V_f$ constant et déplacements imposés . . . . .	75
2.5	Algorithme de chargement par déplacement imposé et volume de fluide constant . . . . .	75
2.6	<b>Pb 1</b> : Informations maillages et temps de calculs associés . . . . .	88
2.7	<b>Pb 2</b> : Informations maillages et temps de calculs associés . . . . .	91
2.8	<b>Pb 3</b> : Informations maillages et temps de calculs associés . . . . .	93
2.9	<b>Pb 4</b> : Informations maillages et temps de calculs associés . . . . .	94
2.10	Nombre d'éléments $n_{elem}$ , nombre de degrés de liberté $n_{dof}$ et valeur de la quantité d'intérêt $q(QI)$ . . . . .	99
2.11	<b>Pb 5</b> : Informations maillages et temps de calculs associés . . . . .	104
3.1	Algorithme glouton pour deux paramètres . . . . .	117
3.2	Données et temps de calcul . . . . .	127
3.3	Algorithme utilisé pour générer les modes PGD <i>a priori</i> . . . . .	128
3.4	Informations sur le maillage et les temps de calcul. . . . .	133
3.5	Informations sur le maillage et les temps de calcul. . . . .	138
4.1	Notations des domaines de définitions. . . . .	145

LISTE DES TABLEAUX

---

4.2	Notations sur les variables d'états fluides-structures . . . . .	146
4.3	Hypothèses du fluide et de la structure . . . . .	147
4.4	Définitions des opérateurs dans les domaines continus - * Nous montrons par la suite que cet opérateur est relié à l'énergie cinétique du fluide déplacé. . . . .	150
4.5	Notations associées aux champs et opérateurs discrétisés. . . . .	152
4.6	Définitions des opérateurs dans les domaines discrétisés et leurs tailles avec $n_{\text{dofs}}$ le nombre de degrés de liberté côté structure et $n_{\text{doff}}$ le nombre de degrés de liberté côté fluide. . . . .	154
4.7	Avantages et inconvénients de l'approche $(\mathbf{U}_s, \mathbf{P})$ . . . . .	156
4.8	Avantages et inconvénients du problème $(\mathbf{U}_s, \boldsymbol{\varphi})$ . . . . .	157
4.9	Avantages et inconvénients du problème symétrique avec matrice de masse ajoutée. . . . .	159
4.10	Temps de calcul pour obtenir la matrice de masse ajoutée avec inversion de matrice (rappel : $\mathbf{M}_a = \rho_f \mathbf{C}_* \mathbf{H}_*^{-1} \mathbf{C}_*^T$ ). . . . .	167
4.11	Temps de calcul du problème traité dans l'exemple numérique avec $n_{\text{elm-f}} = 10250$ et $n_{\text{dof-f}} = 45696$ . . . . .	180
5.1	Notations associées à la structure et ses configurations . . . . .	187
5.2	Notations et définitions des configurations du fluide . . . . .	189
5.3	Définitions des opérateurs dans les domaines discrétisés (les opérateurs $\mathbf{B}$ , $\mathbf{B}_{\text{NL}}$ , $\mathbf{G}_{\text{NL}}$ , $\mathbf{S}_{\text{NL}}$ , $\boldsymbol{\Omega}_\eta$ et $\boldsymbol{\Omega}_\xi$ sont tous définis au Chapitre 2.) . . . . .	197
5.4	Nombre d'éléments $n_{\text{elem}}$ , nombre de degré de liberté $n_{\text{dof}}$ et quantité d'intérêt $q$ (déplacement vertical du centre de la plaque à $h = 150$ mm en fonction de différents jeux de paramètres du maillage). . . . .	202
5.5	Évolution des six premières fréquences propres hydroélastiques avec précontrainte en fonction de la hauteur de fluide. . . . .	204
5.6	Évolution des six premières fréquences propres hydroélastiques en fonction de la hauteur de fluide. . . . .	206

LISTE DES TABLEAUX

---

5.7	Valeurs des six premières fréquences propres hydroélastiques avec précontrainte en fonction pour différentes hauteurs de fluide. . . . .	209
5.8	Temps de calcul associés au problème hydroélastique avec précontrainte . . . . .	212
5.9	Nombre d'éléments et de degrés liberté pour le fluide et la structure. . . . .	217
C.1	Polynomes du second degré à résoudre sur les bords de l'éléments de référence . . . . .	253
C.2	Estimation du nombre de cas à traiter . . . . .	253
C.3	Couples solutions cas 1 . . . . .	254
C.4	Couples solutions cas 2 . . . . .	255
C.5	Couples solutions cas 3 . . . . .	255
D.1	Expressions de tous les $\alpha$ -coefficients qui dépendent de $p$ pour le calcul de $\delta G_{\text{int}}$ . . .	263
D.2	Expressions de tous les $\beta$ -coefficients qui dépendent de $p$ pour le calcul de $\delta G_{\text{ext}}$ . . .	264
D.3	$\theta$ -coefficients qui dépendent de $\mathbf{\Lambda}$ et $\mathbf{\Lambda}_i$ pour calculer les coefficients $qi$ . . . . .	267
D.4	$\kappa$ -coefficients qui dépendent de $\mathbf{\Lambda}$ et $\mathbf{\Lambda}_i$ pour calculer les coefficients $r_i$ . . . . .	268
E.1	Algorithme <i>inverse mapping</i> . . . . .	271
E.2	Algorithme de projection de champs EF . . . . .	271

LISTE DES TABLEAUX

---

# Table des figures

1.1	Exemples de cas d'applications de réservoirs contenant un fluide interne à surface libre.	38
1.2	Illustration des action mécaniques lors du décollage d'un lanceur. . . . .	40
1.3	Dynamique du problème couplé considéré à chaque taux de vidange donné. . . . .	41
1.4	Non prise en compte des mouvements de corps rigides dans la suite de l'étude. . . . .	42
1.5	Exemples de modèles masse-ressort ou pendulaire associés au ballonnement. . . . .	42
1.6	Dynamique des lanceurs et caractérisation du comportement dynamique. . . . .	43
1.7	Simulation du couplage hydroélastique avec gravité basée sur une expérience [25]. . . . .	43
1.8	Plage de fréquence d'intérêt. . . . .	44
1.9	Système réservoir-liquide et réponse en fréquence. . . . .	45
1.10	État précontraint de la structure élastique causée par l'action du fluide interne. . . . .	46
1.11	Approche proposée en deux étapes. . . . .	46
2.1	Forces suiveuses hydrostatiques . . . . .	56
2.2	Surfaces internes associées à la configuration de référence de la structure $\Omega_s$ et aux configurations courantes $\omega_s$ . Le chargement est modélisé par une pression suiveuse hydrostatique sur la configuration courante. . . . .	60
2.3	Discrétisation EF avec éléments hexaédriques à 20 noeuds. . . . .	64



TABLE DES FIGURES

---

2.4	(a) Incrément de déplacement $\Delta \mathbf{u}$ (flèches bleues) de la surface interne entre une configuration donnée (ligne en pointillé) et la suivante (ligne continue) et aire de la surface mouillée (en rouge); (b) Vue en coupe, le volume en rouge généré par le déplacement normal linéarisé de la paroi à travers la surface mouillée est supposée égal au volume du cylindre de hauteur $\Delta h$ généré par la surface libre. . . . .	70
2.5	(a) Surface mouillée $\Sigma$ pour le calcul du volume de fluide $V_f$ ; (b) Domaine volumique $\Omega_f$ et sa surface libre plane $\Gamma$ . . . . .	74
2.6	Éléments surfaciques partiellement mouillés lors d'une itération de l'algorithme de Newton-Raphson. . . . .	77
2.7	Ligne de niveau définie par un plan et son intersection avec la surface interne réelle de la géométrie (en pointillé) et la surface courante éléments finis (en rouge). . . . .	78
2.8	(a) Exemple d'un élément coupé par la ligne de niveau en configuration courante; (b) Nouvelles positions des points de Gauss dans l'élément de référence iso-paramétrique. . . . .	79
2.9	Exemples non exhaustifs d'intersections entre un éléments quadratique courbe et un plan en configuration courante. Plus de 255 cas peuvent être rencontrés (voir Annexe C). . . . .	80
2.10	Deux cas de découpage d'éléments les plus souvent rencontrés en pratique avec deux points d'intersections : (a) les points d'intersection se trouvent sur deux bords adjacents; (b) les deux points d'intersection sont sur des bords opposés. . . . .	81
2.11	(a) Exemple d'un cas à 4 points d'intersection; (b) Deux cas possibles de découpages sans informations supplémentaires. . . . .	81
2.12	(a) Exemple d'un élément de référence ayant quatre points d'intersection; (b) Découpage régulier de l'élément tel que les éléments sous découpés aient 2 points d'intersection. . . . .	81
2.13	Exemples non exhaustifs de cas dégénérés : (a) l'intersection correspond à un noeud du maillage; (b) l'intersection correspond à un bord du maillage; (c) L'intersection correspond à deux noeuds du maillage. . . . .	82
2.14	(a) Remplissage d'un cube entre deux sommets avec $a = 2$ m. Visualisation de (b) l'aire de la surface libre $A_f$ , (c) l'aire de la surface mouillée $A_\Sigma$ et (d) le volume de fluide $V_f$ sous la hauteur $h$ . . . . .	82

TABLE DES FIGURES

---

2.15 Évolution des quantités qui dépendent de la hauteur de fluide  $h$  : (a) aire de la surface libre ; (b) aire de la surface mouillée ; (c) volume de fluide disponible sous la surface libre ; Pour chaque quantité, une solution analytique est tracée (en bleu) ainsi que la solution numérique obtenue avec la méthode de ligne de niveau (ligne rouge en pointillé) et celle obtenue par une intégration classique sans méthode de ligne de niveau avec  $n_{GP} = 9$  points de Gauss (ligne verte). . . . . 83

2.16 (a) Paramètres géométriques du crochet creux élastique chargé soumis à un champ de pression hydrostatique ; (b) Maillage tridimensionnel de la structure avec 1536 éléments et 32502 degrés de liberté ; (c) Paramètres du maillage et de la géométrie utilisés pour nos simulations. . . . . 85

2.17 Évolution de l'aire de la surface libre  $A_f$  et de la norme du déplacement  $|d_A|$  en fonction de la hauteur de fluide  $h \in [-90, 0]$  cm avec un pas de remplissage  $dh = 1$  cm. (Attention la surface libre n'est représentée que pour un souci esthétique de visualisation. Elle n'est en aucun cas utilisée comme un support de calcul.) . . . . . 86

2.18 Évolution de la norme du résidu d'équilibre en fonction du nombre d'itérations d'un algorithme de Newton-Raphson pour deux simulations : l'une avec la matrice tangente des forces suiveuses et l'autre sans ( $h = -80$  cm,  $h = -60$  cm,  $h = -40$  cm and  $h = -20$  cm). . . . . 87

2.19 Éléments partiellement mouillés en jaune. La ligne de contact est tracée en rouge. Vecteur des efforts extérieurs en gris. . . . . 88

2.20 (a) Paramètres géométriques du parallépipède creux soumis à un déplacement imposé à ces extrémités et à un champ de pression hydrostatique ; (b) Vue d'une partie du maillage hexaédrique paramétré ; (c) Valeurs des paramètres du maillage et de la géométrie. . . . . 89

2.21 Évolution de la hauteur de surface libre en fonction du paramètre de chargement  $\lambda$  tel que  $\mathbf{u}_{1d} = -\mathbf{u}_{2d} = \lambda u_{\max} \mathbf{e}_z$  avec  $u_{\max} = 0.0125$  m, et  $\theta_{1d} = -\theta_{2d} = \lambda\pi/4$  rad . . . . . 89

TABLE DES FIGURES

---

2.22	(a) Norme du déplacement $\ \mathbf{u}\ $ de la structure soumise à un champ de pression hydrostatique ( $\ \mathbf{u}\  = 0$ mm (en bleu) et $\ \mathbf{u}\  = 0.176$ mm (en rouge); (b) Déformation de la structure pour $\lambda = 0$ , $\lambda = 0.5$ et $\lambda = 1$ . Attention : La surface libre en rouge n'est représentée que pour la visualisation car le support de la surface libre n'est pas nécessaire pour le calcul des états d'équilibres statiques. . . . .	90
2.23	(a) Évolution de la norme du résidu pour $\lambda = 0.1$ , $\lambda = 0.5$ et $\lambda = 1$ ; (b) Convergence de la méthode de bisection pour conserver le volume de fluide lors de la première itération de l'algorithme de Newton pour $\lambda = 0.5$ . . . . .	91
2.24	Étirement et remplissage du cylindre creux en caoutchouc et ces paramètres géométriques. . . . .	92
2.25	Évolution de la hauteur de fluide en fonction du déplacement radial aux points $A$ , $B$ et $C$ . . . . .	92
2.26	Évolution du volume de fluide en fonction du déplacement radial aux points $A$ , $B$ et $C$ . . . . .	93
2.27	(a) Maillage en configuration de référence; Configurations courantes pour (b) $h_1 = 46.3$ mm et $V_1 = 0.02 \times 10^6$ mm <sup>3</sup> ; (c) $h_2 = 205.5$ mm et $V_2 = 0.401 \times 10^6$ mm <sup>3</sup> ; (d) $h_3 = 219.1$ mm et $V_3 = 260 \times 10^6$ mm <sup>3</sup> . . . . .	94
2.28	Évolution de la norme du résidu pour trois configurations illustrées en Fig. 2.27 avec $h_1 = 46.3$ mm et $V_1 = 0.02 \times 10^6$ mm <sup>3</sup> , $h_2 = 205.5$ mm et $V_2 = 0.401 \times 10^6$ mm <sup>3</sup> , $h_3 = 219.1$ mm et $V_3 = 260 \times 10^6$ mm <sup>3</sup> . . . . .	95
2.29	Évolution de la hauteur de fluide en fonction du déplacement vertical au point de coordonnées de référence $(0, 0, 0)$ . . . . .	96
2.30	Différentes configurations courantes de la structure déformée par la fluide pour différentes hauteurs $h$ : (a) $h = -0.1$ mm et $q = 0.2$ mm; (b) $h = -1$ mm et $q = 2$ mm; (a) $h = 1.9$ mm et $q = 10$ mm; (a) $h = -1.5$ mm et $q = 1.8$ mm. . . . .	96
2.31	(a) <b>Phase 1</b> : Extension de la membrane ayant un rayon initial de $R_0 = 0.10$ m jusqu'au rayon final $r = 0.20$ m; (b) <b>Phase 2</b> : Remplissage d'un réservoir couvert par la membrane piloté par une hauteur de fluide $h$ entre $h = 0$ to $h = 0.160$ m; (c) <b>Phase 3</b> : Rotation de la partie rigide hémisphérique à volume de fluide constant. . . . .	97

TABLE DES FIGURES

---

2.32 (a) Maillage de la membrane et de la partie rigide hémisphérique; (b) paramètres du maillage composé d’hexaèdres à 20 avec  $n_\theta$  le nombre d’éléments d’un quart de la circonférence, le nombre d’éléments dans l’épaisseur  $n_t = 1$  et  $n_r$  le nombre d’éléments sur la ligne radiale, la valeur  $a$  est donnée pour la construction du maillage hexaédrique tel que  $a = 0.3R_i$ ; (c) Maillage surfacique de la partie rigide du réservoir, ce maillage est nécessaire pour le calcul du volume de fluide et l’aire de la surface libre. . . . . 98

2.33 Visualisation de la configuration courante du problème à déplacement imposé pour passer d’un rayon initial de la membrane  $R_0 = 0.1$  m à un rayon final  $r = 0.2$  m.  $\lambda$  est un paramètre de chargement tel que  $\lambda = 0$  (aucun chargement) and  $\lambda = 1$  (fin du chargement). Le point  $A'$  correspond à la position courante du point  $A$  tel que  $\mathbf{X}_A = (0, -0.3R_i, 0)$  en configuration de référence et  $\mathbf{X}_A + \mathbf{u}_{\text{str}}(\mathbf{X}_A)$  en configuration de référence. . . . . 98

2.34 Convergence de la QI normée par la QI de référence en fonction du nombre de degrés de liberté  $q_{ref}$ ; (a) **Étape 1** : Extension de la membrane en caoutchouc; (b) Membrane chargée par un champ de pression hydrostatique si le réservoir est complètement rempli. 99

2.35 Champ de déplacement  $\mathbf{u}_{\text{fil}}$  de la membrane pour plusieurs jeux de paramètres de maillages  $(n_\theta, n_r)$  : (a) (1, 1); (b) (2, 2); (c) (5, 5); (d) (10, 10); (e) (20, 20); (f) (40, 40). 99

2.36 Norme du champ de déplacement  $\mathbf{u}_{\text{fil}}$  de la membrane entre 0 mm (en bleu) et 10.6 mm (en rouge) pour différentes hauteurs de fluide : (a)  $h = 50$  mm; (b)  $h = 100$  mm; (c)  $h = 120$  mm; (d)  $h = 160$  mm. . . . . 100

2.37 Évolution de  $q$  en fonction de la hauteur de fluide; (a) Déplacement du point  $A = (0, 0, -0.3R_i)$  au  $A'$  lors de l’extension de la membrane; (b) Déplacement du point  $A'$  lors du remplissage. . . . . 100

2.38 Influence de la matrice tagente des forces suiveuses sur la convergence de l’algorithme de Newton-Raphson pour différents états d’équilibre (i.e.  $h = 40$  mm,  $h = 80$  mm,  $h = 120$  mm and 160 mm) de la **Phase 2**. . . . . 101

TABLE DES FIGURES

---

2.39	Norme du champ de déplacement pour différentes configurations de référence $\  \mathbf{u}_{\text{rot}} \ $ associés aux rotations de la partie rigide d'angle $\theta$ autour de l'axe $(O, \mathbf{e}_x)$ pour un volume de fluide fixé $V_f = 1.0e^{-3} \text{ m}^3$ (en bleu $\  \mathbf{u}_{\text{rot}} \  = 0$ et en rouge $\  \mathbf{u}_{\text{rot}} \  = 4.55 \text{ mm}$ ). . . . .	102
2.40	Évolution de la hauteur de fluide et de $q$ en fonction de l'angle $\theta$ entre $\theta = 0$ degrés et $\theta = 360$ degrés. . . . .	102
2.41	Influence de la matrice tangente des forces suiveuses sur la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson pour différents états d'équilibre (a) $\theta = 45$ degrés; (b) $\theta = 90$ degrees; (c) $\theta = 135$ degrés; (d) $\theta = 180$ degrés. . . . .	103
3.1	Exemple d'abaque virtuel pour générer des solutions "en-ligne" à partir d'une base réduite générée "hors-ligne". Dans la suite, nous ne considérons qu'un paramètre de chargement avec pression uniforme pour simplifier les calculs. . . . .	108
3.2	Configuration de référence et configurations courantes de la surface interne d'un réservoir soumis à des champs de pression suiveurs. . . . .	109
3.3	Approche proposée pour exprimer les deux sous-problèmes (non-linéaires) en utilisant les hypothèses de la PGD <i>a priori</i> . L'objectif est de calculer le couple $(\lambda, \mathbf{\Lambda})$ qui vérifie les deux sous-problèmes, l'un en espace et l'autre en paramètre de pression. . . . .	113
3.4	Discrétisation EF de la structure. Configuration de référence et configuration courante d'un élément de surface iso-paramétrique. . . . .	118
3.5	Forme continue et forme discrétisée par MEF associé à l'équation non-linéaire en espace. A cette étape, les $\lambda$ sont connus, donc les coefficients qui dépendent de $\lambda$ peuvent être calculés avant la résolution du problème. . . . .	120
3.6	Formes continues et formes discrètes du problème spatial linéarisé. Les matrices tangentes sont analogues aux matrices du problème non-linéaire avec forces suiveuses. . . . .	122
3.7	Deux approches proposées pour résoudre le problème en paramètre de pression. . . . .	125

TABLE DES FIGURES

---

3.8 (a) Plaque circulaire tri-dimensionnelle soumise à une pression uniforme  $p$ ; (b) Géométrie de la plaque utilisée pour générer le maillage hexaédrique avec  $R_{\text{int}} = 0.144$  m et l'épaisseur  $t = 0.25$  mm; (c) Paramètres du maillage avec des hexaèdres à 20 nœuds tels que  $n_r = 4$  et  $n_\theta = 4$ . . . . . 126

3.9 (a) Vues de la configuration de référence d'épaisseur  $t = 0.25$  mm et norme du champ de déplacement en configuration courante ( $\|\mathbf{u}\| = 0$  en bleu et  $\|\mathbf{u}\| = 4.29$  mm en rouge); (b) Évolution du déplacement adimensionné au centre de la plaque en fonction de la pression avec  $dp = 10$  Pa. . . . . 126

3.10 Évolution du résidu d'équilibre en fonction des itérations de l'algorithme de Newton-Raphson pour différentes valeurs de pression  $p$ . . . . . 127

3.11 Neufs premiers modes  $(\lambda_i, \mathbf{\Lambda}_i)$  générés par l'algorithme proposé Tab. 3.3. . . . . 129

3.12 Évolution de l'erreur globale en fonction du nombre de modes . . . . . 130

3.13 Évolution du déplacement  $q$  adimensionné par l'épaisseur  $t = 0.25$  mm au centre du disque en fonction du paramètre de pression pour  $n = 1$ ,  $n = 3$  et  $n = 8$  modes. . . . . 130

3.14 Évolution de la norme du résidu  $\|\mathbf{G}\|_{\mathcal{L}_2}$  à l'issue de chaque système linéaire tangent dans une boucle du point fixe (GL). La convergence est atteinte si  $\|\mathbf{G}\|_{\mathcal{L}_2} < \varepsilon_g = 10^{-2}$ . Rappelons que le nombre total d'itérations par point fixe est fixé à  $n_{\text{greedy}} = 5$  pour chaque mode. . . . . 132

3.15 Évolution du critère de stagnation de l'algorithme de point fixe, pour la génération du 3<sup>e</sup> couple de modes  $(\lambda_3, \mathbf{\Lambda}_3)$ . . . . . 133

3.16 Solution de  $\delta H$  in  $I = [0, 1]$  avec la méthode 1 (en pointillé bleu), la méthode 2 (en vert) et la continuation (en rouge) avec  $q_0 = 0, r_0 = -1, q_1 = 1, r_1 = 0, r_2 = 0, q_3 = 1$  et différentes valeurs de  $q_2$  : (a)  $q_2 = -1$ ; (b)  $q_2 = -1.5$ ; (c)  $q_2 = -1.8$ ; (d)  $q_2 = -2$  . . . 135

3.17 Solution  $\lambda$  pour différentes valeurs de  $q_2$  appartenant à  $[-2.2, -1]$ . . . . . 135

TABLE DES FIGURES

---

3.18 (a) Dimension du réservoir en 3D soumis à une pression uniforme  $p \in [0, 3]$  MPa; (b) 1/8 de la géométrie du réservoir utilisé pour le maillage hexaédrique avec le rayon interne  $R_{\text{int}} = 2.5$  m, la longueur du cylindre  $L = 5$  m, l'épaisseur du réservoir  $t = 3$  mm (les deux points  $A$  et  $B$  sont définis par  $\varphi_A = \frac{\pi}{4}$ ,  $\varphi_B = \frac{\pi}{3}$  et  $\theta_B = \frac{\pi}{4}$ ); (c) Paramétrisation du maillage hexaédrique à 20 noeuds avec  $n_L = 10$ ,  $n_1 = n_2 = 5$  and  $n_t = 1$ . . . . . 136

3.19 (a) Surfaces soumises à des conditions aux limites en déplacement avec  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_x = 0$  sur  $S_x$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y = 0$  sur  $S_y$  et  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z = 0$  sur  $S_z$ ; Quantités observées  $q_x$  et  $q_z$  au point  $(R_{\text{int}}, 0, 0)$ ; (b) Évolution des quantités observées adimensionnées par l'épaisseur  $q_x/t$  and  $q_z/t$  ( $t = 3$  mm), avec et sans la prise en compte de non-linéarité géométrique, en fonction de  $p$ . Le chargement de pression est fait par incréments  $dp = 0.15$  kPa fixe. Ces solutions ont été obtenues avec le modèle complet par utilisation d'un algorithme de Newton-Raphson à chaque pas de pression. . . . . 137

3.20 Four first modes  $(\mathbf{\Lambda}_i, \lambda_i)$  of the pressurized tank. . . . . 137

3.21 Comparaisons entre le modèle complet et la solution obtenue par réduction *a priori* avec 1 et 4 modes. Décroissance de l'erreur globale. . . . . 138

4.1 Maillage coïncident du fluide et de la structure avec des éléments hexaédriques quadratiques. . . . . 146

4.2 (a) Domaines du fluide et de la structure; (c) Vibrations hydroélastiques linéaires. . . 146

4.3 Visualisation des matrices du problème en  $(\mathbf{U}_s, \mathbf{P})$ . . . . . 155

4.4 Visualisation des matrices du problème en  $(\mathbf{U}_s, \boldsymbol{\varphi})$ . . . . . 157

4.5 Visualisation des matrices du problème symétrique avec la matrice de masse ajoutée. . 158

4.6 (a) Géométrie du cylindre partiellement rempli de liquide avec une épaisseur  $t = 0.250$  mm, une longueur  $L = 0.112$  m et un rayon moyen  $R = 0.1$  m; (b) Paramètres du maillage fluide et solide constitué d'éléments quadratiques à 20 noeuds. . . . . 161

4.7 Dénomination des modes par nombre de longueurs d'ondes circonférentielle et longitudinale respectivement notées  $n$  and  $m$ . . . . . 161

4.8 (a) Fréquences propres expérimentales [106]; (b) Fréquences propres simulées . . . . . 162

TABLE DES FIGURES

---

4.9	Comparaison des fréquences propres simulées et des fréquences mesurées [106] pour $m = 1, m = 2$ et $m = 3$ . . . . .	162
4.10	(a) Fréquences propres hydroélastiques mesurées [106]; (b) Fréquences propres hydroélastiques simulées. . . . .	163
4.11	Comparaison des fréquences propres hydroélastiques mesurées et simulées. . . . .	163
4.12	Évolution et écarts entre les fréquences de la structure <i>in vacuo</i> et les fréquences hydroélastiques des modes $(1, n)$ en fonction du nombre d'onde circonférentiel $n$ . . . . .	164
4.13	Déformées modales $(1, n)$ de la structure <i>in vacuo</i> et de la structure partiellement (normalisation à la masse de la structure <i>in vacuo</i> ). . . . .	165
4.14	Évolution des déformées modales des modes hydroélastiques (partie structure) associés à un nombre d'ondes longitudinales $m = 1$ en fonction du nombre d'ondes circonférentielles $n = 8, 9, 10$ et $11$ . . . . .	166
4.15	Exemples de modes hydroélastiques (partie structure) pour $m = 2$ pour différentes valeurs du nombre d'ondes circonférentielles $n$ . . . . .	166
4.16	Exemples de modes hydroélastiques (partie structure) pour $m = 3$ pour différentes valeurs du nombre d'ondes circonférentielles $n$ . . . . .	166
4.17	Pression du fluide et déplacement de la structure des modes hydroélastiques. . . . .	167
4.18	Schéma de l'approche utilisée pour la projection du problème hydroélastique sur base de modes <i>in vacuo</i> . . . . .	169
4.19	Quelles modes de la structure <i>in vacuo</i> contribuent au calcul des modes hydroélastiques? 175	
4.20	Evolution des 30 premières fréquences hydroélastiques de la structure à moitié remplie de liquide caractérisés par $(m, n)$ avec $m$ le nombre d'onde longitudinal et $n$ le nombre d'onde circonférentiel. . . . .	176
4.21	Évolution du pourcentage d'erreur maximum des 30 premiers modes hydroélastiques en fonction du nombre de modes de la base sèche $N \in [1, 150]$ modes. . . . .	177
4.22	Évolution du pourcentage d'erreur maximum, parmi les 30 premières fréquences propres, en fonction du nombre de modes de la base sèche $N \in [1, 150]$ modes. . . . .	178
4.23	Contribution des modes <i>in vacuo</i> aux modes hydroélastiques $(1, 7)$ , $(1, 3)$ et $(1, 16)$ . . .	179



TABLE DES FIGURES

---

5.1	(a) État d'équilibre statique non-linéaire connu soumis à un champ de pression hydrostatique; (b) Vibrations hydroélastiques autour d'un état précontraint . . . . .	184
5.2	Représentation graphique des configurations et des variables associées aux configurations de la structure (voire Tab. 5.1) : (a) Configuration de référence; (b) Configuration courante statique non-linéaire; (c) Configuration courante dynamique linéarisée autour de l'état précontraint. . . . .	187
5.3	(a) État d'équilibre statique non-linéaire d'une structure soumise à des forces suiveuses issues d'une pression hydrostatique $p_s$ paramétrée par une hauteur de fluide $h$ ( $\omega_s$ et $\Omega_s$ sont respectivement les configurations courante et de référence de la structure); (b) Différentes configurations statiques du fluide à l'équilibre occupant le domaine $\omega_f$ borné par la surface libre $\Gamma$ et l'interface fluide-structure $\Sigma$ . . . . .	188
5.4	(a) État d'équilibre statique; (b) Fluctuations de pressions $p$ au sein du fluide lors d'une sollicitation harmonique $\mathbf{f}_s$ de faible amplitude. . . . .	189
5.5	(a) Équilibre statique précontraint connu; (b) Domaine fluide associé à l'état précontraint; (c) Vibrations hydroélastiques linéarisées. . . . .	190
5.6	Maillage coïncident du fluide et de la structure avec des éléments hexaédriques quadratiques. . . . .	195
5.7	Procédure de remaillage du domaine fluide coïncident avec le maillage de la structure en configuration courante. . . . .	196
5.8	Vibrations hydroélastiques sans précontrainte . . . . .	199
5.9	Vibrations de la structure <i>in vacuo</i> avec précontrainte . . . . .	200
5.10	(a) Modélisation de la précontrainte due à l'action de la pression hydrostatique du fluide sur la structure, (b) Formulation hydroélastique en $(\mathbf{U}_d, \mathbf{P})$ . . . . .	200
5.11	(a) Géométrie de la plaque circulaire utilisée pour générer le maillage avec $t = 0.35$ mm et $R_{\text{int}} = 144$ mm; (b) Paramètres du maillage avec $n_\theta$ le nombre de mailles sur le quart de la circonférence et $n_r$ le nombre d'éléments sur la ligne définie sur la figure. Le nombre d'éléments dans l'épaisseur est fixé à 2. . . . .	201

TABLE DES FIGURES

---

5.12	Évolution de la quantité d'intérêt $q$ pour hauteur de fluide $h = 250$ mm en fonction du nombre de degrés de liberté. . . . .	202
5.13	(a) Évolution du déplacement vertical normée par l'épaisseur $t = 0.35$ mm au centre de la plaque, en fonction de la hauteur de fluide; (b) Évolution du résidu d'équilibre de l'algorithme de Newton-Raphson en fonction du nombre d'itérations pour trois hauteurs de fluide $h = 1$ mm, $h = 50$ mm et $h = 150$ mm. . . . .	203
5.14	Caractérisation des déformées modales par le nombre de longueurs d'ondes radiales et circonférentielles $(n, m)$ . . . . .	203
5.15	Déformées modales de la structure autour de l'état précontrainte pour $h = 250$ mm . . . . .	204
5.16	Évolution des fréquences de résonance en fonction de la hauteur de fluide avec $\mathbf{K}_{\text{tan}} = \mathbf{K}_{\text{mat}} + \mathbf{K}_{\text{geo}} - \mathbf{K}_{\text{fol}}$ . . . . .	205
5.17	(a) Géométrie du fluide et de la structure en configuration de référence; (b) Vibrations hydroélastiques sans précontrainte. . . . .	205
5.18	(a) Paramètres de la géométrie du fluide et de la structure avec l'épaisseur $t = 0.35$ mm, le rayon interne $R_{\text{int}} = 0.144$ mm et la hauteur de fluide $h$ ; (b) Paramètres du maillage définis par $n_{\theta}$ , $n_r$ et $n_h$ correspondant aux nombres d'éléments des lignes qui y sont associées. . . . .	206
5.19	Évolution des six premières fréquences propres hydroélastiques en fonction de la hauteur de fluide sans précontrainte. . . . .	207
5.20	Visualisation du champ de pression du premier mode hydroélastique pour différentes hauteurs de fluide ( $p = 0$ en bleu et $p = 1$ en rouge). . . . .	208
5.21	Visualisation du champ de pression du second mode hydroélastique pour différentes hauteurs de fluide ( $p = -1$ en bleu et $p = 1$ en rouge). . . . .	208
5.22	Évolution des fréquences propres en fonction de la hauteur de fluide avec $\mathbf{K}_{\text{tan}} = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_f$ . . . . .	209
5.23	Évolution des trois premières fréquences propres hydroélastiques avec précontrainte obtenues via notre approche comparées aux résultats expérimentaux de Chiba. . . . .	210

TABLE DES FIGURES

---

5.24	Fluctuation de pression du premier mode hydroélastique pour différentes hauteurs de fluide. . . . .	211
5.25	Fluctuation de pression du deuxième mode hydroélastique pour différentes hauteurs de fluide. . . . .	211
5.26	Réponse en fréquence du système couplé à différentes hauteurs de fluide. . . . .	213
5.27	(b) Profil de l'ellipse génératrice de la structure avec $t = 0.35$ mm, $R_i = 0.144$ m et $Z_i = 0.25R_i$ soumis à un champ de pression hydrostatique d'une hauteur de fluide $h$ . (a) Géométrie de la structure pour générer le maillage hexaédrique avec $\alpha = 0.5$ ; (b) Paramètres du maillage avec $n_\theta =$ le nombre de mailles sur le quart de la circonférence et $n_r$ le nombre d'éléments sur la ligne définie sur la figure. Le nombre d'éléments dans l'épaisseur est fixé à 2. . . . .	214
5.28	(a) Symboles; (b) Vue en coupe; (c) Vue de dessous; (d) Vue isométrique . . . . .	215
5.29	Évolution des cinq premières fréquences de résonance avec précontrainte et sans effet de masse ajoutée. . . . .	216
5.30	(a) Géométrie de la structure et du fluide étudié (données géométriques similaires à la Fig. 5.27; (b) géométrie du maillage pour générer le maillage hexaédrique; (c) Paramètres du maillage du fluide avec $n_\theta = 10$ , $n_b = 5$ , $n_h = 10$ et $n_r = 10$ . . . . .	216
5.31	Évolution des cinq premières fréquences de résonance avec effet de masse ajoutée et sans précontrainte. . . . .	217
5.32	Mode 1 . . . . .	218
5.33	Mode 2, 3 . . . . .	218
5.34	Mode 4 . . . . .	218
5.35	Évolution des fréquences de résonance avec précontrainte (ligne continue bleu) et sans précontrainte (ligne pointillée rouge). L'effet de masse ajoutée est prise en compte dans les deux cas. . . . .	219
6.1	Récapitulatif des contributions des chapitres 2 à 3. . . . .	223
6.2	Récapitulatif des contributions des chapitres 4 à 5. . . . .	224

## TABLE DES FIGURES

---

C.1	Exemple cas 1 dans l'élément réel . . . . .	254
C.2	Exemple cas 2 dans l'élément réel . . . . .	254
C.3	Exemple cas 3 dans l'élément réel . . . . .	255
C.4	Support EF curviligne de la ligne de contact . . . . .	256
C.5	Interface graphique pour faciliter le développement de la fonction ligne de niveau avec : le maillage de la surface interne, la sélection des éléments à découper, la sélection d'une hauteur de fluide, l'élément réel, l'élément de référence contenant l'iso-zero de la ligne de niveau. . . . .	257
E.1	Passer du maillage 1 au maillage 2 . . . . .	269
E.2	Point du maillage 2 inclu dans une maille . . . . .	269
E.3	Calculer les valeurs des paramètres . . . . .	270
E.4	<i>Inverse mapping</i> . . . . .	270

## TABLE DES FIGURES

---

# Chapitre 1

## Introduction

Ce chapitre d'introduction aborde les problématiques associées à l'interaction fluide-structure entre un réservoir et un liquide interne à surface libre. A partir d'une vue d'ensemble d'applications industrielles allant de la bio-mécanique à l'aérospatial, nous soulèverons le cas particulier du comportement hydroélastique de réservoirs précontraints abordé dans la suite du manuscrit. Cette précontrainte vient, par exemple, d'une pressurisation et peut être à l'origine de décalages des fréquences de résonance du système. Celles-ci ne sont pas estimées à l'heure actuelle via les approches linéaires classiques. L'originalité principale du travail consistera donc à calculer un état d'équilibre non-linéaire géométrique d'un réservoir pressurisé par un fluide (liquide ou gaz) avant l'analyse de son comportement dynamique. L'objectif est d'estimer l'influence d'une telle précontrainte sur les fréquences couplées hydroélastiques de l'ensemble réservoir-liquide interne. Pour cela, nous nous servirons de la méthode des éléments finis et d'approches par projection sur bases réduites.

### Contenu

---

1.1	Contexte et applications industrielles . . . . .	38
1.2	Enjeux de la thèse : hydroélasticité et état précontraint . . . . .	41
1.3	Approche proposée et contenu des chapitres . . . . .	47
1.4	Contributions originales de la thèse et valorisations . . . . .	50

---

## 1.1 Contexte et applications industrielles

### 1.1.1 Modélisation du comportement mécanique de réservoirs couplés à des liquides internes

Dans le cadre de cette thèse, nous étudions le comportement statique et dynamique de réservoirs précontraints<sup>1</sup> contenant un liquide interne à surface libre via la méthode des éléments finis (MEF). L'interaction fluide-structure entre un réservoir élastique et son contenu fait encore l'objet de nombreuses recherches, même si les travaux précurseurs apparaissent dès les années soixante dans le domaine aérospatial [1]. En effet, lors de la conception des réservoirs de lanceurs ou de satellites, l'influence du ballottage du carburant joue un rôle significatif sur la dynamique du système. Ce phénomène peut être à l'origine d'échecs ou de retards de missions spatiales (notons que pour un satellite, sa durée de vie dépend de la quantité de carburant disponible pour la correction de sa trajectoire). De nombreuses autres applications industrielles sont aussi concernées par des problématiques d'interaction fluide-structure avec un liquide interne à surface libre (voir Fig. 1.1).

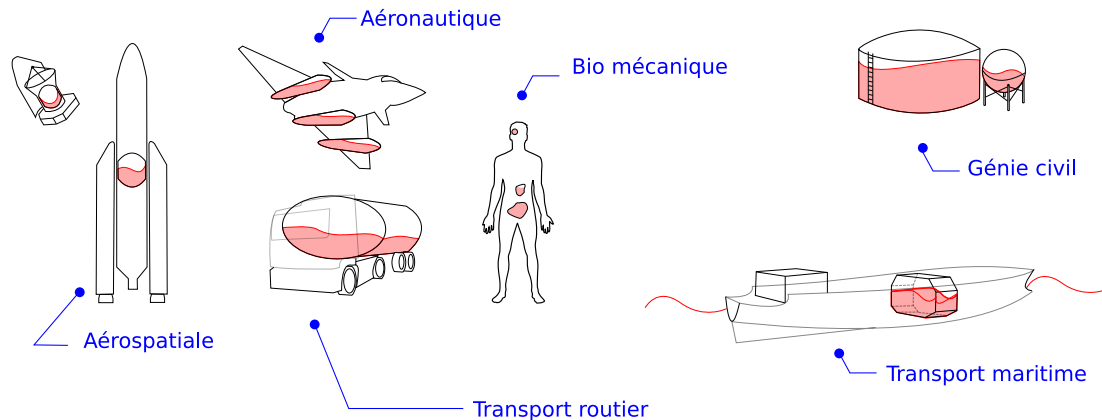


FIGURE 1.1 – Exemples de cas d'applications de réservoirs contenant un fluide interne à surface libre.

Nous proposons ci-après des exemples non-exhaustifs d'applications nécessitant l'étude du comportement statique et/ou dynamique de tels systèmes. Ces cas sont catégorisés dans un premier temps par domaines industriels. En **aéronautique** le ballottage du kérosène contenu dans les ailes d'avions peut avoir un impact sur le son comportement dynamique sous écoulement [2] (aéroélasticité). D'autres problèmes portent sur le dimensionnement de systèmes de contrôle actif des vibrations de structures

---

1. Précontrainte : L'état précontraint est associé à un état d'équilibre statique avec prise en compte de non-linéarité géométriques (hors du cadre de l'hypothèse classique des petites perturbations).

minces, assimilées à une aile, en contact avec un liquide interne [3]. Revenons dans le domaine de l'**aérospatial** et en particulier sur le ballonnement du carburant des réservoirs de satellites en orbite. Dans ce cas, les tensions superficielles jouent un rôle important et difficile à prévoir, sur la dynamique des liquides en micro-gravité. Certains ont imaginé des solutions basées sur des membranes très souples pour amortir ce phénomène [4, 5, 6]. D'autres ont proposé des études portant sur la forme des réservoirs ou sur des systèmes de contrôle actif. Un autre effet, plus en lien avec les développements qui vont suivre, concerne le couplage hydroélastique<sup>2</sup> entre les vibrations d'un réservoir pressurisé et le fluide interne lors du décollage. Différentes études montrent que l'effet d'une pressurisation peut avoir une influence sur le comportement hydroélastique d'un réservoir, tel qu'un décalage des fréquences de résonance [7]. Dans le domaine du **transport routier**, le ballonnement peut modifier la dynamique des véhicules transportant du liquide menant parfois à des accidents de la route [8]. Certains s'intéressent au contrôle de ce type de véhicules avec une grande quantité de liquide [9] ou à l'influence de la forme du réservoir sur le ballonnement [10]. Les applications liées au **transport maritime** sont d'une importance économique et écologique cruciale. Par exemple, les conséquences de l'impact de liquides sur les parois internes de réservoirs de méthaniers peuvent être dramatiques en conduisant par exemple à la ruine de la structure. Estimer l'intensité du champ de pression maximale admissible lié à l'impact de la surface libre sur une paroi élastique est un sujet de recherche actuel [11, 12]. Dans le cadre du **génie civil**, les citernes contenant une immense quantité de carburant doivent résister à des séismes de grandes amplitudes. Dans certains cas, ces structures doivent résister à des impacts d'avions [13]. Toujours dans ce domaine, l'étude de barrages en caoutchouc, pressurisés à l'eau ou au gaz, nécessitent des études à la fois statiques et dynamiques autour de l'état précontraint pour leur dimensionnement [14, 15, 16]. Enfin, en **bio-mécanique**, de nombreuses applications nécessitent l'étude du comportement de matériaux très souples (tels que des tissus organiques) en contact avec des liquides (par exemple pour des études en lien avec l'œil, la vessie ou encore les disques inter-vertébraux avec liquide interne). Dans ce cadre, nous pouvons citer les travaux traitant de la prédiction de la position d'organes pelviens [17] ou d'instillation de la vessie [18] (traitement contre le cancer). En dynamique, la vibration d'une réplique de corde vocale [19] ou les vibrations d'un œil avec un glaucome [20] nécessitent l'estimation d'une précontrainte avant une analyse dynamique couplée. Au travers de toutes ces applications, nous voyons clairement que l'étude des phénomènes mécaniques entre réservoirs et

---

2. Hydroélasticité : Phénomène décrivant les vibrations d'une structure couplées à celles d'un fluide incompressible interne ou externe.



liquides internes peuvent être de différentes natures. Nous verrons en section suivante que certains phénomènes peuvent être découplés en fonction de la plage de fréquence d'intérêt.

Dans la suite de ce travail, nous nous intéressons uniquement à la dynamique de réservoirs avec liquide interne autour d'un état d'équilibre. Cette thèse n'aborde donc pas le cas des liquides en écoulement [21]. De plus, nous nous intéressons aux applications pour lesquelles la structure subit une précontrainte due à des non-linéarités géométriques. Nous choisissons ci-dessous d'illustrer la problématique avec une application spatiale. Un lanceur comme Ariane 5, d'une masse totale de 750 tonnes au décollage, est constitué à 90 % de ses réservoirs et d'ergol liquide. La prédiction des vibrations hydroélastiques est donc un enjeu crucial pour le déroulement du lancement, compte tenu des actions mécaniques colossales nécessaires lors du décollage et du coût économique investi pour l'envoi d'une charge utile (voir Fig. 1.2). Dans le futur, l'utilisation de parois de plus en plus fines et de matériaux souples peuvent nécessiter la prise en compte des non-linéarités matériau et géométrique dans la modélisation.

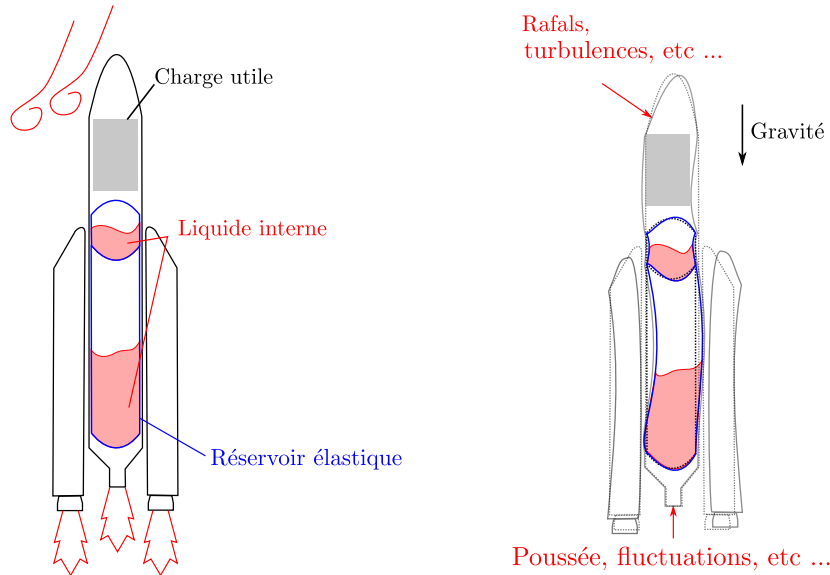


FIGURE 1.2 – Illustration des action mécaniques lors du décollage d'un lanceur.

### Cadre applicatif de la thèse

Parmi tous les exemples d'application proposés, nous nous restreignons aux réservoirs élastiques avec un liquide interne initialement au repos. Nous faisons en particulier l'hypothèse que la structure vibre autour d'un état d'équilibre statique précontraint. C'est à dire que l'état d'équilibre du réservoir soumis à une charge statique (pressurisation d'un gaz ou champ de pression hydrostatique) est suffisamment grand pour changer la raideur de la structure. Les applications concernées par ces hypothèses sont le génie-civil, la biomécanique et le domaine de l'aérospatial.

## 1.2 Enjeux de la thèse : hydroélasticité et état précontraint

### 1.2.1 Dynamique d'un système fluide-structure autour d'états d'équilibre statiques

La durée d'un décollage de lanceur est de l'ordre de quelques minutes. C'est la durée durant laquelle le réservoir se vide de ces ergols pour générer la propulsion de gaz par combustion. A l'échelle des sollicitations dynamiques que subit un réservoir ( $> 10$  Hz) la durée de vidange est suffisamment lente pour être considérée quasi-statique. Nous appelons  $\tau$  le rapport entre le volume de fluide disponible et le volume de fluide au décollage. Les études que nous proposons s'effectue alors pour un  $\tau$  supposé figé vis-à-vis de la dynamique du système (voir Fig. 1.3).

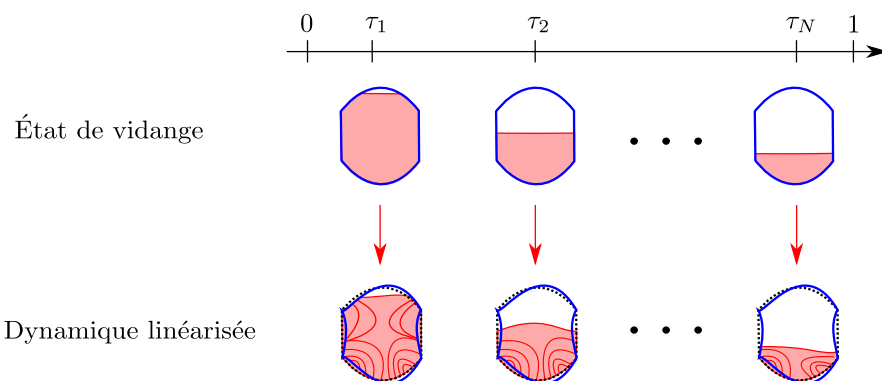


FIGURE 1.3 – Dynamique du problème couplé considéré à chaque taux de vidange donné.

Une difficulté rencontrée lors de la modélisation concerne la prise en compte des mouvements de corps rigides [22]. Pour simplifier nos développements, nous considérons que la structure est encastree sur une partie de son bord dans la suite de ce manuscrit (voir Fig. 1.4). Nous serons alors en mesure

de nous concentrer sur l'influence de la précontrainte sur le comportement dynamique sans prendre en compte les modes de corps rigides.

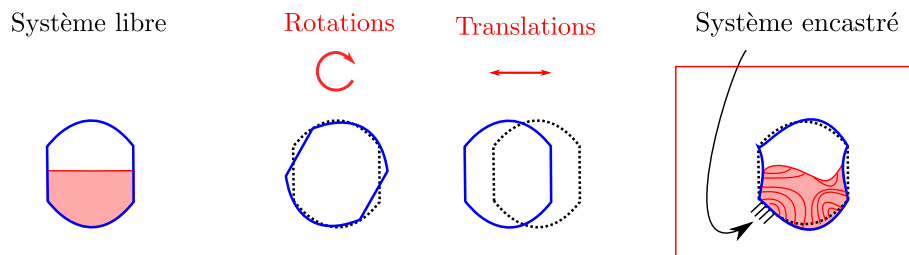


FIGURE 1.4 – Non prise en compte des mouvements de corps rigides dans la suite de l'étude.

### 1.2.1.1 Ballottement, hydroélasticité et échanges d'énergies

Lors de l'excitation dynamique d'un réservoir rempli de liquide autour d'un état d'équilibre statique, plusieurs phénomènes physiques bien distincts sont rencontrés. Ces phénomènes sont *a priori* assez découplés et peuvent être répertoriés en plusieurs catégories. La première concerne les modes dits de ballottement liés à la gravité<sup>3</sup>, qui sont à très basse fréquence ( $< 1$  Hz). De nombreux modèles décrivant la dynamique du ballottement existent dans la littérature [1, 23]. En fonction du niveau de description requis, le ballottement peut être modélisé par des systèmes masses-ressorts ou pendulaires (voir Fig. 1.5), des modèles de fluide potentiel, ou les équations de Navier-Stokes en milieux diphasiques. Ces modes de ballottement existent à moyenne et haute fréquence, mais les énergies potentielles de la surface libre mis en jeu sont généralement négligeables par rapport aux autres phénomènes vibratoires. C'est l'une des raisons pour laquelle ce phénomène ne sera pas développé dans la suite du manuscrit.

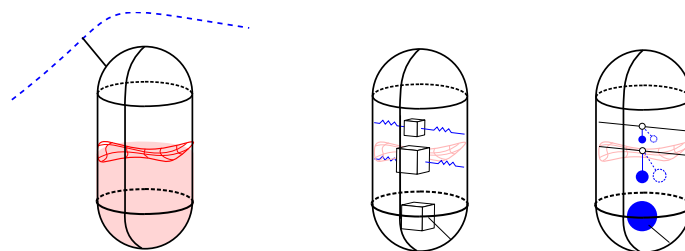


FIGURE 1.5 – Exemples de modèles masse-ressort ou pendulaire associés au ballottement.

3. La prise en compte de la gravité est à l'origine des modes de ballottement en dynamique.

## 1.2. ENJEUX DE LA THÈSE : HYDROÉLASTICITÉ ET ÉTAT PRÉCONTRAIN

La deuxième catégorie porte sur les modes dits hydroélastiques pour lesquels les modes de ballonnement seront négligés. Les échanges prépondérants d'énergie s'effectuent entre l'énergie cinétique du fluide incompressible et les énergies potentielle et cinétique de la structure. Dans ce cas, nous pouvons faire l'hypothèse que la fluctuation de pression au niveau de la surface libre est nulle. Notons que c'est ce phénomène qui sera étudié au cours de ce travail (voire Fig. 1.6).

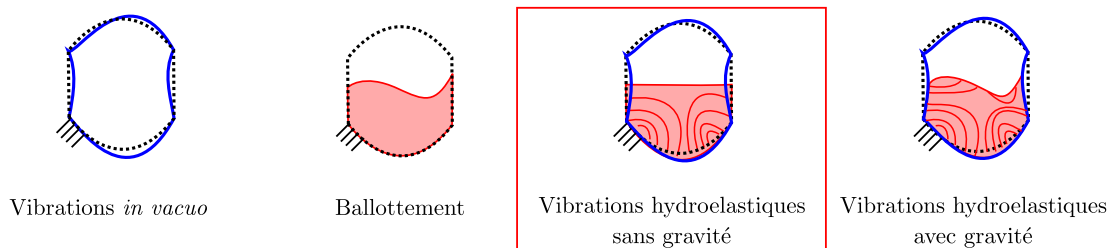


FIGURE 1.6 – Dynamique des lanceurs et caractérisation du comportement dynamique.

Il existe des situations pour lesquelles les phénomènes de ballonnement et d'hydroélasticité se couplent. Dans ce cas, nous parlons d'hydroélasticité avec gravité. Ils sont plutôt rares dans la littérature et sont classiquement associés à une dynamique de la structures très basse fréquence (structure très fine ou très élancée). Ce phénomène a été abordé dans le cadre de mon stage de Master [24] antérieur à la thèse (voir Fig. 1.7). De plus, un travail de synthèse du couplage entre la gravité et l'élasticité d'un réservoir est proposé dans [22]. Nous ne reviendrons pas sur ce phénomène de couplage dans le cadre de cette thèse.

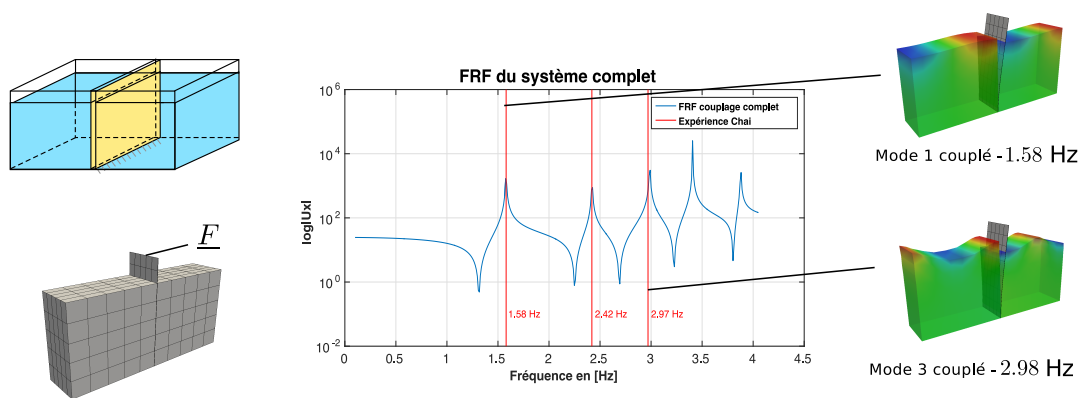


FIGURE 1.7 – Simulation du couplage hydroélastique avec gravité basée sur une expérience [25].

### Hydroélasticité et plage de fréquence d'intérêt

En définitif, le phénomène dynamique d'interaction fluide-structure étudié dans ce travail concerne le comportement hydroélastique sur une plage d'intérêt supérieur à 10 Hz (voir Fig. 1.8). Dans la suite de ce manuscrit, nous ne prendrons pas en compte les effets de gravité sur la dynamique linéarisée. Les structures étudiées seront supposées encastrées sur une partie du bord pour simplifier les équations vis-à-vis des mouvements de corps rigides. De plus, le fluide est supposé incompressible. Aucun phénomène vibro-acoustique n'est pris en compte dans la suite du travail.

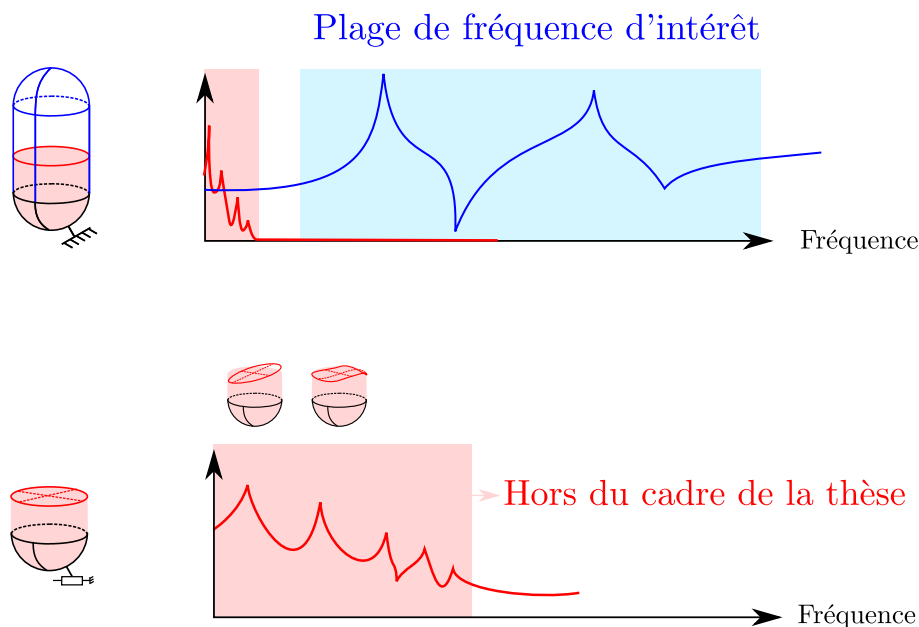


FIGURE 1.8 – Plage de fréquence d'intérêt.

#### 1.2.2 Enjeux de la thèse et problématique : prise en compte d'une précontrainte

Les problématiques récentes de réduction de masse et d'intégrations de nouveaux matériaux amortissant [26] ou matériaux intelligents [27] soulèvent des enjeux sortant du cadre de ce travail. Le principal objectif de la thèse est d'étudier le comportement dynamique linéarisé d'un réservoir partiellement rempli de liquide, autour d'un état précontraint. Nous nous intéressons donc à la réponse d'un système réservoir-liquide, sollicité par une source d'excitation harmonique, sur une plage de fréquence donnée. Nous souhaitons estimer en particulier les fréquences de résonance, pour lesquelles les amplitudes des réponses dynamiques du système fluide-structure peuvent être importantes et donc conduire

par exemple à l'endommagement de la structure (voir Fig.1.9).

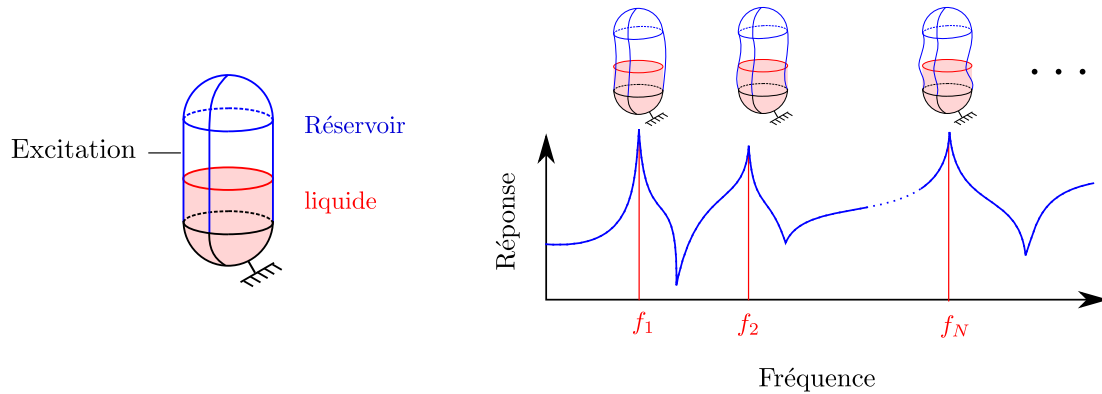


FIGURE 1.9 – Système réservoir-liquide et réponse en fréquence.

Ces fréquences dépendent de nombreux paramètres : le matériau du réservoir, ces conditions aux limites ou encore la quantité de liquide qu'il contient. Un résultat bien connu de l'hydroélasticité linéaire montre qu'en présence d'un liquide incompressible, les fréquences de résonances diminuent. Ce phénomène s'explique compte tenu de la prise en compte de l'énergie cinétique du fluide déplacé : c'est ce qu'on appelle l'effet de masse ajoutée.

Cependant, nous faisons l'hypothèse que la structure est dans un état précontraint. Cette précontrainte peut être causée par l'action du champ de pression hydrostatique du fluide sur la structure ou par pressurisation du réservoir. Quelle serait l'influence d'une précontrainte sur le comportement dynamique ? Nous appellerons dans la suite "état précontraint" la configuration d'équilibre statique prenant en compte les non-linéarités géométriques et de forces suivées. C'est à dire que le déplacement induit par une charge statique est suffisamment grand pour que cet état soit en dehors de l'hypothèse des petites perturbations. Dans ce cas, la raideur de la structure est modifiée et il devient difficile de prédire l'influence de cette précontrainte sur le comportement dynamique du système (voir Fig. 1.10).

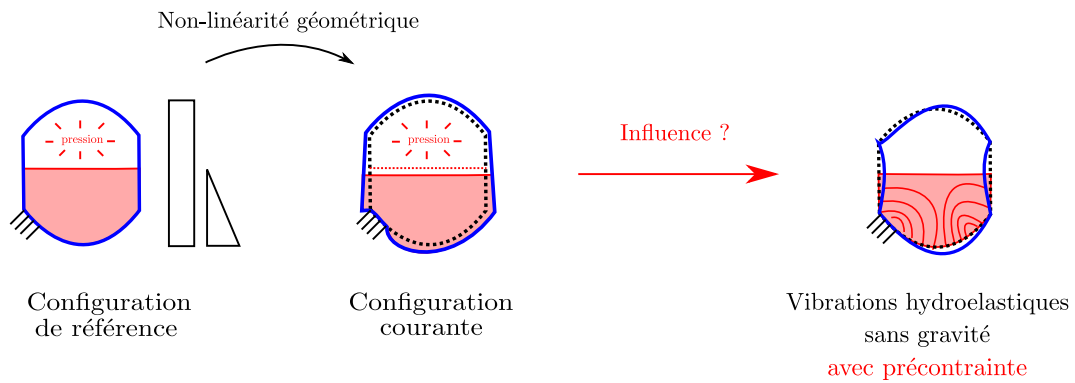


FIGURE 1.10 – État précontraint de la structure élastique causée par l’action du fluide interne.

### Problématique

Peut-on quantifier, avec un outil numérique, l’influence d’une précontrainte sur le comportement dynamique d’une structure élastique contenant un liquide interne à surface libre ?

### Approche proposée

Nous avons choisi de développer dans ce travail une approche en deux étapes :

- Étape 1 : Calcul d’un état statique non-linéaire ;
- Étape 2 : Calcul des vibrations hydroélastiques couplées linéarisées.

Pour ce faire, nous nous basons sur un code éléments-finis développé au cours de la thèse.

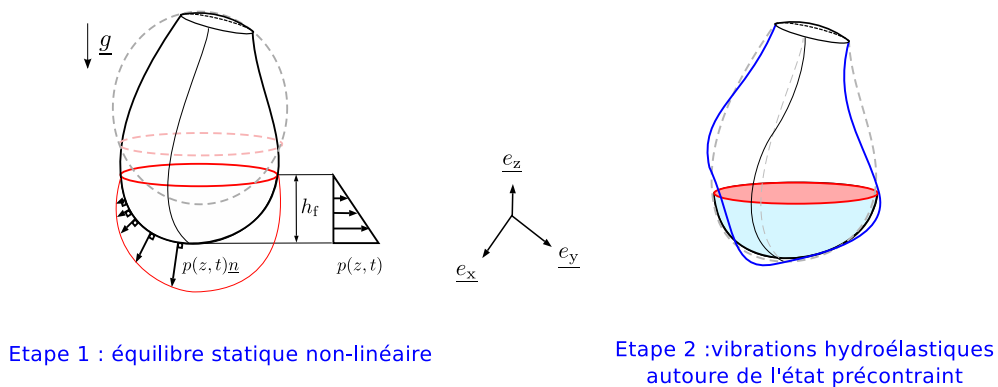


FIGURE 1.11 – Approche proposée en deux étapes.

### 1.3 Approche proposée et contenu des chapitres

Cette thèse est donc consacrée à la modélisation et à la simulation du comportement dynamique de réservoirs précontraints. L'originalité principale est de prendre en compte les non-linéarités géométriques d'un état statique dans nos modèles et d'étudier son influence sur la dynamique linéarisée de l'ensemble. Ainsi, nous proposons une approche qui se décompose en deux parties (voir Fig. 1.11) :

- Le calcul d'un état précontraint en statique non-linéaire ;
- Le calcul des vibrations couplées linéarisées autour de l'état précontraint.

**Partie 1** : Cette première partie porte uniquement sur le calcul de l'état précontraint. Nous sommes donc sur des problèmes statiques non-linéaires dans lesquelles le fluide, sous réserve d'hypothèses, est modélisé par des forces suiveuses statiques (uniformes ou hydrostatiques). Deux chapitres sont proposés : l'un concerne la résolution d'un problème d'ordre complet et l'autre propose une approche originale par réduction de modèle *a priori* :

- **Chapitre 2 : Calcul de l'état d'équilibre statique non-linéaire géométrique avec forces suiveuses hydrostatiques** - A partir d'une synthèse bibliographique de travaux existants en statique non-linéaire, nous présentons les points clés du calcul de l'état précontraint de réservoirs avec liquide interne. Ce chapitre se base sur la prise en compte de forces suiveuses dans l'écriture de la formulation variationnelle et sur l'utilisation de la méthode des éléments finis en grandes transformations. Une approche incrémentale quasi-statique est proposée et des algorithmes (méthode de Newton-Raphson et méthodes de continuations) y sont développées. Une des originalités de ce chapitre consiste à utiliser une méthode de ligne de niveau pour l'intégration numérique d'opérateurs éléments finis. Ces opérateurs (scalaires, vectoriels et matriciels) dépendent d'une interface fluide-structure non-coïncidente avec la discrétisation de la structure au cours d'une transformation. De nombreux exemples numériques y sont proposés montrant l'efficacité de l'approche et la validité de notre code éléments finis développé. Ainsi, cet état d'équilibre non-linéaire, défini comme état précontraint, peut être utilisé tel quel dans la Partie 2 consacrée à la prédiction du comportement dynamique linéarisé autour de l'état d'équilibre



du système fluide-structure précontraint.

- **Chapitre 3 : Équilibre statique non-linéaire géométrique avec forces suiveuses unificables par construction d'une base réduite PGD *a priori*** - Au même titre que pour le chapitre 2, ce troisième chapitre aborde le calcul d'un équilibre statique non-linéaire avec forces suiveuses. Son originalité se base sur l'utilisation de la Proper Generalized Decomposition (PGD) *a priori* pour construire une base réduite d'un problème non-linéaire géométrique avec forces suiveuses. L'hypothèse fondamentale consiste à supposer que la solution approchée peut être décomposée en une série de produits de fonctions à variables séparées. Cette forme est ensuite introduite dans les équations non-linéaires, écrites sous forme variationnelle, avant la résolution. De ce fait, le nombre de problèmes à résoudre est réduit car il dépend du nombre de termes de la série. L'intérêt d'une telle formulation permettrait à terme (i) de générer une base réduite multiparamétrique sans résoudre le modèle d'ordre complet et (ii) de pouvoir construire une solution rapprochée en temps réel. Néanmoins, à l'heure actuelle, même si nous ne considérons qu'un paramètre de pression uniforme, la prise en compte de non-linéarités géométriques conduit à une formulation complexe sur l'aspect technique : à la fois lors de la formulation, de la discrétisation et de la résolution des sous-problèmes qui en découlent. Les résultats montrent la faisabilité d'une telle approche et son potentiel dans le cadre du calcul statique non-linéaire. Cette démarche n'est pas classique et soulève encore de nombreuses problématiques intéressantes à explorer.

**Partie 2** : La seconde partie de la thèse est consacrée aux vibrations couplées linéarisées autour de l'état précontraint. A partir des méthodes développées en Partie 1, nous sommes dans une situation où l'état d'équilibre non-linéaire du réservoir est connu. Deux chapitres y sont proposés. Le premier porte sur un rappel des formulations couplées hydroélastiques classiques. L'une d'entre elle fait apparaître une matrice de masse ajoutée, coûteuse à calculer et à stocker, et pouvant conduire à des études dynamiques prohibitives en temps de calcul. Une extension vers une approche par projection sur base sèche permet de construire une matrice réduite de masse ajoutée et réduire ainsi de façon significative le temps de calcul. L'autre chapitre rassemble les pièces du puzzle étant donné que nous nous servons des résultats du chapitre 1 et du chapitre 4. Ce dernier chapitre apporte une réponse à

la problématique de l'estimation de l'influence d'une précontrainte sur le comportement hydroélastique d'un réservoir.

- **Chapitre 4 : Vibrations hydroélastiques linéaires : Calcul de la matrice de masse ajoutée par projection sur base de la structure *in vacuo*** - A partir d'une synthèse bibliographique sur l'utilisation de méthodes numériques existantes en interaction fluide-structure, nous rappelons quelques approches pour le calcul des vibrations hydroélastique (sans précontrainte) : en particulier les approches en déplacement/pression ou déplacement/potential de déplacements. Ces deux méthodes peuvent se ramener à un problème aux valeurs propres sur les degrés de liberté de la structure avec la construction d'une matrice de masse ajoutée. Cette matrice à l'avantage de contenir l'information de l'énergie cinétique du fluide incompressible déplacé. Néanmoins, pour un grand nombre de degrés de liberté, la construction de celle-ci devient prohibitive en mémoire et en temps de calcul. C'est pour cela que nous nous sommes intéressés à une approche par projection du problème sur base de structure sèche (ou *in vacuo*). Nous montrons que la formulation de cette méthode permet de réduire le temps de calcul. Ce temps de calcul réduit dépend tout de même du nombre de modes sur une plage de fréquence d'intérêt. Une comparaison entre les deux méthodes, basée sur un exemple issu d'une expérience de la littérature, montre le gain en temps de calcul et la validité de l'approche.
  
- **Chapitre 5 : Vibrations hydroélastiques autour d'un état précontraint** - Le dernier chapitre de cette partie aborde la construction du problème couplé hydroélastique, sans gravité, par projection sur une base de modes propres de la structure *in vacuo* (ou structure sèche). Quelque soit l'état de précontrainte, l'approche s'inspire de ce qui est fait dans le cadre de problèmes semi-analytiques pour des structures simples (cylindres ou plaques). L'étude de convergence sur un problème simple montre la validité de l'approche. Cette approche est ensuite étendue à des structures plus réalistes montrant la faisabilité de celle-ci. De nombreuses perspectives, détaillées dans ce chapitre, sont alors envisagés pour le dimensionnement de futurs réservoirs de plus souples et plus légers.

## 1.4 Contributions originales de la thèse et valorisations

Les travaux développés dans le cadre de cette thèse ont donné lieu à des résultats originaux. Certains ont fait l'objet de publications dans un journal international, des conférences nationales et internationales. Nous pouvons lister ci-dessous les contributions majeures du travail :

- Nous proposons des résultats de problèmes non-linéaires avec forces suiveuses hydrostatiques dans le cadre de structures en 3D. Un travail de découpage d'éléments quadratiques courbes à 8 nœuds y est proposé [28, 29, 30]. Ce découpage est utilisé par une méthode de ligne de niveau pour intégrer des opérateurs partiellement mouillée sur l'interface fluide-structure.
- Une approche de réduction de modèle PGD<sup>4</sup> *a priori* a été formulée pour la résolution d'un problème non-linéaire géométrique avec forces suiveuses [31]. Il n'existe que très peu d'articles sur les non-linéarités géométriques via la PGD *a priori*. Aucun d'entre eux ne prend en compte les forces suiveuse à ce jour. Nous proposons au sein de ce manuscrit toutes les clés pour formuler et implémenter les opérateurs nécessaires à la résolution d'un tel problème.
- Nous proposons une formulation hydroélastique par projection sur base sèche avec prise en compte de la précontrainte. Cette approche permet de construire un problème hydroélastique réduit faisant apparaître une matrice de masse ajoutée réduite. Nous montrons au travers d'une comparaison entre nos résultats et des résultats expérimentaux de la littérature, la validité et l'efficacité de cette approche [32] par rapport à la construction d'une matrice de masse du problème global [33]. Notons que la prise en compte des précontraintes est estimée via cette contribution.
- Un code calcul nommé PELICAN<sup>5</sup> a été entièrement implémenté sous matlab. La création de ce code de A à Z a été particulièrement formateur. Il démontre la volonté de maîtriser l'intégralité de nos formulations. Même si de nombreux outils numériques libres existants sont disponibles (Code\_aster, FEniCS, FreeFEM++, etc ...), l'objectif était de pouvoir développer de nouvelles

---

4. PGD : Proper Generalized Decomposition

5. PELICAN : Programme ÉLéments finis pour Interaction fluide-structure et Couplage Avec Non-linéarité

méthodes difficiles à implémenter dans des codes existants. Par exemple la continuation avec force suiveuse hydrostatique, la méthode de ligne de niveau sur éléments quadratiques ou l'approche PGD *a priori* en non-linéaire géométrique. Ce prototype de code a aussi contribué à d'autres travaux au sein du laboratoire. En particulier il a été utilisé pour la construction d'opérateurs linéaires tangents d'élastomères précontraints [34, 35].

### Valorisation des travaux

Nous récapitulons ci-dessous les contributions en termes de communications scientifiques qui ont contribué à la diffusion des travaux présentés dans ce manuscrit :

- Un article dans une revue internationale [30] ;
- Trois actes de conférences internationales [29, 33, 32] ;
- Deux actes de conférences nationales [28, 31] ;
- 5 prix de journées jeunes chercheurs :
  - prix du meilleur poster JJCAB 2017 (vibrations) ;
  - prix de la meilleure présentation CSMA juniors 2018 (calcul des structures) ;
  - prix de la meilleure présentation JJCAB 2018 (vibrations) ;
  - prix de la meilleure présentation au CSMA juniors 2019 (calcul des structures) ;
  - prix du meilleur code au concours de code CSMA juniors 2019 (calcul des structures) ;
- Finaliste national de *Ma Thèse en 180 secondes* 2019 (vulgarisation scientifique) ;

#### 1.4. CONTRIBUTIONS ORIGINALES DE LA THÈSE ET VALORISATIONS

---

## Première partie

# État d'équilibre non-linéaire géométrique d'un réservoir rempli de liquide



## Chapitre 2

# Calcul de l'état d'équilibre statique non-linéaire géométrique avec forces suiveuses hydrostatiques

Ce second chapitre porte sur l'évaluation de l'état précontraint d'un réservoir rempli de liquide à partir de la méthode des éléments finis. Trois points particuliers sont ainsi abordés. Le premier concerne l'expression du problème non-linéaire tridimensionnel dans lequel l'action du fluide sur la structure est modélisée par une force suiveuse hydrostatique. Nous détaillons ensuite la linéarisation du problème en explicitant les opérateurs tangents symétriques associés aux non-linéarités matériau, géométriques et de force suiveuses. Une méthode originale de ligne de niveau est finalement développée pour suivre l'évolution quasi-statique de la surface mouillée au cours d'un remplissage de réservoir. Cette méthode est appliquée à des éléments d'interface courbes à 8 nœuds. Les différents développements proposés dans ce chapitre sont validés à travers l'analyse d'exemples numériques montrant la convergence quadratique de l'algorithme de résolution non-linéaire.

### Contenu

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction et état de l'art . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>2.2</b>	<b>Formulation du problème avec forces suiveuses . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>2.3</b>	<b>Linéarisation des travaux virtuels internes et externes . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>2.4</b>	<b>Méthodes de résolution numériques . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>2.5</b>	<b>Méthode de ligne de niveau pour l'intégration numérique . . . . .</b>	<b>77</b>
<b>2.6</b>	<b>Exemples numériques de problèmes statiques non-linéaires . . . . .</b>	<b>84</b>
<b>2.7</b>	<b>Conclusion et contributions . . . . .</b>	<b>104</b>

---



## 2.1 Introduction et état de l'art

### 2.1.1 Calculer l'état précontraint d'un réservoir par la MEF

Ce chapitre concerne le calcul de l'équilibre statique non-linéaire de structures élastiques partiellement remplies de liquide avec l'utilisation de la méthode des éléments finis (MEF). L'objectif est d'évaluer l'état précontraint de réservoirs flexibles en grandes transformations. Les résultats de ces calculs seront utilisés pour estimer l'influence de non-linéarités géométriques sur le comportement dynamique linéarisé de systèmes fluide-structure précontraints. Par exemple, la précontrainte peut générer un décalage des fréquences de résonances [36], qui n'est pas pris en compte dans les approches classiques de vibrations hydroélastiques linéaires [37, 38]. Dans le cadre de cette étude purement statique, nous faisons l'hypothèse que le liquide est non-visqueux, incompressible, au repos et sans tension de surface. Son action mécanique sur la structure est modélisée par un champ de pression suiveur hydrostatique (voir Fig. 2.1).

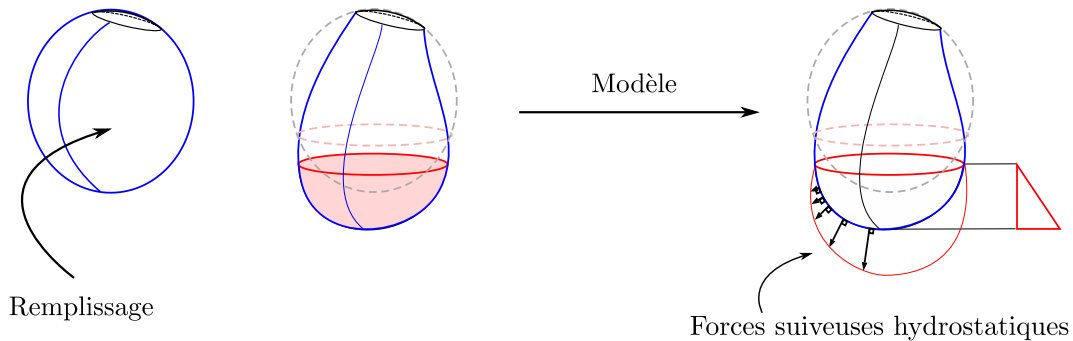


FIGURE 2.1 – Forces suiveuses hydrostatiques

La contribution majeure de ce chapitre est liée à l'utilisation d'une méthode de ligne de niveau [39] pour l'intégration numérique des opérateurs EF (e.g. les vecteurs des efforts extérieurs et la matrice tangente des forces suiveuses[40]). Ces opérateurs sont utilisés dans les algorithmes de résolution de problèmes non-linéaires.

Le calcul de l'état d'équilibre non-linéaire de structures partiellement remplies de liquide ou de gaz, par l'utilisation de la MEF, a été traité sous différents aspects dans la littérature. Dans les années 2000, l'équipe de Schweizerhof a traité des cas avec des pressions qui dépendent du volume du fluide

[41] et des forces suiveuses hydrostatiques [42] en particulier pour l'étude des membranes pressurisées [43]. Toujours dans la même équipe, l'étude de la stabilité de structures très fines est proposée dans [44] et l'influence de la forme de systèmes contenant de multiples réservoirs remplis de liquides est analysée dans [45]. L'un des points clés, commun à cette littérature, repose sur l'expression d'une matrice tangente symétrique des forces suiveuses. Celle-ci est utilisée lors d'une itération de l'algorithme de résolution (e.g. méthode de Newton-Raphson ou méthodes de continuations). Dans notre cas, étant donnée l'hypothèse d'incompressibilité du liquide, la variation de pression peut être exprimée en fonction du déplacement de la structure à l'interface fluide-structure, lors d'une étape de linéarisation. Par conséquent, aucun maillage volumique du fluide n'est nécessaire dans le cadre de ce chapitre. Ce type d'approche a été utilisée récemment dans [46] pour l'analyse de problèmes instables de membranes hyperélastiques soumises à un champ de pression hydrostatique, dans [47] pour l'étude de membranes d'épaisseurs non-uniformes et dans [48, 49] pour des analyses de problèmes instables multiparamétriques. Nous pouvons citer [50] pour le calcul de l'équilibre de structures flottantes soumises à un champ de pression hydrostatique externe à la structure. Enfin, une littérature utilisant une approche basée sur la théorie des coques et plaques a été publiée récemment dans [51].

Un des aspects novateurs de ce chapitre concerne la méthode de ligne de niveau utilisée pour l'intégration numérique des opérateurs ayant comme support la surface courante chargée qui n'est plus coïncidente à la ligne de contact au cours du chargement. Ce cas a été abordé pour des éléments surfaciques linéaires dans [46, 50]. Étant donné que nous utilisons des éléments hexaédriques à 20 nœuds pour mailler notre structure, nous proposons une implémentation originale de méthode de ligne de niveau sur des éléments quadratiques courbes à 8 nœuds. Cette méthode nous permet d'obtenir (i) une nouvelle position des points de Gauss et des poids de Gauss pour l'intégration numérique et (ii) un support de maillage curviligne quadratique de la ligne de contact courante.

Le contenu du chapitre est le suivant. En Section 2.2, nous rappelons les équations non-linéaires, continues et discrétisées par MEF, de structures élastiques soumises à des forces suiveuses hydrostatiques. Une formulation variationnelle de la structure tri-dimensionnelle, basée sur une approche lagrangienne totale y est présentée. En Section 2.3, nous détaillons l'expression des opérateurs obtenus lors d'une linéarisation du principe des travaux virtuels. Ces opérateurs seront utilisés lors de la

résolution du système linéaire tangent utilisé dans les algorithmes de résolution non-linéaire. Ensuite, la Section 2.4 présente quelques aspects numériques développés tels que l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange pour résoudre des problèmes non-linéaires à déplacements imposés ou l'algorithme de continuation pour passer des instabilités. En Section 2.5, nous présentons la méthode de ligne de niveau utilisée pour l'intégration numérique d'éléments partiellement mouillés. Enfin, en Section 2.6, des exemples numériques sont analysés pour valider et montrer l'efficacité de nos développements.

## 2.2 Formulation du problème avec forces suiveuses

### 2.2.1 Configuration de référence et configuration courante

La structure dite en configuration de référence est définie par un domaine  $\Omega_s$  de  $\mathbb{R}^3$  borné par une surface  $\partial\Omega_s$ . Nous considérons deux types de surfaces, notés  $\partial_u\Omega_s$  et  $\partial_t\Omega_s$  qui sont respectivement les surfaces avec conditions aux limites en déplacement et en effort, tel que  $\partial\Omega_s = \partial_u\Omega_s \cup \partial_t\Omega_s$ . Le vecteur position associé à cette configuration est noté en lettres majuscules tel que  $\mathbf{X} = X\mathbf{e}_x + Y\mathbf{e}_y + Z\mathbf{e}_z$ .

La structure dite en configuration courante est définie par un domaine  $\omega_s$  de  $\mathbb{R}^3$ , un domaine borné par une surface  $\partial\omega_s$ . Nous considérons deux types de surfaces, notés  $\partial_u\omega_s$  et  $\partial_t\omega_s$  qui sont respectivement les surfaces avec conditions aux limites en déplacement et en effort, tel que  $\partial\omega_s = \partial_u\omega_s \cup \partial_t\omega_s$  avec  $\partial_u\omega_s$ . Le vecteur position associé à cette configuration courante est noté en lettres minuscules tel que  $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ .

Au cours d'une transformation de la configuration de référence vers la configuration courante, due à un chargement ou un déplacement imposé, nous définissons le déplacement  $\mathbf{u}$  comme la différence entre la position courante et la position de référence d'un point matériel :

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \tag{2.1}$$

avec  $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$ . Dans la suite, nous cherchons à calculer  $\mathbf{u}$  en tous points de la configuration de référence. Cette description est communément associée à une approche lagrangienne du mouvement. Afin de mesurer la variation de déplacement entre deux points voisins par rapport à une position

courante, nous définissons le gradient eulérien tel que :

$$\mathbf{grad} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.2)$$

De la même façon, nous définissons le gradient lagrangien, qui mesure la variation de déplacement entre deux points voisins de la configuration de référence tel que :

$$\mathbf{Grad} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.3)$$

Le gradient de la transformation est défini par :

$$\mathbf{F} = \mathbf{Grad} \mathbf{x} = \mathbf{I} + \mathbf{Grad} \mathbf{u} \quad (2.4)$$

Enfin, nous introduisons le tenseur de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  comme étant une mesure de déformation définie par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.5)$$

avec  $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{C}$  communément appelé tenseur de Cauchy Green droit. Ces définitions nous permettront d'établir les lois de comportement nécessaires au calcul des efforts internes en grandes transformations. Pour plus de détails associés à ces outils de mesure de déformation nous pouvons nous référer aux ouvrages suivants [52, 53, 54, 55]

### 2.2.2 Charge suivieuse hydrostatique

Le liquide est supposé non-visqueux, incompressible, sans tension de surface et au repos. L'action du fluide sur la structure est modélisée par un champ de pression hydrostatique  $p(z, h)$  (voir Fig. 2.2). Celle-ci est définie de façon suivante :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, h) &= 0 && \text{si } z \geq h \\ p(\mathbf{x}, h) &= -\rho_f g(z - h) && \text{si } z < h \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec  $\rho_f$  la masse volumique du fluide et  $h$  la hauteur de la surface libre. L'effort surfacique est porté par la normale extérieure  $\mathbf{n}$  à la surface courante chargée notée  $\Sigma$ .

### 2.2.3 Lois de comportement hyperélastiques

Le solide est supposé homogène, élastique et isotrope. Nous prenons en compte dans le modèle les grands déplacements et, si nécessaire, les grandes déformations. Notons que dans le cas des grands

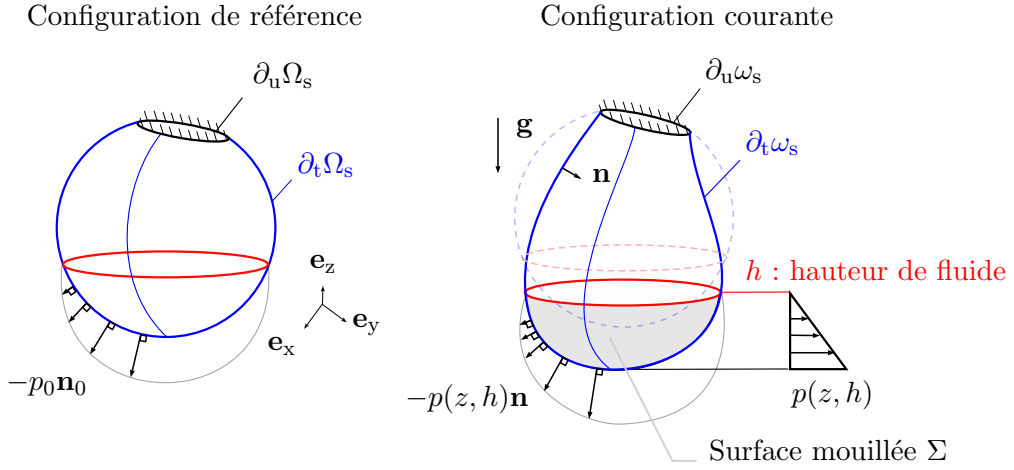


FIGURE 2.2 – Surfaces internes associées à la configuration de référence de la structure  $\Omega_s$  et aux configurations courantes  $\omega_s$ . Le chargement est modélisé par une pression suivieuse hydrostatique sur la configuration courante.

déplacements et faibles déformations, nous utilisons une loi de comportement hyperélastique de Saint-Venant Kirchhoff reliant le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff noté  $\mathbf{S}$  au tenseur de déformation de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  :

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda\text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} \quad (2.7)$$

Cependant, dans le cas des grandes déformations, une loi de comportement hyperélastique quasi-incompressible est plus adaptée (par exemple pour des matériaux en caoutchouc ou des tissus organiques). Ce type de loi suppose l'existence d'un potentiel d'énergie volumique noté  $\Psi$ . Une approche classique consiste à séparer ce potentiel en deux parties : un potentiel volumique  $\Psi_{\text{vol}}$  et un potentiel isochore  $\Psi_{\text{iso}}$ . Ces lois font intervenir les invariants du tenseur modifié de Cauchy Green droit  $\bar{\mathbf{C}} = J^{\frac{2}{3}}\mathbf{C}$  avec  $J = \det(\mathbf{F})$  et  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ . De cette façon, le potentiel s'écrit comme la somme suivante :

$$\Psi = \Psi_{\text{vol}}(J) + \Psi_{\text{iso}}(\bar{C}_I, \bar{C}_{II}) \quad (2.8)$$

avec  $\bar{C}_I = C_I C_{III}^{-\frac{1}{3}}$ ,  $\bar{C}_{II} = C_{II} C_{III}^{-\frac{2}{3}}$  les deux premiers invariants de  $\bar{\mathbf{C}}$  et  $C_I = \text{tr}(\mathbf{C})$ ,  $C_{II} = \frac{1}{2}[\text{tr}^2(\mathbf{C}) - \text{tr}(\mathbf{C}^2)]$  et  $C_{III} = \det(\mathbf{C})$ , les trois invariants de  $\mathbf{C}$ . L'expression du tenseur des contraintes  $\mathbf{S}$  s'obtient par la dérivation du potentiel  $\Psi$  par rapport au tenseur de Cauchy-Green droit tel que :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.9)$$

## 2.2. FORMULATION DU PROBLÈME AVEC FORCES SUIVEUSES

---

Notons que la dérivée seconde du potentiel permet d'obtenir le tenseur d'ordre 4 reliant la variation de la contrainte  $\Delta \mathbf{S}$  par rapport à la variation de la déformation  $\Delta \mathbf{E}$  :

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbb{D} : \Delta \mathbf{E} \quad \text{avec} \quad \mathbb{D} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{C}^2} \quad (2.10)$$

**Références bibliographiques :** Pour plus de précisions sur l'expression de ces opérateurs et les lois de comportement quasi-incompressibles, nous pouvons citer les références suivantes [56, 57, 58, 59]. De plus, nous rappelons en Annexe A le détail des calculs pour les lois de comportement néo-hookeenne, de Mooney-Rivlin et de Yeoh. Nous détaillons en particulier en annexe les points suivants :

- l'expression de la dérivée première des potentiels volumiques et isochores pour le calcul du tenseur des contraintes  $\mathbf{S}$  ;
- l'expression de la dérivée seconde des potentiels volumiques et isochores pour le calcul du tenseur  $\mathbb{D}$  d'ordre 4 ;
- l'écriture de tous ces opérateurs, en notation de Voigt, utilisés dans l'implémentation numérique.

### 2.2.4 Équations locales et formulation variationnelle

Les équations locales définies sur la configuration courante  $\omega_s$  et le bord  $\partial \omega_s$  sont obtenues sous réserve des hypothèses définies précédemment. Pour ne pas alourdir les calculs, nous ne prendrons pas en compte d'efforts volumiques. On a alors :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad \omega_s \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = -p(\mathbf{x}, h) \mathbf{n} \quad \text{sur} \quad \partial_t \omega_s \quad (2.12)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \partial_u \omega_s \quad (2.13)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy. A partir des Eqs. (2.11), (2.12) et (2.13), la formulation variationnelle en configuration courante est donnée par la relation suivante :

$$\int_{\omega_s} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\epsilon} dv = - \int_{\partial_t \omega_s} \delta \mathbf{u} \cdot p(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} ds, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{C}_u \quad (2.14)$$

avec  $\delta \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{grad} \delta \mathbf{u} + \mathbf{grad}^T \delta \mathbf{u})$ , la partie symétrique du gradient du déplacement virtuel par rapport à la configuration de courante, i.e.  $\mathbf{grad} \bullet = \frac{\partial \bullet}{\partial \mathbf{x}}$  et  $\mathcal{C}_u$  l'espace des déplacements cinématiquement

## 2.2. FORMULATION DU PROBLÈME AVEC FORCES SUIVEUSES

---

admissibles de fonctions suffisamment régulières ( $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  sur  $\partial_u \omega_s$ ). Cette formulation s'écrit de façon classique en configuration de référence sur  $\Omega_s$  et son bord  $\partial_t \Omega_s$  comme suit :

$$\int_{\Omega_s} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV = - \int_{\partial_t \Omega_s} \delta \mathbf{u} \cdot p_0(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}_0 dS, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{C}_u \quad (2.15)$$

avec  $\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\delta \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{F})$  le tenseur virtuel de Green-Lagrange,  $\delta \mathbf{F} = \mathbf{Grad} \delta \mathbf{u}$  et  $\mathbf{Grad} \bullet = \frac{\partial \bullet}{\partial \mathbf{X}}$ . Les champs  $p_0$  et  $\mathbf{n}_0$  correspondent à la pression et la normale extérieure ramenées sur la surface de référence. L'expression 2.15 est équivalente à celle du principe des travaux virtuels définie de façon suivante :

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) - \delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{C}_u \quad (2.16)$$

avec  $\delta W_{\text{int}}$  l'énergie virtuelle interne et  $\delta W_{\text{ext}}$  l'énergie virtuelle externe :

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_s} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV \quad (2.17)$$

$$\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = - \int_{\partial_t \Omega_s} \delta \mathbf{u} \cdot p_0(\mathbf{x}, h) \mathbf{n}_0 dS \quad (2.18)$$

Rappelons que dans le cas de forces suiveuses, le travail virtuel des efforts externes dépend de la position courante de la structure, donc du champ de déplacement inconnu  $\mathbf{u}$ .

### 2.2.5 Notations de Voigt

Les notations de Voigt des tenseurs  $\delta \mathbf{E}$  et  $\mathbf{S}$ , notés  $\delta \hat{\mathbf{E}}$  et  $\hat{\mathbf{S}}$ , sont définis pour que le travail virtuel des efforts internes s'écrive sous la forme d'un produit de vecteurs :

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega_0} \delta \hat{\mathbf{E}}^T \hat{\mathbf{S}} dV \quad (2.19)$$

avec

$$\delta \hat{\mathbf{E}} = [\delta E_{11} \quad \delta E_{22} \quad \delta E_{33} \quad 2\delta E_{12} \quad 2\delta E_{23} \quad \delta 2E_{31}]^T \quad (2.20)$$

$$\hat{\mathbf{S}} = [S_{11} \quad S_{22} \quad S_{33} \quad S_{12} \quad S_{23} \quad S_{31}]^T \quad (2.21)$$

Le vecteur  $\delta\widehat{\mathbf{E}}$  peut s'écrire à l'aide d'opérateurs différentiels notés  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}_{\text{NL}}$  détaillés en note de page<sup>1</sup> faisant apparaître de façon explicite le vecteur  $\delta\mathbf{u}$  tel que :

$$\delta\widehat{\mathbf{E}} = \mathcal{B} \delta\mathbf{u} + \mathcal{B}_{\text{NL}}(\mathbf{u}) \delta\mathbf{u} \quad (2.23)$$

On en déduit alors l'expression de l'énergie interne tel que :

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{u}^T [\mathcal{B} + \mathcal{B}_{\text{NL}}(\mathbf{u})]^T \widehat{\mathbf{S}} dV \quad (2.24)$$

Cette forme nous sera utile pour l'étape de discrétisation.

### 2.2.6 Vecteur des efforts intérieurs

Considérons une discrétisation spatiale du domaine  $\Omega_s$  notée  $\Omega^h$ . Les champs discrétisés éléments finis  $\mathbf{u}$  et  $\delta\mathbf{u}$  sont notés respectivement  $\mathbf{u}^h$  et  $\delta\mathbf{u}^h$  tels que :

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^{N_n} N_i(\mathbf{X}) \mathbf{u}_i, \quad \delta\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^{N_n} N_i(\mathbf{X}) \delta\mathbf{u}_i \quad (2.25)$$

avec  $N_n$  le nombre de nœuds,  $N_i$  les fonctions de formes éléments finis et  $\mathbf{u}_i = [u_i \ v_i \ w_i]^T$  les vecteurs des inconnues nodales en chaque nœud (de même pour  $\delta\mathbf{u}_i$ ). Chacun de ces vecteurs peut s'écrire sous forme matricielle sous la forme :

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{N} \mathbf{q}, \quad \delta\mathbf{u}^h = \mathbf{N} \delta\mathbf{q} \quad (2.26)$$

avec  $\mathbf{N}$  une matrice de fonctions de formes de taille  $(3 \times 3N_n)$  et  $\mathbf{q} = [\mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T \dots \mathbf{u}_{N_n}^T]^T$  un vecteur d'inconnues nodales de taille  $(3N_n \times 1)$  (de même pour  $\delta\mathbf{q}$ ). A cette étape, nous pouvons introduire les matrices des dérivées des fonctions de forme  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}_{\text{NL}}$  définies par :

$$\mathbf{B} = \mathcal{B} \mathbf{N} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{B}_{\text{NL}}(\mathbf{q}) = \mathcal{B}_{\text{NL}}(\mathbf{u}^h) \mathbf{N} \quad (2.28)$$

---

1. Opérateurs différentiels linéaires  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}_{\text{NL}}$  :

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial Y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial Z} \\ \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial X} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial Z} & \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Z} & 0 & \frac{\partial}{\partial X} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_{\text{NL}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Z} & \frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Z} & \frac{\partial w}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Z} \\ \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Z} & \frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Z} & \frac{\partial w}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$



Ainsi, l'expression des travaux virtuels discrétisés des efforts internes s'écrit à partir de l' Eq. (2.24) et des matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}_{\text{NL}}$  sous forme suivante :

$$\delta W_{\text{int}}^{\text{h}} = \delta \mathbf{q}^{\text{T}} \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}) = \int_{\Omega^{\text{h}}} [\mathbf{B} + \mathbf{B}_{\text{NL}}(\mathbf{q})]^{\text{T}} \widehat{\mathbf{S}} dV \quad (2.29)$$

faisant apparaître explicitement le vecteur des efforts intérieurs noté  $\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q})$ . Ce vecteur dépend de façon non-linéaire du vecteur inconnu  $\mathbf{q}$  dans la mesure ou l'opérateur  $\mathbf{B}_{\text{NL}}$  contient des termes linéaires par rapport à  $\mathbf{u}^{\text{h}}$  et  $\widehat{\mathbf{S}}$  contient des termes quadratiques pour la loi de Saint-Venant Kirchhoff (voir Annexe A pour un cas plus général).

**Remarque sur la construction de  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  :** La construction de cet opérateur s'effectue à l'aide d'éléments tri-dimensionnels iso-paramétriques [60, 61]. Un calcul de matrice élémentaire, basé sur une intégration par points de Gauss, est effectué sur un élément de référence et un assemblage sur l'ensemble des éléments conduit au vecteur des efforts intérieurs global (voir 2.3).

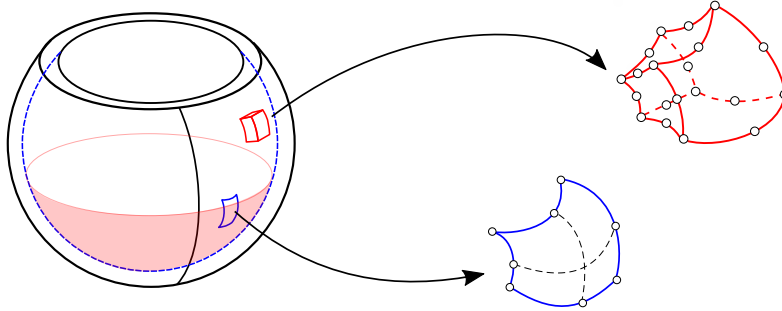


FIGURE 2.3 – Discrétisation EF avec éléments hexaédriques à 20 noeuds.

### 2.2.7 Vecteur des efforts extérieurs

Pour exprimer le vecteur des efforts extérieurs noté  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ , nous considérons l'expression du travail virtuel des efforts extérieurs discrétisé sur la configuration courante tel que :

$$\delta W_{\text{ext}}^{\text{h}} = - \int_{\Sigma^{\text{h}}} \delta \mathbf{u}^{\text{h}} \cdot p \mathbf{n} ds \quad (2.30)$$

$$= \rho g \int_{\Sigma_0^{\text{h}}} \delta \mathbf{u}^{\text{h}} \cdot (z^{\text{h}} - h) (\mathbf{x}_{,\xi}^{\text{h}} \times \mathbf{x}_{,\eta}^{\text{h}}) dS \quad (2.31)$$

$$= \delta \mathbf{q}^{\text{T}} \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (2.32)$$

avec  $\Sigma^{\text{h}}$  la surface chargée discrétisée en configuration courante et  $\Sigma_0^{\text{h}}$  est la surface EF paramétrée par  $(\xi, \eta)$  avec  $dS$  tel que  $dS = d\xi d\eta$ . Son expression ramenée sur la surface de la configuration de

référence discrétisée s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_{\partial_f \Omega^h} p(\mathbf{x}^h) \mathbf{N}^T(\mathbf{x}_{,\xi}^h \wedge \mathbf{x}_{,\eta}^h) dS \quad (2.33)$$

**Remarque sur la construction de  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  :** Au même titre que les efforts internes, le calcul des efforts extérieurs se fait à un niveau élémentaire, mais sur des éléments iso-paramétriques surfaciques. Un assemblage sur l'ensemble des éléments de la surface chargée aboutit au vecteur des efforts extérieurs global  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ .

**Remarque sur l'intégration par points de Gauss :** Une attention particulière doit être portée à la construction des opérateurs élémentaires obtenus par intégration par points de Gauss. En effet, le modèle du champ de pression contient une discontinuité du gradient de pression en  $z = h$ . Il existe des éléments surfaciques dit "partiellement mouillés" nécessitant l'utilisation d'une ligne de niveau pour le calcul de  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ .

### 2.2.8 Expression du problème EF non-linéaire discrétisé

La discrétisation EF de la formulation variationnelle en configuration de référence conduit à l'expression de l'équation d'équilibre non-linéaire discrétisée suivante :

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

avec  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  et  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  les vecteurs d'efforts extérieurs et intérieurs. Dans la suite, nous proposons de résoudre cette équation par une méthode de Newton-Raphson. Pour ce faire, il est nécessaire de linéariser le principe des travaux virtuels afin d'exprimer les problèmes linéaires tangents et les matrices de raideurs tangentes.

## 2.3 Linéarisation des travaux virtuels internes et externes

### 2.3.1 Notations associées à la linéarisation

Dans la suite de ce manuscrit, nous utilisons la notation " $\Delta$ " pour faire référence à la linéarisation d'une fonction ou d'un opérateur, par rapport à une variation de déplacement  $\Delta \mathbf{u}$ . Ainsi, nous rappelons ci-dessous, les expressions de  $\mathbf{E}$ , de  $\delta \mathbf{E}$  associées à leurs linéarisations respectives  $\Delta \mathbf{E}$  et  $\Delta \delta \mathbf{E}$ , en

## 2.3. LINÉARISATION DES TRAVAUX VIRTUELS INTERNES ET EXTERNES

fonction de  $\mathbf{u}$ ,  $\Delta\mathbf{u}$  et du champ virtuel  $\delta\mathbf{u}$ , tels que :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{Grad}\mathbf{u} + \mathbf{Grad}^T\mathbf{u} + \mathbf{Grad}^T\mathbf{u}\mathbf{Grad}\mathbf{u}) \quad (2.35)$$

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{Grad}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{Grad}^T\Delta\mathbf{u} + \mathbf{Grad}^T\Delta\mathbf{u}\mathbf{Grad}\mathbf{u} + \mathbf{Grad}^T\mathbf{u}\mathbf{Grad}\Delta\mathbf{u}) \quad (2.36)$$

$$\delta\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{Grad}\delta\mathbf{u} + \mathbf{Grad}^T\delta\mathbf{u} + \mathbf{Grad}^T\delta\mathbf{u}\mathbf{Grad}\mathbf{u} + \mathbf{Grad}^T\mathbf{u}\mathbf{Grad}\delta\mathbf{u}) \quad (2.37)$$

$$\Delta\delta\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{Grad}^T\delta\mathbf{u}\mathbf{Grad}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{Grad}^T\Delta\mathbf{u}\mathbf{Grad}\delta\mathbf{u}) \quad (2.38)$$

Pour ne pas alourdir les notations, nous admettons de façon implicite les dépendances suivantes :  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{u})$ ,  $\Delta\mathbf{E} = \Delta\mathbf{E}(\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u})$ ,  $\delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{E}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$  et  $\Delta\delta\mathbf{E} = \Delta\delta\mathbf{E}(\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$ . De plus, les tenseurs  $\delta\mathbf{E}$  et  $\Delta\mathbf{E}$  sont de la même forme. Le tenseur des contraintes  $\mathbf{S}$  est relié à  $\mathbf{E}$  par la loi de comportement donc  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{u})$  et la variation  $\Delta\mathbf{S} = \Delta\mathbf{S}(\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u})$  car  $\Delta\mathbf{S} = \mathbb{D} : \Delta\mathbf{E}$ .

Pour les lois de comportement hyperélastiques quasi-incompressibles,  $\mathbb{D} = \mathbb{D}(\mathbf{u})$  (alors que pour la loi de comportement de Saint-Venant Kirchhoff,  $\mathbb{D}$  est constant).

### 2.3.2 Linéarisation des travaux virtuels internes

La linéarisation de Eq. (2.17) s'écrit, dans notre cas, sous la forme de deux termes distincts tels que :

$$\Delta\delta W_{\text{int}}(\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \Delta\delta W_{\text{g}}(\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \Delta\delta W_{\text{m}}(\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \quad (2.39)$$

avec :

$$\Delta\delta W_{\text{g}}(\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega_{\text{s}}} \Delta\delta\mathbf{E} : \mathbf{S} dV \quad (2.40)$$

$$\Delta\delta W_{\text{m}}(\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega_{\text{s}}} \delta\mathbf{E} : \Delta\mathbf{S} dV \quad (2.41)$$

avec  $\Delta\mathbf{S}$  et  $\Delta\delta\mathbf{E}$  les formes linéarisées de  $\mathbf{S}$  et de  $\delta\mathbf{E}$ , par rapport à une variation de déplacement  $\Delta\mathbf{u}$ . Les opérateurs  $\Delta\delta W_{\text{g}}$  et  $\Delta\delta W_{\text{m}}$  sont des formes bilinéaires symétriques en  $\Delta\mathbf{u}$  et  $\delta\mathbf{u}$  et représentent respectivement la raideurs géométrique et la raideur matériau, contribuant à la raideur globale du système. En effet, d'après l'Eq. (2.10), l'expression de la raideur matériaux peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Delta\delta W_{\text{m}}(\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega_{\text{s}}} \delta\mathbf{E} : \mathbb{D} : \Delta\mathbf{E} dV \quad (2.42)$$

Remarque : Le tenseur  $\mathbb{D}$  est symétrique, il y a donc égalité entre  $\Delta\delta W_m(\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$  et  $\delta\Delta\delta W_m(\delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u})$ . Le tenseur  $\Delta\delta\mathbf{E}$  étant symétrique d'après Eq. 2.38, nous pouvons directement en déduire la symétrie de la forme  $\Delta\delta W_g$ .

### 2.3.3 Opérateurs de raideur avec notations de Voigt

Notons  $\Delta\hat{\mathbf{E}}$  la forme de Voigt du tenseur  $\Delta\mathbf{E}$  tel que :

$$\Delta\hat{\mathbf{E}} = [\Delta E_{11} \quad \Delta E_{22} \quad \Delta E_{33} \quad 2\Delta E_{12} \quad 2\Delta E_{23} \quad \Delta 2E_{31}]^T \quad (2.43)$$

La forme bilinéaire de raideur matériau s'écrit sous forme de produit de matrices et de vecteurs dont l'expression est la suivante :

$$\Delta\delta W_m(\delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega_s} \delta\hat{\mathbf{E}}^T \mathbf{D} \Delta\hat{\mathbf{E}} dV \quad (2.44)$$

avec  $\mathbf{D}$  une matrice ( $6 \times 6$ ) associée au tenseur  $\mathbb{D}$ . Rappelons que  $\Delta\hat{\mathbf{E}}$  et  $\delta\hat{\mathbf{E}}$  sont de la même forme, donc  $\Delta\hat{\mathbf{E}} = [\mathcal{B} + \mathcal{B}_{NL}(\mathbf{u})] \Delta\mathbf{u}$ . Nous pouvons en déduire l'expression de  $\Delta\delta W_m$ , écrit comme produit de matrices et de vecteurs, tel que :

$$\Delta\delta W_m(\delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega_s} \delta\mathbf{u}^T [\mathcal{B} + \mathcal{B}_{NL}(\mathbf{u})]^T \mathbf{D} [\mathcal{B} + \mathcal{B}_{NL}(\mathbf{u})] \Delta\mathbf{u} dV \quad (2.45)$$

Le terme sous l'intégrale de  $\Delta\delta W_g$  peut s'écrire sous la forme de produit de matrice tel que

$$\Delta\delta\mathbf{E} : \mathbf{S} = \delta\mathbf{u}^T \mathcal{G}^T \mathbf{S}_{NL} \mathcal{G} \Delta\mathbf{u} \quad (2.46)$$

avec  $\mathbf{S}_{NL}$  une matrice ( $9 \times 9$ ) contenant les termes de  $\mathbf{S}$  par blocs et  $\mathcal{G}$  un opérateur différentiel défini en note de page<sup>2</sup>. On en déduit l'expression de  $\Delta\delta W_g$  tel que :

$$\Delta\delta W_g(\delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega_s} \delta\mathbf{u}^T \mathcal{G}^T \mathbf{S}_{NL} \mathcal{G} \Delta\mathbf{u} dV \quad (2.48)$$

---

2. Définition de l'opérateur différentiel  $\mathcal{G}$  :

$$\mathcal{G}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial Z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial X} \end{bmatrix}, \mathbf{S}_{NL} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{S} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{S} \end{bmatrix}, \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

### 2.3.4 Matrices tangentes matériaux et géométriques

La variation du champ de déplacement discrétisée s'écrit comme combinaison linéaire des fonctions de formes tel que :

$$\Delta \mathbf{u}^h = \mathbf{N} \Delta \mathbf{q} \quad (2.49)$$

avec  $\Delta \mathbf{q}$  les inconnus nodaux d'incrément de déplacement. A partir de Eq. (2.49) et des matrices de dérivées de fonctions de formes Eqs. (2.27) et (2.28), l'expression de la raideur matériau en notation de Voigt défini en Eq. (2.45) s'écrit alors :

$$\Delta \delta W_m(\delta \mathbf{u}^h, \Delta \mathbf{u}^h) = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K}_m \Delta \mathbf{q} \quad (2.50)$$

avec

$$\mathbf{K}_m = \int_{\Omega_s} [\mathbf{B} + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{q})]^T \mathbf{D} [\mathbf{B} + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{q})] dV \quad (2.51)$$

Ensuite, nous pouvons introduire une matrice de dérivée des fonctions de forme notée  $\mathbf{G}_{NL}$  telle que :

$$\mathbf{G}_{NL} = \mathcal{G} \mathbf{N} \quad (2.52)$$

A partir de l'Eq. (2.48) et de  $\mathbf{G}_{NL}$ , nous obtenons l'expression de la matrice tangente géométrique telle que :

$$\Delta \delta W_g(\delta \mathbf{u}^h, \Delta \mathbf{u}^h) = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K}_g \Delta \mathbf{q} \quad (2.53)$$

avec

$$\mathbf{K}_g = \int_{\Omega_0} \mathbf{G}_{NL}^T \mathbf{S}_{NL} \mathbf{G}_{NL} dV \quad (2.54)$$

**Remarques :** Les matrices  $\mathbf{K}_m$  et  $\mathbf{K}_g$  sont symétriques.

### 2.3.5 Linéarisation du travail virtuel des efforts extérieurs

La linéarisation du travail des efforts extérieurs dépend de la variation du champ de pression  $\Delta p$  et de la variation de la normale extérieure  $\Delta \mathbf{n}$  telle que :

$$\Delta \delta W_{\text{ext}} = - \int_{\Sigma} \delta \mathbf{u} \cdot (\Delta p \mathbf{n} + p \Delta \mathbf{n}) ds \quad (2.55)$$

### 2.3. LINÉARISATION DES TRAVAUX VIRTUELS INTERNES ET EXTERNES

avec

$$\int_{\Sigma} \Delta \mathbf{n} ds = \int_{\Sigma_0} (\Delta \mathbf{u}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{\xi} - \Delta \mathbf{u}_{,\eta} \times \mathbf{x}_{\eta}) dS \quad (2.56)$$

D'après Eq. (2.6), l'expression de la variation du champ de pression hydrostatique s'écrit de façon suivante :

$$\Delta p = -\rho_f g (\Delta z - \Delta h) \quad (2.57)$$

avec  $\Delta h$  la variation de la hauteur de fluide due à son incompressibilité et à la gravité au cours d'une itération de l'algorithme de Newton-Raphson. Dans ce cas, nous pouvons réécrire Eq. (2.55) comme suit :

$$\Delta \delta W_{\text{ext}} = - \underbrace{\int_{\Sigma} \delta \mathbf{u} \cdot p \Delta \mathbf{n} ds + \rho_f g \int_{\Sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \Delta z \mathbf{n} ds}_{\Delta \delta W_{\Sigma}(\Delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u})} - \underbrace{\rho_f g \int_{\Sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \Delta h \mathbf{n} ds}_{\Delta \delta W_V(\Delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u})} \quad (2.58)$$

avec  $\Delta \delta W_{\Sigma}$  une forme bilinéaire en  $\delta \mathbf{u}$  et  $\Delta \mathbf{u}$  dépendant de (i) la variation de la normale et (ii) du déplacement de la surface mouillée dans un champ de pression hydrostatique. La forme bilinéaire  $\Delta \delta W_V$  dépend de la variation de hauteur de fluide.

#### 2.3.6 Symétries des formes linéarisées $\Delta \delta W_{\Sigma}$ et $\Delta \delta W_V$

**Symétrie de  $\Delta \delta W_{\Sigma}$**  : La preuve de la symétrie se base sur l'identité suivante (voir démonstration en Annexe B) :

$$\Delta \delta W_{\Sigma}(\Delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) - \Delta \delta W_{\Sigma}(\delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) = - \oint_{\partial \Sigma} p (\delta \mathbf{u} \times \Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{dl} \quad (2.59)$$

qui s'annule si (i)  $p = 0$  sur  $\partial \Sigma$  ou si (ii)  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  sur  $\partial \Sigma$ , avec  $\partial \Sigma$  le bord de la surface mouillée (aussi appelée la ligne de contact). Tous les exemples présentés en Section 2.6 vérifient une combinaison de ces deux conditions.

**Symétrie de  $\Delta \delta W_V$**  : La preuve de la symétrie de  $\Delta \delta W_V$  se base sur une considération géométrique qui lie le déplacement de la surface mouillée et la conservation du volume de fluide déplacé lors d'un incrément dans la boucle de Newton (voir Fig. 2.4). La relation entre  $\Delta h$  et  $\Delta \mathbf{u}$  est la suivante :

$$\Delta h = \frac{1}{|A_f|} \int_{\Sigma} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds \quad \text{avec} \quad A_f = \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z ds \quad (2.60)$$

L'expression de  $\Delta \delta W_V$  s'écrit alors comme suit :

$$\Delta \delta W_V(\Delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = - \frac{\rho_f g}{|A_f|} \int_{\Sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds \int_{\Sigma} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.61)$$

qui est une forme bilinéaire symétrique étant donné la relation suivante :

$$\Delta\delta W_V(\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \Delta\delta W_V(\delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) \quad (2.62)$$

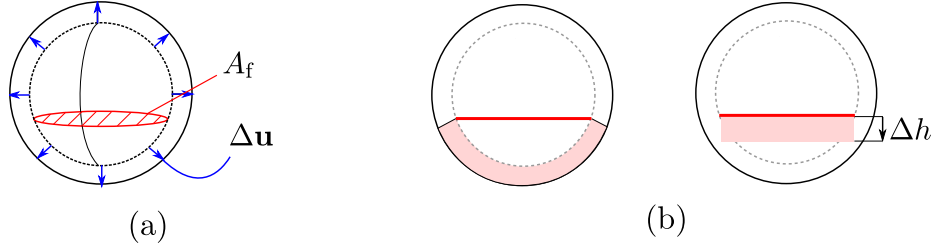


FIGURE 2.4 – (a) Incrément de déplacement  $\Delta\mathbf{u}$  (flèches bleues) de la surface interne entre une configuration donnée (ligne en pointillé) et la suivante (ligne continue) et aire de la surface mouillée (en rouge); (b) Vue en coupe, le volume en rouge généré par le déplacement normal linéarisé de la paroi à travers la surface mouillée est supposée égal au volume du cylindre de hauteur  $\Delta h$  généré par la surface libre.

### Bibliographie associée à la preuve de symétrie

D'autres démonstrations ont été proposées dans la littérature pour prouver les symétries des formes  $\Delta\delta W_\Sigma$  et  $\Delta\delta W_V$  par [42] pour un champ de pression hydrostatique, en utilisant des opérateurs surfaciques. De plus, dans un cadre associé à la dynamique linéarisée de réservoirs, prenant en compte cette raideur de force suiveuse hydrostatique, [37] propose une démonstration se basant sur des opérateurs surfaciques et [62] se base sur des opérateurs volumiques.

#### 2.3.7 Matrice tangente des forces suiveuses

L'expression de la matrice tangente des forces suiveuses est présentée dans cette sous-section. Nous séparons  $\Delta\delta W_\Sigma$  en deux termes

$$\Delta\delta W_\Sigma(\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \underbrace{- \int_\Sigma \delta\mathbf{u} \cdot p \Delta\mathbf{n} ds}_{\Delta\delta W_\Sigma^{(a)}} + \underbrace{\rho fg \int_\Sigma \delta\mathbf{u} \cdot \Delta z \mathbf{n} ds}_{\Delta\delta W_\Sigma^{(b)}} \quad (2.63)$$

En pratique, la construction de la matrice tangente dépend d'une surface paramétrée par  $(\xi, \eta)$  telle que les expressions  $\Delta\delta W_\Sigma^{(a)}$  et  $\Delta\delta W_\Sigma^{(b)}$  s'expriment de manière suivante :

$$\Delta\delta W_\Sigma^{(a)} = - \int_{\Sigma_0} \delta\mathbf{u} \cdot p (\Delta\mathbf{u}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta} + \mathbf{x}_{,\xi} \times \Delta\mathbf{u}_{,\eta}) dS \quad (2.64)$$

$$\Delta\delta W_\Sigma^{(b)} = \rho fg \int_{\Sigma_0} \delta\mathbf{u} \cdot (\Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z)(\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}) dS \quad (2.65)$$

### 2.3. LINÉARISATION DES TRAVAUX VIRTUELS INTERNES ET EXTERNES

Compte tenu des preuves de la symétrie de la sous-section précédente, nous ne gardons que la partie symétrique des Eqs. (2.64) et (2.65) dans la suite. Après une intégration par partie et quelques développements mathématiques, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\Delta\delta W_\Sigma &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} p [\delta\mathbf{u} \cdot (\mathbf{x}_{,\eta} \times \Delta\mathbf{u}_{,\xi}) - \delta\mathbf{u}_{,\xi} \cdot (\mathbf{x}_{,\eta} \times \Delta\mathbf{u})] dS \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} p [\delta\mathbf{u}_{,\eta} \cdot (\mathbf{x}_{,\xi} \times \Delta\mathbf{u}) - \delta\mathbf{u} \cdot (\mathbf{x}_{,\xi} \times \Delta\mathbf{u}_{,\eta})] dS \\ &+ \frac{\rho fg}{2} \int_{\Sigma_0} [(\Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z)\delta\mathbf{u} + (\delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z)\Delta\mathbf{u}] \cdot (\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}) dS\end{aligned}\quad (2.66)$$

Ensuite, à partir de l'équation Eq. (2.66), la forme discrétisée de  $\Delta\delta W_\Sigma$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\Delta\delta W_\Sigma(\Delta\mathbf{u}^h, \delta\mathbf{u}^h) &= \delta\mathbf{q}^T \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0^h} p (\mathbf{N}^T \boldsymbol{\Omega}_\eta \mathbf{N}_{,\xi} - \mathbf{N}_{,\xi}^T \boldsymbol{\Omega}_\eta \mathbf{N}) dS \Delta\mathbf{q} \\ &+ \delta\mathbf{q}^T \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0^h} p (\mathbf{N}_{,\eta}^T \boldsymbol{\Omega}_\xi \mathbf{N} - \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Omega}_\xi \mathbf{N}_{,\eta}) dS \Delta\mathbf{q} \\ &+ \delta\mathbf{q}^T \frac{\rho fg}{2} \int_{\Sigma_0^h} \mathbf{N}^T ((\mathbf{x}_{,\xi}^h \times \mathbf{x}_{,\eta}^h) \mathbf{e}_z^T + \mathbf{e}_z (\mathbf{x}_{,\xi}^h \times \mathbf{x}_{,\eta}^h)^T) \mathbf{N} dS \Delta\mathbf{q} \\ &= \delta\mathbf{q}^T \mathbf{K}_\Sigma \Delta\mathbf{q}\end{aligned}\quad (2.67)$$

avec  $\mathbf{K}_\Sigma$  la matrice tangente issue de contribution de la variation de normale extérieure et de la variation du déplacement  $\Delta z$  de la surface mouillée dans un champ de pression non constant. Les opérateurs  $\boldsymbol{\Omega}_\xi$  et  $\boldsymbol{\Omega}_\eta$  correspondent aux matrices anti-symétriques associées à un produit vectoriel<sup>3</sup> des dérivées du déplacement courant par rapport aux paramètres respectivement notés  $\mathbf{x}_{,\xi}^h$  and  $\mathbf{x}_{,\eta}^h$ .

Ensuite, à partir de l'Eq. (2.61), la forme discrétisée de  $\Delta\delta W_V$  s'écrit directement de la façon suivante

$$\begin{aligned}\Delta\delta W_V(\Delta\mathbf{u}^h, \delta\mathbf{u}^h) &= -\delta\mathbf{q}^T \rho_f h \int_{\Sigma_0^h} \mathbf{N}^T (\mathbf{x}_{,\xi}^h \times \mathbf{x}_{,\eta}^h) dS \int_{\Sigma_0^h} (\mathbf{x}_{,\xi}^h \times \mathbf{x}_{,\eta}^h)^T \mathbf{N} dS \Delta\mathbf{q} \\ &= \delta\mathbf{q} \mathbf{K}_V \Delta\mathbf{q}\end{aligned}\quad (2.69)$$

avec  $\mathbf{K}_V$  la matrice tangente associée à la variation de hauteur de fluide lors d'un incrément.

Finalement, la matrice tangente des forces suiveuses  $\mathbf{K}_f$  est la somme de  $\mathbf{K}_\Sigma$  et  $\mathbf{K}_V$ .

---

3. Matrices anti-symétriques associées à un produit vectoriel :

$$\boldsymbol{\Omega}_\eta = \begin{pmatrix} 0 & -z_{,\eta} & y_{,\eta} \\ z_{,\eta} & 0 & -x_{,\eta} \\ -y_{,\eta} & x_{,\eta} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Omega}_\xi = \begin{pmatrix} 0 & -z_{,\xi} & y_{,\xi} \\ z_{,\xi} & 0 & -x_{,\xi} \\ -y_{,\xi} & x_{,\xi} & 0 \end{pmatrix}\quad (2.68)$$



### 2.3.8 Matrices tangentes et problème linéaire tangent discrétisé

A chaque itération de l'algorithme de Newton-Raphson le système linéaire tangent à résoudre est de la forme :

$$\mathbf{K}_{\text{tan}}\Delta\mathbf{q} = \mathbf{R}(\mathbf{q}) \quad (2.70)$$

avec  $\mathbf{R} = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}$  le résidu d'équilibre et  $\mathbf{K}_{\text{tan}}$  la matrice tangente définie par :

$$\mathbf{K}_{\text{tan}} = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_f \quad (2.71)$$

$\mathbf{K}_m$  est la matrice tangente de raideur matériau [57, 58],  $\mathbf{K}_g$  est la matrice tangente de raideur géométrique [53] et  $\mathbf{K}_f$  est la matrice tangente des forces suiveuses. Les constructions de ces opérateurs sont les points clé des algorithmes présentés en Tabs. 2.1 et 2.2

---

**Algorithm 1 :**  $\mathbf{q} \leftarrow \text{Newton-Raphson}(\varepsilon, \mathbf{q}, h)$

---

**Initialization**  $\mathbf{q}$

**Compute**  $\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{q}, h) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q})$

**While**  $\|\mathbf{R}\|_{\mathcal{L}_2} > \varepsilon$

**Compute**  $\mathbf{K}_{\text{tan}} \leftarrow \mathbf{K}_m(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_g(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_f(\mathbf{q}, h)$

**Solve**  $\mathbf{K}_{\text{tan}}\Delta\mathbf{q} = \mathbf{R}(\mathbf{q})$

$\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}$

**Compute**  $\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{q}, h) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q})$

**End while**

---

TABLE 2.1 – Algorithme de Newton Raphson

---

**Algorithm 2 :** Chargement par incréments de hauteur de fluide

---

**Initialization**  $h$

**For**  $k = [1 : n_{\text{step}}]$

$\mathbf{q}(h) \leftarrow \text{Newton-Raphson}(\varepsilon, \mathbf{q}, h)$

$h \leftarrow h + dh$

**End for**

---

TABLE 2.2 – Chargement par hauteur de fluide

**Remarques :** Dans cette section, nous avons considéré un chargement paramétré par une hauteur de fluide  $h$  en considérant une structure encastree ( $\mathbf{u}_d = \mathbf{0}$  sur  $\partial_u\omega$ ). Notons que le même opérateur de raideur est utilisé pour les cas suivants :

- problèmes à déplacements imposés non-nuls ( $\mathbf{u}_d \neq \mathbf{0}$  sur  $\partial_u \omega$ );
- problème à volume de fluide imposé  $V_f$ ;
- problèmes instables tels que le flambage.

A la section suivante nous proposons quelques détails sur l'implémentation numérique associée à chacun de ces cas de figures listés précédemment. Les exemples numériques qui en découlent seront analysés en Section 2.6.

## 2.4 Méthodes de résolution numériques

### 2.4.1 Déplacements imposés et multiplicateurs de Lagrange

En Section 2.6, la plupart des exemples numériques sont soumis à des déplacement imposés sur une partie du bord du domaine tel que :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \quad \text{on} \quad \partial_u \Omega_s \quad (2.72)$$

Nous rappelons brièvement l'approche basée sur les multiplicateurs de Lagrange pour prendre en compte les déplacements imposés. Le problème discrétisé s'écrit de la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{q}) + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} & = \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \mathbf{q} & = \mathbf{q}_d \end{cases} \quad (2.73)$$

avec  $\boldsymbol{\lambda}$  le vecteur inconnu des multiplicateurs de Lagrange et  $\mathbf{B}$  une matrice rectangulaire satisfaisant les conditions aux limites de Dirichlet. Le problème linéaire tangent associé s'écrit alors de façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{tan}} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}) - \mathbf{B} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{q}_d - \mathbf{B} \mathbf{q} \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

Le critère d'arrêt de l'algorithme de résolution par méthode de Newton-Raphson est dans notre cas la norme  $\mathcal{L}_2$  (i.e.  $\|\mathbf{a}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{a}$ ), du membre de droite de l'équation (2.74).

### 2.4.2 Calcul du volume de fluide à partir du maillage de l'interface

Dans certains cas, le paramètre qui pilote un problème de structure déformée par un liquide interne consiste à piloter un volume de fluide  $V_f$  durant la simulation. Nous proposons un approche basée sur

## 2.4. MÉTHODES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUES

---

une réévaluation de la hauteur de fluide par un méthode de dichotomie. En effet, ceci est possible étant donné que nous sommes capables de calculer un volume sans maillage du domaine fluide par l'utilisation du théorème de la divergence. En Fig. 2.5, nous considérons un domaine fluide  $\Omega_f$  borné par une surface mouillée  $\Sigma$  et une surface libre  $\Gamma$ . Rappelons que cette dernière est supposée plane car nous négligeons l'effet des tensions de surface dans cette étude. Considérons un champ de vecteur

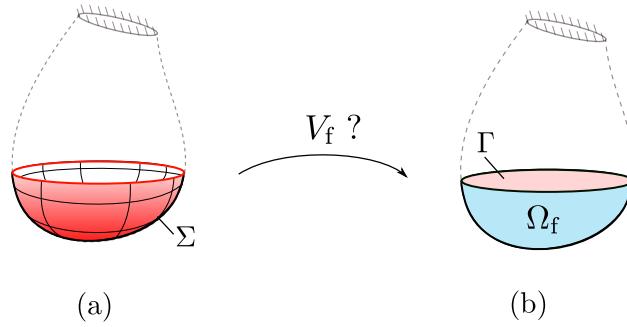


FIGURE 2.5 – (a) Surface mouillée  $\Sigma$  pour le calcul du volume de fluide  $V_f$ ; (b) Domaine volumique  $\Omega_f$  et sa surface libre plane  $\Gamma$ .

approprié noté  $\mathbf{Z}$  tel que  $\text{div}(\mathbf{Z}) = 1$  (par exemple  $\mathbf{Z} = (z - h)\mathbf{e}_z$ ), le volume du fluide est donc calculé via le théorème de la divergence (Green-Ostrogradski) tel que :

$$V_f = \int_{\Omega_f} dV \quad (2.75)$$

$$= \int_{\Omega_f} \text{div} [(z - h)\mathbf{e}_z] dV \quad (2.76)$$

$$= \int_{\Sigma} (z - h)\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Gamma} (z - h)\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.77)$$

Le terme défini sur la surface libre  $\Gamma$  disparaît car celle-ci est horizontale ( $z = h$ ), donc nous obtenons la relation suivante :

$$V_f = \int_{\Sigma} (z - h)\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.78)$$

Cette précédente équation est utilisée pour évaluer la hauteur de fluide par méthode de dichotomie (voir Tab. 2.3) à chaque itération de Newton-Raphson avec déplacement imposé (voir Tabs. 2.4 et 2.5). Certains exemples numériques basés sur le déplacement imposé d'une paroi à volume fixé sont résolus en ne considérant uniquement que le maillage de peau de la surface mouillée.

## 2.4. MÉTHODES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUES

---



---

**Algorithm 3 :**  $h \leftarrow \text{Dichotomie}(V_{\text{init}}, \varepsilon_d, \mathbf{h}_{\text{min}}, h_{\text{min}})$

---

**Compute**  $h_{\text{mid}} = (h_{\text{max}} - h_{\text{min}})/2$

**Compute**  $V(h_{\text{mid}})$

**While**  $| (V(h_{\text{mid}}) - V_{\text{init}})/V_{\text{init}} | > \varepsilon_d$

**If**  $V(h_{\text{mid}}) - V_{\text{init}} > 0$

$h_{\text{max}} \leftarrow h_{\text{mid}}$

**Else**

$h_{\text{min}} \leftarrow h_{\text{mid}}$

**End if**

**Compute**  $V(h_{\text{mid}})$

**End while**

---

TABLE 2.3 – Algorithme de dichotomie

---

**Algorithm 4 :**  $(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}) \leftarrow \text{Newton-Raphson-Deplacement}(\varepsilon, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}_d, V_{\text{init}})$

---

**Compute**  $h \leftarrow \text{Dichotomie}(V_{\text{init}}, \varepsilon_d, \mathbf{h}_{\text{min}}, h_{\text{min}})$

**Compute**  $\mathbf{R} \leftarrow \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{q}, h) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}) - \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{q}_d - \mathbf{B}\mathbf{q} \end{pmatrix}$

**While**  $\|\mathbf{R}\| > \varepsilon$

**Compute**  $\mathbf{K}_{\text{tan}} \leftarrow \mathbf{K}_m(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_g(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_f(\mathbf{q}, h)$

**Solve**  $\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{tan}} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{q} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\mathbf{q})$

$\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}$

$\boldsymbol{\lambda} \leftarrow \boldsymbol{\lambda} + \Delta\boldsymbol{\lambda}$

**Compute**  $h \leftarrow \text{Dichotomie}(V_{\text{init}}, \varepsilon_d)$

**Compute**  $\mathbf{R} \leftarrow \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{q}, h) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}) - \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{q}_d - \mathbf{B}\mathbf{q} \end{pmatrix}$

**End while**

---

TABLE 2.4 – Algorithme de Newton Raphson avec  $V_f$  constant et déplacements imposés

---

**Algorithm 5 :** Chargement par déplacement imposé à volume constant

---

**Initialization**  $\mathbf{q}_d$  and  $V_{\text{init}}$

**For**  $k = [1 : n_{\text{step}}]$

$(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}) \leftarrow \text{Newton-Raphson-Deplacement}(\varepsilon, \mathbf{q}, V_{\text{init}})$

$\mathbf{q}_d \leftarrow \mathbf{q}_d + d\mathbf{q}_d$

**End for**

---

TABLE 2.5 – Algorithme de chargement par déplacement imposé et volume de fluide constant

### 2.4.3 Méthode de continuation par longueur d'arc

La prise en compte de non-linéarités géométriques peut mener certains problèmes à une instabilité tel que le flambage [41, 48]. Une approche classique basée sur une méthode de Newton-Raphson n'est plus appropriée dans ces cas là. Une possibilité consiste à utiliser une méthode de continuation<sup>4</sup> telle que la méthode de longueur d'arc.

Le principe se base sur la prise en compte du paramètre de chargement noté  $\lambda$  comme inconnue du problème. Dans notre cas, le paramètre de chargement serait la hauteur de fluide. L'équation d'équilibre non-linéaire s'écrirait alors de façon suivante :

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}, \lambda) = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{q}, \lambda) = \mathbf{0} \quad (2.79)$$

avec en particulier

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{F}_{\text{ext}} &= - \int_{\Sigma} \delta \mathbf{u}^h \cdot p(z, \lambda) \mathbf{n} ds \\ &= \int_{\Sigma} \delta \mathbf{u}^h \cdot \rho g z^h \mathbf{n} ds - \lambda \int_{\Sigma} \delta \mathbf{u}^h \cdot h \mathbf{n} ds \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$= \delta \mathbf{q}^T \mathbf{F}_1(\mathbf{q}) + \delta \mathbf{q}^T \lambda \mathbf{F}_2(\mathbf{q}) \quad (2.81)$$

Pour résoudre ce problème non-linéaire, il est nécessaire d'introduire une contrainte de longueur d'arc prenant en compte le paramètre de chargement. Cette longueur d'arc notée  $\Delta l$  dépend des déplacements  $\mathbf{q}_P$  d'un nuage de points  $P$  appartenant à la structure déformable et du paramètre de chargement  $\lambda$ . Son expression est définie par :

$$\Delta l = \sqrt{\Delta \mathbf{q}_P^T \Delta \mathbf{q}_P + \psi^2 \Delta \lambda^2 h^2} \quad (2.82)$$

avec  $\psi$  un paramètre d'échelle. Une valeur élevée de  $\psi$  correspond à un problème piloté en chargement et, au contraire, une petite valeur de  $\psi$  correspond à un problème piloté en déplacement.

---

4. Il existe plusieurs méthodes de continuation telles que la longueur d'arc "sphérique", la longueur d'arc "prédiction-correction" [63] ou encore la méthode asymptotique numérique (MAN) [64].

**Récapitulatif des types de chargements**

- Problème piloté par une hauteur de fluide  $h$
- Problème piloté par un déplacement imposé à volume constant
- Problèmes instables par méthode de continuation

**2.4.4 Remarque sur l'intégration numérique**

Quel que soit le chargement proposé, un problème numérique concerne les éléments surfaciques partiellement mouillés. En effet, tous les opérateurs nécessitant une intégration sur  $\Sigma$  tels que  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ ,  $\mathbf{K}_f$  ou  $V_f$  sont concernés par un problème d'intégration numérique. En Section 2.5, nous proposons une approche originale basée sur une méthode de ligne de niveau pour l'intégration numérique de ces opérateurs.

**2.5 Méthode de ligne de niveau pour l'intégration numérique**

**2.5.1 Éléments surfaciques partiellement mouillés**

Le volume de fluide, l'aire de la surface libre et chaque terme des opérateurs EF tels que le vecteur des efforts extérieurs ou la matrice tangente de forces suiveuses sont calculés par intégration numérique. Au cours des itérations, le maillage déformé de la surface interne du réservoir n'est plus coïncident à la surface chargée par le fluide. De ce fait certains éléments surfaciques sont partiellement mouillés comme l'illustre Fig. 2.6). La discrétisation initiale n'est donc plus appropriée pour l'intégration numérique par points de Gauss.

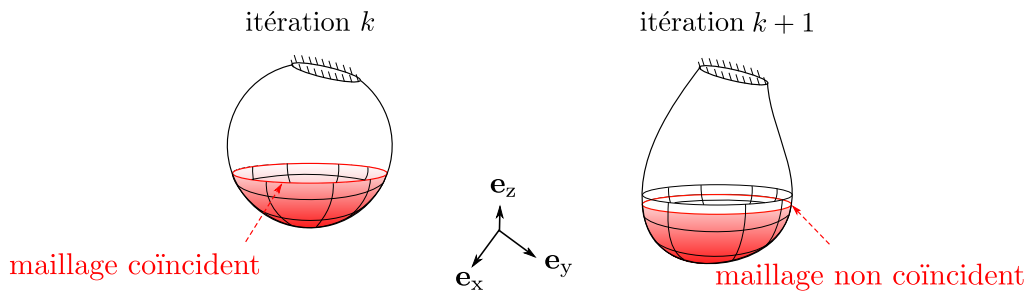


FIGURE 2.6 – Éléments surfaciques partiellement mouillés lors d'une itération de l'algorithme de Newton-Raphson.

## 2.5. MÉTHODE DE LIGNE DE NIVEAU POUR L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Une première approche consiste à trouver les points de Gauss appartenant à la surface mouillée et ceux appartenant à la surface sèche. Si le point de Gauss appartient à la surface sèche, il ne reste qu'à fixer la valeur de poids de Gauss à zéro. Néanmoins, nous ne savons pas si cette approche engendre des erreurs d'intégrations numériques. Pour répondre à cette question, nous proposons une approche basée sur une méthode de ligne de niveau [39] pour déterminer une nouvelle position des points de Gauss et des poids de Gauss des éléments partiellement mouillés.

### 2.5.2 Définition de la ligne de niveau

Rappelons que par hypothèse, nous ne prenons pas en compte l'effet de tensions superficielles dans le modèle. Il est donc possible de définir la ligne de niveau par une fonction scalaire  $\phi$  correspondant à l'équation d'un plan de normale  $\mathbf{e}_z$  et de hauteur  $h$  :

$$\phi(\mathbf{x}) = z - h \quad (2.83)$$

Dans ce cas, la surface interne est séparée en deux parties par ligne avec d'un côté la surface mouillée ( $\phi(\mathbf{x} < 0)$ ) et de l'autre la surface sèche ( $\phi(\mathbf{x} > 0)$ ) (voir Fig. 2.7).

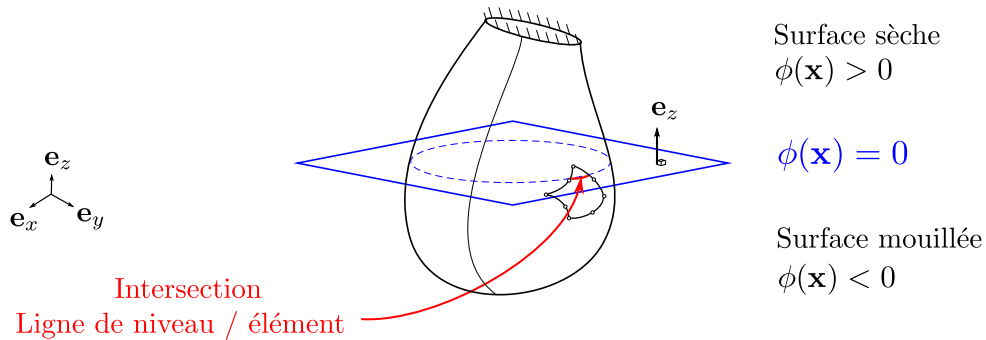


FIGURE 2.7 – Ligne de niveau définie par un plan et son intersection avec la surface interne réelle de la géométrie (en pointillé) et la surface courante éléments finis (en rouge).

L'objectif est de trouver la ligne d'intersection entre la ligne de niveau définie par un plan et la surface interne du réservoir. Dans la pratique, nous cherchons à calculer cette intersection par une discrétisation EF de la ligne de niveau exprimée de façon suivante :

$$\phi^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_{\text{int}}} \phi_i N_i = 0 \quad (2.84)$$

## 2.5. MÉTHODE DE LIGNE DE NIVEAU POUR L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

avec  $N_{\text{int}}$  le nombre de nœuds de la surface interne. A partir d'un "découpage" de l'élément partiellement mouillé, l'intégration numérique est effectuée au travers d'une réévaluation de nouveaux points de Gauss et de Poids de Gauss (voire Fig. 2.8).

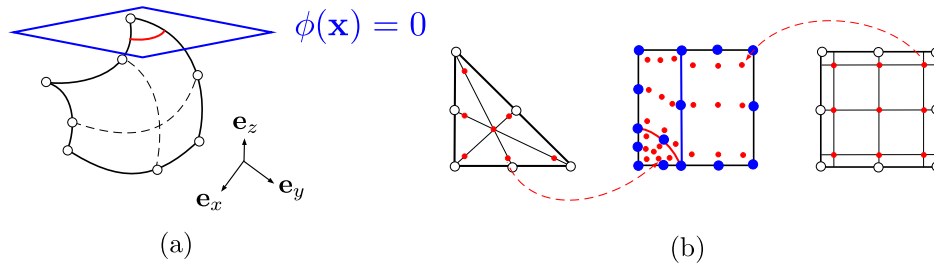


FIGURE 2.8 – (a) Exemple d'un élément coupé par la ligne de niveau en configuration courante; (b) Nouvelles positions des points de Gauss dans l'élément de référence iso-paramétrique.

Cette méthode est particulièrement utile car elle nous permet de traiter des chargements ayant des discontinuées de gradient, indépendamment de la forme et de la discrétisation de la surface interne du réservoir. Cependant, dans le cas d'une discrétisation par éléments finis quadratiques à 8 nœuds, la recherche de l'intersection est une véritable difficulté d'implémentation numérique.

### 2.5.3 Difficulté de recherche d'intersection entre un plan et un élément quadratique à 8 nœuds

Le calcul des nouvelles positions des points de Gauss et des poids de Gauss a été proposé par [46] pour des triangles à 3 nœuds et par [50] pour des quadrilatères à 4 nœuds. Dans notre cas, une des difficultés majeures provient du grand nombre d'intersections possibles entre un plan et un élément quadratique à 8 nœuds. Comme l'illustre la figure 2.9, un élément peut être découpé en 2 parties ou plus en fonction de sa configuration. Un travail d'implémentation numérique, détaillé en Annexe C, doit être effectué pour prendre en compte ces différents cas.

### 2.5.4 Découpage d'un élément partiellement mouillé

Découper un élément partiellement mouillé consiste à trouver l'équation de ligne de contact. Notre approche est la suivante :

- (i) Dans un premier temps, nous évaluons le nombre de points d'intersection sur les quatre bords de l'élément de référence. Cela revient à chercher les racines d'équation du second degré donné



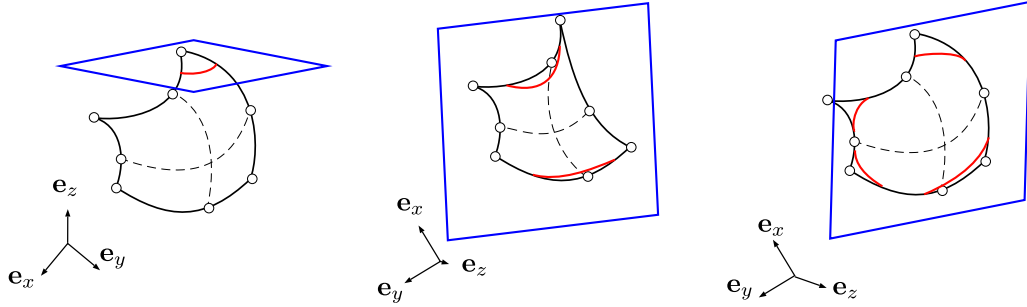


FIGURE 2.9 – Exemples non exhaustifs d'intersections entre un élément quadratique courbe et un plan en configuration courante. Plus de 255 cas peuvent être rencontrés (voir Annexe C).

par :

$$\sum_{i=1}^8 \phi_i N_i(1, \eta) = 0 \quad \text{with } \eta \in [-1, 1] \quad (2.85)$$

$$\sum_{i=1}^8 \phi_i N_i(-1, \eta) = 0 \quad \text{with } \eta \in [-1, 1] \quad (2.86)$$

$$\sum_{i=1}^8 \phi_i N_i(\xi, 1) = 0 \quad \text{with } \xi \in [-1, 1] \quad (2.87)$$

$$\sum_{i=1}^8 \phi_i N_i(\xi, -1) = 0 \quad \text{with } \xi \in [-1, 1] \quad (2.88)$$

(ii) Ensuite, si il n'y a que deux points d'intersection, un grand nombre de cas peut être déduit comme l'illustre la figure 2.10. Notons qu'il est nécessaire de calculer un point interne pour décrire la courbe d'intersection. Afin de minimiser le nombre de cas à implémenter, il est possible de définir des rotations pour se ramener à une seule configuration à coder.

(iii) Si le nombre de points d'intersection est supérieur à deux, il est difficile de déduire le découpage des éléments sans informations supplémentaires (comme nous pouvons le voir Fig. 2.11, il existe plusieurs configurations possibles). Afin de palier ce problème nous effectuons un découpage régulier de l'élément tel que les sous-éléments découpés ne contiennent que deux points d'intersection (voir Fig. 2.12).

Certaines configurations, rarement rencontrées en pratique, ne peuvent être traitées par la méthode précédente (voir Fig. 2.13). Ces cas dégénérés doivent être implémentés uns à uns. Ils sont généralement rencontrés lors de la première itération pour des maillages structurés.

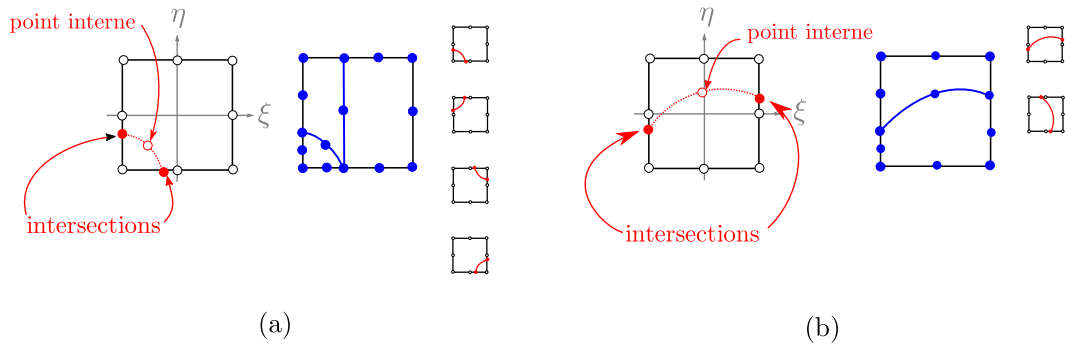


FIGURE 2.10 – Deux cas de découpage d'éléments les plus souvent rencontrés en pratique avec deux points d'intersections : (a) les points d'intersection se trouvent sur deux bords adjacents ; (b) les deux points d'intersection sont sur des bords opposés.

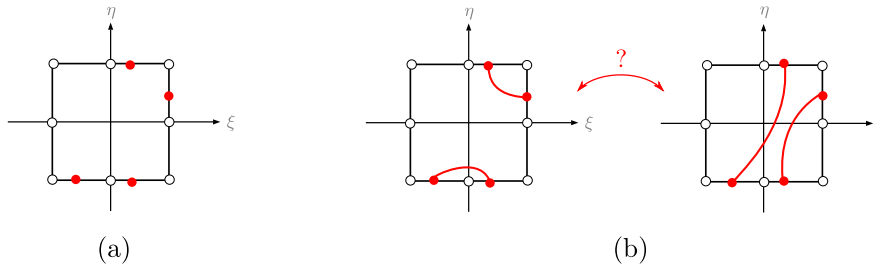


FIGURE 2.11 – (a) Exemple d'un cas à 4 points d'intersection ; (b) Deux cas possibles de découpages sans informations supplémentaires.

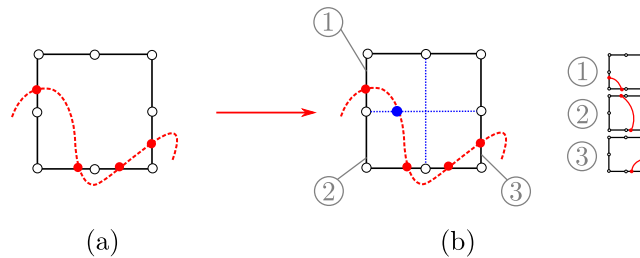


FIGURE 2.12 – (a) Exemple d'un élément de référence ayant quatre points d'intersection ; (b) Découpage régulier de l'élément tel que les éléments sous découpés aient 2 points d'intersection.

Une dernière remarque concerne la taille et la qualité des sous-éléments créés. Étant donné que la seule information retenue concerne les positions des points de Gauss et des poids de Gauss des sous-éléments, la taille des sous-éléments n'influence pas le conditionnement des matrices ou la qualité de la solution EF. Cependant, si cette méthode s'étend à une approche XFEM [39, 65, 66], la qualité du maillage sous-découpé devrait être prise en compte.

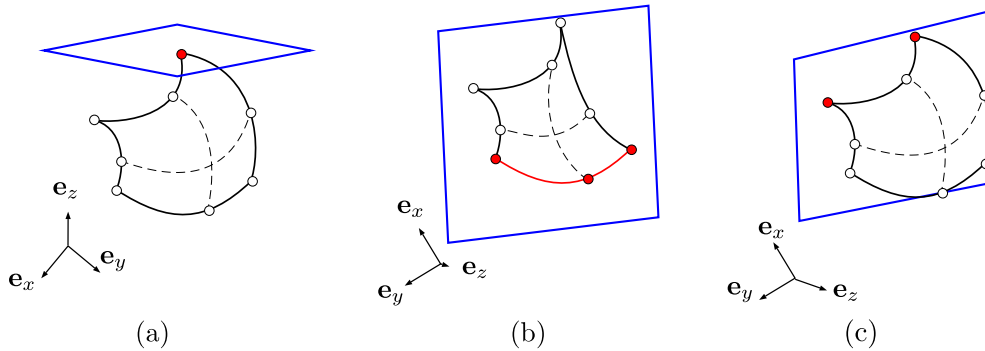


FIGURE 2.13 – Exemples non exhaustifs de cas dégénérés : (a) l'intersection correspond à un noeud du maillage ; (b) l'intersection correspond à un bord du maillage ; (c) L'intersection correspond à deux noeuds du maillage.

### 2.5.5 Exemple d'utilisation de la ligne de niveau

Dans la suite, nous proposons un exemple simple qui consiste à calculer des aires et des volumes à partir de maillages de surfaces. Comme l'illustre la figure 2.14, nous considérons le cas d'un remplissage d'un cube creux rigide entre deux sommets. L'objectif est de calculer l'aire de la surface libre  $A_f$ , l'aire de la surface mouillée  $A_\Sigma$  et le volume de fluide  $V_f$ , en fonction de la hauteur de fluide  $h$ , en n'utilisant que les éléments de surface. La surface est définie par six faces qui sont des éléments quadratiques à 8 noeuds. Deux méthodes sont comparées : (i) une intégration par points de Gauss classique (à 9 points de Gauss) et (ii) la méthode de ligne de niveau.

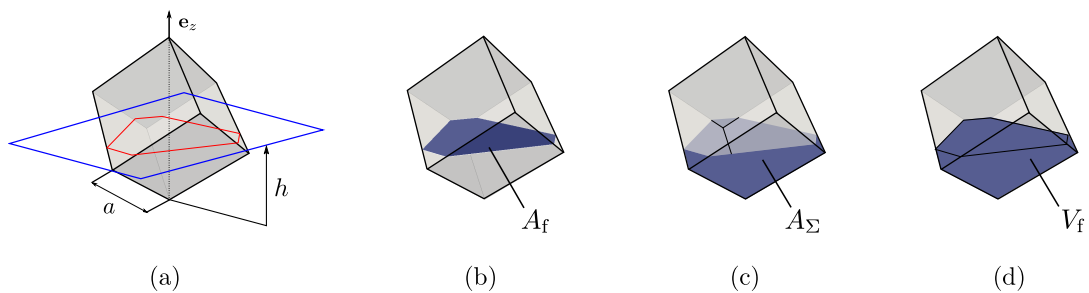


FIGURE 2.14 – (a) Remplissage d'un cube entre deux sommets avec  $a = 2$  m. Visualisation de (b) l'aire de la surface libre  $A_f$ , (c) l'aire de la surface mouillée  $A_\Sigma$  et (d) le volume de fluide  $V_f$  sous la hauteur  $h$ .

Nous avons tracé l'évolution de  $A_f$ ,  $A_\Sigma$  et  $V_f$  en fonction de la hauteur de fluide en Fig. 2.15. La méthode de ligne de niveau montre des résultats très proches des résultats analytiques. L'approche d'intégration numérique classique montre des discontinuités pour le calcul des aires. Bien entendu, un

## 2.5. MÉTHODE DE LIGNE DE NIVEAU POUR L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

maillage plus fin permettrait de réduire ces écarts. Enfin, le calcul du volume pour les deux méthodes numériques se superposent aux résultats analytiques.

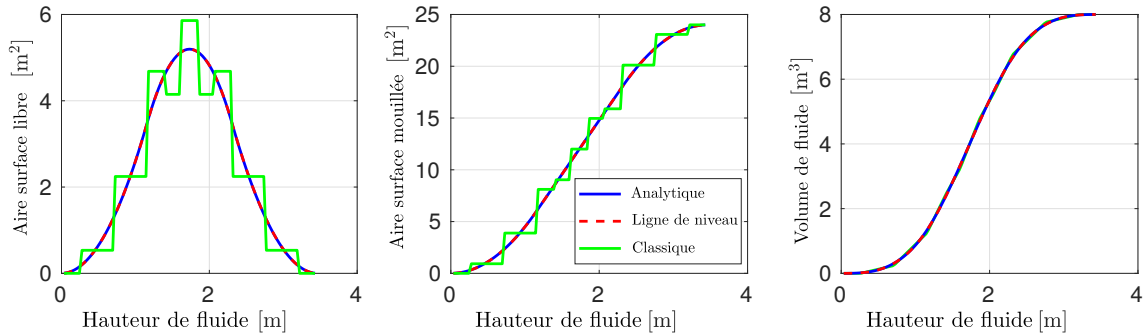


FIGURE 2.15 – Évolution des quantités qui dépendent de la hauteur de fluide  $h$  : (a) aire de la surface libre ; (b) aire de la surface mouillée ; (c) volume de fluide disponible sous la surface libre ; Pour chaque quantité, une solution analytique est tracée (en bleu) ainsi que la solution numérique obtenue avec la méthode de ligne de niveau (ligne rouge en pointillé) et celle obtenue par une intégration classique sans méthode de ligne de niveau avec  $n_{GP} = 9$  points de Gauss (ligne verte).

### 2.5.6 Conclusion sur la méthode de ligne de niveau

En Section 2.5, une méthode originale d'intégration numérique basée sur une méthode de ligne de niveau a été proposée. Cette approche permet de calculer les termes ayant comme support des éléments partiellement mouillés. La difficulté de cette méthode provient du grand nombre de cas d'intersections possibles entre un élément quadratique à 8 nœuds et un plan. Ce développement permet de traiter des chargements ayant des discontinuités de gradients de pression indépendamment du maillage de la surface interne d'un réservoir. Même si l'implémentation numérique est fastidieuse, son utilisation s'adapte aisément à toutes les géométries surfaciques courbes.

**Remarque :** Dans notre cas, la fonction de ligne de niveau est définie par un plan. Étant donné que nous effectuons une discrétisation éléments finis de celle-ci, cette méthode s'appliquerait à n'importe quelles situations pour lesquelles les valeurs de ligne de niveau sont connus aux nœuds du maillage interne. Par exemple, ce type d'information peut provenir d'un code de calcul fluide en milieu diphasique, via le transport d'une ligne de niveau séparant deux fluides. Dans le cas de la prise en compte de tension superficielle, il serait possible de générer un maillage curviligne de la ligne de contact. Des opérations peuvent être effectuées directement sur ce support 1D obtenu avec notre approche (voir

Annexe C).

### Originalité de la méthode de ligne de niveau

- Découpage d'éléments courbes quadratiques à 8 nœuds.
- Calcul de nouveaux points et poids de Gauss adaptés à l'intégration numérique.
- Les opérateurs dépendant de chargements ayant une discontinuité de gradient de pression (ou faible discontinuité) peuvent être traités indépendamment du maillage chargé.
- Le temps de calcul nécessaire au découpage des éléments est négligeable vis-à-vis de la construction des opérateurs matricielles au cours d'une itération de Newton. En effet, le nombre d'éléments surfaciques partiellement mouillés est très faible par rapport au nombre total d'éléments de la surface interne.

## 2.6 Exemples numériques de problèmes statiques non-linéaires

Un code EF en 3D a été implémenté avec la méthode de ligne de niveau proposée en Section 2.5. Le code permet de résoudre des problèmes non-linéaires géométriques avec forces suiveuses hydrostatiques. Plusieurs exemples, à la fois issus de la littérature et inventés dans le cadre de nos développements sont proposés :

**Pb 1** : Problème piloté par une hauteur de fluide [42];

**Pb 2** : Problème piloté par un déplacement imposé à volume de fluide constant [42];

**Pb 3 et 4** : Problèmes avec instabilités et lois de comportement hyperélastiques [48];

**Pb 5** : Succession de 2 problèmes :(i) Remplissage piloté par hauteur de fluide et (ii) Problème à déplacement imposé à volume constant.

L'objectif de ces exemples numériques est de montrer les possibilités offertes par notre modélisation, ainsi que la validité du code dédié au calcul d'un état précontraint par des forces suiveuses. Ainsi nous mettons en évidence : (i) l'utilisation de la ligne de niveau sur des problèmes 3D et (ii) une convergence quadratique des problèmes non-linéaires, démontrant la garantie d'une bonne implémentation

numérique des matrices de raideurs tangentes.

### 2.6.1 Pb1 : Remplissage d'un crochet creux élastique

L'objectif de ce problème numérique est de calculer l'état précontraint d'un crochet creux élastique en fonction de la hauteur de fluide. Ce premier exemple numérique se base sur [42] qui a effectué ce calcul avec des éléments coques. La pression hydrostatique dépend de la masse volumique  $\rho_f = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$  et de l'accélération gravitationnelle arrondie à  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ . Les paramètres du maillage hexaédrique et de la géométrie sont donnés en Fig. 2.16. Le nombre d'éléments a été choisi pour que la solution EF soit indépendante du nombre de maille. Une loi de comportement de Saint-Venant Kirchhoff est utilisée  $\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda\text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I}$  avec le module de Young  $E = 1.0 \text{ GPa}$  et le module de Poisson  $\nu = 0.3$  tel que  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  et  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ . Enfin, la structure est encastrée en  $Z = 0$ .

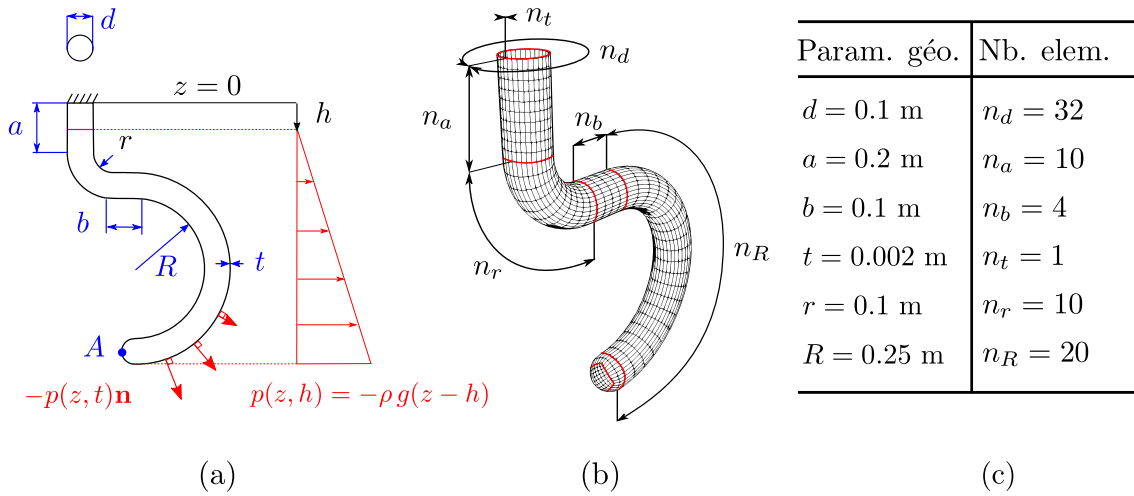


FIGURE 2.16 – (a) Paramètres géométriques du crochet creux élastique chargé soumis à un champ de pression hydrostatique; (b) Maillage tridimensionnel de la structure avec 1536 éléments et 32502 degrés de liberté; (c) Paramètres du maillage et de la géométrie utilisés pour nos simulations.

La simulation est pilotée par la hauteur de fluide  $h$  et un état d'équilibre non-linéaire est calculé à chaque itération. La hauteur de fluide varie entre  $h_{\min} = -90 \text{ cm}$  et  $h_{\max} = -5 \text{ cm}$  avec un incrément de chargement fixe de  $dh = 1 \text{ cm}$  (85 incréments de chargement). En Fig. 2.17, nous traçons l'évolution du déplacement d'un point  $A$  ainsi que l'aire de la surface libre en fonction de la hauteur de fluide. Qualitativement, les résultats sont en accord avec la littérature. En effet, le déplacement du point  $A$  évolue de façon croissante entre  $-90 \text{ cm}$  et  $-32 \text{ cm}$  avant d'atteindre un palier (légèrement décroissant).

## 2.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES STATIQUES NON-LINÉAIRES

Cependant, le déplacement maximum du point  $A$  est de  $|d_{\max}| = 4.01$  cm pour nos simulations, contrairement à celui de la littérature qui est de  $|d_{\text{ref}}| \simeq 4.3$  cm. Cette différence pourrait être due à la différence entre notre modélisation  $3D$  et le modèle coque utilisé dans la littérature.

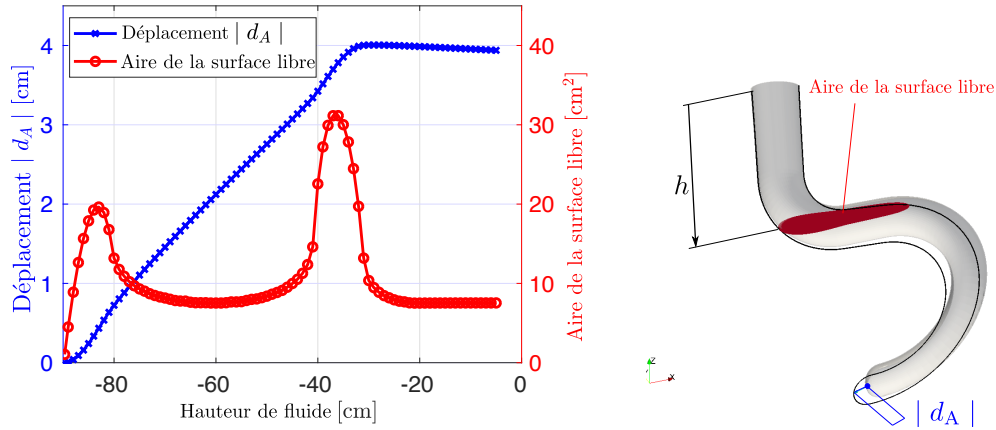


FIGURE 2.17 – Évolution de l’aire de la surface libre  $A_f$  et de la norme du déplacement  $|d_A|$  en fonction de la hauteur de fluide  $h \in [-90, 0]$  cm avec un pas de remplissage  $dh = 1$  cm. (Attention la surface libre n’est représentée que pour un souci esthétique de visualisation. Elle n’est en aucun cas utilisée comme un support de calcul.)

Nous avons effectué deux fois la simulation pour montrer l’influence de la matrice tangente des forces suiveuses  $\mathbf{K}_f$  sur la convergence de l’algorithme de Newton-Raphson. Une première simulation a été faite avec  $\mathbf{K}_f$  et une autre sans. En Fig. 2.38, nous avons tracé l’évolution de la norme du résidu d’équilibre  $\varepsilon = \|\mathbf{F}_{\text{int}} - \mathbf{F}_{\text{ext}}\|$  en fonction du nombre d’itérations dans un boucle de Newton avec un critère d’arrêt fixé à  $\varepsilon = 10^{-7}$  N. Les courbes montrent une contribution importante  $\mathbf{K}_f$  sur le taux de convergence de notre algorithme de résolution non-linéaire. En effet, le nombre d’itérations nécessaire pour converger est compris entre 3 et 4 avec la matrice  $\mathbf{K}_f$  alors que sans sa contribution le nombre d’itérations est quasiment doublé (entre 6 et 9 itérations).

## 2.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES STATIQUES NON-LINÉAIRES

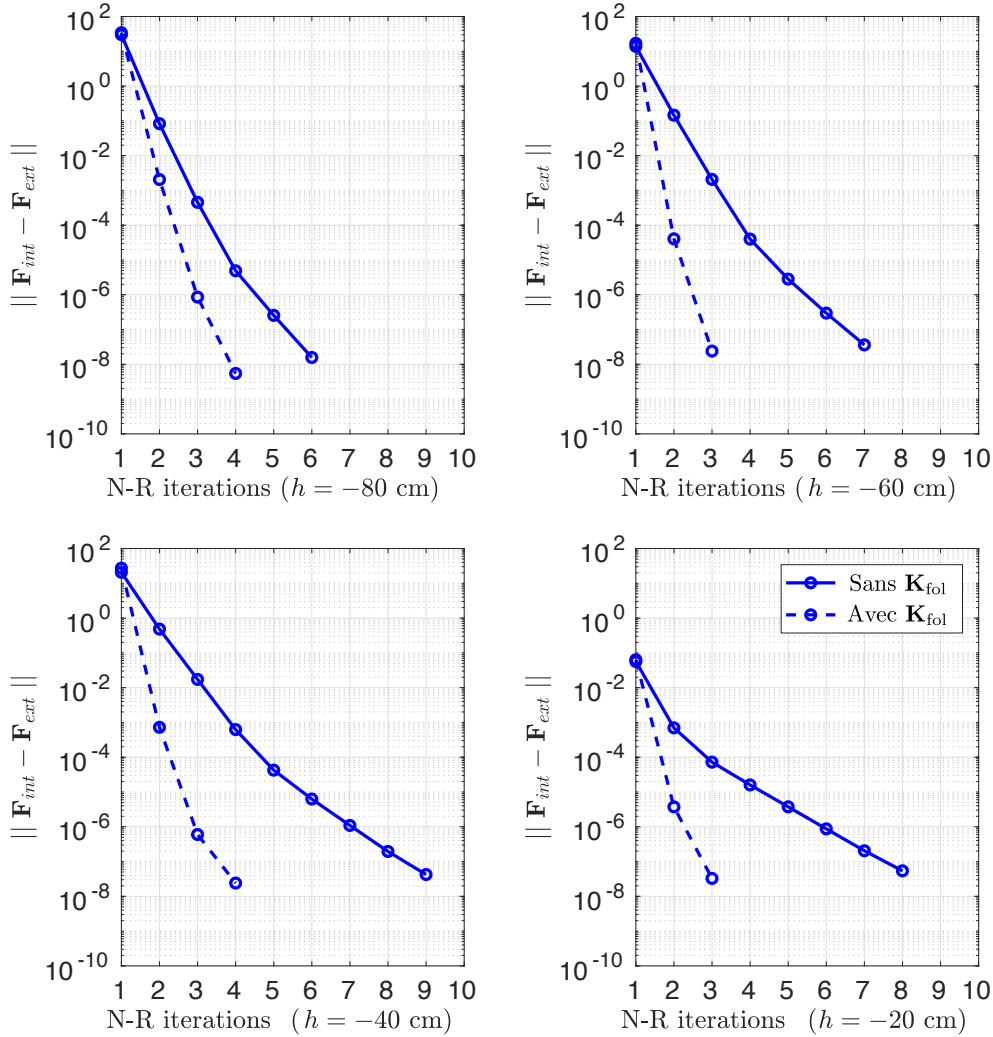


FIGURE 2.18 – Évolution de la norme du résidu d'équilibre en fonction du nombre d'itérations d'un algorithme de Newton-Raphson pour deux simulations : l'une avec la matrice tangente des forces suiveuses et l'autre sans ( $h = -80$  cm,  $h = -60$  cm,  $h = -40$  cm and  $h = -20$  cm).

En Fig. 2.19, nous pouvons observer la ligne de niveau sur une configuration de référence donnée ( $h = -42$  cm). Notons que la ligne de contact n'est pas coïncidente au maillage de la surface courante. Fig. 2.19 montre aussi la dépendance des vecteurs des efforts extérieurs  $\mathbf{F}_{ext}$  en fonction de la hauteur de fluide. Attention, les vecteurs des efforts affichés dépendent aussi de la taille des mailles d'un élément surfacique.

Cet exemple pour lequel le paramètre de chargement est la hauteur de fluide met en évidence de



## 2.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES STATIQUES NON-LINÉAIRES

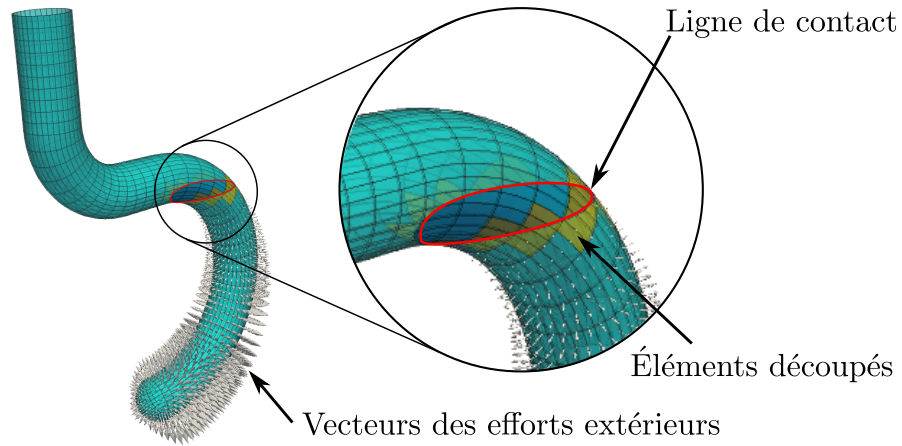


FIGURE 2.19 – Éléments partiellement mouillés en jaune. La ligne de contact est tracée en rouge. Vecteur des efforts extérieurs en gris.

points clés de nos développements : (i) l'influence de la matrice tangente des forces suiveuses sur la résolution du problème non-linéaire et (ii) l'utilisation originale de la ligne de niveau sur des éléments quadratiques à 8 nœuds.

Nombre d'éléments volumiques	1536
Nombre d'éléments surfaciques	1536
Nombre de degrés de liberté	32505
Nombre d'incrément de chargement	85
Nombre total de systèmes linéaires (avec $\mathbf{K}_f$ )	256
Nombre total de systèmes linéaires (sans $\mathbf{K}_f$ )	595
Temps moyen par incrément de chargement (avec $\mathbf{K}_f$ )	15 sec
Temps totale de la simulation (avec $\mathbf{K}_f$ )	21 minutes
Temps moyen par incrément de chargement (sans $\mathbf{K}_f$ )	26 sec
Temps total de la simulation (sans $\mathbf{K}_f$ )	36 minutes

TABLE 2.6 – **Pb 1** : Informations maillages et temps de calculs associés

### 2.6.2 Pb2 : Déplacement imposé d'un parallélépipède creux

Ce deuxième exemple numérique consiste à calculer l'état d'équilibre d'un parallélépipède creux, contenant un volume de liquide fixé, soumis à un déplacement imposé (voir Fig. 2.20). Cet exemple est basé sur un cas de [42] qui utilise des éléments coques. Le parallélépipède est soumis à un déplacement imposé assimilable à de la traction et de la torsion. Le volume de fluide  $V_f$  doit rester égal au volume de fluide initial  $V_{init}$  au cours de la simulation. Aucune pressurisation n'est prise en compte dans la

## 2.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES STATIQUES NON-LINÉAIRES

partie sèche de la structure. Nous utilisons une loi de comportement de Saint-Venant Kirchhoff avec  $E_1 = 0.75$  GPa pour le corps de la structure et  $E_2 = 1$  GPa pour les extrémités ( $\nu = 0.3$  dans toute la structure). Cette configuration particulière permet d'éviter les instabilités d'après [42].

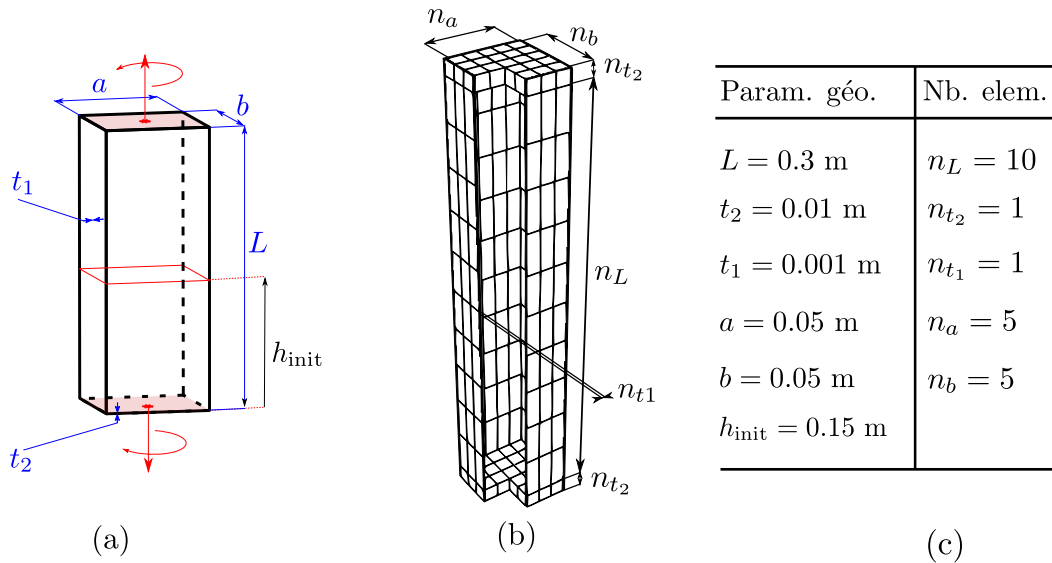


FIGURE 2.20 – (a) Paramètres géométriques du parallélépipède creux soumis à un déplacement imposé à ces extrémités et à un champ de pression hydrostatique; (b) Vue d'une partie du maillage hexaédrique paramétré; (c) Valeurs des paramètres du maillage et de la géométrie.

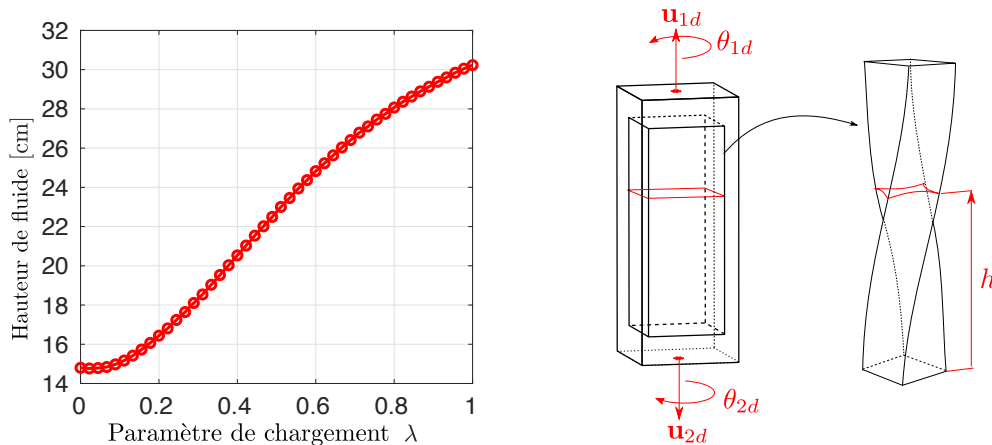


FIGURE 2.21 – Évolution de la hauteur de surface libre en fonction du paramètre de chargement  $\lambda$  tel que  $\mathbf{u}_{1d} = -\mathbf{u}_{2d} = \lambda u_{\text{max}} \mathbf{e}_z$  avec  $u_{\text{max}} = 0.0125$  m, et  $\theta_{1d} = -\theta_{2d} = \lambda\pi/4$  rad .

Nous traçons l'évolution de la hauteur de fluide en fonction du paramètre de chargement  $\lambda$  tel que  $\lambda \in [0, 1]$  en Fig. 2.21. Nos résultats sont en accord avec ceux de la littérature. En Fig. 2.22 nous

## 2.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES STATIQUES NON-LINÉAIRES

traçons le maillage déformé pour différentes configurations du paramètre de chargement.

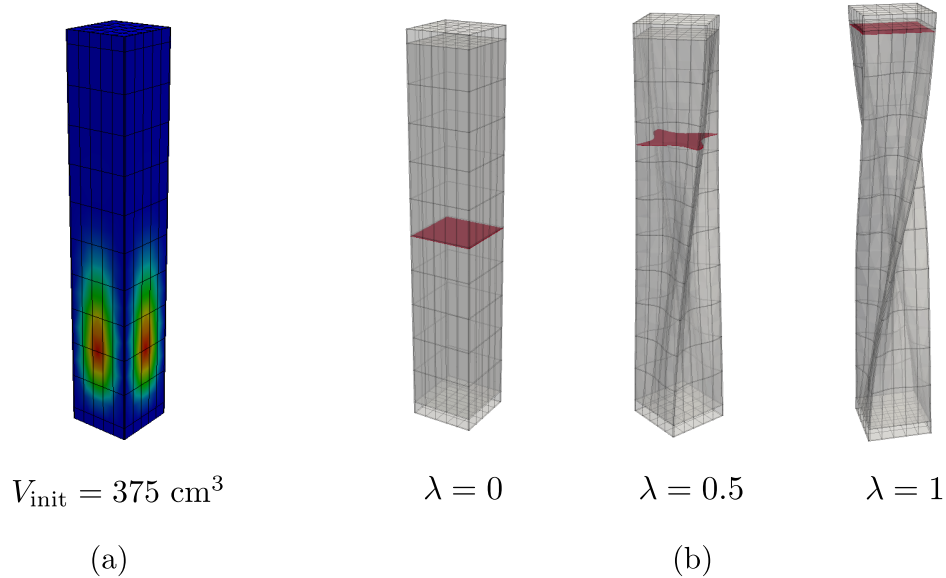


FIGURE 2.22 – (a) Norme du déplacement  $\|\mathbf{u}\|$  de la structure soumise à un champ de pression hydrostatique ( $\|\mathbf{u}\| = 0 \text{ mm}$  (en bleu) et  $\|\mathbf{u}\| = 0.176 \text{ mm}$  (en rouge)); (b) Déformation de la structure pour  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 0.5$  et  $\lambda = 1$ . Attention : La surface libre en rouge n'est représentée que pour la visualisation car le support de la surface libre n'est pas nécessaire pour le calcul des états d'équilibres statiques.

En figure 2.23, nous traçons l'évolution de la norme du résidu d'équilibre  $\|\mathbf{F}_{\text{int}} - \mathbf{F}_{\text{ext}}\|$  calculée pour trois valeurs de paramètres de chargement. Une convergence quadratique de la norme est observée. Rappelons que pour chaque itération de la boucle de Newton, la hauteur de fluide est recalculée par une méthode de dichotomie pour satisfaire la condition de volume de fluide fixé. La Fig. 2.23 montre la convergence du volume de fluide au cours de la dichotomie pour la première itération de Newton  $\lambda = 0.5$ .

### 2.6.3 Pb 3 : Remplissage d'un cylindre en caoutchouc pré-étiré

Ce troisième exemple numérique consiste à calculer l'état d'équilibre d'un cylindre pré-étiré soumis à une charge suiveuse hydrostatique. Comme l'illustre la Fig. 2.24, la simulation s'effectue en deux étapes : (i) un calcul en déplacement imposé du barreau est effectué sans fluide et (ii) le calcul du remplissage de la structure pré-étirée. Cet exemple, basé sur un cas de [48] utilisant des éléments de type membrane, a la particularité d'être instable. Une loi de comportement hyper-élastique quasi-

## 2.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES STATIQUES NON-LINÉAIRES

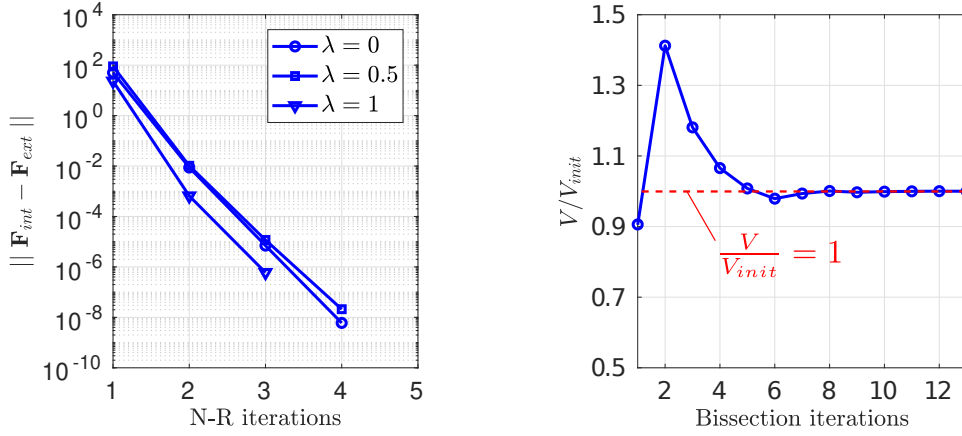


FIGURE 2.23 – (a) Évolution de la norme du résidu pour  $\lambda = 0.1$ ,  $\lambda = 0.5$  et  $\lambda = 1$ ; (b) Convergence de la méthode de bisection pour conserver le volume de fluide lors de la première itération de l’algorithme de Newton pour  $\lambda = 0.5$ .

Nombre d’éléments volumiques	338
Nombre d’éléments surfaciques	250
Nombre de degrés de liberté (déplacement)	7176
Nombre de degrés de liberté (mult. de Lagrange)	1056
Nombre d’incréments de chargement	45
Nombre total de systèmes linéaires	160
Temps moyen par incréments	21 sec
Temps moyen de la dichotomie	5 sec
Temps total de la simulation	14 minutes

TABLE 2.7 – **Pb 2** : Informations maillages et temps de calculs associés

incompressible de Mooney-Rivlin (cf. annexe A) a été choisie :

$$\Psi_{iso} = c_{10} (\bar{C}_1 - 3) + c_{01} (\bar{C}_2 - 3) \quad \text{et} \quad \Psi_{vol} = \frac{k_0}{2} (\bar{C}_3 - 1)^2 \quad (2.89)$$

avec les paramètres matériaux suivants :  $k = \frac{1}{7}$  et  $\mu = 0.4225$  MPa avec  $c_{10} + c_{01} = \frac{\mu}{2}$  et  $k = \frac{c_{01}}{c_{10}}$ . Le module de compressibilité noté  $k_0$  est calculé en considérant  $k_0 = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  et  $E = 6(c_{10} + c_{01})$  [59]. Notons que  $E$  est le module d’Young linéarisé en ne considérant aucune déformation et  $\nu$  est le coefficient de Poisson  $\nu = 0.499$  pour assurer la condition de quasi-incompressibilité du matériau. Un maillage hexaédrique a été utilisé, même si la structure est très fine : le rapport entre la plus grande arête d’un élément par rapport à la plus petite peut atteindre 100 (sans déformation). De plus, à cause des grandes déformations, certains éléments peuvent être ”écrasés” au cours de la simulation. Mais d’après [67], l’utilisation d’un élément quadratique à 20 nœuds minimise l’effet de la qualité du maillage sur

## 2.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES STATIQUES NON-LINÉAIRES

la solution EF.

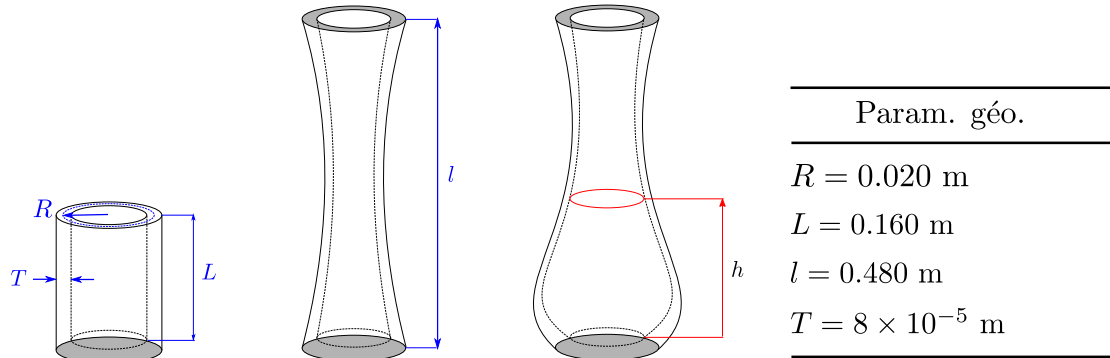


FIGURE 2.24 – Étirement et remplissage du cylindre creux en caoutchouc et ces paramètres géométriques.

En Fig. 2.25, nous traçons l'évolution de la hauteur de fluide en fonction du déplacement radial spécifié en 3 points de la configuration de référence ( $A$ ,  $B$  et  $C$ ). Dans un premier temps, nous calculons l'état d'équilibre de la structure pré-étirée à partir d'un calcul non-linéaire à déplacement imposé. Ensuite, le remplissage de la structure peut se décomposer en deux parties : (i) un équilibre stable ayant une hauteur de fluide croissante au cours du remplissage et (ii) une partie instable où la hauteur de fluide stagne, puis diminue comme le montre la Fig. 2.25. En Fig. 2.26, nous traçons l'évolution du volume de fluide en fonction du déplacement radial des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Ces résultats sont en accord avec ceux de [48].

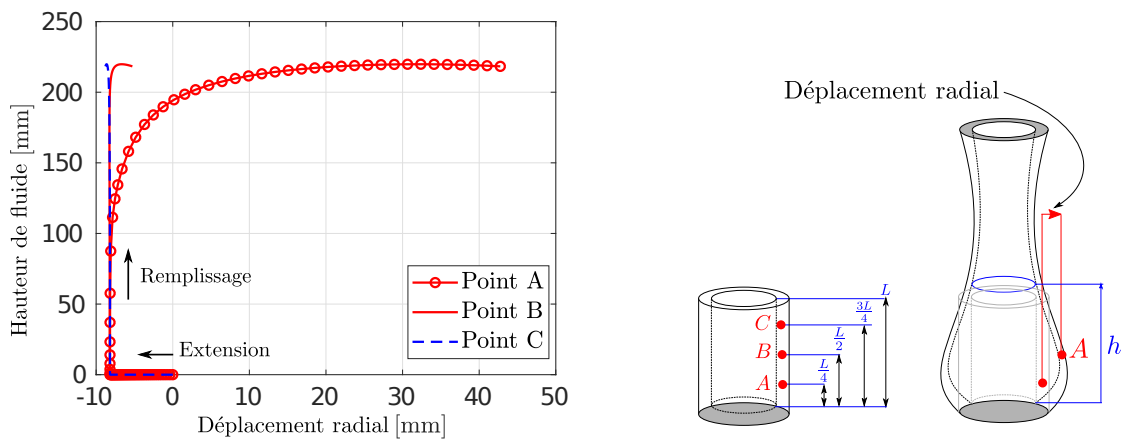


FIGURE 2.25 – Évolution de la hauteur de fluide en fonction du déplacement radial aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

## 2.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES STATIQUES NON-LINÉAIRES

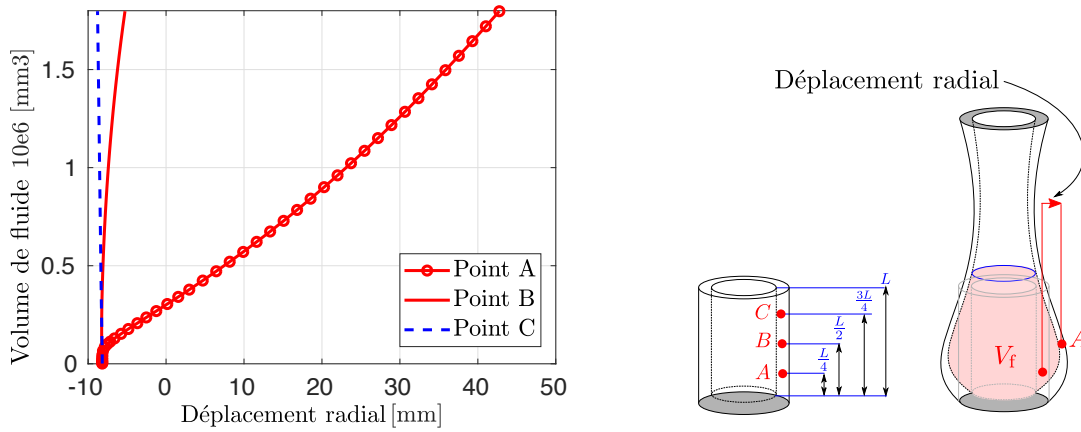


FIGURE 2.26 – Évolution du volume de fluide en fonction du déplacement radial aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

En Fig. 2.27, nous montrons le maillage déformé de la structure pour différentes étapes de la simulation. Rappelons que la ligne de contact n'est pas coïncidente au maillage de la structure dans la mesure où nous utilisons la méthode de ligne de niveau pour l'intégration numérique.

La partie instable de la simulation est calculée avec l'algorithme de continuation basé sur une méthode de longueur d'arc prédiction-correction. Une convergence quadratique de la solution non-linéaire est assurée par la matrice tangente des forces suiveuses (voir Fig. 2.28). Les simulations effectuées sans  $\mathbf{K}_f$  divergent sur la partie instable.

Nombre d'éléments volumiques	525
Nombre d'éléments surfaciques	261
Nombre de degrés de liberté	8964
Nombre d'incrément de chargement	88
Nombre total de systèmes linéaires	285
Temps moyen d'un incrément	23 sec
Temps total de la simulation (remplissage)	33 min

TABLE 2.8 – **Pb 3** : Informations maillages et temps de calculs associés

## 2.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES STATIQUES NON-LINÉAIRES

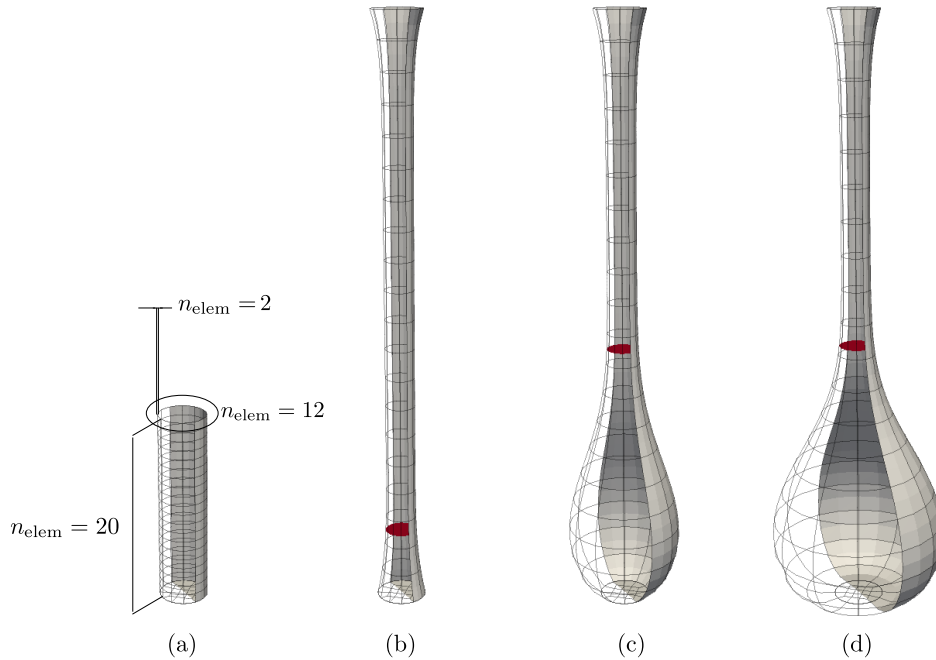


FIGURE 2.27 – (a) Maillage en configuration de référence ; Configurations courantes pour (b)  $h_1 = 46.3$  mm et  $V_1 = 0.02 \times 10^6$  mm<sup>3</sup>; (c)  $h_2 = 205.5$  mm et  $V_2 = 0.401 \times 10^6$  mm<sup>3</sup>; (d)  $h_3 = 219.1$  mm et  $V_3 = 260 \times 10^6$  mm<sup>3</sup>.

### 2.6.4 Pb 4 : Remplissage d'une membrane circulaire instable

Cet exemple numérique se base sur un exemple de [46]. L'objectif est de calculer l'état d'équilibre d'une membrane soumise à des forces suiveuses hydrostatiques pour un liquide fictif 10 fois plus dense que l'eau. Cet exemple fait apparaître deux instabilités nécessitant un algorithme de continuation.

Nombre d'éléments volumiques	500
Nombre d'éléments surfaciques	540
Nombre de degrés de liberté	10809
Nombre d'incrément de chargement	250
Nombre total de systèmes linéaires	875
Temps moyen par incrément	23 sec
Temps total de la simulation	1 h et 35 minutes

TABLE 2.9 – **Pb 4** : Informations maillages et temps de calculs associés

## 2.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES STATIQUES NON-LINÉAIRES

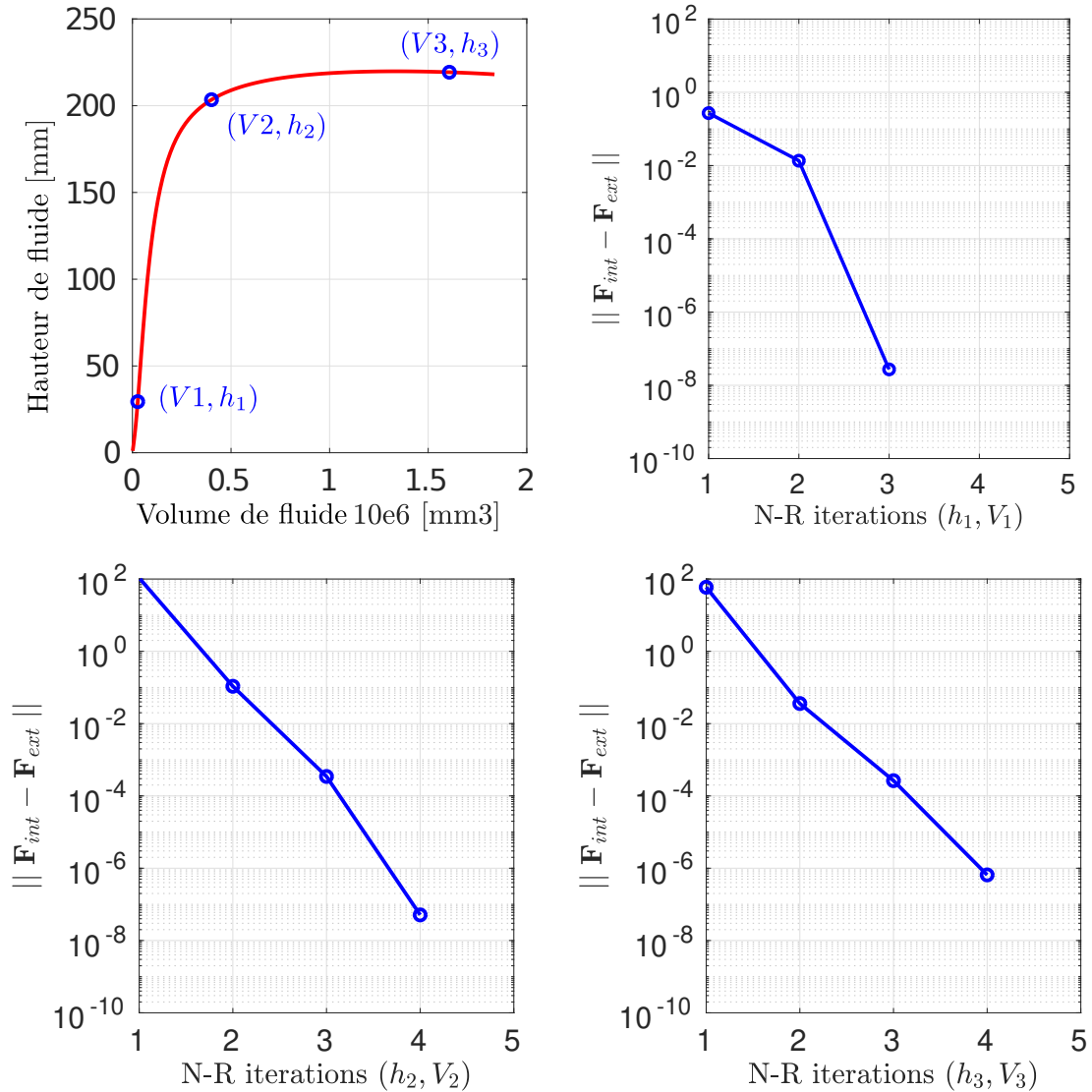


FIGURE 2.28 – Évolution de la norme du résidu pour trois configurations illustrées en Fig. 2.27 avec  $h_1 = 46.3 \text{ mm}$  et  $V_1 = 0.02 \times 10^6 \text{ mm}^3$ ,  $h_2 = 205.5 \text{ mm}$  et  $V_2 = 0.401 \times 10^6 \text{ mm}^3$ ,  $h_3 = 219.1 \text{ mm}$  et  $V_3 = 260 \times 10^6 \text{ mm}^3$ .

### 2.6.5 Pb 5 : Remplissage et rotation d'un réservoir hémisphérique couvert par une membrane pré-étirée

Ce dernier exemple numérique consiste à calculer l'état d'équilibre d'une membrane en caoutchouc recouvrant une demi-sphère rigide de rayon  $r = 0.2 \text{ m}$  partiellement remplie de liquide. Le principe de la simulation est illustré en Fig. 2.31 avec trois phases distinctes :



## 2.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES STATIQUES NON-LINÉAIRES

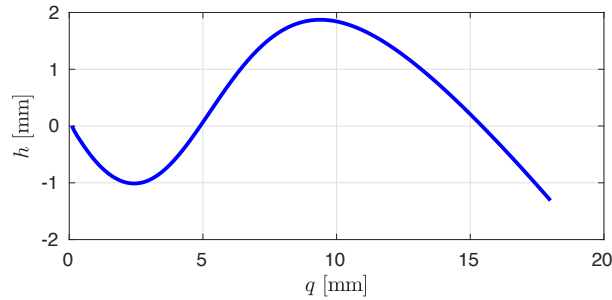


FIGURE 2.29 – Évolution de la hauteur de fluide en fonction du déplacement vertical au point de coordonnées de référence  $(0, 0, 0)$ .

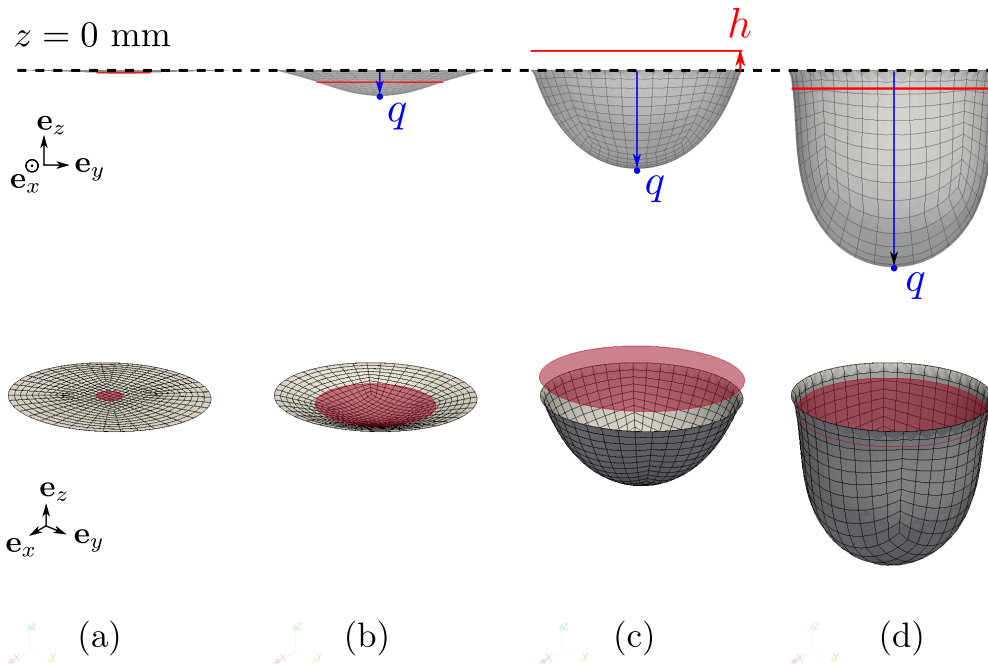


FIGURE 2.30 – Différentes configurations courantes de la structure déformée par la fluide pour différentes hauteurs  $h$  : (a)  $h = -0.1$  mm et  $q = 0.2$  mm ; (b)  $h = -1$  mm et  $q = 2$  mm ; (c)  $h = 1.9$  mm et  $q = 10$  mm ; (d)  $h = -1.5$  mm et  $q = 1.8$  mm.

- **Phase 1** : calcul d'un état pré-étiré de la membrane ayant un rayon initial  $R_0$  ;
- **Phase 2** : remplissage du réservoir piloté par une hauteur de fluide ;
- **Phase 3** : rotation de la partie rigide du réservoir à volume de fluide constant.

Aucun effet d'inertie n'est pris en compte étant donné que les transformations sont supposées quasi-statiques. L'objectif de cet exemple est de mettre en œuvre plusieurs types de chargements va-

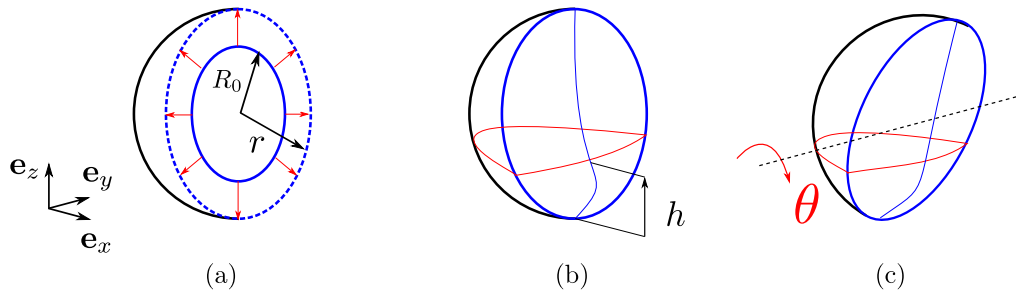


FIGURE 2.31 – (a) **Phase 1** : Extension de la membrane ayant un rayon initial de  $R_0 = 0.10$  m jusqu'au rayon final  $r = 0.20$  m ; (b) **Phase 2** : Remplissage d'un réservoir couvert par la membrane piloté par une hauteur de fluide  $h$  entre  $h = 0$  to  $h = 0.160$  m ; (c) **Phase 3** : Rotation de la partie rigide hémisphérique à volume de fluide constant.

lidés précédemment sur un exemple original, c'est-à-dire : (i) chargement piloté par hauteur de fluide  $h$  et (ii) chargement à déplacement imposé pour une volume de fluide fixé.

### Phase 1 : Calcul à déplacement imposé sans fluide

La phase 1 consiste à calculer le déplacement  $\mathbf{u}_{\text{str}}$  tel que  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}_{\text{str}}$ , en considérant un déplacement imposé sur son bord. Le rayon et l'épaisseur initiale de la structure de la membrane sont respectivement  $R_0 = 0.10$  m et  $T = 0.4$  mm. Les paramètres matériaux du caoutchouc sont les mêmes que ceux utilisés au **Pb 3**. Le maillage de la membrane élastique est composé de mailles hexaédriques à 20 nœuds. La partie rigide du réservoir est maillée par des éléments quadratiques à 8 nœuds pour les calculs utilisant la méthode de ligne de niveau (le volume de fluide  $V_f$  et l'aire de la surface libre  $A_f$ ). Les paramètres du maillage sont donnés en Fig. 2.32. Les maillages déformés pour différents états de la simulation sont donnés Fig. 2.33).

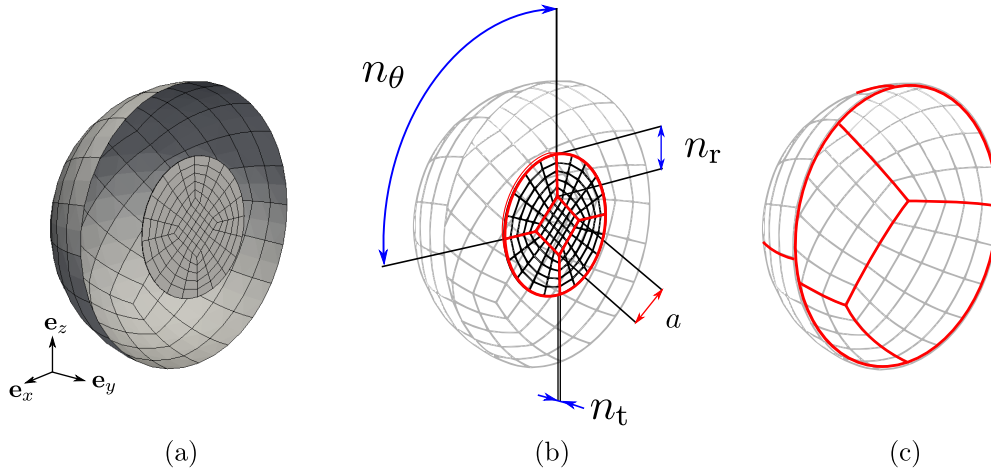


FIGURE 2.32 – (a) Maillage de la membrane et de la partie rigide hémisphérique ; (b) paramètres du maillage composé d’hexaèdres à 20 avec  $n_\theta$  le nombre d’éléments d’un quart de la circonférence, le nombre d’éléments dans l’épaisseur  $n_t = 1$  et  $n_r$  le nombre d’éléments sur la ligne radiale, la valeur  $a$  est donnée pour la construction du maillage hexaédrique tel que  $a = 0.3R_i$  ; (c) Maillage surfacique de la partie rigide du réservoir, ce maillage est nécessaire pour le calcul du volume de fluide et l’aire de la surface libre.

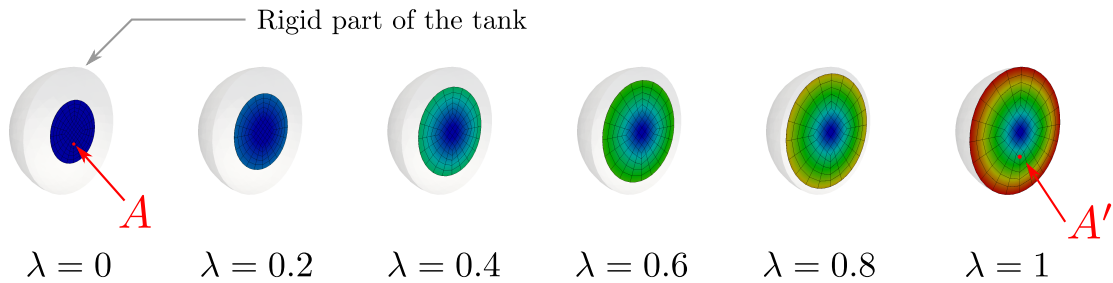


FIGURE 2.33 – Visualisation de la configuration courante du problème à déplacement imposé pour passer d’un rayon initial de la membrane  $R_0 = 0.1$  m à un rayon final  $r = 0.2$  m.  $\lambda$  est un paramètre de chargement tel que  $\lambda = 0$  (aucun chargement) and  $\lambda = 1$  (fin du chargement). Le point  $A'$  correspond à la position courante du point  $A$  tel que  $\mathbf{X}_A = (0, -0.3R_i, 0)$  en configuration de référence et  $\mathbf{X}_A + \mathbf{u}_{\text{str}}(\mathbf{X}_A)$  en configuration de référence.

### Phase 2 : Remplissage piloté par hauteur de fluide

L’objectif de la phase 2 est d’évaluer le déplacement  $\mathbf{u}_{\text{fil}}$  de la structure partiellement remplie de liquide tel que  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}_{\text{str}} + \mathbf{u}_{\text{fil}}(h)$ . Dans la suite, notre quantité d’intérêt (QI) est la norme du déplacement  $q = \|\mathbf{u}_{\text{fil}}(\mathbf{X}_A)\|$  illustrée en Fig. 2.34 lorsque la structure est complètement remplie. Le tableau 5.4 récapitule les données du maillage et les valeurs de  $q$  pour différents paramètres de maillage

## 2.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES STATIQUES NON-LINÉAIRES

$n_\theta$  et  $n_r$ . Comme le montre la Figure 2.34, le maillage sélectionné a pour paramètres ( $n_\theta = 5, n_r = 5$ ) avec moins de 0.5 % d'erreur par rapport à une solution "overkill"  $q_{ref}$ .

$(n_\theta, n_r)$	(1, 1)	(2, 2)	(5, 5)	(10, 10)	(20, 20)	(40, 40)
$n_{elem}$	5	20	125	500	1200	8000
$n_{dof}$	144	489	1188	4623	18243	169209
$q$ (mm)	11.03	11.77	11.81	11.83	11.85	$q_{ref} = 11.86$

TABLE 2.10 – Nombre d'éléments  $n_{elem}$ , nombre de degrés de liberté  $n_{dof}$  et valeur de la quantité d'intérêt  $q(QI)$ .

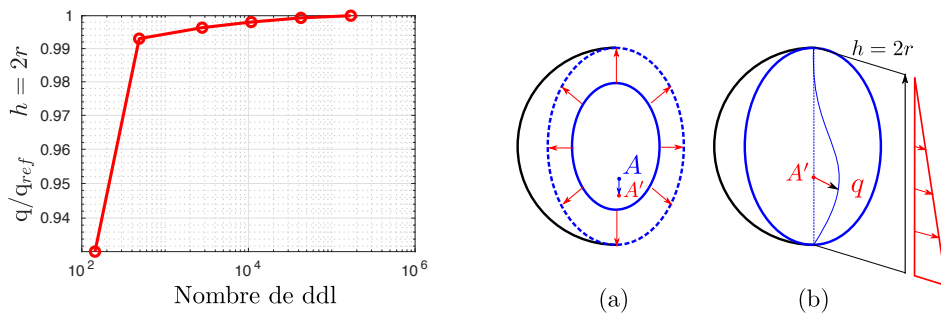


FIGURE 2.34 – Convergence de la QI normée par la QI de référence en fonction du nombre de degrés de liberté  $q_{ref}$ ; (a) **Étape 1** : Extension de la membrane en caoutchouc; (b) Membrane chargée par un champ de pression hydrostatique si le réservoir est complètement rempli.

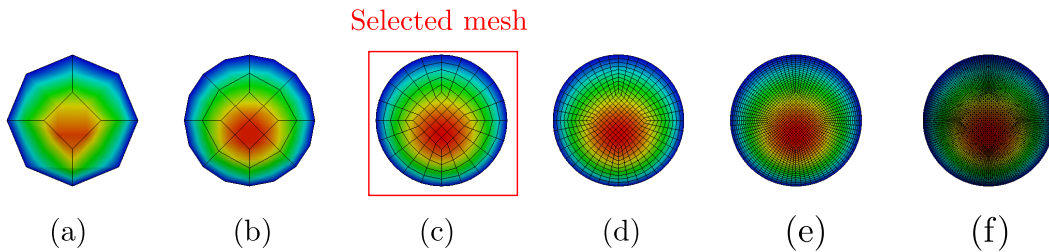


FIGURE 2.35 – Champ de déplacement  $u_{fil}$  de la membrane pour plusieurs jeux de paramètres de maillages  $(n_\theta, n_r)$  : (a) (1, 1); (b) (2, 2); (c) (5, 5); (d) (10, 10); (e) (20, 20); (f) (40, 40).

Le remplissage de la structure s'effectue entre une hauteur  $h = 0$  mm jusqu'à  $h = 180$  mm avec un pas de hauteur de fluide fixe de  $dh = 20$  mm. Les résultats sont donnés sur différents maillages déformés Fig. 2.36, avec la ligne de contact non coïncidente au maillage de la structure. L'évolution de  $q$  est tracée Fig. 5.11 montrant une réponse non-linéaire en fonction du paramètre de hauteur de fluide.

Comme il a été fait pour le **Pb1**, nous avons effectué deux simulations pour mettre à nouveau en

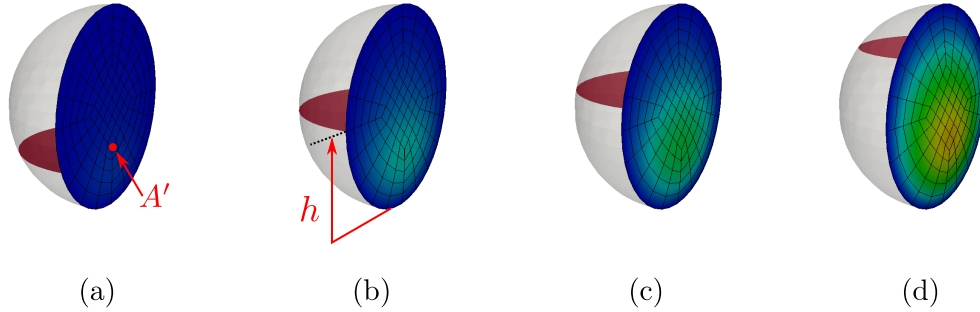


FIGURE 2.36 – Norme du champ de déplacement  $\mathbf{u}_{\text{fil}}$  de la membrane entre 0 mm (en bleu) et 10.6 mm (en rouge) pour différentes hauteurs de fluide : (a)  $h = 50$  mm ; (b)  $h = 100$  mm ; (c)  $h = 120$  mm ; (d)  $h = 160$  mm.

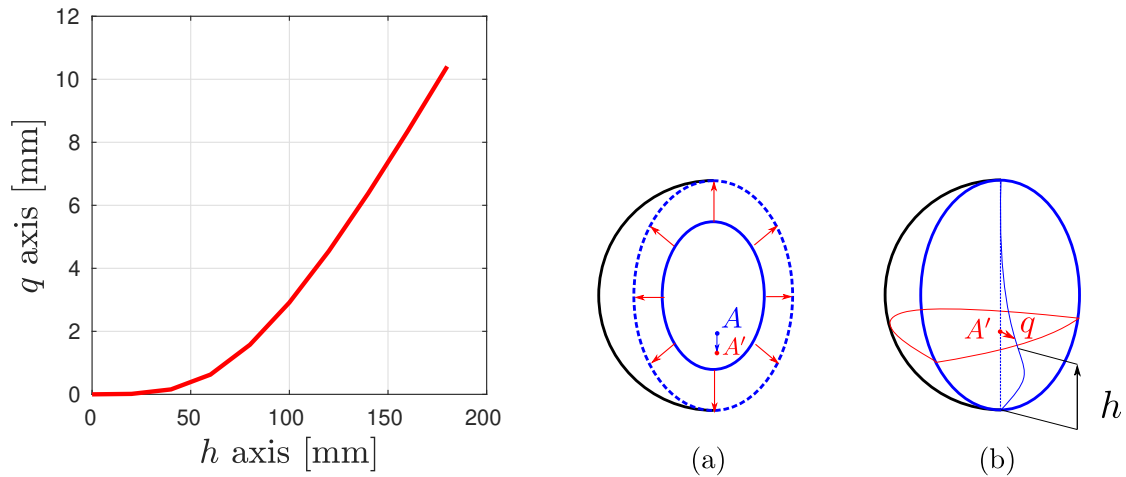


FIGURE 2.37 – Évolution de  $q$  en fonction de la hauteur de fluide ; (a) Déplacement du point  $A = (0, 0, -0.3R_i)$  au  $A'$  lors de l'extension de la membrane ; (b) Déplacement du point  $A'$  lors du remplissage.

évidence l'influence de  $\mathbf{K}_f$  sur la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson (voir Fig. 2.38).

### Phase 3 : Rotation de la partie rigide

Cette dernière phase consiste à imposer un déplacement de la partie rigide du réservoir. Ce déplacement correspond à une rotation imposée autour de l'axe  $(O, \mathbf{e}_x)$ . Le volume de fluide est fixé au cours de la simulation. Le déplacement de la membrane est noté  $\mathbf{u}_{\text{rot}}$  tel que  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}_{\text{str}} + \mathbf{u}_{\text{rot}}(V_f)$ . Nous avons affiché en Fig. 2.39 : (i) le maillage déformé en configuration courante et (ii) le maillage

## 2.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES STATIQUES NON-LINÉAIRES

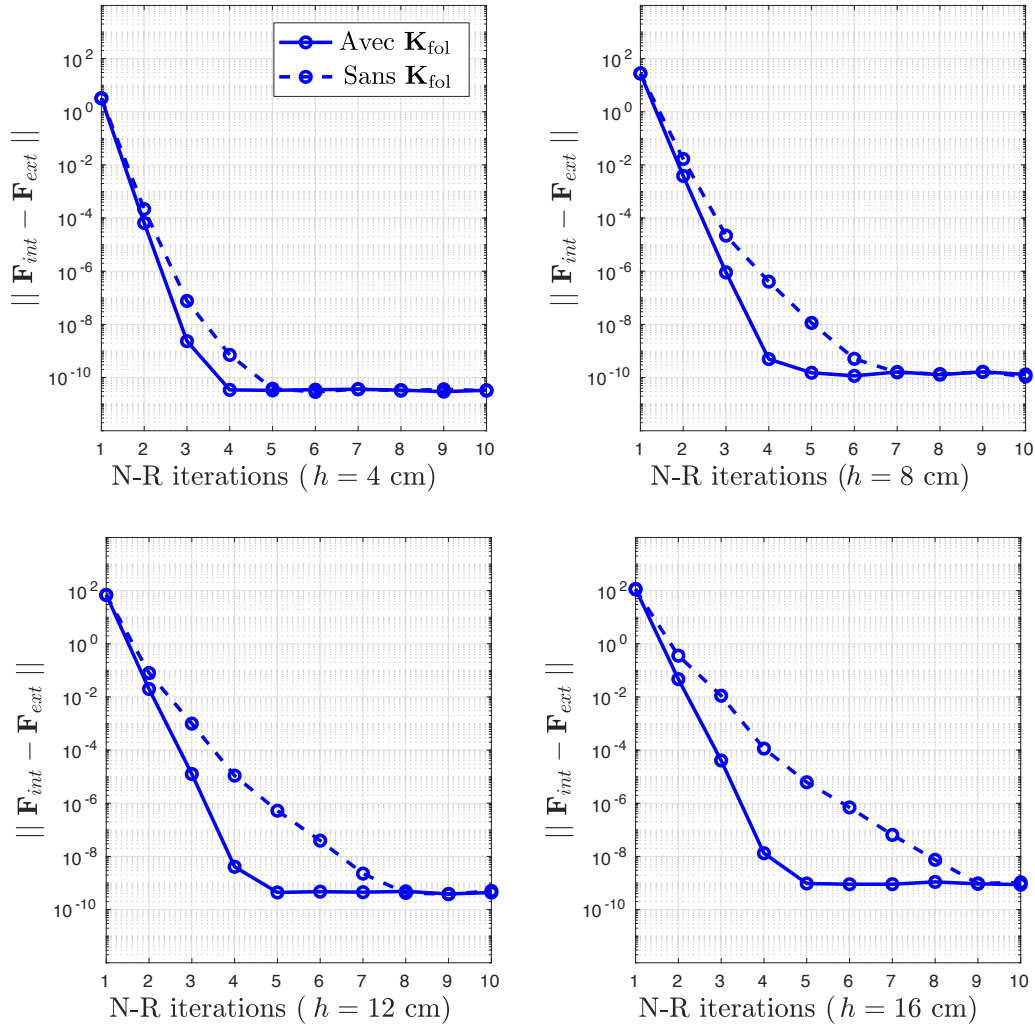


FIGURE 2.38 – Influence de la matrice tagente des forces suiveuses sur la convergence de l’algorithme de Newton-Raphson pour différents états d’équilibre (i.e.  $h = 40$  mm,  $h = 80$  mm,  $h = 120$  mm and 160 mm) de la **Phase 2**.

déformé sur une configuration fixe par rapport à la partie rigide du réservoir. La rotation est imposée par un angle  $\theta \in [0, 360]$  degrés avec un pas fixe de  $d\theta = 1.8$  degrés. Le volume initial du fluide  $V_f = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  est choisi comme étant le volume du réservoir de la phase 2 pour une hauteur de fluide de  $h = 0.1$  m.

La hauteur de fluide varie pendant la simulation pour satisfaire la condition de volume de fluide constant (voir Fig. 2.40). L’évolution de la norme du déplacement  $y$  est aussi représentée en fonction

## 2.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES STATIQUES NON-LINÉAIRES

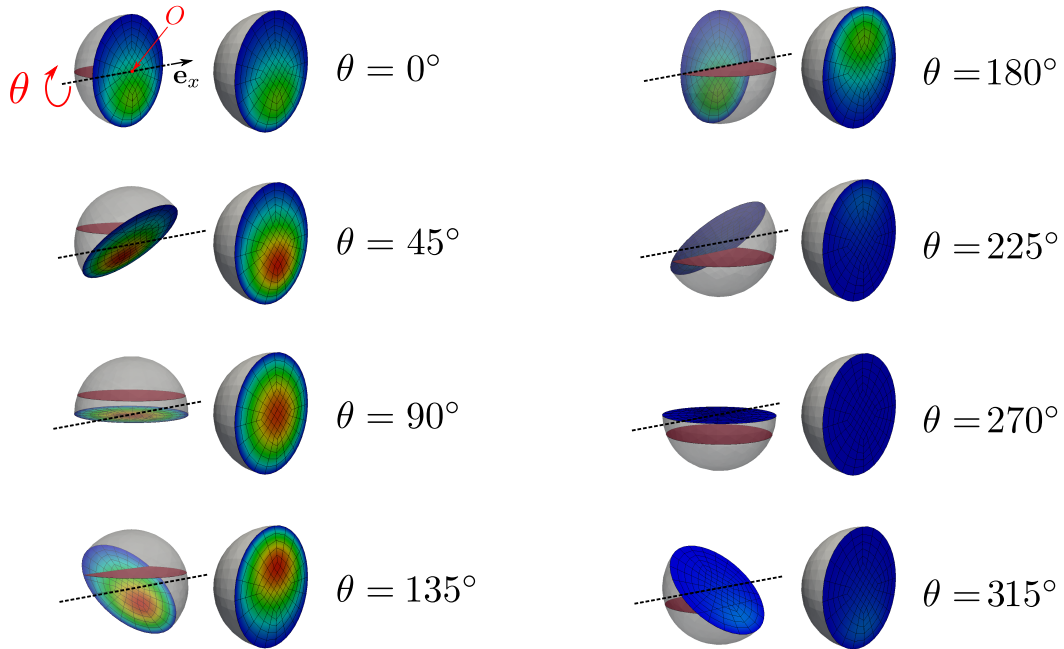


FIGURE 2.39 – Norme du champ de déplacement pour différentes configurations de référence  $\|\mathbf{u}_{\text{rot}}\|$  associés aux rotations de la partie rigide d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $(O, \mathbf{e}_x)$  pour un volume de fluide fixé  $V_f = 1.0e^{-3} \text{ m}^3$  (en bleu  $\|\mathbf{u}_{\text{rot}}\| = 0$  et en rouge  $\|\mathbf{u}_{\text{rot}}\| = 4.55 \text{ mm}$ ).

de l'angle. Nous observons qu'entre  $\theta = 230$  et  $\theta = 270$  degrés, la membrane n'est pas sollicitée par la pression du fluide.

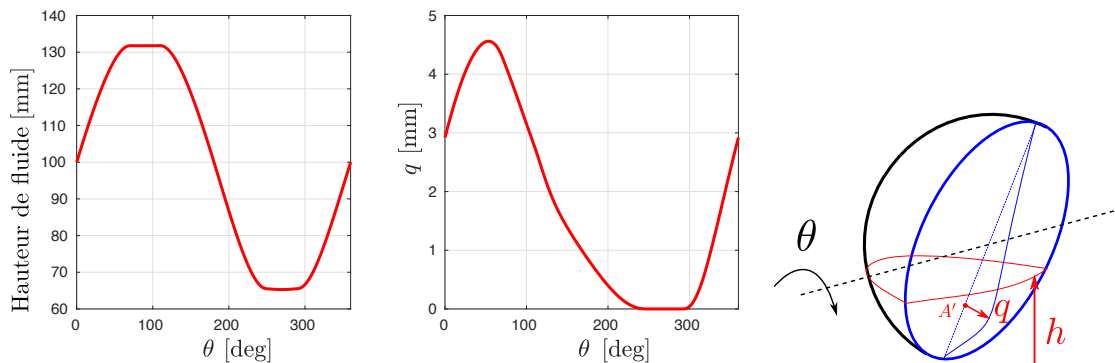


FIGURE 2.40 – Évolution de la hauteur de fluide et de  $q$  en fonction de l'angle  $\theta$  entre  $\theta = 0$  degrés et  $\theta = 360$  degrés.

## 2.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES STATIQUES NON-LINÉAIRES

Enfin, nous avons tracé en Figure 2.41 l'évolution du résidu d'équilibre au cours des itération de Newton-Raphson pour quatre angles données. Une légère décroissance du taux de convergence peut être observée, néanmoins le nombre d'itérations nécessaire pour converger reste satisfaisant (entre 3 et 4 itérations de Newton-Raphson).

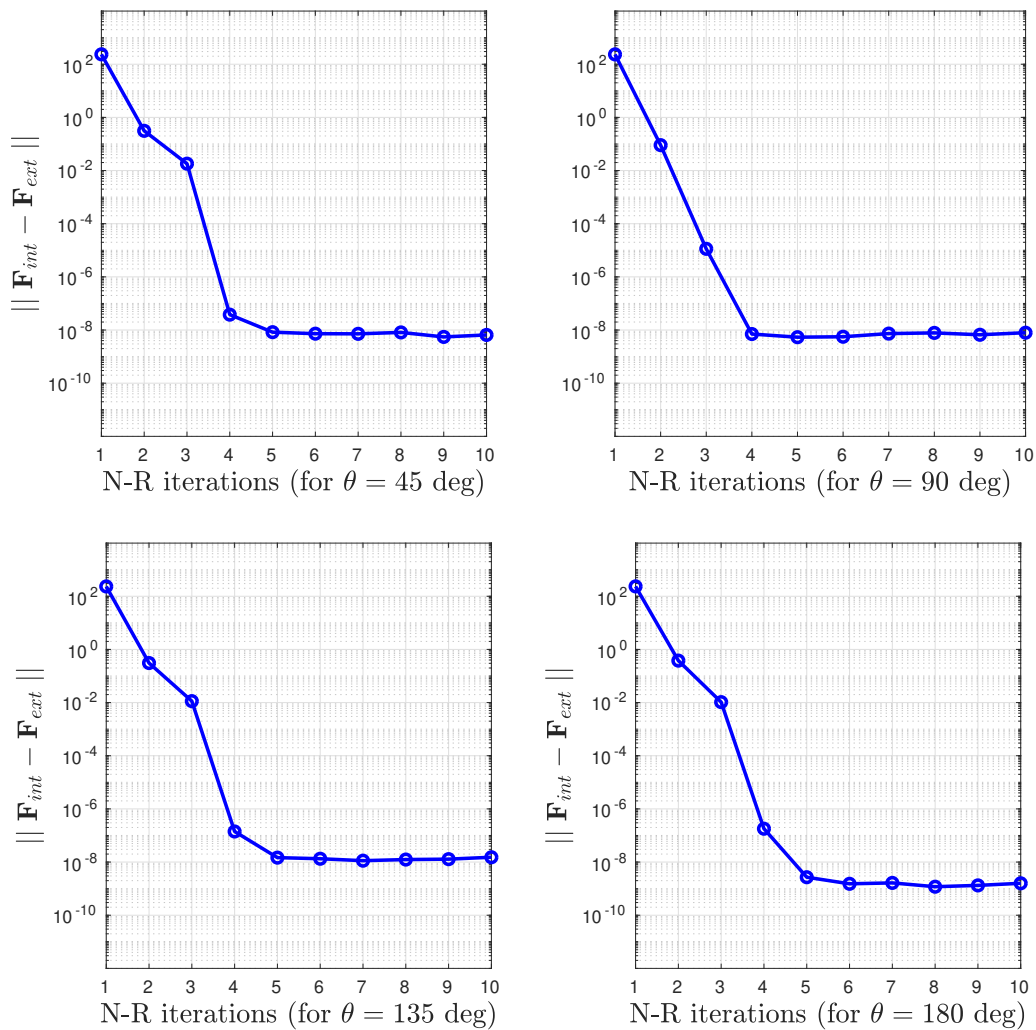


FIGURE 2.41 – Influence de la matrice tangente des forces suivées sur la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson pour différents états d'équilibre (a)  $\theta = 45$  degrés ; (b)  $\theta = 90$  degrees ; (c)  $\theta = 135$  degrés ; (d)  $\theta = 180$  degrés.



## 2.7. CONCLUSION ET CONTRIBUTIONS

---

Nombre d'éléments volumiques	125
Nombre d'éléments surfaciques	250
Nombre de degrés de liberté	2784
Nombre d'incrémentes de chargement phase 1	10
Nombre d'incrémentes de chargement phase 2	9
Nombre d'incrémentes de chargement phase 3	200
Temps simulation phase 1	2 minutes
Temps simulation phase 2	2 minutes
Temps simulation phase 3	30 minutes

TABLE 2.11 – **Pb 5** : Informations maillages et temps de calculs associés

## 2.7 Conclusion et contributions

Dans ce chapitre, nous avons calculé l'équilibre non-linéaire géométrique de réservoirs flexibles partiellement remplis de liquides. L'action du fluide incompressible au repos sur la structure a été modélisée par un champ de pression suiveur hydrostatique. Un algorithme de Newton-Raphson combinée à une méthode originale de ligne de niveau a été implémenté sous matlab. Les formulations du problème ont été rappelés pour des problèmes stables et instables résolus par la méthode des éléments finis. Les deux contributions les plus importantes sont (i) la construction de la matrice tangente des forces suiveuses et (ii) l'utilisation d'une ligne de niveau pour l'intégration d'éléments partiellement mouillés. Ce dernier aspect est nécessaire pour le calcul des efforts extérieurs et de la matrice tangente qui dépendent de la surface mouillée courante. Ces deux contributions ont été combinés pour la résolution d'exemples numériques utilisant des éléments quadratiques à 20 nœuds. Nos résultats ainsi obtenus sont en accord avec la littérature existante [42, 48], validant ainsi le calcul de l'état précontraint. Cet état peut être directement récupéré pour le calcul des vibrations hydroélastiques linéarisées dans en Partie 2. Nous rappelons que ces travaux ont été présentés en conférences [28, 29] et a donné suite à un article dans un journal international avec comité de lecture [30].

**Vers un calcul du problème non-linéaire sur base réduite *a priori*** : La modélisation que nous avons proposée est une approche incrémentale. Nous montrons au travers de nos exemples que un paramètre de chargement, les temps de calculs restent raisonnables (tout dépend du nombre d'incrémentes de chargement et de degrés de liberté du système). Le chapitre suivant propose un autre approche pour calculer un état d'équilibre statique. La méthode proposée consiste à calculer la solution sous

## 2.7. CONCLUSION ET CONTRIBUTIONS

---

forme de base réduite calculée *a priori*. Nous nous demandons :

- (i) Est-ce que les approches sur bases réduites avec la prise en compte de non-linéarités géométriques et de forces suivies convergent ?
- (ii) Si elles convergent, est-ce que le temps de calcul est plus faible que l'approche incrémentale proposée pour un paramètre de chargement ?

## 2.7. CONCLUSION ET CONTRIBUTIONS

---

## Chapitre 3

# Équilibre statique non-linéaire géométrique avec forces suiveuses uniformes par construction d'une base réduite PGD *a priori*

Ce chapitre porte sur la formulation d'un problème non-linéaire géométrique avec force suiveuse uniforme via l'utilisation de la Proper Generalized Decomposition (PGD) *a priori*. Trois points particuliers sont ainsi détaillés. Le premier repose sur l'expression du principe des travaux virtuels avec l'hypothèse d'une solution écrite sous forme de produits de fonctions à variables séparées. De ce fait, la solution dépend de la position de la géométrie de référence et du chargement de pression uniforme. Nous montrons que l'approche revient à résoudre une succession de sous-problèmes non-linéaires séparés en espace et en paramètre de pression. Le deuxième point concerne la résolution de ces sous-problèmes non-linéaires. Enfin, nous montrons aux travers d'exemples numériques la validité de l'approche via la convergence de la solution reconstruite vers une solution de référence.

### Contenu

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction et état de l'art . . . . .</b>	<b>108</b>
<b>3.2</b>	<b>Problème NL géométrique avec forces suiveuses . . . . .</b>	<b>110</b>
<b>3.3</b>	<b>PGD <i>a priori</i> avec pression uniforme . . . . .</b>	<b>111</b>
<b>3.4</b>	<b>Discrétisation EF du problème en espace . . . . .</b>	<b>118</b>
<b>3.5</b>	<b>Sous-problème en paramètre de pression . . . . .</b>	<b>123</b>
<b>3.6</b>	<b>Exemples numériques avec pression uniforme . . . . .</b>	<b>125</b>
<b>3.7</b>	<b>Conclusions et valorisation . . . . .</b>	<b>139</b>

---

### 3.1 Introduction et état de l'art

#### 3.1.1 Enjeu : Réduction de modèle *a priori*

Dans ce chapitre, nous proposons une formulation originale pour le calcul d'une solution statique non-linéaire avec forces suiveuses (voir Fig. 3.2), par utilisation de la PGD *a priori*, combinée à la méthode des éléments finis. Les non-linéarités géométriques sont prises en compte dans le modèle. L'objectif est de générer une base réduite sans effectuer le calcul du modèle complet (cf. Chapitre 1). La principale originalité de ce chapitre consiste à exprimer le travail des des efforts extérieurs dépendant du déplacement écrit sous forme de fonctions à variables séparées.

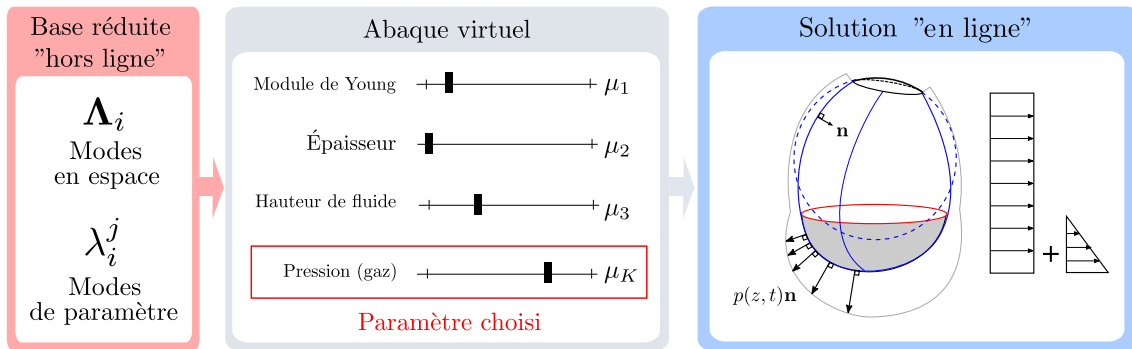


FIGURE 3.1 – Exemple d’abaque virtuel pour générer des solutions "en-ligne" à partir d’une base réduite générée "hors-ligne". Dans la suite, nous ne considérons qu’un paramètre de chargement avec pression uniforme pour simplifier les calculs.

A ce jour, aucune formulation incluant des forces suiveuses n’a été proposée dans la littérature associée à la PGD. L’originalité de ce chapitre est de proposer une formulation avec un paramètre de pression uniforme, pour résoudre le problème avec non-linéarités géométriques. Les nombreux détails de calcul associés aux sous-problèmes séparés sont données en Annexe D. En particulier, les développements associés aux expressions des énergies virtuelles internes et externes et leurs linéarisations, sont exposés en considérant une loi de comportement hyperélastique de Saint-Venant Kirchhoff.

Au cours de ces dix dernières années, un grand nombre de problèmes multi-physiques ont été revisités via la méthode de réduction de modèle PGD *a priori* [68]. Cette méthode consiste à approximer la solution du problème par une série de produits de fonctions à variables séparées. Cette hypothèse conduit à la résolution d’une succession de sous-problèmes par un algorithme de point fixe. La PGD permet de contourner la malédiction de la dimensionnalité lors de la construction d’une base réduite

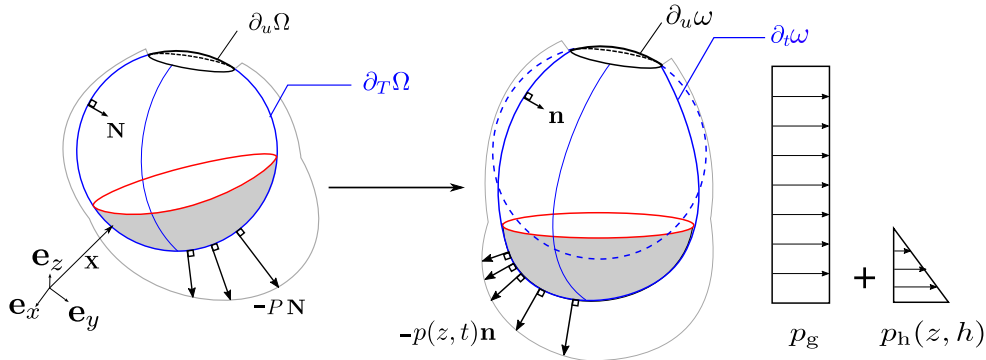


FIGURE 3.2 – Configuration de référence et configurations courantes de la surface interne d'un réservoir soumis à des champs de pression suiveurs.

"hors-line". Ainsi, l'utilisateur peut se servir de cette base pour générer des solutions approchées en temps réel pour un grand nombre de paramètres [69, 70, 71]. Notons que la PGD n'est efficace que si la solution peut être écrite sous forme de fonctions à variables séparées. De nombreux exemples de problèmes en mécanique non-linéaire sont proposés dans la littérature [72], tel que les problèmes de contact entre deux solides, [73], les problèmes non-linéaires élasto-plastiques [74], le comportement non-linéaire du sol [75] et les problèmes non-linéaires géométriques [76]. D'autres types de problèmes rencontrés en mécanique ont été traités via la PGD tels que la dynamique transitoire [77, 78], ou des problèmes à paramètres géométriques variables [79, 80, 81]. De plus, la combinaison de la PGD à d'autres méthodes numériques ont vu le jour tel que la POD-PGD (Proper Orthogonal Decomposition) pour résoudre les équations de la dynamique en temps réel [82] ou la LATIN-PGD (LArge Time INcrement) [83, 84, 85] pour la résolution de problèmes non-linéaire non incrémentaux. Nous pouvons aussi citer la PGD-ANM (Asymptotic Numerical Method ou Méthode Asymptotique Numérique) utilisé pour résoudre des problèmes avec non-linéarités géométriques et non-linéarités de lois de comportement hyperélastique en grandes déformations [86, 87]. Aussi la PGD-HBM (Harmonic Balance Method ou Balance Harmonique) [88, 89] a été utilisée pour calculer des modes non-linéaires. La PGD est aussi développée dans le cadre de la vérification de modèles pour le calcul d'estimateurs d'erreurs [90].

Notons qu'il existe d'autres approches de réduction de modèle tel que la POD [91, 92]. Cependant, ces approches nécessitent le calcul du modèle complet sur un plage de paramètres pour générer des bases réduits *a posteriori*. De nombreuses applications utilisant la POD sont proposées dans la litté-

rature. Nous pouvons au moins citer quelques une faisant intervenir des non-linéarités géométriques, [93], de l'homogénéisation de matériaux hyperélastiques [94] ou le calcul en temps réel de simulation de tissus très souples POD-PCMFS (Point Collocation Method of Finite Spheres) [95].

Le contenu de ce Chapitre est le suivant. En Section 3.2, nous rappelons succinctement les éléments clés de la formulation variationnelle discrétisée, pour un problème non-linéaire avec forces suiveuses. En Section 3.3, nous nous servons de l'hypothèse d'une solution écrite sous forme de produits de fonctions à variables séparées de la PGD *a priori*, dans les équations non-linéaires. Nous faisons apparaître deux sous-problèmes séparés : un problème en espace et un autre en paramètre de pression. Ensuite, en Section 3.4, une discrétisation EF, analogue au problème non-linéaire décrit au Chapitre 2, est proposée. Ce problème est résolu par une méthode de Newton, ce qui nécessite la linéarisation du problème et donc la construction des matrices tangentes et des résidus d'équilibre. En Section 3.5, nous montrons que le problème de paramètre de pression peut s'écrire sous la forme d'un problème fonctionnel polynomial. Deux méthodes de résolution sont proposées dans ce chapitre. Enfin, en Section 3.6, des applications numériques montrant la convergence de la méthode sont proposées, permettant ainsi de valider l'approche et son implémentation numérique.

## 3.2 Problème NL géométrique avec forces suiveuses

### 3.2.1 Rappel : Discrétisation du principe des travaux virtuels

Le problème consiste à trouver le champ de déplacement inconnu  $\mathbf{u}$  qui vérifie l'équation suivante :

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}) - \delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}) = 0, \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{C}_{\mathbf{u}} \quad (3.1)$$

avec  $\delta \mathbf{u}$  le champ de déplacement virtuel,  $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}$  l'espace des fonctions cinématiquement admissibles,  $\delta W_{\text{int}}$  et  $\delta W_{\text{ext}}$  les travaux virtuels des énergies internes et externes. Nous rappelons la définition de leurs expressions ci-dessous :

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} dV \quad (3.2)$$

$$\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}) = - \int_{\partial_t \omega} \delta \mathbf{u} \cdot p \mathbf{n} ds \quad (3.3)$$

avec  $\delta\mathbf{E}$  la forme virtuelle du tenseur de Green-Lagrange et  $\mathbf{E}$  le tenseur de green-Lagrange<sup>1</sup> et  $\mathbf{S}$  le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff. Pour faciliter nos développements,  $\delta W_{\text{int}}$  est directement écrite en configuration de référence  $\Omega$  et  $\delta W_{\text{ext}}$  sur la configuration courante  $\omega$  (cf. Chapitre 1 pour la définition des configurations courantes et de la configuration de référence). L'expression du travail virtuel externe, prenant en compte l'hypothèse de fonctions à variables séparées, sera détaillée dans la suite du manuscrit. Nous prendrons en compte une loi de comportement hyperélastique de Saint-Venant Kirchhoff<sup>2</sup>.

La discrétisation EF des Eqs. (3.1) conduisent à l'expression du problème non-linéaire :

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

avec  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  et  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  les vecteurs des efforts internes et externes, tous deux dépendants du vecteur des inconnues nodales  $\mathbf{q}$ . La linéarisation d'un tel problème permet d'écrire le problème linéaire tangent, utilisé dans un algorithme de Newton, tel que :

$$[\mathbf{K}_{\text{mat}} + \mathbf{K}_{\text{geo}} - \mathbf{K}_{\text{fol}}]\Delta\mathbf{q} = \mathbf{R}(\mathbf{q}) \quad (3.8)$$

avec  $\mathbf{R}$  le résidu d'équilibre,  $\mathbf{K}_{\text{mat}}$  la matrice tangente de raideur matériau,  $\mathbf{K}_{\text{geo}}$  la matrice tangente de raideur géométrique et  $\mathbf{K}_{\text{fol}}$  la matrice tangente du chargement suiveur. Dans la suite, nous proposons une autre méthode basée sur la PGD *a priori* pour résoudre le problème non-linéaire.

### 3.3 PGD *a priori* avec pression uniforme

Par opposition à la réduction de modèle *a priori*, la réduction de modèle *a posteriori* nécessite la construction de "snapshots" à partir du problème complet avant la génération d'une base réduite.

---

1. Définition du tenseur de Green-Lagrange et de sa forme virtuelle :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{Grad} \mathbf{u} + \mathbf{Grad}^T \mathbf{u} + \mathbf{Grad}^T \mathbf{u} \mathbf{Grad} \mathbf{u}) \quad (3.4)$$

$$\delta\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{Grad} \delta\mathbf{u} + \mathbf{Grad}^T \delta\mathbf{u} + \mathbf{Grad}^T \delta\mathbf{u} \mathbf{Grad} \mathbf{u} + \mathbf{Grad}^T \mathbf{u} \mathbf{Grad} \delta\mathbf{u}) \quad (3.5)$$

2. Loi de comportement de Saint-Venant Kirchhoff :

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda\text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} \quad \text{ou} \quad \mathbf{S} = \mathbb{D} : \mathbf{E} \quad (3.6)$$



Dans ce cas, si le nombre de paramètres devient trop élevé, le temps de calcul nécessaire peut devenir prohibitif à cause de la malédiction de la dimension. Au contraire, l'idée principale des approches *a priori* consiste à construire une base réduite avant la génération de solutions approchées. De ce fait, le nombre de calculs à effectuer est réduit par principe (il est dépendant du nombre de vecteurs de la base). Dans le cadre de la PGD *a priori*, nous partons du postulat que la solution peut s'écrire sous forme de produits de fonctions à variables séparées tel que :

$$\mathbf{u}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{\Lambda}_i(\mathbf{X}) \prod_{j=1}^K \lambda_i^j(\mu_j) \right) \quad (3.9)$$

avec  $K$  le nombre de paramètres et  $n$  le nombre de produits de fonctions à variables séparées. Dans notre cas, nous allons introduire ce type de solution directement dans le principe des travaux virtuels donné par l'Eq. (3.1). Dans la suite, nous considérons un paramètre de pression uniforme pour simplifier les développements.

En résumé, l'avantage de la réduction de modèle *a priori* repose sur la construction de la base réduite "hors-ligne" qui ne nécessite aucun calcul du modèle complet. La base générée peut permettre de construire la solution du problème multi-paramétrique en temps réel.

#### 3.3.1 PGD avec champ de pression uniforme et grandes transformations

Nous considérons dans ce développement un champ de pression uniforme  $p$  indépendant de la position courante. Ce champ de pression varie sur une plage de paramètres  $I = [0, P_{\max}]$ . L'approximation du champ de déplacement à reconstruire s'écrit sous forme suivante :

$$\mathbf{u}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{\Lambda}_i(\mathbf{X}) \lambda_i(p) \quad (3.10)$$

avec  $n$  couples inconnus  $(\mathbf{\Lambda}_i, \lambda_i)$ . Les solutions en espace  $\mathbf{\Lambda}_i$  dépendent du vecteur position de référence  $\mathbf{X}$  et les solutions en paramètre de pression  $\lambda_i$  dépendent du paramètre de pression uniforme  $p$ . A partir des équations précédentes, la démarche classique de la PGD consiste à calculer la  $(k + 1)^{\text{ème}}$  approximation  $\mathbf{u}_{k+1} = \lambda_{k+1} \mathbf{\Lambda}_{k+1}$  en supposant les  $k$  premières approximations connues.

### 3.3.2 Génération de la $(k + 1)^{\text{ème}}$ approximation sachant les $k$ premières

Dans cette section, les  $k$  premiers couples d'approximation  $\mathbf{u}^{(k)}$  sont supposés connus. Par souci de clarté, dans la suite de ce chapitre  $\mathbf{u}^{(k)}$  devient  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{\Lambda}_{k+1}$  devient  $\mathbf{\Lambda}$  et  $\lambda_{k+1}$  devient  $\lambda$ , ainsi :

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u} + \mathbf{\Lambda}\lambda \quad (3.11)$$

L'un des points-clés de la méthode consiste à exprimer le champ virtuel de déplacement comme somme de deux termes :

$$\delta(\lambda\mathbf{\Lambda}) = \delta\lambda\mathbf{\Lambda} + \lambda\delta\mathbf{\Lambda} \quad (3.12)$$

avec  $\delta\lambda$  le champ virtuel de la fonction en paramètre de chargement et  $\delta\mathbf{\Lambda}$  le champ virtuel de la fonction en espace. Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer le principe des travaux virtuels à partir des Eqs. (3.2) et (3.3), que nous intégrerons sur l'intervalle de pression  $I$ . L'objectif est de formuler deux sous-problèmes : (i) un sous-problème en espace et (ii) un sous-problème en paramètre de pression (voir Fig. 3.3).

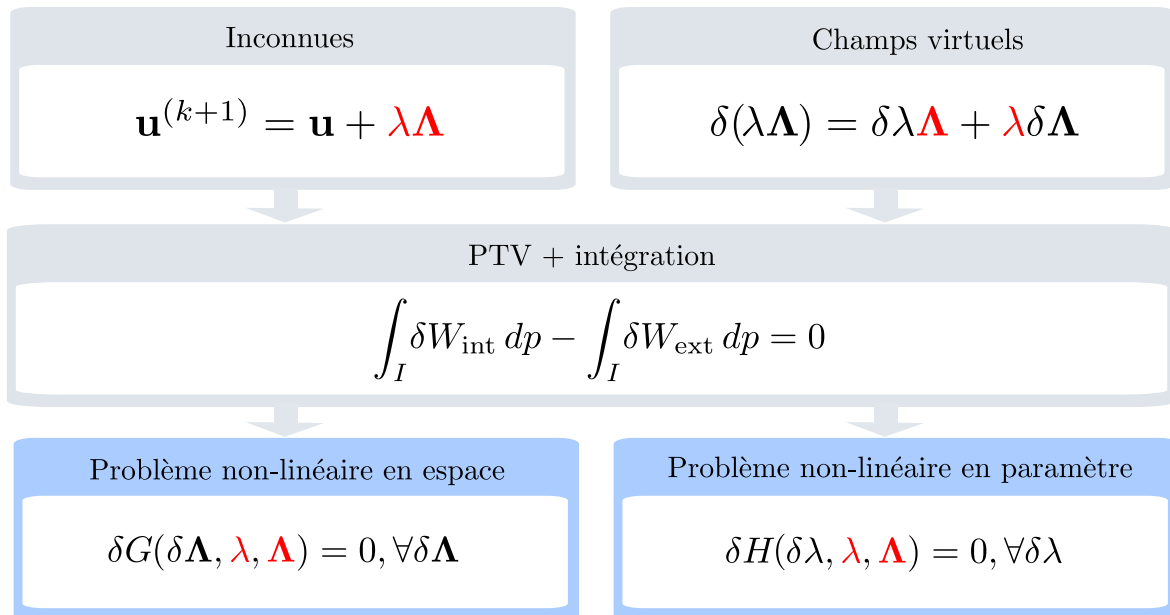


FIGURE 3.3 – Approche proposée pour exprimer les deux sous-problèmes (non-linéaires) en utilisant les hypothèses de la PGD *a priori*. L'objectif est de calculer le couple  $(\lambda, \mathbf{\Lambda})$  qui vérifie les deux sous-problèmes, l'un en espace et l'autre en paramètre de pression.

### 3.3.3 Travail virtuel des efforts intérieurs intégré sur l'intervalle de pression

Le travail virtuel des efforts intérieurs repose sur l'expression du tenseur de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  et de sa forme virtuelle  $\delta\mathbf{E}$  avec l'approximation de la PGD et les champs virtuels définis par les Eqs. (3.11) et (3.12). Afin de faciliter nos développements, nous introduisons les notations suivantes  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\gamma}$ , correspondant respectivement à la partie linéaire et la partie quadratique du tenseur des déformations de Green-Lagrange, tels que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Grad} \mathbf{u} + \mathbf{Grad}^T \mathbf{u}) \quad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Grad}^T \mathbf{u} \mathbf{Grad} \mathbf{u}) \quad (3.14)$$

En considérant l'approximation Eq. (3.12), le tenseur de Green-Lagrange s'écrit de façon suivante :

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}^{(k+1)}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \lambda [\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Lambda}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Lambda}) + \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{u})] + \lambda^2 \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}) \quad (3.15)$$

Par conséquent, à partir des notations de l'équation (3.12), le tenseur  $\delta\mathbf{E}$  se décompose en deux parties distinctes :

$$\delta\mathbf{E}(\mathbf{u}^{(k+1)}) = \delta\mathbf{E}_{\boldsymbol{\Lambda}} + \delta\mathbf{E}_{\lambda} \quad (3.16)$$

avec

$$\delta\mathbf{E}_{\boldsymbol{\Lambda}} = \lambda [\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{\Lambda}) + \boldsymbol{\gamma}(\delta\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\Lambda})] + \lambda^2 [\boldsymbol{\gamma}(\delta\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}) + \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \delta\boldsymbol{\Lambda})] \quad (3.17)$$

$$\delta\mathbf{E}_{\lambda} = \delta\lambda [\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Lambda}) + \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Lambda})] + 2\lambda \delta\lambda \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}) \quad (3.18)$$

L'expression de  $\delta\mathbf{E}_{\boldsymbol{\Lambda}}$  (resp.  $\delta\mathbf{E}_{\lambda}$ ) contient des opérateurs qui dépendent exclusivement de  $\delta\boldsymbol{\Lambda}$  (resp.  $\delta\lambda$ ). Les termes qui dépendent de  $\mathbf{u}$  dans les Eqs. (3.15), (3.17) et (3.18) s'expriment en fonction des  $k$  couples supposés connus  $(\boldsymbol{\Lambda}_i, \lambda_i)_{i=1\dots k}$  tels que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Lambda}_i) \quad (3.19)$$

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i \lambda_j \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}_i, \boldsymbol{\Lambda}_j) \quad (3.20)$$

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{a}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}_i, \mathbf{a}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\Lambda}_i)) \quad (3.21)$$

avec  $\mathbf{a}$  faisant référence à  $\mathbf{\Lambda}$  ou  $\delta\mathbf{\Lambda}$ . A partir de toutes ces notations, l'expression du travail virtuel interne défini l'équation (3.2), intégré sur  $I$ , s'exprime comme étant la somme de deux expressions :

$$\int_I \delta W_{\text{int}} dp = \underbrace{\int_I \int_{\Omega} \delta \mathbf{E}_{\mathbf{\Lambda}} : \mathbb{D} : \mathbf{E} dV dp}_{\delta G_{\text{int}}} + \underbrace{\int_I \int_{\Omega} \delta \mathbf{E}_{\lambda} : \mathbb{D} : \mathbf{E} dV dp}_{\delta H_{\text{int}}} \quad (3.22)$$

avec  $\delta G_{\text{int}}$  et  $\delta H_{\text{int}}$ , des termes qui dépendent respectivement des champs virtuels  $\delta\lambda$  et  $\delta\mathbf{\Lambda}$ . Compte tenu du très grand nombre de termes à expliciter, l'expression complète de la forme  $\delta G_{\text{int}}$  n'est pas détaillée ici. Elle s'écrit comme une somme de 12 termes notés  $a_i$  tels que :

$$\delta G_{\text{int}}(\mathbf{\Lambda}, \lambda) = \sum_{i=1}^{12} a_i \quad (3.23)$$

L'expression des termes  $a_i$  sont tous explicités en Annexe D.1.1. De façon analogue, l'expression complète des terme  $\delta H_{\text{int}}$  s'écrit :

$$\delta H_{\text{int}}(\lambda, \mathbf{\Lambda}) = \sum_{i=1}^{12} c_i \quad (3.24)$$

avec les coefficients  $c_i$  détaillés en Annexe D.1.2. Tous les termes  $a_i$  et  $c_i$  peuvent s'exprimer comme produits de fonctions à variables séparées. Cette propriété ne serait pas conservée si nous avions utilisé une loi de comportement hyperélastique quasi-incompressible. Dans ce cas là, un développement de Taylor serait nécessaire comme cela a été proposé par [86, 87].

#### 3.3.4 Travail virtuel des efforts extérieurs

Nous rappelons que le champ de pression  $p$  est supposé uniforme dans nos développements. A partir de l' Eq. (3.12), le travail virtuel des efforts extérieurs Eq. (3.3), intégré sur l'intervalle  $I$ , s'écrit comme somme de deux termes tels que :

$$\int_I \delta W_{\text{ext}} dp = - \underbrace{\int_I \int_{\partial_{\text{t}\omega}} \lambda \delta \mathbf{\Lambda} \cdot p \mathbf{n} ds dp}_{\delta G_{\text{ext}}} - \underbrace{\int_I \int_{\partial_{\text{t}\omega}} \delta \lambda \mathbf{\Lambda} \cdot p \mathbf{n} ds dp}_{\delta H_{\text{ext}}} \quad (3.25)$$

avec  $\delta G_{\text{ext}}$  et  $\delta H_{\text{ext}}$  qui dépendent respectivement de  $\delta\mathbf{\Lambda}$  et  $\delta\lambda$ . La normale extérieure à la paroi  $\mathbf{n}$  dépend de la position courante de la structure. Par conséquent  $\delta G_{\text{ext}}$  et  $\delta H_{\text{ext}}$  dépendent aussi des inconnues  $\mathbf{\Lambda}$  et  $\lambda$ . Nous introduisons un changement de variable, sur une surface réglée  $\partial_t\Omega$  paramétrée

par  $(\xi, \eta)$  tel que :

$$\int_{\partial_{t\omega}} \mathbf{n} ds = \int_{\partial_{t\Omega}} (\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}) d\xi d\eta \quad (3.26)$$

$$= \int_{\partial_{t\Omega}} (\mathbf{X}_{,\xi} + \mathbf{u}_{,\xi} + \lambda \mathbf{\Lambda}_{,\xi}) \times (\mathbf{X}_{,\eta} + \mathbf{u}_{,\eta} + \lambda \mathbf{\Lambda}_{,\eta}) d\xi d\eta \quad (3.27)$$

La partie spatiale  $\delta G_{\text{ext}}$  du travail virtuel Eq. (3.25) s'exprime alors comme somme de 6 termes notés  $b_i$  tels que :

$$\delta G_{\text{ext}}(\mathbf{\Lambda}) = \sum_{i=1}^6 b_i \quad (3.28)$$

Les termes  $b_i$  sont tous explicités en Annexe D.1.3. De façon analogue,  $\delta H_{\text{ext}}$  s'exprime aussi sous la forme suivante de 6 termes :

$$\delta H_{\text{ext}}(\mathbf{\Lambda}) = \sum_{i=1}^6 d_i \quad (3.29)$$

avec les termes  $d_i$  détaillés en Annexe D.1.4. Les termes  $b_i$  et  $d_i$  conservent la propriété de fonctions à variables séparées. L'utilisation de la PGD dans l'expression du travail virtuel des efforts extérieurs avec forces suiveuses est l'une des originalités de ce Chapitre.

### 3.3.5 Formulations variationnelles séparées et algorithme de point fixe

La nouvelle formulation consiste à trouver le couple de fonctions inconnues  $(\mathbf{\Lambda}, \lambda)$  vérifiant les équations suivantes :

$$\delta G(\mathbf{\Lambda}, \lambda) = \delta G_{\text{int}}(\mathbf{\Lambda}, \lambda) - \delta G_{\text{ext}}(\mathbf{\Lambda}, \lambda) = 0, \quad \forall \delta \mathbf{\Lambda} \in \mathcal{C}_{\mathbf{\Lambda}} \quad (3.30)$$

$$\delta H(\mathbf{\Lambda}, \lambda) = \delta H_{\text{int}}(\mathbf{\Lambda}, \lambda) - \delta H_{\text{ext}}(\mathbf{\Lambda}, \lambda) = 0, \quad \forall \delta \lambda \in \mathcal{C}_{\lambda} \quad (3.31)$$

avec  $\mathcal{C}_{\mathbf{\Lambda}}$  et  $\mathcal{C}_{\lambda}$  des espaces de fonctions suffisamment régulières ( $\mathcal{C}_{\mathbf{\Lambda}}$  ayant une admissibilité cinématique à zéro tel que  $\delta \mathbf{\Lambda} = \mathbf{0}$  sur  $\partial_u \Omega$ ). Un algorithme de Point Fixe est utilisé pour résoudre ce couple de problèmes non-linéaires associés aux équations (3.30) et (3.31). Cela consiste à résoudre les deux sous-problèmes alternativement jusqu'à convergence (voir Tab. 3.1). Le premier problème revient à trouver  $\mathbf{\Lambda}$ , pour un  $\lambda$  donné, vérifiant l'équation suivante :

$$\delta G(\mathbf{\Lambda}, \delta \mathbf{\Lambda}) = 0, \quad \forall \delta \mathbf{\Lambda} \in \mathcal{C}_{\mathbf{\Lambda}} \quad (3.32)$$

Ensuite, sachant  $\mathbf{\Lambda}$ , le deuxième problème consiste à trouver  $\lambda$  qui vérifie :

$$\delta H(\lambda, \delta \lambda) = 0, \quad \forall \delta \lambda \in \mathcal{C}_{\lambda} \quad (3.33)$$

Ces deux étapes sont répétées jusqu'à la stagnation du couple de solutions.

---

**Algorithm 1** : greedy algorithm

---

**Initialization**  $\lambda^0$

**While** the criterion is non verified

**Compute**  $\mathbf{\Lambda}$  knowing  $\lambda^0$  (nonlinear solution  $\delta G(\mathbf{\Lambda})$ )

**Compute**  $\lambda$  knowing  $\mathbf{\Lambda}$  (nonlinear solution  $\delta H(\lambda)$ )

$\lambda^0 \leftarrow \lambda$

**End while**

---

TABLE 3.1 – Algorithme glouton pour deux paramètres

### 3.3.6 Conclusion sur la formulation

Dans cette Section, nous avons exprimé la formulation variationnelle d'un problème non-linéaire géométrique avec forces suiveuses en considération notre solution écrite sous forme de produit de fonctions à variables séparées. Sachant les  $k$  premiers couples d'approximation  $(\mathbf{\Lambda}_i, \lambda_i)$ , l'objectif est de trouver le  $(k + 1)^{\text{ème}}$  couple noté  $(\mathbf{\Lambda}, \lambda)$  solution de deux sous-problèmes non-linéaires :

$$\delta G(\mathbf{\Lambda}, \lambda) = 0, \quad \forall \delta \mathbf{\Lambda} \in \mathcal{C}_{\mathbf{\Lambda}} \quad (3.34)$$

$$\delta H(\mathbf{\Lambda}, \lambda) = 0, \quad \forall \delta \lambda \in \mathcal{C}_{\lambda} \quad (3.35)$$

Un algorithme de point fixe est utilisé pour y parvenir.

La résolution des Eqs. (3.34) and (3.35) ne sont pas triviales. La section suivante est consacrée à la résolution du problème en espace  $\delta G$  pour une fonction  $\lambda$  supposée connue, avec la méthode des éléments finis. Ce problème étant par nature non-linéaire, une méthode de Newton-Raphson sera utilisée. La linéarisation exacte de l'équation (3.34) est détaillée en sous-section 3.4.4 afin d'exprimer le problème linéaire tangent. La résolution du problème en paramètre de pression Eq. (3.35) sera détaillée plus loin en Section 3.5.

Remarque : La méthode des éléments finis est particulièrement adaptée pour exprimer le changement de variable de l'Eq. (3.27), sur une surface iso-paramétrique (voir Fig. 3.4).

### 3.4. DISCRÉTISATION EF DU PROBLÈME EN ESPACE

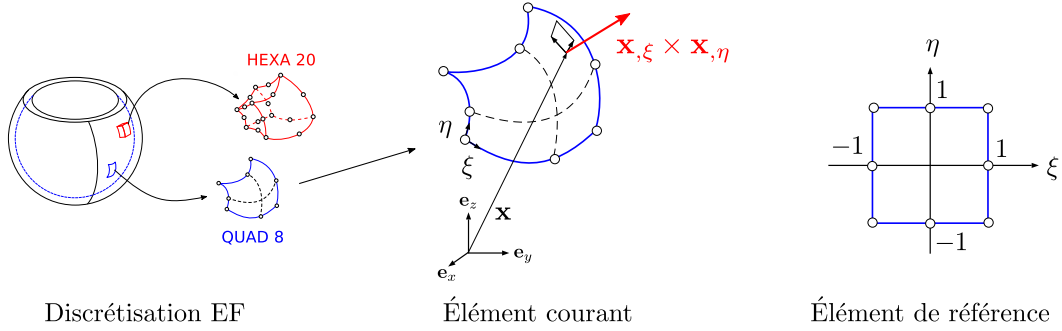


FIGURE 3.4 – Discretisation EF de la structure. Configuration de référence et configuration courante d'un élément de surface iso-paramétrique.

## 3.4 Discrétisation EF du problème en espace

Cette Section a deux objectifs : (i) exprimer le problème non-linéaire discrétisé  $\delta G$  associé à l'Eq. (3.34) et (ii) exprimer le problème linéaire tangent utilisé dans un algorithme de résolution non-linéaire de type Newton-Raphson. Nous rappelons que  $\delta G$  est la somme de deux termes  $\delta G_{\text{int}}$  et  $\delta G_{\text{ext}}$ . Afin de faciliter nos développements, nous exprimerons d'abord la forme discrète de  $\delta G_{\text{int}}$ , puis celle de  $\delta G_{\text{ext}}$ .

### 3.4.1 Forme discrète de $\delta G_{\text{int}}$

La discrétisation EF associée à la fonction  $\mathbf{\Lambda}$  est notée  $\mathbf{\Lambda}^h = \mathbf{\Phi} \mathbf{r}$  et sa forme virtuelle  $\delta \mathbf{\Lambda}^h = \mathbf{\Phi} \delta \mathbf{r}$  avec  $\mathbf{r}$  le vecteur d'inconnues nodales et  $\delta \mathbf{r}$  sa forme virtuelle. La forme discrétisée de  $\delta G_{\text{int}}^h$  permet d'écrire le vecteur  $\mathbf{G}_{\text{int}}$ , qui dépend du vecteur inconnu  $\mathbf{r}$ , tel que :

$$\delta G_{\text{int}}^h = \delta \mathbf{r}^T \mathbf{G}_{\text{int}}(\mathbf{r}) \quad (3.36)$$

Le vecteur  $\mathbf{G}_{\text{int}}$  est la somme de nombreux termes, dépendant des  $k$  couples de modes connues.

### 3.4. DISCRÉTISATION EF DU PROBLÈME EN ESPACE

---

Son expression est donnée ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{\text{int}} = & \alpha_1 \mathbf{G}_1 + \alpha_2 \mathbf{G}_2 + \alpha_3 \mathbf{G}_3 + \alpha_4 \mathbf{G}_4 \\
& + \sum_{i=1}^k \alpha_{5i} \mathbf{G}_{5i} + \alpha_{6i} \mathbf{G}_{6i} + \alpha_{7i} \mathbf{G}_{7i} + \alpha_{8i} \mathbf{G}_{8i} + \alpha_{9i} \mathbf{G}_{9i} + \alpha_{10i} \mathbf{G}_{10i} \\
& + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_{5ij} \mathbf{G}_{5ij} + \alpha_{7ij} \mathbf{G}_{7ij} + \alpha_{11ij} \mathbf{G}_{11ij} + \alpha_{12ij} \mathbf{G}_{12ij} \\
& + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \alpha_{11ijl} \mathbf{G}_{11ijl}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Les coefficients associés à la lettre grecque  $\alpha$  dépendent des fonctions  $\lambda$  et  $\lambda_i$  et sont récapitulés dans le tableau Tab. D.1 de l'Annexe D.2.1. L'expression des vecteurs sont tous explicités en Annexe D.2.2. La construction de tous ces vecteurs fait intervenir des opérateurs discrétisés analogues à ceux utilisés pour construire le vecteur des efforts intérieurs.

Un problème numérique majeur apparaît lors de la construction de  $\mathbf{G}_{\text{int}}$ . Les doubles sommes et triples sommes de l'Eq. (3.36) conduisent à la construction d'un très grand nombre de termes, si le nombre de modes  $n$  est grand ( $n > 10$ ). Le temps de calcul et la mémoire nécessaire à la construction des opérateurs peuvent être impactée. Nous verrons que pour les exemples numériques, le nombre de modes nécessaires à la reconstruction d'une solution satisfaisante reste inférieur à 10. Si le nombre de modes s'avère devoir être supérieur à 10, peut-être qu'une méthode d'orthogonalisation des modes en espaces serait une piste judicieuse pour minimiser le nombre de termes à calculer.

#### 3.4.2 Forme discrétisée de $\delta G_{\text{ext}}$

De façon analogue à la sous-section précédente, la forme discrétisée de l'Eq. (3.28) s'écrit sous forme de produits de vecteurs, tel que :

$$\delta G_{\text{ext}}^{\text{h}} = \delta \mathbf{r}^{\text{T}} \mathbf{G}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \tag{3.38}$$

avec  $\mathbf{G}_{\text{ext}}$  exprimé sous forme d'une somme :

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{\text{ext}} = & \beta_1 \mathbf{G}_{\text{e}1} + \beta_2 \mathbf{G}_{\text{e}2} + \beta_3 \mathbf{G}_{\text{e}3} + \sum_{i=1}^k (\beta_{5i} \mathbf{G}_{\text{e}5i} + \beta_{6i} \mathbf{G}_{\text{e}6i}) \\
& + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \beta_{4ij} \mathbf{G}_{\text{e}4ij}
\end{aligned} \tag{3.39}$$



### 3.4. DISCRÉTISATION EF DU PROBLÈME EN ESPACE

Les coefficients associés à la lettre grecque  $\beta$ , qui dépendent des fonctions  $\lambda$  et  $\lambda_i$  connus, sont explicités dans le tableau D.2 de l' Annexe D.2.3. Les vecteurs sont détaillés en Annexe D.2.4. Notons que la construction de ces vecteurs est analogue à la construction du vecteur des efforts extérieurs avec forces suiveuses.

Dans le cadre de ce Chapitre, nous supposons que le champ de pression est uniforme. Si nous avions utilisé un champ de pression hydrostatique dépendant de la configuration courante, de nombreux termes additionnels seraient à prendre en compte dans l'équation (3.39). L'expression d'un tel champ serait à prévoir en perspective de ces travaux de recherches.

#### 3.4.3 Équation non-linéaire discrétisée du problème spatial

Le sous-problème spatial discrétisé est un problème non-linéaire vectoriel de la forme suivante :

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \mathbf{G}_{\text{int}}(\mathbf{r}) - \mathbf{G}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

Il est analogue au problème non-linéaire présenté au chapitre 2 dans la mesure où  $\mathbf{G}_{\text{int}}$  et  $\mathbf{G}_{\text{ext}}$  sont assez proches des vecteurs des efforts intérieurs et extérieurs  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  et  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ . La Fig. 3.5 récapitule sous forme de schéma les opérateurs discrétisés associés aux formes continues du problème spatial. Malgré l'analogie, les difficultés des expressions reposent d'une part sur le nombre de termes à construire et d'autre part sur l'expression des coefficients (voir Tabs. D.1 et D.2 détaillés en Annexe D).

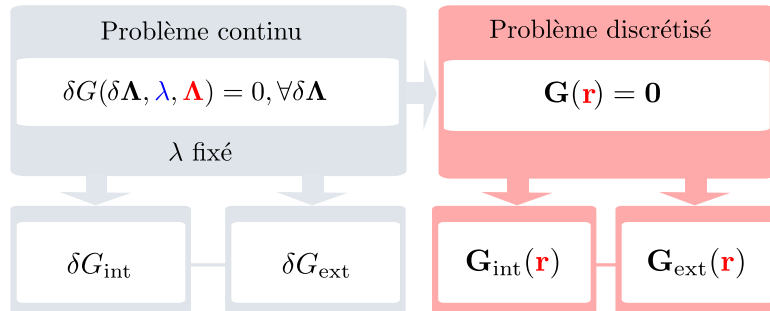


FIGURE 3.5 – Forme continue et forme discrétisée par MEF associée à l'équation non-linéaire en espace. A cette étape, les  $\lambda$  sont connus, donc les coefficients qui dépendent de  $\lambda$  peuvent être calculés avant la résolution du problème.

Afin de résoudre cette équation non-linéaire, la sous-section 3.4.4 est consacrée à la linéarisation

de  $\mathbf{G}$ . Nous détaillons en particulier l'expression des matrices tangentes qui seront utilisées dans un algorithme de Newton-Raphson.

### 3.4.4 Linéarisation de $\delta G$ fonction de $\Lambda$ sachant $\lambda$

Rappelons que le problème à résoudre est de la forme suivante :  $\delta \mathbf{G} = \delta \mathbf{G}_{\text{int}} - \delta \mathbf{G}_{\text{ext}}$ . Afin d'exprimer les matrices tangentes, un travail préliminaire consiste à linéariser la forme continue de  $\delta G_{\text{int}}$  telle que :

$$\Delta \delta G_{\text{int}}(\Lambda, \lambda) = \underbrace{\int_I \int_{\Omega} \Delta \delta \mathbf{E}_{\Lambda} : \mathbb{D} : \mathbf{E} dV dp}_{\Delta \delta G_g(\delta \Lambda, \Delta \Lambda)} + \underbrace{\int_I \int_{\Omega} \delta \mathbf{E}_{\Lambda} : \mathbb{D} : \Delta \mathbf{E} dV dp}_{\Delta \delta G_m(\delta \Lambda, \Delta \Lambda)} \quad (3.41)$$

où  $\Delta \mathbf{E}$  et  $\Delta \delta \mathbf{E}_{\Lambda}$  sont respectivement la linéarisation du tenseur de Green-Lagrange et de sa forme virtuelle par rapport à  $\Lambda$ . Leurs expressions sont données ci-dessous :

$$\Delta \delta \mathbf{E}_{\Lambda} = \lambda^2 (\gamma(\delta \Lambda, \Delta \Lambda) + \gamma(\Delta \Lambda, \delta \Lambda)) \quad (3.42)$$

$$\Delta \mathbf{E} = \lambda [\varepsilon(\Delta \Lambda) + \gamma(\mathbf{u}, \Delta \Lambda) + \gamma(\Delta \Lambda, \mathbf{u})] + \lambda^2 [\gamma(\Delta \Lambda, \Lambda) + \gamma(\Lambda, \Delta \Lambda)] \quad (3.43)$$

Ensuite, étant donné que la variable  $p$  ne dépend pas de  $\Lambda$ , la linéarisation de  $\delta G_{\text{ext}}$  est donnée ci-dessous :

$$\Delta \delta G_{\text{ext}}(\Lambda, \lambda) = - \underbrace{\int_I \int_{\partial_t \omega} \delta \Lambda \lambda \cdot p \Delta \mathbf{n} ds dp}_{\Delta \delta G_f(\delta \Lambda, \Delta \Lambda)} \quad (3.44)$$

avec  $\Delta \mathbf{n}$ , la variation de la normale. A l'aide d'un changement de variable et de l'hypothèse de la PGD, la variation de normale s'écrit de façon suivante :

$$\int_{\partial_t \omega} \Delta \mathbf{n} ds = \int_{\partial_t \Omega} \lambda \Delta \Lambda_{,\xi} \times (\mathbf{X}_{,\eta} + \mathbf{u}_{,\eta} + \lambda \Lambda_{,\eta}) d\xi d\eta + \int_{\partial_t \Omega} (\mathbf{X}_{,\xi} + \mathbf{u}_{,\xi} + \lambda \Lambda_{,\xi}) \times \lambda \Delta \Lambda_{,\eta} d\xi d\eta \quad (3.45)$$

Les discrétisations par la MEF des Eqs.(3.41) et (3.44) font apparaître les expressions des matrices tangentes, pour résoudre le sous-problème non-linéaire discrétisé  $\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ .

### 3.4.5 Contributions analogues aux matrices de raideurs matériaux, géométriques et de forces suiveuses

La forme discrétisée de  $\Delta \delta G_m$  notée  $\Delta \delta G_m^h$  s'écrit de façon suivante :

$$\Delta \delta G_m^h = \delta \mathbf{r}^T \mathbf{K}_m \Delta \mathbf{r} \quad (3.46)$$

### 3.4. DISCRÉTISATION EF DU PROBLÈME EN ESPACE

---

avec la matrice  $\mathbf{K}_m$  détaillée en Annexe D.3.1. La même démarche permet d'écrire la forme discrétisée de  $\Delta\delta G_{geo}$  tel que :

$$\Delta\delta G_g^h = \delta\mathbf{r}^T \mathbf{K}_g \Delta\mathbf{r} \quad (3.47)$$

avec le détail de la matrice  $\mathbf{K}_g$  donnée en Annexe D.3.2. Ces deux matrices dépendent de deux coefficients associés aux lettres grecques  $\alpha$  détaillés en Tab. D.1. Leurs expressions dépendent d'opérateurs utilisés pour construire les matrices tangentes géométrique et matériau.

Enfin, la forme discrétisée  $\Delta\delta G_f^h$  s'écrit de la forme suivante :

$$\Delta\delta G_f^h = \delta\mathbf{r}^T \mathbf{K}_f \Delta\mathbf{r} \quad (3.48)$$

dont l'expression de  $\mathbf{K}_f$  est détaillée en Annexe D.3.3.

#### 3.4.6 Résolution du problème linéaire tangent en espace

Le problème linéaire tangent, utilisé dans un algorithme de Newton-Raphson pour résoudre le sous-problème non-linéaire en espace, s'écrit de façon suivante :

$$(\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_f)\Delta\mathbf{r} = -\mathbf{G}(\mathbf{r}) \quad (3.49)$$

Les matrices tangentes sont associées aux formes linéarisées de  $\Delta G$  rappelées en Fig. 3.6.

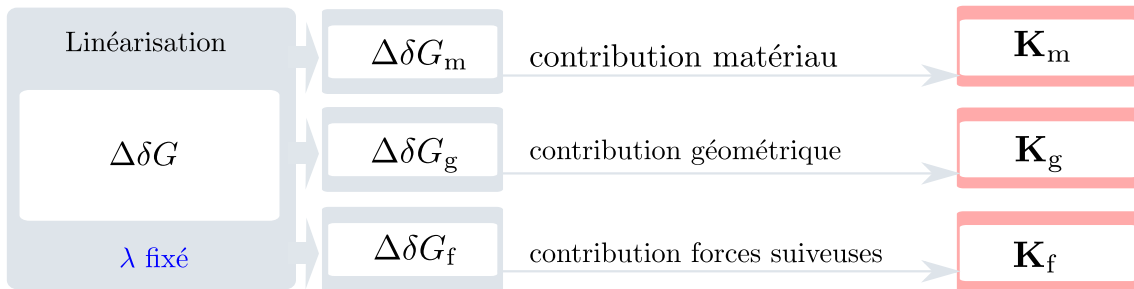


FIGURE 3.6 – Formes continues et formes discrètes du problème spatial linéarisé. Les matrices tangentes sont analogues aux matrices du problème non-linéaire avec forces suiveuses.

L'utilisation des matrices tangentes garantit une convergence quadratique de la solution du problème spatial  $\mathbf{\Lambda}$ . Cette solution calculée est ensuite utilisée pour résoudre le problème en paramètre de pression Eq. (3.33), abordé dans la Section 3.5.

### 3.5 Sous-problème en paramètre de pression

Dans cette section, nous proposons deux approches pour résoudre le sous-problème en paramètre de pression  $\delta H$  de l'Eq. (3.33) avec  $\mathbf{\Lambda}$  connu. Dans un premier temps nous rappelons l'expression de l'équation fonctionnelle non-linéaire  $\delta H$  et les coefficients dépendant de  $\mathbf{\Lambda}$  et de  $\mathbf{\Lambda}_i$ . Ensuite, deux méthodes de résolutions sont présentées : (i) la première consiste à effectuer une discrétisation EF à une dimension sur l'intervalle de paramètre de pression  $I$  et (ii) l'autre approche consiste à résoudre le sous-problème non-linéaire de façon incrémentale sur l'intervalle de pression  $I$ .

#### 3.5.1 Expression de $\delta H$ en considérant une pression uniforme

Le problème de paramètre de pression peut s'écrire sous la forme variationnelle suivante :

$$\delta H(\lambda, \delta\lambda) = \int_I \delta\lambda H(\lambda) dp = 0, \forall \delta\lambda \in \mathcal{C}_\lambda \quad (3.50)$$

avec  $H(\lambda)$  une équation fonctionnelle polynomiale en  $\lambda$  de la forme suivante :

$$H(\lambda) = q_0 + r_0 p + (q_1 + r_1 p)\lambda + (q_2 + r_2 p)\lambda^2 + q_3 \lambda^3 \quad (3.51)$$

Les coefficients  $q_i$  and  $r_i$  sont détaillés en Annexe D.4. Tous ces coefficients dépendent des fonctions en espaces supposées connues  $\mathbf{\Lambda}$  and  $\mathbf{\Lambda}_i$ .

#### 3.5.2 Résolution de $\delta H$ avec $\mathbf{\Lambda}$ connu

*Méthode 1 : Approche par discrétisation EF* - A partir de la formulation variationnelle Eq. (3.50), nous pouvons exprimer sa forme linéarisée écrite ci-dessous :

$$\Delta\delta H(\delta\lambda, \Delta\lambda) = \int_I [q_1 + r_1 p + 2(q_2 + r_2 p)\lambda + 3q_3 \lambda^2] \Delta\lambda dp = 0 \quad (3.52)$$

Nous pouvons introduire la discrétisation EF  $\lambda^h = \mathbf{\Psi}\mathbf{s}$  et sa forme virtuelle discrétisée  $\delta\lambda^h = \mathbf{\Psi}\delta\mathbf{s}$ , avec  $\mathbf{\Psi}$  une matrice de fonction de forme 1D,  $\mathbf{s}$  le vecteur d'inconnues nodales et  $\delta\mathbf{s}$  sa forme virtuelle. Les formes discrétisées associées aux Eqs. (3.50) et (3.52) s'expriment sous la forme suivante :

$$\delta H(\lambda^h) = \delta\mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{s}) \quad (3.53)$$

$$\Delta\delta H(\delta\lambda^h, \Delta\lambda^h) = \delta\mathbf{s}^T \mathbf{K}_h \Delta\mathbf{s} \quad (3.54)$$

### 3.5. SOUS-PROBLÈME EN PARAMÈTRE DE PRESSION

---

avec

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \int_I \boldsymbol{\Psi}^T [q_0 + r_0 p + (q_1 + r_1 p)\lambda + (q_2 + r_2 p)\lambda^2 + q_3 \lambda^3] dp \quad (3.55)$$

$$\mathbf{K}_h = \int_I \boldsymbol{\Psi}^T [q_1 + r_1 p + 2(q_2 + r_2 p)\lambda + 3q_3 \lambda^2] \boldsymbol{\Psi} dp \quad (3.56)$$

Le vecteur  $\mathbf{H}(\mathbf{s})$  est la forme discrétisée de  $\delta H$  et  $\mathbf{K}_h$  est la matrice tangente du problème non-linéaire discrétisé.

*Méthode 2 : Approche par incréments* - Résoudre l'Eq. (3.50) revient aussi à trouver la fonction  $\lambda$  qui vérifie  $H(\lambda) = 0$  dans l'Eq. (3.51), pour chaque valeur de  $p$  dans l'intervalle de pression  $I$ . La linéarisation de  $H$  par rapport à  $\lambda$ , utilisée dans un algorithme de Newton, est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = q_1 + r_1 p + 2(q_2 + r_2 p)\lambda + 3q_3 \lambda^2 \quad (3.57)$$

Une solution scalaire issue d'un problème non-linéaire est alors calculée pour chaque valeur de  $p$  sur l'intervalle  $I$ .

#### 3.5.3 Conclusion sur la formulation en paramètre de pression

Nous avons proposé deux approches pour résoudre le sous-problème non-linéaire en paramètre de pression  $\delta H$ . La première méthode se base sur une discrétisation EF et la deuxième sur une approche par incréments (voir Fig. 3.7). Une comparaison entre ces deux méthodes est proposée en sous-Section 3.6.6, au travers d'un exemple numérique. Nous verrons que l'approche par incréments est préférable à la méthode par discrétisation EF de l'espace  $I$ . On peut finalement noter que la résolution du problème en paramètre de pression n'est pas coûteuse en temps de calcul (problème 1D) contrairement au problème en espace.

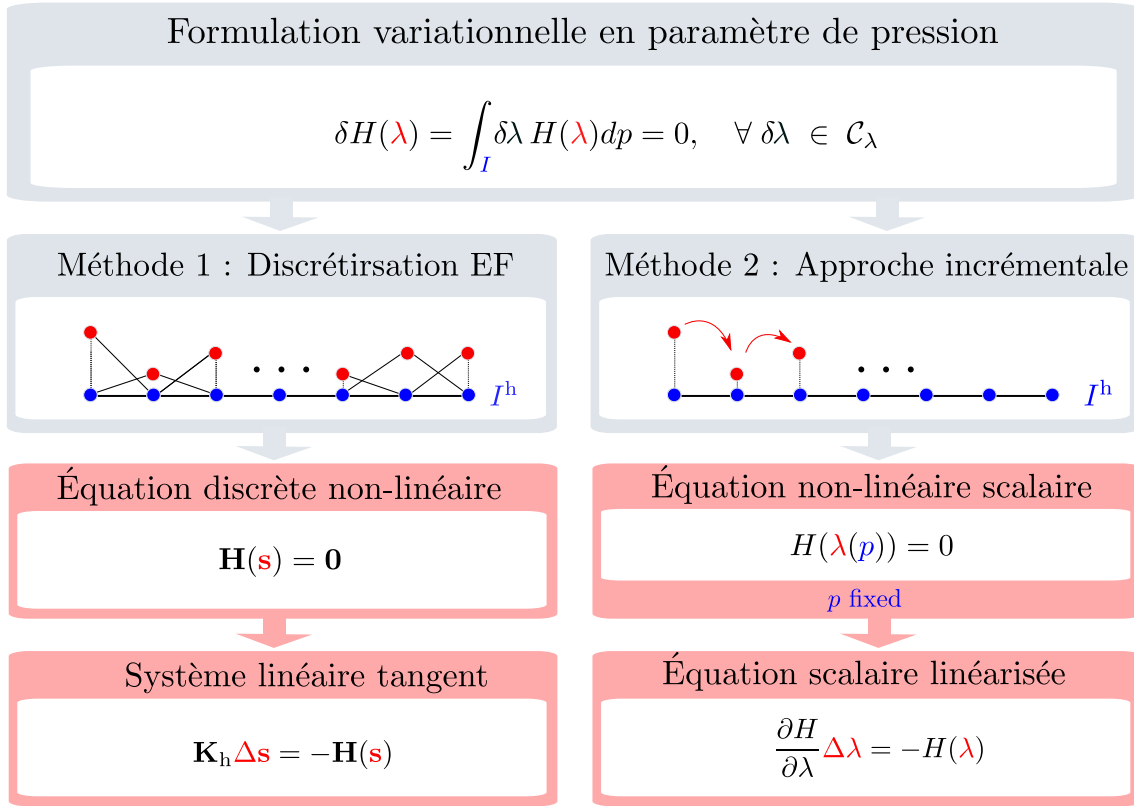


FIGURE 3.7 – Deux approches proposées pour résoudre le problème en paramètre de pression.

## 3.6 Exemples numériques avec pression uniforme

### 3.6.1 Plaque circulaire tri-dimensionnelle soumise à une pression uniforme

Dans cet exemple numérique, nous nous intéressons au calcul de l'équilibre statique non-linéaire d'une plaque circulaire encastree sur son bord et soumise à une pression uniforme sur l'une de ses faces. Les paramètres matériaux sont le module d'Young  $E = 6,96.10^9$  Pa et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.38$ . Les paramètres du maillage 3D hexaédrique et de la géométrie sont donnés en Fig. 3.8.

Dans la suite, nous présenterons : (i) une solution de référence obtenue sur l'intervalle de pression  $I$  obtenue avec le modèle complet (ii) la solution obtenue avec la réduction de modèle PGD *a priori*. L'intervalle de pression considérée est  $I = [0, P_{max}]$  avec  $P_{max} = 1500$  Pa. Ces solutions sont comparées pour valider l'approche présentée dans ce chapitre.

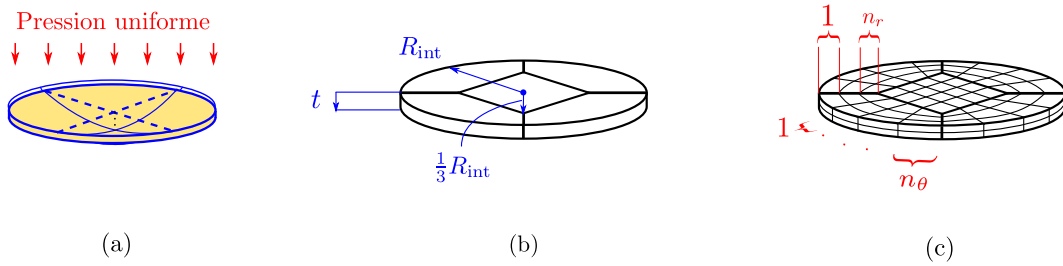


FIGURE 3.8 – (a) Plaque circulaire tri-dimensionnelle soumise à une pression uniforme  $p$ ; (b) Géométrie de la plaque utilisée pour générer le maillage hexaédrique avec  $R_{\text{int}} = 0.144$  m et l'épaisseur  $t = 0.25$  mm; (c) Paramètres du maillage avec des hexaèdres à 20 nœuds tels que  $n_r = 4$  et  $n_\theta = 4$ .

### 3.6.1.1 Solution de référence du modèle complet

Dans un premier temps, nous avons effectué une simulation du modèle complet en utilisant la méthode présentée au Chapitre 2 (Newton-Raphson incrémentale). En Fig. 3.9, nous avons tracé l'évolution du déplacement du centre de la plaque en fonction de la pression, ainsi que le maillage déformé pour une pression donnée. Nous donnons les informations sur le temps de calcul en Tab. 3.2. La solution est non-linéaire car l'amplitude du déplacement est 15 fois supérieure à celle de l'épaisseur. De plus, la pente de la courbe varie en fonction du chargement. Nous avons tracé l'évolution de la norme du résidu issu de l'algorithme de Newton-Raphson pour quelques incréments de pressions, montrant ainsi la convergence quadratique de notre algorithme (voir Fig. 3.10).

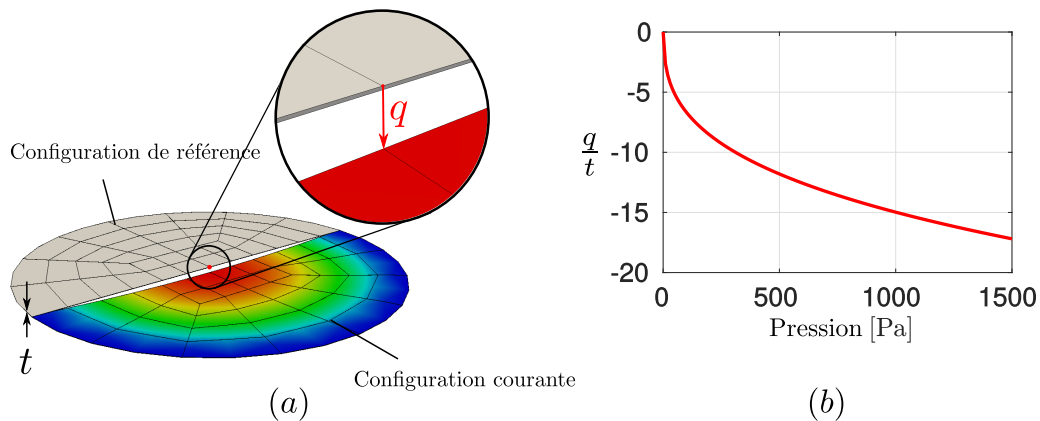


FIGURE 3.9 – (a) Vues de la configuration de référence d'épaisseur  $t = 0.25$  mm et norme du champ de déplacement en configuration courante ( $\|\mathbf{u}\| = 0$  en bleu et  $\|\mathbf{u}\| = 4.29$  mm en rouge); (b) Évolution du déplacement adimensionné au centre de la plaque en fonction de la pression avec  $dp = 10$  Pa.

### 3.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES AVEC PRESSION UNIFORME

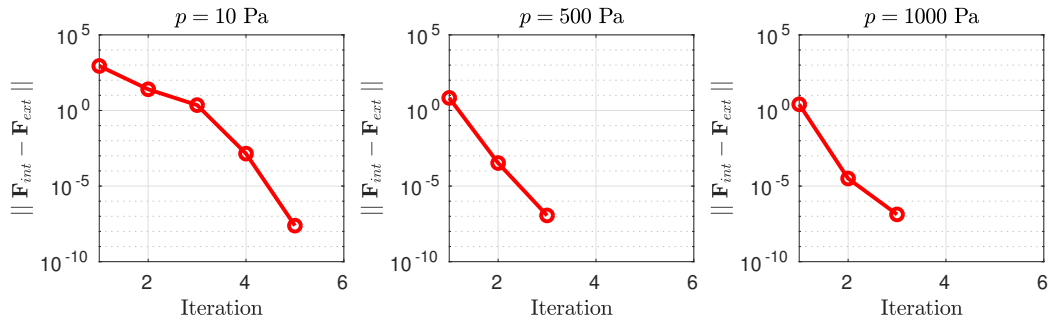


FIGURE 3.10 – Évolution du résidu d'équilibre en fonction des itérations de l'algorithme de Newton-Raphson pour différentes valeurs de pression  $p$ .

Nombre éléments volumiques	80
Nombre de degrés de liberté	1809
Nombre d'incrémentes de chargement	150
Nombre de systèmes linéaires moyen par incrément de charge	4
Temps de calcul moyen par incrément	1.5 sec
Temps de calcul total	3 minutes et 40 sec

TABLE 3.2 – Données et temps de calcul

Dans la suite, nous nous servons du même maillage pour calculer la base réduite PGD *a priori* (c'est à dire  $n_r = 4$  et  $n_\theta = 4$ ) et de la même discrétisation de l'intervalle de pression à 150 nœuds. Même si cela n'est pas montré ici, ce maillage est suffisant pour considérer la solution EF indépendante du maillage.

#### 3.6.2 Construction d'une base réduite PGD *a priori*

Nous proposons en Tab. 3.3 l'algorithme utilisé pour construire la base réduite PGD *a priori*. C'est cet algorithme que nous avons utilisé pour construire les 10 premiers modes PGD associés au problème (dont les 9 premiers sont illustrés en Fig. 3.11).

A propos de l'algorithme, les remarques suivantes peuvent être faites :

- Aucun critère d'arrêt n'a été proposé concernant le nombre de couples de modes à générer. L'idée principale est de générer un nombre de modes suffisant et d'observer la convergence de la solution reconstruite par rapport à la solution de référence précédemment calculée.
- Le nombre de boucles de l'algorithme de point fixe a été fixé arbitrairement à 5. En pratique,



Algorithm : PGD <i>a priori</i>	Comments
<b>For</b> $i_{\text{mode}} = 1 : n_{\text{mode}}$ <b>Initialization</b> $\lambda^0$ <b>For</b> $i_{\text{greedy}} = 1 : n_{\text{greedy}}$ <b>Compute</b> $\mathbf{G}(\Lambda)$ knowing $\lambda^0$ <b>While</b> $\ \mathbf{G}(\Lambda)\  > \varepsilon_g$ <b>Solve</b> $(\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_f)\Delta\Lambda = -\mathbf{G}(\Lambda)$ $\Lambda \leftarrow \Lambda + \Delta\Lambda$ <b>Compute</b> $\mathbf{G}(\Lambda)$ <b>End while</b> <b>For</b> $i_{\text{pres}} = 1 : n_{\text{pres}}$ <b>Compute</b> $H$ for a given $p$ <b>While</b> $\ H\  > \varepsilon_h$ <b>Solve</b> $\frac{\partial H}{\partial \lambda} \Delta\lambda = -H$ $\lambda(p) \leftarrow \lambda(p) + \Delta\lambda(p)$ <b>End while</b> <b>End for</b> $\lambda^0 \leftarrow \lambda$ <b>End for</b> $\lambda_i \leftarrow \lambda$ and $\Lambda_i \leftarrow \Lambda$ <b>End for</b>	$n_{\text{mode}} = 10$  $n_{\text{greedy}} = 5$ Spatial NL problem $\varepsilon_g = 10^{-2}$  $n_{\text{pres}} = 150$ Param. problem $\varepsilon_h = 10^{-15}$

 TABLE 3.3 – Algorithme utilisé pour générer les modes PGD *a priori*

nous verrons que pour cet exemple, 5 itérations suffisent pour obtenir une stagnation des solutions.

- Deux types d'analyses d'erreur sont proposées dans la suite : (i) une analyse d'erreur pour vérifier la convergence globale du problème reconstruit vers la solution de référence, et (ii) une autre analyse d'erreur pour vérifier la convergence de l'algorithme de Newton du sous-problème non-linéaire en espace.

Nous pouvons observer en Fig. 3.11 les neuf premiers modes en espace et paramètre de pression. Les modes en espace sont axi-symétriques et vérifient les conditions aux limites en déplacement. Les modes de paramètres de pression contiennent des discontinuités étant donné que les fonctions ne semblent pas régulières sur l'intervalle de pression  $I$ . Une explication, basée sur l'utilisation de méthodes de continuation pour résoudre Eq. (3.31), sera présentée en sous-section 3.6.6.

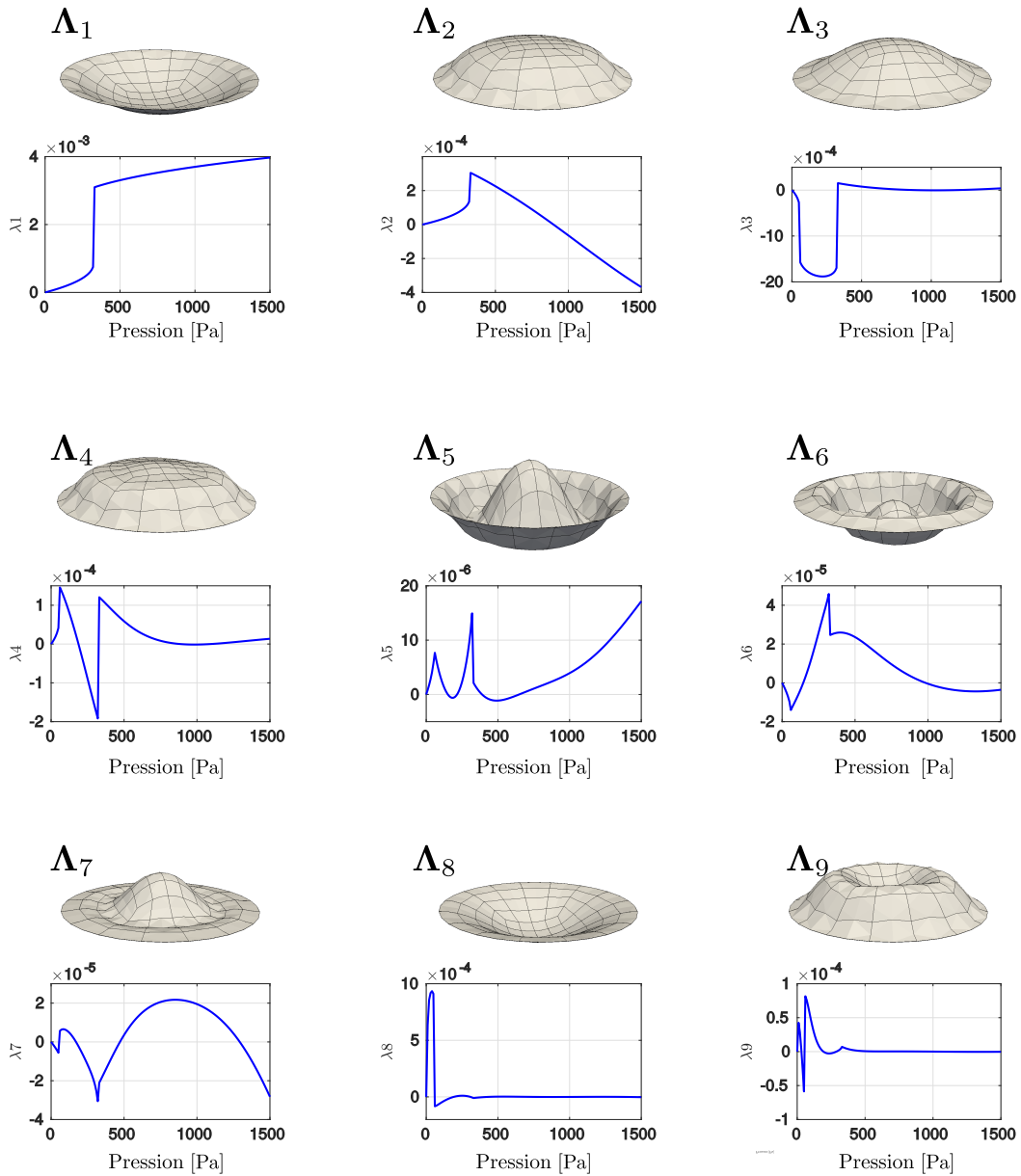


FIGURE 3.11 – Neufs premiers modes ( $\lambda_i, \Lambda_i$ ) générés par l'algorithme proposé Tab. 3.3.

### 3.6.3 Analyse de la convergence globale du problème

L'objectif est de comparer la solution reconstruite par les modes PGD *a priori* par rapport au modèle complet, à l'aide d'un indicateur d'erreur global. Pour ce faire, nous proposons l'erreur globale, notée  $E_g$ , qui correspond à l'intégrale sur le champ de pression de l'erreur normalisée en énergie, définie

### 3.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES AVEC PRESSION UNIFORME

ci-dessous :

$$E_g^{(n)} = \int_I \frac{\| \mathbf{q}^{(n)}(p) - \mathbf{q}_{\text{ref}}(p) \|_g}{\| \mathbf{q}_{\text{ref}}(p) \|_g} dp \quad \text{with} \quad \| \bullet \|_g = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{S}(\bullet) : \mathbf{E}(\bullet) dV \quad (3.58)$$

avec  $\mathbf{q}_{\text{ref}}$  la solution EF de référence associée à une valeur de pression et  $\mathbf{q}^{(n)}$  la solution reconstruite en considérant les  $n$  premiers modes PGD. La Fig. 3.12 montre la décroissance de cette erreur en fonction du nombre de modes. Nous observons qu'à partir de 8 modes, l'erreur globale est inférieure à 1% ( $E_g < 1\%$ ). Cependant, cette analyse montre que parmi les 8 modes PGD, seuls trois d'entre eux ont une influence significative sur la convergence.

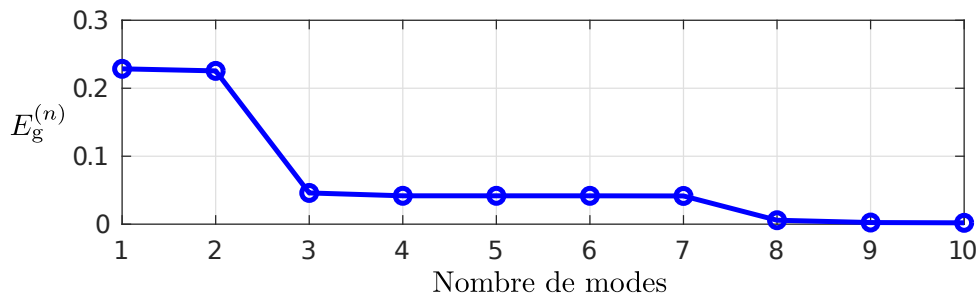


FIGURE 3.12 – Évolution de l'erreur globale en fonction du nombre de modes

Une comparaison qualitative de l'évolution du déplacement au centre du disque est proposée en Fig. 3.13. La solution de référence et la solution reconstruite par  $n$  modes y sont tracés. L'approximation se superpose à la solution de référence pour un nombre de mode  $n$  supérieur ou égal à 8.

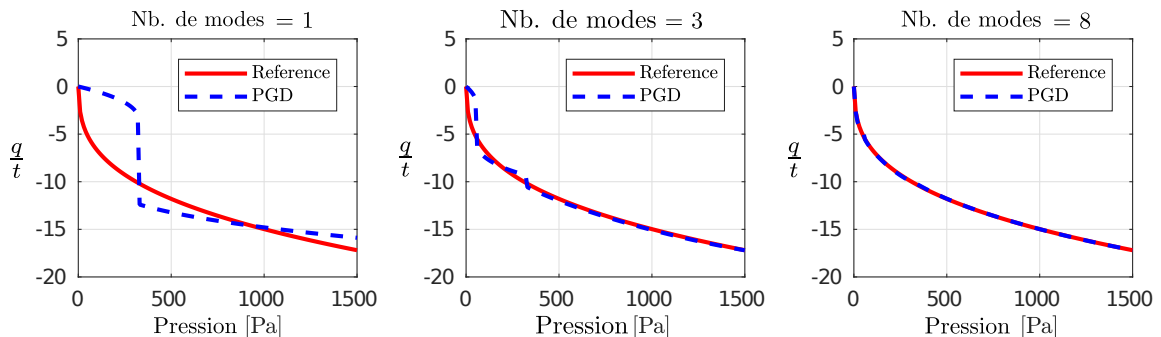


FIGURE 3.13 – Évolution du déplacement  $q$  adimensionné par l'épaisseur  $t = 0.25$  mm au centre du disque en fonction du paramètre de pression pour  $n = 1$ ,  $n = 3$  et  $n = 8$  modes.

### 3.6.4 Analyse de la convergence du sous-problème non-linéaire en espace

Une analyse de la convergence des sous-problèmes non-linéaires en espace est proposée en Fig. 3.14 pour la génération des modes 1, 3 et 8. Pour chacun de ces modes, un algorithme de point fixe (GL pour "Greedy algorithm Loop") a été utilisé avec un nombre d'itérations  $n_{\text{greedy}} = 5$ . Pour chacune de ces itérations du point fixe, un problème non-linéaire en espace doit être résolu, soit un total de 5 problèmes non-linéaires résolus par un algorithme de Newton-Raphson. L'analyse proposée consiste à tracer l'évolution de la norme  $\mathcal{L}_2$  du résidu d'équilibre ( $\|\mathbf{G}\|_{\mathcal{L}_2}$ ), à l'issue de chacun des systèmes linéaires tangents résolus. A l'exception du premier problème non-linéaire, peu d'itérations de Newton-Raphson sont nécessaires pour la convergence du problème non-linéaire en espace (avec  $\varepsilon_g = 10^{-2}$ ). Ceci peut s'expliquer étant donné que la convergence quadratique de l'algorithme est vérifiée aux alentours de la solution. Cependant, à la première itération du premier point fixe, l'initialisation de notre solution semble très éloignée de la solution du sous-problème non-linéaire numéro 1.

### 3.6.5 Analyse de la convergence du point fixe

En Fig. 3.15 nous avons tracé l'évolution d'un critère de stagnation pour chaque itération du point fixe. Ce critère de stagnation est défini de manière suivante :

$$\varepsilon_{\mathbf{\Lambda}} = \frac{\|\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}_{\text{old}}\|}{\|\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}_{\text{old}}\|} \quad \text{and} \quad \varepsilon_{\lambda} = \frac{\|\lambda - \lambda_{\text{old}}\|}{\|\lambda + \lambda_{\text{old}}\|} \quad (3.59)$$

Nous pouvons constater que pour la 5<sup>ème</sup> itération du point fixe, les modes calculés ne varient plus.

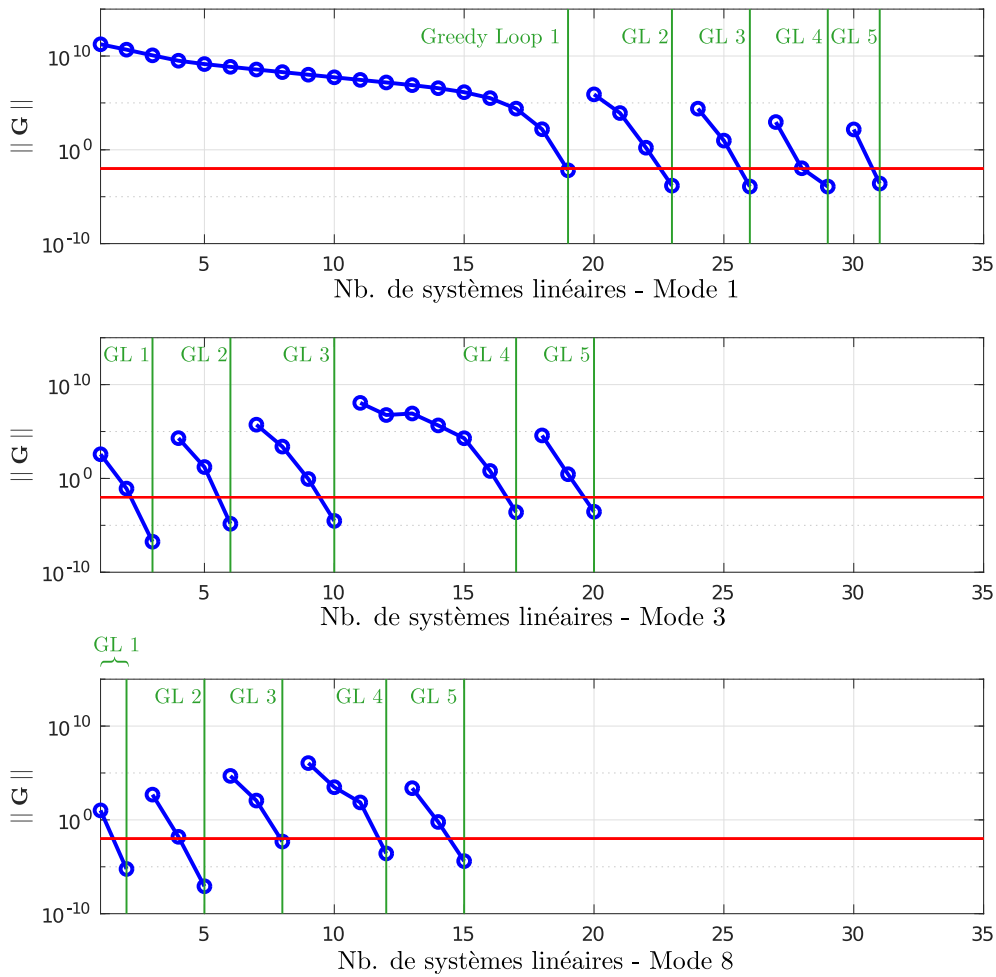


FIGURE 3.14 – Évolution de la norme du résidu  $\|\mathbf{G}\|_{\mathcal{L}_2}$  à l’issue de chaque système linéaire tangent dans une boucle du point fixe (GL). La convergence est atteinte si  $\|\mathbf{G}\|_{\mathcal{L}_2} < \varepsilon_g = 10^{-2}$ . Rappelons que le nombre total d’itérations par point fixe est fixé à  $n_{\text{greedy}} = 5$  pour chaque mode.

### Résultats à retenir sur l’exemple numérique

- Convergence de la solution reconstruite vers la solution de référence.
- Peu de modes suffisent pour converger ( $n < 10$ ).
- Certains modes contribuent plus que d’autres à la convergence.
- Les modes en paramètre de pression présentent des discontinuités.

Même si dans cet exemple, la solution reconstruite par base réduite PGD *a priori* converge vers la solution du modèle complet. Plusieurs questions sont restées en suspens. L’une d’entre elles concerne

### 3.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES AVEC PRESSION UNIFORME

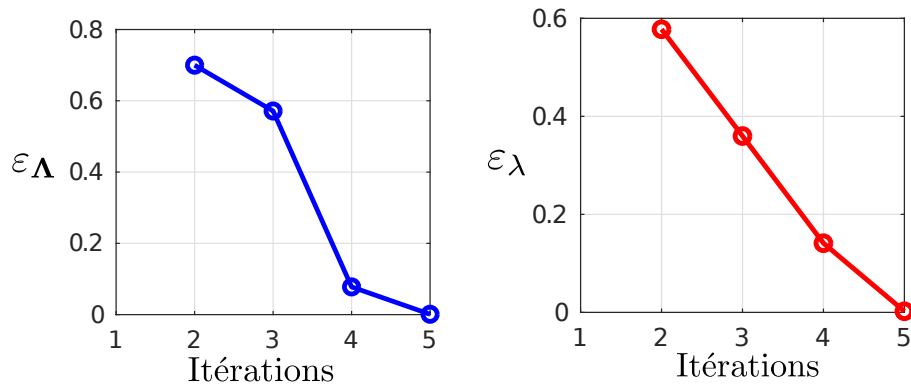


FIGURE 3.15 – Évolution du critère de stagnation de l’algorithme de point fixe, pour la génération du 3<sup>e</sup> couple de modes  $(\lambda_3, \Lambda_3)$ .

Nombre d’éléments volumiques	80
Nombre d’éléments surfaciques	80
Nombre de degrés de liberté	1809
Nombre d’incréments de chargement	150
Temps de calcul avec le modèle complet	3 minutes et 40 sec
Nombre de mode généré	10
Temps de calcul mode 1	1 min. 15 sec
Temps de calcul mode 2	37 sec.
Temps de calcul mode 3	2 min 15 sec
Temps de calcul mode 4	2 min 45 sec
Temps de calcul mode 5	5 min
Temps de calcul mode 6	8 min et 30 sec
Temps de calcul mode 7	12 min
Temps de calcul mode 8	20 min
Temps de calcul mode 9	45 min
Temps de calcul mode 10	1 h 20 min
Temps de calcul total	3 h

TABLE 3.4 – Informations sur le maillage et les temps de calcul.

la présence de saut dans les modes du paramètre de pression. Nous faisons l’hypothèse que ces sauts proviennent d’instabilités de la solution du problème en paramètre de pression. Dans la suite, nous avons utilisé un algorithme de continuation sur un exemple simple pour vérifier cette hypothèse.

### 3.6.6 Instabilité du problème non-linéaire en paramètre de pression

Nous proposons de résoudre un cas simplifié du problème de paramètre de pression. Nous rappelons que celui-ci s'écrit sous forme d'équation fonctionnelle polynomiale tel que :

$$H(\lambda) = q_0 + r_0 p + (q_1 + r_1 p)\lambda + (q_2 + r_2 p)\lambda^2 + q_3 \lambda^3 \quad (3.60)$$

Dans cet exemple, nous fixons arbitrairement les  $q_i$  et  $r_i$  de l'Eq. (3.60) à l'exception du coefficient  $q_2$ . L'objectif est de tracer la solution dans l'intervalle  $p \in I = [0, 1]$  avec un algorithme de continuation. Le problème que nous traitons consiste à trouver  $\lambda$  qui vérifie l'équation suivante :

$$-p + \lambda + q_2 \lambda^2 + \lambda^3 = 0 \quad (3.61)$$

Les deux approches présentées en Section 3.5.2 sont comparées à une méthode de continuation par longueur d'arc [63]. En Fig. 3.16, nous traçons l'évolution de  $\lambda$  pour différentes valeurs de  $q_2$ .

Nous observons que pour  $q_2 = -1$  et  $q_2 = -1.5$ , les trois algorithmes convergent vers la même solution (en effet les solutions se superposent). Pour  $q_2 = -1.8$ , un saut de la solution apparaît pour les deux premières méthodes alors que l'algorithme de continuation suit une courbe en "S". En dehors de cette zone, les solutions se superposent. Enfin, pour  $q_2 = -2$ , la solution ne converge pas avec la première méthode (avec discrétisation EF de l'intervalle  $I$ ). Nous retrouvons encore une fois un saut avec la deuxième méthode. La courbe en "S" obtenue avec la méthode de continuation est très prononcée pour  $q_2 = -2$ .

En Fig. 3.17, nous montrons que pour certaines valeurs de  $q_2$ , la solution obtenue par méthode de continuation peut se trouver hors de l'intervalle de pression  $I$ .

Ce type de résultat est très intéressant car il pourrait peut-être permettre la résolution de problèmes instables par construction d'une base réduite PGD *a priori*. Cette problématique pourrait être une piste pour des perspectives futures de ces travaux.

### 3.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES AVEC PRESSION UNIFORME

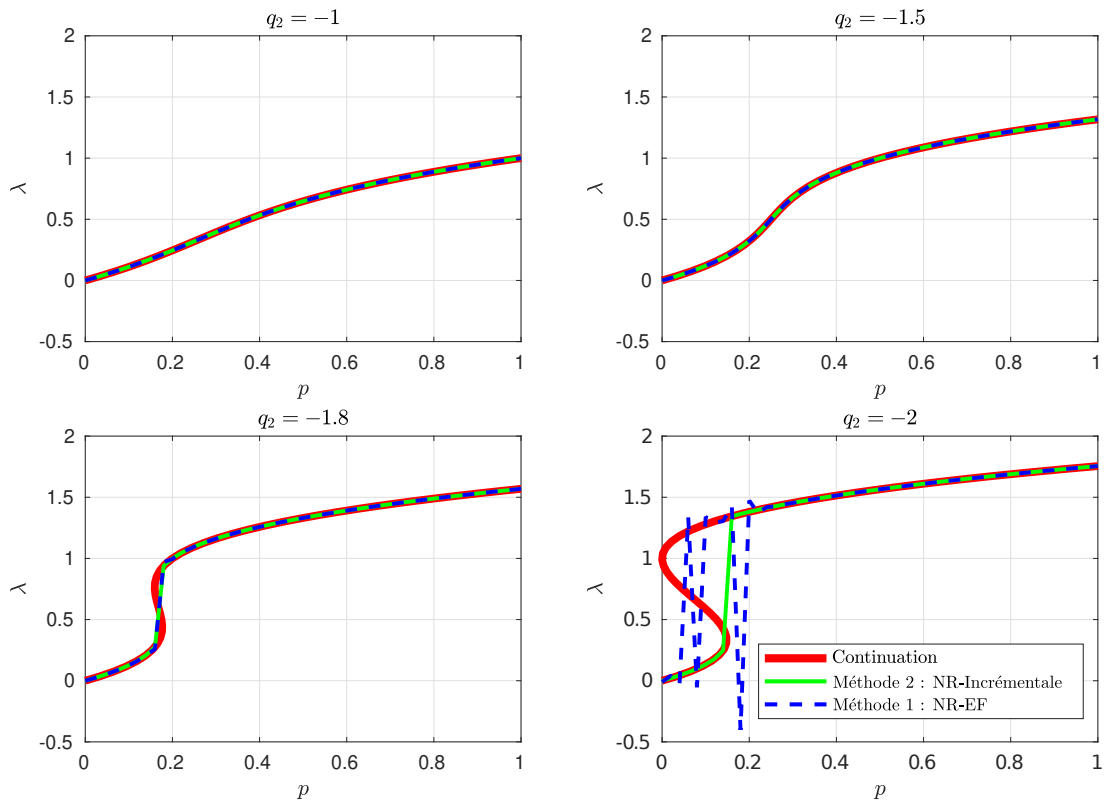


FIGURE 3.16 – Solution de  $\delta H$  in  $I = [0, 1]$  avec la méthode 1 (en pointillé bleu), la méthode 2 (en vert) et la continuation (en rouge) avec  $q_0 = 0, r_0 = -1, q_1 = 1, r_1 = 0, r_2 = 0, q_3 = 1$  et différentes valeurs de  $q_2$  : (a)  $q_2 = -1$ ; (b)  $q_2 = -1.5$ ; (c)  $q_2 = -1.8$ ; (d)  $q_2 = -2$

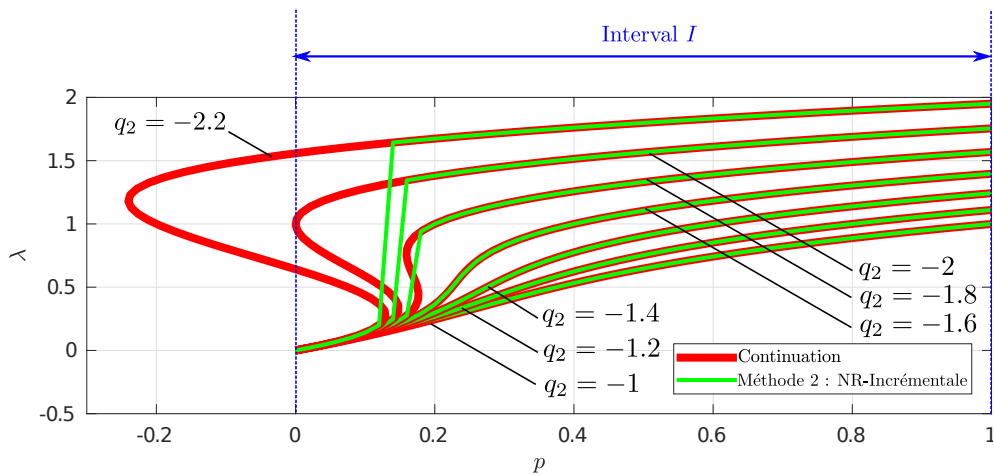


FIGURE 3.17 – Solution  $\lambda$  pour différentes valeurs de  $q_2$  appartenant à  $[-2.2, -1]$ .

#### 3.6.7 Réservoir pressurisé avec non-linéarité géométrique

Ce second exemple numérique consiste à calculer l'équilibre d'un réservoir pressurisé en aluminium à extrémités hémisphériques. Les paramètres matériaux sont le module d'Young  $E = 70.10^9$  Pa et le



### 3.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES AVEC PRESSION UNIFORME

module de Poisson  $\nu = 0.33$ . Les paramètres de maillage et de la géométrie sont présentés en Fig. 3.18. Nous prenons en compte la symétrie du problème et du chargement de façon à ne considérer que 1/8 du problème étudié.

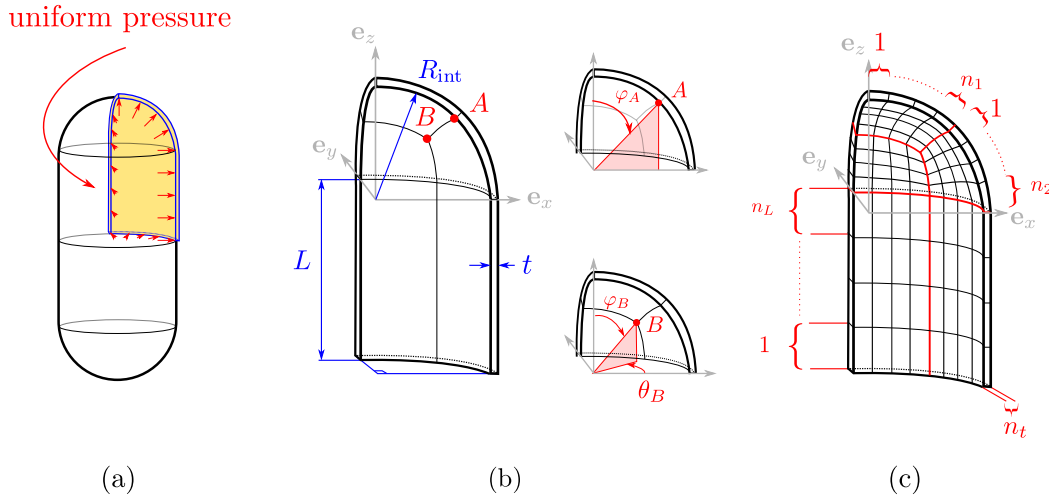


FIGURE 3.18 – (a) Dimension du réservoir en 3D soumis à une pression uniforme  $p \in [0, 3]$  MPa; (b) 1/8 de la géométrie du réservoir utilisé pour le maillage hexaédrique avec le rayon interne  $R_{\text{int}} = 2.5$  m, la longueur du cylindre  $L = 5$  m, l'épaisseur du réservoir  $t = 3$  mm (les deux points A et B sont définis par  $\varphi_A = \frac{\pi}{4}$ ,  $\varphi_B = \frac{\pi}{3}$  et  $\theta_B = \frac{\pi}{4}$ ); (c) Paramétrisation du maillage hexaédrique à 20 noeuds avec  $n_L = 10$ ,  $n_1 = n_2 = 5$  and  $n_t = 1$ .

Des conditions aux limites en glissement sont définies sur les surfaces  $S_x$ ,  $S_y$  et  $S_z$  (voir Fig. 3.19). Le chargement uniforme  $p$  est compris dans un intervalle  $I = [0, 3]$  kPa. Un tel intervalle permet d'avoir un comportement non-linéaire géométrique de la structure sur le déplacement vertical  $q_z$  du point de coordonnée de référence  $(R_{\text{int}}, 0, 0)$ . Aucune plasticité n'est prise en compte car nous nous intéressons uniquement à la convergence de l'algorithme de PGD *a priori* avec la prise en compte de non-linéarités géométriques.

Les quatre premiers couples de modes PGD *a priori* illustrés en Fig. 3.20 ont été générés en utilisant l'algorithme décrit en Tab. 3.3. Les modes en espace vérifient l'admissibilité cinématique. Le premier mode est de la même forme que la solution statique et ressemble à un mode de gonflement. Nous observons que les modes en espace  $\Lambda_2, \Lambda_3$  et  $\Lambda_4$  contiennent des oscillations entre la partie sphérique et la partie cylindrique. Enfin, les modes de pression  $\lambda_i$  sont tous réguliers.

### 3.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES AVEC PRESSION UNIFORME

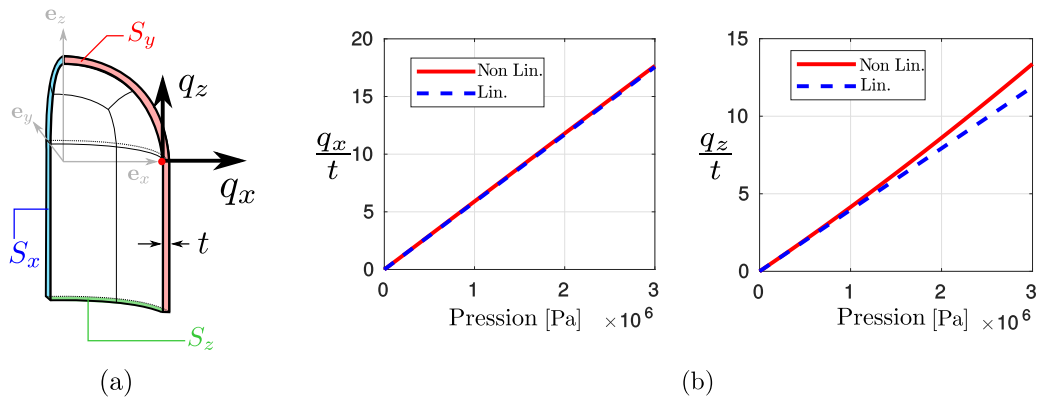


FIGURE 3.19 – (a) Surfaces soumises à des conditions aux limites en déplacement avec  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_x = 0$  sur  $S_x$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y = 0$  sur  $S_y$  et  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z = 0$  sur  $S_z$ ; Quantités observées  $q_x$  et  $q_z$  au point  $(R_{\text{int}}, 0, 0)$ ; (b) Évolution des quantités observées adimensionnées par l'épaisseur  $q_x/t$  and  $q_z/t$  ( $t = 3$  mm), avec et sans la prise en compte de non-linéarité géométrique, en fonction de  $p$ . Le chargement de pression est fait par incréments  $dp = 0.15$  kPa fixe. Ces solutions ont été obtenues avec le modèle complet par utilisation d'un algorithme de Newton-Raphson à chaque pas de pression.

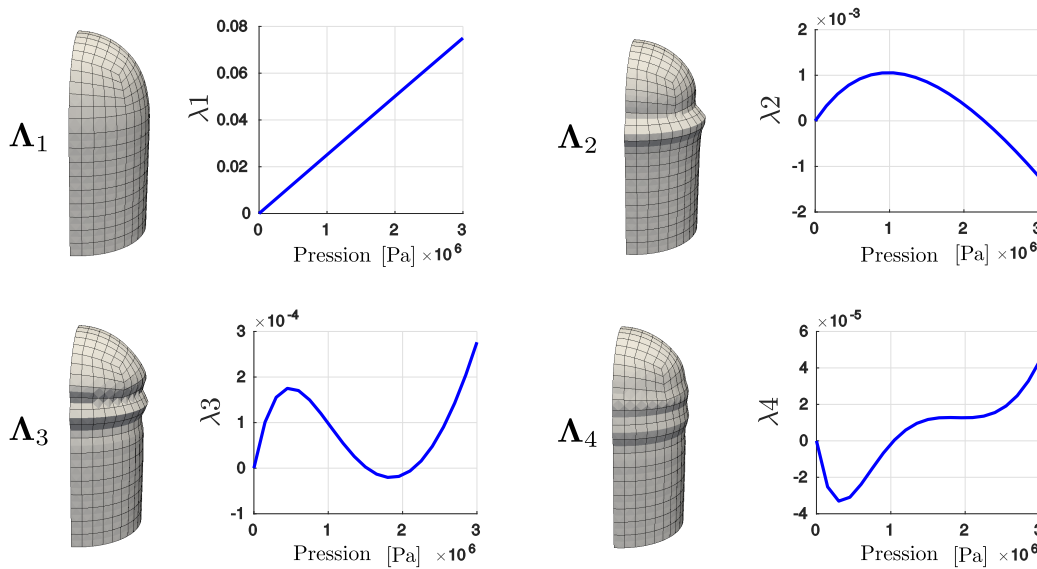


FIGURE 3.20 – Four first modes  $(\Lambda_i, \lambda_i)$  of the pressurized tank.

Contrairement à l'exemple précédent, la non-linéarité géométrique n'est que très peu prononcée pour ce problème. De ce fait, peu de modes suffisent pour converger vers la solution du modèle complet (voir Fig. 3.21). Ce résultat est néanmoins très intéressant car dans la pratique, si l'effet des non-linéarités est présente, mais faible, cet algorithme est approprié pour la génération d'abaques

### 3.6. EXEMPLES NUMÉRIQUES AVEC PRESSION UNIFORME

virtuels. Étant donné que peu de modes sont nécessaires pour reconstruire la solution, une analyse prenant en compte d'autres paramètres de conception pourrait être développée dans le futur.

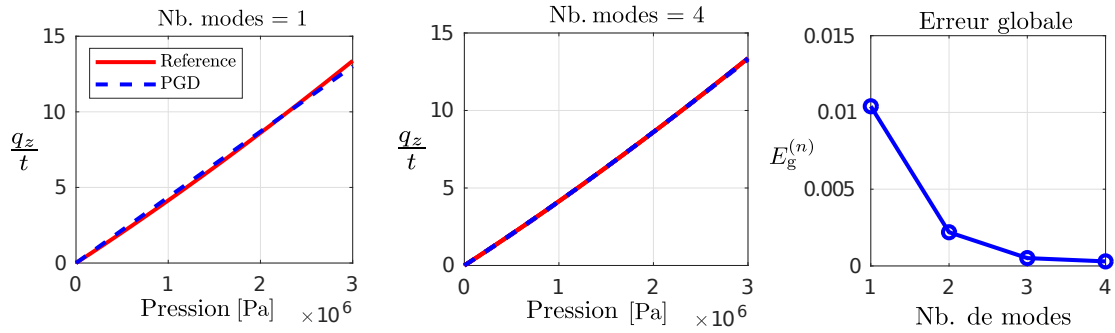


FIGURE 3.21 – Comparaisons entre le modèle complet et la solution obtenue par réduction *a priori* avec 1 et 4 modes. Décroissance de l'erreur globale.

Nombre d'éléments volumiques	175
Nombre d'éléments surfaciques	175
Nombre de degrés de liberté	4059
Nombre d'incrément de chargement	20
Temps de calcul modèle complet	1 minutes
Nombre de modes générés	4
Temps de calcul mode 1	99 sec
Temps de calcul mode 2	96 sec
Temps de calcul mode 3	166 sec
Temps de calcul mode 4	363 sec
Temps de calcul total	11 minutes

TABLE 3.5 – Informations sur le maillage et les temps de calcul.

#### Résultats à retenir sur ce deuxième exemple

- Problème à faible non-linéarité géométrique.
- Convergence de la solution reconstruite vers la solution de référence.
- Peu de modes suffisent pour converger ( $n < 5$ ).
- Les modes en paramètre de pression sont réguliers.

### 3.6.8 Conclusion des exemples numériques

Dans ce chapitre, deux exemples numériques ont été proposés pour résoudre un problème non-linéaire géométrique avec forces suiveuses avec un méthode de réduction de modèle PGD *a priori*. Pour ces deux cas, les solutions reconstruites avec la base réduite convergent vers la solution obtenue avec le modèle complet. Aussi, peu de modes suffisent pour avoir une approximation satisfaisante.

## 3.7 Conclusions et valorisation

Dans ce chapitre, l'équilibre non-linéaire de structures, chargées par une pression suiveuse uniforme, a été calculé par construction d'une basé réduite PGD *a priori*. Ces développements ont été présentés en conférence [31]. L'une des contributions principales porte sur la prise en compte des forces suiveuses avec l'hypothèse d'une solution approchée par une série de produits de fonctions à variables séparées. Nous avons montré que le problème revient à résoudre une succession de couples de problèmes non-linéaires via l'utilisation d'un algorithme de point fixe. Deux exemples numériques ont été proposés et comparés à une solution obtenue par une approche classique de type Newton-Raphson. Nous avons montré que peu de modes suffisent pour obtenir une solution qui converge vers la solution de référence du modèle complet. A l'heure actuelle, le temps de calcul de la méthode PGD dépasse celui de l'approche classique, mais ce point nécessite des précisions :

- Les calculs ont été effectués pour un paramètre. Une analyse prenant en compte plus de paramètres (matériaux, géométriques) devrait être fait dans le futur pour comparer à nouveau les temps de calculs.
- La comparaison a été faite sur un intervalle de pression fixé. Une analyse du temps de calcul par rapport à la taille et la discrétisation de l'intervalle de paramètre serait à prévoir dans le futur.

De futurs développements sont à envisager sur l'utilisation de la continuation pour résoudre des problèmes instables. Dans la suite du manuscrit, nous utiliserons les résultats du modèle complet pour calculer l'état précontraint. Cet état sera ensuite utilisé pour l'analyse dynamique couplée fluide-

### 3.7. CONCLUSIONS ET VALORISATION

---

structure linéarisée.

Deuxième partie

Vibrations hydroélastiques sans et avec  
précontrainte



## Chapitre 4

# Vibrations hydroélastiques linéaires : formulation EF et calcul de la matrice réduite de masse ajoutée

Ce chapitre porte sur les vibrations hydroélastiques de structures élastiques contenant un liquide interne incompressible à surface libre. Aucun effet de précontrainte n'est pris en compte dans ces développements. Deux points particuliers sont abordés. Le premier concerne un rappel des formulations existantes, sans effet de gravité sur la surface libre. La formulation retenue repose sur l'expression d'une matrice de masse ajoutée prenant en compte l'énergie cinétique du fluide déplacé au cours des vibrations hydroélastiques. A partir d'une validation de l'approche, nous montrons que le temps de calcul de cet opérateur est un problème majeur et rend les études paramétriques prohibitives. Le deuxième point se concentre donc sur une approche permettant de réduire les temps de calcul via l'utilisation d'une base de projection construite en utilisant les modes de la structure *in vacuo*. Même si cette approche se limite à une plage de fréquence réduite, les résultats présentés montrent un gain en temps de calcul particulièrement adapté à la simulation des vibrations hydroélastiques avec précontrainte.

### Contenu

---

4.1	Introduction et état de l'art . . . . .	144
4.2	Formulations du problème hydroélastique . . . . .	145
4.3	Exemple numérique : effet de masse ajoutée . . . . .	161
4.4	Projection du problème hydroélastique sur base <i>in vacuo</i> . . . . .	169
4.5	Retour sur l'exemple numérique sans précontrainte . . . . .	175
4.6	Conclusion . . . . .	181

---



## 4.1 Introduction et état de l'art

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au calcul des vibrations hydroélastiques linéaires entre un réservoir et un liquide interne incompressible à surface libre, via la méthode des éléments finis. L'objectif est de calculer le champ de déplacement de la structure couplé aux fluctuations du champ de pression au sein du fluide. Pour cela, nous reprendrons le formalisme des approches variationnelles proposées dans [37]. Ces méthodes, basées sur l'hypothèse des petites perturbations en régime harmonique, permettent de construire des opérateurs matriciels associés aux domaines du fluide, de la structure et de l'interface fluide-structure. Ces formulations aboutissent à la construction de problèmes aux valeurs propres couplés entre la structure élastique et le fluide incompressible, tous deux initialement au repos. Les modes et les fréquences de résonance ainsi calculés sont appelés modes et fréquences hydroélastiques. L'utilisation de cette base est particulièrement adaptée à la résolution de problèmes dynamiques par projection sur base réduite [96]. Même si nous nous restreignons à l'étude des vibrations hydroélastiques, notons que ces méthodes numériques peuvent être étendues à la prise en compte phénomènes non traités dans le manuscrit (e.g. compressibilité [97, 98], ballonnement [99, 62, 100] ou capillarité [101, 102], amortissement [103, 104]). Revenons au couplage entre une structure élastique et un fluide lourd. Un résultat bien connu montre que plus il y a de liquide au voisinage de l'interface, plus la fréquence de résonance du système diminue. Ce phénomène s'appelle communément l'effet de masse ajoutée (ou masse induite). Contrairement à ce que laisserait penser son intitulé, ce n'est pas la masse « ajoutée » du fluide qui en est la cause, mais l'énergie cinétique du fluide déplacé à l'interface. En effet, du point de vue purement structurel, cette énergie cinétique du fluide déplacé vient s'ajouter à celle de la structure au cours d'une sollicitation. Du point de vue des équations harmoniques, il est possible de prendre en compte cet effet via la construction d'un opérateur matriciel de masse ajoutée. Cependant, la construction d'une telle matrice est très coûteuse et fait encore l'objet de limitations en termes de mémoire et de temps de calcul [105]. C'est pour cela que nous nous sommes intéressés à une approche par projection sur la base modale de la structure *in vacuo*. Nous montrons à travers un exemple, issu d'une expérience de la littérature [106], la convergence de l'approche par projection sur base sèche. Cette formulation réduit le temps de calcul si le nombre de fréquences propres hydroélastiques à calculer est restreint sur une plage de fréquence d'intérêt. Ces méthodes sont généralement utilisées dans le cadre de calculs semi-analytiques pour des structures simples. L'extension à la MEF permet de traiter des structures en 3D de formes quelconques.

## 4.2. FORMULATIONS DU PROBLÈME HYDROÉLASTIQUE

---

Le contenu du chapitre est le suivant. En Section 4.2, nous rappelons la formulation variationnelle d'un problème couplé hydroélastique symétrique via la construction d'une matrice de masse ajoutée. Cette matrice est associée à l'énergie cinétique du fluide déplacé aux cours des vibrations. En Section 4.3, nous montrons la faisabilité et les limites d'une telle approche en nous basant sur une expérience de la littérature. En Section 4.4, nous proposons une approche basée sur la projection du problème sur base propre de la structure *in vacuo*. L'avantage d'une telle méthode est qu'elle permet de construire une matrice de masse ajoutée réduite conduisant à une diminution significative des temps de calcul. En Section 4.5, nous revenons sur l'exemple numérique précédent pour valider la convergence de la méthode.

### 4.2 Formulations du problème hydroélastique

Les formulations des problèmes fluide-structure font intervenir beaucoup de notations. Voici un récapitulatif de celles utilisées dans ce chapitre pour faciliter la lecture et la compréhension de nos développements.

#### 4.2.1 Notations des domaines de définition du problème

Nous définissons dans un premier temps les domaines sur lesquels nous formulons notre problème d'interaction fluide-structure avec liquide interne.

Domaines	
$\Omega_f$	Domaine borné volumique fluide défini sur $\mathbb{R}^3$
$\Gamma$	Surface libre définie sur $\mathbb{R}^2$
$\Sigma$	Surface mouillée ou interface fluide-structure définie sur $\mathbb{R}^2$
$\Omega_s$	Domaine borné volumique solide défini sur $\mathbb{R}^3$
$\partial_u \Omega_s$	Surface de la structure avec déplacements imposés
$\partial_t \Omega_s$	Surface de la structure avec efforts extérieurs
$\mathbf{n}$	Normale extérieure à la structure
$\bullet^h$	Indice h pour le domaine discrétisé

TABLE 4.1 – Notations des domaines de définitions.

## 4.2. FORMULATIONS DU PROBLÈME HYDROÉLASTIQUE

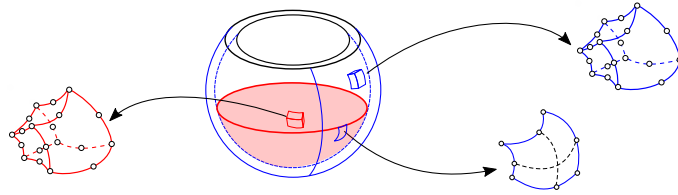


FIGURE 4.1 – Maillage coïncident du fluide et de la structure avec des éléments hexaédriques quadratiques.

Variables	
$\mathbf{u}_s$	Fluctuation du champ de déplacement solide
$\mathbf{u}_f$	Fluctuation du champ de déplacement fluide
$p$	Fluctuation du champ de pression dans le fluide
$\varphi$	Potentiel de déplacement dans le fluide
$\delta \mathbf{u}$	Champ virtuel (ou champ test) de déplacement
$\delta p$	Champ virtuel (ou champ test) de pression
$\delta \varphi$	Champ virtuel (ou champ test) de potentiel de déplacement

TABLE 4.2 – Notations sur les variables d'états fluides-structures

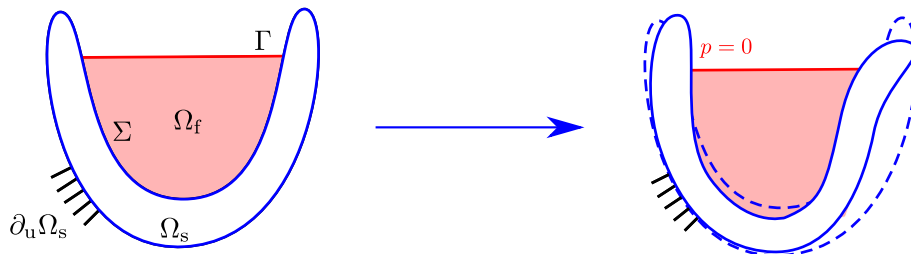


FIGURE 4.2 – (a) Domaines du fluide et de la structure ; (c) Vibrations hydroélastiques linéaires.

### 4.2.2 Convention sur les indices des bases réduites

Dans ce chapitre, les indices en lettres grecs (ex.  $\alpha, \beta$  ou  $\gamma$ ) sont utilisés pour les valeurs propres, vecteurs propres et coordonnées généralisées des problèmes réduits.

### 4.2.3 Équations locales linéaires

#### 4.2.3.1 Hypothèses du fluide et de la structure

Nous rappelons en Tab. 4.3 les hypothèses associées aux équations locales harmoniques du fluide et de la structure utilisées dans la suite de ce chapitre. Nous ne prenons pas en compte les effets de pré-contrainte car ils seront introduits dans le chapitre suivant. Les fluctuations sont donc calculées autour d'un état de référence et sont supposées suffisamment faibles pour pouvoir rester dans l'hypothèse des petites perturbations.

Hypothèses fluide	Hypothèses structure
<b>H1f</b> Incompressible	<b>H1s</b> Élastique
<b>H2f</b> Non-visqueux	<b>H2s</b> Homogène
<b>H3f</b> Homogène	<b>H3s</b> Isotrope (dans notre cas)
<b>H4f</b> Sans tension de surface	<b>H4s</b> Pas de forces volumiques
<b>H5f</b> Effets de gravité négligés	

TABLE 4.3 – Hypothèses du fluide et de la structure

#### 4.2.3.2 Équations de la structure linéaire

Les équations locales harmoniques pour la structure, sont les suivantes :

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = -\omega^2 \rho_s \mathbf{u}_s \quad \text{dans } \Omega_s \quad (4.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{f} \quad \text{sur } \partial_t \Omega_s \quad (4.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = -p \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \quad (4.3)$$

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial_u \Omega_s \quad (4.4)$$

L'Eq. (4.1) correspond au principe fondamental de la dynamique appliqué à un volume infinitésimal de la structure. Les Eqs. (4.2) et (4.4) sont les conditions aux limites en effort et en déplacement et l'Eq. (4.3) représente le couplage entre la contrainte de la structure et la fluctuation de pression du

fluide. La contrainte est reliée au déplacement  $\mathbf{u}_s$  via la loi de Hook en élasticité linéaire :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_s) \quad (4.5)$$

avec  $\mathbb{D}$  un tenseur d'ordre 4,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  le tenseur des déformations et  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy.

#### 4.2.3.3 Équations dans le fluide en déplacement fluide $\mathbf{u}_f$ et pression $p$

Les équations locales harmoniques vérifiées par le déplacement fluide  $\mathbf{u}_f$  et la fluctuation du champ de pression  $p$  sont données ci-dessous :

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_f = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (4.6)$$

$$\omega^2 \rho_f \mathbf{u}_f = \mathbf{grad} p \quad \text{dans } \Omega_f \quad (4.7)$$

$$\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \quad (4.8)$$

$$p = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (4.9)$$

L'Eq. (4.6) correspond à la condition d'incompressibilité du fluide, l'Eq. (4.7) aux équations d'Euler harmoniques, l'Eq. (4.8) est associée à la condition de non-pénétration à l'interface et enfin l'Eq. (4.9) correspond à la condition de fluctuation de pression nulle à la surface libre. Attention, définir la fluctuation de pression nulle n'implique en aucun cas que le déplacement fluide soit nul.

Du fait de l'irrotationalité du fluide et de l'Eq. (4.7), il convient d'exprimer les équations locales harmoniques du fluide en fonction d'une fonction scalaire : (i) soit une approche en fluctuation de pression ou soit (ii) une approche en potentiel de déplacement fluide.

#### 4.2.3.4 Équations dans le fluide en fluctuation de pression $p$

A partir de ces équations et compte tenu de l'irrotationalité du fluide et de l'Eq. (4.7), nous sommes en mesure de nous ramener à des équations locales écrites uniquement en fonction du champ de pression :

$$\Delta p = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (4.10)$$

$$p = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (4.11)$$

$$\mathbf{grad} p \cdot \mathbf{n} = \rho_f \omega^2 \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \quad (4.12)$$

Cette formulation a l'avantage de faire intervenir la fluctuation de pression qui apparaîtra explicitement dans l'équation de couplage de la structure à l'Eq. (4.18).

### 4.2.3.5 Équations dans le fluide en potentiel de déplacement fluide $\varphi$

L'irrationalité du fluide nous permet d'introduire un changement de variable en potentiel de déplacement tel que :

$$\mathbf{grad}\varphi = \mathbf{u}_f \quad (4.13)$$

D'après l'Eq. (4.7), ce potentiel de déplacement est relié au champ de pression au travers de la relation suivante :

$$\rho_f \omega^2 \varphi = p \quad (4.14)$$

Les équations locales du fluide, vérifiées par le potentiel de déplacement  $\varphi$ , s'écrivent alors :

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (4.15)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (4.16)$$

$$\mathbf{grad}\varphi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \quad (4.17)$$

Ces équations ont l'avantage d'avoir une interprétation géométrique. Étant donné que le fluide est incompressible, le gradient de potentiel de déplacement varie lors du déplacement de l'interface fluide-structure pour conserver le volume de fluide. Le couplage côté structure nécessite la ré-écriture de l'Eq. (4.3) telle que :

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = -\rho_f \omega^2 \varphi \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \quad (4.18)$$

### 4.2.4 Formulation variationnelle en $(\mathbf{u}_s, p)$

Nous introduisons un champ de déplacement virtuel  $\delta\mathbf{u}$  appartenant à un espace cinématiquement admissible à zéro  $\mathcal{C}_u$  ( $\delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$  sur  $\partial_u\Omega_s$ ). La démarche consiste à multiplier l'Eq. (4.1) par un champ de déplacement virtuel  $\delta\mathbf{u}$  et à intégrer l'expression sur  $\Omega_s$ . Une intégration par partie (IPP) et la prise en compte des conditions de bords des Eqs. (4.2), (4.3) et (4.4) permettent d'exprimer la formulation suivante :

$$\int_{\Omega_s} \delta\varepsilon : \boldsymbol{\sigma} dv + \int_{\Sigma} p \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} ds - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{u}_s \cdot \delta\mathbf{u} dv = \int_{\partial_t\Omega_s} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} ds \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{C}_u \quad (4.19)$$

## 4.2. FORMULATIONS DU PROBLÈME HYDROÉLASTIQUE

---

De façon analogue, multiplions l'Eq. (4.10) par un champ de pression virtuel  $\delta p$  appartenant à un espace admissible de champ de pression suffisamment régulier  $\mathcal{C}_p$  (avec  $\delta p = 0$  sur  $\Gamma$ ). Nous appliquons la même démarche en intégrant l'expression sur  $\Omega_f$  et en effectuant une IPP avec la prise en compte des Eqs. 4.11 et 4.12. Nous obtenons alors la formulation :

$$\int_{\Omega_f} \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{grad} \delta p \, dv + \omega^2 \rho_f \int_{\Sigma} \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} \delta p \, ds = 0, \quad \forall \delta p \in \mathcal{C}_p \quad (4.20)$$

Notons que le signe "+" sur le terme de l'interface  $\Sigma$  vient du fait que la normale extérieure au solide  $\mathbf{n}$  est de sens opposé à la normale extérieure au fluide. Le problème revient à chercher le couple  $(\mathbf{u}_s, p)$ , solutions de la formulation couplée :

$$\mathcal{K}(\mathbf{u}_s, \delta \mathbf{u}) + \mathcal{C}(p, \delta \mathbf{u}_s) - \omega^2 \mathcal{M}(\mathbf{u}_s, \delta \mathbf{u}) = \mathcal{F}(\delta \mathbf{u}) \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{C}_u \quad (4.21)$$

$$\mathcal{H}(p, \delta p) + \omega^2 \rho_f \mathcal{C}(\delta p, \mathbf{u}_s) = 0 \quad \forall \delta p \in \mathcal{C}_p \quad (4.22)$$

avec la définition des formes linéaires et bilinéaires définies dans le tableau 4.6.

Opérateurs	Relations	Interprétations associées
$\mathcal{K}(\mathbf{u}_s, \delta \mathbf{u})$	$\int_{\Omega_s} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_s) : \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \, dv$	Raideur de la structure
$\mathcal{M}(\mathbf{u}_s, \delta \mathbf{u})$	$\int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{u}_s \cdot \delta \mathbf{u} \, dv$	Inertie de la structure
$\mathcal{C}(p, \delta \mathbf{u})$	$\int_{\Sigma} p \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, ds$	Couplage à l'interface fluide-structure
$\mathcal{F}(\delta \mathbf{u})$	$\int_{\partial_u \Omega_s} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, ds$	Énergie virtuelle extérieure
$\mathcal{H}(p, \delta p)$	$\int_{\Omega_f} \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{grad} \delta p \, dv$	Forme bilinéaire des gradients de pressions*

TABLE 4.4 – Définitions des opérateurs dans les domaines continus - \* Nous montrons par la suite que cet opérateur est relié à l'énergie cinétique du fluide déplacé.

### 4.2.5 Formulation variationnelle en $(\mathbf{u}_s, \varphi)$

De façon analogue à la formulation variationnelle en pression, nous introduisons cette fois-ci un champ virtuel en potentiel de déplacement  $\delta\varphi$  appartenant à un espace admissible à  $\mathcal{C}_\varphi$  ( $\delta\varphi = 0$  sur  $\Gamma$ ). Ainsi, la formulation variationnelle couplée en fluctuation de déplacement solide  $\mathbf{u}_s$  et potentiel de déplacement  $\varphi$  s'écrit de façon suivante :

$$\int_{\Omega_s} \delta\varepsilon : \boldsymbol{\sigma} dv + \rho_f \omega^2 \int_{\Sigma} \varphi \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} ds - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{u}_s \cdot \delta\mathbf{u} dv = \int_{\partial_t \Omega_s} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} ds \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{C}_u \quad (4.23)$$

$$\int_{\Omega_f} \mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{grad} \delta\varphi dv + \omega^2 \rho_f \int_{\Sigma} \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} \delta\varphi ds = 0, \quad \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi \quad (4.24)$$

Finalement, le problème revient à chercher le couple  $(\mathbf{u}_s, \varphi)$  qui vérifie la formulation couplée suivante :

$$\mathcal{K}(\mathbf{u}_s, \delta\mathbf{u}) + \omega^2 \rho_f \mathcal{C}(\varphi, \delta\mathbf{u}) - \omega^2 \mathcal{M}(\mathbf{u}_s, \delta\mathbf{u}) = \mathcal{F}(\delta\mathbf{u}) \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{C}_u \quad (4.25)$$

$$\mathcal{H}(\varphi, \delta\varphi) + \mathcal{C}(\mathbf{u}_s, \delta\varphi) = 0 \quad \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi \quad (4.26)$$

Le potentiel de déplacement étant défini par le gradient du déplacement fluide  $\mathbf{u}_f = \mathbf{grad} \varphi$ , on peut exprimer l'énergie cinétique du fluide déplacé par :

$$\frac{1}{2} \omega^2 \int_{\Omega_f} \rho_f |\mathbf{u}_f|^2 dv = \frac{1}{2} \omega^2 \int_{\Omega_f} \rho_f |\mathbf{grad} \varphi|^2 dv = \frac{1}{2} \rho_f \omega^2 \mathcal{H}(\varphi, \varphi) \quad (4.27)$$

L'opérateur  $\mathcal{H}$  est donc associé à l'énergie cinétique du fluide déplacé. Enfin, les opérateurs  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{M}$  sont symétriques en  $\mathbf{u}$  et  $\delta\mathbf{u}$  et  $\mathcal{H}$  est symétrique en  $p$  et  $\delta p$ .

Pour plus de détails sur la formulation de ces opérateurs, leurs propriétés et l'origine de ces équations, nous pouvons citer [107, 37, 62, 100, 108].

## 4.2.6 Discrétisation EF

### 4.2.6.1 Notations des champs dans les domaines discrétisés

Nous utilisons la méthode des éléments finis pour résoudre les problèmes écrits sous formes variationnelles. Cette approche implique la construction d'opérateurs vectoriels et matriciels, ainsi que la définition des champs discrétisés rappelés dans le Tab 4.5.



## 4.2. FORMULATIONS DU PROBLÈME HYDROÉLASTIQUE

---

Opérateurs	
$\mathbf{u}_s^h$	Discrétisation EF du champ de fluctuation de déplacement de la structure
$p^h$	Discrétisation EF du champ de pression du fluide
$\varphi^h$	Discrétisation EF du champ potentiel de déplacement fluide
$\mathbf{U}_s$	Vecteur des inconnues nodales de déplacement de la structure
$\mathbf{P}$	Vecteur des inconnues nodales de pression
$\varphi$	Vecteur des inconnues nodales de potentiel de déplacement fluide
$\mathbf{K}$	Matrice de raideur linéaire de la structure
$\mathbf{M}$	Matrice de masse de la structure
$\mathbf{H}$	Matrice des gradients de pression du fluide
$\mathbf{C}$	Matrice de couplage fluide-structure
$\mathbf{M}_a$	Matrice de masse ajoutée (ou masse induite ou masse apparente)

TABLE 4.5 – Notations associées aux champs et opérateurs discrétisés.

### 4.2.7 Discrétisation EF des champs

Nous faisons l'hypothèse que les maillages du solide ( $\Omega_s^h$ ) et du fluide ( $\Omega_f^h$ ) sont coïncidents à l'interface fluide-structure  $\Sigma^h$ . Nous définissons les champs discrétisés  $\mathbf{u}^h$  (resp.  $p^h$  et  $\varphi^h$ ) de déplacement, de pression et de potentiel de déplacement, comme étant des combinaisons linéaires de fonctions de formes. Ainsi, nous pouvons exprimer ces champs sous formes matricielles :

$$\mathbf{u}_s^h = \mathbf{N}_s \mathbf{U}_s \quad \text{et} \quad p^h = \mathbf{N}_f \mathbf{P} \quad \varphi^h = \mathbf{N}_f \varphi \quad (4.28)$$

avec  $\mathbf{U}_s$  (resp.  $\mathbf{P}$  et  $\varphi$ ) les vecteurs des inconnues nodales de déplacement (resp. de pression et de potentiel de déplacement),  $\mathbf{N}_s$  (resp.  $\mathbf{N}_f$ ) les matrices des fonctions de forme de la structure et du fluide. Les champs virtuels discrétisés sont écrits sous les mêmes formes, tels que :

$$\delta \mathbf{u}^h = \mathbf{N}_s \delta \mathbf{U} \quad \text{et} \quad \delta p^h = \mathbf{N}_f \delta \mathbf{P} \quad \delta \varphi^h = \mathbf{N}_f \delta \varphi \quad (4.29)$$

En notant  $\delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^h)$  la forme de Voigt du tenseur de déformation du champ virtuel discrétisé comme suit :

$$\delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\delta \varepsilon_{11} \quad \delta \varepsilon_{22} \quad \delta \varepsilon_{33} \quad 2\delta \varepsilon_{12} \quad 2\delta \varepsilon_{23} \quad 2\delta \varepsilon_{31}]^T \quad (4.30)$$

on a alors :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\delta \mathbf{u}^h) = \mathbf{B}_s \delta \mathbf{U} \quad (4.31)$$

## 4.2. FORMULATIONS DU PROBLÈME HYDROÉLASTIQUE

---

avec  $\mathbf{B}_s$  les matrices des dérivées de fonctions de formes associés aux champs de la structure. De plus, nous pouvons définir le champ de contrainte en notation de Voigt  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  tel que :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}]^T \quad (4.32)$$

Ce vecteur est associé au champ de déplacement par la loi de comportement (4.5), tel que :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}^h) = \mathbf{D}\mathbf{B}_s\mathbf{U}_s \quad (4.33)$$

avec  $\mathbf{D}$  une matrice ( $6 \times 6$ ) de loi de comportement définie par les coefficients matériaux. De façon similaire, nous définissons les gradients des champs de pressions et des champs de pressions virtuels tels que :

$$\mathbf{grad} p^h = \mathbf{B}_f\mathbf{P} \quad \text{et} \quad \mathbf{grad} \delta p^h = \mathbf{B}_f\delta\mathbf{P} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{grad} \varphi^h = \mathbf{B}_f\boldsymbol{\varphi} \quad \text{et} \quad \mathbf{grad} \delta\varphi^h = \mathbf{B}_f\delta\boldsymbol{\varphi} \quad (4.35)$$

avec  $\mathbf{B}_f$  la matrice des dérivées de fonctions de formes des champs de pression.

### 4.2.8 Discrétisation des opérateurs

A partir des formes discrétisées des champs et des opérateurs, l'expression des matrices associées est récapitulée dans le tableau 4.6 de manière suivante :

Forme	Forme de l'opérateur	Matrice	Taille
$\mathcal{K}(\mathbf{u}_s^h, \delta \mathbf{u}^h) \implies$	$\delta \mathbf{U}^T \int_{\Omega_s^h} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D} \mathbf{B}_s dv \mathbf{U}_s \implies$	$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}_s$	$(n_{\text{dofs}} \times n_{\text{dofs}})$
$\mathcal{M}(\mathbf{u}_s^h, \delta \mathbf{u}^h) \implies$	$\delta \mathbf{U}^T \int_{\Omega_s^h} \rho_s \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_s dv \mathbf{U}_s \implies$	$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_s$	$(n_{\text{dofs}} \times n_{\text{dofs}})$
$\mathcal{C}(p^h, \delta \mathbf{u}^h) \implies$	$\delta \mathbf{U}^T \int_{\Sigma^h} \mathbf{N}_u^T \mathbf{n} \mathbf{N}_f ds \mathbf{P} \implies$	$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{C} \mathbf{P}$	$(n_{\text{dofs}} \times n_{\text{doff}})$
$\mathcal{F}(\delta \mathbf{u}^h) \implies$	$\delta \mathbf{U}^T \int_{\partial_u \Omega_s^h} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f} ds \implies$	$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}$	$(n_{\text{dofs}} \times 1)$
$\mathcal{H}(p^h, \delta p^h) \implies$	$\delta \mathbf{P}^T \int_{\Omega_f^h} \mathbf{B}_p^T \mathbf{B}_p dv \mathbf{P} \implies$	$\delta \mathbf{P}^T \mathbf{H} \mathbf{P}$	$(n_{\text{doff}} \times n_{\text{doff}})$
$\mathcal{C}(\mathbf{u}_h^h, \delta p^h) \implies$	$\delta \mathbf{P}^T \int_{\Sigma^h} \mathbf{N}_f^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}_s ds \mathbf{U}_s \implies$	$\delta \mathbf{P}^T \mathbf{C}^T \mathbf{U}_s$	$(n_{\text{doff}} \times n_{\text{dofs}})$

TABLE 4.6 – Définitions des opérateurs dans les domaines discrétisés et leurs tailles avec  $n_{\text{dofs}}$  le nombre de degrés de liberté côté structure et  $n_{\text{doff}}$  le nombre de degrés de liberté côté fluide.

### 4.2.9 Problème discrétisé $(\mathbf{U}_s, \mathbf{P})$ non-symétrique

#### 4.2.10 Problème dynamique en régime forcé

Ainsi à partir des équations de la formulation  $(\mathbf{u}_s, p)$  et de la discrétisation des champs EF, nous obtenons le système matriciel qui traduit le problème dynamique harmonique couplé suivant :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{H} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{O} \\ -\rho_f \mathbf{C}^T & \mathbf{O} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Nous proposons en Fig. 4.3 une représentation des matrices du problème couplé harmonique. On constate que cette approche fait intervenir des matrices creuses à la fois pour les opérateurs de la structure, du fluide et de l'interface. Le problème global est non-symétrique. Si nous faisons la distinction entre la matrice de "raideur globale" et de "masse globale" (avec la matrice de masse globale étant celle pondérée par  $\omega^2$ ), nous constatons qu'aucun bloc de zéro ne se situe sur la diagonale de la matrice de raideur globale. A l'inverse un bloc de zéros se situe sur un des blocs diagonal de la

## 4.2. FORMULATIONS DU PROBLÈME HYDROÉLASTIQUE

---

matrice de masse globale. Cette configuration ne pose pas de problèmes car les valeurs propres les plus grandes se retrouvent à  $+\infty$ . Les valeurs propres les plus faibles correspondent au carré des premières fréquences propres hydroélastiques. Par contre, le fait d'avoir un problème non-symétrique peut avoir des conséquences sur le choix de l'algorithme de résolution du problème aux valeurs propres.

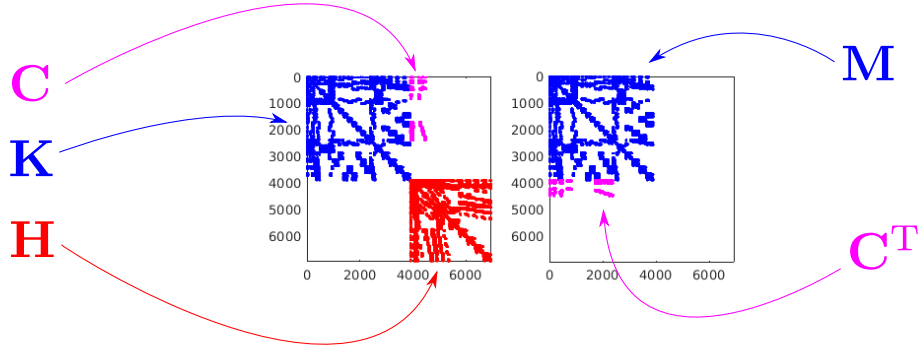


FIGURE 4.3 – Visualisation des matrices du problème en  $(\mathbf{U}_s, \mathbf{P})$ .

### 4.2.11 Vecteurs propres et valeurs propres associées

Calculer les modes propres et les pulsations propres du problème hydroélastique consiste à trouver l'ensemble des  $n$  premiers couples de valeurs propres et de vecteurs propres associés au système Eq. (4.49) non symétrique, tel que :

$$\left\{ \omega_\alpha^2, \begin{pmatrix} \mathbf{U}_\alpha \\ \mathbf{P}_\alpha \end{pmatrix} \right\} \quad \text{avec } \alpha = 1 \dots n \quad \text{et } n \in \mathbb{N}^{*+} \quad (4.37)$$

Un vecteur propre (ou mode hydroélastique) est composé d'une partie structure notée  $\mathbf{U}_\alpha$  et d'une partie pression notée  $\mathbf{P}_\alpha$ . Rappelons que les fréquences propres hydroélastiques sont reliées aux pulsations propres par la relation suivante :

$$2\pi f_\alpha = \omega_\alpha \quad (4.38)$$

Enfin, nous rappelons ci-dessous les avantages et inconvénients associés à l'utilisation de cette formulation pour le calcul du comportement dynamique de problèmes hydroélastiques. Notons qu'un point délicat de cette approche est la non-symétrie du problème aux valeurs propres. Pour cette raison, nous ne travaillerons pas directement avec cette approche pour les exemples numériques.

## 4.2. FORMULATIONS DU PROBLÈME HYDROÉLASTIQUE

---

Avantages	Inconvénients
Aucune valeur propre nulle	Pb. aux valeurs propres non-symétrique
Aucune manipulation supplémentaire	Beaucoup de degrés de liberté

TABLE 4.7 – Avantages et inconvénients de l’approche  $(\mathbf{U}_s, \mathbf{P})$

### 4.2.12 Problème discrétisé $(\mathbf{U}_s, \varphi)$ symétrique

#### 4.2.12.1 Problème dynamique en régime forcé

A partir des équations de la formulation en  $(\mathbf{u}_s, \varphi)$  et de la discrétisation EF, nous obtenons le système matriciel qui traduit le problème dynamique harmonique couplé  $(\mathbf{U}_s, \varphi)$  suivant :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{H} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\rho_f \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Écrit sous cette forme, cette formulation n’est pas symétrique. Mais, si nous multiplions les blocs matriciels de la seconde ligne de l’Eq. (4.49) par  $\omega^2 \rho_f$ , le système peut alors se ré-écrire de façon suivante :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\rho_f \mathbf{C} \\ -\rho_f \mathbf{C}^T & -\rho_f \mathbf{H} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Le système matriciel de l’Eq. (4.40) est symétrique. Mais, contrairement à la formulation en  $(\mathbf{U}_s, \mathbf{P})$ , un bloc de zéro se situe sur la matrice de raideur globale du problème. Ce bloc de zéro est problématique car le problème aux valeurs propres associé aura un nombre de valeurs propres nulles égal au nombre de degrés de liberté du fluide.

#### 4.2.12.2 Problème aux valeurs propres

Le problème aux valeurs propres associé à l’Eq. (4.40) consiste à trouver les  $n$  premiers couples de valeurs propres (non nulles) et de vecteurs propres hydroélastiques suivants :

$$\left\{ \omega_\alpha^2, \begin{pmatrix} \mathbf{U}_\alpha \\ \varphi_\alpha \end{pmatrix} \right\} \quad \text{avec} \quad \alpha = 1 \dots n \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^{*+} \quad (4.41)$$

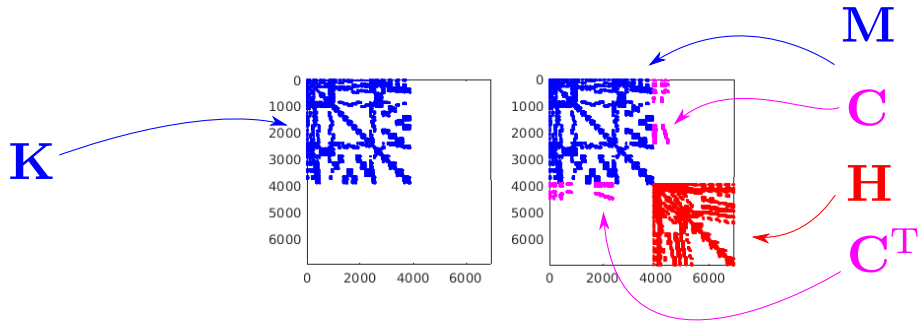


FIGURE 4.4 – Visualisation des matrices du problème en  $(\mathbf{U}_s, \varphi)$ .

Un vecteur propre ou mode hydroélastique est composé d'une partie structure notée  $\mathbf{U}_\alpha$  et d'une partie en potentiel de déplacement  $\varphi_\alpha$ . Nous récapitulons ci-dessous les avantages et inconvénients d'une telle approche en Tab. 4.8.

Avantages	Inconvénients
Aucune manipulation préalable	Blocs de zéros à l'origine d'apparition de valeurs propres nulles
Pb. aux valeurs propres symétrique	Beaucoup de degrés de liberté

TABLE 4.8 – Avantages et inconvénients du problème  $(\mathbf{U}_s, \varphi)$ .

Dans notre cas, l'apparition des blocs de zéros sur la diagonale de la matrice de raideur globale nous a conduit à ne pas utiliser cette approche. La suite du manuscrit est consacrée à l'approche symétrique du problème condensé avec matrice de masse ajoutée.

Un désavantage fondamental des deux approches proposées précédemment provient du fait que le problème aux valeurs propres à résoudre est de taille  $(n_{\text{dofs}} + n_{\text{doff}}) \times (n_{\text{dofs}} + n_{\text{doff}})$ . Dans la mesure où la gravité n'est pas prise en compte, il est judicieux d'exprimer le problème uniquement sur les nœuds de la structure en exprimant l'opérateur de masse ajoutée.

### 4.2.13 Opérateur de masse ajoutée

L'approche développée ci-après est codée dans nos algorithmes. Reprenons le système matriciel du problème  $(\mathbf{U}_s, \mathbf{P})$  de l'Eq. (4.49) et développons le de la façon suivante :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U}_s + \mathbf{C} \mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{H} \mathbf{P} + \omega^2 \rho_f \mathbf{C}^T \mathbf{U}_s = \mathbf{0} \quad (4.43)$$

A partir de l'équation (4.43), nous pouvons exprimer le vecteur des inconnues de pression en fonction du vecteur des inconnues de déplacement tel que :

$$\mathbf{H}_* \mathbf{P}_* = -\omega \rho_f \mathbf{C}_*^T \mathbf{U} \quad (4.44)$$

avec  $\mathbf{H}_*$  inversible, si nous ne prenons pas en compte les lignes et colonnes définies sur les degrés de liberté de la surface libre discrétisée  $\Gamma^h$  (la condition de fluctuation de pression nulle sur la surface libre Eq. (4.12) fixe les valeurs de la pression en ces nœuds à zéro). À partir des Eqs. (4.44) et (4.42), nous obtenons le problème dynamique symétrique condensé avec masse ajoutée ci-dessous :

$$[\mathbf{K} - \omega^2 (\mathbf{M} + \mathbf{M}_a)] \mathbf{U}_s = \mathbf{F} \quad (4.45)$$

avec  $\mathbf{M}_a$  la matrice de masse ajoutée (ou masse induite) définie par la relation suivante :

$$\mathbf{M}_a = \rho_f \mathbf{C}_* \mathbf{H}_*^{-1} \mathbf{C}_*^T \quad (4.46)$$

Notons que cette matrice est symétrique, semi-définie positive mais pleine sur les degrés de liberté de la structure à l'interface fluide-structure discrétisée.

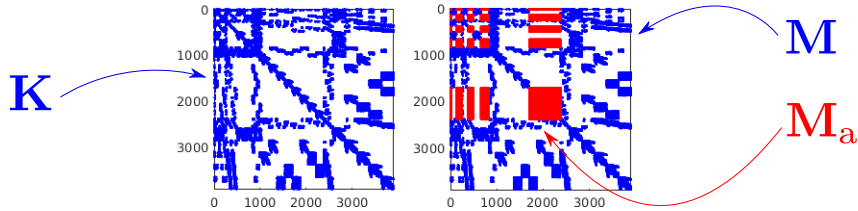


FIGURE 4.5 – Visualisation des matrices du problème symétrique avec la matrice de masse ajoutée.

Même si nous faisons apparaître explicitement  $\mathbf{H}_*^{-1}$  dans nos équations, ce terme n'est ni calculé ni stocké explicitement pour des raisons de mémoire et de temps de calcul. En effet, calculer  $\mathbf{H}_*^{-1}$  nécessiterait le stockage de  $(n_{\text{doff}} \times n_{\text{doff}})$  termes en mémoire avec  $n_{\text{doff}}$  le nombre de degrés de liberté dans

## 4.2. FORMULATIONS DU PROBLÈME HYDROÉLASTIQUE

---

le fluide. Alors que si nous nous référons à la Fig. 4.6, seulement  $(n_{\text{dof}} \times n_{\text{dof}})$  termes sont nécessaires pour construire la matrice de masse ajoutée, avec  $n_{\text{dof}}$  le nombre de degrés de liberté structure de l'interface. Dans notre cas, il est préférable de calculer  $\mathbf{M}_a$  directement avec la fonction "\code" de matlab. Cependant, nous verrons que cette approche a des limites de temps de calculs et de mémoire.

La résolution du problème couplé hydroélastique s'effectue en deux étapes :

- 1) Résoudre le problème aux valeurs propres symétrique défini par l'Eq. (4.50) pour trouver les  $n$  premiers couples valeurs propres et vecteurs propres, associés aux déplacements de la structure :

$$\{\omega_\alpha^2, \mathbf{U}_\alpha\} \quad \text{avec} \quad \alpha = 1 \dots n \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^{*+} \quad (4.47)$$

- 2) Calculer les  $n$  champs de pression complémentaires  $\mathbf{P}_\alpha$  (ou  $\varphi_\alpha$ ), à partir de l'équation (4.44) (à cette étape, il est préférable de résoudre  $n$  systèmes linéaires).

Nous décrivons en Tab. 4.9 les avantages et inconvénients d'utiliser une méthode par pivots de Gauss. Même si cette approche nécessite un peu plus d'étapes de calcul, le problème aux valeurs propre qui en découle est symétrique, réduit au nombre de degrés de liberté de la structure et parfaitement adapté à nos algorithmes de résolution de systèmes aux valeurs propres.

Avantages	Inconvénients
Pb. aux valeurs propres symétrique Moins de degrés de liberté	Calcul de matrice de masse ajoutée Matrice pleine à l'interface fluide-structure

TABLE 4.9 – Avantages et inconvénients du problème symétrique avec matrice de masse ajoutée.



**Récapitulatif : Problème aux valeurs propres hydroélastique**

- Problème non-symétrique ( $\mathbf{U}_s, \mathbf{P}$ )

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{H} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{O} \\ -\rho_f \mathbf{C}^T & \mathbf{O} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

- Problème symétrique ( $\mathbf{U}_s, \varphi$ )

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\rho_f \mathbf{C} \\ -\rho_f \mathbf{C}^T & -\rho_f \mathbf{H} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

- Problème symétrique avec masse ajouté

$$\left[ \mathbf{K} - \omega^2 (\mathbf{M} + \mathbf{M}_a) \right] \mathbf{U}_s = \mathbf{0} \quad (4.50)$$

avec  $\mathbf{M}_a$ , la matrice de masse ajoutée :

$$\mathbf{M}_a = \rho_f \mathbf{C}_* \mathbf{H}_*^{-1} \mathbf{C}_*^T \quad (4.51)$$

Dans la suite, nous proposons de calculer les modes hydroélastiques d'un exemple issu de la littérature avec le problème aux valeurs propres symétrique avec masse ajoutée.

Les approches développées précédemment ne sont pas exhaustives. Les méthodes basées sur les éléments de frontière (BEM pour Boundary Element method) permettent aussi de calculer la matrice de masse ajoutée [109, 110]. Ces formulations ont certaines limitations associées à la construction de matrices non-symétriques et pleines. Des méthodes numériques tels que la Fast Multipole [111] ou les H-matrix [112] sont nécessaires pour accélérer le temps de calcul pour la construction de cet opérateurs.

### 4.3 Exemple numérique : effet de masse ajoutée

#### 4.3.1 Cylindre partiellement rempli de liquide

Nous nous intéressons aux vibrations hydroélastiques d'un cylindre élastique encastré à la base et partiellement rempli de liquide (voir Fig. 4.6). Il est constitué d'un matériau linéaire homogène élastique et isotrope avec un module d'Young  $E = 5.6 \times 10^9$  Pa, un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  et une masse volumique  $\rho_s = 7.8 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>. La masse volume du fluide est  $\rho_f = 1.0 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>.

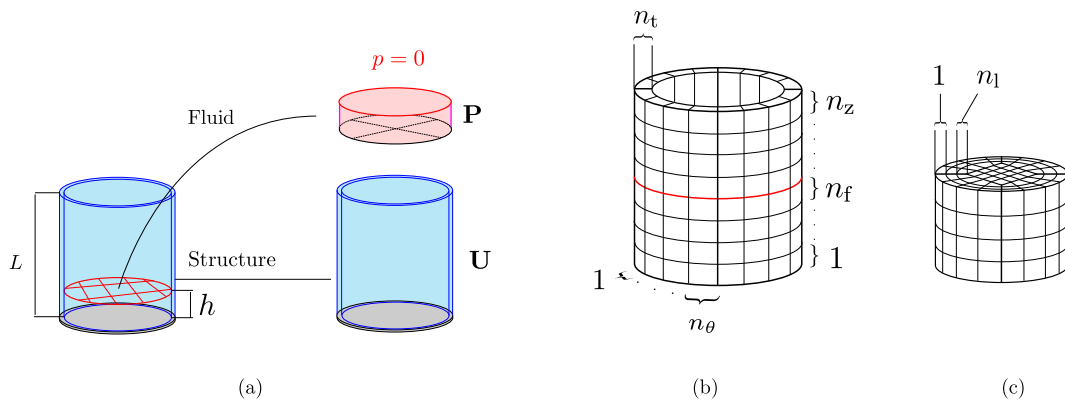


FIGURE 4.6 – (a) Géométrie du cylindre partiellement rempli de liquide avec une épaisseur  $t = 0.250$  mm, une longueur  $L = 0.112$  m et un rayon moyen  $R = 0.1$  m; (b) Paramètres du maillage fluide et solide constitué d'éléments quadratiques à 20 noeuds.

Afin de caractériser les modes, nous pouvons nous servir de la Fig. 4.7. Du fait de la géométrie cylindrique, un mode peut être caractérisé par son nombre de longueurs d'ondes circonférentielles  $n$  et longitudinales  $m$ .

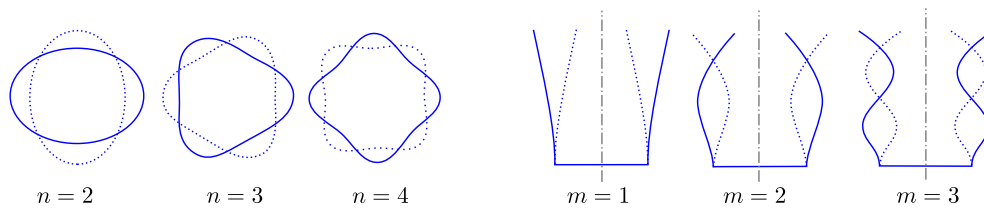


FIGURE 4.7 – Dénomination des modes par nombre de longueurs d'ondes circonférentielle et longitudinale respectivement notées  $n$  and  $m$ .

### 4.3. EXEMPLE NUMÉRIQUE : EFFET DE MASSE AJOUTÉE

#### 4.3.1.1 Analyse des modes *in vacuo*

Intéressons nous dans un premier temps aux modes de la structure *in vacuo*. Une comparaison entre les résultats expérimentaux de [106] et nos calculs montrent la validité des simulations. En effet, nous retrouvons les formes de courbes en cloche qui sont caractéristiques de cette géométrie. Les écarts sont de plus en plus grands lorsque le nombre d'onde circonférentiel et longitudinal sont grands. Ces écarts proviennent certainement de l'erreur de discrétisation.

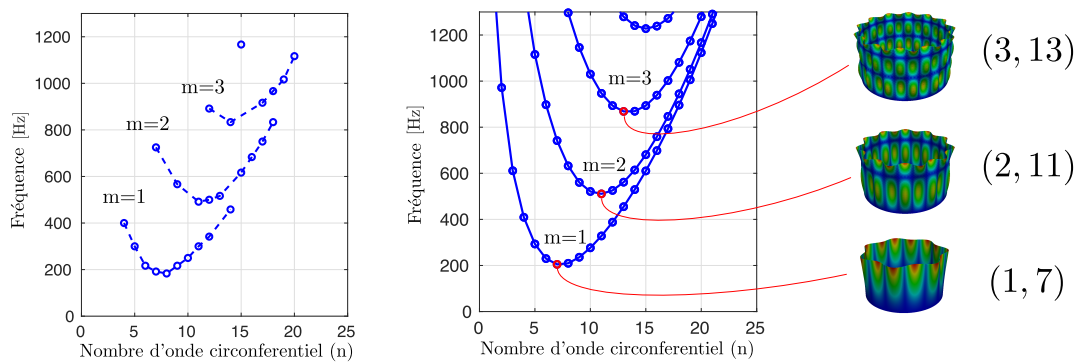


FIGURE 4.8 – (a) Fréquences propres expérimentales [106]; (b) Fréquences propres simulées

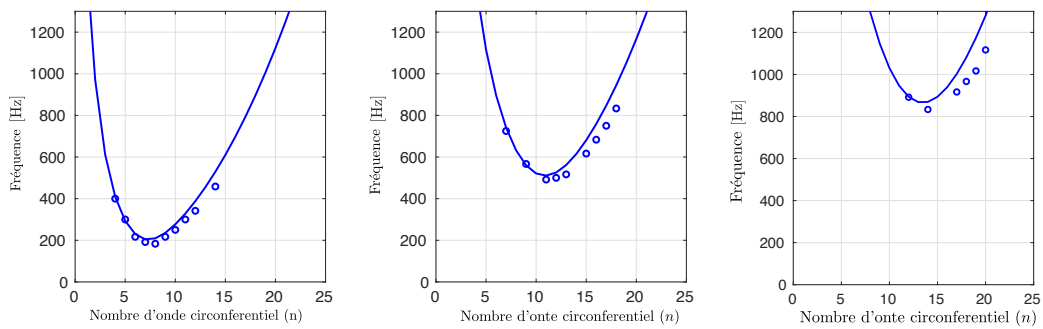


FIGURE 4.9 – Comparaison des fréquences propres simulées et des fréquences mesurées [106] pour  $m = 1$ ,  $m = 2$  et  $m = 3$ .

4.3.1.2 Analyse des modes hydroélastiques

Un calcul des fréquences de résonance du système couplé a été effectué pour un cylindre à moitié rempli de liquide avec  $h = 0.5L$ . Nous montrons la validité du code de calcul développé au travers d'une comparaison entre l'expérience de Chiba et nos simulations. L'influence du liquide modifie la forme des courbes en cloche obtenues précédemment.

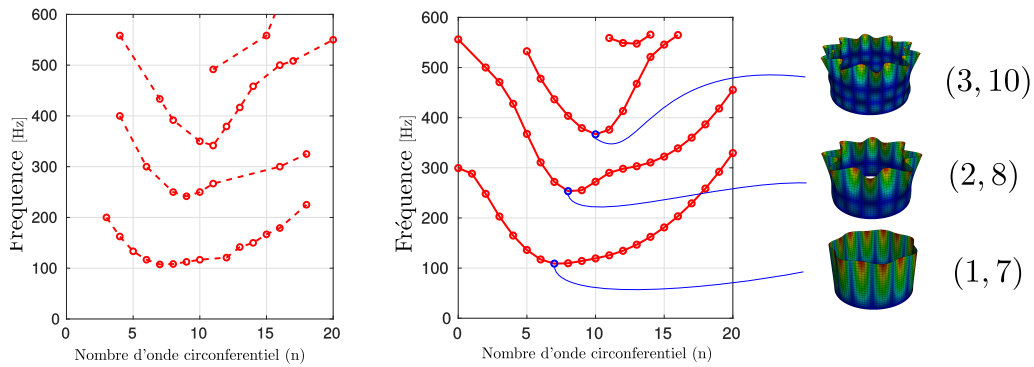


FIGURE 4.10 – (a) Fréquences propres hydroélastiques mesurées [106] ; (b) Fréquences propres hydroélastiques simulées.

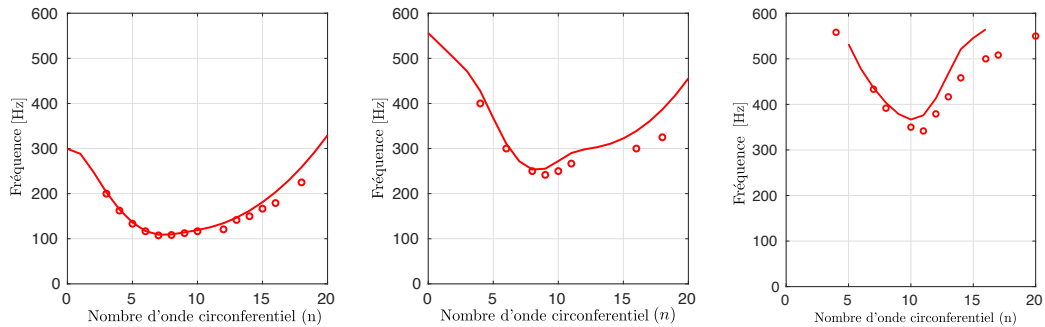


FIGURE 4.11 – Comparaison des fréquences propres hydroélastiques mesurées et simulées.

Une comparaison entre les modes *in vacuo* et les modes hydroélastiques montre que la présence du fluide a une influence à la fois sur la valeur des fréquences de résonance et sur la forme des modes (voir 4.12 et 4.13). Les fréquences de résonance hydroélastiques sont plus basses (effet de masse ajoutée).

### 4.3. EXEMPLE NUMÉRIQUE : EFFET DE MASSE AJOUTÉE

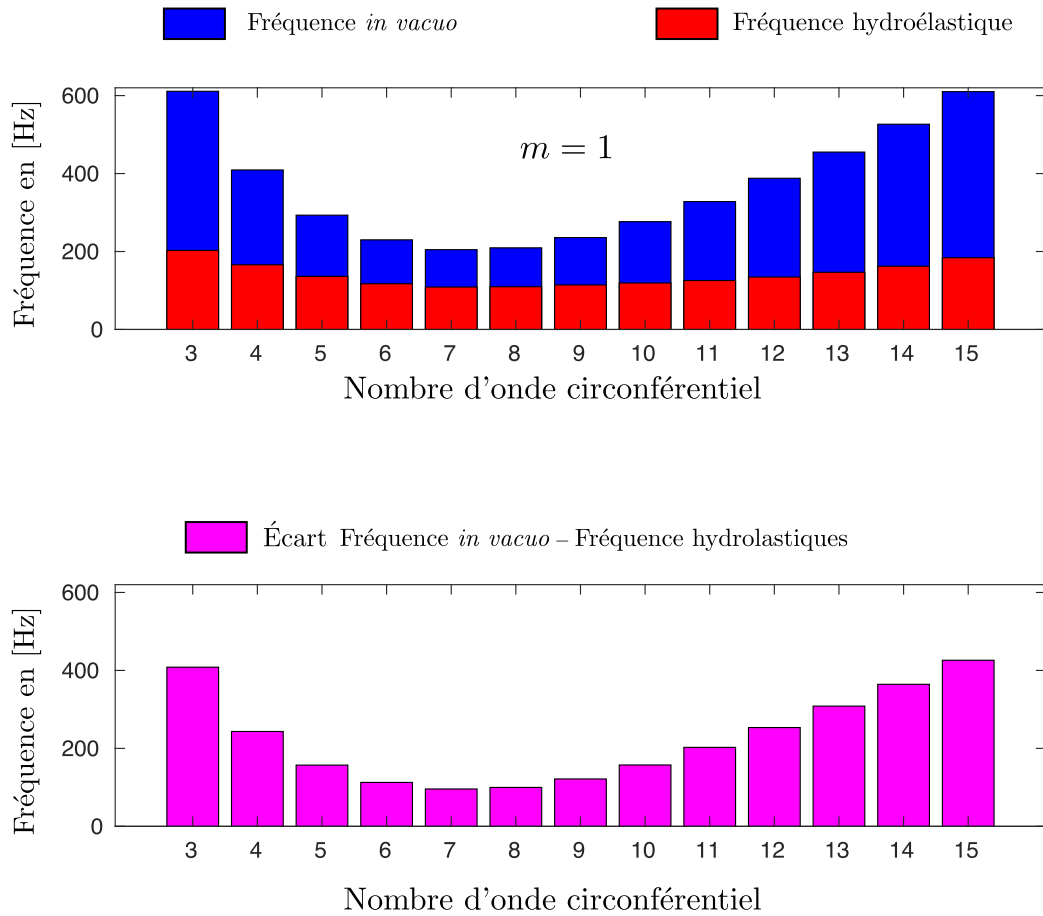


FIGURE 4.12 – Évolution et écarts entre les fréquences de la structure *in vacuo* et les fréquences hydroélastiques des modes  $(1, n)$  en fonction du nombre d'onde circonférentiel  $n$ .

Nous observons que la contribution de l'effet de masse ajoutée n'est pas la même en fonction du nombre d'onde circonférentiel. Dans cet exemple, pour  $m = 1$ , nous constatons que pour  $n \in [1, 7]$ , plus la valeur de  $n$  est faible plus l'effet de masse ajoutée est importante. A l'inverse, pour  $n \in [7, 15]$ , plus  $n$  augmente et plus l'effet de masse ajoutée est prononcé.

Une analyse des déformées modales, normalisées par la masse de la structure *in vacuo* montre que la forme des modes est aussi modifiée (voir Fig. 4.13). En effet, plus la contribution de la masse ajoutée est grande, plus la forme du mode diffère de celle de la structure seule. Pour de grandes valeurs de  $n$ , les déformations de la structure se localisent de plus en plus proche de la partie en contact avec le fluide, alors que la partie non-immergée se déforme de moins en moins (voir Fig. 4.14).

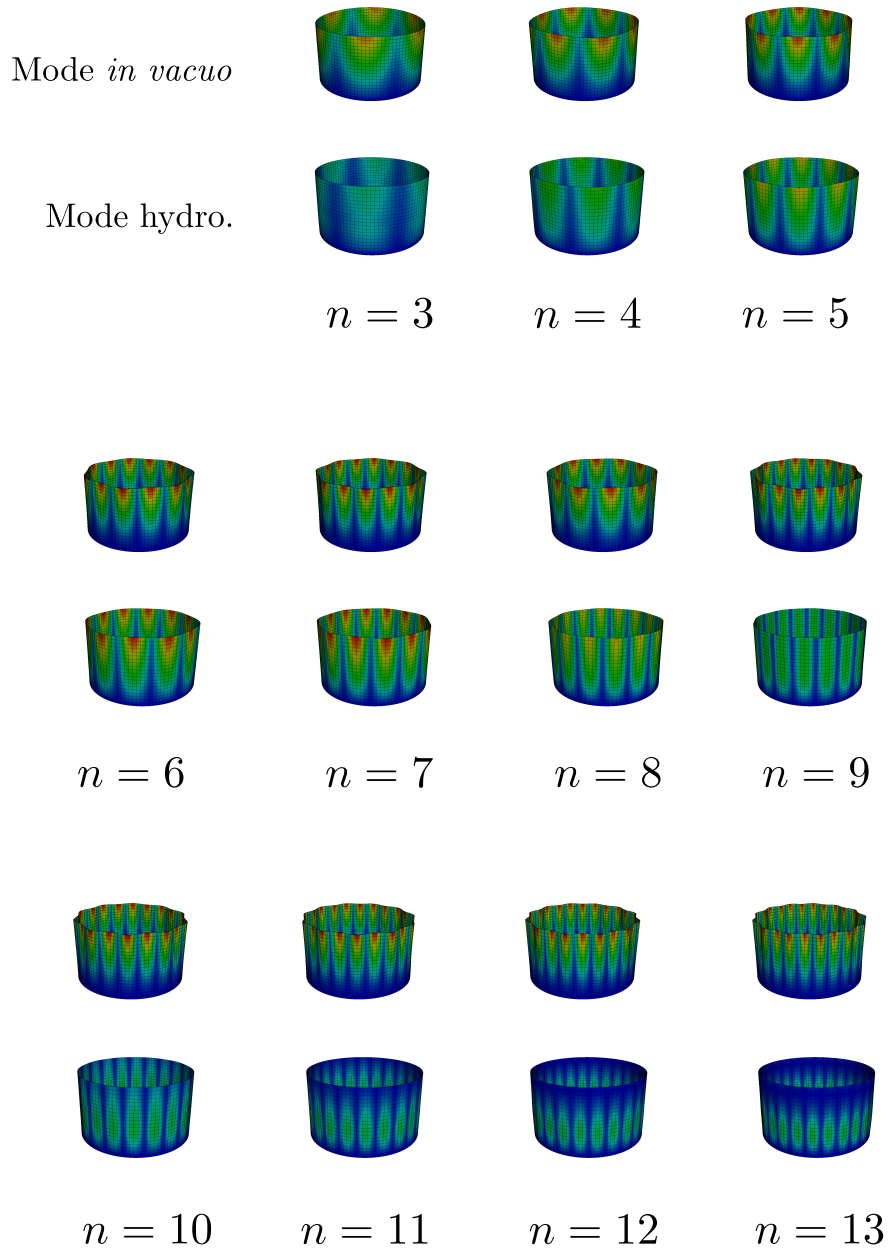


FIGURE 4.13 – Déformées modales  $(1, n)$  de la structure *in vacuo* et de la structure partiellement (normalisation à la masse de la structure *in vacuo*).

Ce phénomène se visualise aussi pour les modes ayant un nombre de longueurs d'ondes longitudinales  $m = 2$  et  $m = 3$  (voir respectivement les Figs. 4.15 et 4.16).

### 4.3. EXEMPLE NUMÉRIQUE : EFFET DE MASSE AJOUTÉE

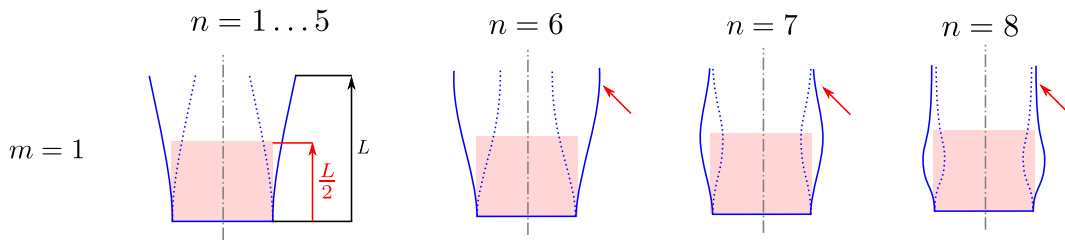


FIGURE 4.14 – Évolution des déformées modales des modes hydroélastiques (partie structure) associés à un nombre d’ondes longitudinales  $m = 1$  en fonction du nombre d’ondes circumférentielles  $n = 8, 9, 10$  et 11.

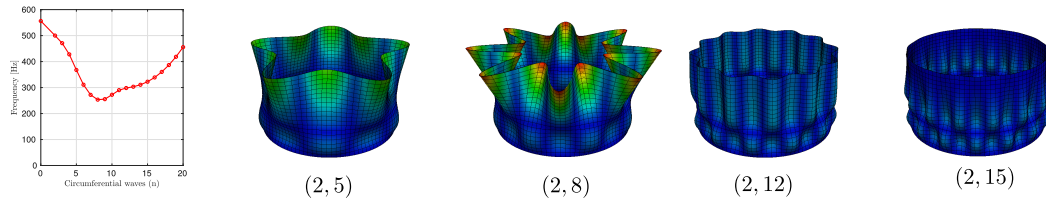


FIGURE 4.15 – Exemples de modes hydroélastiques (partie structure) pour  $m = 2$  pour différentes valeurs du nombre d’ondes circumférentielles  $n$ .

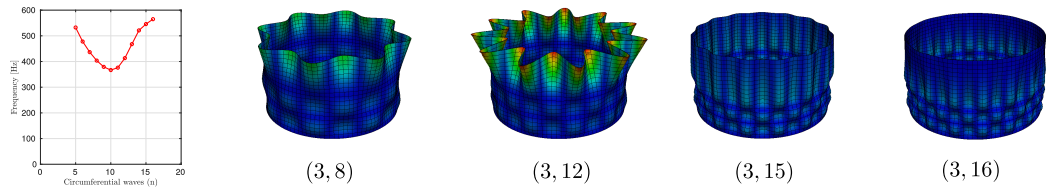


FIGURE 4.16 – Exemples de modes hydroélastiques (partie structure) pour  $m = 3$  pour différentes valeurs du nombre d’ondes circumférentielles  $n$ .

Nous rappelons que le champ de pression d’un mode hydroélastique peut être calculé et représenté (voir Fig. 4.17).

### 4.3. EXEMPLE NUMÉRIQUE : EFFET DE MASSE AJOUTÉE

---

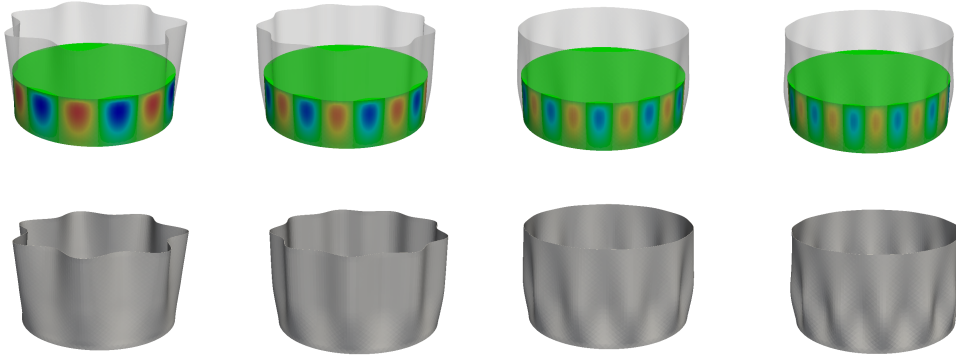


FIGURE 4.17 – Pression du fluide et déplacement de la structure des modes hydroélastiques.

#### 4.3.1.3 Temps de calcul de la matrice de masse ajoutée

Même si cet exemple permet de valider nos développements pour un cylindre à moitié rempli de liquide, le temps de calcul nécessaire pour la construction de la matrice de masse ajoutée rend cet approche prohibitive. Le tableau ci-dessous permet de donner des ordres de grandeur du temps de calcul en fonctions de paramètres de maillage :

$(n_\theta, n_f)$	(5, 5)	(10, 10)	(15, 15)	(25, 10)
$n_{\text{elem-f}}$ (fluide)	500	2600	6975	10250
$n_{\text{dof-f}}$ (fluide)	2260	11020	29280	45696
Temps de calcul	4.3 sec	211 sec	1020 sec	4136 sec

TABLE 4.10 – Temps de calcul pour obtenir la matrice de masse ajoutée avec inversion de matrice (rappel :  $\mathbf{M}_a = \rho_f \mathbf{C}_* \mathbf{H}_*^{-1} \mathbf{C}_*^T$ ).



#### 4.3.2 Récapitulatif de l'exemple numérique

L'exemple numérique traité dans cette section nous a permis :

- de calculer des modes propres et valeurs propres hydroélastiques d'un cylindre à moitié rempli de liquide, sans précontrainte, par méthode des éléments finis ;
- de comparer des résultats obtenus à ceux de la littérature montrant la validité de (i) l'approche avec masse ajoutée et (ii) du code que nous avons développé au cours de cette thèse ;
- d'observer que la forme de la partie structure des modes hydroélastiques et des modes de la structure *in vacuo* diffèrent en fonction de la hauteur de fluide. En particulier, lorsque le nombre de vagues circonférentielles augmentent, les déplacements de la structure se localisent au niveau de la partie mouillée du cylindre.

Au travers de cet exemple, nous montrons que le point le plus problématique de cette approche est le temps de calcul de la matrice de masse ajoutée. En effet, son calcul dépend du nombre de degrés de liberté de l'interface et du nombre de degrés de liberté dans le fluide. La suite de ce chapitre est consacrée à une formulation qui permet de réduire le temps de calcul associé à la construction de la matrice de masse ajoutée.

### 4.4 Projection du problème hydroélastique sur base *in vacuo*

L'objectif de cette section est de calculer les modes hydroélastiques, sans calculer explicitement l'opérateur de masse ajoutée  $\mathbf{M}_a$ . Le principe est basé sur une projection du problème sur base *in vacuo*. Comme l'illustre la Fig. (4.18), l'approche se décompose en trois phases :

- 1 Calculer les modes propres et valeurs propres de la structure *in vacuo*;
- 2 Calculer la réponse du fluide incompressible (en potentiel de déplacement), induite par les modes *in vacuo* (on rappelle que les effets de gravité sont négligés). Se servir de ces réponses pour calculer un champ de pression induit.
- 3 Prendre en compte ces efforts induits et projeter le nouveau problème sur la base de modes *in vacuo*.

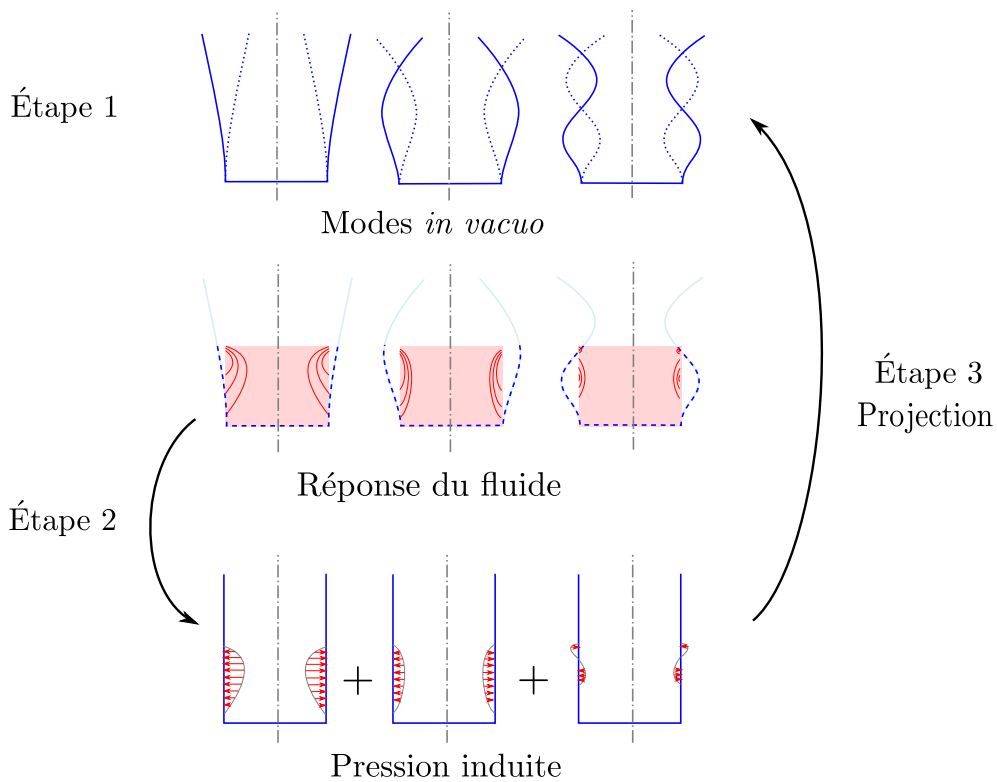


FIGURE 4.18 – Schéma de l'approche utilisée pour la projection du problème hydroélastique sur base de modes *in vacuo*.

Nous proposons un développement de ce concept, d'abord d'un point de vue continu et ensuite

#### 4.4. PROJECTION DU PROBLÈME HYDROÉLASTIQUE SUR BASE *IN VACUO*

d'un point de vue numérique. Nous montrerons la validité de l'approche via un retour à l'exemple numérique.

##### 4.4.1 Approche continue de la projection sur base sèche

**Étape 1 :** Cette étape se base sur le calcul des déformées modales de la structure obtenues à partir de l'équation suivante :

$$\mathcal{K}(\mathbf{u}_s, \delta \mathbf{u}) - \omega^2 \mathcal{M}(\mathbf{u}_s, \delta \mathbf{u}) = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{C}_u \quad (4.52)$$

Du fait des propriétés des opérateurs  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{M}$ , il existe une base orthogonale  $\{\mathbf{u}_\beta\}$ , telle que la fluctuation du champ de déplacement s'écrit sous forme de combinaison linéaire de celle-ci :

$$\mathbf{u}_s = \sum_{\beta=1}^{+\infty} \kappa_\beta \mathbf{u}_\beta \quad (4.53)$$

Dans la pratique, cette base est tronquée aux  $N$  premiers termes, avec  $N$  suffisamment grand<sup>1</sup>. L'Eq. (4.52) étant vérifiée quelque soit le champ virtuel  $\delta \mathbf{u}$ , elle l'est en particulier pour les  $N$  vecteurs de la base  $\{\mathbf{u}_\beta\}$  pris un à un, tel que  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_\beta$ . Il est donc possible d'écrire la relation suivante :

$$\sum_{\beta=1}^N (\omega_\beta^2 - \omega^2 \mu_\beta) \kappa_\beta = 0 \quad (4.54)$$

avec les  $\mu_\beta$  définis par une normalisation à la masse du  $\beta^{\text{ème}}$  mode associé ( $\mu_\beta = \mathcal{M}(\mathbf{u}_\beta, \mathbf{u}_\beta) = 1$ ) et  $\kappa_\beta$  les coordonnées généralisées.

**Étape 2 :** Pour chacun des  $N$  modes de la structure *in vacuo* calculés à l'étape 1, l'objectif de cette étape consiste à calculer  $N$  champs de potentiels de déplacement fluide  $\{\varphi_\beta\}$  soumis à un déplacement imposé de l'interface fluide-structure. Étant donné que (i) le fluide est incompressible et que (ii) nous ne prenons pas en compte les effets de gravité sur la surface libre, les  $N$  problèmes sont donnés ci-dessous :

$$\Delta \varphi_\beta = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (4.55)$$

$$\mathbf{grad} \varphi_\beta \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_\beta \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \quad (4.56)$$

$$\varphi_\beta = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (4.57)$$

---

1. Le nombre de termes  $N$  dépend *a posteriori* du nombre de modes nécessaires pour converger vers les  $K$  modes hydroélastiques se trouvant dans une plage de fréquence d'intérêt  $[f_{\min}, f_{\max}]$ .

#### 4.4. PROJECTION DU PROBLÈME HYDROÉLASTIQUE SUR BASE *IN VACUO*

La formulation variationnelle associée aux Eqs. (4.55), (4.56) et (4.57) s'écrit alors sous forme suivante :

$$\mathcal{H}(\varphi_\beta, \delta\varphi) + \mathcal{C}(\delta\varphi, \mathbf{u}_\beta) = 0, \quad \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_p \quad (4.58)$$

Nous verrons par la suite, sur la formulation discrète, que la résolution de cette équation permet de gagner du temps de calcul sur la construction de l'opérateur de masse ajoutée.

**Étape 3 :** Les fluctuations des champs de pression induits sont calculés à partir de l'Eq. (4.14). Ceux-ci sont proportionnels aux coordonnées généralisées de l'étape 1. Chaque champ de pression induit est donc de la forme suivante :

$$p_\beta = \omega^2 \rho_f \varphi_\beta \kappa_\beta \quad (4.59)$$

Ces  $N$  champs de pressions sont alors pris en compte comme actions extérieures sur la structure à l'interface fluide-structure. Le travail virtuel extérieur associé à ces  $N$  champs de pression s'écrit de manière suivante :

$$-\sum_{\beta=1}^N \int_{\Sigma} p_\beta \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} ds = -\omega^2 \rho_f \sum_{\beta=1}^N \mathcal{C}(\varphi_\beta, \delta \mathbf{u}) \kappa_\beta \quad (4.60)$$

Nous écrivons alors un nouveau problème de dynamique, prenant en compte les  $N$  champs de pression induits définis comme suit :

$$\mathcal{K}(\mathbf{u}_s, \delta \mathbf{u}) - \omega^2 \mathcal{M}(\mathbf{u}_s, \delta \mathbf{u}) = -\omega^2 \rho_f \sum_{\beta=1}^N \mathcal{C}(\varphi_\beta, \delta \mathbf{u}) \kappa_\beta \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{C}_u \quad (4.61)$$

De façon analogue à l'étape 1, prendre un à un les champs virtuels égaux aux  $N$  modes conduit à la relation suivante :

$$\sum_{\gamma=1}^N \left( \omega_\gamma^2 - \omega^2 \left( 1 + \sum_{\beta=1}^N m_{\gamma\beta} \right) \right) \kappa_\beta = 0, \quad \text{avec} \quad m_{\gamma\beta} = -\rho_f \mathcal{C}(\varphi_\beta, \mathbf{u}_\gamma) \quad (4.62)$$

avec  $m_{\gamma,\beta}$  correspondant à la contribution de la masse ajoutée associée aux modes de la base sèche. Nous montrerons au travers de nos exemples numériques que ce problème réduit sur  $N$  vecteurs de la base converge vers la partie structurelle du problème hydroélastique.

#### 4.4.2 Approche EF discrétisée de la projection sur base *in vacuo*

Les opérateurs discrétisés de ces développements se basent sur les mêmes opérateurs définis en sous-section 4.2.6. Au même titre que l'approche décrite sous forme continue, l'approche discrétisée se décompose en 3 étapes :

#### 4.4. PROJECTION DU PROBLÈME HYDROÉLASTIQUE SUR BASE *IN VACUO*

**Étape 1 :** On calcule d'abord les  $N$  premiers vecteurs propres du problème linéaire classique de la structure *in vacuo* :

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{U}_s = \mathbf{0} \quad (4.63)$$

Ces vecteurs formeront une base orthogonale notée  $\{\mathbf{U}_\beta\}_{\beta=1..N}$ . Le déplacement de la structure  $\mathbf{U}_s$  peut alors s'écrire combinaison linéaire des vecteurs de base :

$$\mathbf{U}_s = \sum_{\beta=1}^N \kappa_\beta \mathbf{U}_\beta = \mathbf{B}_u \boldsymbol{\kappa} \quad (4.64)$$

avec  $\mathbf{B}_u$  une matrice composée des vecteurs de la base  $\{\mathbf{U}_\beta\}$  et  $\boldsymbol{\kappa}$  est le vecteur de coordonnées généralisées :

$$\mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ \mathbf{U}_1 & \dots & \mathbf{U}_N \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_N \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

**Étape 2 :** Pour chaque vecteur propre  $\mathbf{U}_\beta$ , nous calculons la réponse fluide en potentiel de déplacement  $\varphi_\beta$  associée au déplacement de l'interface fluide-structure  $\mathbf{U}_\beta$ . Cette étape consiste à résoudre  $N$  systèmes linéaires, basés sur la condition  $\varphi_\beta = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma$ , tel que :

$$\mathbf{H}_* \varphi_\beta = -\mathbf{C}_*^T \mathbf{U}_\beta \quad (4.66)$$

Les  $N$  potentiels de déplacements  $\varphi_\beta$  calculés sont ensuite stockés dans une matrice  $\Phi$  :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ \varphi_1 & \dots & \varphi_N \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Ces  $N$  systèmes linéaires correspondent à l'une des plus importantes contributions en économie de temps de calcul et de mémoire. En effet, la résolution de ces systèmes linéaires prend beaucoup moins de temps de calcul que l'opérateur de masse ajoutée  $\mathbf{M}_a$  si le nombre de modes sélectionnés  $N$  reste raisonnable (si  $N \ll 3 \times n_{\text{dof}}$ ). De plus, ces calculs peuvent être effectués en parallèle. Dans notre cas, nous avons une machine à 10 cœurs. Nous réalisons donc 10 calculs en parallèle dans la limite de la mémoire disponible.

#### 4.4. PROJECTION DU PROBLÈME HYDROÉLASTIQUE SUR BASE *IN VACUO*

**Étape 3 :** Le calcul de la pression induite se déduit directement par la relation suivante :

$$\mathbf{P}_\beta = \omega^2 \rho_f \boldsymbol{\varphi}_\beta \boldsymbol{\kappa}_\beta \quad (4.68)$$

Néanmoins, nous garderons le formalisme faisant apparaître explicitement le terme  $\omega^2$ . La prise en compte de chaque contribution de la pression apparaît alors dans le membre de droite de l'Eq. (4.63) tel que :

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa} = -\omega^2 \rho_f \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\kappa} \quad (4.69)$$

La projection du problème défini par l'Eq. (4.69) sur les modes de la structure *in vacuo* s'obtient en multipliant à gauche par  $\mathbf{B}_u^T$  tel que le problème réduit s'écrit de façon suivante :

$$[\boldsymbol{\Omega} - \omega^2 (\mathbf{I} + \mathbf{m}_a)] \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \quad (4.70)$$

avec  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{B}_u^T \mathbf{K} \mathbf{B}_u$ ,  $\mathbf{I} = \mathbf{B}_u^T \mathbf{M} \mathbf{B}_u$  et  $\mathbf{m}_a = \rho_f \mathbf{B}_u^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi}$  des matrices réduites de taille  $N \times N$ . La résolution de ce système aux valeurs propres réduit conduit au calcul des couples suivants :

$$\left\{ \omega_\gamma^2, \boldsymbol{\kappa}_\gamma \right\} \quad \text{avec } \gamma = 1 \dots N \quad \text{et } N \in \mathbb{N}^{*+} \quad (4.71)$$

A partir de cette équation, nous pouvons lister un certain nombre de remarques :

- Le nouveau système aux valeurs propres de taille  $N \times N$  est très petit en comparaison du système complet de taille  $n_{\text{dofs}} \times n_{\text{dofs}}$ ,  $n_{\text{dofs}}$  étant le nombre de degrés de liberté de la structure ( $N \ll n_{\text{dofs}}$ ).
- Toutes les matrices réduites sont symétriques dans la mesure où  $\mathbf{m}_a = \rho_f \mathbf{B}_u^T \mathbf{C} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{B}_u$ ,  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{B}_u^T \mathbf{K} \mathbf{B}_u$  et  $\mathbf{I} = \mathbf{B}_u^T \mathbf{M} \mathbf{B}_u$ . Nous pouvons rappeler que les vecteurs de la base *in vacuo*  $\mathbf{B}_u$  sont normalisés à la masse :

$$\| \bullet \|_M = \sqrt{\bullet^T \mathbf{M} \bullet} \quad (4.72)$$

**Synthèse sur la projection du problème hydroélastique  
sur base de structure *in vacuo***

- **Étape 1** : Nous avons calculé les  $N$  premiers vecteurs propres et valeurs propres de la structure *in vacuo*.
- **Étape 2** : A partir de ces  $N$  vecteurs propres nous avons calculé  $N$  potentiels de déplacements du fluide (supposé incompressible et sans effet de gravité). Nous sommes en mesure de calculer  $N$  champs de pression induits à l'interface fluide-structure.
- **Étape 3** : La prise en compte de ces  $N$  actions du fluide sur la structure nous conduisent à un nouveau système que nous projetons sur les  $N$  modes de la structure *in vacuo*. A cette étape, nous avons à notre disposition un système symétrique de taille réduit ( $N \times N$ ) :

$$[\mathbf{\Omega} - \omega^2(\mathbf{I} + \mathbf{m}_a)]\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \quad (4.73)$$

avec  $\mathbf{m}_a$  une matrice de masse ajoutée réduite. Les  $N$  valeurs propres et vecteurs propres de ce système réduit sont notés :

$$\{\omega_\gamma^2, \boldsymbol{\kappa}_\gamma\} \quad \text{avec } \gamma = 1 \dots N \quad \text{et } N \in \mathbb{N}^{*+} \quad (4.74)$$

Deux questions subsistent :

**Q1** : Est-ce que les  $K$  premières valeurs propres de ce système réduit convergent vers les  $K$  premières valeurs propres du problème hydroélastique ? Nous répondrons à cette question dans l'exemple numérique qui suit.

**Q2** : Admettons que les  $K$  premières valeurs propres convergent, peut-on retrouver les déformées modales hydroélastiques associées à ces  $K$  premières valeurs propres convergées ?

Nous pouvons dès à présent répondre positivement à la question 2 puisque le calcul des  $N$  vecteurs de la nouvelle base  $\{\mathbf{U}_\gamma\}$  est réalisé à l'aide de la matrice de passage composée des vecteurs propres du problème réduit  $\mathbf{P}_{\text{red}}$  tel que :

$$\mathbf{U}_\gamma = \mathbf{U}_\beta \mathbf{P}_{\text{red}} \quad (4.75)$$

avec

$$\mathbf{P}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\kappa}_1 & \dots & \boldsymbol{\kappa}_N \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

## 4.5 Retour sur l'exemple numérique sans précontrainte

L'objectif de ces développements numériques est de valider la convergence du calcul des modes hydroélastiques par projection du problème sur base sèche. Revenons sur l'exemple numérique présenté en Section 4.3.

### 4.5.1 Contribution des modes secs aux modes hydroélastiques

L'objectif est de calculer les modes et les fréquences hydroélastiques sur une plage de fréquence à partir du calcul des modes de structure *in vacuo*. Prenons une plage de fréquence arbitraire contenant les 30 premiers modes hydroélastiques (voir Fig. 4.19). Quels sont les modes de la structure *in vacuo* qui contribuent à la construction des  $K$  modes hydroélastiques sur la plage de fréquence donnée ?

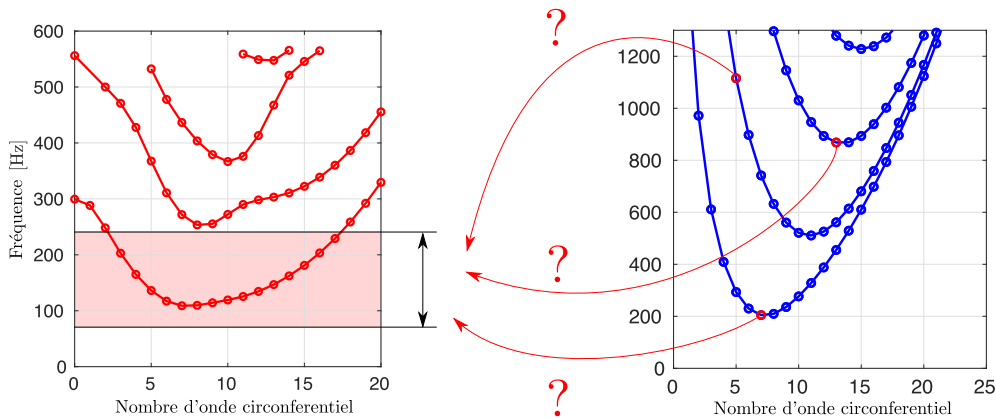


FIGURE 4.19 – Quelles modes de la structure *in vacuo* contribuent au calcul des modes hydroélastiques ?

Le graphe donné en Fig. 4.20 donne une autre représentation des 30 premières fréquences propres calculées par ordre croissant d'apparition. Nous cherchons à calculer ces 30 premières fréquences par projection du problème sur base sèche.

### 4.5.2 Calculs par projection sur $N$ premiers modes *in vacuo*

Nous partons du principe que les 400 premiers modes de la base sèche ont été calculés au préalable. Parmi ces 400 modes, nous faisons trois sélections :

**Cas 1** : sélection des 50 premiers modes ;



#### 4.5. RETOUR SUR L'EXEMPLE NUMÉRIQUE SANS PRÉCONTRAINT

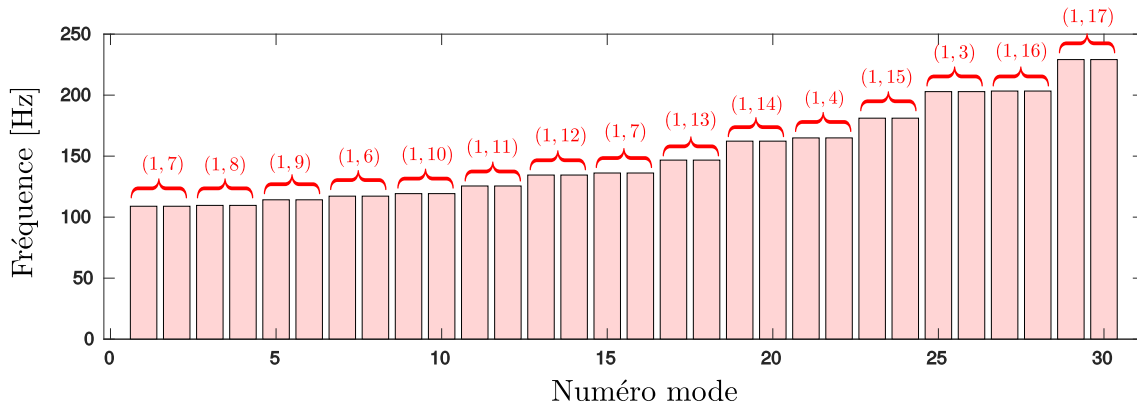


FIGURE 4.20 – Evolution des 30 premières fréquences hydroélastiques de la structure à moitié remplie de liquide caractérisés par  $(m, n)$  avec  $m$  le nombre d'onde longitudinal et  $n$  le nombre d'onde circonférentiel.

**Cas 2** : sélection des 150 premiers modes ;

**Cas 3** : sélection des 400 modes.

Le graphe ci-dessous (Fig. 4.21) montre une comparaison entre les fréquences calculées par projection sur base de structure *in vacuo* et les fréquences hydroélastiques calculées en Section 4.3. Qualitativement, nous observons une convergence des fréquences du problème réduit vers les  $K$  premières fréquences du problème hydroélastique si  $N$  augmente. Quantitativement, nous constatons que (i) le pourcentage d'erreur par mode diminue et (ii) l'erreur maximum sur les  $K$  fréquences d'intérêt diminue aussi. En effet, pour  $N = 50$  l'erreur semble augmenter progressivement en fonction du numéro du mode, à l'exception de certaines fréquences pour lesquelles des pics d'erreur apparaissent. Pour  $N = 150$ , seuls certains pics d'erreur subsistent, mais les premières fréquences propres ont convergé. Enfin, pour un nombre de modes  $N = 400$ , tous les pics d'erreur sont inférieurs à 1%.

#### 4.5. RETOUR SUR L'EXEMPLE NUMÉRIQUE SANS PRÉCONTRAINTE

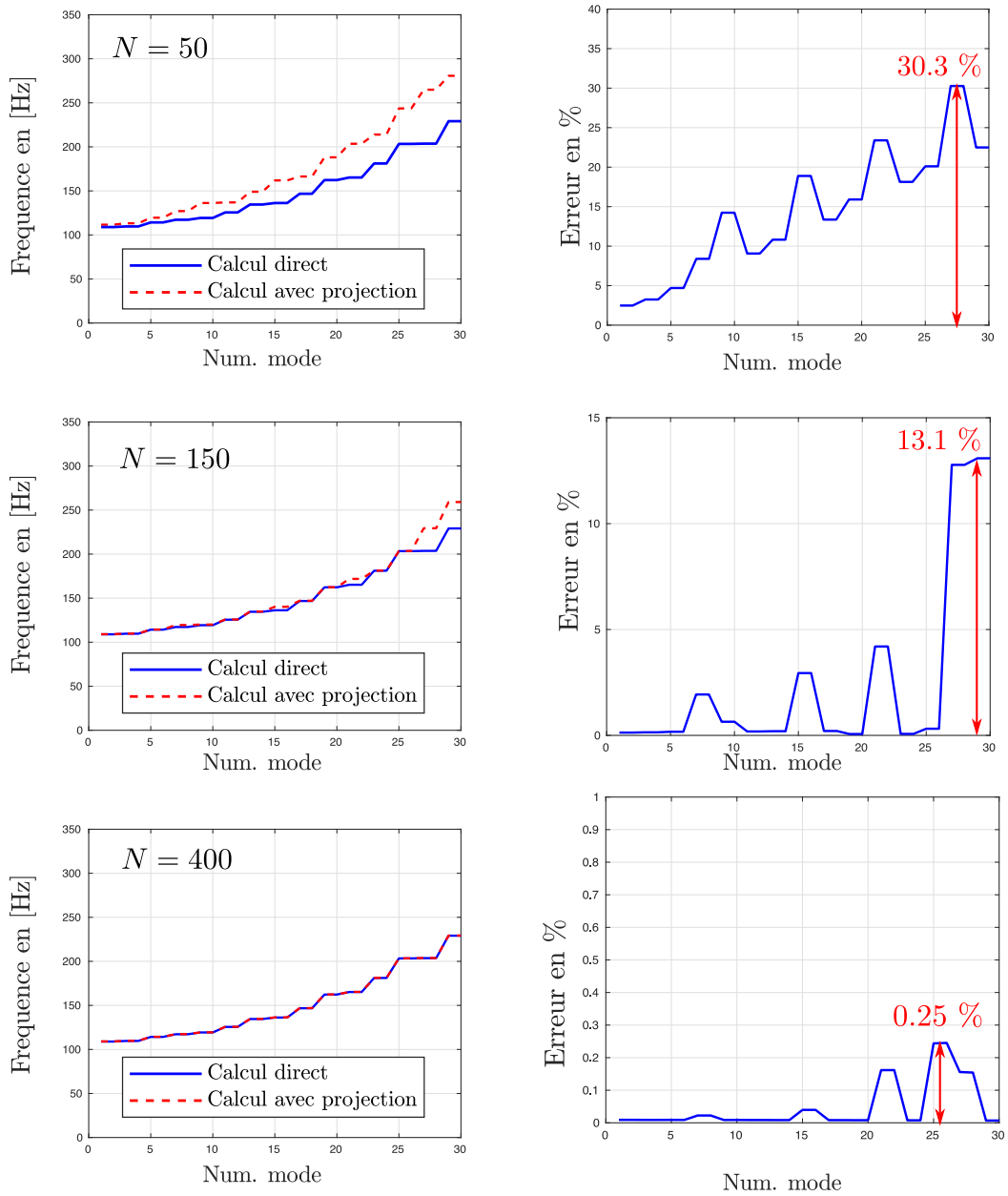


FIGURE 4.21 – Évolution du pourcentage d’erreur maximum des 30 premiers modes hydroélastiques en fonction du nombre de modes de la base sèche  $N \in [1, 150]$  modes.

Nous avons calculé plusieurs problèmes aux valeurs propres pour visualiser la décroissance du pourcentage de l’erreur maximum en fonction de  $N$  en Fig. 4.22.

#### 4.5. RETOUR SUR L'EXEMPLE NUMÉRIQUE SANS PRÉCONTRAINT

---

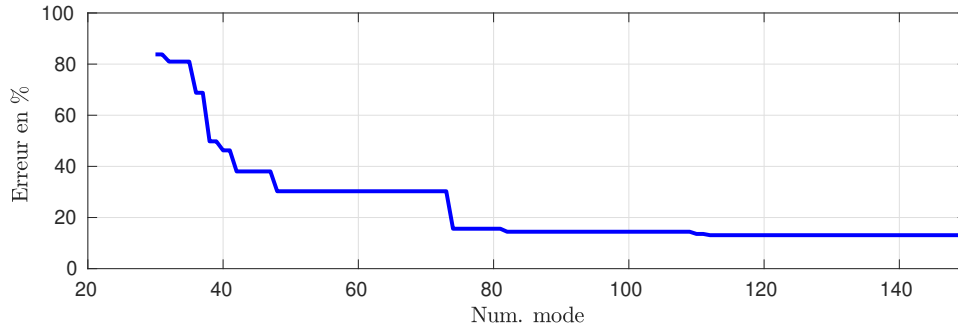


FIGURE 4.22 – Évolution du pourcentage d’erreur maximum, parmi les 30 premières fréquences propres, en fonction du nombre de modes de la base sèche  $N \in [1, 150]$  modes.

Nous observons une décroissance de l’erreur maximum par palier. L’interprétation que nous pouvons faire est la suivante : ce n’est pas que le nombre  $N$  de modes qui contribue à la convergence de l’erreur maximum, mais certains modes parmi les  $N$  sélectionnés contribuent de façon plus marquée. On peut effectivement s’en convaincre en projetant certains modes hydroélastiques  $\mathbf{U}_\alpha$ , calculés en Section 4.3, sur la base de modes de la structure *in vacuo*  $\mathbf{B}_u$  :

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{B}_u^T \mathbf{U}_\alpha \quad (4.77)$$

Les valeurs du vecteur  $\boldsymbol{\mu}$  peuvent servir d’indicateurs de la contribution d’un mode de structure au  $\alpha^{\text{ème}}$  mode hydroélastique. Nous traçons alors la valeur de ces indicateurs, pour les modes hydroélastiques (1, 7), (1, 3) et (1, 16) sur les 50 premiers modes de structure *in vacuo*, en Fig. 4.23 .

#### 4.5. RETOUR SUR L'EXEMPLE NUMÉRIQUE SANS PRÉCONTRAINT

Modes hydroélastiques

Modes de structure *in vacuo*

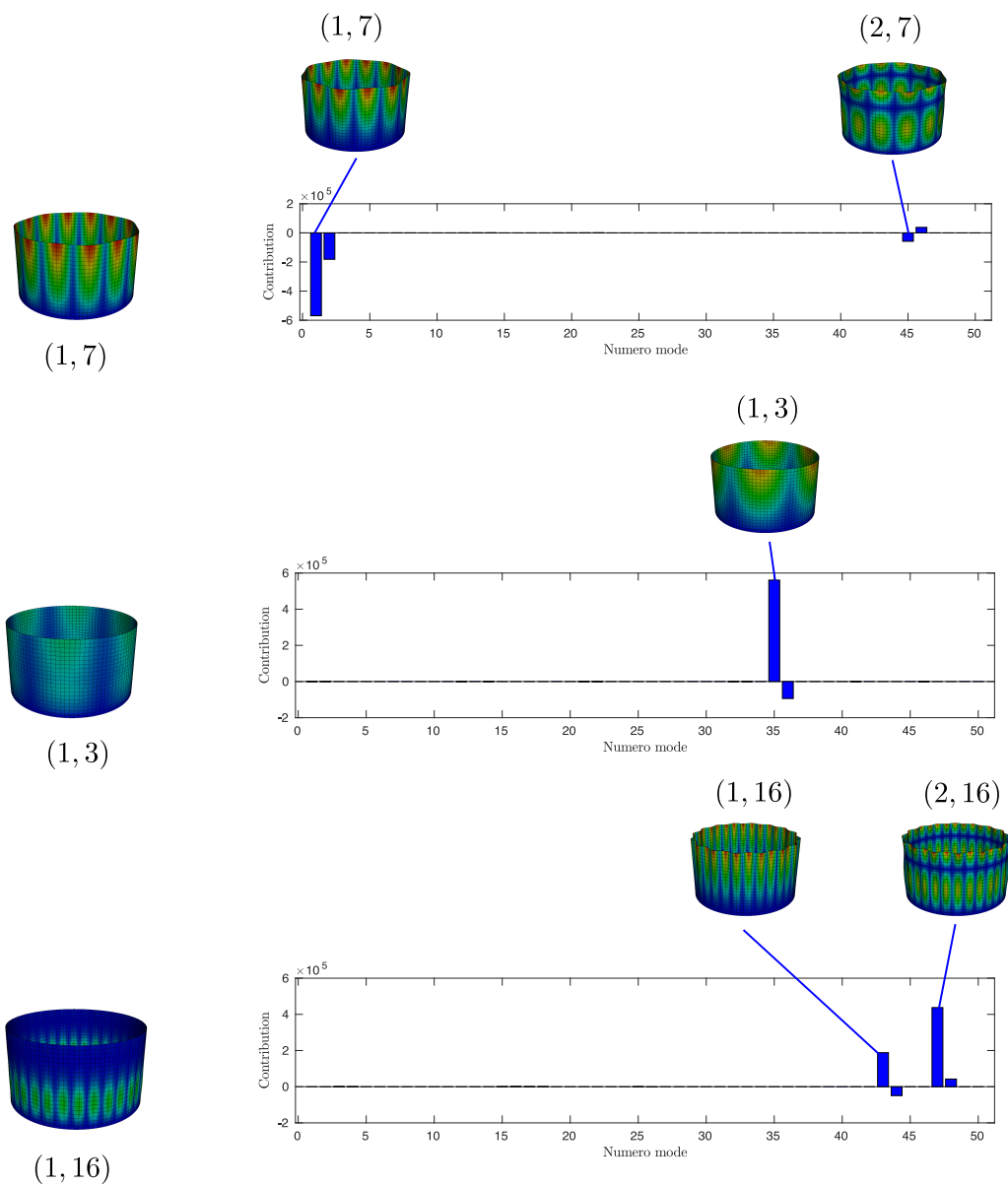


FIGURE 4.23 – Contribution des modes *in vacuo* aux modes hydroélastiques (1, 7), (1, 3) et (1, 16)

Nous observons que pour un mode hydroélastique, peu de modes de structure *in vacuo* contribuent. Par exemple, pour le mode (1, 7), les modes secs qui contribuent sont à la fois les modes autour du mode (1, 7) mais aussi les modes autour du mode (2, 7), ceux-ci peuvent donc être relativement éloignés.

### 4.5.3 Temps de calcul

Nous donnons l'ordre de grandeur des temps de calcul entre le calcul des modes hydroélastiques du modèle complet vue en Section 4.3, et le temps de calcul des 30 premiers modes hydroélastiques calculés par projection sur base sèche. Ces temps de calcul sont donnés pour le même maillage. Rappelons que le calcul de  $\mathbf{M}_a$  a un avantage certain vis-à-vis des autres approches dans la mesure où la méthode ne se limite pas à un nombre fixe de modes. Néanmoins, avec la capacité de mémoire disponible, il nous était impossible d'augmenter le nombre de degrés de liberté du fluide. Cette comparaison est donc faite pour le nombre de degrés de liberté maximum autorisé par le calcul complet de  $\mathbf{M}_a$ . Les autres approches ne sont pas concernées par ce problème de capacité mémoire pour la gamme de degrés de liberté étudiée ( $\sim 50000$  à  $\sim 200000$  ddl). De plus, l'approche par projection est parallélisable.

Tps. de calcul avec $\mathbf{M}_a$	$\sim 1$ h et 10 minutes
Tps. avec projection sur 150 modes (en série)	$\sim 30$ minutes
Tps. avec projection sur 150 modes (en parallèle sur 10 coeurs)	$\sim 3$ minutes
Tps. avec projection sur 400 modes (en série)	$\sim 1$ h et 20 minutes
Tps. avec projection sur 400 modes (en parallèle sur 10 coeurs)	$\sim 8$ minutes

TABLE 4.11 – Temps de calcul du problème traité dans l'exemple numérique avec  $n_{\text{elm-f}} = 10250$  et  $n_{\text{dof-f}} = 45696$ .

Dans un premier temps, nous observons que les temps de calculs ne sont pas du même ordre de grandeur. Nous parlons ici de quelques heures pour le calcul de la construction de  $\mathbf{M}_a$  ou la projection en série contre quelques minutes pour la projection avec parallélisation. Nous rappelons que le nombre de modes à une influence linéaire sur le temps de calcul. Néanmoins, pour le nombre de modes que nous nous sommes fixés (30), nous obtenons un facteur 10 de gain en temps de calculs.

Nous pouvons signaler que cette comparaison est faite dans une situation défavorable pour la projection. Des études [32] montrent que pour des structures complètement remplies (ou complètement immergés), le nombre de modes secs nécessaire avant convergence est très faible. Effectivement, la forme des modes secs est, dans ces cas-là, très proche de la forme des modes hydroélastiques. Nous verrons que cette remarque à un impact significatif sur les exemples proposés au chapitre suivant.

### 4.6 Conclusion

Dans le cadre de ce chapitre, nous nous sommes intéressés au calcul des fréquences et des modes hydroélastiques d'une structure élastique linéaire partiellement remplie de liquide. Une formulation symétrique condensée sur les degrés de liberté de la structure, faisant apparaître une matrice de masse ajoutée, a été implémentée. Au travers d'une comparaison entre les résultats de nos simulations et une expérience de littérature, nous montrons que nos calculs sont conformes validant ainsi notre implémentation numérique. Néanmoins, le temps de calcul est prohibitif (quelques heures) si nous souhaitons faire évoluer un paramètre tel que la hauteur de fluide. Nous avons alors proposé une approche par projection sur base de structure *in vacuo* limitée à un nombre de modes sur une fréquence d'intérêt. Cette méthode a l'avantage d'être parallélisable et ne nécessite pas une grande capacité de stockage contrairement à la construction d'une matrice de masse ajoutée du problème complet. A partir des résultats numériques de référence, nous avons montré la convergence de l'approche par projection. Les temps de calcul sont de l'ordre de quelques minutes ce qui nous permet d'effectuer des études paramétriques. Le chapitre suivant traite de la prise en compte d'une précontrainte sur le comportement hydroélastique.

#### 4.6. CONCLUSION

---

## Chapitre 5

# Vibrations hydroélastiques autour d'un état précontraint

Ce chapitre porte sur les vibrations hydroélastiques de réservoirs partiellement remplis de liquide autour d'états précontraints. Nous supposons que chaque état de précontrainte est connu (cf. **Chapitre 2**). A partir d'une linéarisation du principe des travaux virtuels autour d'un état d'équilibre avec non-linéarité géométrique, nous montrons que le problème couplé fluide-structure est de la même forme celui du **Chapitre 4**. La différence majeure vient du fait que l'opérateur de raideur prend en compte les non-linéarités matériaux, géométriques et de forces suiveuses. Une comparaison entre nos développements basés sur la méthode des éléments finis et une expérience de la littérature montre la validité d'une telle approche. Si la précontrainte joue un rôle significatif, nous sommes donc en mesure d'estimer rigoureusement son influence sur le comportement hydroélastique linéarisé.

### Contenu

---

5.1	Introduction et état de l'art . . . . .	184
5.2	Configurations du fluide et de la structure . . . . .	186
5.3	Problème hydroélastique autour d'un état précontraint . . . . .	190
5.4	Discrétisation éléments finis . . . . .	195
5.5	Validation de l'approche proposée : Expérience de Chiba . . . . .	200
5.6	Réservoir ellipsoïdal avec précontrainte . . . . .	213
5.7	Conclusion . . . . .	220

---



## 5.1 Introduction et état de l'art

Ce chapitre concerne l'estimation du comportement hydroélastique de structures élastiques autour d'un état précontraint via la MEF.

Nous rappelons que nous considérons des structures très fines et très flexibles (e.g. des réservoirs de lanceurs pressurisés). Dans ce cas, nous faisons l'hypothèse que les déplacements de la structure chargée par le fluide à l'équilibre sont grands vis-à-vis d'une longueur caractéristique (e.g. l'épaisseur du réservoir). La raideur globale de la structure est modifiée provoquant un décalage des fréquences hydroélastiques [100, 113, 114, 115]. Nous verrons que les approches classiques basées sur la configuration de référence ne peuvent pas capturer ces écarts [37, 116, 99, 62]. L'objectif de ce chapitre est donc d'estimer l'influence des non-linéarités géométriques sur le comportement dynamique couplé fluide-structure. Nous rappelons que le calcul de l'état d'équilibre non-linéaire a été abordé au Chapitre 2. Nous considérons ici que l'état d'équilibre non-linéaire est connu. Seul l'aspect dynamique linéarisé autour de l'état précontraint est développé sur dans chapitre (voir Fig. 5.5).

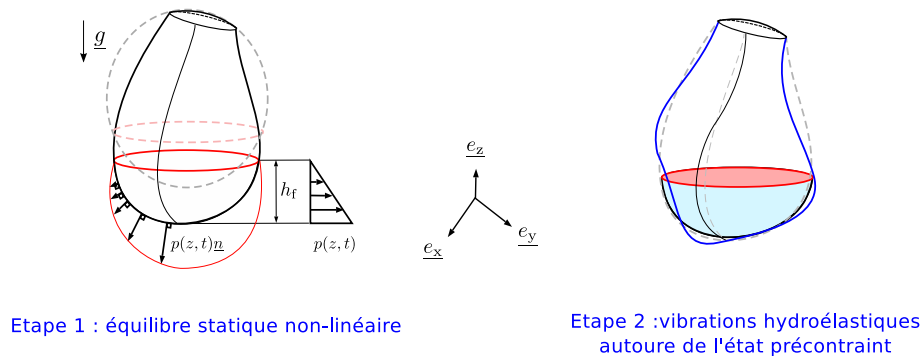


FIGURE 5.1 – (a) État d'équilibre statique non-linéaire connu soumis à un champ de pression hydrostatique; (b) Vibrations hydroélastiques autour d'un état précontraint

Une étude expérimentale mettant en évidence l'influence de la précontrainte a été effectuée dans [36]. Cette expérience consiste à calculer les vibrations hydroélastiques d'une plaque en plexiglas très fine circulaire encastrée à son bord, située en dessous d'une colonne d'eau. Les fréquences de résonance des premiers modes couplés ont ensuite été calculées pour différentes hauteurs de fluide. Pour de faibles hauteurs de fluides, les fréquences de résonance diminuent, due à l'effet de masse ajoutée, comme le

prédit les approches linéaires classiques. Néanmoins, contrairement à la théorie linéaire, pour des hauteurs de fluide de plus en plus grandes, les fréquences de résonance expérimentales augmentent (à l'exception du premier mode). Une approche semi-analytique, prenant en compte le couplage membrane flexion a été développé dans [117]. Même si cette approche permet d'obtenir des tendances similaires à l'expérience, aucune comparaison entre l'expérience et la solution du problème semi-analytique n'a été proposée. Une autre expérience récente [118] effectuée sur une plaque rectangulaire en contact a un liquide a été proposée dans [118].

L'une des originalités de ce chapitre consiste à proposer une méthode de calcul des vibrations hydroélastiques adaptée à des structures précontraintes en 3D. La méthode peut être utilisée sur des structures de formes complexes discrétisées par la méthode des éléments finis. De plus, nous proposons une validation de la méthode par une comparaison entre nos simulations et les résultats de l'expérience de Chiba [36].

Le contenu du chapitre est le suivant. En Section 5.2 nous rappelons les hypothèses sur le fluide et la solide. En Section 5.3, nous présentons la formulation en  $(\mathbf{u}_d, p)$  linéarisée autour d'un état précontraint. Cette formulation est utilisée pour une résolution par projection du problème IFS sur base sèche précontrainte, basée sur la démarche présentée au Chapitre 4. En Section 5.4, une discrétisation EF permet de mettre en évidence le système au valeur propre contenant la raideur tangente de la structure et la matrice de masse ajoutée. Cette raideur est la contribution des raideurs matériau, géométriques et de forces suiveuses. Cette matrice tangente contient les informations liées la précontraintes, alors que la matrice de masse ajoutée contient celles de l'énergie cinétique du fluide. Finalement aux Sections 5.5 et 5.6, nous proposons deux exemples numériques. Le premier valide notre approche par comparaison à l'expérience de Chiba et l'autre est un exemple original montrant la validité de l'approche sur des structures de plus en plus complexes.

## 5.2 Configurations du fluide et de la structure

### 5.2.1 Notations et définitions des configurations de la structure

Nous distinguons trois configurations de la structure au cours de notre modélisation : (i) la configuration de référence, (ii) la configuration courante statique non-linéaire et (iii) la configuration courante dynamique linéarisée autour de l'état précontraint.

**Configuration de référence :** La configuration de référence est définie par une structure occupant un domaine  $\Omega_s$  de  $\mathbb{R}^3$  quand celle-ci est libre de chargement externe (cette configuration est connue sans calcul préalable). Ce domaine est borné par une surface  $\partial\Omega_s = \partial_u\Omega_s \cup \partial_t\Omega_s$  avec  $\partial_u\Omega_s$  la surface avec déplacements imposés et  $\partial_t\Omega_s$  la surface avec chargements extérieurs imposés. Cette dernière surface correspond en pratique à l'image de la surface chargée et déformée issue de la configuration courante statique non-linéaire. Une attention particulière est portée sur le type de chargement extérieur. Nous appelons  $\Sigma_0$  la surface mouillée ramenée à la configuration de référence telle que  $\Sigma_0 \in \partial_t\Omega_s$ . Le reste de la surface  $\partial_t\Omega_s \setminus \Sigma_0$  correspond à l'union de surfaces (i) libres d'efforts, (ii) soumise par une charge morte surfacique ou (iii) une charge suiveuse uniforme extérieure (issue d'une pressurisation par exemple). Un point de ce domaine est défini par un vecteur position  $\mathbf{X} = X\mathbf{e}_x + Y\mathbf{e}_y + Z\mathbf{e}_z$ .

**Configuration courante statique non-linéaire :** A l'équilibre non-linéaire, la structure occupe un domaine  $\omega_s$  de  $\mathbb{R}^3$ . Au même titre que la surface de référence,  $\omega_s$  est borné par  $\partial\omega_s = \partial_u\omega_s \cup \partial_t\omega_s$ . La surface mouillée (ou interface fluide-structure) sera notée  $\Sigma$  en configuration courante. Un point de ce domaine est défini par le vecteur position courant à l'équilibre statique  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ , avec  $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$  et  $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$  le vecteur déplacement statique non-linéaire. **Le champ de déplacement statique non-linéaire  $\mathbf{u}$  est connu, mais il nécessite un ou plusieurs calculs statiques non-linéaires associés aux développements des Chapitres 2 et 3.**

**Configuration courante dynamique linéarisée autour de l'état précontraint :** Nous appelons  $\mathbf{x}_d$  la position de la structure lorsque celle-ci est soumise à une sollicitation harmonique  $\mathbf{f}$  de faible amplitude, autour de son état précontraint. La fluctuation de déplacement définie par  $\mathbf{u}_d = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$  étant supposée très faible, nous confondons la configuration courante statique non-linéaire  $\omega_d$  à la

configuration dynamique linéarisée autour de l'état précontraint  $\omega_t$ . Une représentation graphique de ces trois configurations est proposée en Fig. 5.2.

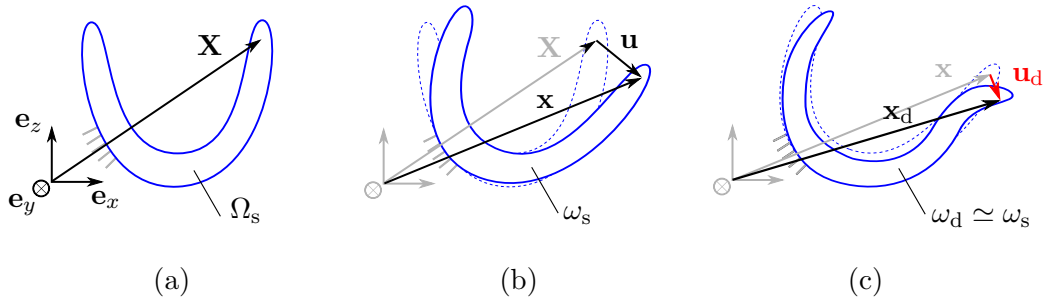


FIGURE 5.2 – Représentation graphique des configurations et des variables associées aux configurations de la structure (voire Tab. 5.1) : (a) Configuration de référence ; (b) Configuration courante statique non-linéaire ; (c) Configuration courante dynamique linéarisée autour de l'état précontraint.

TABLE 5.1 – Notations associées à la structure et ses configurations

Notations	Définitions
$\Omega_s$	Domaine occupé par la struct. en configuration de référence
$\omega_s$	Domaine occupé par la struct. en configuration courante statique non-linéaire
$\omega_d$	Domaine occupé par la struct. en configuration courante dynamique linéarisée
$\Sigma$	Interface fluide-structure en configuration courante statique
$\mathbf{X}$	Vecteur position en conf. de référence
$\mathbf{x}$	Vecteur position en conf. statique non-linéaire
$\mathbf{x}_d$	Vecteur position en conf. dynamique linéarisé
$\mathbf{u}$	Solution du problème statique non-linéaire
$\mathbf{u}_d$	Fluctuations de déplacement $\mathbf{u} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$
$\mathbf{u}_t$	Déplacement total $\mathbf{u}_t = \mathbf{u} + \mathbf{u}_d$

Notations des domaines et champs vectoriels

**Ce qu'il faut retenir :** La fluctuation de déplacement de la structure  $\mathbf{u}$  est l'inconnue du problème côté structure. La configuration courante dynamique linéarisée autour de l'état précontraint est confondue à la configuration courante de l'état statique non-linéaire  $\Omega_s$ .

## 5.2.2 Notations et définitions des configurations du fluide

Autour d'un état d'équilibre non-linéaire de la structure, nous considérons deux configurations distinctes associées au fluide interne : (i) une configuration du fluide à l'équilibre statique et (ii) une configuration dynamique linéarisée autour de l'équilibre.

**Configuration statique du fluide :** A chaque état non-linéaire géométrique de la structure, le fluide occupe un domaine  $\omega_f$  de  $\mathbb{R}^3$ . Ce domaine est borné par une surface  $\partial\omega_f = \Sigma \cup \Gamma$ , avec  $\Sigma$  l'interface fluide-structure associée au fluide en configuration courante et  $\Gamma$  la surface libre. Nous rappelons que cette dernière est supposée horizontale à l'équilibre car (i) la tension superficielle est négligée et (ii) le champ de gravité est supposé constant en intensité et en direction au voisinage de  $\Gamma$ . Cette configuration est supposée connue et dépend du calcul non-linéaire comme l'illustre l'exemple en Fig. 5.3. Dans cet exemple, une structure est chargée par une pression hydrostatique  $p_h$  dépendante de la hauteur de fluide  $h$  et de la position courante dans le fluide. Notons que le type de chargement extérieur induisant l'état d'équilibre de la structure peut être de nature variée (i.e. pressurisation d'un réservoir ou un déplacement imposé de la structure).

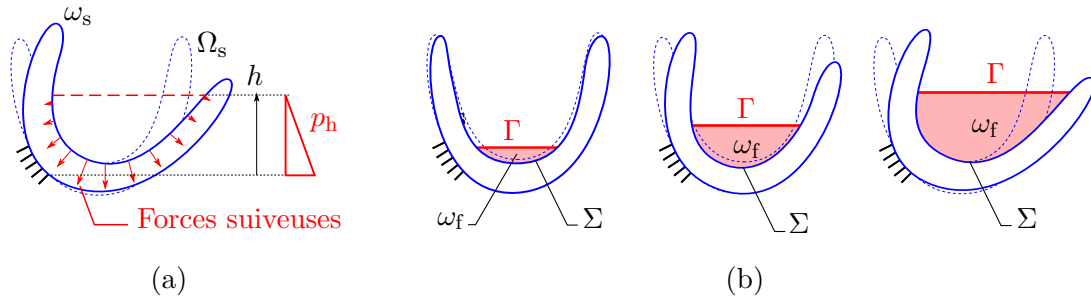


FIGURE 5.3 – (a) État d'équilibre statique non-linéaire d'une structure soumise à des forces suiveuses issues d'une pression hydrostatique  $p_s$  paramétrée par une hauteur de fluide  $h$  ( $\omega_s$  et  $\Omega_s$  sont respectivement les configurations courante et de référence de la structure); (b) Différentes configurations statiques du fluide à l'équilibre occupant le domaine  $\omega_f$  borné par la surface libre  $\Gamma$  et l'interface fluide-structure  $\Sigma$ .

**Remarques sur le maillage volumique du fluide :** Contrairement au calcul non-linéaire géométrique, il est nécessaire de générer un maillage volumique du fluide pour le calcul des vibrations hydroélastiques linéarisées autour de l'état précontraint. D'un point de vue de la mise en donnée numérique, nous supposons être en mesure de générer des maillages volumiques fluides et structures

compatibles pour chaque configuration courante statique non-linéaire. En effet, il s'agit d'un point dur (surtout avec l'utilisation d'éléments hexaédriques volumiques) qui sera développé plus tard.

**Configuration dynamique linéarisée du fluide :** Lors d'une sollicitation harmonique de très faible amplitude, le déplacement du fluide  $\mathbf{u}_f$  occuperait une nouvelle configuration. Cependant, cette configuration est supposée confondue à la configuration statique car (i) les déplacements fluides  $\mathbf{u}_f$  sont supposés très faibles et (ii) la fluctuation de pression de la surface libre est considérée nulle dans la plage de fréquence d'intérêt de l'étude ( $f > 10$  Hz). La fluctuation de déplacement fluide  $\mathbf{u}_f$  est reliée à la fluctuation de pression  $p$  au sein du fluide comme l'illustre la Fig 5.4. La pression totale au sein du fluide est donc la somme d'une pression hydrostatique et d'une fluctuation de pression  $p_t = p_h + p$ .

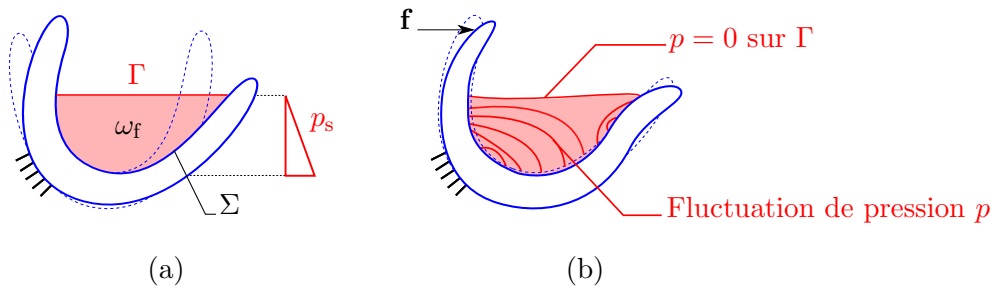


FIGURE 5.4 – (a) État d'équilibre statique ; (b) Fluctuations de pressions  $p$  au sein du fluide lors d'une sollicitation harmonique  $\mathbf{f}_s$  de faible amplitude.

TABLE 5.2 – Notations et définitions des configurations du fluide

Notations	Définitions
$\omega_f$	Domaine fluide
$\Gamma$	Surface libre
$\Sigma$	Interface fluide-structure
$\partial_u \omega_f$	Fluctuations de déplacement du fluide
$p_h$	Pression hydrostatique au sein du fluide à l'équilibre statique
$p$	Fluctuations de pression au sein du fluide autour de l'équilibre

**Remarques sur la pression de la surface libre :** Fixer la condition  $p = 0$  sur  $\Gamma$  n'implique en aucun cas que le déplacement de celle-ci soit nulle. Au contraire, cette dernière est libre de se déplacer (soit  $\mathbf{u}_f \neq 0$  sur  $\Gamma$ ). Notons que le déplacement de surface libre, dans cette étude, n'est pas liée aux effets de gravité (ou ballonnement) mais plutôt à l'incompressibilité du fluide.

### 5.3 Problème hydroélastique autour d'un état précontraint

Cette section est consacrée à la formulation variationnelle du problème hydroélastique linéarisé autour de l'état précontraint. La formulation consiste à rechercher la fluctuation de déplacement  $\mathbf{u}_d$  et la fluctuation de pression  $p$  sachant la solution de l'état quasi-statique notée  $\mathbf{u}$ . Les effets de gravité (ballotement) ne sont pas pris en compte sur la surface libre ( $p = 0$  sur  $\Gamma$ ).

#### 5.3.1 Petites perturbations dynamiques autour de l'état précontraint

Notre problème se décompose en deux étapes : (i) un problème quasi-statique traité au Chapitre 2 et (ii) un problème dynamique linéarisé autour de l'état précontraint (voir Figure 5.5).

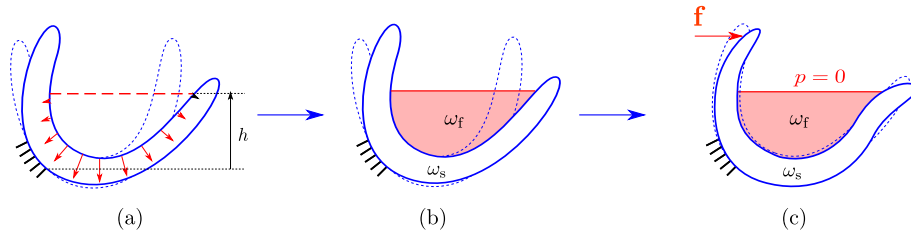


FIGURE 5.5 – (a) Équilibre statique précontraint connu ; (b) Domaine fluide associé à l'état précontraint ; (c) Vibrations hydroélastiques linéarisées.

##### 5.3.1.1 Principe des travaux virtuels (sans linéarisation)

Nous introduisons à nouveau un champ de déplacement virtuel  $\delta\mathbf{u} \in \mathcal{C}_u$  l'espace des fonctions cinématiquement admissibles suffisamment régulières (avec  $\delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$  sur  $\partial_u\Omega_s$ ). Le principe des travaux virtuels consiste à trouver  $\mathbf{u}_t(\mathbf{x}_t, t)$  vérifiant les conditions aux limites et conditions initiales, tel que :

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}_t) - \delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}_t) + \delta W_{\text{acc}}(\mathbf{u}_t) = 0, \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{C}_u \quad (5.1)$$

avec  $\delta W_{\text{int}}$ ,  $\delta W_{\text{ext}}$  et  $\delta W_{\text{acc}}$  qui sont respectivement le travail virtuel des efforts intérieurs, le travail virtuel des efforts extérieurs et le travail virtuel des quantités d'accélération définis par :

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}_t) = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} dV \quad (5.2)$$

$$\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}_t) = - \int_{\Sigma} p_t \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} ds + \int_{\partial_t\Omega_s} \mathbf{f}_t \cdot \delta\mathbf{u} ds \quad (5.3)$$

$$\delta W_{\text{acc}}(\mathbf{u}_t) = \int_{\omega_s} \rho_s \ddot{\mathbf{u}}_t \cdot \delta\mathbf{u} dv \quad (5.4)$$

A cette étape, le problème est non-linéaire et le champ de pression n'a pas encore été défini.

### 5.3.1.2 Rappel sur les notations associées à la linéarisation

Le déplacement "total"  $\mathbf{u}_t$  est la somme d'un déplacement quasi-statique  $\mathbf{u}$  et d'une fluctuation de déplacement  $\mathbf{u}_d$  :

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u} + \mathbf{u}_d \quad (5.5)$$

La fluctuation de déplacement  $\mathbf{u}_d$  est supposée très petite par rapport à une dimension caractéristique de la structure  $l_c$  (par exemple l'épaisseur du réservoir) tel que  $\|\mathbf{u}_d\| \ll l_c$ . A partir de ces hypothèses, nous reprenons la notation "Δ", introduite au Chapitre 2, pour faire référence à la linéarisation des fonctions ou des opérateurs par rapport à  $\mathbf{u}_d$ . Ainsi, l'expression des champs linéarisés  $\Delta\mathbf{E}$  et  $\Delta\delta\mathbf{E}$  sont écrits en fonction de  $\mathbf{u}_d$ ,  $\mathbf{u}$  et du champ de déplacement virtuel  $\delta\mathbf{u}$  de manière suivante :

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{Grad}\mathbf{u}_d + \mathbf{Grad}^T\mathbf{u}_d + \mathbf{Grad}^T\mathbf{u}_d\mathbf{Grad}\mathbf{u} + \mathbf{Grad}^T\mathbf{u}\mathbf{Grad}\mathbf{u}_d) \quad (5.6)$$

$$\Delta\delta\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{Grad}^T\delta\mathbf{u}\mathbf{Grad}\mathbf{u}_d + \mathbf{Grad}^T\mathbf{u}_d\mathbf{Grad}\delta\mathbf{u}) \quad (5.7)$$

Dans la suite, nous admettons les dépendances suivantes de façon implicite :  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{u})$ ,  $\Delta\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_d)$ ,  $\delta\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$  et  $\Delta\delta\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{u}_d, \mathbf{u})$

Rappelons que le tenseur des contraintes  $\mathbf{S}$  est relié à  $\mathbf{E}$  par la loi de comportement, donc  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{u})$ . De même, la variation  $\Delta\mathbf{S} = \Delta\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_d)$  car  $\Delta\mathbf{S} = \mathbb{D} : \Delta\mathbf{E}$ .

Ensuite, nous supposons que le champ de pression agissant sur l'interface fluide-structure est la somme d'un champ de pression hydrostatique  $p_h$  connu et d'une fluctuation de pression  $p$  telle que :

$$p_t = p_h + p \quad (5.8)$$

avec le champ de pression hydrostatique à l'équilibre qui s'écrit de façon suivante :

$$p_h = -\rho_f g(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z - h) \quad (5.9)$$

Enfin, rappelons que nous pouvons exprimer l'intégrale de la normale sur l'interface fluide-structure par :

$$\int_{\Sigma} \mathbf{n}(\mathbf{u} + \mathbf{u}_d) ds \simeq \int_{\Sigma} \mathbf{n}(\mathbf{u}) ds + \int_{\Sigma} \Delta\mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_d) ds \quad (5.10)$$



### 5.3. PROBLÈME HYDROÉLASTIQUE AUTOUR D'UN ÉTAT PRÉCONTRAIT

En supposant que la surface soit régulière, celle-ci peut être paramétrée par  $(\xi, \eta)$  définie sur une surface de référence  $S_{\text{ref}}$ . L'expression des intégrales ramenées sur la surface de référence s'écrit de façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \mathbf{n}(\mathbf{u}) ds &= \int_{S_{\text{ref}}} \left( \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{u})}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{u})}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \\ \int_{\Sigma} \Delta \mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_d) ds &= \int_{S_{\text{ref}}} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_d}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{u})}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathbf{u}_d}{\partial \eta} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{u})}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.11)$$

avec  $\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ . Ainsi, dans la suite de ce manuscrit, il sera admis les dépendances suivantes :  
 $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{u})$ ,  $\Delta \mathbf{n} = \Delta \mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_d)$

#### 5.3.1.3 Linéarisation autour de l'état précontraint

A partir des notations précédentes et de l'hypothèse de champ fluctuant de l'Eq. (5.5), nous pouvons ré-écrire le travail virtuel des efforts intérieurs comme suit :

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u} + \mathbf{u}_d) \simeq \delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}) + \int_{\Omega_0} \Delta \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV + \int_{\Omega_s} \mathbf{S} : \Delta \delta \mathbf{E} dV \quad (5.12)$$

avec les termes qui dépendent de  $\mathbf{u}_d$  notés :

$$\mathcal{K}_m(\mathbf{u}_d, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_s} \Delta \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV \quad (5.13)$$

$$\mathcal{K}_g(\mathbf{u}_d, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_s} \mathbf{S} : \Delta \delta \mathbf{E} dV \quad (5.14)$$

Les fonctions  $\mathcal{K}_g$  et  $\mathcal{K}_m$  sont des formes bilinéaires symétriques par rapport à  $\mathbf{u}_d$  et  $\delta \mathbf{u}$  et correspondent respectivement aux contributions des raideurs matériaux et géométriques de la structure.

L'expression du travail virtuel de l'accélération associée à l'Eq. (5.4) s'écrit de façon suivante :

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{acc}}(\mathbf{u}_d + \mathbf{u}) &= \int_{\omega_s} \rho_s (\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}}_d) \cdot \delta \mathbf{u} dv \\ &\simeq \underbrace{\int_{\omega_s} \rho_s \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} dv}_0 + \int_{\Omega_s} \rho_s \ddot{\mathbf{u}}_s \cdot \delta \mathbf{u} dv \\ &\simeq \int_{\omega_s} \rho_s \ddot{\mathbf{u}}_s \cdot \delta \mathbf{u} dv \end{aligned} \quad (5.15)$$

Nous faisons l'hypothèse que la partie fluctuante est en régime harmonique, ainsi son expression devient :

$$\delta W_{\text{acc}}(\mathbf{u}_d + \mathbf{u}) \simeq -\omega^2 \int_{\omega_s} \rho'_s \mathbf{u}_d \cdot \delta \mathbf{u} dv \quad (5.16)$$

### 5.3. PROBLÈME HYDROÉLASTIQUE AUTOUR D'UN ÉTAT PRÉCONTRAIN

Dans la suite, nous définissons l'opérateur  $\mathcal{M}$  tel que :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\mathbf{u}_d, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\omega_s} \rho_s \mathbf{u}_d \cdot \delta \mathbf{u} dv \\ &= \int_{\Omega_0} \rho_s \mathbf{u}_d \cdot \delta \mathbf{u} J dV\end{aligned}\quad (5.17)$$

avec  $\mathcal{M}$  correspondant à l'opérateur d'inertie associé à l'énergie cinétique de la structure et  $J = \det \mathbf{F}$  le jacobien de la transformation.

L'effort extérieur  $\mathbf{f}_t = \mathbf{f}$  est considéré harmonique et de faible amplitude. A partir des notations associées à la linéarisation, l'expression du travail des efforts extérieurs s'écrit de façon suivante :

$$\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u} + \mathbf{u}_d) \simeq - \int_{\Sigma} p_h \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} ds - \int_{\Sigma} p_h \Delta \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} ds - \int_{\Sigma} p \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} ds + \int_{\partial_t \omega_s} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} ds \quad (5.18)$$

Le travail des efforts extérieurs peut être séparé en deux types de sollicitations : (i) une sollicitation statique qui dépend de  $\mathbf{u}$  :

$$\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}) = - \int_{\Sigma} p_h \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} ds \quad (5.19)$$

et (ii) les termes qui dépendent des fluctuations  $\mathbf{u}_d$ ,  $p$  et  $\mathbf{f}$  séparés en trois contributions :

$$\mathcal{K}_f(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = - \int_{\Sigma} p_h \Delta \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} ds \quad (5.20)$$

$$\mathcal{C}(p, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Sigma} p \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} ds \quad (5.21)$$

$$\mathcal{F}(\delta \mathbf{u}) = \int_{\partial_t \omega_s} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} ds \quad (5.22)$$

avec  $\mathcal{K}_f$  correspondant à un opérateur de raideur des forces suiveuses sans la prise en compte de la gravité,  $\mathcal{C}$  correspondant à l'opérateur de couplage entre la fluctuation du champ de pression à l'interface et le déplacement de la structure et  $\mathcal{F}$  correspondant au travail des efforts extérieurs (qui n'est pas issu du champ de pression).

**Problème dynamique linéarisé avec précontrainte**

Les termes fluctuants qui interviennent dans le problème hydroélastique linéarisé autour de l'état précontraint est donné sous forme variationnelle par :

$$\mathcal{K}_{\text{tan}}(\mathbf{u}_d, \delta \mathbf{u}) - \omega^2 \mathcal{M}(\mathbf{u}_d, \delta \mathbf{u}) + \mathcal{C}(p, \delta \mathbf{u}) = \mathcal{F}(\delta \mathbf{u}), \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{C}_u \quad (5.23)$$

avec

$$\mathcal{K}_{\text{tan}} = \mathcal{K}_m + \mathcal{K}_g - \mathcal{K}_f \quad (5.24)$$

Cette équation du côté structure sera utilisée dans la suite pour la formulation du problème hydroélastique. A ce stade, il nous reste à formuler le problème du côté du fluide.

**Problème quasi-statique résolu au Chapitre 2**

La partie quasi-statique du principe des travaux virtuel s'écrit sous la forme suivante :

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}) + \int_{\Sigma} p_h \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} ds = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{C}_u \quad (5.25)$$

**5.3.2 Rappels : formulation variationnelle en  $p$  côté fluide**

A partir des développements effectués au Chapitre 3, nous rappelons que la formulation variationnelle côté fluide s'écrit de façon suivante :

$$\mathcal{H}(p, \delta p) + \omega^2 \rho_f \mathcal{C}(\delta p, \mathbf{u}_d) = 0, \quad \forall \delta p \in \mathcal{C}_p \quad (5.26)$$

avec

$$\mathcal{H}(p, \delta p) = \int_{\Omega_f} \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{grad} \delta p dv \quad (5.27)$$

$$\mathcal{C}(\delta p, \mathbf{u}_d) = \int_{\Sigma} \mathbf{u}_d \cdot \mathbf{n} \delta p ds \quad (5.28)$$

avec  $\mathcal{H}$  un opérateur qui correspond à la contribution de l'énergie cinétique du fluide due à son incompressibilité et  $\mathcal{C}$ , l'opérateur de couplage entre le fluide et la structure.

### 5.3.3 Formulation variationnelle du problème couplé hydroélastique linéarisé

Le problème hydroélastique linéarisé autour de l'état précontraint consiste à trouver la fluctuation de déplacement  $\mathbf{u}_d$  et la fluctuation du champ de pression  $p$ , sachant la solution quasi-statique  $\mathbf{u}$  qui vérifie les relations suivantes :

$$\mathcal{K}_{\text{tan}}(\mathbf{u}_d, \delta \mathbf{u}) - \omega^2 \mathcal{M}(\mathbf{u}_d, \delta \mathbf{u}) + \mathcal{C}(p, \delta \mathbf{u}) = \mathcal{F}(\delta \mathbf{u}), \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{C}_u \quad (5.29)$$

$$\mathcal{H}(p, \delta p) + \omega^2 \rho_f \mathcal{C}(\mathbf{u}_d, \delta p) = 0 \quad \forall \delta p \in \mathcal{C}_p \quad (5.30)$$

avec  $\mathcal{K}_{\text{tan}} = \mathcal{K}_g + \mathcal{K}_m - \mathcal{K}_f$ . Dans la suite nous nous baserons sur la formulation symétrique avec matrice de masse ajoutée définie au Chapitre 4.

## 5.4 Discrétisation éléments finis

Dans cette Section, nous supposons que la structure et le fluide sont discrétisés par des éléments finis hexaédriques comme l'illustre la Figure 5.10. Nous supposons que le maillage de la structure et celui du fluide sont coïncidents. Néanmoins, cette dernière condition nécessite un travail sur le maillage qui est à l'origine de manipulations numériques supplémentaires.

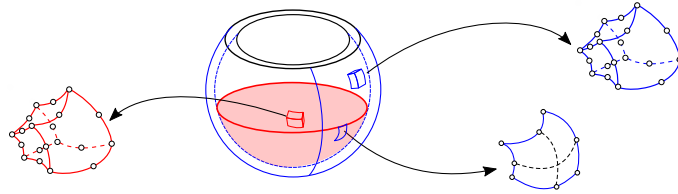


FIGURE 5.6 – Maillage coïncident du fluide et de la structure avec des éléments hexaédriques quadratiques.

Pour chaque configuration de la structure précontrainte, un maillage du fluide coïncident à celui de la structure doit être généré. Dans notre cas, la procédure de remaillage, illustrée en Fig. 5.7, s'effectue en trois étapes :

- 1 Génération d'un maillage coïncident fluide-structure (le maillage de la structure est fait en configuration de référence).

- 2 Si le maillage de la structure est différent (nombre de mailles, types d'éléments, positions des nœuds) de celui du problème non-linéaire quasi-statique, il est nécessaire de projeter la solution statique sur le nouveau maillage. L'algorithme de projection de solution EF entre différents maillages est donné en Annexe E ;
  
- 3 Afin d'obtenir une position courante du fluide, nous résolvons un problème à déplacement imposé sur le maillage fluide.

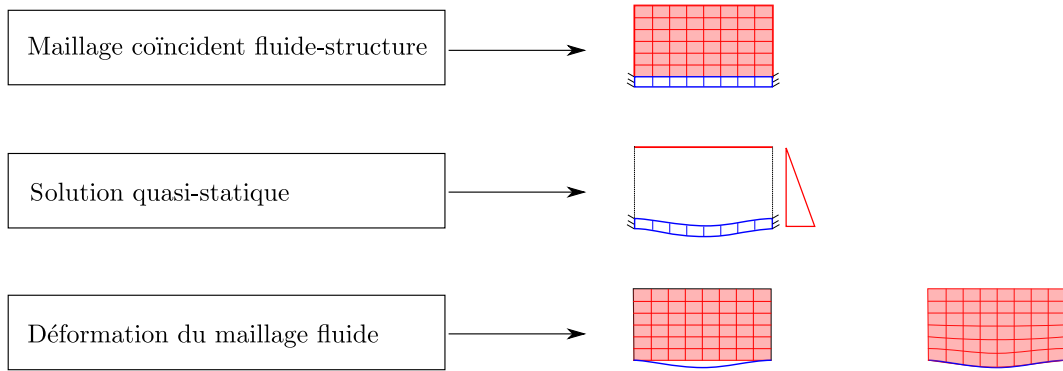


FIGURE 5.7 – Procédure de remaillage du domaine fluide coïncident avec le maillage de la structure en configuration courante.

Après la création des maillages fluide-structure associés à chaque configuration précontrainte, nous sommes en mesure de construire les opérateurs  $\mathbf{K}_{\text{tan}} = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_f$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{F}$  (voir Tab. 5.3).

#### 5.4. DISCRÉTISATION ÉLÉMENTS FINIS

Forme	Discrétisation	Matrice
$\mathcal{K}_m(\mathbf{u}_d^h, \delta \mathbf{u}^h) \implies$	$\delta \mathbf{U}^T \int_{\Omega_s^h} [\mathbf{B} + \mathbf{B}_{NL}]^T \mathbf{D} [\mathbf{B} + \mathbf{B}_{NL}] dV \mathbf{U}_d$	$\implies \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_m \mathbf{U}_d$
$\mathcal{K}_g(\mathbf{u}_d^h, \delta \mathbf{u}^h) \implies$	$\delta \mathbf{U}^T \int_{\Omega_s^h} \mathbf{G}_{NL}^T \mathbf{S}_{NL} \mathbf{G}_{NL} dV \mathbf{U}_d$	$\implies \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_g \mathbf{U}_d$
$\mathcal{K}_f(\mathbf{u}_d^h, \delta \mathbf{u}^h) \implies$	$\delta \mathbf{U}^T \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0^h} (\mathbf{N}^T \boldsymbol{\Omega}_\eta \mathbf{N}_{,\xi} - \mathbf{N}_{,\xi}^T \boldsymbol{\Omega}_\eta \mathbf{N})$ $+ (\mathbf{N}_{,\eta}^T \boldsymbol{\Omega}_\xi \mathbf{N} - \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Omega}_\xi \mathbf{N}_{,\eta}) dS \mathbf{U}_d$	$\implies \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_f \mathbf{U}_d$
$\mathcal{M}(\mathbf{u}_d^h, \delta \mathbf{u}^h) \implies$	$\delta \mathbf{U}^T \int_{\Omega_s^h} \rho_s \mathbf{N}^T \mathbf{N} J dV \mathbf{U}_d$	$\implies \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_d$
$\mathcal{C}(\mathbf{p}^h, \delta \mathbf{u}^h) \implies$	$\delta \mathbf{U}^T \int_{\Sigma^h} \mathbf{N}_s^T \mathbf{n} \mathbf{N}_f ds \mathbf{P}$	$\implies \delta \mathbf{U}^T \mathbf{C} \mathbf{P}$
$\mathcal{F}(\delta \mathbf{u}^h) \implies$	$\delta \mathbf{U}^T \int_{\partial_u \Omega_s^h} \mathbf{N}_s^T \mathbf{f} dS$	$\implies \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}$
$\mathcal{H}(p^h, \delta p^h) \implies$	$\delta \mathbf{P}^T \int_{\omega_f^h} \mathbf{B}_p^T \mathbf{B}_p dv \mathbf{P}$	$\implies \delta \mathbf{P}^T \mathbf{H} \mathbf{P}$
$\mathcal{C}(\mathbf{u}_d^h, \delta \mathbf{p}^h) \implies$	$\delta \mathbf{P}^T \int_{\Sigma^h} \mathbf{N}_f^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}_s ds \mathbf{U}_d$	$\implies \delta \mathbf{P}^T \mathbf{C}^T \mathbf{U}_d$

TABLE 5.3 – Définitions des opérateurs dans les domaines discrétisés (les opérateurs  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}_{NL}$ ,  $\mathbf{G}_{NL}$ ,  $\mathbf{S}_{NL}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}_\eta$  et  $\boldsymbol{\Omega}_\xi$  sont tous définis au Chapitre 2.)

### 5.4.1 Formulation du problème précontraint avec matrice de masse ajoutée

#### Prise en compte de la précontrainte et de la masse ajoutée

Le problème aux valeurs propres hydroélastique symétrique avec masse ajoutée et prise en compte de la précontrainte est donné ci-dessous :

$$\left[ \mathbf{K}_{\text{tan}} - \omega^2 (\mathbf{M} + \mathbf{M}_a) \right] \mathbf{U}_s = \mathbf{0} \quad (5.31)$$

avec

$$\mathbf{M}_a = \rho_f \mathbf{C}_* \mathbf{H}_*^{-1} \mathbf{C}_*^T \quad (5.32)$$

Sous cette forme, les contributions de la **précontrainte** et de **l'effet de masse ajoutée** apparaissent explicitement au travers de la matrice tangente  $\mathbf{K}_{\text{tan}}$  et de la matrice de masse ajoutée  $\mathbf{M}_a$ .

#### Projection sur base de structure *in vacuo* précontrainte

Nous rappelons que le calcul du problème hydroélastique s'effectue par projection sur base *in vacuo* (cf. Chapitre 4). La particularité consiste à prendre la matrice tangente comme matrice de raideur telle que :

$$\left[ \mathbf{K}_{\text{tan}} - \omega^2 \mathbf{M} \right] \mathbf{u}_d = \mathbf{0} \quad (5.33)$$

La projection du problème IFS, basé sur la contribution des pressions induites conduit à la résolution d'un problème réduit de la forme suivante :

$$\left[ \mathbf{\Omega}_{\text{tan}} - \omega^2 (\mathbf{I} + \mathbf{m}_a) \right] \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \quad (5.34)$$

avec  $\mathbf{\Omega}_{\text{tan}}$  une matrice diagonale composée du carré des pulsations propres et problème de vibration de la structure *in vacuo* avec la prise en compte de la précontrainte et  $\mathbf{m}_a$  la matrice de masse ajoutée réduite.

### 5.4.2 Rappels : effet de masse ajoutée sans précontrainte

Dans un premier temps, afin de n'étudier que l'effet de la masse ajoutée, nous considérons la raideur de la structure  $\mathbf{K}$  sans prise en compte de non-linéarités géométriques (voir Figure 5.8) tel que le problème aux valeurs propres à résoudre s'écrit :

$$\left[ \mathbf{K} - \omega^2 (\mathbf{M} + \mathbf{M}_a) \right] \mathbf{U}_d = \mathbf{0} \quad (5.35)$$

Rappelons que cette approche est résolue par projection sur base de la structure *in vacuo* menant à la résolution d'un système aux valeurs propres réduit (cf. chapitre 4) :

$$\left[ \mathbf{\Omega} - \omega^2 (\mathbf{I} + \mathbf{m}_a) \right] \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \quad (5.36)$$

Notons que l'effet attendu est connu et prouvé [37], dans la mesure où la présence du fluide mène à une décroissance des fréquences de résonances du problème hydroélastique (prise en compte de l'énergie cinétique du fluide déplacé).

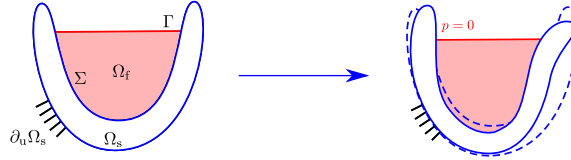


FIGURE 5.8 – Vibrations hydroélastiques sans précontrainte

### 5.4.3 Effets de la précontrainte sur les fréquences propres

Pour étudier l'effet de la précontrainte sur le comportement de la structure (sans fluide), nous proposons de résoudre le problème aux valeurs propres sans l'effet de masse ajoutée :

$$\left[ \mathbf{K}_{\text{tan}} - \omega^2 \mathbf{M} \right] \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (5.37)$$

Ce problème n'a pas de sens physique dans la mesure où nous ne prenons pas en compte l'effet de l'inertie du fluide qui est à l'origine de la précontrainte. Néanmoins, l'objectif est (i) d'interpréter son effet sur la raideur du problème, indépendamment de son inertie (voir Fig. 5.9) et (ii) générer une base de modes *in vacuo* pour la projection.



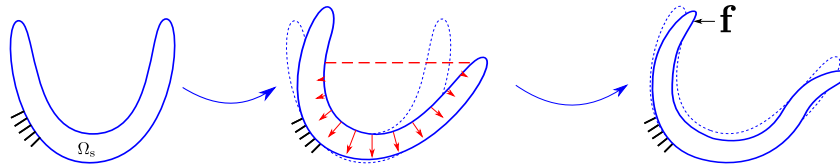


FIGURE 5.9 – Vibrations de la structure *in vacuo* avec précontrainte

Contrairement à l'effet de la masse ajoutée, nous ne sommes pas en mesure, de prévoir *a priori* l'influence de la précontrainte sur les fréquences de résonance de la structure. La présence d'une raideur géométrique ne garantit pas la positivité de l'opérateur tangent  $\mathbf{K}_{\text{tan}}$  (ce qui est le cas pour les problèmes instables). Cette analyse est donc judicieuse pour prévoir l'effet de la précontrainte avant l'analyse du problème couplé.

## 5.5 Validation de l'approche proposée : Expérience de Chiba

Le premier exemple consiste à étudier l'évolution des fréquences propres et des modes propres du problème couplé hydroélastique avec précontrainte, en fonction de la hauteur de fluide. La structure étudiée est un réservoir cylindrique rigide circulaire à fond très souple (voir 5.10). Le matériau est un plexiglas de module d'Young  $E = 6.9 \times 10^9$ , de module de Poisson  $\nu = 0.38$  et de masse volumique  $\rho_s = 1.4 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ . L'exemple proposé a pour objectif de retrouver par le calcul les fréquences observées sur les expériences de Chiba.

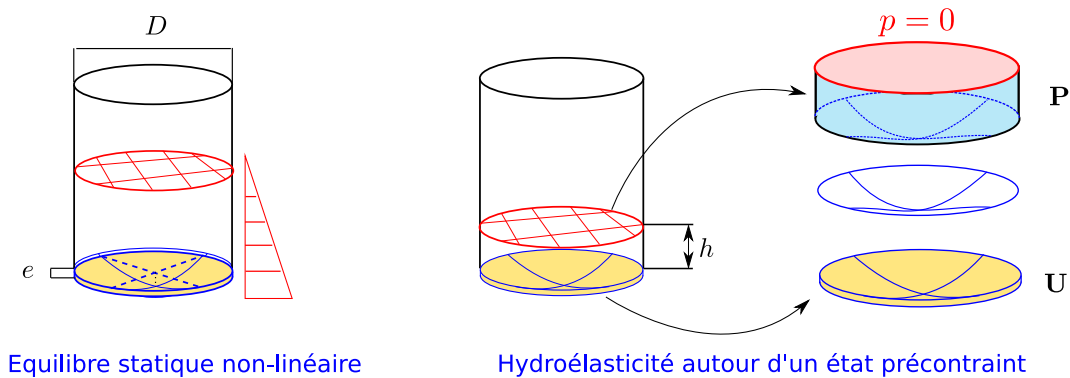


FIGURE 5.10 – (a) Modélisation de la précontrainte due à l'action de la pression hydrostatique du fluide sur la structure, (b) Formulation hydroélastique en  $(\mathbf{U}_d, \mathbf{P})$

L'analyse se décompose en quatre étapes :

- **Étape 1** : Calcul de l'équilibre statique non-linéaire
- **Étape 2** : Vibrations de la structure précontrainte *in vacuo*
- **Étape 3** : Vibrations hydroélastiques sans précontrainte
- **Étape 4** : Vibrations hydroélastiques avec précontrainte

### 5.5.1 Exemple 1 : Vibrations hydroélastiques d'une plaque circulaire

#### 5.5.1.1 Étape 1 : Calcul de l'équilibre quasi-statique

Dans un premier temps, nous souhaitons trouver les paramètres du maillage qui minimisent l'influence de la discrétisation EF sur la solution quasi-statique. La paramétrisation du maillage est proposée en Fig. 5.11.

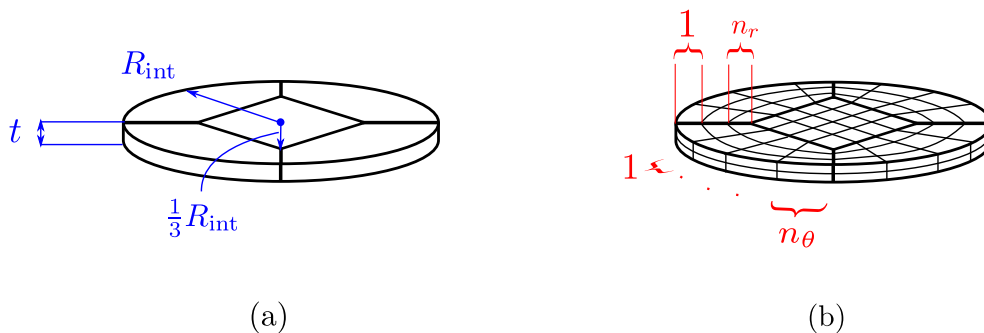


FIGURE 5.11 – (a) Géométrie de la plaque circulaire utilisée pour générer le maillage avec  $t = 0.35$  mm et  $R_{\text{int}} = 144$  mm ; (b) Paramètres du maillage avec  $n_\theta$  le nombre de mailles sur le quart de la circonférence et  $n_r$  le nombre d'éléments sur la ligne définie sur la figure. Le nombre d'éléments dans l'épaisseur est fixé à 2.

La quantité d'intérêt observée pour la convergence de la solution est le déplacement vertical au centre de la structure  $q$  pour une hauteur de fluide de  $h = 250$  mm. Nous notons  $q_{ref}$  la solution définie pour un nombre de mailles arbitraire élevé. Ensuite, plusieurs simulations ont été effectuées pour tracer  $q$  en fonction du nombre de degrés de liberté. En Tab. 5.4 nous donnons le nombre de mailles, le nombre de degrés de liberté et la valeur de  $q$  en fonction d'un jeu de paramètres  $(n_\theta, n_r)$  donné.

## 5.5. VALIDATION DE L'APPROCHE PROPOSÉE : EXPÉRIENCE DE CHIBA

$(n_\theta, n_r)$	(2, 2)	(5, 5)	(10, 10)	(20, 20)	(50, 50)
$n_{\text{elem}}$	40	250	1000	4000	25000
$n_{\text{dof}}$	771	4380	16995	66965	264009
$q$ en [mm]	-3.12	-3.74	-3.84	-3.86	$q_{\text{ref}} = -3.87$

TABLE 5.4 – Nombre d'éléments  $n_{\text{elem}}$ , nombre de degré de liberté  $n_{\text{dof}}$  et quantité d'intérêt  $q$  (déplacement vertical du centre de la plaque à  $h = 150$  mm en fonction de différents jeux de paramètres du maillage).

Nous traçons en Fig. 5.12, l'évolution de la quantité d'intérêt normée par la solution de référence  $q/q_{\text{ref}}$  en fonction du nombre de degrés de liberté sur une échelle log-log. Ainsi, pour un jeu de paramètres du maillage ( $n_\theta = 10, n_r = 10$ ), l'erreur est inférieure à 1 % d'erreur par rapport à notre référence. C'est ce maillage que nous sélectionnons pour la suite de cet exemple.

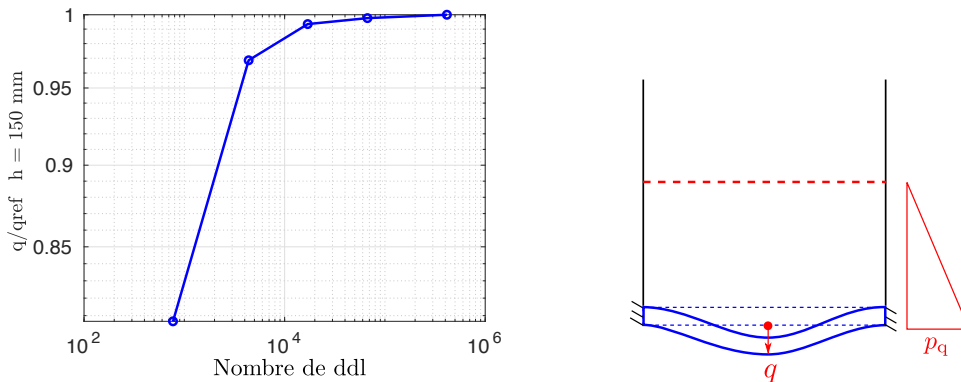


FIGURE 5.12 – Évolution de la quantité d'intérêt  $q$  pour hauteur de fluide  $h = 250$  mm en fonction du nombre de degrés de liberté.

Pour le maillage considéré, nous traçons l'évolution de déplacement vertical  $q_z$  normé par l'épaisseur de la structure  $t$  en fonction de la hauteur de fluide (voir Fig. 5.13). La solution est non-linéaire dans la mesure où le déplacement est d'un ordre de grandeur 10 fois supérieur à l'épaisseur.

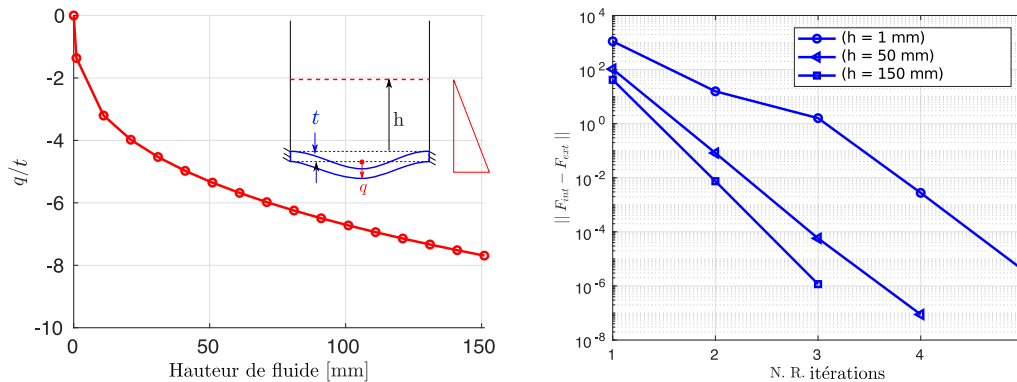


FIGURE 5.13 – (a) Évolution du déplacement vertical normée par l'épaisseur  $t = 0.35$  mm au centre de la plaque, en fonction de la hauteur de fluide; (b) Évolution du résidu d'équilibre de l'algorithme de Newton-Raphson en fonction du nombre d'itérations pour trois hauteurs de fluide  $h = 1$  mm,  $h = 50$  mm et  $h = 150$  mm.

### 5.5.1.2 Étape 2 : Calcul des vibrations de la structure précontrainte *in vacuo*

Nous nous intéressons ici au calcul des fréquences propres et des modes propres de la structure précontrainte *in vacuo*. A cette étape, nous avons déjà à notre disposition les matrices tangentes pour chaque état d'équilibre associé à une hauteur de fluide. Le seul calcul supplémentaire à effectuer est la construction de la matrice de masse  $\mathbf{M}$ . Les six premières déformées modales de la structure sans précontrainte sont données en Fig. 5.14. Ces formes peuvent être caractérisées par deux nombres  $(n, m)$  qui sont respectivement le nombre de longueurs d'ondes circonférentielles et radiales de la structure. Des symboles associés à ces déformées modales  $y$  sont représentés. Notons que la symétrie cylindrique de la structure implique l'apparition de modes par paire.

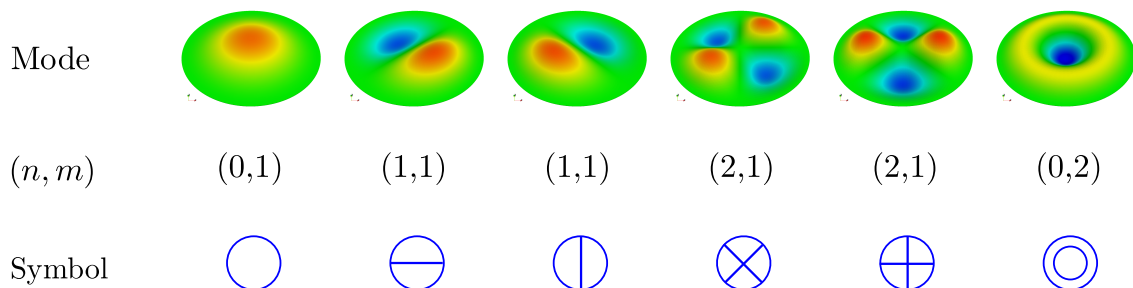


FIGURE 5.14 – Caractérisation des déformées modales par le nombre de longueurs d'ondes radiales et circonférentielles  $(n, m)$ .

Les déformées modales obtenues autour d'un état précontraint sont données en Fig. 5.15 et

## 5.5. VALIDATION DE L'APPROCHE PROPOSÉE : EXPÉRIENCE DE CHIBA

montrent que les modes peuvent être aussi caractérisés par les nombres  $(n, m)$ .

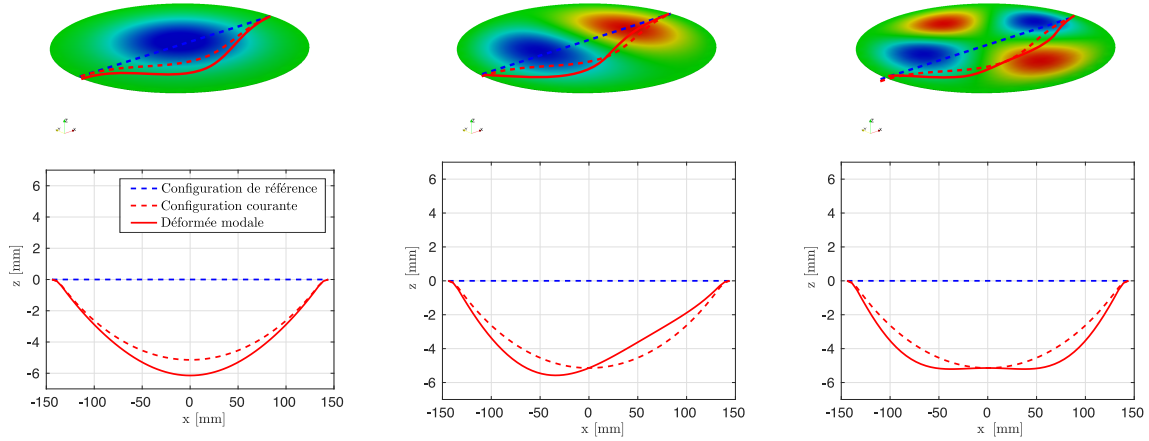


FIGURE 5.15 – Déformées modales de la structure autour de l'état précontrainte pour  $h = 250$  mm

En Fig. 5.16, nous traçons l'évolution des fréquences propres associées aux déformées modales  $(n, m)$  en fonction de la hauteur de fluide. Les valeurs des fréquences des six premiers modes sont données en Tab. 5.5. Nous pouvons observer que pour tous les modes, les fréquences qui y sont associées augmentent en fonction de la hauteur de fluide.

Mode	$(n, m)$	$(h)$ 0 mm	20 mm	50 mm	100 mm	150 mm
1	(0, 1)	17.5 Hz	128.0 Hz	209.8 Hz	227.7 Hz	263.2 Hz
2,3	(1, 1)	36.6 Hz	144.9 Hz	235.5 Hz	255.5 Hz	295.1 Hz
4,5	(2, 1)	60.2 Hz	180.6 Hz	292.3 Hz	317.0 Hz	366.1 Hz
6	(0, 2)	68.5 Hz	201.7 Hz	324.2 Hz	351.6 Hz	406.0 Hz

TABLE 5.5 – Évolution des six premières fréquences propres hydroélastiques avec précontrainte en fonction de la hauteur de fluide.

Ces résultats nous montrent que pour cet exemple, la précontrainte a tendance à augmenter la raideur globale de la structure.

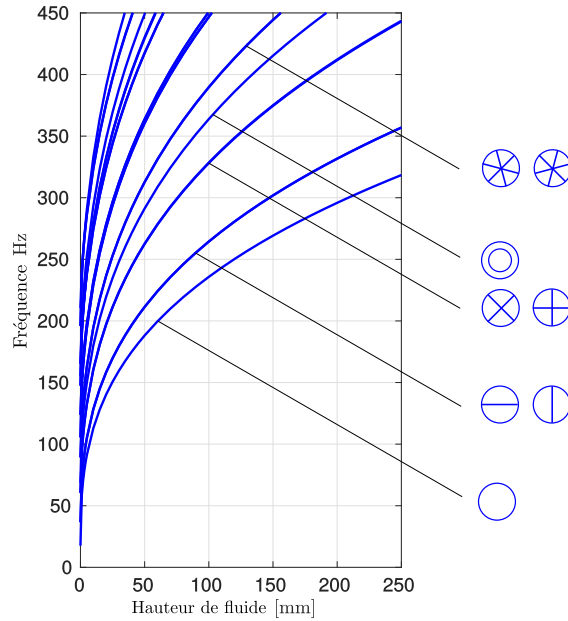


FIGURE 5.16 – Évolution des fréquences de résonance en fonction de la hauteur de fluide avec  $\mathbf{K}_{\text{tan}} = \mathbf{K}_{\text{mat}} + \mathbf{K}_{\text{geo}} - \mathbf{K}_{\text{fol}}$

### 5.5.1.3 Étape 3 : Vibrations hydroélastiques sans précontrainte

L'objectif de cette étape est de calculer les vibrations hydroélastiques du système couplé fluide-structure, sans l'effet de la précontrainte (le déplacement issu du calcul n'est pas pris en compte  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ). La matrice de raideur  $\mathbf{K}_{\text{lin}}$  sera donc utilisée pour cet exemple. La Fig. 5.17 illustre le problème que nous souhaitons traiter.

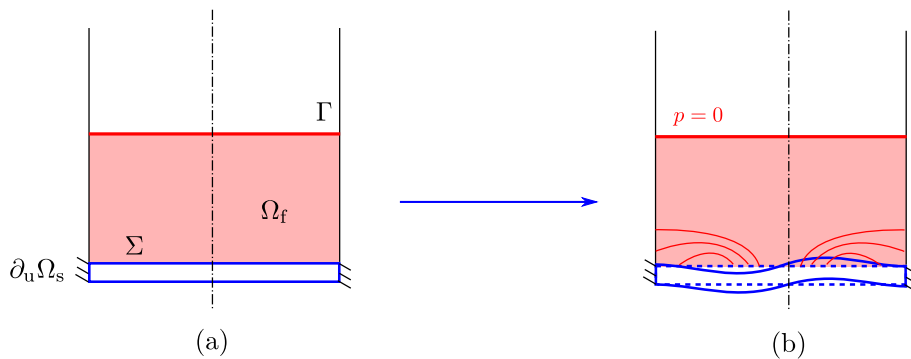


FIGURE 5.17 – (a) Géométrie du fluide et de la structure en configuration de référence ; (b) Vibrations hydroélastiques sans précontrainte.

## 5.5. VALIDATION DE L'APPROCHE PROPOSÉE : EXPÉRIENCE DE CHIBA

Le domaine fluide et le domaine solide sont tous les deux discrétisés avec des éléments finis hexaédriques (voir Fig. 5.18). Le maillage est coïncident à l'interface fluide-structure.

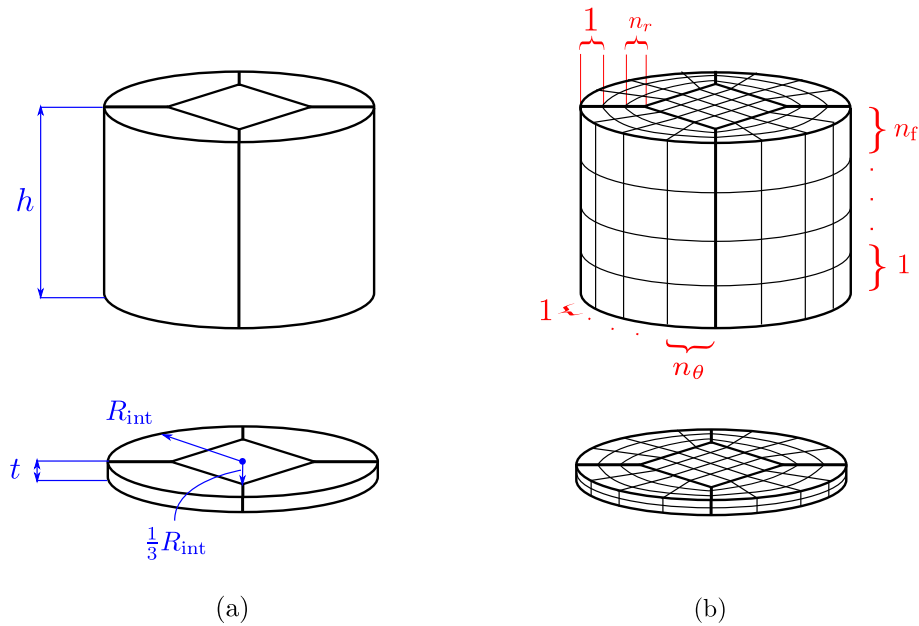


FIGURE 5.18 – (a) Paramètres de la géométrie du fluide et de la structure avec l'épaisseur  $t = 0.35$  mm, le rayon interne  $R_{\text{int}} = 0.144$  mm et la hauteur de fluide  $h$ ; (b) Paramètres du maillage définis par  $n_\theta$ ,  $n_r$  et  $n_h$  correspondant aux nombres d'éléments des lignes qui y sont associées.

Dans la suite  $n_\theta = 10$ ,  $n_r = 10$  et  $n_h = 10$ . Nous traçons l'évolution des fréquences propres en fonction de la hauteur de fluide en Figure 5.19. Les valeurs numériques associées aux six premières fréquences propres hydroélastiques sont données Tab. 5.6.

Mode	$(n, m)$	$(h)$ 0 mm	20 mm	50 mm	100 mm	150 mm
1	(0, 1)	17.5 Hz	4.65 Hz	3.18 Hz	2.46 Hz	2.09 Hz
2,3	(1, 1)	36.6 Hz	9.96 Hz	7.32 Hz	6.36 Hz	6.11 Hz
4,5	(2, 1)	60.2 Hz	16.9 Hz	13.3 Hz	12.4 Hz	12.3 Hz
6	(0, 2)	68.5 Hz	19.4 Hz	15.3 Hz	13.98 Hz	13.6 Hz

TABLE 5.6 – Évolution des six premières fréquences propres hydroélastiques en fonction de la hauteur de fluide.

L'effet de masse ajoutée est mis en évidence par la décroissance de toutes les fréquences de résonance lorsque la hauteur de fluide augmente. De façon qualitative, cette décroissance est particulièrement

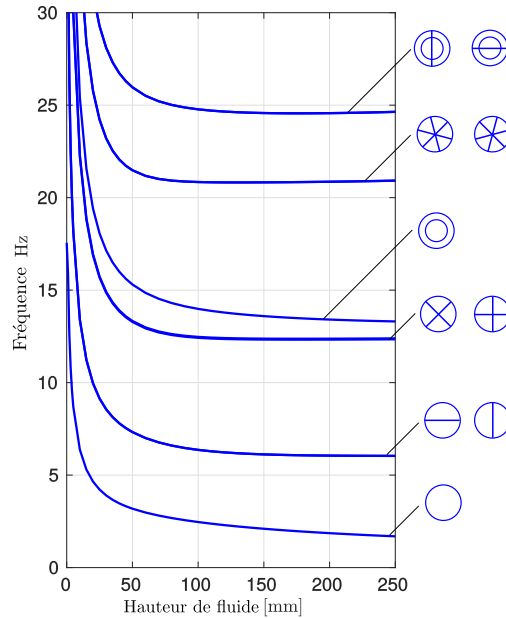


FIGURE 5.19 – Évolution des six premières fréquences propres hydroélastiques en fonction de la hauteur de fluide sans précontrainte.

importante pour une hauteur de fluide proche de l'intervalle  $h = [0, 20]$  mm. Notons que pour la plupart des modes, la fréquence converge vers une valeur qui ne varie plus en fonction de la hauteur de fluide. Cela peut s'expliquer car l'effet de masse ajoutée est dû à l'énergie cinétique du fluide déplacé. Si nous visualisons le champ de pression des modes hydroélastiques pour différentes hauteurs de fluide, nous constatons que la variation de pression reste localisée proche de l'interface fluide-structure (voire Figs. 5.35 et 5.20). Ce qui signifie que pour une certaine hauteur de fluide, la quantité de fluide déplacé ne varie plus.

- L'évolution des fréquences de résonance de cette étape n'est pas en accord avec l'expérience de Chiba. Ce point est approfondi à l'étape 4.
- Le temps de calcul nécessaire pour un calcul des premiers modes hydroélastiques par projection sur modes de structure *in vacuo* est de 20 secondes (en considérant 30 modes avec parallélisation sur 10 coeurs). Pour 35 hauteurs de fluide, le temps de calcul est de 11 minutes. Sans parallélisation, ce temps de calcul est 10 fois plus long soit un ordre de grandeur de  $\sim 2$  heures. Le même calcul effectué sur le problème prenant en compte la construction complète de  $\mathbf{M}_a$  nécessite  $3h$  pour une hauteur de fluide. Soit un temps de calcul total qui peut-être estimé à 3



## 5.5. VALIDATION DE L'APPROCHE PROPOSÉE : EXPÉRIENCE DE CHIBA

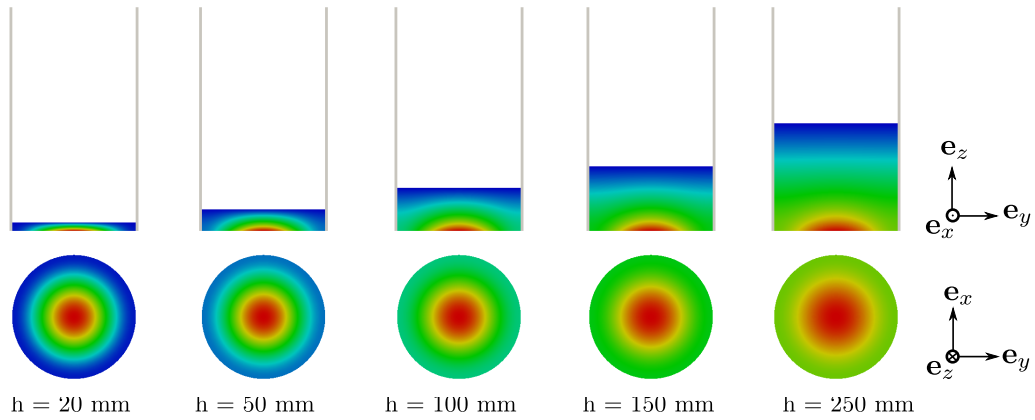


FIGURE 5.20 – Visualisation du champ de pression du premier mode hydroélastique pour différentes hauteurs de fluide ( $p = 0$  en bleu et  $p = 1$  en rouge).

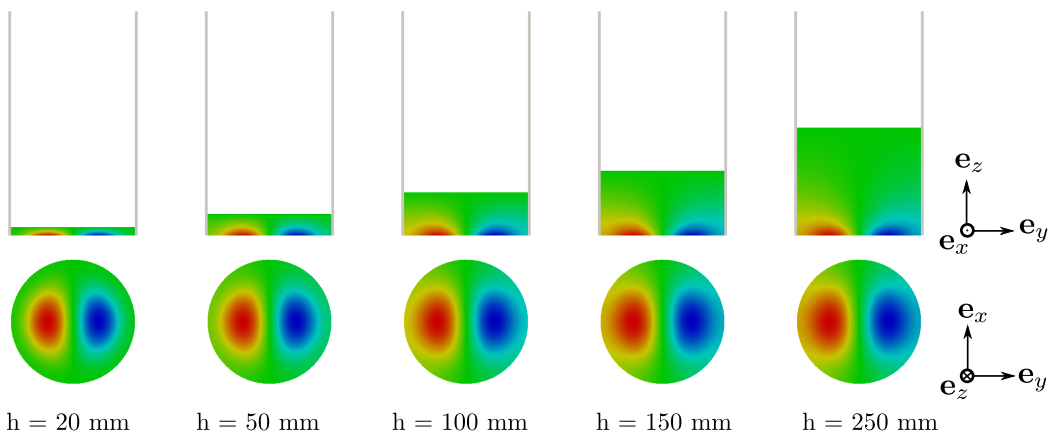


FIGURE 5.21 – Visualisation du champ de pression du second mode hydroélastique pour différentes hauteurs de fluide ( $p = -1$  en bleu et  $p = 1$  en rouge).

jours.

- Étant donné que la partie élastique de la structure est complètement immergée, peu de modes de structures sont nécessaire pour reconstruire les premiers modes hydroélastiques.

5.5.1.4 Étape 4 : Vibrations hydroélastiques avec précontrainte

Cette étape prend en compte à la fois l'effet de la précontrainte et l'effet de masse ajoutée. Pour chaque hauteur de fluide, nous calculons les fréquences propres et les valeurs propres du problème Eq. (5.33). Nous traçons l'évolution des fréquences propres en fonction de la hauteur de fluide en Fig. 5.22. Les valeurs des fréquences propres associées aux six premiers modes sont données en Tab. 5.7.

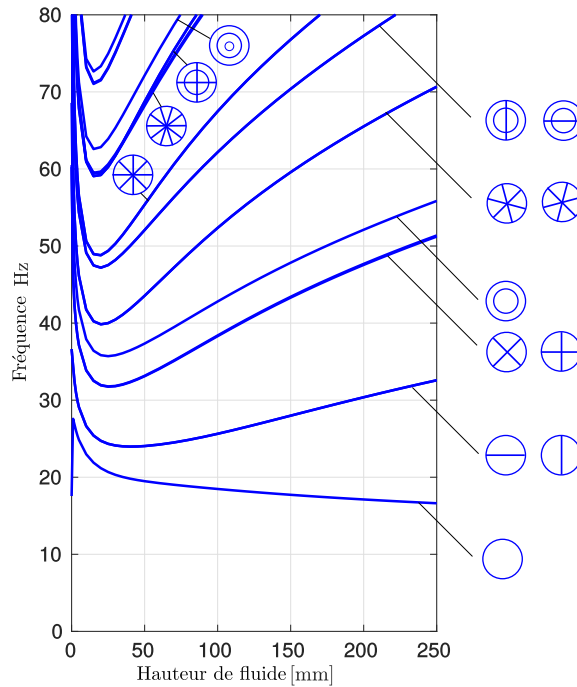


FIGURE 5.22 – Évolution des fréquences propres en fonction de la hauteur de fluide avec  $\mathbf{K}_{\text{tan}} = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_f$ .

Mode	$(n, m)$	$(h)$ 0 mm	20 mm	50 mm	100 mm	150 mm
1	(0, 1)	17.5 Hz	21.8 Hz	19.0 Hz	18.6 Hz	17.8 Hz
2,3	(1, 1)	36.6 Hz	25.4 Hz	24.5 Hz	25.2 Hz	27.5 Hz
4,5	(2, 1)	60.2 Hz	32.5 Hz	35.1 Hz	37.2 Hz	42.4 Hz
6	(0, 2)	68.5 Hz	36.4 Hz	39.4 Hz	41.7 Hz	46.8 Hz

TABLE 5.7 – Valeurs des six premières fréquences propres hydroélastiques avec précontrainte en fonction pour différents hauteurs de fluide.

## 5.5. VALIDATION DE L'APPROCHE PROPOSÉE : EXPÉRIENCE DE CHIBA

A l'exception de la première fréquence propre, nous observons une première zone de décroissance des fréquences de résonance, suivie d'un accroissement de celles-ci. La décroissance des fréquences est bien entendu liée à l'effet de masse ajoutée. La croissance des fréquences est quant à elle liée à la précontrainte de la structure chargée par le fluide. En Fig. 5.23, nous comparons l'évolution des modes (0,1), (1,1) et (2,1) à ceux de l'expérience de Chiba.

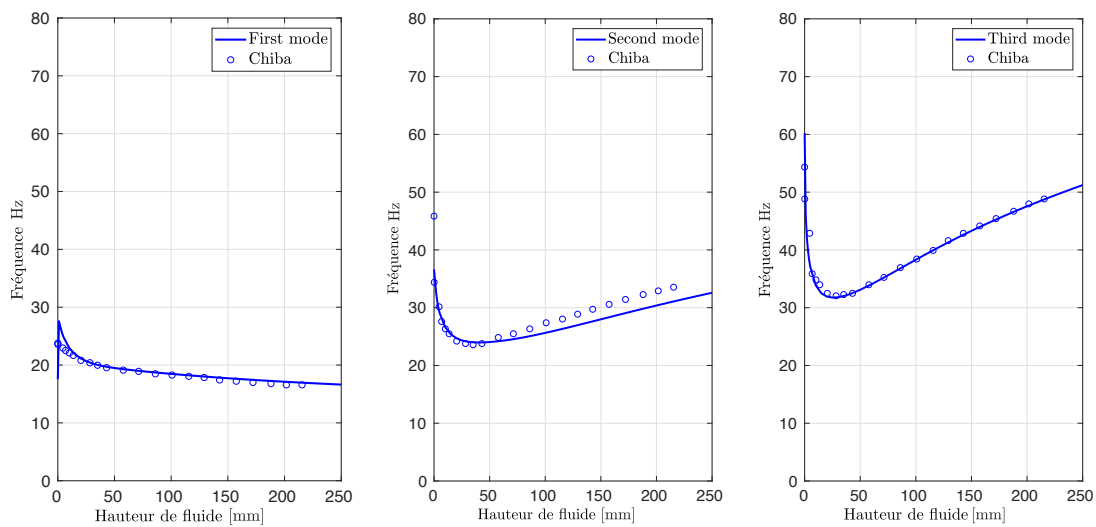


FIGURE 5.23 – Évolution des trois premières fréquences propres hydroélastiques avec précontrainte obtenues via notre approche comparées aux résultats expérimentaux de Chiba.

Observations et interprétations :

- Le comportement dynamique calculé via la méthode des EF est en accord avec l'expérience de Chiba ;
- Nous ne prenons en compte ni l'effet de la source d'excitation ni les éventuelles sources de dispersions provenant de conditions aux limites ou des paramètres matériaux. Ceci peut permettre d'expliquer les écarts observés entre nos simulations et les résultats expérimentaux.
- Pour des hauteurs de fluide très faibles (comme par exemple  $h = 1$  mm), l'influence des tensions superficielles pourrait ne pas être négligeable, mais cet effet est hors du cadre des hypothèses que nous nous sommes fixées. De plus, nous ne prenons pas en compte l'effet des forces volumiques au sein du solide (efforts qui pourraient éventuellement avoir un effet pour de très

petites hauteurs de fluide).

Nous visualisons en Figs. 5.24 et 5.26 la partie du champ de pression des modes hydroélastiques 1 et 2. Nous pouvons constater que pour le mode 2, les variations du champ de pression restent localisées aux alentours de l'interface fluide-structure. Alors que pour le mode 1, le zone de variation du gradient de pression continue de s'agrandir.

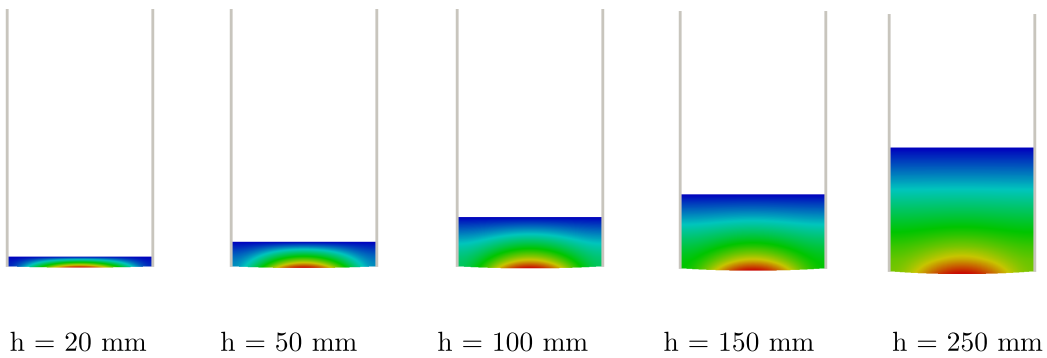


FIGURE 5.24 – Fluctuation de pression du premier mode hydroélastique pour différentes hauteurs de fluide.

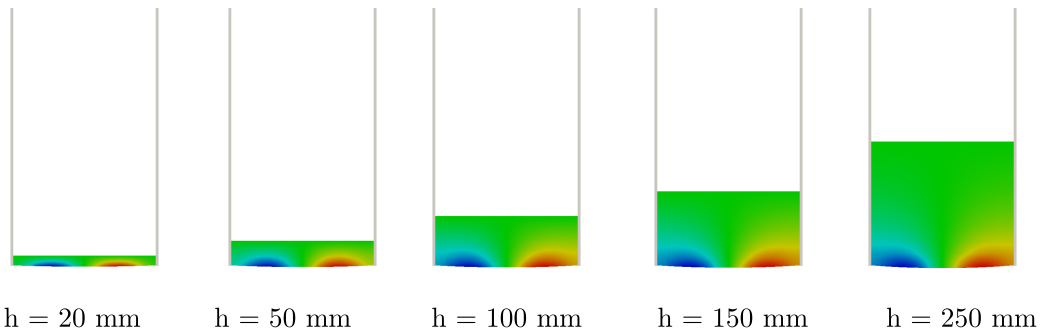


FIGURE 5.25 – Fluctuation de pression du deuxième mode hydroélastique pour différentes hauteurs de fluide.

### 5.5.2 Temps de calcul

Nous rappelons les temps de calcul et les données qui influent sur ce paramètre (nombre d'éléments et de degrés de liberté) en Tab. 5.8.

Nombre d'éléments volumiques (structure)	1000
Nombre d'éléments volumiques (fluide)	5000
Nombre de degrés de liberté (structure)	16995
Nombre de degrés de liberté (fluide)	23702
Nombre d'incréments de chargement hydrostatique	35
Temps de calcul NL par incréments	3 sec
Temps de calcul total NL	140 sec
Nombre de calculs hydroélastiques	35
Nombre de modes <i>in vacuo</i> par calculs	30
Temps de calcul par hauteur de fluide (en série)	11 minutes
Temps de calcul par hauteur de fluide (en parallèle 10 cœurs)	20 secondes
Temps de calcul avec $\mathbf{M}_a$	$\sim 3h$
Temps de calcul total (en série)	2 h
Temps de calcul total(en parallèle 10 cœurs)	20 secondes
Temps de calcul total estimé avec $\mathbf{M}_a$	$\sim 3$ jours

TABLE 5.8 – Temps de calcul associés au problème hydroélastique avec précontrainte

Nous constatons que toutes les méthodes développées au cours des chapitres précédents nous permettent de traiter ce problème paramétré par hauteur de fluide en quelques minutes. Premièrement, le temps de calcul du problème non-linéaire reste raisonnable pour une étude à 1 paramètre. Ensuite, la différence de temps de calcul entre l'approche par projection sur base réduite et la construction du modèle complet est particulièrement parlante. L'approche par projection sur base sèche (avec parallélisation du calcul des réponses fluides) est 400 fois plus rapide que le modèle complet (nécessitant la construction de  $\mathbf{M}_a$ ).

### 5.5.3 Réponse en fréquence

Nous avons effectué une réponse en fréquence du système couplé pour 3 valeurs de hauteur de fluide avec le système complet. Cela consiste à résoudre, sur une plage de fréquence donnée, le système matriciel :

$$[\mathbf{K}_{\text{tan}} - \omega^2(\mathbf{M} + \mathbf{M}_a)]\mathbf{U}_d = \mathbf{F} \quad (5.38)$$

Le comportement dynamique est en accord avec le calcul des modes et les fréquences propres calculés. En effet, le pic associé au premier mode a tendance à se déplacer vers les basses fréquences lorsque la hauteur de fluide augmente. Le pic associé au deuxième mode se déplace dans un premier temps vers les basses fréquences, puis remonte.

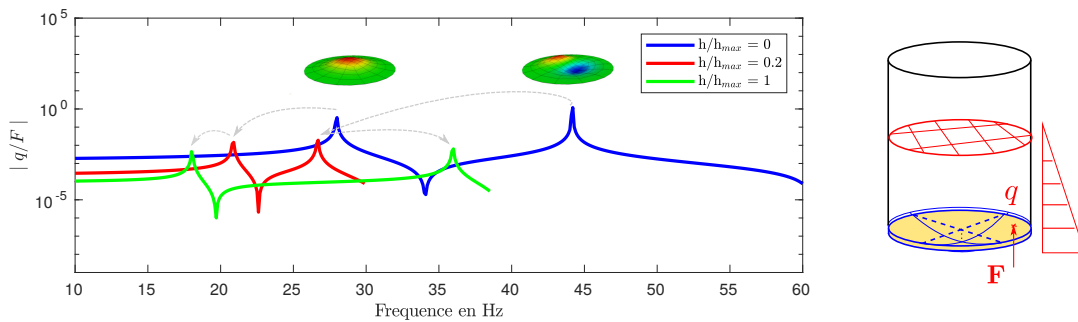


FIGURE 5.26 – Réponse en fréquence du système couplé à différentes hauteurs de fluide.

## 5.6 Réservoir ellipsoïdal avec précontrainte

Cette section a pour but de calculer les fréquences hydroélastiques avec précontrainte d'un réservoir à fond ellipsoïdal. On retrouve généralement ce type de géométrie à l'extrémité des réservoirs de lanceurs.

### 5.6.1 Géométrie et maillage de la structure

La géométrie et les paramètres du maillage hexaédrique de la structure élastique de forme ellipsoïdale sont proposées en Fig. 5.27. Les paramètres matériaux sont le module de Young  $E = 6.9 \times 10^9$  Pa, le module de Poisson  $\nu = 0.38$  et la masse volumique  $\rho_s = 1.4 \times 10^3$  kg.m<sup>-3</sup>. La structure est soumise à un champ de pression suiveur hydrostatique paramétré par une hauteur  $h$ .

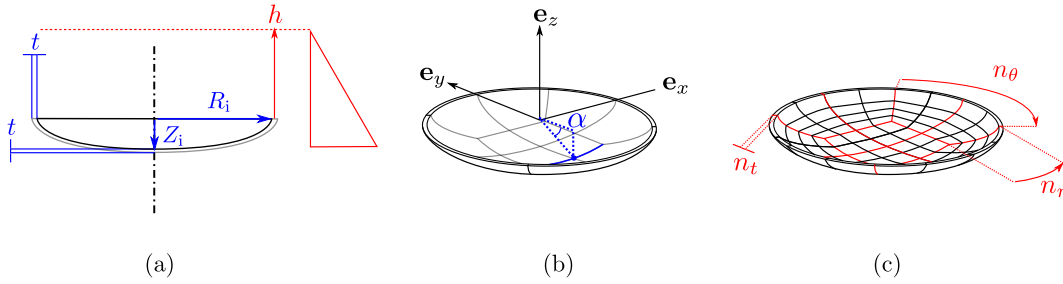


FIGURE 5.27 – (b) Profil de l'ellipse génératrice de la structure avec  $t = 0.35$  mm,  $R_i = 0.144$  m et  $Z_i = 0.25R_i$  soumis à un champ de pression hydrostatique d'une hauteur de fluide  $h$ . (a) Géométrie de la structure pour générer le maillage hexaédrique avec  $\alpha = 0.5$ ; (b) Paramètres du maillage avec  $n_\theta =$  le nombre de mailles sur le quart de la circonférence et  $n_r$  le nombre d'éléments sur la ligne définie sur la figure. Le nombre d'éléments dans l'épaisseur est fixé à 2.

Nous supposons que l'état précontraint de la structure a déjà été calculé au préalable pour différentes hauteurs de fluides  $h \in [0, 500]$  mm, pour un pas  $dh = 10$  mm.

Étant donné la forme et les symétries de la structure, nous pouvons caractériser les déformées modales par 2 nombres  $(m, n)$ , avec  $n$  le nombre de longueur d'ondes circonférentielles et  $m$  le nombre de longueurs d'ondes se situant sur la ligne courbe génératrice (voif Fig. 5.28).

Dans la suite, nous nous servons de ces symboles pour caractériser les fréquences de résonance associées aux déformées modales.

### 5.6.2 Vibrations avec précontrainte sans effet de masse ajoutée

Pour chaque état précontraint, nous avons effectué un calcul des fréquences de résonance de la structure *in vacuo* avec prise en compte de la précontrainte. Nous traçons l'évolution des ces fréquences en fonction de la hauteur de fluide en à la Fig. 5.29.

Nous observons une croissance de toutes les fréquences, montrant ainsi une influence de la précontrainte. La croissance de ces fréquences est néanmoins beaucoup plus faible que celle obtenue sur l'exemple du cylindre à fond plat montré précédemment. Nous nous servons des ces modes calculés pour chaque hauteur de fluide dans le calcul du problème hydroélastique sur base sèche. Mais avant, intéressons nous au calcul des vibrations sans la précontrainte.

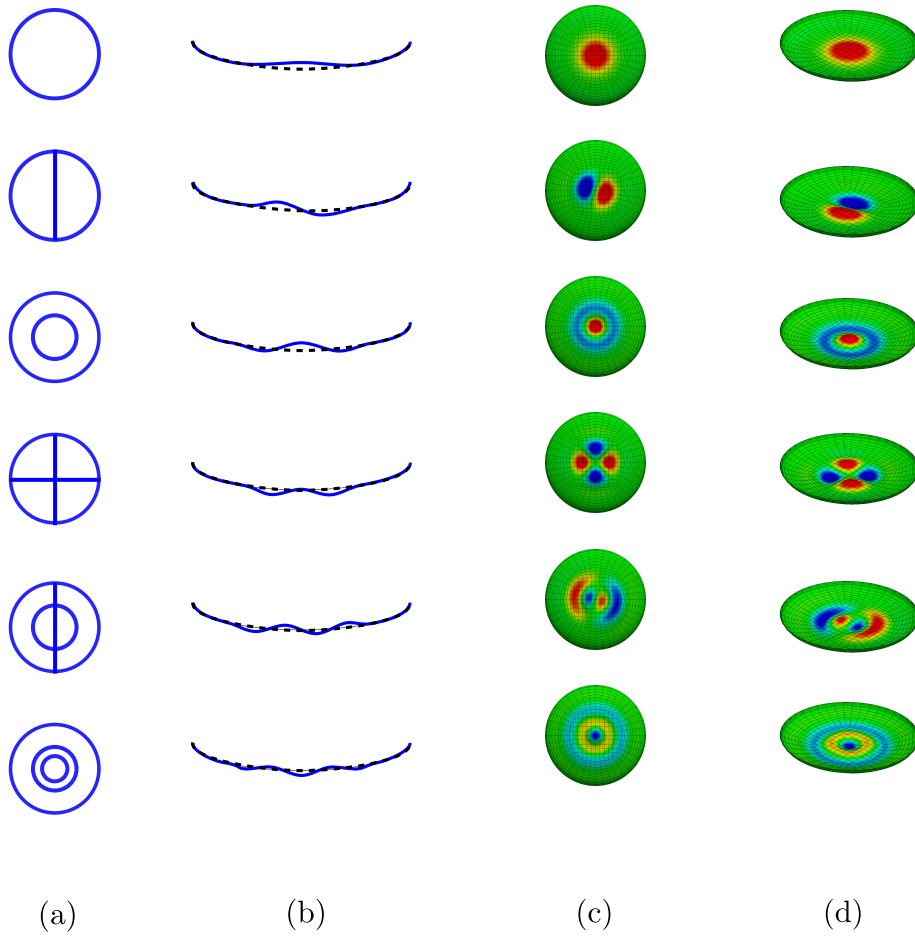


FIGURE 5.28 – (a) Symboles ; (b) Vue en coupe ; (c) Vue de dessous ; (d) Vue isométrique

### 5.6.3 Vibrations sans précontrainte avec effet de masse ajoutée

Nous nous intéressons maintenant au calcul des vibrations couplées hydroélastiques sans précontrainte pour différentes hauteurs de fluide. La géométrie et le maillage utilisé pour les calculs sont donnés en Fig. 5.30.

Le nombre de mailles et de degrés de liberté du fluide et de la structure sont récapitulés en Tab. 5.9.

Le graphe illustré en Fig. 5.31 a été obtenu après la résolution de 50 problèmes hydroélastiques.

- Nous observons une décroissance très importante des fréquences associées à tous les modes lorsque  $h \in [0, 100]$  mm.



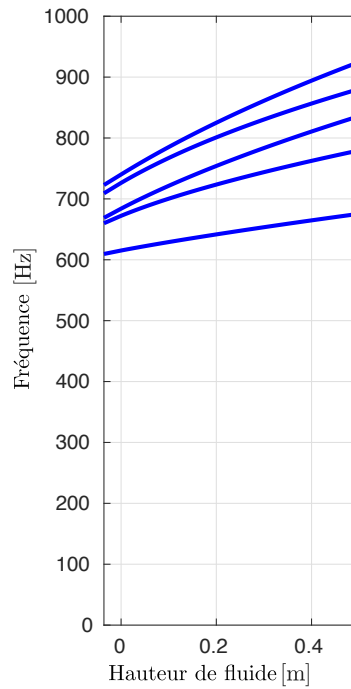


FIGURE 5.29 – Évolution des cinq premières fréquences de résonance avec précontrainte et sans effet de masse ajoutée.

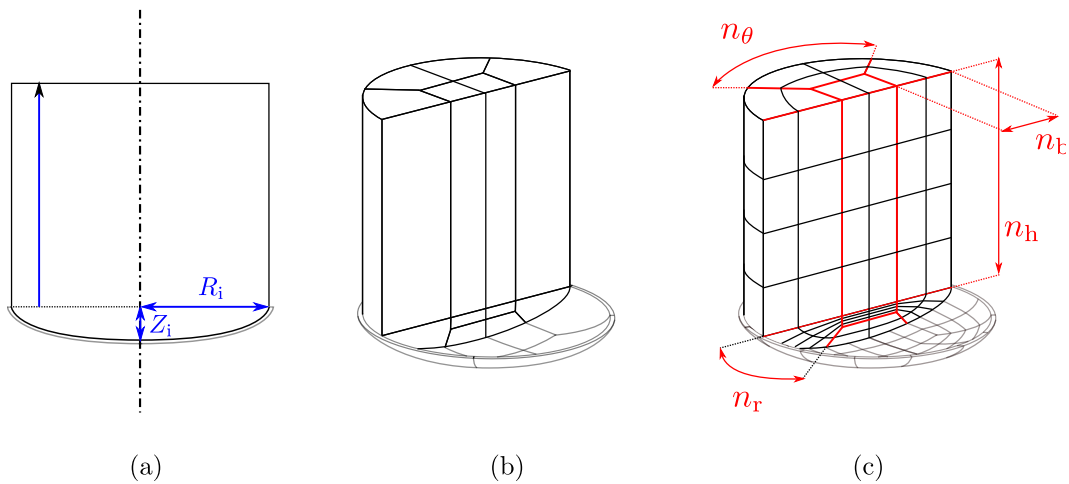


FIGURE 5.30 – (a) Géométrie de la structure et du fluide étudié (données géométriques similaires à la Fig. 5.27); (b) géométrie du maillage pour générer le maillage hexaédrique; (c) Paramètres du maillage du fluide avec  $n_\theta = 10$ ,  $n_b = 5$ ,  $n_h = 10$  et  $n_r = 10$ .

- A l'exception des modes ayant un nombre de longueurs d'onde circonférentielles  $n = 1$ , les fréquences n'évoluent plus en fonction de la hauteur de fluide. Cette stagnation s'explique car

## 5.6. RÉSERVOIR ELLIPSOÏDAL AVEC PRÉCONTRAINTÉ

Nombre éléments structure	1000
Nombre éléments fluide	5000
Nombre éléments interface	500
Nombre de degrés de liberté structure	10809
Nombre de degrés de liberté fluide	21581
Nombre de modes de structure sélectionnés	30

TABLE 5.9 – Nombre d'éléments et de degrés liberté pour le fluide et la structure.

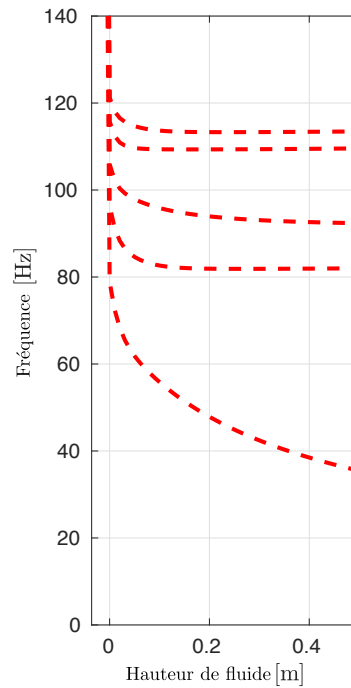


FIGURE 5.31 – Évolution des cinq premières fréquences de résonance avec effet de masse ajoutée et sans précontrainte.

la quantité de fluide déplacé reste localisée à l'interface fluide-structure. Elle ne dépend donc plus de la hauteur de fluide à partir d'une certaine hauteur (voir Fig. 5.33). Les modes pour lesquelles  $n = 1$  ont une influence plus globale sur la quantité de fluide déplacé (voir Figs. 5.32 et 5.34).

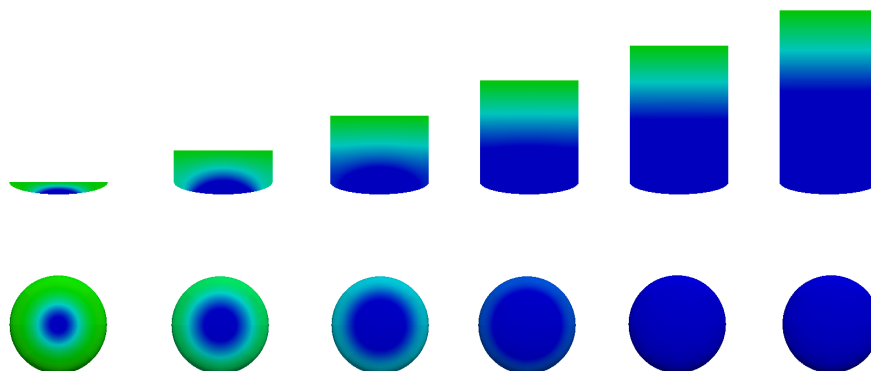


FIGURE 5.32 – Mode 1

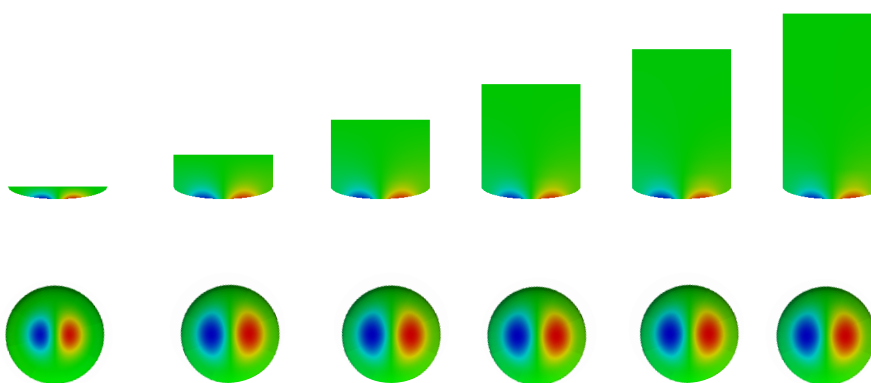


FIGURE 5.33 – Mode 2, 3

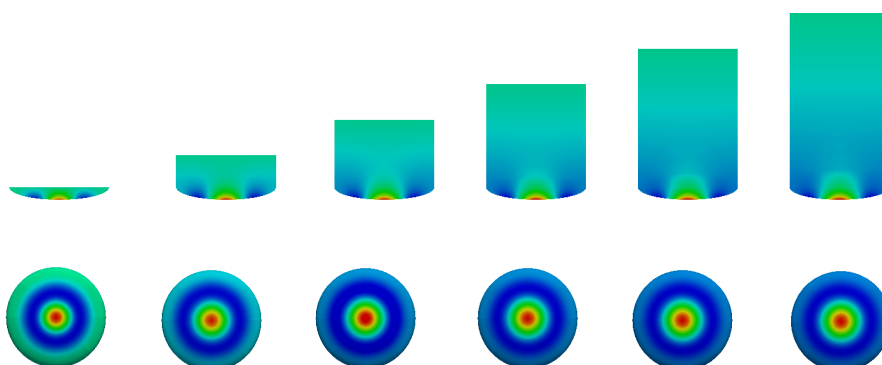


FIGURE 5.34 – Mode 4

### 5.6.4 Vibrations hydroélastiques avec précontrainte

La dernière analyse consiste à calculer les fréquences du problème hydroélastique avec la prise en compte de la précontrainte. Pour chaque état précontraint calculé précédemment, nous avons généré un maillage fluide coïncidant avec la configuration courante de la structure. Ensuite, nous avons effectué 50 calculs hydroélastiques par projection sur la base des modes de la structure précontrainte. Pour chaque incrément de hauteur de fluide, 30 modes *in vacuo* de la structure précontrainte ont été calculés au préalable. Nous traçons ci-dessous une comparaison des fréquences de résonance du problème hydroélastique sans et avec précontrainte.

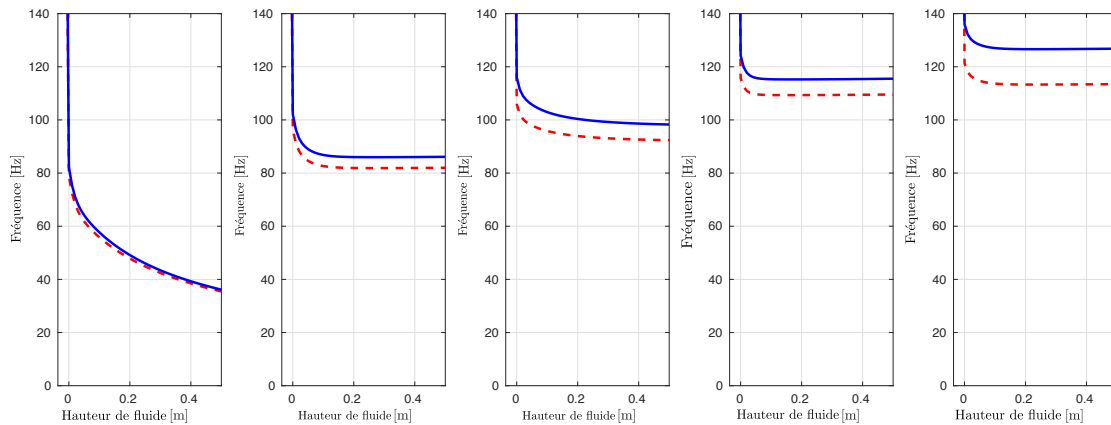


FIGURE 5.35 – Évolution des fréquences de résonance avec précontrainte (ligne continue bleue) et sans précontrainte (ligne pointillée rouge). L'effet de masse ajoutée est prise en compte dans les deux cas.

- Qualitativement, nous observons une décroissance des fréquences de résonance en fonction de la hauteur de fluide.
- L'effet de la précontrainte s'observe au travers de l'écart entre les courbes avec précontrainte et sans précontrainte.
- Cet écart semble s'accroître en fonction du numéro du mode. En effet, pour le premier mode, l'écart entre les deux courbes reste faible, contrairement aux modes suivants.
- Contrairement à l'exemple numérique précédent, cet écart reste constant. Le système ne semble pas suffisamment précontraint pour que les fréquences s'accroissent en fonction de la hauteur de fluide.

### 5.7 Conclusion

Au travers de ce chapitre, nous avons calculé les vibrations hydrélastiques d'un réservoir précontraint. Notre méthodologie est basée sur une succession de calculs non-linéaires géométriques quasi-statiques suivis d'une analyse dynamique linéarisée par projection sur base de modes *in vacuo*. Une validation de notre code et de l'approche a été faite au travers d'une comparaison de nos résultats de simulations par rapport à une expérience issue de la littérature. Qualitativement, ces résultats montrent que si la précontrainte devient importante, celle-ci doit être prise en compte via une approche statique non-linéaire pour prédire de façon satisfaisante la dynamique du système couplé.

# Chapitre 6

## Conclusions et perspectives

Ce dernier chapitre porte sur la synthèse des contributions réalisées au cours de cette thèse et sur les perspectives de recherches qui y sont associées. Dans un premier temps, nous rappelons la problématique concernant l'influence d'une précontrainte sur le comportement dynamique linéarisé d'un réservoir partiellement rempli de liquide. Nous revenons ensuite sur la méthodologie basée sur le calcul d'un équilibre statique, suivi d'une analyse dynamique couplée fluide-structure. Nous rappelons que dans le cadre de nos hypothèses, notre approche, basée sur l'utilisation de la méthode des éléments finis, a été validée au fur et à mesure au travers de nombreux cas numériques et de comparaisons à des expériences de la littérature. Finalement, les contributions de chaque chapitre sont revisitées dans le cadre de perspectives et de problèmes ouverts pour de futures recherches. Les thèmes concernés sont l'interaction fluide-structure, les problèmes non-linéaires et la réduction de modèle.

### Contenu

---

<b>6.1</b>	<b>Conclusion générale . . . . .</b>	<b>222</b>
<b>6.2</b>	<b>Perspectives : statique non-linéaire . . . . .</b>	<b>225</b>
<b>6.3</b>	<b>Perspectives : vibrations couplées fluide-structure . . . . .</b>	<b>227</b>

---

### 6.1 Conclusion générale

#### 6.1.1 Rappels : problématique et résultats de l'approche proposée

Au cours de cette thèse, nous nous sommes donnés comme objectif d'étudier le comportement dynamique de réservoirs élastiques précontraints contenant un liquide interne à surface libre. Si ces précontraintes sont suffisamment importantes, celle-ci peuvent avoir des effets sur les vibrations hydroélastiques linéarisées d'un système réservoir-liquide. Ces effets peuvent se traduire par un décalage des fréquences de résonance, dû à la prise en compte de non-linéarités géométriques qui changent la raideur globale de la structure. Nous nous sommes donc basés sur la méthode des éléments finis afin de répondre à la problématique suivante :

Peut-on quantifier, avec un outil numérique, l'influence d'une précontrainte sur le comportement dynamique d'une structure élastique contenant un liquide interne à surface libre ?

L'approche que nous avons proposée pour y répondre a été décomposée en deux parties :

**Partie 1** : Cette partie a été consacrée au calcul de l'état précontraint d'un réservoir soumis à la pression d'un liquide interne, en utilisant la MEF. Pour cela, les non-linéarités géométriques ont été prises en compte pour le calcul de l'état d'équilibre de la structure. L'action du fluide sur la structure a été modélisée par des forces suiveuses hydrostatiques, car la transformation est supposée suffisamment lente et donc quasi-statique. Ce champ de pression dépend de la gravité et de la position courante de l'interface fluide-structure, il n'est donc nécessaire de mailler le volume du fluide. Deux approches ont été développées pour calculer cet état d'équilibre. La première, qui a fait l'objet du **Chapitre 2**, est basée sur les méthodes de résolution non-linéaires incrémentales (méthode de Newton-Raphson ou approches par continuation). Les points clés résident dans la construction d'une matrice de raideur tangente et d'un résidu d'équilibre, utilisés dans la résolution de systèmes linéaires tangents. L'une des principales contributions de ce chapitre 2 consiste à utiliser une méthode de ligne de niveau pour prendre en compte l'évolution quasi-statique de la surface chargée, au cours de nos simulations. Les résultats obtenus, sur des maillages 3D quadratiques, ont été comparés à ceux de la littérature utilisant

## 6.1. CONCLUSION GÉNÉRALE

des éléments de type coque ou membrane, validant ainsi nos développements. résultats obtenus ont fait l'objet d'une conférence nationale [28], d'une conférence internationale [29] et d'une publication dans un journal international à comité de lecture [30]. La deuxième approche, faisant l'objet du Chapitre 3, est consacrée au développement d'une méthodologie de type PGD *a priori*. L'hypothèse se base sur la construction d'une solution approchée sous la forme d'une série de produit de fonctions à variables séparées. L'originalité consiste à formuler le problème avec le formalisme de la PGD, en prenant en compte les non-linéarités géométriques et une pression suiveuse uniforme. Cependant, malgré la convergence de cette approche, les résultats actuels montrent que pour un paramètre de pression unique, l'approche du chapitre 2 reste plus efficace en temps de calcul. Les développements réalisés ont fait l'objet d'une conférence nationale [31].

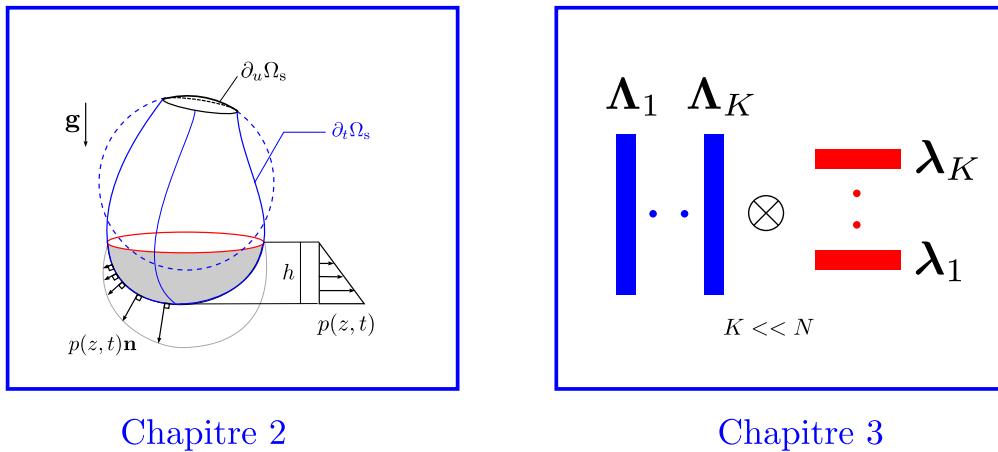


FIGURE 6.1 – Récapitulatif des contributions des chapitres 2 à 3.

Si la précontrainte a une influence significative sur le comportement dynamique linéarisé réservoir partiellement rempli de liquide, nous sommes capable de le calculer. L'approche et les résultats obtenus ont été validés vis-à-vis des résultats de la littérature existante. De plus, la convergence quadratique des algorithmes de résolution des problèmes non-linéaires garantit la validité de nos opérateurs tangents géométriques, matériaux et de forces suiveuses.



**Partie 2** : La seconde partie du travail a été consacrée aux calculs des vibrations hydroélastiques d'un réservoir avec liquide interne, autour d'états précontraints connus. L'objet du **Chapitre 4** était le calcul d'une matrice de masse ajoutée, prenant en compte l'énergie cinétique du fluide incompressible, du point de vue de la structure non précontrainte. L'utilisation des méthodes classiques, coûteuses en temps de calcul de, rendrait l'approche prohibitive pour plusieurs configurations de remplissage. Afin de pallier à ce problème, la méthode développée a consisté à construire une matrice de masse ajoutée réduite, projetée sur une base de modes de structure *in vacuo*. Les premières fréquences propres hydroélastiques d'un système réservoir-liquide, ont donc été calculées à moindre coût. Nos résultats ont été validés et comparés à des expériences de la littérature existante. Les développements de ces travaux ont fait l'objet d'une conférence internationale [32]. C'est au **Chapitre 5** que nous avons apporté une réponse à la problématique de départ. A partir des résultats du Chapitre 2 et de la formulation proposée au Chapitre 4, nous avons été en mesure de calculer les vibrations hydroélastiques d'un réservoir précontraint pour différents niveaux de liquide. Nos résultats, issus de simulations numériques, sont en très bons accords avec ceux observés expérimentalement et issus de la littérature. Ces développements ont fait l'objet d'une conférence internationale [33].

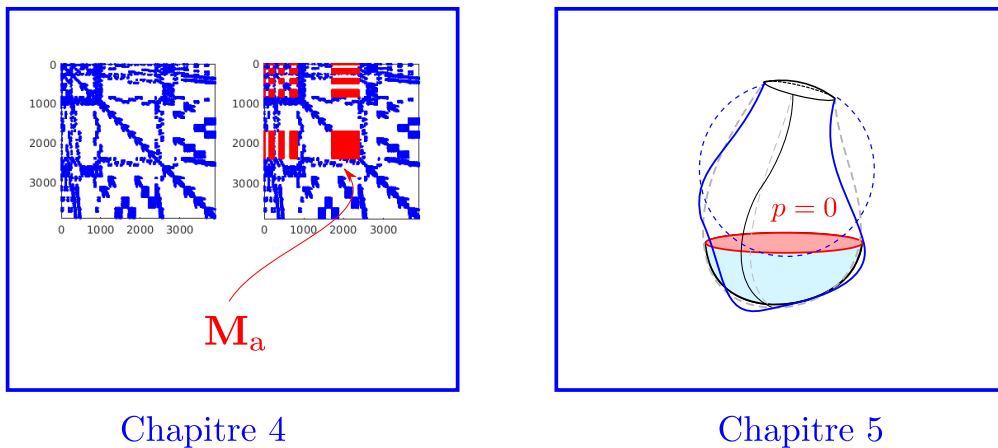


FIGURE 6.2 – Récapitulatif des contributions des chapitres 4 à 5.

A partir d'un état précontraint connu, nous avons formulé et validé notre démarche de calcul des vibrations hydroélastiques linéarisées. Nous sommes donc en mesure d'estimer, par la simulation numérique, l'influence d'une précontrainte sur le comportement dynamique d'une structure précontrainte couplée à un liquide interne à surface libre.

## 6.2 Perspectives : statique non-linéaire

### 6.2.1 Perspectives : calculs statiques non-linéaires

A partir des développements proposés au **Chapitre 2**, les problèmes ouverts suivants peuvent être adressés :

- **Calcul de structure libres-libres** : Dans l'introduction, nous avons mentionné le fait que ces développements serviraient aux calculs des vibrations de réservoirs de lanceurs pressurisés. Contrairement à nos hypothèses, ces structures ne sont pas encastrées lors du décollage. Une perspective consisterait à calculer un état précontraint équilibré, avec précontrainte, sans encastrement. A titre d'exemple, nous pouvons nous référer aux calculs d'équilibre de structures flottantes précontraintes dans le transport maritime.
- **Équilibre non-linéaire et capillarité** : La prise en compte de la capillarité, dans le calcul de l'équilibre statique non-linéaire entre un fluide à surface libre et un réservoir élastique, est un problème ouvert. En effet, un logiciel comme Evolver [119] permet de prédire la forme de la surface libre, avec les tensions de surfaces, mais uniquement pour des parois rigides. Nous pensons que nos développements de méthodes de ligne de niveaux sur des surface courbes pourraient être à l'origine d'outils numériques adaptés à ce type de problématique.

### 6.2.2 Perspectives : réduction de modèle en statique non-linéaire

Les développements proposés sur la méthode de PGD *a priori*, abordés au **Chapitre 3**, soulèvent de nombreux problèmes qui pourraient faire l'objet d'approfondissements :

- **Paramètre de hauteur de fluide :** Nous avons fait l'hypothèse que la force suiveuse est issue d'une pression uniforme au cours de nos développements. La suite logique consisterait à définir un paramètre de chargement par hauteur de fluide. Cependant, la difficulté principale d'une telle formulation repose sur le fait la hauteur de fluide change la topologie de la surface chargée courante  $\Sigma(h, \mathbf{u})$ . Cette surface, à frontière variable, sert de support d'intégration de l'effort suiveur et dépend de la solution écrite sous forme de variable séparée. Un travail de formulation d'une image réciproque de la surface courante par rapport à une surface de référence fixe, serait à envisager.
- **Problèmes instables et continuation :** La formulation proposée dans ce manuscrit montre que les sous-problèmes en paramètres de pression sont des équations instables (même si le problème à résoudre est stable). Un algorithme de continuation permettant de résoudre des sous-problèmes paramétriques instables de type "snap-through" et "snap-back" (peu coûteux) a donc été proposé et développé. L'idée serait d'utiliser ces formulations pour résoudre des problèmes réellement instables via l'approche réduite PGD *a priori* avec non-linéarités géométriques et forces suiveuses.
- **Paramètres géométriques et matériaux :** Les travaux récents de Niroomandi [76] montrent que la PGD *a priori* s'applique dans le cas de lois de comportement hyperélastiques quasi-incompressibles. Ces lois sont adaptées aux grandes déformations (caoutchouc ou tissus organiques). L'idée principale consiste à utiliser un développement en série de Taylor de ces lois de comportement non-linéaires. Les travaux de Ammar [79] et d'Amaury [81] proposent des approches prenant en compte des paramètres géométriques dans ce type de formulations. L'idée serait d'y intégrer les non-linéarités de forces suiveuses pour générer des bases réduites de structure prenant en compte un grand nombre de paramètres. Les domaines d'applications concernés seraient bien entendu aussi divers que la bio-mécanique ou encore l'optimisation de préhenseurs souples pressurisés.
- **Machin learning :** Le contexte actuel associé à l'émergence de l'intelligence artificielle soulève

des questions sur la génération de données massives. Les approches par réduction de modèle sont des outils qui semblent s'inscrire dans ce contexte liant le domaine de la mécanique à l'apprentissage.

### 6.3 Perspectives : vibrations couplées fluide-structure

#### 6.3.1 Perspectives : vibrations hydroélastiques sans précontrainte

Le **Chapitre 4** a abordé le calcul de vibrations hydroélastiques via la construction d'une matrice de masse ajoutée réduite sur base de modes de structure *in vacuo*. Les perspectives associées sont décrites ci-dessous :

- **Sélection *a priori* des vecteurs de la base réduite *in vacuo*** : Nous avons montré que la projection sur  $N$  modes de la structure *in vacuo* permet de réduire considérablement le temps de calcul de la masse ajoutée. Cette approche est limitée à la génération des  $K$  premiers modes hydroélastiques sur une plage de fréquence d'intérêt. Nous avons montré que parmi les  $N$  modes *in vacuo*, un nombre réduit d'entre eux participent de façon significative à la construction des  $K$  modes visés. Un indicateur *a priori* des modes contribuant le plus permettrait de réduire le nombre de calculs nécessaires sur la plage de fréquence d'intérêt.
- **Vers des maillage fluide-structure incompatibles** : Dans le but de faciliter la construction de nos opérateurs, nos maillages du fluide et de la structure sont coïncidents. Cette contrainte complexifie et ralentit la mise en données numériques lors de la génération du maillage. Bien entendu, le développement de méthodes avec maillages incompatibles faciliterait l'utilisation de nos approches. La projection sur base de modes *in vacuo* est particulièrement adaptée à ce type d'approche dans la mesure où les problèmes, bien que couplés, sont traités de façon indépendante. En effet, d'une part, le fluide est soumis à un déplacement imposé des modes de structure *in vacuo*, calculés au préalable. De plus, la structure est soumise à une combinaison de champs de pression induits qui sont connus avant projection. Une gestion non-intrusive de l'information à l'interface des maillages incompatibles est donc envisageable dans le futur.

### 6.3.2 Perspectives : hydroélasticité et non-linéarités

Le **Chapitre 5** rassemble les pièces du puzzle : il prend en compte la précontrainte calculée aux **Chapitres 2 ou 3** et la matrice de masse ajoutée du **Chapitre 4**. Mis bout à bout, nous sommes en mesure d'estimer l'influence de la précontrainte sur les vibrations hydroélastiques. Les perspectives à envisager sont les suivantes :

- **Dimensionnement de sources d'amortissement adaptées** : L'estimation des fréquences hydroélastiques n'est qu'une étape dans la phase de conception. L'un des enjeux majeurs consiste à concevoir des solutions techniques d'amortissement. Des systèmes d'amortissement peuvent être réalisés grâce à l'utilisation de couches viscoélastiques précontraintes ou à partir de systèmes passif ou actifs piézo-structure-fluide.
- **Construction de bases réduites hydroélastiques paramétrées** : Les fréquences et les modes de résonance dépendent de la quantité de fluide à l'intérieur du réservoir. Ce réservoir s'intègre dans des systèmes complexe dépendant de nombreux paramètres. L'idée serait de proposer un modèle réduit de modes hydroélastiques qui dépendent de paramètres de conception.
- **Échanges d'énergies BF-MF-HF**<sup>1</sup> : Au cours de cette thèse, nous nous sommes limités à la prise en compte de deux phénomènes sur le comportement dynamique : la précontrainte et l'effet de masse ajoutée. La suite consisterait à incorporer des phénomènes supplémentaires tels que la gravité, la compressibilité et la capillarité. La prise en compte de ces phénomènes nous permettrait de mieux comprendre les échanges d'énergies entre la surface libre, la structure et le liquide interne sur des plages de fréquences BF, MF et HF [120, 121].

---

1. BF : Basse Fréquence, MF, Moyenne Fréquence et HF : Haute Fréquence

# Bibliographie

- [1] H. N. Abramson and al. *The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers*. NASA Report SP-106, 1966.
- [2] C. Farhat, K. Edmond, D. Amsellem, J.-S. Schotté, and R. Ohayon. Modeling of fuel sloshing and its physical effects on flutter. *AIAA Journal*, 51(9) :2252–2265, 2013.
- [3] B. Robu, L. Baudouin, and C. Prieur. Active vibration control of a fluid/plate system using a pole placement controller. *International Journal of Control*, 85 :684–694, 2012.
- [4] D. J. Sances, S. N. Gangadharan, J. E. Sudermann, and B. Marsell. Cfd fuel slosh modeling of fluid-structure interaction in spacecraft propellant tanks with diaphragms. *AIAA*, 2010.
- [5] M. Lazzarin, M. Biolo, A. Bettella, M. Manente, R. Da Forno, and D. Pavarin. Euclid satellite : Sloshing model development through computational fluid dynamics. *Aerospace Science and Technology*, 36 :44–54, 2014.
- [6] B. Lenahen, A. Bernier, S. Gangadharan, J. Sudermann, and B. Marsell. A computational investigation for determining the natural frequencies and damping effects of diaphragm-implemented spacecraft propellant tanks. *AIAA*, 2012.
- [7] H. Morand and R. Ohayon. Internal pressure effects on the vibration of partially filled elastic tanks. In (*Congres Mondial sur l'Application des Methodes d'Elements Finis a la Mecanique des Structures, Bournemouth, Hants., England, Oct. 12-17, 1975.*) *ONERA, TP*, number 1975-66, 1975.
- [8] W. Rumold. Modeling and simulation of vehicles carrying liquid cargo. *Multibody System Dynamics*, 5 :351–374, 2001.
- [9] T. Acarman and Ümit Özgüner. Rollover prevention for heavy trucks using frequency shaped sliding mode control. *Vehicle System Dynamics*, 44 :737–762, 2006.

- [10] A. Kolaei, S. Rakheja, and M. J. Richar. Effects of tank cross-section on dynamic fluid slosh loads and roll stability of a partly-filled tank truck. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 46 :46–58, 2014.
- [11] S. J. Lee, M. H. Kim, D. H. Lee, J. W. Kim, and Y. H. Kim. The effects of lng-tank sloshing on the global motions of lng carriers. *Ocean Engineering*, 34 :10–20, 2007.
- [12] S. Malenica and S. H. Kwon. An overview of the hydro-structure interactions during sloshing impacts in the tanks of lng carriers. *Teorija i praksa brodogradnje i pomorske tehnike*, 64 :22–30, 2013.
- [13] Q. Peng, H. Wu, D. W. Wang, Y. J. He, and H. Chen. Numerical simulation of aircraft crash on large-scale lng storage tank. *Engineering Failure Analysis*, 96 :60–79, 2019.
- [14] A. Kumar, S. U. Islam, T. Sabu, R. A. Vasudeo, V. K. Abitha, K. Krishnan, and D. Aastha. *Hydraulic Rubber Dam*. William Andrew, 2018.
- [15] J.-C. Hsieh and R. H. Plaut. Free vibrations of inflatable dams. *Acta Mechanica*, 85 :207–220, 1990.
- [16] C. M. Dakshina Moorthy, J. N. Reddy, and R. H. Plaut. Three-dimensional vibrations of inflatable dams. *Thin-Walled Structures*, 21 :291–306, 1995.
- [17] S. Roccabianca and T. R. Bush. Understanding the mechanics of the bladder through experiments and theoretical models : Where we started and where we are heading. *World Scientific Publishing Co. Imperial College Press*, 4 :30–41, 2016.
- [18] S. G. Smith, B. E. Griffith, and D. A. Zaharoff. Analyzing the effects of instillation volume on intravesical delivery using biphasic solute transport in a deformable geometry. *Mathematical Medicine and Biology : A Journal of the IMA*, 2018.
- [19] N. Hermant, F. Chouly, F. Silva, and P. Luizard. Numerical study of the vibrations of an elastic container filled with an inviscid fluid. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 98 :602–621, 2018.
- [20] L. Coquart, C. Depeursinge, A. Curnier, and R. Ohayon. A fluid-structure interaction problem in biomechanics : Prestressed vibrations of the eye by the finite element method. *Journal of Biomechanics*, 25 :1105–1118, 1992.

- [21] Michael P Païdoussis, Stuart J Price, and Emmanuel De Langre. *Fluid-structure interactions : cross-flow-induced instabilities*. Cambridge University Press, 2010.
- [22] J.-S. Schotté. *Influence de la gravité sur les vibrations linéaires d'une structure élastique contenant un liquide incompressible*. PhD thesis, Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques, 2010.
- [23] F. T. Dodge et al. *The new" dynamic behavior of liquids in moving containers"*. Southwest Research Inst. San Antonio, TX, 2000.
- [24] C. Hoareau. Dynamique de structures élastiques en grands déplacements contenant des liquides avec surfaces libres. mémoire de master recherche (ms)2sc : Modélisation et simulation en mécanique des structures et systèmes couplés, École normale supérieure, cachan, 1er juillet 2016, 2016.
- [25] J.-M. Genevaux, J.-P. Brancher, and X.-J. Chai. Gravity effects on the coupled frequencies of a 2d fluid–structure problem with a free surface. *Journal of sound and vibration*, 215(2) :331–342, 1998.
- [26] L. Rouleau and J.-F. Deü. Modelling of nonlinear prestrain effects on the dynamic properties of viscoelastic materials. In *Proceedings of the 28th International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA 2018, in conjunction with the 7th International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics, Leuven, Belgium, 2018*.
- [27] J.-F. Deü, A. C. Galucio, and R. Ohayon. Dynamic responses of flexible-link mechanisms with passive/active damping treatment. *Computers and Structures*, 86 :258–265, 2008.
- [28] C. Hoareau and J.-F. Deü. Modélisation éléments finis non-linéaire de réservoirs élastiques soumis à une charge suiveuse hydrostatique. In *Actes du 13ème Colloque National en Calcul des Structures, CSMA 2017, Giens, Var, France, 15-19 mai 2017*, 2017.
- [29] C. Hoareau and J.-F. Deü. Non-linear finite element analysis of an elastic structure loaded by hydrostatic follower forces. *Procedia Engineering*, 199 :1302–1307, 2017.
- [30] C. Hoareau and J.-F. Deü. Nonlinear equilibrium of partially liquid-filled tanks : A finite element/level-set method to handle hydrostatic follower forces. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 113 :112–127, 2019.



- [31] C. Hoareau and J.-F. Deü. Formulation d'un problème non-linéaire avec forces suivieuses via une approche éléments finis de type PGD . In *Actes du 14ème Colloque National en Calcul des Structures, CSMA 2017, Giens, Var, France, 13-17 mai 2019*, 2019.
- [32] C. Hoareau, J.-F. Deü, and R. Ohayon. Prestressed Vibrations of Partially Filled Tanks Containing a Free-Surface Fluid : Finite Element and Reduced Order Models . In *Proceedings of the 8th conference on coupled problems in science engineerin, ECCOMAS thematic conference, Barcelona, Spain, 2019*.
- [33] C. Hoareau, J.-F. Deü, and R. Ohayon. A finite element approach for hydroelastic vibrations of partially filled prestressed elastic tanks. In *Proceedings of the 6th European Conference on Computational Mechanic (Solids, Structures and Coupled Problems), ECCM 6, Glasgow, UK, 2018*.
- [34] L. Rouleau and J.-F. Deü. Modelling of nonlinear prestrain effects on the dynamic properties of viscoelastic materials. In *Proceedings of the 28th International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA 2018, in conjunction with the 7th International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics, USD 2018, Leuven, Belgium, September 17-19, 2018.*, 2018.
- [35] L. Rouleau and J.-F. Deü. Modélisation des propriétés dynamiques de matériaux viscoélastiques pré-contraints . In *Actes du 14ème Colloque National en Calcul des Structures, CSMA 2017, Giens, Var, France, 13-17 mai 2019*, 2019.
- [36] M. Chiba. Nonlinear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom, containing liquid. part i : Experiment. *Journal of Fluids and Structures*, 6 :181–206, 1992.
- [37] H. J.-P. Morand and R. Ohayon. *Fluid Structure Interaction*. John Wiley & Sons, 1995.
- [38] J.-S. Schotté, S. Carra, M. Amabili, and R. Ohayon. Nonlinear effect of hydrostatic pressure on the hydroelastic vibrations of a plate. In *Proceedings of the Second International Conference on Dynamics, Vibration and Control, CUSTOM, Beijing, China, 2006*.
- [39] J. A. Sethian. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 93 :1591–1595, 1996.
- [40] H. D. Hibbitt. Some follower forces and load stiffness. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14 :937–941, 1979.

- [41] T. Rumpel and K. Schweizerhof. Volume-dependent pressure loading and its influence on the stability of structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(2) :211–238, 2003.
- [42] T. Rumpel and K. Schweizerhof. Hydrostatic fluid loading in non-linear finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59(6) :849–870, 2004.
- [43] T. Rumpel and K. Schweizerhof. Efficient finite element modelling and simulation of gas and fluid supported membrane and shell structures. *Textile Composites and Inflatable Structures*, Springer, Dordrecht, 3 :153–172, 2005.
- [44] M. Haßler and K. Schweizerhof. On the influence of fluid-structure-interaction on the stability of thin-walled shell structures. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 07 :313–335, 2007.
- [45] M. Haßler and K. Schweizerhof. On the static interaction of fluid and gas loaded multi-chamber systems in large deformation finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(19–20) :1725–1749, 2008.
- [46] Y. Zhou, A. Nordmark, and A. Eriksson. Instability of thin circular membranes subjected to hydro-static loads. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 76 :144–153, 2015.
- [47] A. Patil, A. Nordmark, and A. Eriksson. Wrinkling of cylindrical membranes with non-uniform thickness. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 54 :1–10, 2015.
- [48] A. Eriksson, A. Nordmark, A. Patil, and Y. Zhou. Parametric stability investigations for hydrostatically loaded membranes. *Computers and Structures*, 174 :33–41, 2016.
- [49] Y. Zhou, A. Nordmark, and A. Eriksson. Multi-parametric stability investigation for thin spherical membranes filled with gas and fluid. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 82 :37–48, 2016.
- [50] K.-H. Lee and P.-S. Lee. Nonlinear hydrostatic analysis of flexible floating structures. *Applied Ocean Research*, 59 :165–182, 2016.
- [51] M. Amabili. *Nonlinear Mechanics of Shells and Plates : Composite, Soft and Biological Materials*. Cambridge University Press, New York, USA, 2018.
- [52] J. Mandel. *Cours de mécanique des milieux continus*. Gauthier-Villars, 1966.

- [53] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, volume 2. Butterworth-heinemann, 2000.
- [54] K.-J. Bathe. *Finite element procedures*. Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
- [55] T. Belytschko, W. K. Liu, B. Moran, and K. Elkhodary. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John wiley & sons, 2013.
- [56] J. C. Simo and R. L. Taylor. Quasi incompressible finite elasticity in principal stretches. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 85 :273–310, 1991.
- [57] G. A. Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics*. John Wiley & Sons, 2001.
- [58] P. Steinmann, M. Hossain, and G. Possart. Hyperelastic models for rubber-like materials : consistent tangent operators and suitability for treloar’s data. *Archive of Applied Mechanics*, 82 :1183–1217, 2012.
- [59] N.-H. Kim. *Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. Springer, 2015.
- [60] R. L. Zienkiewicz, O. C. and Taylor, P. Nithiarasu, and J. Z. Zhu. *The finite element method*, volume 3. McGraw-hill London, 1977.
- [61] T. Gmür. *Méthode des éléments finis en mécanique des structures*. PPUR presses polytechniques, 2000.
- [62] J.-S. Schotté and R. Ohayon. Incompressible hydroelastic vibrations : finite element modelling of the elastogravity operator. *Computers and Structures*, 83(2–3) :209–219, 2005.
- [63] M. A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, volume 1. John Wiley & Sons, 1994.
- [64] B. Cochelin, N. Damiel, and M. Potier-Ferry. Méthode asymptotique numérique. *European journal of computational mechanics/revue européenne de mécanique numérique*, 17(4) :553–554, 2008.
- [65] A. Legay. An extended finite element method approach for structural-acoustic problems involving immersed structures at arbitrary positions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93 :376–399, 2013.
- [66] A. Zilian and H. Netuzhylov. Hybridized enriched space–time finite element method for analysis of thin-walled structures immersed in generalized newtonian fluids. *Computers and Structures*, 88 :1265–1277, 2010.

- [67] E. T. Ooi, S. Rajendran, and J. H. Yeo. A 20-node hexahedron element with enhanced distortion tolerance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60 :2501–2530, 2004.
- [68] F. Chinesta, P. Ladevèze, and E. Cueto. A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18 :395, 2011.
- [69] F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto. Recent advances and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17 :327–350, 2010.
- [70] C. Heyberger, P.-A. Boucard, and D. Néron. Multiparametric analysis within the proper generalized decomposition framework. *Computational Mechanics*, 49 :277–289, 2012.
- [71] C. Paillet, D. Néron, and P. Ladevèze. A door to model reduction in high-dimensional parameter space. *Comptes Rendus Mécanique*, 346 :524–531, 2018.
- [72] Pierre Ladevèze. *Nonlinear computational structural mechanics : new approaches and non-incremental methods of calculation*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [73] D. Gonzalez, I. Alfaro, C. Quesada, E. Cueto, and F. Chinesta. Computational vademecums for the real-time simulation of haptic collision between nonlinear solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283 :210–223, 2015.
- [74] J.-M. Bergheau, S. Zuchiatti, J.-C. Roux E. Feuvlach, S. Tissot, and G. Perrin. The proper generalized decomposition as a space-time integrator for elastoplastic problems. *Comptes Rendus Mécanique*, 344 :759–768, 2016.
- [75] C. Geroso, J. V. Aguado, A. Fraile, E. Alarcon, and F. Chinesta. Efficient pgd-based dynamic calculation of non-linear soil behavior. *Comptes Rendus Mécanique*, 344 :24–41, 2016.
- [76] S. Niroomandi, D. Gonzalez, I. Alfaro, F. Bordeu, A. Leygue, E. Cueto, and F. Chinesta. Real-time simulation of biological soft tissues : a pgd approach. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 29 :586–600, 2013.
- [77] L. Boucinha, A. Gravouil, and A. Ammar. Space-time proper generalized decompositions for the resolution of transient elastodynamic models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255 :67–88, 2013.

- [78] L. Boucinha, A. Ammar, A. Gravouil, and A. Nouy. Ideal minimal residual-based proper generalized decomposition for non-symmetric multi-field models – application to transient elastodynamics in space-time domain. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 273 :56–76, 2014.
- [79] A. Ammar, A. Huerta, F. Chinesta, E. Cueto, and A. Leygue. Parametric solutions involving geometry : A step towards efficient shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 268 :178–193, 2014.
- [80] S. Zlotnik, P. Diez, D. Modesto, and A. Huerta. Proper generalized decomposition of a geometrically parametrized heat problem with geophysical applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 103 :737–758, 2015.
- [81] C. Amaury, D. Néron, P. Ladevèze, and L. Ballere. Integration of pgd-virtual charts into an engineering design process. *Computational Mechanics*, 57 :637–651, 2016.
- [82] D. Gonzalez, E. Cueto, and F. Chinesta. Real-time direct integration of reduced solid dynamics equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 99 :633–653, 2014.
- [83] D. Néron and P. Ladevèze. Proper generalized decomposition for multiscale and multiphysics problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17 :351–372, 2010.
- [84] P. Ladevèze, J.-C. Passieux, and D. Néron. The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :1287–1296, 2010.
- [85] P. Ladevèze. On reduced models in nonlinear solid mechanics. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 60 :227–237, 2016.
- [86] S. Niroomandi, D. Gonzalez, I. Alfaro, F. Bordeu, A. Leygue, E. Cueto, and F. Chinesta. Real time simulation of non-linear solids by pgd techniques. *Key Engineering Materials*, 504-506 :467–472, 2012.
- [87] S. Niroomandi, I. Alfaro, D. Gonzalez, E. Cueto, and F. Chinesta. Model order reduction in hyperelasticity : a proper generalized decomposition approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 96 :129–149, 2013.
- [88] A. Grolet and F. Thouverez. On the use of the proper generalised decomposition for solving nonlinear vibration problems. In *Material Forming ESAFORM 2012*, Key Engineering Materials,

- pages 913–920. ASME 2012 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, American Society of Mechanical Engineers, 11 2012.
- [89] L. Meyrand, E. Sarrouy, B. Cochelin, and G. Ricciardi. Nonlinear normal mode continuation through a proper generalized decomposition approach with modal enrichment. *Journal of Sound and Vibration*, 443 :444–459, 2019.
- [90] P. Ladevèze and L. Chamoin. On the verification of model reduction methods based on the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200 :2032–2047, 2011.
- [91] G. Berkooz, P. Holmes, and J. L. Lumley. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 25(1) :539–575, 1993.
- [92] E. Liberge, M. Benaouicha, and A. Hamdouni. Proper orthogonal decomposition investigation in fluid structure interaction. *European Journal of Computational Mechanics*, 16 :401–418, 2007.
- [93] S. Niroomandi, I. Alfaro, E. Cueto, and F. Chinesta. Accounting for large deformations in real-time simulations of soft tissues based on reduced-order models. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 105 :1–12, 2012.
- [94] J. Yvonnet and Q.-C. He. The reduced model multiscale method (r3m) for the non-linear homogenization of hyperelastic media at finite strains. *Journal of Computational Physics*, 223(1) :341–368, 2007.
- [95] S. Banihani, T. Rabczuk, and T. Almomani. Pod for real-time simulation of hyperelastic soft biological tissue using the point collocation method of finite spheres. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 2013.
- [96] R. Ohayon. Reduced models for fluid–structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(1) :139–152, 2004.
- [97] O. Andrianarison and R. Ohayon. Compressibility and gravity effects in internal fluid–structure vibrations : Basic equations and appropriate variational formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(17-18) :1958–1972, 2006.
- [98] O. Andrianarison and R. Ohayon. Reduced models for modal analysis of fluid–structure systems taking into account compressibility and gravity effects. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(41-43) :5656–5672, 2006.

- [99] J.-S. Schotté and R. Ohayon. Effect of gravity on a free-free elastic tank partially filled with incompressible liquid. *Journal of Fluids and Structures*, 18(2) :2115–226, 2003.
- [100] J.-S. Schotté and R. Ohayon. Various modelling levels to represent internal liquid behaviour in the vibration analysis of complex structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(21) :1913–1925, 2009.
- [101] M. El-Kamali, J.-S. Schotté, and R. Ohayon. Three-dimensional modal analysis of sloshing under surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 65(1-3) :87–105, 2011.
- [102] M. El-Kamali, J.-S. Schotté, and R. Ohayon. Computation of the equilibrium position of a liquid with surface tension inside a tank of complex geometry and extension to sloshing dynamic cases. *Computational Mechanics*, 46(1) :169–184, 2010.
- [103] T. Miras, J.-S. Schotté, and R. Ohayon. Energy approach for static and linearized dynamic studies of elastic structures containing incompressible liquids with capillarity : a theoretical formulation. *Computational Mechanics*, 50(6) :729–741, 2012.
- [104] T. Miras, J.-S. Schotté, and R. Ohayon. Liquid sloshing damping in an elastic container. *Journal of Applied Mechanics*, 79(1) :010902, 2012.
- [105] A. Mikchevitch, N. Greffet, and O. Boiteau. Les simulations d’interaction fluide-structure plus efficaces grâce aux dernières évolutions en matière de hpc, 2017.
- [106] M. Chiba, N. Yamaki, and J. Tani. Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid-part iii : Experimental results. *Thin-Walled Structures*, 3 :1–14, 1985.
- [107] L. G. Olson and K.-J. Bathe. Analysis of fluid-structure interactions. a direct symmetric coupled formulation based on the fluid velocity potential. *Computers and Structures*, 21 :21–32, 1985.
- [108] J.-S. Schotté. Cours d’interaction fluide-structure, 2016.
- [109] J. A. Deruntz and T. L. Geers. Added mass computation by the boundary integral method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(3) :531–550, 1978.
- [110] Y. Ousset and M.N. Sayhi. Added mass computations by integral equation methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 19(9) :1355–1373, 1983.
- [111] L. Greengard and V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *Journal of computational physics*, 73(2) :325–348, 1987.

- [112] L. Grasedyck and W. Hackbusch. Construction and arithmetics of h-matrices. *Computing*, 70(4) :295–334, 2003.
- [113] K. Khorshidi. Effect of hydrostatic pressure and depth of fluid on the vibrating rectangular plates partially in contact with a fluid. *Applied Mechanics and Materials*, 110-116(9) :927–935, 2012.
- [114] A. Rajan and J. Kochupillai. Dynamic analysis of a pressure prestressed in vacuo torus with follower load stiffness. In *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, pages 1760–1768, 2015.
- [115] G. Watts, S. Pradyumna, and M. K. Singha. Free vibration analysis of non-rectangular plates in contact with bounded fluid using element free galerkin method. *Ocean Engineering*, 160 :438–448, 2018.
- [116] A. Bermudez, R. Rodriguez, and D. Santamarina. A finite element solution of an added mass formulation for coupled fluid-solid vibrations. *Numerische Mathematik*, 87 :201–227, 2000.
- [117] M. Chiba. Nonlinear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom, containing liquid. part ii : Linear axisymmetric vibration analysis. *Journal of Fluids and Structures*, 7 :57–73, 1993.
- [118] K. Khorshidi, F. Akbari, and H. Ghadirian. Experimental and analytical modal studies of vibrating rectangular plates in contact with a bounded fluid. *Ocean Engineering*, 140 :146–154, 2017.
- [119] K. A. Brakke. The surface evolver. *Experimental mathematics*, 1(2) :141–165, 1992.
- [120] Q. Akkaoui, E. Capiez-Lernout, C. Soize, and R. Ohayon. Solving generalized eigenvalue problems for large scale fluid-structure computational models with mid-power computers. *Computers & Structures*, 205 :45–54, 2018.
- [121] Q. Akkaoui, E. Capiez-Lernout, C. Soize, and R. Ohayon. Revisiting the experiment of a free-surface resonance of a liquid in a vibration tank using a nonlinear fluid–structure computational model. *Journal of Fluids and Structures*, 85 :149–164, 2019.





## Annexe A

# Lois de comportement hyperélastiques quasi-incompressibles

- Dérivation de potentiels volumiques et isochores
- Modèles Néo-Hookéen, Mooney-Rivlin et Yeoh
- Écriture en notation de Voigt facilitant la mise en donnée numérique

### A.1 Potentiels hyperélastiques et invariants

Le potentiel hyperélastique  $\psi$  est la somme d'un potentiel isochore et d'un potentiel volumique tel que :

$$\psi = \psi_{\text{iso}}(\bar{C}_1, \bar{C}_2) + \psi_{\text{vol}}(\bar{C}_3) \quad (\text{A.1})$$

avec

$$\bar{C}_1 = C_1 C_3^{-\frac{1}{3}}, \quad \bar{C}_2 = C_1 C_3^{-\frac{2}{3}}, \quad \text{et} \quad \bar{C}_3 = C_3^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.2})$$

et

$$C_1 = \text{tr}(\mathbf{C}), \quad C_2 = \frac{1}{2} [\text{tr}^2(\mathbf{C}) - \text{tr}(\mathbf{C}^2)] \quad \text{et} \quad C_3 = \det(\mathbf{C}) \quad (\text{A.3})$$

### A.2 Dérivée première d'un potentiel hyperélastique

Dans le cas de grandes déformations, il est possible d'utiliser des lois de comportement hyperélastiques quasi-incompressibles pour calculer le tenseur des contraintes tel que :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{A.4})$$

### A.3. DÉRIVÉE SECONDE D'UN POTENTIEL HYPERÉLASTIQUE

---

où  $\mathbf{C}$  est le tenseur de Cauchy-Green droit défini par  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  et  $\psi$  est un potentiel d'énergie par unité de volume.

$$\frac{\partial \bar{C}_1}{\partial \mathbf{C}} = C_3^{-\frac{1}{3}} \frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{C}} - \frac{1}{3} C_1 C_3^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial C_3}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial \bar{C}_2}{\partial \mathbf{C}} = C_3^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial C_2}{\partial \mathbf{C}} - \frac{2}{3} C_2 C_3^{-\frac{5}{3}} \frac{\partial C_3}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \bar{C}_3}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} C_3^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial C_3}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial \mathbf{C}} = C_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial C_3}{\partial \mathbf{C}} = C_3 \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{A.10})$$

### A.3 Dérivée seconde d'un potentiel hyperélastique

$$\mathbb{D} = 4 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{C}_1}{\partial \mathbf{C}^2} &= C_3^{-\frac{1}{3}} \frac{\partial^2 C_1}{\partial \mathbf{C}^2} - \frac{1}{3} C_3^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial C_3}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{C}} - \frac{1}{3} C_1 C_3^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial^2 C_3}{\partial \mathbf{C}^2} \\ &\quad + \frac{4}{9} C_1 C_3^{-\frac{7}{3}} \frac{\partial C_3}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial C_3}{\partial \mathbf{C}} - \frac{1}{3} C_3^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial C_3}{\partial \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{C}_2}{\partial \mathbf{C}^2} &= C_3^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial^2 C_2}{\partial \mathbf{C}^2} - \frac{2}{3} C_3^{-\frac{5}{3}} \frac{\partial C_3}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial C_2}{\partial \mathbf{C}} - \frac{2}{3} C_2 C_3^{-\frac{5}{3}} \frac{\partial^2 C_3}{\partial \mathbf{C}^2} \\ &\quad + \frac{10}{9} C_2 C_3^{-\frac{8}{3}} \frac{\partial C_3}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial C_3}{\partial \mathbf{C}} - \frac{2}{3} I_3^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial C_2}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial C_3}{\partial \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial^2 \bar{C}_3}{\partial \mathbf{C}^2} = \frac{1}{2} C_3^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 C_3}{\partial \mathbf{C}^2} - \frac{1}{4} C_3^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial C_3}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial C_3}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial \mathbf{C}^2} = \mathbb{O} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial^2 C_2}{\partial \mathbf{C}^2} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \mathbb{I}^{\text{sym}} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial^2 C_3}{\partial \mathbf{C}^2} = C_3 \left( \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}^{-1} \mathbb{I}^{\text{sym}} \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (\text{A.17})$$

avec les notations indicielles suivante :

$$\mathbb{I}_{ijkl}^{\text{sym}} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{A.18})$$

$$\left( \mathbf{C}^{-1} \mathbb{I}^{\text{sym}} \mathbf{C}^{-1} \right)_{ijkl} = \frac{1}{2} \left( C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} + C_{il}^{-1} C_{jk}^{-1} \right) \quad (\text{A.19})$$

## A.4 Exemples de potentiels retrouvés dans la littérature

### A.4.1 Potentiels volumiques

Le potentiel volumique est fonction du troisième invariant  $\bar{C}_3$  et des paramètres matériaux liés au module de compressibilité noté  $k_0$ . Nous faisons le choix de prendre le potentiel volumique suivant :

$$\Psi_{\text{vol}} = \frac{k_0}{2} \left( \bar{C}_3 - 1 \right)^2 \quad (\text{A.20})$$

Notons que de nombreuses expressions de potentiels volumiques existent dans la littérature. Lorsque nous dérivons ce potentiel par rapport à  $\bar{C}_{III}$ , nous obtenons par définition le terme de pression hydrostatique comme suit :

$$p \equiv \frac{\partial \Psi_{\text{vol}}}{\partial \bar{C}_3} = k_0 \left( \bar{C}_3 - 1 \right) \quad (\text{A.21})$$

### A.4.2 Potentiels isochores

Nous ne développons que trois potentiels isochores dans la suite : le modèle Neo-Hookeen, le modèle de Mooney-Rivlin et le modèle de Yeoh. Le modèle Neo-Hookeen peut être défini par le potentiel d'énergie suivant :

$$\Psi_{\text{iso}} = c_{10} \left( \bar{C}_1 - 3 \right) \quad (\text{A.22})$$

avec  $c_{10} = \mu/2$  et  $\mu$  le module de cisaillement. Le modèle de Mooney-Rivlin défini par deux constantes :

$$\Psi_{\text{iso}} = c_{10} \left( \bar{C}_1 - 3 \right) + c_{01} \left( \bar{C}_2 - 3 \right) \quad (\text{A.23})$$

#### A.4. EXEMPLES DE POTENTIELS RETROUVÉS DANS LA LITTÉRATURE

---

avec  $c_{10} = \mu_1/2$  et  $c_{20} = -\mu_2/2$  et  $\mu = \mu_1 - \mu_2$ . Enfin, le modèle de Yeoh est défini par trois constantes :

$$\Psi_{\text{iso}} = c_{10} (\bar{C}_1 - 3) + c_{20} (\bar{C}_1 - 3)^2 + c_{30} (\bar{C}_1 - 3)^3 \quad (\text{A.24})$$

avec  $c_{10}$ ,  $c_{20}$  et  $c_{30}$  retrouvé par l'expérience.

##### A.4.3 Dérivées premières des potentiels

Pour le modèle Neo-Hookeen :

$$\mathbf{S} = 2c_{10} \frac{\partial \bar{C}_1}{\partial \mathbf{C}} + 2k_0 (\bar{C}_3 - 1) \frac{\partial \bar{C}_3}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{A.25})$$

Pour le modèle de Mooney-Rivlin :

$$\mathbf{S} = 2c_{10} \frac{\partial \bar{C}_1}{\partial \mathbf{C}} + 2c_{01} \frac{\partial \bar{C}_2}{\partial \mathbf{C}} + 2k_0 (\bar{C}_3 - 1) \frac{\partial \bar{C}_3}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{A.26})$$

Pour le modèle de Yeoh :

$$\mathbf{S} = 2c_{10} \frac{\partial \bar{C}_1}{\partial \mathbf{C}} + 4c_{20} (\bar{C}_1 - 3) \frac{\partial \bar{C}_1}{\partial \mathbf{C}} + 6c_{30} (\bar{C}_1 - 3)^2 \frac{\partial \bar{C}_1}{\partial \mathbf{C}} + 2k_0 (\bar{C}_3 - 1) \frac{\partial \bar{C}_3}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{A.27})$$

##### A.4.4 Dérivées secondes des potentiels

Commençons par les termes du modèle Neo-Hookeen :

$$\mathbb{D} = 4c_{10} \frac{\partial^2 \bar{C}_1}{\partial \mathbf{C}^2} + 4k_0 (\bar{C}_3 - 1) \frac{\partial^2 \bar{C}_3}{\partial \mathbf{C}^2} + 4k_0 \frac{\partial \bar{C}_3}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{C}_3}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{A.28})$$

puis les termes issus du modèle de Mooney-Rivlin :

$$\mathbb{D} = 4c_{10} \frac{\partial^2 \bar{C}_1}{\partial \mathbf{C}^2} + 4c_{01} \frac{\partial^2 \bar{C}_2}{\partial \mathbf{C}^2} + 4k_0 (\bar{C}_3 - 1) \frac{\partial^2 \bar{C}_3}{\partial \mathbf{C}^2} + 4k_0 \frac{\partial \bar{C}_3}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{C}_3}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{A.29})$$

et enfin ceux du modèle de Yeoh :

$$\begin{aligned} \mathbb{D} = & 4c_{10} \frac{\partial^2 \bar{C}_1}{\partial \mathbf{C}^2} + 8c_{20} (\bar{C}_1 - 3) \frac{\partial^2 \bar{C}_1}{\partial \mathbf{C}^2} + 8c_{20} \frac{\partial \bar{C}_1}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{C}_1}{\partial \mathbf{C}} + 12c_{30} (\bar{C}_1 - 3)^2 \frac{\partial^2 \bar{C}_1}{\partial \mathbf{C}^2} \\ & + 24c_{30} (\bar{C}_1 - 3) \frac{\partial \bar{C}_1}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{C}_1}{\partial \mathbf{C}} + 4k_0 (\bar{C}_3 - 1) \frac{\partial^2 \bar{C}_3}{\partial \mathbf{C}^2} + 4k_0 \frac{\partial \bar{C}_3}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{C}_3}{\partial \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

## A.5 Formes de Voigt

Quelque soit le modèle. L'implémentation numérique des opérateurs est effectuée via les notations de Voigt. Nous rappelons ci-dessous leurs expressions :

$$\mathbf{C}_{1C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{2C} = \begin{bmatrix} C_{22} + C_{33} \\ C_{33} + C_{11} \\ C_{11} + C_{22} \\ -C_{12} \\ -C_{23} \\ -C_{31} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{3C} = \begin{bmatrix} C_{22}C_{33} - C_{23}C_{23} \\ C_{33}C_{11} - C_{31}C_{31} \\ C_{11}C_{22} - C_{12}C_{12} \\ C_{23}C_{31} - C_{33}C_{12} \\ C_{31}C_{12} - C_{11}C_{23} \\ C_{12}C_{23} - C_{22}C_{31} \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

$$\mathbf{C}_{1CC} = \mathbf{O} \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbf{C}_{2CC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

$$\mathbf{C}_{3CC} = \begin{bmatrix} 0 & C_{33} & C_{22} & 0 & -C_{23} & 0 \\ C_{33} & 0 & C_{11} & 0 & 0 & -C_{31} \\ C_{22} & C_{11} & 0 & -C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{12} & \frac{-C_{33}}{2} & \frac{C_{31}}{2} & \frac{C_{23}}{2} \\ -C_{23} & 0 & 0 & \frac{C_{31}}{2} & \frac{-C_{11}}{2} & \frac{C_{12}}{2} \\ 0 & -C_{31} & 0 & \frac{C_{23}}{2} & \frac{C_{12}}{2} & \frac{-C_{22}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

Une dernière remarque concerne les tenseurs obtenus par produits tensoriels " $\otimes$ ". Les opérateurs matricielles ( $6 \times 6$ ) sont obtenus par multiplication d'un vecteur colonne ( $6 \times 1$ ) par un vecteur ligne ( $1 \times 6$ ). Ainsi, prenons par exemple le terme suivant :

$$\frac{\partial C_I}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial C_I}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{A.35})$$

son écriture matricielle sous forme de notation de voigth devient :

$$\mathbf{C}_{1C}^T \mathbf{C}_{1C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

## Annexe B

# Symétrie de $\Delta\delta W_\Sigma$

- Preuve de la symétrie de la forme bilinéaire  $\Delta\delta W_\Sigma$
- Utilisation d'opérateurs volumiques intrinsèques

### B.1 Preuve 1

Dans cette annexe, nous donnons les éléments de démonstration de l'équation (2.59) qui prouve la symétrie de la forme bilinéaire  $\Delta\delta W_\Sigma$  (voir Section 2.3). Nous rappelons son expression ci-dessous :

$$\Delta\delta W_\Sigma(\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = - \int_\Sigma \delta\mathbf{u} \cdot p \Delta\mathbf{n} \, ds + \rho_{fg} \int_\Sigma \delta\mathbf{u} \cdot \Delta z \mathbf{n} \, ds \quad (\text{B.1})$$

Une transformation classique entre l'élément courant et l'élément de référence nous donne la relation suivante :

$$\int_\Sigma \mathbf{n} \, ds = \int_{\Sigma_0} J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0 \, dS \quad (\text{B.2})$$

Nous linéarisons l'expression de  $J$  et  $\mathbf{F}^{-T}$ , respectivement notés  $\Delta J$  et  $\Delta\mathbf{F}^{-T}$  tels que :

$$\Delta\mathbf{F}^{-T} = -\mathbf{grad}^T \Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{B.3})$$

$$\Delta J = J \operatorname{div} \Delta\mathbf{u} \quad (\text{B.4})$$

avec  $\Delta\mathbf{u}$  un petit incrément de déplacement. L'expression de l'intégrale de la variation de normale est donnée par :

$$\int_\Sigma \Delta\mathbf{n} \, ds = \int_{\Sigma_0} (\Delta J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0 + J \Delta\mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0) \, dS \quad (\text{B.5})$$

$$= \int_{\Sigma_0} (J \operatorname{div} \Delta\mathbf{u} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0 - J \mathbf{grad}^T \Delta\mathbf{u} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0) \, dS \quad (\text{B.6})$$

$$= \int_\Sigma (\operatorname{div} \Delta\mathbf{u} \mathbf{n} - \mathbf{grad}^T \Delta\mathbf{u} \mathbf{n}) \, ds \quad (\text{B.7})$$



Par conséquent, l'expression de  $\Delta\delta W_\Sigma$  s'écrit :

$$\Delta\delta W_\Sigma(\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_\Sigma \delta\mathbf{u} \cdot p(\operatorname{div}\Delta\mathbf{u} \mathbf{n} - \mathbf{grad}^T \Delta\mathbf{u} \mathbf{n} + \rho_f g(\mathbf{e}_z \cdot \Delta\mathbf{u}) \mathbf{n}) ds \quad (\text{B.8})$$

A partir de ces expressions nous pouvons détailler la différence suivante :

$$\Delta\delta W_\Sigma(\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) - \Delta\delta W_\Sigma(\delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) = \alpha + \beta + \gamma \quad (\text{B.9})$$

où

$$\alpha = - \int_\Sigma p(\operatorname{div}\Delta\mathbf{u} \delta\mathbf{u} - \operatorname{div}\delta\mathbf{u} \Delta\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{B.10})$$

$$\beta = \int_\Sigma p(\delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}^T \Delta\mathbf{u} \mathbf{n} - \Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}^T \delta\mathbf{u} \mathbf{n}) ds \quad (\text{B.11})$$

$$\gamma = \rho_f g \int_\Sigma (\delta\mathbf{u}(\mathbf{e}_z \cdot \Delta\mathbf{u}) - \Delta\mathbf{u}(\mathbf{e}_z \cdot \delta\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{B.12})$$

L'expression Eq. (B.12) contient un produit mixte tel que :

$$\gamma = \rho_f g \int_\Sigma (\mathbf{e}_z \times (\delta\mathbf{u} \times \Delta\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{B.13})$$

En remarquant la relation suivante :

$$\delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}^T \Delta\mathbf{u} \mathbf{n} = \mathbf{grad}\Delta\mathbf{u} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{B.14})$$

$$\Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}^T \delta\mathbf{u} \mathbf{n} = \mathbf{grad}\delta\mathbf{u} \Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{B.15})$$

l' Eq. (B.11) devient :

$$\beta = \int_\Sigma p(\mathbf{grad}\delta\mathbf{u} \Delta\mathbf{u} - \mathbf{grad}\Delta\mathbf{u} \delta\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{B.16})$$

Finalement , nous à partir de l'expression suivante

$$\mathbf{rot}(\delta\mathbf{u} \times \Delta\mathbf{u}) = \operatorname{div}\Delta\mathbf{u} \delta\mathbf{u} - \mathbf{grad}\Delta\mathbf{u} \delta\mathbf{u} - \operatorname{div}\delta\mathbf{u} \Delta\mathbf{u} + \mathbf{grad}\delta\mathbf{u} \Delta\mathbf{u} \quad (\text{B.17})$$

$$p = -\rho_f g(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_z - h) \quad (\text{B.18})$$

nous obtenons

$$\alpha + \beta = - \int_\Sigma p \mathbf{rot}(\delta\mathbf{u} \times \Delta\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{B.19})$$

$$= - \int_\Sigma \mathbf{rot}(p \delta\mathbf{u} \times \Delta\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds + \int_\Sigma \mathbf{grad}p \times (\delta\mathbf{u} \times \Delta\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{B.20})$$

$$= - \int_\Sigma \mathbf{rot}(p \delta\mathbf{u} \times \Delta\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds - \underbrace{\rho_f g \int_\Sigma \mathbf{e}_z \times (\delta\mathbf{u} \times \Delta\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds}_{-\gamma} \quad (\text{B.21})$$

En prenant en compte les Eqs. (B.13) et (B.21) et en utilisant les formules de Green-Ostrogradski, l'Eq. (B.9) devient :

$$\Delta\delta W_{\Sigma}(\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) - \Delta\delta W_{\Sigma}(\delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) = - \int_{\Sigma} \mathbf{rot}(p \delta\mathbf{u} \times \Delta\mathbf{u}) ds \quad (\text{B.22})$$

$$= - \oint_{\partial\Sigma} p (\delta\mathbf{u} \times \Delta\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{B.23})$$

où  $\partial\Sigma$  est le bord curviligne de la surface mouillée. Cette équation est explicitement utilisée en Section 2.3 afin de prouver la symétrie de la forme  $\Delta\delta W_{\Sigma}$ .



## Annexe C

# Ligne de niveau

- Découpage d'éléments quadratiques à 8 nœuds
- Calculs de nouveaux points de Gauss et poids de Gauss associés
- Mise en donnée et interface graphique pour la visualisation des cas rencontrés
- Support curviligne de la ligne de contact

Nous rappelons que la méthode de ligne de niveau se base sur la recherche de la courbe définie par une fonction scalaire  $\phi(\mathbf{x}) = 0$ . Dans notre cas, cette fonction est définie par :

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_z - h \quad (\text{C.1})$$

avec  $h$  la hauteur de fluide.

### C.1 Discrétisation EF de la ligne de niveau

Nous faisons le choix de travailler sur une fonction ligne de niveau discrétisée par éléments finis :

$$\phi^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{\text{node}}} \phi_i N_i(\mathbf{x}) \quad (\text{C.2})$$

avec  $\phi_i$  les valeurs de la ligne de niveau aux nœuds du maillage considéré et  $N_i$  les fonctions de formes éléments finis. Cette approximation apporte des erreurs dès la discrétisations. En effet, l'iso-zero de la ligne de niveau de la géométrie ne sera pas coïncidente à l'iso-zero des éléments surfaciques.

## C.2 Découpage d'éléments quadratiques à 8 nœuds

”Découper” un élément revient à (i) trouver la l’iso-zero de la ligne de niveau à l’intérieur de l’élément de référence et (ii) proposer une discrétisation de cet élément de référence pour proposer des nouveaux points de Gauss et poids de Gauss nécessaire à l’intégration numérique. D’un point de vue mathématique, dans un élément de référence, cela revient à trouver  $(\xi, \eta) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$  tels que :

$$\phi^e(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\eta^2 + \alpha_6\xi\eta + \alpha_7\xi\eta^2 + \alpha_8\xi^2\eta \quad (\text{C.3})$$

avec dans notre cas :

$$\alpha_1 = -0.25 (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + 0.5 (\phi_5 + \phi_6 + \phi_7 + \phi_8) \quad (\text{C.4})$$

$$\alpha_2 = 0.5 (\phi_6 - \phi_8) \quad (\text{C.5})$$

$$\alpha_3 = 0.5 (-\phi_5 + \phi_7) \quad (\text{C.6})$$

$$\alpha_4 = 0.25 (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) - 0.5 (\phi_5 + \phi_7) \quad (\text{C.7})$$

$$\alpha_5 = 0.25 (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) - 0.5 (\phi_6 + \phi_8) \quad (\text{C.8})$$

$$\alpha_6 = 0.25 (\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - \phi_4) \quad (\text{C.9})$$

$$\alpha_7 = 0.25 (-\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - \phi_4) + 0.5 (-\phi_6 + \phi_8) \quad (\text{C.10})$$

$$\alpha_8 = 0.25 (-\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + 0.5 (\phi_5 - \phi_7) \quad (\text{C.11})$$

Nous ferons attention car ces coefficients dépendent des fonctions de formes et de l’implémentation de celle-ci. Dans notre cas, nous nous sommes basés sur les fonctions proposés dans [Gmur].

Une première approche consiste à chercher les zeros de cette fonction sur le bord d’un élément de référence. Dans ce cas, quatre équations du second degré sont à considérer :

Pour chaque cas, nous retrouvons une équation du second degré. Nous cherchons en particulier les solutions réelles définies sur un intervalle restreint à  $[-1, 1]$  pour les quatre cas. Pour plus de clareté, nous stockerons ces solutions dans un vecteur qui liste les 8 racines potentielles de manière suivante :

$$\begin{aligned} \underline{r} &= [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3 \quad \eta_4 \quad \xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \quad \xi_4]^T \\ &= [r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4 \quad r_5 \quad r_6 \quad r_7 \quad r_8]^T \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

C.2. DÉCOUPAGE D'ÉLÉMENTS QUADRATIQUES À 8 NŒUDS

---

	$\phi(\xi, \eta) = 0$
Cas $\xi = -1$	$(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4) + (\alpha_3 - \alpha_6 + \alpha_8)\eta + (\alpha_5 - \alpha_7)\eta^2$
Cas $\xi = 1$	$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4) + (\alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_8)\eta + (\alpha_5 - \alpha_7)\eta^2$
Cas $\eta = -1$	$(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5) + (\alpha_2 + \alpha_6 + \alpha_7)\xi + (\alpha_4 - \alpha_8)\xi^2$
Cas $\eta = 1$	$(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5) + (\alpha_2 + \alpha_6 + \alpha_7)\xi + (\alpha_4 + \alpha_8)\xi^2$

TABLE C.1 – Polynomes du second degré à résoudre sur les bords de l'éléments de référence

tels que le couple  $(r_1, r_2)$ ,  $(r_2, r_3)$ ,  $(r_5, r_6)$  et  $(r_7, r_8)$  sont les couples solutions des cas  $\xi = -1$ ,  $\xi = 1$ ,  $\eta = -1$  et  $\eta = 1$ . Nous pouvons ainsi lister les possibilités et en déduire le nombre de cas que nous serons amener à traiter. Dans notre cas, nous avons au maximum 8 solutions réelles comprises sur l'intervalle  $[-1, 1]$  et au minimum 1 solution réelle. Répétorions le nombre de cas minimum à traiter sous forme de liste :

1 racine	1 parmi 8	8
2 racines distinctes	2 parmi 8	28
3 racines distinctes	3 parmi 8	56
4 racines distinctes	4 parmi 8	70
5 racines distinctes	5 parmi 8	56
6 racines distinctes	6 parmi 8	28
7 racines distinctes	7 parmi 8	8
8 racines distinctes	8 parmi 8	1
Total de possibilités		>255

TABLE C.2 – Estimation du nombre de cas à traiter

C.2.1 Cas à deux racines distinctes

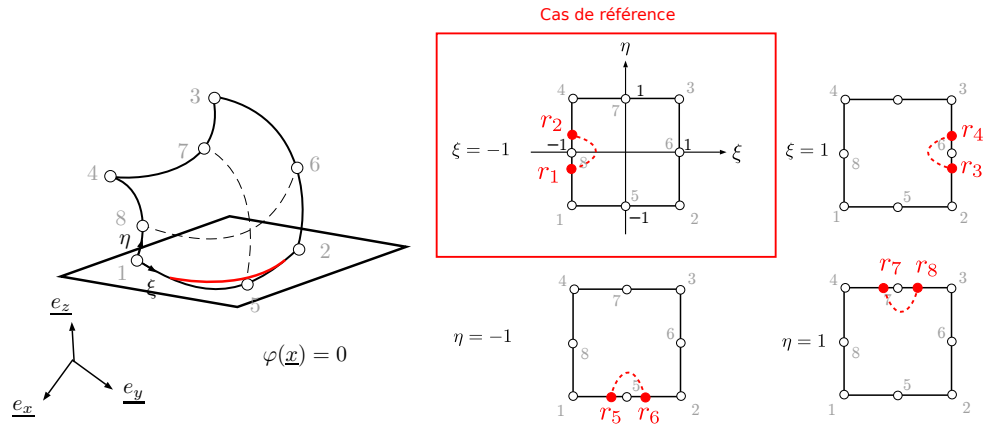


FIGURE C.1 – Exemple cas 1 dans l'élément réel

Cas 1	rotation
$(r_1, r_2)$	0
$(r_3, r_4)$	$-\pi$
$(r_5, r_6)$	$-\pi/2$
$(r_7, r_8)$	$\pi/2$

TABLE C.3 – Couples solutions cas 1

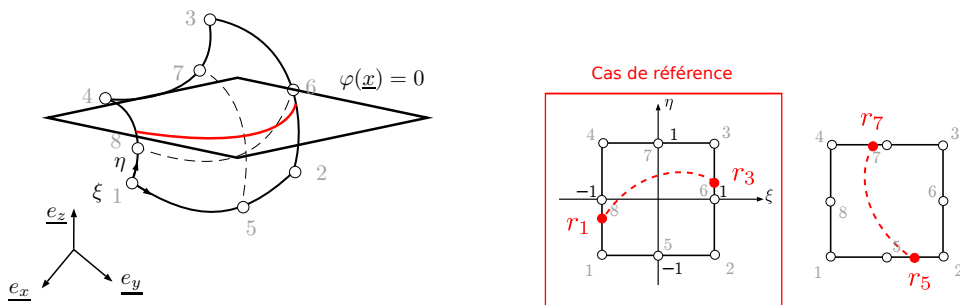


FIGURE C.2 – Exemple cas 2 dans l'élément réel

C.2. DÉCOUPAGE D'ÉLÉMENTS QUADRATIQUES À 8 NŒUDS

Cas 2	rotation
$(r_1, r_3), (r_2, r_3)$	0
$(r_1, r_4), (r_2, r_4)$	
$(r_5, r_7), (r_5, r_8)$	$-\pi/2$
$(r_6, r_7), (r_6, r_8)$	

TABLE C.4 – Couples solutions cas 2

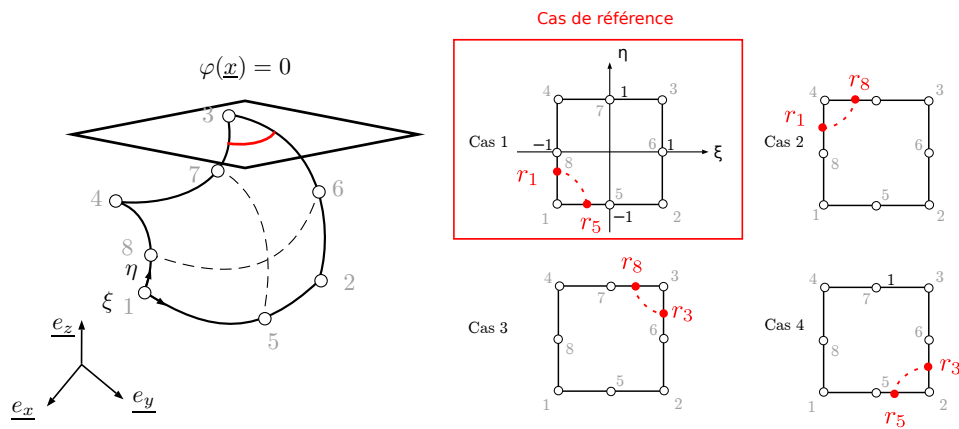


FIGURE C.3 – Exemple cas 3 dans l'élément réel

Cas 3	rotation
$(r_1, r_5), (r_1, r_6)$	0
$(r_2, r_5), (r_2, r_6)$	
$(r_1, r_8), (r_1, r_7)$	$\pi/2$
$(r_2, r_8), (r_2, r_7)$	
$(r_3, r_8), (r_3, r_7)$	$3\pi/2$
$(r_4, r_8), (r_4, r_7)$	
$(r_3, r_5), (r_3, r_6)$	$-\pi/2$
$(r_4, r_5), (r_4, r_6)$	

TABLE C.5 – Couples solutions cas 3



### C.2.2 Ligne de contact

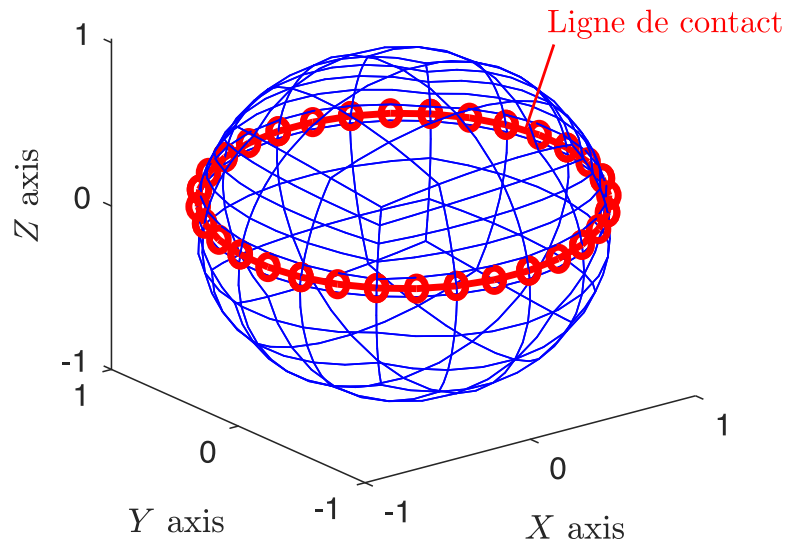


FIGURE C.4 – Support EF curviligne de la ligne de contact

### C.3 Interface graphique pour la détection de cas

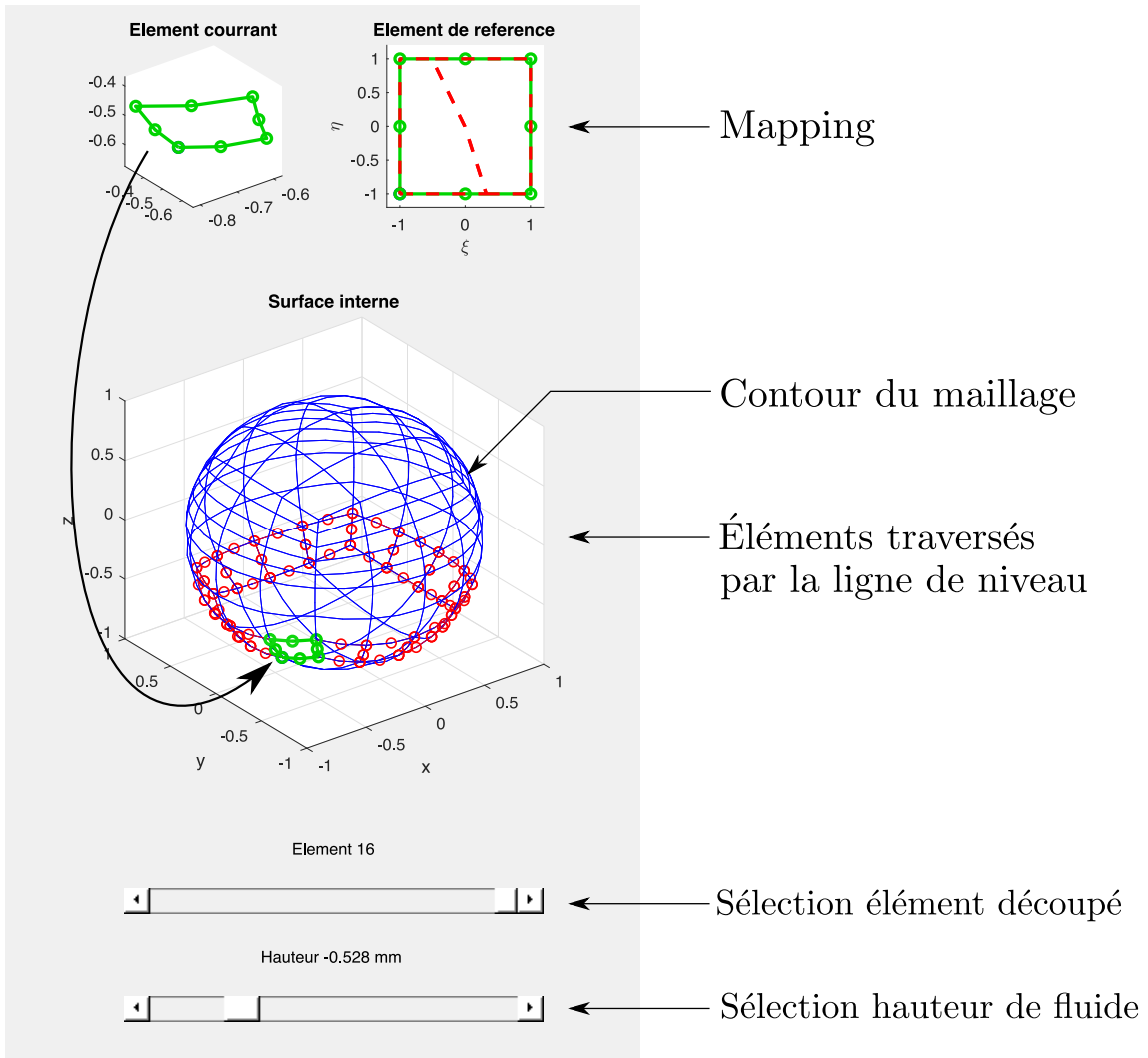


FIGURE C.5 – Interface graphique pour faciliter le développement de la fonction ligne de niveau avec : le maillage de la surface interne, la sélection des éléments à découper, la sélection d’une hauteur de fluide, l’élément réel, l’élément de référence contenant l’iso-zero de la ligne de niveau.



## Annexe D

# Développements mathématiques associés à la PGD

Développements des formes continues et des opérateurs discrétisés associés au chapitre sur la réduction de modèle *a priori*.

- Formes continues des opérateurs
- Formes discrètes des opérateurs (vecteurs et matrices tangentes)

## D.1 Développement des formes continues

### D.1.1 Développement de $\delta G_{\text{int}}$

$$\delta G_{\text{int}}(\mathbf{\Lambda}, \lambda) = \int_I \int_{\Omega} \delta \mathbf{E}_{\mathbf{\Lambda}} : \mathbb{D} : \mathbf{E} dV dp = \sum_{i=1}^{12} a_i \quad (\text{D.1})$$

$$a_1 = \int_I \int_{\Omega} \lambda^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{\Lambda}) : \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{\Lambda}) dV dp \quad (\text{D.2})$$

$$a_2 = \int_I \int_{\Omega} \lambda^3 \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{\Lambda}) : \mathbb{D} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Lambda}) dV dp \quad (\text{D.3})$$

$$a_3 = \int_I \int_{\Omega} \lambda^3 (\boldsymbol{\gamma}(\delta \mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Lambda}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{\Lambda}, \delta \mathbf{\Lambda})) : \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{\Lambda}) dV dp \quad (\text{D.4})$$

$$a_4 = \int_I \int_{\Omega} \lambda^4 (\boldsymbol{\gamma}(\delta \mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Lambda}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{\Lambda}, \delta \mathbf{\Lambda})) : \mathbb{D} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Lambda}) dV dp \quad (\text{D.5})$$

$$a_5 = \int_I \int_{\Omega} \lambda \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{\Lambda}) : \mathbb{D} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{u})) dV dp \quad (\text{D.6})$$

$$a_6 = \int_I \int_{\Omega} \lambda^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{\Lambda}) : \mathbb{D} : (\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{\Lambda})) dV dp \quad (\text{D.7})$$

$$a_7 = \int_I \int_{\Omega} \lambda^2 (\boldsymbol{\gamma}(\delta \mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Lambda}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{\Lambda}, \delta \mathbf{\Lambda})) : \mathbb{D} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{u})) dV dp \quad (\text{D.8})$$

$$a_8 = \int_I \int_{\Omega} \lambda^3 (\boldsymbol{\gamma}(\delta \mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Lambda}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{\Lambda}, \delta \mathbf{\Lambda})) : \mathbb{D} : (\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{\Lambda})) dV dp \quad (\text{D.9})$$

$$a_9 = \int_I \int_{\Omega} \lambda^2 (\boldsymbol{\gamma}(\delta \mathbf{\Lambda}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{\Lambda})) : \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{\Lambda}) dV dp \quad (\text{D.10})$$

$$a_{10} = \int_I \int_{\Omega} \lambda^3 (\boldsymbol{\gamma}(\delta \mathbf{\Lambda}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{\Lambda})) : \mathbb{D} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Lambda}) dV dp \quad (\text{D.11})$$

$$a_{11} = \int_I \int_{\Omega} \lambda (\boldsymbol{\gamma}(\delta \mathbf{\Lambda}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{\Lambda})) : \mathbb{D} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{u})) dV dp \quad (\text{D.12})$$

$$a_{12} = \int_I \int_{\Omega} \lambda^2 (\boldsymbol{\gamma}(\delta \mathbf{\Lambda}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{\Lambda})) : \mathbb{D} : (\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{\Lambda})) dV dp \quad (\text{D.13})$$

**D.1.2 Développement de  $\delta H_{\text{int}}$**

$$\int_I \int_{\Omega} \delta \mathbf{E}_{\lambda} : \mathbb{D} : \mathbf{E} dV dp = \sum_{i=1}^{12} c_i \quad (\text{D.14})$$

$$c_1 = \int_I \int_{\Omega} \delta \lambda \lambda \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Lambda}) : \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Lambda}) dV dp \quad (\text{D.15})$$

$$c_2 = \int_I \int_{\Omega} \delta \lambda \lambda^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Lambda}) : \mathbb{D} : \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}) dV dp \quad (\text{D.16})$$

$$c_3 = \int_I \int_{\Omega} \delta \lambda 2\lambda^2 \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}) : \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Lambda}) dV dp \quad (\text{D.17})$$

$$c_4 = \int_I \int_{\Omega} \delta \lambda 2\lambda^3 \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}) : \mathbb{D} : \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}) dV dp \quad (\text{D.18})$$

$$c_5 = \int_I \int_{\Omega} \delta \lambda \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Lambda}) : \mathbb{D} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{u})) dV dp \quad (\text{D.19})$$

$$c_6 = \int_I \int_{\Omega} \delta \lambda \lambda \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Lambda}) : \mathbb{D} : (\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Lambda}) + \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{u})) dV dp \quad (\text{D.20})$$

$$c_7 = \int_I \int_{\Omega} \delta \lambda 2\lambda \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}) : \mathbb{D} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{u})) dV dp \quad (\text{D.21})$$

$$c_8 = \int_I \int_{\Omega} \delta \lambda 2\lambda^2 \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}) : \mathbb{D} : (\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Lambda}) + \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{u})) dV dp \quad (\text{D.22})$$

$$c_9 = \int_I \int_{\Omega} \delta \lambda \lambda \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Lambda}) : \mathbb{D} : \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Lambda}) dV dp \quad (\text{D.23})$$

$$c_{10} = \int_I \int_{\Omega} \delta \lambda \lambda^2 \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Lambda}) : \mathbb{D} : \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}) dV dp \quad (\text{D.24})$$

$$c_{11} = \int_I \int_{\Omega} \delta \lambda \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Lambda}) : \mathbb{D} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{u})) dV dp \quad (\text{D.25})$$

$$c_{12} = \int_I \int_{\Omega} \delta \lambda \lambda \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Lambda}) : \mathbb{D} : (\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Lambda}) + \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{u})) dV dp \quad (\text{D.26})$$

**D.1.3 Développement de  $\delta G_{\text{ext}}$** 

$$\delta G_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^6 b_i \quad (\text{D.27})$$

$$b_1 = - \int_I \int_{\partial_{t\omega}} \delta \mathbf{\Lambda} \cdot p \lambda (\mathbf{X}_{,\xi} \times \mathbf{X}_{,\eta}) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.28})$$

$$b_2 = - \int_I \int_{\partial_{t\omega}} \delta \mathbf{\Lambda} \cdot p \lambda^2 ((\mathbf{X}_{,\xi} \times \mathbf{\Lambda}_{,\eta}) + (\mathbf{\Lambda}_{,\xi} \times \mathbf{X}_{,\eta})) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.29})$$

$$b_3 = - \int_I \int_{\partial_{t\omega}} \delta \mathbf{\Lambda} \cdot p \lambda^3 (\mathbf{\Lambda}_{,\xi} \times \mathbf{\Lambda}_{,\eta}) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.30})$$

$$b_4 = - \int_I \int_{\partial_{t\omega}} \delta \mathbf{\Lambda} \cdot p \lambda (\mathbf{u}_{,\xi} \times \mathbf{u}_{,\eta}) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.31})$$

$$b_5 = - \int_I \int_{\partial_{t\omega}} \delta \mathbf{\Lambda} \cdot p \lambda ((\mathbf{X}_{,\xi} \times \mathbf{u}_{,\eta}) + (\mathbf{u}_{,\xi} \times \mathbf{X}_{,\eta})) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.32})$$

$$b_6 = - \int_I \int_{\partial_{t\omega}} \delta \mathbf{\Lambda} \cdot p \lambda^2 ((\mathbf{u}_{,\xi} \times \mathbf{\Lambda}_{,\eta}) + (\mathbf{\Lambda}_{,\xi} \times \mathbf{u}_{,\eta})) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.33})$$

**D.1.4 Développement de  $\delta H_{\text{ext}}$** 

$$\delta H_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^6 d_i \quad (\text{D.34})$$

$$d_1 = - \int_I \int_{\partial_{t\Omega}} \delta \lambda p \mathbf{\Lambda} \cdot (\mathbf{X}_{,\xi} \times \mathbf{X}_{,\eta}) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.35})$$

$$d_2 = - \int_I \int_{\partial_{t\Omega}} \delta \lambda p \lambda \mathbf{\Lambda} \cdot ((\mathbf{X}_{,\xi} \times \mathbf{\Lambda}_{,\eta}) + (\mathbf{\Lambda}_{,\xi} \times \mathbf{X}_{,\eta})) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.36})$$

$$d_3 = - \int_I \int_{\partial_{t\Omega}} \delta \lambda p \lambda^2 \mathbf{\Lambda} \cdot (\mathbf{\Lambda}_{,\xi} \times \mathbf{\Lambda}_{,\eta}) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.37})$$

$$d_4 = - \int_I \int_{\partial_{t\Omega}} \delta \lambda p \mathbf{\Lambda} \cdot (\mathbf{u}_{,\xi} \times \mathbf{u}_{,\eta}) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.38})$$

$$d_5 = - \int_I \int_{\partial_{t\Omega}} \delta \lambda p \mathbf{\Lambda} \cdot ((\mathbf{X}_{,\xi} \times \mathbf{u}_{,\eta}) + (\mathbf{u}_{,\xi} \times \mathbf{X}_{,\eta})) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.39})$$

$$d_6 = - \int_I \int_{\partial_{t\Omega}} \delta \lambda p \lambda \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot ((\mathbf{u}_{,\xi} \times \mathbf{\Lambda}_{,\eta}) + (\mathbf{\Lambda}_{,\xi} \times \mathbf{u}_{,\eta})) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.40})$$

## D.2 Opérateurs discrétisés et coefficients associés

### D.2.1 Coefficients de $\mathbf{G}_{\text{int}}$ qui dépendent de $\lambda$

Considering  $\lambda$  and the  $k$  first  $\lambda_i$  known, we can express the integration over the interval  $I$  of each terms which depend on  $p$ . The Tab. D.1 recapitulates them all :

$\alpha_1 = \int_I \lambda^2 dp$	$\alpha_2 = \int_I \lambda^3 dp$	$\alpha_3 = \int_I \lambda^3 dp$
$\alpha_4 = \int_I \lambda^4 dp$	$\alpha_{5i} = \int_I \lambda \lambda_i dp$	$\alpha_{5ij} = \int_I \lambda \lambda_i \lambda_j dp$
$\alpha_{6i} = \int_I \lambda^2 \lambda_i dp$	$\alpha_{7i} = \int_I \lambda^2 \lambda_i dp$	$\alpha_{7ij} = \int_I \lambda^2 \lambda_i \lambda_j dp$
$\alpha_{8i} = \int_I \lambda^3 \lambda_i dp$	$\alpha_{9i} = \int_I \lambda^2 \lambda_i dp$	$\alpha_{10i} = \int_I \lambda^3 \lambda_i dp$
$\alpha_{11ij} = \int_I \lambda \lambda_i \lambda_j dp$	$\alpha_{11ijl} = \int_I \lambda \lambda_i \lambda_j \lambda_l dp$	$\alpha_{12ij} = \int_I \lambda^2 \lambda_i \lambda_j dp$

TABLE D.1 – Expressions de tous les  $\alpha$ -coefficients qui dépendent de  $p$  pour le calcul de  $\delta G_{\text{int}}$

### D.2.2 Termes de $\mathbf{G}_{\text{int}}$

Nous considérons la forme de Voigt de  $\varepsilon$  et  $\gamma$ , respectivement notés  $\hat{\varepsilon}$  et  $\hat{\gamma}$  tels que :

$$\hat{\varepsilon}(\bullet) = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{31}]^T \quad (\text{D.41})$$

$$\hat{\gamma}(\bullet, \mathbf{a}) + \hat{\gamma}(\mathbf{a}, \bullet) = [\gamma_{11} \quad \gamma_{22} \quad \gamma_{33} \quad 2\gamma_{12} \quad 2\gamma_{23} \quad 2\gamma_{31}]^T \quad (\text{D.42})$$

Nous reprenons les formes discrètes  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}_{\text{NL}}$ , qui dépendent des fonctions de formes et de leurs dérivés. Les formes de Voigt  $\hat{\varepsilon}$  la partie symétrique de  $\hat{\gamma}$  sont données par :

$$\hat{\varepsilon}(\delta \mathbf{\Lambda}^h) = \mathbf{B} \delta \mathbf{r} \quad (\text{D.43})$$

$$\hat{\gamma}(\delta \mathbf{\Lambda}^h, \mathbf{a}) + \hat{\gamma}(\mathbf{a}, \delta \mathbf{\Lambda}^h) = \mathbf{B}_{\text{NL}}(\mathbf{a}) \delta \mathbf{r} \quad (\text{D.44})$$

avec  $\mathbf{a}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  et  $\delta \mathbf{r}$  le vecteur inconnu nodal virtuel. En considérant toutes ces notations, les termes de  $\mathbf{G}_{\text{int}}$  sont listés ci-dessous :



$$\mathbf{G}_1 = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\Lambda}) dV \quad (\text{D.45})$$

$$\mathbf{G}_2 = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}) dV \quad (\text{D.46})$$

$$\mathbf{G}_3 = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\text{NL}}(\boldsymbol{\Lambda})^T \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\Lambda}) dV \quad (\text{D.47})$$

$$\mathbf{G}_4 = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\text{NL}}(\boldsymbol{\Lambda})^T \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}) dV \quad (\text{D.48})$$

$$\mathbf{G}_{5i} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\Lambda}) dV \quad (\text{D.49})$$

$$\mathbf{G}_{5ij} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} (\hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\Lambda}_i, \boldsymbol{\Lambda}_j) + \hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\Lambda}_j, \boldsymbol{\Lambda}_i)) dV \quad (\text{D.50})$$

$$\mathbf{G}_{6i} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} (\hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}_i) + \hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\Lambda}_i, \boldsymbol{\Lambda})) dV \quad (\text{D.51})$$

$$\mathbf{G}_{7i} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\text{NL}}(\boldsymbol{\Lambda})^T \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\Lambda}_i) dV \quad (\text{D.52})$$

$$\mathbf{G}_{7ij} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\text{NL}}(\boldsymbol{\Lambda})^T \mathbf{D} (\hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\Lambda}_i, \boldsymbol{\Lambda}_j) + \hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\Lambda}_j, \boldsymbol{\Lambda}_i)) dV \quad (\text{D.53})$$

$$\mathbf{G}_{8i} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\text{NL}}(\boldsymbol{\Lambda})^T \mathbf{D} (\hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}_i) + \hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\Lambda}_i, \boldsymbol{\Lambda})) dV \quad (\text{D.54})$$

$$\mathbf{G}_{9i} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\text{NL}}(\boldsymbol{\Lambda}_i)^T \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\Lambda}) dV \quad (\text{D.55})$$

$$\mathbf{G}_{10i} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\text{NL}}(\boldsymbol{\Lambda}_i)^T \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}) dV \quad (\text{D.56})$$

$$\mathbf{G}_{11ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\text{NL}}(\boldsymbol{\Lambda}_i)^T \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\Lambda}_j) dV \quad (\text{D.57})$$

$$\mathbf{G}_{11ijl} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\text{NL}}(\boldsymbol{\Lambda}_i)^T \mathbf{D} (\hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\Lambda}_j, \boldsymbol{\Lambda}_l) + \hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\Lambda}_l, \boldsymbol{\Lambda}_j)) dV \quad (\text{D.58})$$

$$\mathbf{G}_{12ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\text{NL}}(\boldsymbol{\Lambda}_i)^T \mathbf{D} (\hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}_i) + \hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\Lambda}_i, \boldsymbol{\Lambda})) dV \quad (\text{D.59})$$

### D.2.3 Coefficients de $\mathbf{G}_{\text{ext}}$ dépendant de $\lambda$

$\beta_1 = \int_I p \lambda dp$	$\beta_2 = \int_I p \lambda^2 dp$	$\beta_3 = \int_I p \lambda^3 dp$
$\beta_{4ij} = \int_I p \lambda \lambda_i \lambda_j dp$	$\beta_{5i} = \int_I p \lambda \lambda_i dp$	$\beta_{6i} = \int_I p \lambda^2 \lambda_i dp$

TABLE D.2 – Expressions de tous les  $\beta$ -coefficients qui dépendent de  $p$  pour le calcul de  $\delta G_{\text{ext}}$

### D.2.4 Forme discrète de $\mathbf{G}_{\text{ext}}$

$$\mathbf{G}_{e1} = - \int_{\partial_{t\omega}} \mathbf{N}^T(\mathbf{X}_{,\xi} \times \mathbf{X}_{,\eta}) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.60})$$

$$\mathbf{G}_{e2} = - \int_{\partial_{t\omega}} \mathbf{N}^T((\mathbf{X}_{,\xi} \times \boldsymbol{\Lambda}_{,\eta}) + (\boldsymbol{\Lambda}_{,\xi} \times \mathbf{X}_{,\eta})) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.61})$$

$$\mathbf{G}_{e3} = - \int_{\partial_{t\omega}} \mathbf{N}^T(\boldsymbol{\Lambda}_{,\xi} \times \boldsymbol{\Lambda}_{,\eta}) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.62})$$

$$\mathbf{G}_{e4ij} = - \int_{\partial_{t\omega}} \mathbf{N}^T(\boldsymbol{\Lambda}_{i,\xi} \times \boldsymbol{\Lambda}_{j,\eta}) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.63})$$

$$\mathbf{G}_{e5i} = - \int_{\partial_{t\omega}} \mathbf{N}^T((\mathbf{X}_{,\xi} \times \boldsymbol{\Lambda}_{i,\eta}) + (\boldsymbol{\Lambda}_{i,\xi} \times \mathbf{X}_{,\eta})) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.64})$$

$$\mathbf{G}_{e6i} = - \int_{\partial_{t\omega}} \mathbf{N}^T((\boldsymbol{\Lambda}_{i,\xi} \times \boldsymbol{\Lambda}_{,\eta}) + (\boldsymbol{\Lambda}_{,\xi} \times \boldsymbol{\Lambda}_{i,\eta})) d\xi d\eta dp \quad (\text{D.65})$$

## D.3 Opérateurs tangents

### D.3.1 Matrice analogue à une raideur matériau

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_m = & \alpha_1 \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \\ & + \alpha_2 \int_{\Omega} (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{\text{NL}}(\boldsymbol{\Lambda}) + \mathbf{B}_{\text{NL}}^T(\boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{D} \mathbf{B}) dV \\ & + \alpha_4 \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\text{NL}}^T(\boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{D} \mathbf{B}_{\text{NL}}(\boldsymbol{\Lambda}) dV \\ & + \sum_i^k \alpha_{6i} \int_{\Omega} (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{\text{NL}}(\boldsymbol{\Lambda}_i) + \mathbf{B}_{\text{NL}}^T(\boldsymbol{\Lambda}_i) \mathbf{D} \mathbf{B}) dV \\ & + \sum_i^k \alpha_{8i} \int_{\Omega} (\mathbf{B}_{\text{NL}}^T(\boldsymbol{\Lambda}_i) \mathbf{D} \mathbf{B}_{\text{NL}}(\boldsymbol{\Lambda}) + \mathbf{B}_{\text{NL}}^T(\boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{D} \mathbf{B}_{\text{NL}}(\boldsymbol{\Lambda}_i)) dV \\ & + \sum_i^k \sum_j^k \alpha_{12ij} \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\text{NL}}^T(\boldsymbol{\Lambda}_i) \mathbf{D} \mathbf{B}_{\text{NL}}(\boldsymbol{\Lambda}_j) dV dp \end{aligned} \quad (\text{D.66})$$

### D.3.2 Matrice analogue à une raideur géométrique

$$\mathbf{K}_g = \int_{\Omega} \mathbf{G}_{\text{NL}}^T \mathbf{S}_{\text{NL}} \mathbf{G}_{\text{NL}} dV \quad (\text{D.67})$$

### D.3. OPÉRATEURS TANGENTS

---

avec  $\mathbf{G}_{\text{NL}}$  et  $\mathbf{S}_{\text{NL}}$  détaillés ci-dessous :

$$\mathbf{S}_{\text{NL}} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}' & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{S}' & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{S}' \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{G}_{\text{NL}} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}' \end{pmatrix} \quad (\text{D.68})$$

et

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 \dots & N_{ne,\xi} \\ N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 \dots & N_{ne,\eta} \\ N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 \dots & N_{ne,\zeta} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.69})$$

L'opérateur  $\mathbf{S}_{\text{NL}}$  dépend de  $\mathbf{S}' = \int_I \mathbb{D}\mathbf{E} dp$  tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}' = & \alpha_2 \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Lambda}) + \alpha_4 \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}) \\ & + \sum_{i=1}^k \alpha_{7i} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\Lambda}_i) + \sum_{i=1}^k \alpha_{8i} \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}_i, \boldsymbol{\Lambda}) + \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}_i) \\ & + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_{7ij} \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Lambda}_i, \boldsymbol{\Lambda}_j) \end{aligned} \quad (\text{D.70})$$

#### D.3.3 Matrice analogue à une raideur des forces suivieuses

$$\mathbf{K}_f = -\beta_2 \int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\boldsymbol{\Omega}_{\xi} \mathbf{N}_{,\eta} - \boldsymbol{\Omega}_{\eta} \mathbf{N}_{,\xi}) dV \quad (\text{D.71})$$

$$- \beta_3 \int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\mathbf{A}_{\xi} \mathbf{N}_{,\eta} - \mathbf{A}_{\eta} \mathbf{N}_{,\xi}) dV \quad (\text{D.72})$$

$$- \sum_{i=1}^k \beta_{6i} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\mathbf{A}_{i\xi} \mathbf{N}_{,\eta} - \mathbf{A}_{i\eta} \mathbf{N}_{,\xi}) dV \quad (\text{D.73})$$

avec  $\boldsymbol{\Omega}_{\xi}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}_{\eta}$ ,  $\mathbf{A}_{\xi}$ ,  $\mathbf{A}_{\eta}$ ,  $\mathbf{A}_{i\xi}$  et  $\mathbf{A}_{i\eta}$  qui sont des matrices anti-symétrique à un produit scalaire :

$$\boldsymbol{\Omega}_{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & -Z_{,\xi} & Y_{,\xi} \\ Z_{,\xi} & 0 & -X_{,\xi} \\ -Y_{,\xi} & X_{,\xi} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\Omega}_{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & -Z_{,\eta} & Y_{,\eta} \\ Z_{,\eta} & 0 & -X_{,\eta} \\ -Y_{,\eta} & X_{,\eta} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.74})$$

$$\mathbf{A}_{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda_{z,\xi} & \Lambda_{y,\xi} \\ \Lambda_{z,\xi} & 0 & -\Lambda_{x,\xi} \\ -\Lambda_{y,\xi} & \Lambda_{x,\xi} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{A}_{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda_{z,\eta} & \Lambda_{y,\eta} \\ \Lambda_{z,\eta} & 0 & -\Lambda_{x,\eta} \\ -\Lambda_{y,\eta} & \Lambda_{x,\eta} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.75})$$

$$\mathbf{A}_{i\xi} = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda_{iz,\xi} & \Lambda_{iy,\xi} \\ \Lambda_{iz,\xi} & 0 & -\Lambda_{ix,\xi} \\ -\Lambda_{iy,\xi} & \Lambda_{ix,\xi} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{A}_{i\eta} = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda_{iz,\eta} & \Lambda_{iy,\eta} \\ \Lambda_{iz,\eta} & 0 & -\Lambda_{ix,\eta} \\ -\Lambda_{iy,\eta} & \Lambda_{ix,\eta} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.76})$$

## D.4 Coefficients de $\delta H$ dépendant de $\Lambda$

Nous rappelons l'expression de l'équation du problème en paramètre de pression :

$$\delta H(\lambda) = \int_I \delta \lambda (q_0 + r_0 p + (q_1 + r_1 p)\lambda + (q_2 + r_2 p)\lambda^2 + q_3 \lambda^3) dp = 0 \quad (\text{D.77})$$

avec les  $q_i$  exprimés ci-dessous

$$q_0 = \sum_{i=1}^k (\theta_{5i} + \theta_{6i}) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (\theta_{5ij} + \theta_{11ij}) \lambda_i \lambda_j + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \theta_{11ijl} \lambda_i \lambda_j \lambda_l \quad (\text{D.78})$$

$$q_1 = \theta_1 + \sum_{i=1}^k (\theta_{6i} + 2\theta_{7i} + \theta_{9i}) \lambda_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (2\theta_{7ij} + \theta_{12ij}) \lambda_i \lambda_j \quad (\text{D.79})$$

$$q_2 = \theta_2 + \theta_3 + \sum_{i=1}^k (\theta_{8i} + \theta_{10i}) \lambda_i \quad (\text{D.80})$$

$$q_3 = \theta_4 \quad (\text{D.81})$$

et les coefficients  $\theta$  donnés en Tab. D.3.

$\theta_1 = \int_{\Omega} \varepsilon(\Lambda) : \mathbb{D} : \varepsilon(\Lambda) dV$	$\theta_2 = \int_{\Omega} \varepsilon(\Lambda) : \mathbb{D} : \gamma(\Lambda, \Lambda) dV$
$\theta_3 = \int_{\Omega} \gamma(\Lambda, \Lambda) : \mathbb{D} : \varepsilon(\Lambda) dV$	$\theta_4 = \int_{\Omega} \gamma(\Lambda, \Lambda) : \mathbb{D} : \gamma(\Lambda, \Lambda) dV$
$\theta_{5i} = \int_{\Omega} \varepsilon(\Lambda) : \mathbb{D} : \varepsilon(\Lambda_i) dV$	$\theta_{5ij} = \int_{\Omega} \varepsilon(\Lambda) : \mathbb{D} : \gamma(\Lambda_i, \Lambda_j) dV$
$\theta_{6i} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \delta \lambda \lambda \varepsilon(\Lambda) : \mathbb{D} : (\gamma(\mathbf{u}, \Lambda) + \gamma(\Lambda, \mathbf{u})) dV$	
$\theta_{7i} = \int_{\Omega} \gamma(\Lambda, \Lambda) : \mathbb{D} : \varepsilon(\Lambda_i) dV$	$\theta_{7ij} = \int_{\Omega} \gamma(\Lambda, \Lambda) : \mathbb{D} : \gamma(\Lambda_i, \Lambda_j) dV$
$\theta_{8i} = \int_{\Omega} \gamma(\Lambda, \Lambda) : \mathbb{D} : (\gamma(\Lambda_i, \Lambda) + \gamma(\Lambda, \Lambda_i)) dV$	
$\theta_{9i} = \int_{\Omega} \gamma(\Lambda, \mathbf{u}) + \gamma(\mathbf{u}, \Lambda) : \mathbb{D} : \varepsilon(\Lambda) dV$	
$\theta_{10i} = \int_{\Omega} \gamma(\Lambda, \Lambda_i) + \gamma(\Lambda_i, \Lambda) : \mathbb{D} : \gamma(\Lambda, \Lambda) dV$	
$\theta_{11ij} = \int_{\Omega} \gamma(\Lambda, \Lambda_i) + \gamma(\Lambda_i, \Lambda) : \mathbb{D} : \varepsilon(\Lambda_j) dV$	
$\theta_{11ijl} = \int_{\Omega} \gamma(\Lambda, \Lambda_i) + \gamma(\Lambda_i, \Lambda) : \mathbb{D} : \gamma(\Lambda_j, \Lambda_l) dV$	
$\theta_{12ij} = \int_{\Omega} \gamma(\Lambda, \mathbf{u}) + \gamma(\Lambda_i, \Lambda) : \mathbb{D} : (\gamma(\Lambda_i, \Lambda) + \gamma(\Lambda, \mathbf{u})) dV$	

TABLE D.3 –  $\theta$ -coefficients qui dépendent de  $\Lambda$  et  $\Lambda_i$  pour calculer les coefficients  $q_i$

Les  $r_i$  coefficients sont donnés par :

$$r_0 = \kappa_1 + \sum_{i=1}^k \kappa_{5i} \lambda_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \kappa_{4ij} \lambda_i \lambda_j \quad (\text{D.82})$$

$$r_1 = \kappa_2 + \sum_{i=1}^k \kappa_{6i} \lambda_i \quad (\text{D.83})$$

$$r_2 = \kappa_3 \quad (\text{D.84})$$

avec les  $\kappa$ -coefficients détaillés en Tab. D.4.

$\kappa_1 = \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{\Lambda} \cdot (\mathbf{X}_{,\xi} \times \mathbf{X}_{,\eta}) \, d\xi d\eta$
$\kappa_2 = \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{\Lambda} \cdot ((\mathbf{X}_{,\xi} \times \mathbf{\Lambda}_{,\eta}) + (\mathbf{\Lambda}_{,\xi} \times \mathbf{X}_{,\eta})) \, d\xi d\eta$
$\kappa_3 = \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{\Lambda} \cdot (\mathbf{\Lambda}_{,\xi} \times \mathbf{\Lambda}_{,\eta}) \, d\xi d\eta$
$\kappa_{4ij} = \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{\Lambda} \cdot (\mathbf{\Lambda}_{i,\xi} \times \mathbf{\Lambda}_{j,\eta}) \, d\xi d\eta$
$\kappa_{5i} = \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{\Lambda} \cdot ((\mathbf{X}_{,\xi} \times \mathbf{\Lambda}_{i,\eta}) + (\mathbf{\Lambda}_{i,\xi} \times \mathbf{X}_{,\eta})) \, d\xi d\eta$
$\kappa_{6i} = \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{\Lambda} \cdot ((\mathbf{\Lambda}_{i,\xi} \times \mathbf{\Lambda}_{,\eta}) + (\mathbf{\Lambda}_{,\xi} \times \mathbf{\Lambda}_{i,\eta})) \, d\xi d\eta$

TABLE D.4 –  $\kappa$ -coefficients qui dépendent de  $\mathbf{\Lambda}$  et  $\mathbf{\Lambda}_i$  pour calculer les coefficients  $r_i$

## Annexe E

# Projection de champs EF entres maillages

La projection d'un champ EF entres différents maillages consiste à exprimer le champ d'une solution EF  $\mathbf{q}_{\text{mesh-2}}$  sur un maillage (maillage 2) sachant la solution EF  $\mathbf{q}_{\text{mesh-1}}$  sur un maillage existant (maillage 1).

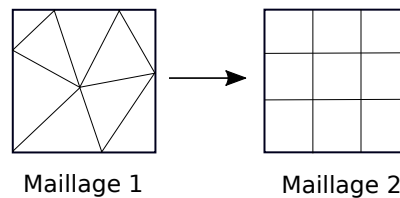


FIGURE E.1 – Passer du maillage 1 au maillage 2

**Étape 1** Pour chaque noeuds du maillage 2, déterminer si il est inclus ou non dans une maille du maillage 1 ;

**Étape 2** Si ce point est inclus, calculer la valeur interpolée du champ appartenant au maillage 1 en ce point ;

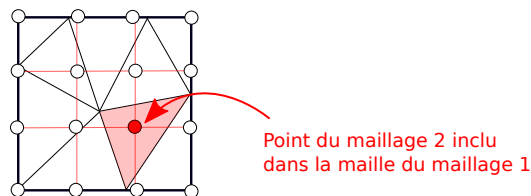


FIGURE E.2 – Point du maillage 2 inclus dans une maille

**Cas particulier** Si un point du maillage n'est pas inclus dans un élément du maillage 1, c'est

un cas particulier qui sera traité ultérieurement.

## E.1 Projection entre deux maillages volumiques

Dans la pratique, il est nécessaire de calculer la position d'un point dans l'élément de référence connaissant la position de ce point dans l'élément réel (voir Fig. E.3).

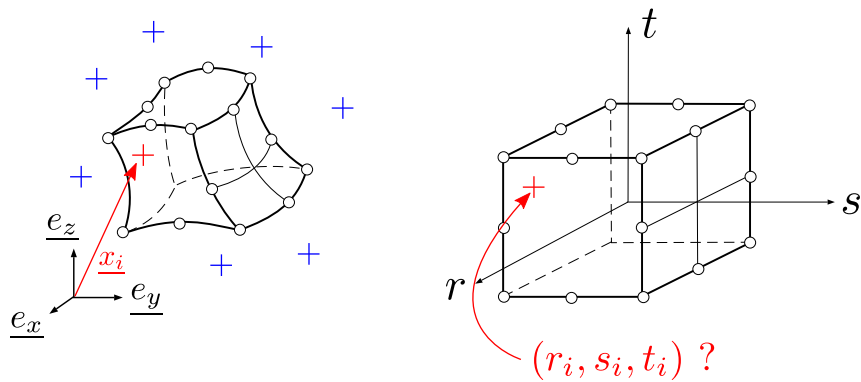


FIGURE E.3 – Calculer les valeurs des paramètres

Tout d'abord nous calculons le centre d'un élément dans l'élément réel et nous calculons la distance maximal entre les points de l'élément par rapport au centre (voir Fig. E.4a). Dans un deuxième temps, nous ne sélectionons que les points du maillage 2 inclus dans cette boule de rayon  $d$  (voir Fig. E.4b).

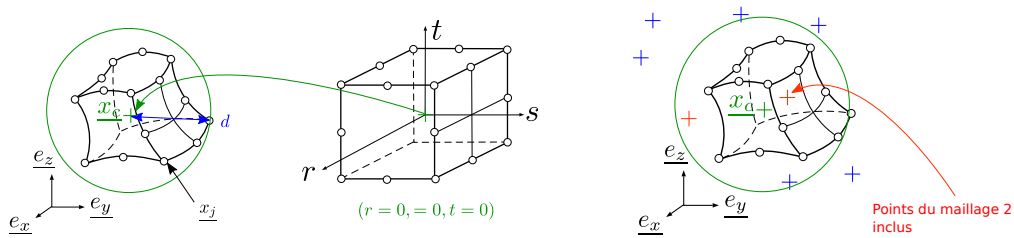


FIGURE E.4 – *Inverse mapping*

Pour chaque point inclus dans cette boule, il faut résoudre un système non linéaire. C'est à dire que nous connaissons la valeurs  $\underline{x}_i$  du nuage dans l'élément réel et nous cherchons les paramètres  $(r_i, s_i, t_i)$  associés tels que :

$$\underline{x}(r_i, s_i, t_i) = \underline{x}_i \tag{E.1}$$

## E.1. PROJECTION ENTRE DEUX MAILLAGES VOLUMIQUES

---

avec  $\underline{x}$  le champ discrétisé combinaison linéaire des fonctions de formes est défini comme suit :

$$\underline{x} = \sum_j \phi_j(r, s, t) \underline{x}_j \quad (\text{E.2})$$

---

### Algorithme E.1 : Algorithme *inverse mapping*

---

**Initialisation**  $\mathbf{r}^{(0)} = (r^{(0)}, s^{(0)}, t^{(0)})$

**Calculer** distance  $d^{(0)} = | \mathbf{X}(\mathbf{r}^{(0)}) - \mathbf{X}_i |$

**Tant que**  $d^{(k)} < 1 \times 10^{-6}$

**Calculer** jacobian matrix  $\mathbf{J}^{(k)} = \mathbf{J}(\mathbf{r}^{(k)})$

**Résoudre**  $\mathbf{J}^{(k)} d\mathbf{r} = \mathbf{d}^{(k)}$

**Mettre à jour** solution  $\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} + d\mathbf{q}$

**Calculer** distance  $d^{(k+1)} = | \mathbf{X}(\mathbf{r}^{(k+1)}) - \mathbf{X}_i |$

**Fin tant que**

---

TABLE E.1 – Algorithme *inverse mapping*

---

### Algorithm E.2 : Projection de champ EF entres maillages

---

**Boucle** sur les éléments du maillage 1

**Calculer** Centre de l'élément  $\mathbf{x}_c$

**Calculer** Rayon boule

**Calculer** Distance nœuds maillage 2

**Boucle sur le nuage proche**  $d^{(k)} < 1 \times 10^{-6}$

**Algorithme**  $(r, s, t) = \text{Inverse mapping}$

**Test**  $| r | < 1 ?$

**Test**  $| s | < 1 ?$

**Test**  $| t | < 1 ?$

**Si** point inclus dans maillage

**Interpolation** EF du champ en ce point

**Fin boucle nuage proche** distance  $d^{(k+1)} = | \mathbf{X}(\mathbf{r}^{(k+1)}) - \mathbf{X}_i |$

**Fin boucle sur les éléments**

---

TABLE E.2 – Algorithme de projection de champs EF





<b>le cnam</b>	<p><b>Christophe HOAREAU</b></p> <p>Vibrations hydroélastiques de réservoirs élastiques couplés à un fluide interne incompressible à surface libre autour d'un état précontraint</p>	<b>le cnam</b>
----------------	--	----------------

**Résumé :** Cette thèse de doctorat porte sur le calcul par la méthode des éléments finis du comportement dynamique de réservoirs élastiques précontraints contenant un liquide interne à surface libre. Nous considérons que la pression hydrostatique exercée par le fluide interne incompressible sur les parois flexibles du réservoir est à l'origine de grands déplacements, conduisant ainsi à un état d'équilibre non-linéaire géométrique. Le changement de raideur lié à cet état précontraint induit un décalage des fréquences de résonances du problème de vibrations linéaires couplées. L'objectif principal du travail est donc d'estimer, par des approches numériques précises et efficaces, l'influence des non-linéarités géométriques sur le comportement hydroélastique du système réservoir/liquide interne autour de différentes configurations d'équilibre. La méthodologie développée s'effectue en deux étapes. La première consiste à calculer l'état statique non-linéaire par une approche éléments finis lagrangienne totale. L'action du fluide sur la structure est ici modélisée par des forces suiveuses hydrostatiques. La deuxième étape porte sur le calcul des vibrations couplées linéarisées. Un modèle d'ordre réduit original est notamment proposé pour limiter les coûts de calcul associés à l'estimation de l'effet de masse ajoutée. Enfin, divers exemples sont proposés et comparés à des résultats de la littérature (issus de simulations numériques ou d'essais expérimentaux) pour montrer l'efficacité et la validité des différentes approches numériques développées dans ce travail.

**Mots clés :** Interaction fluide-structure, Méthode des éléments-finis, Forces suiveuses hydrostatiques, Précontrainte, Hydroélasticité, Masse ajoutée, Modèle d'ordre réduit

**Abstract :** This doctoral thesis focuses on the calculation by the finite element method of the dynamic behavior of prestressed elastic tanks containing an internal liquid with a free surface. We consider that the hydrostatic pressure exerted by the incompressible internal fluid on the flexible walls of the tank causes large displacements, thus leading to a geometric non-linear equilibrium state. The change of stiffness related to this prestressed state induces a shift in the resonance frequencies of the coupled linear vibration problem. The main objective of the work is therefore to estimate, through precise and efficient numerical approaches, the influence of geometric non-linearities on the hydroelastic behavior of the reservoir/internal liquid system around different equilibrium configurations. The methodology developed is carried out in two stages. The first one consists in calculating the non-linear static state by a total Lagrangian finite element approach. The action of the fluid on the structure is modelled here by hydrostatic following forces. The second step is the calculation of linearized coupled vibrations. In particular, an original reduced order model is proposed to limit the calculation costs associated with the estimation of the added mass effect. Finally, various examples are proposed and compared with results from the literature (from numerical simulations or experimental tests) to show the effectiveness and validity of the different numerical approaches developed in this work.

**Keywords :** Fluid-structure interaction, Finite element method, Hydrostatic follower forces, Prestressing, Hydroelasticity, Added mass, Reduced order model