Étude mathématique et numérique des résonances dans une micro-cavité optique

Zoïs Moitier

▶ **To cite this version:**

Zoïs Moitier. Étude mathématique et numérique des résonances dans une micro-cavité optique. Analyse numérique [cs.NA]. Université de Rennes, 2019. Français. NNT : 2019REN1S053 . tel-02308978v2

HAL Id: tel-02308978

https://theses.hal.science/tel-02308978v2

Submitted on 24 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE MATHSTIC

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

ÉCOLE DOCTORALE N° 601
Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication
Spécialité : Mathématiques et leurs Interactions

Par

Zoïs MOITIER

Étude mathématique et numérique des résonances dans une micro-cavité optique

Thèse présentée et soutenue à l'université de Rennes 1, le 3 octobre 2019
Unité de recherche : IRMAR (UMR 6625)

Rapporteurs avant soutenance :

Éric BONNETIER	Professeur, Université Grenoble Alpes
Maciej ZWORSKI	Professor, University of California, Berkeley, USA

Composition du Jury :

Président :	Vincent BRUNEAU	Professeur, Université de Bordeaux
Rapporteur :	Éric BONNETIER	Professeur, Université Grenoble Alpes
Examinateurs :	Gabriel CALOZ	Professeur, Université de Rennes 1
	Patrick JOLY	Directeur de recherche, ENSTA ParisTech
	Fabrice MAHÉ	Maître de conférences, Université de Rennes 1
	Euan SPENCE	Reader, University of Bath, UK
Dir. de thèse :	Monique DAUGE	Directrice de recherche, Université de Rennes 1
Co-dir. de thèse :	Stéphane BALAC	Maître de conférences, Université de Rennes 1

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mes directeurs, Monique et Stéphane, à leur disponibilité et à leur écoute durant tout ce doctorat. Je les remercie en particulier pour leur lecture (et relecture) attentive de ce manuscrit, et j'oserais même ajouter : leur survie à cette dernière tâche.

Je remercie vivement Éric Bonnetier et Maciej Zworski d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Je leur suis reconnaissant du temps qu'ils ont consacré à la lecture de ce manuscrit. Je remercie également Vincent Bruneau, Gabriel Caloz, Patrick Joly, Euan Spence et Fabrice Mahé, qui me font le plaisir et l'honneur de venir compléter mon jury. *Thank you for traveling to Rennes.*

Je remercie aussi tous les autres membres de Sonate/Sonatine, Éric Darrigrand, Yannick Dumeige, Patrice Féron et Yvon Lafranche. Un merci tout spécial à Yvon, que j'ai beaucoup embêté à propos d'XLiFE++, Gmsh et autre. Même s'il ne fait pas partie officiellement de ce groupe, merci à Martin Costabel pour ses conseils.

Je remercie tout le personnel administratif de l'IRMAR et de l'UFR de Mathématiques. En particulier, Marie-Aude Verger et Florian Rogowski, qui m'ont aidé à me sortir du dédale des démarches administratives. Pour son aide à organiser les rencontres doctorale Lebesgue 2018, merci à Xhensila Lachambre, et à Hélène Rousseaux la gestionnaire du séminaire Landau.

Merci aux membres du pôle analyse de m'avoir accueilli ainsi qu'à tous les membres de l'IRMAR avec qui j'ai enseigné et fait de la vulgarisation. En particulier, à Anne Virrion, qui m'a permis de tester la classe inversée. Merci aussi à Pierre Navaro, pour son aide informatique.

Les doctorants avec lesquels j'ai partagé les pauses midi, goûter et crêperie. Ceux de la même année sont Adrien, Arnaud (nos discussions surréaliste ou geek le midi), Joackim, Kevin, Ninon, Thi, Simon, et les plus jeunes, Antoine, Josselin, Léo, Léopold, Louis, Paul (et ces opérateurs rigolos), Thibault. J'emporte un souvenir tout particulier de mes co-bureaux : Grégory, qui a répondu à de nombreuses questions que j'avais en tant que nouveau doctorant, Duc-Tho, avec qui j'ai partagé ces trois années, et Ali, qui nous a accompagné pendant plusieurs mois.

Pierre, se fut un « plaisir » d'avoir été ton coloc pendant ces trois ans. Je te remercie pour la découverte du houmous, pour nos discussions scientifiques et toutes les autres aussi, ce blason qui ne fut pas, et la table Poincaré. ⊡

Merci à ma famille, ma mère et Fred, mon père et mes sœurs, Agathe, Margot et Sacha, pour leur soutien durant toutes ces années qui ont mené à ce jour.

Friedelinde Paix-Douce, une heureuse trouvaille de cette thèse [1], un grand merci de m'avoir ~~supporté~~ soutenu pendant ces années.

1. Pour des raisons de droits d'auteurs, je dois souligner que je ne suis pas l'auteur principal de cette trouvaille, celui-ci se reconnaîtra.

Table des matières

1 Introduction **1**
1.1 Motivations 2
1.2 Utilisation de couches parfaitement adaptées (PML) 6
1.3 Analyse asymptotique des résonances 8
1.4 Organisation du manuscrit 16

I Étude d'une couche parfaitement adaptées (PML) pour le problème de résonances **19**

2 Un problème purement 1D **21**
2.1 Cadre fonctionnel 22
2.2 Description du problème simplifié 23
2.3 Réduction à un domaine borné par l'introduction d'une PML 30
2.4 Calcul des résonances par un schéma aux différences finies 43
2.5 Approximation par la méthode des éléments finis 46

3 Famille de problèmes 1D **75**
3.1 Invariance par rotation : réduction 1D 76
3.2 Cadre fonctionnel 77
3.3 Description des problèmes 78
3.4 Réduction à un domaine borné par l'introduction d'une PML 86
3.5 Approximation par la méthode des éléments finis 88

4 Problèmes 2D **99**
4.1 Cadre fonctionnel 100
4.2 Description des problèmes 101
4.3 Approximation par la méthode des éléments finis 103

II Développements asymptotiques des résonances **113**

5 Introduction à la notion de quasi-résonances **115**
5.1 Un exemple de référence : le disque d'indice constant 116
5.2 Notion de famille de quasi-résonances 120

6 Le cas invariant par rotation **125**
6.1 Une famille de problèmes 1D 126
6.2 Interprétation en terme de potentiel 126

6.3 Résonances à modes de galeries : demi-puits triangulaire 131
6.4 Résonances à modes de galeries : demi-puits quadratique 143
6.5 Résonances internes : puits quadratique 157
6.6 Récapitulatif des formules 166

7 Illustrations numériques dans le cas radial **171**
7.1 Demi-puits triangulaire 172
7.2 Demi-puits quadratique 176
7.3 Puits quadratique interne 179

8 Le cas général **183**
8.1 Résonances à mode de galerie dans une cavité quelconque 184
8.2 Miscellanées 205
8.3 Récapitulatif des formules 208

9 Illustrations numériques dans le cas général **211**
9.1 Cavité elliptique d'indice optique constant 212
9.2 Cavité circulaire d'indice optique quadratique 216

10 Lien entre résonnances et quasi-résonances **221**
10.1 Propriété d'orthogonalité des quasi-modes 222
10.2 Liens entre résonances et quasi-résonances 224

11 Conclusions et perspectives **227**
11.1 Conclusions 228
11.2 Perspectives 229

III Annexes **231**

A Notations **233**
A.1 Ensembles 234
A.2 Relations 234
A.3 Fonctions 234
A.4 Espaces 235

B *Black box scattering* **237**
B.1 Définition et premières propriétés 238
B.2 Spectre de l'opérateur P 240
B.3 Cadre général du *Black box scattering* 242
B.4 *Black box scattering* pour l'opérateur P 243
B.5 Cas invariant par rotation 246

C Lemmes techniques pour la construction des quasi-résonances **249**
C.1 Équation différentielle et fonction exponentielle 250
C.2 Équation différentielle d'Airy 250
C.3 Oscillateur Harmonique 252
C.4 Sommation de Borel 255

D Scripts de calcul formel des développements asymptotiques **257**
D.1 Cas général 2D 258
D.2 Cas radial : puits quadratique interne 263
D.3 Cas radial : demi-puits quadratique 266

E Autre développements asymptotiques **271**
E.1 Puits d'ordre élevé 272
E.2 Puits plat 273

F Développement des valeurs propres du Laplacien Dirichlet **275**
F.1 Le cas radial 276
F.2 Le cas général 276

Bibliographie **279**

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1 Motivations 2
1.2 Utilisation de couches parfaitement adaptées (PML) . . 6
1.3 Analyse asymptotique des résonances 8
1.4 Organisation du manuscrit 16

1.1 Motivations

Les micro-résonateurs optiques à modes de galerie (*whispering gallery mode micro-resonators*) sont des dispositifs optiques constitués d'un guide d'accès (guide d'onde, fibre amincie ou pointe effilée) et d'une micro-cavité diélectrique (ayant le plus souvent la forme d'un sphéroïde ou d'un disque de rayon de 10 à 200 μm) où la lumière est guidée via des caustiques internes et la réflexion totale qui se produit sur la surface de séparation entre la cavité et le milieu extérieur. Lorsque les conditions d'une interférence constructive sont remplies, ces micro-résonateurs présentent un grand intérêt pratique, car les pertes de lumière peuvent y être extrêmement faibles. Par ailleurs, selon les caractéristiques du milieu diélectrique formant la cavité, notamment dans le cas d'un milieu non linéaire, de nombreux effets optiques peuvent être obtenus et exploités. Une variante de micro-résonateur optique est obtenue par confinement de la lumière dans un guide d'onde (ayant le plus souvent la forme d'un anneau ou d'un hippodrome), ce confinement étant obtenu exclusivement grâce à des interfaces matérielles. Les applications potentielles des micro-résonateurs sont nombreuses dans des domaines aussi différents que l'optoélectronique, la métrologie ou la physique fondamentale [41, 83, 26]. Sur la figure 1.1 sont représentés des exemples de micro-résonateurs correspondant aux dispositifs étudiés dans cette thèse.

(a) micro-disque (b) micro-anneau

FIGURE 1.1 – Exemples de micro-résonateurs optiques. Image de droite : micro-résonateur constitué de deux guides d'ondes droits et d'une micro-cavité annulaire. La lumière entre dans le dispositif par l'un des guides, excite un mode de galerie de la cavité lorsque les conditions de résonances sont réunies et peut sortir du dispositif à l'aide de l'autre guide. Image de gauche : micro-disque. La lumière est amenée dans la cavité par une fibre amincie (non visible sur la figure). Images fournies par le laboratoire Foton (UMR 6082).

Dans la littérature physique, l'étude des micro-résonateurs optiques en ayant recours à la simulation numérique se scinde en deux approches distinctes. La première approche consiste à simuler le fonctionnement du dispositif complet, incluant la cavité et les guides optiques. On simule dans ce cas la propagation dans le dispositif d'une onde lumineuse injectée dans le « port d'entrée » du micro-résonateur (l'un des guides optiques). Sous certaines conditions liées à la fréquence de l'onde lumineuse et à la géométrie du micro-résonateur, on observe un phénomène de résonance physique : la lumière transite totalement dans la cavité diélectrique et y reste confinée presque sans perte. Elle peut, selon les applications visées, être extraite de la cavité dans un guide d'onde (« port de sortie ») selon le même phénomène de résonance. Dans la littérature physique, cette approche numérique est mise en œuvre en utilisant des codes basés sur la méthode FDTD (Finite Difference Time Domain), voir par exemple [38, 71] ou sur la méthode des Éléments finis, notamment en utilisant le logiciel Comsol, voir par exemple [31]. L'inconvénient de cette

méthode est qu'elle ne permet pas d'analyser les différents effets physiques liés au phénomène de résonance observé. La seconde approche, largement plus utilisée dans la littérature physique [20, 45, 77] car plus simple à analyser du point de vue physique, est basée sur la méthode des modes couplés (CMT, coupled mode theory en anglais) initialement introduite pour étudier la propagation de la lumière dans des guides droits parallèles [98, 40, 63]. Cette approche consiste à déterminer comment la lumière véhiculée par le guide d'onde (qui peut être mono-mode ou multi-mode) se décompose selon (ou encore, « excite ») les modes de la cavité diélectrique. Dans cette approche, les modes du guide d'accès (guide d'onde à section rectangulaire ou fibre optique cylindrique) peuvent être calculés de manière explicite [41]. Ce n'est que très rarement le cas pour la cavité diélectrique (seul le cas d'une cavité ayant la forme d'un disque ou d'une sphère, pour un indice optique constant conduit à une expression explicite des modes résonnants). Le cadre de cette thèse est précisément de proposer des approches permettant de calculer les modes résonnants d'une cavité diélectrique de géométrie quelconque (ou presque) et d'indice optique pouvant varier avec la position dans la cavité.

Le cadre mathématique pour l'étude des résonances de la cavité diélectrique est le suivant. On considère une cavité diélectrique occupant un domaine de l'espace, plongée dans l'air, assimilé au vide ici. Dans le cadre de cette thèse, on se place dans un cas bidimensionnel qui est une simplification du problème tridimensionnel obtenue par la méthode de l'indice effectif [23]. On représente par la suite la cavité par un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^2$ et on désigne par $\Gamma = \partial\Omega$ le bord de la cavité. On suppose dans toute cette thèse que la cavité diélectrique a pour perméabilité magnétique $\mu = \mu_0$, où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. Il est courant en optique de caractériser un milieu diélectrique par sa permittivité diélectrique $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$ où ε_0 est la permittivité diélectrique du vide et n est l'indice optique. L'indice optique $\mathbf{x} \mapsto n(\mathbf{x})$ est une fonction de la position $\mathbf{x} = (x, y)$ et à valeurs strictement supérieures à 1 dans la cavité et valant 1 dans le vide.

Notation 1.1. L'indice optique est représenté par une fonction n telle que :

- $n \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ et $n > 1$ sur $\overline{\Omega}$,
- $n \equiv 1$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$.

Pour un point $\mathbf{x} \in \Gamma$ du bord de la cavité, $n(\mathbf{x})$ désignera toujours la valeur de l'indice optique de la cavité, c'est-à-dire $n(\mathbf{x}) \coloneqq \lim\limits_{\mathbf{y}\to\mathbf{x},\ \mathbf{y}\in\Omega} n(\mathbf{y})$.

Nous notons $[\,\cdot\,]_\Gamma$ l'opérateur de saut à travers le bord de la cavité Γ, défini comme la différence entre la trace extérieure et la trace intérieure. Ainsi, pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma$, on a $[n]_\Gamma(\mathbf{x}) = 1 - n(\mathbf{x})$.

La géométrie du problème est schématisée à figure 1.2.

Les modes résonnants d'une micro-cavité optique sont des solutions harmoniques particulières des équations de Maxwell homogènes (c'est-à-dire sans source) à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité Ω. Le champ électrique $\mathcal{E}$ et le champ magnétique $\mathcal{H}$ sont représentés sous la forme $\mathcal{E}(t, \mathbf{x}, z) = \mathrm{Re}\left(\mathbf{E}(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)$ et $\mathcal{H}(t, \mathbf{x}, z) = \mathrm{Re}\left(\mathbf{H}(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)$ où ω représente la pulsation ($\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$ où λ est la longueur d'onde), $\mathbf{x}$ un point du plan $\mathbb{R}^2$ et z la coordonnée dans la direction perpendiculaire à la cavité. La pulsation ω n'est pas imposée par les sources mais est l'une des inconnues du

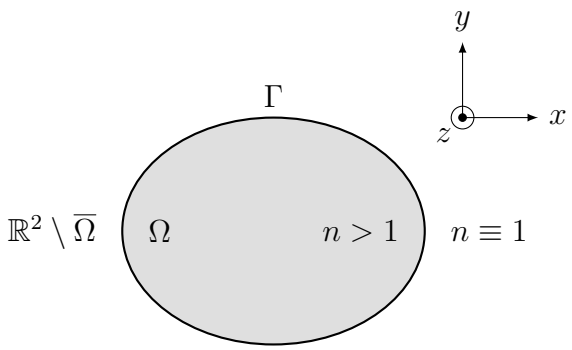


FIGURE 1.2 – Notations utilisées.

problème de résonances avec $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$, qui sont des solutions à valeurs complexes des équations de Maxwell harmoniques

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} - \mathsf{i}\omega\mu\,\mathbf{H} = \mathbf{0} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{rot}\,\mathbf{H} - \mathsf{i}\omega\varepsilon\,\mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{1.1}$$

à l'intérieur de la cavité Ω et à l'extérieur de cette cavité. Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ mais ne dépendent que de la variable position $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Dans ce contexte, le rotationnel s'exprime sous la forme $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = (\partial_y F_z, -\partial_x F_z, \partial_x F_y - \partial_y F_x)^\intercal$ pour $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)^\intercal$ fonction régulière de la variable $\mathbf{x} = (x, y)$. Nous avons les conditions de transmission suivantes entre le cavité diélectrique Ω et le milieu extérieur

$$[\mathbf{E} \wedge \nu]_\Gamma = \mathbf{0}, \qquad \left[n^2\,\mathbf{E} \cdot \nu\right]_\Gamma = 0, \qquad [\mathbf{H} \wedge \nu]_\Gamma = \mathbf{0} \qquad \text{et} \qquad [\mathbf{H} \cdot \nu]_\Gamma = 0 \tag{1.2}$$

où ν désigne la normale sortante unitaire à la cavité Ω. Pour que le système (1.1) soit bien posé, il faut ajouter une condition de radiation sortante, qui est une modification de la condition classique de Silver-Müller, voir [68].

Il est bien connu que la restriction bidimensionnelle des équations de Maxwell harmoniques (1.1) est la combinaison de deux sous-systèmes d'équations appelés équations transverses électriques (TE) et équations traverses magnétiques (TM) [41]. Plus précisément, en désignant par $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$ le nombre d'onde, le champ électromagnétique $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)^\intercal$ et $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)^\intercal$ solution du système (1.1) peut être séparé en deux familles de solutions :

- Les modes *transverses magnétiques* (TM) pour lesquels $E_x = E_y = H_z = 0$ et E_z est solution de

$$-\Delta E_z - k^2\,n^2\,E_z = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \tag{1.3}$$

  avec les conditions de transmission $[E_z]_\Gamma = [\partial_\nu E_z]_\Gamma = 0$ où $\partial_\nu E_z$ désigne la dérivée normale de E_z et une condition de radiation. On a dans ce cas

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \frac{-\mathsf{i}}{\omega\mu_0} \begin{pmatrix} \partial_y E_z \\ -\partial_x E_z \end{pmatrix}.$$

  Ces modes sont aussi appelés E-modes.

- Les modes *transverses électriques* (TE) pour lesquels $H_x = H_y = E_z = 0$ et H_z est solution de

$$-\operatorname{div}\left(n^{-2}\,\nabla H_z\right) - k^2\,H_z = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \tag{1.4}$$

avec les conditions de transmissions $[H_z]_\Gamma = [n^{-2}\,\partial_\nu H_z]_\Gamma = 0$ et une condition de radiation. On a dans ce cas

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{\mathsf{i}}{\omega\varepsilon_0 n^2} \begin{pmatrix} \partial_y H_z \\ -\partial_x H_z \end{pmatrix}.$$

Ces modes sont aussi appelés H-modes.

Notre problème de référence est une écriture unifiée des problèmes (1.3) et (1.4) sous la forme suivante : trouver k un complexe et u une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ non nulle tels que

$$(\mathcal{P}_p) \begin{cases} -\operatorname{div}(n^{p-1}\,\nabla u) - k^2\,n^{p+1}\,u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \\ [u]_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ [n^{p-1}\,\partial_\nu u]_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \end{cases} \tag{1.5a}$$

avec une condition de radiation à l'infini. L'entier p « sélectionne » la polarisation : $p = +1$ pour les modes (TM) et $p = -1$ pour les modes (TE). Dans toute la suite du document p désignera cet entier. La condition de radiation impose que la solution u du problème (1.5) à l'extérieur de tout disque $D(0, R_\Omega)$ contenant Ω a un développement selon les fonctions de Hankel de première espèce de la forme suivante en coordonnées polaires :

$$u(x,y) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\,\mathsf{H}_m^{(1)}(kr)\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta} \qquad r \geq R_\Omega \text{ et } \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}. \tag{1.5b}$$

Les solutions du problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (1.5) sont appelées les résonances de $(\mathcal{P}_p)$ et notées $\operatorname{Res}(\mathcal{P}_p)$. Pour $k^2 > 0$, la condition de radiation (1.5b) coïncide avec les conditions de radiations de Sommerfeld. Toutefois, le théorème de Rellich, voir [64], indique que si k est réel alors la solution u est nulle, et par conséquent les résonances k sont forcément complexes à parties imaginaires non nulles. Avec les conventions choisies pour la dépendance harmonique du champ électromagnétique, la condition de radiation (1.5b) implique que $\operatorname{Im}(k) < 0$ pour tout $k \in \operatorname{Res}(\mathcal{P}_p)$, voir [93] ou [64, chapitre 9]. La formulation du problème $(\mathcal{P}_p)$ ressemble fortement à la formulation d'un problème aux valeurs propres mais les résonances ne sont pas les valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint. L'une des différences principales est que les modes résonnants associés aux résonances ne sont pas dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ (ils ne sont pas « d'énergie finie »), ils sont même exponentiellement croissants à l'infini. Une comparaison entre le concept de valeurs propres et de résonances est faite dans [99]. Mathématiquement, les résonances définies en (1.5) sont les résonances pour un problème d'obstacle transparent ou pour un problème de transmission acoustique, voir [66]. Ce problème est bien posé mathématiquement : il entre dans le cadre de la théorie du *black box scattering*, voir annexe B.

La thèse est organisée en deux grandes parties que nous allons présenter dans les deux sections suivantes. La partie I traite d'aspects liés au calcul numérique des résonances. La partie II propose une analyse asymptotique des résonances.

1.2 Utilisation de couches parfaitement adaptées (PML)

Dans la partie I de ce manuscrit de thèse, nous nous intéressons au calcul numérique des résonances. La principale difficulté du calcul numérique des résonances tient au fait que le problème $(\mathcal{P}_p)$ est posé dans tout le plan $\mathbb{R}^2$ et qu'il faut imposer une condition de rayonnement adéquate à l'infini, celle correspondant à la condition (1.5b). Pour calculer numériquement les résonances, il faut se ramener à un domaine de calcul borné et transformer le problème de résonances en un problème aux valeurs propres non-auto-adjoint dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Il existe principalement quatre approches pour faire cela.

- Les approches basées sur la dilatation analytique (*complex scaling* en anglais) ou les couches parfaitement adaptées (*Perfectly Matched Layers*, PML en anglais), qui sont conceptuellement identiques. La dilatation analytique est apparue en premier dans les travaux de J. Aguilar, E. Balslev et J. M. Combes dans [2, 10], voir section 4.7 de [33] pour plus de bibliographie sur le sujet. Les PML ont été introduites plus tard par J.-P. Bérenger dans [12].

  Ces deux méthodes consistent à utiliser le prolongement analytique des solutions en dehors d'une boule contenant la cavité et à faire un changement de variable afin que les modes résonnants qui sont exponentiellement croissants à l'infini deviennent exponentiellement décroissants. On peut ainsi tronquer le domaine de calcul à une distance relativement proche de la cavité correspondant à la zone d'intérêt. Pour une liste de travaux autour de l'utilisation des PML pour des problèmes de résonances, voir [55, 57, 56, 18, 54, 70].

- Les approches d'équations intégrales qui consistent à écrire une équation intégrale portant uniquement sur le bord de la cavité, voir [96, 42, 60, 93].

- Les approches utilisant les espaces de Hardy, voir [47, 69, 68].

- Les approches qui utilisent l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann (DtN), qui consistent à tronquer le domaine et à mettre des conditions aux limites tranparentes, voir [5, 6].

Les trois dernières approches conduisent à des problèmes aux valeurs propres non linéaires, ce qui est plus difficile à mettre en œuvre numériquement. C'est pour cela que nous avons choisi d'utiliser les PML. De plus, les PML sont simples à implémenter dans un logiciel éléments finis. Signalons néanmoins que pour calculer un grand nombre de résonances d'une cavité avec une erreur uniforme pour toutes les résonances, il faut faire dépendre la PML de la résonance, ce qui donne là aussi un problème aux valeurs propres non linéaire, voir [70]. Toutefois, dans le cadre de l'application visée (calcul des modes de galerie d'une cavité diélectrique), on n'est intéressé que par quelques résonances particulières autour d'une valeur donnée (correspondant à une longueur d'onde pour la lumière visible). On peut donc paramétrer la PML en fonction de cette valeur cible, ce qui résulte en un problème aux valeurs propres linéaire. Le problème est ensuite discrétisé par la méthode des différences finies ou par la méthode des éléments finis.

Problème purement 1D. Dans ce manuscrit, on commencera par étudier une version purement unidimensionnelle, notée $(\mathcal{T}_p)$, du problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (1.5). Ce problème s'énonce de la manière suivante, soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}_+$ (typiquement, un intervalle $]a,b[$ avec $0 \leq a < b$) et n une fonction telle que $n > 1$ sur $\overline{\Omega}$ et $n \equiv 1$ sur $\mathbb{R}_+ \setminus \overline{\Omega}$ (typiquement, une fonction constante par morceaux). Le problème $(\mathcal{T}_p)$ s'écrit : trouver k un complexe et u une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$ non nulle tels que

$$(\mathcal{T}_p) \begin{cases} -\left(n^{p-1}\,u'\right)' - k^2\,n^{p+1}\,u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^* \setminus \Gamma \\ [u]_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ [n^{p-1}\,u']_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ u'(0) = 0 & \\ u(x) \propto \mathsf{e}^{\mathrm{i}kx} & x \geq \sup\Omega \end{cases} \tag{1.6}$$

où $[\,\cdot\,]_\Gamma$ est l'opérateur de saut défini par $[w]\,(x) = w(x^+) - w(x^-)$ pour tout $x \in \Gamma$ et où $\propto$ signifie « égal à une constante multiplicative près ». La dernière condition est une version 1D de la condition de radiation sortante (1.5b).

On introduit les couches parfaitement adaptées et la troncature pour calculer les solutions du problème $(\mathcal{T}_p)$ au chapitre 2. On effectue également une analyse de sensibilité des résonances par rapport aux paramètres de la PML.

Problème invariant par rotation. On considère ensuite le cas où le problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (1.5) est invariant par rotation. On s'intéressera à des cavités en forme de disque dont l'indice est une fonction radiale, c'est-à-dire $\Omega = D(0,R)$ le disque de centre 0 et de rayon $R > 0$ et l'indice optique $\mathbf{x} \mapsto n(r)$ est une fonction de la variable radiale $r = |\mathbf{x}|$. On peut réduire le problème $(\mathcal{P}_p)$ à une famille de problèmes unidimensionnels à un paramètre $m \in \mathbb{Z}$, à l'aide d'une décomposition en série de Fourier en la variable angulaire. Ces problèmes sont de la forme suivante : trouver k un complexe et u une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$ en la variable radiale r, non nulle, tels que

$$(\mathcal{R}_{p;m}) \begin{cases} -\dfrac{1}{r}\left(n^{p-1}\,r\,u'\right)' + \dfrac{m^2}{r^2} n^{p-1}\,u - k^2\,n^{p+1}\,u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^* \setminus \{R\} \\ [u]_{\{R\}} = 0 & \text{à travers } \{R\} \\ [n^{p-1}\,u']_{\{R\}} = 0 & \text{à travers } \{R\} \\ u'(0) = 0 & \text{si } m = 0 \\ u(r) \propto \mathsf{H}_m^{(1)}(kr) & r \geq R \end{cases} . \tag{1.7}$$

Il n'est pas nécessaire de spécifier une condition limite en 0 pour $m > 0$ en raison du terme singulier $\frac{m^2}{r^2}$ qui force une condition de Dirichlet homogène en 0. La dernière condition est la condition de radiation sortante correspondant à (1.5b).

On introduit les couches parfaitement adaptées et la troncature pour calculer les solutions du problème $(\mathcal{R}_{p;m})$ au chapitre 3.

Problème 2D. On étudie enfin au chapitre 4 le comportement de la méthode des éléments finis avec PML pour calculer les solutions du problème $(\mathcal{P}_p)$ dans le cas d'une cavité bidimensionnelle de géométrie quelconque. On verra que la distance

entre certaines résonances de cavité et les valeurs propres d'un problème tronqué à l'aide de conditions aux limites non transparentes (par exemple condition de Dirichlet homogène ou périodique) peut être faible. Cela implique que l'on peut calculer de telles résonances en tronquant le domaine avec des conditions aux limites non transparente mais les résonances sont plongées dans un grand nombre de valeurs propres de ce nouveau problème. C'est une approche souvent utilisée dans la littérature physique pour le calcul des résonances correspondant à des modes particuliers appelées modes de galerie voir par exemple [75, 37]. L'utilisation de PML permet de filtrer les résonances parmi les valeurs propres qui ne sont pas des résonances de *scattering*.

1.3 Analyse asymptotique des résonances

La partie II de ce manuscrit de thèse aborde une analyse asymptotique des résonances.

On s'intéresse aux résonances à modes de galeries (*Whispering Gallery Modes*) d'une cavité diélectrique, c'est-à-dire aux résonances dont le mode associé est localisé le long du bord de la cavité Ω. Ce nom est donné en référence à Lord Rayleigh [80, 81] qui est le premier à expliquer ce type de résonances en acoustique. Dans la litérature physique les modes de galerie sont toujours activement étudiés, voir par exemple [11, 35, 39] pour un indice optique constant et voir [50, 58, 53] pour un indice variable.

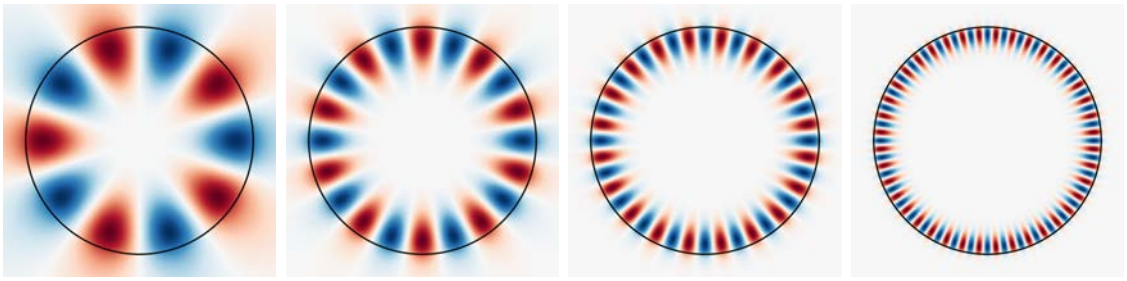
L'un des exemples les plus simples mathématiquement correspondant à la situation étudiée dans cette thèse est celui d'une cavité circulaire avec un indice optique constant. Soit $\Omega = D(0, R)$ le disque de centre 0 et de rayon R tel que $n \equiv n_0 > 1$ dans $\overline{\Omega}$ et $n \equiv 1$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$. Dans ce cas, on peut résoudre analytiquement le problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (1.5) et la solution s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel de première espèce et des fonctions de Hankel de première espèce, voir [1, 74]. Les résonances k sont dans ce cas les zéros de l'équation $\mathcal{D}_{p;m}(k\,R) = 0$ où $\mathcal{D}_{p;m}$ est la fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ défini par

$$\mathcal{D}_{p;m}(z) \coloneqq n_0^p \; \mathsf{J}'_m(n_0\, z)\, \mathsf{H}^{(1)}_m(z) - \mathsf{J}_m(n_0\, z)\mathsf{H}^{(1)\prime}_m(z) \tag{1.8}$$

appelée *fonction modale* dans la littérature physique. Les modes associés u_k et $\overline{u_k}$, qui sont distincts quand $m \neq 0$, ont pour expression en coordonnées polaires

$$u_k(r,\theta) = \mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta} \begin{cases} \dfrac{\mathsf{J}_m(n_0\, k\, r)}{\mathsf{J}_m(n_0\, k\, R)} & r \leq R \\ \dfrac{\mathsf{H}^{(1)}_m(k\, r)}{\mathsf{H}^{(1)}_m(k\, R)} & r > R \end{cases}.$$

Dans cette expression, $2m$ correspond au nombre de zones nodales angulaires du mode résonnant et par conséquent m est appelé l'indice angulaire du mode résonnant associé à k. Les résonances sont de multiplicité deux quand $m \neq 0$ et de multiplicité un quand $m = 0$. On a représenté à la figure 1.3 les parties réelles des modes associés à quelques résonances. On remarque que plus m est grand, plus les modes sont localisés près du bord de la cavité.



(a) $m = 5$ (b) $m = 10$ (c) $m = 20$ (d) $m = 40$

FIGURE 1.3 – Représentation graphique des parties réelles des modes associés aux plus petites résonances en module de $\mathcal{D}_{p;m}$ pour l'indice angulaire $m \in \{5, 10, 20, 40\}$. On a $p = +1$ (mode TM), $R = 1$ et la valeur de l'indice optique dans la cavité est $n_0 = 5$.

Dans le cas particulier d'un disque d'indice constant, il est établi dans [59] le développement asymptotique des résonances suivant quand m tend vers $+\infty$:

$$k_{p;j}(m) = \frac{m}{Rn_0}\left[1 + \frac{a_j}{2}\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{n_0^p}{2(n_0^2-1)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{2}{m}\right) + \frac{3a_j^2}{40}\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{a_j n_0^p(2n_0^{2p} - 3n_0^2)}{12(n_0^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{5}{3}} + \mathcal{O}\left(m^{-2}\right)\right] \quad (1.9)$$

où $0 < a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ sont les zéros de la fonction $\mathsf{A}(x) = \mathsf{Ai}(-x)$ où Ai est la fonction d'Airy. Ce développement est obtenu à l'aide de développements asymptotiques des fonctions de Bessel. Cette stratégie n'est possible que pour une cavité circulaire d'indice optique constant.

Le but de la seconde partie de cette thèse est de généraliser le développement asymptotique (1.9) obtenu dans le cas d'un disque d'indice constant aux cavités diélectriques de géométrie quelconque et pour des indices optiques variables avec la position. Dans le cas général, les résonances ne sont pas les zéros d'une fonction holomorphe faisant intervenir des fonctions spéciales. On doit travailler directement à partir des équations du problème $(\mathcal{P}_p)$, ce qui conduit à la notion de quasi-résonance et quasi-mode associé. Succinctement, il s'agit de solutions « approchées » du problème $(\mathcal{P}_p)$, c'est-à-dire vérifiant les équations du problème $(\mathcal{P}_p)$ à de petits restes près. Signalons qu'avec cette approche, on a recours à un théorème du type « théorème spectral » pour établir que les quasi-résonances sont proches de résonances, contrairement à une approche analytique qui n'est possible que pour quelques géométries de la cavité Ω et pour des fonctions n très particulières. Précisément, une quasi-résonance est une suite de réels $(k_m)_{m\geq 1}$ et un quasi-mode associé est une suite de fonctions $(u_m)_{m\geq 1}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ telles que :

- les fonctions $(u_m)_{m\geq 1}$ sont à support compact ;
- les fonctions $(u_m)_{m\geq 1}$ sont lisses, sauf à travers le bord Γ de la cavité ;
- les fonctions $(u_m)_{m\geq 1}$ satisfont les conditions de transmission

$$[u_m]_\Gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad \left[n^{p-1}\,\partial_\nu u_m\right]_\Gamma = 0;$$

- on ait l'estimation suivante quand $m \to +\infty$:
$$\left\| -\operatorname{div}\left(n^{p-1}\,\nabla u_m\right) - k_m^2\, n^{p+1}\, u_m \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \|u_m\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\, \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$$
où $\mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$ désigne une quantité majorée par $C_N\, m^{-N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, où les constantes C_N sont indépendantes de m.

Pour le cas du disque d'indice constant ces deux approches donnent les mêmes développements asymptotiques.

L'étude des développements asymptotiques des résonances est effectué en plusieurs étapes de complexité croissante. Dans le chapitre 6, on s'intéresse au cas où le problème $(\mathcal{P}_p)$ est invariant par rotation, c'est-à-dire au cas où il se ramène aux problèmes $(\mathcal{R}_{p;m})$ définis en (1.7). La cavité $\Omega = D(0,R)$ est un disque de centre 0 et de rayon R, et l'indice optique $n : r \mapsto n(r)$ est une fonction de la variable radiale. On suppose que la fonction n est lisse sur $[0,R]$ et qu'elle est constante égale à 1 sur $]R,+\infty[$. On définit les notations suivantes

$$n_0 \coloneqq n(R), \qquad n_1 \coloneqq n'(R) \qquad \text{et} \qquad \breve{\kappa} \coloneqq 1 + \frac{R\, n_1}{n_0}$$

où $n(R) > 1$ et $n'(R)$ sont les valeurs de n et de n' au bord de la cavité vue comme une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de l'intervalle fermé $[0,R]$. La quantité $\breve{\kappa}$ est une courbure effective adimensionnelle car $\frac{\breve{\kappa}}{R}$ contient le terme $\frac{1}{R}$ qui est la courbure du cercle de rayon R et le terme correctif $\frac{n_1}{n_0}$. On a mis en évidence trois comportements différents selon le signe de la quantité $\breve{\kappa}$. On verra que, quitte à faire un changement d'inconnue, on pourra interpréter le problème de résonances d'une cavité optique comme un problème de résonances pour un opérateur de Schrödinger avec un potentiel effectif

$$V : r \mapsto \frac{1}{r^2\, n(r)^2}.$$

Une telle interprétation est connue dans la littérature physique, voir [51, 24, 25], mais pas exploitée systématiquement comme nous avons pu le faire dans cette thèse. On introduit la notation suivante.

Notation 1.2. On note $\chi \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de troncature lisse telle que $\chi \equiv 1$ sur $\left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right]$ et dont le support est contenu dans $[-\delta,\delta]$ où le petit paramètre δ tel que $0 < \delta \ll 1$ dépendra des cas considérés.

Localisation au bord, cas a) Dans le cas où $\breve{\kappa} > 0$, V a la forme d'un demi-puits triangulaire en R, voir figure 1.4. On a dans ce cas le comportement asymptotique donné par le théorème suivant.

Théorème (6.3 page 131)**.** *Pour $p \in \{\pm 1\}$ fixé, il existe des familles de quasi-résonances $(\underline{k}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$ et de quasi-modes associés $(\underline{u}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$, indexées par $j \in \mathbb{N}$, telles que l'on ait, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$*

$$\underline{k}_{p;j}(m) = \frac{m}{Rn_0}\, \mathrm{K}_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$\underline{u}_{p;j}(m;r,\theta) = \chi\left(\tfrac{r}{R}-1\right)\, \mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta} \begin{cases} \Phi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}}; m^{\frac{2}{3}}\left(\tfrac{r}{R}-1\right)\right) & \text{si } r \leq R \\ \Psi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}}; m\left(\tfrac{r}{R}-1\right)\right) & \text{si } r > R \end{cases}$$

où $\mathrm{K}_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$, $\Phi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty([0,1]\times\mathbb{R}_-)$ et $\Psi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty([0,1]\times\mathbb{R}_+)$.

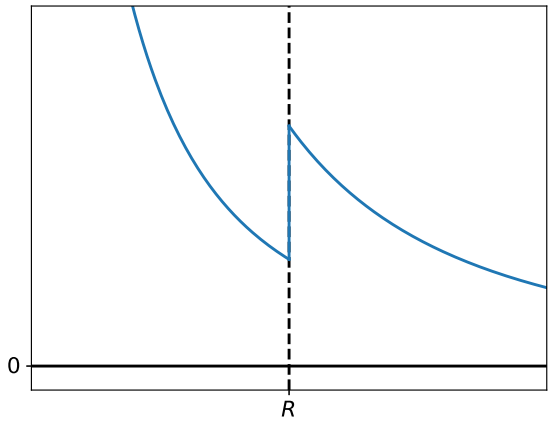


FIGURE 1.4 – Illustration du graphe du potentiel effectif V quand $\breve{\kappa} > 0$.

Les fonctions $\mathrm{K}_{p;j}$, $\Phi_{p;j}$ et $\Psi_{p;j}$ sont issues d'une récurrence et du lemme de Borel. On peut calculer leurs développements de Taylor en 0 en la variable $m^{-\frac{1}{3}}$, ce qui permet d'obtenir un développement asymptotique des résonances qui généralise l'asymptotique (1.9). Les premiers termes du développement asymptotique obtenu sont :

$$\underline{k}_{p;j}(m) = \frac{m}{Rn_0}\left[1 + \frac{a_j\,\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}}{2}\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}\left(m^{-1}\right)\right]. \tag{1.10}$$

Des termes supplémentaires sont donnés à la section 6.6.1 du chapitre 6. Nous avons écrit un script de calcul formel en SymPy, bibliothèque Python, permettant de calculer les termes des développements asymptotiques de $\mathrm{K}_{p;j}$, $\Phi_{p;j}$ et $\Psi_{p;j}$. Ce script est fournit à l'annexe D et est basé sur des produits de polynômes par la fonction d'Airy de première espèce et de sa dérivée.

Localisation au bord, cas b) Dans le cas où $\breve{\kappa} = 0$ et sous l'hypothèse supplémentaire

$$\breve{\mu} := 2 - \frac{R^2\,n_2}{n_0} > 0$$

où $n_2 := n''(R)$ ($\breve{\mu}$ définit une quantité adimensionnelle), le potentiel effectif V a la forme d'un demi-puits quadratique en R voir figure 1.5. On a dans ce cas le comportement asymptotique donné par le théorème suivant.

Théorème (6.14 page 143)**.** *Pour $p \in \{\pm 1\}$ fixé, il existe des familles de quasi-résonances $(\underline{k}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$ et de quasi-modes associés $(\underline{u}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$, indexées par $j \in \mathbb{N}$, telles que l'on ait, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$*

$$\underline{k}_{p;j}(m) = \frac{m}{Rn_0}\,\mathrm{K}_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\underline{u}_{p;j}(m;r,\theta) = \chi\left(\tfrac{r}{R}-1\right)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\begin{cases}\Phi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{2}};m^{\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{R}-1\right)\right) & \text{si } r \leq R\\ \Psi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{2}};m\left(\frac{r}{R}-1\right)\right) & \text{si } r > R\end{cases}$$

où $\mathrm{K}_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$, $\Phi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty([0,1]\times\mathbb{R}_-)$ et $\Psi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty([0,1]\times\mathbb{R}_+)$..

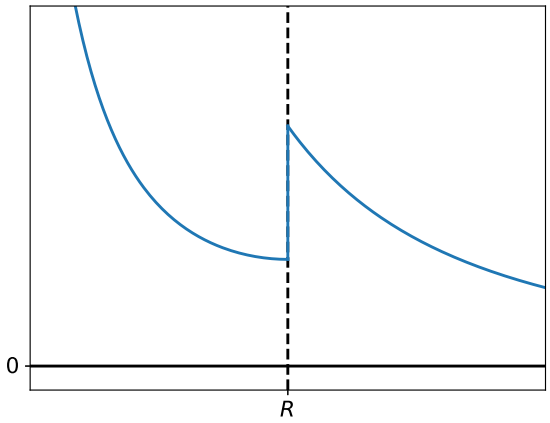


FIGURE 1.5 – Illustration du graphe du potentiel effectif V quand $\breve{\kappa} = 0$.

Comme précédemment les fonction $\mathrm{K}_{p;j}$, $\Phi_{p;j}$ et $\Psi_{p;j}$ viennent d'un procédé itératif et du lemme de Borel. Ce cas est plus compliqué à traiter que le précédent car on doit projeter la fonction $\Phi_{p;j}$ sur la base des fonctions de Gauss-Hermite impaires, fonctions propres du demi-oscillateur harmonique avec condition de Dirichlet. Nous avons dans ce cas aussi écrit un code de calcul formel utilisant la librairie Python SymPy permettant de calculer les développements asymptotiques des fonctions $\mathrm{K}_{p;j}$, $\Phi_{p;j}$ et $\Psi_{p;j}$. Signalons que ce cas est plus compliqué à mettre en œuvre informatiquement et que on ne calculera que des approximations des coefficients des développements de Taylor de toutes les fonctions à partir d'un certain rang. En effet, lors du procédé itératif, on a besoin de projeter la fonction $\Phi_{p;j}$ sur tous les éléments de la base des fonctions de Gauss-Hermite impaires. Néanmoins, en se restreignant à un nombre fini de fonctions de Gauss-Hermite impaires, il est possible d'écrire un algorithme qui calcule des approximations des coefficients du développement de Taylor de $\mathrm{K}_{p;j}$. On obtient ainsi un développement asymptotique des résonances mais avec une mise à l'échelle en la variable $m^{-\frac{1}{2}}$ autre que celle obtenue en (1.9) :

$$\underline{k}_{p;j}(m) = \frac{m}{Rn_0}\left[1 + \frac{(4j+3)\sqrt{\breve{\mu}}}{2}\left(\frac{1}{m}\right) + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{3}{2}}\right)\right]. \tag{1.11}$$

Des termes supplémentaires sont donnés à la section 6.6.2 du chapitre 6.

Localisation interne, cas c) Le troisième cas correspond à $\breve{\kappa} < 0$. Dans ce cas il existe $R_0 \in]0, R[$ tel que

$$1 + \frac{R_0\, n'(R_0)}{n(R_0)} = 0$$

et sous l'hypothèse supplémentaire

$$\breve{\mu} := 2 - \frac{R_0^2\, n''(R_0)}{n(R_0)} > 0$$

($\breve{\mu}$ est une quantité adimensionnelle), le potentiel effectif V a la forme d'un puits quadratique en R_0 voir figure 1.6. Ce cas correspond au *puits dans l'isle* étudié dans [44]. On a dans ce cas le comportement asymptotique donné par le théorème suivant.

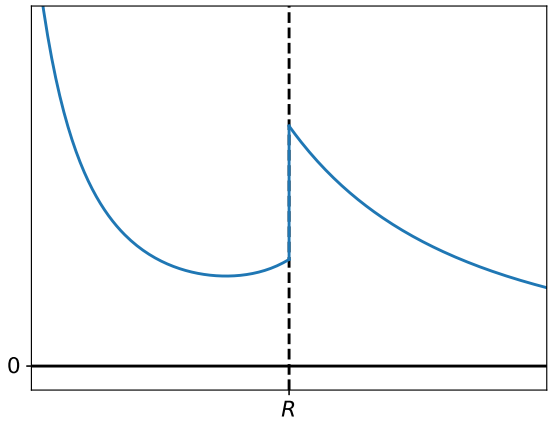


FIGURE 1.6 – Illustration du graphe du potentiel effectif V quand $\breve{\kappa} < 0$.

Théorème (6.26 page 157). *Pour $p \in \{\pm 1\}$ fixé, il existe des familles de quasi-résonances $(\underline{k}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$ et de quasi-modes associés $(\underline{u}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$, indexées par $j \in \mathbb{N}$, telles que l'on ait, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$*

$$\underline{k}_{p;j}(m) = \frac{m}{R_0 n(R_0)} \mathrm{K}_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\underline{u}_{p;j}(m;r,\theta) = \chi\left(\tfrac{r}{R_0} - 1\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\, \Phi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{2}}; m^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{r}{r_0} - 1\right)\right)$$

où $\mathrm{K}_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$ et $\Phi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty([0,1]\times\mathbb{R})$.

Encore une fois les fonction $\mathrm{K}_{p;j}$ et $\Phi_{p;j}$ viennent d'une récurrence et du lemme de Borel. On peut calculer leurs développements de Taylor en 0 en la variable $m^{-\frac{1}{2}}$, ce qui permet d'obtenir un développement asymptotique des résonances avec la même mise à l'échelle que (1.11). Les premiers termes du développement asymptotique de $\underline{k}_{p;j}(m)$ correspondent à

$$\underline{k}_{p;j}(m) = \frac{m}{R_0 n(R_0)}\left[1 + \frac{(2j+1)\sqrt{\breve{\mu}}}{2}\left(\frac{1}{m}\right) + \mathcal{O}\left(m^{-2}\right)\right]. \tag{1.12}$$

Des termes supplémentaires sont donnés à la section 6.6.3 du chapitre 6. Comme dans les deux cas précédents, mais plus simplement que le cas (b), on peut calculer les termes des développements asymptotiques à l'aide de scripts de calcul formel. C'est plus simple que dans le cas (b) car la fonction $\Phi_{p;j}$ est une combinaison finie de fonctions de la base de Gauss-Hermite.

Pour les cas (a) et (b), les quasi-modes se localisent autour du cercle de centre 0 et de rayon R, c'est-à-dire près de Γ, le bord de la cavité. Pour le cas (c) les quasi-modes se localisent autour du cercle de centre 0 et de rayon $R_0 < R$, c'est-à-dire à l'intérieur de la cavité. Les constructions des développements asymptotiques sont effectuées au chapitre 6. Les développements asymptotiques obtenus montrent que pour les cas (b) et (c) les résonances à mode de galerie sont asymptotiquement sur un réseau en (m,j) contrairement au cas (a). Les illustrations numériques des développements asymptotiques dans chacun des cas sont présentées au chapitre 7. On y donnera des graphes de comparaison entre les quasi-résonances et les résonances numériques dont les erreurs convergent avec les ordres attendus. On verra également que les quasi-modes ont la même structure que les modes résonnants obtenus numériquement.

Cas général. On aborde au chapitre 8 le cas d'un domaine Ω de forme plus générale. On suppose le bord Γ de Ω lisse et représenté par une paramétrisation par l'abscisse curviligne $\gamma : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \to \Gamma$ où L désigne la longueur de Γ. On note également $\nu : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ la normale sortante unitaire à Ω et $\kappa : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ la courbure de Γ. On suppose que la fonction n est lisse dans $\overline{\Omega}$ et constante égale à 1 dans $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$. Pour tout $s \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$, on note $n_0(s) \coloneqq n(\gamma(s))$ la valeur de n le long du bord Γ et $n_1(s) \coloneqq \nu(s) \cdot \nabla n(\gamma(s))$ la dérivée normale sortante de n au bord Γ. Ces deux quantités sont calculées à partir de la fonction $n \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$. On suppose que, pour tout $s \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$, on a

$$\breve{\kappa} \coloneqq \frac{L}{2\pi}\left(\kappa(s) + \frac{n_1(s)}{n_0(s)}\right) > 0.$$

Comme dans le cas du demi-puits triangulaire pour le disque, $\breve{\kappa}$ est une courbure effective adimensionnelle. On se place en coordonnées tubulaires pour Γ, où un point $\mathbf{x}$ est paramétré par $\mathbf{x} = \gamma(s) + \xi\nu(s)$ pour $s \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ et ξ dans un voisinage de 0.

Notation 1.3. Pour une fonction $w : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, on note $\langle w \rangle$ la moyenne le long du bord Γ par rapport à l'abscisse curviligne, définie par

$$\langle w \rangle = \frac{1}{L}\int_0^L w(s)\,\mathrm{d}s.$$

Sous ces hypothèses, on a obtenu le comportement asymptotique suivant.

Théorème (8.7 page 187)**.** *Pour $p \in \{\pm 1\}$ fixé, il existe des familles de quasi-résonances $(\underline{k}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$ et de quasi-modes associés $(\underline{u}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$, indexées par $j \in \mathbb{N}$, telles que l'on ait, pour tout $s \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ et $\xi \in \mathbb{R}$*

$$\underline{k}_{p;j}(m) = \frac{2\pi m}{L\,\langle n_0\rangle}\,\mathrm{K}_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$\underline{u}_{p;j}(m;s,\xi) = \chi(\xi)\,\exp\left(\mathrm{i}m\Theta_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};s\right)\right)\begin{cases}\Phi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};s,m^{\frac{2}{3}}\xi\right) & \text{si } \xi \leq 0\\ \Psi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};s,m\xi\right) & \text{si } \xi > 0\end{cases}$$

où $\mathrm{K}_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$, $\Theta_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty([0,1]\times\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$, $\Phi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty([0,1]\times\mathbb{R}/L\mathbb{Z}\times\mathbb{R}_-)$ et $\Psi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty([0,1]\times\mathbb{R}/L\mathbb{Z}\times\mathbb{R}_+)$.

Ici contrairement au cas radial, on a une phase $\Theta_{p;j}$ non explicite que l'on doit construire en parallèle au processus itératif de construction des fonctions $\mathrm{K}_{p;j}$, $\Phi_{p;j}$ et $\Psi_{p;j}$. Dans ce cas, les quasi-modes se localisent le long du bord Γ. C'est une construction de type BKW (Brillouin–Kramers–Wentzel). On fait l'ansatz $\exp\left(\mathrm{i}\,h^{-1}\,\vartheta(h,s)\right)$ sur la forme de la phase avec $h > 0$ un petit paramètre et $s \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$. On a une quantification de h^{-1} par un entier car la phase doit être continue le long de Γ. Comme précédemment, le lemme de Borel est utilisé pour construire ces fonctions. De manière similaire au cas radial, un code de calcul formel a été développé, voir l'annexe D, permettant d'obtenir les différents termes des développements asymptotiques des quasi-résonances et quasi-modes associés. Ceci est possible car à chaque étape, on peut écrire la fonction $\Phi_{p;j}$ comme une somme finie de produits de polynômes par la fonction d'Airy et sa dérivée et la fonction $\Psi_{p;j}$ comme une somme

finie de produits de polynômes fois par fonctions exponentielles. On peut calculer leurs développement de Taylor en 0 en la variable $m^{-\frac{1}{3}}$, ce qui permet d'obtenir une généralisation du développement asymptotique des résonances obtenues en (1.10). Le début du développement asymptotique pour la résonances $\underline{k}_{p;j}(m)$ est

$$\underline{k}_{p;j}(m) = \frac{2\pi m}{L\langle n_0\rangle}\left[1 + \frac{a_j}{2}\left\langle \breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}\left(\frac{n_0}{\langle n_0\rangle}\right)^{\frac{1}{3}}\right\rangle\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}\left(m^{-1}\right)\right]. \tag{1.13}$$

La construction est détaillée au chapitre 8. Des termes supplémentaires sont donnés à la section 8.3.

Des illustrations numériques de ces développements asymptotiques sont présentées au chapitre 9.

Nous concluons la seconde partie en abordant les liens entre les quasi-résonances et les résonances. Nous avons construit des quasi-résonances, mais les résonances n'étant pas des valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint, on a besoin de résultats spécifiques pour établir le lien entre quasi-résonances et résonances. Les théorèmes de S.-H. Tang et M. Zworski [94], ou de P. Stefanov [91], permettent d'expliciter ce lien. La construction de quasi-résonances $\underline{k}_{p;j}(m)$ réelles implique le théorème suivant, voir [79, 78, 22, 84] ainsi qu'une estimation inférieure sur la fonction de comptage des résonances « proches » de l'axe réel.

Théorème (10.3 page 224)**.** *Soit $p \in \{\pm 1\}$, $j \in \mathbb{N}$ et $(\underline{k}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$ une famille de quasi-résonances du problème $(\mathcal{P}_p)$, alors*

$$\operatorname{dist}\left(\underline{k}_{p;j}(m), \operatorname{Res}(\mathcal{P}_p)\right) = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$

Comparaison avec la littérature. Des formules similaires aux formules (1.10) et (1.13) sont connues pour les valeurs propres du Laplacien Dirichlet, voir V. M. Babič et V. S. Buldyrev [7]. La formule pour le disque d'indice constant (1.9) est obtenue avec cinq termes par C. C. Lam, P. T. Leung et K. Young [59] et avec onze termes par S. Schiller [85]. Le premier terme du cas radial (a) a été obtenu par V.S. Ilchenko et co-auteurs [50]. Les deux premiers termes du cas général en dimension 2 avec un indice constant sont obtenus par de E. L. Silakov [88].

G. Popov et G. Vodev [79, 78], ainsi que C. Rivière dans sa thèse [84], ont construit des quasi-résonances pour le problème $(\mathcal{P}_p)$ correspondant à des modes de galerie en utilisant de l'analyse micro-locale. Cela leur permet de montrer l'existence d'une suite de résonances proche de l'axe réel mais pas d'obtenir de développement asymptotique explicite. Ils se limitent en outre au cas où $\breve{\kappa} > 0$. Le cas radial avec localisation interne est également connu voir le cas du *puits dans l'isle* de B. Hellfer et J. Sjöstrand [44].

Signalons également des résultat récents autour du problème (1.5). Dans [21], Y. Capdeboscq étudie un problème de transmission pour un obstacle transparent (un disque de rayon ε et d'indice optique constant) et notamment des estimations du champs diffracté par un champs incident. Dans [34], J. Galkowski montre des estimations sur les parties imaginaires du problème (1.5) quand Ω est strictement convexe et lisse en terme de quantités dynamiques (trajectoires de l'optique géométrique).

Notre approche unifie trois types canoniques de situations pour le disque avec un indice optique radial. Elle s'étend à un cas général bidimensionnel. Cette approche

fournit des algorithmes de calculs des développements asymptotiques des résonances, plus particulièrement des termes des développements de Taylor des fonction $K_{p;j}$ (approximation dans le cas du demi-puits quadratique). Ces formules explicites sont particulièrement utiles pour guider le calcul numérique. Comme on l'a évoqué précédemment nous allons transformer le problème de résonances en un problème aux valeurs propres grâce à l'utilisation de PML, qui une fois discrétisé permet d'isoler les résonances dans le spectre de la matrice issue de la discrétisation. Comme nous sommes intéressés par les résonances à mode de galerie, qui en 2D ne sont qu'une sous-partie des résonances, les développements asymptotiques permettent d'avoir une estimation d'où se situe ces résonances dans le spectre de la matrice issue de la discrétisation. Cela est indispensable pour effectué le décalage idoine (*shift*) requis par les solveurs aux valeurs propres de la librairie ARPACK.

Logiciel utilisés. Le logiciel utilisé pour les calculs par la méthode des éléments finis est XLiFE++ [97]. Les maillages 2D sont fournis par Gmsh [36]. La visualisation et les divers scripts de calcul sont codés à l'aide de scripts Python utilisant les bibliothèques cxroots [76], Matplotlib [49], Meshio [86], NumPy [72] et SciPy [52]. Les calculs numériques des valeurs propres sont effectués avec ARPACK [62] à travers XLiFE++ ou SciPy. Les scripts de calcul formel sont écrit en Python en utilisant la bibliothèque SymPy [65].

1.4 Organisation du manuscrit

Ce manuscrit contient deux parties principales I et II ainsi qu'une annexe. Les parties I et II peuvent être lues indépendamment.

La partie I présente l'utilisation de PML pour les problèmes étudiés.

- **Le chapitre 2** contient une analyse de sensibilité d'un problème purement 1D avec PML pour le calcul de résonances à l'aide de la méthode des éléments finis.
- **Le chapitre 3** contient une description des PML où le problème de référence $(\mathcal{P}_p)$ défini en (1.5) est invariant par rotation.
- **Le chapitre 4** contient une description des PML radiales pour le calcul des résonances du problème $(\mathcal{P}_p)$ en dimension 2.

La partie II présente l'analyse asymptotique haute fréquence des résonances à mode de galerie.

- **Le chapitre 5** contient une introduction à la notion de résonances à modes de galerie et à la notion de quasi-résonances.
- **Le chapitre 6** contient les constructions de quasi-résonances dans le cas où le problème $(\mathcal{P}_p)$ est invariant par rotation.
- **Le chapitre 7** contient les comparaisons entre les quasi-résonances obtenues dans le chapitre 6 et les résonances calculées numériquement avec une PML et la méthode des éléments finis en 1D à l'aide de la librairie XLiFE++.

- **Le chapitre 8** contient la construction de quasi-résonances dans le cas où le problème n'est pas invariant par rotation.
- **Le chapitre 9** contient les comparaisons entre les quasi-résonances obtenus dans le chapitre 8 et les résonances calculées numériquement avec une PML radiale et la méthode des éléments finis en 2D à l'aide de la librairie XLiFE++.
- **Le chapitre 10** explicite le lien entre les quasi-résonances et les résonances du problème $(\mathcal{P}_p)$.
- **Le chapitre 11** contient les conclusions et perspectives de recherche continuant ce travail.

La partie III est composée de diverses annexes.

- **L'annexe A** est un glossaire des notations utilisées.
- **L'annexe B** replace le problème $(\mathcal{P}_p)$ dans la théorie du *black box scattering*.
- **L'annexe C** contient les lemmes techniques nécessaires à la construction des quasi-résonances des chapitres 6 et 8.
- **L'annexe D** contient les scripts de calcul formel élaborés pour calculer les termes des développements asymptotiques. La librairie utilisée est SymPy.
- **L'annexe E** contient d'autres cas pour lesquels on a aussi des développements asymptotiques.
- **L'annexe F** contient les développements asymptotiques des valeurs propres à mode de galerie du laplacien Dirichlet.

Une partie des résultats du chapitre 6 est présentée dans l'article suivant, soumis pour publication. Ce projet de recherche mené dans le cadre d'une collaboration entre l'IRMAR (UMR 6625) et le laboratoire FOTON (UMR 6082) et partiellement financé dans le cadre du Défi CNRS InFIniTI.

- S. Balac, M. Dauge, Y. Dumeige, P. Féron et Z. Moitier, *Mathematical analysis of whispering gallery modes in graded index optical micro-disk resonators*, HAL-02157635.

Première partie

Étude d'une couche parfaitement adaptées (PML) pour le problème de résonances

Chapitre 2

Un problème purement 1D

Sommaire

2.1 Cadre fonctionnel 22

2.2 Description du problème simplifié 23

2.2.1 Établissement de l'équation modale 25

2.2.2 Propriétés des zéros de l'équation modale 26

2.3 Réduction à un domaine borné par l'introduction d'une PML 30

2.3.1 Introduction d'un problème auxiliaire 30

2.3.2 Récapitulatif des différents problèmes considérés 34

2.3.3 Étude du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$ 35

2.3.4 Étude du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}})$ 37

2.4 Calcul des résonances par un schéma aux différences finies 43

2.5 Approximation par la méthode des éléments finis 46

2.5.1 Une première mise en œuvre avec XLiFE++ 48

2.5.2 Comparaison entre PML0 et PML2 50

2.5.3 Une seconde mise en œuvre avec XLiFE++ 51

2.5.4 Les différentes parties du spectre résonnant discret 53

2.5.5 Influence du paramètre σ_0 de la PML 56

2.5.6 Influence du paramètre r_0 de la PML 60

2.5.7 Influence du paramètre $R - r_1$ de la troncature 65

2.5.8 Influence des paramètres σ_0 et r_0 de la PML 68

2.5.9 Influence de la fonction de la PML 70

2.5.10 Conclusion 73

Afin d'appréhender les particularités mathématiques du problème de résonances associé à l'étude des modes de galerie d'un résonateur optique, nous abordons dans ce chapitre l'étude d'un problème unidimensionnel correspondant à une version simplifiée (unidimensionnelle à coefficients constants) du problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (1.5) page 5. Ce problème est similaire à celui étudié à la section 5 de [55]. Ce chapitre contient également une étude du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$ qui vient de l'utilisation des couches parfaitement adaptées (PML) pour $(\mathcal{T}_p)$. Enfin, nous terminons ce chapitre par une étude du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}})$, version tronquée de $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$, que l'on discrétise successivement à l'aide de la méthode des différences finies et de la méthode des éléments finis.

2.1 Cadre fonctionnel

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}_+$ une union finie d'intervalles ouverts disjoints et $\mathcal{U}$ un intervalle qui est soit $]0, R[$ avec $0 < R < +\infty$, soit $]0, +\infty[$, tel que $\Omega \subset \mathcal{U}$. On note $\Gamma = \partial\Omega \setminus \{0\}$ le bord de Ω. On considère par ailleurs deux fonctions a et b à valeurs complexes telles que

1. $a, b \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et bornées,
2. $a, b \equiv 1$ sur $\mathcal{U} \setminus \overline{\Omega}$,
3. $a^{-1}, b^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{U})$.

On définit un cadre fonctionnel général pour les problèmes étudiés par la suite. On rappelle la définition de l'opérateur de saut $[\,\cdot\,]_\Gamma$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour toute fonction w continue à droite et à gauche de γ, on a

$$[w]_\Gamma = \lim_{x \to \gamma^+} w(x) - \lim_{x \to \gamma^-} w(x).$$

On se place dans l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathcal{U})$. On considère l'opérateur $A : u \mapsto -(au')'$ et sa forme sesquilinéaire associée $q_a : (u, v) \mapsto \int_{\mathcal{U}} a\, \overline{u'}\, v'\, \mathrm{d}x$ munie du domaine de forme $D(q_a)$ qui est $\mathrm{H}^1(\mathcal{U})$ si $\mathcal{U} =]0, +\infty[$ et $\mathrm{H}^1_{0,R}(\mathcal{U}) = \{u \in \mathrm{H}^1(\mathcal{U}) \mid u(R) = 0\}$ si $\mathcal{U} =]0, R[$. Le domaine de forme correspond à une condition de Neumann homogène en 0 et de Dirichlet homogène en R si $\mathcal{U}$ est borné. Le domaine maximal de A, noté $D(A)$ est $\{u \in D(q_a) \mid Au \in \mathrm{L}^2(\mathcal{U})\}$. Comme on est en dimension 1, $D(A)$ est égal à $\mathrm{H}^2(\mathcal{U}, a)$ où on définit

$$\mathrm{H}^2(\mathcal{U}, a) \coloneqq \left\{u \in D(q_A) \mid au' \in \mathrm{H}^1(\mathcal{U})\right\}.$$

Dans le cas où $\mathcal{U} =]0, +\infty[$, on note

$$\mathrm{H}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}, a) \coloneqq \left\{u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[) \mid \forall \chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}([0, +\infty[),\ \chi u \in \mathrm{H}^2(\mathcal{U}, a)\right\}$$

où $\mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[) = \{u \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}) \mid \forall \chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}([0, +\infty[),\ \chi u \in \mathrm{H}^1(\mathcal{U})\}$. On notera que $[0, +\infty[$ est fermé en 0 et que le « loc » ne porte que sur un voisinage de l'infini. Pour tout $u \in \mathrm{H}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}, a)$ et pour tout $r > 0$, on a $u_{|]0,r[} \in \mathrm{H}^2(]0, r[, a)$.

Remarque 2.1. Si la fonction a est continue sur $\mathcal{U}$ alors $\mathrm{H}^2(\mathcal{U}, a) = \mathrm{H}^2(\mathcal{U})$ et $\mathrm{H}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}, a) = \mathrm{H}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U})$. Si la fonction a est discontinue, $u \in \mathrm{H}^2(\mathcal{U}, a)$ est équivalent à $u_{|\Omega} \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, $u_{|\mathcal{U}\setminus\overline{\Omega}} \in \mathrm{H}^2(\mathcal{U} \setminus \overline{\Omega})$ et $[a\, u']_\Gamma = 0$.

Dans la suite, les fonctions a considérées seront toujours discontinues et l'ensemble $\Gamma = \partial\Omega \setminus \{0\}$ correspondra aux discontinuités de a. Il est plus pertinent pour l'analyse de considérer les conditions de saut dans les équations. On introduit donc les espaces correspondant aux espace $\mathrm{H}^2(\mathcal{U}, a)$ et $\mathrm{H}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}, a)$ mais sans les sauts et les conditions limites. On définit $\underline{\mathrm{H}}^2(\mathcal{U}, \Gamma)$ l'espace H^2 par morceaux de la manière suivante : une fonction u appartient à $\underline{\mathrm{H}}^2(\mathcal{U}, \Gamma)$ si $u_{|U} \in \mathrm{H}^2(U)$ pour toute composante connexe U de $\mathcal{U} \setminus \Gamma$. De manière similaire, on définit

$$\underline{\mathrm{H}}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}, \Gamma) \coloneqq \left\{ u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}([0, +\infty[) \mid \forall \chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}([0, +\infty[),\ \chi u \in \underline{\mathrm{H}}^2(\mathcal{U}, \Gamma) \right\}.$$

Les problèmes que nous allons étudier auront l'une des formes suivantes. Dans le cas où $\mathcal{U}$ est bornée : trouver $(k, u) \in \mathbb{C} \times \underline{\mathrm{H}}^2(\mathcal{U}, \Gamma)$ tel que

$$(\mathcal{A}) \begin{cases} -(a\,u')' - k^2\,b\,u = 0 & \text{dans } \mathcal{U} \setminus \Gamma \\ [u]_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ [a\,u']_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ u'(0) = 0 & \\ u(R) = 0 & \text{si } \mathcal{U} =]0, R[\end{cases} . \tag{2.1}$$

Dans le cas où $\mathcal{U} =]0, +\infty[$: trouver $(k, u) \in \mathbb{C} \times \underline{\mathrm{H}}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}, \Gamma)$ tel que

$$(\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}) \begin{cases} -(a\,u')' - k^2\,b\,u = 0 & \text{dans } \mathcal{U} \setminus \Gamma \\ [u]_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ [a\,u']_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ u'(0) = 0 & \\ u(x) \propto \mathsf{e}^{\mathsf{i}kx} & x > \sup \Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

où la notation $\propto$ signifie « à une constante multiplicative près ». Le problème $(\mathcal{T}_p)$ sera du type $(\mathcal{A}_{\mathrm{loc}})$ et les problèmes $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$ et $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}})$ seront du type $(\mathcal{A})$.

2.2 Description du problème simplifié

Soit $\Omega =]\alpha, \beta[$ avec $0 < \alpha < \beta < +\infty$ et $\Gamma = \{\alpha, \beta\}$. Soit n une fonction telle que

$$n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \alpha \\ n_0 & \text{si } \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases} \tag{2.3}$$

avec $n_0 > 1$ comme représenté sur la figure 2.1. D'un point de vue pratique, une telle fonction correspond à l'indice optique pour une cavité ayant la forme d'un anneau où α et β sont les rayons intérieur et extérieur de l'anneau.

Pour $p \in \{\pm 1\}$, on définit le problème $(\mathcal{T}_p)$, version purement unidimensionnelle du problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (1.5) page 5, de la manière suivante : trouver $(k, u) \in$

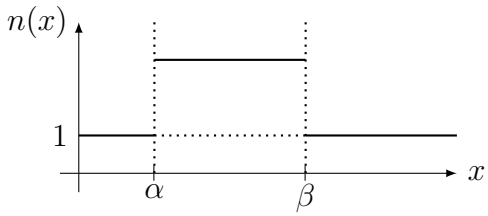
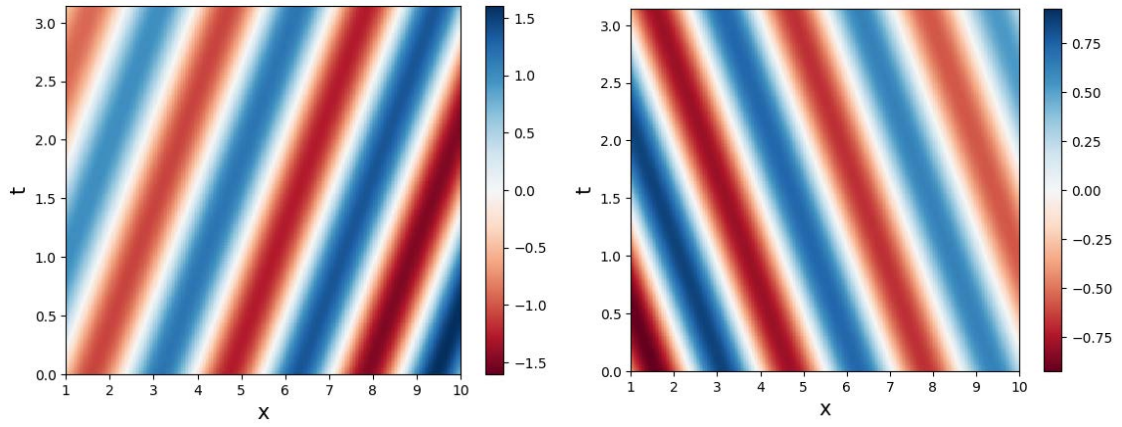


FIGURE 2.1 – Exemple de fonction n associée à un micro-anneau d'indice constant.

$\mathbb{C} \times \underline{\mathrm{H}}^2_{\mathrm{loc}}(]0, +\infty[, \Gamma)$ tel que

$$(\mathcal{T}_p) \begin{cases} -(n^{p-1}\, u')' - k^2\, n^{p+1}\, u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^* \setminus \Gamma \\ [u]_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ [n^{p-1} u']_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ u'(0) = 0 & \\ u(x) \propto \mathsf{e}^{\mathsf{i}kx} & x > \beta \end{cases} \tag{2.4}$$

où la notation $\propto$ signifie « à une constante multiplicative près ». On a pris une condition de Neumann homogène en 0. Ce choix est arbitraire. Tous les résultats de cette partie restent vrais si on prend une condition de Dirichlet homogène en 0. La dernière condition dans (2.4) s'appelle une condition d'onde sortante lorsque $k \in \mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(k) \leq 0\}$. Dans l'espace libre, c'est-à-dire pour $x > \beta$, on connaît une base de solutions de l'équation différentielle de (2.4) qui est formée des fonctions $x \mapsto \mathsf{e}^{\mathsf{i}kx}$ et $x \mapsto \mathsf{e}^{-\mathsf{i}kx}$. La première fonction correspond à une onde sortante et la deuxième correspond à une onde entrante au sens où si on les multiplie par $\mathsf{e}^{-\mathsf{i}kt}$ et que l'on regarde leurs comportements en fonction de t, on voit le comportement sortant ou entrant. Sur la figure 2.2, on a représenté $(x,t) \mapsto \mathrm{Re}\left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}kx}\mathsf{e}^{-\mathsf{i}kt}\right)$ et $(x,t) \mapsto \mathrm{Re}\left(\mathsf{e}^{-\mathsf{i}kx}\mathsf{e}^{-\mathsf{i}kt}\right)$.



(a) Onde sortante (b) Onde entrante

FIGURE 2.2 – À gauche, représentation d'une onde sortante correspondant à la fonction $(x,t) \mapsto \mathrm{Re}\left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}k(x-t)}\right)$ pour $k = 2 - \mathsf{i}\, 5 \times 10^{-2}$. À droite, représentation d'une onde entrante correspondant à la fonction $(x,t) \mapsto \mathrm{Re}\left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}k(-x-t)}\right)$. En abscisse, la coordonnée d'espace x et en ordonnée, la coordonnée temporelle t.

On souhaite étudier différentes méthodes numériques pour résoudre le problème $(\mathcal{T}_p)$ défini en (2.4). On a choisi la forme (2.3) forme pour la fonction n car on peut dans ce cas résoudre analytiquement le problème $(\mathcal{T}_p)$ comme cela est détaillé à la section suivante.

Remarque 2.2. Les résonances du problème $(\mathcal{T}_p)$ noté $\mathrm{Res}(\mathcal{T}_p)$ sont bien définies au sens du *black box scattering*, voir annexe B. Toutefois pour exploiter les résultats présentés dans l'annexe B, on doit symétriser le problème $(\mathcal{T}_p)$ pour qu'il soit défini sur $\mathbb{R}$. Pour cela on étend l'indice optique n par parité sur $\mathbb{R}$. Les résonances du problème $(\mathcal{T}_p)$ sont les résonances du problème symétrisé sur tout $\mathbb{R}$ tel que les modes résonnants associés vérifient la condition de Neumann homogène en 0.

2.2.1 Établissement de l'équation modale

L'équation différentielle du problème $(\mathcal{T}_p)$ défini en (2.4) page 24 est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants dans chaque domaine. Compte tenu de la condition aux limites en $x = 0$ et de celle d'onde sortante, la solution s'écrit :

$$u(x) = \begin{cases} c_0 \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right) & \text{si } x < \alpha \\ c_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}kn_0x} + c_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kn_0x} & \text{si } \alpha \leq x \leq \beta \\ c_\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} & \text{si } x > \beta \end{cases} . \tag{2.5}$$

Par ailleurs, les conditions de transmission aux interfaces situées en α et β fournissent les relations suivantes :

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) c_0 = A\, c_+ + \frac{1}{A}\, c_- \tag{2.6a}$$

$$\left(a - \frac{1}{a}\right) c_0 = n_0^p A\, c_+ - \frac{n_0^p}{A}\, c_- \tag{2.6b}$$

$$B\, c_+ + \frac{1}{B}\, c_- = b\, c_\infty \tag{2.6c}$$

$$n_0^p B\, c_+ - \frac{n_0^p}{B}\, c_- = b\, c_\infty \tag{2.6d}$$

où on a posé $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}$, $A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kn_0\alpha}$, $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\beta}$ et $B = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kn_0\beta}$. Les solutions (k, u) du problème $(\mathcal{T}_p)$ défini en (2.4) sont obtenues en résolvant le système linéaire formé des équations (2.6) d'inconnues c_0, c_-, c_+ et c_∞.

Plus précisément, s'il existe $k \in \mathbb{C}^-$ tel qu'il y ait des solutions $(c_0, c_+, c_-, c_\infty) \neq (0, 0, 0, 0)$ au système (2.6) alors on a existence de solutions (k, u) au problème $(\mathcal{T}_p)$ défini en (2.4). Nous allons ré-écrire ce système sous forme matricielle. Trouver des solutions non nulles au système linéaire (2.6) revient à trouver un élément non nul

du noyau de la matrice

$$M_p(k) = \begin{pmatrix} a + \dfrac{1}{a} & -A & -\dfrac{1}{A} & 0 \\ a - \dfrac{1}{a} & -n_0^p A & \dfrac{n_0^p}{A} & 0 \\ 0 & B & \dfrac{1}{B} & -b \\ 0 & n_0^p B & -\dfrac{n_0^p}{B} & -b \end{pmatrix}.$$

Intéressons-nous à son déterminant. On suppose ici que $p \neq 0$ (on rappelle que les cas d'intérêt en physique correspondent à $p = \pm 1$). Comme a, A, b et B ne peuvent pas s'annuler et comme $n_0^p \neq 1$, $\det(M_p(k)) = 0$ est équivalent à :

$$\frac{A}{B}\left(a^2 + \frac{n_0^p + 1}{n_0^p - 1}\right) - \frac{B}{A}\left(a^2 + \frac{n_0^p - 1}{n_0^p + 1}\right) = 0.$$

Résoudre cette équation revient à trouver les solutions k de l'équation $f_p(k) = 0$, dite *équation modale*, où

$$f_p(k) = \widehat{k}^{2(\beta-\alpha)n_0+2\alpha} + \frac{n_0^p - 1}{n_0^p + 1}\widehat{k}^{2(\beta-\alpha)n_0} - \widehat{k}^{2\alpha} - \frac{n_0^p + 1}{n_0^p - 1}, \tag{2.7}$$

avec $p \in \mathbb{Z}$, $\widehat{k} = \mathsf{e}^{\mathsf{i}k}$, $0 < \alpha < \beta$ et $n_0 > 1$. La fonction f_p est appelée *fonction modale*.

2.2.2 Propriétés des zéros de l'équation modale

Pour calculer numériquement les solutions k de l'équation modale, on utilise la propriété suivante : pour toute fonction holomorphe f, on a $\frac{1}{2\mathsf{i}\pi}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \geq 1$ pour tout contour C encerclant des zéros de f, voir [32]. Ainsi, pour un contour C donné et une fonction holomorphe f donnée, les situations suivantes peuvent se produire.

1. Si $\frac{1}{2\mathsf{i}\pi}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 0$, alors on sait qu'il n'y a pas de zéro dans le domaine qu'encercle C.

2. Si $\frac{1}{2\mathsf{i}\pi}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 1$, alors dans le domaine qu'encercle C, il y a un zéro k d'ordre 1 de f et on peut le calculer directement grâce à la relation

$$k = \frac{1}{2\mathsf{i}\pi}\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z.$$

3. Sinon, on essaye de trouver un autre contour C qui permette d'être dans le deuxième cas. Si on n'arrive pas à trouver un tel contour C et que l'on a $\frac{1}{2\mathsf{i}\pi}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = q \geq 2$ alors on calcule $\frac{1}{2\mathsf{i}\pi}\int_C z^\ell \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$ pour $\ell \in \{1, \ldots, q\}$ et, en utilisant les identités de Newton, on peut trouver les coefficients du polynôme unitaire dont toutes les racines sont à l'intérieur de C et qui sont les zéros de f situés à l'intérieur de C.

Remarque 2.3. Notons que cette méthode est très efficace numériquement. La valeur de l'intégrale étant un entier, il n'est pas utile d'utiliser une formule de quadrature

d'ordre élevé ou une discrétisation fine. Il suffit de calculer une valeur approchée de l'intégrale permettant de distinguer quelle est la valeur de l'entier correspondant à la valeur exacte de cette intégrale. De plus, comme les fonctions $z \mapsto z^q \frac{f'(z)}{f(z)}$ sont periodique et analytique sur le contour d'intégration la méthode des trapèzes converge exponentiellement vite, voir [95, chapitre 12].

Dans notre cas, f_p est bien une fonction holomorphe et en posant $\delta = 2(\beta-\alpha)n_0$, $\tau = 2\alpha$ et $\kappa = \delta + \tau$, on a

$$f_p(z) = \mathsf{e}^{\mathsf{i}\kappa z} + \frac{n_0^p - 1}{n_0^p + 1}\mathsf{e}^{\mathsf{i}\delta z} - \mathsf{e}^{\mathsf{i}\tau z} - \frac{n_0^p + 1}{n_0^p - 1}, \tag{2.8}$$

$$f_p'(z) = \mathsf{i}\kappa\mathsf{e}^{\mathsf{i}\kappa z} + \frac{n_0^p - 1}{n_0^p + 1}\mathsf{i}\delta\mathsf{e}^{\mathsf{i}\delta z} - \mathsf{i}\tau\mathsf{e}^{\mathsf{i}\tau z}. \tag{2.9}$$

Cas particulier. Si $\kappa \in \mathbb{Q}_+$, $\delta \in \mathbb{Q}_+$ et $\tau \in \mathbb{Q}_+$ alors il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_3 \coloneqq q\kappa \in \mathbb{N}$, $p_2 \coloneqq q\delta \in \mathbb{N}$ et $p_1 \coloneqq q\tau \in \mathbb{N}$. La relation $\kappa = \delta + \tau$ implique $p_3 = p_2 + p_1$. En posant $\widehat{z} = \mathsf{e}^{\frac{\mathsf{i}z}{q}}$, on est conduit à rechercher les racines du polynôme Q de degré p_3 défini par

$$Q(\widehat{z}) = \widehat{z}^{p_3} + \frac{n_0^p - 1}{n_0^p + 1}\widehat{z}^{p_2} - \widehat{z}^{p_1} - \frac{n_0^p + 1}{n_0^p - 1}. \tag{2.10}$$

Ce polynôme a p_3 racines, notées $r_\ell \mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta_\ell}$ pour $\ell \in \{0, \dots, p_3 - 1\}$ avec $r_\ell \geq 0$ et $\theta_\ell \in]-\pi, \pi]$. Les zéros de la fonction f_p sont les complexes k tels que $\mathsf{e}^{\frac{\mathsf{i}k}{q}} = r_\ell \mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta_\ell}$. Cela conduit à l'existence de p_3 familles arithmétiques de valeurs possibles pour k données par

$$k_{\ell,j} = 2q\pi j + q\theta_\ell - \mathsf{i}q\ln(r_\ell) \text{ où } \ell \in \{0, \dots, p_3 - 1\} \text{ et } j \in \mathbb{Z}.$$

Nous allons établir que toutes ces valeurs sont de partie imaginaire strictement négative. Ceci revient à montrer que $r_\ell > 1$, autrement dit que les zéros du polynôme Q défini en (2.10) sont de module strictement plus grand que 1. Pour ce faire, on a recours au lemme suivant.

Lemme 2.4. *Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $Q = X^{p+q} + aX^p - X^q - \frac{1}{a}$. On a la disjonction de cas suivante :*

- *si $|a| < 1$ alors les zéros de Q sont de module strictement plus grand que 1 ;*
- *si $|a| = 1$ alors les zéros de Q sont de module 1.*

Démonstration. On remarque que si $|a| = 1$ alors toutes les racines de Q sont de module 1. En effet, dans ce cas on a la factorisation suivante $Q = (X^p - 1)(X^q + \operatorname{sgn}(a))$. Réciproquement, montrons que si Q possède une racine de module 1 alors $|a| = 1$. Soit z une racine de module 1 de Q ; on a

$$z^p(z^q + a) = z^q + \frac{1}{a}. \tag{2.11}$$

En posant $w = z^q$ de module 1 et en prenant le module de l'expression (2.11), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} |w| &= 1 \\ |w + a| &= \left|w + \frac{1}{a}\right| \end{cases}.$$

Les solutions de ce système sont les points d'intersection entre le cercle unité et la médiatrice du segment délimité par les points $-a$ et $\frac{-1}{a}$, qui est la droite verticale qui coupe l'axe réel en $\frac{-1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$. Pour que cette intersection soit non vide, il faut que $\left|\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right| \leq 1$. On montre facilement que cela n'est possible que pour $|a|=1$.

On a montré que Q a une racine de module 1 si, et seulement si, $|a|=1$. Par conséquent, si $|a| \neq 1$ alors les racines ne sont pas sur le cercle unité. Montrons que pour $|a|<1$ alors toutes les racines de Q sont à l'extérieur du cercle unité.

Commençons par considérer le cas où $a \in \mathbb{R}^*$ avec $|a| < \sqrt{2}-1$. Soit z une racine de Q de module plus petit que 1. On a

$$|z^{p+q} + az^p - z^q| = \left|\frac{1}{a}\right| \tag{2.12}$$

et

$$|z^{p+q} + az^p - z^q| \leq |a| + 2 < \sqrt{2}+1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} < \frac{1}{|a|}. \tag{2.13}$$

Les relations (2.12) et (2.13) conduisent à une contradiction. Cela signifie que pour $|a| < \sqrt{2}-1$, toutes les racines de Q sont de module strictement plus grand que 1.

Par continuité des racines de Q relativement à a, on en conclut que pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ avec $|a|<1$, toutes les racines de Q sont de module strictement plus grand que 1. □

En posant $p=p_2$, $q=p_1$ et $a=\frac{n_0^p-1}{n_0^p+1}$, on peut appliquer le lemme 2.4 au polynôme défini en (2.10). Une rapide étude de fonction montre que pour $n_0>1$ et $p \in \mathbb{Z}$, on a $\left|\frac{n_0^p-1}{n_0^p+1}\right| < 1$. On établit ainsi que les résonances sont de partie imaginaire strictement négative.

Exemple 2.5. Soit $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=1$ et $n_0=2$. Dans le cas TE ($p=-1$), le polynôme Q défini en (2.10) a pour expression

$$Q(\gamma) = \gamma^3 - \frac{1}{3}\gamma^2 - \gamma + 3.$$

On a les approximations décimales suivantes des racines :

$$\begin{aligned} k_{1,0} &= 8.2456052243815554 \times 10^{-1} - \mathrm{i}\, 3.2905588895739554 \times 10^{-1}, \\ k_{0,1} &= 3.1415926535897932 - \mathrm{i}\, 4.4050051075331862 \times 10^{-1}, \\ k_{2,0} &= 5.4586247847414309 - \mathrm{i}\, 3.2905588895739554 \times 10^{-1}. \end{aligned}$$

Dans le cas TM ($p=+1$), le polynôme Q défini en (2.10) a pour expression

$$Q(\gamma) = \gamma^3 + \frac{1}{3}\gamma^2 - \gamma - 3.$$

On a les approximation décimales suivantes des racines :

$$\begin{aligned} k_{1,0} &= 2.3170321311516377 - \mathrm{i}\, 3.2905588895739554 \times 10^{-1}, \\ k_{2,0} &= 3.9661531760279487 - \mathrm{i}\, 3.2905588895739554 \times 10^{-1}, \\ k_{0,1} &= 6.2831853071795864 - \mathrm{i}\, 4.4050051075331862 \times 10^{-1}. \end{aligned}$$

Montrons à présent que les zéros de la fonction modale f_p définie en (2.7) sont des fonctions continues de α, β et n_0. La preuve de cette propriété exploite le lemme suivant.

Lemme 2.6. *Soient $d \in \mathbb{N}^*$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : \mathbb{C} \times \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in \Omega$, $f(\cdot, x)$ soit holomorphe. Pour tout $(z_0, x_0) \in \mathbb{C}\times\Omega$ tel que $f(z_0, x_0) = 0$, il existe un contour γ dans $\mathbb{C}$ entourant z_0 et un voisinage V de x_0 tel que pour tout $q \in \mathbb{N}$, l'application*

$$\begin{array}{rccc} s_q^\gamma : & V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{2\mathrm{i}\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{z^q}{f(z,x)}\frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\,\mathrm{d}z \end{array}$$

est continue.

Démonstration. Pour montrer que s_q^γ est continue sur V, on a recours au théorème de continuité des intégrales à paramètre. Soit g la fonction de $\mathbb{C} \times \Omega$ définie par

$$g(z, x) = \frac{z^q}{f(z, x)}\frac{\partial f}{\partial z}(z, x).$$

Dans le plan complexe, désignons par $D(z, r)$ le disque de centre z et de rayon r, $B(x, r)$ la boule de $\mathbb{R}^d$ de centre x et de rayon r et $C(z, a, b) = D(z, b) \setminus \overline{D}(z, a)$ la couronne ouverte de centre z de rayon intérieur a et de rayon extérieur b. Comme z_0 est un zéro de la fonction holomorphe $f_{x_0} : z \mapsto f(z, x_0)$, d'après la propriété des zéros isolés pour les fonctions holomorphes, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$D(z_0, 2\varepsilon) \cap f_{x_0}^{-1}(\{0\}) = \{z_0\}.$$

L'ensemble $(D(z_0, 2\varepsilon) \times \Omega) \cap \left[\mathbb{C} \setminus f_{x_0}^{-1}(\{0\})\right]$ est ouvert et

$$C\left(z_0, \tfrac{\varepsilon}{2}, 2\varepsilon\right) \times \{x_0\} \subset (D(z_0, 2\varepsilon) \times \Omega) \cap \left[\mathbb{C} \setminus f_{x_0}^{-1}(\{0\})\right].$$

On en déduit qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\left(C\left(z_0, \tfrac{\varepsilon}{2}, 2\varepsilon\right) \times B(x_0, \eta)\right) \cap f_{x_0}^{-1}(\{0\}) = \varnothing.$$

Pour tout $x \in B(x_0, \eta)$, $f_x^{-1}(\{0\}) \cap D(z_0, 2\varepsilon) \subset D(z_0, \frac{\varepsilon}{2})$.

Soient $\gamma = \partial D(z_0, \varepsilon)$ le cercle de centre z_0 et de rayon ε et $V = B(x_0, \eta)$. La fonction $g(\cdot, x)$ est holomorphe sur $C(z_0, \frac{\varepsilon}{2}, 2\varepsilon)$ pour tout $x \in V$. On peut appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre. En effet,

- pour tout $z \in \gamma$, $x \in V \mapsto g(z, x)$ est continue,
- pour tout $x \in V$, $z \in \gamma \mapsto g(z, x)$ est intégrable,
- la domination de $z \mapsto |g(z, x)|$ par une fonction intégrable est triviale car γ est compact.

On en conclut que s_q^γ est continue sur V. □

Remarque 2.7. On rappelle, voir [32, équation (1.4)], que pour une fonction f holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et pour une courbe γ fermée, simple, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, contenue dans Ω telles que $f^{-1}(\{0\}) \cap \gamma = \varnothing$, on a la relation suivante, pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\gamma z^q \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{k\in G} a_k k^q,$$

où G est l'ouvert borné délimité par la courbe Γ et $a_k \in \mathbb{N}^*$ est la multiplicité de la racine k.

Dans la situation qui nous intéresse, la fonction modale $f_p : \mathbb{C}\times\Omega \to \mathbb{C}$ vérifie les hypothèses du lemme précédent avec $\Omega = \{(\alpha, \beta, n_0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < \alpha < \beta \text{ et } n_0 > 1\}$. On a donc la proposition suivante.

Proposition 2.8. *Il y a continuité des zéros de f_p par rapport à α, β et n_0.*

Théorème 2.9. *Pour tout $(\alpha, \beta, n_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $0 < \alpha < \beta$ et $n_0 > 1$, l'ensemble des solutions du problème $(\mathcal{T}_p)$ défini en (2.4) est discret et non vide.*

Démonstration. On a vu que si certaines combinaisons des paramètres (α, β, n_0) sont rationnelles alors on a un nombre fini de familles arithmétiques de résonances k solutions de l'équation modale. De plus, par la continuité des résonances en fonction des paramètres (α, β, n_0), pour tout $(\alpha, \beta, n_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $0 < \alpha < \beta$ et $n_0 > 1$, l'ensemble des résonances est discret et non vide. □

2.3 Réduction à un domaine borné par l'introduction d'une PML

2.3.1 Introduction d'un problème auxiliaire

La méthode développée ici se base sur l'article [55]. Dans le but de pouvoir résoudre le problème $(\mathcal{T}_p)$ défini en (2.4) page 24 par la méthode des différences finies ou par la méthode des éléments finis, il convient de borner le domaine de calcul. Différentes approches sont envisageables. Nous avons fait le choix d'utiliser une couche parfaitement adaptée (PML pour *Perfectly Matched Layer* en anglais). À noter que cette méthode porte aussi le nom de dilatation analytique (*analytic dilatation*) ou encore de mise à l'échelle complexe (*complex scaling*). Cette approche consiste à modifier le problème à l'extérieur de la zone d'intérêt pour que le module des solutions décroissent rapidement afin de borner le domaine de calcul avec une condition de bord de Dirichlet homogène. Cette modification est paramétrée par une fonction $\tilde{\sigma}$ et le problème reste inchangé là où elle est nulle, c'est-à-dire dans la zone d'intérêt.

Soient r_0, r_1 tel que $\beta \leq r_0 < r_1$. On introduit une fonction $\tilde{\sigma}$ telle que

$$\tilde{\sigma}(x) := \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq r_0 \\ \text{croissante} & r_0 < x < r_1 \\ \sigma_0 & x \geq r_1 \end{cases}, \tag{2.14}$$

et $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}_+)$ pour $q \in \mathbb{N}$ donné, voir figure 2.3 pour une illustration.

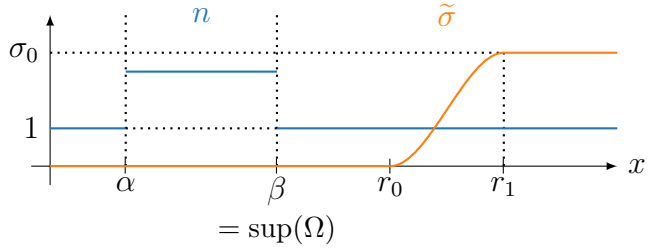


FIGURE 2.3 – Représentation graphique type de la fonction $\tilde{\sigma}$ et de la fonction n.

Une telle fonction $\widetilde{\sigma}$ est donnée par exemple sur $[r_0, r_1]$ par

$$\widetilde{\sigma}(x) = \sigma_0 \frac{\displaystyle\int_{r_0}^{x} (t-r_0)^q (r_1-t)^q \,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{r_0}^{r_1} (t-r_0)^q (r_1-t)^q \,\mathrm{d}t}. \tag{2.15}$$

On pose pour tout $x \geq 0$

$$\widetilde{d}(x) \coloneqq 1 + \mathrm{i}\widetilde{\sigma}(x), \qquad \widetilde{x}(x) \coloneqq x\widetilde{d}(x) \qquad \text{et} \qquad \sigma(x) \coloneqq \widetilde{\sigma}(x) + x\widetilde{\sigma}'(x). \tag{2.16a}$$

On définit aussi les fonctions suivantes

$$d(x) \coloneqq 1 + \mathrm{i}\sigma(x) \qquad \text{et} \qquad d_0 \coloneqq 1 + \mathrm{i}\sigma_0. \tag{2.16b}$$

Notons que pour tout $x \in [0, r_0]$, on a $\widetilde{d}(x) = d(x) = 1$ et pour tout $x \in [r_1, +\infty)$, on a $\widetilde{d}(x) = d(x) = d_0$. On va s'intéresser à différentes régularités pour ces fonctions. On considérera principalement les valeurs de q égales à 0, 1 ou 2. Dans le cas où $q = 0$, appelé PML0 par la suite, la relation (2.15) donne pour $x \in [r_0, r_1]$

$$\widetilde{\sigma}(x) = \sigma_0 \frac{x - r_0}{r_1 - r_0}, \tag{2.17a}$$

$$\sigma(x) = \sigma_0 \frac{2x - r_0}{r_1 - r_0}. \tag{2.17b}$$

Dans le cas où $q = 1$, appelé PML1 par la suite, la relation (2.15) donne pour $x \in [r_0, r_1]$

$$\widetilde{\sigma}(x) = \sigma_0 \frac{(x-r_0)^2}{(r_1-r_0)^3}\Big[-2x - r_0 + 3r_1\Big], \tag{2.18a}$$

$$\sigma(x) = \sigma_0 \frac{x-r_0}{(r_1-r_0)^3}\Big[-8x^2 + (r_0 + 9r_1)x + r_0 - 3r_0r_1\Big]. \tag{2.18b}$$

Dans le cas où $q = 2$, appelé PML2 par la suite, la relation (2.15) donne pour $x \in [r_0, r_1]$

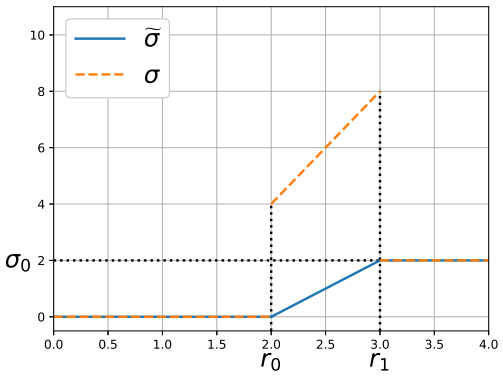
$$\widetilde{\sigma}(x) = \sigma_0 \frac{(x-r_0)^3}{(r_1-r_0)^5}\Big[6x^2 + 3(r_0 - 5r_1)x + r_0^2 - 5r_0r_1 + 10r_1^2\Big], \tag{2.19a}$$

$$\sigma(x) = \sigma_0 \frac{(x-r_0)^2}{(r_1-r_0)^5}\Big[36x^3 - 3(r_0 + 25r_1)x^2 - 2(r_0^2 - 5r_0r_1 - 20r_1^2)x - r_0^3 + 5r_0^2r_1 - 10r_0r_1^2\Big]. \tag{2.19b}$$

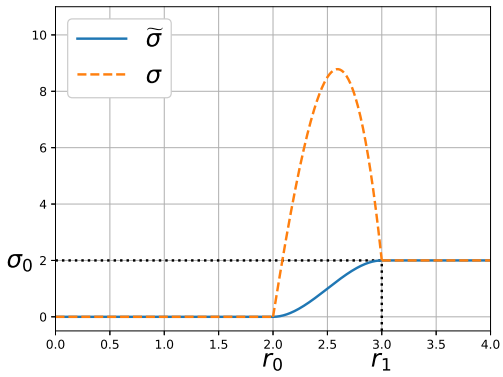
Ces fonctions sont représentées à la figure 2.4. Comme intervient une dérivée seconde dans le problème $(\mathcal{T}_p)$ défini en (2.4), pour que le problème modifié construit par la suite soit vérifié dans un sens fort, il faudra que $\widetilde{\sigma}$ soit au moins de classe $\mathcal{C}^2$. Toutefois, la formulation variationnelle permet de baisser la régularité de $\widetilde{\sigma}$ et on pourra avoir $\widetilde{\sigma}$ de classe $\mathcal{C}^0$ uniquement.

Considérons une solution (k, u) du problème $(\mathcal{T}_p)$ défini en (2.4) et introduisons la fonction $\widetilde{u}$ suivante :

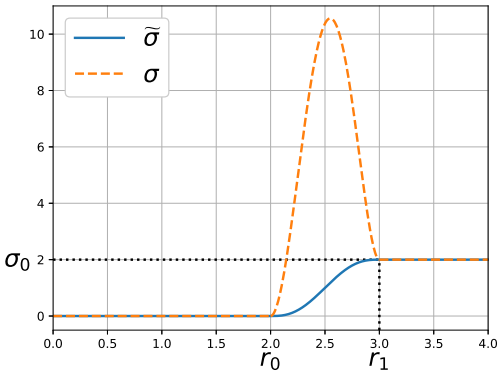
$$\widetilde{u}(x) = u(\widetilde{x}(x)).$$



(a) $\widetilde{\sigma} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$, $q = 0$



(b) $\widetilde{\sigma} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, $q = 1$



(c) $\widetilde{\sigma} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$, $q = 2$

FIGURE 2.4 – Représentation graphique des fonctions $\widetilde{\sigma}$ et σ, avec les paramètres $r_0 = 2$, $r_1 = 3$ et $\sigma_0 = 2$ pour les trois cas de régularité considérés.

Une propriété essentielle utilisée par la suite est que d'après (2.5), pour tout $x > r_1$, on a

$$|u(x)| = |c_\infty| \mathrm{e}^{-\operatorname{Im}(k)x} \qquad \text{et} \qquad |\widetilde{u}(x)| = |c_\infty| \mathrm{e}^{-\operatorname{Im}(d_0 k)x}. \tag{2.20}$$

Comme (k, u) est une solution du problème $(\mathcal{T}_p)$ défini en (2.4), on vérifie sans peine que la fonction $\widetilde{u}$ vérifie

$$\begin{cases} -\partial_{\widetilde{x}}\left(n^{p-1}\,\partial_{\widetilde{x}}\widetilde{u}\right) - k^2\, n^{p+1}\,\widetilde{u} = 0 & \text{dans }]0,+\infty[\backslash\widetilde{\Gamma} \\ [u]_{\widetilde{\Gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\Gamma} \\ [n^{p-1}\partial_{\widetilde{x}}\widetilde{u}]_{\widetilde{\Gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\Gamma} \\ \partial_{\widetilde{x}}\widetilde{u}(0) = 0 & \\ \lim\limits_{x\to+\infty} |\widetilde{u}(x)| = 0 & \end{cases} \tag{2.21}$$

où $\widetilde{\Gamma} = \Gamma \cup \{r_0, r_1\}$ est l'ensemble des discontinuités de n union les discontinuités de d. On prend la même condition aux limite en $\widetilde{x} = 0$ que celle vérifiée par la solution u du problème $(\mathcal{T}_p)$ défini en (2.4) page 24. La condition à l'infini n'est vérifiée que si $\operatorname{Im}(k) + \sigma_0 \operatorname{Re}(k) > 0$. Ainsi, si on fixe σ_0, on ne trouvera comme solution que les valeurs de k appartenant à l'ensemble

$$\mathbb{C}^-_{\sigma_0} \coloneqq \{k \in \mathbb{C}^- \mid \operatorname{Im}(k) + \sigma_0 \operatorname{Re}(k) > 0\}.$$

On peut ré-écrire le problème (2.21) avec des dérivées en x, en remarquant que $\partial_x = d\partial_{\widetilde{x}}$. On obtient le problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$ suivant

$$(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}}) \begin{cases} -\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{n^{p-1}}{d}\widetilde{u}'\right)' - k^2\, n^{p+1}\,\widetilde{u} = 0 & \text{dans }]0,+\infty[\backslash\widetilde{\Gamma} \\ [\widetilde{u}]_{\widetilde{\Gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\Gamma} \\ [d^{-1}\, n^{p-1}\,\widetilde{u}']_{\widetilde{\Gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\Gamma} \\ \widetilde{u}'(0) = 0 & \\ \lim\limits_{x\to+\infty} |\widetilde{u}(x)| = 0 & \end{cases} . \tag{2.22}$$

Intéressons nous à la formulation variationnelle du système $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$ défini en (2.22). En multipliant l'équation différentielle du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$ par $d\,v$ avec $v \in \mathrm{H}^1(]0,+\infty[)$ et en intégrant sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient

$$-\int_0^{+\infty} \left(\frac{n^{p-1}}{d}\widetilde{u}'\right)' v \,\mathrm{d}x = k^2 \int_0^{+\infty} d\, n^{p+1}\,\widetilde{u} v \,\mathrm{d}x.$$

Pour prendre en compte la condition de Neumann en 0 et les conditions de transmission $[d^{-1}\, n^{p-1}\,\widetilde{u}']_{\widetilde{\Gamma}} = 0$, on scinde l'intégrale en intégrales sur $[0,\alpha]$, $[\alpha,\beta]$, $[\beta,r_0]$, $[r_0,r_1]$ et $[r_1,+\infty[$ grâce à la relation de Chasles. En appliquant la formule d'intégration par parties à chaque intégrale, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^{p-1}}{d}\widetilde{u}' v' \,\mathrm{d}x = k^2 \int_0^{+\infty} d\, n^{p+1}\,\widetilde{u} v \,\mathrm{d}x.$$

La formulation variationnelle du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$ est donc : trouver $(k, \widetilde{u}) \in \mathbb{C}^-_{\sigma_0} \times \mathrm{H}^1(]0,+\infty[)$ tel que pour tout $v \in \mathrm{H}^1(]0,+\infty[)$, on ait

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^{p-1}}{d}\, \widetilde{u}' v' \,\mathrm{d}x = k^2 \int_0^{+\infty} d\, n^{p+1}\, \widetilde{u} v \,\mathrm{d}x. \tag{2.23}$$

On remarque que l'appartenance de la fonction $\widetilde{u}$ à l'espace $\mathrm{H}^1(]0,+\infty[)$ impose que les conditions de transmission $[\widetilde{u}]_{\widetilde{\Gamma}} = 0$ et d'onde sortante sont satisfaites.

Remarque 2.10. Pour plus de simplicité, dans toute la suite du chapitre, on a remplacé l'inconnue $\widetilde{u}$ par u.

2.3.2 Récapitulatif des différents problèmes considérés

Le problème initial $(\mathcal{T}_p)$ défini en (2.4) page 24 consiste à déterminer les couples $(k,u) \in \mathbb{C}^- \times \underline{\mathrm{H}}^2_{\mathrm{loc}}(]0,+\infty[,\Gamma)$ tels que

$$(\mathcal{T}_p) \begin{cases} -\left(n^{p-1}\, u'\right)' - k^2\, n^{p+1}\, u = 0 & \text{dans }]0,+\infty[\backslash\Gamma \\ [u]_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ [n^{p-1}\, u']_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ u'(0) = 0 & \\ u(x) \propto \mathsf{e}^{\mathsf{i}kx} & x \geq \beta \end{cases}$$

où n est la fonction suivante

$$n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \alpha \\ n_0 & \text{si } \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases}$$

avec $0 < \alpha < \beta < +\infty$, $n_0 > 1$et $\Gamma = \{\alpha, \beta\}$

L'introduction d'une PML conduit au problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$ défini en (2.22) page 33 consistant à déterminer les couples $(k,u) \in \mathbb{C}^-_{\sigma_0} \times \underline{\mathrm{H}}^2(]0,+\infty[,\widetilde{\Gamma})$ tels que

$$(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}}) \begin{cases} -\left(\dfrac{n^{p-1}}{d} u'\right)' = k^2\, d\, n^{p+1}\, u & \text{dans }]0,+\infty[\backslash\widetilde{\Gamma} \\ [u]_{\widetilde{\Gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\Gamma} \\ [d^{-1}\, n^{p-1}\, u']_{\widetilde{\Gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\Gamma} \\ u'(0) = 0 & \\ \lim\limits_{x\to+\infty} |u(x)| = 0 & \end{cases}$$

où $d(x) = 1 + \mathsf{i}(\widetilde{\sigma}(x) + x\widetilde{\sigma}'(x))$ et $\widetilde{\sigma}$ est définie de la façon suivante avec $\beta \leq r_0 < r_1 < +\infty$, $\sigma_0 > 0$ et

$$\widetilde{\sigma}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < r_0 \\ \text{croissante} & \text{si } r_0 \leq x \leq r_1 \\ \sigma_0 & \text{si } x > r_1 \end{cases}.$$

L'ensemble $\widetilde{\Gamma}$ est l'union des discontinuités de n et de d. La formulation variationnelle du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$ s'écrit : trouver $(k,u) \in \mathbb{C}^-_{\sigma_0} \times \mathrm{H}^1(]0,+\infty[)$ tel que pour tout $v \in \mathrm{H}^1(]0,+\infty[)$, on ait

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^{p-1}}{d}\, u'v'\,\mathrm{d}x = k^2 \int_0^{+\infty} d\, n^{p+1}\, uv\,\mathrm{d}x. \tag{2.24}$$

Pour la mise en œuvre de la méthode des éléments finis, on est amené à considérer le problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$ restreint à un domaine borné $]0,R[$, avec $R \geq r_1$, que nous désignerons par $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}})$. Les paramètres du problème sont illustrés à la figure 2.5. Ce problème s'écrit : trouver $(k,u) \in \mathbb{C}^-_{\sigma_0} \times \underline{\mathrm{H}}^2(]0,R[,\widetilde{\Gamma})$ tel que

$$(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}}) \begin{cases} -\left(\dfrac{n^{p-1}}{d}u'\right)' = k^2\, d\, n^{p+1}\, u & \text{dans }]0,R[\setminus\widetilde{\Gamma} \\ [u]_{\widetilde{\Gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\Gamma} \\ [d^{-1}\, n^{p-1}\, u']_{\widetilde{\Gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\Gamma} \\ u'(0) = 0 & \\ u(R) = 0 & \end{cases} . \tag{2.25}$$

Le problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}})$ admet la formulation variationnelle suivante : trouver $(k,u) \in \mathbb{C}^-_{\sigma_0} \times \mathrm{H}^1_{0,R}(]0,R[)$ tel que pour tout $v \in \mathrm{H}^1_{0,R}(]0,R[)$, on ait

$$\int_0^{R} \frac{n^{p-1}}{d}\, u'v'\,\mathrm{d}x = k^2 \int_0^{R} d\, n^{p+1}\, uv\,\mathrm{d}x. \tag{2.26}$$

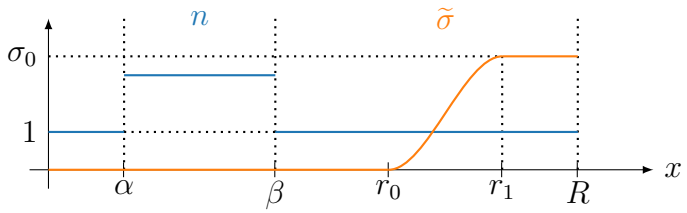


FIGURE 2.5 – Représentation graphique de la situation du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}})$.

Enfin, on considérera à la section 2.5 page 46 le problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{FEM}})$ qui est la discrétisation par la méthode des éléments finis du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}})$. On est, dans ce cas, amené à trouver les éléments propres d'une matrice complexe non hermitienne.

2.3.3 Étude du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$

Le théorème suivant relie les résonances du problème $(\mathcal{T}_p)$ défini en (2.4) page 24 aux valeurs propres du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$ défini en (2.22) page 33.

Théorème 2.11. *Soit $k \in \mathbb{C}^-_{\sigma_0}$. On a l'équivalence suivante : k est une résonance du problème $(\mathcal{T}_p)$ si, et seulement si, k est une valeur propre du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$.*

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{C}^-_{\sigma_0}$ une résonance du problème $(\mathcal{T}_p)$. Pour $x > r_0$, compte tenu de la condition d'onde sortante, la solution de l'équation différentielle

$$-(n^{p-1}\, u')' - k^2\, n^{p+1}\, u = 0$$

est de la forme $u(x) = c_\infty \mathsf{e}^{\mathsf{i}kx}$. Considérons la fonction $\widetilde{u}$ telle que

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in [0, r_0[\\ c_\infty \mathsf{e}^{\mathsf{i}k\widetilde{d}(x)x} & \text{si } x \in [r_0, +\infty[\end{cases}.$$

On a $\widetilde{u}_{|]r_0,+\infty[} \in \mathrm{H}^2(]r_0, +\infty[)$ et on vérifie sans peine que $\widetilde{u}$ vérifie les conditions du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$. Par conséquent, $\widetilde{u}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre k du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$. La réciproque se démontre d'une manière similaire. □

On souhaite à présent déterminer où se situe dans le plan complexe le spectre de l'opérateur $T(\lambda)$. On définit la forme sesquilinéaire sur $\mathrm{H}^1(]0, +\infty[)$ suivante :

$$t_\lambda(u, v) \coloneqq \int_0^{+\infty} \frac{n^{p-1}}{d}\, \overline{u'} v' \,\mathrm{d}x - \lambda \int_0^{+\infty} d\, n^{p+1}\, \overline{u} v \,\mathrm{d}x \qquad \forall u, v \in \mathrm{H}^1(]0, +\infty[)$$

associée à l'opérateur $T(\lambda)$ par $t_\lambda(u, v) = (u, T(\lambda)v)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)}$ où $v \in \mathrm{H}^2(]0, +\infty[, n^{p-1})$ et $u \in \mathrm{H}^1(]0, +\infty[)$. C'est la forme sesquilinéaire intervenant dans la formulation variationnelle (2.24) du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$.

Proposition 2.12. *L'opérateur $T(\lambda)$ est inversible pour tout $\lambda \in \Lambda$ où*

$$\Lambda = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid \arg(z) \in]\arctan(\sigma_1), 2\pi - \arctan(\sigma_1)[\right\}$$

et où $\sigma_1 = \max_{x \in \mathbb{R}_+} \sigma(x)$.

Démonstration. On pose $\lambda = k^2$. La démonstration consiste à vérifier que le théorème de Lax-Milgram [19, Corollaire 5.8] s'applique à t_λ pour tout

$$\lambda \in \left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid \arg(z) \in]\arctan(\sigma_1), 2\pi - \arctan(\sigma_1)[\right\}.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la forme sesquilinéaire t_λ est continue car pour tous $u, v \in \mathrm{H}^1(]0, +\infty[)$, on a

$$|t_\lambda(u, v)| \leq \left(\max(1, n^{p-1}) + |\lambda| \max(1, n^{p+1}) \sqrt{1 + \sigma_1^2} \right) \|u\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}_+)} \|v\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}_+)}.$$

Il nous reste à montrer la coercivité de t_λ. On a, pour $u \in \mathrm{H}^1(]0, +\infty[)$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Re}\left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta} t_\lambda(u, u) \right) \geq c \min_{x \in \mathbb{R}_+} \left(\mathrm{Re}\left(d(x)^{-1} \mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta} \right), \mathrm{Re}\left(-\lambda d(x) \mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta} \right) \right) \|u\|^2_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}_+)} \tag{2.27}$$

où $c = \min\left(\min(1, n^{p-1}), \min(1, n^{p+1}) \right)$. La relation (2.27) indique que t_λ est coercive si, et seulement si, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\min_{x \in \mathbb{R}_+} \left(\mathrm{Re}\left(d(x)^{-1} \mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta} \right), \mathrm{Re}\left(-\lambda d(x) \mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta} \right) \right) > 0. \tag{2.28}$$

On commence par déterminer pour quelles valeurs de θ le minimum sur $\mathbb{R}_+$ de $\mathrm{Re}\left(d^{-1}(x) \mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta} \right)$ est strictement positif. On a

$$\min_{x \in \mathbb{R}_+} \mathrm{Re}\left(d(x)^{-1} \mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta} \right) = \min_{x \in \mathbb{R}_+} \mathrm{Re}\left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta} \frac{1 - \mathsf{i}\sigma(x)}{1 + \sigma(x)^2} \right) > 0,$$

$$\begin{aligned}
&\iff \min_{x\in\mathbb{R}_+} \mathrm{Re}\left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta}(1-\mathsf{i}\sigma(x))\right) > 0,\\
&\iff \min_{x\in\mathbb{R}_+} \cos(\theta)+\sigma(x)\sin(\theta) > 0,\\
&\iff \cos(\theta)+\sigma_1\min(0,\sin(\theta)) > 0.
\end{aligned}$$

Cette dernière condition est vraie dès que $\theta \in \left]-\arctan\left(\sigma_1^{-1}\right), \frac{\pi}{2}\right[$. Ensuite, on détermine pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}^*$ la condition $\min_{x\in\mathbb{R}_+} \mathrm{Re}(-\lambda d(x)\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta}) > 0$ est vérifiée. On note $\phi = \arg(\lambda)$. On a

$$\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}_+} \mathrm{Re}(-\lambda d(x)\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta}) > 0 &\iff \max_{x\in\mathbb{R}_+} \mathrm{Re}(d(x)\mathsf{e}^{\mathsf{i}(\theta+\phi)}) < 0,\\
&\iff \cos(\theta+\phi)+\sigma_1\max(0,\sin(\theta+\phi)) < 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\theta+\phi \in \left]\pi-\arctan(\sigma_1^{-1}), \frac{3\pi}{2}\right[$. On a donc

$$\phi \in \left\{\vartheta \mid \exists\theta \in \left]-\arctan(\sigma_1^{-1}), \frac{\pi}{2}\right[, \ \vartheta+\theta \in \left]\pi-\arctan(\sigma_1^{-1}), \frac{3\pi}{2}\right[\right\}.$$

Cette condition s'exprime encore sous la forme

$$\phi \in \bigcup_{\theta\in\left]-\arctan(\sigma_1^{-1}),\frac{\pi}{2}\right[} \left]\pi-\arctan(\sigma_1^{-1})-\theta, \frac{3\pi}{2}-\theta\right[,$$

ce qui donne finalement

$$\phi \in \left]\frac{\pi}{2}-\arctan(\sigma_1^{-1}), \frac{3\pi}{2}+\arctan(\sigma_1^{-1})\right[.$$

On utilise la relation $\arctan(\sigma_1^{-1}) = \frac{\pi}{2}-\arctan(\sigma_1)$ pour conclure, d'après le théorème de Lax-Milgram, que $T(\lambda)$ est inversible sur l'ensemble Λ. □

Proposition 2.13. *Le spectre essentiel de l'opérateur T est*

$$\mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(T) = \frac{1}{d_0^2}\mathbb{R}_+.$$

Démonstration. Voir proposition B.10 page 240. □

2.3.4 Étude du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}})$

Intéressons-nous à présent aux propriétés des solutions du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}})$ défini en (2.25) page 35. Dans chaque domaine $]0,\alpha[$, $]\alpha,\beta[$ et $]\beta,R[$, l'inconnue u vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre dont on connaît les solutions. Compte tenu des conditions aux limites en $x=0$ et à l'infini, on établit sans peine que

$$u(x) = \begin{cases} c_0\left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}kx}+\mathsf{e}^{-\mathsf{i}kx}\right) & \text{si } x \le \alpha\\ c_+\mathsf{e}^{\mathsf{i}kn_0x}+c_-\mathsf{e}^{-\mathsf{i}kn_0x} & \text{si } \alpha < x \le \beta\\ \widetilde{c}_+\mathsf{e}^{\mathsf{i}k\widetilde{d}(x)x}+\widetilde{c}_-\mathsf{e}^{-\mathsf{i}k\widetilde{d}(x)x} & \text{si } \beta < x \le R. \end{cases}$$

où $c_0, c_+, c_-, \widetilde{c_+}$ et $\widetilde{c_-}$ désignent des constantes. Ces constantes vérifient un système linéaire issu des conditions de transmission $[u]_{\widetilde{\Gamma}} = 0$ et $[d^{-1}\,n^{p-1}\,u']_{\widetilde{\Gamma}} = 0$ et des

conditions aux limites $u'(0) = 0$ et $u(R) = 0$. La matrice de ce système linéaire homogène est

$$M_p^R(k) = \begin{pmatrix} a + \dfrac{1}{a} & -A & -\dfrac{1}{A} & 0 & 0 \\ a - \dfrac{1}{a} & -n_0^p A & \dfrac{n_0^p}{A} & 0 & 0 \\ 0 & B & \dfrac{1}{B} & -b & -\dfrac{1}{b} \\ 0 & n_0^p B & -\dfrac{n_0^p}{B} & -b & \dfrac{1}{b} \\ 0 & 0 & 0 & D & \dfrac{1}{D} \end{pmatrix},$$

où on a posé $a = \mathsf{e}^{\mathsf{i}k\alpha}$, $A = \mathsf{e}^{\mathsf{i}kn_0\alpha}$, $b = \mathsf{e}^{\mathsf{i}k\beta}$, $B = \mathsf{e}^{\mathsf{i}kn_0\beta}$ et $D = \mathsf{e}^{\mathsf{i}kd_0R}$. Il y a existence de solutions non nulles au système linéaire si, et seulement si, $\det(M_p^R(k)) = 0$. L'équation modale $\det(M_p^R(k)) = 0$ s'exprime sous la forme suivante :

$$D^2\left(\frac{B}{A}\left(\frac{n_0^p+1}{n_0^p-1}+a^2\right) - \frac{B}{A}\left(\frac{n_0^p-1}{n_0^p+1}+a^2\right)\right) + b^2\left(\frac{A}{B}\left(a^2+\frac{n_0^p+1}{n_0^p-1}\right) - \frac{B}{A}\left(a^2+\frac{n_0^p-1}{n_0^p+1}\right)\right) = 0.$$

On peut ré-écrire cette condition sous la forme $f_p^R(k) = 0$ où

$$f_p^R(k) = \left(1 - \frac{n_0^p+1}{n_0^p-1}\widehat{k}^{2d_0R-2\beta}\right)\widehat{k}^{2(\beta-\alpha)n_0+2\alpha} + \left(\frac{n_0^p-1}{n_0^p+1} - \widehat{k}^{2d_0R-2\beta}\right)\widehat{k}^{2(\beta-\alpha)n_0} - \left(1 - \frac{n_0^p-1}{n_0^p+1}\widehat{k}^{2d_0R-2\beta}\right)\widehat{k}^{2\alpha} - \left(\frac{n_0^p+1}{n_0^p-1} - \widehat{k}^{2d_0R-2\beta}\right), \quad (2.29)$$

où on a posé $\widehat{k} = \mathsf{e}^{\mathsf{i}k}$. En ré-arrangeant les termes, on obtient :

$$f_p^R(k) = f_p(k) + f_p(-k)\mathsf{e}^{2\mathsf{i}k(d_0R+(\beta-\alpha)(n_0-1))}, \quad (2.30)$$

où f_p est la fonction modale introduite en (2.7).

Lemme 2.14. *Pour $k \in \mathbb{C}^-_{\sigma_0}$, on a*

$$\lim_{R\to+\infty} f_p^R(k) = f_p(k),$$
$$\lim_{\sigma_0\to+\infty} f_p^R(k) = f_p(k).$$

Démonstration. Pour $k \in \mathbb{C}^-_{\sigma_0}$ fixé, on part de la relation (2.30), on a

$$\left|f_p^R(k) - f_p(k)\right| \lesssim \left|\mathsf{e}^{2\mathsf{i}kd_0R}\right| \lesssim \mathsf{e}^{-2R(\mathrm{Im}(k)+\sigma_0\,\mathrm{Re}(k))}$$

où la notation $\lesssim$ signifie inférieur ou égale à une constante strictement positive près. Comme $\mathrm{Im}(d_0k) > 0$ et $\mathrm{Re}(k) > 0$, on obtient bien les résultats énoncés. □

Nous avons représenté à la figure 2.6 les premiers zéros de la fonction modale f_p^R. On voit sur la figure 2.6 que les racines de l'équation modale associée au problème $(\mathcal{T}_p)$ défini en (2.4) page 24 (représentées par des cercles) sont bien approchées par celles de l'équation modale associée au problème $(\mathcal{T}_p^{\text{born}})$ défini en (2.25) page 35 (représentées par des points). On voit aussi qu'il existe d'autres zéros qui semblent être sur une droite. Plus précisément, si on agrandit certaines parties de la figure, on obtient les représentations données à la figure 2.7.

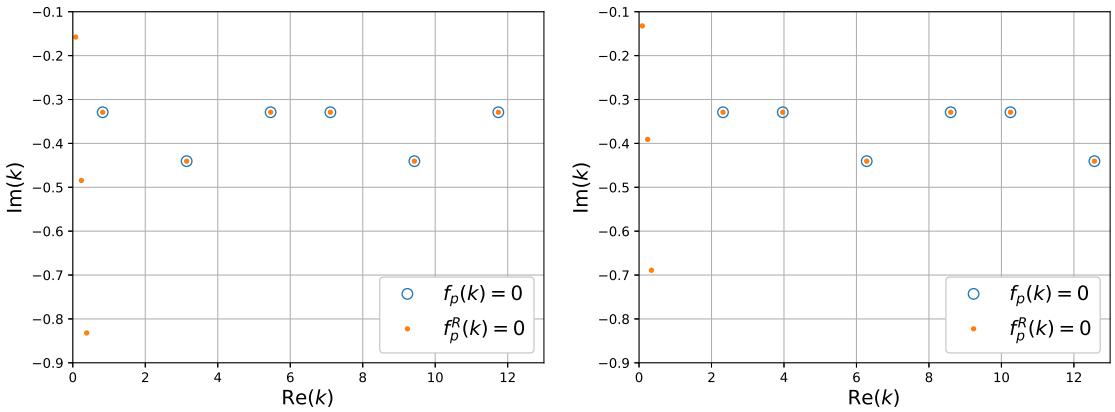


FIGURE 2.6 – Quelques zéros des équations modales (2.29) et (2.7) pour $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $n_0 = 2$, $\sigma_0 = 2$ et $R = 4$. On a représenté par un cercle les racines de l'équation modale (2.7) associée au problème $(\mathcal{T}_p)$ et par un point les racines de l'équation modale (2.29) pour le problème $(\mathcal{T}_p^{\text{born}})$. À gauche, on a considéré le cas des modes TE et à droite celui des modes TM.

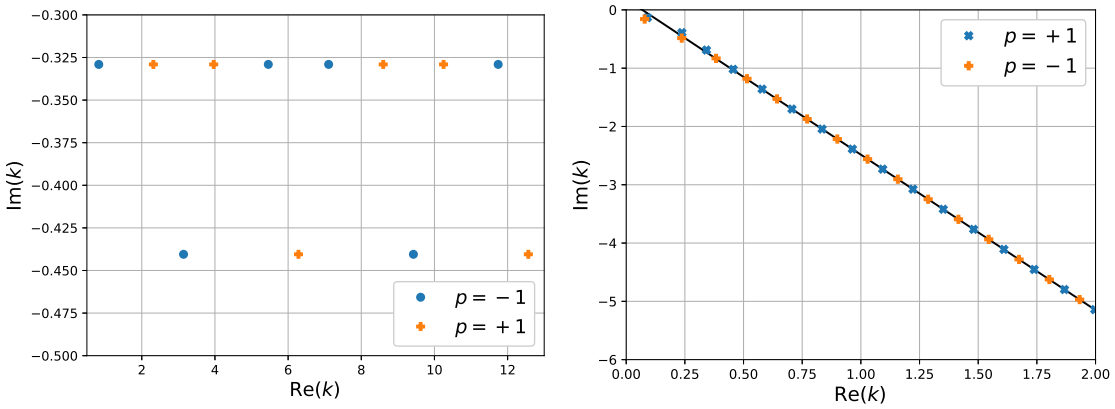


FIGURE 2.7 – À gauche, les zéros communs aux fonctions modales f_p et f_p^R associées aux problèmes $(\mathcal{T}_p)$ et $(\mathcal{T}_p^{\text{born}})$. À droite, les zéros surnuméraires qui semblent être localisés sur une droite.

On peut trouver une formule asymptotique quand $|z|$ tend vers $+\infty$ pour les zéros surnuméraires, en utilisant la relation (2.29). On remarque que quand $|z|$ vers $+\infty$, ces zéros surnuméraires sont les seuls tels que $\text{Im}(z) \to +\infty$ et que d'après (2.29)

$$f_p^R(z) \underset{\text{Im}(z)\to-\infty}{\sim} \left(1 - \frac{n_0^p + 1}{n_0^p - 1} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z(d_0 R - \beta)}\right) \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z((\beta-\alpha)n_0+\alpha)}.$$

Ces zéros surnuméraires vont donc être approchés par les zéros de la fonction

$$w : z \in \mathbb{C} \mapsto 1 - \frac{n_0^p + 1}{n_0^p - 1} \mathsf{e}^{2\mathsf{i}z(d_0 R - \beta)}.$$

En posant $z = x + \mathsf{i}y$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on obtient

$$w(z) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \sigma_0 R x + (R-\beta) y & = & \dfrac{-1}{2} \ln \left(\left| \dfrac{n_0^p - 1}{n_0^p + 1} \right| \right) \\ (R-\beta) x - \sigma_0 R y & = & \dfrac{1}{2} \arg \left(\dfrac{n_0^p - 1}{n_0^p + 1} \right) + \pi q \end{array} \right.$$

où $q \in \mathbb{N}$. On remarque que l'on a la relation $\arg\left(\frac{n_0^p-1}{n_0^p+1}\right) = \pi \, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-^*}(p)$, c'est-à-dire que $\pi \, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-^*}(p)$ est égal à π si p est strictement négatif et 0 sinon. On note $z_q \in \mathbb{C}^-$ les zéros de w pour une valeur de $q \in \mathbb{N}$ fixée. On obtient les formules asymptotiques des zéros surnuméraires suivantes :

$$\mathrm{Re}(z_q) = \frac{1}{\sigma_0^2 R^2 + (R-\beta)^2} \left[\pi (R-\beta) \left(q + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-^*}(p) \right) - \frac{\sigma_0 R}{2} \ln \left(\left| \frac{n_0^p - 1}{n_0^p + 1} \right| \right) \right],$$

$$\mathrm{Im}(z_q) = \frac{-1}{\sigma_0^2 R^2 + (R-\beta)^2} \left[\pi \sigma_0 R \left(q + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-^*}(p) \right) + \frac{R-\beta}{2} \ln \left(\left| \frac{n_0^p - 1}{n_0^p + 1} \right| \right) \right].$$

Quand $q \to +\infty$, on a $\mathrm{Re}(z_q) \to +\infty$ et $\mathrm{Im}(z_q) \to -\infty$. De plus,

$$f_p^R(z_q) = -\left(1 - \left(\frac{n_0^p - 1}{n_0^p + 1} \right)^2 \right) \mathsf{e}^{2\mathsf{i}z_q \alpha} - \frac{4 n_0^p}{n_0^{2p} - 1},$$

d'où

$$f_p^R(z_q) \mathsf{e}^{-2\mathsf{i}z_q((\beta-\alpha)n_0+\alpha)} \underset{q \to +\infty}{\sim} \left(\left(\frac{n_0^p - 1}{n_0^p + 1} \right)^2 - 1 \right) \mathsf{e}^{-2\mathsf{i}z_q(\beta-\alpha)n_0} \underset{q \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Sur la figure 2.8, on a représenté les zéros surnuméraires de l'équation modale $f_p^R(z) = 0$ avec les zéros z_q, ainsi que l'écart relatif entre ces zéros. On remarque que l'on a convergence des z_q vers les zéros surnuméraire.

Remarque 2.15. Les zéros surnuméraires, qui sont des valeurs propres du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}})$, sont une manifestation du spectre essentiel du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$. En effet, le spectre essentiel du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$ est la demi-droite d'équation

$$y = -\sigma_0 \, x \qquad\qquad x \geq 0$$

et les zéros surnuméraires sont asymptotiquement sur la demi-droite d'équation

$$y = \frac{-R\sigma_0}{R-\beta} x - \frac{1}{2(R-\beta)} \ln \left(\left| \frac{n_0^p - 1}{n_0^p + 1} \right| \right) \qquad\qquad x \geq 0.$$

On remarque que quand $R \to +\infty$, les coefficients de cette demi-droite tendent vers les coefficients de la demi-droite définissant le spectre essentiel.

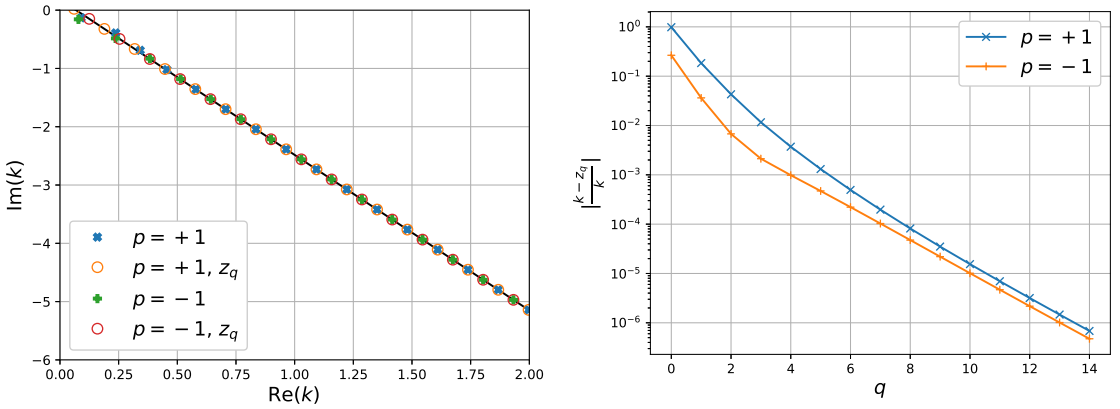


FIGURE 2.8 – À gauche, on a représenté par des cercles les zéros z_q pour $q \in \mathbb{N}$ et en noir on a représenté les zéros k de l'équation modale associée au problème $(\mathcal{T}_p^{\text{born}})$. À droite, on a représenté l'écart relatif $\frac{|k-z_q|}{|k|}$ en échelle logarithmique en fonction de q.

On aimerait maintenant obtenir une estimation de la manière dont les zéros de f_p^R convergent vers les zéros de f_p. Pour établir un tel résultat, commençons par le lemme suivant.

Lemme 2.16. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une application continue. On suppose que pour tout $R \in \mathbb{R}_+$, $f(\cdot, R)$ est holomorphe sur Ω et qu'il existe g holomorphe sur Ω tel que $f(\cdot, R)$ converge uniformément vers g sur tout compact quand $R \to +\infty$. Alors, pour tout compact $K \subset \Omega$ tel que $g^{-1}(\{0\}) \cap K = \varnothing$, il existe $R_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $R > R_0$, on ait*

$$f(\cdot, R)^{-1}(\{0\}) \cap K = \varnothing.$$

Démonstration. Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite de réels positifs $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante vers $+\infty$ et une suite d'éléments $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K tel que $f(z_n, R_n) = 0$. L'ensemble K étant compact, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. Il existe donc une extractrice ϕ et $z \in K$ tel que $\lim_{n\to+\infty} z_{\phi(n)} = z$. On a

$$|g(z_{\phi(n)})| = |f(z_{\phi(n)}, R_{\phi(n)}) - g(z_{\phi(n)})| \leq \sup_{z\in K} |f(z, R_{\phi(n)}) - g(z)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que $g(z) = 0$, ce qui est absurde. □

Soit K un compact de l'ouvert $\mathbb{C}_{\sigma_0} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(d_0 z) > 0\}$ où l'on rappelle que $d_0 = 1 + \mathrm{i}\sigma_0$. D'après (2.30), on a

$$\begin{aligned}
\left|f_p^R(z) - f_p(z)\right| &= \left|f_p(-z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z(2d_0R+2(\beta-\alpha)(n_0-1))}\right| \\
&\leq \sup_{z\in K}\left[\left|f_p(-z)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z(\beta-\alpha)(n_0-1)}\right| \mathrm{e}^{-2\operatorname{Im}(d_0z)R}\right] \\
&\leq \sup_{z\in K}\left|f_p(-z)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z(\beta-\alpha)(n_0-1)}\right| \times \sup_{z\in K} \mathrm{e}^{-2\operatorname{Im}(d_0z)R} \\
&\leq \sup_{z\in K}\left|f_p(-z)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z(\beta-\alpha)(n_0-1)}\right| \times \exp\left(-2R\min_{z\in K}\operatorname{Im}(d_0z)\right)
\end{aligned}$$

où $\min_{z\in K}\operatorname{Im}(d_0 z) > 0$. On en déduit que f_p^R converge uniformément vers f_p sur tout compact. Considérons $k \in f_p^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{C}^-_{\sigma_0}$. Comme f_p est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, il existe $\eta > 0$ tel que k soit le seul zéro de f_p dans $\overline{D}(k,\eta) \subset \mathbb{C}_{\sigma_0}$. On considère le compact $\gamma = \partial\overline{D}(k,\eta) \subset \mathbb{C}_{\sigma_0}$. D'après le lemme 2.16, il existe $R_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $R > R_0$, on ait

$$(f_p^R)^{-1}(\{0\}) \cap \gamma = \varnothing.$$

Pour $q \in \mathbb{N}$, on définit l'application $s_q^\gamma : (R_0, +\infty] \to \mathbb{C}$ telle que

$$s_q^\gamma(R) = \frac{1}{2\mathsf{i}\pi}\int_\gamma \frac{z^q}{f_p^R(z)}\frac{\partial f_p^R}{\partial z}(z)\,\mathrm{d}z$$

et

$$s_q^\gamma(\infty) = \frac{1}{2\mathsf{i}\pi}\int_\gamma \frac{z^q}{f_p(z)}\frac{\partial f_p}{\partial z}(z)\,\mathrm{d}z.$$

On pose $c = (\beta-\alpha)(n_0-1)$ et $z = k + \eta\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta}$ avec $\eta > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi)$. On a

$$\begin{aligned}|s_q^\gamma(R) - s_q^\gamma(\infty)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |z|^q \left|\frac{f_p^{R\prime}(z)}{f_p^R(z)} - \frac{f_p'(z)}{f_p(z)}\right| \left|\mathsf{i}\eta\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta}\right| \mathrm{d}\theta \qquad (2.31)\\ &\le \eta(|k|+\eta)^q C(k,\eta,R)\,\mathsf{e}^{2c(\eta-\operatorname{Im}(k))}\exp\left(-2R\min_{z\in\gamma}\operatorname{Im}(d_0 z)\right),\end{aligned}$$

où $\min_{z\in\gamma}\operatorname{Im}(d_0 z) > 0$ et

$$C(k,\eta,R) = \sup_{z\in\gamma}\left|\frac{2\mathsf{i}(d_0R+c)f_p(z)f_p(-z) - f_p(z)f_p'(-z) - f_p'(z)f_p(-z)}{f_p(z)\left(f_p(z)+f_p(-z)\mathsf{e}^{2\mathsf{i}z(d_0R+c)}\right)}\right|.$$

Pour estimer $C(k,\eta,R)$, nous avons recours au lemme suivant.

Lemme 2.17. *Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $R_0 > 0$, f, g, h, w quatre fonctions holomorphes sur un ouvert Ω tel que $\Omega \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(za) > 0\}$ et K un compact de Ω tels que pour tout $R > R_0$, la fonction $z \mapsto h(z) + \mathsf{e}^{\mathsf{i}azR}w(z)$ n'ait pas de zéros dans K. Sous ces hypothèses, il existe $R_1 \ge R_0$ et $C_K > 0$ tels que, pour tout $R > R_1$, on ait*

$$\sup_{z\in K}\left|\frac{Rf(z)+g(z)}{h(z)+\mathsf{e}^{\mathsf{i}azR}w(z)}\right| \le C_K R.$$

Démonstration. Pour tout $z \in K$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}\left|\frac{Rf(z)+g(z)}{h(z)+\mathsf{e}^{\mathsf{i}azR}w(z)}\right| &\le \left|\frac{f(z)}{h(z)+\mathsf{e}^{\mathsf{i}azR}w(z)}\right| + \frac{1}{R}\left|\frac{g(z)}{h(z)+\mathsf{e}^{\mathsf{i}azR}w(z)}\right|\\ &\le \left|\frac{f(z)}{h(z)+\mathsf{e}^{\mathsf{i}azR}w(z)}\right| + \frac{1}{R_0}\left|\frac{g(z)}{h(z)+\mathsf{e}^{\mathsf{i}azR}w(z)}\right|.\end{aligned}$$

Ces deux termes se majorent de la même manière, en majorant le numérateur sur K et en minorant le dénominateur sur K. Pour le dénominateur, on a

$$\begin{aligned}\inf_{z\in K}\left|h(z)+\mathsf{e}^{\mathsf{i}azR}w(z)\right| &\ge \inf_{z\in K}\left(|h(z)| - |\mathsf{e}^{\mathsf{i}azR}w(z)|\right)\\ &\ge \inf_{z\in K}|h(z)| - \mathsf{e}^{-\widehat{a}R}\sup_{z\in K}|w(z)|\end{aligned}$$

où $\widehat{a} = \min_{z\in K} \mathrm{Im}(az) > 0$ car K est un compact de Ω. Comme $\inf_{z\in K} |h(z)| > 0$, il existe $R_1 \geq R_0$ tel que pour tout $R > R_1$, on ait

$$\inf_{z\in K} \left|h(z) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}azR} w(z)\right| > 0.$$

On obtient

$$\sup_{z\in K} \frac{1}{R} \left|\frac{Rf(z) + g(z)}{h(z) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}azR} w(z)}\right| \leq \frac{\sup\limits_{z\in K} \left(|f(z)| + \dfrac{1}{R_0}|g(z)|\right)}{\inf\limits_{z\in K} |h(z) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}azR} w(z)|}.$$

Par conséquent, il existe $C_K > 0$ tel que pour tout $R > R_1$, on ait

$$\sup_{z\in K} \left|\frac{Rf(z) + g(z)}{h(z) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}azR} w(z)}\right| \leq C_K R.$$

□

Finalement, on obtient le résultat suivant sur la manière dont les zéros de f_p^R convergent vers ceux de f_p.

Proposition 2.18. *Soit $\gamma = \partial D\,(k, \eta)$ un cercle de rayon $\eta \in \left(0, \frac{\mathrm{Im}(d_0 k)}{|d_0|}\right)$ appartenant à $\mathbb{C}_{\sigma_0}$. Il existe $C > 0$ et $R_1 \geq R_0$ tels que pour tout $R > R_1$, on ait*

$$\left|s_q^\gamma(R) - s_q^\gamma(\infty)\right| \leq CR \exp\left(-2R\Big(\mathrm{Im}(d_0 k) - \eta|d_0|\Big)\right).$$

Démonstration. D'après le lemme 2.17, il existe $R_1 \leq R_0$ et $C_\gamma > 0$ tel que, pour tout $R > R_1$, on ait $C(k, \eta, R) \leq C_\gamma R$. Le résultat découle alors de l'estimation (2.31) et de la relation

$$\min_{z\in\gamma} \mathrm{Im}(d_0 z) = \mathrm{Im}(d_0 k) - \eta|d_0|$$

où γ est le cercle de centre k et de rayon η. □

Interprétation. La proposition 2.18 exprime que pour R assez grand, il y a convergence exponentielle des valeurs propres du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}})$ défini en (2.25) page 35 vers les résonances du problème $(\mathcal{T}_p)$ défini en (2.4) page 24.

2.4 Calcul des résonances par un schéma aux différences finies

Considérons le problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}})$ défini en (2.25) page 35 posé en domaine borné. On se restreint au cas particulier introduit à la section 2.2 et on suppose que d est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. On exprime l'équation différentielle du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}})$ sous la forme

$$\frac{d'}{d} u' - u'' = k^2 d^2 n^2 u. \tag{2.32}$$

On s'intéresse à l'approximation de cette équation différentielle par un schéma aux différences finies d'ordre 2. On se donne une subdivision uniforme $(x_i)_{1\leq i\leq N+1}$ de $[0, R]$ de pas $h = \frac{1}{N}$, telle qu'il existe i_0 et i_1 tels que $x_{i_0} = \alpha$ et $x_{i_1} = \beta$. On note

u_i la valeur approchée de $u(x_i)$. On pose $d_i = d(x_i)$ et $d'_i = d'(x_i)$. On approche les dérivées première et seconde par les différences centrées d'ordre 2 suivantes :

$$u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h},$$
$$u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}.$$

L'équation (2.32) nous donne pour $i \in \{2, \dots, N-1\} \setminus \{i_0, i_1\}$,

$$\left(-\frac{hd'_i}{2d_i} - 1\right) u_{i-1} + 2u_i + \left(\frac{hd'_i}{2d_i} - 1\right) u_{i+1} = k^2 h^2 d_i^2 n(x_i)^2 u_i. \tag{2.33}$$

Un traitement particulier doit être considéré pour $i = 1$ et $i = N$ compte tenu de la condition de Neumann en x_1 et de Dirichlet en x_{N+1}.

Pour prendre en compte la condition de Dirichlet homogène en R, on pose $u_{N+1} = 0$. Pour approcher la condition de Neumann en 0 par une formule d'ordre 2, on créé un point virtuel $x_0 = -h$ et on considère le développement de Taylor

$$\begin{aligned} u(-h) &= u(0) + hu'(0) + \frac{h^2}{2}u''(0) + \mathcal{O}(h^3) \\ &= u(0) + 0 + \frac{h^2}{2}(-k^2 u(0)) + \mathcal{O}(h^3) \\ &= u(0)\left(1 - \frac{h^2}{2}k^2\right) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Ceci conduit à l'équation discrète

$$u_0 = u_1\left(1 - \frac{h^2}{2}k^2\right).$$

Avec ce point virtuel, on peut écrire (2.33) en $i = 1$ sous la forme $-u_0 + 2u_1 - u_2 = k^2 h^2 u_1$, ce qui donne

$$u_1 - u_2 = k^2 \frac{h^2}{2} u_1$$

car d et n sont des constantes égales à 1 sur un voisinage de 0.

Pour prendre en compte la condition de transmission $[n^{p-1}u']_{\{\alpha,\beta\}} = 0$, supposons que n passe de la valeur n_ℓ à la valeur n_r en x_q où $q \in \{i_0, i_1\}$. On écrit le développement de Taylor de u à gauche et à droite de x_q,

$$\begin{aligned} u(x_{q-1}) &= u(x_q^-) - hu'(x_q^-) + \frac{h^2}{2}u''(x_q^-) + \mathcal{O}(h^3) \\ u(x_{q+1}) &= u(x_q^+) + hu'(x_q^+) + \frac{h^2}{2}u''(x_q^+) + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

où $u(x_q^-)$ désigne la limite à gauche de u en x_q et $u(x_q^+)$ la limite à droite. On en déduit que

$$\begin{aligned} hu'(x_q^-) &= u(x_q) - u(x_{q-1}) - \frac{h^2}{2}k^2 n_\ell^2 u(x_q) + \mathcal{O}(h^3) \\ hu'(x_q^+) &= u(x_{q+1}) - u(x_q) + \frac{h^2}{2}k^2 n_r^2 u(x_q) + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned}$$

car la condition d'interface $[u]_{x_q} = 0$ donne $u(x_q^-) = u(x_q^+) = u(x_q)$. La condition d'interface $n_\ell^{p-1} u'(x_q^-) = n_r^{p-1} u'(x_q^+)$, conduit quant à elle à

$$-n_\ell^{p-1} u_{q-1} + (n_\ell^{p-1} + n_r^{p-1}) u_q - n_r^{p-1} u_{q+1} = k^2 \frac{h^2}{2} (n_\ell^{p+1} + n_r^{p+1}) u_q.$$

On est donc amené à rechercher $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^\intercal$ tel que $\mathbb{A}\mathbf{u} = k^2 \mathbb{B}\mathbf{u}$ où $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont des matrices dont les coefficients sont donnés, pour tout $i \in \{2, \dots, N-1\} \setminus \{i_0, i_1\}$, par

$$\mathbb{A}(i, i-1) = -\frac{h d_i'}{2 d_i} - 1 \qquad \mathbb{A}(i,i) = 2 \qquad \mathbb{A}(i, i+1) = \frac{h d_i'}{2 d_i} - 1$$

$$\mathbb{B}(i,i) = h^2 d_i^2 n(x_i)^2$$

et, pour les coefficients correspondant aux conditions de bord et de transmission, par

$$\mathbb{A}(1,1) = 1 \qquad \mathbb{A}(1,2) = -1$$

$$\mathbb{A}(i_0, i_0 - 1) = -1 \qquad \mathbb{A}(i_0, i_0) = 1 + n_0^{p-1} \qquad \mathbb{A}(i_0, i_0 + 1) = -n_0^{p-1}$$

$$\mathbb{A}(i_1, i_1 - 1) = -n_0^{p-1} \qquad \mathbb{A}(i_1, i_1) = n_0^{p-1} + 1 \qquad \mathbb{A}(i_1, i_1 + 1) = -1$$

$$\mathbb{A}(N, N-1) = -1 \qquad \mathbb{A}(N,N) = 2$$

et

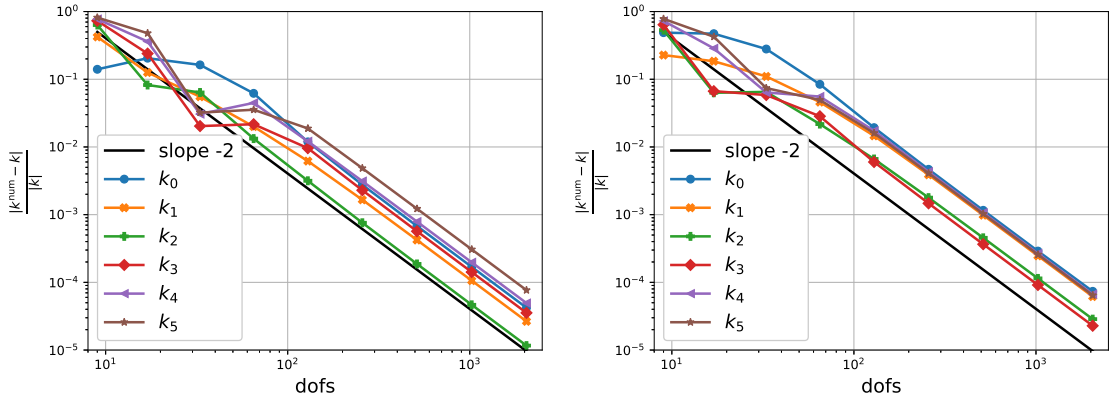
$$\mathbb{B}(1,1) = \frac{h^2}{2} \qquad \mathbb{B}(i_0, i_0) = \frac{h^2}{2}(1 + n_0^{p+1})$$

$$\mathbb{B}(N,N) = h^2 d_N^2 n(x_N)^2 \qquad \mathbb{B}(i_1, i_1) = \frac{h^2}{2}(n_0^{p+1} + 1).$$

Comme la matrice $\mathbb{B}$ est diagonale, $\mathbb{B}^{-1}$ est facilement calculable et le problème aux valeurs propres se ré-écrit : trouver $(k^2, \mathbf{u}) \in \mathbb{C}_{\sigma_0}^- \times \mathbb{C}^N$ tel que $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{u} = k^2\mathbf{u}$. Un script de calcul des valeurs propres pour ce problème est implémenté en Python à l'aide des bibliothèques NumPy [72] et SciPy [52]. Le calcul des valeurs propres est effectué à l'aide de la fonction `scipy.sparse.linalg.eigs` qui utilise ARPACK [62].

On a représenté à la figure 2.9 l'écart relatif entre les six premières valeurs propres du problème $(\mathcal{T}_p^{\text{born}})$ défini en (2.25) page 35, discrétisé par la méthode des différences finies et les six premières résonances du problème $(\mathcal{T}_p)$ défini en (2.4) page 24, calculées à partie de l'équation modale, en fonction du pas h et en échelle logarithmique. Les solutions calculées à partir de l'équation modale en utilisant la méthode proposée à la section 2.2.2 sont considérées comme les solutions de référence. On observe une convergence d'ordre 2 en fonction du pas h de la discrétisation, ce qui est le comportement attendu car notre schéma est d'ordre 2.

On a présenté la méthode des différences finis pour le calcul des résonances car elle facile à implémenter en dimension 1. On note toutefois sur les résultats obtenus qu'il est difficile d'obtenir une grande precision des résultats. On aborde dans la section suivante l'utilisation de la méthode des éléments finis qui permet plus aisément de monter en ordre assurant ainsi des résultats de meilleure precision. La méthode des éléments finis se révèle en outre mieux adaptée à l'approximation des frontières courbes, comme ce sera le cas de la formulation étudiée au chapitre 4.



(a) $p = +1$ (b) $p = -1$

FIGURE 2.9 – Erreur relative des 6 premières résonances en échelle logarithmique. Les valeurs des paramètres sont ceux de l'exemple de référence 2.5 page 28 : $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $n_0 = 2$. La PML utilisé est celle de classe $\mathcal{C}^2$ (PML2) avec les paramètres : $r_0 = 2$, $r_1 = 3$, $\sigma_0 = 2$ et $R = 4$.

2.5 Approximation par la méthode des éléments finis

On s'intéresse à présent à la résolution du problème $(\mathcal{T}_p^{\text{born}})$ défini en (2.25) page 35 à l'aide de la méthode des éléments finis. On rappelle que l'on a introduit le problème $(\mathcal{T}_p^{\text{born}})$ pour calculer numériquement des approximations des solutions du problème $(\mathcal{T}_p)$ défini en (2.4) page 24. Le méthode des éléments finis permet plus aisément de monter en ordre que la méthode des différences finies. Dans toute cette section les simulations sont effectuées en utilisant la librairie XLiFE++ [97], qui est un code C++ d'éléments finis, développé conjointement aux laboratoires POEMS (UMR 7231, ENSTA ParisTech) et IRMAR (UMR 6625, Université de Rennes 1).

La méthode des éléments finis. Pour une introduction à la méthode des éléments finis, on peut se refèrer à [9] et plus particulièrement à [8] pour les problèmes aux valeurs propres. Très succinctement la méthode des éléments finis consiste à prendre un sous-espace $V_N = \text{Vect}\,(\phi_i \mid 1 \leq i \leq N)$ de $\text{H}^1_{0,R}(]0, R[)$ de dimension finie N et à projeter les solutions du problème $(\mathcal{T}_p^{\text{born}})$ sur V_N. Cela nous amène à définir $(\mathcal{T}_p^{\text{FEM}})$ une version discrétisée du problème $(\mathcal{T}_p^{\text{born}})$: trouver $(k, u) \in \mathbb{C} \times V_N$ avec u non nulle tel que l'on ait

$$(\mathcal{T}_p^{\text{FEM}}) \qquad \int_0^R \frac{n^{p-1}}{d}\, u'v'\,\mathrm{d}x = k^2 \int_0^R d\, n^{p+1}\, uv\,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in V_N.$$

Comme on est en dimension finie, le problème $(\mathcal{T}_p^{\text{FEM}})$ admet la formulation équivalente suivante : trouver $(k, u) \in \mathbb{C} \times V_N$ avec u non nulle tel que l'on ait

$$\int_0^R \frac{n^{p-1}}{d}\, u'\phi_j'\,\mathrm{d}x = k^2 \int_0^R d\, n^{p+1}\, u\phi_j\,\mathrm{d}x \qquad \forall j \in \{1, \ldots, N\}.$$

En décomposant u dans la base $(\phi_i)_{i=1}^N$ de V_N, $u = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i\phi_i$ où $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)^\intercal \in \mathbb{C}^N$ et en introduisant les matrices

$$\mathbb{A} = \left(\int_0^R \frac{n^{p-1}}{d}\,\phi_i'\phi_j'\,\mathrm{d}x\right)_{1\le i,j\le N} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{B} = \left(\int_0^R d\,n^{p+1}\,\phi_i\phi_j\,\mathrm{d}x\right)_{1\le i,j\le N},$$

le problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{FEM}})$ s'écrit $\mathbb{A}\mathbf{u} = k^2\mathbb{B}\mathbf{u}$ qui est un problème aux valeurs propres généralisé. On cherche donc les complexes k tels que $k^2 \in \mathrm{sp}(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A})$.

Définition 2.19. On appelle *spectre résonnant discret* l'ensemble des racines carrées (de parties réelles positives) des éléments du spectre de la matrice $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$ où $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont les matrices ci-dessus, déterminées par le choix d'une PML et d'une discrétisation éléments finis.

Les éléments k du spectre résonnant discret, appelés les *résonances discrètes*, sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$, c'est-à-dire $k^2 \in \mathrm{sp}(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A})$. Un vecteur propre $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N$ associé à k^2 vérifie

$$\mathbb{A}\mathbf{u} = k^2\mathbb{B}\mathbf{u}.$$

On appelle u le *mode résonnant discret* associé à k défini par

$$u = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i\phi_i.$$

Remarque 2.20. Nous avons introduit la notion de spectre résonnant discret pour insister sur le fait que l'on prend les racines carrées des valeurs propres.

Paramètres utilisés. Dans toute cette section, nous allons considérer l'exemple détaillé dans la section 2.5 page 28 et rappelé ici. La fonction n a la forme suivante

$$n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 2 & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Dans ce cas particulier, les résonances de $(\mathcal{T}_p)$ sont simples à caractériser. Pour une résonances k, le complexe $\widehat{k} = \mathsf{e}^{\mathsf{i}k}$ est zéro d'un polynôme Q_p aisément calculable. Pour la fonction n choisie ici les polynômes correspondant aux valeurs $p = \pm 1$ sont :

$$Q_{+1} = \widehat{k}^3 + \frac{1}{3}\widehat{k}^2 - \widehat{k} - 3,$$
$$Q_{-1} = \widehat{k}^3 - \frac{1}{3}\widehat{k}^2 - \widehat{k} + 3.$$

Pour chaque racine γ de Q_p calculée, on résout $\mathsf{e}^{\mathsf{i}k} = \gamma$ ce qui donne, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$k = 2\pi j + \arg(\gamma) - \mathsf{i}\ln(|\gamma|).$$

Ainsi, chaque racine de Q_p génère une famille de résonances distribuée selon une suite arithmétique. En connaissant un représentant de cette famille, on en déduit

tous les autres. Comme le polynôme de notre exemple est de degré 3, les résonances seront notées $k_{i,j}$ avec $i \in \{0,1,2\}$ et $j \in \mathbb{Z}$. Pour $p=-1$, on a

$$\begin{aligned} k_{1,0} &= 8.2456052243815554 \times 10^{-1} \quad -\mathrm{i}\, 3.2905588895739554 \times 10^{-1}, \\ k_{0,1} &= 3.1415926535897932 \quad -\mathrm{i}\, 4.4050051075331862 \times 10^{-1}, \\ k_{2,0} &= 5.4586247847414309 \quad -\mathrm{i}\, 3.2905588895739554 \times 10^{-1}, \end{aligned}$$

et pour $p=+1$, on a

$$\begin{aligned} k_{1,0} &= 2.3170321311516377 \quad -\mathrm{i}\, 3.2905588895739554 \times 10^{-1}, \\ k_{2,0} &= 3.9661531760279487 \quad -\mathrm{i}\, 3.2905588895739554 \times 10^{-1}, \\ k_{0,1} &= 6.2831853071795864 \quad -\mathrm{i}\, 4.4050051075331862 \times 10^{-1}. \end{aligned}$$

Ces valeurs sont par la suite toujours considérées comme les valeurs de références.

2.5.1 Une première mise en œuvre avec XLiFE++

Une première possibilité pour résoudre le problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}})$ défini en (2.25) par la méthode des éléments finis en utilisant le code XLiFE++ consiste à ne considérer qu'un seul domaine géométrique correspondant à $[0,R]$ et à manipuler une fonction d'indice optique n qui est discontinue en α et β. Cela implique que les points α et β doivent coïncider avec un nœud de la discrétisation. Comme il est impossible d'un point de vue mise en œuvre numérique sous XLiFE++ que la fonction n prenne les deux valeurs 1 et n_0 en α et en β, il convient d'avoir recours à une formule de quadrature numérique pour le calcul des intégrales qui n'utilise pas de nœuds de quadrature au bord de l'élément (c'est-à-dire, aux nœuds de discrétisation). Il faut donc utiliser une méthode de Gauss-Legendre et non pas une méthode de Gauss-Lobatto.

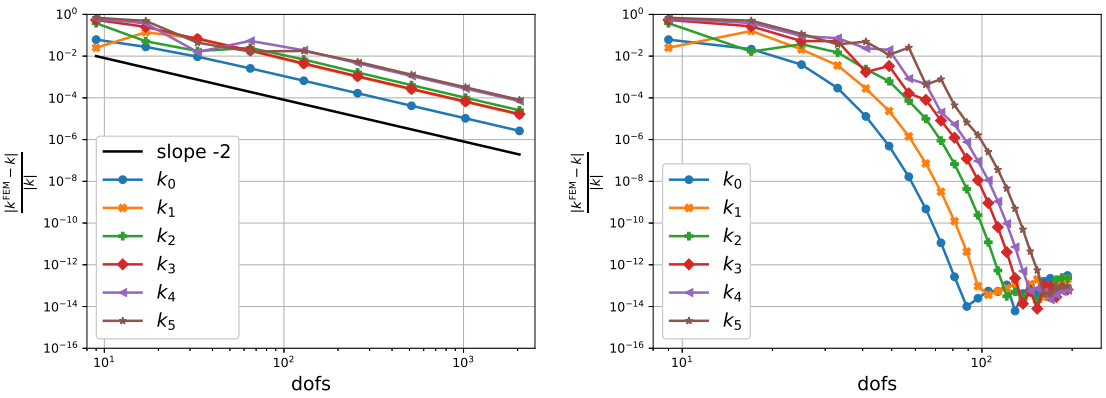
Reprenons notre exemple 2.5 de référence où $p=+1$, $\alpha=0.5$, $\beta=1$, $n_0=2$, $r_0=2$, $r_1=3$, $\sigma_0=2$ et $R=4$ et résolvons le problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}})$ par la méthode des éléments finis en ayant recours à la PML linéaire par morceaux noté PML0 précédemment. On rappelle que pour cet exemple, il y a trois familles arithmétiques de résonances notées $k_{\ell,j}$ pour $\ell \in \{1,2,3\}$ et $j \in \mathbb{Z}$. La figure 2.10 donne les courbes de convergence des résonances discrètes du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}})$ correspondant aux résonances du problème $(\mathcal{T}_p)$, d'une part quand on augmente le nombre de nœuds de discrétisation sur $[0,R]$ mais que l'on reste en approximation P1 (h-version) et d'autre part, quand on augmente le degré de l'approximation éléments finis mais que l'on garde un nombre d'éléments constant égal à 8 éléments (p-version). On constate les faits suivants.

1. Pour la h-version, on observe bien une convergence en h^2 comme attendu pour les éléments finis P1.

2. On atteint un seuil d'erreur très faible 10^{-12} plus rapidement en p-version qu'en h-version à nombres de degrés de liberté comparables.

3. La troisième observation va de pair avec la précédente : à erreur comparable, la p-version est beaucoup plus rapide en temps de calcul que la h-version.

Suite à ces constatations, on ne s'intéressera dans la suite de cette partie qu'à la p-version de la méthode des éléments finis.



(a) h-version (b) p-version

FIGURE 2.10 – Courbes de convergence des six premières résonances pour l'exemple de référence 2.5 : logarithme décimal de l'erreur relative en fonction du logarithme du nombre de degrés de liberté pour la h-version à gauche et la p-version à droite.

La figure 2.11 illustre le fait que la p-version est plus rapide que la h-version en temps de calcul. Cela est dû au fait que la h-version converge en h^2 ($h = 2^{-\sharp \text{dofs}}$) alors que la p-version converge exponentiellement parce que les solutions sont analytiques par morceaux [87]. Ces calculs ont été réalisés avec un fil d'exécution (*one thread*) uniquement et sur un processeur cadencé à 2.66 GHz.

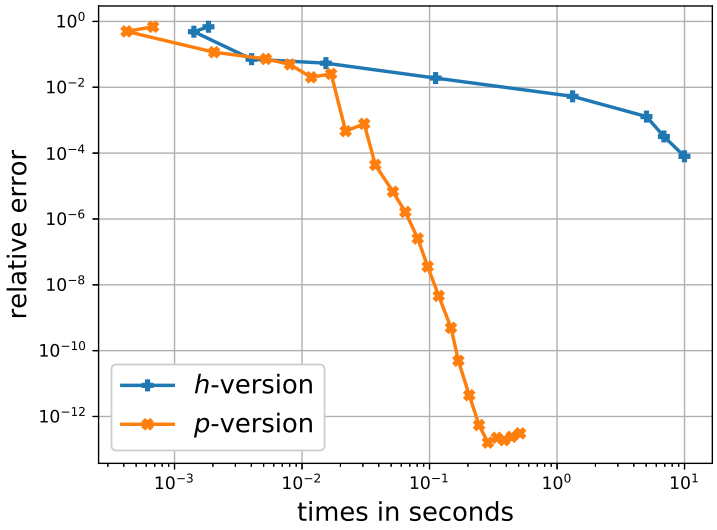
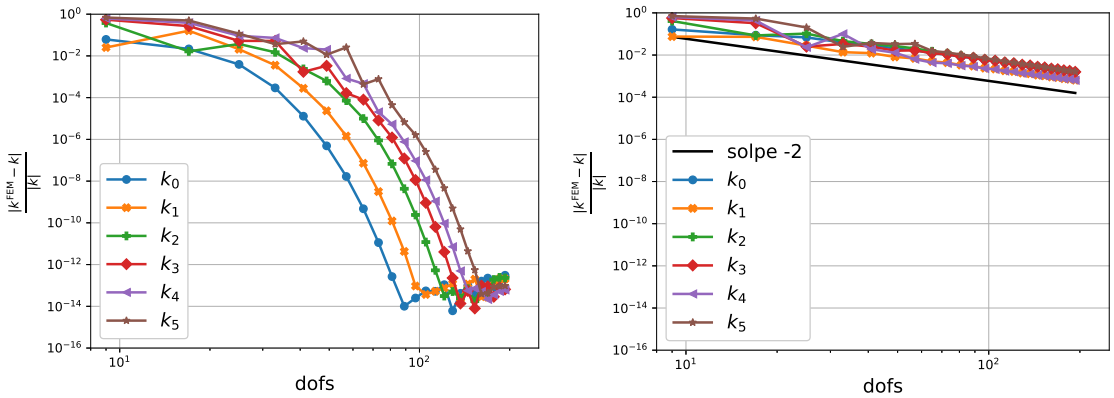


FIGURE 2.11 – Maximum des erreurs relatives sur les six première résonances en fonction du temps de calcul pour le h-version et p-version.

La figure 2.12 illustre la différence entre l'utilisation d'une formule de quadrature de Gauss-Legendre et de Gauss-Lobatto. Avec une formule de quadrature de Gauss-Lobatto, la méthode des éléments finis converge très lentement. Les nœuds de discrétisation de la formule de quadrature de Gauss-Legendre ne font pas intervenir les points extrémaux de l'intervalle sur lesquels on utilise la quadrature alors que celle de Gauss-Lobatto les fait intervenir en raison des discontinuités des fonctions n et d. La formule de quadrature de Gauss-Lobatto utilise les points extrêmes de l'élément. Même si le maillage contient les points de discontinuités des fonctions in-

tervenant dans le problème, il existe un élément tel que l'un des points au bord prend la valeur de la fonction d'un coté de la discontinuité et tout les points à l'intérieur de l'élément prennent les valeurs de la fonction de l'autre coté de la discontinuité. Les discontinuités semblent être donc à l'intérieur d'un élément. Dans cet élément, on monte en degré pour approcher une fonction qui n'est pas analytique ce qui cause la convergence lente. Plus précisément l'utilisation de la PML linéaire par morceaux (PML0), donc avec une fonction d discontinue en r_0, implique que la solution u est $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'où une convergence en N_{dofs}^{-2} si N_{dofs} est le nombre de degré de liberté.



(a) Quadrature de Gauss-Legendre

(b) Quadrature de Gauss-Lobatto

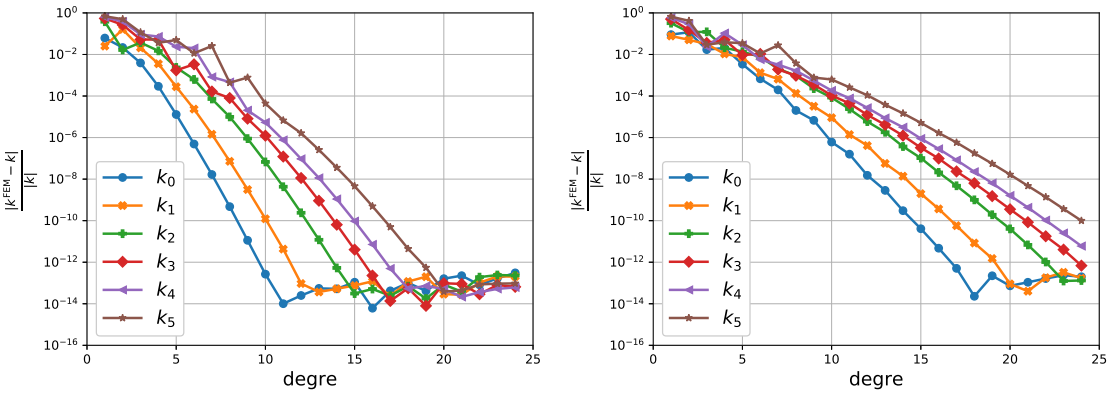
FIGURE 2.12 – Courbes de convergence des six premières résonances pour l'exemple de référence 2.5 : logarithme décimal de l'erreur relative en fonction du logarithme du nombre de degré de liberté de l'approximation de éléments finis pour la p-version, pour une quadrature de Gauss-Legendre à gauche et de Gauss-Lobatto à droite.

Dans cette section, nous avons présenté les graphes de convergence en échelle logarithmique par rapport au nombre de degré de liberté pour pourvoir faire des comparaisons entre la h-version et le p-version. La h-version a une convergence algébrique c'est-à-dire en h^α. Les représentation en échelle logarithmique sont donc pratiques car la courbe de convergence est une droite. Pour la p-version qui a une convergence exponentielle, pour avoir une droite, il faut une représentation en échelle semi-logarithmique. Dans la suite, nous n'aurons plus recours qu'à la p-version de la méthode des éléments finis. Les figures donnant les courbes de convergences seront systématiquement en échelle semi-logarithmique, c'est-à-dire représentant le logarithme de l'erreur en fonction du degré de l'approximation éléments finis.

2.5.2 Comparaison entre PML0 et PML2

On s'intéresse à l'influence de la régularité de la PML sur la précision du calcul des résonances. Ce que l'on entend par la régularité de la PML est la régularité de la fonction $\widetilde{\sigma}$. Nous avons effectué des simulations numériques avec la PML0, défini en (2.17) page 31, qui est linéaire par morceaux et continue et avec la PML2, défini en (2.19), qui est polynomiale par morceaux et de classe $\mathcal{C}^2$. Les paramètres sont ceux de l'exemple de référence 2.5 : $p = +1$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $n_0 = 2$, $r_0 = 2$, $r_1 = 3$, $\sigma_0 = 2$ et $R = 4$. On utilise la mise en œuvre présentée à la section 2.5.1 avec une formule de quadrature de Gauss-Legendre. La figure 2.13 donne les courbes de convergence

des six premières résonances suivant la régularité de la fonction $\widetilde{\sigma}$, défini en 2.14 page 30, qui est réglée par l'entier q. On observe que la PML0 ($q = 0$) fait converger plus vite les résonances que la PML2 ($q = 2$). Nous expliquons cela par le fait que la version linéaire par morceaux contraint plus brutalement la fonction à décroître dès l'entrée dans la PML. Pour les tests numériques à venir, on utilisera donc la PML0 linéaire par morceaux correspondant à $q = 0$ dans (2.15).



(a) PML0 de classe $\mathcal{C}^0$ (b) PML2 de classe $\mathcal{C}^2$

FIGURE 2.13 – Courbes de convergence des six premières résonances pour les valeurs des paramètres de l'exemple 2.5 : logarithme décimal de l'erreur relative en fonction du degré de l'approximation éléments finis pour la PML0 à gauche et pour la PML2 à droite.

Remarque 2.21. Les convergences pour la PML de classe $\mathcal{C}^1$ (PML1) sont moins rapide que pour la PML0 mais plus rapide que ceux de la PML2. Optimalement, il faut utiliser la PML0 mais elle impose que le maillage doit être adapté aux discontinuité que la PML0 introduit. Si on veut relâcher ces contraintes sur le maillage, il est préférable d'utiliser la PML1.

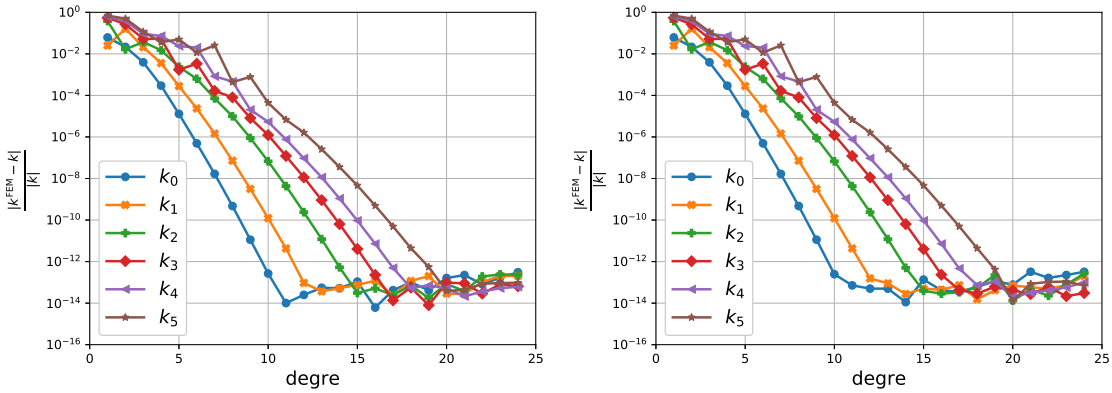
2.5.3 Une seconde mise en œuvre avec XLiFE++

Une alternative à la mise en œuvre numérique présentée à la section 2.5.1 consiste à considérer plusieurs domaines géométriques sur lesquels la fonction n est constante. On considère les domaines suivants $[0, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$, $[\beta, r_0]$, $[r_0, r_1]$ et $[r_1, R]$. Sur chacun de ces domaines n est constant et d, la fonction définie en (2.16) page 31, a une expression polynomiale. La formulation variationnelle pour le problème $(\mathcal{T}_p^{\text{born}})$ s'écrit : trouver $(k, u) \in \mathbb{C}^-_{\sigma_0} \times \mathrm{H}^1([0, R])$ tel que pour tout $v \in \mathrm{H}^1([0, R])$ on ait $a(u, v) = k^2 b(u, v)$ où les formes bilinéaires a et b sont définies par :

$$a(u,v) = \int_0^\alpha u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + n_0^{p-1}\int_\alpha^\beta u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_\beta^{r_0} u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{d(x)}u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{d_0}\int_{r_1}^R u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$b(u,v) = \int_0^\alpha u(x)v(x)\,\mathrm{d}x + n_0^{p+1}\int_\alpha^\beta u(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_\beta^{r_0} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{r_0}^{r_1} d(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x + d_0\int_{r_1}^R u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

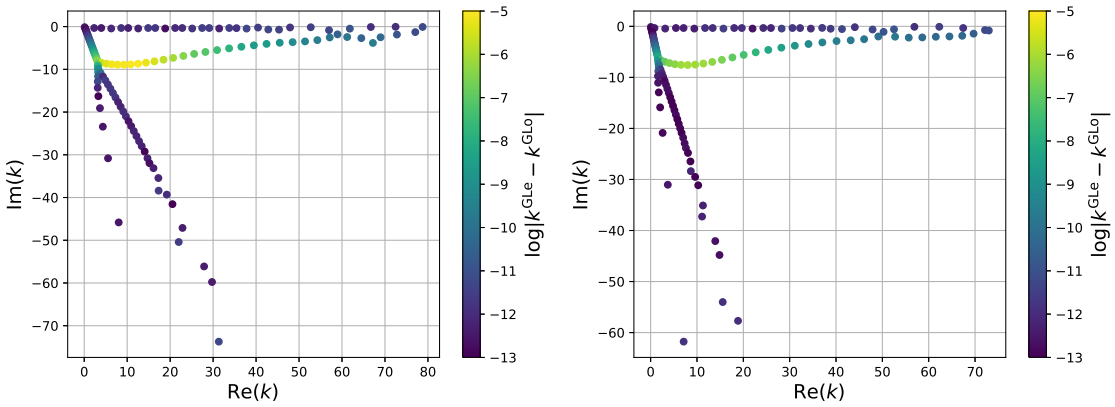
Avec cette approche, que l'on utilise les formules de quadrature de Gauss-Legendre ou celles de Gauss-Lobatto, on obtient des résultats très similaires. On a représenté à la figure 2.14 les courbes de convergence des six premières résonances où on utilise les formules de quadrature de Gauss-Legendre et Gauss-Lobatto. Les paramètres sont ceux de l'exemple de référence 2.5 : $p = +1$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $n_0 = 2$, $r_0 = 2$, $r_1 = 3$, $\sigma_0 = 2$, $R = 4$ et utilisation de la PML0 linéaire par morceaux. On observe que les courbes ne diffèrent qu'une fois atteint la précision machine. Sur les six premières résonances, on ne voit pas de différence entre les deux méthodes. Dans cette mise en œuvre, le choix entre une formule de quadrature de Gauss-Legendre ou de Gauss-Lobatto importe donc peu.



(a) Quadrature de Gauss-Legendre (b) Quadrature de Gauss-Lobatto

FIGURE 2.14 – Comparaison des courbes de convergence de la p-version de la méthode des éléments finis avec les formules de quadrature de Gauss-Legendre à gauche et de Gauss-Lobatto à droite. On a représenté le logarithme décimal de l'erreur relative sur les résonances en fonction du degré de l'approximation éléments finis.

À la figure 2.15 nous avons représenté les résonances discrètes les plus petites en module (environ 80% du spectre) en utilisant une échelle de couleur selon la valeur de $\log(k^{\mathrm{GLe}} - k^{\mathrm{GLo}})$ où k^{GLe} désignent les résonances discrètes calculées avec une formule de quadrature de Gauss-Legendre et k^{GLo} désignent les résonances discrètes calculées avec une formule de quadrature de Gauss-Lobatto. On a une correspondance entre les résonances discrètes obtenues par deux calculs. On observe que les résonances discrètes pour lequel l'écart est le plus grand sont celles qui approchent le spectre essentiel et celles qui viennent de la discrétisation. Par contre, l'écart sur les résonances discrètes qui approchent les résonances et la partie du spectre essentiel proche de zéro est très faible. Changer la formule de quadrature ne constitue donc pas une approche intéressante pour repérer les résonances dans le spectre résonnant discret issu de la discrétisation éléments finis. Il conviendra donc de trouver un autre moyen de localiser les résonances dans le spectre résonnant discret. On remarque également que la qualité de l'approximation des résonances se dégrade plus leur module est grand. Autrement dit, elles deviennent de plus en plus sensible à la discrétisation.



(a) P20 (b) P24

FIGURE 2.15 – Localisation du spectre résonnant discret (environ 80%) pour une approximation par éléments finis de Lagrange de degré 20, pour $p = +1$ à gauche et $p = -1$ à droite. La couleur des points dépend du logarithme décimal de la valeur absolue de l'écart entre un calcul effectué avec la méthode de Gauss-Legendre et un calcul effectué avec la méthode de Gauss-Lobatto.

2.5.4 Les différentes parties du spectre résonnant discret

Comme on peut le voir sur les figures 2.15 qui représentent le spectre résonnant discret, on peut partitionner le spectre en plusieurs parties. Pour identifier les différentes parties qui le composent, on regarde les vecteurs propres associés aux résonances discrètes. Sur la figure 2.16, on a représenté une partie du spectre résonnant discret et sur la figure 2.17 le graphe des vecteurs propres associés à ces résonances discrète. Le spectre est composé de cinq parties.

- La partie la plus facilement identifiable, celle proche de l'axe réel, contenant les résonances discrètes numérotées $\{20, 50\}$, correspond aux résonances. Les vecteurs propres sont principalement localisés dans l'espace physique, c'est-à-dire avant la PML, dans l'intervalle $[0, r_0]$.

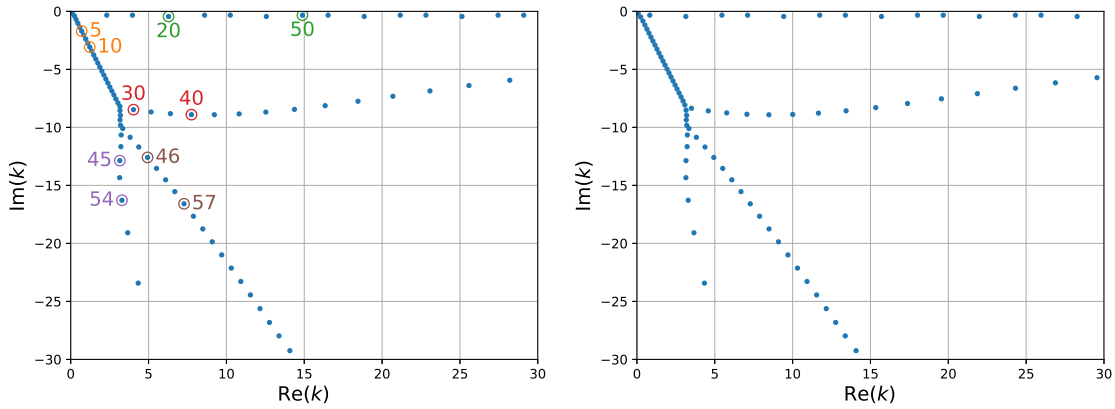
- Ensuite celles qui sont sur un segment qui part de l'origine, contenant les résonances discrètes numérotées $\{5, 10\}$, correspondent à des approximations du spectre essentiel qui est la demi-droite de pente $-\sigma_0$ pour le problème continu avec PML ($\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}}$) défini en (2.22) page 33, voir le lemme 2.13. C'est des valeurs propres du problème continu ($\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}}$) défini en (2.25) page 35.

- Puis la première branche qui se sépare de l'approximation du spectre essentiel, celle contenant les résonances discrètes numérotées $\{30, 40\}$, est composée des résonances discrètes issues de l'introduction et de la discrétisation de la PML. Les vecteurs propres associés semblent se localiser en $x = r_0$. Cette branche va se rapprocher de l'axe réel jusqu'à se mélanger aux résonances.

- La deuxième branche, qui contient les résonances discrètes de grande partie imaginaire numérotées $\{45, 54\}$, associée aux vecteurs propres qui sont principalement localisés dans l'intervalle $[r_0, r_1]$, c'est-à-dire à l'intérieur la couche dans laquelle la PML a des coefficients variables. Elle vient de l'introduction de la PML et de sa discrétisation.

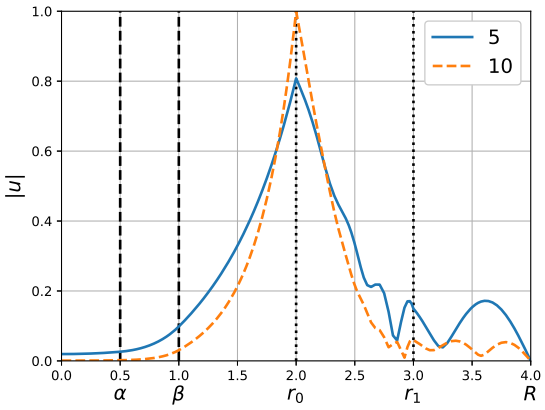
- La dernière branche, qui contient les résonances discrètes numérotées $\{46, 57\}$, est constituée de vecteurs propres localisés dans la couche PML dans la zone où les coefficients ne varient pas. Comme on le verra dans la section 2.5.7, cette branche disparaît si on prend $R = r_1$.

Dans les résultats représentés à la figure 2.16, les paramètres sont ceux de l'exemple de référence 2.5 : $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $n_0 = 2$, $r_0 = 2$, $r_1 = 3$, $\sigma_0 = 2$, $R = 4$ et la PML est continue. Les valeurs ne correspondant pas à des résonances sont appelées résonances discrètes parasites. Une étude similaire des différentes parties du spectre en dimension 2 a été faite dans [68] mais L. Nannen et M. Wess font dépendre les coefficients de la PML de la résonance, ce qui engendre un problème aux valeurs propres non linéaire.

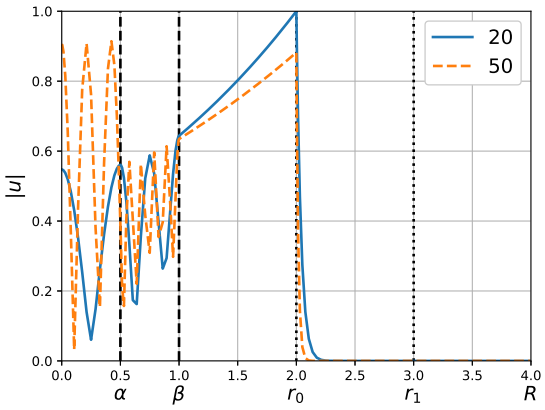


(a) $p = +1$ (b) $p = -1$

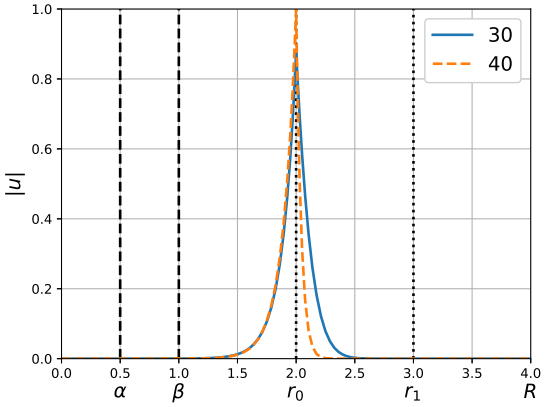
FIGURE 2.16 – Localisation du spectre résonnant discret (environ 80%) pour une approximation par éléments finis de Lagrange de degré 20. Les résonances discrètes numérotées ont leur vecteur propre associé représenté à la figure 2.17.



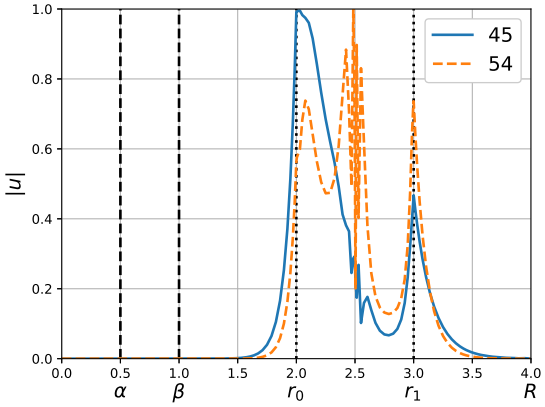
(a) Modes 5 et 10



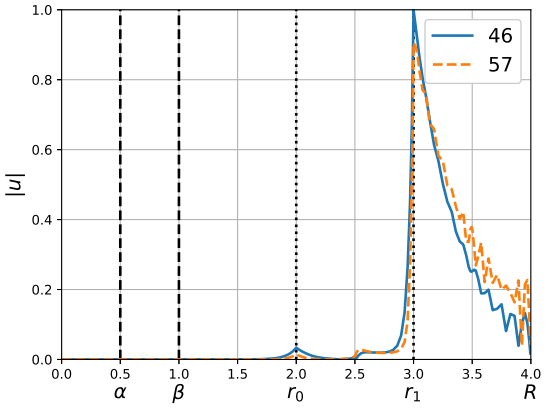
(b) Modes 20 et 50



(c) Modes 30 et 40



(d) Modes 45 et 54



(e) Modes 46 et 57

FIGURE 2.17 – Graphes des valeurs absolues des vecteurs propres associés aux résonances discrètes identifiées par un numéro à la figure 2.16.

2.5.5 Influence du paramètre σ_0 de la PML

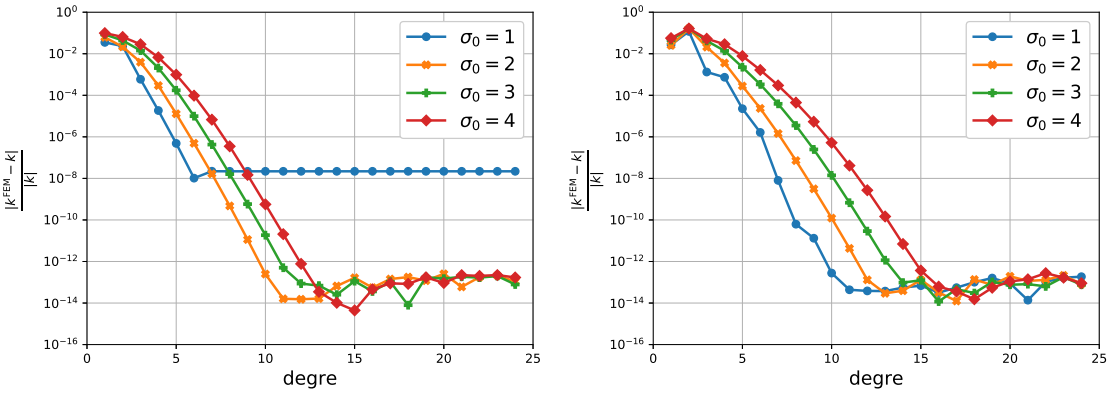
On s'intéresse dans cette partie à l'influence du paramètre σ_0 définissant la PML (introduit à la section 2.3.1) sur la convergence des résonances appartenant à $\mathbb{C}^-_{\sigma_0}$. Ce paramètre intervient dans l'expression de $\widetilde{\sigma}$. Une remarque préliminaire est que s'il est trop petit alors certaines résonances ne seront pas dans le cône $\mathbb{C}^-_{\sigma_0}$. Pour que les résonances k qui nous intéressent soient dans le cône, il faut que $\mathrm{Im}(d_0 k) > 0$. Le paramètre σ_0 intervient également dans la fonction $\widetilde{d}$, définie en (2.16) page 31. On sait que le mode résonnant u associé à une résonance a le comportement suivant dans l'intervalle $[r_0, R]$, voir la figure 2.5 page 35,

$$|u(x)| \propto \mathsf{e}^{-x\,\mathrm{Im}(k)}\ \mathsf{e}^{-\sigma_0\, x P(x)\,\mathrm{Re}(k)}$$

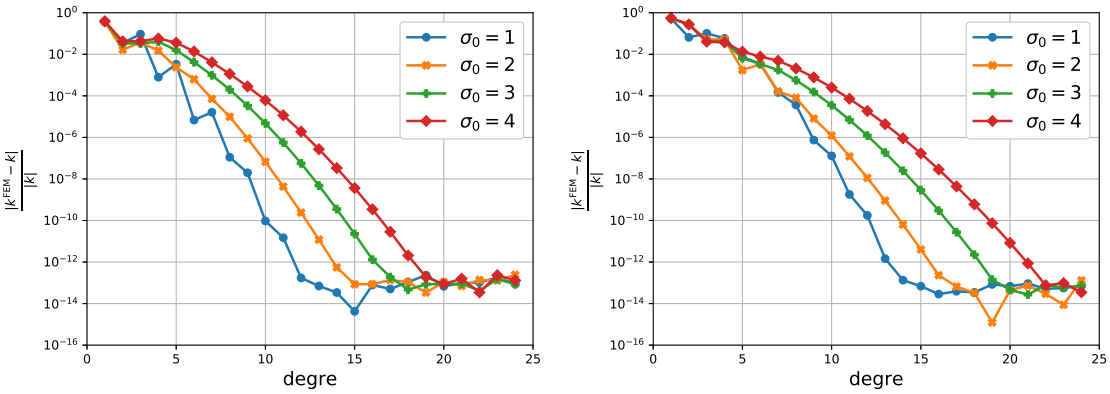
où P est une fonction à valeurs dans $[0,1]$. Heuristiquement, si la valeur de σ_0 est trop petite, l'approximation par la condition de Dirichlet homogène en R sera mauvaise et on ne sélectionnera pas le bon comportement du mode résonnant sur $[\beta, R]$. De plus, si la valeur de σ_0 est trop grande, le mode résonnant dans l'intervalle $[r_0, R]$ sera une exponentielle à décroissance très rapide, c'est-à-dire avec un comportement comme e^{-Cx} avec $C > 0$ grand. Il faudra donc raffiner la discrétisation pour bien capturer la décroissance rapide. La qualité de cette approximation dépend aussi de R : plus R sera grand, meilleure sera l'approximation de la condition de Dirichlet homogène en R.

On a représenté sur la figure 2.18 les courbes de convergence des six premières résonances pour différentes valeurs de σ_0 et pour $p = +1$. Les paramètres sont ceux de l'exemple de référence 2.5 : $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $n_0 = 2$, $r_0 = 2$, $r_1 = 3$ et $R = 4$. On utilise la PML0 et une formule de quadrature de Gauss-Legendre. On observe que la valeur de résonance $k_{1,0}$ ne converge pas si σ_0 est trop petit, la condition de Dirichlet homogène étant mal approchée. Une base de solutions de l'équation différentielle du problème $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{born}})$ sur l'intervalle $[\beta, R]$ est connue : cette base est formée de la fonction $x \mapsto \mathsf{e}^{\mathsf{i}k\widetilde{x}}$, qui est exponentiellement décroissante, et de la fonction $x \mapsto \mathsf{e}^{-\mathsf{i}k\widetilde{x}}$, qui est exponentiellement croissante. Le mode résonnant est une combinaison linéaire de ces deux fonctions, et il est nécessaire que la contribution de $x \mapsto \mathsf{e}^{-\mathsf{i}k\widetilde{x}}$ soit négligeable afin d'avoir une bonne approximation de la résonance. Notons que si σ_0 est trop petit, la fonction $x \mapsto \mathsf{e}^{\mathsf{i}k\widetilde{x}}$ n'est pas assez petite au niveau de la troncature en R. La contribution de la fonction $x \mapsto \mathsf{e}^{-\mathsf{i}k\widetilde{x}}$ est assez importante pour que l'erreur entre la résonance discrète et la résonance soit au dessus de 10^{-8}. On peut améliorer cela en augmentant la valeur de R ou de σ_0, ce qui ne coûte pas très cher en temps de calcul en dimension 1.

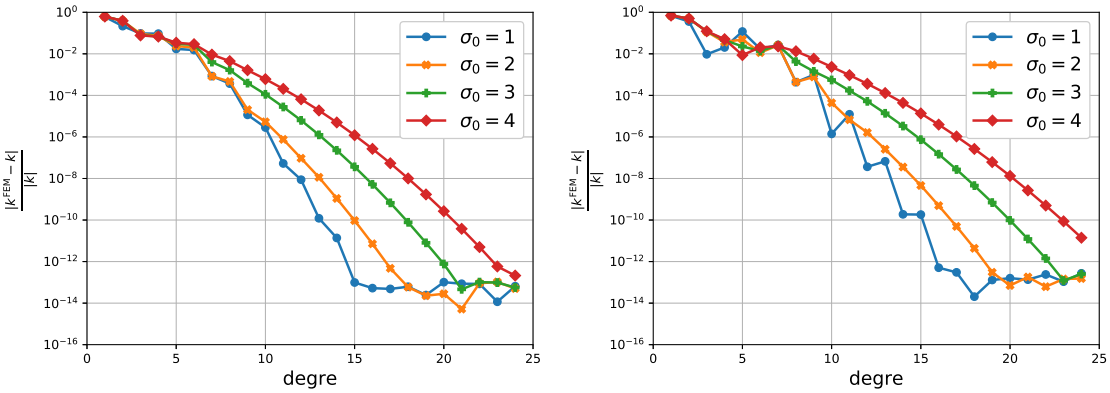
On a représenté sur la figure 2.19 les courbes de convergence des six premières résonances discrètes pour différentes valeurs de σ_0 et pour $p = -1$. La seule différence avec l'exemple précédent, illustré par la figure 2.18, est la valeur de p. On utilise la PML0 et une formule de quadrature de Gauss-Legendre. On observe que les valeurs de résonances $k_{1,0}$ et $k_{2,0}$ ne convergent pas si σ_0 est trop petit pour les mêmes raisons que précédemment. Le phénomène est plus marqué pour la résonance $k_{1,0}$ dans le cas $p = -1$ que dans le cas $p = +1$ car elle a une petite partie réelle $\mathrm{Re}(k_{1,0}) \approx 0.8$. On remarque aussi que plus σ_0 est grand et moins les résonances convergent vite quand le degré de l'approximation augmente, mais plus la convergence est régulière. Ceci s'explique par le fait que si σ_0 est grand, les vecteurs propres sur l'intervalle $[\beta, R]$ sont des exponentielles raides et donc il faut plus de points de discrétisation pour bien les approcher.



(a) $k_{1,0}$ (b) $k_{2,0}$

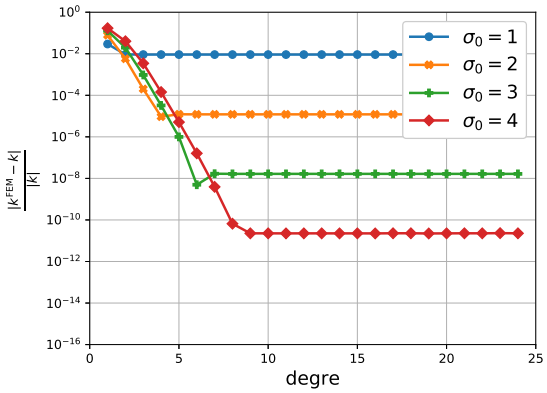


(c) $k_{0,1}$ (d) $k_{1,1}$

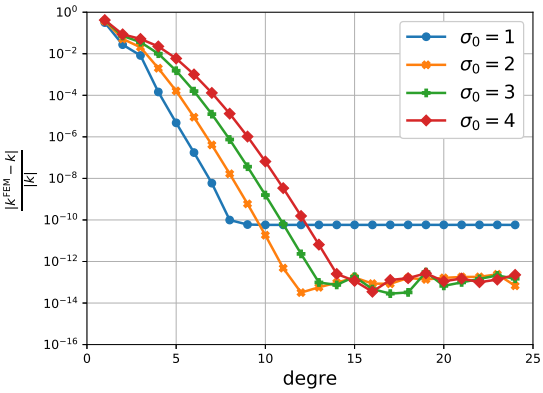


(e) $k_{2,1}$ (f) $k_{0,2}$

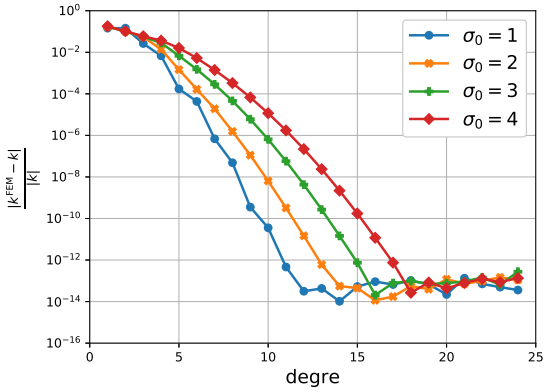
FIGURE 2.18 – Logarithme décimal de l'erreur relative sur les résonances discrètes en fonction du degré de l'approximation éléments finis pour $p = +1$.



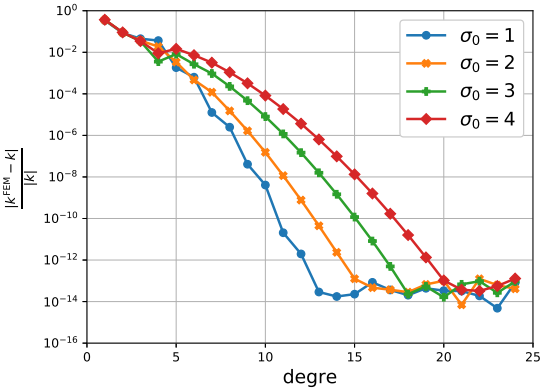
(a) $k_{1,0}$



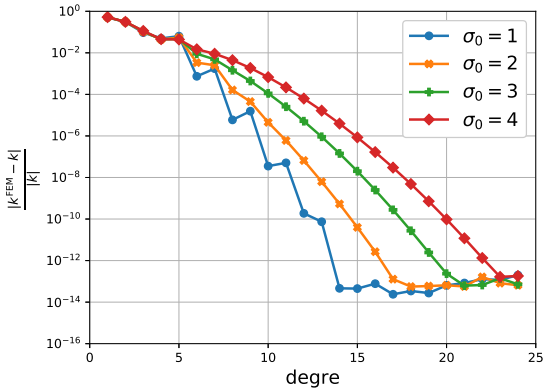
(b) $k_{2,0}$



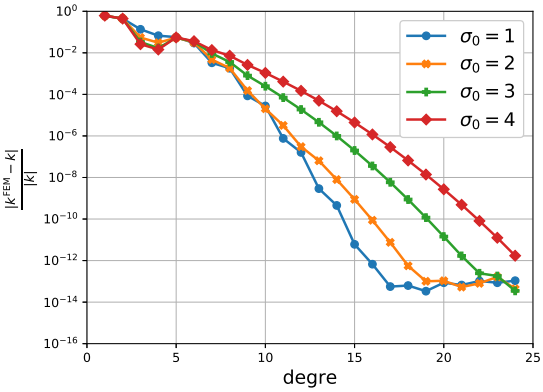
(c) $k_{0,1}$



(d) $k_{1,1}$



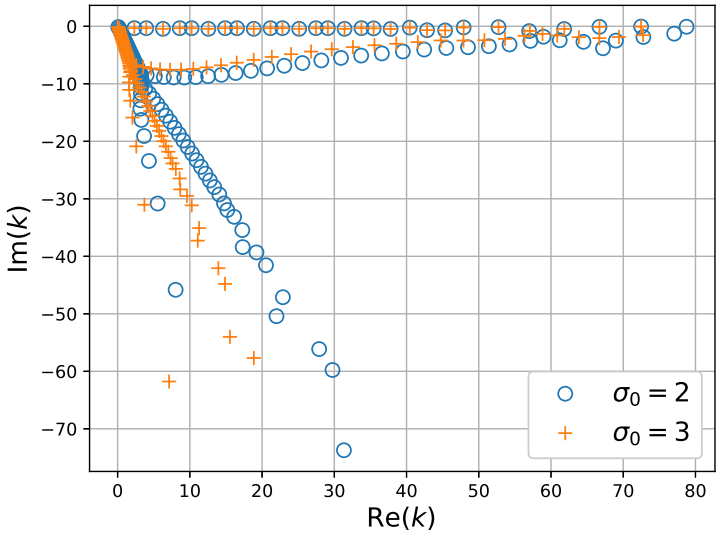
(e) $k_{2,1}$



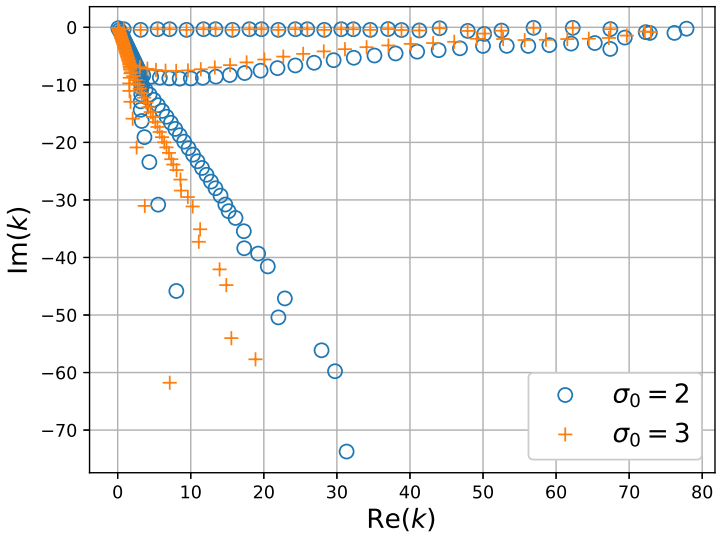
(f) $k_{0,2}$

FIGURE 2.19 – Logarithme décimal de l'erreur relative sur les résonances discrètes en fonction du degré de l'approximation éléments finis pour $p = -1$.

Sur la figure 2.20, on voit que le spectre des matrices éléments finis issues de deux calculs fait avec différentes valeurs de σ_0 coïncide sur les résonances mais pas sur les autres résonances discrètes parasites liées à la discrétisation. Augmenter la valeur de σ_0 permet d'augmenter la pente du segment correspondant à l'approximation du spectre essentiel, qui dépend de σ_0, voir proposition 2.13, mais rapproche les résonances discrètes parasites des résonances.



(a) $p = +1$



(b) $p = -1$

FIGURE 2.20 – Localisation du spectre résonnant discret (environ 80%) pour une approximation par éléments finis de Lagrange de degré 20. En haut pour $p = +1$ et en bas pour $p = -1$. Les ronds bleus correspondent aux valeurs obtenues pour $\sigma_0 = 2$ et les croix oranges correspondent aux valeurs obtenues pour $\sigma_0 = 3$.

L'analyse de ces résultats (et d'autre résultats de simulation non reportés ici) semble indiquer que la valeur optimale de σ_0 correspond à une valeur assez grande pour que toutes les résonances qui nous intéressent convergent, mais pas trop grande

pour que la convergence soit la plus rapide possible. Pour choisir une valeur de σ_0 qui fonctionne pour une résonances k, on veut que $|u(R)| \propto \mathsf{e}^{\mathsf{i}R\,\mathrm{Im}(d_0 k)}$ approxime bien une condition de Dirichlet homogène. On cherche σ_0 tel que $\mathsf{e}^{-R\,\mathrm{Im}(d_0 k)} \leq 10^{-6}$ ce qui donne

$$\sigma_0 \geq \frac{6\ln(10) - R\,\mathrm{Im}(k)}{R\,\mathrm{Re}(k)}.$$

Prendre σ_0 proche du cas d'égalité de cette inégalité donne une courbe de convergence rapide pour la résonances k.

2.5.6 Influence du paramètre r_0 de la PML

On s'intéresse à l'influence du paramètre r_0 correspondant à la position de la frontière intérieure de la PML sur la convergence des résonances appartenant à $\mathbb{C}^-_{\sigma_0}$. Il y a deux possibilités : on peut faire varier r_0 en gardant r_1 fixe ou en gardant $r_1 - r_0$ fixe.

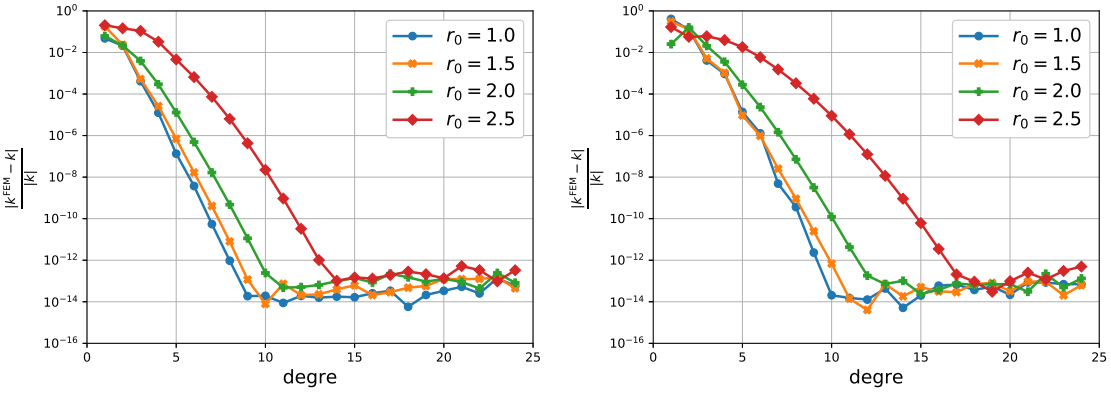
On a représenté à la figure 2.21 les courbes de convergence des six premières résonances discrètes pour différentes valeurs de r_0 en gardant r_1 constant égal à 3. Les paramètres sont ceux de l'exemple de référence 2.5 : $p = +1$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $n_0 = 2$, $r_1 = 3$, $\sigma_0 = 2$ et $R = 4$. On utilise la PML0 et la quadrature de Gauss Legendre. On observe que plus r_0 est proche de β et plus les résonances convergent rapidement quand le degré de l'approximation éléments finis augmente. Si r_0 est éloigné de β alors la convergence est plus lente mais est plus régulière. De plus, on voit que l'épaisseur de la zone de transition de la PML influence beaucoup la vitesse de convergence : plus elle est étroite moins les résonances convergent vite. On peut expliquer ceci par par le fait que dans l'intervalle $[r_0, r_1]$ correspondant à la PML les solutions sont de la forme $u(x) \propto \mathsf{e}^{\mathsf{i}k\widetilde{d}(x)x}$. Ainsi, plus la largeur de cet intervalle est petite plus les solutions seront des exponentielles à décroissances rapides.

Sur la figure 2.22, on voit que le spectre résonnant discret des deux calculs éléments finis coïncide sur les résonances et sur les approximations du spectre essentiel mais pas sur les autres résonances discrètes parasites. Rapprocher r_0 de β permet d'éloigner les résonances discrètes parasites des résonances.

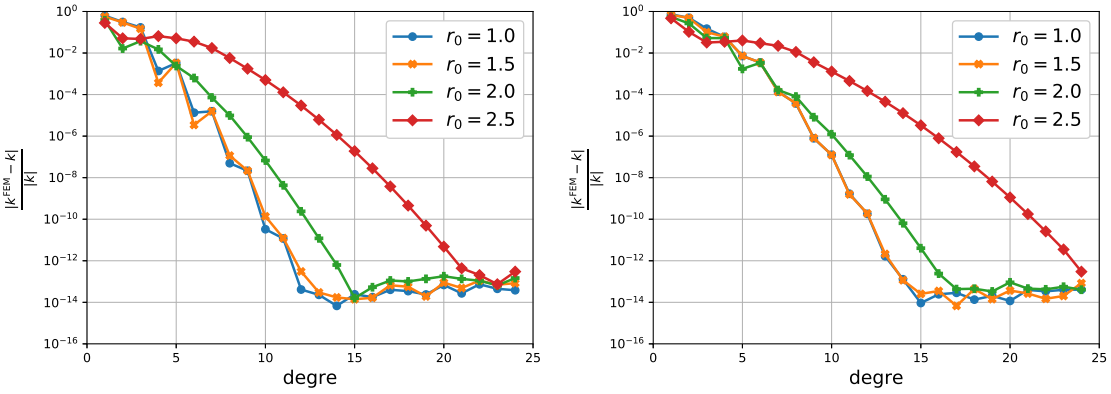
On a représenté à la figure 2.23 les courbes de convergence des six premières résonances discrètes pour différentes valeurs de r_0 en gardant $r_1 - r_0$ constant égal à 1. Le seul paramètre qui change par rapport à l'exemple précédent (figure 2.21) est r_1. On utilise la PML0 et une formule de quadrature de Gauss-Legendre. On observe que la différence de vitesse de convergence est moins importante quand r_0 s'éloigne de β. On observe ainsi que quand r_0 croit, la convergence est plus régulière.

Sur la figure 2.24, on observe que le spectre résonnant discret des matrices éléments finis coïncide sur les résonances et sur les approximations du spectre essentiel mais pas sur les autres résonances discrètes parasites. On a utilisé les mêmes paramètres que ceux du paragraphe précédent. Rapprocher r_0 de β permet d'éloigner les résonances discrètes parasites des résonances.

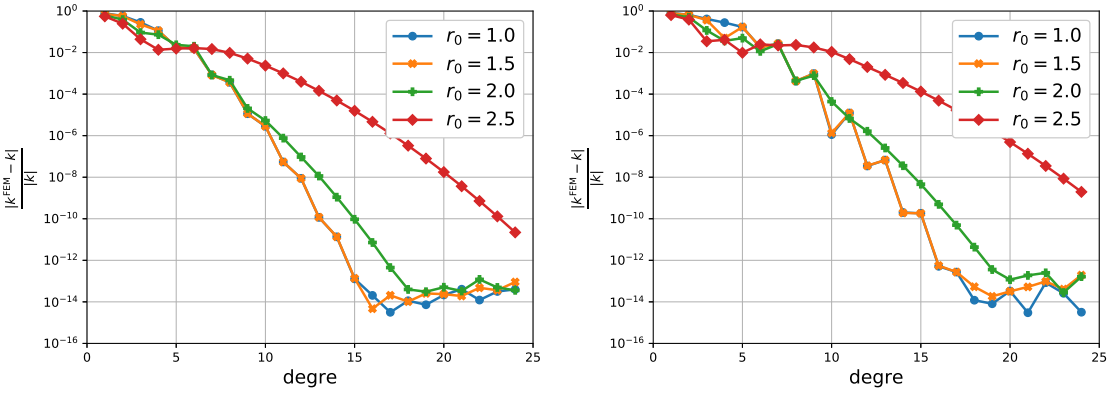
À l'issue de ces investigations numériques, on peut affirmer que le meilleur choix pour r_0 est une valeur aussi proche de β que possible, voire égale à β, tout en gardant la zone de transition de la PML assez large.



(a) $k_{1,0}$ (b) $k_{2,0}$

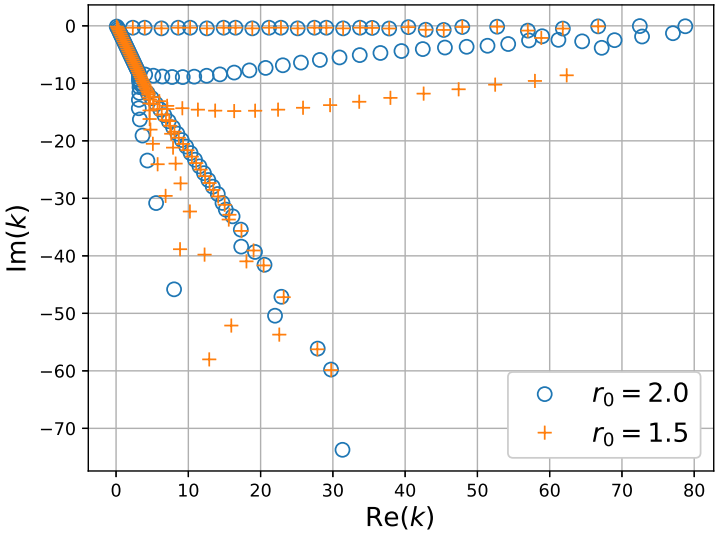


(c) $k_{0,1}$ (d) $k_{1,1}$

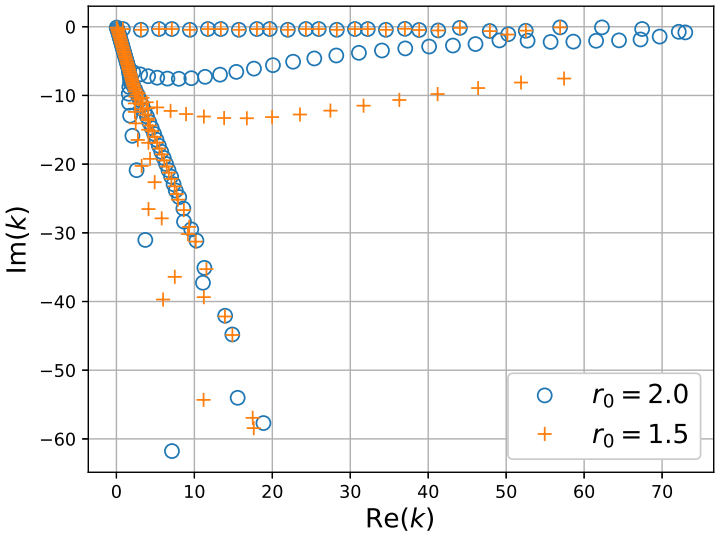


(e) $k_{2,1}$ (f) $k_{0,2}$

FIGURE 2.21 – Logarithme décimal de l'erreur relative sur les résonances discrètes en fonction du degré de l'approximation éléments finis pour $r_0 \in \{1, 1.5, 2, 2.5\}$ et $r_1 = 3$.

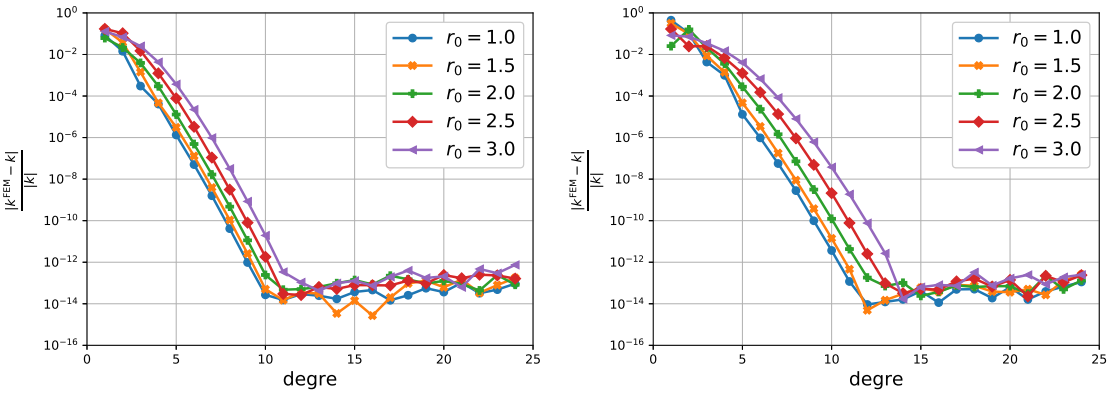


(a) $p = +1$

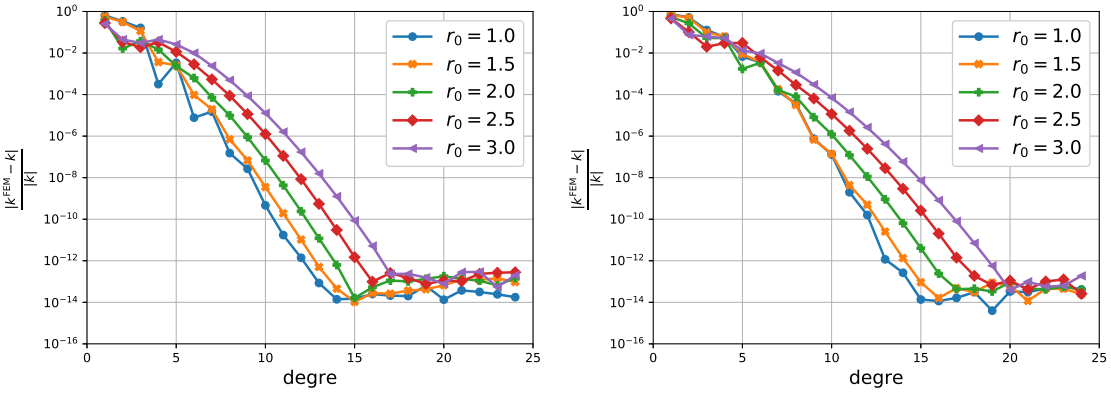


(b) $p = -1$

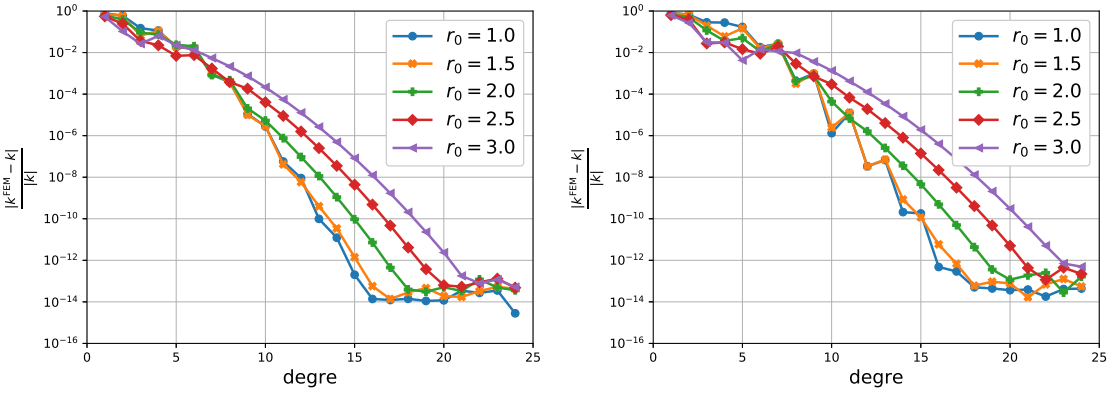
FIGURE 2.22 – Localisation du spectre résonnant discret (environ 80%) pour une approximation par éléments finis de Lagrange de degré 20, en haut pour $p = +1$ et en bas pour $p = -1$. Les ronds bleus sont celles pour $(r_0, r_1) = (2, 3)$ et les croix oranges pour $(r_0, r_1) = (1.5, 3)$.



(a) $k_{1,0}$ (b) $k_{2,0}$

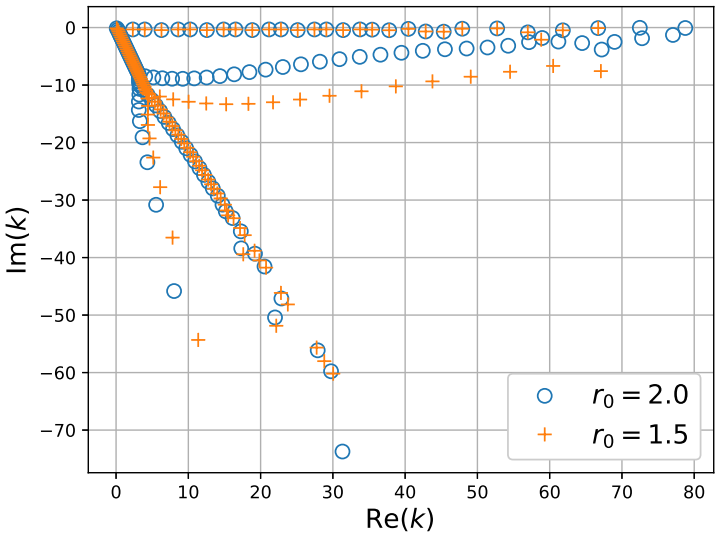


(c) $k_{0,1}$ (d) $k_{1,1}$

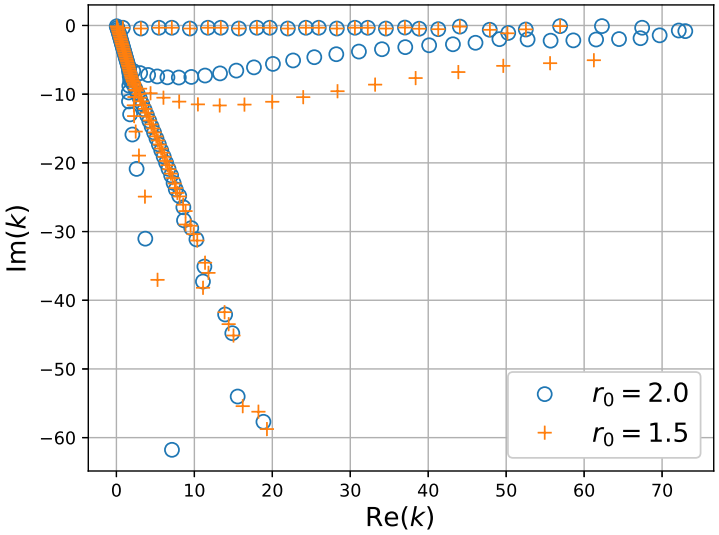


(e) $k_{2,1}$ (f) $k_{0,2}$

FIGURE 2.23 – Logarithme décimal de l'erreur relative sur les résonances discrètes en fonction du degré de l'approximation éléments finis pour $r_0 \in \{1, 1.5, 2, 2.5\}$ et $r_1 = r_0 + 1$.



(a) $p = +1$



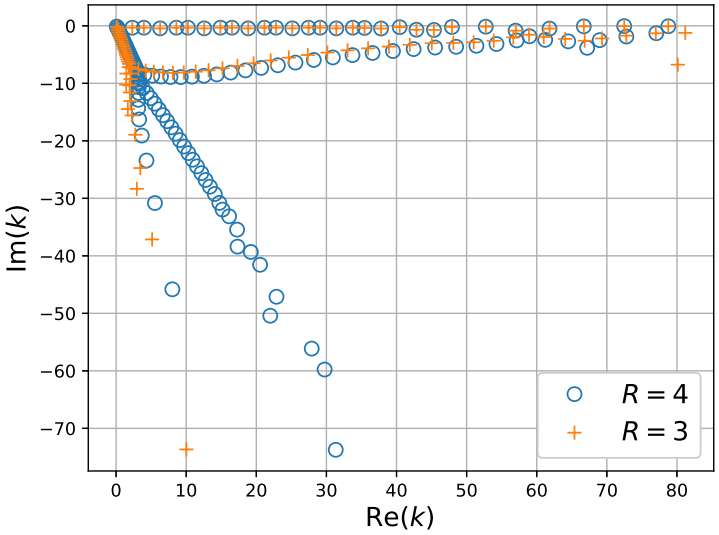
(b) $p = -1$

FIGURE 2.24 – Localisation du spectre résonnant discret (environ 80%) pour une approximation par éléments finis de Lagrange de degré 20, en haut pour $p = +1$ et en bas pour $p = -1$. Les ronds bleus correspondent aux valeurs obtenues pour $(r_0, r_1) = (2, 3)$ et les croix oranges correspondent aux valeurs obtenues pour $(r_0, r_1) = (1.5, 2.5)$.

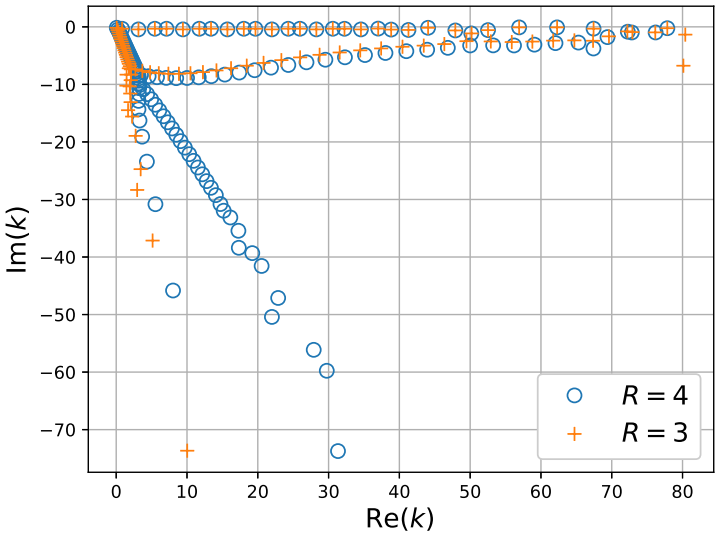
2.5.7 Influence du paramètre $R - r_1$ de la troncature

On s'intéresse dans cette partie à l'influence de $R - r_1$ où R est la distance de troncature et r_1 le paramètre de sortie de la couche variable de la PML tel que $R \geq r_1$, voir figure 2.5 page 35. On a déjà vu, à la section 2.5.4, que dans le cas où $R > r_1$ il y a une partie du spectre dont les vecteurs propres associés sont localisés principalement dans l'intervalle $[r_1, R]$. Sur la figure 2.25, on a représenté la position des résonances discrètes avec des ronds bleus pour le cas $R = 4$ et $r_1 = 3$ et des croix oranges pour le cas $R = r_1 = 4$. On remarque que si $R = r_1$, on a perdu une partie du spectre par rapport au cas $R > r_1$. Ceci est normal au vu du fait que les vecteurs propres associés aux valeurs propres qui ont disparues vivent dans l'intervalle $[r_1, R]$.

Sur la figure 2.26, on a représenté les graphes de convergence des six premières résonances. On voit que les vitesses de convergence sont faiblement impactées par le changement de valeurs de R. On a représenté les courbes en fonction du nombre de degrés de liberté parce qu'en changeant la valeur de R, on change le nombre d'éléments. Les paramètres sont ceux de l'exemple de référence 2.5 : $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $n_0 = 2$, $r_0 = 2$, $r_1 = 3$ et $\sigma_0 = 2.5$.

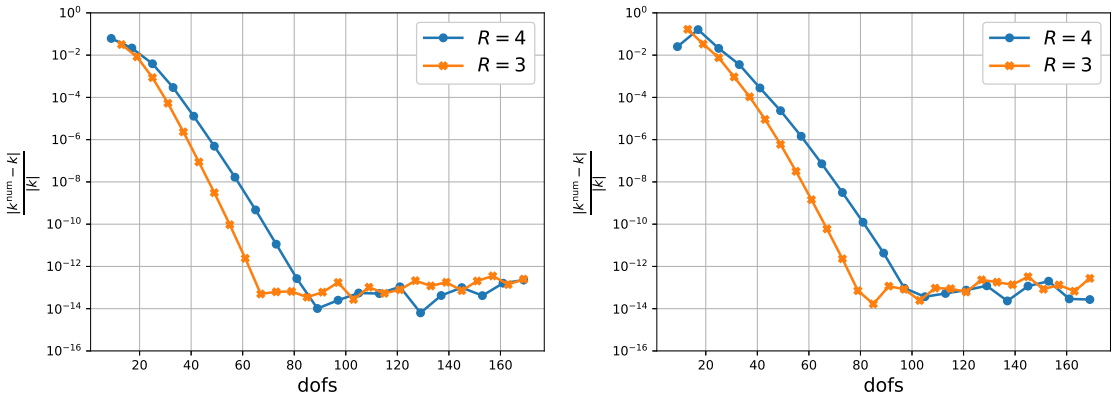


(a) $p = +1$

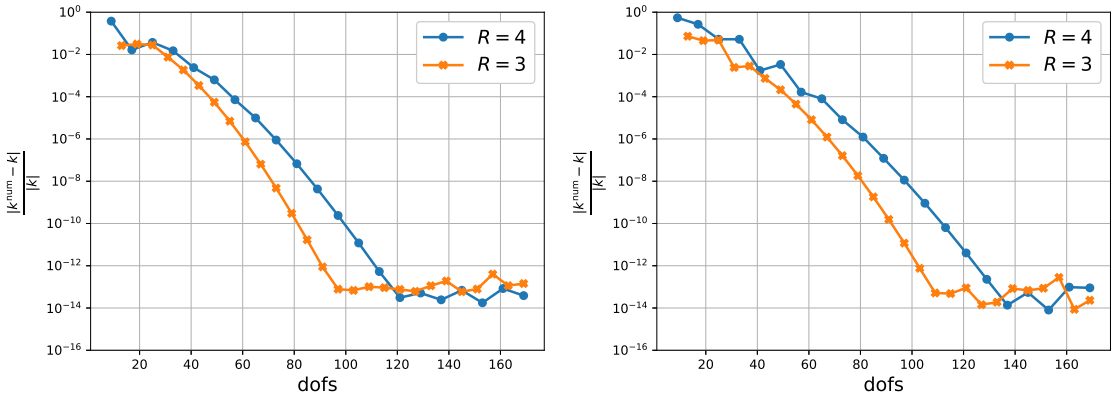


(b) $p = -1$

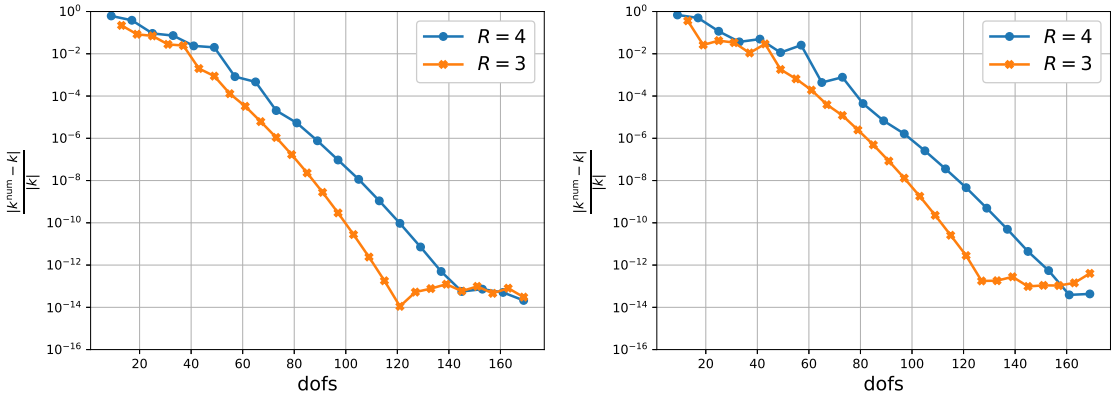
FIGURE 2.25 – Localisation du spectre résonnant discret (environ 80%) pour une approximation par éléments finis de Lagrange de degré 20, en haut pour $p = +1$ et en bas pour $p = -1$. Les ronds bleu correspondent aux valeurs obtenues pour $R = 4$ et $r_1 = 3$ et les croix orange correspondent aux valeurs obtenues pour $R = r_1 = 3$.



(a) $k_{1,0}$ (b) $k_{2,0}$



(c) $k_{0,1}$ (d) $k_{1,1}$



(e) $k_{2,1}$ (f) $k_{0,2}$

FIGURE 2.26 – Logarithme décimal de l'erreur relative sur les résonances discrètes en fonction du degré de l'approximation éléments finis pour $R \in \{3, 4\}$.

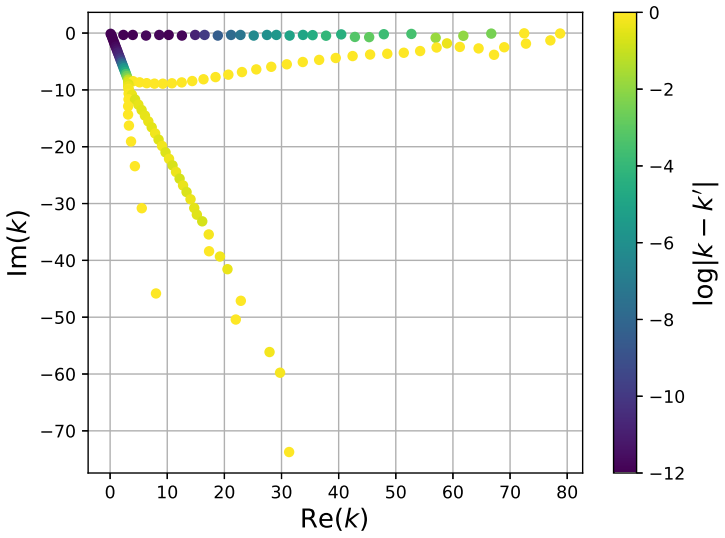
2.5.8 Influence des paramètres σ_0 et r_0 de la PML

On s'intéresse dans cette partie à l'influence du paramètre σ_0 définissant la PML et du paramètre r_0 correspondant à la position de la frontière intérieure de la PML sur la convergence des résonances appartenant à $\mathbb{C}^-_{\sigma_0}$. On a représenté à la figure 2.27 les résonances discrètes pour les valeurs des paramètres de l'exemple de référence 2.5 : $p = +1$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $n_0 = 2$ et $R = 4$. On utilise la PML0 et une formule de quadrature de Gauss-Legendre. On a représenté à la figure 2.27, les résonances discrètes les plus petites en module (environ 80% du spectre).

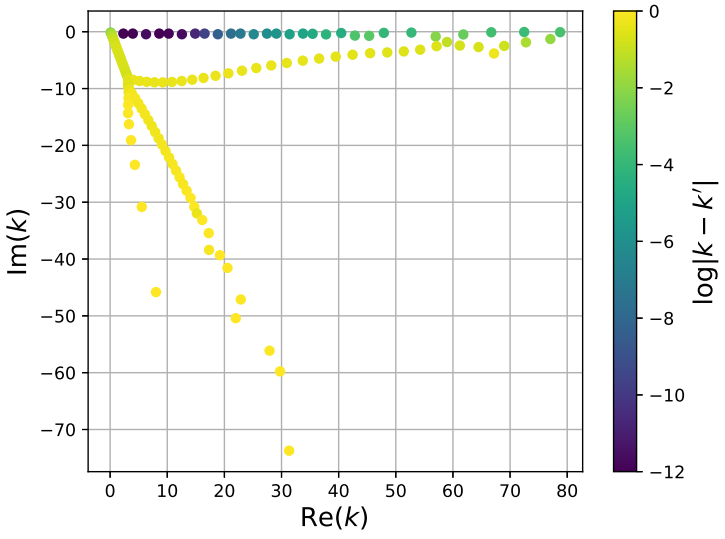
Dans le premier cas (figure du haut), on change la position de la PML. On fait un premier calcul avec $(r_0, r_1) = (2, 3)$, les résonances discrètes issues de ce calcul sont notées k, puis on fait un deuxième calcul avec $(r_0, r_1) = (2.5, 3.5)$, qui donne les résonances discrètes k'. Sur le graphes, entre les deux calculs, on peut faire correspondre les résonances discrètes et la couleur dépend de $\log(|k - k'|)$. On observe que les premières résonances et les résonances discrètes correspondant à l'approximation du spectre essentiel proche de 0 ne dépendent pas de la position de la PML.

Dans le deuxième cas (figure du bas), on change la valeur de σ_0. Un calcul est fait avec $\sigma_0 = 2$ et donne les résonances discrètes k, puis un calcul est fait avec $\sigma_0 = 2.1$ et donne les résonances discrètes k'. À nouveau, on peut faire correspondre les résonances discrètes entre les deux calculs et la couleur est déterminée par $\log(|k - k'|)$. Ici, par contre, seuls les résonances discrètes correspondant aux résonances ne dépendent pas du paramètre σ_0

Pour conclure un moyen efficace de distinguer les résonances discrètes correspondant à des résonances des résonances discrètes parasites est de faire deux calculs avec deux valeurs de σ_0.



(a) Différents (r_0, r_1) et $\sigma_0 = 2$



(b) Différents σ_0 et $(r_0, r_1) = (2, 3)$

FIGURE 2.27 – Localisation du spectre résonnant discret (environ 80%) pour une approximation par éléments finis de Lagrange de degré 20, à gauche pour $p = +1$ et à droite pour $p = -1$. Sur la figure du haut, la couleur est déterminée par le logarithme décimal de l'écart entre un calcul fait avec $(r_0, r_1) = (2, 3)$ et un calcul fait avec $(r_0, r_1) = (1.5, 2.5)$. En bas, la couleur est déterminée par le logarithme décimal de l'écart entre un calcul fait avec $\sigma_0 = 2$ et un calcul fait avec $\sigma_0 = 2.1$.

2.5.9 Influence de la fonction de la PML

Les modes résonnants solutions de $(\mathcal{T}_p^{\mathrm{PML}})$ défini en (2.22) dans la couche PML, pour $x > r_0$, vérifient

$$|u_{\mathrm{PML}}(x)| \propto \mathrm{e}^{-\operatorname{Im}(k\widetilde{d}(x))x} \propto \exp\left(-\operatorname{Im}(k)x - \operatorname{Re}(k)\widetilde{\sigma}(x)x\right).$$

On a donc $|u_{\mathrm{PML}}(x)| \to 0$ quand $x \to +\infty$. Jusqu'à présent la fonction $\widetilde{\sigma}$ définissant la PML, voir la relation (2.14) page 30, était une fonction qui était égale à une constante en dehors d'un compact. Ainsi, les modes tendent bien vers 0 quand x augmente, ce qui permet de tronquer le domaine de calcul en $x = R$ en espérant que les modes sont assez petits en R pour avoir une bonne approximation par une condition aux limites de Dirichlet. Une autre possibilité pour conserver la décroissance vers 0 est de tronquer le domaine de calcul et de faire « exploser » $\widetilde{\sigma}(x)x$ quand x se rapproche de R. Par exemple dans [14, 27], les auteurs prennent des fonctions $\widetilde{\sigma}$ et σ de la forme suivante : pour $r_0 < x < r_1$,

$$\widetilde{\sigma}(x) = \frac{\sigma_0}{x} \ln\left(\frac{r_1 - r_0}{r_1 - x}\right) \qquad \text{et} \qquad \sigma(x) = \frac{\sigma_0}{r_1 - x}.$$

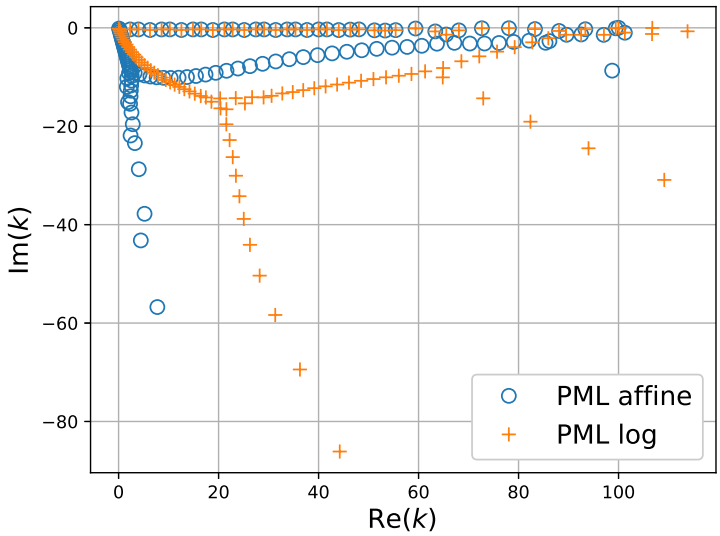
Avec une telle fonction $\widetilde{\sigma}$, on a bien $u_{\mathrm{PML}}(r_1) = 0$ et ce cas est appelé *PML logarithmique* en raison de l'expression de $\widetilde{\sigma}$. Pour rappel, nous avons utilisé les fonctions $\widetilde{\sigma}$ et σ suivantes : pour $r_0 < x < r_1$,

$$\widetilde{\sigma}(x) = \sigma_0 \frac{x - r_0}{r_1 - r_0} \qquad \text{et} \qquad \sigma(x) = \sigma_0 \frac{2x - r_0}{r_1 - r_0}$$

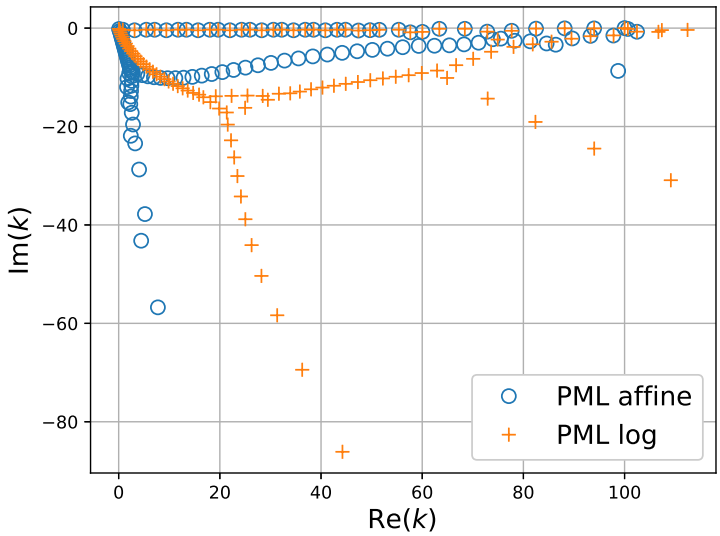
ce qui correspond à une PML qualifié de *PML affine*. On souhaite comparer ces deux types de PML.

Sur la figure 2.28, on représenté le spectre résonnant discret des matrices éléments finis avec des ronds bleus pour la PML affine et avec des croix oranges pour la PML logarithmique. On remarque que les deux spectres coïncident sur les résonances, le reste du spectre qui vient de l'introduction de la PML et de la discrétisation ne coïncide pas mais à une structure similaire. Faire deux calculs avec ces deux type de PML constitue une bonne méthode pour sélectionner les résonances parmi le spectre résonnant discret. Par contre, l'étude théorique du spectre de la PML logarithmique est beaucoup plus compliquée car les coefficients de la PML sont non bornés.

Sur la figure 2.29, on a représenté l'erreur relative sur les quatre premières résonances, on remarque des résultats de convergence similaires.

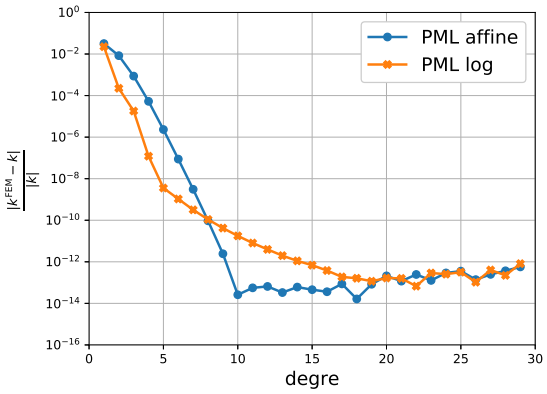


(a) $p = +1$

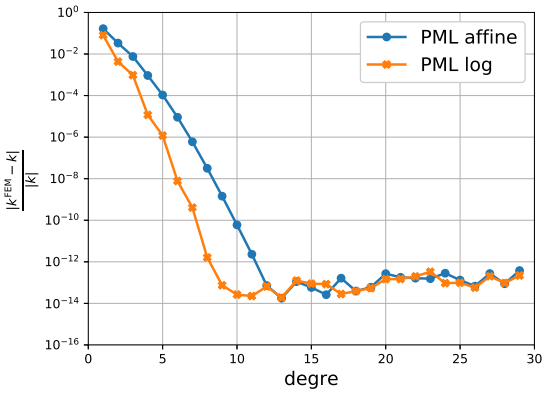


(b) $p = -1$

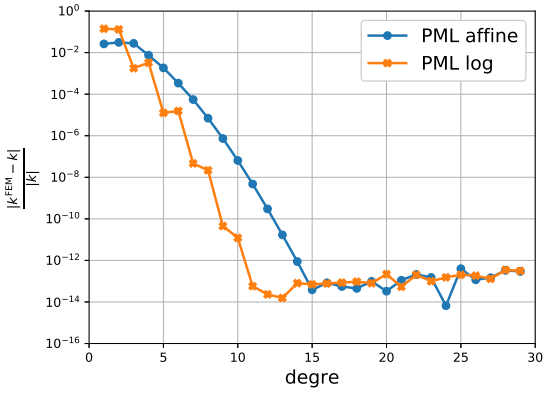
FIGURE 2.28 – Localisation du spectre résonnant discret (environ 80%) pour une approximation par éléments finis de Lagrange de degré 20, en heut pour $p = +1$ et en bas pour $p = -1$. Les ronds bleus correspondent aux valeurs obtenues pour les PML affine et les croix oranges correspondent aux valeurs obtenues pour PML logarithmique.



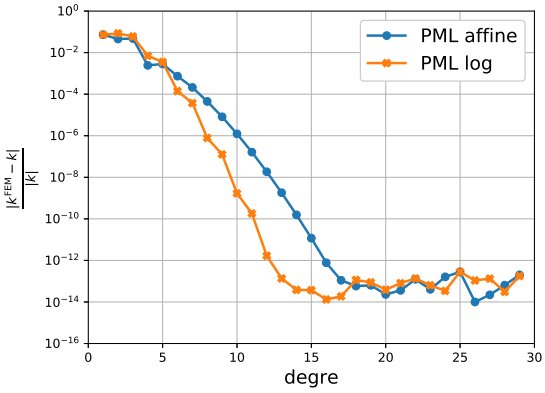
(a) $k_{1,0}$



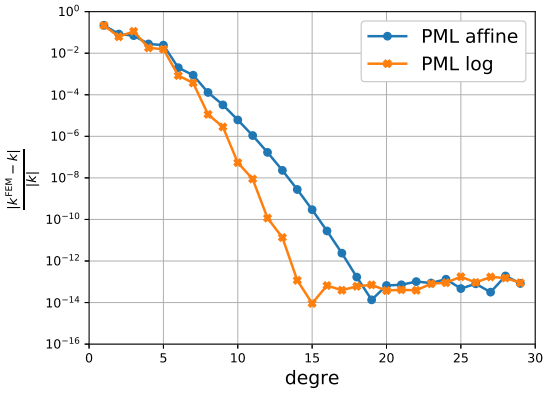
(b) $k_{2,0}$



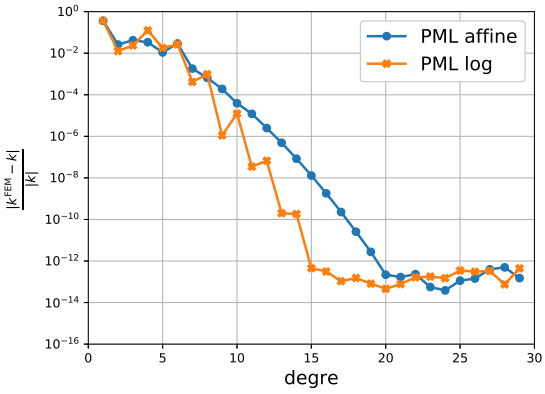
(c) $k_{0,1}$



(d) $k_{1,1}$



(e) $k_{2,1}$



(f) $k_{0,2}$

FIGURE 2.29 – Logarithme décimal de l'erreur relative sur les résonances discrètes en fonction du degré de l'approximation éléments finis pour une PML affine et pour une PML logarithmique.

2.5.10 Conclusion

À l'issue des investigations numériques que nous avons menées, dont seuls quelques cas tests ont été reportés dans ce document, nous pouvons préciser quelles semblent être les valeurs des paramètres numériques à prendre pour avoir les résultats les plus précis possibles, une fois que l'on s'est donné la fonction n et la position R de la frontière artificielle bornant le domaine de calcul.

- Pour la formule de quadrature, notre EDP contient des coefficients discontinus donc pour une résolution numérique par la méthode des éléments finis le maillage doit être compatible avec les discontinuités et utiliser les formules de quadratures de Gauss-Legendre.

- La régularité de la PML influence la vitesse de convergence des résonances. Prendre des PML de classe $\mathcal{C}^2$ dégrade la convergence donc il est préférable de prendre une PML linéaire par morceaux. Mais cela oblige à prendre un maillage qui respecte les discontinuités des fonctions qui définissent la PML. Si c'est trop restrictif au niveau du maillage, on peut prendre une PML de classe $\mathcal{C}^1$.

- La largeur de la couche PML doit être assez grande et il est préférable de mettre l'entrée de la PML le plus proche de la perturbation compacte. Bien entendu, si l'on souhaite calculer aussi le mode résonnant au voisinage de la cavité, il faut un compromis.

- Cela ne sert à rien de tronquer en $R > r_1$, c'est-à-dire après la sortie de la couche PML à coefficients variables. Cela ajoute que des résonances discrètes parasites dans les spectres résonnant discret.

- La valeur de σ_0 doit être assez grande pour que les plus petites résonances en module convergent, mais pas trop pour conserver une vitesse de convergence élevée. Pour une résonance k, une valeur de σ_0 qui devrai fonctionner est

$$\sigma_0 \approx \frac{6\ln(10) - R\,\mathrm{Im}(k)}{R\,\mathrm{Re}(k)}.$$

- La précision du calcul éléments finis des résonances se dégrade quand la partie réelle des résonances est grandes, cela est dû au fait que plus la partie réelle est grande, plus le mode résonnant associé aura des oscillations de petite longueur d'onde.

- Pour trouver les résonances, il faut chercher parmi celles qui satisfont la condition $\mathrm{Im}(k) + \sigma_0\,\mathrm{Re}(k) > 0$. Puis faire deux calculs, l'idéal est de faire varier σ_0. Celles qui restent inchangées correspondent aux résonances alors que celles qui « bougent » correspondent à l'introduction de la PML et à la discrétisation.

Chapitre 3

Famille de problèmes 1D

Sommaire

3.1 Invariance par rotation : réduction 1D 76
3.2 Cadre fonctionnel 77
3.3 Description des problèmes 78
3.3.1 Disque d'indice constant 79
3.3.2 Anneau d'indice constant 85
3.4 Réduction à un domaine borné par l'introduction d'une PML 86
3.5 Approximation par la méthode des éléments finis 88
3.5.1 Disque d'indice constant 88
3.5.2 Anneau d'indice constant 91
3.5.3 Stabilité du spectre par rapport à la discrétisation 94
3.5.4 Disque : comparaison des spectres à indices différents . . 95
3.5.5 Comparaison des résonances à mode de galerie entre le disque et l'anneau 97

Dans ce chapitre, on considère le cas invariant par rotation du problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (1.5) page 5. On étudie sous cette hypothèse les couches parfaitement adaptées (PML) et le comportement numérique des résonances. Supposer que le problème $(\mathcal{P}_p)$ est invariant par rotation permet de réduire, grâce à la décomposition de Fourier, le problème à une famille de problèmes unidimensionnels en la variable radiale indexés par $m \in \mathbb{Z}$. Signalons que le problème purement 1D étudié au chapitre 2 est issu du problème radial correspondant à $m = 0$ où on aurait « gelé » les coefficients au niveau de la sortie de la perturbation compacte. Nous allons voir que les propriétés d'approximation des PML pour ces problèmes 1D en la variable radiale sont bien meilleures que dans le cas du problème purement 1D. En particulier, l'usage des PML génère très peu de valeurs propres parasites.

3.1 Invariance par rotation : réduction 1D

On s'intéresse ici à la réduction radiale du problème $(\mathcal{P}_p)$ quand il est invariant par rotation. On suppose que la cavité $\Omega =]\alpha, \beta[\times\mathbb{S}^1$ est un disque (dans ce cas $0 = \alpha < \beta < +\infty$) ou un anneau (dans ce cas $0 < \alpha < \beta < +\infty$). On note $\Gamma = \partial\Omega$ le bord de la cavité. L'indice optique est supposé ne dépendre que de la variable radiale. Par abus de notation, on conserve la même notation pour l'indice optique, autrement dit, pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $n(\mathbf{x}) = n(r)$ où $r = |\mathbf{x}|$. Les hypothèses sur la fonction n sont les suivantes : $n_{|[\alpha,\beta]} \in \mathcal{C}^\infty([\alpha,\beta])$ et $n_{|[0,+\infty[\setminus[\alpha,\beta]} \equiv 1$. On rappelle le problème $(\mathcal{P}_p)$: trouver les complexes k et les fonctions u non nulles tels que

$$(\mathcal{P}_p)\begin{cases} -\operatorname{div}\left(n^{p-1}\,\nabla u\right) = k^2\, n^{p+1}\, u & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \\ [u]_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ [n^{p-1}\,\partial_\nu u]_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ u(\mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\, \mathsf{H}_m^{(1)}(kr)\, \mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta} & r \geq \beta \text{ et } \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

où $(c_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$. La dernière condition est la condition de rayonnement. On précisera l'espace fonctionnel auquel appartiennent les solutions à la section suivante. L'ensemble des complexes k tels qu'il existe u non nulle telle que (k,u) est une solution de $(\mathcal{P}_p)$ est appelé l'ensemble des résonances du problème $(\mathcal{P}_p)$. Il est noté $\mathrm{Res}(\mathcal{P}_p)$, voir l'annexe B pour la définition précise.

On réduit le problème 2D $(\mathcal{P}_p)$ à une famille de problème 1D en la variable radiale grâce à la transformée de Fourier angulaire. On définit

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) & \to & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto & \left(\widehat{f}_m\right)_{m\in\mathbb{Z}} \end{array} \qquad \text{où} \qquad \widehat{f}_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, \mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

On a $f(\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_m\, \mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}$. L'EDP de $(\mathcal{P}_p)$ en coordonnées polaires s'écrit

$$-\frac{1}{r}\partial_r\left(r\, n^{p-1}\,\partial_r u\right) - \frac{n^{p-1}}{r^2}\,\partial^2_{\theta\theta} u = k^2\, n^{p+1}\, u.$$

En notant $(\widehat{u}_m(r))_{m\in\mathbb{Z}} = \mathcal{F}\left(\theta \mapsto u(r\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta})\right)$, on en déduit que pour tout $r > 0$,

$$-\frac{1}{r}\left(r\, n^{p-1}\,\widehat{u}_m'\right)' + \frac{m^2}{r^2}\, n^{p-1}\,\widehat{u}_m = k^2\, n^{p+1}\,\widehat{u}_m.$$

La condition de saut sur la dérivée normale de u donne la condition suivante sur les coefficients de Fourier : $[n^{p-1}\,\widehat{u}'_m]_{\partial\Omega\setminus\{0\}} = 0$ car $\nu(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))^\intercal$. La condition de saut sur la fonction u donne la condition suivant $[\widehat{u}_m]_{\partial\Omega\setminus\{0\}} = 0$. La condition de rayonnement est déjà écrite sous forme de série de Fourier. Elle implique que $\widehat{u}_m(r)$ est proportionnel à $\mathsf{H}_m^{(1)}(kr)$ pour tout $r > \beta$.

On définit aussi la famille de problèmes $(\mathcal{R}_p(m))$ indicés par $p \in \{\pm 1\}$ et $m \in \mathbb{Z}$: trouver les complexes k et les fonctions w non nulles tels que

$$(\mathcal{R}_p(m)) \begin{cases} -\dfrac{1}{r}\,(r\,n^{p-1}w')' + \dfrac{m^2}{r^2} n^{p-1}\,w = k^2\,n^{p+1}\,w & \forall r \in]0,+\infty[\setminus]\alpha,\beta[\\ [w]_\gamma = 0 & \text{à travers } \gamma \\ [n^{p-1}\,w']_\gamma = 0 & \text{à travers } \gamma \\ w'(0) = 0 & \text{si } m = 0 \\ w(0) = 0 & \text{si } m \neq 0 \\ w(r) \propto \mathsf{H}_m^{(1)}(kr) & \forall r \geq \beta \end{cases}$$

où $\gamma = \{\alpha, \beta\} \setminus \{0\}$ et la notation $\propto$ signifie « égal à une constante multiplicative près ». Pour les conditions aux limites en 0, on pourra consulter [15]. On note $\mathrm{Res}(\mathcal{R}_p(m))$ l'ensemble des résonances k du problème $(\mathcal{R}_p(m))$.

3.2 Cadre fonctionnel

Le cadre fonctionnel pour le problème $(\mathcal{R}_p(m))$ est voisin de celui défini dans la section 2.1 page 22 pour le problème modèle $(\mathcal{T}_p)$ défini en (2.4). On va principalement décrire les différences. Afin d'avoir un cadre fonctionnel général pour les problèmes étudiés par la suite, on introduit les notations suivantes. Soient $\omega \subset \mathbb{R}_+$ une union finie d'intervalles ouverts disjoints et $\mathcal{U}$ un intervalle qui est soit $]0, R[$ avec $0 < R < +\infty$, soit $]0, +\infty[$ tel que $\omega \subset \mathcal{U}$. On note $\gamma = \partial\omega \setminus \{0\}$ le bord de ω. Soient trois fonctions a, b et c à valeurs complexes telles que $a, b, c \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\omega})$. On suppose également a,b et c bornées, $a, b, c \equiv 1$ sur $\mathcal{U} \setminus \overline{\omega}$ et $a^{-1}, b^{-1}, c^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{U})$. Les fonctions a et b sont définies ainsi afin de permettre la prise en compte de discontinuités à travers γ.

Les principales différences entre les problème $(\mathcal{T}_p)$ et $(\mathcal{R}_p(m))$ concernent la définition de l'opérateur et des espaces fonctionnels. Toutes les définitions vont dépendre du paramètre $m \in \mathbb{Z}$, qui vient de la réduction radiale du problème $(\mathcal{P}_p)$ à l'aide des séries de Fourier. On se place dans l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathcal{U}, r\,\mathrm{d}r)$. On considère l'opérateur A_m défini par

$$A_m : u \mapsto -\frac{1}{r}(r\,a\,u')' + \frac{m^2}{r^2}\,c\,u$$

et sa forme sesquilinéaire associée q_m définie par

$$q_m : (u, v) \mapsto \int_{\mathcal{U}} a\,\overline{u'}\,v'\,r\,\mathrm{d}r + m^2 \int_{\mathcal{U}} c\,\overline{u}\,v\,\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

munie du domaine de forme $D(q_m)$ qui est

$$D(q_m) = \begin{cases} \left\{u \in \mathrm{H}^1(\mathcal{U}, r\,\mathrm{d}r) \mid mu \in \mathrm{L}^2\left(\mathcal{U}, \frac{\mathrm{d}r}{r}\right)\right\} & \text{si } \mathcal{U} =]0, +\infty[\\ \left\{u \in \mathrm{H}^1(\mathcal{U}, r\,\mathrm{d}r) \mid mu \in \mathrm{L}^2\left(\mathcal{U}, \frac{\mathrm{d}r}{r}\right),\ u(R) = 0\right\} & \text{si } \mathcal{U} =]0, R[\end{cases}.$$

Si $m = 0$, le domaine de forme devient $\mathrm{H}^1(\mathcal{U}, r\,\mathrm{d}r)$ si $\mathcal{U} =]0, +\infty[$ et $\mathrm{H}^1_{0,R}(\mathcal{U}, r\,\mathrm{d}r)$ si $\mathcal{U} =]0, R[$. Dans ce dernier cas, le domaine de forme correspond à une condition de Neumann homogène en 0 et de Dirichlet homogène en R si $\mathcal{U}$ est borné. Si $m \neq 0$, le domaine de forme impose une condition de Dirichlet homogène en 0 et en R si $\mathcal{U}$ est borné. Le domaine maximal de A_m, noté $D(A_m)$ est $\{u \in D(q_m) \mid A_m u \in \mathrm{L}^2(\mathcal{U}, r\,\mathrm{d}r)\}$.

Il est pratique d'introduire les espaces H^2 par morceaux. On définit

$$\underline{\mathrm{H}}^2(\mathcal{U}, \gamma, r\,\mathrm{d}r) = \mathrm{H}^2(\omega, r\,\mathrm{d}r) \oplus \mathrm{H}^2(\mathcal{U} \setminus \omega, r\,\mathrm{d}r)$$

et la version locale en l'infini quand $\mathcal{U} =]0, +\infty[$

$$\underline{\mathrm{H}}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}, \gamma, r\,\mathrm{d}r) = \left\{ w \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}) \mid \forall \chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}([0, +\infty[),\ \chi w \in \underline{\mathrm{H}}^2(\mathcal{U}, \gamma, r\,\mathrm{d}r) \right\}.$$

Les problèmes que nous allons étudier auront l'une des formes suivantes : trouver $(k, w) \in \mathbb{C} \times \underline{\mathrm{H}}^2(\mathcal{U}, \gamma, r\,\mathrm{d}r)$ tel que

$$(\mathcal{A}) \begin{cases} -\frac{1}{r}(r\,a\,w')' + \frac{m^2}{r^2}\,c\,w = k^2\,b\,w & \text{dans } \mathcal{U} \setminus \Gamma \\ [w]_\gamma = 0 & \text{à travers } \gamma \\ [a\,w']_\gamma = 0 & \text{à travers } \gamma \\ w'(0) = 0 & \text{si } m = 0 \\ w(R) = 0 & \text{si } \mathcal{U} =]0, R[\end{cases} . \tag{3.1}$$

Si $\mathcal{U} =]0, +\infty[$: trouver $(k, w) \in \mathbb{C} \times \underline{\mathrm{H}}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}, \gamma, r\,\mathrm{d}r)$ tel que

$$(\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}) \begin{cases} -\frac{1}{r}(r\,a\,w')' + \frac{m^2}{r^2}\,c\,w = k^2\,b\,w & \text{dans } \mathcal{U} \setminus \Gamma \\ [w]_\gamma = 0 & \text{à travers } \gamma \\ [a\,w']_\gamma = 0 & \text{à travers } \gamma \\ w'(0) = 0 & \text{si } m = 0 \\ w(r) \propto \mathsf{H}^{(1)}_m(kr) & \forall r \geq \sup \omega \end{cases} \tag{3.2}$$

où $\propto$ signifie « égal à une constante multiplicative près ». Le problème $(\mathcal{R}_p(m))$ sera du type $(\mathcal{A}_{\mathrm{loc}})$ et les problèmes $(\mathcal{R}_p^{\mathrm{PML}}(m))$ et $(\mathcal{R}_p^{\mathrm{born}}(m))$ seront du type $(\mathcal{A})$.

3.3 Description des problèmes

Soit une fonction n telle que

$$n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \alpha \\ n_0 & \text{si } \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases},$$

avec $n_0 > 1$. Les deux exemples qui vont nous intéresser sont le cas du micro-disque et le cas du micro-anneau. Pour le micro-disque, on a $\omega =]0, \beta[$ avec $\beta > 0$ et $\gamma = \{\beta\}$. Pour le micro-anneau, on a $\omega =]\alpha, \beta[$ avec $\beta > \alpha > 0$ et $\gamma = \{\alpha, \beta\}$.

Soit $p \in \{\pm 1\}$ et $m \in \mathbb{Z}$ fixés. On s'intéresse au problème de résonances $(\mathcal{R}_p(m))$ suivant : trouver les résonances $k \in \mathbb{C}$ et les fonctions $w \in \underline{\mathrm{H}}^2_{\mathrm{loc}}(]0,+\infty[, \gamma, r\,\mathrm{d}r)$ associées, non nulles, telles que

$$(\mathcal{R}_p(m)) \begin{cases} -\dfrac{1}{r}\left(r\, n^{p-1} w'\right)' + \dfrac{m^2}{r^2} n^{p-1}\, w = k^2\, n^{p+1}\, w & \forall r \in]0,+\infty[\backslash\gamma \\ [w]_\gamma = 0 & \\ [n^{p-1} w']_\gamma = 0 & \\ w'(0) = 0 & \text{si } m = 0 \\ w(r) \propto \mathsf{H}^{(1)}_m(kr) & \forall r \geq \beta \end{cases} \tag{3.3}$$

où la notation $\propto$ signifie « égal à une constant multiplicative près ». On rappelle qu'il n'est nécessaire de mettre une condition limite en 0 que pour $m = 0$ car si $m > 0$ la singularité en $\frac{m^2}{r^2}$ implique une condition de Dirichlet homogène en 0. La dernière condition est une condition d'onde sortante pour $k \in \mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(k) \leq 0\}$. Dans l'espace libre, c'est-à-dire pour $r \geq \beta$, on connaît une base de solutions de l'équation différentielle (3.3) qui est formée des deux fonctions $r \mapsto \mathsf{H}^{(1)}_m(kr)$ et $r \mapsto \mathsf{H}^{(2)}_m(kr)$ où $\mathsf{H}^{(1)}_m$ et $\mathsf{H}^{(2)}_m$ désignent respectivement les fonctions de première et deuxième espèces de Hankel, voir [74, chapitre 10]. La fonction $r \mapsto \mathsf{H}^{(1)}_m(kr)$ correspond à une onde sortante et la fonction $r \mapsto \mathsf{H}^{(2)}_m(kr)$ correspond à une onde entrante dans le sens où si on les multiplie par $\mathsf{e}^{-\mathsf{i}kt}$ et on regarde leur comportement en fonction de t, on voit le comportement sortant ou entrant. Un moyen de voir le comportement sortant ou entrant des fonctions de Hankel est de considérer leur équivalent asymptotique quand $r \to +\infty$. On a

$$\mathsf{H}^{(1)}_m = \mathsf{e}^{\mathsf{i}kr}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\mathsf{e}^{-\frac{\pi}{4}(2m-1)} + \mathcal{O}\left(r^{-\frac{3}{2}}\right)\right),$$

$$\mathsf{H}^{(1)}_m = \mathsf{e}^{-\mathsf{i}kr}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\mathsf{e}^{\frac{\pi}{4}(2m-1)} + \mathcal{O}\left(r^{-\frac{3}{2}}\right)\right).$$

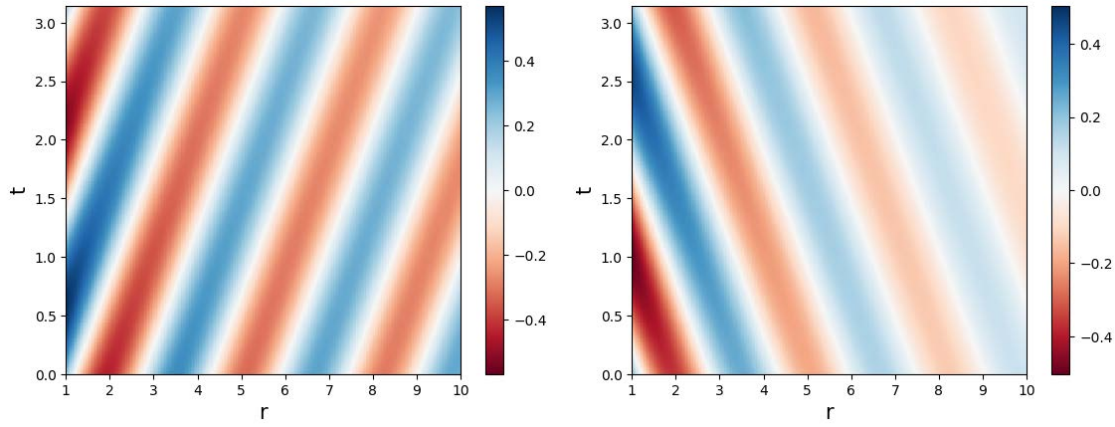
On a vu au chapitre 2 page 21 que la première exponentielle correspond au comportement sortant et la deuxième au comportement entrant. Une illustration numérique des comportements de radiation est donnée à la figure 3.1 où on a représenté $(r,t) \mapsto \mathrm{Re}\left(\mathsf{H}^{(1)}_0(kr)\mathsf{e}^{-\mathsf{i}kt}\right)$ et $(r,t) \mapsto \mathrm{Re}\left(\mathsf{H}^{(2)}_0(kr)\mathsf{e}^{-\mathsf{i}kt}\right)$.

Pour les deux cas considérés (celui d'un disque et celui d'un anneau), le problème $(\mathcal{R}_p(m))$ a la particularité d'avoir des solutions analytiques par morceaux connues : les fonctions de Bessel et de Hankel. Les deux sections suivantes explicitent ces solutions.

3.3.1 Disque d'indice constant

On considère un disque de rayon $\beta > 0$ et d'indice optique $n_0 > 1$ plongé dans le vide, a qui correspond à $\omega =]0,\beta[$ et $\gamma = \{\beta\}$. La fonction n a la forme

$$n(r) = \begin{cases} n_0 & \text{si } r \leq \beta \\ 1 & \text{si } \beta < r \end{cases}.$$



(a) Onde sortante (b) Onde entrante

FIGURE 3.1 – À gauche, représentation d'une onde sortante correspondant à la fonction $(r,t) \mapsto \mathrm{Re}\left(\mathsf{H}_0^{(1)}(kr)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\right)$ pour $k = 2 - \mathrm{i}\,5 \times 10^{-2}$. À droite, représentation d'une onde entrante correspondant à la fonction $(r,t) \mapsto \mathrm{Re}\left(\mathsf{H}_0^{(2)}(kr)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\right)$ pour $k = 2 - \mathrm{i}\,5 \times 10^{-2}$. En abscisse la coordonnée d'espace r, en ordonnée la coordonnée temporelle t.

Le problème $(\mathcal{R}_p(m))$ défini en (3.3) devient : trouver les complexes k et les fonctions $w \in \underline{\mathrm{H}}^2_{\mathrm{loc}}(]0,+\infty[, \gamma, r\,\mathrm{d}r)$ non nulles tel que

$$\begin{cases} r^2w'' + rw' + (k^2n_0^2r^2 - m^2)w = 0 & \forall r \in]0,\beta[\\ r^2w'' + rw' + (k^2r^2 - m^2)w = 0 & \forall r \in]\beta,+\infty[\\ [w]_{\{\beta\}} = 0 & \\ [n^{p-1}\,w']_{\{\beta\}} = 0 & \\ w'(0) = 0 & \text{si } m = 0 \\ w(r) \propto \mathsf{H}_m^{(1)}(kr) & \forall r \geq \beta \end{cases} . \tag{3.4}$$

Les équations différentielles linéaire d'ordre 2 intervenant dans le problème (3.4) sont des équations de Bessel. D'après la section 10.2 de [74], on connaît des bases de solutions de ces équations différentielles. Par exemple une base de l'équation différentielle $r^2w'' + rw' + (z^2r^2 - m^2)w = 0$ est $(r \mapsto \mathsf{J}_m(zr), r \mapsto \mathsf{Y}_m(zr))$ où J_m et Y_m désignent les fonctions de Bessel de première et seconde espèces. Une autre base est $(r \mapsto \mathsf{H}_m^{(1)}(zr), r \mapsto \mathsf{H}_m^{(2)}(zr))$. Sur l'intervalle $]0,\beta[$, en prenant la base formée des fonctions de Bessel la condition limite en 0 implique que la fonction w s'écrit avec J_m seulement. Sur l'intervalle $]\beta,+\infty[$, on prend la base des fonctions de Hankel en raison de la condition de rayonnement. Celle-ci implique que la fonction w s'écrit avec $\mathsf{H}_m^{(1)}$ seulement. Ainsi, les fonctions solutions du problème (3.4) sont de la forme :

$$w(r) = \begin{cases} c_{\mathsf{J}}\,\mathsf{J}_m(n_0k\,r) & \text{si } r \leq \beta \\ c_{\mathsf{H}}\,\mathsf{H}_m^{(1)}(k\,r) & \text{si } r > \beta \end{cases}$$

où $c_{\mathsf{J}}, c_{\mathsf{H}} \in \mathbb{C}$. Pour que (k,w) soit une solution de (3.4), il reste à vérifier les conditions de transmission. La condition $[w]_{\{\beta\}} = 0$ impose $c_{\mathsf{J}}\,\mathsf{J}_m(n_0k\beta) = c_{\mathsf{H}}\,\mathsf{H}_m^{(1)}(k\beta)$.

La condition $[n^{p-1}\, w']_{\{\beta\}} = 0$ impose $c_{\mathsf{J}} n_0^p\, \mathsf{J}'_m(n_0 k\beta) = c_{\mathsf{H}} \mathsf{H}_m^{(1)\prime}(k\beta)$. Il va exister une solution w non nulle si, et seulement si, $(c_{\mathsf{J}}, c_{\mathsf{H}})^{\intercal}$ est dans le noyau de la matrice $M^{\mathcal{D}}_{p;m}(k\beta)$ où

$$M^{\mathcal{D}}_{p;m}(z) = \begin{pmatrix} \mathsf{J}_m(n_0 z) & -\mathsf{H}_m^{(1)}(z) \\ n_0^p\, \mathsf{J}'_m(n_0 z) & -\mathsf{H}_m^{(1)\prime}(z) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que k est une résonance si, et seulement si, $\det(M^{\mathcal{D}}_{p;m}(k\beta)) = 0$. On pose $\mathcal{D}_{p;m}(k\beta) \coloneqq \det(M^{\mathcal{D}}_{p;m}(k\beta))$ où

$$\mathcal{D}_{p;m}(z) = n_0^p\, \mathsf{J}'_m(n_0 z)\, \mathsf{H}_m^{(1)}(z) - \mathsf{J}_m(n_0 z) \mathsf{H}_m^{(1)\prime}(z). \tag{3.5}$$

Pour utiliser des méthodes d'analyse complexe, on a besoin de la dérivée par rapport à z de $z \mapsto \mathcal{D}_{p;m}(z)$ qui est

$$\mathcal{D}'_{p;m}(z) = n_0^{p+1}\, \mathsf{J}''_m(n_0 z)\, \mathsf{H}_m^{(1)}(z) + (n_0^p - n_0)\, \mathsf{J}'_m(n_0 z) \mathsf{H}_m^{(1)\prime}(z) - \mathsf{J}_m(n_0 z) \mathsf{H}_m^{(1)\prime\prime}(z).$$

Lemme 3.1. *Les résonances k du problème (3.4) sont les zéros de la fonction $k \mapsto \mathcal{D}_{p;m}(k\beta)$ définie en (3.5) et le mode résonnant associé est de la forme*

$$w(r) = \begin{cases} \dfrac{\mathsf{J}_m(n_0 k\, r)}{\mathsf{J}_m(n_0 k\beta)} & \text{si } r \leq \beta \\ \dfrac{\mathsf{H}_m^{(1)}(k\, r)}{\mathsf{H}_m^{(1)}(k\beta)} & \text{si } r > \beta \end{cases}.$$

Démonstration. On a vu précédemment que si (k, w) est une solution de (3.4), alors $\mathcal{D}_{p;m}(k\beta) = 0$. On vérifie aisément que w est le mode résonnant associé. □

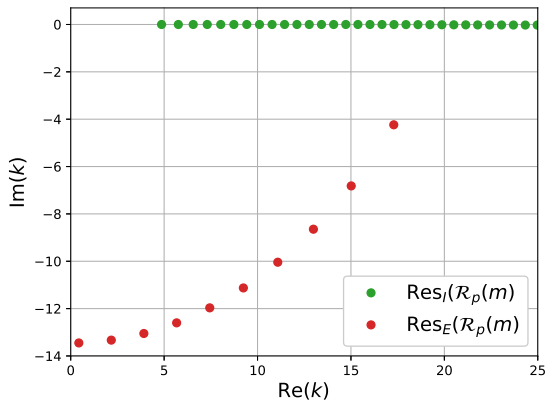
À m fixé, l'équation modale $\mathcal{D}_{p;m}(k\beta) = 0$, où $\mathcal{D}_{p;m}$ est défini en (3.5), a une infinité de solutions représentée par l'ensemble $\mathrm{Res}(\mathcal{R}_p(m))$. On peut partitionner cet ensemble en deux parties, voir [24] :

- une partie infinie composée de résonances dites internes et notée $\mathrm{Res}_I(\mathcal{R}_p(m))$;
- une partie finie composée de résonances dites externes et notée $\mathrm{Res}_E(\mathcal{R}_p(m))$.

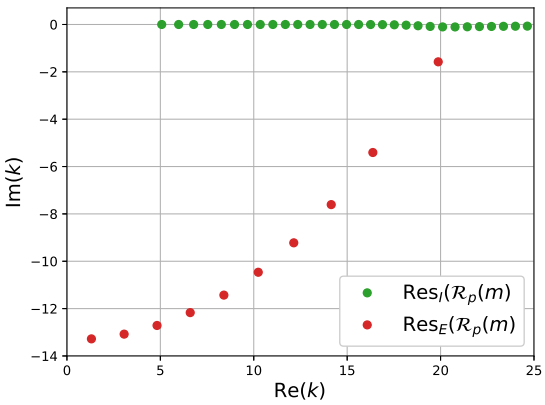
Cette partition est illustrée sur les figures 3.2 où l'on a représenté les zéros de $\mathcal{D}_{p;m}$ dans le plan complexe pour $p \in \{\pm 1\}$, $m = 20$ et $n_0 \in \{1.5, 5\}$. On a l'union disjointe $\mathrm{Res}(\mathcal{R}_p(m)) = \mathrm{Res}_I(\mathcal{R}_p(m)) \sqcup \mathrm{Res}_E(\mathcal{R}_p(m))$. On peut caractériser les résonances internes par un entier j de sorte que $\mathrm{Res}_I(\mathcal{R}_p(m)) = \{k_j(m) \mid j \in \mathbb{N}\}$ et, en observant le mode résonnant associé à $k_j(m)$, en se rend compte que l'entier j correspond au nombre de changements de signe de la partie réelle du mode résonnant associé dans $[0, \beta]$. Les résonances à mode de galerie correspondent aux résonances internes de parties imaginaires très petites. On voit sur la figure 3.2 que cela correspond aux plus petites valeurs de j, typiquement $j = 0, 1, 2, \ldots$.

On peut trouver des équivalents de $k_j(m)$ quand j tend vers $+\infty$. On part de l'équation modale $\mathcal{D}_{p;m}(\beta k_j(m)) = 0$, où $\mathcal{D}_{p;m}$ est défini en (3.5), on remplace par des équivalents des fonctions de Bessel quand l'argument tend vers $+\infty$ à m fixé, 10.17.(i) et (ii) de [74]. On obtient

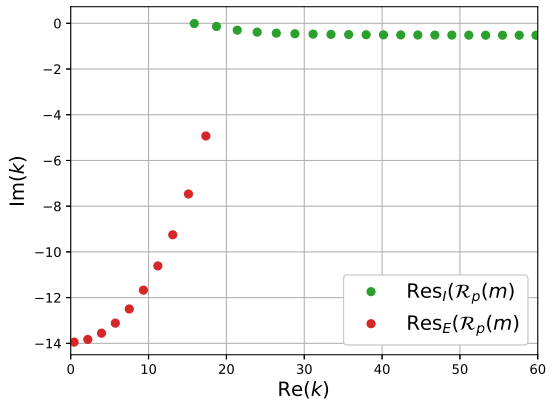
$$\mathsf{i} \cos(\omega) = n_0^p \sin(\omega)$$



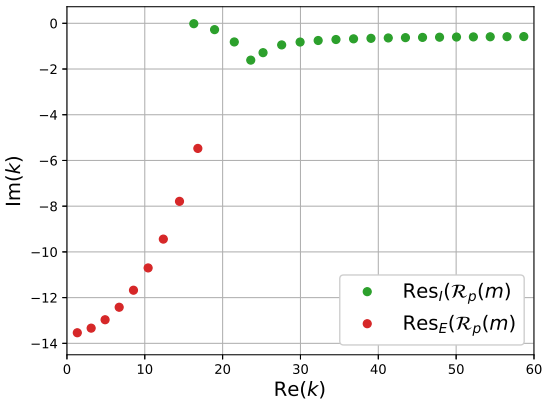
(a) $p = +1$, $n_0 = 5$



(b) $p = -1$, $n_0 = 5$



(c) $p = +1$, $n_0 = 1.5$



(d) $p = -1$, $n_0 = 1.5$

FIGURE 3.2 – Représentation graphique des zéros de la fonction modale $\mathcal{D}_{p;m}$ défini en (3.5) pour $m = 20$. La colonne de gauche représente $p = +1$ et celle de droite représente $p = -1$. La ligne du haut représente $n_0 = 5$ et celle du bas représente $n_0 = 1.5$.

où $\omega = n_0\beta k_j(m) - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$. Si on pose $x = \mathrm{Re}(\omega)$ et $y = \mathrm{Im}(\omega)$, on obtient

$$\begin{cases} [\mathrm{ch}(y) + n_0^p \,\mathrm{sh}(y)]\cos(x) = 0 \\ [\mathrm{sh}(y) + n_0^p \,\mathrm{ch}(y)]\sin(x) = 0 \end{cases}$$

d'où

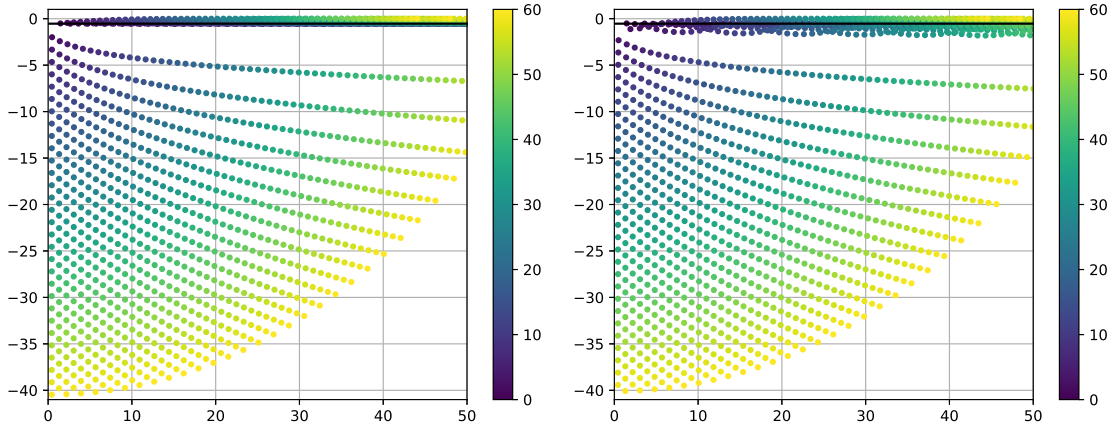
$$\begin{cases} [(1+n_0^p)\mathsf{e}^{y} + (1-n_0^p)\mathsf{e}^{-y}]\cos(x) = 0 \\ [(n_0^p+1)\mathsf{e}^{y} + (n_0^p-1)\mathsf{e}^{-y}]\sin(x) = 0 \end{cases}.$$

Finalement, on a quand $j \to +\infty$

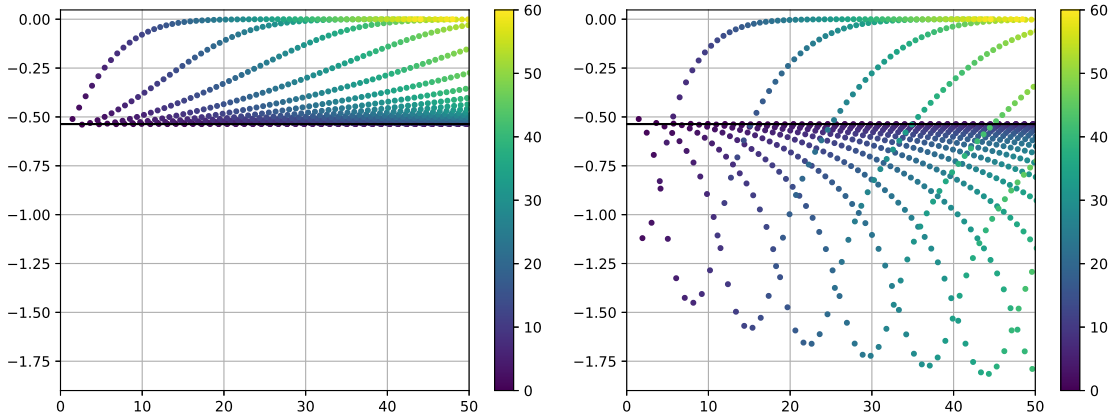
$$k_j(m) \sim \frac{j\pi}{\beta n_0} + \frac{(2m+1)\pi}{4\beta n_0} + \frac{\mathsf{i}}{2n_0}\ln\left(\frac{n_0-1}{n_0+1}\right) \qquad \text{si } p = +1,$$

$$k_j(m) \sim \frac{j\pi}{\beta n_0} + \frac{(2m+3)\pi}{4\beta n_0} + \frac{\mathsf{i}}{2n_0}\ln\left(\frac{n_0-1}{n_0+1}\right) \qquad \text{si } p = -1.$$

Sur la figure 3.3, la ligne du haut représente une vue globale des résonances $\mathrm{Res}(\mathcal{R}_p(m))$ pour $p \in \{\pm 1\}$, pour $n_0 = 1.5$ et $0 \leq m \leq 60$. On reconnaît les résonances externes qui plongent dans le plan complexe et les résonances internes qui restent près de l'axe réel. Sur la ligne du bas, on a fait un zoom sur les résonances internes avec la droite horizontale qui représente la constante $\frac{1}{2n_0}\ln\left(\frac{n_0-1}{n_0+1}\right)$ (la limite de $\mathrm{Im}(k_j(m))$ quand $j \to +\infty$). Les suites de résonances $m \mapsto k_j(m)$ qui se rapprochent de l'axe réel correspondent aux modes de galerie.



(a) $p = +1$ (b) $p = -1$



(c) $p = +1$ (d) $p = -1$

FIGURE 3.3 – Représentation graphique des zéros, dans le plan complexe, de la fonction modale $\mathcal{D}_{p;m}$ définie en (3.5) pour $p \in \{\pm 1\}$, $n_0 = 1.5$ et $0 \leq m \leq 60$. La colonne de gauche représente $p = +1$ et celle de droite représente $p = -1$. La ligne du haut représente une vue globale des résonances. La ligne du bas est un zoom sur les résonances internes et on y observe la droite horizontale correspond à la constante $\frac{1}{2n_0} \ln\left(\frac{n_0-1}{n_0+1}\right)$ (la limite de $\mathrm{Im}(k_j(m))$ quand $j \to +\infty$).

3.3.2 Anneau d'indice constant

On considère un anneau de rayon interne $\alpha > 0$, de rayon externe $\beta > \alpha$ et d'indice optique $n_0 > 1$ plongé dans le vide. Cette situation correspond à $\omega =]\alpha, \beta[$ et $\gamma = \{\alpha, \beta\}$. La fonction n a la forme

$$n(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r < \alpha \\ n_0 & \text{si } \alpha \leq r \leq \beta \\ 1 & \text{si } r > \beta \end{cases} . \tag{3.6}$$

Le problème $(\mathcal{R}_p(m))$ défini en (3.3) devient : trouver les complexes k et les fonctions $w \in \underline{\mathrm{H}}^2_{\mathrm{loc}}(]0, +\infty[, \gamma, r\,\mathrm{d}r)$ non nulles tel que

$$\begin{cases} r^2 w'' + r u' + (k^2 r^2 - m^2) w = 0 & \forall r \in]0, \alpha[\cup]\beta, +\infty[\\ r^2 w'' + r u' + (k^2 n_0^2 r^2 - m^2) w = 0 & \forall r \in]\alpha, \beta[\\ [w]_{\{\alpha,\beta\}} = 0 & \\ [n^{p-1} w']_{\{\alpha,\beta\}} = 0 & \\ w'(0) = 0 & \text{si } m = 0 \\ w(r) \propto \mathsf{H}^{(1)}_m(kr) & \forall r \geq \beta \end{cases} . \tag{3.7}$$

À nouveau, les équations différentielles intervenant dans (3.7) sont des équations de Bessel dont on a précisé des bases dans la section précédente. Avec la condition aux limites en 0 et en $+\infty$, on obtient que les fonctions w solutions du problème (3.7) sont de la forme :

$$w(r) = \begin{cases} c_0\, \mathsf{J}_m(kr) & \text{si } r < \alpha \\ c_{\mathsf{J}}\, \mathsf{J}_m(n_0 kr) + c_{\mathsf{Y}}\, \mathsf{Y}_m(n_0 kr) & \text{si } \alpha \leq r \leq \beta \\ c_{\mathsf{H}}\, \mathsf{H}^{(1)}_m(kr) & \text{si } r > \beta \end{cases}$$

où $c_0, c_{\mathsf{J}}, c_{\mathsf{Y}}, c_{\mathsf{H}} \in \mathbb{C}$. Notons que sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$, le choix de la base (fonctions de Bessel ou de Hankel) n'a pas d'importance. Pour que (k, w) soit une solution de (3.7), il reste à vérifier les conditions de transmissions. De manière similaire au cas du disque étudié dans la section précédente, les conditions de transmission $[w]_{\{\alpha,\beta\}} = 0$ et $[n^{p-1} w']_{\{\alpha,\beta\}} = 0$ donnent quatre équations pour les inconnues $(c_0, c_{\mathsf{J}}, c_{\mathsf{Y}}, c_{\mathsf{H}})$. Il va exister une solution w non nulle si $(c_0, c_{\mathsf{J}}, c_{\mathsf{Y}}, c_{\mathsf{H}})^{\intercal}$ est dans le noyau de la matrice $M^{\mathcal{A}}_{p;m}(k)$ où

$$M^{\mathcal{A}}_{p;m}(k) = \begin{pmatrix} \mathsf{J}_m(k\alpha) & -\mathsf{J}_m(n_0 k\alpha) & -\mathsf{Y}_m(n_0 k\alpha) & 0 \\ \mathsf{J}'_m(k\alpha) & -n_0^p\, \mathsf{J}'_m(n_0 k\alpha) & -n_0^p\, \mathsf{Y}'_m(n_0 k\alpha) & 0 \\ 0 & \mathsf{J}_m(n_0 k\beta) & \mathsf{Y}_m(n_0 k\beta) & -\mathsf{H}^{(1)}_m(k\beta) \\ 0 & n_0^p\, \mathsf{J}'_m(k n_0 \beta) & n_0^p\, \mathsf{Y}'_m(k n_0 \beta) & -\mathsf{H}^{(1)\prime}_m(k\beta) \end{pmatrix} .$$

On en déduit que k est une résonance si, et seulement si, $\mathcal{A}_{p;m}(k) = 0$ où

$$\mathcal{A}_{p;m}(k) \coloneqq \det(M^{\mathcal{A}}_{p,m}(k)). \tag{3.8}$$

Pour utiliser des méthodes d'analyse complexe, on a besoin de la dérivée par rapport à k de la fonction $k \mapsto \mathcal{A}_{p;m}(k)$ qui est

$$\mathcal{A}'_{p;m}(k) = \operatorname{tr}\left(\operatorname{com}\left(M^{\mathcal{A}}_{p,m}(k)\right)^{\intercal} {M^{\mathcal{A}}_{p,m}}'(k)\right)$$

où tr est la trace matricielle, com est la comatrice et

$${M^{\mathcal{A}}_{p;m}}'(k) = \begin{pmatrix} \alpha\,\mathsf{J}'_m(k\alpha) & -\alpha n_0\,\mathsf{J}'_m(n_0k\alpha) & -\alpha n_0\,\mathsf{Y}'_m(n_0k\alpha) & 0 \\ \alpha\,\mathsf{J}''_m(k\alpha) & -\alpha n_0^{p+1}\,\mathsf{J}''_m(n_0k\alpha) & -\alpha n_0^{p+1}\,\mathsf{Y}''_m(n_0k\alpha) & 0 \\ 0 & \beta n_0\,\mathsf{J}'_m(n_0k\beta) & \beta n_0\,\mathsf{Y}'_m(n_0k\beta) & -\beta\mathsf{H}^{(1)\prime}_m(k\beta) \\ 0 & \beta n_0^{p+1}\,\mathsf{J}''_m(kn_0\beta) & \beta n_0^{p+1}\,\mathsf{Y}''_m(kn_0\beta) & -\beta\mathsf{H}^{(1)\prime\prime}_m(k\beta) \end{pmatrix}.$$

Lemme 3.2. *Les résonances k du problème (3.7) sont les zéros de la fonction $\mathcal{A}_{p;m}$ définie en (3.8) et le mode résonnant associé est de la forme*

$$w(r) = \begin{cases} c_0\,\mathsf{J}_m(kr) & si\ r < \alpha \\ c_{\mathsf{J}}\,\mathsf{J}_m(n_0kr) + c_{\mathsf{Y}}\,\mathsf{Y}_m(n_0kr) & si\ \alpha \le r \le \beta \\ c_{\mathsf{H}}\,\mathsf{H}^{(1)}_m(kr) & si\ r > \beta \end{cases}$$

où $(c_0, c_{\mathsf{J}}, c_{\mathsf{Y}}, c_{\mathsf{H}})^{\intercal} \in \operatorname{Ker}\left(M^{\mathcal{A}}_{p,m}(k)\right)$.

Démonstration. On a vu précédemment que si (k, w) est une solution de (3.7) alors $\mathcal{A}_{p;m}(k) = 0$. On vérifie aisément que w est le mode résonnant associé. □

Remarque 3.3. Comme pour le disque, à m fixé, l'équation modale $\mathcal{A}_{p;m}(k\beta) = 0$, où $\mathcal{A}_{p;m}$ est défini en (3.8), a une infinité de solutions. On a la même description qualitative des résonances à mode de galerie.

3.4 Réduction à un domaine borné par l'introduction d'une PML

Comme dans la partie 2.3.1, on définit $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{d}$, $\widetilde{r}$, σ et d avec le même ensemble de paramètres r_0, r_1 et σ_0 tels que $\beta \le r_0 < r_1$ et $\sigma_0 > 0$. On rappelle que $\widetilde{d} = 1 + \mathrm{i}\widetilde{\sigma}$, $d = (r\widetilde{d})' = \widetilde{d} + r\widetilde{d}'$, $\widetilde{r}(r) = r\,\widetilde{d}(r)$ et $d_0 = 1 + \mathrm{i}\sigma_0$. Soit (k, w) une solution du problème $(\mathcal{R}_p(m))$ défini en (3.3), d'après la condition de rayonnement, il existe $c_{\mathsf{H}} \in \mathbb{C}$ tel que $w(r) = c_{\mathsf{H}}\,\mathsf{H}^{(1)}_m(kr)$. On définit

$$\widetilde{w}(r) = \begin{cases} w(r) & 0 \le r \le r_0 \\ c_{\mathsf{H}}\,\mathsf{H}^{(1)}_m(k\widetilde{r}(r)) & r > r_0 \end{cases}.$$

On a $\widetilde{w}(r) = w(\widetilde{r})$ pour tout $r \in \mathbb{R}_+$. Comme (k, w) est une solution du problème $(\mathcal{R}_p(m))$, le couple $(k, \widetilde{w})$ est une solution de

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\widetilde{r}}\partial_{\widetilde{r}}(\widetilde{r}\,n^{p-1}\,\partial_{\widetilde{r}}\widetilde{w}) + \dfrac{m^2}{\widetilde{r}^2}n^{p-1}\,\widetilde{w} = k^2\,n^{p+1}\,\widetilde{w} & \text{dans }]0, +\infty[\backslash\widetilde{\gamma} \\ [\widetilde{w}]_{\widetilde{\gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\gamma} \\ [n^{p-1}\,\partial_{\widetilde{r}}\widetilde{w}]_{\widetilde{\gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\gamma} \\ \partial_{\widetilde{r}}\widetilde{w}(0) = 0 & \text{si } m = 0 \\ \lim\limits_{r\to+\infty}\widetilde{w}(r) = 0 & \end{cases}$$

où $\widetilde{\gamma} = \gamma \cup \{r_0, r_1\}$ est l'union des discontinuités de n et de d. On réécrit ce problème en fonction de r à l'aide des relations $\widetilde{r}(r) = r\widetilde{d}(r)$ et $\partial_{\widetilde{r}} = d^{-1}\partial_r$. La notation $'$ désignera toujours dans ce qui suit la dérivée en fonction de r. On considère le problème suivant : trouver $k \in \mathbb{C}$ et $\widetilde{w} \in \underline{\mathrm{H}}^2(]0, +\infty[, \widetilde{\gamma}, r\,\mathrm{d}r)$ non nulle tel que

$$(\mathcal{R}_p^{\mathrm{PML}}(m)) \begin{cases} -\dfrac{1}{r\,\widetilde{d}\,d}\left(r\,\dfrac{\widetilde{d}}{d}\,n^{p-1}\,\widetilde{w}'\right)' + \dfrac{m^2\,n^{p-1}}{r^2\,\widetilde{d}^2}\widetilde{w} = k^2\,n^{p+1}\,\widetilde{w} & \text{dans }]0,+\infty[\backslash\widetilde{\gamma} \\ [\widetilde{w}]_{\widetilde{\Gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\gamma} \\ [d^{-1}\,n^{p-1}\,\widetilde{w}']_{\widetilde{\Gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\gamma} \\ \widetilde{w}'(0) = 0 & \text{si } m = 0 \end{cases} . \tag{3.9}$$

L'écriture variationnelle du problème $(\mathcal{R}_p^{\mathrm{PML}}(m))$ défini en (3.9) est : trouver $(k, \widetilde{w}) \in \mathbb{C} \times D(q_m)$ tel que, pour tout $v \in D(q_m)$, on ait

$$\int_0^{+\infty} n^{p-1}\,\frac{r\widetilde{d}}{d}\,\widetilde{w}'v'\,\mathrm{d}r + m^2\int_0^{+\infty} n^{p-1}\,\frac{d}{r\widetilde{d}}\,\widetilde{w}v\,\mathrm{d}r = k^2\int_0^{+\infty} n^{p+1}\,r\widetilde{d}d\,\widetilde{w}v\,\mathrm{d}r$$

où l'ensemble $D(q_m) = \left\{u \in \mathrm{H}^1(]0,+\infty[, r\,\mathrm{d}r) \mid mu \in \mathrm{L}^2\left(]0,+\infty[, \frac{\mathrm{d}r}{r}\right)\right\}$ est le domaine de forme de la forme sesquilinéaire q_m définie par

$$q_m(u,v) = \int_0^{+\infty} n^{p-1}\,\frac{r\widetilde{d}}{d}\,\overline{u}'v'\,\mathrm{d}r + m^2\int_0^{+\infty} n^{p-1}\,\frac{d}{r\widetilde{d}}\,\overline{u}v\,\mathrm{d}r. \tag{3.10}$$

La solution du problème $(\mathcal{R}_p(m))$ vérifie $w(r) \propto \mathsf{H}_m^{(1)}(k\,r)$ pour $r \geq \beta$ et $\mathrm{Im}(k) < 0$. Ceci implique une croissance exponentielle de w quand r tend vers $+\infty$. Cela implique aussi que $\widetilde{w}(r) \propto \mathsf{H}_m^{(1)}(d_0k\,r)$ pour $r \geq r_1$ et avec les asymptotiques 10.17(i) de [74], on a

$$\left|\mathsf{H}_m^{(1)}(d_0k\,r)\right| \underset{r\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{\pi|d_0k|r}}\mathsf{e}^{-\mathrm{Im}(d_0k)r}.$$

Par conséquent pour $\mathrm{Im}(kd_0) > 0$, on a $r \mapsto \widetilde{w}(r)$ qui décroît exponentiellement vers 0 quand $r \to +\infty$.

Comme dans le chapitre précédent, pour se ramener à un domaine borné, on prend $R \geq r_1$ et on tronque le domaine à $]0, R[$. On définit le problème $(\mathcal{R}_p^{\mathrm{born}}(m))$: trouver $k \in \mathbb{C}$ et $\breve{w} \in \underline{\mathrm{H}}^2(]0, R[, \widetilde{\gamma}, r\,\mathrm{d}r)$ non nulle tel que

$$(\mathcal{R}_p^{\mathrm{born}}(m)) \begin{cases} -\dfrac{1}{r\,\widetilde{d}\,d}\left(r\,\dfrac{\widetilde{d}}{d}\,n^{p-1}\,\breve{w}'\right)' + \dfrac{m^2\,n^{p-1}}{r^2\,\widetilde{d}^2}\breve{w} = k^2\,n^{p+1}\,\breve{w} & \text{dans }]0,R[\backslash\widetilde{\gamma} \\ [\breve{w}]_{\widetilde{\gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\gamma} \\ [d^{-1}\,n^{p-1}\,\breve{w}']_{\widetilde{\gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\gamma} \\ \breve{w}'(0) = 0 & \text{si } m = 0 \\ \breve{w}(R) = 0 & \end{cases} . \tag{3.11}$$

L'écriture variationnelle du problème $(\mathcal{R}_p^{\mathrm{born}}(m))$ défini en (3.11) est : trouver $k \in \mathbb{C}$ et $\breve{w} \in D(q_m)$ non nulle tel que, pour tout $v \in D(q_m)$, on ait

$$\int_0^{R} n^{p-1}\,\frac{r\widetilde{d}}{d}\,\breve{w}'v'\,\mathrm{d}r + m^2\int_0^{R} n^{p-1}\,\frac{d}{r\widetilde{d}}\,\breve{w}v\,\mathrm{d}r = k^2\int_0^{R} n^{p+1}\,r\widetilde{d}d\,\breve{w}v\,\mathrm{d}r$$

où $D(q_m) = \left\{u \in \mathrm{H}^1(]0,R[, r\,\mathrm{d}r) \mid mu \in \mathrm{L}^2\left(]0,R[, \frac{\mathrm{d}r}{r}\right),\ u(R)=0\right\}$ est le domaine de forme de la version bornée à $[0,R]$ de la forme sesquilinéaire q_m définie en (3.10).

3.5 Approximation par la méthode des éléments finis

On va tirer profit des conclusions de la section 2.5 page 46 du chapitre 2 pour la mise en œuvre de la méthode des éléments finis pour le problème (3.9).

3.5.1 Disque d'indice constant

On considère un disque de rayon $\beta = 1$ et d'indice constant $n_0 = 5$. On rappelle que l'on note $\{k_j(m) \mid j \in \mathbb{N}\} = \mathrm{Res}_I(\mathcal{R}_p(m))$ l'ensemble des résonances internes et l'entier j correspond au nombre de changements de signe de la partie réelle du mode résonnant dans $[0,\beta]$. Les modes de galerie correspondent aux résonances internes de plus petites parties réelles. Pour les tests numériques, on considère les trois valeurs de m suivantes : 20, 30 et 40 et les trois premières résonances pour chaque m ce qui correspond à $j \in \{0,1,2\}$. Les tableaux 3.1 et 3.2 donnent les approximations des résonances obtenues par la méthode détaillée à la section 2.2.2 page 26 du chapitre 2. On considère ces solutions comme étant les solutions de référence car cette méthode de calcul est très précise. On n'affiche pas les parties imaginaires car pour les valeurs des paramètres β et n_0 choisies, elles sont plus petites que 10^{-16} et donc mal calculées en raison de la saturation de l'arithmétique double précision.

	$j=0$	$j=1$	$j=2$
$m=20$	4.8623291289727	5.7599952512048	6.5570730617287
$m=30$	7.0024521184934	7.9924167234277	8.8576098346020
$m=40$	9.1146839179852	10.180693017554	11.103319040246

Tableau 3.1 – La partie réelle des résonances pour $p=+1$, $m \in \{20,30,40\}$ et $j \in \{0,1,2\}$.

	$j=0$	$j=1$	$j=2$
$m=20$	5.0729123103280	5.9797495545862	6.7832669444542
$m=30$	7.2097490017574	8.2071600701773	9.0778115781113
$m=40$	9.3200877526253	10.392455602976	11.319847289065

Tableau 3.2 – La partie réelle des résonances pour $p=-1$, $m \in \{20,30,40\}$ et $j \in \{0,1,2\}$.

On met en place la méthode des éléments finis dans le cas de cet exemple pour calculer les résonances à modes de galerie. On sait que les modes de galerie sont localisés au bord de la cavité et que cette localisation dépend de m. On fait donc un

maillage avec un raffinement géométrique[1] autour de β. Pour notre exemple, nous avons pris un maillage à 11 éléments.

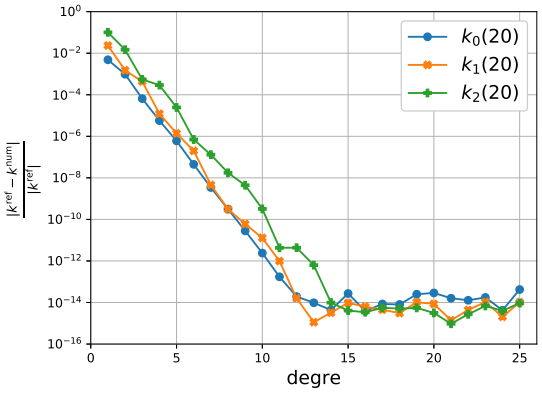
Pour la PML, on utilise la PML0 continue par morceaux avec $r_0 = \beta = 1$ et $r_1 = 1.5$. La valeur de σ_0 doit être adaptée à la résonance que l'on veut calculer. Une manière de s'en convaincre est de considérer l'équivalent de la fonction $\mathsf{H}_m^{(1)}$ quand l'argument tend vers $+\infty$. De la formule (10.17.5) de [74], on déduit que, quand $r \to +\infty$

$$\mathsf{H}_m^{(1)}(d_0 kr) \sim \left(\frac{2}{\pi d_0 kr}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\mathsf{i} d_0 kr - \frac{\mathsf{i}\pi}{4}(2m+1)\right).$$

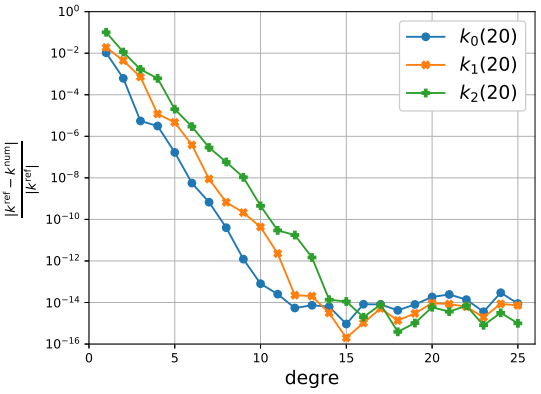
Le facteur important dans cette expression est l'exponentielle. C'est en effet elle qui décroît assez vite pour que la condition aux limites de Dirichlet homogène soit une bonne approximation du comportement de la solution exacte. La quantité qui pilote la décroissance est $\mathsf{e}^{-\operatorname{Im}(d_0 k)r}$ où $\operatorname{Im}(d_0 k) = \operatorname{Im}(k) + \sigma_0 \operatorname{Re}(k)$. On veut que cette quantité au niveau de la troncature située en R soit petite mais pas trop petite toutefois car sinon la fonction $r \mapsto \mathsf{H}_m^{(1)}(k\widetilde{d}(r)r)$ aurait de fortes variations, ce qui imposerait la nécessité d'une discrétisation fine. On aimerait que $\operatorname{Im}(d_0 k) = C$ où $C > 0$ est une constante. En négligeant les parties imaginaires $\operatorname{Im}(k)$ car elles sont petites pour les résonances auxquelles on s'intéresse, on obtient $\sigma_0 = \frac{C}{\operatorname{Re}(k)}$. Nous avons choisi $\sigma_0 = \frac{10}{\operatorname{Re}(k_0(m))}$ pour calculer les premières résonances de $(\mathcal{R}_p(m))$. Avec ce choix de σ_0, qui dépend de m, on est obligé de calculer les matrices éléments finis pour chaque m. On pourrait également adapter la PML pour chaque résonance $k_j(m)$ pour $j \in \{0,1,2\}$, mais cela demanderait de faire trois calculs éléments finis. Cependant, comme $k_j(m)$ pour $j = 1, 2$ est assez proche de $k_0(m)$ pour les exemples choisis, on se contente de faire un seul calcul en adaptant la PML à $k_0(m)$.

Sur la figure 3.4 est représenté l'erreur relative entre les résonances calculées à partir de l'équation modale et celles calculées par la méthode des éléments finis en fonction du degré de l'approximation éléments finis. On remarque que dans tous les cas, les trois premières résonances sont obtenues à précision machine pour le degré 15.

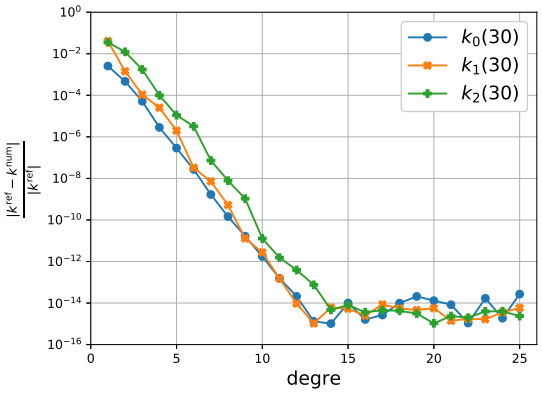
1. Comme on le verra au chapitre 6 page 125, ces échelles sont $m^{\frac{2}{3}}(r-\beta)$ si $r < \beta$ et $m(r-\beta)$ si $r > \beta$. Ainsi, le maillage est constitué des points β, $\beta - 2^{-i}\beta$ pour $i \in \mathbb{N}$ tels que $2^i \leq M^{\frac{2}{3}}$ et $\beta + 2^{-\ell}(R-\beta)$ pour $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $2^\ell \leq M$ avec $M = 64$.



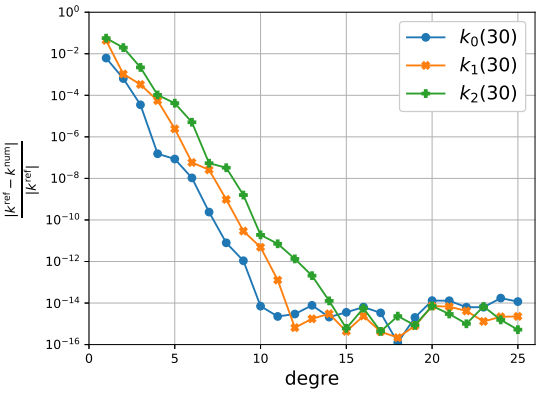
(a) $p = +1$, $m = 20$



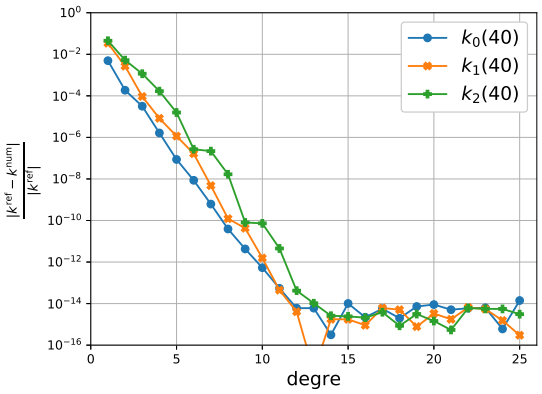
(b) $p = -1$, $m = 20$



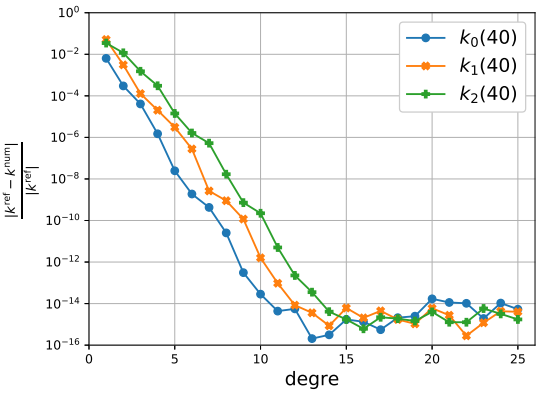
(c) $p = +1$, $m = 30$



(d) $p = -1$, $m = 30$



(e) $p = +1$, $m = 40$



(f) $p = -1$, $m = 40$

FIGURE 3.4 – Logarithme décimal de l'erreur relative sur les trois premières résonances en fonction du degré de l'approximation éléments finis pour un disque d'indice optique constant. En ligne de haut en bas, on a $m = 20$, 30 et 40 et en colonne de gauche à droite, on a $p = +1$ et -1.

3.5.2 Anneau d'indice constant

On considère un anneau de rayon interne $\alpha = 0.9$, de rayon externe $\beta = 1$ et d'indice constant $n_0 = 5$. Comme dans le cas du disque, on peut indexer les résonances de $(\mathcal{R}_p(m))$ par un entier j qui correspond au nombre de changement de signe du mode résonnant dans $[0, \beta]$. Les tests de convergence sont fait sur les mêmes jeux d'indices $m \in \{20, 30, 40\}$ et $j \in \{0, 1, 2\}$. Les tableaux 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6 contiennent les approximations des parties réelles et imaginaires des résonances obtenues à l'aide de l'équation modale (3.8) en utilisant la méthode décrit à la section 2.2.2 page 26. On a ajouté les parties imaginaires car, comme on peut le constater, elles sont beaucoup plus grandes que celles du disque pour $m = 20$. Les parties imaginaires avec $*$ sont celles pour lesquelles la partie imaginaire est saturée par la précision machine.

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$
$m = 20$	5.4483253180522	9.0887182964589	14.117728715856
$m = 30$	7.4600698819494	10.747700970068	15.421601582541
$m = 40$	9.4619475548345	12.461135064347	16.798006123266

Tableau 3.3 – Parties réelles des résonances pour $p = +1$, $m \in \{20, 30, 40\}$ et $j \in \{0, 1, 2\}$.

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$
$m = 20$	$*$	-2.69×10^{-10}	-2.93×10^{-4}
$m = 30$	$*$	$*$	-3.84×10^{-12}
$m = 40$	$*$	$*$	$*$

Tableau 3.4 – Parties imaginaires des résonances pour $p = +1$, $m \in \{20, 30, 40\}$ et $j \in \{0, 1, 2\}$.

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$
$m = 20$	7.3612807316651	12.710763477076	17.922247997095
$m = 30$	8.7960638418706	13.760899303967	19.327092335775
$m = 40$	10.434687447840	14.925634486690	20.285162863226

Tableau 3.5 – Parties réelles pour $p = -1$, $m \in \{20, 30, 40\}$ et $j \in \{0, 1, 2\}$.

La mise œuvre numérique de la méthode éléments finis pour cet exemple est essentiellement identique à ce qui a été présenté pour le disque. On fait un raffinement géométrique autour de β mais on s'arrange pour que l'un des nœuds géométrique soit α. Cela donne un maillage à 13 éléments.

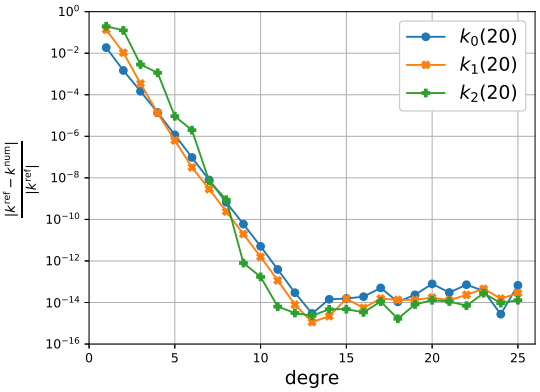
On utilise la PML0 avec les mêmes paramètres que pour le disque : $r_0 = \beta = 1$ et $r_1 = 1.5$. La quantité σ_0 est également choisie telle que $\sigma_0 = \frac{10}{\mathrm{Re}(k_0(m))}$.

Sur la figure 3.5 est représenté l'erreur relative entre les résonances calculées à partir de l'équation modale et celles calculées par la méthode des éléments finis en

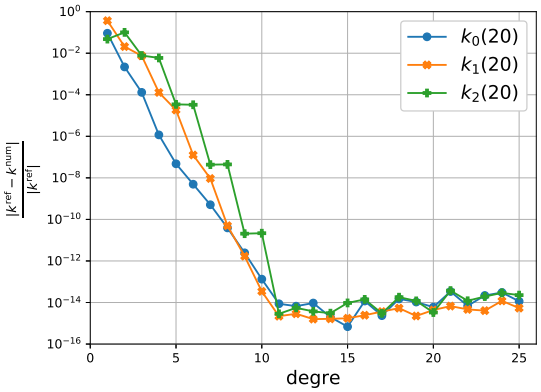
	$j=0$	$j=1$	$j=2$
$m=20$	-2.23×10^{-14}	-1.08×10^{-5}	-1.69×10^{-1}
$m=30$	$*$	$*$	-1.33×10^{-7}
$m=40$	$*$	$*$	-1.73×10^{-14}

Tableau 3.6 – Parties imaginaires des résonances pour $p=+1$, $m\in\{20,30,40\}$ et $j\in\{0,1,2\}$.

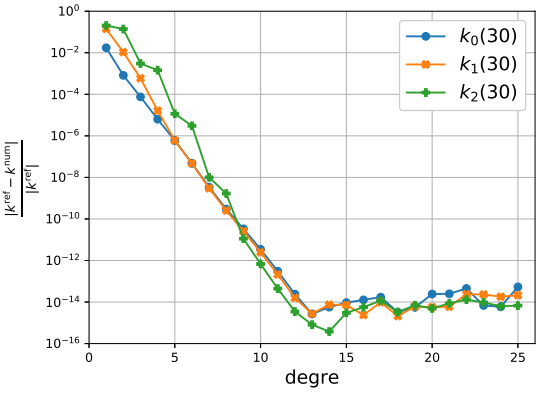
fonction du degré de l'approximation éléments finis. On remarque que pour tous les cas, les trois premières résonances sont obtenues à précision machine pour le degré 15.



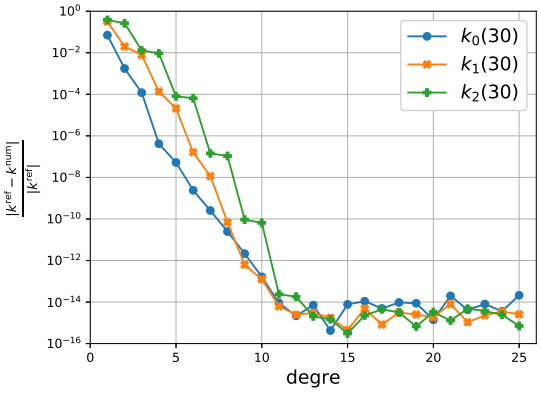
(a) $p = +1$, $m = 20$



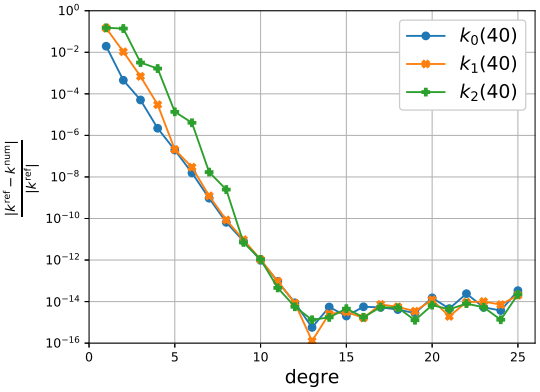
(b) $p = -1$, $m = 20$



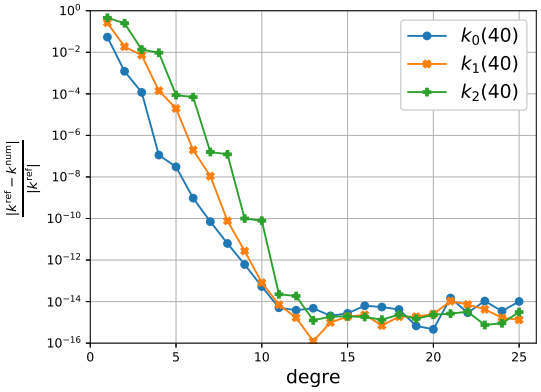
(c) $p = +1$, $m = 30$



(d) $p = -1$, $m = 30$



(e) $p = +1$, $m = 40$

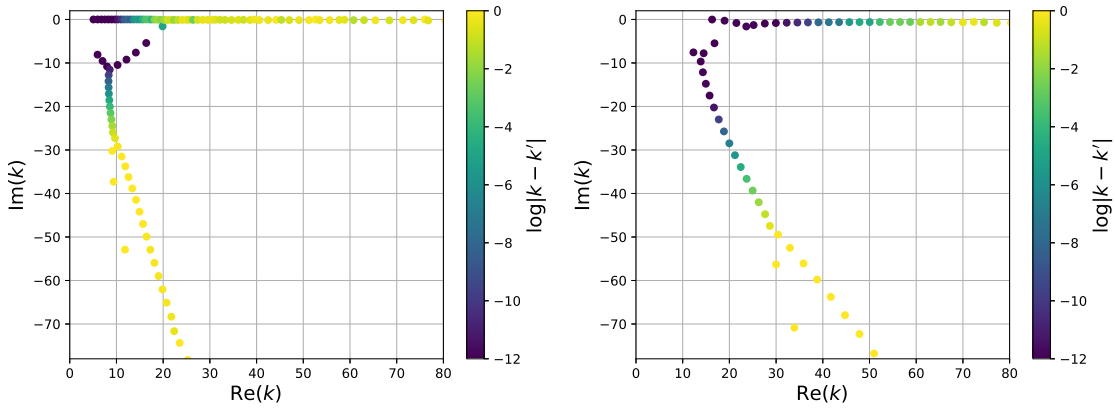


(f) $p = -1$, $m = 40$

FIGURE 3.5 – Logarithme décimal de l'erreur relative sur les trois premières résonances en fonction du degré de l'approximation éléments finis pour un anneau d'indice constant. En ligne, de haut en bas, on a $m = 20$, 30 et 40 et en colonne, de gauche à droite, on a $p = +1$ et -1.

3.5.3 Stabilité du spectre par rapport à la discrétisation

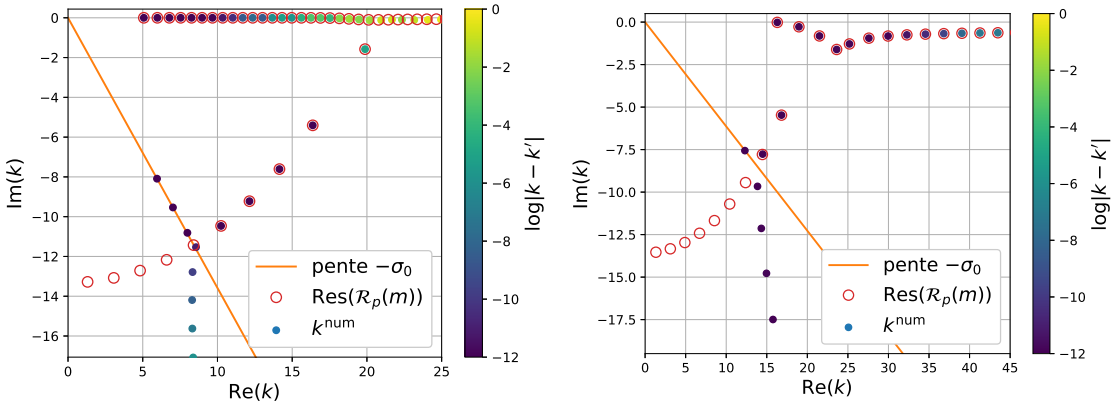
Sur la figure 3.6, on a représenté le bas du spectre résonnant discret (considéré pour le module) pour le disque de rayon 1, pour $p = -1$ et $m = 20$. On a représenté environ 45% du spectre pour $n_0 = 5$ et 22% du spectre pour $n_0 = 1.5$. La couleur représente le logarithme du module de la différence entre les résonances discrètes issues de deux calculs, l'un effectué avec des éléments finis de degré 20 et l'autre avec des éléments finis de degré 21. On remarque que les résonances discrètes de plus petit module sont stables par changement de discrétisation.



(a) $n_0 = 5$ (b) $n_0 = 1.5$

FIGURE 3.6 – Spectre résonnant discret dans le plan complexe pour $p = -1$, pour $m = 20$ et pour le disque. La couleur des points correspond au logarithme de la distance entre deux calculs effectués avec des degré éléments finis respectifs égaux à 20 et 21. La figure de gauche correspond à $n_0 = 5$ et celle de droite correspond à $n_0 = 1.5$.

Les figures 3.7 sont des agrandissements des deux représentations graphiques de la figure 3.6 sur lesquels on a ajouté la demi-droite de pente $-\sigma_0$ qui représente le spectre essentiel du problème $(\mathcal{R}_p^{\mathrm{PML}}(m))$ et des cercles rouges pour représenter les solutions de l'équation modale $\mathcal{D}_{p;m}(k\beta) = 0$ défini en (3.5). Les résonances proches de l'axe réel correspondent aux résonances intérieures $\mathrm{Res}_I(\mathcal{R}_p(m))$. Celles qui sont alignées selon un segment correspondent à des « approximations » du spectre essentiel du problème $(\mathcal{R}_p^{\mathrm{PML}}(m))$ qui viennent de la troncature. La branche qui semble relier ces deux parties du spectre discret sont des résonances extérieures $\mathrm{Res}_E(\mathcal{R}_p(m))$. La branche qui part dans le plan complexe en dessous de la demie-droite de pente $-\sigma_0$, est stable vis-à-vis de la discrétisation. Elle correspond à des valeurs propres du problème $(\mathcal{R}_p^{\mathrm{born}}(m))$.



(a) $n_0 = 5$ (b) $n_0 = 1.5$

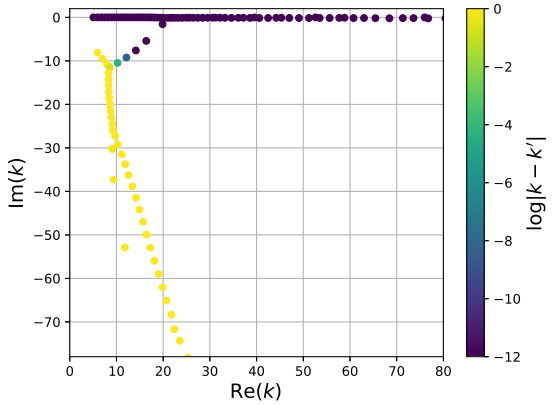
FIGURE 3.7 – Spectre résonnant discret dans le plan complexe pour le disque avec $p = -1$ et $m = 20$. La couleur des points correspond au logarithme de la distance entre deux calculs effectués avec des degrés éléments finis ègaux respectivement à 20 et à 21. La figure de gauche correspond à $n_0 = 5$ et celle de droite correspond à $n_0 = 1.5$. Le segment orange de pente $-\sigma_0$ correspond au spectre essentiel du problème $(\mathcal{R}_p^{\text{PML}}(m))$. Les cercles rouges représentent les zéros de l'équation modale $\mathcal{D}_{p;m}(k\beta) = 0$ définie en (3.5).

3.5.4 Disque : comparaison des spectres à indices différents

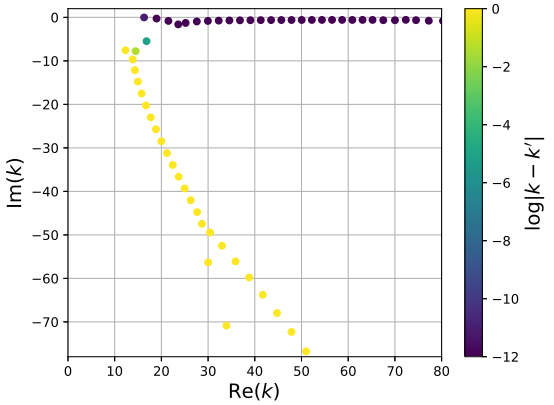
À la figure 3.8 est représenté le spectre résonnant discret pour le disque de rayon 1, pour $m \in \{20, 30, 40\}$ et $p = -1$ dans les deux cas $n_0 = 5$ et $n_0 = 1.5$. La couleur des points correspond au logarithme de la distance entre deux calculs, l'un effectué avec $\sigma_0 = \frac{10}{k_0(m)}$ et l'autre avec $\sigma_0 = \frac{15}{k_0(m)}$. Sur les graphes sont représentés environ 45% des résonances discrètes de plus petit module pour l'indice $n_0 = 5$ et environ 22% pour l'indice $n_0 = 1.5$. Nous allons faire des parallèles avec les sections 2.5.4 page 53 et 2.5.5 page 56.

- On voit que les résonances discrètes qui dépendent fortement de la valeur choisie pour σ_0 dépendent également de l'indice n_0.
- L'écart $|k_{j+1}(m) - k_j(m)|$ entre les résonances est beaucoup plus faible pour le disque d'indice $n_0 = 5$ que pour le disque d'indice $n_0 = 1.5$. Ceci est également mis en évidence sur les développements asymptotiques obtenus au chapitre 6.
- Les résonances discrètes associées à la troncature en R s'éloignent de zéro quand m augmente.
- Les résonances discrètes qui dépendent fortement de la valeur de σ_0 sont appelées « résonances discrètes parasites ». Elles viennent de la troncature et de la discrétisation.

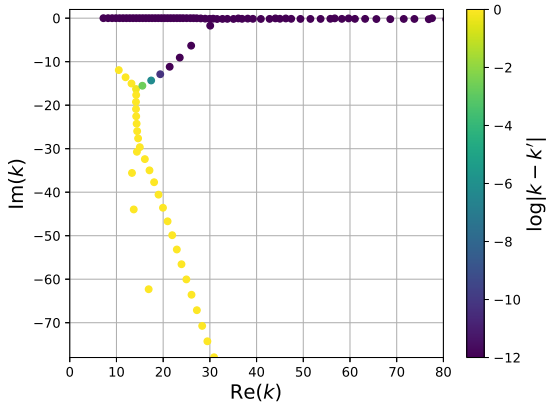
  La branche stable qui relie les résonances discrètes proches de l'axe réel et les résonances discrètes parasites est composée d'approximation des résonances extérieures $\text{Res}_E(\mathcal{R}_p(m))$.



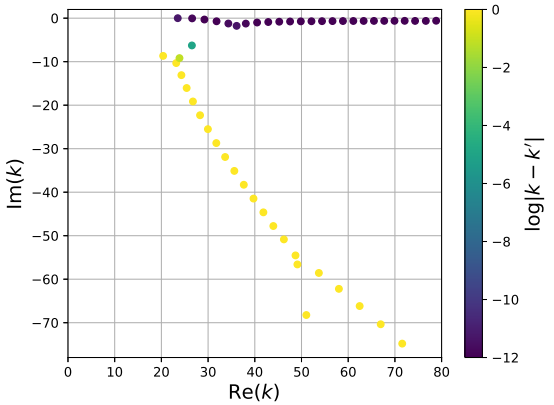
(a) $n_0 = 5$, $m = 20$



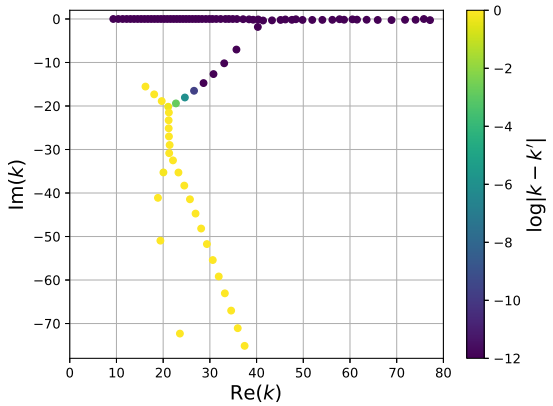
(b) $n_0 = 1.5$, $m = 20$



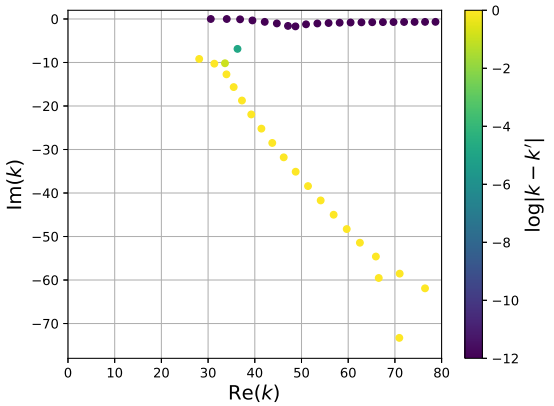
(c) $n_0 = 5$, $m = 30$



(d) $n_0 = 1.5$, $m = 30$



(e) $n_0 = 5$, $m = 40$

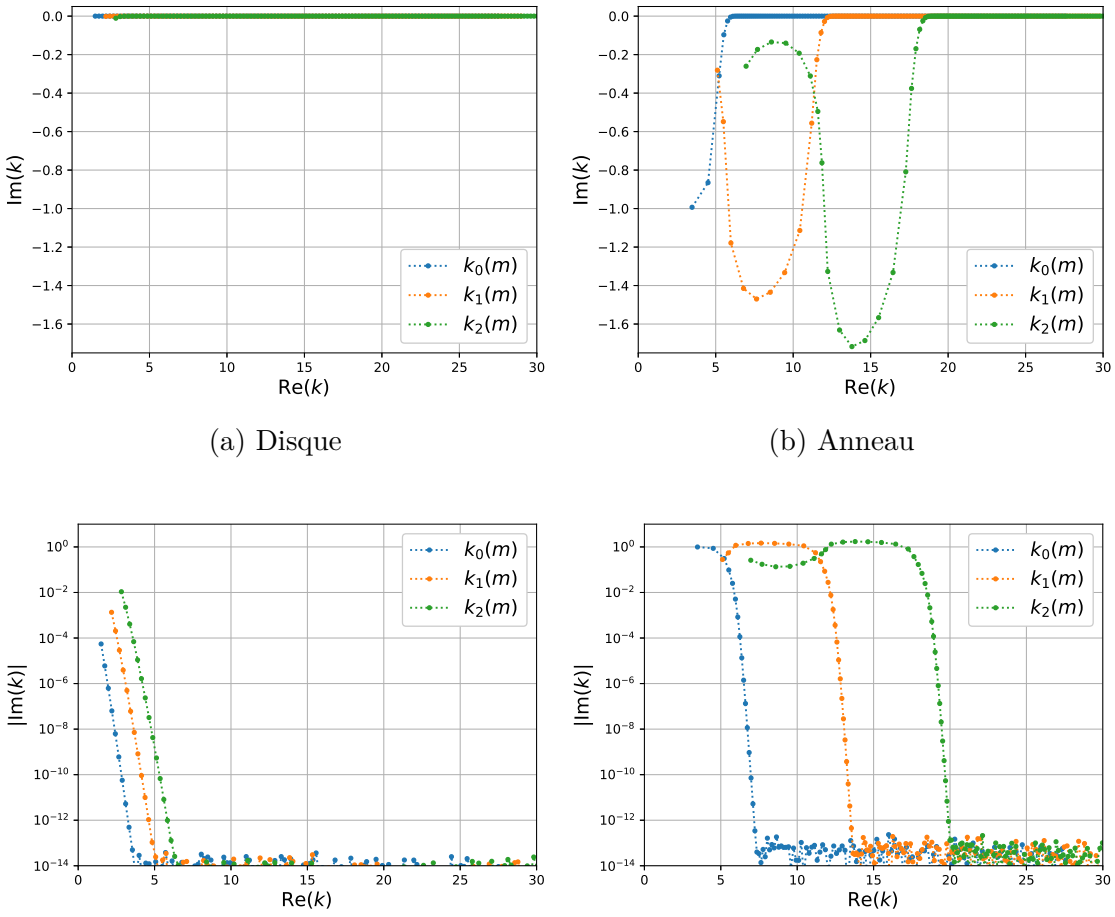


(f) $n_0 = 1.5$, $m = 40$

FIGURE 3.8 – Spectre résonnant discret dans le plan complexe pour le disque, pour $p = -1$ et un degré de l'approximation éléments finis égal à 20. La couleur des points correspond au logarithme de la distance entre deux calculs l'un effectué avec $\sigma_0 = \frac{10}{k_0(m)}$ et l'autre avec $\sigma_0 = \frac{15}{k_0(m)}$. Les lignes de haut en bas représentent $m = 20$, 30 et 40. La colonne de gauche correspond à l'indice $n_0 = 5$ et la colonne de droite correspond à l'indice $n_0 = 1.5$.

3.5.5 Comparaison des résonances à mode de galerie entre le disque et l'anneau

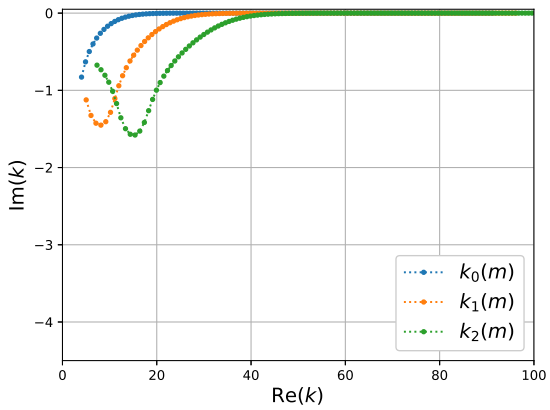
Sur la figure 3.9, on a représenté dans le cas d'un disque de rayon 1 et d'un anneau de rayons 0.9 et 1 les résonances $k_j(m)$ pour $j \in \{0, 1, 2\}$ (différentes couleurs) et $m = 4, 5, 6, \ldots, 127, 128$ avec deux vues différentes. La première vue dans le plan complexe où l'abscisse est $\mathrm{Re}(k)$ et l'ordonnée est $\mathrm{Im}(k)$. La deuxième vue dans le demi-plan où l'abscisse est $\mathrm{Re}(k)$ et l'ordonnée est $\log(|\,\mathrm{Im}(k)|)$ permet de voir la convergence exponentielle des parties imaginaires vers 0. La différence observée entre le disque et l'anneau est que les parties imaginaires des résonances de l'anneau ne vont commencer à avoir une convergence exponentielle vers 0 que quand le mode résonnant associé est principalement localisé dans l'anneau. Ce comportement est encore plus marqué quand on diminue la valeur de n_0. Ceci est illustré par la figure 3.10 où on a représenté les mêmes résultats mais pour $n_0 = 1.5$.



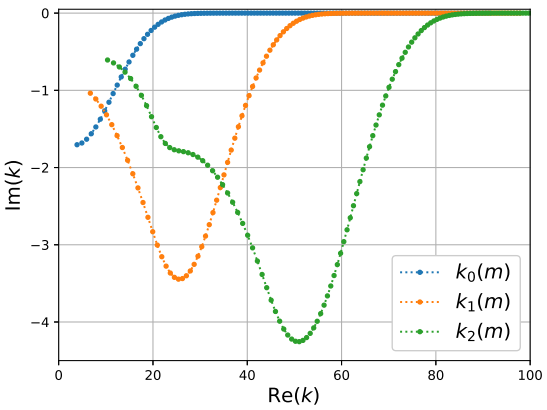
(a) Disque (b) Anneau

(c) Disque (d) Anneau

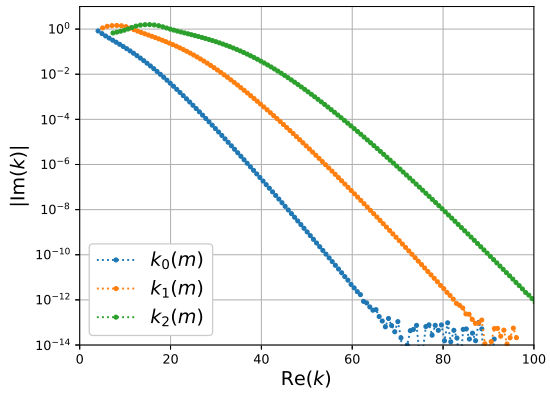
FIGURE 3.9 – Graphes des résonances $k_j(m)$ pour $n_0 = 5$, $m = 4 \to 128$ et $p = -1$. La couleur correspond à $j = 0$, 1 ou 2. Les points les plus à gauche, de chaque courbes, correspondent à $k_j(4)$ qui est relié à $k_j(5)$ et ainsi suite jusqu'à $k_j(128)$. Sur la ligne en haut sont représentées les résonances dans le plan complexe. Sur la ligne en bas elles sont représentées dans le plan $(\mathrm{Re}(k), \log(|\,\mathrm{Im}(k)|))$. En colonne les figures correspondent à gauche au disque et à droite à l'anneau.



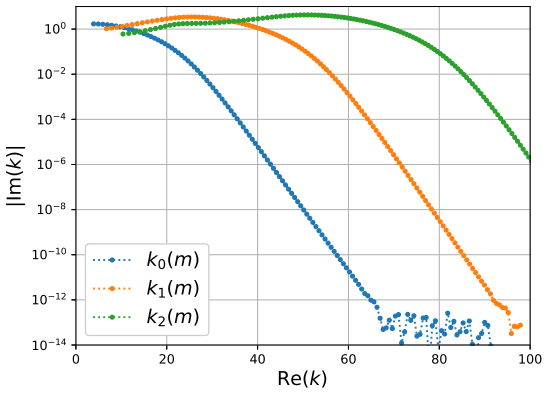
(a) Disque



(b) Anneau



(c) Disque



(d) Anneau

FIGURE 3.10 – Graphes des résonances $k_j(m)$ pour $n_0 = 1.5$, $m = 4 \to 128$ et $p = -1$. La couleur correspond à $j = 0$, 1 ou 2. Les points les plus à gauche, de chaque courbes, correspondent à $k_j(4)$ qui est relié à $k_j(5)$ et ainsi suite jusqu'à $k_j(128)$. Sur la ligne en haut sont représentées les résonances dans le plan complexe. Sur la ligne en bas elles sont représentées dans dans le plan $(\mathrm{Re}(k), \log(|\,\mathrm{Im}(k)|))$. En colonne les figures correspondent à gauche au disque et à droite à l'anneau.

Chapitre 4

Problèmes 2D

Sommaire

4.1 Cadre fonctionnel 100
4.2 Description des problèmes 101
4.2.1 Le problème de résonances 101
4.2.2 Réduction à un domaine borné à l'aide d'une PML 101
4.3 Approximation par la méthode des éléments finis 103
4.3.1 La convergence 104
4.3.2 Comparaison avec un calcul sans PML 108
4.3.3 Comparaison des spectres avec et sans PML 110

Dans ce chapitre, on considère le problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (1.5) page 5 dans le cas d'une configuration bidimensionnelle et on étudie les couches parfaitement adaptées radiales (PML) pour ce problème et le comportement numérique des résonances.

4.1 Cadre fonctionnel

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné connexe et $\mathcal{U}$ un ouvert égal soit à $\mathbb{R}^2$ soit au disque ouvert $D(0,R)$ de centre 0 et de rayon R avec $0 < R < +\infty$ tel que $\Omega \subset \mathcal{U}$. On note $\Gamma = \partial\Omega$ le bord de Ω que l'on suppose lisse. Soient A une matrice carré de dimension 2 à coefficients variables et b une fonction à valeurs complexes telles que

1. $A \in \mathcal{M}_2\left(\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})\right)$ et $b \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$,
2. $A \equiv \mathbb{I}_2$ et $b \equiv 1$ sur $\mathcal{U} \setminus \overline{\Omega}$,
3. $b^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{U})$ et il existe $c > 0$ tel que $\mathrm{Re}\left(\overline{A(x)\xi} \cdot \xi\right) \geq c|\xi|$ pour tout $x \in \mathcal{U}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$.

On définit un cadre fonctionnel général pour les problèmes étudiés par la suite. On rappelle la définition de l'opérateur de saut $[\,\cdot\,]_\Gamma$: pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour toute fonction w continue dans $\overline{\Omega}$ et dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, on a

$$[w]_\Gamma = \lim_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{\Omega} \ni x \to \gamma} w(x) - \lim_{x \in \Omega \ni x \to \gamma} w(x).$$

On se place dans l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathcal{U})$. On considère l'opérateur $P : u \mapsto -\operatorname{div}(A\nabla u)$ et sa forme sesquilinéaire associée $q_P : (u,v) \mapsto \int_{\mathcal{U}} \overline{A\nabla u} \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x$ munie du domaine de forme $D(q_P)$ qui est $\mathrm{H}^1(\mathcal{U})$ si $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{H}^1_0(\mathcal{U})$ si $\mathcal{U} = D(0,R)$. Le domaine de forme correspond à une condition de Dirichlet homogène sur le bord si $\mathcal{U}$ est borné. Le domaine maximal de P, noté $D(P)$ est $\{u \in D(q_P) \mid Pu \in \mathrm{L}^2(\mathcal{U})\}$. Le domaine $D(P)$ est égal à $\mathrm{H}^2(\mathcal{U}, A)$ où on définit

$$\mathrm{H}^2(\mathcal{U}, A) = \left\{ u \in D(q_P) \mid u_{|\Omega} \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ u_{\left|\mathbb{R}^2\setminus\overline{\Omega}\right.} \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}),\ [(A\nabla u)\cdot\nu]_\Gamma = 0 \right\}$$

où $\nu : \Gamma \to \mathbb{S}^1$ est la normale sortante unitaire à Ω. Dans le cas où $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$, on note

$$\mathrm{H}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}, A) = \left\{ u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) \mid \forall \chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^2),\ \chi u \in \mathrm{H}^2(\mathcal{U}, A) \right\}.$$

À noter que pour tout $r > 0$, on a $u_{|D(0,r)} \in \mathrm{H}^2(D(0,r), A)$.

Remarque 4.1. Si la matrice A est continue sur $\mathcal{U}$ alors $\mathrm{H}^2(\mathcal{U}, A) = \mathrm{H}^2(\mathcal{U})$ et $\mathrm{H}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}, A) = \mathrm{H}^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U})$.

Comme précédemment, il est plus pratique d'introduire les espace H^2 par morceaux. On définit

$$\underline{\mathrm{H}}^2(\mathbb{R}^2, \Gamma) = \mathrm{H}^2(\Omega) \oplus \underline{\mathrm{H}}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}).$$

On définit également la version « locale »

$$\underline{\mathrm{H}}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \Gamma) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) \mid \forall \chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^2),\ \chi u \in \underline{\mathrm{H}}^2(\mathbb{R}^2, \Gamma) \right\}.$$

4.2 Description des problèmes

4.2.1 Le problème de résonances

On considère une fonction n telle que $n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, $n \equiv 1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ et $n^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^2)$. On cherche $(k, u) \in \mathbb{C} \times \underline{\mathrm{H}}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \Gamma)$ avec u non nulle, tel que

$$(\mathcal{P}_p) \begin{cases} -\operatorname{div}(n^{p-1}\nabla u) - k^2 n^{p+1} u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \\ [u]_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ [n^{p-1}\partial_\nu u]_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \end{cases} \tag{4.1a}$$

avec la condition d'onde sortante suivante : pour tout $r > \sup_{x\in\Omega} |x|$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, il existe $(c_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ tel qu'en coordonnées polaires

$$u(r,\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \, \mathsf{H}_m^{(1)}(kr)\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}. \tag{4.1b}$$

Les solutions de (4.1) sont bien définies par la théorie du *black box scattering* rappelée dans l'annexe B. Soit (k, u) un couple solution. Le complexe k est appelé une résonance et u un mode résonnant associé à k. L'ensemble des résonances est noté $\mathrm{Res}(\mathcal{P}_p)$.

4.2.2 Réduction à un domaine borné à l'aide d'une PML

Comme dans la partie 2.3.1, on définit $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{d}$, $\widetilde{r}$, σ et d avec les paramètres r_0, r_1 et σ_0 vérifiant $\sup_{x\in\Omega} |x| \leq r_0 < r_1$ et $\sigma_0 > 0$.

Étant donnée une solution (k, u) de (4.1), il existe $(c_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tel que, en coordonnées polaires, on ait $u(r,\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \, \mathsf{H}_m^{(1)}(kr)\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}$ pour tout $r \geq r_0$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On définit

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) \text{ si } |x| \leq r_0 \\ \displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \, \mathsf{H}_m^{(1)}(k\widetilde{r}(r)) \, \mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta} \text{ si } |x| > r_0 \end{cases}.$$

La fonction $\widetilde{u}$ vérifie le système suivant en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\widetilde{r}}\partial_r\left(\widetilde{r}\, n^{p-1}\, \partial_{\widetilde{r}}\widetilde{u}\right) - \dfrac{n^{p-1}}{\widetilde{r}^2}\partial_\theta^2\widetilde{u} = k^2 n^{p+1}\widetilde{u} \\ [\widetilde{u}]_{\widetilde{\Gamma}} = 0 \\ [n^{p-1}\,\partial_\nu\widetilde{u}]_{\widetilde{\Gamma}} = 0 \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} \widetilde{u}(x) = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

où $\widetilde{\Gamma} = \Gamma \cup C(0, r_0) \cup C(0, r_1)$ est l'union des discontinuités de n et de d, $C(0, \alpha)$ désignant le cercle de centre 0 est de rayon α. On ré-écrit le problème (4.2) en

fonction de r à l'aide des relations $\widetilde{r} = \widetilde{d} r$ et $\partial_{\widetilde{r}} = \frac{1}{d}\partial_r$. On obtient

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{r\widetilde{d}d}\partial_r\left(r\,\widetilde{d}\,d^{-1}\,n^{p-1}\,\partial_r\widetilde{u}\right) - \dfrac{n^{p-1}}{r^2\widetilde{d}^2}\partial_\theta^2\widetilde{u} = k^2\,n^{p-1}\,\widetilde{u} \\ [\widetilde{u}]_{\widetilde{\Gamma}} = 0 \\ [n^{p-1}\,d^{-1}\,\partial_\nu\widetilde{u}]_{\widetilde{\Gamma}} = 0 \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty}\widetilde{u}(x) = 0 \end{cases}. \tag{4.3}$$

Afin d'avoir le problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (4.1) avec PML en coordonnées cartésiennes, on commence par écrire la formulation variationnelle en coordonnées polaires. On multiplie la première équation $\widetilde{d}\,d\,v$ et on fait des intégrations par parties, pour $\widetilde{u}, v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta)$. On obtient

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} n^{p-1}\left(\frac{\widetilde{d}}{d}\,\partial_r\widetilde{u}\,\partial_r v - \frac{d}{r^2\,\widetilde{d}}\,\partial_\theta\widetilde{u}\,\partial_\theta v\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = k^2\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} n^{p+1}\,\widetilde{d}\,d\,\widetilde{u}\,v\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

À l'aide des formule $r\partial_r = x\partial_x + y\partial_y$ et $\partial_\theta = -y\partial_x + x\partial_y$, on revient aux coordonnées cartésiennes. On a

$$\int_{\mathbb{R}^2} n^{p-1}\,M\nabla\widetilde{u}\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x = k^2\int_{\mathbb{R}^2} n^{p+1}\,g\,\widetilde{u}\,v\,\mathrm{d}x$$

où la matrice M et la fonction g sont définies par

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x^2\,\widetilde{d}(r)}{r^2\,d(r)} + \dfrac{y^2\,d(r)}{r^2\,\widetilde{d}(r)} & \dfrac{xy}{r^2}\left[\dfrac{\widetilde{d}(r)}{d(r)} - \dfrac{d(r)}{\widetilde{d}(r)}\right] \\ \dfrac{xy}{r^2}\left[\dfrac{\widetilde{d}(r)}{d(r)} - \dfrac{d(r)}{\widetilde{d}(r)}\right] & \dfrac{y^2\,\widetilde{d}(r)}{r^2\,d(r)} + \dfrac{x^2\,d(r)}{r^2\,\widetilde{d}(r)} \end{pmatrix}$$
$$g(x,y) = \widetilde{d}(r)\,d(r)$$

où $r = \sqrt{x^2+y^2}$

On obtient le problème suivant : trouver $(k, \widetilde{u}) \in \mathbb{C}\times\underline{\mathrm{H}}^2(\mathbb{R}^2, \widetilde{\Gamma})$ avec $\breve{u}$ non nulle, tel que

$$(\mathcal{P}_p^{\mathrm{PML}})\begin{cases} -\operatorname{div}\left(n^{p-1}\,M\nabla\widetilde{u}\right) = k^2\,n^{p+1}\,g\,\widetilde{u} & \text{dans } \mathbb{R}^2\setminus\widetilde{\Gamma} \\ [\widetilde{u}]_{\widetilde{\Gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\Gamma} \\ [n^{p-1}\,d^{-1}\,\partial_\nu\widetilde{u}]_{\widetilde{\Gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\Gamma} \end{cases}. \tag{4.4}$$

Remarque 4.2. Dans le livre de S. Dyatlov et M. Zworski [33], à la section 4.5. est introduite une mise à l'échelle complexe (*complex scaling*) qui, dans notre cas, revient à prendre $\theta = \arctan(\sigma_0)$ et

$$F_\theta(x) = \int_0^{|x|} r\,\widetilde{\sigma}(r)\,\mathrm{d}r \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

La fonction F_θ est bien convexe car la fonction $r \mapsto r\,\widetilde{\sigma}(r)$ est croissante, voir la section 2.3.1 page 30.

Comme dans le chapitre précédent, pour se ramener à un domaine borné, on prend $R > r_1$ et on tronque le domaine à $D(0,R)$. On définit le problème $(\mathcal{P}_p^{\text{born}})$ suivant : trouver $k \in \mathbb{C}$ et $\check{u} \in \underline{\mathrm{H}}^2(D(0,R),\widetilde{\Gamma})$ non nulle tel que

$$(\mathcal{P}_p^{\text{born}}) \begin{cases} -\operatorname{div}(n^{p-1}\, M\nabla\check{u}) - k^2\, n^{p+1}\, g\, \check{u} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{\Gamma} \\ [\check{u}]_{\widetilde{\Gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\Gamma} \\ [n^{p-1}\, d^{-1}\, \partial_\nu \check{u}]_{\widetilde{\Gamma}} = 0 & \text{à travers } \widetilde{\Gamma} \\ \check{u} = 0 & \text{sur } x^2+y^2 = R^2 \end{cases} . \tag{4.5}$$

L'écriture variationnelle du problème $(\mathcal{P}_p^{\text{born}})$ est : trouver $(k,\check{u}) \in \mathbb{C} \times \mathrm{H}_0^1(D(0,R))$ tel que pour tout $v \in \mathrm{H}_0^1(D(0,R))$ on ait

$$\int_{D(0,R)} n^{p-1}\, M\nabla\check{u}\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x = k^2 \int_{D(0,R)} n^{p+1}\, g\,\check{u}\, v\,\mathrm{d}x.$$

4.3 Approximation par la méthode des éléments finis

On va tirer profit des conclusions de la section 2.5 page 46 du chapitre 2 et du chapitre 3 page 75 pour la mise en œuvre de la méthode des éléments finis pour le problème $(\mathcal{P}_p^{\text{born}})$ défini en (4.5).

La méthode des éléments finis. Dans ce cadre, elle consiste à choisir un sous-espace $V_N = \operatorname{Vect}(\phi_i \mid 1 \le i \le N)$ de $\mathrm{H}_0^1(D(0,R))$ de dimension fini N et à chercher les couples $(k,\mathbf{u}) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^N$ tels que $\mathbb{A}\mathbf{u} = k^2\mathbb{B}\mathbf{u}$ où

$$\mathbb{A} = \left(\int_{D(0,R)} n^{p-1}\, M\nabla\phi_i\cdot\nabla\phi_j\,\mathrm{d}x\right)_{1\le i,j\le N} \quad\text{et}\quad \mathbb{B} = \left(\int_{D(0,R)} n^{p+1}\, g\,\phi_i\phi_j\,\mathrm{d}x\right)_{1\le i,j\le N}.$$

De manière similaire à la définition 2.19 page 47, on définit le *spectre résonnant discret* comme l'ensemble des racines carrées des valeurs propres de la matrice $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$. Les éléments k du spectre résonnant discret sont appelés les *résonances discrètes*. Pour k une résonance discrète, un *mode résonnant discret* u associé à k est défini par

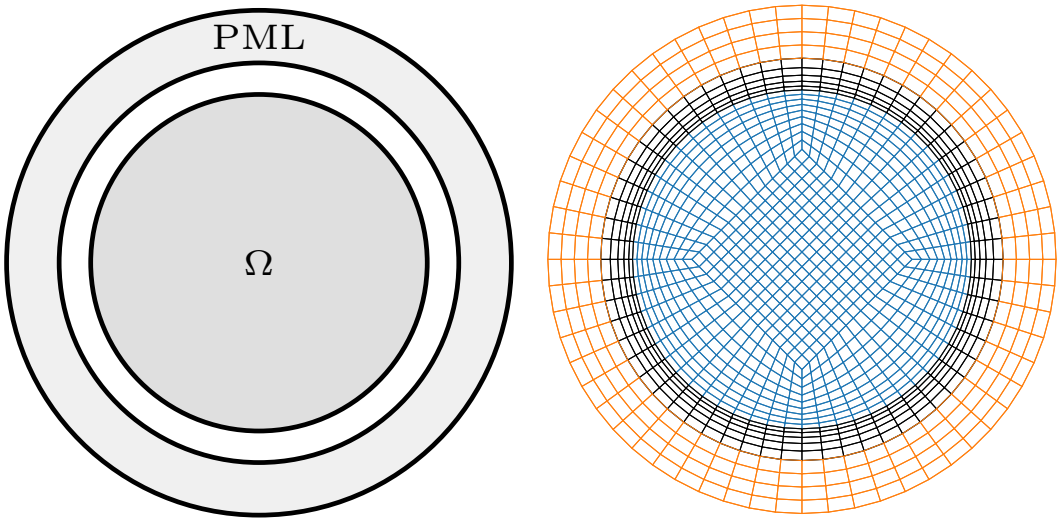
$$u = \sum_{i=0}^{N} \mathbf{u}_i\phi_i$$

où $\mathbf{u}$ est un vecteur propres associé à la valeur propre k^2, c'est à dire qui vérifie $\mathbb{A}\mathbf{u} = k^2\mathbb{B}\mathbf{u}$.

Cas test numérique. On prend comme exemple de vérification le cas du disque d'indice constant traité dans la section 3.3.1 page 79 du chapitre 3. On regarde la convergence des résonances $k_j(m)$ pour $j=0$ et $m \in \{20,30,40\}$. On rappelle que l'ensemble $\{k_j(m) \mid j\in\mathbb{N}\} = \operatorname{Res}_I(\mathcal{R}_p(m))$ correspond aux résonances internes et que les modes de galerie coïncident avec celles de plus petite partie réelle. Les valeurs de références sont celles calculées à partir de l'équation modale en utilisant la

méthode décrite à la section 3.3.1. On rappelle que j est l'indice radial qui correspond au nombre de changements de signe dans $[0, \beta]$ et m l'indice angulaire qui correspond au nombre d'oscillations ($2|m|$ est le nombre de changements de signe). Pour le cas du disque, à chaque résonances $k_j(m)$ correspondent deux modes résonnants associés et donc numériquement deux valeurs propres car les résonances sont de multiplicité deux quand $m \neq 0$. On les note $k_j^-(m)$ et $k_j^+(m)$ avec la convention $|k_j^-(m)| < |k_j^+(m)|$.

On utilise des maillages structurés quadrangulaires de degré géométrique 1, 2 et 3. On les note $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$. Ils ont le même nombre d'éléments qui vaut 1305. Sur la figure 4.1, on a représenté la géométrie idéale du domaine de calcul et le maillage $\mathcal{M}_1$. Les maillages de degrés 2 et 3 ne sont pas des sous-maillage de $\mathcal{M}_1$ car les points supplémentaires respectent la géométrie courbe. Tous les maillages ont un raffinement géométrique autour du cercle de centre 0 et de rayon $\beta = 1$.



(a) Géométrie idéale (b) Le maillage $\mathcal{M}_1$

FIGURE 4.1 – À gauche : représentation de la géométrie idéale du domaine de calcul. À droite : représentation du maillage $\mathcal{M}_1$.

4.3.1 La convergence

Comme dans le cas de l'étude de la famille de problème radiaux, si on veut calculer les résonances proches de $k_0 > 0$, on doit faire dépendre la PML de k_0 en prenant $\sigma_0 = \frac{10}{k_0}$. On utilise aussi ce k_0 pour la valeur du décalage (*shift*) lors du calcul des valeurs propres du problème aux valeurs propres généralisé issu de la discrétisation éléments finis. Sur la figure 4.2, on a représenté le logarithme de l'erreur relative en fonction du degré de l'approximation éléments finis. On appelle d_{geo} le degré géométrique du maillage et d_{EF} le degré éléments finis. On n'a pas représenté les courbes de convergence pour le degré géométrique 2 car elles sont très similaires à celles du degré géométrique 3. Ceci est dû au fait que la géométrie du problème ne contient que des cercles qui sont déjà bien approchés par le degré géométrique 2.

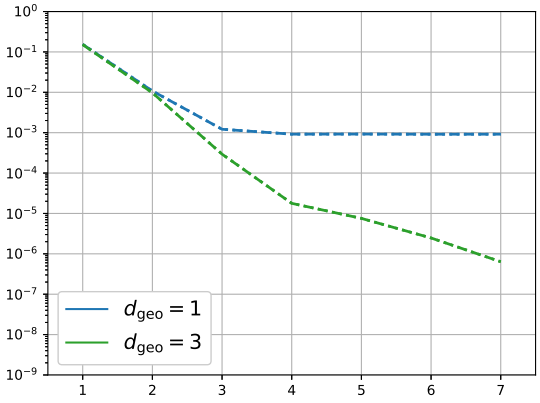
- On remarque que pour le degré géométrique 1 les résonances ne convergent pas vers les bonnes valeurs. Ceci s'explique par le fait que le maillage $\mathcal{M}_1$ approche

le cercle Γ par un polygone régulier à 60 côtés. Ainsi l'approximation est trop grossière.

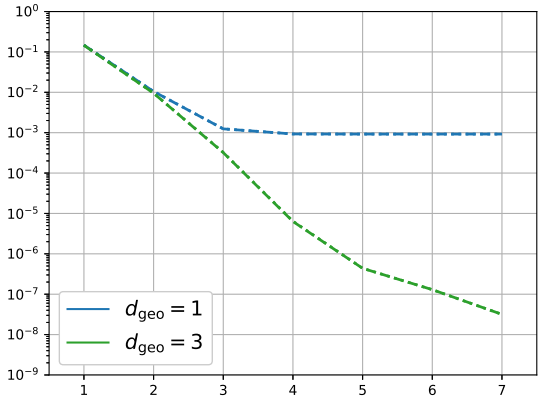
- Pour $m = 30$ et $d_{\mathrm{EF}} = 1$, l'espace d'approximation n'a pas assez de degrés de liberté pour capturer les résonances $k_j^{\pm}(m)$. On a le même phénomène pour $m = 40$ et $d_{\mathrm{EF}} \in \{1, 2\}$. Pour cette raison, la représentation graphique ne commence pas en 1 pour $m = 30$ et $m = 40$.

- Pour $m \in \{20, 40\}$, les courbes d'erreurs entre $k_j^-(m)$ et $k_j^+(m)$ sont superposées mais pas pour $m = 30$, cela dépend de la valeur de m et du nombre d'éléments du bord Γ.

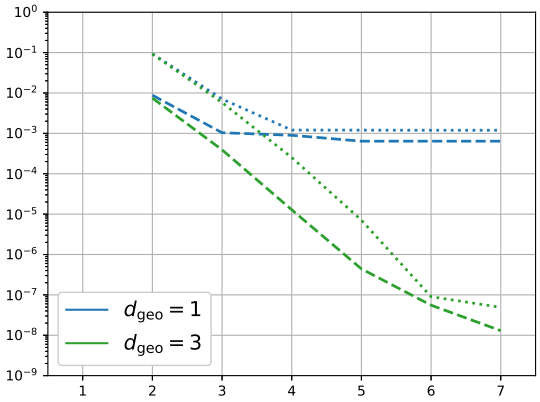
Sur la figure 4.3, on a représenté la partie réelle de l'un des modes résonnants associés à la résonances $k_0(20)$ avec la normalisation $u(x_0) = 1$ où $x_0 \in \arg\max_{x \in D(0,r_0)} |u|$, pour les degrés éléments finis allant de 1 à 3, pour $p \in \{\pm 1\}$ et pour un degré géométrique 3. Le cercle en trait plein correspond au bord Γ, ici le cercle de centre 0 et de rayon 1. Le cercle en tirets correspond à l'entré de la PML, ici cercle de centre 0 et de rayon $r_0 = 1.1875$.



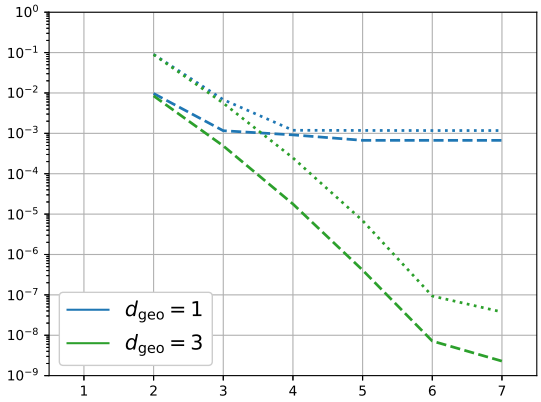
(a) $p = +1$, $m = 20$



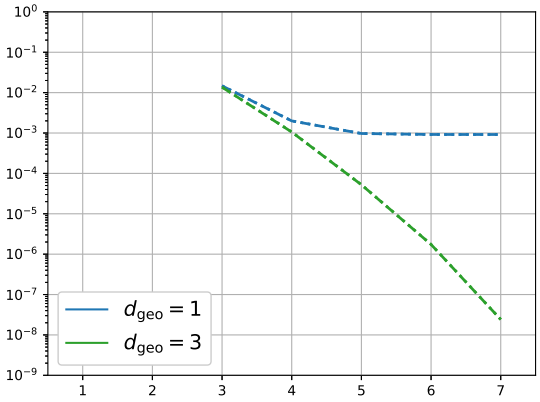
(b) $p = -1$, $m = 20$



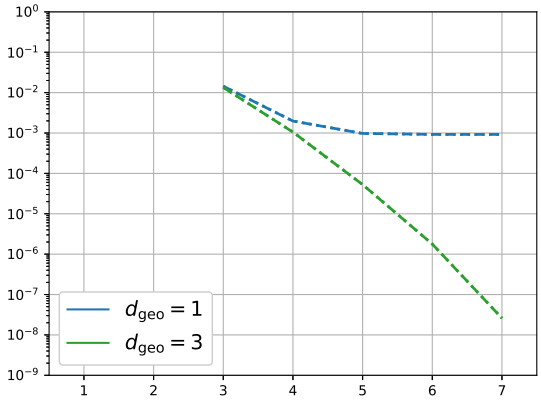
(c) $p = +1$, $m = 30$



(d) $p = -1$, $m = 30$

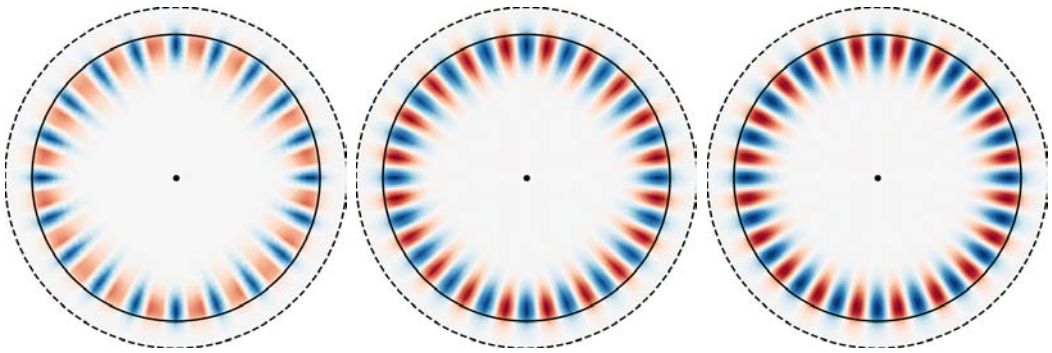


(e) $p = +1$, $m = 40$

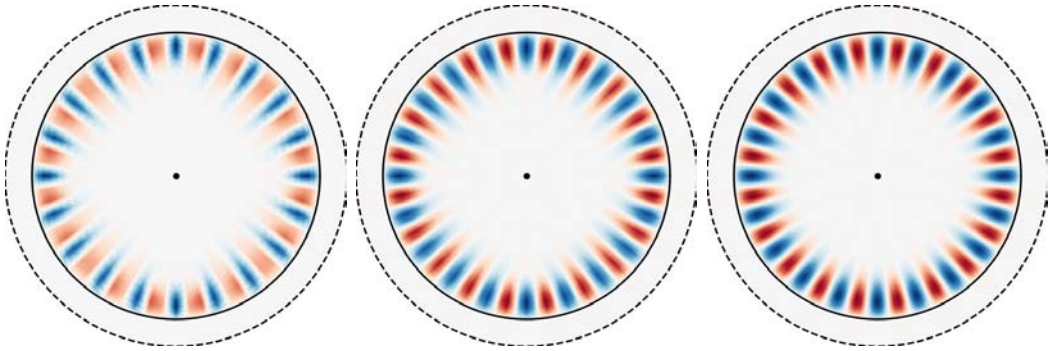


(f) $p = -1$, $m = 40$

FIGURE 4.2 – Graphes du logarithme de l'erreur relative en fonction du degré de l'approximation éléments finis pour le même maillage mais avec des degrés géométriques 1 et 3. Les courbes en tirets correspondent à $k_j^-(m)$ et ceux en pointillés correspondent à $k_j^+(m)$. Les lignes de haut en bas représentent $m = 20$, 30 et 40. Les colonnes de gauche à droite représentent $p = +1$ et $p = -1$.



(a) $d_{\mathrm{EF}} = 1$ (b) $d_{\mathrm{EF}} = 2$ (c) $d_{\mathrm{EF}} = 3$



(d) $d_{\mathrm{EF}} = 1$ (e) $d_{\mathrm{EF}} = 2$ (f) $d_{\mathrm{EF}} = 3$

FIGURE 4.3 – Graphes de la partie réelle de l'un des modes résonnants associés à la résonance $k_0(20)$. Pour les colonnes, de gauche à droite, le degré des éléments finis va de 1 à 3. La ligne du haut correspond à $p = +1$ et la ligne du bas correspond à $p = -1$. Le cercle en trait plein est le cercle de centre 0 et de rayon β (frontière physique) et celui en tirets est le cercle de centre 0 et de rayon r_0 (entrée de la PML).

4.3.2 Comparaison avec un calcul sans PML

Une particularité des modes de galerie est qu'ils semblent se localiser au bord de Ω même si la condition de rayonnement sortant indique qu'ils sont exponentiellement croissants à l'infini. Mathématiquement, ce comportement peut se comprendre par le fait que les équations de Bessel ont un point d'inflexion en m. Ainsi, la fonction de Hankel $x \mapsto \mathsf{H}_m^{(1)}(kr)$, pour $m \neq 0$, passe d'une décroissante polynomiale pour $|kr| < m$ à une croissance exponentielle pour $|kr| > m$, voir 10.7.7 et 10.17.5 dans [74]. Ce comportement se manifeste également sur les résonances par des parties imaginaires très petites. Même si les modes résonnants sont exponentiellement croissants à l'infini, ils décroisent très rapidement à la sortie de la cavité Ω. On peut, plus simplement que d'utiliser une PML, penser tronquer le domaine de calcul et mettre une condition de Dirichlet homogène sur la frontière artificielle délimitant le domaine de calcul.

Les tableaux 4.1 et 4.2 donnent les résonances de référence pour un disque de rayon 1 et d'indice optique $n_0 = 5$ calculées à partir de l'équation modale selon la méthode décrite à la section 3.3.1 page 79, ainsi que les résonances calculées par la méthode des éléments finis avec une PML (PML0) et les résonances calculées par la méthode des éléments finis avec une condition de Dirichlet homogène sur la frontière artificielle délimitant le domaine de calcul. Les deux calculs éléments finis sont fait sur le maillage $\mathcal{M}_3$ de degré géométrique 3 avec un degré éléments finis de 7. On ne reporte que les parties réelles car les parties imaginaires sont de l'ordre de 10^{-16} et sont donc saturées par la precision machine. On rappelle que les calculs éléments finis 2D renvoient deux valeurs propres notées $k_j^{\pm}(m)$ correspondant à la résonances $k_j(m)$. On remarque que les résultats sont semblables car pour la cavité considéré ici les résonances sont très proche de l'axe réel.

m	equ. modale	MEF **avec** PML	MEF **sans** PML
20	4.862329128972784	4.862328311098296	4.862329103115470
		4.862328311098677	4.862329103115851
30	7.002452118493490	7.002452099382935	7.002451843868045
		7.002451786685660	7.002452146650528
40	9.114683917985293	9.114684137516013	9.114684140070663
		9.114684138203652	9.114684140758302

Tableau 4.1 – Comparaison des résonances numériques obtenue avec et calculées à partir de l'équation modale et avec la méthode de EF (MEF) en ayant recours à une PML et à une condition de Dirichlet homogène pour $p = +1$ et $n_0 = 5$.

Sur cet exemple, on ne comprend pas l'intérêt d'utiliser des PML car le calcul avec condition de Dirichlet homogène est aussi précis que le calcul avec PML. En fait, cela est dû aux valeurs des paramètres du cas test. Quand on diminue la valeur de l'indice optique sans modifier la géométrie, la partie réelle des modes de galerie à m fixé augmente, voir la section 3.5.5. Les tableaux 4.3 et 4.4 fournissent les résultats des mêmes calculs que ceux présentés dans les tableaux 4.1 et 4.2 mais avec $n_0 = 1.5$. On observe dans ce cas que les résultats obtenus sont bien meilleurs avec PML qu'avec la condition de Dirichlet homogène. Cela est dû au fait que les résonances sont plus éloignées de l'axe réel que dans le cas $n_0 = 5$. On remarque

m	equ. modale	MEF **avec** PML	MEF **sans** PML
20	5.072912310328021	5.072912226244334	5.072912220637103
		5.072912226245038	5.072912220637807
30	7.209749001757408	7.209749017682753	7.209748731500138
		7.209748729801897	7.209749018972438
40	9.320087752625323	9.320087994269704	9.320087994371178
		9.320087995629088	9.320087995730562

Tableau 4.2 – Comparaison des résonances numériques obtenue avec et calculées à partir de l'équation modale et avec la méthode de EF (MEF) en ayant recours à une PML et à une condition de Dirichlet homogène pour $p = -1$ et $n_0 = 5$.

également que la precision du calcul sans PML s'améliore quand m augmente à j fixé.

m	intégration complexe	MEF **avec** PML	MEF **sans** PML
20	$15.87025940 - \mathrm{i}1.10 \times 10^{-2}$	$15.87025911 - \mathrm{i}1.10 \times 10^{-2}$	15.86282691
		$15.87025911 - \mathrm{i}1.10 \times 10^{-2}$	15.86282691
30	$23.04860546 - \mathrm{i}5.27 \times 10^{-4}$	$23.04860455 - \mathrm{i}5.27 \times 10^{-4}$	23.04811108
		$23.04860556 - \mathrm{i}5.27 \times 10^{-4}$	23.04811208
40	$30.10834639 - \mathrm{i}1.83 \times 10^{-5}$	$30.10834712 - \mathrm{i}1.83 \times 10^{-5}$	30.10832708
		$30.10834713 - \mathrm{i}1.83 \times 10^{-5}$	30.10832708

Tableau 4.3 – Comparaison des résonances numériques obtenue avec et calculées à partir de l'équation modale et avec la méthode de EF (MEF) en ayant recours à une PML et à une condition de Dirichlet homogène pour $p = +1$ et $n_0 = 1.5$.

m	intégration complexe	MEF **avec** PML	MEF **sans** PML
20	$16.29657741 - \mathrm{i}1.76 \times 10^{-2}$	$16.29657712 - \mathrm{i}1.76 \times 10^{-2}$	16.27211315
		$16.29657712 - \mathrm{i}1.76 \times 10^{-2}$	16.27211315
30	$23.50625196 - \mathrm{i}8.14 \times 10^{-4}$	$23.50625151 - \mathrm{i}8.14 \times 10^{-4}$	23.50461527
		$23.50625158 - \mathrm{i}8.14 \times 10^{-4}$	23.50461535
40	$30.57787912 - \mathrm{i}2.75 \times 10^{-5}$	$30.57787990 - \mathrm{i}2.75 \times 10^{-5}$	30.57781428
		$30.57787990 - \mathrm{i}2.75 \times 10^{-5}$	30.57781428

Tableau 4.4 – Comparaison des résonances numériques obtenue avec et calculées à partir de l'équation modale et avec la méthode de EF (MEF) en ayant recours à une PML et à une condition de Dirichlet homogène pour $p = -1$ et $n_0 = 1.5$.

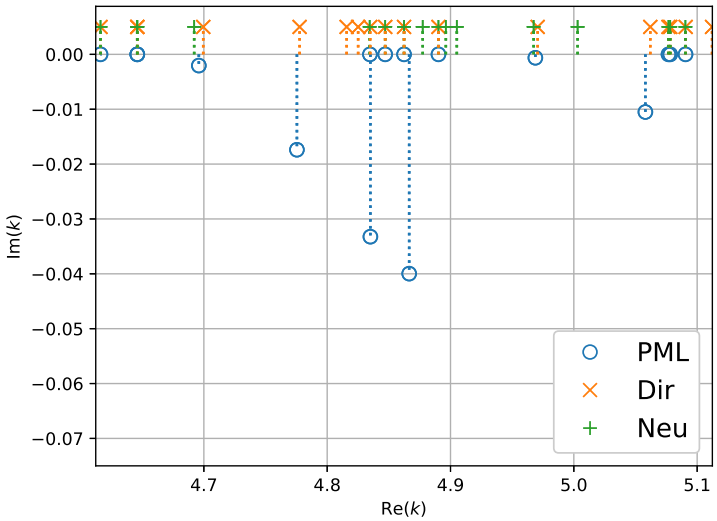
En conclusion, on retiendra que pour les résonances « assez éloignées » de l'axe réel, l'usage de la MEF avec PML fournit une bonne approximation des résonances, ce n'est pas le cas en utilisant la méthode des EF avec une condition de Dirichlet homogène sur la frontière artificiel. Par ailleurs, l'utilisation des PML permet d'avoir

une approximation de la partie imaginaire des résonances ce qui n'est pas possible en utilisant la méthode des EF avec condition de Dirichlet homogène.

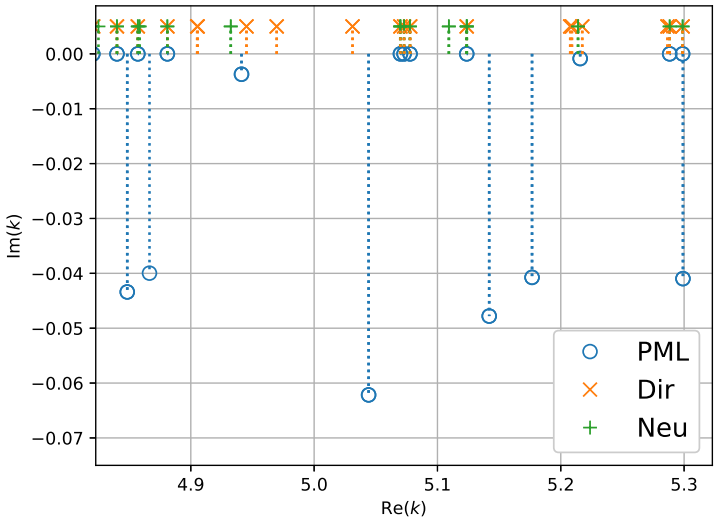
4.3.3 Comparaison des spectres avec et sans PML

Sur la figure 4.4, on a représenté les résonances discrètes autour de $k_0(20)$ issues de différents calculs pour $n_0 = 5$, $p = +1$ en haut et $p = -1$ en bas. Les ronds bleus correspondent aux résonances discrètes avec une PML, les croix ($\times$) oranges correspondent aux résonances discrètes avec une condition aux limites de Dirichlet homogène et les croix ($+$) vertes correspondent aux résonances discrètes avec une condition aux limites de Neumann homogène. Les résonances discrètes issues des calculs sans la PML avec des conditions aux limites de Dirichlet ou Neumann homogènes sont les valeurs propres de problèmes auto-adjoints donc les résonances discrètes sont réelles mais pour des raisons de visualisation, on les a décalées par rapport à l'axe des abscisses. Les traits en pointillés pour les résonances discrètes avec des conditions de Dirichlet ou de Neumann montrent où sont localisées exactement ces résonances discrètes sur l'axe réel. Les traits en pointillés pour les résonances discrètes avec PML montrent où la partie réelle des résonances discrètes est située sur l'axe réel. Toutes les résonances discrètes du calcul avec PML sont des approximations de résonances du problème continu. On remarque que l'on peut associer à toutes les résonances proches de l'axe réel une résonance discrète pour le problème de Dirichlet et une valeur propre pour le problème de Neumann. Plus les résonances s'éloignent de l'axe réel, moins les correspondances sont évidentes.

La figure 4.5 présente les résultats obtenus dans le cas où $n_0 = 1.5$ pour comparaison. On observe qu'il y a moins de résonances proches de l'axe réel autour de $k_0(20)$. Cela peut se comprendre heuristiquement avec l'optique géométrique : en diminuant la valeur de n_0, on a augmenté la valeur de l'angle critique pour avoir réflexion totale à l'interface entre la cavité et l'extérieur. Les modes résonnants « fuitent » donc plus à l'extérieur et les résonances ont donc une plus grande partie imaginaire. Là encore toutes les résonances discrètes issues du calcul avec PML correspondent à des résonances du problème continu. On remarque également qu'il y a plus de valeurs propres des problèmes de Dirichlet et de Neumann qui ne correspondent pas à des résonances du problème continu. En diminuant la valeur de n_0, on a augmenté le module de la résonance $k_0(20)$ et le spectre des problèmes de Dirichlet et de Neumann contient plus de valeurs propres qui ne correspondent pas à des résonances du problème continu. Ces résonances discrètes, que l'on peut qualifier de parasites, ne sont pas des artefacts de la discrétisation. Il s'agit d'approximations des valeurs propres des problèmes continus de Dirichlet et de Neumann qui correspond à des vecteur propres non localisés au bord de la cavité.

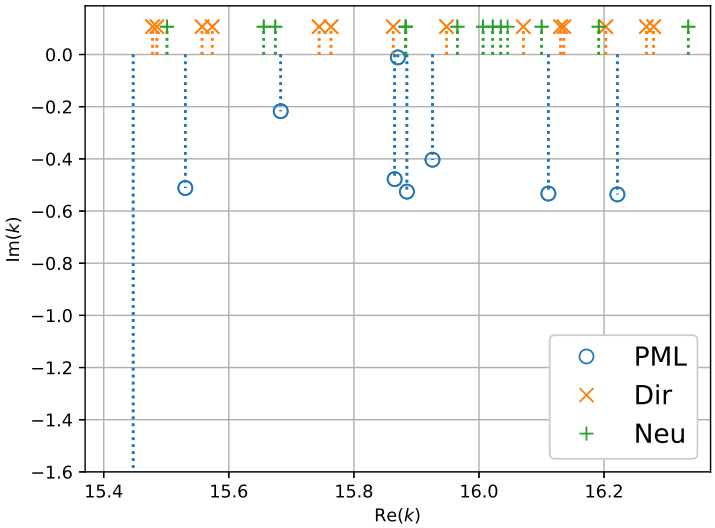


(a) $p = +1$

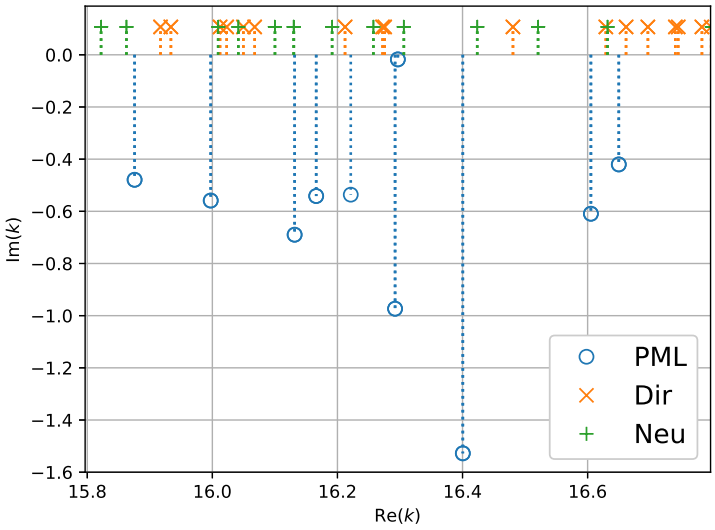


(b) $p = -1$

FIGURE 4.4 – Visualisation d'une partie du spectre discret autour de $k_0(20)$ pour $n_0 = 5$ avec $p = +1$ en haut et $p = -1$ en bas. Les ronds bleus correspondent aux résonances discrètes avec la PML. Les croix ($\times$) oranges correspondent aux valeurs propres discrètes avec une condition aux limites de Dirichlet homogène. Les croix ($+$) vertes correspondent aux valeurs propres discrètes avec une condition aux limites de Neumann homogène.



(a) $p = +1$



(b) $p = -1$

FIGURE 4.5 – Visualisation d'une partie du spectre discret autour de $k_0(20)$ pour $n_0 = 1.5$ avec $p = +1$ en haut et $p = -1$ en bas. Les ronds bleus correspondent aux résonances discrètes avec la PML. Les croix ($\times$) oranges correspondent aux valeurs propres discrètes avec une condition aux limites de Dirichlet homogène. Les croix ($+$) vertes correspondent aux valeurs propres discrètes avec une condition aux limites de Neumann homogène.

Deuxième partie

Développements asymptotiques des résonances

Chapitre 5

Introduction à la notion de quasi-résonances

Sommaire

5.1 Un exemple de référence : le disque d'indice constant . 116
5.2 Notion de famille de quasi-résonances 120

Dans la première partie, nous avons montré comment calculer les résonances d'une cavité Ω en dimension 2 d'un indice optique n. On transforme le problème de résonances $(\mathcal{P}_p)$ défini en (1.5) page 5 en un problème aux valeurs propres. Ensuite, on utilise une méthode numérique pour approximer les valeurs propres de ce nouveau problème et parmi toutes ces valeurs propres, on identifie celles qui sont des approximations des résonances. On cherche les résonances à mode de galerie (*Whispering Gallery Mode*, WGM), c'est-à-dire celles dont le mode résonnant associé est localisé au bord. La méthode numérique utilisé ne distingue pas les résonances associées aux modes de galerie des autres résonances ; elle renvoie toutes les résonances autour d'une certaine valeur. On aimerait avoir une estimation a priori de la position des résonances à modes de galerie. Cela nous conduit au sujet de la seconde partie de cette thèse : l'analyse asymptotique des résonances à modes de galerie. Plus particulièrement, nous établissons dans cette seconde partie des développements asymptotiques des des résonances à modes de galerie.

Dans ce chapitre, on commence a étudier un exemple de référence pour lequel les solutions ont des expressions explicites. Cela conduira à introduire la définition d'une résonance à modes de galerie. Ensuite, nous précisons le cadre mathématique de l'étude et introduisons la notion de quasi-résonance et quasi-mode associés, qui sont des solutions « approchées » du problème $(\mathcal{P}_p)$.

5.1 Un exemple de référence : le disque d'indice constant

On regarde ici le cas d'une cavité circulaire de rayon R, d'indice optique $n_0 > 1$ constant. Cette situation particulière va permettre de révéler la structure des développements asymptotiques des résonances en n'ayant recours qu'à des outils d'analyse simple (développements asymptotiques des fonctions spéciales). En raison de l'invariance par rotation du problème $(\mathcal{P}_p)$, une solution u associée au paramètre $p \in \{\pm 1\}$ et au nombre d'onde k peut s'écrire comme une série de Fourier

$$u(r,\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} w_m(r)\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta} \tag{5.1}$$

avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Ceci est possible d'après la correspondance établie par le lemme B.18. Chaque terme $u_m(r,\theta) \coloneqq w_m(r)\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}$ est solution du problème $(\mathcal{P}_p)$ avec le même paramètre p et résonance k. Réciproquement, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on peut résoudre le problème $(\mathcal{P}_p)$ avec u de la forme $w_m(r)\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}$. L'entier m est appelé indice angulaire et qui correspond au nombre d'oscillations angulaire de la partie réelle de $\theta \mapsto u_m(R,\theta)$ ($2|m|$ est le nombre de changements de signes angulaires de la partie réelle de $\theta \mapsto u_m(R,\theta)$). On injecte (5.1) dans le problème $(\mathcal{P}_p)$, on obtient des équations de Bessel et on trouve l'expression suivante, pour $r > 0$

$$w_m(r) = \begin{cases} \dfrac{\mathsf{J}_m(n_0kr)}{\mathsf{J}_m(n_0kR)} & r \le R \\[2ex] \dfrac{\mathsf{H}_m^{(1)}(kr)}{\mathsf{H}_m^{(1)}(kR)} & r > R \end{cases} \tag{5.2}$$

où J_m (respectivement $\mathsf{H}_m^{(1)}$) est la fonction de Bessel (respectivement Hankel) de première espèce d'ordre m. Ce problème est celui décrit à la section 3.3.1 page 79

du chapitre 3. Les résonances k sont obtenues comme solutions de l'équation modale suivante

$$n_0^p \, \mathsf{J}'_m(n_0 kR) \, \mathsf{H}^{(1)}_m(kR) - \mathsf{J}_m(n_0 kR) \, \mathsf{H}^{(1)\prime}_m(kR) = 0. \tag{5.3}$$

Comme vu dans la section 3.3.1 page 79, pour chaque valeur de m l'équation modale (5.3) a un nombre dénombrable de solutions noté $\mathrm{Res}(\mathcal{R}_p(m))$. Cet ensemble de solutions se partitionne en deux sous-ensembles : un ensemble fini composé de résonances extérieures, noté $\mathrm{Res}_E(\mathcal{R}_p(m))$; un ensemble infini composé de résonances internes, noté $\mathrm{Res}_I(\mathcal{R}_p(m))$. Les résonances internes sont décrites par un entier j qui correspond au nombre de changements de signe de la partie réelle du mode résonnant associé. Cet indice sera qualifié d'indice radial par la suite. On peut remarquer qu'en raison des relations $\mathsf{J}_{-m} = (-1)^m \mathsf{J}_m$ et $\mathsf{H}^{(1)}_{-m} = (-1)^m \mathsf{H}^{(1)}_m$, les deux valeurs $\pm m$ pour $m \geq 1$ donnent les mêmes résonances. Cela montre que les résonances d'indice angulaire plus grand que 1 pour une cavité circulaire sont de multiplicité au moins deux. On notera les résonances internes $\mathrm{Res}_I(\mathcal{R}_p(m)) = \{k_{p;j}(m) \mid j \in \mathbb{N}\}$ avec la convention que m est positif de sorte que $k_{p;j}(m)$ désigne la résonance pour m et $-m$.

Pour cette situation, on peut calculer des développements asymptotiques des résonances internes quand l'indice angulaire tend vers l'infini ($m \to +\infty$) et l'indice radial j est fixé, en utilisant l'équation modale (5.3), voir [59, 85]. Ce régime correspond aux modes de galerie. Le principe est le suivant. On considère pour l'ansatz que les résonances ont un développement de la forme $n_0 kR = m + \mathsf{k}_{-1} m^{\frac{1}{3}} + \sum_{q\geq 0} \mathsf{k}_q m^{\frac{q}{3}}$. On injecte cette heuristique dans l'équation modale (5.3), on utilise les développements asymptotiques uniformes quand $m \to +\infty$ des fonctions de Bessel et Hankel, voir la section 10.20 de [74], et on identifie les termes du même ordre. Les auteurs de [59, 85] montrent le développement asymptotique suivant :

$$k_{p;j}(m) = \frac{m}{Rn_0}\left[1 + \frac{a_j}{2}\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{n_0^p}{2(n_0^2-1)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{2}{m}\right) + \frac{3a_j^2}{40}\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{a_j n_0^p (2n_0^{2p} - 3n_0^2)}{12(n_0^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{5}{3}} + \mathcal{O}\left(m^{-2}\right)\right] \tag{5.4}$$

où $0 < a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ sont les zéros de la fonction d'Airy miroir définie à partir de la fonction d'Airy Ai par $\mathsf{A}(x) = \mathsf{Ai}(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, voir la définition C.5 de l'annexe C. Cette approche est spécifique aux cavités circulaires d'indice optique n constant et le nombre de termes dans le développement (5.4) est limité par les développements asymptotiques uniformes quand $m \to +\infty$ des fonctions de Bessel et de Hankel disponibles dans la littérature.

À l'inverse, l'approche que nous allons développer dans cette partie du manuscrit permettra d'obtenir des développements asymptotiques dans des situations plus générales et on retrouvera les développements asymptotiques de l'exemple de référence sans utiliser les développements asymptotiques des fonctions de Bessel. Par exemple, nous établirons section 6.6.1.2 page 167 le développement asymptotique à onze termes pour le disque d'indice constant.

Remarque 5.1. L'approche employée par [59, 85] pour calculer le développement asymptotique (5.4) peut être généralisée aux cavités elliptiques d'indice optique n constant à l'aide des fonctions de Mathieu. On pourra consulter par exemple [3]

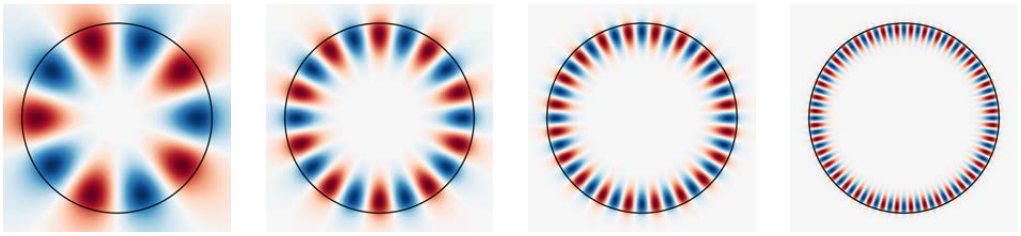
où sont calculés des développements asymptotiques des résonances pour le Laplacien Dirichlet à l'extérieur d'une ellipse et [4] où sont calculés des développements asymptotiques des valeurs propres pour le Laplacien Dirichlet dans une ellipse.

Sur la figure 5.1, on a représenté graphiquement les parties réelles des modes résonnants pour les modes TM ($p = +1$) sur un disque de rayon $R = 1$ et d'indice optique $n_0 = 5$. On observe les caractéristiques suivantes.

- Les résonances obtenues en résolvant l'équation modale (5.3) ont une partie imaginaire négative qui tend vers zéro rapidement (exponentiellement vite) quand $m \to +\infty$. On remarque que pour les valeurs calculées, les parties imaginaires peuvent être positive pour $m \geq 20$. Cela est dû à la saturation de l'arithmétique à double précision.

- Les modes $u(r, \theta) = w_m(r)\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}$ donnés par (5.2) où k est solution de l'équation modale (5.3) se concentrent sur l'interface Γ entre le disque et le milieu extérieur. C'est la caractéristique principale d'un mode de galerie (*Whispering Gallery Mode*).

Par ailleurs, on observe sur le développement asymptotique (5.4) que tous les termes du développement asymptotique (5.4) sont réels et en puissance positive de $m^{-\frac{1}{3}}$.

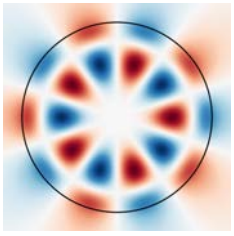


$1.509502 - \mathrm{i}\,10^{-4.87}$
$1.506391 \,\|\, 1.509518$

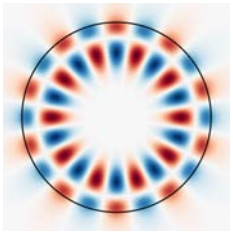
$2.664650 - \mathrm{i}\,10^{-9.80}$
$2.663069 \,\|\, 2.664643$

$4.862329 - \mathrm{i}\,10^{-16.2}$
$4.861607 \,\|\, 4.862328$

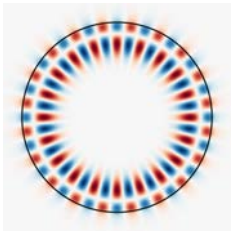
$9.114683 - \mathrm{i}\,10^{-15.7}$
$9.114369 \,\|\, 9.114683$



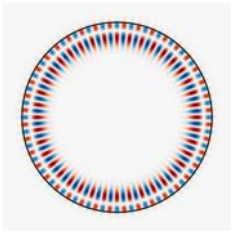
$2.200034 - \mathrm{i}\,10^{-3.55}$
$2.196259 \,\|\, 2.199668$



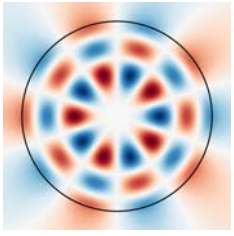
$3.440073 - \mathrm{i}\,10^{-7.81}$
$3.437575 \,\|\, 3.439979$



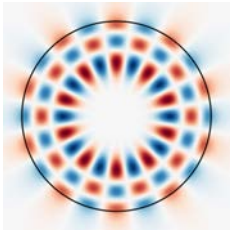
$5.759995 + \mathrm{i}\,10^{-15.9}$
$5.758810 \,\|\, 5.759983$



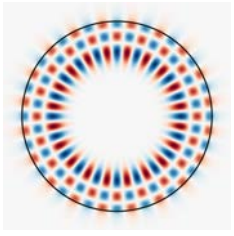
$10.18069 - \mathrm{i}\,10^{-15.4}$
$10.18018 \,\|\, 10.18069$



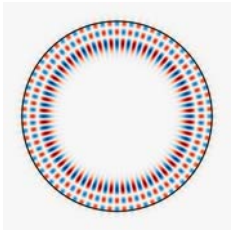
$2.855994 - \mathrm{i}\,10^{-2.74}$
$2.861837 \,\|\, 2.854048$



$4.151315 - \mathrm{i}\,10^{-6.40}$
$4.151657 \,\|\, 4.150946$



$6.557073 - \mathrm{i}\,10^{-15.3}$
$6.556843 \,\|\, 6.557025$



$11.10331 - \mathrm{i}\,10^{-15.4}$
$11.10317 \,\|\, 11.10331$

FIGURE 5.1 – Représentations graphiques des parties réelles de $u(r,\theta) = w_m(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$, avec $p = +1$, dans un disque de rayon $R = 1$ et d'indice optique $n_0 = 5$. De gauche à droite les valeurs de m sont 5, 10, 20 et 40. De haut en bas les valeurs de j sont 0, 1 et 2. Sous chaque figure, on donne la résonance complexe calculée en résolvant l'équation modale (5.3). Sur la deuxième ligne, on donne la valeur réelle de l'asymptotique à cinq termes (5.4) et, séparé par $\|$, notre asymptotique à douze termes de la section 6.6.1.2 page 167.

5.2 Notion de famille de quasi-résonances

Cadre de l'étude. On commence par rappeler les hypothèses et le cadre d'étude du problème $(\mathcal{P}_p)$.

Hypothèse 5.2.

- On considère un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné, de bord $\Gamma = \partial\Omega$ lisse, qui représente la cavité.
- L'indice optique de la cavité, noté n, est une fonction de la position définie par morceaux. Dans la cavité $\overline{\Omega}$, on a $n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et $n > 1$. L'extérieur de la cavité $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$, on a $n \equiv 1$. À noter que la fonction n possède un saut à travers le bord Γ.

On introduit les espaces fonctionnels suivants :

$$\underline{\mathrm{H}}^2(\mathbb{R}^2, \Gamma) = \mathrm{H}^2(\Omega) \oplus \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$$

et la version locale

$$\underline{\mathrm{H}}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \Gamma) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) \mid \forall \chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^2),\ \chi u \in \underline{\mathrm{H}}^2(\mathbb{R}^2, \Gamma) \right\}.$$

On rappelle que le paramètre $p \in \{\pm 1\}$ effectue une sélection entre les modes TE et TM : $p = +1$ pour les modes TM et $p = -1$ pour les modes TE. Chercher les résonances de l'opérateur $P := -n^{-p-1} \operatorname{div}(n^{p-1}\nabla)$ revient à trouver les couples $(k, u) \in \mathbb{C} \times \underline{\mathrm{H}}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \Gamma)$ avec u non nulle, tels que

$$(\mathcal{P}_p) \begin{cases} -\operatorname{div}(n^{p-1}\,\nabla u) - k^2\, n^{p+1}\, u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \\ [u]_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ [n^{p-1}\partial_\nu u]_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \end{cases} \tag{5.5a}$$

où ∂_ν fait référence à la dérivée normale relativement à $\nu : \Gamma \to \mathbb{S}^1$, la normale unitaire sortante par rapport à Ω. On a la condition d'onde sortante suivante : pour tout $r > \sup_{x\in\Omega} |x|$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, il existe $(c_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ tel que

$$u(r, \theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\, \mathsf{H}^{(1)}_m(kr)\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}. \tag{5.5b}$$

Les solutions du système (5.5) sont bien définies par la théorie du *black box scattering* rappelée dans l'annexe B. Étant donné un couple (k, u) solution, k est appelée une résonance et u un mode résonnant associé à k. L'ensemble des résonances est noté $\mathrm{Res}(\mathcal{P}_p)$.

Familles de quasi-résonances. On définit la notion de quasi-résonances qui sont des solutions « approchées » du problème $(\mathcal{P}_p)$ quand $m \to +\infty$.

Définition 5.3. Soit $p \in \{\pm 1\}$. Une famille de quasi-résonances $\mathfrak{K}_p$ et de quasi-modes associés $\mathfrak{U}_p$ pour le problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (5.5) est formée d'une suite $\mathfrak{K}_p = (\underline{k}(m))_{m\geq 1}$ de nombres réels et d'une suite $\mathfrak{U}_p = (\underline{u}(m))_{m\geq 1}$ de fonctions

à valeurs complexes[1] qui satisfont les conditions suivantes. Il existe $m_0 > 0$ tel que pour chaque entier $m \geq m_0$, le couple $(\underline{k}(m), \underline{u}(m))$ est une quasi-solution pour le problème $(\mathcal{P}_p)$ avec une erreur ayant un comportement en $\mathcal{O}(m^{-\infty})$ quand $m \to +\infty$. Plus précisément, cela signifie que :

1. Pour tout entier $m \geq m_0$, la fonction $\underline{u}(m)$ appartient au domaine de l'opérateur P,

$$\underline{u}(m) \in \underline{\mathrm{H}}^2(\mathbb{R}^2, \Gamma), \qquad [\underline{u}(m)]_\Gamma = 0, \qquad \left[n^{p-1}\, \partial_\nu \underline{u}(m)\right]_\Gamma = 0$$

   et est normalisée $\|\underline{u}(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = 1$.

2. On a l'estimation suivante sur $(\underline{k}(m), \underline{u}(m))$ quand $m \to +\infty$,

$$\left\| -\operatorname{div}\left(n^{p-1}\, \nabla \underline{u}(m)\right) - \underline{k}(m)^2\, n^{p+1}\, \underline{u}(m) \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right) \tag{5.6}$$

   où $\mathcal{O}(m^{-\infty})$ désigne une quantité majorée par $C_N\, m^{-N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, où les constantes C_N sont indépendantes de m.

3. Localisation uniforme de $\underline{u}$: il existe une fonction $\mathfrak{X} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^2)$, $0 \leq \mathfrak{X} \leq 1$, telle que

$$\|\mathfrak{X}\underline{u}(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \geq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad (5.6) \text{ vrai avec } \mathfrak{X}\underline{u}(m).$$

4. $\underline{k}(m)$ est lisse par rapport à m : il existe $\beta > 0$ et une fonction lisse $\mathrm{K} \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$ tels que $\mathrm{K}(0) > 0$ et

$$\underline{k}(m) = m\, \mathrm{K}\left(m^{-\beta}\right) \qquad \forall m \geq 1. \tag{5.7}$$

Si n'importe quelle fonction à support compact qui est constante égale à 1 dans un voisinage de Γ peut-être prise pour la fonction $\mathfrak{X}$, on dit que la famille $\mathfrak{K}_p$ est une famille de quasi-résonances de type mode de galerie.

Remarque 5.4. En faisant un développement de Taylor de la fonction K en 0, l'équation (5.7) donne l'existence de coefficients K_q pour $q \in \mathbb{N}$ et d'une constante C_N tels que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \left| \frac{\underline{k}(m)}{m} - \sum_{q=0}^{N} \mathrm{K}_q m^{-q\beta} \right| \leq C_N m^{-(N+1)\beta} \tag{5.8}$$

où $\mathrm{K}_q = \frac{\mathrm{K}^{(q)}(0)}{q!}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. On peut noter que le développement asymptotique (5.4) satisfait cette estimation avec $\beta = \frac{1}{3}$ et $N \leq 5$.

Remarque 5.5. Les quasi-résonances $\underline{k}(m)$ et les quasi-modes associés $\underline{u}(m)$ sont également des quasi-solutions pour des problèmes auto-adjoints. Des exemples de tels problèmes sont :

1. Il serait plus naturel de prendre ces fonctions à valeurs réelles mais dans la suite les constructions seront plus simple techniquement avec des fonctions à valeurs complexes. Une fois les quasi-modes construits, on peut toujours les remplacer par leurs parties réelles.

- Soit $R_\Omega > 0$ tel que $\Omega \Subset [-R_\Omega, R_\Omega]^2$, on considère le problème $(\mathcal{P}_p)$ posé sur le tore $(\mathbb{R}/R_\Omega\mathbb{Z})^2$ avec des conditions de bord périodiques.
- Soit un ouvert $\mathcal{U}$ borné tel que $\Omega \Subset \mathcal{U}$, on considère le problème $(\mathcal{P}_p)$ posé sur $\mathcal{U}$ avec des conditions de Dirichlet ou Neumann homogènes au bord.

Pour ces problèmes les $\underline{k}(m)$ sont des quasi-valeurs propres ce qui est cohérent avec le fait qu'ils sont réels. Dans le chapitre 10, le lien entre les résonances complexes du problème (5.5) et les quasi-résonances est fait en utilisant les résultats généraux démontrés dans [94, 91]. On verra que l'on pourra déduire l'existence de résonances à une distance $\mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$ des quasis-résonances.

Remarque 5.6. L'estimation (5.6) est une borne inférieure sur la résolvante $R(\lambda) = (P-\lambda)^{-1}$ de l'opérateur Pque l'on pourra avec la section 6 de [66]. En effet l'estimation (5.6) montre l'estimation suivante sur la norme d'opérateur de la résolvante $\|R(\lambda)\|$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\|R\left(\underline{k}(m)^2\right)\right\| \geq C m^N \qquad\qquad \forall m \geq 1$$

où $C > 0$ est une constant indépendante de m.

Remarque 5.7. Signalons que cette définition des quasi-résonances est similaire à celle de S.-H. Tang et M. Zworski dans [94] et à celle de P. Stefanov dans [91]. Nous y avons ajouté la notion de localisation uniforme et une hypothèse de régularité des quasi-résonances en fonction du paramètre semi-classique m.

Dans la suite de cette partie, nous allons construire des familles de quasi-résonances $\mathfrak{K}_{p,j}$ et leur quasi-modes associés $\mathfrak{U}_{p;j}$ où $p = \pm 1$ et j est un entier positif qui correspond à l'indice radial dans le cas du disque. On commencera par le cas d'un indice optique variant radialement dans une cavité circulaire Ω dans le chapitre 6. Puis on traitera le cas d'une cavité Ω de forme générale avec un indice optique lisse sous des hypothèses de convexité effective dans le chapitre 8. Dans le chapitre 10, on utilisera les résultats généraux de [94, 91] pour établir le lien entre les quasi-résonances et les résonances. Par ailleurs, dans les chapitres 7 et 9, on compare numériquement les résonances aux quasi-résonances sur des exemples particuliers de cavités.

On revient sur la remarque 5.5 à propos du fait qu'il est naturel que les quasi-résonances soient réelles car on peut les voir comme des quasi-valeurs-propres d'opérateur auto-adjoint. Si on enlève de la définition 5.3 que les quasi-résonances sont réelles, on peut montrer qu'elles sont réelles à un $\mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$ près.

Lemme 5.8. *Soit $(\underline{k}_m)_{m\geq 1}$ une famille de quasi-résonances du problème $(\mathcal{P}_p)$ que l'on ne suppose plus réelles à priori, alors il existe une famille de quasi-résonances $(\widetilde{\underline{k}}_m)_{m\geq 1}$ réelles telle que*

$$\underline{k}_m = \widetilde{\underline{k}}_m + \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$

Démonstration. On commence par montrer que $\mathrm{Im}(\underline{k}_m) = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$. Soit $(\underline{u}_m)_{m\geq 1}$ une famille de quasi-résonances associée à la famille $(\underline{k}_m)_{m\geq 1}$, on pose

$$R(m) = -\operatorname{div}\left(n^{p-1}\,\nabla \underline{u}_m\right) - \underline{k}_m^2\, n^{p+1}\, \underline{u}_m.$$

D'après la définition 5.3, cette quantité a la propriété suivante :

$$m^N \|R(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \to 0, \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

On utilise le lemme B.12 avec le triplet $\underline{k}_m$, $\underline{u}_m$ et $R(m)$ et le triplet $\overline{\underline{k}_m}$, $\overline{\underline{u}_m}$ et $\overline{R(m)}$. On obtient

$$\mathrm{Im}\left(\underline{k}_n^2\right) \int_{\mathbb{R}^2} |\underline{u}_m|^2 \, n^{p+1} \, \mathrm{d}x = \mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}^2} \underline{u}_m \, \overline{R(m)}.$$

Par définition de $R(m)$ et comme $\underline{u}_m$ est un quasi-mode, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \underline{u}_m \, \overline{R(m)} \right| \leq \|R(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$

Par définition de n, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\underline{u}_m|^2 \, n^{p+1} \, \mathrm{d}x \geq \min_{\mathbb{R}^2} n^{p+1} > 0.$$

On obtient donc

$$\mathrm{Im}\left(\underline{k}_m^2\right) = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$$

donc

$$2 \, \mathrm{Re}\left(\underline{k}_m\right) \, \mathrm{Im}\left(\underline{k}_m\right) = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right) \tag{5.9}$$

D'après la définition 5.3 des quasi-résonance, on a qu'il existe $\mathrm{K} \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$ et $\beta > 0$ tel que $\mathrm{K}(0) > 0$ et $\underline{k}_m = m\mathrm{K}\left(m^{-\beta}\right)$. On note $\lambda_q = \frac{\mathrm{K}_{p;j}^{(q)}(0)}{q!}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. Pour tout $Q \in \mathbb{N}$, par la formule de Taylor, on a

$$\underline{k}_m = m \sum_{q=0}^{Q} \lambda_q m^{-\beta q} + \mathcal{O}\left(m^{-\beta(N+1)}\right).$$

Soit ℓ le premier entier tel que $\mathrm{Im}(\lambda_\ell) \neq 0$ alors on a $\mathrm{Im}\left(\underline{k}_m\right) \sim \mathrm{Im}(\lambda_\ell) m^{-\beta\ell}$, ainsi la relation (5.9) implique $\mathrm{Im}(\lambda_\ell) = 0$. Ce qui est absurde donc pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a $\lambda_q \in \mathbb{R}$. D'après le lemme C.11 page 255, il existe $\widetilde{\mathrm{K}} \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$ à valeurs réelles tel que $\widetilde{\mathrm{K}}\left(m^{-\beta}\right) - \mathrm{K}\left(m^{-\beta}\right) = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$. On pose $\widetilde{k}_m = m\widetilde{\mathrm{K}}\left(m^{-\beta}\right)$, la famille de quasi-résonance $\widetilde{\underline{k}}_m$ est réelle. De plus, les quasi-modes associés aux $\widetilde{\underline{k}}_m$ sont les mêmes que ceux associés aux $\underline{k}_m$. □

Dans les chapitres suivants on utilisera la transformation du problème $(\mathcal{P}_p)$ par une homothétie. Pour le lemme suivant on note $\mathcal{P}_p = \mathcal{P}_p(\Omega, n)$ pour expliciter la dépendance du problème par rapport à la cavité Ω et l'indice optique n.

Lemme 5.9. *Soit $\alpha > 0$, on a l'équivalence suivante : (k, u) est solution du problème $(\mathcal{P}_p(\Omega, n))$ si, et seulement si, $(\alpha^{-1}k, u_\alpha)$ est solution de $(\mathcal{P}_p(\alpha^{-1}\Omega, n_\alpha))$ où pour w une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ on note $w_\alpha : x \mapsto w(\alpha x)$.*

Démonstration. Soit (k, u) une solution de $(\mathcal{P}_p(\Omega, n))$. On fait le changement de variable $x = \alpha y$ qui correspond à l'homothétie de rapport α. Ce changement de variable implique les relations $\nabla_x = \alpha^{-1}\nabla_y$ et $\operatorname{div}_x = \alpha^{-1}\operatorname{div}_y$. Avec ces relations, l'équation

$$-\operatorname{div}_x\left(n^{p-1}\nabla_x u\right) = k^2 n^{p+1} u \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$$

devient

$$-\operatorname{div}_y\left(n_\alpha^{p-1}\nabla_y u_\alpha\right) = (\alpha k)^2 n_\alpha^{p+1} u_\alpha \qquad \text{pour } y \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\left(\alpha^{-1}\Omega\right).$$

Les conditions de transmissions $[u]_{\partial\Omega} = 0$ et $[n^{p-1}\,\nu \cdot \nabla_x u]_{\partial\Omega} = 0$ deviennent les conditions $[u_\alpha]_{\partial(\alpha^{-1}\Omega)} = 0$ et $[n^{p-1}\,\nu_\alpha \cdot \nabla_y u_\alpha]_{\partial(\alpha^{-1}\Omega)} = 0$. La condition radiation sortante

$$u(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\ \mathsf{H}_m^{(1)}(k|x|)\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\arg(x)} \qquad \text{pour } |x| > \sup_{x\in\Omega}|x|,$$

sachant $|x| = \alpha|y|$ et $\arg(x) = \arg(y)$, devient

$$u_\alpha(y) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\ \mathsf{H}_m^{(1)}(\alpha k|y|)\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\arg(y)} \qquad \text{pour } |y| > \sup_{y\in\alpha^{-1}\Omega}|y|.$$

Donc le couple $(\alpha k, u_\alpha)$ est solution de $(\mathcal{P}_p(\alpha^{-1}\Omega, n_\alpha))$. Pour la réciproque, on fait le même raisonnement en considérant le changement de variable $y = \alpha^{-1}x$. □

Chapitre 6

Le cas invariant par rotation

Sommaire

6.1 Une famille de problèmes 1D 126
6.2 Interprétation en terme de potentiel 126
6.3 Résonances à modes de galeries : demi-puits triangulaire 131
6.3.1 Le résultat 131
6.3.2 Démonstration du résultat 131
6.4 Résonances à modes de galeries : demi-puits quadratique 143
6.4.1 Le résultat 143
6.4.2 La démonstration du résultat 143
6.5 Résonances internes : puits quadratique 157
6.5.1 Le résultat 157
6.5.2 La démonstration du résultat 157
6.6 Récapitulatif des formules 166
6.6.1 Demi-puits triangulaire 166
6.6.2 Demi-puits quadratique 168
6.6.3 Puits quadratique interne 169

Dans ce chapitre, on construit des quasi-résonances dans le cas où les données du problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (1.5) page 5 sont invariantes par rotation. Dans ce cas, on peut réduire le problème $(\mathcal{P}_p)$ à un problème unidimensionnel en la variable radiale grâce à la décomposition de Fourier. Trois principaux cas sont envisagés : le demi-puits triangulaire, le demi-puits quadratique et le puits quadratique interne.

6.1 Une famille de problèmes 1D

Dans ce chapitre on suppose que le problème $(\mathcal{P}_p)$, défini en (5.5) page 120, est invariant par rotation, c'est-à-dire que Ω est un disque de rayon R et que l'indice optique n dans la cavité ne varie que dans la direction radiale. Sans perte de généralité, on prend $R = 1$ dans la suite, les formules avec $R \neq 1$ qui s'en déduisent seront énoncées à la section 6.6. Comme dans la section 5.1, étant donnée une solution (k, u) du problème $(\mathcal{P}_p)$, on peut décomposer u selon ses modes de Fourier : $u(r,\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} w_m(r)\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}$. On obtient sans difficulté que $(k,(r,\theta) \mapsto w_m(r)\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta})$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_p)$. Par ailleurs, on établit sans peine que (k, w_n) est solution du problème suivant : trouver $(k, w) \in \mathbb{C} \times \underline{\mathrm{H}}^2_{\mathrm{loc}}(]0,+\infty[,\{1\}, r\,\mathrm{d}r)$ avec w non nul tel que

$$(\mathcal{R}_p(m))\begin{cases} -\dfrac{1}{r}\left(r\,n^{p-1}\,w'\right)' + m^2\dfrac{n^{p-1}}{r^2}w - k^2\,n^{p+1}\,w = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\} \\ [w]_{\{1\}} = 0 & \text{à travers } \{1\} \\ [n^{p-1}w']_{\{1\}} = 0 & \text{à travers } \{1\} \\ w'(0) = 0 & \text{si } m = 0 \\ w(r) \propto \mathsf{H}^{(1)}_m(k\,r) & \forall r > 1 \end{cases} . \tag{6.1}$$

Ainsi, en résolvant le problème (6.1) dépendant du paramètre $m \in \mathbb{Z}$ on obtiendra toutes les solutions du problème (5.5). La notation $\propto$ signifie « égal à une constante multiplicative près ». La condition limite en 0 n'est nécessaire que quand $m = 0$ car, pour $m \neq 0$ la singularité $\frac{m^2}{r^2}$ dans l'équation différentielle implique une condition de Dirichlet en 0. La dernière condition est la condition de rayonnement à l'infini. Avec cette condition, on a $\mathrm{Im}(k) < 0$. Contrairement au cas où l'indice optique dans la cavité est constant, le problème $(\mathcal{R}_p(m))$ n'admet pas en général de solution explicite. Toutefois, quand m est grand, ce qui correspond à la situation des modes de galerie, nous pouvons caractériser le comportement des résonances et des modes associés sous forme de développements asymptotiques. C'est l'objet de ce chapitre.

Notons que l'équation différentielle du problème $(\mathcal{R}_p(m))$ peut se réécrire :

$$-w'' - \left(\frac{1}{r} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)w' - \left(k^2\,n^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)w = 0. \tag{6.2}$$

6.2 Interprétation en terme de potentiel

Pour obtenir nos développements asymptotiques, nous allons ré-interpréter le problème $(\mathcal{R}_p(m))$ comme un problème de type Schrödinger. Tout d'abord, on peut penser que k aura le même terme dominant que dans le cas d'un disque variant

radialement que dans le cas d'un disque d'indice constant. D'après (5.4), cela nous conduit à introduire l'ansatz suivant pour les résonances :

$$k^2 = m^2 \frac{1+\lambda}{R_0^2 n_0^2} \tag{6.3}$$

pour un certain $R_0 \in]0,1]$ où on a noté $n_0 = n(R_0)$. On s'autorise à prendre des R_0 différents de 1 car, selon les propriétés de l'indice optique, on ne localisera pas toujours au bord du disque. On est intéressé par le comportement des solutions du problème $(\mathcal{R}_p(m))$ défini en (6.1) quand m est grand. En substituant l'ansatz 6.3 dans l'équation différentielle du problème $(\mathcal{R}_p(m))$, on obtient

$$-m^{-2} \frac{R_0^2 n_0^2}{r n^{p+1}(r)} \left(r\, n^{p-1}(r)\, w' \right)' + \left(\frac{R_0^2 n_0^2}{r^2 n^2(r)} - 1 \right) w = \lambda w \tag{6.4}$$

où m^{-2} est vu comme un petit paramètre. En désignant par $\mathcal{L}$ l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{R_0^2 n_0^2}{r n^{p+1}(r)} \partial_r \left(r\, n^{p-1}(r)\, \partial_r \right) \\ &= \frac{R_0^2 n_0^2}{n^2} \left[\partial_{rr}^2 + \left(\frac{1}{r} + (p-1)\frac{n'}{n} \right) \partial_r \right] \end{aligned}$$

et par V la fonction

$$V(r) = \frac{R_0^2 n_0^2}{r^2 n(r)^2} - 1,$$

l'équation (6.4) se ré-écrit

$$-m^{-2}\, \mathcal{L} w + V w = \lambda w. \tag{6.5}$$

On reconnaît dans (6.5) un problème de résonances pour un opérateur de type Schrödinger. L'opérateur $\mathcal{L}$ est auto-adjoint sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+^*, n^{p+1}(r) r\, \mathrm{d}r)$, ce qui s'établit sans difficulté. Ce qui est important qualitativement dans l'étude des résonances pour l'équation de Schrödinger, c'est la forme du potentiel aux minima locaux, voir [44]. On pose

$$W(r) = \frac{1}{r^2 n(r)^2},$$

de sorte que $V = R_0^2 n_0^2 W - 1$ et W possède les mêmes minima locaux, aux mêmes ordres, que V. Pour $r \in]0,1]$, on a

$$W'(r) = \frac{-2}{r^2 n(r)^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{n'(r)}{n(r)} \right].$$

C'est la forme de W qui va classifier où se localisent les résonances. Si $W'(R_0) = 0$, la quantité importante sera la dérivée seconde $W''(R_0)$ qui vaut

$$W''(R_0) = \frac{2}{R_0^2 n_0^2} \left[\frac{2}{R_0^2} - \frac{n''(R_0)}{n(R_0)} \right].$$

On définit

$$\breve{\kappa} = 1 + \frac{n'(1)}{n(1)} \qquad \text{où} \qquad n(1) = \lim_{r\to 1^-} n(r) \qquad \text{et} \qquad n'(1) = \lim_{r\to 1^-} n'(r).$$

On verra que c'est le signe de la quantité $\breve{\kappa}$ qui distingue les différents comportements de localisation des modes résonnants. La fonction W est continue sur $]0,1]$ et $\lim_{r\to 0^+} W(r) = +\infty$ car la fonction n est continue sur $[0,1]$. La fonction W admet donc des minima locaux sur $]0,1]$. Le comportement de W sur $[1,+\infty[$ est simple : W est strictement décroissant et $\lim_{r\to+\infty} W(r) = 0$.

Exemple 6.1. Afin de visualiser les différentes situations caractéristiques pour le potentiel W, on considère une fonction n sous la forme d'un polynôme de degré deux ayant pour expression

$$n(r) = n_b \left(1 + \frac{1-\breve{\kappa}}{2}(1-r^2)\right)$$

avec $n_b > 1$ et $\breve{\kappa} \in \mathbb{R}$ des réels. Le choix de cette forme pour n a été fait de sorte d'avoir pour n une fonction polynomiale simple vérifiant $n'(0) = 0$ et $n(1) = n_b$, et telle que la fonction $(r,\theta) \mapsto n(r)$ soit une fonction lisse sur le disque unité fermé. Sur la figure 6.1, on a les représentations graphiques des fonctions n pour différentes valeurs du paramètre $\breve{\kappa}$.

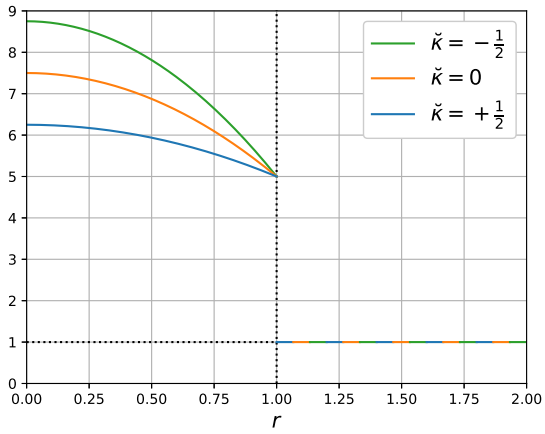


FIGURE 6.1 – Graphes des fonctions n pour $n_b = 5$ et $\breve{\kappa} = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$

Sur la colonne de gauche de la figure 6.2, on a représenté les graphes des modes résonnants $w_{p;j}(m)$ associés aux résonances $k_{p;j}(m)$ pour $p = +1$, $j = 0$ et $m \in \{32, 64, 128, 256\}$. On montre que quelles que soient les valeurs de $\breve{\kappa}$, les modes résonnants semblent se localiser autour d'un point correspondant soit au bord du disque, soit à un point intérieur, mais on obtient des comportements qualitatifs qui dépendent du signe de $\breve{\kappa}$. La première chose que l'on voit c'est que pour $\breve{\kappa} \geq 0$ les modes semblent se localiser à la frontière du disque ($r = 1$) mais que pour $\breve{\kappa} < 0$ les modes semblent se localiser à l'intérieur. La différence entre $\breve{\kappa} = 0$ et $\breve{\kappa} > 0$ se voit peu sur les représentations graphiques mais si on regarde à quel vitesse se rapprochent du bord les maxima, on obtient que pour $\breve{\kappa} > 0$ ils se rapprochent en $m^{-\frac{2}{3}}$ alors que pour $\breve{\kappa} = 0$ ils se rapprochent en $m^{-\frac{1}{2}}$.

Sur la colonne de droite de la figure 6.2, on a représenté les allures des fonctions W associées aux différentes valeurs de $\breve{\kappa}$. On voit qu'en fonction du paramètre $\breve{\kappa}$, on aura deux types de comportements différents : si $\breve{\kappa} \geq 0$, les résonances vont se localiser au bord du disque car $r = 1$ est un minimum local de W. Si $\breve{\kappa} < 0$, elles vont se localiser à l'intérieur car W possède un minium local en $r = R_0 < 1$ ce qui correspond à une configuration appelée puits quadratique interne. On peux également voir que dans le cas $\breve{\kappa} \geq 0$, il y a deux sous-cas : si $W'(1^-) \neq 0$, on a un demi-puits triangulaire et si $W'(1^-) = 0$, on a un demi-puits quadratique (sous réserve que $W''(1^-) \neq 0$ sinon on aura un demi puits d'ordre supérieur). Ceci permet de comprendre la localisation à vitesse $m^{-\frac{2}{3}}$ pour le demi puits triangulaire et $m^{-\frac{1}{2}}$ pour le demi puits quadratique.

Afin d'avoir un traitement unifié des trois cas et construire des quasi-modes associés à ces différentes localisations. Pour cela on localise l'équation différentielle du problème $(\mathcal{R}_p(m))$ défini en (6.1) en r_0 avec le changement de variable $\xi = r - R_0$ et on introduit la notation $n = n(\xi)$ pour la fonction d'indice optique $\xi \mapsto n(R_0+\xi)$. On considère le développement formel suivant pour n :

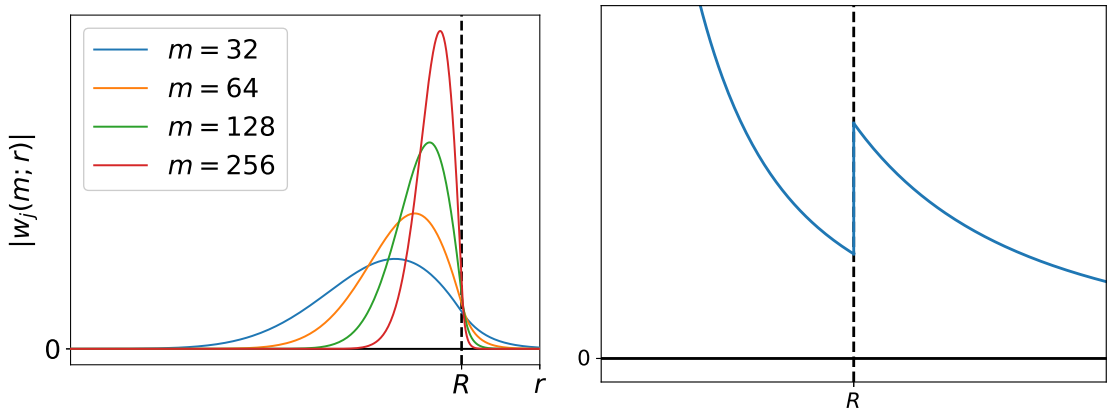
$$n(\xi) = \sum_{\ell \geq 0} \frac{n_\ell}{\ell!} \xi^\ell \qquad \text{où } n_\ell = n^{(\ell)}(0).$$

On pose $\Lambda = m^{-2}\, r_0^2\, n_0^2\, k_{p;j}(m)^2$. À partir de maintenant les indices p et j sont fixés et ne seront plus explicitement mentionnés. Pour calculer un développement asymptotique des résonances du problème $(\mathcal{R}_p(m))$ défini en (6.1), on va construire un quasi-mode du problème $(\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}_{p;R_0}(m))$ qui est le problème $(\mathcal{R}_p(m))$ où on a fait le changement de variable $r = R_0 + \xi$. Il a la forme suivante :

$$(\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}_{p;R_0}(m)) \begin{cases} -m^{-2}\left[w'' + \left(\dfrac{1}{r_0+\xi} + (p-1)\dfrac{n'}{n}\right) w'\right] + \dfrac{1}{(R_0+\xi)^2} w = \dfrac{n^2}{R_0^2 n_0^2}\Lambda w \\ [w]_{\{0\}} = 0 \\ [n^{p-1} w']_{\{0\}} = 0 \\ w(r) \propto \mathsf{H}^{(1)}_m\left(\frac{m\sqrt{\Lambda}}{R_0 n_0}(R_0+\xi)\right) \end{cases} \tag{6.6}$$

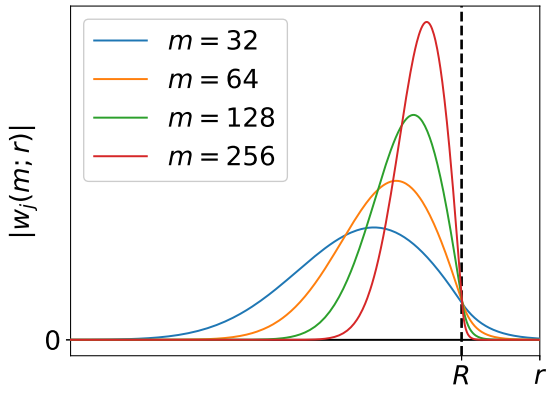
où l'équation différentielle est valable dans $]-R_0, 0[\cup]0, +\infty[$, les conditions de transmissions sont à travers $\{0\}$ et la conditions d'onde sortante est valide pour $\xi > 0$. On a enlevé la condition de limite en 0 car on s'intéresse des asymptotiques quand $m \to +\infty$.

Remarque 6.2. Dans ce chapitre, on a détaillé trois cas pour lesquels on peut calculer des développements asymptotiques. Il y a d'autres cas où cela est encore possible : pour des puits d'ordre plus élevé, des puits plats ou encore dans le cas invariant par rotation pour l'équation de Helmholtz en dimension quelconque voir l'annexe E.

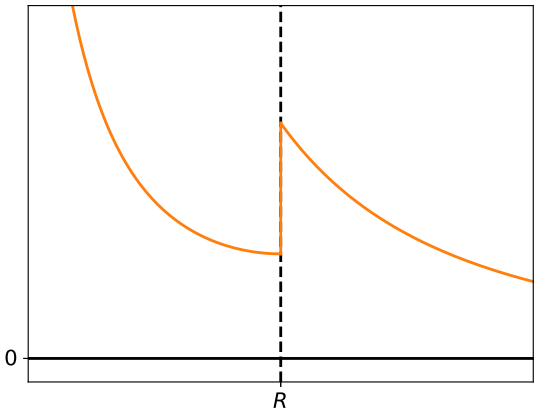


(a) $\breve{\kappa} = +\frac{1}{2}$

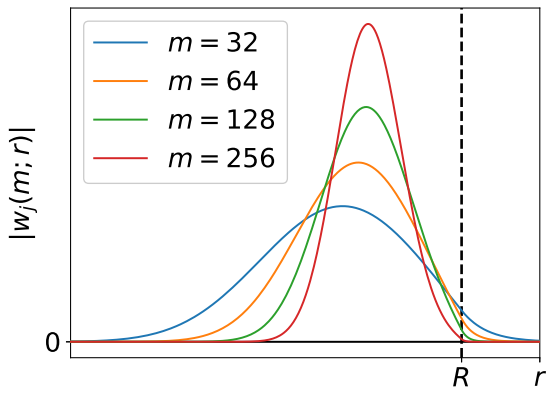
(b) $\breve{\kappa} > 0$



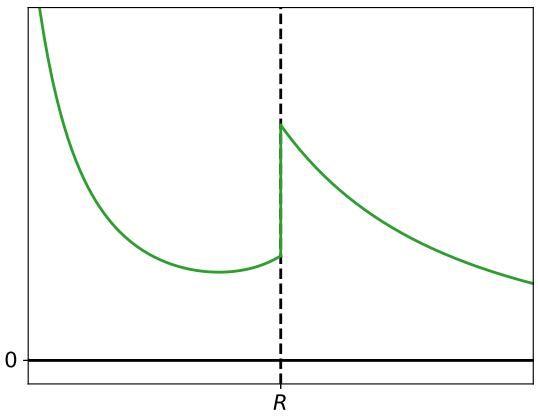
(c) $\breve{\kappa} = 0$



(d) $\breve{\kappa} = 0$



(e) $\breve{\kappa} = -\frac{1}{2}$



(f) $\breve{\kappa} < 0$

FIGURE 6.2 – Sur la colonne de gauche, graphes des modes résonnants $w_{p;j}(m)$ pour $p = +1$, $j = 0$ et $m \in \{32, 64, 128, 256\}$. La fonction n a pour paramètres $n_b = 5$ et $\breve{\kappa} = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$. Sur la colonne de droite, allure des fonctions W pour $\breve{\kappa} > 0$, $\breve{\kappa} = 0$ et $\breve{\kappa} < 0$.

6.3 Résonances à modes de galeries : demi-puits triangulaire

6.3.1 Le résultat

On commence par le cas où $\breve{\kappa} = 1 + \frac{n'(1)}{n(1)} > 0$. Dans ce cas, on a un minimum local du potentiel en $r = 1$, donc on prend $R_0 = 1$. Le cas du disque d'indice constant [59, 85] est un cas particulier du cas envisagé dans cette partie car $\breve{\kappa} = 1$ si n est constant. Dans l'article [50], les auteurs considèrent ce cas pour une cavité sphérique en dimension 3.

Théorème 6.3. *Pour $p \in \{\pm 1\}$ fixé, il existe des familles de quasi-résonances $(\underline{k}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$ et de quasi-modes associés $(\underline{u}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$, indexées par $j \in \mathbb{N}$, au sens de la définition 5.3 avec $\beta = \frac{1}{3}$ telles que l'on ait, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$*

$$\underline{k}_{p;j}(m) = m\mathrm{K}_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$\underline{u}_{p;j}(m;r,\theta) = C\,\chi(r-1)\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}\begin{cases} \Phi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}}; m^{\frac{2}{3}}(r-1)\right) & \text{si } r \leq 1 \\ \Psi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}}; m(r-1)\right) & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

où $\mathrm{K}_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1])$, $\Phi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{R}_-)$, $\Psi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{R}_+)$, $C > 0$ est une constante de normalisation et $\chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(]-1,+\infty[)$ est telle que $\mathrm{supp}(\chi) \subset [-\delta,\delta]$ et $\chi \equiv 1$ sur $\left[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right]$ pour $\delta \in]0,1[$.

6.3.2 Démonstration du résultat

Notation. On introduit les notations suivantes

$$h = \frac{2}{m} \qquad \text{et} \qquad \breve{\kappa} = 1 + \frac{n_1}{n_0}$$

où $n_0 = n(1)$ et $n_1 = n'(1)$.

On fait une mise à l'échelle différente selon que ξ est négatif ou positif. On pose

$$\sigma = h^{-\frac{2}{3}}\xi \text{ pour } \xi < 0 \qquad \text{et} \qquad \rho = h^{-1}\xi \text{ pour } \xi > 0.$$

On fait l'hypothèse que la solution w du problème $(\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}_{p,1}(m))$ défini en (6.6) à la forme suivante :

$$w(\xi) = \begin{cases} \varphi(\sigma) & \xi < 0 \\ \psi(\rho) & \xi > 0 \end{cases}$$

et que φ, ψ et Λ ont des développements formels de la forme

$$\varphi(\sigma) = \sum_{q\geq 0}\varphi_q(\sigma)h^{\frac{q}{3}}, \qquad \psi(\rho) = \sum_{q\geq 0}\psi_q(\rho)h^{\frac{q}{3}}, \qquad \Lambda = \sum_{q\geq -2}\Lambda_q h^{\frac{q+2}{3}}. \tag{6.7}$$

On déduit du problème $(\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}_{p;1}(m))$ défini en (6.6), le problème mis à l'échelle suivant :

$$(\mathcal{R}^{\mathrm{scal}}_h)\begin{cases} -h^{\frac{2}{3}}\varphi'' - h^{\frac{4}{3}}\left(\frac{1}{1+h^{\frac{2}{3}}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi' + \frac{4}{(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma)^2}\varphi = \frac{4n^2}{n_0^2}\Lambda\varphi & \text{dans } \mathbb{R}^*_- \\ -\psi'' - \frac{h}{1+h\rho}\psi' + \frac{4}{(1+h\rho)^2}\psi = \frac{4}{n_0^2}\Lambda\psi & \text{dans } \mathbb{R}^*_+ \\ \varphi(0) = \psi(0) & \\ n_0^{p-1}h^{\frac{1}{3}}\varphi'(0) = \psi'(0) & \\ \varphi \text{ exponetiellement décroissante en } -\infty & \\ \psi \text{ exponetiellement décroissante en } +\infty & \end{cases} . \tag{6.8}$$

On remplace la condition de bord en $-R_0h^{-\frac{2}{3}} = -h^{-\frac{2}{3}}$ et la condition d'onde sortante par deux conditions de décroissance exponentielle en $\pm\infty$. Ce changement nous permettra à la fin de cette section de localiser en 0 nos quasi-modes construits.

Remarque 6.4. Le développement formel de n dans la variable mise à l'échelle σ est

$$n(\sigma h^{\frac{2}{3}}) = \sum_{\ell\geq 0}\frac{n_\ell}{\ell!}\sigma^\ell h^{\frac{2\ell}{3}}$$

et celui de sa dérivée n' est

$$n'(\sigma h^{\frac{2}{3}}) = \sum_{\ell\geq 0}\frac{n_{\ell+1}}{\ell!}\sigma^\ell h^{\frac{2\ell}{3}}.$$

Notons que ces développements sont en puissance de $h^{\frac{2}{3}}$ et donc n^2 et $\frac{1}{n}$ ont un développement formel en puissance de $h^{\frac{2}{3}}$.

Le principe de la construction est de remplacer Λ, φ, ψ et n par leurs développements formels dans $(\mathcal{R}^{\mathrm{scal}}_h)$ défini en (6.8) et d'identifier les termes de même puissance de h, générant ainsi une suite de systèmes différentiels pour Λ_q, φ_q et ψ_q dépendant des coefficients n_q. On commence la construction par lemme suivant.

Lemme 6.5. *On a*

$$\Lambda_{-2} = 1 \qquad \textit{et} \qquad \Lambda_{-1} = 0.$$

Démonstration. On considère les termes en puissance de h^0 issus de l'équation différentielle en φ de $(\mathcal{R}^{\mathrm{scal}}_h)$ défini en (6.8). On trouve $\varphi_0(\sigma) = \Lambda_{-2}\varphi_0(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_-$. Si on suppose que $\Lambda_{-2} \neq 1$ alors φ_0 est identiquement nulle. On considère la puissance de h suivante. On trouve $\varphi_1(\sigma) = \Lambda_{-2}\varphi_1(\sigma)$ sur $h^{\frac{1}{3}}$. Là encore si $\Lambda_{-2} \neq 1$ alors φ_1 est identiquement nulle. On poursuit ainsi de suite et on établit que si $\Lambda_{-2} \neq 1$ la fonction φ est identiquement nulle. Donc nécessairement $\Lambda_{-2} = 1$.

Sachant $\Lambda_{-2} = 1$, on considère à nouveau le terme en puissance $h^{\frac{1}{3}}$. On trouve $0 = \Lambda_{-1}\varphi_0(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_-$. Le même raisonnement que précédemment indique que si on ne veut pas que φ soit identiquement nulle, on doit avoir $\Lambda_{-1} = 0$. □

On déduit du lemme 6.5 que $\Lambda = 1 + h^{\frac{2}{3}}\sum_{q\geq 0}\Lambda_q h^{\frac{q}{3}}$. Pour simplifier les écritures dans la suite, on introduit la notation $\lambda = h^{-\frac{2}{3}}(\Lambda - 1)$ et le développement formel $\lambda = \sum_{q\geq 0}\lambda_q h^{\frac{q}{3}}$. Remarquons que l'on a $\lambda_q = \Lambda_q$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. La construction se poursuit par le lemme suivant. On rappelle que $\breve{\kappa} = 1 + \frac{n_1}{n_0} > 0$.

Lemme 6.6. *Pour $j \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \mathbb{R}_-$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$, on a*

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= a_j \breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}, \\ \varphi_0(\sigma) &= \mathsf{A}\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma\right), \\ \psi_0(\rho) &= 0. \end{aligned}$$

Démonstration. Dans le problème $(\mathcal{R}_h^{\text{scal}})$ défini en (6.8) où on a substitué Λ, φ et ψ par leurs développements formels (6.7), on prend les premiers termes non nuls devant les puissances de $h^{\frac{1}{3}}$. On obtient

$$(\mathcal{R}_{h,0}^{\text{scal}}) \begin{cases} -\varphi_0''(\sigma) - 8\breve{\kappa}\sigma\varphi_0(\sigma) = 4\lambda_0\varphi_0(\sigma) & \sigma \in \mathbb{R}_-^* \quad (\text{ordre } h^{\frac{2}{3}}) \\ -\psi_0''(\rho) + 4\left(1 - \frac{1}{n_0^2}\right)\psi_0(\rho) = 0 & \rho \in \mathbb{R}_+^* \quad (\text{ordre } h^0) \\ \varphi_0(0) = \psi_0(0) & (\text{ordre } h^0) \\ \psi_0'(0) = 0 & (\text{ordre } h^0) \\ \varphi_0 \text{ exponentiellement décroissante en } -\infty & (\text{ordre } h^0) \\ \psi_0 \text{ exponentiellement décroissante en } +\infty & (\text{ordre } h^0) \end{cases}.$$

On commence par résoudre l'équation sur ψ_0, qui est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. On obtient

$$\psi_0(\rho) = \alpha \mathsf{e}^{-\frac{2\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}} + \beta \mathsf{e}^{\frac{2\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}}$$

où α et β sont des constantes. Comme ψ_0 est exponentiellement décroissante en $+\infty$, on a nécessairement $\beta = 0$. La condition $\psi_0'(0) = 0$ implique quand à elle que $\alpha = 0$. La fonction ψ_0 est donc identiquement nulle. On s'intéresse ensuite à φ_0. Le couple (λ_0, φ_0) est solution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\varphi_0'' - 8\breve{\kappa}\,\sigma\varphi_0 = 4\lambda_0\,\varphi_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_-^* \\ \varphi_0(0) = 0 \end{cases}.$$

On fait le changement de variable $x = 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma$ pour se ramener au même problème spectral que celui du lemme C.6 page 251. On en déduit que

$$\breve{\kappa}^{-\frac{2}{3}}\lambda_0 = a_j \qquad \text{et} \qquad \varphi_0(\sigma) = \alpha\,\mathsf{A}(a_j + x)$$

où α est une constante. Ceci donne $\lambda_0 = a_j\,\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}$ et $\varphi_0(\sigma) = \alpha\,\mathsf{A}\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma\right)$ où la famille $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble des zéros de la fonction de Airy A, voir C.5 page 251. Notons que φ_0 est bien exponentiellement décroissante en $-\infty$ donc, d'après le lemme C.3 page 251, on peut prendre n'importe quelle valeur non nulle pour α. On prend $\alpha = 1$. □

Le lemme suivant décrit la structure des problèmes permettant de calculer les différents termes des développements asymptotiques de λ, φ et ψ.

Lemme 6.7. *La suite de problèmes* $(\mathcal{R}^{\mathrm{scal}}_{h,q})$ *pour* $q \geq 1$ *a la forme suivante*

$$(\mathcal{R}^{\mathrm{scal}}_{h,q}) \begin{cases} -\varphi_q''(\sigma) - (8\breve{\kappa}\sigma + 4\lambda_0)\varphi_q(\sigma) = 4\lambda_q\varphi_0(\sigma) + S_q^{\varphi}(\sigma) & \sigma \in \mathbb{R}_- \quad (\textit{ordre } h^{\frac{q+2}{3}}) \\ -\psi_q''(\rho) + 4\left(1 - \frac{1}{n_0^2}\right)\psi_q(\rho) = S_q^{\psi}(\rho) & \rho \in \mathbb{R}_+ \quad (\textit{ordre } h^{\frac{q}{3}}) \\ \varphi_q(0) = \psi_q(0) & (\textit{ordre } h^{\frac{q}{3}}) \\ \psi_q'(0) = n_0^{p-1}\varphi_{q-1}'(0) & (\textit{ordre } h^{\frac{q}{3}}) \\ \varphi_q \textit{ exponentiellement décroissante en } -\infty & (\textit{ordre } h^{\frac{q}{3}}) \\ \psi_q \textit{ exponentiellement décroissante en } +\infty & (\textit{ordre } h^{\frac{q}{3}}) \end{cases}$$

où les fonctions S_q^{φ} *et* S_q^{ψ} *sont explicitées dans la démonstration aux relations* (6.9) *et* (6.10)*, et dépendent de* $(\lambda_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$, $(\varphi_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$, $(\psi_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$ *et de* $(n_\ell)_{\ell=0}^{q+2}$.

Notation. Soit $S = \sum_{\ell\geq 0} s_\ell h^{\frac{\ell}{3}}$ une série formelle. On utilise la notation $\left[h^{\frac{q}{3}}\right](S) = s_q$ pour indiquer que l'on extrait le coefficient d'ordre $h^{\frac{q}{3}}$.

Démonstration. On part des équations du problème $(\mathcal{R}^{\mathrm{scal}}_h)$ défini en (6.8) et on considère les termes d'ordres $h^{\frac{q+2}{3}}$ ou $h^{\frac{q}{3}}$. Pour les conditions de décroissance exponentielle et les conditions de transmission, en prenant les termes d'ordre $h^{\frac{q}{3}}$, on obtient directement les résultats énoncés. Pour l'équation en φ, on considère les termes d'ordre $h^{\frac{q+2}{3}}$:

$$\left[h^{\frac{q+2}{3}}\right]\left(h^{\frac{2}{3}}\varphi''\right) = \varphi_q'',$$

$$\left[h^{\frac{q+2}{3}}\right]\left(h^{\frac{4}{3}}\left(\frac{1}{1+h^{\frac{2}{3}}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi'\right) = \sum_{\ell=0}^{q-2}\left[h^{\frac{q-2-\ell}{3}}\right]\left(\frac{1}{1+h^{\frac{2}{3}}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi_\ell',$$

$$\left[h^{\frac{q+2}{3}}\right]\left(\frac{4\varphi}{\left(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\right)^2}\right) = 4\varphi_{q+2} - 8\sigma\varphi_q + \sum_{\ell=0}^{q-1}\left[h^{\frac{q+2-\ell}{3}}\right]\left(\frac{4}{\left(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\right)^2}\right)\varphi_\ell.$$

Pour le dernier terme de l'équation différentielle sur φ, on remarque qu'avec le lemme 6.5, on a $\Lambda = 1 + h^{\frac{2}{3}}\sum_{\ell\geq 0}\lambda_\ell h^{\frac{\ell}{3}}$ et donc

$$\begin{aligned}\left[h^{\frac{q+2}{3}}\right]\left(4\frac{n^2}{n_0^2}\Lambda\varphi\right) = 4\varphi_{q+2} + 8\frac{n_1}{n_0}\sigma\varphi_q + 4\sum_{\ell=0}^{q-1}\left[h^{\frac{q+2-\ell}{3}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2}\right)\varphi_\ell + 4\lambda_q\varphi_0 + 4\lambda_0\varphi_q \\ + 4\left[h^{\frac{q}{3}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2}\right)\lambda_0\varphi_0 + 4\sum_{\substack{a,b,\ell=0 \\ a+b+\ell=q-1}}^{q-1}\left[h^{\frac{a}{3}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2}\right)\lambda_b\varphi_\ell.\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}S_q^{\varphi} = 4\sum_{\ell=0}^{q-1}\left[h^{\frac{q+2-\ell}{3}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2} - \frac{1}{\left(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\right)^2}\right)\varphi_\ell + 4\sum_{\substack{a,b,\ell=0 \\ a+b+\ell=q-1}}^{q-1}\left[h^{\frac{a}{3}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2}\right)\lambda_b\varphi_\ell \\ + 4\left[h^{\frac{q}{3}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2}\right)\lambda_0\varphi_0 + \sum_{\ell=0}^{q-2}\left[h^{\frac{q-2-\ell}{3}}\right]\left(\frac{1}{1+h^{\frac{2}{3}}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi_\ell', \quad (6.9)\end{aligned}$$

on obtient

$$-\varphi_q''(\sigma) - (8\check{\kappa}\sigma + 4\lambda_0)\varphi_q(\sigma) = 4\lambda_q\varphi_0(\sigma) + S_q^{\varphi}(\sigma).$$

De même pour l'équation sur ψ, en considérant les termes d'ordre $h^{\frac{q}{3}}$, on obtient :

$$\left[h^{\frac{q}{3}}\right](\psi'') = \psi_q'',$$

$$\left[h^{\frac{q}{3}}\right]\left(\frac{h}{1+h\rho}\psi'\right) = \sum_{\ell=0}^{q-3}\left[h^{\frac{q-3-\ell}{3}}\right]\left(\frac{1}{1+h\rho}\right)\psi_\ell',$$

$$\left[h^{\frac{q}{3}}\right]\left(\frac{4\psi}{(1+h\rho)^2}\right) = 4\psi_q + \sum_{\ell=0}^{q-3}\left[h^{\frac{q-\ell}{3}}\right]\left(\frac{4}{(1+h\rho)^2}\right)\psi_\ell,$$

$$\left[h^{\frac{q}{3}}\right]\left(\frac{4\Lambda}{n_0^2}\psi\right) = \frac{4}{n_0^2}\psi_q + 4\sum_{\ell=0}^{q-2}\frac{\lambda_{q-2-\ell}}{n_0^2}\psi_\ell.$$

En posant

$$S_q^{\psi} = 4\sum_{\ell=0}^{q-2}\frac{\lambda_{q-2-\ell}}{n_0^2}\psi_\ell + \sum_{\ell=0}^{q-3}\left[h^{\frac{q-\ell}{3}}\right]\left(\frac{4}{(1+h\rho)^2}\right)\psi_\ell + \sum_{\ell=0}^{q-3}\left[h^{\frac{q-3-\ell}{3}}\right]\left(\frac{1}{1+h\rho}\right)\psi_\ell', \tag{6.10}$$

on obtient

$$-\psi_q''(\rho) + 4\left(1-\frac{1}{n_0^2}\right)\psi_q(\rho) = S_q^{\psi}(\rho).$$

□

Lemme 6.8. *Il existe une solution non nulle $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ aux systèmes $(\mathcal{R}_{h,q}^{\mathrm{scal}})_{q\in\mathbb{N}}$ définis au lemme 6.7. De plus, on a les expressions suivantes pour $q\in\mathbb{N}$*

$$\varphi_q(\sigma) = P_q^{\varphi}(\sigma)\,\mathsf{A}\left(a_j + 2\check{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma\right) + Q_q^{\varphi}(\sigma)\,\mathsf{A}'\left(a_j + 2\check{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma\right) \qquad \forall\sigma\in\mathbb{R}_-$$

$$\psi_q(\rho) = P_q^{\psi}(\rho)\exp\left(\frac{-2\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}\right) \qquad \forall\rho\in\mathbb{R}_+$$

où $P_q^{\varphi}, Q_q^{\varphi}, P_q^{\psi} \in \mathbb{R}_{2q}[X]$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur q. Pour $q=0$, le lemme 6.6 fournit λ_0, φ_0 et ψ_0. On a

$$P_0^{\varphi} = 1, \qquad Q_0^{\varphi} = 0, \qquad P_0^{\psi} = 0,$$

qui sont des polynômes de $\mathbb{R}_0[X]$. On prend $q\geq 1$ et on suppose que l'on a construit $(\lambda_\ell)_{0\leq\ell\leq q-1}$, $(\varphi_\ell)_{0\leq\ell\leq q-1}$ et $(\psi_\ell)_{0\leq\ell\leq q-1}$. On veut construire λ_q, φ_q et ψ_q. On va commencer par résoudre l'équation en ψ_q. Grâce au lemme 6.7, on connaît la forme du système $(\mathcal{R}_{h,q}^{\mathrm{scal}})$ et la forme des termes sources. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $E_{q-1}^{\psi}\in\mathbb{R}_{q-1}[X]$ tel que

$$S_q^{\psi}(\rho) = E_{q-1}^{\psi}(\rho)\exp\left(\frac{-2\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}\right).$$

Le fait que le polynôme E_{q-1}^{ψ} soit de degré au plus $q-1$ n'a rien d'évident mais la relation (6.10), dans la démonstration du lemme 6.7, en donne une expression précise. Pour la première somme dans (6.10), on voit que le degré maximal en ρ est $q-2$. Dans la deuxième somme dans (6.10), chaque terme a en ρ un degré $\ell+\frac{q-\ell}{3}=\frac{2\ell+q}{3}$ pour $0\leq\ell\leq q-3$. Le degré maximal est $q-2$. Pour la troisième somme dans (6.10), chaque terme a en ρ un degré $\ell+\frac{q-3-\ell}{3}=\frac{2\ell+q-3}{3}$ pour $0\leq\ell\leq q-3$. Le degré maximal est $q-3$. Le lemme C.1 page 250 fournit une solution particulière $\widetilde{\psi}_q$ de l'équation différentielle d'inconnue ψ_q : il existe $\widetilde{P}_q^{\psi}\in\mathbb{R}_{q-1}[X]$ tel que $\widetilde{\psi}_q(\rho)=\rho\widetilde{P}_q^{\psi}(\rho)\exp\left(\frac{-2\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}\right)$. On a donc

$$\psi_q(\rho)=\left(\alpha+\rho\widetilde{P}_q^{\psi}(\rho)\right)\exp\left(\frac{-2\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}\right).$$

On détermine α à l'aide de la condition $\psi_q'(0)=n_0^{p-1}\varphi_{q-1}'(0)$. On obtient

$$\alpha=\frac{n_0\widetilde{\psi}_q'(0)-n_0^p\varphi_{q-1}'(0)}{\sqrt{n_0^2-1}}.$$

On pose finalement $P_q^{\psi}=\alpha+\rho\widetilde{P}_q^{\psi}(\rho)\in\mathbb{R}_q[X]$.

Intéressons nous à présent à l'équation sur φ. D'après le lemme 6.7 et l'hypothèse de récurrence, il existe $R_{q-1}^{\varphi},T_{q-1}^{\varphi}\in\mathbb{R}_{q-1}[X]$ tel que

$$S_q^{\varphi}(\sigma)=R_{q-1}^{\varphi}(\sigma)\,\mathsf{A}\left(a_j+2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma\right)+T_{q-1}^{\varphi}(\sigma)\,\mathsf{A}'\left(a_j+2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma\right).$$

Le fait que les polynômes R_{q-1}^{φ} et T_{q-1}^{φ} soient de degré au plus $2q-1$ n'a rien d'évident. Une expression du terme S_q^{φ} est donnée en (6.9), dans la démonstration du lemme 6.7. Pour la première somme dans (6.9), chaque terme a en σ un degré $2\ell+\frac{q+2-\ell}{2}=\frac{3\ell+q+2}{2}$ pour $0\leq\ell\leq q-1$. Le degré maximal est la partie entière de $2q-\frac{1}{2}$ c'est-à-dire $2q-1$. Pour la deuxième somme dans (6.9), chaque terme a en σ un degré $2\ell+\frac{q-1-\ell}{2}=\frac{3\ell+q-1}{2}$ pour $0\leq\ell\leq q-1$. Le degré maximal est $2q-2$. Pour la troisième somme dans (6.9), chaque terme a en σ un degré $2\ell+1+\frac{q-2-\ell}{2}=\frac{3\ell+q}{2}$ pour $0\leq\ell\leq q-2$. Le degré maximal est $2q-1$. Le lemme C.2 page 250 fournit une solution particulière $\widetilde{\varphi}_q$ à l'équation différentielle d'inconnue φ_q : il existe $\widetilde{P}_q^{\varphi}\in\mathbb{R}_{2q-1}[X]$ et $\widetilde{Q}_q^{\varphi}\in\mathbb{R}_{2q}[X]$ tel que $\widetilde{\varphi}_q(\sigma)=\sigma\widetilde{P}_q^{\varphi}(\sigma)\,\mathsf{A}\left(a_j+2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma\right)+\widetilde{Q}_q^{\varphi}(\sigma)\,\mathsf{A}'\left(a_j+2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma\right)$. On en déduit que

$$\varphi_q(\sigma)=\frac{\lambda_q}{4\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}}\,\mathsf{A}'\left(a_j+2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma\right)+\widetilde{\varphi}_q(\sigma).$$

La condition $\varphi_q(0)=\psi_q(0)$ permet d'établir que

$$\lambda_q=\frac{4\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}}{\mathsf{A}'(a_j)}\left(\psi_q(0)-\widetilde{\varphi}_q(0)\right).$$

Pour tout $j\in\mathbb{N}$, on a $\mathsf{A}'(a_j)\neq 0$ voir [74, section 9.9(ii)]. De plus, on a $P_q^{\varphi}=\sigma\widetilde{P}_q^{\varphi}\in\mathbb{R}_{2q}[X]$ et $Q_q^{\varphi}=\frac{\lambda_q}{4\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}}+\widetilde{Q}_q^{\varphi}\in\mathbb{R}_{2q}[X]$ ce qui achève la récurrence.

On a construit itérativement $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_q)_{q\in\mathbb{N}}$. Le quasi-mode est non nul car, d'après le lemme 6.6, φ_0 n'est pas identiquement nulle. □

Les résultats précédents ont permis de préciser la manière dont les suites $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ étaient construites. Reste à préciser en quel sens les séries formelles (6.7) page 131 définies à partir de ces suites peuvent converger. On a recours au lemme C.11 page 255 de sommation de Borel, ce qui nécessite d'introduire les définitions suivantes.

Définition-Propriété 6.9. Il existe une fonction $\Lambda_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1])$ et des profils $\Phi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{R}_-)$ et $\Psi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{R}_+)$ tels que pour tout $t\in[0,1]$, pour tout $(\sigma,\rho)\in\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}_+$ et pour tout $N\in\mathbb{N}$, on ait

$$\begin{aligned}
\Lambda_{p;j}(t) &= 1 + 2^{\frac{2}{3}}t^2\sum_{q=0}^{N}\lambda_q 2^{\frac{q}{3}}t^q + t^{N+3}R^{\lambda}_N(t),\\
\Phi_{p;j}(t;\sigma) &= \sum_{q=0}^{N}\varphi_q(\sigma)2^{\frac{q}{3}}t^q + t^{N+1}R^{\varphi}_N(t;\sigma),\\
\Psi_{p;j}(t;\rho) &= \sum_{q=0}^{N}\psi_q(\rho)2^{\frac{q}{3}}t^q + t^{N+1}R^{\psi}_N(t;\rho),
\end{aligned}$$

où les restes R^{λ}_N, R^{φ}_N et R^{ψ}_N vérifient $R^{\lambda}_N \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1])$, $R^{\varphi}_N \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{R}_-)$ et $R^{\psi}_N \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{R}_+)$.

Démonstration. On note $t = \left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$. Le lemme C.11 page 255 donne la fonction $\Lambda_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([-1,1])$ correspondant à la suite $(2^{\frac{q}{3}}\lambda_q q!)_{q\in\mathbb{N}}$ et les profils $\Phi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([-1,1]\times\mathbb{R}_-)$ et $\Psi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([-1,1]\times\mathbb{R}_+)$ correspondants aux suites $(2^{\frac{q}{3}}q!\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(2^{\frac{q}{3}}q!\psi_q)_{q\in\mathbb{N}}$. Le corollaire C.12 donne les propriétés énoncées. □

Remarque 6.10. On définit t de cette manière de sorte à avoir $t = m^{-\frac{1}{3}}$.

Revenons au problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (5.5). Pour construire un quasi-mode pour ce problème, il suffit de prendre les fonctions construites précédemment et de les localiser à l'aide d'une troncature lisse. On prend $\delta\in]0,1[$ et on définit une fonction plateau $\chi\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}([-1,+\infty))$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que $\mathrm{supp}(\chi)\subset[-\delta,\delta]$ et $\chi\equiv 1$ sur $\left[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right]$.

Notation 6.11. On note, pour $\xi\in[-1,+\infty[$, $r\in\mathbb{R}_+$ et $\theta\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\underline{k}_{p;j}(m) &:= \frac{m}{n_0}\sqrt{\Lambda_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}}\right)},\\
w_{p;j}(m;\xi) &:= \chi(\xi)\begin{cases}\Phi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};\sigma\right) & \text{si } \xi<0\\ \Psi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};\rho\right) & \text{si } \xi\geq 0\end{cases},\\
\underline{u}_{p;j}(m;r,\theta) &:= w_{p;j}(m;r-1)\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}.
\end{aligned}$$

Pour la définition de $\underline{u}_{p;j}(m)$, le choix de multiplier par $\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}$ et non par $\mathsf{e}^{-\mathsf{i}m\theta}$ est arbitraire. Pour chaque quasi-résonance, on peut en fait associer deux quasi-modes $\underline{u}_{p;j}(m)$ et $\overline{\underline{u}_{p;j}(m)}$. On établira au lemme 10.1 page 222 qu'ils sont orthogonaux. On dit que les quasi-résonances sont de multiplicité deux.

Notation. Pour $\sigma \in \mathbb{R}_-$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$, on note pour simplifier :

$$\Lambda_{p;j}(m) = \Lambda_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}}\right),$$
$$\varphi_{p;j}(m;\sigma) = \Phi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};\sigma\right),$$
$$\psi_{p;j}(m;\rho) = \Psi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};\rho\right).$$

Lemme 6.12. *Pour tout entier $m \geq 1$, on a*

$$\left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \frac{\sqrt{\pi}\,|\mathsf{A}'(a_j)|}{\breve{\kappa}^{\frac{1}{6}}}\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{3}} + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{2}{3}}\right).$$

Démonstration. Soit $m \geq 1$. On a

$$\begin{aligned}\left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} &= 2\pi\int_{-1}^{+\infty}|w_{p;j}(m;\xi)|^2\,(1+\xi)\,\mathrm{d}\xi,\\ &= h^{\frac{2}{3}}\,2\pi\int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{0}|\varphi_{p;j}(m;\sigma)|^2\,\mathrm{d}\sigma + \mathcal{O}(h),\\ &= h^{\frac{2}{3}}\,2\pi\int_{-\infty}^{0}\left|\mathsf{A}\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma\right)\right|^2\mathrm{d}\sigma + \mathcal{O}(h).\end{aligned}$$

On connaît la valeur de cette dernière intégrale, voir le lemme C.4 page 251. On obtient

$$\left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \frac{\pi\,\mathsf{A}'(a_j)^2}{\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}}\,h^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(h).$$

□

Lemme 6.13. *Pour $p \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$ fixés, la suite de quasi-résonances et quasi-modes $(\underline{k}_{p;j}(m), \underline{u}_{p;j}(m))_{m\in\mathbb{N}^*}$ vérifie les propriétés suivantes :*

- *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le quasi-mode $\underline{u}_{p;j}(m)$ est à support compact :*

$$\mathrm{supp}(\underline{u}_{p;j}(m)) \subset [1-\delta, 1+\delta]\times\mathbb{S}^1 \Subset B(0,1+2\delta).$$

- *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le quasi-mode $\underline{u}_{p;j}(m)$ est lisse sauf à travers Γ :*

$$\underline{u}_{p;j}(m)_{|\overline{\Omega}} \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right), \qquad \underline{u}_{p;j}(m)_{|\mathbb{R}^2\setminus\Omega} \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^2\setminus\Omega\right).$$

- *On a l'estimation suivante de l'erreur sur les conditions de transmission quand $m \to +\infty$*

$$\left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right), \qquad \left[n^{p-1}\,\partial_\nu\underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$

- *On a l'estimation suivante quand $m \to +\infty$*

$$\left\|\mathrm{div}\left(n^{p-1}\nabla\underline{u}_{p;j}(m)\right) + \underline{k}^2_{p;j}(m)\,n^{p+1}\,\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$

Démonstration. Dans toute la démonstration, p et j sont des entiers fixés, et on rappelle la notation $h = \frac{2}{m}$. Par construction les quasi-modes sont à support compact car $\operatorname{supp}(\underline{u}_{p;j}(m)) \subset [1-\delta, 1+\delta] \times \mathbb{S}^1$. De même, par construction, les quasi-modes sont lisses sauf à travers Γ, voir le lemme 6.9.

Pour les conditions de transmission, on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma(\theta) &= \left[w_{p;j}(m)\right]_{\{0\}} \mathsf{e}^{\mathrm{i}m\theta},\\ \left[n^{p-1}\partial_\nu \underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma(\theta) &= \left[n^{p-1}\partial_\xi w_{p;j}(m)\right]_{\{0\}} \mathsf{e}^{\mathrm{i}m\theta}.\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\left[w_{p;j}(m)\right]_{\{0\}} &= \psi_{p;j}(m;0) - \varphi_{p;j}(m;0) = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right),\\ \left[n^{p-1}\partial_\xi w_{p;j}(m)\right]_{\{0\}} &= h^{-1}\partial_\rho \psi_{p;j}(m;0) - n_0^{p-1}h^{-\frac{2}{3}}\partial_\sigma \varphi_{p;j}(m;0)\\ &= h^{-1}\left(\partial_\rho \psi_{p;j}(m;0) - n_0^{p-1}h^{\frac{1}{3}}\partial_\sigma \varphi_{p;j}(m;0)\right)\\ &= \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right),\end{aligned}$$

d'après les développements de $\varphi_{p;j}(m)$ et de $\psi_{p;j}(m)$ donnés dans la définition 6.9 et grâce au lemme 6.7.

Considérons à présent l'estimation L^2. On note pour simplifier

$$\begin{aligned}\mathrm{L}^2_\xi &= \mathrm{L}^2(]-\delta,\delta[, (1+\xi)\,\mathrm{d}\xi),\\ \mathrm{L}^2_\sigma &= \mathrm{L}^2\left(\left]-h^{-\frac{2}{3}}\delta, 0\right[, h^{\frac{2}{3}}\left(1+\sigma h^{\frac{2}{3}}\right)\mathrm{d}\sigma\right),\\ \mathrm{L}^2_\rho &= \mathrm{L}^2\left(\left]0, h^{-1}\delta\right[, h(1+\rho h)\,\mathrm{d}\rho\right).\end{aligned}$$

Dans la suite de la démonstration la notation prime pour les dérivées sera toujours relative à la variable ξ pour w, à la variable σ pour φ et à la variable ρ pour ψ. On a

$$\left\|\operatorname{div}\left(n^{p-1}\,\nabla \underline{u}_{p;j}(m)\right) + k^2_{p;j}(m)\,n^{p+1}\,\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \leq 2\pi m^2 \max_{\mathbb{R}^2} n^{p-1}\,\mathcal{N}_w$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_w = \Bigg\| h^2\left[w''_{p;j}(m) + \left(\frac{1}{1+\xi} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)w'_{p;j}(m)\right]\\ + 4\left(\frac{n^2}{n_0^2}\Lambda_{p;j}(m) - \frac{4}{(1+\xi)^2}\right)w_{p;j}(m)\Bigg\|_{\mathrm{L}^2_\xi}.\end{aligned}$$

On veut montrer que $\mathcal{N}_w = \mathcal{O}\left(h^\infty\right)$. Pour cela, on va montrer que $\mathcal{N}_w = \mathcal{O}\left(h^N\right)$ pour tout entier N. On rappelle que l'on a par la définition 6.9

$$\Lambda_{p;j}(m) = 1 + h^{\frac{2}{3}}\sum_{q=0}^{3N+2}\lambda_q h^{\frac{q}{3}} + \mathcal{O}\left(h^{N+1+\frac{2}{3}}\right), \tag{6.11a}$$

$$\varphi_{p;j}(m;\sigma) = \sum_{q=0}^{3N+2}\varphi_q(\sigma)h^{\frac{q}{3}} + \mathcal{O}\left(h^{N+1}\right), \tag{6.11b}$$

$$\psi_{p;j}(m;\rho) = \sum_{q=0}^{3N+2} \psi_q(\rho) h^{\frac{q}{3}} + \mathcal{O}\left(h^{N+1}\right). \tag{6.11c}$$

Pour mener à bien l'estimation en norme L^2_ξ, on scinde $\mathcal{N}_w$ en deux morceaux correspondant aux intervalles $[-\delta, 0]$ et $[0, \delta]$. On a recours aux relations suivantes pour $\xi < 0$

$$\begin{aligned} w'_{p;j}(m;\xi) &= \chi'(h^{\frac{2}{3}}\sigma)\varphi_{p;j}(m;\sigma) + h^{-\frac{2}{3}}\chi(h^{\frac{2}{3}}\sigma)\varphi'_{p;j}(m;\sigma), \\ w''_{p;j}(m;\xi) &= \chi''(h^{\frac{2}{3}}\sigma)\varphi_{p;j}(m;\sigma) + 2h^{-\frac{2}{3}}\chi'(h^{\frac{2}{3}}\sigma)\varphi'_{p;j}(m;\sigma) + h^{-\frac{4}{3}}\chi(h^{\frac{2}{3}}\sigma)\varphi''_{p;j}(m;\sigma) \end{aligned}$$

et aux relations suivantes pour $\xi > 0$

$$\begin{aligned} w'_{p;j}(m;\xi) &= \chi'(h\rho)\psi_{p;j}(m;\rho) + h^{-1}\chi(h\rho)\psi'_{p;j}(m;\rho), \\ w''_{p;j}(m;\xi) &= \chi''(h\rho)\psi_{p;j}(m;\rho) + 2h^{-1}\chi'(h\rho)\psi'_{p;j}(m;\rho) + h^{-2}\chi(h\rho)\psi''_{p;j}(m;\rho). \end{aligned}$$

On a alors $\mathcal{N}_w \leq \mathcal{N}_\varphi + \mathcal{N}'_\varphi + \mathcal{N}_\psi + \mathcal{N}'_\psi$ où

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\varphi = \Bigg\| & h^{\frac{2}{3}}\varphi''_{p;j}(m) + h^{\frac{4}{3}}\left(\frac{1}{1+h^{\frac{2}{3}}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi'_{p;j}(m) \\ & + 4\left(\frac{n^2}{n_0^2}\Lambda_{p;j}(m) - \frac{1}{\left(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\right)^2}\right)\varphi_{p;j}(m)\Bigg\|_{\mathrm{L}^2_\sigma}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{N}'_\varphi = \left\|\chi'\, 2h^{\frac{4}{3}}\varphi'_{p;j}(m) + \chi'\, h^{\frac{4}{3}}\left(\frac{1}{1+h^{\frac{2}{3}}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi_{p;j}(m) + \chi''\, h^2\varphi_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2_\sigma},$$

$$\mathcal{N}_\psi = \left\|\psi''_{p;j}(m) + \frac{h}{1+h\rho}\psi'_{p;j}(m) + 4\left(\frac{1}{n_0^2}\Lambda_{p;j}(m) - \frac{1}{(1+h\rho)^2}\right)\psi_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2_\rho},$$

$$\mathcal{N}'_\psi = \left\|\chi'\, 2h\psi'_{p;j}(m) + \chi'\,\frac{h}{1+h\rho}\psi_{p;j}(m) + \chi''\, h^2\psi_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2_\rho}.$$

On commence par le terme $\mathcal{N}'^2_\varphi$. Avec l'estimation $\frac{1}{1+h^{\frac{2}{3}}\sigma} \leq \frac{1}{1-\delta}$ pour $\sigma h^{\frac{2}{3}} \in [-\delta, 0]$ et le fait que la fonction $\sigma \mapsto \frac{n'(h^{\frac{2}{3}}\sigma)}{n(h^{\frac{2}{3}}\sigma)}$ est bornée sur $\left[-h^{-\frac{2}{3}}\delta, 0\right]$ (car la fonction $\frac{n'}{n}$ est continue sur $[-1, 0]$) et d'après le lemme 6.8 et le fait que χ' et χ'' sont bornées, on obtient l'existence de $P, Q \in \mathbb{R}_+[X, Y]$ tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}'^2_\varphi \lesssim & \int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}} P(|\sigma|, h^{\frac{1}{3}})\left|\mathsf{A}\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma\right)\right|^2 \mathrm{d}\sigma \\ & + \int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}} Q(|\sigma|, h^{\frac{1}{3}})\left|\mathsf{A}'\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma\right)\right|^2 \mathrm{d}\sigma + \int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}} h^{2N+2+\frac{8}{3}}\,\mathrm{d}\sigma. \end{aligned}$$

Le dernier terme vient des termes de reste dans les expressions (6.11). On a $h \leq 1$ et d'après le lemme C.3 page 251, A et A' sont équivalentes en $-\infty$ à des exponentielles décroissantes. On en déduit que

$$\int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}} P(|\sigma|, h^{\frac{1}{3}})\left|\mathsf{A}\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma\right)\right|^2 \mathrm{d}\sigma \lesssim \int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}} P(|\sigma|, 1)\mathrm{e}^{-2|\sigma|}\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$\lesssim \int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}} \mathsf{e}^{-|\sigma|}\,\mathrm{d}\sigma,$$
$$\lesssim h^{-\frac{2}{3}} \exp\left(-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}\right).$$

De même, on a

$$\int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}} Q(|\sigma|, h^{\frac{1}{3}}) \left|\mathsf{A}'\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma\right)\right|^2 \mathrm{d}\sigma \lesssim h^{-\frac{2}{3}} \exp\left(-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}\right).$$

On en déduit que $\mathcal{N}'_\varphi = \mathcal{O}\left(h^{N+2}\right)$. Avec une méthode similaire, on majore le terme $\mathcal{N}'^2_\psi$ à l'aide du lemme 6.7, de la manière suivante : il existe $P \in \mathbb{R}_+[X,Y]$ tel que

$$\mathcal{N}'^2_\psi \lesssim \int_{h^{-1}\frac{\delta}{2}}^{h^{-1}\delta} P(|\rho|, h^{\frac{1}{3}})\mathsf{e}^{\frac{-4\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}}\,\mathrm{d}\rho + \int_{h^{-1}\frac{\delta}{2}}^{h^{-1}\delta} h^{2N+4}\,\mathrm{d}\sigma \lesssim h^{-1}\mathsf{e}^{\frac{-\delta}{hn_0}\sqrt{n_0^2-1}} + h^{2N+3},$$

où on a utilisé l'estimation $\frac{1}{1+h\rho} \leq \frac{1}{1+\delta}$ pour $h\rho \in [0,\delta]$. On en déduit que $\mathcal{N}'_\psi = \mathcal{O}\left(h^{N+\frac{3}{2}}\right)$. Pour les termes $\mathcal{N}_\varphi$ et $\mathcal{N}_\psi$, on écrit chacune des fonctions $\xi \mapsto \frac{1}{1+\xi}$, $\xi \mapsto \frac{1}{(1+\xi)^2}$, $\xi \mapsto (p-1)\frac{n'(\xi)}{n(\xi)}$ et $\xi \mapsto \frac{n(\xi)^2}{n_0^2}$ qui sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-\delta, 0]$ sous la forme

$$f(\sigma h^{\frac{2}{3}}) = \sum_{q=0}^{3N} \frac{f^{(q)}(0)}{q!}\sigma^q h^{\frac{2q}{3}} + \left(\sigma h^{\frac{2}{3}}\right)^{3N+1} R(\sigma h^{\frac{2}{3}})$$

pour $\xi = \sigma h^{\frac{2}{3}} < 0$ et $R \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([-\delta, 0])$. Chacune des fonctions $\xi \mapsto \frac{1}{1+\xi}$ et $\xi \mapsto \frac{1}{(1+\xi)^2}$ qui sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\delta]$ admet un développement de la forme

$$f(\rho h) = \sum_{q=0}^{N} \frac{f^{(q)}(0)}{q!}\rho^q h^q + (\rho h)^{N+1} S(\rho h),$$

pour $\xi = \rho h > 0$ et $S \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,\delta])$. D'après la construction des suites $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ effectuée dans la démonstration du lemme 6.8, on a

$$\mathcal{N}^2_\varphi \lesssim h^{2N+\frac{10}{3}} \int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{0} P_N^\varphi(|\sigma|, h^{\frac{1}{3}}) \left|\mathsf{A}\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma\right)\right|^2 + Q_N^\varphi(|\sigma|, h^{\frac{1}{3}}) \left|\mathsf{A}'\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma\right)\right|^2 \mathrm{d}\sigma + h^{2N+\frac{10}{3}} \int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{0} P_N^R(\sigma h^{\frac{2}{3}})\,\mathrm{d}\sigma$$

$$\mathcal{N}^2_\psi \lesssim h^{2N+2} \int_0^{h^{-1}\delta} P_N^\psi(|\rho|, h^{\frac{1}{3}})\mathsf{e}^{-\frac{4\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}}\,\mathrm{d}\rho + h^{2N+2}\int_0^{h^{-1}\delta} P_N^S(\rho h)\,\mathrm{d}\rho$$

où $P_N^\varphi, Q_N^\varphi, P_N^\psi \in \mathbb{R}_+[X,Y]$ et $P_N^R, P_N^S \in \mathbb{R}_+[X]$. Dans ces deux expressions, la première intégrale est finie car il s'agit de l'intégrale d'un produit de polynômes par des fonctions exponentiellement décroissantes. On a par ailleurs

$$\int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{0} P_N^R(\sigma h^{\frac{2}{3}})\,\mathrm{d}\sigma \lesssim h^{-\frac{2}{3}} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{h^{-1}\delta} P_N^S(\rho h)\,\mathrm{d}\rho \lesssim h^{-1}.$$

On en déduit que $\mathcal{N}_\varphi = \mathcal{O}\left(h^{N+\frac{4}{3}}\right)$ et $\mathcal{N}_\psi = \mathcal{O}\left(h^{N+\frac{1}{2}}\right)$. En collectant les différentes estimations obtenues, on obtient finalement que $\mathcal{N}_w = \mathcal{O}\left(h^{N+\frac{1}{2}}\right)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Par le lemme 6.12, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\|\operatorname{div}\left(n^{p-1}\nabla \underline{u}_{p;j}(m)\right) + \underline{k}_{p;j}^2(m)\, n^{p+1}\, \underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \|u_{p;j}(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\, \mathcal{O}\left(h^{N-\frac{5}{3}}\right).$$

Quitte à remplacer l'entier N fixé au début par $N+2$, on obtient un reste se comportant en $\mathcal{O}\left(h^{N+\frac{1}{3}}\right)$ dans l'estimation ci-dessus et on obtient bien une estimation en $\mathcal{O}\left(m^{-N}\right)$. On en conclut que

$$\left\|\operatorname{div}\left(n^{p-1}\nabla \underline{u}_{p;j}(m)\right) + \underline{k}_{p;j}^2(m)\, n^{p+1}\, \underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \|u_{p;j}(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\, \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$

□

Démonstration du théorème 6.3. On veut montrer que les objets définis dans la définition 6.9 sont bien des quasi-résonances au sens de la définition 5.3. On commence par relever les conditions de transmission, on pose

$$g(m;r,\theta) = \frac{\chi(r-1)}{2}\begin{cases} -\left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) - (r-1)n_0^{1-p}\left[n^{p-1}\,\partial_r \underline{u}_{p;j}(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) & r \leq 1 \\ \left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) + (r-1)\left[n^{p-1}\,\partial_r \underline{u}_{p;j}(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) & r > 1 \end{cases}.$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\left[\underline{u}_{p;j}(m) - g(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) = \left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) - \left[g(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) = 0$$

et

$$\begin{aligned}\left[n^{p-1}\,\partial_r(\underline{u}_{p;j}(m) - g(m))\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) &= \left[n^{p-1}\,\partial_r \underline{u}_{p;j}(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) - \left[n^{p-1}\,\partial_r g(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) \\ &= 0.\end{aligned}$$

On obtient, pour tout entier $m \geq 1$, $\underline{u}_{p;j}(m) - g(m) \in \mathrm{H}^{2,p}(\mathbb{R},\Omega)$. D'après le lemme 6.13, on a les estimations suivantes des conditions de transmission $\left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_{\mathbb{S}^1} = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$ et $\left[n^{p-1}\,\partial_r \underline{u}_{p;j}(m)\right]_{\mathbb{S}^1} = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$. On en déduit que

$$\left\|\operatorname{div}\left(n^{p-1}\nabla g(m)\right) + \underline{k}_{p;j}^2(m)\, n^{p+1}\, g(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \|u_{p;j}(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\, \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$

Finalement, la fonction $\underline{u}_{p;j}(m) - g(m)$ satisfait l'estimation (5.6). D'après le lemme 6.12, on a

$$\left\|\underline{u}_{p;j}(m) - g(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \frac{\sqrt{\pi}\,|\mathsf{A}'(a_j)|}{\breve{\kappa}^{\frac{1}{6}}}\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{3}} + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{2}{3}}\right).$$

Par conséquent, il existe un entier $m_0 > 0$ tel que pour tout $m \geq m_0$, la norme $\left\|\underline{u}_{p;j}(m) - g(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}$ est non nulle. Quitte à retrancher $g(m)$ et à normaliser, on peut supposer que

$$\underline{u}_{p;j}(m) \in \mathrm{H}^{2,p}(\mathbb{R},\Omega), \qquad \left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = 1$$

et $\underline{u}_{p;j}(m)$ satisfasse l'estimation (5.6).

De la suite $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$ construite dans le lemme 6.7, on déduit une suite $(\widetilde{\lambda}_q)_{q\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on ait

$$\underline{k}_{p;j}(m) = \frac{m}{n_0}\left(1 + \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{2}{3}} \sum_{q=0}^{N} \widetilde{\lambda}_q \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{q}{3}} + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{N+3}{3}}\right)\right).$$

Le lemme C.12 page 255 donne une fonction $\mathrm{K}_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1])$ associée à la suite $(2^{\frac{q}{3}}\widetilde{\lambda}_q q!)_{q\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\underline{k}_{p;j}(m) = m\mathrm{K}_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}}\right).$$

□

6.4 Résonances à modes de galeries : demi-puits quadratique

6.4.1 Le résultat

Dans cette partie, on suppose que $\breve{\kappa} = 1 + \frac{n'(1)}{n(1)} = 0$. On suppose de plus que $2 - \frac{n''(1)}{n(1)} > 0$. Cette hypothèse revient à imposer $V''(1^-) > 0$. Localement, autour de 1, à gauche, le potentiel à la forme d'un demi-puits quadratique. Dans ce cas, on a un minimum local du potentiel en $r = 1$. On prend donc $R_0 = 1$.

Théorème 6.14. *Pour $p \in \{\pm 1\}$ fixé, il existe des familles de quasi-résonances $(\underline{k}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$ et de quasi-modes associés $(\underline{u}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$, indexées par $j \in \mathbb{N}$, au sens de la définition 5.3 avec $\beta = \frac{1}{2}$ telles que l'on ait, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$*

$$\underline{k}_{p;j}(m) = m\mathrm{K}\left(m^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\underline{u}_{p;j}(m;r,\theta) = C\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\begin{cases} \Phi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{2}}; m^{\frac{1}{2}}(r-1)\right) & \text{si } r \leq 1 \\ \Psi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{2}}; m(r-1)\right) & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

où $\mathrm{K}_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1])$, $\Phi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{R}_-)$, $\Psi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{R}_+)$, $C > 0$ est une constante de normalisation et $\chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(]-1,+\infty[)$ est telle que $\mathrm{supp}(\chi) \subset [-\delta,\delta]$ et $\chi \equiv 1$ sur $\left[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right]$ pour $\delta \in]0,1[$.

6.4.2 La démonstration du résultat

Notation. On introduit les notations

$$h = \frac{1}{m} \qquad \text{et} \qquad \mu = 2 - \frac{n_2}{n_0}$$

où $n_0 = n(1)$ et $n_2 = n''(1)$.

On fait une mise à l'échelle différente selon que ξ est négatif ou positif. On pose

$$\sigma = h^{-\frac{1}{2}}\xi \text{ pour } \xi < 0, \qquad \rho = h^{-1}\xi \text{ pour } \xi > 0.$$

On considère l'ansatz suivant pour w

$$w(\xi) = \begin{cases} \varphi(\sigma) & \xi < 0 \\ \psi(\rho) & \xi > 0 \end{cases}.$$

On suppose que φ, ψ et Λ ont des développements formels de la forme

$$\varphi(\sigma) = \sum_{q\geq 0} \varphi_q(\sigma) h^{\frac{q}{2}}, \qquad \psi(\rho) = \sum_{q\geq 0} \psi_q(\rho) h^{\frac{q}{2}}, \qquad \Lambda = \sum_{q\geq -2} \Lambda_q h^{\frac{q+2}{2}}. \tag{6.12}$$

On déduit du problème $(\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}_{p;r_0}(m))$ défini en (6.6), le problème mis à l'échelle suivant :

$$(\mathcal{R}^{\mathrm{scal}}_h) \begin{cases} -h\varphi'' - h^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{1+h^{\frac{1}{2}}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi' + \frac{1}{(1+h^{\frac{1}{2}}\sigma)^2}\varphi = \frac{n^2}{n_0^2}\Lambda\varphi & \text{dans } \mathbb{R}^*_- \\ -\psi'' - \frac{h}{1+h\rho}\psi' + \frac{1}{(1+h\rho)^2}\psi = \frac{1}{n_0^2}\Lambda\psi & \text{dans } \mathbb{R}^*_+ \\ \varphi(0) = \psi(0), & \\ n_0^{p-1}h^{\frac{1}{2}}\varphi'(0) = \psi'(0) & \\ \varphi \text{ exponentiellement décroissante en } -\infty & \\ \psi \text{ exponentiellement décroissante en } +\infty & \end{cases}. \tag{6.13}$$

On remplace la condition de bord en $-R_0h^{-\frac{1}{2}} = -h^{-\frac{1}{2}}$ et la condition d'onde sortante par deux conditions de décroissance exponentielle en $\pm\infty$. Ce changement nous permettra à la fin de cette section de localiser en 0 nos quasi-modes construits.

Remarque 6.15. Le développement formel de n dans la variable mise à l'échelle σ est

$$n(\sigma h^{\frac{1}{2}}) \sim \sum_{\ell=0} \frac{n_\ell}{\ell!}\sigma^\ell h^{\frac{\ell}{2}}$$

et celui de sa dérivée n' est

$$n'(\sigma h^{\frac{1}{2}}) \sim \sum_{\ell\geq 0} \frac{n_{\ell+1}}{\ell!}\sigma^\ell h^{\frac{\ell}{2}}.$$

Notons que ces développements sont en puissance de $h^{\frac{1}{2}}$ et donc n^2 et $\frac{1}{n}$ ont aussi un développement formel en puissance de $h^{\frac{1}{2}}$.

Le principe de la construction du développement asymptotique est de remplacer Λ, φ, ψ et n par leurs développements formels dans $(\mathcal{R}^{\mathrm{scal}}_h)$ défini en (6.13) et d'identifier les termes de même puissance de h, générant ainsi une suite de systèmes différentiels pour Λ_q, φ_q et ψ_q dépendant des coefficients n_q. On commence la construction par le lemme suivant.

Lemme 6.16. *On a*

$$\Lambda_{-2} = 1 \qquad \textit{et} \qquad \Lambda_{-1} = 0.$$

Démonstration. On considère les termes en puissance de h^0 issus de l'équation différentielle en φ de $(\mathcal{R}^{\mathrm{scal}}_h)$ défini en (6.13). On trouve $\varphi_0(\sigma) = \Lambda_{-2}\varphi_0(\sigma)$ pour tout

$\sigma \in \mathbb{R}_-$. Si on suppose que $\Lambda_{-2} \neq 1$, alors φ_0 est identiquement nulle. On considère la puissance de h suivante. On trouve $\varphi_1(\sigma) = \Lambda_{-2}\varphi_1(\sigma)$ sur $h^{\frac{1}{2}}$. Là encore si $\Lambda_{-2} \neq 1$, alors φ_1 est identiquement nulle. On poursuit ainsi de suite et on établit que si $\Lambda_{-2} \neq 1$ alors la fonction φ est identiquement nulle. On a donc nécessairement $\Lambda_{-2} = 1$.

On considère à nouveau le terme en $h^{\frac{1}{2}}$. On trouve $0 = \Lambda_{-1}\varphi_0(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_-$. Le même raisonnement que précédemment indique que si on ne veut pas que φ soit identiquement nulle, on doit avoir $\Lambda_{-1} = 0$. □

En utilisant le lemme 6.16, on obtient $\Lambda = 1 + h\sum_{q\geq 0}\Lambda_q h^{\frac{q}{2}}$. Pour simplifier les écritures dans la suite, on introduit la notation $\lambda = h^{-1}(\Lambda - 1)$ et son développement formel $\lambda = \sum_{q\geq 0}\lambda_q h^{\frac{q}{2}}$. Remarquons que l'on a $\lambda_q = \Lambda_q$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. La construction se poursuit par le lemme suivant. On rappelle que $\mu = 2 - \frac{n_2}{n_0} > 0$.

Lemme 6.17. *Pour $j \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \mathbb{R}_-$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$, on a*

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= (4j+3)\sqrt{\mu} \\ \varphi_0(\sigma) &= \Psi^{\mu}_{2j+1}(\sigma) \\ \psi_0(\rho) &= 0 \end{aligned}$$

où $\Psi^{\mu}_j \coloneqq \sqrt{2}\,\mu^{\frac{1}{8}}\ \Psi\left(\mu^{\frac{1}{4}}\cdot\right)$ et les $(\Psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont les fonctions de Gauss-Hermite, voir la définition C.7 page 252.

Remarque 6.18. On a introduit la famille Ψ^{μ}_j pour que la sous-famille Ψ^{μ}_{2j+1} soit une base Hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-)$.

Démonstration. Dans le problème $(\mathcal{R}^{\mathrm{scal}}_h)$ défini en (6.13) où on a substitué Λ, φ et ψ par leurs développements formels (6.12), on prend les premiers termes non nuls devant les puissances de $h^{\frac{1}{2}}$. On obtient

$$(\mathcal{P}^{\mathrm{scal}}_{h,0}) \begin{cases} -\varphi_0''(\sigma) + \mu\sigma^2\varphi_0(\sigma) = \lambda_0\varphi_0(\sigma) & \sigma \in \mathbb{R}_- \quad (\text{ordre } h) \\ -\psi_0''(\rho) + \left(1 - \frac{1}{n_0^2}\right)\psi_0(\rho) = 0 & \rho \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{ordre } h^0) \\ \varphi_0(0) = \psi_0(0) & (\text{ordre } h^0) \\ \psi_0'(0) = 0 & (\text{ordre } h^0) \\ \varphi_0 \text{ exponentiellement décroissante en } -\infty & (\text{ordre } h^0) \\ \psi_0 \text{ exponentiellement décroissante en } +\infty & (\text{ordre } h^0) \end{cases}.$$

On commence par résoudre l'équation portant sur ψ_0. Pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+$, on obtient

$$\psi_0(\rho) = \alpha \mathrm{e}^{-\frac{\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}} + \beta \mathrm{e}^{\frac{\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}}.$$

Comme ψ_0 est exponentiellement décroissante en $+\infty$, on a nécessairement $\beta = 0$. La condition $\psi_0'(0) = 0$ donne $\alpha = 0$. Ainsi, ψ_0 est identiquement nulle. On s'intéresse ensuite à φ_0. Le couple (λ_0, φ_0) est solution du problème aux valeurs propres suivant : trouver (λ_0, φ_0) avec $\varphi_0 \neq 0$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} -\varphi_0'' - \mu\,\sigma^2\varphi_0 = \lambda_0\,\varphi_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_-^* \\ \varphi_0(0) = 0 \end{cases}.$$

En effectuant le changement de variable $x = \mu^{\frac{1}{4}}\sigma$, afin de se ramener au même problème spectral que celui de la définition C.7 page 252, on en déduit

$$\mu^{-\frac{1}{2}}\lambda_0 = 4j+3 \qquad \text{et} \qquad \varphi_0(\sigma) = \alpha\,\Psi_{2j+1}(x)$$

où α est une constante et les Ψ sont les fonctions de Gauss-Hermite. On a donc $\lambda = (4j+3)\sqrt{\mu}$ et $\varphi_0(\sigma) = \alpha\,\Psi_{2j+1}\left(\mu^{\frac{1}{4}}\sigma\right)$. On a bien que φ_0 est exponentiellement décroissante en $-\infty$ donc d'après la définition des fonctions de Gauss-Hermite. On peut prendre n'importe quelle valeur non nulle pour α. On choisi $\alpha = \sqrt{2}\,\mu^{\frac{1}{8}}$ afin que la famille $(\Psi^{\mu}_{2j+1})_{j\in\mathbb{N}}$ soit normalisée dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^*_-)$. □

Le lemme suivant décrit la structure des problèmes permettant de calculer les différents termes des développements asymptotiques de λ, φ et ψ.

Lemme 6.19. *La suite de problèmes $(\mathcal{R}^{\mathrm{scal}}_{h,q})$ pour $q \geq 1$ a la forme suivante*

$$(\mathcal{R}^{\mathrm{scal}}_{h,q}) \begin{cases} -\varphi_q''(\sigma) + (\mu\sigma^2 - \lambda_0)\,\varphi_q(\sigma) = \lambda_q\varphi_q(\sigma) + S_q^{\varphi}(\sigma) & \sigma \in \mathbb{R}_- \quad (\textit{ordre } h^{\frac{q+2}{2}}) \\ -\psi_q''(\rho) + \left(1 - \frac{1}{n_0^2}\right)\psi_q(\rho) = S_q^{\psi}(\rho) & \rho \in \mathbb{R}_+ \quad (\textit{ordre } h^{\frac{q}{2}}) \\ \varphi_q(0) = \psi_q(0) & (\textit{ordre } h^{\frac{q}{2}}) \\ \psi_q'(0) = n_0^{p-1}\varphi_{q-1}'(0) & (\textit{ordre } h^{\frac{q}{2}}) \\ \varphi_q \textit{ exponentiellement décroissante en } -\infty & (\textit{ordre } h^{\frac{q}{2}}) \\ \psi_q \textit{ exponentiellement décroissante en } +\infty & (\textit{ordre } h^{\frac{q}{2}}) \end{cases}$$

où les fonctions S_q^{φ} et S_q^{ψ} sont explicitées dans la démonstration aux relations (6.14) et (6.15) et dépendent de $(\lambda_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$, $(\varphi_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$, $(\psi_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$ et de $(n_\ell)_{\ell=0}^{q+2}$.

Notation. Soit $S = \sum_{\ell\geq 0} s_\ell h^{\frac{\ell}{2}}$ une série formelle. On utilise la notation $\left[h^{\frac{q}{2}}\right](S) = s_q$ pour indiquer que l'on extrait le coefficient d'ordre $h^{\frac{q}{2}}$.

Démonstration. On part des équations du problème $(\mathcal{R}^{\mathrm{scal}}_h)$ défini en (6.13) et on considère les termes des ordres $h^{\frac{q+2}{2}}$ ou $h^{\frac{q}{2}}$. Pour les conditions de décroissance exponentielle et les conditions de transmission, on prend les termes d'ordre $h^{\frac{q}{2}}$, et on obtient directement les résultats énoncés. Pour l'équation en φ, on considère les termes d'ordre $h^{\frac{q+2}{2}}$:

$$\left[h^{\frac{q+2}{2}}\right](h\varphi'') = \varphi_q'',$$

$$\left[h^{\frac{q+2}{2}}\right]\left(h^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{1+h^{\frac{1}{2}}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi'\right) = \sum_{\ell=0}^{q-1}\left[h^{\frac{q-1-\ell}{2}}\right]\left(\frac{1}{1+h^{\frac{1}{2}}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi_\ell',$$

$$\left[h^{\frac{q+2}{2}}\right]\left(\frac{\varphi}{\left(1+h^{\frac{1}{2}}\sigma\right)^2}\right) = \varphi_{q+2} - 2\sigma\varphi_{q+1} + 3\sigma^2\varphi_q + \sum_{\ell=0}^{q-1}\left[h^{\frac{q+2-\ell}{2}}\right]\left(\frac{1}{\left(1+h^{\frac{1}{2}}\sigma\right)^2}\right)\varphi_\ell.$$

Pour le dernier terme de l'équation différentielle sur φ, on remarque qu'avec le lemme 6.16, on a $\Lambda = 1 + h\sum_{\ell\geq 0}\lambda_\ell h^{\frac{\ell}{2}}$ et donc

$$\left[h^{\frac{q+2}{2}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2}\Lambda\varphi\right) = \varphi_{q+2} + 2\frac{n_1}{n_0}\sigma\varphi_{q+1} + \left(\frac{n_1^2}{n_0^2} + \frac{n_2}{n_0}\right)\sigma^2\varphi_q + \sum_{\ell=0}^{q-1}\left[h^{\frac{q+2-\ell}{2}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2}\right)\varphi_\ell$$
$$+ \lambda_q\varphi_0 + \lambda_0\varphi_q + \left[h^{\frac{q}{2}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2}\right)\lambda_0\varphi_0 + \sum_{\substack{a,b,\ell=0\\ a+b+\ell=q-1}}^{q-1}\left[h^{\frac{a}{2}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2}\right)\lambda_b\varphi_\ell.$$

En posant

$$S_q^\varphi = \sum_{\ell=0}^{q-1}\left[h^{\frac{q+2-\ell}{2}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2} - \frac{1}{\left(1+h^{\frac{1}{2}}\sigma\right)^2}\right)\varphi_\ell + \left[h^{\frac{q}{2}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2}\right)\lambda_0\varphi_0$$
$$+ \sum_{\substack{a,b,\ell=0\\ a+b+\ell=q-1}}^{q-1}\left[h^{\frac{a}{2}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2}\right)\lambda_b\varphi_\ell + \sum_{\ell=0}^{q-1}\left[h^{\frac{q-1-\ell}{2}}\right]\left(\frac{1}{1+h^{\frac{1}{2}}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi_\ell', \quad (6.14)$$

on obtient

$$-\varphi_q''(\sigma) + (\mu\sigma^2 - \lambda_0)\varphi_q(\sigma) = \lambda_q\varphi_0(\sigma) + S_q^\varphi(\sigma).$$

De même, pour l'équation sur ψ en considérant les termes d'ordre $h^{\frac{q}{2}}$, on trouve

$$\left[h^{\frac{q}{2}}\right](\psi'') = \psi_q'',$$

$$\left[h^{\frac{q}{2}}\right]\left(\frac{h}{1+h\rho}\psi'\right) = \sum_{\ell=0}^{q-2}\left[h^{\frac{q-2-\ell}{2}}\right]\left(\frac{1}{1+h\rho}\right)\psi_\ell',$$

$$\left[h^{\frac{q}{2}}\right]\left(\frac{\psi}{(1+h\rho)^2}\right) = \psi_q + \sum_{\ell=0}^{q-1}\left[h^{\frac{q-\ell}{2}}\right]\left(\frac{1}{(1+h\rho)^2}\right)\psi_\ell,$$

$$\left[h^{\frac{q}{2}}\right]\left(\frac{\Lambda}{n_0^2}\psi\right) = \frac{1}{n_0^2}\psi_q + \sum_{\ell=0}^{q-2}\frac{\lambda_{q-2-\ell}}{n_0^2}\psi_\ell.$$

En posant

$$S_q^\psi = \sum_{\ell=0}^{q-2}\frac{\lambda_{q-2-\ell}}{n_0^2}\psi_\ell + \sum_{\ell=0}^{q-1}\left[h^{\frac{q-\ell}{2}}\right]\left(\frac{1}{(1+h\rho)^2}\right)\psi_\ell + \sum_{\ell=0}^{q-2}\left[h^{\frac{q-2-\ell}{2}}\right]\left(\frac{1}{1+h\rho}\right)\psi_\ell', \quad (6.15)$$

on obtient

$$-\psi_q''(\rho) + \left(1 - \frac{1}{n_0^2}\right)\psi_q(\rho) = S_q^\psi(\rho).$$

□

Lemme 6.20. *Il existe une solution non nulle $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ aux systèmes $(\mathcal{R}_{h,q}^{\mathrm{scal}})_{q\in\mathbb{N}}$. De plus, on a les expressions suivantes pour $q \in \mathbb{N}$*

$$\varphi_q(\sigma) = b_q\ \Psi_0^\mu(\sigma) + \sum_{\ell=0}^{+\infty} c_{q,\ell}\ \Psi_{2\ell+1}^\mu(\sigma) \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}_-, \mathsf{e}^{-2^{-q}\sigma}\,\mathrm{d}\sigma), \qquad \forall\sigma\in\mathbb{R}_-,$$
$$\psi_q(\rho) = P_q(\rho)\exp\left(\frac{-\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}\right), \qquad \forall\rho\in\mathbb{R}_+,$$

où $b_q \in \mathbb{R}$, $(c_{q,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ et $P_q \in \mathbb{R}_q[X]$.

Démonstration. On va raisonner par récurrence sur q. Pour $q = 0$, le lemme 6.17 fournit λ_0, φ_0 et ψ_0. On a

$$b_0 = 0, \qquad c_{0,\ell} = \delta_{j,\ell} \text{ pour tout } \ell \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad P_0 = 0.$$

On a bien $(c_{0,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, $P_0 \in \mathbb{R}_0[X]$ et $\varphi_0 = \Psi^{\mu}_{2j+1} \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}_-, \mathsf{e}^{-\sigma}\,\mathrm{d}\sigma)$. On considère un entier $q \geq 1$ et on suppose que l'on a construit $(\lambda_\ell)_{0\leq\ell\leq q-1}$, $(\varphi_\ell)_{0\leq\ell\leq q-1}$ et $(\psi_\ell)_{0\leq\ell\leq q-1}$. Pour obtenir λ_q, φ_q et ψ_q, on commence par résoudre l'équation en ψ. Grâce au lemme 6.19, on connaît la forme du système $(\mathcal{R}^{\mathrm{scal}}_{h,q})$ et la forme des termes sources. Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, il existe $E^{\psi}_{q-1} \in \mathbb{R}_{q-1}[X]$ tel que

$$S^{\psi}_q(\rho) = E^{\psi}_{q-1}(\rho) \exp\left(\frac{-\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}\right).$$

Le fait que le polynôme soit de degré au plus $q-1$ n'est pas évident mais la relation (6.20) sur S^{ψ}_q dans la démonstration du lemme 6.19 en donne une expression précise. Pour la première somme dans (6.20), on voit que le degré maximal en ρ est $q-2$. Dans la deuxième somme dans (6.20), chaque terme en ρ a pour degré $\frac{q-\ell}{2}+\ell = \frac{q+\ell}{2}$ pour $0 \leq \ell \leq q-1$. Le degré maximal est la partie entière de $q-\frac{1}{2}$ c'est-à-dire $q-1$. Pour la troisième somme dans (6.20), chaque terme en ρ a pour degré $\frac{q-2-\ell}{2}+\ell = \frac{q-2+\ell}{2}$ pour $0 \leq \ell \leq q-2$. Le degré maximal est $q-2$. Le lemme C.1 page 250 fournit une solution particulière $\widetilde{\psi}_q$ à l'équation différentielle d'inconnue ψ_q. Il existe $\widetilde{P}^{\psi}_q \in \mathbb{R}_q[X]$ tel que $\widetilde{\psi}_q(\rho) = \rho\widetilde{P}^{\psi}_q(\rho)\exp\left(\frac{-\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}\right)$. On a donc

$$\psi_q(\rho) = \left(\alpha + \rho\widetilde{P}^{\psi}_q(\rho)\right)\exp\left(\frac{-\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}\right).$$

On détermine α à l'aide de la condition $\psi'_q(0) = n_0^{p-1}\varphi'_{q-1}(0)$. On obtient

$$\alpha = \frac{n_0\widetilde{\psi}'_q(0) - n_0^p\varphi'_{q-1}(0)}{\sqrt{n_0^2-1}}.$$

On pose $P^{\psi}_{q+1} = \alpha + \rho\widetilde{P}^{\psi}_q(\rho) \in \mathbb{R}_{q+1}[X]$.

On s'intéresse ensuite à l'équation pour φ. D'après la relation (6.14) dans la démonstration du lemme 6.19, on a

$$S^{\varphi}_q = \sum_{\ell=0}^{q-1} T_\ell\varphi_\ell + U_\ell\varphi'_\ell, \tag{6.16}$$

où $T_\ell, U_\ell \in \mathbb{R}[X]$. D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que φ_ℓ appartient à l'espace $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}_-, \mathsf{e}^{-2^{1-q}\sigma}\,\mathrm{d}\sigma)$ pour $\ell \in \{0,\dots,q-1\}$. On a l'estimation

$$\begin{aligned}\mathsf{e}^{-\frac{2-q_\sigma}{\sqrt{2}}}S^{\varphi}_q &= \sum_{\ell=0}^{q-1}\mathsf{e}^{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)2^{1-q}\sigma}T_\ell\ \mathsf{e}^{-2^{1-q}\sigma}\varphi_\ell + \mathsf{e}^{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)2^{1-q}\sigma}U_\ell\ \mathsf{e}^{-2^{1-q}\sigma}\varphi'_\ell,\\ &\lesssim \sum_{\ell=0}^{q-1}\mathsf{e}^{-2^{1-q}\sigma}\varphi_\ell + \mathsf{e}^{-2^{1-q}\sigma}\varphi'_\ell,\end{aligned}$$

donc $S_q^\varphi \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}_-, \mathsf{e}^{-\frac{2^{-q}\sigma}{\sqrt{2}}}\,\mathrm{d}\sigma)$. Avec l'expression (6.16) et l'hypothèse de récurrence, on déduit qu'il existe $(d_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ tel que

$$S_q^\varphi(\sigma) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} d_\ell\ \Psi_{2\ell+1}^\mu(\sigma) \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}_-, \mathsf{e}^{-\frac{2^{-q}\sigma}{\sqrt{2}}}\,\mathrm{d}\sigma).$$

On doit finalement résoudre un système de la forme

$$\begin{cases} -\varphi_q'' + (\mu\sigma^2 - (4j+3)\sqrt{\mu})\varphi_q = \lambda_q\,\Psi_{2j+1}^\mu + S_q^\varphi \quad \sigma \in \mathbb{R}_- \\ \varphi_q(0) = \psi_q(0) \end{cases}. \tag{6.17}$$

On commence par effectuer un relèvement de la condition de Dirichlet en 0. On pose

$$\widetilde{\varphi}_q = \varphi_q - \frac{\psi_q(0)}{\Psi_0^\mu(0)}\,\Psi_0^\mu.$$

Du problème (6.17) et de la relation $-\Psi_0^{\mu\prime\prime} + \mu\sigma^2\,\Psi_0^\mu = \sqrt{\mu}\,\Psi_0^\mu$, on déduit le problème suivant sur $\widetilde{\varphi}_q$:

$$\begin{cases} -\widetilde{\varphi}_q'' + (\mu\sigma^2 - (4j+3)\sqrt{\mu})\widetilde{\varphi}_q = \\ \qquad\qquad \lambda_q\,\Psi_{2j+1}^\mu + S_q^\varphi + 2(2j+1)\sqrt{\mu}\frac{\psi_q(0)}{\Psi_0^\mu(0)}\,\Psi_0^\mu \quad \sigma \in \mathbb{R}_- \\ \widetilde{\varphi}_q(0) = 0 \end{cases}. \tag{6.18}$$

L'image de l'opérateur $-\partial_\sigma^2 + \mu\sigma^2 - (4j+3)\sqrt{\mu}$, muni du domaine $\mathrm{H}_0^1(\mathbb{R}_-^*) \cap \mathrm{H}^2(\mathbb{R}_-^*)$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-^*)$, est $\mathrm{Vect}\left(\Psi_{2\ell+1}^\mu,\ \ell \in \mathbb{N}\setminus\{j\}\right)$. Ainsi, le problème (6.18) a une solution si, et seulement si,

$$\left(\lambda_q\,\Psi_{2j+1}^\mu + S_q^\varphi + 2(2j+1)\sqrt{\mu}\frac{\psi_q(0)}{\Psi_0^\mu(0)}\,\Psi_0^\mu, \Psi_{2j+1}^\mu\right)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-^*)} = 0.$$

Cette utilisation implique que

$$\lambda_q = \sqrt{2}\mu^{\frac{3}{8}}\psi_q(0)\,\Psi_{2j+1}'(0) - d_j.$$

L'opérateur $-\partial_\sigma^2 + \mu\sigma^2 - (4j+3)\sqrt{\mu}$ est bijectif sur $\mathrm{Vect}\left(\Psi_{2\ell+1}^\mu,\ \ell \in \mathbb{N}\setminus\{j\}\right)$. Le problème (6.18) a une solution qui s'exprime sous la forme $\widetilde{\varphi}_q = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \widetilde{c}_\ell\,\Psi_{2\ell+1}^\mu$ où

$$\widetilde{c}_j = 0$$

$$\widetilde{c}_\ell = \frac{d_\ell}{4(\ell-j)\sqrt{\mu}} - \frac{\sqrt{2}(2j+1)\psi_q(0)\,\Psi_{2\ell+1}'(0)}{4(\ell-j)(2\ell+1)\mu^{\frac{1}{8}}} \qquad \text{pour } \ell \neq j.$$

Vérifions que $\widetilde{c}$ est dans $\ell^2(\mathbb{N})$. On a pour $\ell > j$

$$\left|\frac{d_\ell}{4(\ell-j)\sqrt{\mu}}\right| = \mathcal{O}\left(|d_\ell|\right),$$

$$\left|\frac{\sqrt{2}(2j+1)\psi_q(0)\,\Psi_{2\ell+1}'(0)}{4(\ell-j)(2\ell+1)\mu^{\frac{1}{8}}}\right| = \mathcal{O}\left(\ell^{-\frac{7}{4}}\right).$$

La première estimation résulte de la majoration $\frac{1}{\ell-j} \leq 1$ pour $\ell > j$. La deuxième estimation se déduit du lemme C.8 page 252. La suite $\widetilde{c}$ est dans $\ell^2(\mathbb{N})$. Comme $S_q^\varphi \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}_-, \mathrm{e}^{-\frac{2^{-q}\sigma}{\sqrt{2}}}\,\mathrm{d}\sigma)$, en appliquant le lemme C.10 page 253 avec $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient $\varphi_q \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}_-, \mathrm{e}^{-2^{-q}\sigma}\,\mathrm{d}\sigma)$.

On a ainsi construit itérativement $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_q)_{q\in\mathbb{N}}$. Le quasi-mode est non nul car, d'après le lemme 6.17, φ_0 n'est pas identiquement nulle. □

Lemme 6.21. *Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a $\varphi_q \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_-)$.*

Démonstration. On va commencer par montrer que pour $q, \ell \in \mathbb{N}$, on a

$$\varphi_q^{(\ell)} \in \mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}_-, \mathrm{e}^{-2^{-q-1}\sigma}\,\mathrm{d}\sigma\right).$$

Pour $q \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \{0,1,2\}$, on a $\varphi_q^{(\ell)} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-, \mathrm{e}^{-2^{-q}\sigma}\,\mathrm{d}\sigma)$ d'après le lemme 6.20. On en déduit que $\varphi_q^{(\ell)} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-, \mathrm{e}^{-2^{-q-1}\sigma}\,\mathrm{d}\sigma)$ car $\mathrm{e}^{-2^{-q-1}\sigma} \leq \mathrm{e}^{-2^{-q}\sigma}$.

Soit $q \in \mathbb{N}$, d'après l'équation vérifiée par φ_q, voir le lemme 6.19, on a

$$\varphi_q'' = (\mu\sigma^2 - \lambda_0 - \lambda_q)\varphi_q - S_q^\varphi. \tag{6.19}$$

En remplacent S_q^φ par l'expression (6.14), on obtient qu'il existe $P_p^{(2)}, Q_p^{(2)} \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\varphi_q'' = \sum_{p=0}^{q} P_p^{(2)}\varphi_p + Q_p^{(2)}\varphi_p'.$$

Par récurrence, en utilisant le fait que les relations (6.19) pour φ_q'' et (6.14) pour S_q^φ sont vraies pour tout q, on montre que pour tout $q \in \mathbb{N}$ et $\ell \geq 3$, il existe $P_p^{(\ell)}, Q_p^{(\ell)} \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\varphi_q^{(\ell)} = \sum_{p=0}^{q} P_p^{(\ell)}\varphi_p + Q_p^{(\ell)}\varphi_p'.$$

On a $\varphi_p, \varphi_p' \in \mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}_-, \mathrm{e}^{-2^{-p}\sigma}\,\mathrm{d}\sigma\right)$ pour tout $p \leq q$. Donc $\varphi_p, \varphi_p' \in \mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}_-, \mathrm{e}^{-2^{-q}\sigma}\,\mathrm{d}\sigma\right)$ car $\mathrm{e}^{-2^{-q}\sigma} \leq \mathrm{e}^{-2^{-p}\sigma}$ pour tout $p \leq q$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\left\|\mathrm{e}^{-2^{-q-1}\sigma}\varphi_q^{(\ell)}\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-)} &\leq \sum_{p=0}^{q} \left\|\mathrm{e}^{2^{-q-1}\sigma}P_p^{(\ell)}\,\mathrm{e}^{-2^{-q}\sigma}\varphi_p + \mathrm{e}^{2^{-q-1}\sigma}Q_p^{(\ell)}\,\mathrm{e}^{-2^{-q}\sigma}\varphi_p'\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-)} \\
&\lesssim \sum_{p=0}^{q} \left\|\mathrm{e}^{-2^{-q}\sigma}\varphi_p\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-)} + \sum_{p=0}^{q} \left\|\mathrm{e}^{-2^{-q}\sigma}\varphi_p'\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-)}
\end{aligned}$$

car $\sigma \mapsto \mathrm{e}^{2^{-q-1}\sigma}P_p^{(\ell)}(\sigma)$ et $\sigma \mapsto \mathrm{e}^{2^{-q-1}\sigma}Q_p^{(\ell)}(\sigma)$ sont des fonctions bornées de $\mathbb{R}_-$. On a donc $\varphi_q^{(\ell)} \in \mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}_-, \mathrm{e}^{-2^{-q-1}\sigma}\,\mathrm{d}\sigma\right)$ pour tout $q, \ell \in \mathbb{N}$.

On a ainsi obtenu que pour tout $q, \ell \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_q^{(\ell)} \in \mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}_-, \mathrm{e}^{-2^{-q-1}\sigma}\,\mathrm{d}\sigma\right) \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_q \in \mathrm{H}^\ell\left(\mathbb{R}_-, \mathrm{e}^{-2^{-q-1}\sigma}\,\mathrm{d}\sigma\right).$$

En particulier $\varphi_q \in \mathrm{H}^\ell(\mathbb{R}_-)$ pour tout $q, \ell \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\varphi_q \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{R}_-) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_-)$. Maintenant, pour montrer que $\varphi_q^{(\ell)}$ est borné, on écrit que c'est la primitive de sa dérivée. On obtient

$$\left|\varphi_q^{(\ell)}(\sigma)\right| \leq \left|\varphi_q^{(\ell)}(0)\right| + 2^{\frac{q}{2}}\left\|\mathrm{e}^{-2^{-q-1}\sigma}\varphi_q^{(\ell+1)}\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-)} = \mathcal{O}(1), \qquad \forall \sigma \in \mathbb{R}_-$$

ce qui permet de conclure que $\varphi_q^{(\ell)}$ est bornée pour tout $q, \ell \in \mathbb{N}$. □

Les résultats précédents ont permis de préciser la manière dont les suites $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ étaient construites. Reste à préciser en quel sens les séries formelles (6.12) page 144 définies à partir de ces suites peuvent converger. On a recours au lemme C.11 page 255 de sommation de Borel, ce qui nécessite d'introduire les définitions suivantes.

Définition-Propriété 6.22. Il existe une fonction $\Lambda_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1])$ et des profils $\Phi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{R}_-)$ et $\Psi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{R}_+)$ tels que pour tout $t\in[0,1]$, pour tout $(\sigma,\rho)\in\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}_+$ et pour tout $N\in\mathbb{N}$, on ait

$$\Lambda_{p;j}(t) = 1 + t^2\sum_{q=0}^{N}\lambda_q t^q + t^{N+3}R^\Lambda_N(t),$$
$$\Phi_{p;j}(t;\sigma) = \sum_{q=0}^{N}\varphi_q(\sigma)t^q + t^{N+1}R^\varphi_N(t;\sigma),$$
$$\Psi_{p;j}(t;\rho) = \sum_{q=0}^{N}\psi_q(\rho)t^q + t^{N+1}R^\psi_N(t;\rho),$$

où les restes R^λ_N, R^φ_N et R^ψ_N vérifient $R^\lambda_N \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1])$, $R^\varphi_N \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{R}_-)$ et $R^\psi_N \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{R}_+)$.

Démonstration. On note $t = h^{\frac12}$. Le lemme C.11 page 255 fournit la fonction $\Lambda_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([-1,1])$ correspondant à la suite $(\lambda_q q!)_{q\in\mathbb{N}}$ et les profils $\Phi_{p;j}\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([-1,1]\times\mathbb{R}_-)$ et $\Psi_{p;j}\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([-1,1]\times\mathbb{R}_+)$ correspondant aux suites $(q!\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(q!\psi_q)_{q\in\mathbb{N}}$. Enfin, le corollaire C.12 fournit les propriétés énoncées. □

Revenons au problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (5.5). Pour construire un quasi-mode pour ce problème, il suffit de prendre les fonctions construites précédemment et de les localiser à l'aide d'une troncature lisse. Pour cela, on prend $\delta\in]0,1[$ et on définit une fonction plateau $\chi\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}([-1,+\infty))$, à valeurs dans $[0,1]$ telle que $\mathrm{supp}(\chi)\subset[-\delta,\delta]$ et $\chi\equiv 1$ sur $\left[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right]$.

Notation 6.23. On note, pour $\xi\in[-1,+\infty[$, $r\in\mathbb{R}_+$ et $\theta\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$\underline{k}_{p;j}(m) := \frac{m}{n_0}\sqrt{\Lambda_{p;j}\left(m^{-\frac12}\right)},$$
$$w_{p;j}(m;\xi) := \chi(\xi)\begin{cases}\Phi_{p;j}\left(m^{-\frac12};\sigma\right) & \text{si } \xi<0\\ \Psi_{p;j}\left(m^{-\frac12};\rho\right) & \text{si } \xi\geq 0\end{cases},$$
$$\underline{u}_{p;j}(m;r,\theta) := w_{p;j}(m;r-1)\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}.$$

Pour la définition de $\underline{u}_{p;j}(m)$, le choix de multiplier par $\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}$ et non par $\mathsf{e}^{-\mathsf{i}m\theta}$ est arbitraire. Pour chaque quasi-résonance, on peut en fait associer deux quasi-modes $\underline{u}_{p;j}(m)$ et $\overline{\underline{u}_{p;j}(m)}$. On établira au lemme 10.1 page 222 qu'ils sont orthogonaux. On dit que les quasi-résonances sont de multiplicité deux.

Notation. Pour $\sigma\in\mathbb{R}_-$ et $\rho\in\mathbb{R}_+$, on note :

$$\Lambda_{p;j}(m) = \Lambda_{p;j}\left(m^{-\frac12}\right),$$

$$\varphi_{p;j}(m;\sigma) = \Phi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{2}};\sigma\right),$$
$$\psi_{p;j}(m;\rho) = \Psi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{2}};\rho\right).$$

Lemme 6.24. *Pour tout entier $m \geq 1$, on a*

$$\left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \sqrt{2\pi} m^{-\frac{1}{4}} + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{3}{4}}\right).$$

Démonstration. Soit $m \geq 1$. On a

$$\begin{aligned}
\left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} &= 2\pi \int_{-1}^{+\infty} |w_{p;j}(m;\xi)|^2 \, (1+\xi)\,\mathrm{d}\xi, \\
&= h^{\frac{1}{2}}\, 2\pi \int_{\frac{-\delta}{\sqrt{h}}}^{0} |\varphi_{p;j}(m;\sigma)|^2 \,\mathrm{d}\sigma + \mathcal{O}(h), \\
&= h^{\frac{1}{2}}\, 2\pi \int_{-\infty}^{0} \left|\Psi^{\mu}_{2j+1}(\sigma)\right|^2 \mathrm{d}\sigma + \mathcal{O}(h), \\
&= h^{\frac{1}{2}}\, 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_{2j+1}(\sigma)|^2 \,\mathrm{d}\sigma + \mathcal{O}(h).
\end{aligned}$$

Les $(\Psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ formant une base Hilbertienne, voir la définition C.7 page 252, on obtient

$$\left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = 2\pi h^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(h).$$

□

Lemme 6.25. *Pour $p \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$ fixés, la suite de quasi-résonances et de quasi-modes $(\underline{k}_{p;j}(m), \underline{u}_{p;j}(m))_{m\in\mathbb{N}^*}$ vérifie les propriétés suivantes :*

- *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le quasi-mode $\underline{u}_{p;j}(m)$ est à support compact :*
$$\mathrm{supp}(\underline{u}_{p;j}(m)) \subset [1-\delta, 1+\delta] \times \mathbb{S}^1 \Subset B(0, 1+2\delta).$$
- *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le quasi-mode $\underline{u}_{p;j}(m)$ est lisse sauf à travers Γ :*
$$\underline{u}_{p;j}(m)_{|\overline{\Omega}} \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right), \qquad \underline{u}_{p;j}(m)_{|\mathbb{R}^2\setminus\Omega} \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega\right).$$
- *On a l'estimation suivante de l'erreur sur les conditions de transmission quand $m \to +\infty$*
$$\left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right), \qquad \left[n^{p-1}\,\partial_\nu \underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$
- *On a l'estimation suivante quand $m \to +\infty$*

$$\left\|\mathrm{div}\left(n^{p-1}\nabla \underline{u}_{p;j}(m)\right) + \underline{k}^2_{p;j}(m)\, n^{p+1}\, \underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$

Démonstration. Dans toute la démonstration p et j sont des entiers fixés et on rappelle la notation $h = \frac{1}{m}$. Par construction, les quasi-modes sont à support compact car $\mathrm{supp}(\underline{u}_{p;j}(m)) \subset [1-\delta, 1+\delta] \times \mathbb{S}^1$. De même, par construction, les quasi-modes sont lisses sauf à travers Γ, voir le lemme 6.22.

Pour les conditions de transmission, on obtient pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma(\theta) = [w_{p;j}(m)]_{\{0\}}\, \mathsf{e}^{\mathrm{i}m\theta},$$
$$\left[n^{p-1}\partial_\nu \underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma(\theta) = \left[n^{p-1}\partial_\xi w_{p;j}(m)\right]_{\{0\}} \mathsf{e}^{\mathrm{i}m\theta}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
[w_{p;j}(m)]_{\{0\}} &= \psi_{p;j}(m;0) - \varphi_{p;j}(m;0) = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right),\\
\left[n^{p-1}\partial_\xi w_{p;j}(m)\right]_{\{0\}} &= h^{-1}\partial_\rho \psi_{p;j}(m;0) - n_0^{p-1}h^{-\frac{1}{2}}\partial_\sigma \varphi_{p;j}(m;0)\\
&= h^{-1}\left(\partial_\rho \psi_{p;j}(m;0) - n_0^{p-1}h^{\frac{1}{2}}\partial_\sigma \varphi_{p;j}(m;0)\right)\\
&= \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)
\end{aligned}$$

d'après les développements de $\varphi_{p;j}(m)$ et de $\psi_{p;j}(m)$ donnée à la définition 6.22 et d'après le lemme 6.19.

Considérons à présent l'estimation L^2. On note pour simplifier

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}^2_\xi &= \mathrm{L}^2((-\delta,\delta),(1+\xi)\,\mathrm{d}\xi),\\
\mathrm{L}^2_\sigma &= \mathrm{L}^2\left(\left(-h^{-\frac{1}{2}}\delta, 0\right), h^{\frac{1}{2}}\left(1+h^{\frac{1}{2}}\sigma\right)\mathrm{d}\sigma\right),\\
\mathrm{L}^2_\rho &= \mathrm{L}^2\left(\left(0, h^{-1}\delta\right), h(1+h\rho)\,\mathrm{d}\rho\right).
\end{aligned}$$

Dans la suite de la démonstration la notation prime pour les dérivées sera toujours relative à la variable ξ pour v, à la variable σ pour φ et à la variable ρ pour ψ. On a

$$\left\|\mathrm{div}\left(n^{p-1}\,\nabla \underline{u}_{p;j}(m)\right) + k^2_{p;j}(m)\, n^{p+1}\, \underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \leq 2\pi m^2 \max_{\mathbb{R}^2} n^{p-1}\, \mathcal{N}_w$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_w = \Bigg\| h^2 \left[w''_{p;j}(m) + \left(\frac{1}{1+\xi} + (p-1)\frac{n'}{n}\right) w'_{p;j}(m)\right]\\
+ \left(\frac{n^2}{n_0^2}\Lambda_{p;j}(m) - \frac{1}{(1+\xi)^2}\right) w_{p;j}(m)\Bigg\|_{\mathrm{L}^2_\xi}.
\end{aligned}$$

On veut montrer que $\mathcal{N}_w = \mathcal{O}\left(h^\infty\right)$. Pour cela, on va montrer que $\mathcal{N}_w = \mathcal{O}\left(h^N\right)$ pour tout entier N. On rappelle que d'après la définition 6.22, on a

$$\Lambda_{p;j}(m) = 1 + h\sum_{q=0}^{2N+1} \lambda_q h^{\frac{q}{2}} + \mathcal{O}\left(h^{N+2}\right), \tag{6.20a}$$

$$\varphi_{p;j}(m;\sigma) = \sum_{q=0}^{2N+1} \varphi_q(\sigma) h^{\frac{q}{2}} + \mathcal{O}\left(h^{N+1}\right), \tag{6.20b}$$

$$\psi_{p;j}(m;\rho) = \sum_{q=0}^{2N+1} \psi_q(\rho) h^{\frac{q}{2}} + \mathcal{O}\left(h^{N+1}\right). \tag{6.20c}$$

Pour mener à bien l'estimation en norme L^2_ξ, on scinde $\mathcal{N}_w$ en deux morceaux correspondant aux intervalles $]-\delta,0[$ et $]0,\delta[$. On a recours aux relations suivantes pour $\xi < 0$:

$$w'_{p;j}(m;\xi) = \chi'(h^{\frac{1}{2}}\sigma)\varphi_{p;j}(m;\sigma) + h^{-\frac{1}{2}}\chi(h^{\frac{1}{2}}\sigma)\varphi'_{p;j}(m;\sigma),$$

$$w''_{p;j}(m;\xi) = \chi''(h^{\frac12}\sigma)\varphi_{p;j}(m;\sigma) + 2h^{-\frac12}\chi'(h^{\frac12}\sigma)\varphi'_{p;j}(m;\sigma) + h^{-1}\chi(h^{\frac12}\sigma)\varphi''_{p;j}(m;\sigma),$$

et aux relation suivantes pour $\xi > 0$:

$$\begin{aligned} w'_{p;j}(m;\xi) &= \chi'(h\rho)\psi_{p;j}(m;\rho) + h^{-1}\chi(h\rho)\psi'_{p;j}(m;\rho),\\ w''_{p;j}(m;\xi) &= \chi''(h\rho)\psi_j(m;\rho) + 2h^{-1}\chi'(h\rho)\psi'_{p;j}(m;\rho) + h^{-2}\chi(h\rho)\psi''_{p;j}(m;\rho). \end{aligned}$$

On a $\mathcal{N}_w \le \mathcal{N}_\varphi + \mathcal{N}'_\varphi + \mathcal{N}_\psi + \mathcal{N}'_\psi$ où

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\varphi &= \left\| h\varphi''_{p;j}(m) + h^{\frac32}\left(\frac{1}{1+h^{\frac12}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi'_{p;j}(m) \right.\\ &\qquad\qquad \left. + \left(\frac{n^2}{n_0^2}\Lambda_{p;j}(m) - \frac{1}{\left(1+h^{\frac12}\sigma\right)^2}\right)\varphi_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2_\sigma},\\ \mathcal{N}'_\varphi &= \left\| \chi'\, 2h^{\frac32}\varphi'_{p;j}(m) + \chi'\, h^{\frac32}\left(\frac{1}{1+h^{\frac12}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi_{p;j}(m) + \chi''\, h^2\varphi_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2_\sigma},\\ \mathcal{N}_\psi &= \left\| \left(\psi''_{p;j}(m) + \frac{h}{1+h\rho}\psi'_{p;j}(m)\right) + \left(\frac{1}{n_0^2}\Lambda_{p;j}(m) - \frac{1}{(1+h\rho)^2}\right)\psi_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2_\rho},\\ \mathcal{N}'_\psi &= \left\| \chi'\, 2h\psi'_{p;j}(m) + \chi'\,\frac{h}{1+h\rho}\psi_{p;j}(m) + \chi''\, h^2\psi_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2_\rho}. \end{aligned}$$

On commence par le terme $\mathcal{N}'^2_\varphi$. Avec l'estimation $\frac{1}{1+h^{\frac12}\sigma} \le \frac{1}{1-\delta}$ pour $\sigma h^{\frac12} \in [-\delta, 0]$ et le fait que $\sigma \mapsto \frac{n'(h^{\frac12}\sigma)}{n(h^{\frac12}\sigma)}$ est bornée sur $\left[-m^{\frac12}\delta, 0\right]$ (car la fonction $\frac{n'}{n}$ est continue sur $[-1,0]$) et d'après le lemme 6.22 et le fait que χ' et χ'' sont bornées, on obtient qu'il existe $P_{q,\ell} \in \mathbb{R}_+[X,Y]$ tel que

$$\mathcal{N}'^2_\varphi \lesssim \sum_{q=0}^{2N+1}\sum_{\ell=0}^{2}\int_{\frac{-\delta}{\sqrt{h}}}^{\frac{-\delta}{2\sqrt{h}}} P_{q,\ell}(|\sigma|, h^{\frac12})\left|\varphi_q^{(\ell)}(\sigma)\right|^2 \mathrm{d}\sigma + \int_{\frac{-\delta}{\sqrt{h}}}^{\frac{-\delta}{2\sqrt{h}}} h^{2N+5}\,\mathrm{d}\sigma.$$

Le deuxième terme vient des termes de reste dans les expressions (6.20). On a $h \le 1$ et d'après le lemme 6.20, $\varphi_q \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}_-, \mathsf{e}^{-2^{-2N-1}\sigma}\,\mathrm{d}\sigma)$ pour tout $q \ge 2N+1$ d'où

$$\begin{aligned} \int_{\frac{-\delta}{\sqrt{h}}}^{\frac{-\delta}{2\sqrt{h}}} P_{q,\ell}(|\sigma|, h^{\frac12})\left|\varphi_q^{(\ell)}(\sigma)\right|^2 \mathrm{d}\sigma &\le \int_{\frac{-\delta}{\sqrt{h}}}^{\frac{-\delta}{2\sqrt{h}}} \mathsf{e}^{2^{-2N}\sigma}\, P_{q,\ell}(|\sigma|,1)\left|\mathsf{e}^{-2^{-2N-1}\sigma}\varphi_q^{(\ell)}(\sigma)\right|^2 \mathrm{d}\sigma\\ &\le \sup_{\sigma\in\left[\frac{-\delta}{\sqrt{h}}, \frac{-\delta}{2\sqrt{h}}\right]} \mathsf{e}^{2^{-2N}\sigma} P_{q,\ell}(|\sigma|,1)\left\|\mathsf{e}^{-2^{-2N-1}\sigma}\varphi_q^{(\ell)}\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-)}\\ &\lesssim h^{-\frac{d}{2}}\exp\left(-2^{-2N-1}\delta\, h^{-1}\right) \end{aligned}$$

où d est le degré de $P_{q,\ell}(X,1)$. On en déduit que $\mathcal{N}'_\varphi = \mathcal{O}\left(h^{N+\frac94}\right)$. Avec une méthode similaire, on majore le terme $\mathcal{N}'^2_\psi$ à l'aide du lemme 6.20. On obtient l'existence de $P \in \mathbb{R}_+[X,Y]$ tel que

$$\mathcal{N}'^2_\psi \lesssim \int_{\frac{\delta}{2h}}^{\frac{\delta}{h}} P(|\rho|, h^{\frac12})\mathsf{e}^{\frac{-2\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}}\,\mathrm{d}\rho + \int_{\frac{\delta}{2h}}^{\frac{\delta}{h}} h^{2N+3}\,\mathrm{d}\sigma \lesssim \mathsf{e}^{\frac{-h^{-1}\delta}{2n_0}\sqrt{n_0^2-1}} + h^{2N+2},$$

avec l'estimation $\frac{1}{1+h\rho} \leq \frac{1}{1+\delta}$ pour $h\rho \in [0,\delta]$. On a donc $\mathcal{N}'_\psi = \mathcal{O}\left(h^{N+1}\right)$. Pour les termes $\mathcal{N}_\varphi$ et $\mathcal{N}_\psi$, on écrit chacune des fonctions $\xi \mapsto \frac{1}{1+\xi}$, $\xi \mapsto \frac{1}{(1+\xi)^2}$, $\xi \mapsto (p-1)\frac{n'(\xi)}{n(\xi)}$ et $\xi \mapsto \frac{n(\xi)^2}{n_0^2}$ qui sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-\delta,0]$ sous la forme

$$w(\sigma h^{\frac{1}{2}}) = \sum_{q=0}^{2N+1} \frac{w^{(q)}(0)}{q!}\sigma^q h^{\frac{q}{2}} + \left(\sigma h^{\frac{1}{2}}\right)^{2N+2} R(\sigma h^{\frac{1}{2}})$$

pour $\xi = \sigma h^{\frac{1}{2}} < 0$ et $R \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([-\delta,0])$. On écrit aussi chacune des fonctions $\xi \mapsto \frac{1}{1+\xi}$ et $\xi \mapsto \frac{1}{(1+\xi)^2}$ qui sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\delta]$ sous la forme

$$w(\rho h) = \sum_{q=0}^{N} \frac{w^{(q)}(0)}{q!}\rho^q h^q + (\rho h)^{N+1}\, S(\rho h)$$

pour $\xi = \rho h > 0$ et $R \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,\delta])$. D'après la construction des suites $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ effectuée dans la démonstration du lemme 6.20, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_\varphi^2 \lesssim\ & h^{2N+4}\int_{\frac{-\delta}{\sqrt{h}}}^0 \sum_{q=0}^{2N+1} P_q(|\sigma|,h^{\frac{1}{2}})\,|\varphi_q(\sigma)|^2\,\mathrm{d}\sigma \\
& + h^{2N+4}\int_{\frac{-\delta}{\sqrt{h}}}^0 \sum_{q=0}^{2N+1} P'_q(|\sigma|,h^{\frac{1}{2}})\,\left|\varphi'_q(\sigma)\right|^2\,\mathrm{d}\sigma \\
& + h^{2N+4}\int_{\frac{-\delta}{\sqrt{h}}}^0 P_N^R(\sigma h^{\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}\sigma \\
\mathcal{N}_\psi^2 \lesssim\ & h^{2N+2}\int_0^{\frac{\delta}{h}} Q_N^\psi(|\rho|,h^{\frac{1}{3}})\mathsf{e}^{-\frac{2\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}}\,\mathrm{d}\rho + h^{2N+2}\int_0^{\frac{\delta}{h}} P_N^S(\rho h)\,\mathrm{d}\rho
\end{aligned}$$

où $P_q, P'_q, Q_N^\psi \in \mathbb{R}_+[X,Y]$ et $P_N^R, P_N^S \in \mathbb{R}_+[X]$. Dans ces deux expressions, la première intégrale est finie car il s'agit de l'intégrale d'un produit de polynômes par des fonctions dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-,\mathsf{e}^{-\alpha\sigma}\,\mathrm{d}\sigma)$ et $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+,\mathsf{e}^{\alpha\rho}\,\mathrm{d}\rho)$ pour $\alpha < \min\left(2^{-2N-1}, 2\frac{\sqrt{n_0^2-1}}{n_0}\right)$. Par ailleurs, on a

$$\int_{\frac{-\delta}{\sqrt{h}}}^0 P_N^R(\sigma h^{\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}\sigma \lesssim h^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\frac{\delta}{h}} P_N^S(\rho h)\,\mathrm{d}\rho \lesssim h^{-1}.$$

On en déduit que $\mathcal{N}_\varphi = \mathcal{O}\left(h^{N+\frac{7}{4}}\right)$ et $\mathcal{N}_\psi = \mathcal{O}\left(h^{N+\frac{1}{2}}\right)$. En collectant les différentes estimations obtenues, on obtient finalement que $\mathcal{N}_v = \mathcal{O}\left(h^{N+\frac{1}{2}}\right)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Avec le lemme 6.24, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\|\mathrm{div}\left(n^{p-1}\nabla \underline{u}_{p;j}(m)\right) + \underline{k}_{p;j}^2(m)\,n^{p+1}\,\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \|u_{p;j}(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\,\mathcal{O}\left(h^{N-\frac{7}{4}}\right).$$

Quitte à remplacer l'entier N fixé au début par $N+2$, on obtient un reste en $\mathcal{O}\left(h^{N+\frac{1}{4}}\right)$ dans l'estimation ci-dessus et on a bien une estimation en $\mathcal{O}\left(m^{-N}\right)$. On en conclut que

$$\left\|\mathrm{div}\left(n^{p-1}\nabla \underline{u}_{p;j}(m)\right) + \underline{k}_{p;j}^2(m)\,n^{p+1}\,\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \|u_{p;j}(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\,\mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$

□

Démonstration du théorème 6.14. On veut montrer que les objets définis dans la définition 6.22 sont bien des quasi-résonances au sens de la définition 5.3. On commence par effectuer un relèvement des conditions de transmission. On pose

$$g(m;r,\theta) = \frac{\chi(r-1)}{2}\begin{cases} -\left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) - (r-1)n_0^{1-p}\left[n^{p-1}\,\partial_r\underline{u}_{p;j}(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) & r\leq 1 \\ \left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) + (r-1)\left[n^{p-1}\,\partial_r\underline{u}_{p;j}(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) & r>1 \end{cases}.$$

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\left[\underline{u}_{p;j}(m)-g(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) = \left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) - \left[g(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) = 0$$

et

$$\begin{aligned}\left[n^{p-1}\,\partial_r(\underline{u}_{p;j}(m)-g(m))\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) &= \left[n^{p-1}\,\partial_r\underline{u}_{p;j}(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta) - \left[n^{p-1}\,\partial_r g(m)\right]_{\mathbb{S}^1}(\theta)\\ &= 0.\end{aligned}$$

On obtient, pour tout entier $m\geq 1$, $\underline{u}_{p;j}(m)-g(m)\in \mathrm{H}^{2,p}(\mathbb{R},\Omega)$. D'après le lemme 6.25, on a les estimations suivantes des conditions de transmission $\left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_{\mathbb{S}^1} = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$ et $\left[n^{p-1}\,\partial_r\underline{u}_{p;j}(m)\right]_{\mathbb{S}^1} = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$. On en déduit que

$$\left\|\mathrm{div}\left(n^{p-1}\nabla g(m)\right) + \underline{k}_{p;j}^2(m)\,n^{p+1}\,g(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \|u_{p;j}(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\,\mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$

Finalement, la fonction $\underline{u}_{p;j}(m)-g(m)$ satisfait l'estimation (5.6). D'après le lemme 6.24, on a

$$\left\|\underline{u}_{p;j}(m)-g(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\mu^{\frac{1}{4}}}m^{-\frac{1}{4}} + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{3}{4}}\right).$$

Par conséquent, on en déduit l'existence de $m_0\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $m\geq m_0$, on ait la norme $\left\|\underline{u}_{p;j}(m)-g(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}$ non nulle. Quitte à retrancher $g(m)$ et à normaliser, on peut supposer que

$$\underline{u}_{p;j}(m)\in \mathrm{H}^{2,p}(\mathbb{R},\Omega), \qquad \left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = 1$$

et que $\underline{u}_{p;j}(m)$ satisfait l'estimation (5.6).

De la suite $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$ construite dans le lemme 6.19, on déduit une suite $(\widetilde{\lambda}_q)_{q\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $N\in\mathbb{N}$, on ait

$$\underline{k}_{p;j}(m) = \frac{m}{n_0}\left(1 + m^{-1}\sum_{q=0}^{N}\widetilde{\lambda}_q m^{-\frac{q}{2}} + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{N+3}{2}}\right)\right).$$

Finalement, le lemme C.12 page 255 fournit une fonction $\mathrm{K}_{p;j}\in\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^{\infty}([0,1])$ associée à la suite $(\widetilde{\lambda}_q q!)_{q\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\underline{k}_{p;j}(m) = m\mathrm{K}_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{2}}\right).$$

□

6.5 Résonances internes : puits quadratique

6.5.1 Le résultat

Dans cette partie, on suppose que la fonction $r \mapsto 1 + \frac{r\,n'(r)}{n(r)}$ possède un zéro R_0 dans $]0, R[$, c'est-à-dire que le potentiel effectif, défini à la section 6.2, possède un minimum local en R_0. De plus, on suppose que $2 - \frac{R_0^2\,n''(R_0)}{n(R_0)} > 0$. Cette hypothèse revient à supposer que $V''(R_0) > 0$. Ce cas est très similaire au cas du puits dans l'isle de B. Helffer et J. Sjöstrand, voir [44]. Toutefois, notre potentiel n'est pas lisse sur $\mathbb{R}_+$ donc ne rentre pas techniquement dans le cadre développé dans [44].

Ce cas est différent des deux précédents car on « localise » en $R_0 \in]0, R[$ c'est-à-dire à l'intérieur du disque et non plus sur le bord. La différence principale est que le potentiel est lisse dans un voisinage de R_0. Nous n'avons donc plus besoin de différentier le comportement à gauche et à droite de R_0. Comme précédemment, sans perte de généralité, on peut supposer que $R_0 = 1$. Les formules pour $R_0 \neq 1$ qui s'en déduise seront données à la section 6.6.2.

Théorème 6.26. *Pour $p \in \{\pm 1\}$ fixé, il existe des familles de quasi-résonances $(\underline{k}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$ et de quasi-modes associés $(\underline{u}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$, indexées par $j \in \mathbb{N}$, au sens de la définition 5.3 avec $\beta = \frac{1}{3}$ telles que l'on ait, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$*

$$\underline{k}_{p;j}(m) = m\mathrm{K}\left(m^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\underline{u}_{p;j}(m; r, \theta) = C\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\Phi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{2}}; m^{\frac{1}{2}}(r-1)\right)$$

où $\mathrm{K}_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1])$, $\Phi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{R}_-)$, $C > 0$ est une constante de normalisation et $\chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(]-1, +\infty[)$ est telle que $\mathrm{supp}(\chi) \subset [-\delta, \delta]$ et $\chi \equiv 1$ sur $\left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right]$ pour $\delta \in]0, \min(1, \alpha)[$ où $r = \alpha$ est le bord du disque.

6.5.2 La démonstration du résultat

Notation. On introduit les notations

$$h = \frac{1}{m} \qquad \text{et} \qquad \mu = 2 - \frac{n_2}{n_0}$$

où $n_0 = n(1)$ et $n_2 = n''(1)$.

On fait une mise à l'échelle $\sigma = h^{-\frac{1}{2}}\xi$. On considère l'ansatz suivant pour la solution w du problème $(\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}_{p;r_0}(m))$ défini en (6.6) : $w(\xi) = \varphi(\sigma)$. On suppose que la fonction φ et le réel Λ ont des développements formels de la forme

$$\varphi(\sigma) = \sum_{q\geq 0} \varphi_q(\sigma) h^{\frac{q}{2}} \qquad \Lambda = \sum_{q\geq -2} \Lambda_q h^{\frac{q+2}{2}}. \tag{6.21}$$

On déduit du problème $(\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}_{p;r_0}(m))$ défini en (6.6), le problème mis à l'échelle suivant

$$(\mathcal{R}^{\mathrm{scal}}_h) \begin{cases} -h\varphi'' - h^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{1+h^{\frac{1}{2}}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi' + \frac{1}{(1+h^{\frac{1}{2}}\sigma)^2}\varphi = \frac{n^2}{n_0^2}\Lambda\varphi \quad \text{dans } \mathbb{R} \\ \varphi \text{ exponentiellement décroissante en } \pm\infty \end{cases}. \tag{6.22}$$

Dans ce cas, contrairement aux deux cas précédents, on n'a plus deux équations différentielles et des conditions de transmission car on va localiser loin du bord. Les deux conditions de décroissance exponentielle en $\pm\infty$ seront nécessaires à la fin de cette section.

Remarque 6.27. Le développement formel de n dans la variable mise à l'échelle σ est

$$n(\sigma h^{\frac{1}{2}}) = \sum_{\ell=0} \frac{n_\ell}{\ell!} \sigma^\ell h^{\frac{\ell}{2}}$$

et celui de sa dérivée n' est

$$n'(\sigma h^{\frac{1}{2}}) = \sum_{\ell\geq 0} \frac{n_{\ell+1}}{\ell!} \sigma^\ell h^{\frac{\ell}{2}}$$

Notons que ces développements sont en puissance de $h^{\frac{1}{2}}$ et donc n^2 et $\frac{1}{n}$ ont aussi un développement formel en puissance de $h^{\frac{1}{2}}$.

Le principe de la construction du développement asymptotique est de remplacer Λ, φ et n par leurs développements formels dans $(\mathcal{R}_h^{\text{scal}})$ défini en (6.22) et d'identifier les termes de même puissance de h, générant ainsi une suite de systèmes différentiels pour Λ_q et φ_q dépendant des coefficients n_q. On commence la construction avec le lemme suivant.

Lemme 6.28. *On a*

$$\Lambda_{-2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \Lambda_{-1} = 0.$$

Démonstration. On considère les termes en puissance de h^0 issus de l'équation différentielle en φ de $(\mathcal{R}_h^{\text{scal}})$ défini en (6.13). On trouve $\varphi_0(\sigma) = \Lambda_{-2}\varphi_0(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_-$. Si on suppose que $\Lambda_{-2} \neq 1$, alors φ_0 est identiquement nulle. On considère la puissance de h suivante. On trouve $\varphi_1(\sigma) = \Lambda_{-2}\varphi_1(\sigma)$ sur $h^{\frac{1}{2}}$. Là encore si $\Lambda_{-2} \neq 1$ alors φ_1 est identiquement nulle. On poursuit ainsi de suite et on établit que si $\Lambda_{-2} \neq 1$ alors la fonction φ est identiquement nulle. On a donc $\Lambda_{-2} = 1$.

On considère à nouveau le terme en $h^{\frac{1}{2}}$. On trouve $0 = \Lambda_{-1}\varphi_0(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_-$. Le même raisonnement que précédemment indique que si on ne veut pas que φ soit identiquement nulle, on doit avoir $\Lambda_{-1} = 0$. □

Finalement, on obtient $\Lambda = 1 + h\sum_{q\geq 0} \Lambda_q h^{\frac{q}{2}}$. Pour simplifier les écritures dans la suite, on introduit la notation $\lambda = h^{-1}(\Lambda - 1)$ et son développement formel $\lambda = \sum_{q\geq 0} \lambda_q h^{\frac{q}{2}}$. On remarque que l'on a $\lambda_q = \Lambda_q$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. La construction se poursuit par le lemme suivant. On rappelle que $\mu = 2 - \frac{n_2}{n_0} > 0$.

Lemme 6.29. *Pour $j \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= (2j+1)\sqrt{\mu} \\ \varphi_0(\sigma) &= \Psi_j^\mu(\sigma) \end{aligned}$$

où $\Psi_j^\mu := \mu^{\frac{1}{8}}\, \Psi_j\left(\mu^{\frac{1}{4}}\bullet\right)$ et les $(\Psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont les fonctions de Gauss-Hermite, voir la définition C.7 page 252.

Remarque 6.30. On introduit la famille Ψ_j^μ pour que la sous famille Ψ_{2j+1}^μ soit une base Hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-)$.

Démonstration. Dans le problème $(\mathcal{R}_h^{\text{scal}})$ défini en (6.22) où on a substitué Λ et φ par leurs développements formels (6.21), on prend les premiers termes non nuls devant les puissances de $h^{\frac{1}{2}}$. On obtient le problème aux valeurs propres suivant : trouver $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et φ_0 non nulle tels que

$$(\mathcal{R}_{h,0}^{\text{scal}}) \begin{cases} -\varphi_0''(\sigma) + \mu\sigma^2\varphi_0(\sigma) = \lambda_0\varphi_0(\sigma), & \sigma \in \mathbb{R} \quad (\text{ordre } h) \\ \varphi_0 \text{ exponentiellement décroissante en } \pm\infty & (\text{ordre } h^0) \end{cases}.$$

On fait le changement de variable $x = \mu^{\frac{1}{4}}\sigma$ dans l'équation différentielle pour se ramener au même problème spectral que celui de la définition C.7 page 252. On en déduit que

$$\mu^{-\frac{1}{2}}\lambda_0 = 2j+1 \qquad \text{et} \qquad \varphi_0(\sigma) = \alpha\,\Psi_j(x)$$

où α est une constante et les Ψ sont les fonctions de Gauss-Hermite. On a donc $\lambda = (2j+1)\sqrt{\mu}$ et $\varphi_0(\sigma) = \alpha\,\Psi_j\left(\mu^{\frac{1}{4}}\sigma\right)$. Remarquons que φ_0 est bien exponentiellement décroissante en $\pm\infty$ d'après la définition des fonctions de Gauss-Hermite. On peut prendre n'importe quelle valeur non nulle pour α. On choisi $\alpha = \mu^{\frac{1}{8}}$ afin que la famille $(\Psi_j^\mu)_{j\in\mathbb{N}}$ soit normalisée dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. □

Le lemme suivant décrit la structure des problèmes permettant de calculer les différents termes des développements asymptotiques de λ et φ.

Lemme 6.31. *La suite de problèmes $(\mathcal{R}_{h,q}^{\text{scal}})$ pour $q \geq 1$ est définie par :*

$$(\mathcal{R}_{h,q}^{\text{scal}}) \begin{cases} -\varphi_q''(\sigma) + (\mu\sigma^2 - \lambda_0)\,\varphi_q(\sigma) = \lambda_q\varphi_q(\sigma) + S_q & \sigma \in \mathbb{R} \quad (\textit{ordre } h^{\frac{q+2}{2}}) \\ \varphi_q \textit{ exponentiellement décroissante en } \pm\infty & (\textit{ordre } h^{\frac{q}{2}}) \end{cases}$$

où la fonction S_q est explicitée à la relation (6.23), et dépend de $(\lambda_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$, $(\varphi_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$ et de $(n_\ell)_{\ell=0}^{q+2}$.

Notation. Soit $S = \sum_{\ell\geq 0} s_\ell h^{\frac{\ell}{2}}$ une série formelle. On utilise la notation $\left[h^{\frac{q}{2}}\right](S) = s_q$ pour indiquer que l'on extrait le coefficient d'ordre $h^{\frac{q}{2}}$.

Démonstration. On part de l'équation différentielle du problème $(\mathcal{R}_h^{\text{scal}})$ défini en (6.22) et on considère les termes des ordres $h^{\frac{q+2}{2}}$ ou $h^{\frac{q}{2}}$. Pour les conditions de décroissance exponentielle, on prend les termes d'ordre $h^{\frac{q}{2}}$. On obtient ainsi directement le résultat énoncé. Pour l'équation différentielle en φ on considère les termes d'ordre $h^{\frac{q+2}{2}}$

$$\left[h^{\frac{q+2}{2}}\right](h\varphi'') = \varphi_q'',$$

$$\left[h^{\frac{q+2}{2}}\right]\left(h^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{1+h^{\frac{1}{2}}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi'\right) = \sum_{\ell=0}^{q-1}\left[h^{\frac{q-1-\ell}{2}}\right]\left(\frac{1}{1+h^{\frac{1}{2}}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi_\ell',$$

$$\left[h^{\frac{q+2}{2}}\right]\left(\frac{\varphi}{\left(1+h^{\frac{1}{2}}\sigma\right)^2}\right) = \varphi_{q+2} - 2\sigma\varphi_{q+1} + 3\sigma^2\varphi_q + \sum_{\ell=0}^{q-1}\left[h^{\frac{q+2-\ell}{2}}\right]\left(\frac{1}{\left(1+h^{\frac{1}{2}}\sigma\right)^2}\right)\varphi_\ell.$$

Pour le dernier terme de l'équation différentielle sur φ, on remarque que d'après le lemme 6.16, on a $\Lambda = 1 + h\sum_{\ell\geq 0}\lambda_\ell h^{\frac{\ell}{2}}$ et donc

$$\left[h^{\frac{q+2}{2}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2}\Lambda\varphi\right) = \varphi_{q+2} + 2\frac{n_1}{n_0}\sigma\varphi_{q+1} + \left(\frac{n_1^2}{n_0^2}+\frac{n_2}{n_0}\right)\sigma^2\varphi_q + \sum_{\ell=0}^{q-1}\left[h^{\frac{q+2-\ell}{2}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2}\right)\varphi_\ell$$
$$+ \lambda_q\varphi_0 + \lambda_0\varphi_q + \left[h^{\frac{q}{2}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2}\right)\lambda_0\varphi_0 + \sum_{\substack{a,b,\ell=0\\ a+b+\ell=q-1}}^{q-1}\left[h^{\frac{a}{2}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2}\right)\lambda_b\varphi_\ell.$$

En posant

$$S_q = \sum_{\ell=0}^{q-1}\left[h^{\frac{q+2-\ell}{2}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2} - \frac{1}{\left(1+h^{\frac{1}{2}}\sigma\right)^2}\right)\varphi_\ell + \left[h^{\frac{q}{2}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2}\right)\lambda_0\varphi_0$$
$$+ \sum_{\substack{a,b,\ell=0\\ a+b+\ell=q-1}}^{q-1}\left[h^{\frac{a}{2}}\right]\left(\frac{n^2}{n_0^2}\right)\lambda_b\varphi_\ell + \sum_{\ell=0}^{q-1}\left[h^{\frac{q-1-\ell}{2}}\right]\left(\frac{1}{1+h^{\frac{1}{2}}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi'_\ell, \quad (6.23)$$

on obtient

$$-\varphi_q''(\sigma) + (\mu\sigma^2 - \lambda_0)\varphi_q(\sigma) = \lambda_q\varphi_0(\sigma) + S_q(\sigma).$$

□

Lemme 6.32. *Il existe une solution non nulle $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ aux systèmes $(\mathcal{R}^{\text{scal}}_{h,q})_{q\in\mathbb{N}}$. De plus, on a l'expression suivante pour tout $q\in\mathbb{N}$*

$$\varphi_q(\sigma) = \sum_{\ell=0}^{j+3q} c_{q,\ell}\,\Psi^\mu_\ell(\sigma) \qquad\qquad \forall\sigma\in\mathbb{R}$$

où $(c_{q,0},\dots,c_{q,j+3q})\in\mathbb{R}^{j+3q+1}$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur q. Pour $q=0$, le lemme 6.29 fournit λ_0 et φ_0. On a $c_{0,\ell} = \delta_{j,\ell}$ pour tout $\ell\in\{0,\dots,j\}$. On considère un entier $q\geq 1$ et on suppose que l'on a construit $(\lambda_\ell)_{0\leq\ell\leq q-1}$ et $(\varphi_\ell)_{0\leq\ell\leq q-1}$. Pour obtenir λ_q et φ_q, on résout l'équation en φ. Grâce au lemme 6.31, on connaît la forme du système $(\mathcal{R}^{\text{scal}}_{h,q})$ et la forme du terme source. Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, il existe $(d_\ell)_{\ell=0}^{j+3q}$ tel que

$$S_q(\sigma) = \sum_{\ell=0}^{j+3q} d_\ell\,\Psi^\mu_\ell(\sigma).$$

Le fait qu'il y ait au plus $j+3q+1$ coefficients non nuls n'a rien d'évident. On commence par remarquer que pour tout $i\in\mathbb{N}$, on a

$$\sigma\,\Psi^\mu_i,\ \Psi^{\mu\prime}_i \in \text{Vect}\left(\Psi^\mu_\ell,\ 0\leq\ell\leq i+1\right).$$

Cela résulte des formules données au lemme C.8 page 252. L'expression (6.23) dans la démonstration du lemme 6.31, donne la forme précise de S_q

$$S_q = \sum_{\ell=0}^{q-1} \left[h^{\frac{q+2-\ell}{2}}\right] \left(\frac{n^2}{n_0^2} - \frac{1}{\left(1+h^{\frac12}\sigma\right)^2}\right) \varphi_\ell + \left[h^{\frac{q}{2}}\right] \left(\frac{n^2}{n_0^2}\right) \lambda_0\varphi_0 + \sum_{\substack{a,b,\ell=0 \\ a+b+\ell=q-1}}^{q-1} \left[h^{\frac{a}{2}}\right] \left(\frac{n^2}{n_0^2}\right) \lambda_b\varphi_\ell + \sum_{\ell=0}^{q-1} \left[h^{\frac{q-1-\ell}{2}}\right] \left(\frac{1}{1+h^{\frac12}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right) \varphi'_\ell.$$

Pour les termes dans la première somme de S_q, le dernier coefficient non nul est $j+3\ell+q+2-\ell$ pour ℓ entre 0 et $q-1$. Le rang de se dernier coefficient se majore par $j+3q$. Pour les termes dans la deuxième somme de S_q, le dernier coefficient non nul est au rang $j+3q-3$. Pour les termes dans la troisième somme de S_q, le dernier coefficient non nul a pour rang $j+3q-2$. Pour le dernier terme restant qui n'est pas dans une somme son dernier coefficient non nul est au rang $j+q$. L'équation du problème $(\mathcal{R}^{\text{scal}}_{h,q})$ est devenue

$$-\varphi_q''(\sigma) + (\mu\sigma^2 - (2j+1)\sqrt{\mu})\varphi_q(\sigma) = \lambda_q\, \Psi_j^\mu(\sigma) + \sum_{\ell=0}^{j+3q} d_\ell\, \Psi_\ell^\mu(\sigma).$$

L'image de l'opérateur $-\partial_\sigma^2 + \mu\sigma^2 - (2j+1)\sqrt{\mu}$, muni du domaine $\mathrm{H}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, est $\mathrm{Vect}\,(\Psi_\ell^\mu,\ \ell \in \mathbb{N}\setminus\{j\})$. Ainsi le problème $(\mathcal{R}^{\text{scal}}_{h,q})_{q\in\mathbb{N}}$ a une solution si, et seulement si,

$$\left(\lambda_q\, \Psi_j^\mu(\sigma) + \sum_{\ell=0}^{j+3q} d_\ell\, \Psi_\ell^\mu(\sigma), \Psi_j^\mu\right)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} = 0$$

d'où

$$\lambda_q = -d_j.$$

L'opérateur $-\partial_\sigma^2 + \mu\sigma^2 - (2j+1)\sqrt{\mu}$ est bijectif sur $\mathrm{Vect}\,(\Psi_\ell^\mu,\ \ell \in \mathbb{N}\setminus\{j\})$. Le problème $(\mathcal{R}^{\text{scal}}_{h,q})_{q\in\mathbb{N}}$ a une solution qui s'exprime sous la forme $\varphi_q = \sum_{\ell=0}^{j+3q} c_\ell\, \Psi_\ell^\mu$ où

$$c_j = 0 \qquad \text{et} \qquad c_\ell = \frac{d_\ell}{2(\ell-j)\sqrt{\mu}} \text{ pour } \ell \in \{0,\dots,j+3q\}\setminus\{j\}.$$

On a ainsi construit itérativement les termes des suites $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$. Notons que le quasi-mode est non nul, car d'après le lemme 6.29, φ_0 n'est pas identiquement nulle. □

Les résultats précédents ont permis de préciser la manière dont les suites $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ étaient construites. Reste à préciser en quel sens les séries formelles (6.21) page 157 définies à partir de ces suites peuvent converger. Pour cela, on a recours au lemme C.11 page 255 de sommation de Borel, qui nécessite d'introduire les définitions suivantes.

Définition-Propriété 6.33. Il existe une fonction $\Lambda_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1])$ et un profil $\Phi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{R})$ tels que pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on ait

$$\Lambda_{p;j}(t) = 1 + t^2 \sum_{q=0}^{N} \lambda_q t^q + t^{N+1} R_N^\Lambda(t),$$

$$\Phi_{p;j}(t;\sigma) = \sum_{q=0}^{N} \varphi_q(\sigma) t^q + m^{N+1} R_N^{\varphi}(t;\sigma),$$

où les restes R_N^{Λ} et R_N^{φ} vérifient $R_N^{\Lambda} \in \mathcal{C}_{\mathrm{b}}^{\infty}([0,1])$ et $R_N^{\varphi} \in \mathcal{C}_{\mathrm{b}}^{\infty}([0,1] \times \mathbb{R})$.

Démonstration. On note $t = h^{\frac{1}{2}}$. Le lemme C.11 page 255 fournit la fonction $\Lambda_{p;j} \in \mathcal{C}_{\mathrm{b}}^{\infty}([-1,1])$ correspondant à la suite $(\lambda_q q!)_{q\in\mathbb{N}}$ et le profil $\Phi_{p;j} \in \mathcal{C}_{\mathrm{b}}^{\infty}([-1,1] \times \mathbb{R}_-)$ correspondant à la suite $(q!\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$. Enfin le corollaire C.12 donne les propriétés énoncées. □

Revenons au problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (5.5). Pour construire un quasi-mode pour ce problème, il suffit de prendre les fonctions construites précédemment et de les localiser à l'aide d'une troncature lisse. On prend $\delta \in [0, \min(1,\alpha)]$ où $r = \alpha$ est la valeur correspondant au bord du disque. On définit une fonction plateau $\chi \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}([-1,+\infty))$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que $\mathrm{supp}(\chi) \subset [-\delta,\delta]$ et $\chi \equiv 1$ sur $\left[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right]$.

Notation 6.34. On note, pour $\xi \in [-1,+\infty[$, $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$\underline{k}_{p;j}(m) := \frac{m}{n_0}\sqrt{\Lambda_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{2}}\right)},$$

$$w_{p;j}(m;\xi) := \chi(\xi)\Phi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{2}};\sigma\right),$$

$$\underline{u}_{p;j}(m;r,\theta) := w_{p;j}(m;r-1)\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}.$$

Pour la définition de $\underline{u}_{p;j}(m)$, le choix de multiplier par $\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}$ et non par $\mathsf{e}^{-\mathsf{i}m\theta}$ est arbitraire. Pour chaque quasi-résonance, on peut en fait associer deux quasi-modes $\underline{u}_{p;j}(m)$ et $\overline{\underline{u}_{p;j}(m)}$. On établira au lemme 10.1 page 222 qu'ils sont orthogonaux. On dit que les quasi-résonances sont de multiplicité deux.

Notation. Pour $\sigma \in \mathbb{R}$, on note :

$$\Lambda_{p;j}(m) = \Lambda_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\varphi_{p;j}(m;\sigma) = \Phi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{2}};\sigma\right).$$

Lemme 6.35. *Pour $m \geq 1$, on a*

$$\left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \sqrt{2\pi}\, m^{-\frac{1}{4}} + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{3}{4}}\right).$$

Démonstration. Pour tout $m \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= 2\pi \int_{-1}^{+\infty} |w_{p;j}(m;\xi)|^2 \,(1+\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= h^{\frac{1}{2}}\, 2\pi \int_{\frac{-\delta}{\sqrt{h}}}^{\frac{\delta}{\sqrt{h}}} |\varphi_{p;j}(m;\sigma)|^2\,\mathrm{d}\sigma + \mathcal{O}(h) \\
&= h^{\frac{1}{2}}\, 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\Psi_j^{\mu}(\sigma)\right|^2 \mathrm{d}\sigma + \mathcal{O}(h) \\
&= h^{\frac{1}{2}}\, 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_j(x)|^2\,\mathrm{d}x + \mathcal{O}(h).
\end{aligned}$$

Les $(\Psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ formant une base Hilbertienne, voir définition C.7 page 252, on obtient

$$\left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = 2\pi h^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(h).$$

□

Lemme 6.36. *Pour $p \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$ fixés, la suite de quasi-résonances et de quasi-modes $(\underline{k}_{p;j}(m), \underline{u}_{p;j}(m))_{m\in\mathbb{N}^*}$ vérifie les propriétés suivantes :*

- *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le quasi-mode $\underline{u}_{p;j}(m)$ est à support compact :*

$$\mathrm{supp}(\underline{u}_{p;j}(m)) \subset [1-\delta, 1+\delta] \times \mathbb{S}^1 \Subset B(0, 1+2\delta).$$

- *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le quasi-mode $\underline{u}_{p;j}(m)$ est lisse sauf à travers Γ :*

$$\underline{u}_{p;j}(m)_{|\overline{\Omega}} \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right), \qquad \underline{u}_{p;j}(m)_{|\mathbb{R}^2\setminus\Omega} \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega\right).$$

- *On a l'estimation de l'erreur suivante sur les conditions de transmission quand $m \to +\infty$*

$$\left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma = 0, \qquad \left[n^{p-1}\,\partial_\nu \underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma = 0.$$

- *On a l'estimation suivante quand $m \to +\infty$*

$$\left\|\mathrm{div}\left(n^{p-1}\nabla \underline{u}_{p;j}(m)\right) + \underline{k}^2_{p;j}(m)\, n^{p+1}\, \underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$

Démonstration. Dans toute la démonstration p et j sont des entiers fixés, et on rappelle la notation $h = \frac{1}{m}$. Par construction, les quasi-modes sont à support compact car $\mathrm{supp}(\underline{u}_{p;j}(m)) \subset [1-\delta, 1+\delta]\times\mathbb{S}^1$. De même, par construction, les quasis-modes sont lisses et les conditions de transmission sont satisfaites car le bord de la cavité n'est pas dans le support des quasi-modes.

Considérons à présent l'estimation L^2. On note pour simplifier

$$\mathrm{L}^2_\xi = \mathrm{L}^2((-\delta,\delta), (1+\xi)\,\mathrm{d}\xi),$$
$$\mathrm{L}^2_\sigma = \mathrm{L}^2\left(\left(-h^{-\frac{1}{2}}\delta, h^{-\frac{1}{2}}\delta\right), h^{\frac{1}{2}}\left(1+h^{\frac{1}{2}}\sigma\right)\mathrm{d}\sigma\right).$$

Dans la suite de la démonstration, la notation prime pour les dérivées sera toujours entendu par rapport à la variable ξ pour v et par rapport à la variable σ pour φ. On a

$$\left\|\mathrm{div}\left(n^{p-1}\,\nabla \underline{u}_{p;j}(m)\right) + k^2_{p;j}(m)\, n^{p+1}\, \underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \leq 2\pi m^2 \max_{\mathbb{R}^2} n^{p-1}\,\mathcal{N}_w$$

où

$$\mathcal{N}_w = \left\| h^2\left[w''_{p;j}(m) + \left(\frac{1}{1+\xi} + (p-1)\frac{n'}{n}\right) w'_{p;j}(m)\right] + \left(\frac{n^2}{n_0^2}\Lambda_{p;j}(m) - \frac{1}{(1+\xi)^2}\right) w_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2_\xi}.$$

On veut montrer que $\mathcal{N}_w = \mathcal{O}(h^\infty)$. Pour cela on va montrer que $\mathcal{N}_w = \mathcal{O}\left(h^N\right)$ pour tout entier N. On rappelle que, d'après la définition 6.9, on a

$$\Lambda_{p;j}(m) = 1 + h \sum_{q=0}^{2N+1} \lambda_q h^{\frac{q}{2}} + \mathcal{O}\left(h^{N+3}\right), \tag{6.24a}$$

$$\varphi_{p;j}(m;\sigma) = \sum_{q=0}^{2N+1} \varphi_q(\sigma) h^{\frac{q}{2}} + \mathcal{O}\left(h^{N+1}\right). \tag{6.24b}$$

On a recours aux relations suivantes pour ξ :

$$w'_{p;j}(m;\xi) = \chi'(h^{\frac12}\sigma)\varphi_{p;j}(m;\sigma) + h^{-\frac12}\chi(h^{\frac12}\sigma)\varphi'_{p;j}(m;\sigma),$$
$$w''_{p;j}(m;\xi) = \chi''(h^{\frac12}\sigma)\varphi_{p;j}(m;\sigma) + 2h^{-\frac12}\chi'(h^{\frac12}\sigma)\varphi'_{p;j}(m;\sigma) + h^{-1}\chi(h^{\frac12}\sigma)\varphi''_{p;j}(m;\sigma).$$

On en déduit que $\mathcal{N}_w \leq \mathcal{N}_\varphi + \mathcal{N}'_\varphi$ où

$$\mathcal{N}_\varphi = \Bigg\| h\varphi''_{p;j}(m) + h^{\frac32}\left(\frac{1}{1+h^{\frac12}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi'_{p;j}(m) + \left(\frac{n^2}{n_0^2}\Lambda_{p;j}(m) - \frac{1}{\left(1+h^{\frac12}\sigma\right)^2}\right)\varphi_{p;j}(m)\Bigg\|_{\mathrm{L}^2_\sigma},$$

$$\mathcal{N}'_\varphi = \left\| \chi'\, 2h^{\frac32}\varphi'_{p;j}(m) + \chi'\, h^{\frac32}\left(\frac{1}{1+h^{\frac12}\sigma} + (p-1)\frac{n'}{n}\right)\varphi_{p;j}(m) + \chi''\, h^2\varphi_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2_\sigma}.$$

On commence par le terme $\mathcal{N}'^2_\varphi$. Avec l'estimation $\frac{1}{1+h^{\frac12}\sigma} \leq \frac{1}{1-\delta}$ pour $\sigma h^{\frac12} \in [-\delta,\delta]$, le fait que $\sigma \mapsto \frac{n'(h^{\frac12}\sigma)}{n(h^{\frac12}\sigma)}$ est bornée sur $\left[-m^{\frac12}\delta, m^{\frac12}\delta\right]$ (car la fonction $\frac{n'}{n}$ est continue sur $[-\delta,\delta]$) et d'après le lemme 6.32 et le fait que χ' et χ'' sont bornées, on obtient qu'il existe $P_q \in \mathbb{R}_+[X,Y]$ tel que

$$\mathcal{N}'^2_\varphi \lesssim \sum_{q=0}^{j+6N+4} 2\int_{\frac{\delta}{2\sqrt{h}}}^{\frac{\delta}{\sqrt{h}}} P_q(|\sigma|, h^{\frac12})\left|\Psi^\mu_q(\sigma)\right|^2 \mathrm{d}\sigma + 2\int_{\frac{\delta}{2\sqrt{h}}}^{\frac{\delta}{\sqrt{h}}} h^{2N+5}\,\mathrm{d}\sigma.$$

On devrait intégrer sur les intervalle $\left]-\frac{\delta}{\sqrt{h}}, -\frac{\delta}{2\sqrt{h}}\right[\cup \left]\frac{\delta}{2\sqrt{h}}, \frac{\delta}{\sqrt{h}}\right[$ mais par parité des fonctions à intégrer, on peut intégrer sur $\left]\frac{\delta}{2\sqrt{h}}, \frac{\delta}{\sqrt{h}}\right[$ en mettant un facteur 2 devant les intégrales. La somme s'arrête à $j+6N+4$ qui est égal à $j+3(2N+1)+1$ (le 1 supplémentaire viens de la dérivé de φ_{2N+1}). Le deuxième terme de l'estimation ci-dessus vient des termes de reste dans les expressions (6.24). On a $h \leq 1$ et d'après la définition des fonctions de Gauss-Hermite, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\delta}{2\sqrt{h}}}^{\frac{\delta}{\sqrt{h}}} P_q(|\sigma|, h^{\frac12})\left|\Psi^\mu_q(\sigma)\right|^2 \mathrm{d}\sigma &\lesssim \int_{\frac{\delta}{2\sqrt{h}}}^{\frac{\delta}{\sqrt{h}}} P_q(|\sigma|,1)\left|H_q\left(\mu^{\frac14}\sigma\right)\right|^2 \mathsf{e}^{-\sqrt{\mu}\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma \\
&\lesssim \int_{\frac{\delta}{2\sqrt{h}}}^{\frac{\delta}{\sqrt{h}}} \mathsf{e}^{-\frac{\sqrt{\mu}}{2}\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma \\
&\lesssim h^{-\frac12}\mathsf{e}^{-\frac{\sqrt{\mu}\delta^2}{8}h^{-1}}.
\end{aligned}$$

On obtient donc $\mathcal{N}'_\varphi = \mathcal{O}\left(h^{N+\frac{9}{4}}\right)$. Pour le terme $\mathcal{N}_\varphi$, on écrit chacune des fonctions $\xi \mapsto \frac{1}{1+\xi}$, $\xi \mapsto \frac{1}{(1+\xi)^2}$, $\xi \mapsto (p-1)\frac{n'(\xi)}{n(\xi)}$ et $\xi \mapsto \frac{n(\xi)^2}{n_0^2}$, qui sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-\delta,\delta]$, sous la forme

$$w(\sigma h^{\frac{1}{2}}) = \sum_{q=0}^{2N+1} \frac{w^{(q)}(0)}{q!}\sigma^q h^{\frac{q}{2}} + \left(\sigma h^{\frac{1}{2}}\right)^{2N+2} R(\sigma h^{\frac{1}{2}}),$$

pour $\xi = \sigma h^{\frac{1}{2}}$ et $R \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([-\delta,\delta])$. D'après la construction des suites $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ effectuée dans la démonstration du lemme 6.32, on a

$$\mathcal{N}_\varphi^2 \lesssim h^{2N+4}\int_{\frac{-\delta}{\sqrt{h}}}^{\frac{\delta}{\sqrt{h}}} \sum_{q=0}^{j+6n+4} P_q(|\sigma|,h^{\frac{1}{2}})\left|\Psi_q\left(\mu^{\frac{1}{4}}\sigma\right)\right|^2 \mathrm{d}\sigma + h^{2N+4}\int_{\frac{-\delta}{\sqrt{h}}}^{\frac{\delta}{\sqrt{h}}} P_N^R(\sigma h^{\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}\sigma,$$

où $P_q \in \mathbb{R}_+[X,Y]$ et $P_N^R \in \mathbb{R}_+[X]$. La première intégrale est finie car c'est une somme d'intégrales d'un polynôme fois une fonction exponentiellement décroissante. Pour la deuxième intégrale, on a

$$\int_{\frac{-\delta}{\sqrt{h}}}^{\frac{\delta}{\sqrt{h}}} P_N^R(\sigma h^{\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}\sigma \lesssim h^{-\frac{1}{2}}.$$

On en déduit que $\mathcal{N} = \mathcal{O}\left(h^{N+\frac{7}{4}}\right)$. En collectant les différentes estimations obtenues, il vient $\mathcal{N}_w = \mathcal{O}\left(h^{N+\frac{7}{4}}\right)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Avec le lemme 6.35, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\|\mathrm{div}\left(n^{p-1}\nabla \underline{u}_{p;j}(m)\right) + \underline{k}_{p;j}^2(m)\,n^{p+1}\,\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \|u_{p;j}(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\,\mathcal{O}\left(h^{N-\frac{1}{2}}\right).$$

En remplaçant l'entier N fixé au début par $N+1$, on obtient un reste de la forme $\mathcal{O}\left(h^{N+\frac{1}{2}}\right)$ dans l'estimation ci-dessus. On obtient donc une estimation en $\mathcal{O}\left(m^{-N}\right)$. On conclut que

$$\left\|\mathrm{div}\left(n^{p-1}\nabla \underline{u}_{p;j}(m)\right) + \underline{k}_{p;j}^2(m)\,n^{p+1}\,\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \|u_{p;j}(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\,\mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$

□

Démonstration du théorème 6.26. Il s'agit de montrer que les objets définis dans la définition 6.33 sont bien des quasi-résonances au sens de la définition 5.3. Ici, contrairement aux deux cas précédents, nous n'avons pas besoin de relever les conditions de transmission car les quasi-modes se localisent loin du bord. D'après le lemme 6.35, on a

$$\left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \sqrt{2\pi}\,m^{-\frac{1}{4}} + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{3}{4}}\right)$$

donc il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $m \geq m_0$, on ait $\left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}$ non nul. Quitte à normaliser, on peut supposer que

$$\underline{u}_{p;j}(m) \in \mathrm{H}^{2,p}(\mathbb{R},\Omega), \qquad \left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = 1$$

et que $\underline{u}_{p;j}(m)$ satisfasse l'estimation (5.6).

De la suite $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$ construite au lemme 6.31, on déduit une suite $(\widetilde{\lambda}_q)_{q\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on ait

$$\underline{k}_{p;j}(m) = \frac{m}{n_0}\left(1 + m^{-1}\sum_{q=0}^{N}\widetilde{\lambda}_q m^{-\frac{q}{2}} + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{N+3}{2}}\right)\right).$$

Le lemme C.12 page 255 fournit une fonction $\mathrm{K}_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1])$ associée à la suite $(\widetilde{\lambda}_q q!)_{q\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\underline{k}_{p;j}(m) = m\mathrm{K}_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{2}}\right).$$

□

6.6 Récapitulatif des formules

Dans cette section, on a listé les premiers termes des développements asymptotiques dans les trois cas étudiés. Les constructions faites dans les sections 6.6.1 (demi-puits triangulaire), 6.6.2 (demi-puits quadratique) et 6.6.3 (puits quadratique interne) fournissent des algorithmes itératifs de calcul des termes des développements asymptotiques. On a implémenté ces algorithmes dans un logiciel de calcul formel, les détails de cette implémentation sont dans l'annexe D.

Toutes les constructions ont été faites sur des systèmes normalisés, c'est-à-dire pour $R = 1$ ou $R_0 = 1$. Ici, on ne suppose plus ces normalisations, on considère un disque de rayon $R > 0$ quelconque et que $R_0 \in]0, R[$,quand il existe, quelconque également. Pour passer des systèmes normalisés aux systèmes quelconque, on utilise le lemme 5.9 page 123.

6.6.1 Demi-puits triangulaire

6.6.1.1 Cas d'un disque d'indice optique variable

Dans le cas d'un disque de rayon $R > 0$, d'indice optique variable n et sous l'hypothèse $\breve{\kappa} = 1 + \frac{R\,n'(R)}{n(R)} > 0$, les quasi-résonances et quasi-modes ont pour développement asymptotique, tronqué à l'ordre $Q \in \mathbb{N}^*$, quand $m \to +\infty$

$$\underline{k}_{p;j}(m) = \frac{m}{Rn_0}\left[1 + \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\sum_{q=0}^{Q-2}\mathsf{k}_q\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{q}{3}} + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{Q+1}{3}}\right)\right] \tag{6.25}$$

$$\underline{u}_{p;j}(m;r,\theta) = C\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}\begin{cases}\Phi_{p;j}\left(\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{3}};\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{r}{R}-1\right)\right) & \text{si } r \le R\\ \Psi_{p;j}\left(\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{3}};\frac{m}{2}\left(\frac{r}{R}-1\right)\right) & \text{si } r > R\end{cases} \tag{6.26}$$

où $C > 0$ est une constante de normalisation, $\Phi_{p;j}$ et $\Psi_{p;j}$ sont définies dans la définition 6.9 page 137 et $n_q = R^q\,n^{(q)}(R)$. Les coefficients k_q pour $q = 0,\dots,3$ sont

$$\mathsf{k}_0 = \frac{a_j\,\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}}{2},$$

$$\mathsf{k}_1 = -\frac{n_0^p\,\breve{\kappa}}{2\sqrt{n_0^2-1}},$$

$$\mathsf{k}_2 = \frac{a_j^2\,\breve{\kappa}^{\frac{4}{3}}}{15}\left(\frac{17}{8} - \frac{3}{\breve{\kappa}} + \frac{1}{\breve{\kappa}^2}\left(2 - \frac{n_2}{n_0}\right)\right),$$

$$\mathsf{k}_3 = -\frac{a_j\,n_0^p\,\breve{\kappa}^{\frac{5}{3}}}{12\sqrt{n_0^2-1}}\left(\frac{3n_0^2 - 2n_0^{2p}}{n_0^2-1} + 2 - \frac{6}{\breve{\kappa}} + \frac{2}{\breve{\kappa}^2}\left(2 - \frac{n_2}{n_0}\right)\right)$$

où les $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont les zéros de la fonction de Airy miroir A, voir la définition C.5 page 251. De plus, les premiers termes non nuls des développements asymptotiques de $\Phi_{p;j}$ et $\Psi_{p;j}$, en coordonnées polaires, sont

$$\Phi_{p;j}\left(h^{\frac{1}{3}}, \sigma\right) = \mathsf{A}\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\sigma\right) + \mathcal{O}\left(h^{\frac{1}{3}}\right),$$

$$\Psi_{p;j}\left(h^{\frac{1}{3}}, \rho\right) = -h^{\frac{1}{3}}\frac{\mathsf{A}'(a_j)\,n_0^p\,\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{n_0^2-1}}\exp\left(\frac{-\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}\right) + \mathcal{O}\left(h^{\frac{2}{3}}\right).$$

6.6.1.2 Cas d'un disque de rayon R et d'indice optique constant

Dans le cas d'un disque de rayon R et d'indice optique constant $n_0 > 1$, il est possible de calculer un nombre plus important de termes dans les développements asymptotiques. Pour $p \in \{\pm 1\}$, on a obtenu onze termes $(\mathsf{k}_0, \ldots, \mathsf{k}_9)$:

$$\mathsf{k}_0 = \frac{a_j}{2},$$

$$\mathsf{k}_1 = -\frac{n_0^p}{2(n_0^2-1)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\mathsf{k}_2 = \frac{3a_j^2}{40},$$

$$\mathsf{k}_3 = -\frac{a_j n_0^p(3n_0^2 - 2n_0^{2p})}{12(n_0^2-1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\mathsf{k}_4 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{35} - \frac{a_j^3}{350} - \frac{n_0^p(n_0^p - n_0)(n_0^{2p} + n_0^{p+1} - 1)}{(n_0^2-1)^2}\right),$$

$$\mathsf{k}_5 = -\frac{a_j^2 n_0^p(8n_0^{4p} - 12n_0^{2p+2} - 8n_0^{2p} + 3n_0^4 + 12n_0^2)}{80(n_0^2-1)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\mathsf{k}_6 = -\frac{a_j}{144}\left(\frac{1}{175} + \frac{479a_j^3}{7000}\right.$$
$$\left. - \frac{n_0^p(28n_0^{5p} - 39n_0^{3p+2} - 45n_0^{3p} + 18n_0^{2p+1} + 9n_0^{p+4} + 54n_0^{p+2} + 9n_0^p - 27n_0^3 - 9n_0)}{(n_0^2-1)^3}\right).$$

Les expressions des termes k_7 à k_9 deviennent très longues avec un entier p général donc nous distinguons les deux cas $p = +1$ (mode TM) et $p = -1$ (mode TE). On écrit les termes pour les modes TM car ils sont plus courts. On note $\underline{k}_j^{\mathsf{TM}}(m) \coloneqq k_{+1;j}(m)$. On a

$$\mathsf{k}_7^{\mathsf{TM}} = -\frac{n_0^3}{35(n_0^2-1)^{\frac{7}{2}}}\left(\frac{4a_j^3}{5} + \frac{13}{64} - \frac{(10 - a_j^3)n_0^2(n_0^2-4)}{160}\right),$$

$$\mathsf{k}_8^{\mathsf{TM}} = \frac{a_j^2}{240}\left(\frac{20231a_j^3}{1078000} - \frac{551}{10780} + \frac{n_0^6(n_0^2-7)}{(n_0^2-1)^4}\right),$$

$$\mathsf{k}_9^{\mathsf{TM}} = -\frac{a_j n_0^3}{1260(n_0^2-1)^{\frac{9}{2}}}\left(n_0^6\left(\frac{479a_j^3}{960}+\frac{353}{72}\right) - n_0^4\left(\frac{479a_j^3}{200}+\frac{1}{5}\right) + n_0^2\left(\frac{1009a_j^3}{100}+\frac{4919}{160}\right) + \frac{821a_j^3}{75} + \frac{1847}{240}\right),$$

$$\mathsf{k}_{10}^{\mathsf{TM}} = -\frac{3781}{50960000} + \frac{15229a_j^3}{336336000} - \frac{171389a_j^6}{67267200000} - \frac{n_0^6}{2240(n_0^2-1)}\left(\frac{51}{2} + \frac{381a_j^3}{5} + \frac{(a_j^3-10)n_0^2(n_0^2-6)}{5}\right).$$

6.6.2 Demi-puits quadratique

Dans le cas d'un disque de rayon $R > 0$ et d'indice optique variable n et sous les hypothèses $\breve{\kappa} = 1 + \frac{R\,n'(R)}{n(R)} = 0$ et $\mu = 2 - \frac{R^2\,n''(R)}{n(R)} > 0$, les quasi-résonances et quasi-modes ont pour développements asymptotiques, tronqué à l'ordre $Q \in \mathbb{N}^*$, quand $m \to +\infty$

$$\underline{k}_{p;j}(m) = \frac{m}{Rn_0}\left[1 + \frac{R}{m}\sum_{q=0}^{Q-2}\mathsf{k}_q\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{q}{2}} + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{Q+1}{2}}\right)\right] \tag{6.27}$$

$$\underline{u}_{p;j}(m;r,\theta) = C\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}\begin{cases}\Phi_{p;j}\left(\left(\frac{R}{m}\right)^{\frac{1}{2}};\left(\frac{m}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{R}-1\right)\right) & \text{si } r \le R\\ \Psi_{p;j}\left(\left(\frac{R}{m}\right)^{\frac{1}{2}};\frac{m}{R}\left(\frac{r}{R}-1\right)\right) & \text{si } r > R\end{cases} \tag{6.28}$$

où $C > 0$ est une constante de normalisation, $\Phi_{p;j}$ et $\Psi_{p;j}$ sont définies dans la définition 6.22. Les coefficients k_q pour $q = 0, 1$ sont

$$\mathsf{k}_0 = \frac{(4j+3)\sqrt{\mu}}{2},$$

$$\mathsf{k}_1 = \left[\frac{-n_0^p\,\mu^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{n_0^2-1}} + \frac{(4j+3)\mu^{\frac{1}{4}}}{3}\left(-2+\frac{\eta_3}{3\mu}\right)\right]\Psi'_{2j+1}(0)^2$$

où

$$\eta_3 = 6 + \frac{R^3\,n^{(3)}(R)}{n(R)}.$$

De plus, les premiers termes non nuls des développements asymptotiques de $\Phi_{p;j}$ et $\Psi_{p;j}$, en coordonnées polaires, sont

$$\Phi_{p;j}(h^{\frac{1}{2}},\sigma) = \Psi_{2j+1}\left(\mu^{\frac{1}{4}}\sigma\right) + \mathcal{O}\left(h^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$\Psi_{p;j}(h^{\frac{1}{2}},\rho) = -h^{\frac{1}{2}}\frac{n_0^p\,\mu^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n_0^2-1}}\Psi'_{2j+1}(0)\,\mathsf{e}^{\frac{-\rho}{n_0}\sqrt{n_0^2-1}} + \mathcal{O}(h)$$

où les $(\Psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont les fonctions de Gauss-Hermite, voir la définition C.7 page 252.

Remarque 6.37. On a écrit que les termes k_0 et k_1 car se sont les seuls coefficient que l'on peut obtenir exactement. Néanmoins, on peut écrire un algorithme qui calcule des approximations des coefficients suivants, voir l'annexe D.

6.6.3 Puits quadratique interne

Dans le cas d'un disque de rayon $R > 0$ et d'indice optique variable sous les hypothèses qu'il existe $R_0 \in]0, R[$ tel que $1 + \frac{R_0\, n'(R_0)}{n(R_0)} = 0$ et $\mu = 2 - \frac{R_0^2\, n_2}{n_0} > 0$, les quasi-résonances et quasi-modes ont pour développements asymptotiques, tronqué à l'ordre $Q \in \mathbb{N}^*$, quand $m \to +\infty$

$$\underline{k}_{p;j}(m) = \frac{m}{R_0 n_0}\left[1 + \frac{1}{m}\sum_{q=0}^{Q-2} \mathsf{k}_q \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{q}{2}} + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{Q+1}{2}}\right)\right] \tag{6.29}$$

$$\underline{u}_{p;j}(m, r, \theta) = C\Phi_{p;j}\left(\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}}; m^{\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{R_0} - 1\right)\right) \mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta} \tag{6.30}$$

où $C > 0$ est une constante de normalisation, $\Phi_{p;j}$ est définie dans la définition 6.33. Les coefficients k_q pour $q = 0, 1, 2$ sont

$$\mathsf{k}_0 = \frac{(2j+1)\sqrt{\mu}}{2},$$

$$\mathsf{k}_1 = 0,$$

$$\mathsf{k}_2 = \frac{5}{64} + \frac{p^2}{8} - \frac{p}{4} - \frac{p\,\mu}{4} + \frac{13\mu}{64} - \frac{\eta_3}{96\mu} - \frac{7\eta_3^2}{576\mu^2} + \frac{\eta_4}{64\mu^2} + (2j+1)^2\left(-\frac{35}{64} + \frac{5\mu}{64} + \frac{5\eta_3}{32\mu} - \frac{5\eta_3^2}{192\mu^2} + \frac{\eta_4}{64\mu}\right),$$

$$\mathsf{k}_3 = 0$$

où

$$\eta_3 = 6 + \frac{R_0^3\, n^{(3)}(R_0)}{n(R_0)} \qquad \eta_4 = 24 - \frac{R_0^4\, n^{(4)}(R_0)}{n(R_0)}.$$

De plus, le premier terme non nul du développement asymptotique de $\Phi_{p;j}$, en coordonnées polaires, est

$$\Phi_{p;j}(h^{\frac{1}{2}}, \sigma) = \mu^{\frac{1}{8}}\ \Psi_j\left(\mu^{\frac{1}{4}}\sigma\right) + \mathcal{O}\left(h^{\frac{1}{2}}\right).$$

Chapitre 7

Illustrations numériques dans le cas radial

Sommaire

7.1 Demi-puits triangulaire 172
7.2 Demi-puits quadratique 176
7.3 Puits quadratique interne 179

Dans ce chapitre, on illustre numériquement les développements asymptotiques construits au chapitre 6 pour les résonances du problème $(\mathcal{R}_p(m))$ défini en (6.1) page 126. On regarde les trois cas pour lesquels on a construit des quasi-résonances : demi-puits triangulaire, demi-puits quadratique et puits quadratique interne.

7.1 Demi-puits triangulaire

On rappelle que l'hypothèse principale de ce cas est $\breve{\kappa} = 1 + \frac{R\,n'(R)}{n(R)} > 0$ où R est le rayon du disque. Dans [67], les auteurs considèrent des indices optiques avec des profils quadratiques dans la cavité circulaire. On choisi un indice optique qui est un polynôme de degré deux sur $[0, R]$ tel que $n(R) = n_0 > 1$, $n''(R) = n_2$ et $n'(0) = 0$. Ce qui donne

$$n(r) = \begin{cases} n_0 + \dfrac{n_2}{2}\,(r^2 - R^2) & \text{si } r \leq R \\ 1 & \text{si } r > R \end{cases}.$$

Les contraintes a respecter sont $\breve{\kappa} > 0$ et $\min_{[0,R]} n > 1$. Une fois que l'on a choisi $n_0 > 1$, cela impose

$$-\frac{n_0}{R^2} < n_2 < \frac{2(n_0 - 1)}{R^2}.$$

Pour l'illustration numérique, on prend $R = 1$, $n_0 = 5$ et $n_2 = -2.5$ ce qui donne $\breve{\kappa} = 0.5$. Pour calculer des approximations numériques des résonances du problème $(\mathcal{R}_p(m))$, on prend la méthode décrite au chapitre 3 qui consiste à utiliser une PML (qui dépend des paramètres r_0, r_1 et σ_0) pour transformer les résonances en des valeurs propres d'un autre problème, puis on discrétise le problème aux valeurs propres avec la méthode des éléments finis. Pour illustrer les développements asymptotiques, idéalement on aimerait comparer les résonances $k_{p;j}(m)$ aux quasi-résonances $\underline{k}_{p;j}(m)$ pour m grand ($8 \leq m \leq 1024$). Mais ne connaissant pas les valeurs $k_{p;j}(m)$, on les remplace par des approximations numériques $k_{p;j}^{\mathrm{num}}(m)$. Techniquement, on ne connaît pas non plus les quasi-résonances $\underline{k}_{p;j}(m)$ car elles sont construites à l'aide du lemme de Borel C.11. Cependant, pour tout $Q \in \mathbb{N}^*$, on peut calculer $(\mathsf{k}_0, \ldots, \mathsf{k}_{Q-2}) \in \mathbb{R}^{Q-1}$ tel que $\underline{k}_{p;j}(m) = \underline{k}_{p;j}^{[Q]}(m) + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{Q+1}{3}}\right)$ où

$$\underline{k}_{p;j}^{[Q]}(m) = \frac{m}{Rn_0}\left[1 + \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{2}{3}} \sum_{q=0}^{Q-2} \mathsf{k}_q \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{q}{3}}\right]. \tag{7.1}$$

Le terme principal est $\underline{k}_{p;j}^{[1]}(m) = \frac{m}{Rn_0}$, ensuite $\underline{k}_{p;j}^{[2]}(m)$ est égal à $\underline{k}_{p;j}^{[1]}(m)$ plus terme correctif, etc. Selon la même logique, on introduit les quasi-modes à Q termes

$$\underline{u}_{p;j}^{[Q]}(m; r, \theta) = \mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta} \sum_{q=0}^{Q-1} \mathsf{w}_q(r) \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{q}{3}}. \tag{7.2}$$

On va comparer les résonances numériques $k_{p;j}^{\mathrm{num}}(m)$ aux développements asymptotiques à Q termes $\underline{k}_{p;j}^{[Q]}(m)$.

Le calcul numérique des résonances pour m grand pose problème car les modes résonnants associés sont localisés très près de l'interface en R. Plutôt que de prendre

une discrétisation uniforme très fine de $[0, r_1]$, on optimise la discrétisation en raffinant de manière géométrique autour de R. De plus, on connaît les échelles sur $]0, R[$ ($\sigma = m^{\frac{2}{3}}(r-R)$) et $]R, +\infty[$ ($\rho = m(r-R)$). On utilise ces échelles pour générer le maillage. Il est constitué des points

$$\mathcal{M}_m = \{0, R, r_1\} \bigcup \left\{ R - \frac{R}{2^i} \;\middle|\; i \in \mathbb{N}^*,\ 2^i \leq m^{\frac{2}{3}} \right\} \bigcup \left\{ R + \frac{r_1 - R}{2^i} \;\middle|\; i \in \mathbb{N}^*,\ 2^i \leq m \right\}.$$

On a utilisé le maillage $\mathcal{M}_{1024}$ pour calculer les résonances $k_{p,j}(m)$ pour $m \leq 1024$. On a pris $r_0 = 1.25$ et $r_1 = 2$. À noter que le point r_0 appartient au maillage. Le maillage est formé de 19 points et le degré de l'approximation éléments finis utilisé est 25, ce qui donne 451 degrés de liberté.

Pour la PML, on utilise celle qui est linéaire par morceaux (PML0). On fait dépendre le paramètre σ_0 de m en prenant $\sigma_0 = 10\ \underline{k}^{[2]}_{p;0}(m)^{-1}$.

Sur la figure 7.1, colonne de gauche, on a représenté la différence relative $\mathfrak{D}^{[Q]}_{p;j}$ entre les résonances numériques $k^{\mathrm{num}}_{p;j}(m)$ et les quasi-résonances $\underline{k}^{[Q]}_{p;j}(m)$ en fonction de m en échelle logarithmique où

$$\mathfrak{D}^{[Q]}_{p;j}(m) = \left| \frac{k^{\mathrm{num}}_{p;j}(m) - \underline{k}^{[Q]}_{p;j}(m)}{k^{\mathrm{num}}_{p;j}(m)} \right|.$$

Colonne de droite, on a représenté la pente en fonction de m, c'est-à-dire le taux d'accroissement

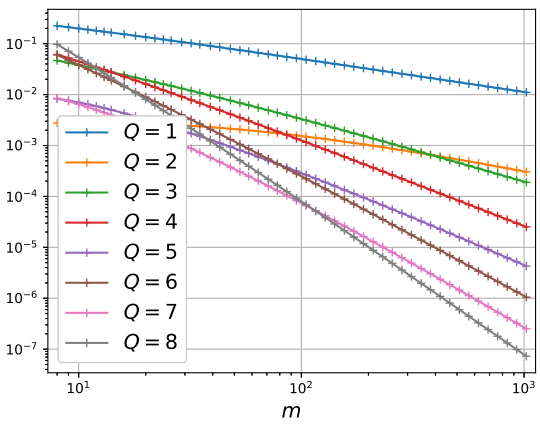
$$\mathfrak{T}^{[Q]}_{p;j}(m) = \frac{\log \mathfrak{D}^{[Q]}_{p;j}(m + \Delta m) - \log \mathfrak{D}^{[Q]}_{p;j}(m)}{\Delta m}$$

en fonction de m avec Δm fixé. En théorie, on a

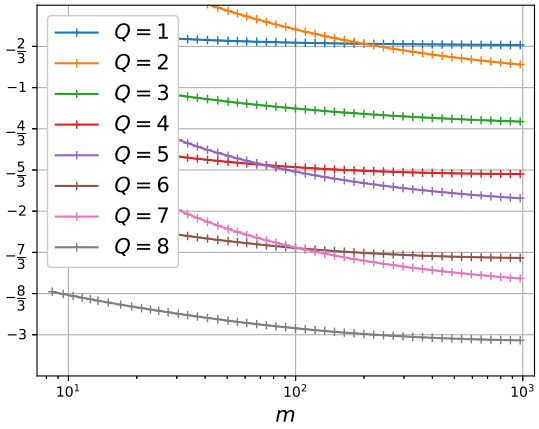
$$\mathfrak{D}^{[Q]}_{p;j}(m) = \mathcal{O}\left(m^{-\frac{Q+1}{3}}\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{m \to +\infty} \mathfrak{T}^{[Q]}_{p;j}(m) = -\frac{Q+1}{3}.$$

Sur tous les graphes, les quasi-résonances sont calculées à partir de $\underline{k}^{[Q]}_{p;j}$ pour $Q \in \{1, \ldots, 8\}$. Dans la section 6.6.1 du chapitre 6, nous n'avons pas écrit les termes k_q pour $4 \leq q \leq 7$ car ils ont des expressions très longues mais à l'aide des scripts de calcul formel, donnés à l'annexe D, on peut obtenir des approximations numériques de ces valeurs. On observe que l'on a le bon comportement des taux d'accroissements. On remarque aussi que dans le cas $p = -1$, on a des phénomènes de super-convergence, les courbes pour $Q = 2$ et $Q = 3$ sont presque confondues. Ceci s'explique par le fait que le terme ajouté pour obtenir $Q = 3$ est $\mathsf{k}_1\left(\frac{2}{m}\right)$ et $\mathsf{k}_1 \approx -0.02041$ est petit devant $\mathsf{k}_0 \approx 1.169$ et $\mathsf{k}_2 \approx 5.625$ pour notre exemple.

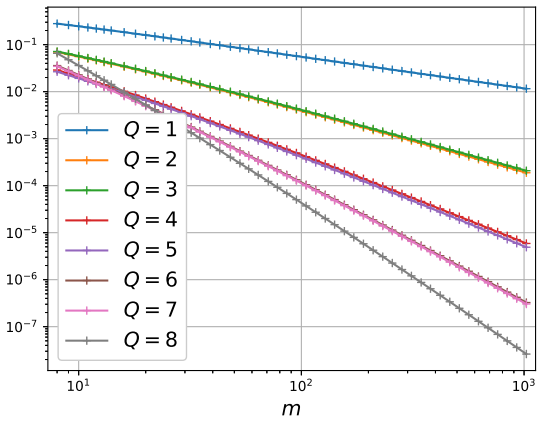
Sur la figure 7.2, on a représenté les modes résonnants discret $w^{\mathrm{num}}(m)$ (où $u^{\mathrm{num}}_{p;j}(m; r, \theta) = w^{\mathrm{num}}(m, r)\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}$ en coordonnées polaires) associés aux résonances numériques $k^{\mathrm{num}}_{p;j}(m)$ et le quasi-modes $w^{[2]}(m)$ (où $\underline{u}^{[2]}_{p;j}(m; r, \theta) = w^{[2]}(m; r)\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}$ en coordonnées polaires) associé à la quasi-résonance $\underline{k}^{[2]}_{p;j}(m)$. On représente les parties radiales $w^{\mathrm{num}}(m)$ et $w^{[2]}(m)$. La courbe bleue représente la partie réelle du mode résonnant discret, la courbe orange représente sa partie imaginaire et la courbe rouge représente le quasi-mode. Les modes résonnants discrets et les quasi-modes sont normalisés tel que $w(x_0) = 1$ où $x_0 \in \arg\max_{r \in [0, r_0]} |w(r)|$. On observe que les quasi-modes ont la même structure que les modes résonnants numériques et qu'ils se rapprochent quand m croit.



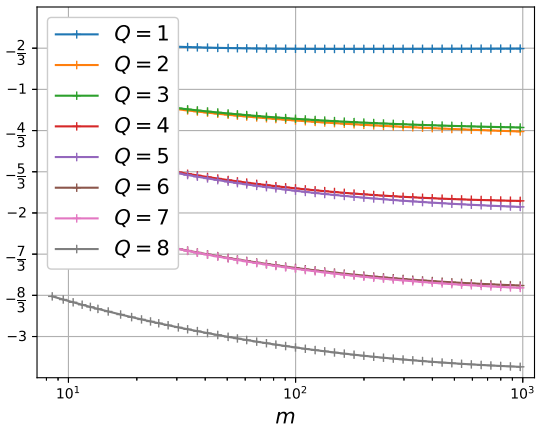
(a) $p = +1$, différences relatives



(b) $p = +1$, taux d'accroissement

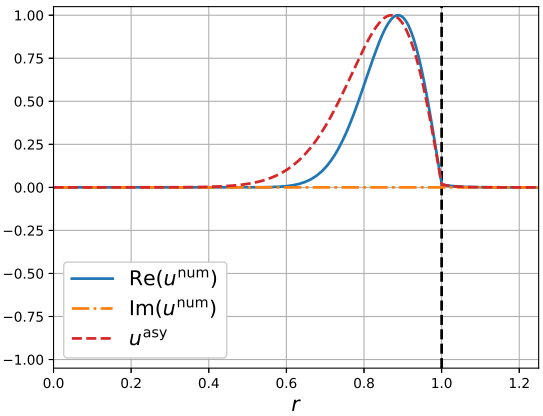


(c) $p = -1$, différences relatives

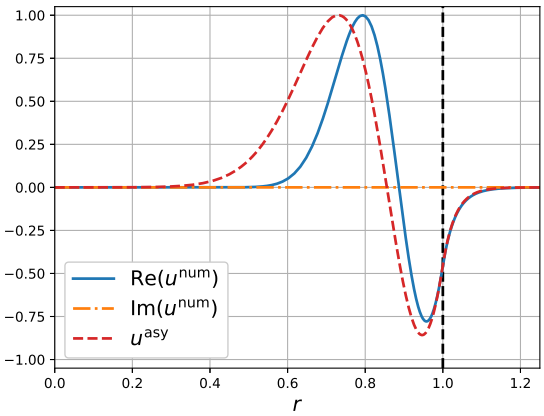


(d) $p = -1$, taux d'accroissement

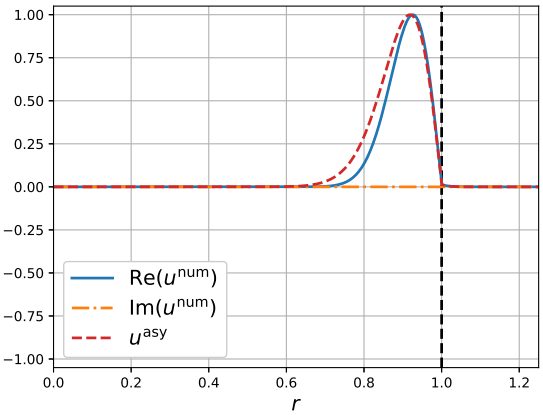
FIGURE 7.1 – À gauche, graphes des différences relatives $\mathfrak{D}_{p;j}^{[Q]}(m)$ entre les résonances numériques et les quasi-résonances en fonction de m en échelle logarithmique. À droite, graphes des taux d'accroissements $\mathfrak{T}_{p;j}^{[Q]}(m)$ en fonction de m. Sur les tous les graphes m va de 8 à 1024 et Q de 1 à 8.



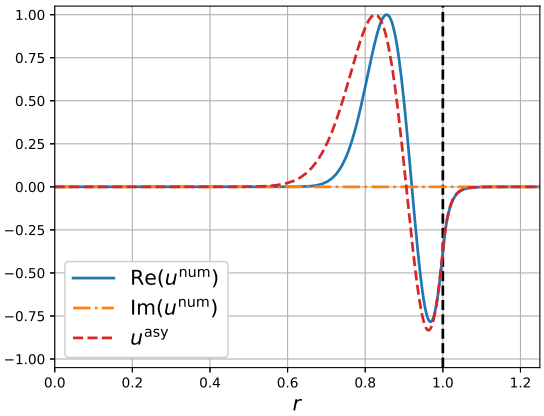
(a) $p = -1$, $m = 32$



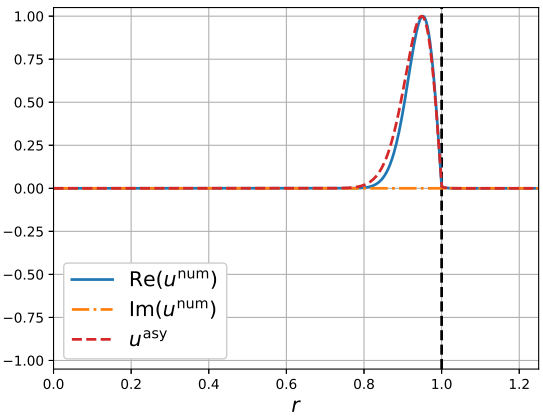
(b) $p = +1$, $m = 32$



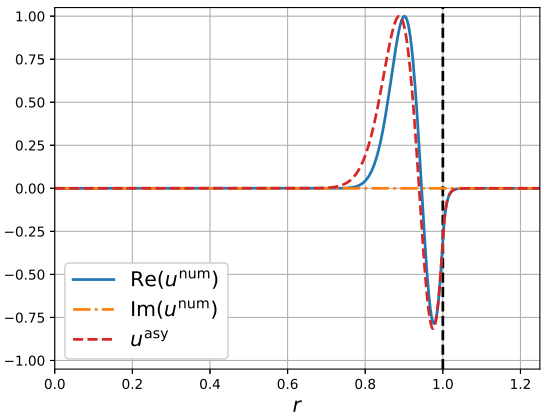
(c) $p = -1$, $m = 64$



(d) $p = +1$, $m = 64$



(e) $p = -1$, $m = 128$



(f) $p = +1$, $m = 128$

FIGURE 7.2 – Sur les graphes, la courbe bleue représente la partie réelle de $w_{p;j}^{\mathrm{num}}(m)$, la courbe orange représente la partie imaginaire de $w_{p;j}^{\mathrm{num}}(m)$ et la courbe rouge représente $w_{p;j}^{[2]}(m; r, 0)$. La colonne de gauche représente $p = -1$ et $j = 0$, la colonne de droite représente $p = +1$ et $j = 1$. Les lignes de haut en bas représentent $m = 32$, 64 et 128.

7.2 Demi-puits quadratique

Les hypothèses principales dans ce cas sont $\breve{\kappa} = 1 + \frac{R\,n'(R)}{n(R)} = 0$ et $\breve{\mu} = 2 - \frac{R^2\,n''(R)}{n(R)} > 0$. Dans [30], les auteurs considèrent un indice optique de la forme

$$n(r) = \begin{cases} 2\,n_0 \left(1 + \dfrac{r^2}{R^2}\right)^{-1} & \text{si } r \leq R \\ 1 & \text{si } r > R \end{cases}.$$

On a

$$n(R) = n_0, \qquad n'(R) = -\frac{n_0}{R} \qquad \text{et} \qquad n''(R) = \frac{n_0}{R^2}$$

donc on a bien $n > 1$ dans $[0, R]$, $\breve{\kappa} = 0$ et $\breve{\mu} = 1 > 0$. Comme dans la section précédente, on introduit les quasi-résonances et quasi-modes à $Q \in \mathbb{N}^*$ termes

$$\underline{k}_{p;j}^{[Q]}(m) = \frac{m}{Rn_0}\left[1 + \frac{1}{m}\sum_{q=0}^{Q-2} \mathsf{k}_q \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{q}{2}}\right], \tag{7.3}$$

$$\underline{u}_{p;j}^{[Q]}(m; r, \theta) = \mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta} \sum_{q=0}^{Q-1} \mathsf{w}_q(r) \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{q}{2}}. \tag{7.4}$$

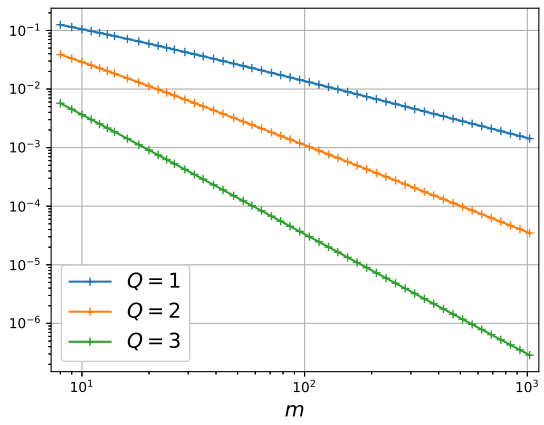
Pour l'illustration numérique, on prend $R = 1$ et $n_0 = 5$. Le maillage est construit sur le même principe que dans la section précédente mais ici le raffinement à gauche de R n'est pas réalisé avec la même échelle ($\sigma = m^{\frac{1}{2}}(r - R_0)$). On a pris $r_0 = 1.25$ et $r_1 = 2$. Le maillage contient 18 points et le degré de l'approximation éléments finis est 25, ce qui donne 426 degrés de liberté. Le paramètre σ_0 est choisi de la même façon : $\sigma_0 = 10\ \underline{k}_{p;0}^{[2]}(m)^{-1}$.

Sur la figure 7.3, colonne de gauche, on a représenté la différence relative $\mathfrak{D}_{p;j}^{[Q]}$ entre les résonances numériques $k_{p;j}^{\mathrm{num}}(m)$ et les quasi-résonances $\underline{k}_{p;j}^{[Q]}(m)$ en fonction de m en échelle logarithmique. Colonne de droite, on a représenté la pente $\mathfrak{T}_{p;j}^{[Q]}$ en fonction de m. En théorie, on a

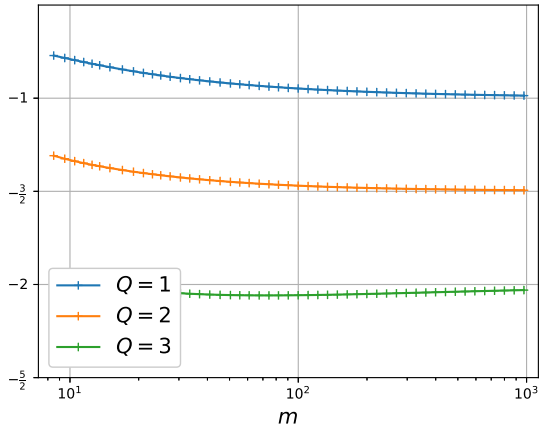
$$\mathfrak{D}_{p;j}^{[Q]}(m) = \mathcal{O}\left(m^{-\frac{Q+1}{2}}\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{m\to+\infty} \mathfrak{T}_{p;j}^{[Q]}(m) = -\frac{Q+1}{2}.$$

On observe les bons comportements des taux d'accroissements sauf pour la courbe $Q = 2$ pour $p = -1$. En effet, si on regarde la différence relative pour cette courbe, on voit un pic vers le bas. Il vient du fait que l'erreur $k_{p;j}(m) - \underline{k}_{p;j}^{[1]}(m)$ change de signe autour de $m = 120$.

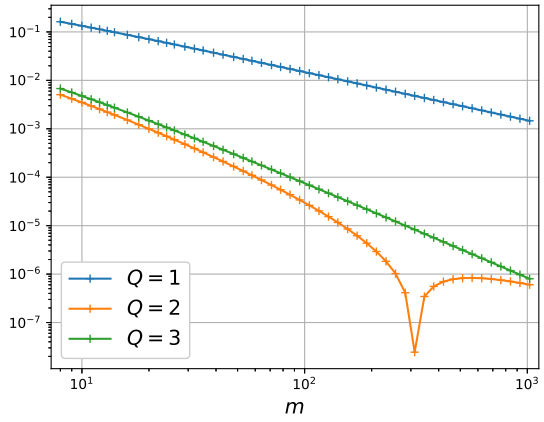
Sur la figure 7.4, on a représenté les modes résonnants numériques associés aux résonances numériques $k_{p;j}^{\mathrm{num}}(m)$ (la courbe bleue représente la partie réelle et la courbe orange représente la partie imaginaire) et les quasi-modes $r \mapsto \underline{u}_{p;j}^{[2]}(m; r, 0)$ associé aux quasi-résonances $\underline{k}_{p;j}^{[2]}(m)$. Comme dans la section précédentes on a représenté que la partie radiale des modes avec les même normalisations. Ici les quasi-modes ont une structure très similaire que les modes numériques. La différence avec le cas précédent est que les quasi-modes sont approchés car il sont en réalité représentés par une série, $\underline{u}_{p;j}^{[2]}(m; r, 0) = \sum_{\ell\in\mathbb{N}} c_\ell\, \Psi_{2\ell+1}\left(m^{\frac{1}{2}}(r-1)\right)$ que l'on a tronqué à $\ell = 5$. C'est la raison pour laquelle on s'est arrêté à trois termes ($Q = 3$) sur les graphes 7.3.



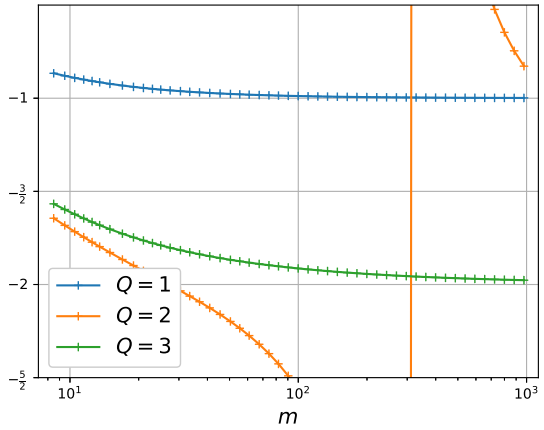
(a) $p = +1$, différences relatives



(b) $p = +1$, taux d'accroissement

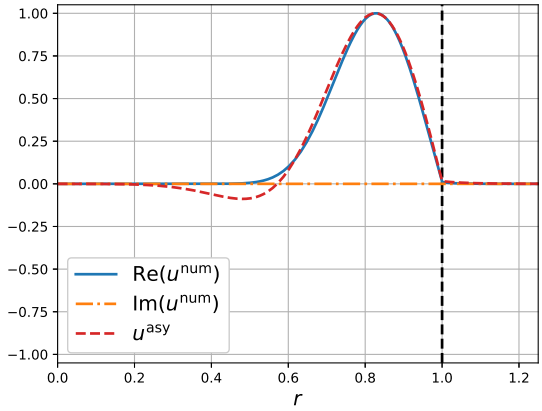


(c) $p = -1$, différences relatives

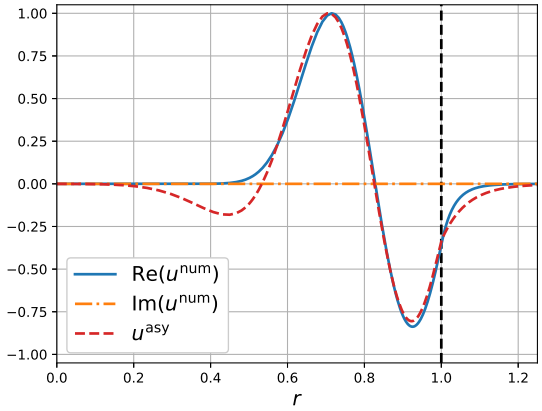


(d) $p = -1$, taux d'accroissement

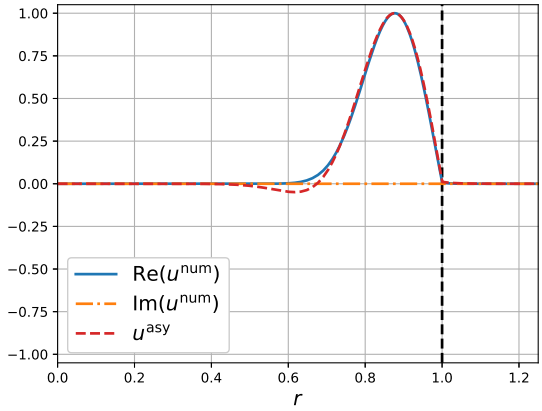
FIGURE 7.3 – À gauche, graphes des différences relatives $\mathfrak{D}^{[Q]}_{p;j}(m)$ entre les résonances numériques et les quasi-résonances en fonction de m en échelle logarithmique. À droite, graphes des taux d'accroissements $\mathfrak{T}^{[Q]}_{p;j}(m)$ en fonction de m. Sur les tous les graphes m va de 8 à 1024 et Q de 1 à 3.



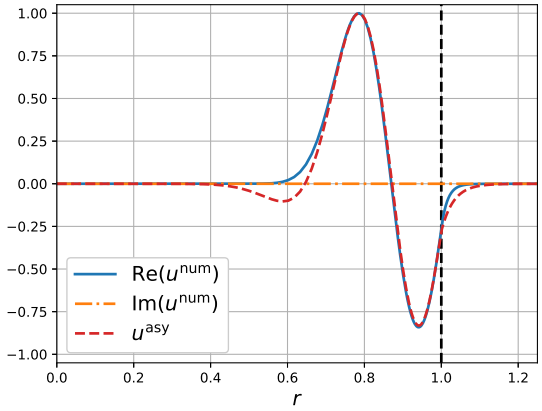
(a) $p = -1$, $m = 32$



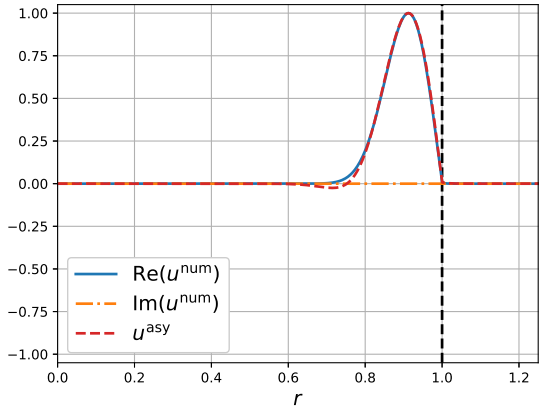
(b) $p = +1$, $m = 32$



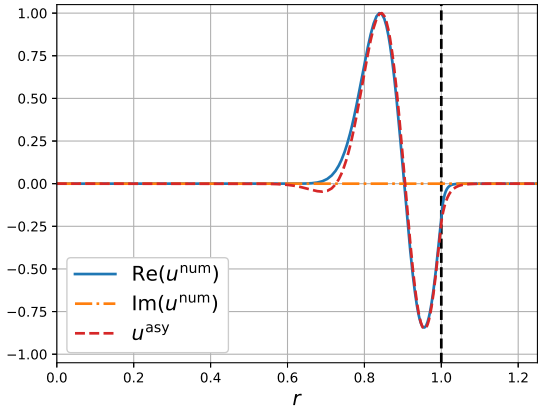
(c) $p = -1$, $m = 64$



(d) $p = +1$, $m = 64$



(e) $p = -1$, $m = 128$



(f) $p = +1$, $m = 128$

FIGURE 7.4 – Sur les graphes, la courbe bleue représente la partie réelle de $u_{p;j}^{\mathrm{num}}(m)$, la courbe orange représente la partie imaginaire de $u_{p;j}^{\mathrm{num}}(m)$ et la courbe rouge représente $r \mapsto \underline{u}_{p;j}^{[2]}(m; r, 0)$. La colonne de gauche représente $p = -1$ et $j = 0$, la colonne de droite représente $p = +1$ et $j = 1$. Les lignes de haut en bas représentent $m = 32$, 64 et 128.

7.3 Puits quadratique interne

Les hypothèses dans ce cas sont $1+\frac{Rn'(R)}{n(R)}<0$ et il existe $R_0\in]0,R[$ tel que $1+\frac{R_0\,n'(R_0)}{n(R_0)}=0$ et $\breve{\mu}=2-\frac{R_0^2\,n''(R_0)}{n(R_0)}>0$. On considère un indice optique de la même forme que dans la section 7.1 :

$$n(r)=\begin{cases} n_0+\dfrac{n_2}{2}\,(r^2-R^2) & \text{si } r\le R\\ 1 & \text{si } r>R\end{cases}.$$

Pour qu'il vérifie la première hypothèse, il faut que $n_2<-\frac{n_0}{R^2}$, dans ce cas, on a

$$R_0=\sqrt{\frac{R^2}{3}-\frac{2n_0}{3n_2}}<R \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \breve{\mu}=3.$$

Comme dans la section précédente, on introduit les quasi-résonances et quasi-modes à $Q\in\mathbb{N}^*$ termes

$$\underline{k}_{p;j}^{[Q]}(m)=\frac{m}{R_0n_0}\left[1+\frac{1}{m}\sum_{q=0}^{Q-2}\mathsf{k}_q\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{q}{2}}\right], \tag{7.5}$$

$$\underline{u}_{p;j}^{[Q]}(m;r,\theta)=\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}\sum_{q=0}^{Q-1}\mathsf{w}_q(r)\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{q}{2}}. \tag{7.6}$$

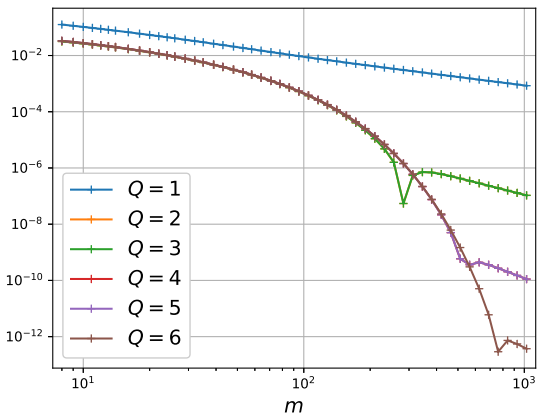
Pour l'illustration numérique, on prend $R=1$, $n_0=5$ et $n_2=-7.5$. On a donc $R_0=\sqrt{\frac{7}{9}}\approx 0.8819$. Le maillage est construit sur le même principe que dans les deux précédentes sections mais ici on fait un raffinement géométrique autour de R_0 avec la même échelle des deux côtés ($\sigma=m^{\frac{1}{2}}(r-R_0)$). On a pris $r_0=1.25$ et $r_1=2$. Le maillage contient 18 points et le degré de l'approximation éléments finis est 25, ce qui donne 426 degrés de liberté. Le paramètre σ_0 est choisi de la même façon : $\sigma_0=10\;\underline{k}_{p;0}^{[2]}(m)^{-1}$.

Sur la figure 7.5, colonne de gauche, on a représenté la différence relative $\mathfrak{D}_{p;j}^{[Q]}$ entre les résonances numériques $k_{p;j}^{\mathrm{num}}(m)$ et les quasi-résonances $\underline{k}_{p;j}^{[Q]}(m)$ en fonction de m en échelle logarithmique. Colonne de droite, on a représenté la pente $\mathfrak{T}_{p;j}^{[Q]}$ en fonction de m. En théorie, on a

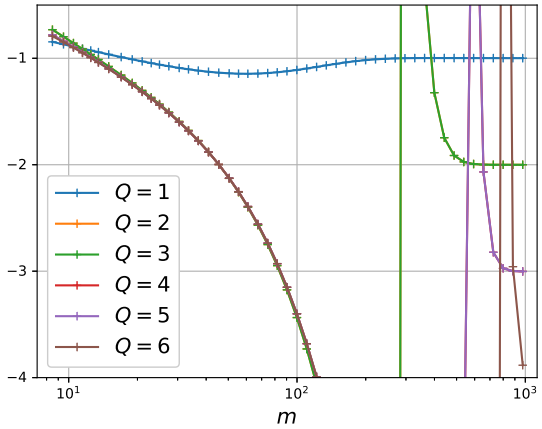
$$\mathfrak{D}_{p;j}^{[Q]}(m)=\mathcal{O}\left(m^{-\frac{Q+1}{2}}\right) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \lim_{m\to+\infty}\mathfrak{T}_{p;j}^{[Q]}(m)=-\frac{Q+1}{2}.$$

On observe que, excepté la première, les courbes se superposent par paire. Cela est dû au fait que $\mathsf{k}_1=\mathsf{k}_3=0$. Prenant en compte cette constatation, les taux d'accroissements $\mathfrak{T}_{p;j}^{[Q]}(m)$ semblent converger vers les bonnes valeurs. On remarque aussi qu'il y a une pré-asymptotique, dû au fait que l'asymptotique ne tient pas compte de l'interface R.

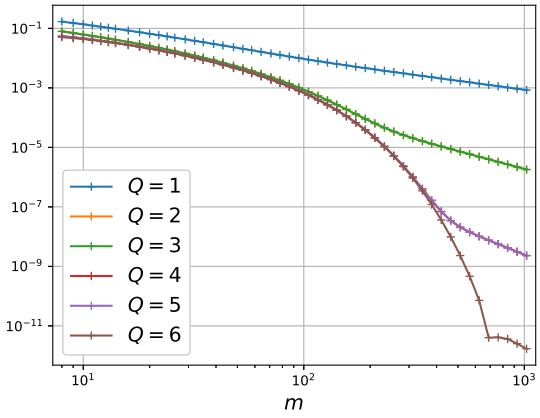
Sur la figure 7.6, on a représenté les modes résonnants numériques associés aux résonances numériques $k_{p;j}^{\mathrm{num}}(m)$ (la courbe bleue représente la partie réelle et la courbe orange représente la partie imaginaire) et le quasi-modes $r\mapsto\underline{u}_{p;j}^{[2]}(m;r,0)$ associé à la quasi-résonances $\underline{k}_{p;j}^{[2]}(m)$. Comme pour les deux section précédentes on a représenté que la partie radiale des modes avec les mêmes normalisations. La différence par rapport à deux cas précédents est que les quasi-modes ne voient pas la condition de bord en $R=1$ car la construction est indépendante des conditions de transmission.



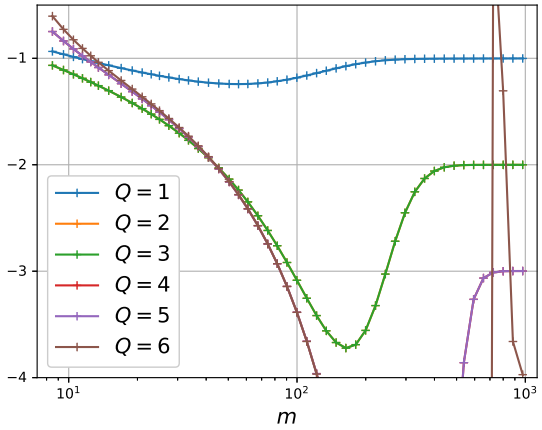
(a) $p = +1$, différences relatives



(b) $p = +1$, taux d'accroissement

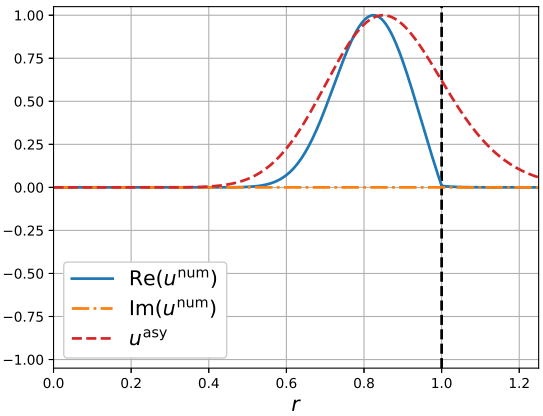


(c) $p = -1$, différences relatives

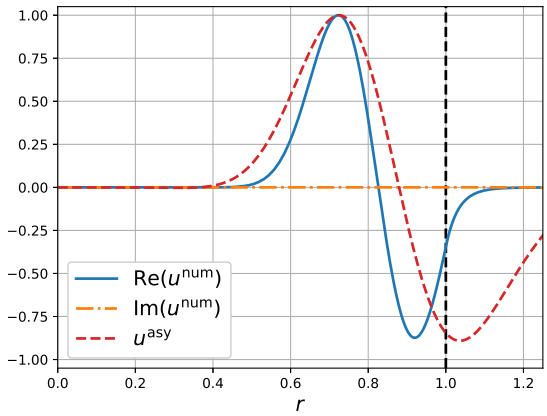


(d) $p = -1$, taux d'accroissement

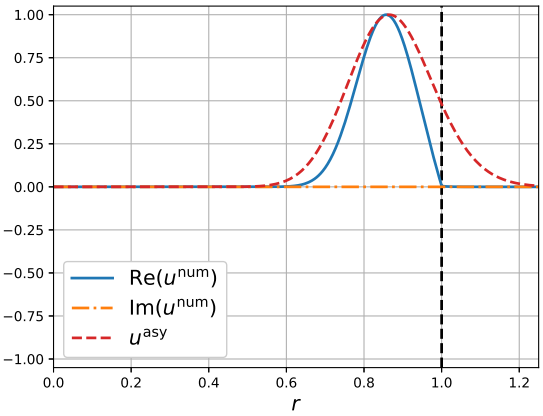
FIGURE 7.5 – À gauche, graphes des différences relatives $\mathfrak{D}_{p;j}^{[Q]}(m)$ entre les résonances numériques et les quasi-résonances en fonction de m en échelle logarithmique. À droite, graphes des taux d'accroissements $\mathfrak{T}_{p;j}^{[Q]}(m)$ en fonction de m. Sur les tous les graphes m va de 8 à 1024 et Q de 1 à 6.



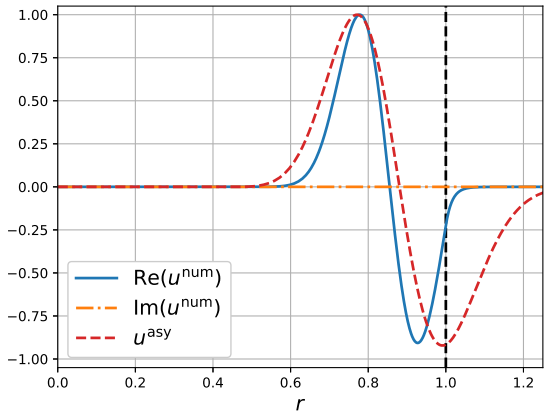
(a) $p = -1$, $m = 32$



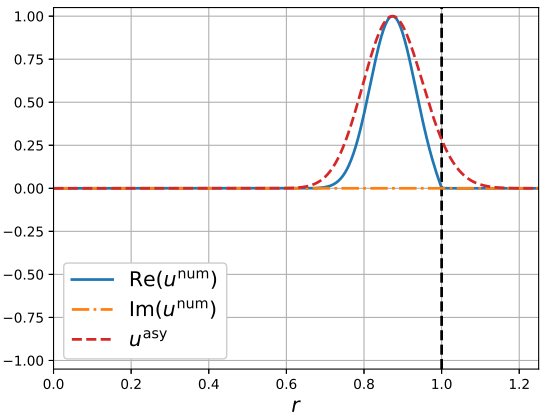
(b) $p = +1$, $m = 32$



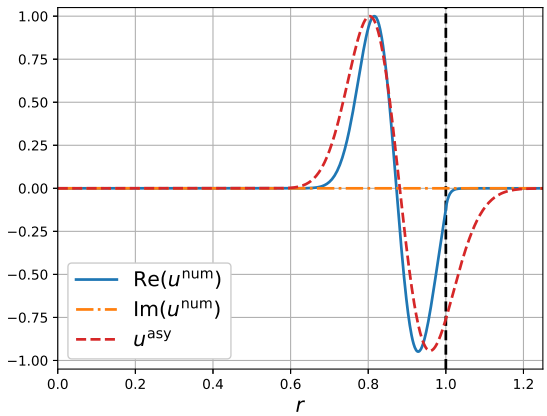
(c) $p = -1$, $m = 64$



(d) $p = +1$, $m = 64$



(e) $p = -1$, $m = 128$



(f) $p = +1$, $m = 128$

FIGURE 7.6 – Sur les graphes, la courbe bleue représente la partie réelle de $u^{\mathrm{num}}_{p;j}(m)$, la courbe orange représente la partie imaginaire de $u^{\mathrm{num}}_{p;j}(m)$ et la courbe rouge représente $r \mapsto \underline{u}^{[2]}_{p;j}(m; r, 0)$. La colonne de gauche représente $p = -1$ et $j = 0$, la colonne de droite représente $p = +1$ et $j = 1$. Les lignes de haut en bas représentent $m = 32$, 64 et 128.

Chapitre 8

Le cas général

Sommaire

8.1 Résonances à mode de galerie dans une cavité quelconque 184
8.1.1 Cadre et hypothèses 184
8.1.2 Le résultat 187
8.1.3 La démonstration du théorème 187
8.2 Miscellanées 205
8.2.1 Interprétation en terme de potentiel 205
8.2.2 Invariance conforme approchée 206
8.3 Récapitulatif des formules 208
8.3.1 Indice variable 208
8.3.2 Indice constant 209

Dans ce chapitre, on construit des quasi-résonances du problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (5.5) page 120 pour des formes de cavité et des indices optiques vérifiant une hypothèse mêlant la courbure du bord de la cavité, la valeur, et la dérivée normale de l'indice optique au bord. Ce cas est la généralisation du cas du demi-puits triangulaire du chapitre 6.

8.1 Résonances à mode de galerie dans une cavité quelconque

8.1.1 Cadre et hypothèses

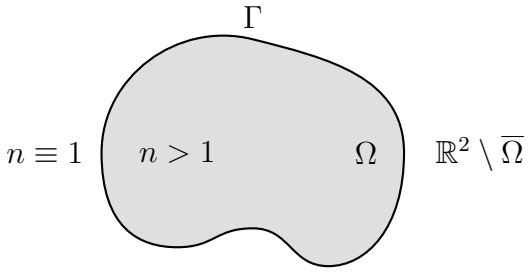
On considère dans ce chapitre le cas d'une cavité de forme quelconque. Soit Ω un ouvert borné qui représente la cavité et $\Gamma = \partial\Omega$ son bord supposé lisse, voir figure 8.1a. Soit n une fonction qui représente l'indice optique tel que $n_{|\overline{\Omega}} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, $n_{|\overline{\Omega}} > 1$ et $n_{|\mathbb{R}^2\setminus\overline{\Omega}} \equiv 1$. Soit L la longueur de la courbe Γ. Quitte à faire une homothétie, voir le lemme 5.9 page 123, on peut supposer que $L = 2\pi$ et noter $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On prend $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ une paramétrisation par l'abscisse curviligne de la courbe Γ. On note $\kappa = \det(\gamma', \gamma'')$ la courbure de γ et on note $\|\kappa\|_\infty$ le maximum de $|\kappa|$. La variable curviligne est notée $s \in \mathbb{T}$ et orientée dans le sens trigonométrique. On définit la normale sortante unitaire $\nu \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{S}^1)$ à Γ, avec cette orientation. Elle a pour expression $\nu(s) = (\gamma_2(s), -\gamma_1(s))^\intercal$.

Afin d'étudier les modes localisés le long du bord Γ, on se place dans les coordonnées tubulaires. Les coordonnées tubulaires sont (s, ξ) où $s \in \mathbb{T}$ et où ξ, dans un voisinage de 0, est la variable normale, comme illustré sur la figure 8.1b. On définit un voisinage tubulaire

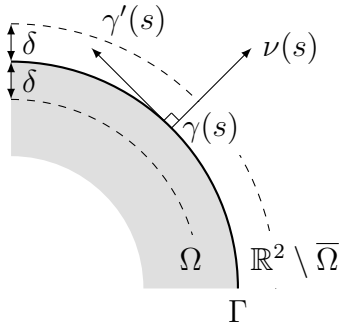
$$\mathcal{V}_\delta = \{\gamma(s) + \xi\nu(s) \mid (s, \xi) \in \mathbb{T}\times]-\delta, \delta[\}\,, \tag{8.1}$$

où $0 < \delta < \|\kappa\|_\infty^{-1}$. Soit $\phi : (s, \xi) \mapsto \gamma(s) + \xi\nu(s)$ le changement de variable tubulaire. Le voisinage $\mathcal{V}_\delta$ est un ouvert sur lequel le changement de variable ϕ entre coordonnées tubulaires et cartésiennes est un difféomorphisme lisse car $\det\left(\mathrm{D}\,\phi_{(s,\xi)}\right) = -(1 + \xi\kappa(s))$ et, pour tout $(s, \xi) \in \mathbb{T}\times]-\delta, \delta[$, on a

$$0 < 1 - \delta\,\|\kappa\|_\infty \leq 1 + \xi\kappa(s) \leq 1 + \delta\,\|\kappa\|_\infty < 2.$$



(a) Cavité « type » considérée



(b) Changement de coordonnées tubulaires considéré

Hypothèse 8.1. On suppose que pour tout $s \in \mathbb{T}$, on a

$$\kappa(s) + \frac{\partial_\nu n(\gamma(s))}{n(\gamma(s))} > 0$$

où $n(\gamma(s)) = \lim_{\Omega \ni \mathbf{x} \to \gamma(s)} n(\mathbf{x})$ et $\partial_\nu n(\gamma(s)) = \left(\lim_{\Omega \ni \mathbf{x} \to \gamma(s)} \nabla n(\mathbf{x})\right) \cdot \nu(s)$.

Remarque 8.2.

- Si la fonction n est constante, l'hypothèse $\kappa + \frac{\partial_\nu n(\gamma)}{n(\gamma)} > 0$ devient $\kappa > 0$. La cavité est alors à courbure strictement positive. Toujours dans ce cas, on peut faire le parallèle avec les valeurs propres à modes de galerie du Laplacien Dirichlet, voir [7, 61].
- Si n est non constant, nos hypothèses n'imposent pas de convexité de la cavité Ω. En effet, la courbure κ peut être négative sur une partie du bord Γ tant que le terme $\frac{\partial_\nu n(\gamma)}{n(\gamma)}$ reste strictement supérieur à $-\kappa$ sur cette partie.
- Si on compare avec la construction des développements asymptotiques des valeurs propres à modes de galerie de l'opérateur $-c^2\Delta$ avec condition de Dirichlet (corespond au mode TM avec $c = n^{-1}$) faite dans le chapitre 6 de [7], on note que l'hypothèse $\kappa + \frac{\partial_\nu n(\gamma)}{n(\gamma)} > 0$ est la même. Signalons aussi que les conditions de Popov–Vodev présentes dans [78, 84] sont équivalente aux nôtres.
- Le cas du demi-puits triangulaire du chapitre 6 est un cas particulier de la situation traitée ici quand la cavité est un disque et l'indice optique ne dépend que de la variable radiale.

L'indice optique dans les coordonnées tubulaires est également noté n de sorte que $n(s,\xi) = n(\gamma(s) + \xi\nu(s))$ pour $(s,\xi) \in \mathbb{T}\times]-\delta, 0]$. Comme n est constant et égal à 1 dans $\mathcal{V}_\delta \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$, seules les valeurs de n dans la cavité $\overline{\Omega}$ apparaîtrons dans les équations. On identifie formellement n et sa série de Taylor

$$n(s,\xi) = \sum_{q\geq 0} \frac{n_q(s)}{q!}\xi^q \qquad \text{où } n_q(s) = \lim_{\xi\to 0^-} \frac{\partial^q n}{\partial \xi^q}(s,\xi).$$

En particulier $n_0(s) = n(\gamma(s))$ est la valeur de n au bord de la cavité et $n_1(s) = \partial_{\nu(s)} n(\gamma(s))$ est la dérivée normale au bord Γ.

Notation 8.3.

- Pour $w \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, la moyenne de w est notée

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} w(s)\,\mathrm{d}s.$$

- On note $\widehat{n}_0 = \dfrac{n_0}{\langle n_0 \rangle}$.
- On note $\breve{\kappa} = \kappa + \dfrac{n_1}{n_0}$. Cette quantité est appelée la courbure effective.

Lemme 8.4. *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $s \in \mathbb{T}$, on a $\widehat{n}_0(s) \geq \varepsilon$. On a également la relation $\langle \widehat{n}_0 \rangle = 1$.*

Démonstration. Par définition, pour tout $s \in \mathbb{T}$, on a $n_0(s) > 1$. En particulier, sa moyenne vérifie $\langle n_0 \rangle > 1$ et comme $\mathbb{T}$ est compact on a $\min_{s\in\mathbb{T}} n_0(s) > 1$. On a donc, pour tout $s \in \mathbb{T}$,

$$\widehat{n}_0(s) \geq \frac{\min_{s\in\mathbb{T}} n_0(s)}{\langle n_0 \rangle} > 0.$$

Par définition de $\widehat{n}_0$, on a $\langle \widehat{n}_0 \rangle = 1$. □

Avec les notations 8.3, l'hypothèse 8.1 s'écrit

$$\breve{\kappa}(s) = \kappa(s) + \frac{n_1(s)}{n_0(s)} > 0 \qquad\qquad \forall s \in \mathbb{T}.$$

On rappelle le problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (5.5) page 120 : trouver $k \in \mathbb{C}$ et $u \in \underline{\mathrm{H}}^2(\mathbb{R}^2, \Gamma)$ non nulle tels que

$$(\mathcal{P}_p) \begin{cases} -\operatorname{div}(n^{p-1}\nabla u) - k^2 n^2 u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \\ [u]_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ [n^{p-1}\partial_\nu u]_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ \text{Condition de radiation} \end{cases} . \tag{8.2}$$

Dans le but est d'écrire notre équation dans les variables tubulaires, on énonce le lemme suivant.

Lemme 8.5. *Soit U un ouvert tel que $U \subset \mathcal{V}_\delta$ où $\mathcal{V}_\delta$ est le voisinage tubulaire défini en (8.1) page 184. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ et $u, v \in \mathrm{H}^2(\mathcal{U})$, on a les relations suivantes :*

$$\operatorname{div}(f\nabla u) = \frac{1}{1+\xi\kappa} \operatorname{div}_{s,\xi}\left((1+\xi\kappa)\, f\, G\, \nabla_{s,\xi} u\right)$$

$$\nabla u \cdot \nabla v = (G\,\nabla_{s,\xi} u) \cdot \nabla_{s,\xi} v$$

où

$$G(s,\xi) = \begin{pmatrix} (1+\xi\kappa(s))^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Il suffit de calculer la métrique g induite sur les coordonnées tubulaires par la métrique euclidienne. On définit le difféomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{T}\times]-\delta,\delta[& \longrightarrow & \mathcal{V}_\delta \\ & (s,\xi) & \longmapsto & \gamma(s) + \xi\nu(s) \end{array}.$$

On a

$$g(s,\xi) = \begin{pmatrix} \partial_s\phi \cdot \partial_s\phi & \partial_s\phi \cdot \partial_\xi\phi \\ \partial_s\phi \cdot \partial_\xi\phi & \partial_\xi\phi \cdot \partial_\xi\phi \end{pmatrix}$$

et

$$\partial_s\phi \cdot \partial_s\phi = |\gamma'(s) + \xi\nu'(s)|^2 = (1+\xi\kappa(s))^2,$$

$$\partial_s\phi\cdot\partial_\xi\phi=(\gamma'(s)+\xi\nu'(s))\cdot\nu(s)=0,$$
$$\partial_\xi\phi\cdot\partial_\xi\phi=|\nu(s)|^2=1.$$

On obtient les formules énoncées en posant $G=g^{-1}$ car on a l'expression suivante

$$\int_{\mathcal{U}} f\,\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_{\phi^{-1}(\mathcal{U})} f\,G\,\nabla_{s,\xi}u\cdot\nabla_{s,\xi}v\,(1+\xi\kappa)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi.$$

□

Corollaire 8.6. *Pour toute fonction $u\in \mathrm{H}^2(\mathcal{U})$ où l'ouvert $\mathcal{U}$ est contenu dans $\mathcal{V}_\delta\cap\Omega$ ou dans $\mathcal{V}_\delta\cap\left(\mathbb{R}^2\setminus\overline{\Omega}\right)$, on a la relation suivante*

$$-\operatorname{div}\left(n^{p-1}\nabla u\right)=-\frac{1}{1+\xi\kappa}\partial_s\left(\frac{n^{p-1}}{1+\xi\kappa}\partial_s u\right)-\frac{1}{1+\xi\kappa}\partial_\xi\left(n^{p-1}(1+\xi\kappa)\partial_\xi u\right)$$

qui s'écrit encore sous forme développée (après multiplication par n^{1-p}) :

$$-\Delta u-\frac{p-1}{n}\nabla n\cdot\nabla u=-\partial^2_{\xi\xi}u-\frac{1}{(1+\xi\kappa)^2}\partial^2_{ss}u-\left(\frac{\kappa}{1+\xi\kappa}+(p-1)\frac{\partial_\xi n}{n}\right)\partial_\xi u$$
$$-\left(\frac{-\xi\kappa'}{(1+\xi\kappa)^3}+\frac{(p-1)\partial_s n}{(1+\xi\kappa)^2 n}\right)\partial_s u.$$

Démonstration. C'est une application directe des formules du lemme 8.5. □

8.1.2 Le résultat

Sous les hypothèses 8.1 et sous l'hypothèse que Γ est lisse, on a le théorème suivant.

Théorème 8.7. *Pour $p\in\{\pm1\}$ fixé, il existe des familles de quasi-résonances $(\underline{k}_{p;j}(m))_{m\geq1}$ et de quasi-modes associés $(\underline{u}_{p;j}(m))_{m\geq1}$, indexées par $j\in\mathbb{N}$, au sens de la définition 5.3 avec $\beta=\frac{1}{3}$ telles que l'on ait, pour tout $\xi\in]-\delta,\delta[$ et $s\in\mathbb{T}$,*

$$\underline{k}_{p;j}(m)=m\mathrm{K}\left(m^{-\frac{1}{3}}\right),$$

$$\underline{u}_{p;j}(m;s,\xi)=C\,\chi(\xi)\,\exp\left(\mathrm{i}m\Theta_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};s\right)\right)\begin{cases}\Phi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};s,m^{\frac{2}{3}}\xi\right) & \text{si } \xi\leq0\\ \Psi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};s,m\xi\right) & \text{si } \xi>0\end{cases}$$

où $\mathrm{K}\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1])$, $\Theta_{p;j}\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{T})$, $\Phi_{p;j}\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}_-)$, $\Psi_{p;j}\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)$, $C>0$ une constante de normalisation et $\chi\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(]-\delta,\delta[)$ telle que $\chi\equiv1$ sur $\left[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right]$.

8.1.3 La démonstration du théorème

L'idée de la démonstration pour construire des quasi-résonances et des quasi-modes associés au problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (8.2) est de construire des solutions

approchées au problème $(\mathcal{P}^{\mathrm{loc}}_{p;\Gamma})$, localisé autour de Γ, suivant : trouver $k \in \mathbb{C}$ et $u \in \underline{\mathrm{H}}^2(\mathcal{V}_\delta, \Gamma)$ non nulle tels que

$$(\mathcal{P}^{\mathrm{loc}}_{p;\Gamma}) \begin{cases} -\Delta u - \frac{p-1}{n} \nabla n \cdot \nabla u - k^2\, n^2\, u = 0 & \text{dans } \mathcal{V}_\delta \setminus \Gamma \\ [u]_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ [n^{p-1} \partial_\xi u]_\Gamma = 0 & \text{à travers } \Gamma \\ u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{V}_\delta \end{cases} . \tag{8.3}$$

L'équation aux dérivées partielles du problème $(\mathcal{P}^{\mathrm{loc}}_{p;\Gamma})$ vient de celle du problème $(\mathcal{P}_p)$ où on a développé la divergence et multiplié par n^{1-p} dans $\mathcal{V}_\delta \cap \Omega$ et dans $\mathcal{V}_\delta \cap \left(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}\right)$.

On veut construire des modes de galerie, c'est-à-dire des fonctions solutions de $(\mathcal{P}_p)$ qui sont, d'une part localisées le long du bord Γ et, d'autre part qui possèdent un grand nombre d'oscillations le long du bord. Dans les cas invariants par rotation déjà traités au chapitre 6, les phases sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$. Une première idée est de prendre des ansatzs avec pour phase $\mathrm{e}^{\mathrm{i}ms}$ mais cela ne fonctionne pas. On ne parvient pas à construire des quasi-résonances. C'est pour cette raison que l'on prend une phase plus générale de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2h^{-1}\Theta(s)}$ où Θ est une fonction inconnue qu'il faudra construire en même temps que les autres composants des quasi-modes et h est un petit paramètre qui joue le rôle de m^{-1} dans le cas invariant par rotation.

Comme il sera expliqué dans la section 8.2.1, nous avons aussi dans ce cas une interprétation en termes de potentiel et, à s fixé, il a la forme d'un demi-puits triangulaire. Ainsi, conformément à ce qui a été fait dans le chapitre 6, on change d'échelle la variable ξ sur les intervalles $]-\delta, 0[$ et $]0, \delta[$ suivant le petit paramètre $h > 0$. On définit les nouvelles variables mises à l'échelle (σ, ρ) par

$$\sigma = h^{-\frac{2}{3}} \xi \text{ pour } \xi < 0 \qquad \text{et} \qquad \rho = h^{-1} \xi \text{ pour } \xi > 0.$$

On fait les ansatzs suivants sur la forme de k et de la fonction u

$$k^2 = \frac{4\Lambda}{h^2 \langle n_0 \rangle^2} \qquad \text{et} \qquad u(s,\xi) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}h^{-1}\Theta(s)} \begin{cases} \varphi(s,\sigma) & \xi < 0 \\ \psi(s,\rho) & \xi > 0 \end{cases} \tag{8.4}$$

où Λ, Θ, φ et ψ ont des développements formels de la forme suivantes, pour $s \in \mathbb{T}$, $\sigma \in \mathbb{R}_-$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$,

$$\Lambda = \Lambda_{-2} + \Lambda_{-1} h^{\frac{1}{3}} + h^{\frac{2}{3}} \sum_{q \geq 0} \Lambda_q h^{\frac{q}{3}}, \tag{8.5a}$$

$$\Theta(s) = \Theta_{-2}(s) + \Theta_{-1}(s) h^{\frac{1}{3}} + h^{\frac{2}{3}} \sum_{q \geq 0} \Theta_q(s) h^{\frac{q}{3}}, \tag{8.5b}$$

$$\varphi(s,\sigma) = \sum_{q \geq 0} \varphi_q(s,\sigma) h^{\frac{q}{3}}, \tag{8.5c}$$

$$\psi(s,\rho) = \sum_{q \geq 0} \psi_q(s,\rho) h^{\frac{q}{3}}. \tag{8.5d}$$

De plus, on suppose que la fonction

$$s \mapsto \partial_\sigma \varphi_0(s,0) \neq 0 \tag{8.6}$$

où φ_0 est le premier terme dans (8.5c). Par la suite, on aura besoin des relations suivantes : pour $u(s,\xi) = w(s,\xi)\,\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}}{h}\Theta(s)}$, on a

$$\partial_s u(s,\xi) = \left(\partial_s w(s,\xi) + \frac{2\mathrm{i}}{h}\Theta'(s) w(s,\xi)\right)\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}}{h}\Theta(s)}, \tag{8.7a}$$

$$\partial_{ss}^2 u(s,\xi) = \Big(\partial_{ss}^2 w(s,\xi) + \frac{2\mathrm{i}}{h}\left(2\Theta'(s)\partial_s w(s,\xi) + \Theta''(s) w(s,\xi)\right) - \frac{4}{h^2}\Theta'(s)^2 w(s,\xi)\Big)\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}}{h}\theta(s)}. \tag{8.7b}$$

On déduit du problème $(\mathcal{P}^{\mathrm{loc}}_{p;\Gamma})$ défini en (8.3), des ansatzs (8.4), du corollaire 8.6 et des relations (8.7), le problème mis à l'échelle suivant, d'inconnues Λ, Θ, φ et ψ

$$(\mathcal{P}^{\mathrm{scal}}_h)\begin{cases} -h^{\frac{2}{3}}\partial^2_{\sigma\sigma}\varphi - h\mathcal{L}^-_h\varphi + \dfrac{4\Theta'^2\,\varphi}{(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa)^2} = \dfrac{4n^2\,\Lambda\,\varphi}{\langle n_0\rangle^2} & (s,\sigma)\in\mathbb{T}\times\mathbb{R}_- \\ -\partial^2_{\rho\rho}\psi - h\mathcal{L}^+_h\psi + \dfrac{4\Theta'^2\,\psi}{(1+h\rho\kappa)^2} = \dfrac{4\,\Lambda\,\psi}{\langle n_0\rangle^2} & (s,\rho)\in\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+ \\ \varphi(s,0) = \psi(s,0) & s\in\mathbb{T} \\ n_0^{p-1}(s)h^{\frac{1}{3}}\partial_\sigma\varphi(s,0) = \partial_\rho\psi(s,0) & s\in\mathbb{T} \\ \varphi(s,\cdot)\text{ exponentiellement décroissante en }-\infty & s\in\mathbb{T} \\ \psi(s,\cdot)\text{ exponentiellement décroissante en }+\infty & s\in\mathbb{T} \end{cases} \tag{8.8}$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^-_h\varphi =& 2\mathrm{i}\left(\frac{2\Theta'\partial_s\varphi + \Theta''\varphi}{(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa)^2} + \frac{(p-1)\partial_s n\Theta'\varphi}{(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa)^2 n}\right) + h^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\kappa}{1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa} + (p-1)\frac{\partial_\xi n}{n}\right)\partial_\sigma\varphi \\ & - h^{\frac{2}{3}}\frac{2\mathrm{i}\sigma\kappa'\Theta'\varphi}{(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa)^3} + h\left(\frac{\partial^2_{ss}\varphi}{(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa)^2} + \frac{(p-1)\partial_s n\partial_s\varphi}{(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa)^2 n}\right) - h^{\frac{5}{3}}\frac{\sigma\kappa'\partial_s\varphi}{(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa)^3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^+_h\psi =& \frac{\kappa\partial_\rho\psi}{1+h\rho\kappa} + 2\mathrm{i}\frac{2\Theta'\partial_s\psi + \Theta''\psi}{(1+h\rho\kappa)^2} + h\left(\frac{\partial^2_{ss}\psi}{(1+h\rho\kappa)^2} - \frac{2\mathrm{i}\rho\kappa'\Theta'\psi}{(1+h\rho\kappa)^3}\right) \\ & - h^2\frac{\rho\kappa'\partial_s\psi}{(1+h\rho\kappa)^3}.\end{aligned}$$

En les variables (σ,ρ), le changement de variable tubulaire est valable sur $\mathbb{T}\times\left]-\delta h^{-\frac{2}{3}}, \delta h^{-1}\right[$. Quand $h\to 0$, ce cylindre devient de plus en plus large. On considère le problème posé sur le cylindre infini $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ avec des conditions de décroissance exponentielle en $\pm\infty$ en les variables (σ,ρ). Ces conditions de décroissance exponentielle nous permettront à la fin de cette section de localiser le long de $\mathbb{T}\times\{0\}$ nos quasi-modes construits

Remarque 8.8. Le développement formel de n dans la variable mise à l'échelle σ est

$$n(s,\sigma h^{\frac{2}{3}}) = \sum_{\ell\geq 0}\frac{n_\ell(s)}{\ell!}\sigma^\ell h^{\frac{2\ell}{3}}$$

et ceux de ses dérivées partielles $\partial_\xi n$ et $\partial_s n$ sont

$$\partial_\xi n(s,\sigma h^{\frac{2}{3}}) \sim \sum_{\ell\geq 0}\frac{n_{\ell+1}(s)}{\ell!}\sigma^\ell h^{\frac{2\ell}{3}},$$

$$\partial_s n(s, \sigma h^{\frac{2}{3}}) \sim \sum_{\ell \geq 0} \frac{n'_\ell(s)}{\ell!} \sigma^\ell h^{\frac{2\ell}{3}}.$$

Notons que ces développements sont en puissance de $h^{\frac{2}{3}}$ et donc n^2 et $\frac{1}{n}$ ont un développement formel en puissance de $h^{\frac{2}{3}}$.

Le principe de la construction du développement asymptotique est de remplacer Λ, Θ, φ, ψ et n par leurs développements formels (8.5) dans $(\mathcal{P}_h^{\text{scal}})$ défini en (8.8) et d'identifier les termes de même puissance de h, générant ainsi une suite de systèmes différentiels pour Λ_q, Θ_q, φ_q et ψ_q dépendant des n_q. Les premières équations à regarder sont les équations sur φ. Selon la puissance h^0, on obtient, pour tout $(s, \sigma) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}_-$,

$$4\left(\Theta'_{-2}(s)^2 - \Lambda_{-2}\widehat{n}_0(s)^2\right)\varphi_0(s, \sigma) = 0. \tag{8.9}$$

Selon la puissance $h^{\frac{1}{3}}$, on obtient, pour tout $(s, \sigma) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}_-$,

$$8\left(\Theta'_{-2}(s)\Theta'_{-1}(s) - \Lambda_{-2}\Lambda_{-1}\widehat{n}_0(s)^2\right)\varphi_0(s, \sigma) + 4\left(\Theta'_{-2}(s)^2 - \Lambda_{-2}\widehat{n}_0(s)^2\right)\varphi_1(s, \sigma) = 0. \tag{8.10}$$

L'équation (8.9) est appelée équation eikonale. Pour commencer la construction et ne pas obtenir identiquement zéro, on doit trouver des solutions non nulles aux équations (8.9)-(8.10).

Lemme 8.9. *Sous l'hypothèse (8.6), il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $h = \frac{2}{m}$, $\Lambda_{-2} = 1$, $\Lambda_{-1} = 0$ et, pour tout $s \in \mathbb{T}$,*

$$\Theta_{-2}(s) = \int_0^s \widehat{n}_0(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \Theta_{-1}(s) = 0.$$

Démonstration. On commence par regarder l'équation (8.9). Pour tout $s \in \mathbb{T}$, l'hypothèse (8.6) implique qu'il existe $\sigma_s \in \mathbb{R}_-$ tel que $\varphi_0(s, \sigma_s) \neq 0$, pour tout $s \in \mathbb{T}$. On a donc l'équation eikonale

$$\Theta'_{-2}(s)^2 - \widehat{n}_0(s)^2\Lambda_{-2} = 0.$$

On en déduit que $\Lambda_{-2} = a > 0$, d'où $\Theta'_{-2}(s) = \sqrt{a}\,\widehat{n}_0(s)$. On peut prendre $a = 1$ car cela ne change qu'un facteur multiplicatif sur la solution construite.

Il faut que la fonction $s \mapsto \mathsf{e}^{\frac{2\mathrm{i}}{h}\Theta_{-2}(s)}$ soit périodique. Pour cela, il suffit que l'on satisfasse la relation $\mathsf{e}^{\frac{2\mathrm{i}}{h}\Theta_{-2}(2\pi)} = \mathsf{e}^{\frac{2\mathrm{i}}{h}\Theta_{-2}(0)}$, c'est-à-dire, qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{2}{h}\int_0^{2\pi} \widehat{n}_0(s)\,\mathrm{d}s = 2\pi m.$$

On en déduit que $h = \frac{2}{m}$.

D'après l'équation (8.10), pour tout $(s, \sigma) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}_-$, on a

$$4\left(\Theta'_{-1}(s)^2 - \widehat{n}_0^2\Lambda_{-1}\right)\varphi_0(s, \sigma) = 0.$$

Par le même raisonnement que précédemment, on a $\Theta'_{-1}(s)^2 = \widehat{n}_0^2\Lambda_{-1}$. On en déduit que $\Lambda_{-1} = b \geq 0$ et $\Theta'_{-1}(s) = \sqrt{b}\,\widehat{n}_0(s)$. On doit aussi avoir

$$s \mapsto \exp\left(2\mathrm{i}\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\Theta_{-1}(s)\right)$$

périodique. Il faut donc que

$$\exp\left(2\mathsf{i}\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\Theta_{-1}(2\pi)\right)=\exp\left(2\mathsf{i}\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\Theta_{-1}(0)\right)$$

c'est-à-dire, qu'il existe $\ell(m)\in\mathbb{N}$, tel que

$$2\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\sqrt{b}\int_0^{2\pi}\widehat{n}_0(s)\,\mathrm{d}s=2\pi\ell(m).$$

On en déduit que $\ell(m)=2^{\frac{1}{3}}\,m^{\frac{2}{3}}\sqrt{b}$. On a alors $\ell(2)=\ell(1)\,2^{\frac{2}{3}}$. Si $\ell(1)$ est différent de 0, cela implique que $2^{\frac{2}{3}}$ est rationnel, ce qui est absurde. On a donc $\ell(1)=0$ d'où $b=0$, et par conséquent $\Lambda_{-1}=0$ et $\Theta_{-1}=0$. □

On a donc obtenu que les développements de Λ et Θ sont de la forme

$$\Lambda=1+h^{\frac{2}{3}}\sum_{q\geq 0}\Lambda_q h^{\frac{q}{3}},\qquad\qquad \Theta(s)=\int_0^s\widehat{n}(t)\,\mathrm{d}t+h^{\frac{2}{3}}\sum_{q\geq 0}\Theta_q(s)h^{\frac{q}{3}}.$$

Pour simplifier les écritures dans la suite, on introduit les notations

$$\begin{aligned}\lambda&=h^{-\frac{2}{3}}(\Lambda-1),\\ \theta(s)&=h^{-\frac{2}{3}}\left(\Theta(s)-\int_0^s\widehat{n}_0(t)\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

et leurs développements formels

$$\begin{aligned}\lambda&=\sum_{q\geq 0}\lambda_q h^{\frac{q}{3}},\\ \theta(s)&=\sum_{q\geq 0}\theta_q(s)h^{\frac{q}{3}}.\end{aligned}$$

On remarquera que l'on a $\lambda_q=\Lambda_q$ et $\theta_q=\Theta_q$ pour tout $q\in\mathbb{N}$.

Remarque 8.10. Notre développement formel du quasi-mode est de la forme suivante

$$u(s,\xi)=w(s,\xi)\exp\left(\mathsf{i}m\int_0^s\widehat{n}_0(t)\,\mathrm{d}t+2\mathsf{i}\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\theta(s)\right).$$

On rappelle que $\widehat{n}_0$ est de moyenne 1 d'où $s\mapsto\int_0^s\widehat{n}_0(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction croissante qui vaut 2π en 2π. L'entier m peut-être interprété comme le nombre d'oscillations de u le long du bord Γ. On notera que c'est bien la généralisation du cas circulaire avec un indice variable radialement, voir 6.3 page 131, où on a une phase $\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}$.

La construction commence par le lemme suivant. On rappelle que $\breve{\kappa}=\kappa+\frac{n_1}{n_0}>0$.

Lemme 8.11. *Pour $j\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{T}$, $\sigma\in\mathbb{R}_-$ et $\rho\in\mathbb{R}_+$, on a*

$$\begin{aligned}\lambda_0&=a_j\left\langle\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}\widehat{n}_0^{\frac{1}{3}}\right\rangle,\\ \theta_0(s)&=\frac{a_j}{2}\int_0^s\left(\left\langle\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}\widehat{n}_0^{\frac{1}{3}}\right\rangle\widehat{n}_0(t)-\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}(t)\widehat{n}_0^{\frac{1}{3}}(t)\right)\mathrm{d}t,\\ \varphi_0(s,\sigma)&=\alpha(s)\,\mathsf{A}\left(a_j+2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(s)\sigma\right),\\ \psi_0(s,\rho)&=0\end{aligned}$$

où $\alpha\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ ne s'annule pas.

Démonstration. Dans le problème $(\mathcal{P}_h^{\text{scal}})$ défini en (8.8) où on a substitué Λ, θ, φ et ψ par leurs développements formels (8.5), on prend les premiers termes non nuls devant les puissances de $h^{\frac{1}{3}}$. On obtient

$$(\mathcal{P}_{h,0}^{\text{scal}}) \begin{cases} -\partial_{\sigma\sigma}^2\varphi_0 - 8\breve{\kappa}\widehat{n}_0^2\sigma\varphi_0 = (4\lambda_0\widehat{n}_0^2 - 8\theta_0'\widehat{n}_0)\,\varphi_0 & (s,\sigma)\in\mathbb{T}\times\mathbb{R}_- \quad (\text{ordre } h^{\frac{2}{3}}) \\ -\partial_{\rho\rho}^2\psi_0 + 4\frac{n_0^2-1}{\langle n_0\rangle^2}\psi_0 = 0 & (s,\rho)\in\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+ \quad (\text{ordre } h^0) \\ \varphi_0(s,0) = \psi_0(s,0) & s\in\mathbb{T} \quad (\text{ordre } h^0) \\ \psi_0'(s,0) = 0 & s\in\mathbb{T} \quad (\text{ordre } h^0) \\ \varphi_0(s,\cdot) \text{ exp. } \searrow \text{ en } -\infty & s\in\mathbb{T} \quad (\text{ordre } h^0) \\ \psi_0(s,\cdot) \text{ exp. } \searrow \text{ en } +\infty & s\in\mathbb{T} \quad (\text{ordre } h^0) \end{cases}$$

où « exp. $\searrow$ » signifie exponentiellement décroissante. On commence par considérer la variable s comme un paramètre. On fixe $s\in\mathbb{T}$ et on résout l'équation différentielle sur ψ_0, qui est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. On obtient

$$\psi_0(s,\rho) = \alpha(s)\mathsf{e}^{-\frac{2\rho}{\langle n_0\rangle}\sqrt{n_0^2(s)-1}} + \beta(s)\mathsf{e}^{\frac{2\rho}{\langle n_0\rangle}\sqrt{n_0^2(s)-1}}.$$

Comme $\psi_0(s,\cdot)$ est exponentiellement décroissante en $+\infty$, on a nécessairement $\beta(s)=0$. La condition $\psi_0'(s,0)=0$ implique quant à elle que $\alpha(s)=0$. La fonction $\psi_0(s,\cdot)$ est donc identiquement nulle. On s'intéresse ensuite à $\varphi_0(s,\cdot)$. Le couple $(4\lambda_0\widehat{n}_0^2 - 8\theta_0'\widehat{n}_0, \varphi_0)$ est une solution du problème spectral suivant

$$\begin{cases} -\partial_{\sigma\sigma}^2\varphi_0 - 8\breve{\kappa}\widehat{n}_0^2\sigma\varphi_0 = (4\lambda_0\widehat{n}_0^2 - 8\theta_0'\widehat{n}_0)\,\varphi_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_-^* \\ \varphi(s,0) = 0 \end{cases}.$$

On fait le changement de variable $x = 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}\sigma$ pour se ramener au même problème spectral que celui du lemme C.6 page 251. On obtient que

$$\frac{\lambda_0\widehat{n}_0^2 - 2\theta_0'\widehat{n}_0}{\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}\widehat{n}_0^{\frac{4}{3}}} = a_j \qquad \text{et} \qquad \varphi_0(\sigma) = \alpha(s)\,\mathsf{A}(a_j + x)$$

où $\alpha(s)$ ne dépend que de la variable s. Ceci donne

$$\lambda_0\widehat{n}_0(s) - 2\theta_0'(s) = a_j\breve{\kappa}(s)^{\frac{2}{3}}\widehat{n}_0(s)^{\frac{1}{3}} \tag{8.11}$$

et $\varphi_0(s,\sigma) = \alpha(s)\,\mathsf{A}\left(a_j + 2\breve{\kappa}(s)^{\frac{1}{3}}\widehat{n}_0(s)^{\frac{2}{3}}\sigma\right)$ où la famille $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble des zéros de la fonction de Airy A voir C.5 page 251. On a bien φ_0 exponentiellement décroissante en $-\infty$ d'après le lemme sur la décroissance des fonctions de Airy, C.3 page 251. On peut prendre n'importe quelle fonction non nulle pour $s\mapsto\alpha(s)$. D'après l'équation (8.11), on obtient

$$\theta_0'(s) = \frac{1}{2}\left(\lambda_0\widehat{n}_0(s) - a_j\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{1}{3}}(s)\right).$$

Après intégration de θ_0', on obtient

$$\theta_0(s) = \frac{1}{2}\int_0^s \left(\lambda_0\widehat{n}_0(t) - a_j\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}(t)\widehat{n}_0^{\frac{1}{3}}(t)\right)\mathrm{d}t.$$

Par périodicité de θ_0, on a $\theta_0(2\pi) = \theta_0(0)$ d'où $\lambda_0 = a_j\left\langle\tau^{\frac{2}{3}}\widehat{n}_0^{\frac{1}{3}}\right\rangle$. Ce qi achève le démonstration du lemme. □

Remarque 8.12. Le choix de la fonction α est arbitraire. Ultérieurement, au lemme 8.20 page 204, nous établiront que les quasi-résonances construites sont indépendantes de la fonction α.

Le lemme suivant décrit la structure des problèmes permettant de calculer les différents termes des développements asymptotiques de λ, θ, φ et ψ.

Lemme 8.13. *La suite de problèmes* $(\mathcal{P}^{\mathrm{scal}}_{h,q})$ *pour* $q \geq 1$ *a la forme suivante où* $s \in \mathbb{T}$, $\sigma \in \mathbb{R}_-$ *et* $\rho \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{cases} -\partial^2_{\sigma\sigma}\varphi_q - \left(8\breve{\kappa}\widehat{n}_0^2\sigma + 4a_j\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}\widehat{n}_0^{\frac{4}{3}}\right)\varphi_q = (4\lambda_q\widehat{n}_0^2 - 8f'_q\widehat{n}_0)\varphi_0 + S^\varphi_q & (\textit{ordre } h^{\frac{q+2}{3}}) \\ -\partial^2_{\rho\rho}\psi_q + 4\frac{n_0^2-1}{\langle n_0\rangle}\psi_q = S^\psi_q & (\textit{ordre } h^{\frac{q}{3}}) \\ \varphi_q(s,0) = \psi_q(s,0) & (\textit{ordre } h^{\frac{q}{3}}) \\ \partial_\rho\psi_q(s,0) = n_0^{p-1}(s)\partial_\sigma\varphi_{q-1}(s,0) & (\textit{ordre } h^{\frac{q}{3}}) \\ \varphi_q(s,\cdot) \textit{ exp. } \searrow \textit{ en } -\infty & (\textit{ordre } h^{\frac{q}{3}}) \\ \psi_q(s,\cdot) \textit{ exp. } \searrow \textit{ en } +\infty & (\textit{ordre } h^{\frac{q}{3}}) \end{cases}$$

où les fonctions S^φ_q *et* S^ψ_q *sont explicitées dans la démonstration, relations* (8.12) *et* (8.13)*, et dépendent de* $(\lambda_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$, $(\theta_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$, $(\varphi_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$, $(\psi_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$ *et de* $(n_\ell)_{\ell=0}^{q+2}$.

Notation. Soit $S = \sum_{\ell\geq 0} s_\ell h^{\frac{\ell}{3}}$ une série formelle. On utilise la notation $\left[h^{\frac{q}{3}}\right](S) = s_q$ pour indiquer que l'on extrait le coefficient d'ordre $h^{\frac{q}{3}}$.

Démonstration. On part des équations du problème $(\mathcal{P}^{\mathrm{scal}}_h)$ défini en (8.8) et on considère uniquement les termes des ordres $h^{\frac{q+2}{3}}$ et $h^{\frac{q}{3}}$. Pour les conditions de décroissance exponentielle et les conditions de transmission, on prend les termes d'ordre $h^{\frac{q}{3}}$ et on obtient directement les résultats énoncés.

Pour l'équation en φ, on prend les termes d'ordre $\frac{q+2}{3}$:

$$\left[h^{\frac{q+2}{3}}\right]\left(h^{\frac{2}{3}}\partial^2_{\sigma\sigma}\varphi\right) = \partial^2_{\sigma\sigma}\varphi_q,$$

$$\left[h^{\frac{q+2}{3}}\right]\left(h\mathcal{L}^-_h\varphi\right) = \left[h^{\frac{q-1}{3}}\right]\left(\mathcal{L}^-_h\varphi\right).$$

Pour les deux autres termes de l'équation différentielle sur φ, on remarque que d'après le lemme 8.9, on a $\Theta = \widehat{n}_0 + h^{\frac{2}{3}}\theta$ et donc que

$$\begin{aligned}\left[h^{\frac{q+2}{3}}\right]\left(\frac{4\Theta'^2\varphi}{\left(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa\right)^2}\right) &= \left[h^{\frac{q+2}{3}}\right]\left(\frac{4(\widehat{n}_0^2 + h^{\frac{2}{3}}2\widehat{n}_0\theta' + h^{\frac{4}{3}}\theta'^2)\varphi}{\left(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa\right)^2}\right) \\ &= 4\widehat{n}_0^2\varphi_{q+2} - 8\widehat{n}_0^2\kappa\sigma\varphi_q + \sum_{\ell=0}^{q-1}\varphi_\ell\left[h^{\frac{q+2-\ell}{3}}\right]\left(\frac{4\widehat{n}_0^2}{\left(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa\right)^2}\right) \\ &\quad + 8\widehat{n}_0\theta'_q\varphi_0 + 8\widehat{n}_0\theta'_0\varphi_q + \sum_{\substack{a+b+c=q \\ 0\leq a,b\leq q-1 \\ 0\leq c\leq q}}\theta'_a\varphi_b\left[h^{\frac{c}{3}}\right]\left(\frac{8\widehat{n}_0}{\left(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa\right)^2}\right)\end{aligned}$$

$$+\left[h^{\frac{q-2}{3}}\right]\left(\frac{4\theta'^2\varphi}{\left(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa\right)^2}\right).$$

On a $\Lambda = 1 + h^{\frac{2}{3}}\lambda$, donc

$$\begin{aligned}\left[h^{\frac{q+2}{3}}\right]\left(\frac{4n^2\Lambda\varphi}{\langle n_0\rangle^2}\right) &= \left[h^{\frac{q+2}{3}}\right]\left(\frac{4n^2(1+h^{\frac{2}{3}}\lambda)\varphi}{\langle n_0\rangle^2}\right)\\ &= 4\widehat{n}_0^2\varphi_{q+2} + 8\widehat{n}_0^2\frac{n_1}{n_0}\sigma\varphi_q + \sum_{\ell=0}^{q-1}\varphi_\ell\left[h^{\frac{q+2-\ell}{3}}\right]\left(\frac{4n^2}{\langle n_0\rangle^2}\right)\\ &\quad + 4\widehat{n}_0^2\lambda_q\varphi_0 + 4\widehat{n}_0^2\lambda_0\varphi_q + \sum_{\substack{a+b+c=q\\0\le a,b\le q-1\\0\le c\le q}}\lambda_a\varphi_b\left[h^{\frac{c}{3}}\right]\left(\frac{4n^2}{\langle n_0\rangle^2}\right).\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}S_q^\varphi = \left[h^{\frac{q-1}{3}}\right]\left(\mathcal{L}_h^-\varphi\right) &- \sum_{\ell=0}^{q-1}\varphi_\ell\left[h^{\frac{q+2-\ell}{3}}\right]\left(\frac{4\widehat{n}_0^2}{\left(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa\right)^2}\right)\\ &- \sum_{\substack{a+b+c=q\\0\le a,b\le q-1\\0\le c\le q}}\theta'_a\varphi_b\left[h^{\frac{c}{3}}\right]\left(\frac{8\widehat{n}_0}{\left(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa\right)^2}\right) - \left[h^{\frac{q-2}{3}}\right]\left(\frac{4\theta'^2\varphi}{\left(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa\right)^2}\right)\\ &+ \sum_{\ell=0}^{q-1}\varphi_\ell\left[h^{\frac{q+2-\ell}{3}}\right]\left(\frac{4n^2}{\langle n_0\rangle^2}\right) + \sum_{\substack{a+b+c=q\\0\le a,b\le q-1\\0\le c\le q}}\lambda_a\varphi_b\left[h^{\frac{c}{3}}\right]\left(\frac{4n^2}{\langle n_0\rangle^2}\right)\end{aligned}\tag{8.12}$$

et en remplaçant λ_0 et θ'_0 par leurs expressions grâce au lemme 8.11, on obtient

$$-\partial^2_{\sigma\sigma}\varphi_q - \left(8\breve{\kappa}\widehat{n}_0^2\sigma + 4a_j\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}\widehat{n}_0^{\frac{4}{3}}\right)\varphi_q = (4\lambda_q\widehat{n}_0^2 - 8\theta'_q\widehat{n}_0)\varphi_0 + S_q^\varphi.$$

De même pour l'équation sur ψ, on calcule

$$\left[h^{\frac{q}{3}}\right]\left(\partial^2_{\rho\rho}\psi\right) = \partial^2_{\rho\rho}\psi_q,$$

$$\left[h^{\frac{q}{3}}\right]\left(h\mathcal{L}_h^+\psi\right) = \left[h^{\frac{q-3}{3}}\right]\left(\mathcal{L}_h^+\psi\right),$$

$$\begin{aligned}\left[h^{\frac{q}{3}}\right]\left(\frac{4\Theta'^2\psi}{(1+h\rho\kappa)^2}\right) &= 4\widehat{n}_0^2\psi_q + \sum_{\ell=0}^{q-3}\psi_\ell\left[h^{\frac{q-\ell}{3}}\right]\left(\frac{4}{(1+h\rho\kappa)^2}\right)\\ &\quad + \left[h^{\frac{q-2}{3}}\right]\left(\frac{4\left(2\widehat{n}_0\theta' + h^{\frac{2}{3}}\theta'^2\right)\psi}{(1+h\rho\kappa)^2}\right),\end{aligned}$$

$$\left[h^{\frac{q}{3}}\right]\left(\frac{4\Lambda\psi}{\langle n_0\rangle^2}\right) = \frac{4\psi_q}{\langle n_0\rangle^2} + \left[h^{\frac{q-2}{3}}\right]\left(\frac{4\lambda\psi}{\langle n_0\rangle^2}\right).$$

En posant

$$S_q^\psi = \left[h^{\frac{q-3}{3}}\right]\left(\mathcal{L}_h^+\psi\right) - \sum_{\ell=0}^{q-3}\psi_\ell\left[h^{\frac{q-\ell}{3}}\right]\left(\frac{4}{(1+h\rho\kappa)^2}\right) + \left[h^{\frac{q-2}{3}}\right]\left(\frac{4\lambda\psi}{\langle n_0\rangle^2} - \frac{4\left(2\widehat{n}_0\theta' + h^{\frac{2}{3}}\theta'^2\right)\psi}{(1+h\rho\kappa)^2}\right), \quad (8.13)$$

on obtient

$$-\partial_{\rho\rho}^2\psi_q + 4\frac{n_0^2-1}{\langle n_0\rangle}\psi_q = S_q^\psi.$$

□

Lemme 8.14. *Il existe une solution non nulle $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(\theta_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ aux systèmes $(\mathcal{P}_{h,q}^{\mathrm{scal}})_{q\in\mathbb{N}}$. De plus, on a les expressions suivantes pour $q\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{T}$, $\sigma\in\mathbb{R}_-$ et $\rho\in\mathbb{R}_+$:*

$$\varphi_q(s,\sigma) = P_q^\varphi(s,\sigma)\,\mathsf{A}\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(s)\sigma\right) + Q_q^\varphi(s,\sigma)\,\mathsf{A}'\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(s)\sigma\right)$$
$$\psi_q(s,\rho) = P_q^\psi(s,\rho)\exp\left(\frac{-2\rho}{\langle n_0\rangle}\sqrt{n_0^2(s)-1}\right)$$

où $P_q^\varphi, Q_q^\varphi, P_q^\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})[X]$ sont tels que, pour tout $s\in\mathbb{T}$, on ait

$$\deg\left(P_q^\varphi(s,\cdot)\right)\le 2q, \qquad \deg\left(Q_q^\varphi(s,\cdot)\right)\le 2q, \qquad \deg\left(P_q^\psi(s,\cdot)\right)\le q.$$

Démonstration. On va raisonner par récurrence sur q. Pour $q=0$, le lemme 8.11 fournit λ_0, θ_0, φ_0 et ψ_0. On a

$$P_0^\varphi = 1, \qquad Q_0^\varphi = 0, \qquad P_0^\psi = 0,$$

qui sont dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})[X]$ et, pour tout $s\in\mathbb{T}$, on a $\deg(P_0^\varphi(s,\cdot))\le 0$, $\deg(Q_0^\varphi(s,\cdot))\le 0$ et $\deg(P_0^\psi(s,\cdot))\le 0$.

On prend $q\ge 1$ et on suppose que l'on a construit $(\lambda_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$, $(\theta_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$, $(\varphi_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$ et $(\psi_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$. On veut construire λ_q, θ_q, φ_q et ψ_q. On commence par résoudre l'équation en ψ. Grâce au lemme 8.13, on connaît la forme du système $(\mathcal{P}_{h,q}^{\mathrm{scal}})$ et la forme des termes sources. D'après la relation (8.13), S_q^ψ dépend de manière linéaire des $(\psi_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$ et de leurs dérivées. Avec l'hypothèse de récurrence, on connaît la forme des fonctions $(\psi_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$: il s'agit du produit du facteur exponentiel $\exp\left(\frac{-2\rho}{\langle n_0\rangle}\sqrt{n_0^2(s)-1}\right)$ par des polynômes en ρ à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$. Ainsi, il existe $E_{q-1}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})[X]$ tel que $\deg(E_{q-1}(s,\cdot))\le q-1$ et

$$S_q^\psi(s,\rho) = E_{q-1}(s,\rho)\exp\left(\frac{-2\rho}{\langle n_0\rangle}\sqrt{n_0^2(s)-1}\right).$$

Pour la majoration du degré, il faut regarder les termes qui composent E_{q-1}. Pour la deuxième somme dans (8.13), chaque terme a en ρ un degré d'au plus $\ell+\frac{q-\ell}{3} = \frac{q+2\ell}{3}$ pour $0\le\ell\le q-3$. Le degré est majoré par $q-2$. Pour la troisième somme dans (8.13), chaque terme a, en ρ, un degré d'au plus $\ell+\frac{q-2-\ell}{3} = \frac{q+2\ell-2}{3}$ pour $0\le\ell\le q-1$. Le degré est majoré par la partie entière de $q-\frac{4}{3}$ soit $q-2$. Pour le premier terme de (8.13), il faut remarquer que si $\psi_\ell(s,\rho) = P(s,\rho)\exp\left(\frac{-2\rho}{\langle n_0\rangle}\sqrt{n_0^2(s)-1}\right)$ avec $P(s,\cdot)$

de degré ℓ alors $\partial_\rho \psi_\ell$ est de degré ℓ, $\partial_s \psi_\ell$ est de degré $\ell+1$ et $\partial_{ss}\psi_\ell$ est de degré $\ell+2$. Avec cette observation, le degré du polynôme devant l'exponentielle du terme $\left[h^{\frac{q-3}{3}}\right]\left(\mathcal{L}_h^+\psi\right)$ est au plus de degré $q-1$. On a ainsi $\deg\left(E_{q-1}(s,\cdot)\right) \leq q-1$. À s fixé, on peut appliquer le lemme C.1 page 250. Il existe $\widetilde{P}_q^\psi(s,\cdot) \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg\left(\widetilde{P}_q^\psi(s,\cdot)\right) \leq q$ et $\widetilde{\psi}_q(s,\rho) = \rho \widetilde{P}_q^\psi(s,\rho)\exp\left(\frac{-2\rho}{\langle n_0\rangle}\sqrt{n_0^2(s)-1}\right)$. On a donc

$$\psi_q(s,\rho) = \left(\alpha(s) + \rho \widetilde{P}_q^\psi(s,\rho)\right)\exp\left(\frac{-2\rho}{\langle n_0\rangle}\sqrt{n_0^2(s)-1}\right).$$

De plus, on a $\widetilde{P}_q^\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})[X]$ car les coefficients de $\widetilde{P}_q^\psi$ sont des combinaisons linéaires des coefficients de E_{q-1}^ψ. On trouve $\alpha(s)$ à l'aide de la condition $\partial_\rho\psi_q(s,0) = n_0^{p-1}(s)\partial_\sigma\varphi_{q-1}(s,0)$, ce qui donne

$$\alpha(s) = \frac{\langle n_0\rangle}{2\sqrt{n_0^2(s)-1}}\left(\partial_\rho\widetilde{\psi}_q(s,0) - n_0^{p-1}(s)\partial_\sigma\varphi_{q-1}(s,0)\right).$$

On pose $P_q^\psi(s,\rho) = \alpha(s) + \rho\widetilde{P}_q^\psi(s,\rho) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})[X]$ et $\deg\left(P_q^\psi(s,\cdot)\right) \leq q$.

Intéressons-nous à présent à l'équation sur φ. De manière similaire à ce qui vient d'être fait, d'après la relation (8.12), S_q^φ dépend de manière linéaire des $(\varphi_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$ et de leurs dérivées. Avec l'hypothèse de récurrence sur la forme des $(\varphi_\ell)_{\ell=0}^{q-1}$, il existe $R_{q-1}, T_{q-1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})[X]$ tel que $\deg(R_{q-1}(s,\cdot)) \leq 2q-1$, $\deg(T_{q-1}(s,\cdot)) \leq 2q-1$ et

$$S_q^\varphi(s,\sigma) = R_q(s,\sigma)\,\mathsf{A}\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(s)\sigma\right) + T_q(s,\sigma)\,\mathsf{A}'\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(s)\sigma\right).$$

Pour la majoration du degré, il faut regarder les termes qui composent R_{q-1} et T_{q-1}. On note (a,b) le couple formé des degrés en σ de R et de T. Pour la deuxième somme dans (8.12), chaque terme a en σ un degré d'au plus $(2\ell,2\ell)+\frac{q+2-\ell}{2} = (\frac{3\ell+q+2}{2}, \frac{3\ell+q+2}{2})$ pour $0 \leq \ell \leq q-1$. Le degré est majoré par la partie entière de $(2q-\frac{1}{2}, 2q-\frac{1}{2})$, soit $(2q-1, 2q-1)$. On procède de manière similaire pour montrer que le degré maximal possible du troisième au sixième termes de (8.12) est $(2q-1,2q-1)$. Pour le premier terme de (8.12), il faut remarquer que si $\varphi_\ell = P\,\mathsf{A}+Q\,\mathsf{A}'$ avec P et Q de degré 2ℓ alors $\partial_\sigma\varphi_\ell$ est de degré $(2q+1,2q)$, $\partial_s\varphi_\ell$ est de degré $(2q+2,2q+1)$ et $\partial_{ss}\varphi_\ell$ est de degré $(2q+3,2q+3)$. Avec cette observation, les degrés des polynômes devant A et A' du terme $\left[h^{\frac{q-3}{3}}\right]\left(\mathcal{L}_h^+\psi\right)$ sont au plus de degré $(2q-3,2q-3)$. On a ainsi $\deg\left(R_{q-1}(s,\cdot)\right) \leq 2q-1$ et $\deg\left(T_{q-1}(s,\cdot)\right) \leq 2q-1$. À s fixé, on peut appliquer le lemme C.2 page 250. Il existe $\widetilde{P}_q^\varphi(s,\cdot), \widetilde{Q}_q^\varphi(s,\cdot) \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg\left(\widetilde{P}_q^\varphi(s,\cdot)\right) \leq 2q-1$, $\deg\left(\widetilde{Q}_q^\varphi(s,\cdot)\right) \leq 2q$ et

$$\widetilde{\varphi}_q(s,\sigma) = \sigma\widetilde{P}_q(s,\sigma)\,\mathsf{A}\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(s)\sigma\right) + \widetilde{Q}_q(s,\sigma)\,\mathsf{A}'\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(s)\sigma\right).$$

De plus, on a $\widetilde{P}_q^\varphi, \widetilde{Q}_q^\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})[X]$ car les coefficients de $\widetilde{P}_q^\varphi$ et $\widetilde{Q}_q^\varphi$ sont des combinaisons linéaires des coefficients de R_{q-1} et T_{q-1}. On a donc

$$\varphi_q(s,\sigma) = \frac{\lambda_q\widehat{n}_0(s) - 2f_q'(s)}{\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{1}{3}}(s)}\,\mathsf{A}'\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(s)\sigma\right) + \widetilde{\varphi}_q(s,\sigma).$$

La condition $\varphi_q(s,0) = \psi_q(s,0)$ permet d'établir que

$$\theta_q(s) = \frac{1}{2}\int_0^s \left(\lambda_q \widehat{n}_0(t) - \frac{\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{1}{3}}}{\mathsf{A}'(a_j)}\Big(\psi_q(s,0) - \widetilde{\varphi}_q(s,0)\Big)\right) \mathrm{d}t.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a bien $\mathsf{A}'(a_j) \neq 0$ voir [74, section 9.9(ii)]. La fonction θ_q doit être periodique. On obtient

$$\lambda_q = \frac{1}{\mathsf{A}'(a_j)}\left\langle \breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}\,\widehat{n}_0^{\frac{1}{3}}\left(\psi_q(\cdot,0) - \widetilde{\varphi}_q(\cdot,0)\right)\right\rangle.$$

On pose $P_q^\varphi = \sigma\widetilde{P}_q^\varphi$ et $Q_q^\varphi = \frac{\lambda_q\widehat{n}_0 - 2\theta_q'}{\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}\widehat{n}_0^{\frac{1}{3}}} + \widetilde{Q}_q^\varphi$. Les coefficients P_q^φ et Q_q^φ sont bien dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})[X]$ et sont de degré au plus $2q$. On a également $\theta_q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$.

On a donc construit par récurrence $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(\theta_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_q)_{q\in\mathbb{N}}$. Le quasi-mode est non nul car d'après le lemme 8.11, φ_0 n'est pas identiquement nulle. □

Les résultats précédents ont permis de préciser la manière dont les suites $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(\theta_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ étaient construites. Reste à préciser en quel sens les séries formelles (8.5) page 188 définies à partir de ces suites peuvent converger. On a recours au lemme C.11 page 255 de sommation de Borel, ce qui nécessite d'introduire les définitions suivantes.

Définition-Propriété 8.15. Il existe une fonction $\Lambda_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1])$ et des profils $\Theta_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{T})$, $\Phi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}_-)$ et $\Psi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)$ tels que, pour tout $t \in [0,1]$, $(s,\sigma,\rho) \in \mathbb{T}\times\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}_+$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on ait

$$\begin{aligned}
\Lambda_{p;j}(t) &= 1 + 2^{\frac{2}{3}}t^2\sum_{q=0}^{N}\lambda_q 2^{\frac{q}{3}}t^q + t^{N+3}R_N^\lambda(t),\\
\Theta_{p;j}(t) &= \int_0^s \widehat{n}_0(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta + 2^{\frac{2}{3}}t^2\sum_{q=0}^{N}\theta_q(s)2^{\frac{q}{3}}t^q + t^{N+3}R_N^\theta(t;s),\\
\Phi_{p;j}(t;s,\sigma) &= \sum_{q=0}^{N}\varphi_q(\sigma)2^{\frac{q}{3}}t^q + t^{N+1}R_N^\varphi(t;s,\sigma),\\
\Psi_{p;j}(t;s,\rho) &= \sum_{q=0}^{N}\psi_q(\rho)2^{\frac{q}{3}}t^q + t^{N+1}R_N^\psi(t;s,\rho),
\end{aligned}$$

où les restes R_N^λ, R_N^θ, R_N^φ et R_N^ψ vérifient $R_N^\lambda \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1])$, $R_N^\theta \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{T})$, $R_N^\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}_-)$ et $R_N^\psi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)$.

Démonstration. On note $t = \left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$. Le lemme C.11 page 255 construit la fonction $\Lambda_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([-1,1])$ correspondant à la suite $(2^{\frac{q}{3}}\lambda_q q!)_{q\in\mathbb{N}}$ et les profils $\Theta_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([-1,1]\times\mathbb{T})$, $\Phi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([-1,1]\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}_-)$ et $\Psi_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([-1,1]\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}_+)$ correspondants aux suites $(2^{\frac{q}{3}}q!\theta_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(2^{\frac{q}{3}}q!\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(2^{\frac{q}{3}}q!\psi_q)_{q\in\mathbb{N}}$. Enfin, le corollaire C.12 nous donne les propriétés énoncées. □

Remarque 8.16. On définit t de cette manière de sorte à avoir $t = m^{-\frac{1}{3}}$

Revenons au problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (5.5). Pour construire un quasi-mode pour ce problème, il suffit de prendre les fonctions construites précédemment et de les « localiser » à l'aide d'une fonction à support compact. On définit une fonction plateau $\chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}([-\delta,\delta])$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que $\mathrm{supp}(\chi) \subset]-\delta,\delta[$ et $\chi \equiv 1$ sur $\left[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right]$.

Définition 8.17. On définit, pour $s \in \mathbb{T}$, $\xi \in]-\delta,\delta[$ et $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\underline{k}_{p;j}(m) := \frac{m}{n_0}\sqrt{\Lambda_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}}\right)},$$

$$w_{p;j}(m;s,\xi) := \chi(\xi)\begin{cases} \Phi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};s,m^{\frac{2}{3}}\xi\right) & \text{si } \xi<0 \\ \Psi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};s,m\xi\right) & \text{si } \xi\geq 0 \end{cases},$$

$$\underline{u}_{p;j}(m;x) := \mathbf{1}_{\mathcal{V}_\delta}(x)\, w_{p;j}(m;s,\xi)\, \exp\left(\mathrm{i}m\Theta_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};s\right)\right).$$

Pour la définition de $x \mapsto \underline{u}_{p;j}(m;x)$ pour x dans le voisinage tubulaire $\mathcal{V}_\delta$, on identifie la coordonnée cartésienne x et les coordonnées tubulaires (s,ξ). On note pour simplifier $\underline{u}_{p;j}(m) : x \mapsto \underline{u}_{p;j}(m;x)$.

Pour la définition de $\underline{u}_{p;j}(m)$, le choix de multiplier par $\exp\left(\mathrm{i}m\Theta_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};s\right)\right)$ et non par $\exp\left(-\mathrm{i}m\Theta_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};s\right)\right)$ est arbitraire. En fait pour chaque quasi-résonance, on peut associer deux quasi-modes $\underline{u}_{p;j}(m)$ et $\overline{\underline{u}_{p;j}(m)}$. Ils sont quasi-orthogonaux comme cela sera établi au le lemme 10.1 page 222. On dira que les quasi-résonances sont de multiplicité deux.

Notation. Pour $s \in \mathbb{T}$, $\sigma \in \mathbb{R}_-$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$, on note pour simplifier :

$$\Lambda_{p;j}(m) = \Lambda_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}}\right),$$

$$\Theta_{p;j}(m;s) = \Theta_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};s\right),$$

$$\varphi_{p;j}(m;s,\sigma) = \Phi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};s,\sigma\right),$$

$$\psi_{p;j}(m;s,\rho) = \Psi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}};s,\rho\right).$$

Lemme 8.18. *Il existe $C>0$ tel que*

$$\left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = Cm^{-\frac{1}{3}} + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{2}{3}}\right).$$

Démonstration. Pour $m \geq 1$, on a

$$\left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{T}}\int_{-\delta}^{\delta} \chi(\xi)^2 \left|w_{p;j}(m;s,\xi)\exp\left(-2m\,\mathrm{Im}\left(\Theta_{p;j}(m;s)\right)\right)\right|^2 (1+\xi\kappa(s))\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s.$$

D'après lemme 8.11, il existe une fonction à valeurs réelles $g \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}(\mathbb{T})$ et un reste $r \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([1,+\infty)\times\mathbb{T})$ tels que

$$\mathrm{Im}\left(\Theta_{p;j}(m;s)\right) = \frac{g(s)}{m} + \frac{r(m;s)}{m^{\frac{4}{3}}}.$$

On a donc

$$\exp\left(-2m\,\mathrm{Im}\left(\Theta_{p;j}(m;s)\right)\right) = \mathsf{e}^{-2g(s)} + \mathcal{O}\left(h^{\frac{1}{3}}\right),$$

où on rappelle que $h = \frac{2}{m}$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} &= h^{\frac{2}{3}} \int_{\mathbb{T}} \mathsf{e}^{-2g(s)} \int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{0} \left|\varphi_{p;j}\left(\frac{h}{2}; s, \sigma\right)\right|^2 \mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s + \mathcal{O}(h),\\ &= h^{\frac{2}{3}} \int_{\mathbb{T}} \mathsf{e}^{-2g(s)} \int_{-\infty}^{0} \mathsf{A}\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(s)\sigma\right)^2 \mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s + \mathcal{O}(h).\end{aligned}$$

On connaît la valeur de l'intégrale en la variable σ, voir le lemme C.4 page 251. On obtient

$$\left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = h^{\frac{2}{3}}\ \mathsf{A}'(a_j)^2 \int_{\mathbb{T}} \mathsf{e}^{-2g(s)}\ \breve{\kappa}^{-\frac{1}{3}}(s)\,\widehat{n}_0^{-\frac{2}{3}}(s)\,\mathrm{d}s + \mathcal{O}(h).$$

On déduit le résultat en posant $C = |\mathsf{A}'(a_j)| \sqrt{\int_{\mathbb{T}} \mathsf{e}^{-2g(s)}\ \breve{\kappa}^{-\frac{1}{3}}(s)\,\widehat{n}_0^{-\frac{2}{3}}(s)\,\mathrm{d}s} > 0.$ □

Lemme 8.19. *Pour $p \in \{\pm 1\}$ et $j \in \mathbb{N}$ fixés, la suite $(\underline{k}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$ de quasi-résonances et $(\underline{u}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$ de quasi-modes vérifient les propriétés suivantes :*

- *Pour tout $m \geq 1$, les quasi-modes sont à support compact :*

$$\mathrm{supp}(\underline{u}_{p;j}(m)) \subset \mathcal{V}_\delta \Subset \Omega + B(0, 2\delta).$$

- *Pour tout $m \geq 1$, les quasi-modes sont lisses sauf à travers Γ :*

$$\underline{u}_{p;j}(m)_{|\overline{\Omega}} \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right), \qquad \underline{u}_{p;j}(m)_{|\mathbb{R}^2\setminus\Omega} \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega\right).$$

- *On a l'estimation de l'erreur suivante sur les conditions de transmission quand $m \to +\infty$*

$$\left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right), \qquad \left[n^{p-1}\,\partial_\nu \underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$

- *On a l'estimation suivante quand $m \to +\infty$*

$$\left\|\mathrm{div}\left(n^{p-1}\nabla \underline{u}_{p;j}(m)\right) + \underline{k}^2_{p;j}(m)\, n^{p+1}\, \underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$

Démonstration. Dans toute la démonstration $p \in \{\pm 1\}$ et $j \in \mathbb{N}$ sont fixés. On rappelle que $h = \frac{2}{m}$. Par construction, les quasi-modes sont à support compact. En effet, on a $\mathrm{supp}(\underline{u}_{p;j}(m))$ qui est contenu dans le voisinage tubulaire $\mathcal{V}_\delta$. De même, par construction les quasis-modes sont lisses sauf à travers Γ voir le lemme 8.15. Pour les conditions de transmission, on a pour tout $s \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned}\left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma(s) &= \left[w_{p;j}(m; s, \cdot)\right]_{\{0\}} \mathsf{e}^{\mathsf{i}m\Theta_{p;j}(m;s)},\\ \left[n^{p-1}\partial_\nu \underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma(s) &= \left[n^{p-1}\partial_\xi w_{p;j}(m; s, \cdot)\right]_{\{0\}} \mathsf{e}^{\mathsf{i}m\Theta_{p;j}(m;s)}.\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\left[w_{p;j}(m; s, \cdot)\right]_{\{0\}} = \psi_{p;j}(m; s, 0) - \varphi_{p;j}(m; s, 0) = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right),$$

$$\begin{aligned}\left[n^{p-1}\partial_\xi w_{p;j}(m;s,\cdot)\right]_{\{0\}} &= h^{-1}\partial_\rho\psi_{p;j}(m;s,0) - n_0^{p-1}(s)h^{-\frac{2}{3}}\partial_\sigma\varphi_{p;j}(m;s,0)\\ &= h^{-1}\left(\partial_\rho\psi_{p;j}(m;s,0) - n_0^{p-1}(s)h^{\frac{1}{3}}\partial_\sigma\varphi_{p;j}(m;s,0)\right)\\ &= \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)\end{aligned}$$

d'après les développements de $\varphi_{p;j}(m)$ et de $\psi_{p;j}(m)$ dans la définition 8.15 et au lemme 8.13.

Considérons à présent l'estimation L^2. On note pour simplifier

$$\begin{aligned}\mathrm{L}^2_\xi &= \mathrm{L}^2(\mathbb{T}\times]-\delta,\delta[,(1+\xi)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi),\\ \mathrm{L}^2_\sigma &= \mathrm{L}^2\left(\mathbb{T}\times\left]-h^{-\frac{2}{3}}\delta,0\right[,h^{\frac{2}{3}}\left(1+\sigma h^{\frac{2}{3}}\right)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\sigma\right),\\ \mathrm{L}^2_\rho &= \mathrm{L}^2\left(\mathbb{T}\times\left]0,h^{-1}\delta\right[,h(1+\rho h)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\rho\right).\end{aligned}$$

On a

$$\left\|\mathrm{div}\left(n^{p-1}\,\nabla\underline{u}_{p;j}(m)\right)+k^2_{p;j}(m)\,n^{p+1}\,\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \leq 2\pi m^2 \max_{\mathbb{R}^2} n^{p-1}\,\mathcal{N}_u$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_u = \Bigg\| h^2\Bigg[\partial^2_{\xi\xi}u_{p;j}(m) + \frac{1}{(1+\xi\kappa)^2}\partial^2_{ss}u_{p;j}(m) + \left(\frac{\kappa}{1+\xi\kappa}+(p-1)\frac{\partial_\xi n}{n}\right)\partial_\xi u_{p;j}(m)\\ + \left(\frac{-\xi\kappa'}{(1+\xi\kappa)^3}+\frac{(p-1)\partial_s n}{(1+\xi\kappa)^2 n}\right)\partial_s u_{p;j}(m)\Bigg] + \frac{4n^2}{\langle n_0\rangle^2}\Lambda_{p;j}(m)u_{p;j}(m)\Bigg\|_{\mathrm{L}^2_\xi}.\end{aligned}$$

On veut montrer que $\mathcal{N}_u = \mathcal{O}(h^\infty)$. Pour cela, on va montrer que $\mathcal{N}_u = \mathcal{O}\left(h^N\right)$ pour tout entier N. On rappelle que l'on a par la définition 8.15 :

$$\Lambda_{p;j}(m) = 1 + h^{\frac{2}{3}}\sum_{q=0}^{3N+2}\lambda_q h^{\frac{q}{3}} + \mathcal{O}\left(h^{N+1+\frac{2}{3}}\right), \tag{8.14a}$$

$$\Theta_{p;j}(m) = \int_0^s \widehat{n}_0(t)\,\mathrm{d}t + h^{\frac{2}{3}}\sum_{q=0}^{3N+2}\theta_q(s)h^{\frac{q}{3}} + \mathcal{O}\left(h^{N+1+\frac{2}{3}}\right), \tag{8.14b}$$

$$\varphi_{p;j}(m;s,\sigma) = \sum_{q=0}^{3N+2}\varphi_q(s,\sigma)h^{\frac{q}{3}} + \mathcal{O}\left(h^{N+1}\right), \tag{8.14c}$$

$$\psi_{p;j}(m;s,\rho) = \sum_{q=0}^{3N+2}\psi_q(s,\rho)h^{\frac{q}{3}} + \mathcal{O}\left(h^{N+1}\right). \tag{8.14d}$$

Pour mener à bien l'estimation en norme L^2_ξ, on scinde l'intégrale en deux morceaux correspondant aux ouverts $\mathbb{T}\times]-\delta,0[$ et $\mathbb{T}\times]0,\delta[$. On a recours aux relations suivantes pour $\xi<0$

$$\begin{aligned}\partial_\xi w_{p;j}(m;s,\xi) &= \chi'(h^{\frac{2}{3}}\sigma)\varphi_{p;j}(m;s,\sigma) + h^{-\frac{2}{3}}\chi(h^{\frac{2}{3}}\sigma)\partial_\sigma\varphi_{p;j}(m;s,\sigma)\\ \partial^2_{\xi\xi}w_{p;j}(m;s,\xi) &= \chi''(h^{\frac{2}{3}}\sigma)\varphi_{p;j}(m;s,\sigma) + 2h^{-\frac{2}{3}}\chi'(h^{\frac{2}{3}}\sigma)\partial_\sigma\varphi_{p;j}(m;s,\sigma)\\ &\qquad + h^{-\frac{4}{3}}\chi(h^{\frac{2}{3}}\sigma)\partial^2_{\sigma\sigma}\varphi_{p;j}(m;s,\sigma)\end{aligned}$$

et aux relations suivantes pour $\xi>0$

$$\partial_\xi w_{p;j}(m;s,\xi) = \chi'(h\rho)\psi_{p;j}(m;s,\rho) + h^{-1}\chi(h\rho)\partial_\rho\psi_{p;j}(m;s,\rho)$$

$$\partial^2_{\xi\xi} w_{p;j}(m;s,\xi) = \chi''(h\rho)\psi_{p;j}(m;s,\rho) + 2h^{-1}\chi'(h\rho)\partial_\rho\psi_{p;j}(m;s,\rho) + h^{-2}\chi(h\rho)\partial^2_{\rho\rho}\psi_{p;j}(m;s,\rho)$$

On a alors

$$\mathcal{N}_u \leq \max_{s\in\mathbb{T}} \mathsf{e}^{-2m\,\mathrm{Im}(\Theta_{p;j}(m;s))} \left(\mathcal{N}_\varphi + \mathcal{N}'_\varphi + \mathcal{N}_\psi + \mathcal{N}'_\psi\right)$$

où

$$\mathcal{N}_\varphi = \left\| h^{\frac{2}{3}}\partial^2_{\sigma\sigma}\varphi_{p;j}(m) + h\mathcal{L}^-_h\varphi_{p;j}(m) + \left(\frac{4n^2}{\langle n_0\rangle^2}\Lambda_{p;j}(m) - \frac{4\Theta'_{p;j}(m)^2}{\left(1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa\right)^2}\right)\varphi_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2_\sigma},$$

$$\mathcal{N}'_\varphi = \left\| \chi' 2h^{\frac{4}{3}}\partial_\sigma\varphi_{p;j}(m) + \chi' h^2\left(\frac{\kappa}{1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa} + (p-1)\frac{\partial_\xi n}{n}\right)\varphi_{p;j}(m) + h^2\chi''\varphi_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2_\sigma},$$

$$\mathcal{N}_\psi = \left\| \partial^2_{\rho\rho}\psi_{p;j}(m) + h\mathcal{L}^+_h\psi_{p;j}(m) + \left(\frac{4}{n_0^2}\Lambda_{p;j}(m) - \frac{4\Theta'_{p;j}(m)^2}{(1+h\rho\kappa)^2}\right)\psi_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2_\rho},$$

$$\mathcal{N}'_\psi = \left\| \chi' 2h\partial_\rho\psi_{p;j}(m) + \chi'\frac{h\kappa}{1+h\rho\kappa}\psi_{p;j}(m) + h^2\chi''\psi_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2_\rho}.$$

D'après la propriété 8.15 et d'après les lemmes 8.9 et 8.11, il existe $g \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([1,+\infty)\times\mathbb{T})$ telle que $\mathrm{Im}(\Theta_{p;j}(m;s)) = g(m;s)$ d'où

$$\max_{s\in\mathbb{T}} \mathsf{e}^{-2m\,\mathrm{Im}(\Theta_{p;j}(m;s))} = \max_{s\in\mathbb{T}} \mathsf{e}^{-2g(m;s)} \leq C$$

avec C une constante indépendante de m. On commence par l'estimation du terme $\mathcal{N}'^2_\varphi$. Avec l'estimation $\frac{1}{1+h^{\frac{2}{3}}\sigma\kappa} \leq \frac{1}{1-\delta\kappa}$ pour $\sigma h^{\frac{2}{3}} \in [-\delta,0]$, le fait que $\sigma \mapsto \frac{\partial_\xi n(s,h^{\frac{2}{3}}\sigma)}{n(s,h^{\frac{2}{3}}\sigma)}$ est bornée sur $\left[-h^{-\frac{2}{3}}\delta,0\right]$ (car la fonction $\frac{\partial_\xi n}{n}$ est continue sur $[-\delta,0]$) et d'après le lemme 8.14 et le fait que χ' et χ'' sont bornées, on obtient qu'il existe $P,Q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T},\mathbb{R}_+)[X,Y]$ tels que

$$\begin{aligned}\mathcal{N}'^2_\varphi \lesssim{}& \int_{\mathbb{T}}\int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}} P(s,|\sigma|,h^{\frac{1}{3}})\left|\mathsf{A}\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(s)\sigma\right)\right|^2 \mathrm{d}s\,\mathrm{d}\sigma \\ &+ \int_{\mathbb{T}}\int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}} Q(s,|\sigma|,h^{\frac{1}{3}})\left|\mathsf{A}'\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(s)\sigma\right)\right|^2 \mathrm{d}s\,\mathrm{d}\sigma \\ &+ \int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}} h^{2N+2+\frac{8}{3}}\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

où $a \lesssim b$ signifie qu'il existe $C>0$ tel que $a \leq Cb$. Le dernier terme provient des termes de reste dans les expressions (8.14). On a $h \leq 1$ et d'après le lemme C.3 page 251, A et A' sont équivalentes au voisinage de l'infini à des exponentielles décroissantes, d'où

$$\int_{\mathbb{T}}\int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}} P(s,|\sigma|,h^{\frac{1}{3}})\left|\mathsf{A}\left(a_j+2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}\sigma\right)\right|^2 \mathrm{d}s\,\mathrm{d}\sigma$$
$$\lesssim \int_{\mathbb{T}}\int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}} P(s,|\sigma|,1)\mathsf{e}^{-2|\sigma|}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\sigma$$
$$\lesssim \int_{\mathbb{T}}\int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}} \mathsf{e}^{-|\sigma|}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\sigma$$
$$\lesssim h^{-\frac{2}{3}}\exp\left(-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}\right).$$

De même, on a

$$\int_{\mathbb{T}}\int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}} Q(s,|\sigma|,h^{\frac{1}{3}})\left|\mathsf{A}'\left(a_j+2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}\sigma\right)\right|^2 \mathrm{d}s\,\mathrm{d}\sigma \lesssim h^{-\frac{2}{3}}\exp\left(-h^{-\frac{2}{3}}\frac{\delta}{2}\right).$$

On en déduit que $\mathcal{N}'_\varphi = \mathcal{O}\left(h^{N+2}\right)$. Avec une méthode similaire, on majore le terme ${\mathcal{N}'_\psi}^2$ à l'aide du lemme 8.14 : il existe $P\in\mathcal{C}^0(\mathbb{T},\mathbb{R}_+)[X,Y]$ tel que

$$\begin{aligned}{\mathcal{N}'_\psi}^2 &\lesssim \int_{\mathbb{T}}\int_{h^{-1}\frac{\delta}{2}}^{h^{-1}\delta} P(s,|\rho|,h^{\frac{1}{3}})\mathsf{e}^{\frac{-4\rho}{\langle n_0\rangle}\sqrt{n_0^2(s)-1}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\rho + \int_{h^{-1}\frac{\delta}{2}}^{h^{-1}\delta} h^{2N+4}\,\mathrm{d}\sigma\\ &\lesssim h^{-1}\int_{\mathbb{T}}\mathsf{e}^{\frac{-\delta}{h\langle n_0\rangle}\sqrt{n_0^2(s)-1}}\,\mathrm{d}s + h^{2N+3}\\ &\lesssim h^{-1}\mathsf{e}^{\frac{-\delta}{h\langle n_0\rangle}\sqrt{\min_{s\in\mathbb{T}} n_0^2(s)-1}} + h^{2N+3}\end{aligned}$$

avec l'estimation $\frac{1}{1+h\rho}\leq\frac{1}{1+\delta}$ pour $h\rho\in[0,\delta]$. On en déduit que $\mathcal{N}'_\psi = \mathcal{O}\left(h^{N+\frac{3}{2}}\right)$. Pour les termes $\mathcal{N}_\varphi$ et $\mathcal{N}_\psi$, on doit d'abord remarquer que l'on doit écrire chacune des fonctions $\xi\mapsto\frac{1}{1+\xi\kappa}$, $\xi\mapsto\frac{1}{(1+\xi\kappa)^2}$, $\xi\mapsto\frac{1}{(1+\xi\kappa)^3}$, $\xi\mapsto\frac{\partial_\xi n(s,\xi)}{n(s,\xi)}$, $\xi\mapsto\frac{\partial_s n(s,\xi)}{n(s,\xi)}$ et $\xi\mapsto\frac{n(s,\xi)^2}{n_0^2}$ qui sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{T}\times[-\delta,0]$ sous la forme

$$f(s,\sigma h^{\frac{2}{3}}) = \sum_{q=0}^{3N}\frac{\partial_\xi^q f(s,0)}{q!}\sigma^q h^{\frac{2q}{3}} + \left(\sigma h^{\frac{2}{3}}\right)^{3N+1} R(s,\sigma h^{\frac{2}{3}})$$

pour $\xi=\sigma h^{\frac{2}{3}}$ et $R\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}(\mathbb{T}\times[-\delta,0])$. On écrit $\xi\mapsto\frac{1}{1+\xi\kappa}$, $\xi\mapsto\frac{1}{(1+\xi\kappa)^2}$ et $\xi\mapsto\frac{1}{(1+\xi\kappa)^3}$ qui sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{T}\times[0,\delta]$ sous la forme

$$f(s,\rho h) = \sum_{q=0}^{N}\frac{\partial_\xi^q f(s,0)}{q!}\rho^q h^q + (\rho h)^{N+1} S(s,\rho h)$$

pour $\xi=\rho h$ et $S\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}(\mathbb{T}\times[0,\delta])$. D'après la construction des suites $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(\theta_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_q)_{q\in\mathbb{N}}$ effectuée dans la démonstration du lemme 8.14, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\varphi^2 \lesssim & h^{2N+\frac{10}{3}}\int_{\mathbb{T}}\int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{0} P_N^\varphi(s,|\sigma|,h^{\frac{1}{3}})\left|\mathsf{A}\left(a_j+2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(s)\sigma\right)\right|^2\\ &\qquad + Q_N^\varphi(s,|\sigma|,h^{\frac{1}{3}})\left|\mathsf{A}'\left(a_j+2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(s)\sigma\right)\right|^2\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\sigma\\ &+ h^{2N+\frac{10}{3}}\int_{\mathbb{T}}\int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^{0} P_N^R(s,\sigma h^{\frac{2}{3}})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\sigma \qquad (8.15)\end{aligned}$$

$$\mathcal{N}_\psi^2 \lesssim h^{2N+2} \int_{\mathbb{T}} \int_0^{h^{-1}\delta} P_N^\psi(s, |\rho|, h^{\frac{1}{3}}) \mathrm{e}^{-\frac{4\rho}{\langle n_0 \rangle}\sqrt{n_0^2(s)-1}} \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}\rho$$
$$+ h^{2N+2} \int_{\mathbb{T}} \int_0^{h^{-1}\delta} P_N^S(s, \rho h) \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}\rho \tag{8.16}$$

où $P_N^\varphi, Q_N^\varphi, P_N^\psi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)[X, Y]$ et $P_N^R, P_N^S \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)[X]$. Dans ces deux expressions, la première intégrale est finie car il s'agit de l'intégrale d'un produit de polynômes par des fonctions exponentiellement décroissantes. Pour la deuxième intégrale dans (8.15) et (8.16), on a

$$\int_{\mathbb{T}} \int_{-h^{-\frac{2}{3}}\delta}^0 P_N^R(s, \sigma h^{\frac{2}{3}}) \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}\sigma \lesssim h^{-\frac{2}{3}} \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{T}} \int_0^{h^{-1}\delta} P_N^S(s, \rho h) \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}\rho \lesssim h^{-1}.$$

On en déduit que $\mathcal{N}_\varphi = \mathcal{O}\left(h^{N+\frac{4}{3}}\right)$ et $\mathcal{N}_\psi = \mathcal{O}\left(h^{N+\frac{1}{2}}\right)$. En combinant les différentes estimations obtenues, on établit finalement que $\mathcal{N}_u = \mathcal{O}\left(h^{N+\frac{1}{2}}\right)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Avec le lemme 8.18, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\| \mathrm{div}\left(n^{p-1} \nabla \underline{u}_{p;j}(m)\right) + \underline{k}_{p;j}^2(m)\, n^{p+1}\, \underline{u}_{p;j}(m) \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \|u_{p;j}(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\, \mathcal{O}\left(h^{N-\frac{5}{3}}\right).$$

Quitte à remplacer l'entier N fixé au début par $N+2$, on obtient un reste dont le comportement est en $\mathcal{O}\left(h^{N+\frac{1}{3}}\right)$ dans l'estimation ci-dessus. On obtient donc bien une estimation en $\mathcal{O}\left(m^{-N}\right)$. On conclut que

$$\left\| \mathrm{div}\left(n^{p-1} \nabla \underline{u}_{p;j}(m)\right) + \underline{k}_{p;j}^2(m)\, n^{p+1}\, \underline{u}_{p;j}(m) \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \|u_{p;j}(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\, \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$

□

Démonstration du théorème 8.7. On veut montrer que les objets définis en 8.15 sont bien des quasi-résonances au sens de la définition 5.3. On commence par relever les conditions de transmission en posant

$$g(m; s, \xi) = \frac{\chi(\xi)}{2} \begin{cases} -\left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma(s) - \xi n_0^{1-p} \left[n^{p-1}\, \partial_\xi \underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma(s) & \xi \leq 0 \\ \left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma(s) + \xi \left[n^{p-1}\, \partial_\xi \underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma(s) & \xi > 0 \end{cases}.$$

Pour tout $s \in \mathbb{T}$, on a

$$\left[\underline{u}_{p;j}(m) - g(m)\right]_\Gamma(s) = \left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma(s) - [g(m)]_\Gamma(s) = 0$$

et

$$\left[n^{p-1}\, \partial_\xi(\underline{u}_{p;j}(m) - g(m))\right]_\Gamma(s) = \left[n^{p-1}\, \partial_\xi \underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma(s) - \left[n^{p-1}\, \partial_\xi g(m)\right]_\Gamma(s)$$
$$= 0.$$

On obtient, pour tout $m \geq 1$, $\underline{u}_{p;j}(m) - g(m) \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^2, n^{p-1})$. De plus, d'après le lemme 8.19, on a les estimations des conditions de transmission $\left[\underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$ et $\left[n^{p-1}\, \partial_\xi \underline{u}_{p;j}(m)\right]_\Gamma = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$, ce qui implique

$$\left\| \mathrm{div}\left(n^{p-1} \nabla g(m)\right) + \underline{k}_{p;j}^2(m)\, n^{p+1}\, g(m) \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \|u_{p;j}(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}\, \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$

Finalement, la fonction $\underline{u}_{p;j}(m) - g(m)$ satisfait l'estimation (5.6). D'après le lemme 8.18, on a

$$\left\|\underline{u}_{p;j}(m) - g(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = Cm^{-\frac{1}{3}} + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{2}{3}}\right)$$

avec $C > 0$. On en déduit qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $m \geq m_0$, la norme $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ de $\underline{u}_{p;j}(m) - g(m)$ est non nulle. Quitte à retrancher $g(m)$ et à normaliser, on peut supposer que

$$\underline{u}_{p;j}(m) \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^2, n^{p-1}), \qquad \left\|\underline{u}_{p;j}(m)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = 1$$

et que $\underline{u}_{p;j}(m)$ satisfasse l'estimation (5.6).

De la suite $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$ construite dans le lemme 8.13, on déduit une suite $(\widetilde{\lambda}_q)_{q\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on ait

$$\underline{k}_{p;j}(m) = \frac{m}{\langle n_0\rangle}\left(1 + \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{2}{3}} \sum_{q=0}^{N} \widetilde{\lambda}_q \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{q}{3}} + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{N+3}{3}}\right)\right).$$

Le lemme C.12 implique l'existence d'une fonction $\mathrm{K}_{p;j} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1])$ associée à la suite $(2^{\frac{q}{3}}\widetilde{\lambda}_q q!)_{q\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\underline{k}_{p;j}(m) = m\mathrm{K}_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}}\right).$$

□

Revenons sur ce qui a été écrit dans la remarque 8.12 page 193 à savoir que les quasi-résonances ne dépendent pas du choix de la fonction α. Lors de la construction des premiers termes dans le lemme 8.11, on a

$$\varphi_0(s,\sigma) = \alpha(s)\,\mathsf{A}\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(s)\sigma\right)$$

où α est une fonction arbitraire de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ ne s'annulant pas. Le lemme suivant établi que quelle que soit la fonction α non nulle, on obtient à l'issue de la construction les mêmes quasi-résonances. Pour la clarté de l'énoncé, dans le lemme suivant, on enlève les indices p et j.

Lemme 8.20. *Soit une fonction $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ ne s'annulant pas. On note $\underline{k}_\alpha(m)$ les quasi-résonances construites à partir de la suite $(\lambda_q^\alpha)_{q\in\mathbb{N}}$ en partant de $\varphi_0^\alpha(s,\sigma) = \alpha(s)\,\mathsf{A}\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(s)\sigma\right)$ et $\underline{u}_\alpha(m)$ les quasi-modes associés. On note $\underline{k}(m)$ les quasi-résonances construites à partir de la suite $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$ en prenant $\alpha \equiv 1$, c'est-à-dire à partir de $\varphi_0(s,\sigma) = \mathsf{A}\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(s)\sigma\right)$, et $\underline{u}(m)$ les quasi-modes associés. On a alors $\lambda_q^\alpha = \lambda_q$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. D'après le théorème 8.7, on a

$$-\operatorname{div}\left(n^{p-1}\,\nabla\underline{u}_\alpha(m)\right) - k_\alpha(m)^2\,n^{p+1}\,\underline{u}_\alpha(m) = R_\alpha(m)$$

$$-\operatorname{div}\left(n^{p-1}\,\nabla\underline{u}(m)\right) - k(m)^2\,n^{p+1}\,\underline{u}(m) = R(m)$$

où $\|R_\alpha(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \|R(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$. Ensuite, on applique le lemme B.12 page 241 aux triplets $(\overline{\underline{k}_\alpha(m)}, \underline{u}_\alpha(m), \overline{R_\alpha(m)})$ et $(\underline{k}(m), \underline{u}(m), R(m))$. On obtient

$$\left(\overline{\underline{k}_\alpha(m)}^2 - \underline{k}(m)^2\right) \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\underline{u}_\alpha(m)} \underline{u}(m) n^{p+1} \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\underline{u}_\alpha(m)} R(m) - \overline{R_\alpha(m)} \underline{u}(m) \,\mathrm{d}x. \tag{8.17}$$

Les quasi-résonances $\underline{k}_\alpha(m)$ sont réelles d'après le lemme 5.8 page 122. Les quasi-modes sont normés par convention, avec $\|R_\alpha(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \|R(m)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz l'équation (8.17) devient

$$\left(\underline{k}_\alpha(m)^2 - \underline{k}(m)^2\right) \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\underline{u}_\alpha(m)} \underline{u}(m) n^{p+1} \,\mathrm{d}x = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right). \tag{8.18}$$

On rappelle que $h = \frac{2}{m}$. On va montrer que $\int_{\mathbb{R}^2} \overline{\underline{u}_\alpha(m)} \underline{u}(m) n^{p+1} \,\mathrm{d}x \geq \widetilde{C}$ avec $\widetilde{C}$ une constante non nulle, car d'après le lemme B.3 page 238, il suffit de montrer $\int_{\mathbb{R}^2} \overline{\underline{u}_\alpha(m)} \underline{u}(m) \,\mathrm{d}x \sim C$ pour C une constante non nulle. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \overline{\underline{u}_\alpha(m)} \underline{u}(m) \,\mathrm{d}x = \\ c \int_{\mathbb{T}} \alpha(s) \mathsf{e}^{\frac{2\mathrm{i}}{\hbar}(\Theta(\hbar;s) - \Theta_\alpha(\hbar;s))} \int_{-\infty}^{0} \mathsf{A}\left(a_j + 2\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(s) \widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(s) \sigma\right)^2 \mathrm{d}\sigma \,\mathrm{d}s + \mathcal{O}\left(h^{\frac{1}{3}}\right)\end{aligned} \tag{8.19}$$

où $\hbar = m^{-\frac{1}{3}}$ et c est une constante qui vient de la normalisation des quasi-modes. D'après le lemme 8.11, on a

$$\Theta\left(m^{-\frac{1}{3}}; s\right) - \Theta_\alpha\left(m^{-\frac{1}{3}}; s\right) = \mathrm{i} \ln|\alpha(s)| \frac{h}{2} + r(h; s) h^{\frac{4}{3}}$$

où $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ et $r \in \mathcal{C}^\infty([0,1] \times \mathbb{T})$ d'où

$$\mathsf{e}^{\frac{2\mathrm{i}}{\hbar}(\Theta(\hbar;s) - \Theta_\alpha(\hbar;s))} = \frac{1}{|\alpha(s)|} + \mathcal{O}\left(h^{\frac{1}{3}}\right).$$

On injecte cette expression dans l'intégrale (8.19) et avec le lemme C.4 page 251, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} \overline{\underline{u}_\alpha(m)} \underline{u}(m) \,\mathrm{d}x = c\, \mathsf{A}'(a_j)^2 \int_{\mathbb{T}} \frac{\alpha(s)}{|\alpha(s)|} \breve{\kappa}(s)^{-\frac{1}{3}} \widehat{n}_0(s)^{-\frac{2}{3}} \,\mathrm{d}s + \mathcal{O}\left(h^{\frac{1}{3}}\right).$$

Il existe donc C non nulle telle que $\int_{\mathbb{R}^2} \overline{\underline{u}_\alpha(m)} \underline{u}(m) \,\mathrm{d}x \geq C$. Finalement, on en déduit de (8.18) que $\underline{k}_\alpha(m)^2 - \underline{k}(m)^2 = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$ puis que

$$\underline{k}_\alpha(m) - \underline{k}(m) = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$$

car $\underline{k}_\alpha(m) + \underline{k}(m) \sim \frac{2m}{\langle n_0 \rangle}$. Ceci signifie que les développement de Taylor de $\underline{k}_\alpha$ et de $\underline{k}$ coïncident et donc que $\lambda_q^\alpha = \lambda_q$. □

8.2 Miscellanées

8.2.1 Interprétation en terme de potentiel

Soit $h > 0$ et (k, u) une solution du problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (5.5) page 120. On considère le changement d'inconnue défini par

$$\lambda = h^2 \frac{\langle n_0 \rangle^2 k^2}{4} - 1 \qquad \text{et} \qquad w(s,\xi) = u(s,\xi) \exp\left(-\frac{2\mathrm{i}}{h} \int_0^s \widehat{n}_0(t) \,\mathrm{d}t\right).$$

On injecte $k^2 = \frac{4(1+\lambda)}{h^2\langle n_0\rangle^2}$ et $u(s,\xi) = w(s,\xi)\exp\left(\frac{2\mathrm{i}}{h}\int_0^s \widehat{n}_0(t)\,\mathrm{d}t\right)$ dans l'EDP de $(\mathcal{P}_p)$ puis on réarrange les termes. On obtient dans $\mathbb{T}\times]-\delta,0[$ et $\mathbb{T}\times]0,\delta[$

$$-\mathcal{L}_h w + V w = \lambda w$$

où $\mathcal{L}_h = \frac{h^2}{4}\mathcal{L}_2 + \frac{h}{2}\mathcal{L}_1$ avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 w &= \frac{\langle n_0\rangle^2}{(1+\xi\kappa)n^{p+1}}\,\mathrm{div}_{s,\xi}\left(n^{p-1}G\nabla_{s,\xi}w\right)\\
\mathcal{L}_1 w &= \frac{\mathrm{i}\,\langle n_0\rangle}{(1+\xi\kappa)n^{p+1}}\left[\partial_s\left(\frac{n^{p-1}n_0 w}{1+\xi\kappa}\right) + \frac{n^{p-1}n_0\partial_s w}{1+\xi\kappa}\right]\\
V(s,\xi) &= \left(\frac{n_0(s)}{(1+\xi\kappa(s))n(s,\xi)}\right)^2 - 1.
\end{aligned} \tag{8.20}$$

L'opérateur $\mathcal{L}_h$ est auto-adjoint sur $\mathrm{L}^2\left(\mathbb{T}\times]-\delta,\delta[, n^{p+1}(s,\xi)(1+\xi\kappa(s))\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi\right)$. On a pour tout $(s,\xi)\in\mathbb{T}\times]-\delta,0[$

$$\partial_\xi V(s,\xi) = -2\left[\frac{n_0(s)}{(1+\xi\kappa(s))n(s,\xi)}\right]^2\left(\frac{\kappa(s)}{1+\xi\kappa(s)} + \frac{\partial_\xi n(s,\xi)}{n(s,\xi)}\right),$$

d'où $\lim_{\xi\to 0^-}\partial_\xi V(s,\xi) = -2\breve{\kappa}(s)$.

Remarque 8.21. Dans ce cas le potentiel V défini en (8.20) a un minimum dégénéré en la variable curviligne $V(s,0)=0$ et à s fixé $\xi\mapsto V(s,\xi)$ à la forme d'un demi-puits triangulaire en la variable normale.

8.2.2 Invariance conforme approchée

La condition $\breve{\kappa} = \kappa + \frac{n_1}{n_0} > 0$ peut sembler étrange mais en un sens elle ne l'est pas car cette condition est préservée par changement de variables conforme. Dans cette section il plus facile de considérer le plan $\mathbb{R}^2$ comme étant le plan complexe $\mathbb{C}$. On rappelle que pour deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^2$, si on note x et y leurs équivalents complexes, alors

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathrm{Re}\,(\overline{x}y) \qquad \text{et} \qquad \det(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathrm{Im}\,(\overline{x}y)\,.$$

Soit une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ que l'on identifie à la fonction $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ et on note $\nabla f = \partial_1 f + \mathrm{i}\partial_2 f$ qui correspond à une écriture complexe du gradient.

Proposition 8.22. *Soit γ et $\widetilde{\gamma}$ deux courbes régulières fermées simples du plan complexe telles qu'il existe $\mathcal{U}$ et $\widetilde{\mathcal{U}}$ deux voisinages tubulaires de γ et $\widetilde{\gamma}$ et un biholomorphisme ϕ de $\mathcal{U}$ sur $\widetilde{\mathcal{U}}$. On appelle κ et $\widetilde{\kappa}$ les courbures de γ et $\widetilde{\gamma}$ et on note $\nu = -\mathrm{i}\frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ et $\widetilde{\nu} = -\mathrm{i}\frac{\widetilde{\gamma}'}{|\widetilde{\gamma}|}$ les normales sortantes unitaires de γ et $\widetilde{\gamma}$. Soit une fonction $n\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$. On a*

$$\mathrm{sgn}\left(\kappa + \frac{\mathrm{Re}(\overline{\nu}\,\nabla n(\gamma))}{n(\gamma)}\right) = \mathrm{sgn}\left(\widetilde{\kappa} + \frac{\mathrm{Re}(\overline{\widetilde{\nu}}\,\nabla\widetilde{n}(\widetilde{\gamma}))}{\widetilde{n}(\widetilde{\gamma})}\right)$$

où $\widetilde{n} = |\phi'\circ\phi^{-1}|\;\; n\circ\phi^{-1}$ et sgn *désigne la fonction signe.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que γ est paramétrée par l'abscisse curviligne et donc que $|\gamma'| = 1$. On commence par exprimer $\widetilde{\kappa}$ en fonction de κ. On a

$$\widetilde{\gamma} = \phi(\gamma), \qquad \widetilde{\gamma}' = \gamma'\phi'(\gamma) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\gamma}'' = \gamma''\phi'(\gamma) + \gamma'^2\phi''(\gamma).$$

On obtient

$$\widetilde{\kappa} = \frac{\operatorname{Im}\left(\overline{\widetilde{\gamma}'}\,\widetilde{\gamma}''\right)}{|\widetilde{\gamma}'|^3} = \frac{1}{|\phi'(\gamma)|}\left[\kappa + \operatorname{Im}\left(\gamma'\frac{\phi''(\gamma)}{\phi'(\gamma)}\right)\right].$$

Avec l'expression $\widetilde{n} = |\phi' \circ \phi^{-1}|\ n \circ \phi^{-1}$, on a

$$\nabla\widetilde{n} = \frac{\phi' \circ \phi^{-1}}{|\phi' \circ \phi^{-1}|}\left(\nabla n(\phi^{-1}) + \frac{\overline{\phi'' \circ \phi^{-1}}}{\overline{\phi' \circ \phi^{-1}}} n \circ \phi^{-1}\right).$$

On a $\widetilde{n}(\widetilde{\gamma}) = |\phi'(\gamma)|\ n(\gamma)$ et

$$\operatorname{Re}(\overline{\widetilde{\nu}}\,\nabla\widetilde{n}(\widetilde{\gamma})) = \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{-\mathrm{i}\widetilde{\gamma}'}}{|\widetilde{\gamma}'|}\nabla\widetilde{n}(\widetilde{\gamma})\right) = \operatorname{Re}(\overline{\nu}\,\nabla n(\gamma)) - n(\gamma)\operatorname{Im}\left(\gamma'\frac{\phi''(\gamma)}{\phi'(\gamma)}\right).$$

Finalement, on obtient

$$\kappa + \frac{\operatorname{Re}(\overline{\nu}\,\nabla n(\gamma))}{n(\gamma)} = \frac{1}{|\phi'(\gamma)|}\left(\widetilde{\kappa} + \frac{\operatorname{Re}(\overline{\widetilde{\nu}}\,\nabla\widetilde{n}(\widetilde{\gamma}))}{\widetilde{n}(\widetilde{\gamma})}\right).$$

□

Remarque 8.23. La proposition 8.22 explique pourquoi la méthode de *conformal transformation optics* employée dans [58, 53] pour créer des cavités qui possèdent des modes de galerie fonctionne. Les physiciens sont intéressés par trouver des cavités non circulaires qui possèdent des modes de galerie. Ils partent du disque d'indice constant car on sait qu'il possède des modes de galerie. Ils prennent un changement de variable conforme ϕ et l'appliquent au disque d'indice optique constant n_0. Cela génère une nouvelle cavité avec un indice optique non constant. Le changement de variable conforme doit posséder les propriétés suivantes :

- L'image du disque doit être un ouvert connexe borné de bord lisse.
- Le nouvel indice optique $z \mapsto |\phi'(z)|\ n_0$ doit être physique, c'est-à-dire supérieur ou égal à 1 dans toute la cavité.

Si ces propriétés sont satisfaites, ils prétendent que la cavité avec l'indice optique associé aura des modes de galerie. On a montré que dans tous les cas où la condition de courbure effective $\kappa + \frac{\partial_\nu n(\gamma)}{n(\gamma)} > 0$ est satisfaite, alors on peut construire des quasi-modes de galerie. La proposition 8.22 montre que la condition de courbure effective est invariante par changement de variable conforme.

8.3 Récapitulatif des formules

8.3.1 Indice variable

On suppose que la cavité est paramétrée par une courbe $\gamma : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2$ lisse, fermée, simple et de longueur L. On note $\nu : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ la normale sortante au bord de la cavité. On rappelle les notations et hypothèses suivantes.

- La courbure κ de la courbe γ définie par $\kappa(t) = \dfrac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}$ pour $t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$.
- La moyenne normalisée de $w \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ par rapport à la longueur d'arc est notée $\langle w \rangle = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^T w(t)\, \|\gamma'(t)\|\, \mathrm{d}t$.
- Les dérivées normales $q \in \mathbb{N}$ fois de n au bord sont notées $n_q(t) = \partial_{\nu(t)}^q n(\gamma(t))$ pour $t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$.
- La valeur au bord normalisée de moyenne 2π notée $\widehat{n}_0(t) = \dfrac{n_0(t)}{\langle n_0 \rangle}$ pour $t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ où $n_0(t) = n(\gamma(t))$ est la valeur au bord.
- L'hypothèse sur la courbure effective $\breve{\kappa}(t) = \dfrac{L}{2\pi}\left(\kappa(t) + \dfrac{n_1(t)}{n_0(t)}\right) > 0$ pour $t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ où $n_1(t) = \partial_{\nu(t)} n(\gamma(t))$ est la dérivée normale.

Les quasi-résonances et quasi-modes sont donnés par

$$\underline{k}_{p;j}(m) = \frac{2\pi m}{L\langle n_0 \rangle}\left[1 + \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{2}{3}} \sum_{q=0}^{2} \mathsf{k}_q \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{q}{3}} + \mathcal{O}\left(m^{-\frac{5}{3}}\right)\right] \tag{8.21}$$

$$\underline{u}_{p;j}(m; s, \xi) = C \exp\left(\mathrm{i}m\Theta_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}}, t\right)\right) w_{p;j}(m; t, \xi) \tag{8.22}$$

$$w_{p;j}(m; t, \xi) = \begin{cases} \Phi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}}; t, m^{\frac{2}{3}}\xi\right) & \text{si } \xi \leq 0 \\ \Psi_{p;j}\left(m^{-\frac{1}{3}}; t, m\xi\right) & \text{si } \xi > 0 \end{cases} \tag{8.23}$$

où $C > 0$ est une constante de normalisation et $\Theta_{p;j}$, $\Phi_{p;j}$ et $\Psi_{p;j}$ sont définis en (6.9). Les premiers termes du développement asymptotique de $\underline{k}_{p;j}(m)$ sont

$$\mathsf{k}_0 = \frac{a_j}{2}\left\langle \breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}\, \widehat{n}_0^{\frac{1}{3}} \right\rangle,$$

$$\mathsf{k}_1 = -\frac{1}{2}\left\langle \frac{n_0^p\, \breve{\kappa}}{\sqrt{n_0^2 - 1}} \right\rangle,$$

$$\mathsf{k}_2 = \frac{a_j^2}{15}\left(\frac{5}{4}\left\langle \breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}\, \widehat{n}_0^{\frac{1}{3}} \right\rangle^2 - 3\left\langle \frac{L\kappa}{2\pi}\, \breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}\, \widehat{n}_0^{\frac{1}{3}} \right\rangle + \frac{7}{8}\left\langle \breve{\kappa}^{\frac{4}{3}}\, \widehat{n}_0^{-\frac{1}{3}} \right\rangle + \left\langle \eta_2\, \breve{\kappa}^{-\frac{2}{3}}\, \widehat{n}_0^{-\frac{1}{3}} \right\rangle \right.$$
$$\left. - \frac{1}{9}\left\langle \breve{\kappa}'^2\, \breve{\kappa}^{-\frac{8}{3}}\, \widehat{n}_0^{-\frac{1}{3}} \right\rangle - \frac{4}{9}\left\langle \breve{\kappa}'\, \widehat{n}_0'\, \breve{\kappa}^{-\frac{5}{3}}\, \widehat{n}_0^{-\frac{4}{3}} \right\rangle - \frac{4}{9}\left\langle \widehat{n}_0'^2\, \breve{\kappa}^{-\frac{2}{3}}\, \widehat{n}_0^{-\frac{7}{3}} \right\rangle \right)$$

où $\eta_2(t) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \left(2\kappa^2 - \frac{n_2}{n_0}\right)$. Les premiers termes non nuls des développements asymptotiques de $\Theta_{p;j}$, $\Phi_{p;j}$ et $\Psi_{p;j}$ sont

$$\mathrm{Re}(\Theta_{p;j}(h,t)) = \int_0^t \widehat{n}_0(\vartheta)\,\|\gamma'(\vartheta)\|\,\mathrm{d}\vartheta + \mathcal{O}\left(h^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\mathrm{Im}(\Theta_{p;j}(h,t)) = \frac{h}{12}\left[(3p-2)\ln\left(n_0(t)\right) - \ln\left(\breve{\kappa}(t)\right)\right] + \mathcal{O}\left(h^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$\Phi_{p;j}(h;t,\sigma) = \mathsf{A}\left(a_j + \breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(t)\widehat{n}_0^{\frac{2}{3}}(t)\sigma\right) + \mathcal{O}\left(h^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$\Psi_{p;j}(h;t,\rho) = -h^{\frac{1}{3}}\frac{\mathsf{A}'(a_j)\,n_0^p(t)\,\breve{\kappa}^{\frac{1}{3}}(t)}{\widehat{n}_0^{\frac{1}{3}}(t)\sqrt{n_0^2(t)-1}}\exp\left(\frac{-2\rho}{\langle n_0\rangle}\sqrt{n_0^2(t)-1}\right) + \mathcal{O}\left(h^{\frac{2}{3}}\right)$$

8.3.2 Indice constant

Dans le cas où l'indice optique $n \equiv n_0 > 1$ est constant dans la cavité, l'hypothèse principale 8.1 page 185 devient $\breve{\kappa} = \frac{L}{2\pi}\kappa > 0$, c'est-à-dire que le bord de la cavité est à courbure strictement positive. On a calculé dans ce cas particulier plus de termes du développement. On obtient pour développements asymptotiques

$$\underline{k}_{p;j}(m) = \frac{2\pi m}{L\langle n_0\rangle}\left[1 + \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\sum_{q=0}^{3}\mathsf{k}_q\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{q}{3}} + \mathcal{O}\left(m^{-2}\right)\right] \tag{8.24}$$

où

$$\mathsf{k}_0 = \frac{a_j}{2}\left\langle\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}\right\rangle,$$

$$\mathsf{k}_1 = -\frac{n_0^p\,\langle\breve{\kappa}\rangle}{2\sqrt{n_0^2-1}},$$

$$\mathsf{k}_2 = \frac{a_j^2}{120}\left(10\left\langle\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}\right\rangle^2 - \left\langle\breve{\kappa}^{\frac{4}{3}}\right\rangle - \frac{8}{9}\left\langle\breve{\kappa}'^2\breve{\kappa}^{-\frac{8}{3}}\right\rangle\right),$$

$$\mathsf{k}_3 = -\frac{a_j\,n_0^p}{12\sqrt{n_0^2-1}}\left(\left\langle\breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}\right\rangle\langle\breve{\kappa}\rangle + \frac{1+2n_0^2-2n_0^{2p}}{n_0^2-1}\left\langle\breve{\kappa}^{\frac{5}{3}}\right\rangle\right).$$

Remarque 8.24. On a $\langle\breve{\kappa}\rangle = 1$. En effet, l'angle α entre le premier vecteur de la base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ et γ' la tangente à la courbe vérifie $\alpha'(s) = \kappa(s)$ et comme la courbe est fermée et simple $\int_0^L \kappa(s)\,\mathrm{d}s = \alpha(L) - \alpha(0) = 2\pi$. On rappelle que γ est paramétrée par l'abscisse curviligne $s \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$.

Chapitre 9

Illustrations numériques dans le cas général

Sommaire

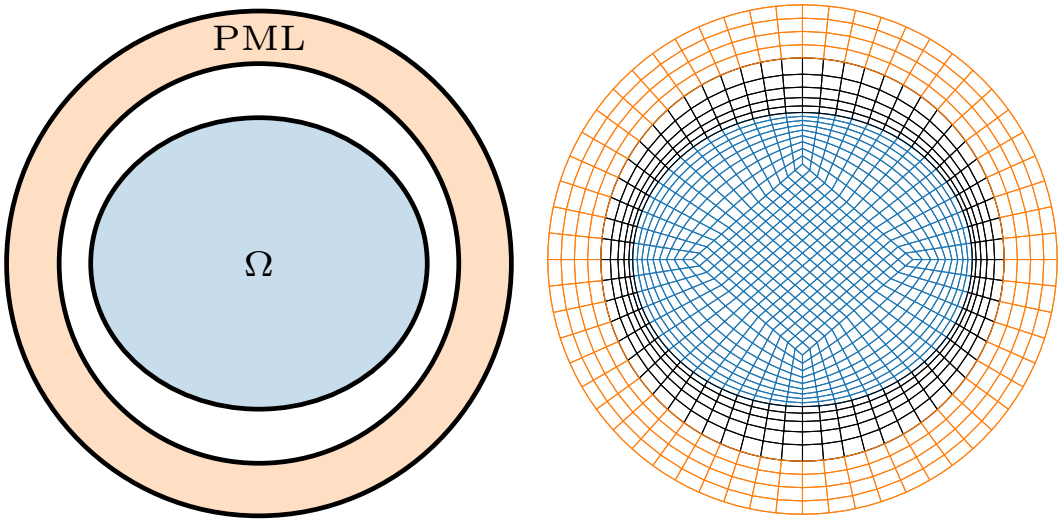
9.1 Cavité elliptique d'indice optique constant 212
9.2 Cavité circulaire d'indice optique quadratique 216

Dans ce chapitre, on illustre numériquement les développements asymptotiques construits au chapitre 8 sur deux cas : le cas d'une cavité elliptique avec un indice constant et une cavité circulaire avec un indice quadratique non radial.

9.1 Cavité elliptique d'indice optique constant

On considère une cavité elliptique de demi-grand axe 1 et de demi-petit axe $\sqrt{\frac{3}{4}}$ et donc d'excentricité 0.5 et de longueur $L \approx 5.8698$. L'indice optique est constant dans la cavité et vaut $n_0 = 5$. Dans un premier temps, on calcule numériquement, avec les méthodes mis en place au chapitre 4, les modes de galerie correspondant à $k_j(m)$ pour $j = 0$ et $m \in \{1, \dots, 30\}$. On utilise une PML radiale linéaire par morceaux (PML0) de paramètres $r_0 = 1.1875$ et $r_1 = 1.5$. On fait dépendre le paramètre σ_0 de l'endroit du spectre qui nous intéresse de la manière suivante : pour calculer les résonances proches k_0 on prend $\sigma_0 = \frac{10}{k_0}$.

Comme dans le chapitre 7, on utilise la connaissance des échelles pour faire un raffinement géométrique dans la direction normale le long du bord de la cavité. Le maillage est quadrangulaire structuré de degré géométrique 3 et l'espace des éléments finis est de degré 7. Il y a 64156 degrés de libertés. Sur la figure 9.1, on a représenté la géométrie idéale à gauche et le maillage à droite. La partie bleue correspond à la cavité Ω et la partie orange correspond à la PML. À l'aide de ce maillage, on obtient les approximations numériques $k_{p;j}^{\mathrm{num}}(m)$.



(a) Géométrie idéale (b) Le maillage

FIGURE 9.1 – À gauche : représentation de la géométrie idéale du domaine de calcul. À droite : représentation du maillage.

On compare ensuite ces résonances numériques aux $\underline{k}_{p,0}^{[Q]}(m)$ calculées à partir des développements asymptotiques obtenus dans le chapitre 8. L'entier Q désigne le nombre de termes correctifs pris en compte : $\underline{k}_{p;0}^{[1]}(m) = \frac{2\pi m}{L n_0}$ correspond au terme principal, $\underline{k}_{p;0}^{[2]}(m)$ est égal à $\underline{k}_{p;0}^{[1]}(m)$ plus un terme correctif, etc.

Sur la figure 9.2, colonne de gauche, on a représenté la différence relative $\mathfrak{D}_{p;j}^{[Q]}$ en échelle logarithmique entre les résonances numériques $k_{p;j}^{\mathrm{num}}(m)$ et les quasi-

résonances $\underline{k}_{p;j}^{[Q]}(m)$ en fonction de m où

$$\mathfrak{D}_{p;j}^{[Q]}(m) = \left| \frac{k_{p;j}^{\mathrm{num}}(m) - \underline{k}_{p;j}^{[Q]}(m)}{k_{p;j}^{\mathrm{num}}(m)} \right|.$$

Colonne de droite, on a représenté la taux d'accroissement en fonction de m, c'est-à-dire le taux d'accroissement

$$\mathfrak{T}_{p;j}^{[Q]}(m) = \frac{\log \mathfrak{D}_{p;j}^{[Q]}(m + \Delta m) - \log \mathfrak{D}_{p;j}^{[Q]}(m)}{\Delta m}$$

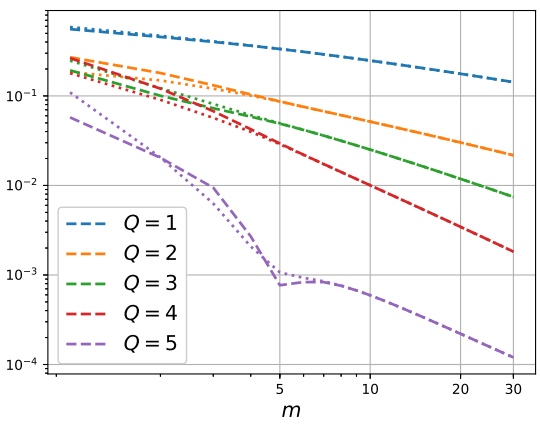
en fonction de m avec Δm fixé. En théorie, on a

$$\mathfrak{D}_{p;j}^{[Q]}(m) = \mathcal{O}\left(m^{-\frac{Q+1}{3}}\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{m\to+\infty} \mathfrak{T}_{p;j}^{[Q]}(m) = -\frac{Q+1}{3}.$$

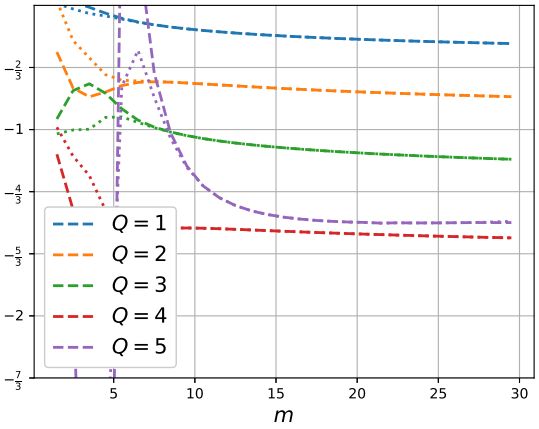
Sur tous les graphes, les quasi-résonances sont calculées à partir de $\underline{k}_{p;j}^{[Q]}$ pour $Q \in \{1, \dots, 5\}$. À chaque quasi-résonances $\underline{k}_{p;j}^{[Q]}(m)$ correspond deux résonances k_- et k_+, ordonnées selon la convention $|k_-| < |k_+|$, dont les modes associés sont notés u_- et u_+. Sur les graphes les traits pleins correspondent à k_- et ceux en pointillés correspondent à k_+. On observe des taux d'accroissements proches des valeurs théoriques pour $Q \leq 4$ mais pour $Q = 5$, il y a un pic correspondant à un changement de signe de l'erreur entre $\underline{k}_{p;0}^{[5]}(m)$ et $\underline{k}_{p;0}^{\mathrm{num}}(m)$ ce qui perturbe l'asymptotique.

Sur la figure 9.3, on représenté les graphes des modes résonnants, pour $p = +1$, normalisés de la manière suivante : $u(z_0) = 1$ où $z_0 \in \arg\max_{D(0,r_1)} |u|$.

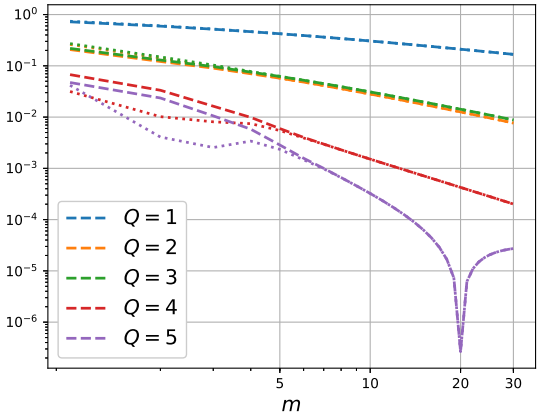
Sur la figure 9.4, à gauche on a représenté l'écart entre k_- et k_+ en échelle logarithmique en fonction de m. À droite, on a représenté les parties imaginaires de k_- (tracé en tirets) et de k_+ (tracé en pointillés) en échelle logarithmique en fonction de m. On remarque que l'écart entre k_- et k_+ décroît très rapidement, ce qui est prévisible au vu de l'asymptotique car les développements asymptotiques sont les mêmes pour k_- et k_+. Le fait que l'écart remonte après $m > 20$ vient de la pollution numérique : les modes résonnants discrets sont de plus en plus oscillants dans la direction tangente au bord. On observe la décroissance exponentielle des parties imaginaires de k_- et k_+.



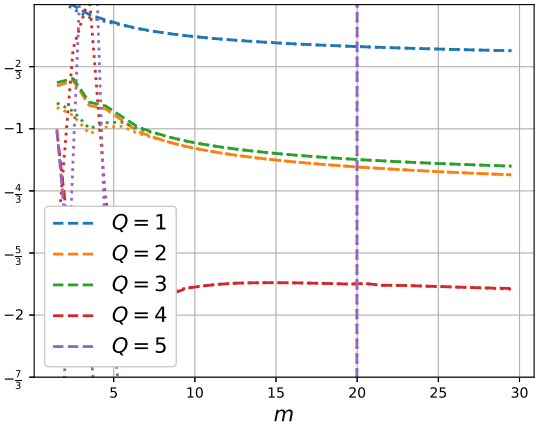
(a) $p = +1$, différences relatives



(b) $p = +1$, taux d'accroissements



(c) $p = -1$, différences relatives



(d) $p = -1$, taux d'accroissements

FIGURE 9.2 – À gauche, graphes des différences relatives $\mathfrak{D}_{p;j}^{[Q]}(m)$ entre les résonances numériques et la quasi-résonances en fonction de m en échelle logarithmique. À droite, graphes des taux d'accroissement $\mathfrak{T}_{p;j}^{[Q]}(m)$ en fonction de m. Sur tous les graphes m va de 1 à 30 et Q de 1 à 5.

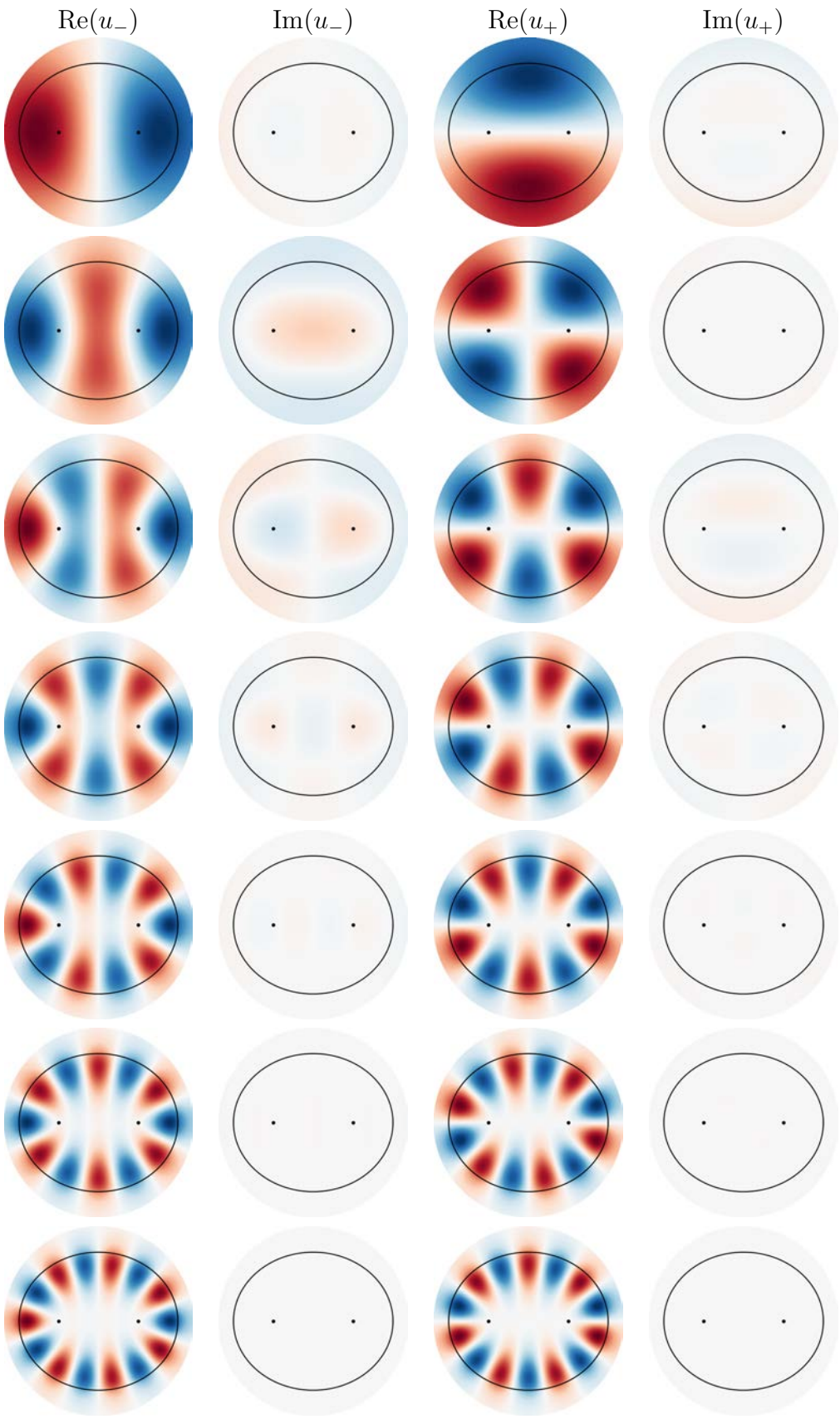
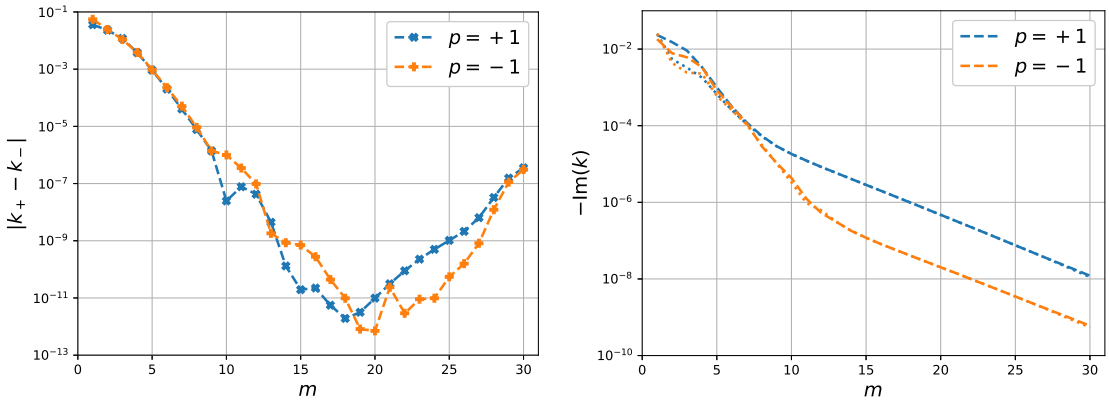


FIGURE 9.3 – Graphes des modes résonnants associés aux quasi-résonances $\underline{k}^{[Q]}_{p;j}(m)$, normalisés de la façon suivante : $u(\arg\max_{B(0,r_1)}|u|) = 1$. Chaque ligne correspond à une valeur de m pour $1 \leq m \leq 7$. Les points symbolisent les foyers de l'ellipse.



(a) Module de $k_+ - k_-$ (b) Parties imaginaires de k_- et k_+

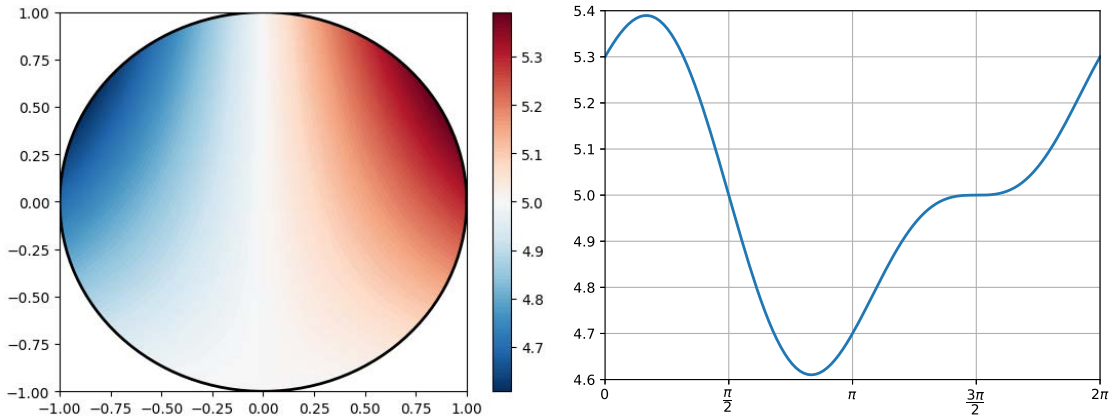
FIGURE 9.4 – À gauche, graphes de $|k_+ - k_-|$ en fonction de m. À droite, graphes des parties imaginaires de k_- et k_+ en fonction de m.

9.2 Cavité circulaire d'indice optique quadratique

On considère une cavité circulaire de rayon 1. L'indice optique est quadratique non radial dans la cavité défini par

$$n(x,y) = \begin{cases} 5 + 0.3\,x + 0.3\,xy & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

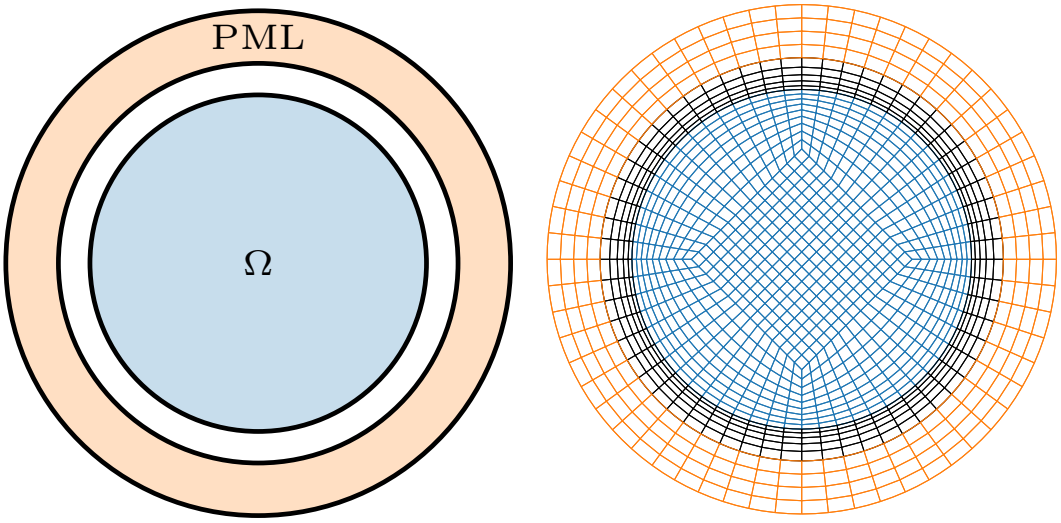
Sur la figure 9.5, on représenté à gauche la fonction n dans la cavité et à droite la trace de la fonction n sur le bord de la cavité. Les échelles sont centrées autour de la moyenne le long du bord $\langle n_0 \rangle = 5$.



(a) $(x,y) \mapsto n(x,y)$ (b) $\theta \mapsto n(\cos(\theta), \sin(\theta))$

FIGURE 9.5 – À gauche, graphe de l'indice optique dans la cavité. À droite, graphe de l'indice optique au bord de la cavité.

On utilise la même PML avec les mêmes paramètres que la section précédente. Le maillage est similaire à celui de la section précédente où on a remplacé l'ellipse par un disque. Le degré géométrique, le degré éléments finis et le nombre de degré de liberté sont les mêmes que la section précédente. Sur la figure 9.6, à gauche on a représenté la géométrie idéale et à droite on a représenté le maillage.



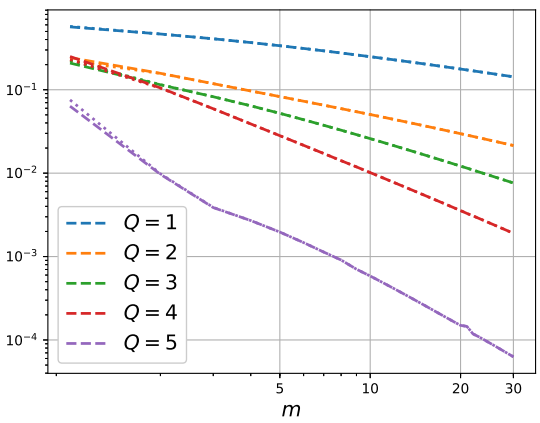
(a) Géométrie idéale (b) Le maillage

FIGURE 9.6 – À gauche : représentation de la géométrie idéale du domaine de calcul. À droite : représentation du maillage.

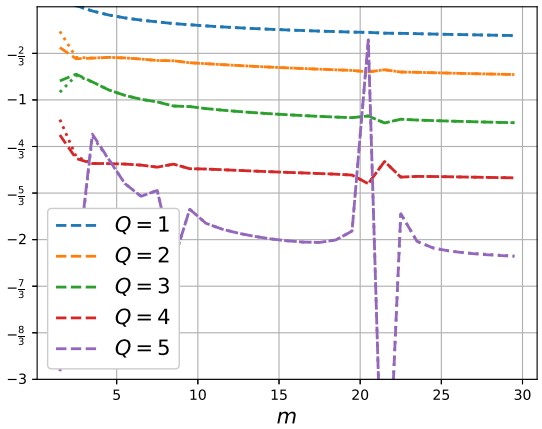
Sur la figure 9.7, colonne de gauche, on a représenté la différence relative $\mathfrak{D}_{p;j}^{[Q]}$ en échelle logarithmique entre les résonances numériques $k_{p;j}^{\mathrm{num}}(m)$ et les quasi-résonances $\underline{k}_{p;j}^{[Q]}(m)$ en fonction de m en échelle logarithmique. Colonne de droite, on a représenté le taux d'accroissement $\mathfrak{T}_{p;j}^{[Q]}(m)$ en fonction de m. Sur tous les graphes, les quasi-résonances sont calculées à partir de $\underline{k}_{p;j}^{[Q]}$ pour $Q \in \{1, \ldots, 5\}$. On observe que les taux d'accroissements semblent converger vers les valeurs théorique attendues.

Sur la figure 9.8, on représenté les graphes des modes résonnants pour $p = -1$, normalisés de la manière suivante : $u(z_0) = 1$ où $z_0 \in \arg\max_{D(0,r_1)} |u|$.

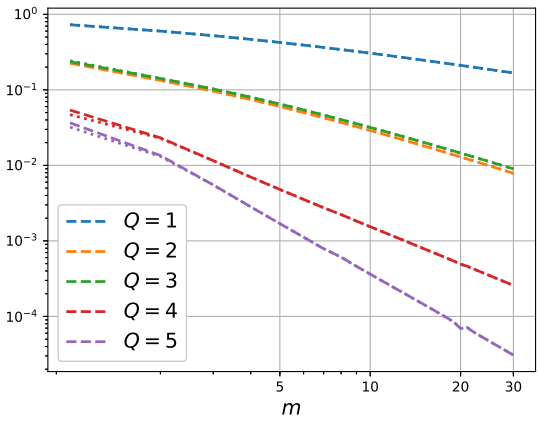
Sur les figures 9.4, à gauche on a représenté l'écart entre k_- et k_+ en échelle logarithmique en fonction de m. À droite, on a représenté les parties imaginaires de k_- (trait en tirets) et de k_+ (trait en pointillés) en échelle logarithmique en fonction de m. On fait les mêmes observations sur les taux d'accroissement qu'à la section précédente.



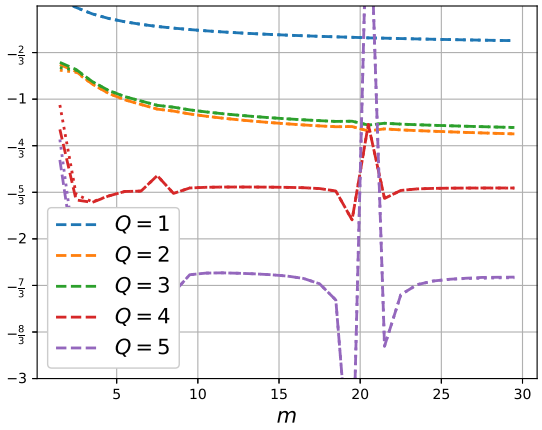
(a) $p = +1$, différences relatives



(b) $p = +1$, taux d'accroissements



(c) $p = -1$, différences relatives



(d) $p = -1$, taux d'accroissements

FIGURE 9.7 – Graphes de l'erreur relative entre les résonances numériques $k_{p;j}^{\mathrm{FEM}}(m)$ et les quasi-résonances $\underline{k}_{p;j}^{[Q]}(m)$ en échelle logarithmique.

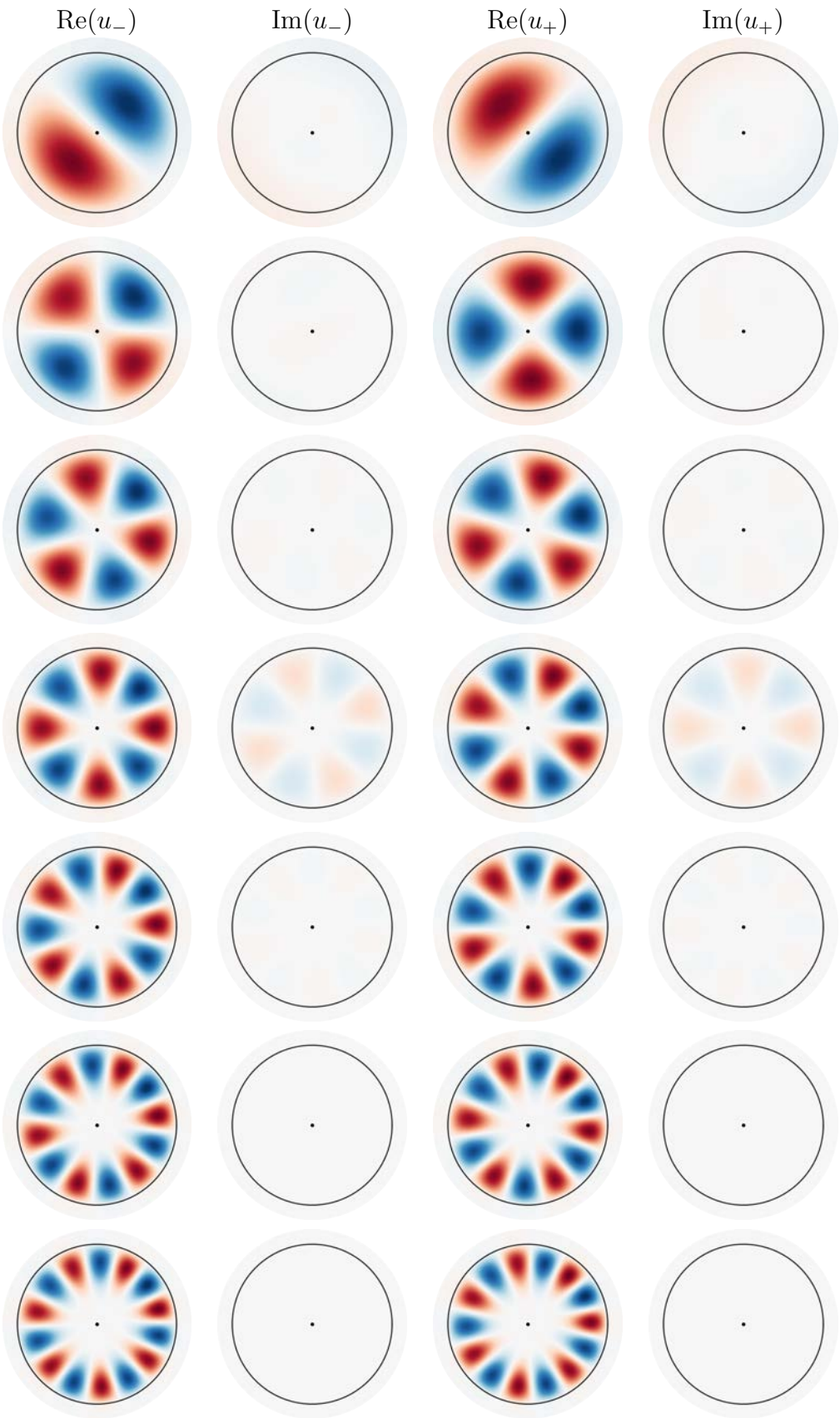
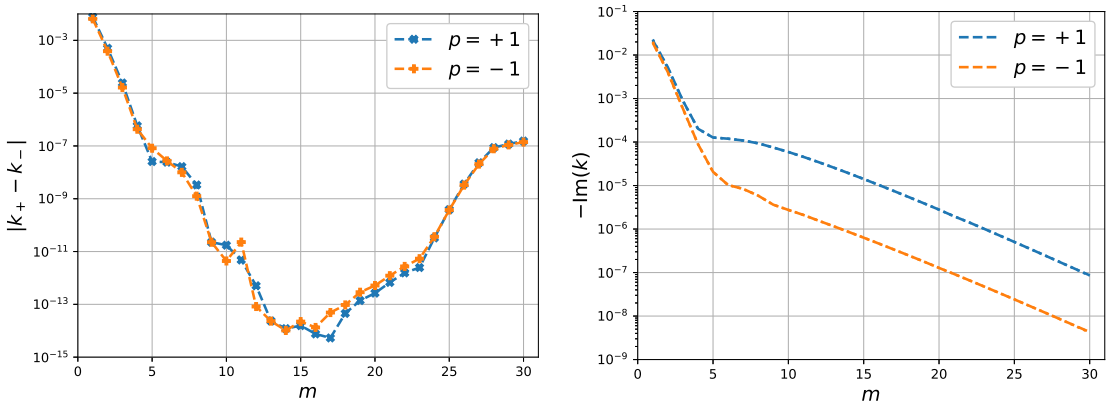


FIGURE 9.8 – Graphes des modes résonnants associés aux quasi-résonances $\underline{k}_{p;j}^{[Q]}(m)$, normalisés de la façon suivante : $u(\arg\max_{B(0,r_1)}|u|) = 1$. Chaque ligne correspond à une valeur de m pour $1 \leq m \leq 7$. Les points symbolisent les foyers de l'ellipse.



(a) Module de $k_+ - k_-$

(b) Parties imaginaires de k_- et k_+

FIGURE 9.9 – À gauche, graphes de $|k_+ - k_-|$ en fonction de m. À droite, graphes des parties imaginaires de k_- et k_+ en fonction de m.

Chapitre 10

Lien entre résonnances et quasi-résonances

Sommaire

10.1 Propriété d'orthogonalité des quasi-modes 222
10.2 Liens entre résonances et quasi-résonances 224

Dans les chapitres 6 et 8, sous plusieurs jeux d'hypothèses sur la cavité Ω et l'indice optique n, on a construit des familles de quasi-résonances $(\underline{k}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$ et des quasi-modes associés $(\underline{u}_{p;j})_{m\geq 1}$ du problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en 5.5 page 120 au sens de la définition 5.3 page 120. Plus précisément, les théorèmes 6.3 page 131, 6.14 page 143 et 6.26 page 157 du chapitre 6 quand Ω est un disque et l'indice optique une fonction radiale, ainsi que le théorème 8.7 page 187 quand Ω est une cavité générale sous une hypothèse de courbure effective. Dans ce chapitre, on montre que les quasi-résonances sont proches des résonances du problème $(\mathcal{P}_p)$.

10.1 Propriété d'orthogonalité des quasi-modes

Dans les théorèmes 6.3, 6.14, 6.26 et 8.7, on a construit des quasi-résonances $\underline{k}_{p;j}(m)$ et des les quasi-modes $\underline{u}_{p;j}(m)$. Les quasi-résonances sont de multiplicité deux car à chaque $\underline{k}_{p;j}(m)$, on peut associer deux quasi-modes $\underline{u}_{p;j}(m)$ et $\overline{\underline{u}_{p;j}(m)}$ qui sont quasi-orthogonaux au sens du lemme suivant.

Lemme 10.1. *Pour $i,j,m,q\in\mathbb{N}$ avec $m,q\geq 1$, on a*

$$\left(\underline{u}_{p;i}(m),\underline{u}_{p;j}(q)\right)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}=\begin{cases}1 & \text{si } m=q \text{ et } i=j\\ \mathcal{O}\left(\min(m,q)^{-\infty}\right) & \text{sinon}\end{cases}, \tag{10.1}$$

$$\left(\overline{\underline{u}_{p;i}(m)},\underline{u}_{p;j}(q)\right)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}=\mathcal{O}\left(\min(m,q)^{-\infty}\right). \tag{10.2}$$

Remarque 10.2. Pour les trois cas invariants par rotation construits au chapitre 6, on a orthogonalité exacte des quasi-modes pour deux valeurs de m différentes. Plus précisément pour touts $i,j\in\mathbb{N}$ et $m,q\geq 1$, on a

$$\left(\underline{u}_{p;i}(m),\underline{u}_{p;j}(q)\right)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}=\delta_{m,q}\qquad\text{et}\qquad\left(\overline{\underline{u}_{p;i}(m)},\underline{u}_{p;j}(q)\right)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}=0$$

où $\delta_{m,q}$ est le symbole de Kronecker. Ce résultat vient du fait que dans les cas invariants par rotation la phase de $\underline{u}_{p;i}(m)$ est $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. Pour le produit scalaire (10.1), le cas $i=j$ et $m=q$ vient de la définition 5.3 des quasi-résonances, qui sont normalisées.

On se place dans le cas $m\neq q$ ou $i\neq j$. On fixe $i,j\in\mathbb{N}$ et on s'intéresse au cas où m et q tendent vers $+\infty$. On applique le lemme B.12 au triplet $\underline{k}_{p;i}(m)$, $\underline{u}_{p;i}(m)$ et $R(m)$ et au triplet $\underline{k}_{p;j}(q)$, $\underline{u}_{p;j}(q)$ et $S(q)$ où

$$\begin{aligned}R(m)&=-\operatorname{div}\left(n^{p-1}\nabla\underline{u}_{p;i}(m)\right)-\underline{k}_{p;i}(m)^2n^{p+1}\underline{u}_{p;i}(m)\\ S(q)&=-\operatorname{div}\left(n^{p-1}\nabla\underline{u}_{p;j}(q)\right)-\underline{k}_{p;j}(q)^2n^{p+1}\underline{u}_{p;j}(q)\end{aligned}$$

avec $R(m)=\mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)$ et $S(q)=\mathcal{O}\left(q^{-\infty}\right)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\left(\underline{k}_{p;i}(m)^2-\underline{k}_{p;j}(q)^2\right)\int_{\mathbb{R}^2}\overline{\underline{u}_{p;i}(m)}\,\underline{u}_{p;j}(q)\,n^{p+1}\,\mathrm{d}x&=\mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right)+\mathcal{O}\left(q^{-\infty}\right)\\&=\mathcal{O}\left(\min(m,q)^{-\infty}\right).\end{aligned}$$

Si $m=q$ alors $j\neq i$ et $\underline{k}_{p;i}(m)^2-\underline{k}_{p;j}(q)^2\sim c_{i,j}m^{2(1-\beta)}$ où $c_{i,j}\neq 0$ est une constante indépendante de m. Pour $\beta\in\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$, on a $2(1-\beta)>0$ donc $\left|\underline{k}_{p;i}(m)^2-\underline{k}_{p;j}(q)^2\right|\geq$

$|c_{i,j}|$ pour $m \geq 1$. Si $j = i$ alors $m \neq q$ et $\left|\underline{k}_{p;i}(m)^2 - \underline{k}_{p;j}(q)^2\right| \geq d\,|m^2 - q^2| \geq d$ pour $m \geq 1$ et $q \geq 1$. Dans ces deux cas il existe une constante $c > 0$ indépendante de m et q telle que $\left|\underline{k}_{p;i}(m)^2 - \underline{k}_{p;j}(q)^2\right| \geq c$. Avec le lemme B.3 page 238, on a

$$\left(\underline{u}_{p;i}(m), \underline{u}_{p;j}(q)\right)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{O}\left(\min(m,q)^{-\infty}\right).$$

Pour le produit scalaire (10.2), le cas $m \neq q$ ou $i \neq j$ se démontre de la même manière que pour le premier produit scalaire (10.1), en appliquant le lemme B.12 au triplet $\overline{\underline{k}_{p;i}(m)}$, $\overline{\underline{u}_{p;i}(m)}$ et $\overline{R(m)}$ et au triplet $\underline{k}_{p;j}(q)$, $\underline{u}_{p;j}(q)$ et $S(q)$. Il ne reste plus que le cas où $m = q$ et $i = j$ à étudier. D'après la remarque 10.2, il ne nous reste que le cas des quasi-modes construits dans le théorème 8.7 à considérer. Soit C un compact contenu dans le voisinage tubulaire $\mathcal{V}_\delta$ indépendant de m et tel que $\mathrm{supp}(\underline{u}_{p;j}(m)) \subset C$. Dans tous les cas traités, on peut écrire $\underline{u}_{p;j}(m;s,\xi) = w(m;s,\xi)\mathsf{e}^{\mathsf{i}mF(m;s)}$ avec $w \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([1,+\infty[\times\mathbb{T}\times[-\delta,\delta])$ et

$$\mathsf{i}mF(m;s) = \mathsf{i}m\Theta\left(m^{-\frac{1}{3}};s\right) = \mathsf{i}m\int_0^s \widehat{n}_0(t)\,\mathrm{d}t + m^{-\frac{2}{3}}g(m;s)$$

où $g \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([1,+\infty[\times\mathbb{T})$. On utilise ensuite un argument du type phase non stationnaire car d'après le lemme 8.4 la dérivé de la phase ne s'annule pas. On fait des intégrations par parties en intégrant le facteur $\exp(\mathsf{i}m\int\widehat{n}_0)$ et en dérivant le reste. Pour cela, il convient de faire le changement de variable $\theta = N(s) = \int_0^s \widehat{n}_0(t)\,\mathrm{d}t$. Comme $N' = \widehat{n}_0 > 0$, on a bien un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut écrire le produit scalaire sous la forme

$$\begin{aligned}\left(\overline{\underline{u}_{p;j}(m)}, \underline{u}_{p;j}(m)\right)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} &= \int_{-\delta}^{\delta}\int_{\mathbb{T}} w^2(m;s,\xi)\,\mathsf{e}^{2\mathsf{i}mF(m;s)}\,(1+\xi\kappa(s))\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-\delta}^{\delta}\int_0^{2\pi} A(m;\theta,\xi)\,\mathsf{e}^{m^\alpha b(m;\theta)}\,\mathsf{e}^{2\mathsf{i}m\theta}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

avec $A(m;\theta,\xi) = \frac{w^2(m;N^{-1}(\theta),\xi)}{\widehat{n}_0(N^{-1}(\theta))}(1+\xi\kappa(N^{-1}(\theta)))$ dans $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([1,+\infty[\times\mathbb{T}\times[-\delta,\delta])$, $\alpha = \dfrac{1}{3}$ et $b(m;\theta) = 2\mathsf{i}g(m;N^{-1}(\theta))$ dans $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([1,+\infty[\times\mathbb{T})$. Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Après ℓ intégrations par parties, on obtient

$$\int_0^{2\pi} A(m;\theta,\xi)\,\mathsf{e}^{m^\alpha b(m;\theta)}\,\mathsf{e}^{2\mathsf{i}m\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \partial_\theta^\ell\left(A(m;\theta,\xi)\,\mathsf{e}^{m^\alpha b(m;\theta)}\right)(2\mathsf{i}m)^{-\ell}\mathsf{e}^{2\mathsf{i}m\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Or,

$$\partial_\theta^\ell\left(A(m;\theta,\xi)\,\mathsf{e}^{m^\alpha b(m;\theta)}\right) \lesssim m^{\alpha\ell}$$

donc

$$\left|\int_0^{2\pi} A(m;\theta,\xi)\,\mathsf{e}^{m^\alpha b(m;\theta)}\,\mathsf{e}^{2\mathsf{i}m\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \lesssim m^{(1-\alpha)\ell}.$$

Finalement, on obtient

$$\left(\overline{\underline{u}_{p;j}(m)}, \underline{u}_{p;j}(m)\right)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{O}\left(m^{-\infty}\right).$$

□

10.2 Liens entre résonances et quasi-résonances

On s'appuie ici sur les résultats que l'on trouve dans [94] et [91]. Ces résultats donnent, connaissant des familles de quasi-résonances, le lien avec les résonances complexes. Ces résultats sont principalement énoncés dans le cadre semi-classique. Toutefois, on va appliquer le corollaire 1 de [91] car dans notre cas à les opérateurs définissant le problème ne dépend pas d'un petit paramètre.

On se place dans le contexte de la théorie du *black box scattering* rappelé dans l'annexe B page 237. On considère l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ muni du produit scalaire

$$(u,v)_{\mathrm{d}\check{n}_p} = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u}\, v \ \mathrm{d}\check{n}_p = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{u}\, v\, n^{p+1}\, \mathrm{d}x$$

pour $u, v \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$, ainsi que l'opérateur P défini par le problème $(\mathcal{P}_p)$ 5.5 page 120, plus précisément $P = -n^{-p-1}\operatorname{div}(n^{p-1}\nabla)$ de domaine $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d, n^{p-1})$. Cet opérateur est auto-adjoint, voir la propriété B.7. On peut appliquer le théorème de [94] qui indique que dans des boites autour des quasi-résonances $\underline{k}_{p;j}(m)$ il existe au moins une résonance car l'opérateur P vérifie les hypothèses (**H1**) – (**H5**) voir B.15. En ajoutant l'hypothèse (**H6**) ci-desous, on peut appliquer le corollaire 1 de [91] qui est plus précis dans le sens où il indique que dans chacune de ces boites il y a au moins autant de résonances que de quasi-résonances.

H6 : Le nombre de quasi-résonances vérifie l'estimation

$$\mathrm{Card}\left(\{\underline{k}_{p;j}(m) \mid j \geq 0,\ m \geq 1\} \cap [1,r]\right) \leq C r^{d_6^\sharp} \qquad \text{pour } r > 1$$

où $C > 0$ et $d_6^\sharp \in \mathbb{N}$. On pose $d^\sharp = \max(d_5^\sharp, d_6^\sharp)$ où $d_5^\sharp$ est défini dans l'estimation (B.2) de l'hypothèse (**H5**).

On énonce une version simplifié du corollaire 1 de [91] pour l'opérateur P.

Théorème 10.3 (Corollaire 1, P. Stefanov 99)**.** *On suppose que l'opérateur P vérifie les hypothèses (**H1**) à (**H6**). Étant donné $\widetilde{J} \geq 1$, on considère des familles de quasi-résonances $(\underline{k}_j(m))_{m\geq 1}$ pour $j \in \{0,\dots,\widetilde{J}\}$ et les familles de quasi-modes associés $(\underline{u}_j(m))_{m\geq 1}$, c'est-à-dire que pour tout $i,j \in \{1,\dots,\widetilde{J}\}$, on a*

- $\left\|(P - k_j^2(m))u_j(m)\right\|_{\mathcal{H}} \leq R(m)$,
- $|(u_i(m), u_j(m))_{\mathcal{H}} - \delta_{i,j}| \leq R(m)$,

avec une fonction $R(m) = \mathcal{O}(m^{-\infty})$. On se donne deux suites $(a_m)_{m\geq 1}$ et $(b_m)_{m\geq 1}$ tel que $\lim_{m\to\infty} a_m = +\infty$, $b_m \geq a_m$ et $\frac{b_m}{a_m} \leq C$.

Alors pour toute fonction $S(m) \geq m^{2d^\sharp+3}R(m)$ telle que $D\mathsf{e}^{-Dm} \leq S(m) = \mathcal{O}(m^{-\infty})$ avec un $D > 0$ et pour tout entier $q \geq 1$, il existe $M(S,q) > 0$ tel que pour tout $a_m > M(S,q)$ l'opérateur P a au moins $\widetilde{J}$ résonances (avec multiplicité) dans l'ensemble $\mathrm{Res}(P) \cap [a_m - a_m^{-q}, b_m + a_m^{-q}] + \mathsf{i}\,[-S(m), 0]$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Card}\left(\mathrm{Res}(P) \cap \left[a_m - a_m^{-q}, b_m + a_m^{-q}\right] + \mathsf{i}\,[-S(m), 0]\right) \geq \widetilde{J}.$$

Remarque 10.4. Ce théorème énonce que s'il existe une famille de quasi-modes alors cela implique l'existence d'une suite $(k_m)_{m\geq 1}$ de résonances telles que les parties imaginaires de k_m tendent vers 0 quand m tend vers $+\infty$ de manière super-algébrique. Un autre théorème de P. Stefanov [92] énonce la réciproque : s'il existe une suite de résonances dont les parties imaginaires tendent vers 0 de manière super-algébrique alors il existe une famille de quasi-résonances réelle.

Pour appliquer ce théorème aux familles de quasi-résonances $\underline{k}_{p;j}(m)$ construites dans les chapitres 6 et 8, on démontre que les quasi-résonances $\underline{k}_{p;j}(m)$ vérifient l'hypothèse (**H6**) :

Lemme 10.5. *Soit $J \geq 0$. Il existe $C_J > 0$ tel que pour tout $r \geq 1$, on a*

$$\mathrm{Card}\left(\{\underline{k}_{p;j}(m) \;\mid\; m \geq 1,\, 0 \leq j \leq J\} \cap [1, r]\right) \leq C_J\, r.$$

Démonstration. Dans tous les cas étudiés (aux chapitre 6 et 8), on a construit des quasi-modes de la forme $\underline{k}_{p;j}(m) = m\mathrm{K}_j\left(m^{-\beta}\right)$ avec $\mathrm{K}_j \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1])$ et $\beta \in \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$. De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{K}_j(0) = \alpha > 0$ est une constante indépendante de j.

Comme on a fixé J pour ne regarder qu'un nombre fini de j, il existe $0 < h_J \leq 1$ tel que pour tout $j \in \{0, \dots, J\}$ et pour tout $m^{-\beta} \leq h_J$, on a $\mathrm{K}_j\left(m^{-\beta}\right) \geq \frac{\alpha}{2}$. Ainsi

$$\left\{\underline{k}_{p;j}(m) \mid m \geq 1,\, 0 \leq j \leq J\right\} \subset \left\{\underline{k}_{p;j}(m) \mid 1 \leq m \leq h_J^{-\frac{1}{\beta}},\, 0 \leq j \leq J\right\} \bigsqcup \left\{\underline{k}_{p;j}(m) \mid m \geq h_J^{-\frac{1}{\beta}},\, 0 \leq j \leq J\right\}.$$

Le première ensemble étant fini, il existe $D_J > 0$ tel que

$$\mathrm{Card}\left(\left\{\underline{k}_{p;j}(m) \mid 1 \leq m \leq h_J^{-\frac{1}{\beta}},\, 0 \leq j \geq J\right\} \cap [1, r]\right) \leq D_J\, r.$$

Concernant le deuxième ensemble, on a pour tout $0 \leq j \leq J$ et $m \geq h_J^{-\frac{1}{\beta}}$

$$m\frac{\alpha}{2} \leq m\mathrm{K}_j\left(m^{-\beta}\right) \leq r \qquad \Longrightarrow \qquad m \leq \frac{2r}{\alpha}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\left(\left\{\underline{k}_{p;j}(m) \mid m \geq h_J^{-\frac{1}{\beta}},\, 0 \leq j \leq J\right\} \cap [1, r]\right) &\leq (J+1) \sum_{m=1}^{\left\lfloor \frac{2r}{\alpha} \right\rfloor} 1 = (J+1)\left\lfloor \frac{2r}{\alpha} \right\rfloor \\ &\leq \frac{4(J+1)}{\alpha}\, r.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\mathrm{Card}\left(\left\{\underline{k}_{p;j}(m) \mid m \geq 1,\, 0 \leq j \leq J\right\} \cap [1, r]\right) \leq C_J\, r.$$

□

Notation. On note $\alpha = \mathrm{K}_{p;j}(0) = \frac{2\pi}{L\langle n_0\rangle}$ où L est la longueur du bord de Γ, $n_0(x) = \lim_{\Omega \ni y \to x} n(y)$ est la valeur de n sur Γ et $\langle n_0\rangle$ est la moyenne le long de Γ de n_0, voir section 8.3 page 208.

Théorème 10.6. *Soit $J \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. Pour toute fonction S prise comme dans le théorème 10.3 et pour tout entier $q \geq 1$, il existe $M(J, \varepsilon, S, q) > 0$ tel que pour tout $m > M(J, \varepsilon, S, q)$, on ait*

$$\mathrm{Card}\left(\mathrm{Res}(P) \cap \left[a_m - a_m^{-q}, b_m + a_m^{-q}\right] + \mathrm{i}[-S(m), 0]\right) \geq 2(J+1) \tag{10.3}$$

avec $a_m = (\alpha - \varepsilon)m$ et $b_m = (\alpha + \varepsilon)m$.

Démonstration. On applique le théorème 10.3 à l'opérateur P ainsi qu'aux familles de quasi-résonances $(\underline{k}_{p;j}(m))_{m\geq 1}$ avec les quasi-modes associés $\underline{u}_{p;j}(m)$ et les suite $a_m = (\alpha - \varepsilon)m$ et $b_m = (\alpha + \varepsilon)m$. Tous nos quasi-modes sont de multiplicité deux donc $\widetilde{J} = 2(J+1)$. □

Chapitre 11

Conclusions et perspectives

Sommaire

11.1 Conclusions 228
11.2 Perspectives 229

Dans ce chapitre, on conclut sur ce qui a été fait dans cette thèse. Puis, nous ouvrons deux perspectives de recherche pouvant prolonger ce travail.

11.1 Conclusions

Partie I. Les PML radiales sont des méthodes efficaces pour calculer les résonances d'une cavité optique. Elles permettent de transformer le problème de résonances en un problème aux valeurs propres linaire. Si on veut calculer des résonances éloignées les unes des autres, il faut adapter les paramètres de la PML à chaque résonance. On peut faire cela en gardant un problème aux valeurs propres linéaire au prix d'un calcul effectué par sous-ensemble de résonances proches. Pour l'application en optique traitée dans cette thèse, cela ne constitsue pas une limitation pratique car on ne recherche que certaines résonances proches d'une valeur k_0 fixée à l'avance donc on peut adapter les paramètres de la PML à k_0.

On a observé une différence entre le problème purement 1D du chapitre 2 et la famille de problèmes 1D radiaux du chapitre 3. La méthode des éléments finis appliquée au problème purement 1D créée des résonances discrètes parasites proches des approximations des résonances alors que pour la famille de problèmes 1D radiaux, les résonances discrètes parasites restent loin des résonances internes. L'un des défauts des PML radiales pour la famille de problèmes 1D radiaux est que l'on ne peut calculer qu'une partie des résonances externes et qu'elles se mélangent aux résonances discrètes parasites.

Partie II. Dans trois types de situations canoniques pour le disque avec un indice optique radial, on a construit des quasi-résonances réelles et des quasi-mode localisés qui correspondent aux modes de galerie localisés au bord de la cavité. Sur le plan théorique, ces constructions permettent de montrer qu'il existe des suites de résonances dont les parties imaginaires convergent très vite vers 0. Les constructions donnent également des développements asymptotiques des résonances quand m tend vers l'infini (m correspond au nombre d'oscillations le long du bord du disque). Sur le plan numérique, les développements asymptotiques permettent d'avoir une estimation de la résonance, ce qui est utile pour guider le calcul numérique. Des constructions asymptotiques, on déduit des algorithmes de calcul des termes des développements asymptotiques que l'on a implémenté dans un logiciel de calcul formel. Ces algorithmes renvoient les termes exacts dans le cas du demi-puits triangulaire et dans le cas du puits quadratique interne mais seulement des approximations à partir d'un certain rang pour le cas du demi-puits quadratique.

On a généralisé le cas du demi-puits triangulaire à la dimension 2, c'est-à-dire à des cavités non circulaires avec des indices optiques variables sous une hypothèse de courbure effective strictement positive. La différence avec le cas radial 1D est que le paramètre semi-classique m n'apparaît pas dans l'équation. Les développements asymptotiques issus des constructions sont d'autant plus importants en dimension 2 car l'ensemble des résonances est beaucoup plus riche. Le calcul précis des résonances par la méthode des éléments finis est facilité par les développements asymptotiques obtenus car ils fournissent des estimations des résonances permettant de savoir où se situent, dans le spectre de la matrice éléments finis, les résonances recherchées.

11.2 Perspectives

Micro-résonateur. Les micro-résonateurs optique à modes de galerie sont généralement constitués d'une micro-cavité et de deux guides d'ondes parallèles situés de chaque côtés de la cavité, un guide d'accès et un guide de sortie. Le système peut être modélisé par une cavité 2D et deux guides d'ondes droit infinis, voir la figure 11.1. Une première perspective serait le calcul numérique de la réponse du micro-résonateur quand on injecte un mode propagatif dans le guide d'accès. Mathématiquement cela revient à calculer le champs diffracté (*scatter field*) connaissant le champs incident (*incident field*). Comme pour le calcul numérique des résonances, on doit borner le domaine de calcul. Une méthode qui semble particulièrement adaptée dans ce cas est la *halfspace matching method*, voir [16].

Un autre point serait de savoir dans quelle mesure on peut calculer le champs diffracté étant donnés une source dans l'un des guides, connaissant les résonances de la cavité.

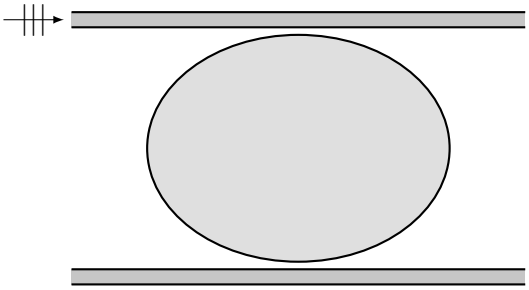


FIGURE 11.1 – Schéma d'un micro résonateur.

Maxwell 3D. Un autre prolongement de ce travail serait de considérer des cavités 3D. Le problème mathématique fait dans ce cas intervenir les équations de Maxwell. On peut se demander si dans ce cadre, on peut obtenir des développements asymptotiques des résonances.

Un premier cas particulier à regarder est le cas d'une sphère avec un indice optique radial car dans ce cas les équations de Maxwell se réduisent à deux équations 1D à l'aide des potentiel de Debye, voir la section 8 de [29]. Ce cas devrait se traiter avec les mêmes techniques que celles employées dans le chapitre 6. Un deuxième cas particulier est le cas de cavité 3D axisymétrique (par exemple : cylindre, cylindre biseauté, etc) car cette situation se réduit à un cadre 2D.

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Notations

Sommaire

A.1 Ensembles 234
A.2 Relations 234
A.3 Fonctions 234
A.4 Espaces 235

Cette annexe constitue un glossaire des notations utilisées.

A.1 Ensembles

- Les ensemble de nombre : $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ les entiers naturels, $\mathbb{Z}$ les entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ les nombres rationnels, $\mathbb{R}$ les nombres réels et $\mathbb{C}$ les nombres complexes.
- Les ensembles : $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.
- $\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid |x| = 1\}$ la sphère de dimension d.
- $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/L\mathbb{Z})^d$ le tore de dimension d et de longueur $L > 0$.
- $A \Subset B$ signifie : il existe K un compact tel que $A \subset K \subset B$.

A.2 Relations

- $f(x) \propto g(x)$ signifie qu'il existe une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que pour tout x, on ait $f(x) = C\, g(x)$.
- $f(x) \lesssim g(x)$ signifie qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout x, on ait $f(x) \leq C\, g(x)$.
- $f(x) = \mathcal{O}_a(g(x))$ signifie que pour x assez proche de a, il existe $C > 0$ tel que $|f(x)| \leq C\, g(x)$, c'est-à-dire que f est majorée asymptotiquement par g quand $x \to a$. On omet l'indice a s'il est évident dans le contexte.
- $f(x) = \mathcal{O}_a(g(x)^{\pm\infty})$ signifie que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $f(x) = \mathcal{O}_a(g(x)^{\pm N})$.

A.3 Fonctions

- Pour une fonction $f : E \to F$ et un sous-ensemble $V \subset E$, $f_{|V}$ est la fonction f restreinte au sous-ensemble V, c'est-à-dire
$$f_{|V} : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}.$$
- $\mathbf{1}_V : E \to \{0, 1\}$ est la fonction caractéristique du sous-ensemble V dans E, c'est-à-dire que pour tout $x \in V$
$$\mathbf{1}_V(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in V \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
- $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ est la fonction signe définie par
$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
- A et B : fonctions de Airy « miroir » définies par $\mathsf{A}(z) = \mathsf{Ai}(-z)$ et $\mathsf{B}(z) = \mathsf{Bi}(-z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- Ψ_j pour $j \in \mathbb{N}$: fonctions de Hermite-Gauss, voir définition C.7 page 252.

A.4 Espaces

Dans ce qui suit, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$. De plus, k désigne un entier naturel ou $+\infty$.

- $\mathcal{C}^k_{\mathrm{c}}(\Omega)$ est l'espace des fonctions k fois continuent différentiables telles que leurs supports soit un compact de Ω.
- $\mathcal{C}^k_{\mathrm{b}}(\Omega)$ est l'espace des fonctions k fois continuent différentiables telles que leurs k dérivées successives soient bornées sur Ω.
- $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathrm{d}\mu)$ est l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable pour la mesure $\mathrm{d}\mu$. C'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathrm{d}\mu)} = \int_\Omega \overline{u}\, v \ \mathrm{d}\mu \qquad\qquad u, v \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathrm{d}\mu).$$

- $\mathrm{H}^k(\Omega, \mathrm{d}\mu)$ est l'espace des fonctions $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mu)$ telles que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-indice de longueur $|\alpha| \leq k$, on ait $\partial^\alpha_x f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mu)$ où les dérivées partielles sont prisent au sens des distributions. C'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{\mathrm{H}^k(\Omega,\mathrm{d}\mu)} = \sum_{|\alpha|\leq k} (\partial^\alpha_x u, \partial^\alpha_x v)_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathrm{d}\mu)} \qquad\qquad u, v \in \mathrm{H}^k(\Omega, \mathrm{d}\mu).$$

- $\mathrm{H}^k_{\mathrm{c}}(\Omega, \mathrm{d}\mu)$ est l'espace des fonctions de $\mathrm{H}^k(\Omega, \mathrm{d}\mu)$ à support compacte.
- La notation $\mathcal{E}(F)$ où F est un fermé de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{E}$ représente n'importe lequel des espaces $\mathcal{C}^k_{\mathrm{c}}$, $\mathcal{C}^k_{\mathrm{b}}$, L^2 ou H^k représente l'ensemble suivant

$$\mathcal{E}(F) \coloneqq \{u_{|F} : u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)\}.$$

- $\mathrm{H}^k_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathrm{d}\mu)$ est l'espace des fonctions f telles que pour toute fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$, on a $\chi\, f \in \mathrm{H}^k(\Omega, \mathrm{d}\mu)$.

Annexe B

Black box scattering

Sommaire

B.1 Définition et premières propriétés 238
B.2 Spectre de l'opérateur P 240
B.3 Cadre général du *Black box scattering* 242
B.4 *Black box scattering* pour l'opérateur P 243
B.5 Cas invariant par rotation 246

Dans cette annexe, on étudie l'opérateur associé au problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (1.5) page 5, ainsi que le cadre général du *black box scattering*.

B.1 Définition et premières propriétés

Hypothèse B.1.

- On considère un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ borné ($d \geq 1$ un entier), de bord $\Gamma = \partial\Omega$ lisse.
- On considère une fonction $n \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ définie par morceaux sur les deux ensembles disjoints $\overline{\Omega}$ et $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$. Sur $\overline{\Omega}$, on suppose que $n_{|\overline{\Omega}} \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ et $n_{|\overline{\Omega}} > 1$. Sur $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$, on suppose que $n_{|\mathbb{R}^d\setminus\overline{\Omega}} \equiv 1$. Les valeurs de la fonction n sur le bord Γ sont celles venant de $n_{|\overline{\Omega}} \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ donc en particulier $n_{|\Gamma} > 1$. À noter que la fonction n est d'inverse borné : $n^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et le bord Γ est l'ensemble des discontinuités de n.

Notation B.2. Le produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et la norme $\|\cdot\|$ sont le produit scalaire et la norme canonique de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$: pour tout $u, v \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$

$$(u,v) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u}\, v \, \mathrm{d}x, \qquad\qquad \|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 \, \mathrm{d}x.$$

On note $\mathrm{d}\check{n}_p(x) \coloneqq n(x)^{p+1}\,\mathrm{d}x$. Le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{d}\check{n}_p}$ et la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{d}\check{n}_p}$ sont définis, pour tout $u, v \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, par

$$(u,v)_{\mathrm{d}\check{n}_p} = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u}\, v \, \mathrm{d}\check{n}_p, \qquad\qquad \|u\|^2_{\mathrm{d}\check{n}_p} = \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 \, \mathrm{d}\check{n}_p.$$

Lemme B.3. *Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{d}\check{n}_p}$ sont équivalentes. Pour tout u dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\min_{\mathbb{R}^d} n^{p+1} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 \, \mathrm{d}\check{n}_p \leq \max_{\mathbb{R}^d} n^{p+1} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 \, \mathrm{d}x$$

avec $\max_{\mathbb{R}^d} n^{p+1} > \min_{\mathbb{R}^d} n^{p+1} > 0$.

Démonstration. La majoration et la minoration sont immédiates car

$$\min_{\mathbb{R}^d} n^{p+1} = \min\left(1, \min_{\overline{\Omega}} n^{p+1}\right),$$
$$\max_{\mathbb{R}^d} n^{p+1} = \max\left(1, \max_{\overline{\Omega}} n^{p+1}\right).$$

□

Définition B.4. Soit $p \in \mathbb{Z}$, on considère l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ muni du produit scalaire

$$(u,v)_{\mathrm{d}\check{n}_p} \coloneqq \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u}\, v \, \mathrm{d}\check{n}_p, \qquad\qquad \text{pour } u, v \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d).$$

On définit l'opérateur P sur le domaine $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d, n^{p-1})$ par

$$\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d, n^{p-1}) \coloneqq \left\{ u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d) \;\middle|\; u_{|\Omega} \in \mathrm{H}^2(\Omega),\, u_{|\mathbb{R}^d\setminus\overline{\Omega}} \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}),\, \left[n^{p-1}\,\partial_\nu u\right]_\Gamma = 0 \right\}$$

$$P \coloneqq -n^{-p-1} \operatorname{div}\left(n^{p-1}\,\nabla\right)$$

où $[\,]_\Gamma$ est l'opérateur de saut à travers Γ défini comme la trace extérieure moins la trace intérieure et $\nu : \Gamma \to \mathbb{S}^{d-1}$ est la normale unitaire sortante par rapport à Ω. On définit également la forme quadratique associée q_P sur le domaine $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ par

$$\begin{aligned} q_P(u,v) &\coloneqq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^2}\,\overline{\nabla u}\cdot\nabla v \;\mathrm{d}\check{n}_p \\ &= \int_\Omega n^{p-1}\,\overline{\nabla u}\cdot\nabla v\;\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\overline{\Omega}} \overline{\nabla u}\cdot\nabla v\;\mathrm{d}x \end{aligned}$$

pour tout $u, v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$.

Remarque B.5. Si $p = +1$, on a $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d, n^{p-1}) = \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d)$. Si $p = -1$, on a $\mathrm{d}\check{n}_p(x) = \mathrm{d}x$.

Proposition B.6. *La forme quadratique $(\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d), q_P)$ possède les propriétés suivantes :*

1. *Le domaine $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ de forme est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$.*
2. *La forme quadratique q_P est symétrique, positive et semi-bornée.*
3. *La forme quadratique q_P est fermée.*

Démonstration. 1. On sait que $\mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ avec la norme $(\cdot,\cdot)$ [19, corollaire 4.23] et donc dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ avec la norme $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{d}\check{n}_p}$ par le lemme B.3 sur l'équivalence des normes. De plus, $\mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace de $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$.

2. La fonction n est à valeurs dans l'intervalle $[1, \max_{\mathbb{R}^d} n]$ donc q_P est symétrique et positive. Et comme q_P est positive, elle est semi-bornée.

3. La forme quadratique $(\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d), q_P)$ est fermée car $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach pour la norme $\sqrt{\|u\|^2_{\mathrm{d}\check{n}_p} + \|\nabla u\|^2_{\mathrm{d}\check{n}_p}}$. □

Proposition B.7. *L'opérateur $(\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d, n^{p-1}), P)$ est auto-adjoint et positif.*

Démonstration. On commence par remarquer que pour tout $u, v \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d, n^{p-1})$, on a

$$\begin{aligned} q_P(u,v) &= \int_{\mathbb{R}^2} n^{p-1}\,\overline{\nabla u}\cdot\nabla v\;\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u}\,Pv\;\mathrm{d}\check{n}_p - \int_\Gamma \overline{u}\,\underbrace{\left[n^{p-1}\partial_\nu v\right]_\Gamma}_{=0}\,\mathrm{d}\gamma \\ &= (u, Pv)_{\mathrm{d}\check{n}_p}. \end{aligned}$$

On en déduit que q_P est la forme quadratique associée à P et la positivité de P vient de celle de q_P. D'après la propositions B.6, la forme quadratique $(\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d), q_P)$ est semi-bornée et fermée, donc le théorème VIII.15 de [82] indique qu'il existe un unique opérateur $(\mathcal{D}(A), A)$ auto-adjoint dont c'est la forme quadratique où

$$\mathcal{D}(A) = \left\{u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d) \mid Pu \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)\right\}.$$

Ainsi, A est une extension de P. Il nous reste à montrer que $\mathcal{D}(A) \subset \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d, n^{p-1})$. Soit $u \in \mathcal{D}(A)$. On a en particulier $-\operatorname{div}(n^{p-1}\nabla u) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. D'après le lemme 4.19

de [64], on a $[n^{p-1}\partial_\nu u]_\Gamma = 0$. D'après le théorème 4.20 de [64], on a u appartient à $\mathrm{H}^2(B(0,R+2), n^{p-1})$ pour $R > \sup_\Omega |x|$. L'opérateur $-\operatorname{div}(n^{p-1}\nabla)$ est bien fortement elliptique, voir la sous-section *Strongly elliptic operators* de la section 4 de [64], car pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $\eta \in \mathbb{C}$, on a

$$\operatorname{Re}\left(n(x)^{p-1}\,\overline{\eta\xi}\cdot\eta\xi\right) \geq \min_{\mathbb{R}^d} n^{p-1}\,|\eta|^2\,|\xi|^2.$$

On prend $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $\chi \equiv 0$ sur $B(0,R)$ et $\chi \equiv 1$ sur $\mathbb{R}^d \setminus B(0,R+1)$. On a $u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^q)$ et $Pu \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^q)$ d'où $\chi u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et $\Delta(\chi u) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ car $P(\chi u) = -\Delta(\chi u)$. Ensuite, on applique l'argument classique avec la transformée de Fourier : pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $1 \leq i,j \leq d$, on a

$$|\xi_i\,\xi_j\,\mathcal{F}(\chi u)| \leq |\xi|^2\,\mathcal{F}(\chi u) = \mathcal{F}(-\Delta(\chi u)).$$

Donc $\chi u \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d)$ et finalement $u \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d, n^{p-1})$. □

B.2 Spectre de l'opérateur P

Définition B.8. Soit $(D(A), A)$ un opérateur de E dans F où E et F sont des espaces de Banach. On définit l'ensemble résolvant de A :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda\,\mathrm{I} \text{ est inversible, d'inverse borné}\}.$$

On définit le spectre de A :

$$\operatorname{sp}(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

On définit le spectre essentiel de A :

$$\operatorname{sp}_{\text{ess}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda\,\mathrm{I} \text{ n'est pas Fredholm}\}.$$

On rappelle le critère des suites de Weyl pour caractériser le spectre essentiel d'opérateurs auto-adjoints.

Propriété B.9. *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $(D(A), A)$ un opérateur auto-adjoint. On a $\lambda \in \operatorname{sp}_{\text{ess}}(A)$ si, et seulement si, il existe une suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $D(A)$ telle que :*

1. $\|u_m\|_{\mathcal{H}} = 1$,
2. $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* 0 *dans* $\mathcal{H}$,
3. $((A - \lambda\,\mathrm{I})u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{H}$.

Démonstration. Voir la démonstration du théorème 7.2 dans [46]. □

Proposition B.10. *Pour $(\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d, n^{p-1}), P)$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ où P est défini à la définition B.4, on a*

$$\operatorname{sp}(P) = \operatorname{sp}_{\text{ess}}(P) = \mathbb{R}_+.$$

Démonstration. On sait d'après la proposition B.7 que $(\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d, n^{p-1}), P)$ est auto-adjoint et positif, donc $\mathrm{sp}(P) \subset \mathbb{R}_+$. Réciproquement, on va utiliser le critère des suites de Weyl pour montrer que $\mathbb{R}_+ \subset \mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(P)$. On rappelle que l'ouvert Ω est borné donc qu'il existe $R_\Omega > 0$ tel que $\overline{\Omega} \subset B(0, R_\Omega)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On considère la suite de fonctions $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$u_m(x) = m^{-\frac{d}{2}}\, \chi\left(\frac{x}{m}\right)\, \mathsf{e}^{\mathsf{i}\xi\cdot x}$$

où $\xi \in \mathbb{R}^d$ tel que $|\xi|^2 = \lambda$ et $\chi \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^\infty\left(\mathbb{R}^d \setminus \overline{B(0, R_\Omega)}\right)$ est non identiquement nulle et normée $\|\chi\|_{\mathrm{d}\check{n}_p} = 1$. On a bien $u_m \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d, n^{p-1})$ car le support de u_m est dans $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$. La suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est normée, car

$$\|u_m\|^2_{\mathrm{d}\check{n}_p} = m^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left|\chi\left(\frac{x}{m}\right)\right|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} |\chi(y)|^2\, \mathrm{d}y = 1.$$

La suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers 0, car pour tout $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned} |\,\langle f, u_m\rangle\,| &\leq m^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \left|\chi\left(\frac{x}{m}\right)\right| \mathrm{d}x \\ &\leq m^{-\frac{d}{2}}\, \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)}\, \|\chi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

d'où $\langle f, u_m\rangle$ converge vers 0. Puis, par densité, on a $\langle f, u_m\rangle$ qui converge vers 0 pour $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Donc u_m converge faiblement vers 0 dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Il reste a montrer la troisième condition de la propriété B.9. On commence par remarquer que comme le support de χ est dans $\mathbb{R}^d \setminus \overline{B(0, R_\Omega)}$, cela implique que le support de u_m est dans $\mathbb{R}^d \setminus \overline{B(0, mR_\Omega)}$ pour tout $m \geq 1$. On en déduit que $\mathrm{supp}(u_m) \cap \Omega = \varnothing$. On a

$$\begin{aligned} (P-\lambda)u_m(x) &= -\Delta u_m(x) - \lambda u_m(x) \\ &= \frac{-\mathsf{e}^{\mathsf{i}\xi\cdot x}}{m^{\frac{\ell}{2}}} \left(\frac{2\mathsf{i}}{m}\xi\cdot\nabla\chi\left(\frac{x}{m}\right) + \frac{1}{m^2}\Delta\chi\left(\frac{x}{m}\right)\right) \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\|(P-\lambda)u_m\|_{\mathrm{d}\check{n}_p} \leq \frac{\|\xi\cdot\nabla\chi\|}{m} + \frac{\|\Delta\chi\|}{m^2}.$$

Cela implique que $(P-\lambda)u_m$ converge vers 0 dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{d}\check{n}_p}$. Finalement, on a la succession d'inclusions $\mathbb{R}_+ \subset \mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(P) \subset \mathrm{sp}(P) \subset \mathbb{R}_+$. □

Corollaire B.11. *On considère $(\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d, n^{p-1}), \mu P)$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ avec $\mu \in \mathbb{C}^*$ et l'opérateur P est défini à la définition B.4. On a*

$$\mathrm{sp}(\mu P) = \mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(\mu P) = \mu\mathbb{R}_+.$$

Lemme B.12. *Soient $k, \ell \in \mathbb{C}$, $u, v \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d, n^{p-1})$ et $R, S \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ tels que*

$$\begin{aligned} -\,\mathrm{div}\left(\check{n}^{p-1}\,\nabla u\right) - k^2\, n^{p+1}\, u &= R, \\ -\,\mathrm{div}\left(\check{n}^{p-1}\,\nabla v\right) - \ell^2\, n^{p+1}\, v &= S. \end{aligned}$$

On a la relation suivante

$$\left(k^2 - \ell^2\right) \int_{\mathbb{R}^d} u\, v\, \mathrm{d}\check{n}_p = \int_{\mathbb{R}^d} (u\, S - R\, v)\, \mathrm{d}x.$$

Démonstration. Le résultat se prouve par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} k^2 \int_{\mathbb{R}^d} u\, v \, \mathrm{d}\check{n}_p &= \int_{\mathbb{R}^d} k^2\, n^{p+1}\, u\, v \, \mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}\left(n^{p-1}\, \nabla u\right) v \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^d} R\, v \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} n^{p-1}\, \nabla u\, \nabla v \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^d} R\, v \, \mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} u \, \operatorname{div}\left(n^{p-1} \nabla v\right) \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^d} R\, v \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u\, \ell^2 n^{p+1} v \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} (u\, S - R\, v)\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat attendu. □

B.3 Cadre général du *Black box scattering*

On décrit dans cette section le cadre de la théorie du *Black box scattering* développé dans [90] et généralisé dans [89]. On veut utiliser des résultats de cette théorie pour l'opérateur P, défini à la définition B.4, qui est une perturbation à support compact du laplacien.

On écrit les hypothèses pour des opérateurs non semi-classiques. Soit $d \geq 1$ un entier et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe de dimension d avec la décomposition orthogonale suivante :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{R_0} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d \setminus B_0)$$

où $B_0 = B(0, R_0)$ et $R_0 > 0$ est fixé. Soit un opérateur auto-adjoint $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ de domaine $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{H}$. On suppose les hypothèses suivantes.

H1 : Il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{D}$, on ait

$$\left\| \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus B_0}\, u \right\|_{\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d \setminus B_0)} \leq C \left\| (P + \mathsf{i}) u \right\|_{\mathcal{H}}.$$

H2 : L'opérateur $\mathbf{1}_{B_0}(P + \mathsf{i})^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_{R_0}$ est compact.

H3 : Il existe un opérateur Q symétrique sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus B_0}(Pu) = Q(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus B_0}\, u) \qquad \text{pour } u \in \mathcal{D}.$$

L'opérateur Q est donné par

$$Qv = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x)\, \partial_x^\alpha v \qquad \text{pour } v \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d),$$

avec les conditions suivantes :

a) $x \mapsto a_\alpha(x) \in \mathcal{C}_{\mathrm{b}}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

b) Il existe $c > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\sum_{|\alpha| = 2} a_\alpha(x) \xi^\alpha \geq \frac{1}{c} |\xi|^2.$$

c) Quand $|x| \to +\infty$, on a

$$\sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x)\xi^\alpha \longrightarrow \xi^2. \tag{B.1}$$

H4 : Il existe $\theta \in [0,\pi[$, $\varepsilon > 0$ et $R > R_0$ tels que les coefficients $a_\alpha(x)$ de Q s'étendent de manière holomorphe à

$$\left\{r\omega \mid \omega \in \mathbb{C}^d,\, \mathrm{dist}(\omega, \mathbb{S}^{d-1}) < \varepsilon,\, r \in \mathbb{C},\, |r| > R,\, \arg(r) \in [-\varepsilon, \theta+\varepsilon[\right\}$$

et (B.1) reste vraie dans cet ensemble.

H5 : À partir de l'opérateur P, on peut construire un opérateur auto-adjoint $P^\sharp$ sur

$$\mathcal{H}^\sharp = \mathcal{H}_{R_0} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{L}^2((\mathbb{R}/R\mathbb{Z})^d \setminus B_0)$$

où $R \geq R_0$ tel que

$$N(P^\sharp, [-\lambda, \lambda]) = \mathcal{O}\left(\lambda^{\frac{d_5^\sharp}{2}}\right) \tag{B.2}$$

où $N(P^\sharp, I)$ désigne le nombre de valeurs propres de $P^\sharp$ dans l'intervalle I, pour tout $\lambda \geq 1$ et pour un entier $d_5^\sharp$ tel que $d_5^\sharp \geq d$.

Définition B.13. On définit les espaces suivants

$$\mathcal{H}_{\mathrm{c}} \coloneqq \left\{u \in \mathcal{H} \mid u_{|\mathbb{R}^d \setminus B_0} \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d \setminus B_0)\right\}$$
$$\mathcal{D}_{\mathrm{loc}} \coloneqq \left\{u \in \mathcal{H}_{\mathrm{loc}} \mid \chi u \in \mathcal{D},\, \forall \chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d),\, \chi_{|B_0} \equiv 1\right\}.$$

Définition-Propriété B.14. La résolvante $R_P(k) = (P-k)^{-1}$ de l'opérateur P possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, si d est impair, et au plan logarithmique $\exp^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, si d est pair, de $\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ dans $\mathcal{D}_{\mathrm{loc}}$. Les pôles de la résolvante sont appelés les résonances de P et cet ensemble est noté $\mathrm{Res}(P)$. On peut associer à chaque $k \in \mathrm{Res}(P)$ une multiplicité $m_k \geq 1$ et m_k modes résonnants.

Démonstration. Ceci résulte des théorèmes 4.4 et 4.7 et des définitions 4.6 et 4.8 du livre de S. Dyatlov and M. Zworski [33]. □

B.4 *Black box scattering* pour l'opérateur P

On se place sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. On considère $R_\Omega > \sup_{x\in\Omega}|x|$ et on note $B_\Omega = B(0, R_\Omega)$ la boule ouvert de centre 0 et de rayon R_Ω telle que $\Omega \subset B(0, R_\Omega)$. On note également $\mathcal{H}_\Omega = \mathrm{L}^2(B_\Omega)$.

Lemme B.15. *L'opérateur* $P = -n^{-p-1}\,\mathrm{div}\,(n^{p-1}\,\nabla)$ *de domaine* $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d, n^{p-1})$ *sur* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *vérifie les hypothèses (H1) à (H5).*

Démonstration. Soit $R_\Omega > \sup_{x\in\Omega}|x|$. L'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ se scinde de la manière suivante

$$\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) = \mathrm{L}^2(B(0,R_\Omega)) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d \setminus B_\Omega)$$

L'opérateur $(\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d, n^{p-1}), P)$ est auto-adjoint sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

(H1) : on calcule

$$\|Pu + \mathsf{i}u\|^2_{\mathrm{d}\check{n}_p} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\check{n}^{p+1}} \left|\operatorname{div}\left(\check{n}^{p-1}\nabla u\right)\right|^2 \mathrm{d}x + 2\operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}^d} u \operatorname{div}\left(\check{n}^{p-1}\nabla \overline{u}\right) \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 \check{n}^{p+1}\,\mathrm{d}x.$$

À l'aide d'une intégration par parties, on a

$$\operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}^d} u \operatorname{div}\left(\check{n}^{p-1}\nabla \overline{u}\right) \mathrm{d}x = -\operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}^d} \check{n}^{p-1}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

De plus, on a les estimations suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\check{n}^{p+1}} \left|\operatorname{div}\left(\check{n}^{p-1}\nabla u\right)\right|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\Omega} |\Delta u|^2\,\mathrm{d}x + \int_{B_0} \frac{1}{\check{n}^{p+1}} \left|\operatorname{div}\left(\check{n}^{p-1}\nabla u\right)\right|^2 \mathrm{d}x$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^2\check{n}^{p+1}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\Omega} |u|^2\,\mathrm{d}x + \int_{B_0} |u|^2\check{n}^{p+1}\,\mathrm{d}x,$$

donc, on obtient

$$\begin{aligned}\|Pu + \mathsf{i}u\|^2_{\mathrm{d}\check{n}_p} &\geq \|\Delta u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d\setminus B_\Omega)} + \|u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d\setminus B_0)} \\ &\geq \|u\|^2_{\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d\setminus B_\Omega)}.\end{aligned}$$

(H2) : le complexe $-\mathsf{i}$ est dans la résolvante de P donc $(P+\mathsf{i})^{-1} : \mathcal{H} \to \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d, n^{p-1})$. On en déduit que $\mathbf{1}_{B_0}(P+\mathsf{i})^{-1} : \mathcal{H} \to \mathrm{H}^2(B_0, \mathrm{d}\check{N}_p) \Subset \mathcal{H}_0$ est compact d'après le théorème de Rellich–Kondrachov.

(H3) et (H4) : ces hypothèses sont bien satisfaites car $Q = -\Delta$ et son symbole est $|\xi|^2$.

(H5) : on pose $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/R\mathbb{Z})^d$ avec $R > 2R_0$. L'opérateur $P^\sharp$ sur le domaine $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^d, n^{p-1})$ est auto-adjoint, positif, de domaine de forme $\mathrm{H}^1(\mathbb{T}^d)$ et à résolvante compacte. Son spectre est donc uniquement composé de valeurs propres de multiplicité finie. On a la caractérisation des valeurs propres $\lambda_j(P^\sharp)$ suivante que l'on trouve dans [43, théorème 11.12]

$$\lambda_j(P^\sharp) = \sup_{\substack{V\subset \mathrm{H}^1(\mathbb{T}^d)\\ \dim(V)<j}} \inf_{u\in V^\perp} \frac{\int_{\mathbb{T}^d} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\check{n}_p}{\int_{\mathbb{T}^d} |u|^2\,\mathrm{d}\check{n}_p}.$$

On a également

$$\lambda_j(-\Delta^\sharp) = \sup_{\substack{V\subset \mathrm{H}^1(\mathbb{T}^d)\\ \dim(V)<j}} \inf_{u\in V^\perp} \frac{\int_{\mathbb{T}^d} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{T}^2} |u|^2\,\mathrm{d}x}.$$

Les deux égalités précédentes fournissent l'estimation suivante :

$$\lambda_j(P^\sharp) \geq c\lambda_j(-\Delta^\sharp)$$

où $c = \frac{\min_{\mathbb{R}^d} n^{p-1}}{\max_{\mathbb{R}^d} n^{p+1}}$. Soit $\lambda \geq 1$; pour tout j tel que $\lambda_j(P^\sharp) \leq \lambda$, on a $c\lambda_j(-\Delta^\sharp) \leq \lambda$ donc le nombre de valeurs propres de $P^\sharp$ dans $[-\lambda, \lambda]$ vérifie :

$$N(P^\sharp, [-\lambda, \lambda]) \leq N\left(-\Delta^\sharp, \left[-\frac{\lambda}{c}, \frac{\lambda}{c}\right]\right).$$

Or, on connaît les valeurs propres du laplacien sur le tore. Il s'agit des réels $\frac{\pi^2}{R^2}|a|^2$ pour $a \in \mathbb{N}^d$ qui sont de multiplicité au plus 2^d à a fixé. On en déduit que

$$\begin{aligned} N\left(-\Delta^\sharp, \left[-\frac{\lambda}{c}, \frac{\lambda}{c}\right]\right) &\leq 2^d \operatorname{Card}\left\{a \in \mathbb{N}^d \mid \frac{\pi^2}{R^2}|a|^2 \leq \frac{\lambda}{c}\right\} \\ &\lesssim \operatorname{Card}\left\{a \in \mathbb{N}^d \mid |a| \leq \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{R\sqrt{c}}\right\} \\ &\lesssim \operatorname{Card}\left\{a \in \mathbb{N}^d \mid a_i \leq \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{R\sqrt{c}},\ 1 \leq i \leq d\right\} \\ &\lesssim \left(\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{R\sqrt{c}} + 1\right)^d \\ &\lesssim \lambda^{\frac{d}{2}} \end{aligned}$$

donc

$$N(P^\sharp, [-\lambda, \lambda]) = \mathcal{O}\left(\lambda^{\frac{d}{2}}\right)$$

d'où $d_5^\sharp = d$. □

Définition B.16. On définit l'espace suivant

$$\mathrm{H}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, n^{p-1}) \coloneqq \left\{u \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \mid \forall \chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d),\ \chi u \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d, n^{p-1})\right\}.$$

On note $\mathrm{Res}(P)$ les résonances de l'opérateur P et pour $k \in \mathrm{Res}(P)$, les modes résonances associés sont dans $\mathrm{H}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, n^{p-1})$.

Lemme B.17. *Soit $k \in \mathrm{Res}(P)$ et u un mode résonnant associé. Le mode u s'exprime, en coordonnées polaires, sous la forme suivante : pour tout $r \geq R_\Omega$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$*

$$u(r, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m\, \mathsf{H}^{(1)}_m(kr)\, \mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}$$

où $c_m \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Démonstration. D'après le théorème 4.9 de [33], il existe $g \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^2)$ tel que pour $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B(0, R_\Omega)$

$$u(x) = \frac{\mathsf{i}}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \mathsf{H}^{(1)}_0(k|x-y|) g(y)\, \mathrm{d}y.$$

On appelle F le support de g et v la fonction telle que

$$v(x) = \frac{\mathsf{i}}{4} \int_F \mathsf{H}^{(1)}_0(k|x-y|) g(y)\, \mathrm{d}y$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^2$. Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, on a

$$-\Delta(u - v) - k^2(v - u) = g$$

et $u \equiv v$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, R_\Omega)$ donc $F \subset B(0, R_\Omega)$.

D'après la formule (3.88) de [28], on a pour $|x| > |y| > 0$ et $\theta = \arccos\left(\frac{x\cdot y}{|x|\,|y|}\right)$

$$\mathsf{H}_0^{(1)}(k|x-y|) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_m^{(1)}(k|x|)\ \mathsf{J}_m(k|y|)\ \cos(m\theta)$$

et cette série est absolument convergente sur tout compact. En utilisant la relation $2\cos(m\theta) = \mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta} + \mathsf{e}^{-\mathsf{i}m\theta}$ et en réarrangeant les sommes, on obtient

$$\mathsf{H}_0^{(1)}(k|x-y|) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_m^{(1)}(k|x|)\ \mathsf{J}_m(k|y|)\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}.$$

Finalement, en posant $c_m = \int_F \mathsf{J}_m(k|y|)\,g(y)\,\mathrm{d}y$, on a, en coordonnées polaires pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B(0, R_\Omega)$

$$u(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\ \mathsf{H}_m^{(1)}(kr)\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}.$$

□

B.5 Cas invariant par rotation

On s'intéresse dans cette section à la réduction radiale de l'opérateur P défini à la définition B.4 quand les données sont invariant par rotation. On se place dans le plan et on suppose que la cavité $\Omega =]\alpha, \beta[\times\mathbb{S}^1$ est un disque avec $0 = \alpha < \beta < +\infty$ ou un anneau avec $0 < \alpha < \beta < +\infty$. L'indice optique est supposé ne dépendre que de la variable radiale. Par abus de notation, on conserve la même notation pour l'indice optique de sorte que pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $n(\mathbf{x}) = n(r)$ où $r = |\mathbf{x}|$. Les hypothèses sur la fonction n sont : $n_{|[\alpha,\beta]} \in \mathcal{C}^\infty([\alpha,\beta])$, $n_{|[\alpha,\beta]} > 1$ et $n_{|[0,+\infty[\setminus[\alpha,\beta]} \equiv 1$. On définit l'espace

$$D_{\mathrm{loc}}(P) \coloneqq \left\{u \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) \mid \forall \chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^2),\ \chi u \in D(P)\right\}$$

où $D(P) = \{u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2) \mid Pu \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)\}$ est le domaine maximal de l'opérateur non borné $P = -n^{-p-1}\,\mathrm{div}\,(n^{p-1}\,\nabla)$. On rappelle l'énoncé du problème $(\mathcal{P}_p)$: trouver les couples $(k, u) \in \mathbb{C} \times D_{\mathrm{loc}}(P)$ avec u non nulle tels que

$$(\mathcal{P}_p)\ \begin{cases} -\,\mathrm{div}\,(n^{p-1}\,\nabla u) = k^2\,n^{p+1}\,u & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \\ u(\mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\ \mathsf{H}_m^{(1)}(kr)\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta} & r \geq \beta \text{ et } \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

où $(c_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. La deuxième ligne est la condition rayonnement. L'ensemble des k tels qu'il existe u non nulle et (k, u) solution de $(\mathcal{P}_p)$ est appelé les résonances du problème $(\mathcal{P}_p)$ et est noté $\mathrm{Res}(\mathcal{P}_p)$.

Maintenant on va réduire ce problème 2D à une famille de problème 1D sur la variable radials grâce à la transformée de Fourier angulaire. À $r > 0$ fixé, la fonction $\theta \mapsto u(r\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta})$ est périodique et dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. On peut calculer ses coefficients de Fourier, notés $(w_m(r))_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, par la formule

$$w_m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta})\,\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

On a $u(r\mathsf{e}^{\mathsf{i}\theta}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} w_m(r)\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta}$ pour $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On écrit l'EDP de $(\mathcal{P}_p)$ en coordonnées polaires. On obtient

$$-\frac{1}{r}\partial_r\left(r\, n^{p-1}\,\partial_r u\right) - \frac{1}{r^2}\, n^{p-1}\,\partial^2_{\theta\theta} u - k^2\, n^{p+1}\, u = 0$$

ce qui donne la relation suivante sur les coefficients de Fourier

$$-\frac{1}{r}\left(r\, n^{p-1}\, w_m'\right)' + \frac{m^2}{r^2}\, n^{p-1}\, w_m - k^2\, n^{p+1}\, w_m = 0.$$

La conditions de saut sur la dérivée normale donne $[n^{p-1}\, w_m']_{\partial\Omega\setminus\{0\}} = 0$ car $\nu(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))^\intercal$. La condition de saut sur la fonction donne directement $[w_m]_{\partial\Omega\setminus\{0\}} = 0$. La condition de rayonnement est déjà écrite sous forme de série de Fourier.

Similairement à ce qui a été fait précédemment, on définit l'espace

$$D_{\mathrm{loc}}(\widehat{P}_m) \coloneqq \left\{w \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(]0,+\infty[) \mid \forall \chi \in \mathcal{C}^\infty([0,+\infty[),\ \chi w \in D(\widehat{P}_m)\right\}$$

où $D(\widehat{P}_m) = \left\{w \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[, r\,\mathrm{d}r) \mid \widehat{P}_m w \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[, r\,\mathrm{d}r)\right\}$ est le domaine de l'opérateur $\widehat{P}_m = -n^{-p-1}\partial_r\left(r\, n^{p-1}\,\partial_r\right) + \frac{m^2}{r^2\, n^2}$. On définit la suite de problèmes $(\mathcal{R}_p(m))$ indicée par $p \in \{\pm 1\}$ et $m \in \mathbb{Z}$: trouver les couples $(k, w) \in \mathbb{C} \times D(\widehat{P}_m)$ avec w non nulle tels que

$$(\mathcal{R}_p(m)) \begin{cases} -\dfrac{1}{r}\left(r\, n^{p-1} w'\right)' + \dfrac{m^2}{r^2} n^{p-1}\, w = k^2\, n^{p+1}\, w & \forall r \in]0,+\infty[\setminus]\alpha,\beta[\\ w(r) \propto \mathsf{H}^{(1)}_m(kr) & \forall r \geq \beta \end{cases} \tag{B.3}$$

où la notation $\propto$ signifie « égal à une constant multiplicative près ». De manière similaire, on note $\mathrm{Res}(\mathcal{R}_p(m))$ l'ensemble des résonances k de $(\mathcal{R}_p(m))$.

Le lemme suivant donne la correspondance entre les résonances du problème 2D $(\mathcal{P}_p)$ et celles de la famille de problèmes 1D $(\mathcal{R}_p(m))$.

Lemme B.18. *On a la relation suivante entre les résonances de $(\mathcal{P}_p)$ et celles de $(\mathcal{R}_p(m))$*

$$\mathrm{Res}(\mathcal{P}_p) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{Res}(\mathcal{R}_p(m)).$$

Démonstration. On démontre l'égalité par double inclusion. Soit $k \in \mathrm{Res}(\mathcal{P}_p)$; il existe $u \in D_{\mathrm{loc}}(P)$ une fonction non nulle associée à la résonances k. On fait une décomposition de Fourier de u. Pour tout $r > 0$, il existe une suite $(w_m(r))_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ telle que

$$u(r,\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} w_m(r)\, \mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta} \qquad\qquad \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Comme u est non nul, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $w_m(\beta)$ est non nul. Vérifions que (k, w_m) est une solution de $(\mathcal{R}_p(m))$. On a directement que $\widehat{P}_m w_m = k\, w_m$.

Réciproquement, soit $m \in \mathbb{Z}$ et $k_m \in \mathrm{Res}(\mathcal{R}_p(m))$. Il existe un mode u_m non nul associé à k_m appartenant à l'espace $D_{\mathrm{loc}}(\widehat{P}_m)$. Le couple $(k_m, (r,\theta) \mapsto u_m(r)\mathsf{e}^{\mathsf{i}m\theta})$ est une résonances de P. □

Remarque B.19. Le problème $(\mathcal{R}_p(m))$ ne dépend que de m^2 et de $\mathsf{H}^{(1)}_{-m} = (-1)^m\, \mathsf{H}^{(1)}_m$ donc pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{Res}(\mathcal{R}_p(-m)) = \mathrm{Res}(\mathcal{R}_p(m)).$$

Annexe C

Lemmes techniques pour la construction des quasi-résonances

Sommaire

C.1 Équation différentielle et fonction exponentielle 250
C.2 Équation différentielle d'Airy 250
C.3 Oscillateur Harmonique 252
C.4 Sommation de Borel 255

Cette annexe est constituée de définitions et de lemmes techniques qui servent dans la partie II à la construction des quasi-résonances et des quasi-modes associés. On note $\mathrm{D} = \mathrm{i}\partial_x$, I l'identité et X la multiplication par x.

C.1 Équation différentielle et fonction exponentielle

Lemme C.1. *On a les propriétés suivantes*

- $\mathrm{Ker}(\mathrm{D}^2 + \mathrm{I}) = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto \mathsf{e}^{-x}, x \mapsto \mathsf{e}^{x})$,
- *Pour tout* $d \in \mathbb{N}$, $\mathrm{D}^2 + \mathrm{I}$ *est une bijection de* E *dans* F *où*

$$E = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto x\mathsf{e}^{-x}, \dots, x \mapsto x^{d+1}\mathsf{e}^{-x}\right),$$
$$F = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \mathsf{e}^{-x}, \dots, x \mapsto x^{d}\mathsf{e}^{-x}\right).$$

Démonstration. Le premier point se démontre simplement en cherchant une base de solutions de l'équation différentielle homogène $-w'' + w = 0$. Pour le deuxième point, on a les expressions suivantes

$$(\mathrm{D}^2 + \mathrm{I})\left[x\mathsf{e}^{-x}\right] = -2\,\mathsf{e}^{-x},$$
$$(\mathrm{D}^2 + \mathrm{I})\left[x^{\ell}\mathsf{e}^{-x}\right] = \ell(\ell-1)\,x^{\ell-2}\mathsf{e}^{-x} - 2\ell\,x^{\ell-1}\mathsf{e}^{-x} \qquad \ell \geq 2.$$

La matrice de $\mathrm{D}^2 + \mathrm{I}$, en considérant les bases de E et F proposées, est triangulaire supérieure de déterminant $(-2)^{d+1}(d+1)!$, donc inversible. □

C.2 Équation différentielle d'Airy

On note $\mathsf{A}(x) = \mathsf{Ai}(-x)$ et $\mathsf{B}(x) = \mathsf{Bi}(-x)$ ou Ai et Bi sont les fonctions de Airy.

Lemme C.2. *On a les propriétés suivantes*

- $\mathrm{Ker}(\mathrm{D}^2 - \mathrm{X}) = \mathrm{Vect}\,(\mathsf{A}, \mathsf{B})$,
- *Pour tout* $d \in \mathbb{N}$, $\mathrm{D}^2 - \mathrm{X}$ *est une bijection de* E *dans* F *où*

$$E = \mathrm{Vect}\left(\mathsf{A}', \mathrm{X}\,\mathsf{A}, \mathrm{X}\,\mathsf{A}', \dots, \mathrm{X}^{d+1}\,\mathsf{A}, \mathrm{X}^{d+1}\,\mathsf{A}'\right),$$
$$F = \mathrm{Vect}\left(\mathsf{A}, \mathsf{A}', \dots, \mathrm{X}^{d}\,\mathsf{A}, \mathrm{X}^{d}\,\mathsf{A}', \mathrm{X}^{d+1}\,\mathsf{A}\right).$$

Démonstration. Le premier point découle directement de la définition des fonctions de Airy [74, section 9.2(i)]. Pour le deuxième point, on a les expressions suivantes :

$$(\mathrm{D}^2 - \mathrm{X})\left[\mathsf{A}'\right] = \mathsf{A},$$
$$(\mathrm{D}^2 - \mathrm{X})\left[\mathrm{X}\,\mathsf{A}\right] = -2\,\mathsf{A}',$$
$$(\mathrm{D}^2 - \mathrm{X})\left[\mathrm{X}\,\mathsf{A}'\right] = 3\,\mathrm{X}\,\mathsf{A},$$
$$(\mathrm{D}^2 - \mathrm{X})\left[\mathrm{X}^{\ell}\,\mathsf{A}\right] = -\ell(\ell-1)\;\mathrm{X}^{\ell-2}\,\mathsf{A} - 2\ell\;\mathrm{X}^{\ell-1}\,\mathsf{A}', \qquad \ell \geq 2,$$
$$(\mathrm{D}^2 - \mathrm{X})\left[\mathrm{X}^{\ell}\,\mathsf{A}'\right] = -\ell(\ell-1)\;\mathrm{X}^{\ell-2}\,\mathsf{A}' + (2\ell+1)\;\mathrm{X}^{\ell}\,\mathsf{A}, \qquad \ell \geq 2.$$

La matrice $(\mathrm{D}^2 - \mathrm{X})$, en considérant les bases de E et F proposées, est triangulaire supérieure de déterminant $(-1)^{d+1}(2d+3)!$, donc inversible. □

Lemme C.3. *On a les équivalences suivantes quand $x \to -\infty$:*

$$\mathsf{A}(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}|x|^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}\right),$$
$$\mathsf{A}'(x) \sim -\frac{|x|^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}\right),$$
$$\mathsf{B}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{\frac{1}{4}}} \exp\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}\right).$$

Démonstration. Voir la section 11.1 de [73]. □

Lemme C.4. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_{-\infty}^{\alpha} \mathsf{A}(x)^2 \,\mathrm{d}x = \mathsf{A}'(\alpha)^2 + \alpha\,\mathsf{A}(\alpha)^2,$$
$$\int_{-\infty}^{\alpha} \mathsf{A}'(x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(2\,\mathsf{A}'(\alpha)\,\mathsf{A}(\alpha) + \alpha\,\mathsf{A}'(\alpha)^2 + \alpha^2\,\mathsf{A}(\alpha)^2\right).$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$\mathsf{A}^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathsf{A}'^2 + x\,\mathsf{A}^2\right),$$
$$\mathsf{A}'^2 = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2\,\mathsf{A}'\,\mathsf{A} + x\mathsf{A}'^2 + x^2\,\mathsf{A}^2\right).$$

□

Notation C.5. Pour $j \in \mathbb{N}$, on note a_j (respectivement a'_j) les zéros de A (respectivement A') numérotés dans l'ordre croissant.

Sur la figure C.1, on a représenté les graphes de A et A'.

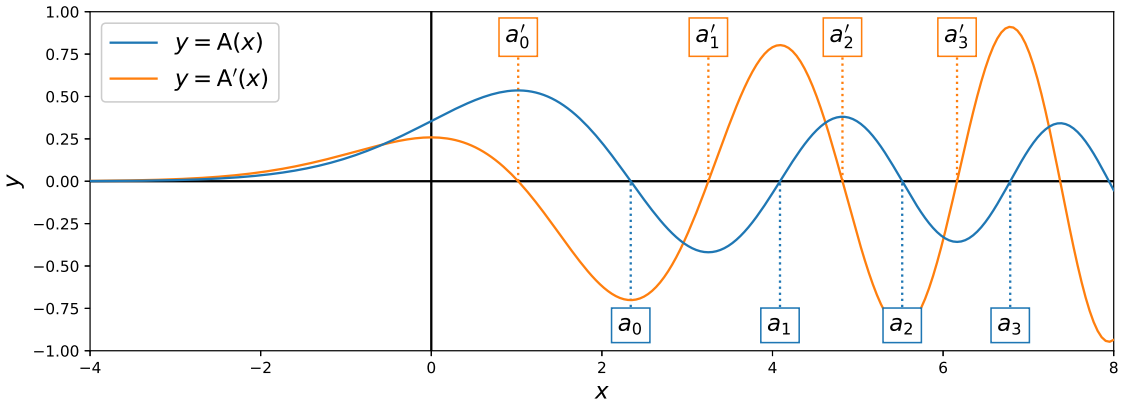


FIGURE C.1 – Graphes des fonctions A et A' et localisation des zéros de A et A'.

Lemme C.6. *Le spectre de l'opérateur $\mathrm{D}^2 - \mathrm{X}$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-^*)$ avec une condition de Dirichlet homogène en 0 est composé uniquement de valeurs propres de multiplicités 1. Les valeurs propres λ_j et vecteurs propres u_j associés sont donnés, pour tout $j \in \mathbb{N}$, par*

$$\lambda_j = a_j$$
$$u_j(x) = \mathsf{A}(a_j + x)$$

où les $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont les zéros de la fonction d'Airy miroir A définis en C.5.

Démonstration. Pour la description du spectre de l'opérateur $\mathrm{D}^2 - \mathrm{X}$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-^*)$ avec une condition de Dirichlet homogène en 0, on purra consulter le chapitre 2 de [13]. Ensuite, on remarque que les fonctions $x \mapsto \mathsf{Ai}(-a_j - x)$ vérifient l'équation différentielle $-u''(x) - xu(x) = a_j u(x)$ et la condition $u(0) = 0$, voir le chapitre 9 de [74]. □

C.3 Oscillateur Harmonique

Définition-Propriété C.7. Les valeurs propres λ_j et vecteurs propres Ψ_j de l'opérateur $\mathrm{D}^2 + \mathrm{X}^2$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ sont donnés, pour tout $j \in \mathbb{N}$, par

$$\begin{aligned} \lambda_j &= 2j+1 \\ \Psi_j(x) &= \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{2^j j!}} H_j(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

où H_j est le j-ième polynôme de Hermite défini par

$$\begin{aligned} H_j(x) &= (-1)^j \, \mathsf{e}^{x^2} \, \partial_x^j \left(\mathsf{e}^{-x^2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} (-1)^k \, \frac{j!}{k!(n-2j)!} \, (2x)^{j-2k}. \end{aligned}$$

Les fonction Ψ_j sont appelées les fonctions de Gauss-Hermite. Les valeurs propres sont de multiplicité 1 et les vecteurs propres de $\mathrm{D}^2 + \mathrm{X}^2$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Démonstration. Voir [43, section 1.3]. □

Lemme C.8. *La suite de fonctions $(\Psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \Psi_j'(x) &= \sqrt{\frac{j}{2}} \, \Psi_{j-1}(x) - \sqrt{\frac{j+1}{2}} \, \Psi_{j+1}(x), \\ x \, \Psi_j(x) &= \sqrt{\frac{j}{2}} \, \Psi_{j-1}(x) + \sqrt{\frac{j+1}{2}} \, \Psi_{j+1}(x). \end{aligned}$$

On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \Psi_{2j}(0) &= \frac{(-1)^j\sqrt{(2j)!}}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^j j!} \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^j}{\sqrt{\pi}} j^{-\frac{1}{4}}, \\ \Psi_{2j+1}(0) &= 0, \\ \Psi_{2j}'(0) &= 0, \\ \Psi_{2j+1}'(0) &= \frac{(-1)^j\sqrt{2(2j+1)!}}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^j j!} \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{2(-1)^j}{\sqrt{\pi}} j^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

et

$$(\mathrm{D}^2 + (\mathrm{X}^2 - 2j - 1)) \, \Psi_i = 2(i-j) \, \Psi_i \qquad \text{pour } i, j \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. Avec la relation de récurrence vérifiée par les polynômes de Hermite [74, section 18.9(i)], on a les deux premières relations. Les valeurs en zéro viennent de la relation de récurrence $\Psi_{j+1}(0) = -\sqrt{\frac{j}{j+1}}\,\Psi_{j-1}(0)$ et des premiers polynômes de Hermite $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = x$. Pour les valeurs des dérivées en zéro, on utilise la première relation et les valeurs en zéro. Les équivalents sont obtenus à l'aide de la formule de Stirling. La dernière relation résulte d'un calcul utilisant le fait que Ψ_i vérifie l'équation différentielle $-\Psi_i'' + x^2\,\Psi_i = (2i+1)\,\Psi_i$. □

Lemme C.9. *Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i \neq j$, on a l'expression suivante pour le produit scalaire dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_\pm)$ de Ψ_i et Ψ_j*

$$(\Psi_i, \Psi_j)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_\pm)} = \pm\frac{\Psi_i'(0)\,\Psi_j(0) - \Psi_i(0)\,\Psi_j'(0)}{2(i-j)}.$$

Démonstration. La preuve consiste à faire deux intégrations par parties qui donnent la relation suivante

$$((2i+1)\,\Psi_i, \Psi_j)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_\pm)} = (\Psi_i, (2j+1)\,\Psi_j)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_\pm)} \pm (\Psi_i'(0)\,\Psi_j(0) - \Psi_i(0)\,\Psi_j'(0)).$$

□

Soit $b : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$ où $b(x) = \beta(-x)^\alpha$ avec $1 \leq \alpha < 2$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ ou $\alpha = 2$ et $\beta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. On définit les espaces à poids suivants :

$$\mathrm{L}^2_b(\mathbb{R}_-) = \mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}_-, \mathsf{e}^{b(x)}\,\mathrm{d}x\right), \qquad \mathrm{H}^\ell_b(\mathbb{R}_-) = \mathrm{H}^\ell\left(\mathbb{R}_-, \mathsf{e}^{b(x)}\,\mathrm{d}x\right) \qquad \ell \in \mathbb{N}^*.$$

Pour une fonction b et les espaces à poids que l'on vient de définir, on a le lemme suivant.

Lemme C.10. *Soient $\theta \in]0,1[$, $j \in \mathbb{N}$, $S \in \mathrm{L}^2_b(\mathbb{R}_-) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{D}^2 + \mathrm{X}^2 - 4j - 3)$ et u solution de*

$$(\mathcal{H}_j) \begin{cases} -w''(x) + (x^2 - 4j - 3)w(x) = S(x) & \forall x \in \mathbb{R}_-^* \\ w(0) = 0 \end{cases}.$$

On a $u \in \mathrm{L}^2_b(\mathbb{R}_-) \cap \mathrm{H}^2_{\theta b}(\mathbb{R}_-)$.

Démonstration. Remarquons qu'une solution de $(\mathcal{H}_j)$ s'écrit sous la forme

$$u = s_j\,\Psi_{2j+1} + \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell\neq j}}^{+\infty} \frac{s_\ell}{4(\ell-j)}\,\Psi_{2\ell+1}$$

où $s_\ell = (S, \Psi_{2\ell+1})_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-)}$ pour $\ell \neq j$ et $s_j \in \mathbb{C}$. Cette solution u est bien dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-)$ car $\left|\frac{s_\ell}{4(\ell-j)}\right| \leq \frac{|s_\ell|}{4}$ pour $\ell > j$ et $s_\ell \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$ car $S \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-)$. On va commencer par montrer que la fonction u est dans $\mathrm{L}^2_b(\mathbb{R}_-) \cap \mathrm{H}^1_{\theta b}(\mathbb{R}_-)$. La fonction $x \mapsto x^2 - 4j - 3 - b'(x)^2$ n'étant pas strictement positive, on ne peut pas établir simplement que u est dans $\mathrm{L}^2_b(\mathbb{R}_-) \cap \mathrm{H}^1_{\theta b}(\mathbb{R}_-)$. Par contre, avec une perturbation compacte, on peut modifier le problème $(\mathcal{H}_j)$ afin qu'il soit coercif. On prend $\chi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}_-)$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on ait

$$x^2 - 4j - 3 + \chi(x) \geq c_0 > 0,$$

$$x^2 - 4j - 3 + \chi(x) - b'(x)^2 \geq c_1 > 0.$$

On peut toujours trouver une telle fonction χ car $x \mapsto x^2 - 4j - 3 - b'(x)^2$ n'est négative que sur un compact de $\mathbb{R}_-$. En effet, $x^2-4j-3-b'(x)^2 \sim x^2$ pour $1 \leq a < 2$ et $x^2-4j-3-b'(x)^2 \sim (1-4\beta^2)x^2$ pour $a = 2$ quand $x \to -\infty$. On note $\widehat{u}$ l'unique solution dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-)$ de

$$(\mathcal{H}_j^\chi) : \begin{cases} -w''(x) + (x^2 - 4j - 3 + \chi(x))w(x) = S(x), & x \in \mathbb{R}_-^* \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

Montons que $\widehat{u}$ est dans $\mathrm{L}^2_b(\mathbb{R}_-)$. On note $v = \mathsf{e}^{2b}\widehat{u}$ ainsi que $w = \mathsf{e}^b\widehat{u} = \mathsf{e}^{-b}v \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-)$. On multiplie l'équation différentielle figurant dans $(\mathcal{H}_j^\chi)$ par v, puis on intègre sur $\mathbb{R}_-$. On obtient

$$\int_{-\infty}^0 \widehat{u}'v' + (x^2 - 4j - 3 + \chi)uv \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 Sv \,\mathrm{d}x.$$

En exprimant $\widehat{u}$ et v en fonction de w, il vient

$$\int_{-\infty}^0 w'^2 + (x^2 - 4j - 3 + \chi - b'^2)w^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 S\mathsf{e}^b w \,\mathrm{d}x,$$

d'où

$$\min(1, c_1) \left\|w\right\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}_-)} \leq \left\|S\mathsf{e}^b\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-)}.$$

On obtient donc $\mathsf{e}^b\widehat{u} \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}_-)$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} \mathsf{e}^{\theta b}\widehat{u} &= \mathsf{e}^{(\theta-1)b}\mathsf{e}^b\widehat{u} \leq \mathsf{e}^b\widehat{u}, \\ \mathsf{e}^{\theta b}\widehat{u}' &= \mathsf{e}^{(\theta-1)b}(\mathsf{e}^b\widehat{u})' + b'\mathsf{e}^{(\theta-1)b}\ \mathsf{e}^b\widehat{u} \lesssim (\mathsf{e}^b\widehat{u})' + \mathsf{e}^b\widehat{u}, \end{aligned}$$

donc $\widehat{u} \in \mathrm{L}^2_b(\mathbb{R}_-) \cap \mathrm{H}^1_{\theta b}(\mathbb{R}_-)$. On pose $a < 0$ tel que $\mathrm{supp}(\chi) \subset [a, 0]$. Pour $x < a$, on a

$$-(u - \widehat{u})'(x) + (x^2 - 4j - 3)(u - \widehat{u})(x) = 0.$$

On connaît une base de l'espace vectoriel des solutions de cette équation différentielle : elle est formée des fonctions Ψ_{2j+1} et $x \mapsto \mathrm{V}\left(-2j - \frac{3}{2}, \sqrt{2}x\right)$ d'après la section section 12.2(i) [74]. Donc, il existe $C, D \in \mathbb{R}$ tels que

$$u(x) - \widehat{u}(x) = C\,\Psi_{2j+1}(x) + D\mathrm{V}\left(-2j - \frac{3}{2}, \sqrt{2}x\right).$$

Or $u - \widehat{u}$ est dans $\mathrm{L}^2(]-\infty, a[)$ et $x \mapsto \mathrm{V}\left(-2j - \frac{3}{2}, \sqrt{2}x\right)$ est exponentiellement croissante en $-\infty$ d'où

$$u = \widehat{u} + C\,\Psi_{2j+1} \in \mathrm{L}^2_b(]-\infty, a[) \cap \mathrm{H}^1_{\theta b}(]-\infty, a[),$$

car Ψ_{2j+1} est le produit d'un polynôme et d'une gaussienne. On en conclut que $u \in \mathrm{L}^2_b(\mathbb{R}_-) \cap \mathrm{H}^1_{\theta b}(\mathbb{R}_-)$. Il nous reste à obtenir l'estimation sur la dérivée seconde. On remplace u'' dans l'équation différentielle figurant dans $(\mathcal{H}_j)$

$$\mathsf{e}^{\theta b}u'' = (x^2 - 4j - 3)\mathsf{e}^{(\theta-1)b}\ \mathsf{e}^b u - \mathsf{e}^{(\theta-1)b}\ \mathsf{e}^b S \lesssim \mathsf{e}^b u - \mathsf{e}^b S,$$

d'où $u \in \mathrm{H}^2_{\theta b}(\mathbb{R}_-)$. □

C.4 Sommation de Borel

Lemme C.11. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^\infty_{\rm b}(U)$ et I un voisinage compact de 0 dans $\mathbb{R}$. Il existe une fonction $f\in\mathcal{C}^\infty_{\rm b}(I\times U)$ telle que pour tout entier $\alpha\in\mathbb{N}$ et multi-indice $\beta\in\mathbb{N}^d$, on ait*

$$\partial_t^\alpha\partial_x^\beta f(0,x)=\partial_x^\beta f_\alpha(x)\qquad\qquad\forall x\in U.$$

Démonstration. La preuve est une adaptation de la démonstration du théorème 1.2.6 dans [48], où on a remplacé l'espace des fonctions lisses à support compact par l'espace des fonctions lisses dont toutes les dérivées sont bornées.

Soit $\varepsilon>0$ tel que $]-\varepsilon,\varepsilon[\subset I$ et $g\in\mathcal{C}^\infty_{\rm c}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(g)\subset I$ et $g(t)=1$ pour tout $t\in]-\varepsilon,\varepsilon[$. On définit pour $q\in\mathbb{N}$ et $\varepsilon_q\in]0,1]$, dont les valeurs seront précisées par la suite, la fonction

$$g_q(t,x)=g\left(\tfrac{t}{\varepsilon_q}\right)\frac{t^q}{q!}f_q(x),\qquad\qquad\forall(t,x)\in I\times U.$$

Soient q et α des entiers et β un multi-indice tel que $\alpha+|\beta|<q$. On a

$$\partial_t^\alpha\partial_x^\beta g_q(t,x)=\varepsilon_q^{q-\alpha}G_q^\alpha\left(\tfrac{t}{\varepsilon_q}\right)\partial_x^\beta f_q(x),\qquad\qquad\forall(t,x)\in I\times U,$$

où $G_q^\alpha(s)=\sum_{\ell=0}^\alpha\binom{\alpha}{\ell}\frac{s^{q-\ell}}{(q-\ell)!}\partial_t^{\alpha-\ell}g(s)$. On a $G_q^\alpha\in\mathcal{C}^\infty_{\rm c}(\mathbb{R})$ donc G_q^α est bornée et $\partial_x^\beta f_q\in\mathcal{C}^\infty_{\rm b}(U)$. Par conséquent, il existe $D_{q,\alpha,\beta}>0$ tel que

$$\left|\partial_t^\alpha\partial_x^\beta g_q(t,x)\right|\le D_{q,\alpha,\beta}\,\varepsilon_q^{q-\alpha},\qquad\qquad\forall(t,x)\in I\times U.$$

En définissant

$$\varepsilon_q=\min_{\alpha+|\beta|<q}(2^qD_{q,\alpha,\beta})^{\frac{-1}{q-\alpha}},\ q\ge1\qquad\text{et}\qquad\varepsilon_0=2\varepsilon_1,$$

on obtient $\left|\partial_t^\alpha\partial_x^\beta g_q(t,x)\right|\le2^{-q}$ pour tout $q>\alpha+|\beta|$. On pose

$$f(t,x)=\sum_{q=0}^{+\infty}g_q(t,x).$$

La fonction f est bien définie et appartient à $\mathcal{C}^\infty(I\times U)$ car pour tout entier α et pour tout multi-indice β, on a $\left\|\partial_t^\alpha\partial_x^\beta g_q\right\|_\infty\le2^{-q}$ pour $q>\alpha+|\beta|$. On en déduit la convergence uniforme des séries $\sum_{q\ge0}\partial_t^\alpha\partial_x^\beta g_q$.

Pour $\alpha\in\mathbb{N}$, $\beta\in\mathbb{N}^d$, $|t|<\varepsilon\min\limits_{q\le\alpha}\varepsilon_q$ et $x\in U$, on a

$$\partial_t^\alpha\partial_x^\beta f(t,x)=\sum_{q=0}^{+\infty}\partial_x^\beta f_q(x)\sum_{\ell=0}^{\min(q,\alpha)}\binom{\alpha}{\ell}\frac{t^{q-\ell}}{(q-\ell)!}\varepsilon_q^{\ell-\alpha}\partial_t^{\alpha-\ell}g\left(\tfrac{t}{\varepsilon_q}\right).$$

Par conséquent $\partial_t^\alpha\partial_x^\beta f(0,x)=\partial_x^\beta f_\alpha(x)$. □

Corollaire C.12. *Avec les mêmes hypothèses que pour le lemme C.11, on a la propriété suivante. Pour tout $N\in\mathbb{N}$,*

$$f(t,x)=\sum_{\alpha=0}^{N}\frac{f_\alpha(x)}{\alpha!}t^\alpha+t^{N+1}R_N(t,x)\qquad\qquad\forall(t,x)\in I\times U,$$

où $R_N\in\mathcal{C}^\infty_{\rm b}(I\times U)$.

Démonstration. La fonction f étant lisse, d'après la formule de Taylor avec reste intégrable, on a

$$f(t,x) = \sum_{\alpha=0}^{N} f_\alpha(x)\frac{t^\alpha}{\alpha!} + t^{N+1}R_N(t,x) \qquad \forall (t,x) \in I \times U$$

où

$$R_N(t,x) = \int_0^1 \frac{(s-1)^N}{N!}\partial_t^{N+1} f(ts,x)\,\mathrm{d}s.$$

Comme $(s,t,x) \mapsto \partial_t^{N+1} f(ts,x)$ est $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}([0,1]\times I \times U)$, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, pour tout entier $\alpha \in \mathbb{N}$ et multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^d$ on a

$$\partial_t^\alpha \partial_x^\beta R_N(t,x) = \int_0^1 \frac{(s-1)^N s^\alpha}{N!}\partial_t^{N+1+\alpha}\partial_x^\beta f(ts,x)\,\mathrm{d}s.$$

Pour tout $(s,t,x) \in [0,1]\times I \times U$, en reprenant les notations introduites dans la preuve du lemme C.11, on a

$$\partial_t^{N+1+\alpha}\partial_x^\beta f(ts,x) = \sum_{q=0}^{N+1+\alpha+|\beta|} \partial_t^{N+1+\alpha}\partial_x^\beta g_q(ts,x) + \sum_{q=N+2+\alpha+|\beta|}^{+\infty} \partial_t^{N+1+\alpha}\partial_x^\beta g_q(ts,x).$$

Or, voir la preuve du lemme C.11, on a

$$\left|\sum_{q=N+2+\alpha+|\beta|}^{+\infty} \partial_t^{N+1+\alpha}\partial_x^\beta g_q(ts,x)\right| \leq \frac{1}{2^{N+1+\alpha+|\beta|}} \qquad \forall (t,x) \in I \times U,$$

et pour tout $q \in \{0,\dots,N+1+\alpha+|\beta|\}$ les fonctions $\partial_t^{N+1+\alpha}\partial_x^\beta g_q$ sont bornées. On en déduit que $\partial_t^{N+1+\alpha}\partial_x^\beta f(ts,x)$ est bornée et donc que $\partial_t^\alpha\partial_x^\beta R_N$ est bornée. Finalement, on a $R_N \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}(I\times U)$ et le résultat énoncé est démontré. □

Annexe D

Scripts de calcul formel des développements asymptotiques

Sommaire

D.1 Cas général 2D 258
D.2 Cas radial : puits quadratique interne 263
D.3 Cas radial : demi-puits quadratique 266

Dans cette annexe, on décrit les scripts de calcul formel utilisés pour calculer les développements asymptotiques construits aux chapitres 6 et 8. Ces scripts sont écrits pour le module de calcul formal SymPy de Python [65].

Tout les scripts de cette annexe sont distribués selon la licence CeCILL-C définie par CEA, CNRS et INRIA au lien suivant www.cecill.info.

D.1 Cas général 2D

On décrit le script de calcul utilisé pour obtenir les formules de la section 8.3 page 208. Il est basé sur la récurrence de la démonstration du lemme 8.14 page 195. Le lemme 8.14 fournit la forme des fonctions φ_q et ψ_q, pour tout $s \in \mathbb{T}$, $\sigma \in \mathbb{R}_-$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}\varphi_q(s,\sigma) &= P_q^{\varphi}(s,\sigma)\,\mathsf{A}\left(a_j + 2\tau(s)\sigma\right) + Q_q^{\varphi}(s,\sigma)\,\mathsf{A}'\left(a_j + 2\tau(s)\sigma\right)\\ \psi_q(s,\rho) &= P_q^{\psi}(s,\rho)\exp\left(-2\rho b(s)\right)\end{aligned}$$

où $P_q^{\varphi}, Q_q^{\varphi}, P_q^{\psi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})[X]$ tels que, pour tout $s \in \mathbb{T}$, on a

$$\deg\left(P_q^{\varphi}(s,\cdot)\right) \leq 2q, \qquad \deg\left(Q_q^{\varphi}(s,\cdot)\right) \leq 2q, \qquad \deg\left(P_q^{\psi}(s,\cdot)\right) \leq q.$$

et ou l'on a noté

$$\tau(s) \coloneqq \breve{\kappa}(s)^{\frac{1}{3}}\,\widehat{n}_0(s)^{\frac{2}{3}}, \qquad\qquad b(s) \coloneqq \frac{\sqrt{n_0(s)^2 - 1}}{\langle n_0\rangle}.$$

Dans le script on utilise les notations suivantes :

$$h \coloneqq \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{et} \qquad N(s) \coloneqq n_0(s)^{p-1}.$$

La récurrence dans la démonstration du lemme 8.14 résout la suite de systèmes explicités dans le lemme 8.13. Le script n'utilise pas les expressions des seconds membres : on injecte les sommes partielles formelles des développements dans les équations du système (8.8) page 189 et on extrait les seconds membres.

On commence par importer la librairie SymPy et définir les quantités : `nbTerm` est le nombre de termes calculés, `ne` le degré maximal des polynômes P^{ψ} et `na` le degré maximal des polynômes P^{φ} et Q^{φ}.

```
#!/usr/bin/python3

import sympy as sy

nbTerm = 2
ne = nbTerm
na = 2*nbTerm
```

On définit les variables utilisées.

```
p       = sy.symbols('p',integer=True)
a, h    = sy.symbols('a h',real=True,positive=True)
s, r, z = sy.symbols('s rho sigma',real=True)
```

On définit les fonctions utilisées.

```
t = sy.Function('tau',real=True,positive=True)(s)
k = sy.Function('kappa',real=True)(s)
N = sy.Function('N',real=True,positive=True)(s)
b = sy.Function('b',real=True,positive=True)(s)
```

On définit les séries formelles, quand h tend vers 0, associées à $(1+\sigma\kappa(s)h^2)^{-1}$ notée `iz1`, $(1+\sigma\kappa(s)h^2)^{-2}$ noté `iz2` et $(1+\rho\kappa(s)h^3)^{-1}$ noté `ir1`.

```
iz1 = 1
for q in (i for i in range(1,(nbTerm+3)//2+1) if 2*i < nbTerm+3):
    iz1 += (-z*h**2*k)**q
iz2 = (iz1**2 + sy.O(h**(nbTerm+3))).expand().removeO()

ir1 = 1
for q in (i for i in range(1,(nbTerm+1)//3+1) if 3*i < nbTerm+1):
    ir1 += (-r*h**3*k)**q
```

On définit les séries formelles, quand h tend vers 0, associées à $n(s,\sigma h^2)^2$ notée `na2`, $\frac{\partial_s n(s,\sigma h^2)}{n(s,\sigma h^2)}$ notée `nsi` et $\frac{\partial_\xi n(s,\sigma h^2)}{n(s,\sigma h^2)}$ noté `nxi`.

```
n0 = sy.Function('n0',real=True,positive=True)
c0 = sy.symbols('c0',real=True,positive=True)
eta = sy.symbols('eta0:'+str(nbTerm+3),cls=sy.Function,real=True)

n = [n0(s),n0(s)*(c0**2*t**3/n0(s)**2-k)]
for q in range(2,(nbTerm+3)//2+2):
    n.append((-1)**q*n[0]*(sy.factorial(q)*k**q-eta[q](s)))

n10 = 0
for q in (i for i in range(1,(nbTerm+3)//2+1) if 2*i < nbTerm+3):
    n10 += n[q]*z**q*h**(2*q)/sy.factorial(q)

dxn = n[1]
for q in (i for i in range(1,(nbTerm+3)//2+1) if 2*i < nbTerm+3):
    dxn += n[q+1]*z**q*h**(2*q)/(n[0]*sy.factorial(q))

ina = 1 + sy.O(h**(nbTerm+3))
for q in range(1,nbTerm+3):
    ina += ((-1)**q*(n10/n[0])**q).expand()

na2 = ((n[0]+n10)**2 + sy.O(h**(nbTerm+3))).expand().removeO()
nsi = ((n[0]+n10).diff(s)*ina/n[0]).expand().removeO()
nxi = (dxn*ina/n[0]).expand().removeO()
```

La matrice `ME` et les fonctions `FtoVExp` et `VtoFExp` permettent de résoudre l'équation différentielle en ρ à s fixé $-\partial_{\rho\rho}\psi + 4b(s)\partial_\rho\psi = S$ dans $\mathbb{R}_{\texttt{ne}}[\rho]$. La solution est $\psi = \texttt{VtoFExp}(\texttt{ME} * \texttt{FtoVExp}(S))$.

```
NE = ne+1
MTE = sy.zeros(NE,NE)
MTE[0,0] = 4*b
for j in range(1,NE):
    MTE[j-1,j] = -j
    MTE[j  ,j] = 4*b
ME = MTE.inv()

def FtoVExp(fct):
```

```
    vec = sy.zeros(NE,1)
    for j in range(NE):
        vec[j,0] = fct.coeff(r,j)
    return(vec)

def VtoFExp(vec):
    fct = 0
    for j in range(NE):
        fct += vec[j,0]*r**(j+1)/(j+1)
    return(fct)
```

La matrice `MA` et les fonctions `FtoVAi` et `VtoFAi` permettent de résoudre l'équation différentielle en σ à s fixé $-\partial_{\sigma\sigma}\varphi - (8\tau(s)^3\sigma + 4a_j\tau(s)^2)\,\varphi = S$ dans $\mathbb{R}_{2\mathtt{na}+1}[\sigma]$. La solution est $\varphi = \mathtt{VtoFAi}(\mathtt{MA} * \mathtt{FtoVAi}(S))$.

```
NA = 2*(na+1)
MTA = sy.zeros(NA,NA)
MTA[1,2] = 4*t
for j in range(2,na+1):
    MTA[2*j-4,2*j] = -j*(j-1)
    MTA[2*j-1,2*j] = 4*j*t
MTA[0,1] = -4*t**2
MTA[0,3] = -4*a*t
MTA[2,3] = -12*t**2
for j in range(2,na+1):
    MTA[2*j-3,2*j+1] = -j*(j-1)
    MTA[2*j-2,2*j+1] = -4*j*a*t
    MTA[2*j  ,2*j+1] = -4*(2*j+1)*t**2
MA = MTA[:-1,1:].inv().expand()

def FtoVAi(fct):
    vec = sy.zeros(NA-1,1)
    fctAi = fct.coeff(sy.airyai(-a-2*z*t))
    fctAp = fct.coeff(sy.airyaiprime(-a-2*z*t))
    for j in range(na+1):
        vec[2*j,0] = fctAi.coeff(z,j)
    for j in range(na):
        vec[2*j+1,0] = fctAp.coeff(z,j)
    return(vec)

def VtoFAi(vec):
    fct = 0
    for j in range(na):
        fct += vec[2*j+1,0]*z**(j+1)*sy.airyai(-a-2*z*t)
    for j in range(na+1):
        fct += vec[2*j,0]*z**j*sy.airyaiprime(-a-2*z*t)
    return(fct)
```

Les définitions des fonctions pour dériver par rapport à s, σ et ρ les fonctions $\varphi(s,\sigma)\exp(\mathrm{i}m\Theta(s))$ et $\psi(s,\rho)\exp(\mathrm{i}m\Theta(s))$.

```
dsPhi = lambda expr, ph: h**3*expr.diff(s)+2*sy.I*ph*expr
dzPhi = lambda expr: h*expr.diff(z)

dsPsi = lambda expr, ph: h**3*expr.diff(s)+2*sy.I*ph*expr-h**3*2*r*
    b.diff(s)*expr
drPsi = lambda expr: expr.diff(r)-2*b*expr
```

Les premiers termes de l'asymptotique.

```
l = sy.symbols('l[0:'+str(nbTerm+1)+']',complex=True)
lam = 1 + l[0]*h**2
dTh = n[0]/c0 + (l[0]*n[0]/c0 - a*t**2*c0/(2*n[0]))*h**2
phi = sy.airyai(-a-2*z*t)
psi = 0*s*r
```

Le code suivant est la boucle qui calcule les termes par récurrence.

```
print("
    ----------------------------------------------------------------")
print(" h^2 |")
print("------")
sy.pprint(a*t**2*c0/(2*n[0]))

de  = 0
dai = 0
dap = 0
for q in range(1,nbTerm+1):
    print("
    ----------------------------------------------------------------")
    print(" h^"+str(q+2)+" |")
    print("------")

    #Variables locales
    la2 = (lam**2 + sy.O(h**(q+3))).expand()
    phis = (dsPhi(phi,dTh) + sy.O(h**(q+3))).expand().removeO()
    phiz = (dzPhi(phi) + sy.O(h**(q+3))).expand().removeO()

    #Equation differentielle sur psi
    edPsi  = sy.O(h**(q+1))
    edPsi += (-ir1*dsPsi(ir1*dsPsi(psi,dTh),dTh)).expand()
    edPsi += (-ir1*drPsi((1+h**3*r*k)*drPsi(psi))).expand()
    edPsi += (-4*la2*(n[0]**2/c0**2-b**2)*psi).expand()

    #Calcul solution psi
    solVE = ME*FtoVExp((-edPsi).coeff(h,q))
    C = (solVE[0,0]-N*phiz.coeff(h,q).subs(z,0).subs(sy.airyai(-a)
    ,0))/(2*b)
    D = C.subs(sy.airyaiprime(-a),1)
    solPsi = C + VtoFExp(solVE)

    #Equation differentielle sur phi
    edPhi  = sy.O(h**(q+3))
    edPhi += (-iz1*dsPhi(iz1*phis,dTh)).expand()
    edPhi += (-iz1*dzPhi((1+h**2*z*k)*phiz)).expand()
    edPhi += (-h**3*iz2*(p-1)*nsi*phis).expand()
    edPhi += (-h**3*(p-1)*nxi*phiz).expand()
    edPhi += (-4*la2*na2*phi/c0**2).expand()

    #Calcul solution phi
    solVA = MA*FtoVAi((-edPhi).coeff(h,q+2))
    lq = t**2*c0*(solVA[0,0]-D)/(2*n[0])

    temp = lq.expand()
    sy.pprint(temp)

    dTq = l[q]*n[0]/c0 - (solVA[0,0]-D)*t**2*c0/(2*n[0])
    solVA[0,0] = D
```

```
    solPhi = VtoFAi(solVA)

    #Subs
    lam += l[q]*h**(q+2)
    dTh += dTq.expand()*h**(q+2)
    phi += solPhi.expand()*h**q
    psi += solPsi.expand()*h**q

    #Degre check
    de  = max(de,sy.degree(sy.Poly(edPsi.coeff(h,q),r), gen=r))
    dai = max(dai,sy.degree(sy.Poly(edPhi.coeff(h,q+2).coeff(sy.airyai(-a-2*z*t)),z),gen=z))
    dap = max(dap,sy.degree(sy.Poly(edPhi.coeff(h,q+2).coeff(sy.airyaiprime(-a-2*z*t)),z), gen=z))
```

Différentes vérifications que les termes de l'asymptotique ont bien été calculés.

```
#Check
print("
    ================================================================")
print("Verification degre Polynomes")
print("de  = "+str(de)+" <= "+str(ne))
print("dai = "+str(dai)+" <= "+str(na))
print("dap = "+str(dap)+" <= "+str(na-1))

print("
    ----------------------------------------------------------------")
print("Verification a nbTerm "+str(nbTerm))
la2 = (lam**2 + sy.O(h**(nbTerm+3))).expand()
phis = (dsPhi(phi,dTh) + sy.O(h**(nbTerm+3))).expand().removeO()
phiz = (dzPhi(phi) + sy.O(h**(nbTerm+3))).expand().removeO()
psis = (dsPsi(psi,dTh) + sy.O(h**(nbTerm+1))).expand().removeO()
psir = (drPsi(psi) + sy.O(h**(nbTerm+1))).expand().removeO()

print("Equation differentielle sur psi, O(h^"+str(nbTerm+1)+")")
edPsi  = sy.O(h**(nbTerm+1))
edPsi += (-ir1*dsPsi(ir1*psis,dTh)).expand()
edPsi += (-ir1*drPsi((1+h**3*r*k)*psir)).expand()
edPsi += (-4*la2*(n[0]**2/c0**2-b**2)*psi).expand()
print(edPsi)

print("Equation differentielle sur phi, O(h^"+str(nbTerm+3)+")")
edPhi  = sy.O(h**(nbTerm+3))
edPhi += (-iz1*dsPhi(iz1*phis,dTh)).expand()
edPhi += (-iz1*dzPhi((1+h**2*z*k)*phiz)).expand()
edPhi += (-h**3*iz2*(p-1)*nsi*phis).expand()
edPhi += (-h**3*(p-1)*nxi*phiz).expand()
edPhi += (-4*la2*na2*phi/c0**2).expand()
print(edPhi)

print("Equation saut fonctions, O(h^"+str(nbTerm+1)+")")
saut0  = sy.O(h**(nbTerm+1))
saut0 += (psi.subs(r,0) - phi.subs(z,0).subs(sy.airyai(-a),0)).expand()
print(saut0)

print("Equation saut derivees, O(h^"+str(nbTerm+1)+")")
saut1  = sy.O(h**(nbTerm+1))
saut1 += (psir.subs(r,0) - N*phiz.subs(z,0).subs(sy.airyai(-a),0)).
```

```
    expand()
205 print(saut1)
206
207 print("
    ------------------------------------------------------------")
```

Remarque D.1. Ce script peut être simplifié et ainsi accéléré dans les trois cas suivants :

- le cas général 2D avec un indice constant ;
- le cas radial 1D avec un indice variable ;
- le cas radial 1D avec un indice constant.

Une autre manière d'accélérer ce script est de diminuer le nombre de variables par exemple en fixant la valeur de p ou celles des n_q.

D.2 Cas radial : puits quadratique interne

Le cas du puits quadratique interne est plus simple que le cas du demi-puits quadratique section D.3. Le script est basé sur la démonstration du lemme 6.32 page 160. Le lemme 6.32 fournit la forme de φ_q, pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\varphi_q(\sigma) = \sum_{\ell=0}^{j+3q} c_{q,\ell}\, \Psi_\ell(\tau\sigma)$$

où $(c_{q,0}, \dots, c_{q,j+3q}) \in \mathbb{R}^{j+3q+1}$, Ψ sont les fonction de Gauss-Hermite et $\tau := \mu^{\frac{1}{4}}$. On utilise le paramètre semi-classique $h := m^{-\frac{1}{2}}$. Le lemme 6.32 résout la suite de système explicités dans le lemme 6.31. Comme dans la section précédente, les seconds membres sont calculés à partir de l'équation (6.22) page 157.

Le début du script est similaire au précédent, les fonctions de Gauss-Hermite sont définies formellement, la variable $x := \tau\sigma$.

```
1  #!/usr/bin/python3
2
3  import sympy as sy
4
5  nbTerm = 2
6  j = 0
7
8  nb = j+3*nbTerm+2
9  GH = sy.symbols('f0:'+str(nb+1),cls=sy.Function,real=True)
10
11 p = sy.symbols('p',integer=True)
12 x = sy.symbols('x',real=True) # x = tau*sigma
13 h, n0, t = sy.symbols('h n0 tau',real=True,positif=True)
```

Les calculs sont fait en utilisant `nb` fonctions de Gauss-Hermite dépendant de `j` et `nbTerm` et on peut exprimer $\Psi_j'(x)$ et $x\,\Psi_j(x)$ en fonction de Ψ_{j-1} et Ψ_{j+1}. La liste `D` définit comment remplacer $\Psi_j'(x)$ et la liste `X` défini comment remplacer $x\,\Psi_j(x)$. La liste `solveOH` définit comment résoudre l'équation différentielle $-\varphi''(\sigma) + (\tau^4\sigma^2 - (4j+3))\,\varphi(\sigma) = \Psi_i(\tau\sigma)$ pour $i \neq j$.

```
D = [(GH[i](x).diff(x),sy.sqrt(sy.Rational(i,2))*GH[i-1](x)
     -sy.sqrt(sy.Rational(i+1,2))*GH[i+1](x)) for i in range(nb-1)]
D.append((GH[nb-1](x).diff(x),
          sy.sqrt(sy.Rational(nb-1,2))*GH[nb-2](x)))

X = [(x*GH[i](x),sy.sqrt(sy.Rational(i,2))*GH[i-1](x)
     +sy.sqrt(sy.Rational(i+1,2))*GH[i+1](x)) for i in range(nb-1)]
X.append((x*GH[nb-1](x),
          sy.sqrt(sy.Rational(nb-1,2))*GH[nb-2](x)))

def multX(w,nb):
    d = 0
    for i in range(nb):
        d = max(d,sy.degree(sy.Poly(w.coeff(GH[i](x)),x),gen=x))
    for q in range(d):
        w = w.subs(X).expand()
    return(w)

solveOH = [(GH[i](x),GH[i](x)/(2*(i-j)*t**2)) for i in range(nb) if
    (i!=j)]
solveOH.append((GH[j](x),0))
```

On définit les séries formelles, quand h tend vers 0, associées à $(1+\sigma h)^{-1}$ notée `iz1`, à $(1+\sigma h)^{-2}$ notée `iz2`, à $\frac{n(\sigma h)^2}{n_0^2}$ notée `n20` et à $\frac{n'(\sigma h)}{n(\sigma h)}$ notée `n20`.

```
iz1 = 1
for q in range(1,nbTerm+3):
    iz1 += (-x*h/t)**q
iz2 = (iz1**2 + sy.O(h**(nbTerm+3))).expand()
iz2 = iz2.removeO()

eta = sy.symbols('eta[3:'+str(nbTerm+4)+']',real=True)
n = [n0,-n0,n0*(2-t**4)]
for q in range(3,nbTerm+4):
    n.append((-1)**q*n0*(sy.factorial(q)-eta[q-3]))

n10 = 0
for q in range(1,nbTerm+3):
    n10 += n[q]*(x*h/t)**q/(n0*sy.factorial(q))

dxn = 0
for q in range(nbTerm+3):
    dxn += n[q+1]*(x*h/t)**q/sy.factorial(q)

ina = 1 + sy.O(h**(nbTerm+3))
for q in range(1,nbTerm+3):
    ina += ((-1)**q*n10**q).expand()

n20 = ((1+n10)**2+sy.O(h**(nbTerm+3))).expand().removeO()
nxi = (dxn*ina/n0).expand().removeO()
```

Le code suivant est la boucle qui calcule les termes par récurrence.

```
lam = 1 + (2*j+1)*t**2*h**2/2
phi = GH[j](x)

print(" h^2 |")
print("------")
```

```
sy.pprint((2*j+1)*t**2/2)

tT = nb
for q in range(1,nbTerm+1):
    print("
    ----------------------------------------------------------------------")
    print(" h^"+str(q+2)+" |")
    print("------")

    #Variables locales
    ph1 = (t*phi).diff(x).subs(D).expand()
    ph2 = (t*ph1).diff(x).subs(D).expand()

    #Equation differentielle sur phi
    edPhi  = (-h**2*ph2).expand()
    edPhi += (-h**3*iz1*ph1).expand()
    edPhi += (-h**3*(p-1)*nxi*ph1).expand()
    edPhi += ((iz2-n20*lam**2)*phi).expand()

    #Calcul solution
    Sq = multX((-edPhi).coeff(h,q+2),nb)
    lq = -Sq.coeff(GH[j](x))/2
    solq = Sq.subs(solveOH)

    sy.pprint(lq)

    lam += lq*h**(q+2)
    phi += (solq*h**q).expand()

    tT -= 3
```

Différentes vérifications que les termes de l'asymptotique ont bien été calculés.

```
#Check
print("
    ================================================================")
print("Verification troncature : "+str(j)+' < '+str(tT))

D = [(GH[i](x).diff(x),sy.sqrt(sy.Rational(i,2))*GH[i-1](x)
     -sy.sqrt(sy.Rational(i+1,2))*GH[i+1](x)) for i in range(nb)]
D.append((GH[nb](x).diff(x),sy.sqrt(sy.Rational(nb,2))*GH[nb-1](x))
    )

X = [(x*GH[i](x),sy.sqrt(sy.Rational(i,2))*GH[i-1](x)
     +sy.sqrt(sy.Rational(i+1,2))*GH[i+1](x)) for i in range(nb)]
X.append((x*GH[nb](x),sy.sqrt(sy.Rational(nb,2))*GH[nb-1](x)))

print("
    ----------------------------------------------------------------------")
print("Verification a nbTerm "+str(nbTerm))
ph1 = (t*phi).diff(x).subs(D).expand()
ph2 = (t*ph1).diff(x).subs(D).expand()

print("Equation differentielle sur phi, O(h^"+str(nbTerm+3)+")")
edPhi  = sy.O(h**(nbTerm+3))
edPhi += (-h**2*ph2).expand()
edPhi += (-h**3*iz1*ph1).expand()
edPhi += (-h**3*(p-1)*nxi*ph1).expand()
edPhi += ((iz2-n20*lam**2)*phi).expand()
```

```
edPhi  = multX(edPhi,nb+1)

sy.pprint(edPhi)

print("
    ------------------------------------------------------------------")
```

D.3 Cas radial : demi-puits quadratique

Ce cas mélange les deux cas précédents, des sections D.1 et D.2, dans le sens que l'on développe les quasi-modes sur la base des fonctions Gauss-Hermite dans la cavité et à l'extérieur de la cavité on développe les quasi-modes selon une exponentielle. Le lemme 6.20 page 147 fournit la forme des quasi-modes, pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_-$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned}\varphi_q(\sigma) &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} c_{q,\ell}\ \Psi_{2\ell+1}(\tau\sigma)\\ \psi_q(\rho) &= P_q(\rho)\mathrm{e}^{-b\rho}\end{aligned}$$

où $(c_{q,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, $\tau := \mu^{\frac{1}{4}}$, $P_q \in \mathbb{R}_q[X]$ et $b := \frac{\sqrt{n_0^2-1}}{n_0}$. Dans le script on utilise les notations suivantes :

$$h := \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad N := n_0^{p-1}$$

Le lemme 6.20 résout la suite de système explicités dans le lemme 6.19. Comme dans les sections précédentes, les seconds membres sont calculés à partir de l'équation (6.13) page 144.

Remarque D.2. Contrairement aux deux cas précédents, des sections D.1 et D.2, les coefficients calculés ne sont que des approximations des vrais coefficients car les quasi-modes s'écrivent comme des sommes infinies de fonctions de Gauss-Hermite que l'on tronque pour les besoins de algorithme. Techniquement pour la quasi-résonance, le terme devant la puissance $m^{-\frac{3}{2}}$ (troisième terme) est exact mais touts les suivants sont des approximations.

Le début du script mélange les débuts des scripts des sections D.1 et D.2.

```
#!/usr/bin/python3

import sympy as sy

nbTerm = 1
j = 0

ne = nbTerm
nb = 2*j+1+3*nbTerm+1
GH = sy.symbols('f0:'+str(nb+1),cls=sy.Function,real=True)

p = sy.symbols('p',integer=True)
x, r = sy.symbols('x rho',real=True) # x = tau*sigma
h, n0, t, b, N = sy.symbols('h n0 tau b N',real=True,positif=True)
```

```
15
16 NE = ne+1
17 MTE = sy.zeros(NE,NE)
18 MTE[0,0] = 2*b
19 for i in range(1,NE):
20     MTE[i-1,i] = -i
21     MTE[i  ,i] = 2*b
22 ME = MTE.inv()
23
24 def FtoVExp(fct):
25     vec = sy.zeros(NE,1)
26     for i in range(NE):
27         vec[i,0] = fct.coeff(r,i)
28     return(vec)
29
30 def VtoFExp(vec):
31     fct = 0
32     for i in range(NE):
33         fct += vec[i,0]*r**(i+1)/(i+1)
34     return(fct)
35
36 D = [(GH[i](x).diff(x),sy.sqrt(sy.Rational(i,2))*GH[i-1](x)
37      -sy.sqrt(sy.Rational(i+1,2))*GH[i+1](x)) for i in range(nb-1)]
38 D.append((GH[nb-1](x).diff(x),
39           sy.sqrt(sy.Rational(nb-1,2))*GH[nb-2](x)))
40
41 X = [(x*GH[i](x),sy.sqrt(sy.Rational(i,2))*GH[i-1](x)
42      +sy.sqrt(sy.Rational(i+1,2))*GH[i+1](x)) for i in range(nb-1)]
43 X.append((x*GH[nb-1](x),
44           sy.sqrt(sy.Rational(nb-1,2))*GH[nb-2](x)))
45
46 def multX(w,nb):
47     d = 0
48     for i in range(nb):
49         d = max(d,sy.degree(sy.Poly(w.coeff(GH[i](x)),x),gen=x))
50     for q in range(d):
51         w = w.subs(X).expand()
52     return(w)
53
54 solveOH = [(GH[i](x),GH[i](x)/(2*(i-2*j-1)*t**2)) for i in range(nb
       ) if (i != 2*j+1)]
55 solveOH.append((GH[2*j+1](x),0))
```

La liste `c` contient les valeurs suivantes :

$$\mathtt{c}_{2i} = \Psi_{2i}(0) \qquad \text{et} \qquad \mathtt{c}_{2i+1} = \Psi'_{2i+1}(0), \qquad 0 \leq i < \mathtt{nb}.$$

La liste `trace0` contient la valeur en 0 de Ψ_i et la liste `trace1` contient la valeur en 0 des dérivées de $\sigma \mapsto \Psi_i(\tau\sigma)$. Au cours de l'algorithme, on a besoin de projeter sur la base des fonctions de Gauss-Hermite impaires, la liste `projOdd` est utilisée pour cette projection.

```
56 c = []
57 for i in range(nb):
58     if i%2:
59         q = (i-1)//2
60         c.append((-1)**q*sy.sqrt(2*sy.factorial(i))/(sy.pi**(sy.
       Rational(1,4))*2**q*sy.factorial(q)))
```

```
    else:
        q = i//2
        c.append((-1)**q*sy.sqrt(sy.factorial(i))/(sy.pi**(sy.
   Rational(1,4))*2**q*sy.factorial(q)))

trace0 = [(GH[i](x),c[i]) for i in range(nb) if not i%2]
trace0.extend([(GH[i](x),0) for i in range(nb) if i%2])

trace1 = [(GH[i](x),0) for i in range(nb) if not i%2]
trace1.extend([(GH[i](x),t*c[i]) for i in range(nb) if i%2])

projOdd = []
for eve in (l for l in range(nb) if not l%2):
    proj = 0
    for odd in (l for l in range(nb) if l%2):
        proj += c[eve]*c[odd]*GH[odd](x)/(eve-odd)
    projOdd.append((GH[eve](x),proj))
```

Comment précédemment, on définit les séries formelles dont on a besoin.

```
iz1 = 1
for q in range(1,nbTerm+3):
    iz1 += (-x*h/t)**q
iz2 = (iz1**2 + sy.O(h**(nbTerm+3))).expand()
iz2 = iz2.removeO()

ir1 = 1
for q in (l for l in range(1,nbTerm) if (2*l < nbTerm+1)):
    ir1 += (-r*h**2)**q
ir2 = (ir1**2 + sy.O(h**(nbTerm+1))).expand()
ir2 = ir2.removeO()

eta = sy.symbols('eta[3:'+str(nbTerm+4)+']',real=True)
n = [n0,-n0,n0*(2-t**4)]
for q in range(3,nbTerm+4):
    n.append((-1)**q*n0*(sy.factorial(q)-eta[q-3]))

n10 = 0
for q in range(1,nbTerm+3):
    n10 += n[q]*(x*h/t)**q/(n0*sy.factorial(q))

dxn = 0
for q in range(nbTerm+3):
    dxn += n[q+1]*(x*h/t)**q/sy.factorial(q)

ina = 1 + sy.O(h**(nbTerm+3))
for q in range(1,nbTerm+3):
    ina += ((-1)**q*n10**q).expand()

n20 = ((1+n10)**2+sy.O(h**(nbTerm+3))).expand().removeO()
nxi = (dxn*ina/n0).expand().removeO()
```

Le code suivant est la boucle qui calcule les termes par récurrence.

```
lam = 1 + (4*j+3)*t**2*h**2/2
phi = GH[2*j+1](x)
psi = 0*r

print("------")
```

```
print(" h^2"+" |")
print("------")
sy.pprint((4*j+3)*t**2/2)

tT = nb
de  = 0
for q in range(1,nbTerm+1):
    print("
    ------------------------------------------------------------------")
    print(" h^"+str(q+2)+" |")
    print("------")

    #Variables locales
    la2 = lam**2
    ps1 = psi.diff(r)
    ps2 = ps1.diff(r)
    ph1 = (t*phi).diff(x).subs(D).expand()
    ph2 = (t*ph1).diff(x).subs(D).expand()

    #Equation differentielle sur psi
    edPsi  = (-(ps2-2*b*ps1+b**2*psi)).expand()
    edPsi += (-h**2*ir1*(ps1-b*psi)).expand()
    edPsi += ((ir2-(1-b**2)*la2)*psi).expand()

    #Solution psi
    solVE = ME*FtoVExp((-edPsi).coeff(h,q))
    C = (solVE[0,0]-N*phi.coeff(h,q-1).subs(trace1))/b
    solE = C + VtoFExp(solVE)

    #Equation édiffrentielle sur phi
    edPhi  = (-h**2*ph2).expand()
    edPhi += (-h**3*iz1*ph1).expand()
    edPhi += (-h**3*(p-1)*nxi*ph1).expand()
    edPhi += ((iz2-n20*la2)*phi).expand()
    Sq  = multX((-edPhi).coeff(h,q+2),nb)
    Sq += 2*(2*j+1)*t**2*C*GH[0](x)/c[0]

    #Solution phi
    Sq = Sq.subs(projOdd).expand()
    lq = -Sq.coeff(GH[2*j+1](x))/2
    solH = C*GH[0](x)/c[0] + Sq.subs(solveOH)

    sy.pprint(lq.expand())

    lam += lq*h**(q+2)
    phi += (solH*h**q).expand()
    psi += (solE*h**q).expand()

    #Update check
    tT -= 3
    de  = max(de,sy.degree(sy.Poly(edPsi.coeff(h,q),r), gen=r))
```

Différentes vérifications que les termes de l'asymptotique ont bien été calculés.

```
#Check
print("
    ============================================================")
print("Verification troncature      : "+str(2*j+1)+" <  "+str(tT))
print("Verification degre polynomes : "+str(de)+" <= "+str(ne))
```

```
167
168 D = [(GH[i](x).diff(x),sy.sqrt(sy.Rational(i,2))*GH[i-1](x)
169      -sy.sqrt(sy.Rational(i+1,2))*GH[i+1](x)) for i in range(nb)]
170 D.append((GH[nb-1](x).diff(x),
171           sy.sqrt(sy.Rational(nb,2))*GH[nb-2](x)))
172
173 X = [(x*GH[i](x),sy.sqrt(sy.Rational(i,2))*GH[i-1](x)
174      +sy.sqrt(sy.Rational(i+1,2))*GH[i+1](x)) for i in range(nb)]
175 X.append((x*GH[nb-1](x),
176           sy.sqrt(sy.Rational(nb,2))*GH[nb-2](x)))
177
178 print("
    ----------------------------------------------------------------")
179 print("Verification a nbTerm "+str(nbTerm))
180 la2 = lam**2
181 ps1 = psi.diff(r)
182 ps2 = ps1.diff(r)
183 ph1 = (t*phi).diff(x).subs(D).expand()
184 ph2 = (t*ph1).diff(x).subs(D).expand()
185
186 print("Equation differentielle sur psi, O(h^"+str(nbTerm+1)+")")
187 edPsi  = sy.O(h**(nbTerm+1))
188 edPsi += (-(ps2-2*b*ps1+b**2*psi)).expand()
189 edPsi += (-h**2*ir1*(ps1-b*psi)).expand()
190 edPsi += ((ir2-(1-b**2)*la2)*psi).expand()
191 print(edPsi)
192
193 print("Equation differentielle sur phi, O(h^"+str(nbTerm+3)+")")
194 edPhi  = sy.O(h**(nbTerm+3))
195 edPhi += (-h**2*ph2).expand()
196 edPhi += (-h**3*iz1*ph1).expand()
197 edPhi += (-h**3*(p-1)*nxi*ph1).expand()
198 edPhi += ((iz2-n20*la2)*phi).expand()
199 edPhi  = multX(edPhi,nb+1)
200 print(edPhi.subs(projOdd).expand() + sy.O(h**(nbTerm+3)))
201
202 print("Equation saut fonctions, O(h^"+str(nbTerm+1)+")")
203 saut0  = sy.O(h**(nbTerm+1))
204 saut0 += psi.subs(r,0) - phi.subs(trace0)
205 print(saut0)
206
207 print("Equation saut derivees, O(h^"+str(nbTerm+1)+")")
208 saut1  = sy.O(h**(nbTerm+1))
209 saut1 += ((ps1-b*psi).subs(r,0) - h*N*phi.subs(trace1)).expand()
210 print(saut1)
211
212 print("
    ----------------------------------------------------------------")
```

Annexe E

Autre développements asymptotiques

Sommaire

E.1 Puits d'ordre élevé 272
E.2 Puits plat 273

Dans cette annexe, on énonce d'autres cas pour lesquels on peut calculer des développements asymptotiques pour le problème $(\mathcal{P}_p)$ défini en (1.5) page 5, dans le cas où il est invariant par rotation.

E.1 Puits d'ordre élevé

On reprend les hypothèse du chapitre 6, la cavité est un disque de centre 0 et de rayon R. L'indice optique n est défini par $n_{|[0,R]} \in \mathcal{C}^\infty([0,R])$ avec $n_{|[0,R]} > 1$ et $n \equiv 1$ sur $]1,+\infty[$. On note $n_0 = \lim_{r\nearrow R} n(r) > 1$. On veut construire des solutions à l'équation de Schrödinger semi-classique suivante, quand $h \to 0$,

$$-h^2 \mathcal{L} w + V w = \Lambda w \tag{E.1}$$

où $h = m^{-1}$, l'opérateur du second ordre $\mathcal{L}$ est défini par

$$\mathcal{L} = \frac{R^2\, n_0^2}{r n^{p+1}(r)} \partial_r \left(r\, n^{p-1}(r)\, \partial_r \right)$$

et le potentiel V par

$$V(r) = \frac{R^2\, n_0^2}{r^2 n(r)^2} - 1.$$

L'équation (E.1) vient de la ré-écriture du système (6.1) page 126 et de l'ansatz $k^2 = \frac{m^2}{R^2 n_0^2}(1+\Lambda)$. Le potentiel V possède les propriété suivantes

$$\lim_{r\nearrow R} V(r) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{r\searrow R} V(r) = n_0^2 - 1 > 1.$$

Pour la suite, on défini les notations $n_q = \lim_{r\nearrow R} n^{(q)}(r)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. Dans le chapitre 6 et plus particulièrement dans les sections 6.3 et 6.4, on a construit des quasi-modes et quasi-résonances quand le potentiel V a un minimum local en R et le développement de Taylor de V en R^- est d'ordre 1 ou 2. Pour l'ordre 1 l'hypothèse est $\frac{1}{R} + \frac{n_1}{n_0} > 0$ et pour l'ordre 2 les hypothèses sont $\frac{1}{R} + \frac{n_1}{n_0} = 0$ et $\frac{2}{R^2} - \frac{n_2}{n_0} > 0$.

On suppose que V a les développements de Taylor suivant

$$\begin{aligned} V(r) &= \mu_q |r-R|^q + \mathcal{O}\left((r-R)^{q+1}\right) && \text{pour } r \to R^- \\ V(r) &= n_0^2 - 1 + \mathcal{O}\left(r-R\right) && \text{pour } r \to R^+ \end{aligned}$$

où $q > 2$ est un entier et $\mu_q > 0$ est une constante. Dans ce cas, le potentiel V a un minimum local en R d'ordre q du côté $[0,R]$. Comme dans les sections 6.3 et 6.4, on peut calculer un développement asymptotique des quasi-résonances de manière similaire. On fait les mises à l'échelle suivantes :

$$\sigma = h^{-\alpha}(r-R) < 0 \qquad \text{et} \qquad \rho = h^{-1}(r-R) > 0$$

où $\alpha = \frac{2}{q+2}$. Et on cherche les quasi-modes et les quasi-résonances sous la forme

$$\varphi(\sigma) = \sum_{i\geq 0} \varphi_i(\sigma) h^{\beta i}, \qquad \psi(\rho) = \sum_{i\geq 0} \psi_i(\rho) h^{\beta i} \qquad \text{et} \qquad \Lambda = h^{q\alpha} \sum_{i\geq 0} \Lambda_i h^{\beta i}$$

où $\beta = \frac{\alpha}{2}$ si q est impair et $\beta = \alpha$ si q est pair. Les termes des développements dépendent des valeurs propres et vecteurs propres du demi-oscillateur anharmonique sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-)$ suivant

$$\begin{cases} -f''(x) + |x|^q f(x) = \lambda f(x) & \text{dans } x \in \mathbb{R}_- \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

qui ne sont pas explicitement connues sauf pour $q = 1$ ou 2.

E.2 Puits plat

À titre d'exemple, on considère une cavité annulaire centré en 0 de rayon intérieur S et de rayon extérieur R où $0 < S < R$. L'indice optique n est défini par

$$n(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r < S \\ n_0 \dfrac{R}{r} & \text{si } S \leq r \leq R \\ 1 & \text{si } r > R \end{cases}$$

où $n_0 > 1$. Cette fonction n donne que $V(r) = 0$ pour tout $r \in [S, R]$ et $V(r) > 0$ pour tout $r \in \mathbb{R}_+^* \setminus [S, R]$ d'où la dénomination de puits plat. Pour construire les quasi-modes et quasi-résonances, on fait le changement de variable et mises à l'échelle suivants

$$\begin{cases} \sigma = h^{-1}(r - S) & \text{si } r < S \\ x = \ln(r) & \text{si } S < r < R \\ \rho = h^{-1}(r - R) & \text{si } r > R \end{cases}$$

et on cherche les quasi-modes et quasi-résonances sous la forme

$$w(r) = \begin{cases} \sum_{i \geq 0} \varphi_i(\sigma) h^i & \text{si } r < S \\ \sum_{i \geq 0} v_i(x) h^i & \text{si } S < r < R \\ \sum_{i \geq 0} \psi_i(\rho) h^i & \text{si } r > R \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \Lambda = h^2 \sum_{i \geq 0} \Lambda_i h^i.$$

On injecte ces ansatzs dans (E.1), on développe en h. On récupère tout les termes devant h^0, on obtient trois equations différentielles, en les résolvant on obtient, pour $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \left(\frac{(j+1)\pi}{\ln(R) - \ln(S)} \right)^2 + \frac{(p-1)^2}{4} \\ \varphi_0(\sigma) &= 0 \\ v_0(x) &= \left[A \cos\left(\frac{(j+1)\pi x}{\ln(R) - \ln(S)} \right) + B \sin\left(\frac{(j+1)\pi x}{\ln(R) - \ln(S)} \right) \right] \mathrm{e}^{\frac{p-1}{2} x} \\ \psi_0(\rho) &= 0 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \sin\left(\frac{(j+1)\pi \ln(R)}{\ln(R) - \ln(S)} \right) = (-1)^{j+1} \sin\left(\frac{(j+1)\pi \ln(S)}{\ln(R) - \ln(S)} \right), \\ B &= -\cos\left(\frac{(j+1)\pi \ln(R)}{\ln(R) - \ln(S)} \right) = (-1)^{j} \cos\left(\frac{(j+1)\pi \ln(S)}{\ln(R) - \ln(S)} \right). \end{aligned}$$

Remarque E.1. Pour une étude plus générale des puits plats, dans le cadre des valeurs propres, voir [17].

Annexe F

Développement des valeurs propres du Laplacien Dirichlet

Sommaire

F.1 Le cas radial 276
F.2 Le cas général 276

Dans cette annexe, on donne les termes des développements asymptotiques des valeurs propres à modes de galerie pour le laplacien Dirichlet. Ces développements asymptotiques sont connus depuis lontemps, voir par exemple [7, 61]. On peut automatiser le calcul des termes à l'aide de scripts de calcul formel, comme fait dans l'annexe D.

Soit Ω un ouvert lisse de $\mathbb{R}^2$ dont le bord est à courbure strictement positive. On considère le problème des valeurs propres du Laplacien Dirichlet de Ω. On cherche $(k, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{H}^2(\Omega)$ avec u non nulle tel que

$$(\mathcal{P}_{\mathrm{Dir}}) \begin{cases} -\Delta u = k^2 u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}.$$

F.1 Le cas radial

Si on suppose que l'ouvert Ω est le disque centré en 0 et de rayon R, alors le problème $(\mathcal{P}_{\mathrm{Dir}})$ génère la famille de problèmes suivante pour $m \in \mathbb{Z}$: trouver $(k, w) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{H}^2(]0, R[, r\,\mathrm{d}r)$ avec w non nulle tel que

$$\begin{cases} -\frac{1}{r}\left(rw'\right)' + \frac{m^2}{r^2} w = k^2 w & \text{dans }]0, R[\\ w'(0) = 0 & \text{si } m = 0 \\ w(0) = 0 & \text{si } m \neq 0 \\ w(R) = 0 \end{cases}.$$

Pour chaque m, le spectre est composé d'une suite de valeurs propres croissante tendant vers $+\infty$, noté $k_j(m)$. De manière similaire au script écrit dans la section D.1, on peut écrire un script pour calculer les termes du développement asymptotique de $k_j(m)$ quand $m \to +\infty$ à j fixé. On a le développement suivant

$$\begin{aligned} k_j(m) = \frac{m}{R}\Bigg[1 &+ \frac{a_j}{2}\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{3a_j^2}{40}\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{4}{3}} + \frac{10 - a_j^3}{2800}\left(\frac{2}{m}\right)^{2} - \frac{a_j(479a_j^3 + 40)}{1008000}\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{8}{3}} \\ &+ \frac{a_j^2(20231a_j^3 - 55100)}{258720000}\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{10}{3}} \\ &- \frac{171389a_j^6 - 3045800a_j^3 + 4990920}{67267200000}\left(\frac{2}{m}\right)^{4} \\ &+ \mathcal{O}\left(m^{-\frac{14}{3}}\right)\Bigg] \end{aligned}$$

Remarque F.1. En fait, on peut exprimer les $k_j(m)$ en fonction des zéros des fonctions de Bessel de première espèce J_m. On a $k_j(m) = \frac{z_{m,j}}{R}$ ou $z_{m,j}$ sont les zéros rangés par ordre croissant de J_m. Le développement asymptotique précédent donne un développement asymptotique de $z_{m,j}$ quand $m \to +\infty$ à j fixé. On peut trouver le début de ces développement à la section 10.21 de [74].

F.2 Le cas général

Soit $\gamma : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \ni s \to \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ une paramétrisation curviligne de $\partial\Omega$ le bord de Ω où L est la longueur du bord. La courbe γ est supposée de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$\kappa : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ sa courbure est supposé strictement positive sur $\mathbb{R}/L\mathbb{Z}$. Sous ces hypothèses, on peut calculer un développement asymptotique des valeurs propres à modes de galerie $k_j(m)$ ou m est l'indice curviligne et j l'indice normal. La technique est similaire à celle employée dans le chapitre 8 mais en plus simple car nous n'avons pas de conditions de transmission juste une condition de Dirichlet au bord de Ω. Les quasi-modes sont cherchés sous la forme de séries formelles uniquement à l'intérieur de Ω. Les termes de l'asymptotique peuvent être calculés à l'aide d'un script similaire à celui dans la section D.1. Il est pratique d'introduire la courbure adimensionnée

$$\breve{\kappa}(\theta) \coloneqq \frac{L}{2\pi}\kappa\left(\frac{L}{2\pi}\theta\right), \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

et la moyenne sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ définie par, pour tout $w \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$,

$$\langle w \rangle \coloneqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{L}\int_0^{L} w\left(\frac{2\pi}{L}s\right)\mathrm{d}s.$$

On obtient

$$k_j(m) = \frac{2\pi m}{L}\left[1 + \frac{a_j}{2}\left\langle \breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}\right\rangle\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{a_j^2}{120}\left(10\left\langle \breve{\kappa}^{\frac{2}{3}}\right\rangle^2 - \left\langle \breve{\kappa}^{\frac{4}{3}}\right\rangle - \frac{8}{9}\left\langle \breve{\kappa}'^2\breve{\kappa}^{-\frac{8}{3}}\right\rangle\right)\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{4}{3}} + \mathcal{O}\left(m^{-2}\right)\right]$$

Bibliographie

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, vol. 55, Dover Publications, 1964.

[2] J. Aguilar and J. M. Combes, *A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians*, Communications in Mathematical Physics **22** (1971), 269–279.

[3] S. Ancey, A. Folacci, and P. Gabrielli, *Exponentially improved asymptotic expansions for resonances of an elliptic cylinder*, Journal of Physics. A. Mathematical and General **33** (2000), no. 16, 3179–3208.

[4] ———, *Whispering-gallery modes and resonances of an elliptic cavity*, Journal of Physics. A. Mathematical and General **34** (2001), no. 7, 1341–1359.

[5] J. C. Araujo-Cabarcas and C. Engström, *On spurious solutions in finite element approximations of resonances in open systems*, Computers & Mathematics with Applications **74** (2017), no. 10, 2385–2402.

[6] J. C. Araujo-Cabarcas, C. Engström, and E. Jarlebring, *Efficient resonance computations for Helmholtz problems based on a Dirichlet-to-Neumann map*, Journal of Computational and Applied Mathematics **330** (2018), 177–192.

[7] V. M. Babič and V. S. Buldyrev, *Short-wavelength diffraction theory*, Springer Series on Wave Phenomena, vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[8] I. Babuška and J. Osborn, *Eigenvalue problems*, Handbook of numerical analysis, Vol. II, North-Holland, Amsterdam, 1991, pp. 641–787.

[9] I. Babuška and B. Szabó, *Finite element analysis*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.

[10] E. Balslev and J. M. Combes, *Spectral properties of many-body Schrödinger operators with dilatation-analytic interactions*, Communications in Mathematical Physics **22** (1971), 280–294.

[11] Y. Baryshnikov, P. Heider, W. Parz, and V. Zharnitsky, *Whispering gallery modes inside asymmetric resonant cavities*, Physical Review Letters **93** (2004), 133902.

[12] J.-P. Bérenger, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, Journal of Computational Physics **114** (1994), no. 2, 185–200.

[13] F. A. Berezin and M. A. Shubin, *The Schrödinger equation*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), vol. 66, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[14] A. Bermúdez, L. Hervella-Nieto, A. Prieto, and R. Rodríguez, *An optimal perfectly matched layer with unbounded absorbing function for time-harmonic acoustic scattering problems*, Journal of Computational Physics **223** (2007), no. 2, 469–488.

[15] C. Bernardi, M. Dauge, and Y. Maday, *Spectral methods for axisymmetric domains*, Series in Applied Mathematics (Paris), vol. 3, Gauthier-Villars, Éditions Scientifiques et Médicales Elsevier, Paris ; North-Holland, Amsterdam, 1999.

[16] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, S. Fliss, and A. Tonnoir, *The halfspace matching method : a new method to solve scattering problems in infinite media*, Journal of Computational and Applied Mathematics **338** (2018), 44–68.

[17] J.-F. Bony and N. Popoff, *Low-lying eigenvalues of semiclassical Schrödinger operator with degenerate wells*, Asymptotic Analysis **112** (2019), no. 1-2, 23–36.

[18] J. H. Bramble and J. E. Pasciak, *Analysis of a Cartesian PML approximation to acoustic scattering problems in* $\mathbb{R}^2$ *and* $\mathbb{R}^3$, Journal of Computational and Applied Mathematics **247** (2013), 209–230.

[19] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011.

[20] X. Cai, D. Huang, and X. Zhang, *Numerical analysis of polarization splitter based on vertically coupled microring resonator*, Optics Express **14** (2006), no. 23, 11304–11311.

[21] Y. Capdeboscq, *On the scattered field generated by a ball inhomogeneity of constant index*, Asymptotic Analysis **77** (2012), no. 3-4, 197–246.

[22] F. Cardoso, G. Popov, and G. Vodev, *Asymptotics of the number of resonances in the transmission problem*, Communications in Partial Differential Equations **26** (2001), no. 9-10, 1811–1859.

[23] K. S. Chiang, *Analysis of rectangular dielectric waveguides : effective-index method with built-in perturbation correction*, Electronics Letters **28** (1992), no. 4, 388–390.

[24] J. Cho, I. Kim, S. Rim, G.-S. Yim, and C.-M. Kim, *Outer resonances and effective potential analogy in two-dimensional dielectric cavities*, Physics Letters A **374** (2010), no. 17, 1893 – 1899.

[25] J. Cho, S. Rim, and C.-M. Kim, *Dynamics of morphology-dependent resonances by openness in dielectric disks for te polarization*, Physics Letters A **83** (2011), 043810.

[26] A. H. W. Choi, *Handbook of optical microcavities*, Pan Stanford Publishing, 2014.

[27] R. Cimpeanu, A. Martinsson, and M. Heil, *A parameter-free perfectly matched layer formulation for the finite-element-based solution of the Helmholtz equation*, Journal of Computational Physics **296** (2015), 329–347.

[28] D. Colton and R. Kress, *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, third ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 93, Springer, New York, 2013.

[29] M. Costabel and M. Dauge, *Maxwell eigenmodes in product domains*, Maxwell's Equations, Analysis and Numerics (Ulrich Langer, Dirk Pauly, and Sergey I. Repin, eds.), Radon Series on Computational and Applied Mathematics, De Gruyter, 2019.

[30] K. Dadashi, H. Kurt, K. Üstün, and R. Esen, *Graded index optical microresonators : analytical and numerical analyses*, Journal of the Optical Society of America B **31** (2014), no. 9, 2239–2245.

[31] S. A. Degtyarev, V. V. Podlipnov, P. Verma, and S. N. Khonina, *3D simulation of silicon micro-ring resonator with comsol*, Proceedings Volume 10224, International Conference on Micro- and Nano-Electronics, 2016.

[32] L. M. Delves and J. N. Lyness, *A numerical method for locating the zeros of an analytic function*, Mathematics of Computation **21** (1967), 543–560.

[33] S. Dyatlov and M. Zworski, *Mathematical theory of scattering resonances*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 200, American Mathematical Society, 2019.

[34] J. Galkowski, *The quantum Sabine law for resonances in transmission problems*, Pure and Applied Analysis **1** (2019), 27–100.

[35] J. Gao, P. Heider, C. J. Chen, X. Yang, C. A. Husko, and C. W. Wong, *Observations of interior whispering gallery modes in asymmetric optical resonators with rational caustics*, Applied Physics Letters **91** (2007), no. 18, 181101.

[36] C. Geuzaine and J.-F. Remacle, *Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **79** (2009), no. 11, 1309–1331.

[37] I. S. Grudinin and N. Yu, *Finite-element modeling of coupled optical microdisk resonators for displacement sensing*, Journal of the Optical Society of America B **29** (2012), no. 11, 3010–3014.

[38] S. C. Hagness, D. Rafizadeh, S. T. Ho, and A. Taflove, *FDTD microcavity simulations : design and experimental realization of waveguide-coupled single-mode ring and whispering-gallery-mode disk resonators*, Journal of Lightwave Technology **15** (1997), no. 11, 2154–2165.

[39] T. Harayama and S. Shinohara, *Two-dimensional microcavity lasers*, Laser & Photonics Reviews **5** (2011), no. 2, 247–271.

[40] H. Haus, W. Huang, S. Kawakami, and N. Whitaker, *Coupled-mode theory of optical waveguides*, Journal of Lightwave Technology **5** (1987), no. 1, 16–23.

[41] J. Heebner, R. Grover, and T. Ibrahim, *Optical microresonators : Theory, fabrication, and applications*, Optical Sciences 138, Springer-Verlag New York, 2008.

[42] P. Heider, *Computation of scattering resonances for dielectric resonators*, Computers & Mathematics with Applications **60** (2010), no. 6, 1620–1632.

[43] B. Helffer, *Spectral theory and its applications*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 139, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[44] B. Helffer and J. Sjöstrand, *Résonances en limite semi-classique*, Mémoires de la Société Mathématique de France. Nouvelle Série (1986), no. 24-25, iv+228.

[45] K. R. Hiremath, R. Stoffer, and M. Hammer, *Modeling of circular integrated optical microresonators by 2-d frequency domain coupled mode theory*, Optics Communications **257** (2006), no. 2, 277 – 297.

[46] P. D. Hislop and I. M. Sigal, *Introduction to spectral theory, with applications to schrödinger operators*, Applied Mathematical Sciences, vol. 113, Springer-Verlag, New York, 1996.

[47] T. Hohage and L. Nannen, *Hardy space infinite elements for scattering and resonance problems*, SIAM Journal on Numerical Analysis **47** (2009), no. 2, 972–996.

[48] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. I*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 256, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[49] J. D. Hunter, *Matplotlib : A 2D graphics environment*, Computing in Science & Engineering **9** (2007), no. 3, 90–95.

[50] V. S. Ilchenko, A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, and L. Maleki, *Dispersion compensation in whispering-gallery modes*, Journal of the Optical Society of America A **20** (2003), no. 1, 157–162.

[51] B. R. Johnson, *Theory of morphology-dependent resonances : shape resonances and width formulas*, Journal of the Optical Society of America A **10** (1993), no. 2, 343–352.

[52] E. Jones, T. Oliphant, P. Peterson, et al., *SciPy : Open source scientific tools for Python*, http://www.scipy.org/, 2001–.

[53] I. Kim, J. Cho, Y. Kim, B. Min, J.-W. Ryu, S. Rim, and M. Choi, *Husimi functions at gradient index cavities designed by conformal transformation optics*, Optics Express **26** (2018), no. 6, 6851–6859.

[54] S. Kim, *Cartesian PML approximation to resonances in open systems in* $\mathbb{R}^2$, Applied Numerical Mathematics **81** (2014), 50–75.

[55] S. Kim and J. E. Pasciak, *The computation of resonances in open systems using a perfectly matched layer*, Mathematics of Computation **78** (2009), no. 267, 1375–1398.

[56] ———, *Analysis of a Cartesian PML approximation to acoustic scattering problems in* $\mathbb{R}^2$, Journal of Mathematical Analysis and Applications **370** (2010), no. 1, 168–186.

[57] ———, *Analysis of the spectrum of a Cartesian perfectly matched layer (PML) approximation to acoustic scattering problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **361** (2010), no. 2, 420–430.

[58] Y. Kim, S.-Y. Lee, J.-W. Ryu, I. Kim, J.-H. Han, H.-S. Tae, M. Choi, and B. Min, *Designing whispering gallery modes via transformation optics*, Nature Photonics **10** (2016), 647.

[59] C. C. Lam, P. T. Leung, and K. Young, *Explicit asymptotic formulas for the positions, widths, and strengths of resonances in mie scattering*, Journal of the Optical Society of America B **9** (1992), no. 9, 1585–1592.

[60] J. Lanzoni, *Numerical computation of resonances and pseudospectra in acoustic scattering*, Phd thesis, University College of London, 2016.

[61] V. F. Lazutkin, *Asymptotic analysis of the eigenvalues of the Laplace operator, and quasimodes. A series of quasimodes that corresponds to a system of caustics that are close to the boundary of the domain*, Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya **37** (1973), 437–465.

[62] R. B. Lehoucq, D. C. Sorensen, and C. Yang, *ARPACK users' guide*, Software, Environments, and Tools, vol. 6, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1998.

[63] B. E. Little and W. P. Huang, *Coupled-mode theory for optical waveguides*, Progress In Electromagnetics Research **10** (1995), 217–270.

[64] W. McLean, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[65] A. Meurer, O. Čertík, et al., *SymPy : symbolic computing in python*, PeerJ Computer Science **3** (2017), e103.

[66] A. Moiola and E. A. Spence, *Acoustic transmission problems : wavenumber-explicit bounds and resonance-free regions*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences **29** (2019), no. 2, 317–354.

[67] Z. Najafi, M. Vahedi, and A. Behjat, *The role of refractive index gradient on sensitivity and limit of detection of microdisk sensors*, Optics Communications **374** (2016), 29 – 33.

[68] L. Nannen, T. Hohage, A. Schädle, and J. Schöberl, *Exact sequences of high order Hardy space infinite elements for exterior Maxwell problems*, SIAM Journal on Scientific Computing **35** (2013), no. 2, A1024–A1048.

[69] L. Nannen and A. Schädle, *Hardy space infinite elements for Helmholtz-type problems with unbounded inhomogeneities*, Wave Motion. An International Journal Reporting Research on Wave Phenomena **48** (2011), no. 2, 116–129.

[70] L. Nannen and M. Wess, *Computing scattering resonances using perfectly matched layers with frequency dependent scaling functions*, BIT. Numerical Mathematics **58** (2018), no. 2, 373–395.

[71] J. Niegemann, W. Pernice, and K. Busch, *Simulation of optical resonators using DGTD and FDTD*, Journal of Optics A : Pure and Applied Optics **11** (2009), no. 11, 114015.

[72] Travis E Oliphant, *A guide to NumPy*, vol. 1, Trelgol Publishing USA, 2006.

[73] F. W. J. Olver, *Asymptotics and special functions*, AKP Classics, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1997.

[74] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark (eds.), *NIST handbook of mathematical functions*, U.S. Department of Commerce, National Institute of Standards and Technology, Washington, DC ; Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[75] M. Oxborrow, *Traceable 2-D finite-element simulation of the whispering-gallery modes of axisymmetric electromagnetic resonators*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques **55** (2007), no. 6, 1209–1218.

[76] R. Parini, *Cxroot : Find all the roots (zeros) of a complex analytic function within a given contour in the complex plane*, https://pypi.org/project/cxroots/, 2017–.

[77] M. H. P. Pfeiffer, J. Liu, M. Geiselmann, and T. J. Kippenberg, *Coupling ideality of integrated planar high-Q microresonators*, Physical Review Applied **7** (2017), 024026.

[78] G. Popov and G. Vodev, *Resonances for transparent obstacles*, Journées "Équations aux Dérivées Partielles" (Saint-Jean-de-Monts, 1999), Univ. Nantes, France, 1999, pp. Exp. No. X, 13.

[79] ———, *Resonances near the real axis for transparent obstacles*, Communications in Mathematical Physics **207** (1999), no. 2, 411–438.

[80] J. W. S. Rayleigh, *CXII. The problem of the whispering gallery*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **20** (1910), no. 120, 1001–1004.

[81] ———, *IX. Further applications of Bessel's functions of high order to the Whispering Gallery and allied problems*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **27** (1914), no. 157, 100–109.

[82] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I*, second ed., Academic Press, New York, 1980.

[83] G. Righini, Y. Dumeige, P. Feron, M. Ferrari, G. Nunzi Conti, D. Ristić, and S. Soria, *Whispering gallery mode microresonators : Fundamentals and applications*, La Rivista del Nuovo Cimento **34** (2011), 435.

[84] C. Rivière, *Resonances for the transmission problem and in linear elasticity*, Phd thesis, Université de Nantes, 2005.

[85] S. Schiller, *Asymptotic expansion of morphological resonance frequencies in Mie scattering*, Applied Optics **32** (1993), no. 12, 2181–2185.

[86] N. Schlömer et al., *Meshio*, https://pypi.org/project/meshio/, 2015–.

[87] C. Schwab, *p- and hp-finite element methods*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[88] E. L. Silakov, *Application of the ray method to the computation of complex eigenvalues*, Journal of Soviet Mathematics **9** (1978), no. 4, 612–619.

[89] J. Sjöstrand, *A trace formula and review of some estimates for resonances*, Microlocal analysis and spectral theory (Lucca, 1996), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 490, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, pp. 377–437.

[90] J. Sjöstrand and M. Zworski, *Complex scaling and the distribution of scattering poles*, Journal of the American Mathematical Society **4** (1991), no. 4, 729–769.

[91] P. Stefanov, *Quasimodes and resonances : sharp lower bounds*, Duke Mathematical Journal **99** (1999), no. 1, 75–92.

[92] ———, *Resonances near the real axis imply existence of quasimodes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique **330** (2000), no. 2, 105–108.

[93] O. Steinbach and G. Unger, *Combined boundary integral equations for acoustic scattering-resonance problems*, Mathematical Methods in the Applied Sciences **40** (2017), no. 5, 1516–1530.

[94] S.-H. Tang and M. Zworski, *From quasimodes to resonances*, Mathematical Research Letters **5** (1998), no. 3, 261–272.

[95] L. N. Trefethen, *Spectral methods in MATLAB*, Software, Environments, and Tools, vol. 10, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000.

[96] J. Wiersig, *Boundary element method for resonances in dielectric microcavities*, Journal of Optics A : Pure and Applied Optics **5** (2002), no. 1, 53–60.

[97] XLiFE++, *Librairie FEM-BEM C++, devellopée conjointement par les laboratoires IRMAR et POems*, https://uma.ensta-paristech.fr/soft/XLiFE++/, 2014–.

[98] A. Yariv, *Coupled-mode theory for guided-wave optics*, IEEE Journal of Quantum Electronics **9** (1973), no. 9, 919–933.

[99] M. Zworski, *Resonances in physics and geometry*, Notices of the American Mathematical Society **46** (1999), no. 3, 319–328.

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE MATHSTIC

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Titre : Étude mathématique et numérique des résonances dans une micro-cavité optique

Mot clés : Équations aux dérivées partielles ; Analyse numérique ; Analyse semiclassique ; Équation d'Helmholtz ; Résonances de *scattering*.

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude des fréquences de résonance de cavités optiques bidimensionnelles. Plus particulièrement, on s'intéresse aux résonances à modes de galerie (modes localisés au bord de la cavité avec un grand nombre d'oscillations).

La première partie traite du calcul numérique des résonances par la méthode des éléments finis à l'aide de couches parfaitement adaptées, et d'une analyse de sensibilité des paramètres de celles-ci dans les trois situations suivantes : un problème unidimensionnel, une réduction du cas bidimensionnel invariant par rotation et le cas général.

La deuxième partie porte sur la construction de développements asymptotiques des résonances à modes de galerie quand le nombre d'oscillations le long du bord tend vers l'infini. On considère d'abord le cas d'un problème invariant par rotation pour lequel le nombre d'oscillations s'interprète comme un paramètre semiclassique grâce à la transformée de Fourier angulaire. Ensuite, pour le cas général, la construction utilise un ansatz phase-amplitude de type BKW qui permet de se ramener à un opérateur de Schrödinger généralisé. Enfin, les résonances calculées numériquement dans la première partie sont comparées aux développements asymptotiques explicités par calcul formel.

Title: Mathematical and numerical study of resonances in optical micro-cavities

Keywords: Partial differential equations; Numerical analysis; Semiclassical analysis; Helmholtz equation; Scattering resonances.

Abstract: This thesis is devoted to the study of resonance frequencies of bidimensional optical cavities. More specifically, we are interested in whispering-gallery modes (modes localized along the cavity boundary with a large number of oscillations).

The first part deals with the numerical computation of resonances by the finite element method using perfectly matched layers, and with a sensibility analysis in the three following situations: an unidimensional problem, a reduction of the rotationally invariant bidimensional case, and the general case.

The second part focuses on the construction of asymptotic expansions of whispering-gallery modes as the number of oscillations along of boundary goes to infinity. We start by considering the case of a rotationally invariant problem for which the number of oscillations can be interpreted as a semiclassical parameter by means of an angular Fourier transform. Next, for the general case, the construction uses a phase-amplitude ansatz of WKB type which leads to a generalized Schrödinger operator. Finally, the numerically computed resonances obtained in the first part are compared to the asymptotic expansions made explicit by the use of a computer algebra software.