



Caractérisation expérimentale et modélisation de solutions amortissantes pour la réduction des transferts vibratoires et la stabilisation de systèmes embarqués

Kévin Jaboviste

► To cite this version:

Kévin Jaboviste. Caractérisation expérimentale et modélisation de solutions amortissantes pour la réduction des transferts vibratoires et la stabilisation de systèmes embarqués. Vibrations [physics.class-ph]. Université Bourgogne Franche-Comté, 2018. Français. NNT : 2018UBFCD068 . tel-02313462

HAL Id: tel-02313462

<https://theses.hal.science/tel-02313462>

Submitted on 11 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE L'ETABLISSEMENT UNIVERSITE BOURGOGNE FRANCHE-COMTE

PREPAREE À l'Institut FEMTO-ST, Département Mécanique Appliquée, Besançon

Ecole doctorale n°37

Ecole Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur et Microtechniques

Doctorat de Sciences pour l'Ingénieur

Par

M. Kévin JABOVISTE

**Caractérisation expérimentale et modélisation de solutions amortissantes
pour la réduction des transferts vibratoires et la stabilisation de systèmes embarqués**

Thèse soutenue le 14 décembre 2018

Composition du Jury :

Guilhem MICHON
Anas BATOU
Étienne BALMÈS
Pierre-Oliver MATTEI
Gaël CHEVALLIER
Emeline SADOULET-REBOUL
Nicolas PEYRET
Charles ARNOULD
Éric COLLARD

Professeur des Universités, Institut Clément Ader
Professeur des Universités, Laboratoire MSME
Professeur des Universités, Arts et Métiers ParisTech
Chargé de Recherche, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique
Professeur des Universités, FEMTO-ST
Maître de Conférences HDR, FEMTO-ST
Maître de Conférences, Laboratoire QUARTZ
Ingénieur calculs, Thales LAS France
Responsable Bureau d'Études, Thales LAS France

Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Directeur de thèse
Codirectrice de thèse
Examineur
Invité
Invité

REMERCIEMENTS

Pouf ça y est, trois années viennent de s'écouler sans que l'on ne s'en rende compte et on se retrouve maintenant devant ce dernier "chapitre" à rédiger : les remerciements. Bizarrement, on y pense plusieurs fois durant la thèse en se disant : "Faudra pas que j'oublie de citer son prénom!", mais quand on y est, on a toujours peur d'oublier quelqu'un ... enfin comme on dit : quand faut y aller faut y aller.

Je voudrais commencer par remercier les membres de mon jury, Étienne, Anas, Guilhem et Pierre-Olivier pour avoir pris le temps de s'intéresser aux travaux menés durant cette thèse et pour s'être déplacés afin d'assister à la soutenance. Les nombreux échanges avec eux me laisseront un très beau souvenir de cet exercice.

Je remercie Thales pour avoir financé cette thèse et en particulier Charles et Éric pour l'ensemble de nos échanges technico-historiques qui m'ont permis de comprendre à la fois les problématiques du bureau d'étude mécanique mais aussi les rouages de l'histoire de France. Merci aussi pour la confiance et la liberté que vous nous avez accordés durant ces trois années. J'en profite pour remercier les membres de ce bureau d'étude, notamment Michel, Raymond, Sébastien, Patrick, Jean-Claude, Alain, Julien et tant d'autres, qui m'ont accueilli et m'ont permis de me sentir à l'aise très rapidement malgré mes a priori sur la région parisienne. Mention spéciale à Guillaume, Gaëtan, Henri, Benjamin, Vincent et Clément pour les réunions "team building" et votre bonne humeur.

Je tiens également à remercier le reste de mon équipe encadrante sans laquelle cette thèse n'aurait pas eu la même saveur. Merci Nicolas pour ton soutien, ta réactivité, et ta capacité à déconner en toutes circonstances (sauf quand on s'en prend à ton téléphone portable). J'adresse des remerciements tout particuliers à Gaël et Émeline qui, non content d'avoir été présents tout au long de ma thèse pour m'épauler, me sortir des ronces (ou m'y pousser) et me guider comme des parents avec un enfant, m'ont vraiment inspiré aussi bien au niveau professionnel que personnel. Ils m'ont donné l'opportunité de m'épanouir et je me rends compte de la chance que j'ai eu de les croiser. Je n'aurais pas de mots assez forts pour leur exprimer ma gratitude. Merci pour tout.

Durant cette thèse, j'ai aussi eu la chance de passer de très bons moments au Département Mécanique Appliquée. Je remercie l'ensemble des membres de ce dé-

partement qui contribuent à le transformer en lieu de travail vivant et agréable. Je pense notamment à Christine, Isabelle, Delphine, Thomas, Vincent T., Clément, Vugar, Tristan et Adrien sans qui certaines tâches ne seraient pas aussi simples. Je voudrais aussi remercier Morvan, Scott, Manu F. et David R. pour les échanges scientifiques et techniques que nous avons eus mais aussi pour la patience et la bienveillance dont ils font preuve avec les "jeunes". Merci aussi à Fred, Violaine, Betty A., Vincent P., Manu R. et Anne pour les discussions et les bonnes rigolades entre midi et deux autour d'un petit dessert maison.

Mais dans un laboratoire, il n'y pas que des "grands", il y a aussi les doctorants et les post-doctorants avec lesquels j'ai traversé ces années de thèse dans une bonne ambiance. Je remercie en particulier les membres de mon bureau, le 44H. Victor pour son calme et sa tolérance envers mes petits moments de folie. Romain pour les discussions passionnées, portant aussi bien sur la musique que sur toutes les formes de sciences. Justine pour sa gentillesse, son soutien, ses pulls et surtout pour tous les gouters qui n'auraient pas été aussi bien sans ses gâteaux. Alessandra, notre rayon de soleil italien parfois mal luné, pour son sourire, sa bienveillance, son petit brin de folie et pour tous les échanges que nous avons eu. Pour finir, merci à Pauline pour son accueil chaleureux, sa vitalité, sa bienveillance (oui encore) et pour tout le reste. Je voudrais aussi remercier les "jeunes" du 42H, Gaël M., Ludo, Svenja, Margaux et Manu B. avec lesquels j'ai passé de très bons moments (notamment au ski). Une dédicace spéciale à Ludo et à Svenja pour le "petit verre tranquille" ainsi qu'à Margaux pour tout un tas de choses trop longues à écrire (toi même tu sais).

Enfin, je tiens à remercier mes amis et ma famille qui m'ont soutenu durant cette aventure.

Merci à mes parents pour m'avoir laissé toute la liberté dont j'avais besoin ces dernières années pour me permettre de grandir sur bien des aspects et de m'épanouir. Une pensée particulière à ma mère et à toutes les qualités qui la caractérisent pour supporter un garçon toujours en vadrouille et pas vraiment adepte des coups de fils en plus d'une fille énergivore. Puisqu'on en parle, merci à ma petite sœur sans laquelle je n'aurais pas été le même aujourd'hui ainsi qu'à mes grand-parents pour leur présence et pour les valeurs qu'ils m'ont transmis. Je tiens aussi à saluer ma marraine et sa famille avec lesquels nous partageons des liens étroits et qui ont traversé la France pour assister à la soutenance.

Pour finir, je tiens à remercier du fond du cœur mes amis, qui forment pour moi une seconde famille avec laquelle j'ai encore vécu des moments vraiment trop cools durant ces trois années de thèse et qui m'ont aidé à bien m'aérer l'esprit. Je pense en particulier à ceux rencontrés en école d'ingénieur : Laurie, Marc, Michaël, Gava, Nico, Antoine et Clémentine mais aussi à ceux dont j'ai croisé le chemin dans un petit internat d'un lycée nîmois lors des années de prépa : Titi et Léa, Xavier, Dume, Estelle, Alex, Arthur, Magali, Aurélie et Dimitri, et encore à d'autres... Mention spéciale au soutien de Xavier, d'Arthur et d'Estelle en début de thèse ainsi qu'à Alex et à ces séjours à Birmingham, à Milan et à Hong-Kong. Merci beaucoup.

TABLE DES MATIÈRES

1	Introduction	9
1.1	Contexte industriel	9
1.2	Limitation des transferts vibratoires par amortisseurs intégrant des éléments viscoélastiques	12
1.2.1	État des lieux	12
1.2.2	Focus sur les éléments viscoélastiques	12
1.2.3	Objectifs de la thèse	14
1.3	Réduction vibratoire de la structure du système optronique embarqué	14
1.3.1	État des lieux	14
1.3.2	Focus sur les absorbeurs dynamiques	15
1.3.3	Objectifs de la thèse	17
1.4	Organisation du manuscrit	18
2	Caractérisation dynamique des élastomères et modélisation du comportement viscoélastique	21
2.1	Caractérisation dynamique élastomère	22
2.1.1	Introduction aux méthodes de caractérisation dynamique . . .	22
2.1.2	Caractérisation mécanique par Analyse Mécanique Dynamique	25
2.2	Modélisation du comportement viscoélastique	34
2.2.1	Introduction à la viscoélasticité linéaire	34
2.2.2	Modèles rhéologiques standards	36
2.2.3	Identification des paramètres du modèle de Maxwell Généralisé	43
2.3	Conclusion	50
3	Simulations par éléments finis du comportement dynamique linéaire des structures viscoélastiques	53
3.1	Introduction aux méthodes de réduction de modèle en mécanique . .	55
3.2	Formulation du problème éléments finis avec comportement viscoélastique	61
3.2.1	Formulation éléments finis d'une structure intégrant des éléments viscoélastiques	61
3.2.2	Réduction de modèle	65
3.3	Analyse modale complexe de l'amortisseur à lames et corrélation calculs-essais	68

TABLE DES MATIÈRES

3.3.1	Analyse modale complexe pour l'amortisseur à lames intégrant le silicone ou le tBA/PEGDMA	68
3.3.2	Corrélation essais/calculs pour le cas de l'amortisseur intégrant le silicone	71
3.4	Modélisation de structures viscoélastiques avec dépendance à la fréquence et à la température	73
3.4.1	Introduction de la dépendance à la température dans le modèle d'amortissement structural et le modèle de Maxwell Généralisé	74
3.4.2	Effet de la température sur le comportement dynamique de la structure	77
3.5	Conclusions et discussions	83
4	Étude de la robustesse des solutions amortissantes viscoélastiques	85
4.1	Introduction	86
4.1.1	Contexte général de l'étude	86
4.1.2	Définition des incertitudes	88
4.1.3	Modélisation des incertitudes et propagation dans les modèles	89
4.1.4	Introduction à l'analyse de robustesse et à l'optimisation en présence d'incertitudes	92
4.1.5	Présentation de l'approche Info-Gap	97
4.2	Analyse de robustesse basée sur la méthode Info-Gap	99
4.2.1	Formulation du problème Info-Gap lié à l'amortisseur	100
4.2.2	L'analyse de robustesse comme outil de conception	101
4.3	Conclusions et perspectives	102
5	Investigation sur le comportement non-linéaire d'un amortisseur avec élastomères	105
5.1	Contexte de l'étude et stratégie d'analyse du comportement non-linéaire d'une structure	106
5.2	Caractérisation des phénomènes non-linéaires présents dans l'amortisseur	113
5.2.1	Nature et localisation des non-linéarités	113
5.2.2	Caractérisation du comportement non-linéaire des élastomères chargés	114
5.2.3	Impact des butées sur le comportement dynamique de l'amortisseur	122
5.3	Modélisation simplifiée et simulation du comportement dynamique non-linéaire de l'amortisseur	123
5.3.1	Modélisation simplifiée de l'amortisseur à lames	123
5.3.2	Identification des paramètres et simulation du comportement dynamique non-linéaire pour un modèle simplifié de l'amortisseur	126
5.4	Modélisation éléments finis et simulation du comportement dynamique non-linéaire de l'amortisseur à lames	130
5.4.1	Formulation du problème éléments finis non-linéaire	130

5.4.2	Réduction du modèle éléments finis de l'amortisseur et simulation temporelle	131
5.4.3	Évaluation de la contribution des non-linéarités sur le comportement mécanique de l'amortisseur	135
5.5	Conclusions et perspectives	138
6	Conception d'un dispositif de contrôle des vibrations passif et robuste basé sur l'implantation d'un MTMD	141
6.1	Contexte de l'étude	142
6.2	Étude numérique du comportement dynamique d'une structure couplée à un MTMD	146
6.2.1	Conception du MTMD et formulation éléments finis du système global	146
6.2.2	Optimisation du réglage du MTMD	149
6.2.3	Analyse de robustesse du MTMD optimisé par la méthode Info-Gap	154
6.2.4	Méthode de conception robuste appliquée au MTMD nominal	158
6.2.5	Conclusion de l'étude numérique	162
6.3	Étude expérimentale du comportement dynamique d'une structure couplée à un MTMD	164
6.3.1	Conception d'un MTMD externe au SO	165
6.3.2	Essais vibratoires sur le SO et corrélation calculs/essais	168
6.3.3	Essais vibratoires sur le SO couplé au MTMD	172
6.4	Conclusion de chapitre	179
	Conclusions générales et perspectives	181
	Contributions	185
A	Modèle thermo-mécanique dans le cas d'un matériau viscoélastique respectant l'équivalence temps-température	187
B	Résultats complémentaires sur l'optimisation déterministe d'un MTMD	189
B.1	Critère d'optimisation : amortissement modal	189
B.2	Résultats de la procédure d'optimisation avec le critère d'amortissement modal	190
	Bibliographie	207
	Listes des figures	213
	Listes des tables	215

INTRODUCTION

Sommaire

1.1	Contexte industriel	9
1.2	Limitation des transferts vibratoires par amortisseurs intégrant des éléments viscoélastiques	12
1.2.1	État des lieux	12
1.2.2	Focus sur les éléments viscoélastiques	12
1.2.3	Objectifs de la thèse	14
1.3	Réduction vibratoire de la structure du système optro- nique embarqué	14
1.3.1	État des lieux	14
1.3.2	Focus sur les absorbeurs dynamiques	15
1.3.3	Objectifs de la thèse	17
1.4	Organisation du manuscrit	18

PRÉAMBULE

Ce chapitre présente le contexte industriel et les problématiques qui seront abordées dans le manuscrit. La thèse est une thèse CIFRE financée par *Thales LAS Fr* et porte sur la caractérisation expérimentale et la modélisation de solutions amortissantes pour la réduction des transferts vibratoires et la stabilisation de systèmes embarqués.

1.1 CONTEXTE INDUSTRIEL

Tant au niveau industriel qu'au niveau universitaire, la maîtrise des transferts vibratoires s'avère être un thème de recherche majeur. Quels que soient les secteurs d'activités et les applications, les vibrations provoquées par les écoulements

aérodynamiques, les machines tournantes et les chocs sont la source de nombreuses nuisances. Ces problématiques sont au cœur des activités du bureau d'étude mécanique de *Thales LAS Fr* où est effectuée la conception des structures hébergeant les systèmes optroniques. Ces systèmes forment le cœur de compétences de cette entité *Thales* et les études mécaniques doivent pallier deux problématiques différentes issues des transferts vibratoires :

- l'altération des performances optiques : l'objectif est la stabilisation des capteurs afin d'améliorer la qualité des mesures et des images ;
- la fatigue mécanique : l'objectif est d'améliorer l'endurance et la fiabilité des systèmes.

De ces deux aspects, le premier s'avère être le plus sensible surtout lorsque les appareils optroniques sont utilisés dans des produits comme les PoD de désignation laser (Figure 1.1).



FIGURE 1.1 – Photo d'un PoD de désignation laser fixé sous un avion de chasse de type Rafale

La Figure 1.2 présente un schéma de système optronique embarqué. Celui-ci est lié au système porteur par le biais de liaisons et de suspensions.

En terme d'amortissement vibratoire, les objectifs sont ambitieux. En effet, malgré des environnements mécaniques et thermiques sévères (plusieurs "g RMS" et une plage de température de $150^{\circ}K$) entachés d'incertitudes, la stabilisation des capteurs dans toutes les directions de l'espace doit être telle que les déviations de faisceau optique ne puissent pas excéder quelques micromètres en translation et quelques micro-radians en rotation.

Leurs attentes peuvent être résumées en deux objectifs technologiques majeurs :

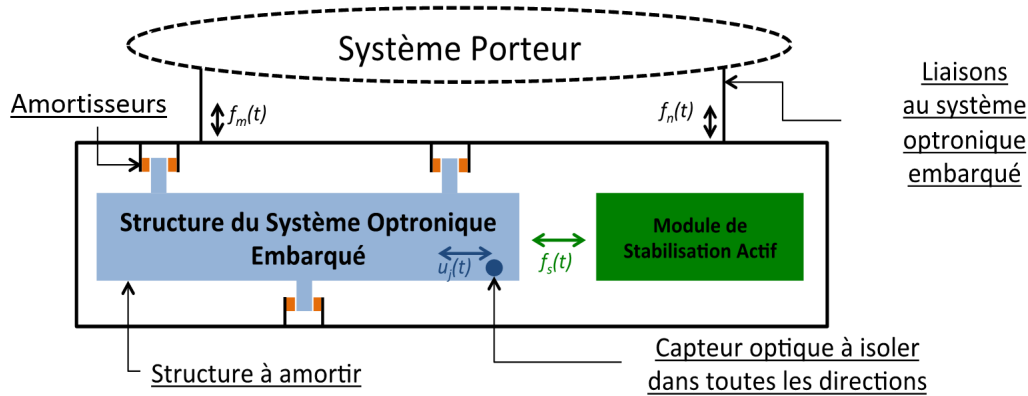


FIGURE 1.2 – Schéma d'un système optique embarqué

- Une réduction très importante du niveau vibratoire en entrée du système optronique pour limiter ses mouvements. Dans les liaisons, le transfert vibratoire est très localisé spatialement. Il est donc très important d'obtenir une forte atténuation sur les fonctions de transfert au niveau de ces éléments.
- Une augmentation de l'amortissement des structures qui hébergent les capteurs optroniques. Ce point est plus délicat, puisque les voies de transfert vibratoires sont multiples à l'intérieur de la structure. Il est donc important de connaître finement le comportement dynamique de la structure qui est parfois assez complexe. Cette connaissance de la structure doit permettre d'effectuer un choix et un dimensionnement du dispositif anti-vibratoire.

À l'heure actuelle le premier objectif est accompli en introduisant des dispositifs de suspension entre le système porteur et le système optronique embarqué afin de limiter les transferts vibratoires des sources vers les capteurs optiques et leur électronique comme le présente le schéma Figure 1.2. Ces dispositifs sont des amortisseurs intégrant des matériaux viscoélastiques dont le comportement varie avec la fréquence et la température. La première partie du travail de thèse a porté sur l'étude de ces structures qui sont introduites en section 1.2.

Le second objectif revient quant à lui à augmenter directement la capacité d'amortissement de la structure du système optronique embarqué. En effet, dans l'avenir, l'arrivée de capteurs plus résolus nécessitera une maîtrise encore accrue des perturbations vibratoires. Aucune solution technique particulière n'étant actuellement mise en place sur les systèmes de *Thales LAS Fr*, il s'agit de proposer une stratégie de réduction des vibrations pour cette structure support. La solution envisagée est basée sur l'absorption dynamique et est introduite en section 1.3.

1.2 LIMITATION DES TRANSFERTS VIBRATOIRES PAR AMORTISSEURS INTÉGRANT DES ÉLÉMENTS VISCOÉLASTIQUES

Afin de limiter les transferts vibratoires entre les structures porteuse et embarquée, il est possible de générer de l'amortissement de manière passive en dissipant l'énergie vibratoire sous forme de chaleur. Pour y parvenir les amortisseurs qui forment le filtre mécanique à l'entrée de la structure du système optronique intègrent des élastomères.

1.2.1 ÉTAT DES LIEUX

L'amortisseur qui servira d'exemple d'application dans les premiers chapitres de cette thèse est présenté Figure 1.3. Il s'agit d'une solution brevetée par *Thales LAS Fr* [Collard 13]. Il est composé d'une structure en forme de spirale réalisée en acier inoxydable et de patchs viscoélastiques ajoutés par injection à chaud. L'élastomère utilisé est un silicone dénommé silicone SI965 par la société *GAMMA* qui travaille en partenariat avec *Thales LAS Fr*. Dans la suite du manuscrit, cet amortisseur pourra aussi être désigné par les termes : amortisseur à lames.

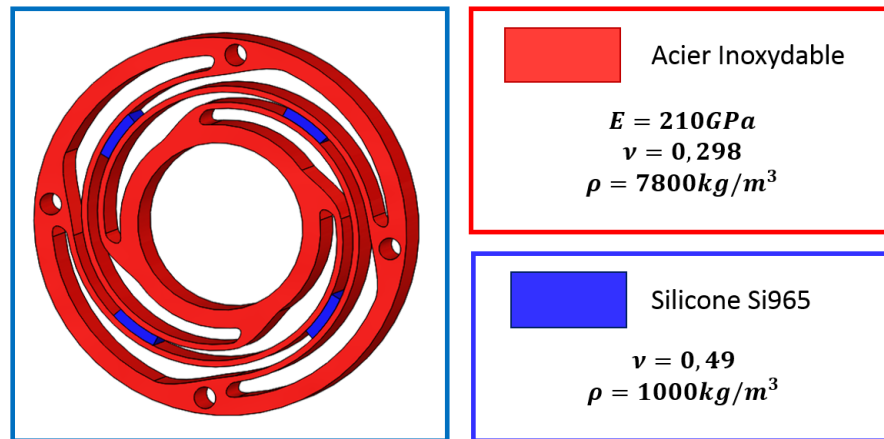


FIGURE 1.3 – CAO d'un amortisseur utilisé pour suspendre les systèmes optiques embarqués [Collard 13]

1.2.2 FOCUS SUR LES ÉLÉMENTS VISCOÉLASTIQUES

Les matériaux viscoélastiques présentent un comportement particulier entre élastique et visqueux, ce qui permet de générer des effets dissipatifs. Un exemple classique de comportement viscoélastique est présenté Figure 1.4 (gauche) où sont présentées l'évolution du module de stockage et l'évolution du facteur de perte respectivement associés à la raideur et à la capacité de dissipation d'un élastomère, ici le tBA/PEGDMA, en fonction de la température pour une fréquence donnée.

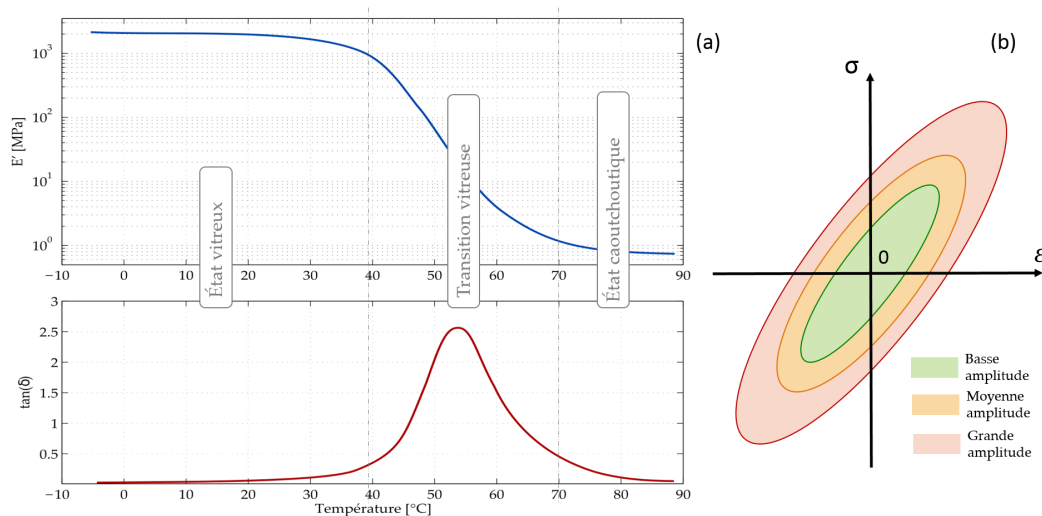


FIGURE 1.4 – Evolution d’un module de stockage (E') et du facteur de perte ($\tan\delta$) classique d’un matériau viscoélastique linéaire en fonction de la température pour une fréquence donnée [Butaud 15] (gauche) et cycle contrainte-déformation pour un essai de traction quasi-statique (droite)

Il est possible d’y distinguer trois phases propres aux matériaux viscoélastiques. À basse température, le matériau est dans son état vitreux et présente une rigidité élevée associée à un amortissement faible. À haute température, il est dans un état caoutchoutique, la rigidité et l’amortissement sont faibles. Le passage entre ces deux états, appelé transition vitreuse et caractérisé par une température de transition vitreuse, correspond au changement de phase du matériau au niveau moléculaire et se traduit, au niveau macroscopique, par une décroissance rapide de la rigidité et une augmentation importante de l’amortissement. La température de transition vitreuse dépend de la fréquence des sollicitations.

L’exploitation de ce type de matériau dans des dispositifs anti-vibratoires est particulièrement intéressante au voisinage de la phase de transition vitreuse avec des taux d’amortissement potentiellement élevés. Cependant, en plus de la dépendance des propriétés mécaniques des matériaux viscoélastiques à la température et à la fréquence, leur capacité à dissiper l’énergie sous forme de chaleur est directement liée aux taux de déformation auxquels ils sont soumis comme l’illustre la Figure 1.4 (droite). Sur ce schéma, les cycles contrainte-déformation issus d’essais de traction quasi-statique pour trois amplitudes différentes sont présentés. L’aire inscrite dans un cycle représente l’énergie dissipée au cours de ce dernier. Il apparaît alors qu’un matériau viscoélastique dissipe d’autant plus d’énergie que la sollicitation qu’il subit est importante. En conséquence, en plus de connaître ou de maîtriser la température et la fréquence à laquelle les dispositifs viscoélastiques vont être soumis, il est nécessaire de s’assurer que le taux de travail des élastomères est important. Pour y parvenir, il faut que les différences de rigidité entre les différents composants du dispositif anti-vibratoire ne soient pas trop importantes et que, pour les cas de

chargements considérés, les matériaux viscoélastiques soient correctement sollicités. Il existe donc toujours un équilibre à trouver entre la rigidité de l'élastomère et sa capacité d'amortissement en fonction de la température, de la fréquence et du taux de déformation auxquels il est soumis. Une bonne maîtrise de ces aspects permet néanmoins d'atteindre un taux d'amortissement important (jusqu'à $\xi = 25 - 30\%$).

1.2.3 OBJECTIFS DE LA THÈSE

Au vu des environnements mécaniques et thermiques auxquels est soumis l'amortisseur à lames, il est nécessaire de connaître précisément le comportement des éléments viscoélastiques en fonction de tous les paramètres dont ils dépendent, fréquence, température et amplitude de sollicitation. Actuellement, cette caractérisation n'étant pas complètement disponible au niveau du bureau d'étude, le travail de thèse a tout d'abord visé à compléter celle-ci.

D'autre part, connaissant les caractéristiques de ces dispositifs et matériaux, l'enjeu a été de développer des logiciels de simulation numérique pour aider les ingénieurs à choisir la bonne solution technologique. Pour y parvenir, des modèles mathématiques adaptés aux types de comportement (dépendant de la température et de la fréquence) et à la dynamique des sollicitations (transitoires, aléatoires, périodiques) ont été développés. Enfin, la mise en évidence lors d'une campagne expérimentale d'un comportement non linéaire de l'amortisseur a conduit à s'interroger sur les sources potentielles de ces non-linéarités, sur leur modélisation et leur simulation.

Pour finir, le champ de température instantané étant généralement méconnu, un objectif de la thèse a été le développement d'outils d'aide à la conception de ces dispositifs anti-vibratoires intégrant des éléments viscoélastiques en contexte incertain.

1.3 RÉDUCTION VIBRATOIRE DE LA STRUCTURE DU SYSTÈME OPTRONIQUE EMBARQUÉ

La seconde voie explorée afin d'atteindre les performances optiques recherchées par *Thales LAS Fr* repose sur l'augmentation de l'amortissement de la structure hébergeant les appareils optroniques.

1.3.1 ÉTAT DES LIEUX

Il s'avère que les vibrations résiduelles qui atteignent la structure des systèmes optroniques embarqués (Figure 1.2) parviennent à exciter certains modes de vibration. Le mode pouvant être problématique est le premier mode de flexion de cette structure. Il est associé à une fréquence propre f_0 qui ne sera pas divulguée dans ce manuscrit pour des raisons de confidentialité. De plus, cette fréquence propre s'avère varier durant le fonctionnement.

Une maquette représentative du système embarqué, présentée sur la Figure 1.5, est utilisée pour l'ensemble des études numériques et expérimentales. Elle est constituée d'un Support Optique (SO) en alliage d'aluminium, qui présente un premier mode de flexion semblable à celui de la structure originelle, ainsi que d'une paire de lests cylindriques représentant les appareils optroniques et d'un lest parallélépipédique correspondant à une masse ajoutée afin de se rapprocher des conditions réelles de fonctionnement.

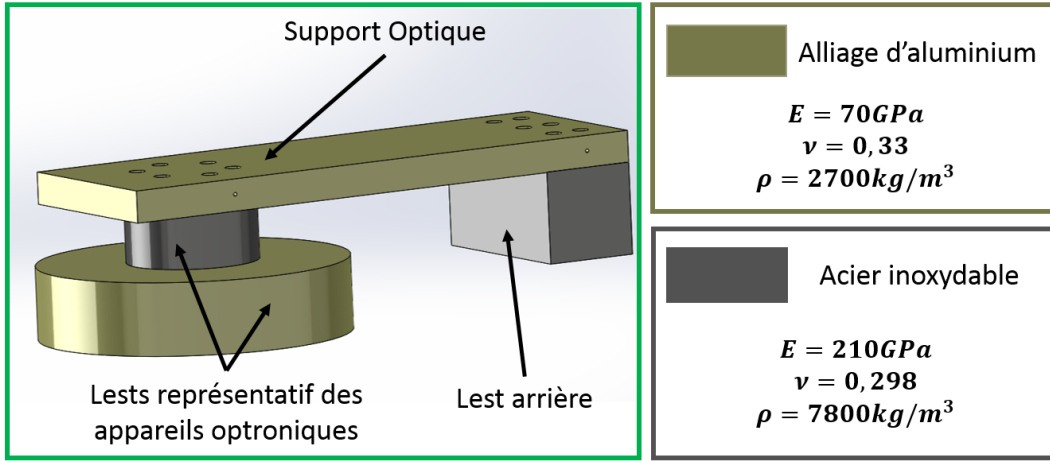


FIGURE 1.5 – CAO simplifiée du Support Optique avec ses lests représentatifs

1.3.2 FOCUS SUR LES ABSORBEURS DYNAMIQUES

Afin de contrôler un unique mode de vibration sur une bande fréquentielle restreinte, une solution technique bien reconnue est l'amortisseur à masse accordée ou, en anglais, *Tuned Mass Damper* (TMD). Un TMD est représenté par un système masse-ressort où la masse m et la raideur k sont réglables et doivent satisfaire la relation suivante :

$$2\pi f_0 = 2\pi f_{TMD} = \sqrt{k/m}, \quad (1.1)$$

de manière à absorber l'énergie vibratoire de la structure principale au voisinage de la fréquence f_0 . Afin d'améliorer cette fonction, une source de dissipation, représentée par un amortisseur c , est ajoutée. Cela permet la cohabitation de deux phénomènes, l'absorption et la dissipation. Ce type de dispositif est efficace sur une bande fréquentielle étroite et sa performance anti-vibratoire dépend fortement du réglage de ces paramètres et s'avère sensible aux dispersions inhérentes aux assemblages mécaniques.

Un exemple d'application est proposé Figure 1.7 dans le cadre bleu. Il s'agit d'une masse accordée implantée dans le gratte-ciel *Taipei 101* servant à améliorer le confort des usagers en limitant les débattements de la structure liés au vent.

La Figure 1.6 présente l'effet de l'atténuation induite par la dissipation de l'énergie vibratoire (bleu) et/ou par absorption dynamique de cette énergie (vert et rouge) par rapport à un système purement élastique (noir) sur des FRFs et au voisinage d'un mode de vibration.

Pour la dissipation, il apparaît que le niveau d'amplitude diminue par rapport au système élastique et que la fréquence propre du système global change légèrement. L'atténuation et le décalage observés sont pilotés par un ensemble de paramètres influençant directement la masse, la raideur et l'amortissement du système global. Dans le cas où l'amortissement est induit par un phénomène d'absorption avec un couplage entre la structure principale et un TMD, il apparaît que le niveau d'amplitude au voisinage de l'ancienne fréquence propre est extrêmement réduit puisqu'il s'agit maintenant d'une anti-résonance et deux nouveaux pics de résonance ont fait leur apparition. Là aussi, la répartition du niveau d'amplitude au niveau de ces deux résonances et leur écart sont directement liés aux caractéristiques de la structure primaire, de l'absorbeur et à la manière dont ils sont couplés.

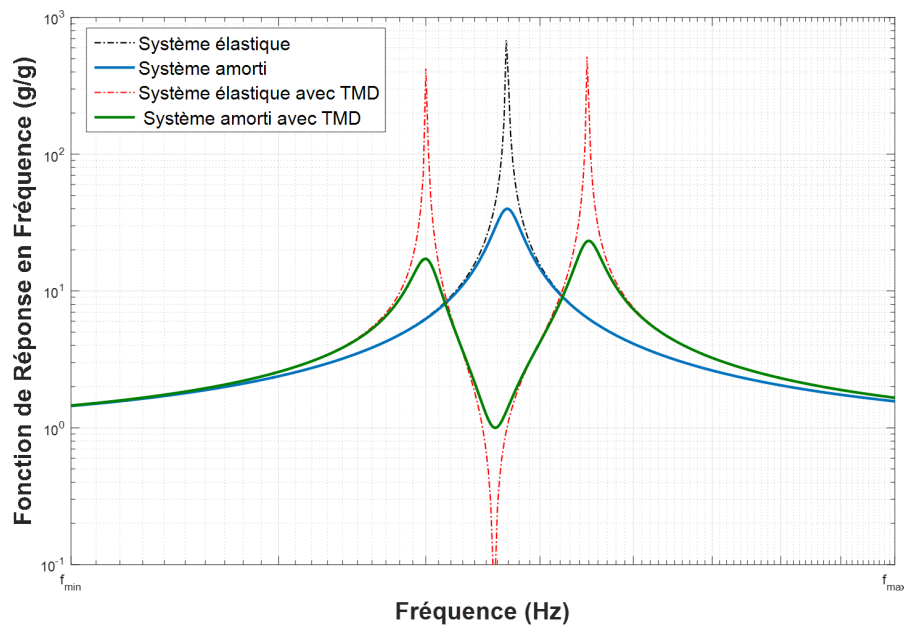


FIGURE 1.6 – Illustration de l'effet de l'amortissement par dissipation et par absorption sur un mode de vibration

Afin d'améliorer les performances en terme d'atténuation vibratoire et d'élargir la bande fréquentielle de fonctionnement, il est possible d'utiliser un réseau de TMDs dont les fréquences propres sont réparties autour de la fréquence propre d'intérêt de la structure principale f_0 . Ce dispositif d'absorption des vibrations est connu sous le nom de *Multiple Tuned Mass Damper* (MTMD). Le MTMD, lorsqu'il est correctement dimensionné, peut s'avérer particulièrement performant et agir comme un piège vibratoire.

La Figure 1.7 (cadre vert) présente un MTMD [Carcattera 12] composé d'un ensemble de poutres encastrées-libres. Il est implanté dans le satellite UNISAT afin de réduire le niveau vibratoire autour d'un mode de respiration d'une plaque de support.

Les TMDs et les MTMDs seront abordés plus en détails dans le chapitre 6 autant en terme d'état de l'art que de dimensionnement optimal et robuste.

Il est aussi possible d'exploiter des effets non-linéaires lors de la conception d'un TMD pour créer un *Nonlinear Energy Sink* (NES) qui est une catégorie d'absorbeurs efficace sur une plus large bande que leur homologue linéaire mais, qui présente un seuil minimal d'énergie à recevoir pour être fonctionnel. En effet, lorsque le niveau vibratoire est faible, le NES n'est pas actif. Une fois ce seuil atteint, le pompage de l'énergie commence et la bande fréquentielle couverte par le NES s'élargit. L'autre avantage du NES est, qu'une fois le transfert d'énergie établi, ce dernier est irréversible ce qui évite un phénomène de battement entre la structure principale et l'absorbeur. Le dimensionnement des NES et l'analyse de leur impact sur le comportement dynamique d'une structure porteuse ne seront pas plus détaillés dans ce manuscrit mais le lecteur intéressé pourra se référer aux thèses de Gourc [Gourc 13] et de Pennisi [Pennisi 16] ainsi qu'aux travaux suivants [Gendelman 01, Vakakis 01, Gourdon 06, Vaurigaud 11, Gourc 14, Boroson 14, Gourc 16, Mattei 16]. Un exemple de réalisation en laboratoire [Gourc 14] est présenté 1.7 dans le cadre rouge, où le NES est réalisé en utilisant deux ressorts subissant une sollicitation transverse pour aboutir à une non-linéarité en raideur cubique.

1.3.3 OBJECTIFS DE LA THÈSE

L'objectif de cette partie de thèse a été de proposer une solution de type MTMD pour contrôler les vibrations autour du premier mode de flexion du support optronique embarqué. La fréquence propre du mode à contrôler variant dans une certaine bande fréquentielle, l'enjeu était de proposer des outils de dimensionnement basés sur une modélisation des structures par éléments finis et prenant en compte les incertitudes afin d'aboutir à la conception d'une solution technique robuste intégrée.

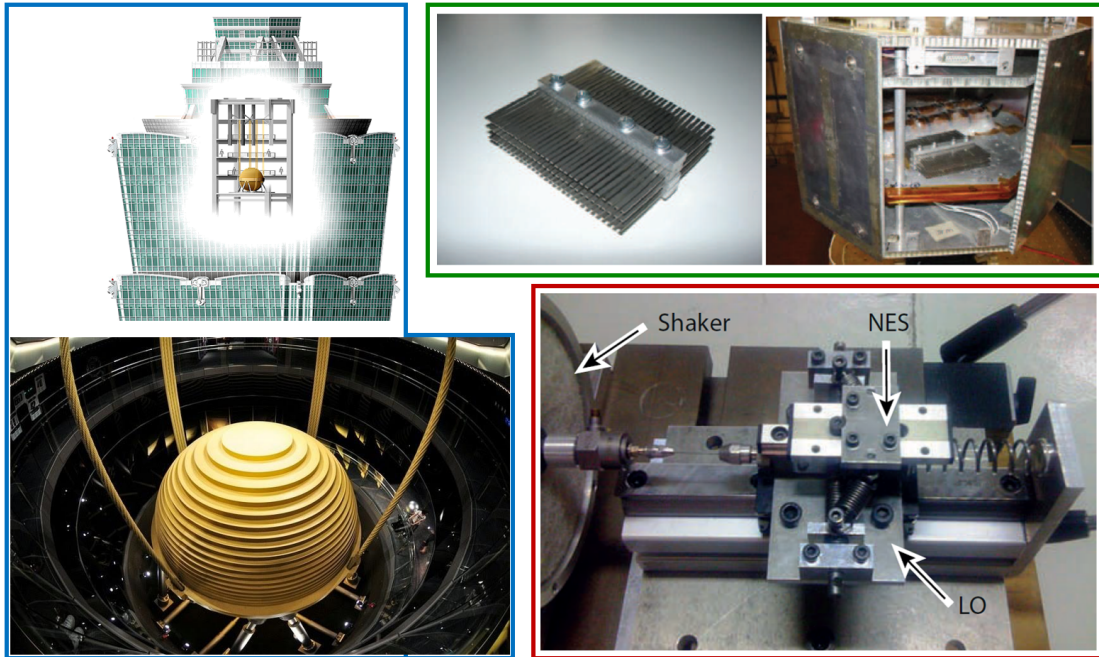


FIGURE 1.7 – Exemple de systèmes d’amortissement des vibrations par absorption : absorbeur dynamique unique implanté dans la tour Taipei 101 (bleu), réseau de poutres encastrées-libres formant un MTMD implanté dans le satellite UNISAT (vert) [Carcattera 12] et, photo d’un absorbeur dynamique non-linéaire monté sur un oscillateur linéaire (rouge) [Gourc 14]

1.4 ORGANISATION DU MANUSCRIT

Les chapitres 2, 3, 4 et 5 présentent les réponses apportées aux objectifs cités en section 1.2.

Le chapitre 2 porte sur la caractérisation du comportement mécanique dynamique des matériaux viscoélastiques ainsi que sur leur modélisation. Les moyens d’essais mis en œuvre sont présentés ainsi que l’évolution des paramètres du silicone SI965 et du tBA/PEGDMA en fonction de la fréquence et de la température. Les principaux modèles rhéologiques permettant de décrire un comportement viscoélastique sont présentés. Deux d’entre eux sont choisis, le modèle d’amortissement structural (ou hystérétique) et le modèle de Maxwell généralisé pour représenter respectivement le silicone et le tBA/PEGDMA. Les méthodes d’identification appliquées sont aussi détaillées.

Dans le chapitre 3, ces deux modèles de comportement sont intégrés dans la modélisation de l’amortisseur à lames afin d’analyser leur influence sur son comportement dynamique. Les deux formulations du problème sont détaillées ainsi que les différentes méthodes de réduction de modèles mises en œuvre. L’objectif étant de

valider les approches mises en œuvres, des analyses e sont menées en parallèle de calculs directs dans le domaine fréquentiel afin de les comparer aux résultats issus des campagnes d'essais de *Thales LAS Fr*.

De plus, la température est une variable particulièrement influente sur le comportement mécanique des matériaux viscoélastiques. Ce chapitre propose donc une modélisation thermo-mécanique du comportement viscoélastique basée sur le modèle de Maxwell généralisé ainsi qu'une méthode d'identification de ces paramètres.

Le chapitre 4 propose une présentation de la notion d'incertitudes et des méthodes permettant de les intégrer. Le champ de température dans lequel l'amortisseur à lames évolue peut être considéré comme une méconnaissance. Une analyse de robustesse basée sur la méthode Info-Gap et la modélisation thermo-mécanique de l'amortisseur à lames est menée afin de déterminer sa capacité d'amortissement, au passage d'un mode de vibration particulier, dans un contexte incertain.

Le chapitre 5 aborde les problématiques liées au comportement non-linéaire de l'amortisseur à lames. En effet, lors d'une série d'essais menée chez *Thales LAS Fr*, il est apparu que, pour des niveaux d'excitations élevés, l'amortisseur à lames présentait un comportement assouplissant. Ce chapitre, en plus d'éléments bibliographiques concernant le domaine de la mécanique non-linéaire, présente la caractérisation des non-linéarités propres à l'amortisseur. L'accent est mis en particulier sur la non-linéarité matériau liée à l'utilisation du silicone SI965, l'effet Payne, et plus particulièrement sur la caractérisation de cet effet à partir d'une extension de la méthode de Oberst, sa modélisation et la procédure d'identification associée. L'impact des butées mécaniques mises en place au niveau de l'amortisseur est aussi abordé. Les non-linéarités sont ensuite prises en compte dans deux modélisations, l'une simplifiée et l'autre basée sur la méthode des éléments finis, afin de vérifier leur influence sur le comportement dynamique de l'amortisseur à lames au voisinage du mode d'intérêt. Pour finir, la méthode *Restoring Force Surface* est utilisée pour évaluer la contribution de chaque non-linéarité.

Le dernier chapitre présente les réponses apportées aux objectifs cités en section 1.3. Les travaux ne concernent plus uniquement l'amortisseur à lames mais se concentrent directement sur la structure du système optronique. La solution de contrôle des vibrations retenue se base sur l'implantation d'un réseau d'absorbeurs à masses accordées. Une solution technique est proposée et des méthodes de dimensionnement du dispositif anti-vibratoire sont développées en se basant sur le modèle éléments finis du système. Par ailleurs, il apparaît qu'en condition de fonctionnement, la fréquence propre du mode d'intérêt varie de manière aléatoire à cause de changements dans la répartition des masses embarquées. Des analyses de robustesse basées sur la méthode Info-Gap sont effectuées et une procédure d'optimisation robuste est proposée afin de rendre le réglage du réseau d'absorbeurs à masses accordées robuste à cette incertitude en utilisant une métrique définie à partir de l'énergie de déformation élastique du système. Pour finir, une maquette est réalisée ainsi que

son dispositif anti-vibratoire. Pour des raisons de temps, ce dispositif est simplifié et directement rapporté sur le support optique. L'objectif de cette dernière partie est de valider les outils de dimensionnement numériques développés et de fournir une preuve de concept à *Thales LAS Fr* quant à l'utilisation de ce type de solution d'amortissement dans leurs produits embarqués.

CARACTÉRISATION DYNAMIQUE DES ÉLASTOMÈRES ET MODÉLISATION DU COMPORTEMENT VISCOÉLASTIQUE

Sommaire

2.1	Caractérisation dynamique élastomère	22
2.1.1	Introduction aux méthodes de caractérisation dynamique	22
2.1.2	Caractérisation mécanique par Analyse Mécanique Dynamique	25
2.2	Modélisation du comportement viscoélastique	34
2.2.1	Introduction à la viscoélasticité linéaire	34
2.2.2	Modèles rhéologiques standards	36
2.2.3	Identification des paramètres du modèle de Maxwell Généralisé	43
2.3	Conclusion	50

PRÉAMBULE

Comme cela a été énoncé dans le premier chapitre, un des objectifs de la thèse est d'améliorer les connaissances des matériaux élastomères utilisés dans les amortisseurs *Thales LAS Fr*. L'objectif à terme est d'obtenir un modèle prédictif des structures qui comportent des matériaux viscoélastiques pour le dimensionnement, la conception et l'optimisation.

Dans cette partie, on s'intéresse en particulier à la caractérisation dynamique des élastomères afin d'obtenir une représentation de leur comportement mécanique en fonction de la fréquence et de la température. L'objectif étant, une fois cette loi de comportement extraite, d'identifier les paramètres d'un modèle rhéologique qui nous permettra de conduire un certain nombre de simulation numérique par éléments finis

aussi bien dans le domaine fréquentiel que temporel.

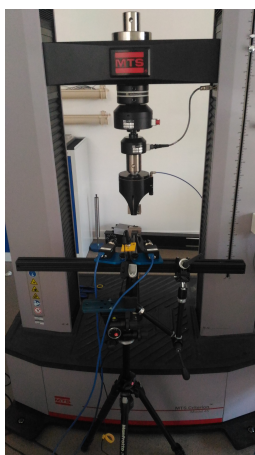
Les élastomères étudiés seront un silicone chargé, le SI965 et un polymère à mémoire de forme, le tBA/PEGDMA. Ce dernier a déjà été caractérisé dans la thèse de Butaud [Butaud 15] et sert d'élément de référence et de point de comparaison dans la suite du manuscrit.

Pour finir, il serait aussi intéressant d'identifier leur comportement en fonction de la précharge statique et de l'amplitude dynamique mais cet aspect sera abordé au chapitre 5 lorsque nous nous intéresserons au comportement non-linéaire de ces structures.

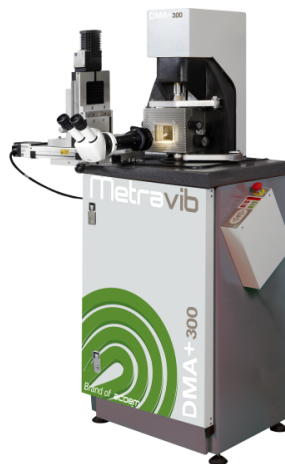
2.1 CARACTÉRISATION DYNAMIQUE DES ÉLASTOMÈRES

2.1.1 INTRODUCTION AUX MÉTHODES DE CARACTÉRISATION DYNAMIQUE

Il existe de nombreuses méthodes permettant d'extraire le comportement mécanique des élastomères présentant chacune des avantages et des inconvénients. Les essais quasi-statiques réalisés sur des machines de test mécanique type MTS *Criterion* 45 (Figure 2.1.a) permettent d'extraire le comportement des élastomères autour des basses fréquences (de l'ordre de 1 Hz) mais pour des taux de déformations pouvant être élevés (plus de 100%). D'autres part, les viscoanalyseurs type *Metravib DMA +300* (Figure 2.1.b) ou *Bose Electroforce* 3200 (Figure 2.1.c) présentent une plage de caractérisation plus large en terme de fréquence (de 0.1 Hz à 1000 Hz sur les machines récentes) mais le taux de déformation des échantillons est plus faible sur les portes échantillons standards (autour de 1%).



(a)



(b)



(c)

FIGURE 2.1 – Machine de test mécanique (a) *MTS Criterion* 45 et Viscoanalyseurs (b) *Metravib DMA +300*, (c) *Bose Electroforce* 3200

Dans les deux types de test, il est possible d'extraire le comportement mécanique des élastomères pour différents types de sollicitations mécaniques (traction, compression, cisaillement et flexion) et pour une plage de température importante moyennant l'emploi d'une enceinte thermique. Pour atteindre des mesures à plus hautes fréquences, un viscoanalyseur dédié a été conçu par Renaud [Renaud 11a] (Figure 2.2) durant sa thèse et permet d'étendre la plage de caractérisation jusqu'à 2000 Hz . Cette limite supérieure peut encore être un peu plus haute pour certains matériaux [Butaud 18].

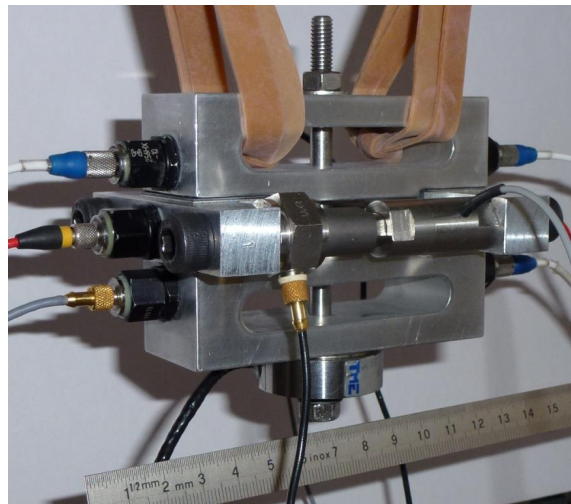


FIGURE 2.2 – Viscoanalyseur haute fréquence [Renaud 11a]

Les différentes techniques énoncées précédemment font partie des techniques de caractérisation dites directes ou quasi-statique car on y observe le lien "direct" entre la déformation et la contrainte dans le matériau sans prise en compte des forces d'inertie.

D'autre part, il existe des approches indirectes basées sur l'inversion du système d'équation associé à la structure mécanique étudiée et la minimisation des écarts entre les grandeurs expérimentales et numériques [Sun 18]. Cette minimisation peut être effectuée classiquement au sens des moindres carrés à l'aide de méthodes établies comme la méthode LSCF (Least Square Complex Frequency) [Guillaume 03]. De manière générale, ce type d'approche repose sur l'analyse du comportement modal d'une structure incluant l'élastomère à caractériser. Elles permettent de remonter aux grandeurs mécaniques du matériau en observant la réponse dynamique de la structure autour de ses différentes fréquences de résonances et en effectuant une identification inverse du modèle numérique associé. Ces approches représentent une extension de la méthode de Oberst [Oberst 52], décrite dans la norme ASTM *D5992* – 96 [AST 11] et permettant, avant l'ère du numérique et de la modélisation par éléments finis, de remonter aux grandeurs du matériau testé par une formulation analytique. Cela est possible grâce à l'emploi de géométries simples, type poutre sandwich (Figure 2.3), rendant le développement analytique abordable, et par l'analyse des réponses

dynamiques de la structure soumise à une excitation connue.

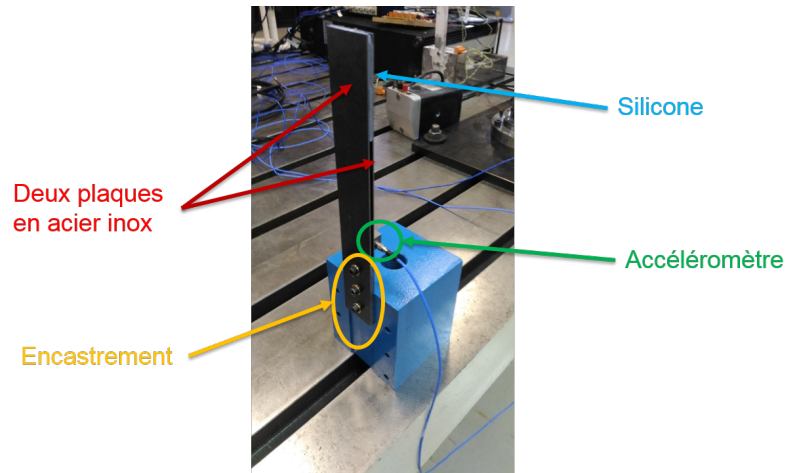


FIGURE 2.3 – Poutre sandwich utilisée dans la méthode de Oberst [Jaboviste 19]

Ces approches par analyse du comportement modal de la structure permettent une caractérisation sur une bande de fréquence potentiellement importante en fonction de la géométrie de la structure et des matériaux utilisés. Ici, la définition du seuil de validité de la méthode repose sur la notion de densité modale et de recouvrement modal. Grossièrement, on peut considérer que lorsque le comportement dynamique de la structure n'est plus dominé par ses modes (moyennes et hautes fréquences en terme de densité modale), la caractérisation par analyse modale n'est plus pertinente [Ege 12]. De plus, il est aussi possible, à la manière des essais sur viscoanalyseurs, d'effectuer un balayage en température et en amplitude moyennant la conception d'une enceinte climatique et l'emploi d'une source d'excitation contrôlable. Ces conditions peuvent être délicates à satisfaire en fonction de la géométrie de la structure, de la source d'excitation utilisée et du type de mesure sélectionné. Malgré la démocratisation de ces approches indirectes, motivée entre autre par l'évolution de la mesure de champ, et des avantages qu'elles présentent, les techniques de caractérisation directes restent largement utilisées notamment pour des questions de temps et de facilité de mise en œuvre.

L'ensemble de ces essais de caractérisation visent à déterminer les grandeurs mécaniques du matériau étudié sur l'espace de conception d'intérêt. Le terme d'espace de conception est employé ici pour définir à la fois la bande de fréquence, de température, et d'amplitude statique et dynamique où l'on doit cartographier le comportement mécanique du matériau. Au niveau industriel, cet espace de conception découle directement de la rédaction du cahier des charges fonctionnel qui recense l'ensemble des contraintes que devra satisfaire le système final. Il est alors nécessaire de connaître le comportement mécanique des différents constituants de ce système pour en faire une modélisation précise et aussi prédictive que possible afin de réduire la durée du cycle de conception.

Il est important de noter deux choses. La première est que nous nous restreignons,

pour l'instant, au cadre de la mécanique linéaire, ce qui implique que la caractérisation du comportement du matériau en fonction de l'amplitude n'est pas nécessaire. Les paramètres importants lors de la caractérisation sont simplement la fréquence et la température. La seconde est que chacun des moyens d'essais décrit précédemment permet d'extraire les grandeurs mécaniques du matériau sur des espaces de conception différents. Il faut donc choisir le ou les essais nécessaires afin de caractériser le matériau sur tout l'espace fréquence-température imposé par le cahier des charges. *Thales LAS Fr* souhaite que la caractérisation et la modélisation des élastomères soit valable sur une plage de température allant de -70°C à 80°C et pour une plage de fréquence variant de 0.1 Hz à environ 100 Hz qui correspondent à leur cahier des charges. Il est donc possible d'effectuer l'ensemble des essais sur un viscoanalyseur classique muni d'une enceinte climatique.

2.1.2 CARACTÉRISATION MÉCANIQUE PAR ANALYSE MÉCANIQUE DYNAMIQUE

Afin de caractériser le comportement mécanique du silicone SI965 sur la plage de température et de fréquence d'intérêt, deux appareils de mesures ont été utilisés. Le viscoanalyseur *Bose Electroforce 3200* (Figure 2.1.c) pour les essais réalisés au *Département Mécanique Appliquée* de *FEMTO-ST* et le viscoanalyseur *Metravib DMA +300* (Figure 2.1.b) pour les essais réalisés par la société *ACOEM-Metravib* basée à Lyon. Ces machines ont été utilisées pour mener à bien une Analyse Dynamique Mécanique (ou *Dynamical Mechanical Analysis* (DMA)) en traction sur un échantillon de silicone.

2.1.2.1 PRINCIPE DE L'ANALYSE DYNAMIQUE MÉCANIQUE

L'analyse dynamique mécanique est une méthode largement utilisée qui consiste à imposer une sollicitation mécanique harmonique, pilotée en déplacement ou en force, à l'échantillon de matériau à caractériser. Pour chaque fréquence d'excitation f et à chaque température T , sa réponse est mesurée. Ici, on ne s'attardera pas sur le pilotage de l'amplitude statique et dynamique puisque l'on se restreint au cadre de la mécanique linéaire. Le taux de déformation maximal atteint par l'échantillon lors de ces essais est de l'ordre de 0.05% .

Si l'on raisonne en contrainte imposée unidirectionnelle en traction σ et déformation mesurée ϵ , la sollicitation harmonique peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma(t, T) = \frac{\hat{\sigma}}{2}(\omega, T)e^{j\omega t} + \frac{\hat{\sigma}^*}{2}(\omega, T)e^{-j\omega t} \quad (2.1)$$

où t est le temps, $\omega = 2\pi f$ est la pulsation du signal et $\hat{\sigma}$ est l'amplitude du cycle imposé en contrainte pour une température T donnée. De plus, la déformation effective de l'échantillon est supposée elle aussi harmonique, de même fréquence mais

déphasée (Figure 2.4). Elle peut alors s'écrire :

$$\epsilon(t, T) = \frac{\hat{\epsilon}}{2}(\omega, T)e^{j(\omega t + \delta(\omega, T))} + \frac{\hat{\epsilon}^*}{2}(\omega, T)e^{-j(\omega t + \delta(\omega, T))} \quad (2.2)$$

où $\hat{\epsilon}$ est l'amplitude du cycle de déformation et δ le déphasage entre la contrainte appliquée et la déformation mesurée.

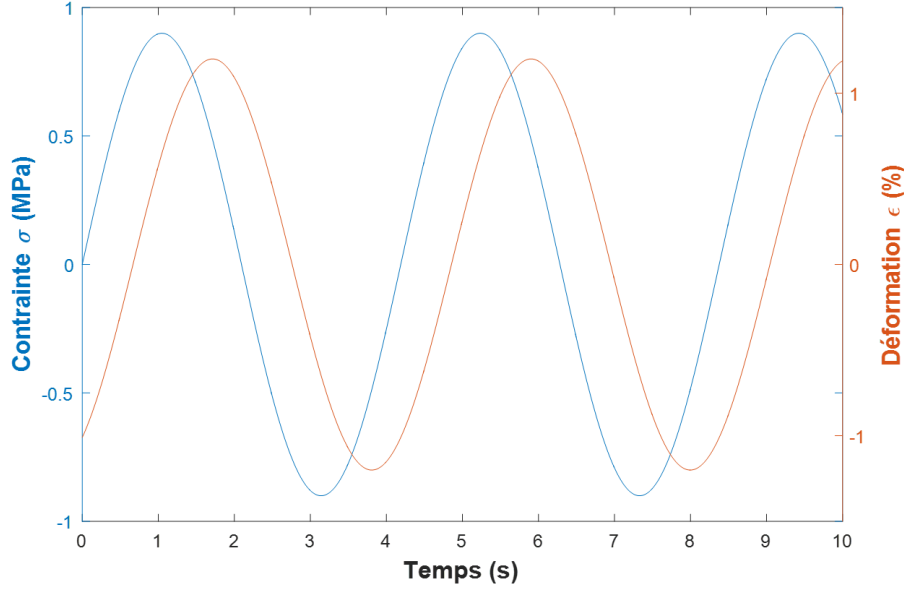


FIGURE 2.4 – Évolution de la contrainte appliquée (bleu) sur l'échantillon et de la déformation mesurée (orange)

À partir de ce type de mesure, il est possible d'extraire les grandeurs physiques représentatives du comportement viscoélastique du matériau testé. Ce comportement est défini par le module d'élasticité complexe noté E^* qui est dépendant de la pulsation ω et de la température T . Il est défini de la manière suivante :

$$\hat{\sigma} = E^* \hat{\epsilon} \quad (2.3)$$

$$\text{où } E^*(\omega, T) = E'(\omega, T) + jE''(\omega, T) \quad (2.4)$$

$$\text{soit } E^*(\omega, T) = E'(\omega, T) * (1 + j \tan(\delta(\omega, T))) \quad (2.5)$$

où j désigne le nombre complexe défini par $j^2 = -1$. La partie réelle du module complexe, notée $E'(\omega, T)$, est appelée module de stockage et traduit la capacité du matériau à stocker et à restituer l'énergie de déformation. Il s'agit de la composante purement élastique comprise dans le comportement viscoélastique du matériau. La partie imaginaire, notée $E''(\omega, T)$, est appelée module de perte et représente la composante visqueuse du matériau. Le rapport entre ces deux modules, noté $\tan(\delta(\omega, T))$ ou $\eta(\omega, T)$, est communément appelé facteur de perte et permet de quantifier l'aptitude du matériau à dissiper l'énergie mécanique par effet Joule. La DMA permet de déterminer ces trois grandeurs qui sont dépendantes de la fréquence de la sollicitation et de la température de l'essai.

2.1.2.2 DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX

Pour réaliser la DMA en traction sur le silicone SI965, l'appareil de mesure utilisé au *Département Mécanique Appliquée* est le viscoanalyseur *Bose Electroforce 3200* (Figure 2.1.c). Les éprouvettes testées mesurent $2.55 \times 4.5 \times 83.7 \text{ mm}^3$ (Figure 2.5 (haut)). Sur le viscoanalyseur, le déplacement est mesuré au niveau de la traverse de la machine.

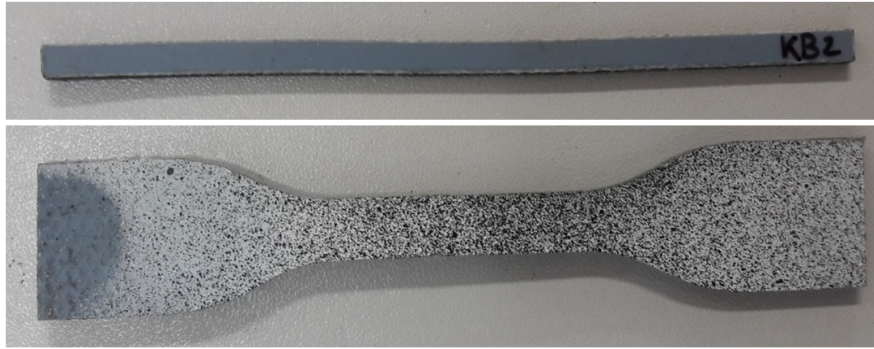


FIGURE 2.5 – Éprouvettes pour le viscoanalyseur *Bose Electroforce 3200* (haut) et pour la *MTS Criterion 45* (bas)

Il faut donc s'assurer que la déformation mesurée est celle de l'échantillon et non pas celle du montage. Afin de satisfaire cette condition, la section est réduite pour atteindre une raideur apparente faible au niveau de l'échantillon par rapport à celle du montage. La raideur de l'éprouvette est définie par :

$$K_E = \frac{ES_0}{L_0} \quad (2.6)$$

avec E le module de stockage du matériau, S_0 la section initiale de l'échantillon et L_0 la longueur initiale entre les mors. La section minimale de l'éprouvette est limitée par le procédé de fabrication et la longueur maximale par l'encombrement autorisé par le viscoanalyseur.

Ici, l'échantillon de silicone SI965 présente une section de 11.475 mm^2 et module d'Young apparent de 27 MPa . La raideur K_E associée est alors : $K_{E \text{ SI965}} = 3.7 \text{ N/mm}$. La détermination de cette raideur échantillon permet de choisir une des deux cellules de force présentes sur la machine. En effet, le viscoanalyseur dispose d'une cellule de force de 22 N possédant une résolution fine de 0.01 N et une raideur de 140 N/mm et d'une cellule de 450 N ayant une résolution plus grossière (0.1 N) et une raideur de 3500 N/mm . Comparativement à la raideur de l'échantillon $K_{E \text{ SI965}}$, la cellule de force de 22 N possède déjà une raideur bien supérieure (facteur 34). De plus, on sait grâce à *Thales LAS Fr* que la température de transition vitreuse du silicone SI965 est inférieure à la plage de température visée, ce qui nous assure que la raideur de l'échantillon ne devrait pas varier de manière brutale en fonction de la fréquence de

sollicitation et de la température et ainsi nuire au dimensionnement du montage.

L'asservissement se fait en force afin d'éviter les potentiels problèmes de flambement ($\sigma \leq 0$) de l'échantillon qui pourrait apparaître lors de la montée en température. L'amplitude crête à crête imposée est de 0.6 N autour d'une valeur moyenne de 0.5 N. L'actionneur est électromagnétique et le déplacement est mesuré par un capteur LVDT (*Linear Variable Differential Transformer*). Il s'agit d'un capteur de déplacement linéaire, avec une amplitude crête à crête maximale de 5 mm et une précision de 1 μm .

Thales LAS Fr est intéressé par le comportement des élastomères jusqu'à 100 Hz et le viscoanalyseur *Bose Electroforce 3200* a une fréquence maximale de sollicitation annoncée à 200 Hz. Cependant, pour éviter une potentielle dérive des résultats en raison de la résonance de la machine mesurée autour de 70 Hz [Placet 10]. L'étude est menée sur une plage réduite, entre 0.1 et 10 Hz, avec trois points de mesure par décade. De plus, l'analyse dynamique mécanique est effectuée dans une enceinte thermique régulée en température. La plage de température de caractérisation visée s'étend quant à elle de $-70^{\circ}C$ à $80^{\circ}C$ mais la plage de température qui a été testée sur le viscoanalyseur *Bose Electroforce 3200* ne couvre que la bande $-40^{\circ}C$ à $40^{\circ}C$. L'incrément de température est de $5^{\circ}C$. La température est mesurée par un thermocouple inséré dans un échantillon témoin et placé au plus près de l'éprouvette. La montée en température se fait à $0.1^{\circ}C/s$, et afin d'obtenir un champ de température stabilisé et homogène dans l'éprouvette, des paliers de deux minutes sont respectés. On suppose que le test est isotherme (pas de dérive notable à cause de l'auto-échauffement du matériau) en raison des faibles sollicitations appliquées aux échantillons. La validité de cette hypothèse pourrait être vérifiée par thermographie infrarouge [Butaud 15] mais cela n'a pas été fait durant cette thèse.

On constate que l'espace fréquence-température couvert par les essais sur le viscoanalyseur *Bose Electroforce 3200* est inférieur à celui souhaité par *Thales LAS Fr*. Pour pallier ce problème, la possibilité d'utiliser l'équivalence temps-température sera étudiée dans la suite, section 2.1.2.3. Dans ces conditions d'essais, les propriétés mécaniques dynamiques n'ont pu être déterminées que pour l'état caoutchoutique du silicone.

Le silicone SI965 a aussi été testé par la société *ACOEM-Metravib* sur leur viscoanalyseur *Metravib DMA +300* (Figure 2.1.b). Les éprouvettes mesurent $2.8 \times 8.6 \times 20 \text{ mm}^3$ et sont sollicitées à trois fréquences différentes 1 Hz, 10 Hz, et 100 Hz pour une plage de température allant de $-140^{\circ}C$ à $80^{\circ}C$ avec une rampe de $2^{\circ}C/min$.

Lors de ces essais, un relevé est effectué toutes les 20 secondes lors du balayage en température pour chacune des trois fréquences. La température n'est pas stabilisée entre chaque mesure et cela entraîne une réduction importante de la durée des tests. De plus, l'amplitude de la sollicitation en effort appliquée à l'éprouvette est actualisée en permanence de manière à garantir un taux de déformation autour des 0.05%. L'amplitude de la plage de température couverte par la société *ACOEM-Metravib*, ainsi que la possibilité d'obtenir des mesures pour une fréquence de sollicitation de 100 Hz, ont permis de déterminer les propriétés mécaniques dynamiques du silicone à

l'état vitreux, caoutchoutique et aussi pendant la transition vitreuse. De plus, cette campagne permet de compléter les travaux engagés et de répondre au cahier des charges fixé.

2.1.2.3 RÉSULTATS DE LA CARACTÉRISATION EXPÉRIMENTALE

Dans cette partie, nous nous intéresserons d'abord aux résultats obtenus sur le viscoanalyseur *Bose Electroforce 3200* avant d'effectuer un recoupement avec ceux obtenus sur le *Metravib DMA +300* dans le cas du silicone SI965. Pour finir, les résultats concernant la caractérisation du tBA/PEGDMA seront exposés et un comparatif rapide entre les deux élastomères sera effectué.

Caractérisation du silicone SI965 Les graphiques présentés Figure 2.6 permettent d'observer l'évolution du module de stockage et du facteur de perte en fonction de la température pour 7 fréquences de sollicitations différentes.

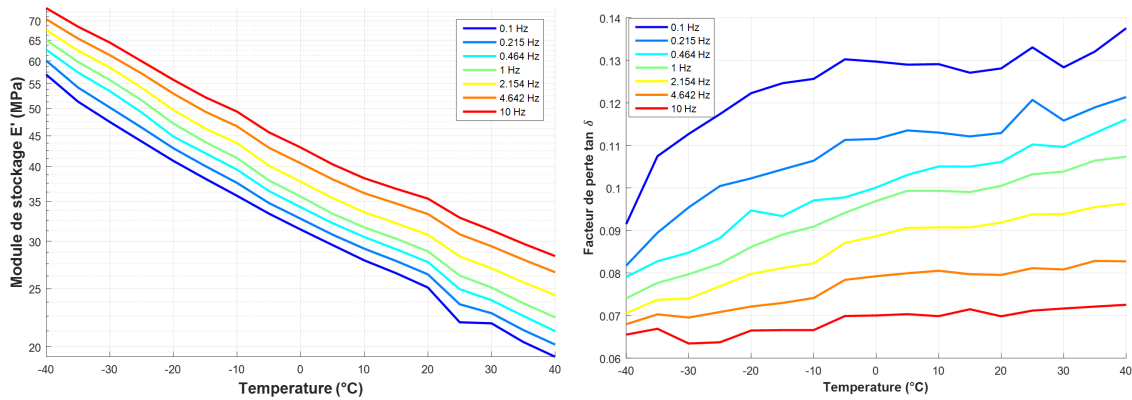


FIGURE 2.6 – Silicone SI965 : évolution du module de stockage E' et du facteur de perte ($\eta = \tan \delta$) en fonction de la température pour plusieurs fréquences mesurés sur le viscoanalyseur *Bose Electroforce 3200*

La température de transition vitreuse pour le silicone SI965 se situant aux alentours de -110°C , comme le confirme les essais réalisés sur le *Metravib DMA +300* (Figure 2.9), le module de stockage et le facteur de perte sont ici déterminés pour l'état caoutchoutique du silicone. Les variations de ces paramètres en fonction de la température et de la fréquence sont en accord avec le comportement attendu d'un matériau viscoélastique. Le module de stockage décroît bien avec l'augmentation de la température et la diminution de la fréquence et inversement. En effet, il passe d'environ 73 MPa pour une température de -40°C et une fréquence de sollicitation de 10 Hz à 19 MPa pour une température de 40°C et une fréquence de 0.1 Hz . En ce qui concerne le facteur de perte, il a une tendance à croître légèrement en même temps que l'augmentation en température et que la diminution de la fréquence de sollicitation. Il varie entre 6.8% à -40°C pour la fréquence de sollicitation de 10 Hz

et 13.8% à 40°C pour une excitation de 0.1 Hz. Cette variation est relativement faible par rapport à ce qui est attendu d'un matériau viscoélastique et semble indiquer que le silicone SI965 possède des propriétés amortissantes relativement stables en température. Ces grandeurs sont observées alors que le silicone se trouve dans son état caoutchoutique ce qui explique ces variations quasi-linéaires en fonction de la température et de la fréquence de sollicitation.

D'autre part, comme cela a déjà été signalé auparavant, l'espace de caractérisation exploré grâce au viscoanalyseur *Bose Electroforce 3200* est trop restreint par rapport aux exigences industrielles. La compatibilité de ce type d'élastomère avec le principe de l'équivalence temps-température a été vérifiée. Le but étant, si ce principe est applicable, de construire la courbe maitresse du silicone et ainsi de pouvoir extrapoler les données expérimentales et d'élargir le domaine fréquence-température observable. Ce principe vient du constat qu'un matériau viscoélastique présente un comportement mécanique à basse température et pour des fréquences de sollicitations faibles identique à celui observé à haute température et pour des fréquences de sollicitations élevées. D'un point de vue pratique, cela signifie qu'il est alors possible de superposer les propriétés mécaniques d'un matériau viscoélastique obtenues sur une même bande fréquentielle mais pour des températures différentes. Le principe d'équivalence temps-température a d'abord été suggéré par Leaderman [Leaderman 41] et exploité dans de nombreux travaux afin de construire une courbe maitresse du comportement mécanique du matériau caractérisé [Williams 55, Emri 05, Dealy 09]. Cette courbe maitresse est la résultante de la translation des courbes isothermes les unes sur les autres et permet ainsi d'extrapoler l'évolution des paramètres mécaniques (module de stockage et facteur de perte) obtenus sur un domaine de fréquences dites réduites comme l'illustre la Figure 2.7.

Cependant, le principe d'équivalence temps-température ne s'applique qu'à certains types de matériaux viscoélastiques qualifiés de thermo-rhéologiquement simples. Deux indicateurs peuvent être utilisés pour vérifier cette condition :

- le diagramme Cole-Cole [Han 93] qui est une représentation du module de perte E'' en fonction du module de stockage E' en échelle log-log,
- le diagramme Wicket [Van Gurp 98] qui présente l'évolution du déphasage δ en fonction de la norme du module d'élasticité complexe $|E^*|$ en échelle log-log.

Les données collectées lors des essais sur le viscoanalyseur *Bose Electroforce 3200* sont utilisées pour tracer le diagramme Cole-Cole (Figure 2.8.a) et le diagramme Wicket (Figure 2.8.b) pour des isothermes allant de -40°C à 40°C. On constate que les différents isothermes ne se superposent pas entre eux. Cela signifie que le silicone SI965 n'est pas un élastomère thermo-rhéologiquement simple sur cette plage de fréquence et de température ; le principe d'équivalence temps-température n'est pas applicable.

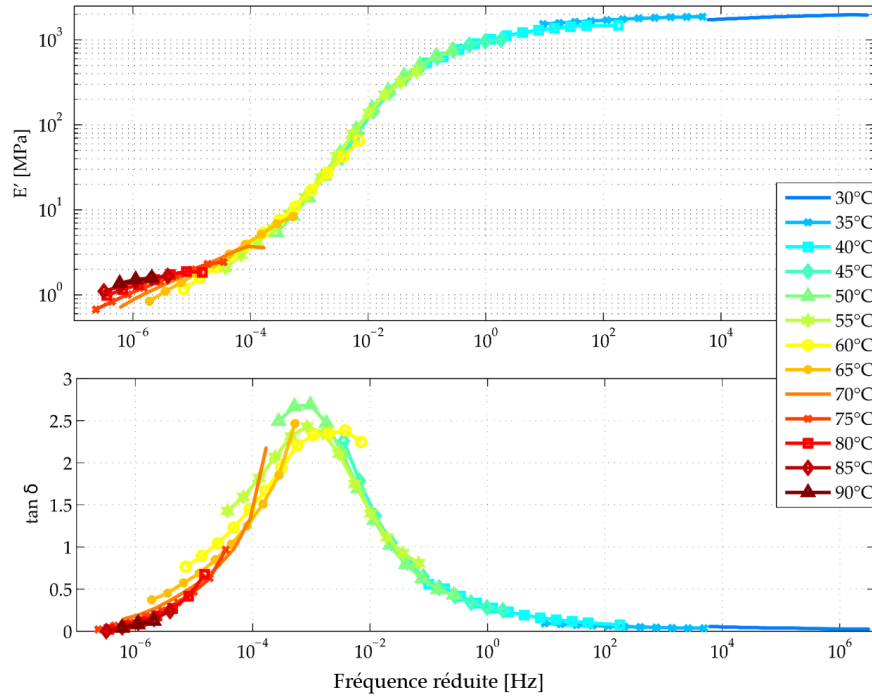


FIGURE 2.7 – Courbe maitresse issue des travaux de Butaud [Butaud 15] montrant l'évolution du module de stockage E' et du facteur de perte $\eta = \tan \delta$ du tBA/PEGDMA en fonction de la fréquence réduite.

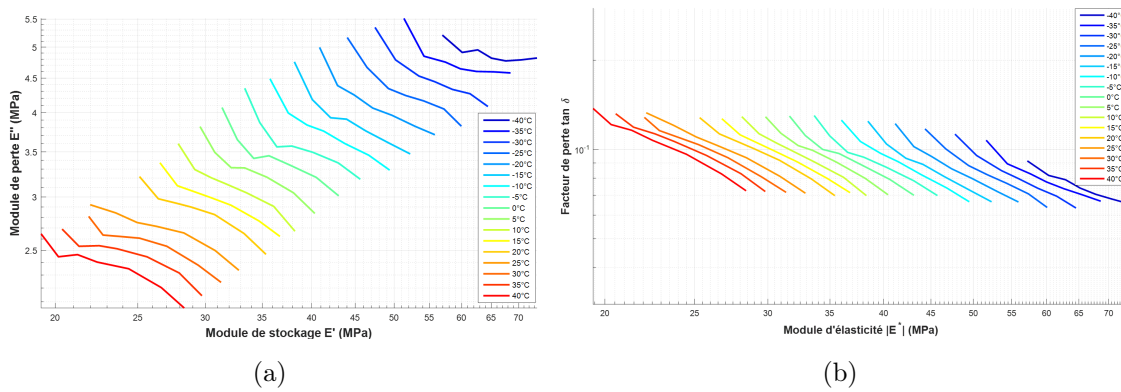


FIGURE 2.8 – Diagramme Cole-Cole (a) et diagramme Wicket (b) pour le silicone SI965, mesurés sur *Bose Electroforce 3200*

L'impossibilité d'utiliser cette approche rend obligatoire la caractérisation du silicone par des moyens expérimentaux sur l'ensemble du domaine fréquence-température souhaité par *Thales LAS Fr* et justifie historiquement, la campagne d'essais réalisée par la société *ACOEM-Metravib*. Les graphiques présentés Figure 2.9 permettent d'observer l'évolution du module de stockage et du facteur de perte en fonction de la température pour 3 fréquences de sollicitations différentes.

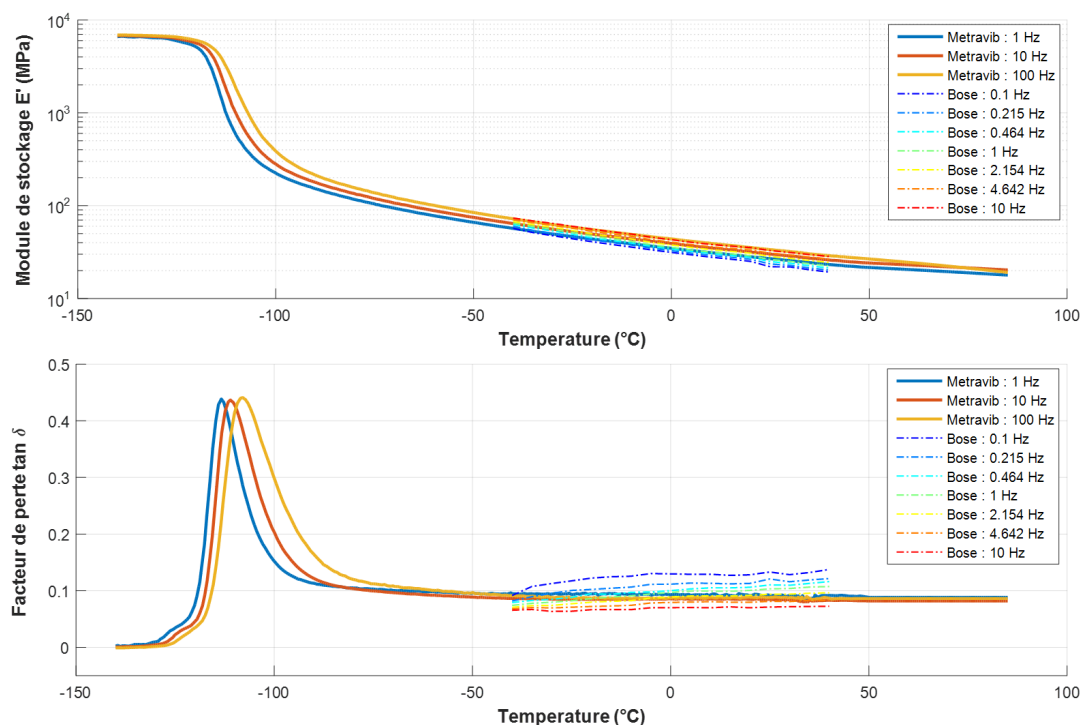


FIGURE 2.9 – Silicone SI965 : évolution du module de stockage E' et du facteur de perte ($\eta = \tan \delta$) en fonction de la température pour plusieurs fréquences mesurés sur le viscoanalyseur *Metravib DMA +300*

Lors de ces essais sur l'appareil *Metravib DMA +300*, les propriétés mécaniques dynamiques du silicone sont déterminées à l'état vitreux, à l'état caoutchoutique et durant la phase de transition vitreuse. Avant la température de transition vitreuse T_g qui se situe aux alentours de -110°C , le module de stockage est de 6.9 GPa et le facteur de perte associé est proche de 0%. Au passage de la T_g , le module de stockage se situe aux alentours de 1 GPa et facteur de perte présente un pic d'environ 43% pour les fréquences testées. Pour finir, on atteint l'état caoutchoutique où l'on retrouve les mêmes évolutions que celles observées sur le viscoanalyseur *Bose Electroforce 3200*. Pour finir, des essais quasi-statiques ont été réalisés en interne sur une machine de test mécanique *MTS Criterion 45* à température ambiante 20°C afin de confirmer l'ordre de grandeur du module de stockage extrait lors des deux analyses dynamiques mécaniques. La forme des éprouvettes utilisées est présentée dans la Figure 2.5 (bas). Il a été évalué à 27 MPa pour une sollicitation de 0.33 Hz sur la MTS contre 26 MPa

à 0.215 Hz sur le *Bose Electroforce* 3200. De plus, un dispositif de stéréo corrélation d'image a été utilisé pour observer les champs de déplacement lors des essais quasi-statiques et déterminer le coefficient de Poisson par corrélation d'images. Ce dernier est, sans surprise, de l'ordre de 0.49, comme une grande partie des matériaux polymères. De plus, il est considéré constant dans le reste du manuscrit même si cette hypothèse, communément admise, est remise en cause dans certains travaux [Pritz 98], [Pritz 00].

Caractérisation du tBA/PEGDMA On s'intéresse maintenant à l'étude du comportement viscoélastique du tBA/PEGDMA qui sera utilisé dans les chapitres 3 et 4 comme matériau de comparaison avec le silicone SI965. Comme cela a été mentionné dans l'introduction de ce chapitre, le tBA/PEGDMA a été caractérisé dans les travaux de Butaud [Butaud 18] de manière exhaustive par l'intermédiaire de nombreux moyens expérimentaux.

De plus, le tBA/PEGDMA est un matériau viscoélastique qui satisfait les conditions d'application du principe d'équivalence temps-température qui a été décrit précédemment. La construction de sa courbe maitresse a donc été effectuée permettant ainsi de lier l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus sur une large bande de fréquence et de température.

Ce matériau a été choisi pour les études comparatives qui vont suivre parce qu'il présente un comportement viscoélastique complémentaire de celui du silicone (Figure 2.10). En effet, sa température de transition vitreuse intervient dans la plage de température couverte par les applications étudiées et il présente des capacités amortissantes nettement supérieures au silicone (un facteur de perte de l'ordre de 200% à 60°C contre seulement 43% à -110°C pour le silicone). Cette variation importante des propriétés mécaniques dynamiques sur le domaine d'étude rend la mise en œuvre des méthodes qui seront développées dans les prochains chapitres plus complexes mais aussi plus riche en enseignements.

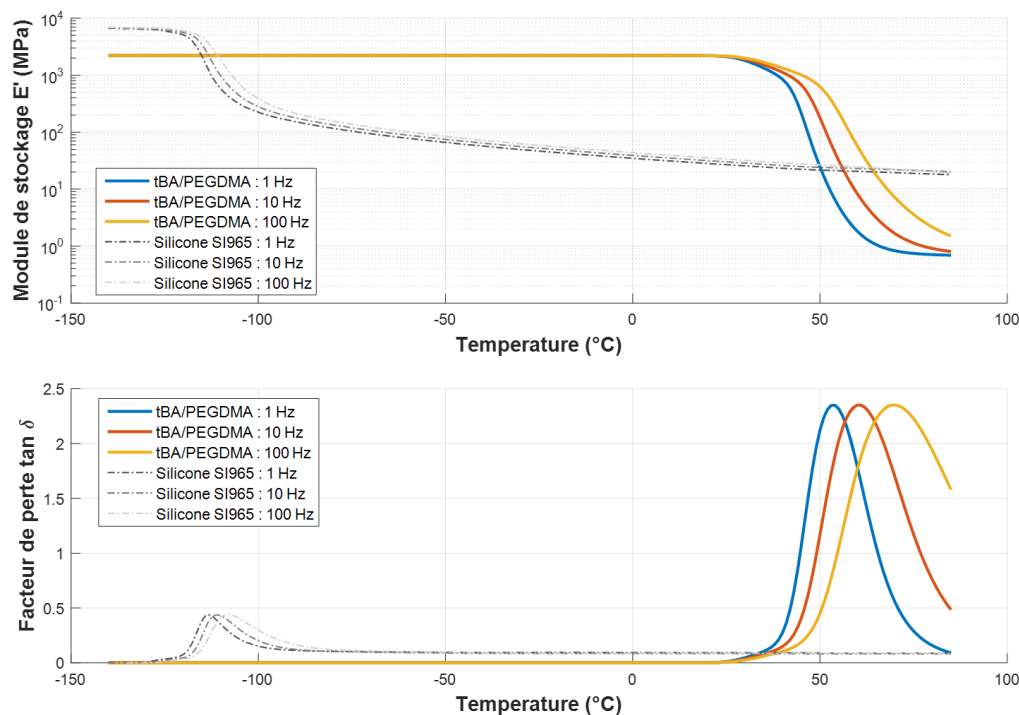


FIGURE 2.10 – tBA/PEGDMA : évolution du module de stockage E' et du facteur de perte ($\eta = \tan \delta$) en fonction de la température pour plusieurs fréquences

2.2 MODÉLISATION DU COMPORTEMENT VISCOÉLASTIQUE

En recoupant l'ensemble des résultats expérimentaux, les caractérisations mécaniques ainsi obtenues du silicone SI965 et du tBA/PEGDMA sont jugées satisfaisantes d'un point de vue industriel pour identifier les paramètres d'un modèle rhéologique qui permettra de prendre en compte le comportement viscoélastique dans des simulations par éléments finis de type Analyse Modale Complexe (*Complex Eigenvalue Analysis* (CEA)).

Dans cette partie, quelques uns des modèles rhéologiques standards permettant de représenter le comportement viscoélastique des matériaux sont exposés après un bref état de l'art de ce phénomène mécanique particulier. Pour finir, la procédure d'identification est abordée plus en détails. Dans un souci de synthèse, seule la démarche de modélisation et d'identification appliquée au tBA/PEGDMA sera détaillée car il présente un comportement viscoélastique bien plus marqué que celui du silicone SI965 et les données expérimentales à notre disposition sont plus fournies.

2.2.1 INTRODUCTION À LA VISCOÉLASTICITÉ LINÉAIRE

La viscoélasticité linéaire a été étudiée par de nombreux auteurs dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Les ouvrages de Salençon [Salençon 09] et de Che-

valier [Chevalier 10], proposent une synthèse des phénomènes mécaniques propres à la viscoélasticité. L'objectif général de ces travaux a été de comprendre et de modéliser ce phénomène physique avant d'adapter les formulations aux outils numériques de simulations. Historiquement, Caputo [Caputo 71] a proposé en 1971 une modélisation linéaire de la dissipation en prenant en compte l'historique des sollicitations appliquées au matériau. Plus tard, Ferry [Ferry 80] et Lakes [Lakes 98] ont proposés un cadre sur les bases de la modélisation du comportement viscoélastique. Ces travaux ont été enrichis par de nombreuses contributions comme celle de Lesieutre [Lesieutre 95] dans laquelle les équations constitutives de la viscoélasticité sont formulées dans le domaine temporel en se basant sur une méthode appelée "*Anelastic Displacement Fields*" (ADF).

La viscoélasticité linéaire représente à la fois le comportement élastique et dissipatif d'un matériau dans le domaine des petites déformations. Il existe plusieurs échelles (nano, micro, meso et macro) auxquelles le phénomène de dissipation peut être observé. Dans le cadre de la mécanique des structures, l'échelle macroscopique est souvent retenue et les mécanismes contribuant à l'existence de l'effet Joule restent sous-jacents.

Un matériau viscoélastique présente une réponse qui varie au cours du temps même si le chargement qu'il subit est constant dans le temps. Si le chargement est effectué en contrainte et que la réponse est observée en déformation, on parle d'essai de fluage. La réciproque est appelée essai de relaxation. De plus, si une succession de chargement (en contrainte ou en déformation) est appliquée au matériau alors son état final correspond à la somme des modifications apportées par chaque chargement. Cette dépendance à l'historique des chargements subis par un matériau viscoélastique au cours du temps est traduit par la loi de comportement suivante :

$$\sigma_{ij}(t) = C_{ijkl}^{\infty} \epsilon_{kl}(t) + \int_0^t C_{ijkl}^*(t - \tau) \dot{\epsilon}_{kl}(\tau) d\tau + C_{ijkl}(t) \epsilon_{kl}(0) \quad (2.7)$$

On reconnaît la partie élastique de la loi de comportement $\sigma_{ij}(t) = C_{ijkl}^{\infty} \epsilon_{kl}(t)$. La fonction $C_{ijkl}^*(t)$ est, quant à elle, appelée fonction de relaxation et peut être déterminée en mesurant l'évolution de la contrainte en fonction du temps quand le matériau est soumis à un déplacement constant. Les modèles rhéologiques en viscoélasticité sont construits en fonction des hypothèses faites sur le noyau de la fonction de relaxation C_{ijkl}^* . Une illustration de cette remarque est faite dans la section 2.2.2 pour le modèle de Maxwell généralisé. La transformée de Fourier de cette loi viscoélastique est alors :

$$\hat{\sigma}_{ij}(\omega) = C_{ijkl}^{\infty} \hat{\epsilon}_{kl}(\omega) + j\omega \hat{C}_{ijkl}^*(\omega) \hat{\epsilon}_{kl}(\omega) \quad (2.8)$$

Afin d'alléger les écritures pour l'introduction des modèles rhéologiques, on se place dans le cas mono-dimensionnel lorsque l'échantillon subit une sollicitation en traction. La loi de comportement peut alors s'écrire :

$$\hat{\sigma}(\omega) = E_{\infty} \hat{\epsilon}(\omega) + j\omega \hat{E}^*(\omega) \hat{\epsilon}(\omega) \quad (2.9)$$

où E_∞ représente le module d'élasticité long terme du matériau pour $t \rightarrow +\infty$ ou $\omega \rightarrow 0$.

2.2.2 MODÈLES RHÉOLOGIQUES STANDARDS

Lors des essais menés dans la section 2.1.2, la dépendance des paramètres mécaniques des matériaux viscoélastiques à la fréquence a été mise en exergue. Par leur nature, ces matériaux présentent un facteur de perte non nul, représentatif de leur capacité à dissiper de l'énergie sous forme de chaleur, ainsi qu'un module de stockage, variables en fonction de la fréquence. Les évolutions de ces paramètres mécaniques représentatifs de l'amortissement et de la raideur étant plus ou moins compliquées d'un matériau à l'autre et pour une plage de fréquence donnée, il existe des modèles plus ou moins élaborés.

Les comportements mécaniques élémentaires permettant de représenter le comportement viscoélastique, l'élasticité et la viscosité, sont représentés respectivement par un ressort, noté E_e en 1D traction-compression, et un amortisseur E_v dans les modèles rhéologiques. Leur combinaison doit permettre de reconstruire les lois de comportement obtenues expérimentalement. La Figure 2.11 présente quatre modèles rhéologiques standards couramment rencontrés dans la littérature.

Le modèle d'amortissement structural ou hystérétique (Figure 2.11(a)) est composé d'un module E et un facteur de perte η constant représenté par un module complexe $\hat{E}^*$. L'expression qui lui est associé est la suivante :

$$\hat{E}^* = E(1 + j\eta) \quad (2.10)$$

Il s'agit d'une représentation très simple du comportement viscoélastique moyen du matériau. Il est donc généralement utilisé pour les matériaux peu amortis comme les matériaux métalliques. Le principal défaut de ce modèle, tel qu'il est présenté ici, est qu'il est non-causal ce qui limite son utilisation au domaine fréquentiel [Gaul 91]. Cette hypothèse vient de l'observation du comportement mécanique de certains matériaux sous chargement cyclique qui présentent une énergie dissipée par cycle indépendante de la fréquence.

Il existe néanmoins un moyen de rendre ce modèle causal afin qu'il soit utilisable aussi bien dans le domaine fréquentiel que temporel. Les travaux menés sur le sujet par Makris [Makris 97] aboutissent à la formulation d'un modèle hystérétique causal où la partie imaginaire est la même que celle du modèle hystérétique idéal :

$$\hat{E}^*(\omega) = E(1 + j\eta \text{sgn}(\omega)) \quad (2.11)$$

et où la partie réelle est définie de manière à rendre le modèle causal. On peut remarquer que le modèle hystérétique idéal est équivalent à celui exprimé dans l'équation 2.10 pour les fréquences positives.

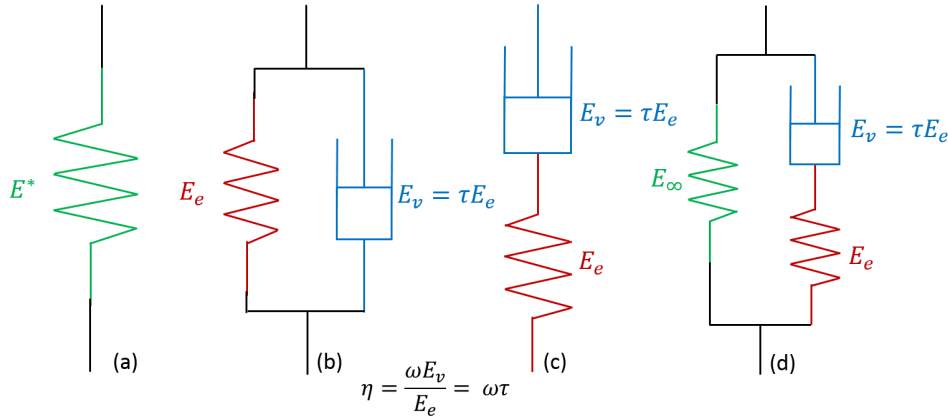


FIGURE 2.11 – Modèle rhéologiques standards pour la viscoélasticité

Les modèles de Kelvin-Voigt, Maxwell, Zener (Figure 2.11(b),(c) et (d)) et Maxwell Généralisé (Figure 2.12(a)) sont issus d'une modélisation du comportement viscoélastique dit à variables internes où la fonction de relaxation $C_{ijkl}^*(t)$ est approximée par un développement en série de Prony [Simo 06].

Le modèle de Kelvin-Voigt (Figure 2.11(b)) est un modèle simple composé d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle. Son module complexe s'écrit :

$$\hat{E}^*(\omega) = E_e + j\omega E_v \quad (2.12)$$

Il peut être utilisé en première approximation pour représenter un comportement viscoélastique mais uniquement sur une bande de fréquence étroite. De plus, il n'est adapté qu'aux basses fréquences car l'amortissement tend vers l'infini lorsque la fréquence augmente.

Le modèle de Maxwell (Figure 2.11(c)) est composé d'un ressort et d'un amortisseur en série et le module complexe associé peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\hat{E}^*(\omega) = E_e \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \quad (2.13)$$

avec $\tau = E_v/E_e$ le temps de relaxation. Cette configuration peut être utilisée pour modéliser le comportement viscoélastique mais il n'est valable que sur une plage fréquentielle réduite comme pour le modèle de Kelvin-Voigt et n'est pas réaliste en basse fréquence car elle ne possède pas de composante élastique pure.

Le modèle de Zener ou Solide Linéaire Standard de type Maxwell (Figure 2.11(d)) représente une première approximation réaliste du comportement viscoélastique. Son module complexe peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\hat{E}^*(\omega) = \frac{E_\infty + E_0 j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \quad (2.14)$$

où E_0 correspond au module instantané du matériau c'est-à-dire lorsque $t \rightarrow 0$ ou $\omega \rightarrow +\infty$ et E_∞ correspond au module long terme c'est-à-dire lorsque $t \rightarrow +\infty$ ou $\omega \rightarrow 0$. Ces notations seront employées dans l'ensemble du manuscrit. Il est à noter que $E_0 = E_\infty + E_e$. Il s'agit d'un cas particulier du modèle de Maxwell généralisé, il est composé d'un ressort et d'une cellule de Maxwell ajoutée en parallèle ce qui lui permet de décrire une évolution plus physique du comportement mécanique. Cependant, il est représentatif uniquement lorsque les sollicitations subies par le matériau sont contenues dans une bande de fréquence étroite ce qui est rarement le cas en dynamique.

La Figure 2.12 présente deux modèles rhéologiques standards mais plus complexes permettant de représenter le comportement viscoélastique des matériaux de manière plus fidèle. Le Modèle de Maxwell Généralisé (GMM) (Figure 2.12(a)) permet, grâce à l'ajout en parallèle d'un certain nombre de cellules de Maxwell de représenter fidèlement le comportement viscoélastique expérimental sur une large bande de fréquence en dynamique grâce à une distribution de fractions rationnelles décalées en fréquence. Le module complexe associé à ce modèle est le suivant :

$$\hat{E}^*(\omega) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i \frac{j\omega\tau_i}{1 + j\omega\tau_i} = E_\infty \left(1 + \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{j\omega\tau_i}{1 + j\omega\tau_i} \right) \quad (2.15)$$

où N désigne le nombre de cellules de Maxwell et E_i et τ_i représentent respectivement la raideur dynamique et le temps de relaxation de la i^{eme} cellule. Pour la suite, on note $\alpha_i = E_i/E_\infty$ la rigidification ou le ratio de raideur dynamique. De plus, $E_0 = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i$.

La finesse du modèle est pilotée par le nombres de cellules et permet de modéliser des comportements viscoélastiques complexes (plusieurs transitions vitreuses par exemple). En revanche, cela entraine une augmentation du nombre de paramètres à identifier.

Par ailleurs, le GMM est issu d'une modélisation du comportement viscoélastique dit à variables internes où la fonction de relaxation $C_{ijkl}^*(t)$ est approximée par un développement en série de Prony [Simo 06]. De nombreux logiciels du commerce (Abaqus, Nastran, ANSYS Workbench, etc.) proposent de renseigner le comportement viscoélastique d'un matériau en s'appuyant sur ces séries de Prony. Dans ce qui suit, l'origine du GMM et son lien avec les séries de Prony sont explicités.

En reprenant la loi de comportement d'un matériau viscoélastique dans le cas d'une sollicitation en traction uni-directionnelle et dans le domaine temporel, on a :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-s)\dot{\epsilon}(s)ds \quad (2.16)$$

En faisant l'hypothèse que le comportement viscoélastique du matériau peut s'écrire sous la forme d'un développement en série de Prony :

$$\frac{E(t)}{E_0} = \alpha'(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \alpha'_i (1 - e^{-t/\tau_i}) \quad (2.17)$$

où $\alpha'_i = \alpha_i / (1 + \alpha_i)$, avec $\alpha_i = E_i / E_\infty$ et $E_i = E_0 \alpha'_i$, soit :

$$E(t) = E_0 - \sum_{i=1}^N E_i (1 - e^{-t/\tau_i}) \quad (2.18)$$

En incluant l'expression 2.18 dans l'équation 2.16, on obtient alors :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \left(E_0 - \sum_{i=1}^N E_i (1 - e^{-(t-s)/\tau_i}) \right) \dot{\epsilon}(s) ds \quad (2.19)$$

Il est alors possible d'effectuer une intégration par partie sur cette expression telle que :

$$\sigma(t) = E_0 \epsilon(t) - \sum_{i=1}^N E_i \epsilon(t) + \int_{-\infty}^t \sum_{i=1}^N E_i (1 - e^{-(t-s)/\tau_i}) \dot{\epsilon}(s) ds \quad (2.20)$$

$$\text{où } E_\infty \epsilon(t) = E_0 \epsilon(t) - \sum_{i=1}^N E_i \epsilon(t) \quad (2.21)$$

Par ailleurs, s'il n'y a eu aucune déformation avant $t = 0$, alors $\epsilon(t \leq 0) = 0$ et $\dot{\epsilon}(t \leq 0) = 0$, la transformée de Fourier de l'équation 2.20 s'écrit :

$$\hat{\sigma}(\omega) = E_\infty \hat{\epsilon}(\omega) + \sum_{i=1}^N E_i \frac{j\omega\tau_i}{1 + j\omega\tau_i} \hat{\epsilon}(\omega) \quad (2.22)$$

Il est alors possible d'écrire la relation déformation/contrainte en ayant recours à un module complexe $\hat{E}^*$ tel que :

$$\hat{\sigma}(\omega) = \hat{E}^*(\omega) \hat{\epsilon}(\omega) \quad (2.23)$$

$$\text{avec } \hat{E}^*(\omega) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i \frac{j\omega\tau_i}{1 + j\omega\tau_i} \quad (2.24)$$

On retrouve alors la formulation du modèle de Maxwell généralisé introduite précédemment 2.15.

Il est aussi possible de retrouver le modèle de Maxwell généralisé exprimé sous la forme :

$$\hat{E}^*(\omega) = E_0 - \sum_{i=1}^N E_i \frac{j\omega\tau_i}{1 + j\omega\tau_i} \quad (2.25)$$

en commençant par effectuer une intégration par partie sur l'équation 2.16 :

$$\sigma(t) = E_0 \epsilon(t) + E_0 \int_{-\infty}^t \dot{\alpha}'(s) \epsilon(t-s) ds \quad (2.26)$$

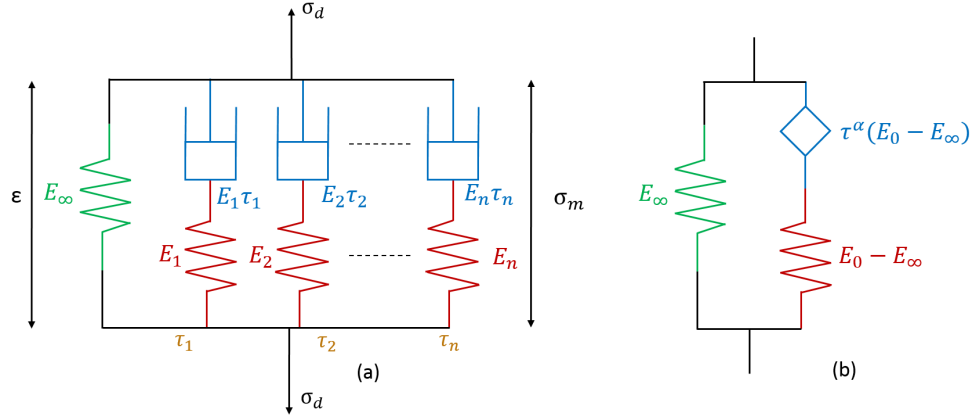


FIGURE 2.12 – Modèle de Maxwell généralisé (a) et modèle de Zener fractionnaire (b)

et en exprimant la fonction $\dot{\alpha}'(t)$ sous la forme suivante :

$$\dot{\alpha}'(t) = \sum_{i=1}^N -\frac{\alpha_i}{\tau_i} e^{t/\tau_i} \quad (2.27)$$

avant d'en effectuer la transformée de Fourier.

Afin de limiter le nombre de paramètres à identifier, une formulation alternative peut être mise en œuvre. Jusqu'à maintenant, la loi de comportement viscoélastique était écrite sous la forme d'une équation différentielle contenant des dérivées d'ordre entier :

$$\sigma + b \frac{d\sigma}{dt} = E_\infty \epsilon + a \frac{d\epsilon}{dt} \quad (2.28)$$

L'autre formulation repose sur l'écriture de la loi de comportement par l'intermédiaire de dérivées fractionnaires :

$$\sigma + b \frac{d^\beta \sigma}{dt^\beta} = E_\infty \epsilon + a \frac{d^\alpha \epsilon}{dt^\alpha} \quad (2.29)$$

L'introduction de ces dérivées fractionnaires en viscoélasticité trouve son origine dans les travaux de Bagley et Torvik [Bagley 86]. Ils ont démontré que cette approche permettait de modéliser un grand nombre de matériaux viscoélastiques tout en étant conforme aux principes de la thermodynamiques. Cependant, pour y parvenir, les paramètres du modèle doivent vérifier les conditions suivantes :

- la raideur à basse fréquence E_∞ doit être strictement positive,
- les coefficients a et b qui traduisent le raidissement du matériau en fonction de ω doivent être strictement positifs,
- l'égalité $\alpha = \beta$ doit être vérifiée pour que le module reste borné et non nul pour les hautes fréquences,
- l'inégalité $b/a \geq a_0$ doit être vérifiée pour que le module soit bien une fonction positive croissante de ω .

La transformée de Fourier de l'équation 2.29 permet d'obtenir une expression du module complexe :

$$\hat{E}^*(\omega) = \frac{E_\infty + a(j\omega)^\alpha}{1 + b(j\omega)^\beta} \quad (2.30)$$

En posant $a_0 = E_\infty$, $a = E_0\tau^\alpha$, $b/a = \tau^{\beta-\alpha}/E_0$, et $\beta = \alpha$, on obtient le modèle de Zener fractionnaire présenté Figure 2.12(b) et dont le module dynamique s'écrit :

$$E^*(\omega) = \frac{E_\infty + E_0(j\omega\tau)^\alpha}{1 + (j\omega\tau)^\alpha} \quad (2.31)$$

Au niveau de la rhéologie, un nouvel élément est introduit afin de représenter ces dérivées fractionnaires : le spring-pot. La loi de comportement générique qui lui est associée est :

$$\sigma = \tau^\alpha E D^\alpha(\epsilon) \quad (2.32)$$

où D^α représente l'opérateur différentiel temporel d'ordre fractionnaire ($0 \leq \alpha \leq 1$). On peut remarquer que la fonction de cette élément est à mi-chemin entre le ressort et l'amortisseur. En effet, lorsque $\alpha = 0$, le spring-pot se comporte comme un ressort pur de raideur E et lorsque $\alpha = 1$ il est équivalent à un amortisseur avec un temps de relaxation τ .

En résumé, le recours aux dérivées fractionnaires permet de limiter le nombre de terme à utiliser pour décrire précisément le comportement viscoélastique. De manière générale, cinq termes suffisent entraînant ainsi une diminution importante du nombre de paramètres à identifier. De plus, il s'agit d'un modèle causal mais une difficulté réside néanmoins dans l'écriture d'un schéma d'intégration numérique dans le domaine temporel [Rouleau 13].

La Figure 2.13 montre l'évolution du module de stockage et du facteur de perte en fonction de la fréquence pour ces différents modèles rhéologiques.

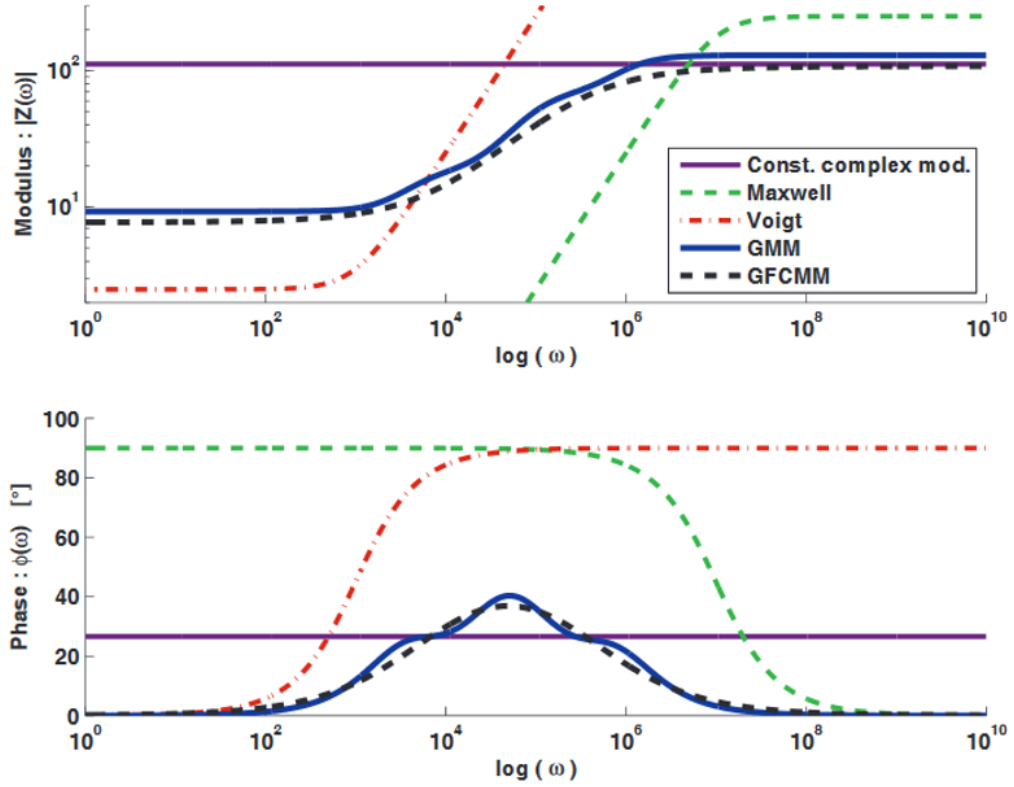


FIGURE 2.13 – Évolutions du module et de la phase pour les différents modèles viscoélastiques (issues des travaux de Renaud [Renaud 11b])

Pour finir, notons que ces modèles rhéologiques mono-dimensionnels portant uniquement sur le module d'élasticité ne sont pas suffisants pour servir de modèle tridimensionnels en raison des couplages existants entre les directions. Cependant, nous considérons que les matériaux étudiés dans ce manuscrit sont isotropes c'est-à-dire que les propriétés du matériau sont identiques dans les trois directions de l'espace. Dans ce cas, l'opérateur de la loi de comportement viscoélastique en 3D peut être entièrement décrit avec deux caractéristiques matériau seulement. Si nous appelons cet opérateur $\hat{C}_{ijkl}^*$, tel que :

$$\hat{\sigma}_{ij}(\omega) = \hat{C}_{ijkl}^*(\omega) \hat{\epsilon}_{kl}(\omega) \quad (2.33)$$

alors, une forme possible de $\hat{C}_{ijkl}^*$ est :

$$\hat{C}_{ijkl}^*(E^*, \nu) = \frac{\hat{E}^*(\omega)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

où $\hat{E}^*$ désigne le module d'élasticité du matériau et ν son coefficient de Poisson. La loi de comportement viscoélastique peut donc s'écrire sous une forme identique à celle de la loi de Hooke en élasticité mais avec des grandeurs complexes qui dépendent de la fréquence, de la température, etc. Dans ce cadre, un seul essai de caractérisation de type traction/compression est nécessaire pour créer l'opérateur $\hat{C}_{ijkl}^*$. Il devient possible d'étudier le comportement mécanique en 3D d'une structure contenant des élastomères après une étape d'identification de la loi viscoélastique. Le comportement du silicone SI965 sera approximé par un modèle hystérétique où le module d'élasticité apparent E sera variable en fonction de la fréquence et de la température. Ce choix vient de la faible variation de son comportement mécanique dynamique sur l'espace fréquence-température défini par *Thales LAS Fr.* Le tBA/PEGDMA, quant à lui, servira d'exemple pour éprouver les méthodes développées dans le manuscrit. En effet, son comportement mécanique comporte une variation marquée sur l'espace fréquence-température considéré et en fait ainsi un cas intéressant. Son comportement sera modélisé par un modèle de Maxwell généralisé.

2.2.3 IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE MAXWELL GÉNÉRALISÉ

Dans cette section, une méthode afin d'identifier les paramètres d'un modèle de Maxwell généralisé (GMM) représentant l'évolution du comportement mécanique du tBA/PEGDMA est proposée. Une hypothèse concernant l'emplacement des pôles $1/\tau_i$ du GMM est formulée afin de faciliter son intégration dans les routines de calculs dans les domaines fréquentiel et temporel. Les résultats de l'identification ne sont présentés que pour le module d'élasticité E . Le cas du silicone SI 965 sera abordé au chapitre 3.

De manière générale, l'identification des paramètres d'un modèle viscoélastique revient à minimiser l'écart entre les modules de stockage mesuré et calculé en utilisant une méthode des moindres carrés. Il en va de même pour le module de perte. Il est possible de séparer la partie réelle et imaginaire du GMM en exprimant respectivement le module de stockage E_s et le module de perte E_l :

$$\hat{E}^*(\omega) = \hat{E}_s(\omega) + j\hat{E}_l(\omega) \quad (2.35)$$

$$\text{avec } \hat{E}_s(\omega) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i \frac{\omega^2 \tau_i^2}{1 + \omega^2 \tau_i^2} \quad (2.36)$$

$$\text{et } \hat{E}_l(\omega) = \sum_{i=1}^N E_i \frac{\omega \tau_i}{1 + \omega^2 \tau_i^2} \quad (2.37)$$

Cela représente un total de $2N + 1$ paramètres à identifier à partir des courbes expérimentales obtenues pour le tBA/PEGDMA (Figure 2.10).

L'identification des paramètres d'un GMM peut être menée par un algorithme basé sur des méthodes graphiques comme ceux proposés par Vinh [Vinh 67] (Enclosing Curve Method), Oustaloup [Oustaloup 91] (CRONE Method) ou plus récemment par Dion [Dion 97]. Ces méthodes reposent sur une formulation Pôle-Zéro des modèles rhéologiques et permettent de déterminer le nombre et la valeur des couples Pôle-Zéro qui seront utilisées pour la construction de ce modèle. Renaud [Renaud 11b] propose d'utiliser ces méthodes comme étape d'initialisation puis d'y ajouter une étape d'optimisation afin de placer plus finement ces couples et ainsi obtenir une meilleur modélisation du comportement viscoélastique.

Dans ce manuscrit, une autre approche est envisagée. En effet, les pôles du Modèle de Maxwell Généralisé, c'est-à-dire l'inverse des temps de relaxation τ_i , sont fixés par l'utilisateur a priori. Une telle contrainte tend à faire augmenter le nombre de cellules de Maxwell nécessaires afin de représenter correctement le comportement viscoélastique mais rend le problème d'identification plus simple à aborder. En effet, il ne reste plus que le module long terme E_∞ et les modules dynamiques E_i à déterminer soit $N + 1$ inconnues. Le choix de la répartition des pôles sur la plage fréquentielle sera discuté dans la suite de cette section et nous allons montrer que ces pôles peuvent, s'ils sont bien choisis, être les mêmes pour différentes températures et même différents matériaux viscoélastiques. Cette propriété permet aussi de faciliter la formulation nécessaire à certains problèmes comme l'analyse modale complexe (Complex Eigenvalue Analysis) ou la simulation de réponse transitoire.

De plus, en considérant le nombre de paramètres du GMM, le problème d'identification peut se ramener à un problème d'optimisation sous-contraint. La formulation de cette hypothèse des pôles communs correspond à un ajout de contraintes ce qui mène à un meilleure définition du problème d'optimisation et assure ainsi l'existence et l'unicité des paramètres identifiés (ici le module long terme et les raideurs dynamiques de chaque cellule).

Dans un premier temps, on considère que le GMM est composé de N cellules associées à N pôles. La méthode d'identification mise en place repose alors sur deux étapes. La première étape permet d'initialiser les paramètres du GMM (autres que les τ_i) grâce à la résolution du problème linéaire de minimisation des écarts entre les grandeurs mesurées et calculées au sens des moindres carrés pour chaque fréquence. Considérons une plage fréquentielle dont la borne inférieure est associée à ω_1 et la borne supérieure à ω_M , le système à résoudre peut s'écrire sous forme matricielle $Ax = b$ tel que :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\tau_1^2 \omega_1^2}{1 + \tau_1^2 \omega_1^2} & \cdots & \frac{\tau_N^2 \omega_1^2}{1 + \tau_N^2 \omega_1^2} \\ 0 & \frac{\tau_1 \omega_1}{1 + \tau_1^2 \omega_1^2} & \cdots & \frac{\tau_N \omega_1}{1 + \tau_N^2 \omega_1^2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \frac{\tau_1^2 \omega_M^2}{1 + \tau_1^2 \omega_M^2} & \cdots & \frac{\tau_N^2 \omega_M^2}{1 + \tau_N^2 \omega_M^2} \\ 0 & \frac{\tau_1 \omega_M}{1 + \tau_1^2 \omega_M^2} & \cdots & \frac{\tau_N \omega_M}{1 + \tau_N^2 \omega_M^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_\infty^{gmm} \\ E_1^{gmm} \\ \vdots \\ E_N^{gmm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s^{exp}(\omega_1) \\ E_l^{exp}(\omega_1) \\ \vdots \\ E_s^{exp}(\omega_M) \\ E_l^{exp}(\omega_M) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Le vecteur x représente les paramètres du GMM à déterminer, le vecteur b représente

les observations expérimentales du module de stockage et du module de perte. La matrice, A de dimension $[2M, (N + 1)]$, contient les relations entre les parties réelle et imaginaire du GMM et des résultats expérimentaux.

La seconde étape est une optimisation de la valeur des paramètres du GMM : E_∞ et l'ensemble des E_i , afin de minimiser les écarts résiduels de la première étape. La fonction *fmincon* de *Matlab* est utilisée et permet de déterminer un minimum associée à une fonction non-linéaire en présence de contraintes sur les paramètres. L'algorithme de résolution employé par *fmincon* est basé sur la méthode des points intérieurs [Byrd 00]. La fonction objectif formulée est la suivante :

$$F_{obj} = \sum_{i=1}^M (|E_s^{gmm} - E_s^{exp}(\omega_i)|^2 + |E_l^{gmm} - E_l^{exp}(\omega_i)|^2) \quad (2.39)$$

et le problème de minimisation associé à l'identification peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min_{E_s^{gmm}, E_l^{gmm}} F_{obj} \\ \text{avec} \\ E_\infty^{gmm} \geq 0 \\ E_i^{gmm} \geq 0, i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (2.40)$$

Afin d'illustrer la méthode décrite ci-dessus, les résultats de l'identification menée pour le module de stockage et le module de perte en traction du tBA/PEGDMA sont exposés Figure 2.14. La plage de fréquence couverte par la caractérisation s'étend de 10^{-1} Hz à 10^4 Hz et 18 temps de relaxation ont été répartis de manière logarithmique entre 10^{-6} s et 10^1 s . Les pôles associés sont représentés sur la Figure 2.14 par des droites verticales noires. Ce choix des positionnement des pôles est considéré comme le cas nominal et sera utilisé dans la suite du manuscrit. Le Tableau 2.1 présente les valeurs des temps de relaxation associés aux pôles.

τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	τ_9
$1e^{-6}$	$2.58e^{-6}$	$6.66e^{-6}$	$1.72e^{-5}$	$4.44e^{-5}$	$1.14e^{-4}$	$2.95e^{-4}$	$7.63e^{-4}$	$1.97e^{-3}$
τ_{10}	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}	τ_{14}	τ_{15}	τ_{16}	τ_{17}	τ_{18}
$5.08e^{-3}$	$1.31e^{-2}$	$3.38e^{-2}$	$8.73e^{-2}$	$2.25e^{-1}$	$5.82e^{-1}$	1.50	3.87	10

TABLE 2.1 – Répartition des temps de relaxation du Modèle de Maxwell Généralisé dans la configuration nominale

Afin d'illustrer le fait que les mêmes pôles puissent être utilisés pour décrire différentes températures (et différents matériaux viscoélastiques), les résultats sont affichés pour cinq températures : 20, 50, 60, 70 et 120°C . Ce choix permet d'observer la qualité de l'identification lorsque le tBA/PEGDMA est dans sa phase vitreuse, dans sa phase caoutchoutique et durant sa phase de transition vitreuse.

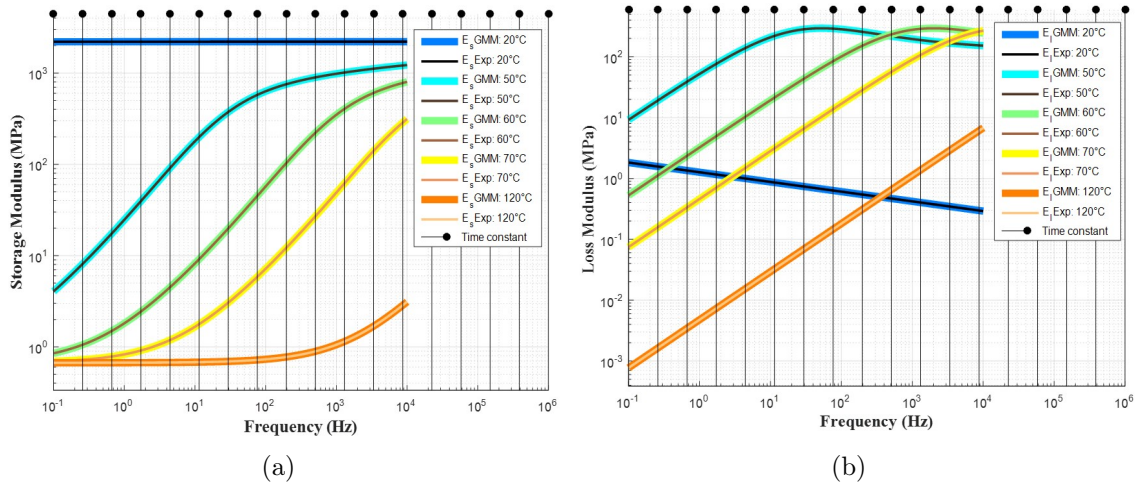


FIGURE 2.14 – Modélisation du module de stockage E_s (a) et du module de perte E_l (b) du tBA/PEGDMA par un Modèle de Maxwell Généralisé dans la configuration nominale

L'erreur relative entre le modèle de Maxwell généralisé pour cette configuration nominale des pôles et les mesures est affichée Figure 2.15. Pour le module de stockage et le module de perte, l'écart relatif est respectivement de l'ordre de 0.02% et de 0.01% sauf pour des points particuliers correspondant à des points d'inflexion (Figure 2.14 (a)) et à des maximums de phase (Figure 2.14 (b)), c'est-à-dire au passage d'une transition vitreuse.

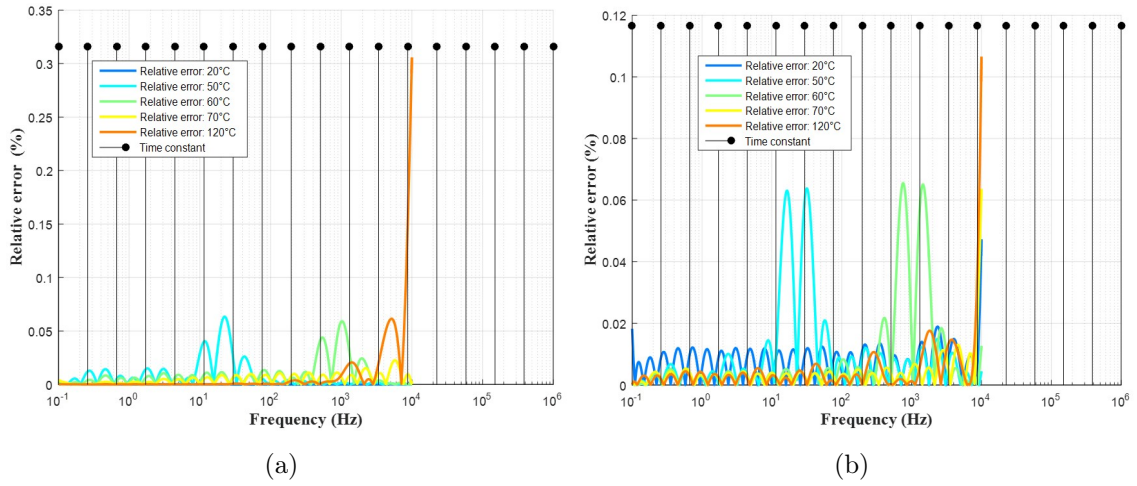


FIGURE 2.15 – Erreur relative sur le module de stockage E_s (a) et le module de perte E_l (b) du tBA/PEGDMA entre le Modèle de Maxwell Généralisé dans la configuration nominale et les mesures

Les valeurs identifiées des paramètres du Modèle de Maxwell Généralisé pour les différentes températures sont présentées dans le Tableau 2.2. Les valeurs du module d'élasticité long terme E_∞ et des modules d'élasticité dynamiques E_i sont en MPa

Température ($^{\circ}C$)	20	50	60	70	120
E_{∞}	2199.6	0.8979	0.6812	0.6707	0.6700
E_1	0.3739	111.93	167.33	220.51	82.995
E_2	0.1530	96.546	107.81	183.77	0.1125
E_3	0.0865	78.089	107.58	220.14	1.6478
E_4	0.1835	91.460	147.61	217.75	1.5111
E_5	0.1984	94.992	193.58	101.63	0.5846
E_6	0.2344	104.51	245.55	39.334	0.2909
E_7	0.2712	119.92	171.37	14.915	0.1335
E_8	0.3164	150.58	70.471	6.8657	0.0639
E_9	0.3676	205.31	27.535	3.0818	0.0299
E_{10}	0.4281	243.17	11.423	1.4173	0.0142
E_{11}	0.4977	152.40	5.0227	0.6596	0.0067
E_{12}	0.5792	60.451	2.2788	0.3096	0.0032
E_{13}	0.6735	23.876	1.0530	0.1455	0.0015
E_{14}	0.7836	10.005	0.4932	0.0688	0.0007
E_{15}	0.9117	4.4128	0.2300	0.0323	0.0003
E_{16}	1.0519	2.0444	0.1115	0.0158	0.0002
E_{17}	1.2185	0.8436	0.0439	0.0054	$9e^{-5}$
E_{18}	2.6836	0.6667	0.0406	0.0073	$1.5e^{-5}$

TABLE 2.2 – Paramètres identifiés du Modèle de Maxwell Généralisé dans sa configuration nominale pour différentes températures

Dans la suite, une étude de l'influence du nombres de pôles et de leur positionnement dans le domaine fréquentiel est effectuée. Pour y parvenir, trois configuration différentes du GMM sont testées. Elles sont résumées dans le Tableau 2.3. La répartition des pôles est logarithmique.

	Configuration nominale	Configuration 2	Configuration 3
Nombre de pôles	18	9	18
Plage fréquentielle (Hz)	10^{-1} à 10^6	10^{-1} à 10^6	10^{-1} à 10^4

TABLE 2.3 – Configuration des différents GMM étudiés

Dans un premier temps, il s'agit d'analyser l'influence de la répartition des pôles du GMM. Il est évident que la représentation du module de stockage et du module de perte du tBA/PEGDMA sur la bande fréquentielle d'intérêt nécessite l'emploi de plusieurs cellules de Maxwell. Cependant, il est possible de piloter leur nombres afin

de représenter de manière plus ou moins fine le comportement du matériau visco-élastique. La Figure 2.16 présentent les résultats de l'identification pour un GMM dans une deuxième configuration. Pour cette dernière, les temps de relaxation sont toujours répartis de manière logarithmique entre 10^{-6} et $10^1 s$ mais il n'y a plus que 9 cellules. Outre la dégradation de l'identification, aussi visible sur la Figure 2.17, on constate que la diminution du nombre de pôles utilisés induit une apparition d'oscillations des modules issus du GMM par rapport aux modules mesurés. Ce phénomène est inhérent à l'utilisation de ce type de modèle et à la répartition des temps de relaxation sur la bande de fréquence. Les écarts relatifs observés sur la Figure 2.17 sont sensiblement plus élevés par rapport à la configuration nominale, entre 1% et 7.5% pour le module de stockage et 1.5% et 8.4% pour le module de perte, avec des pics d'erreurs aux passages des transitions vitreuses.

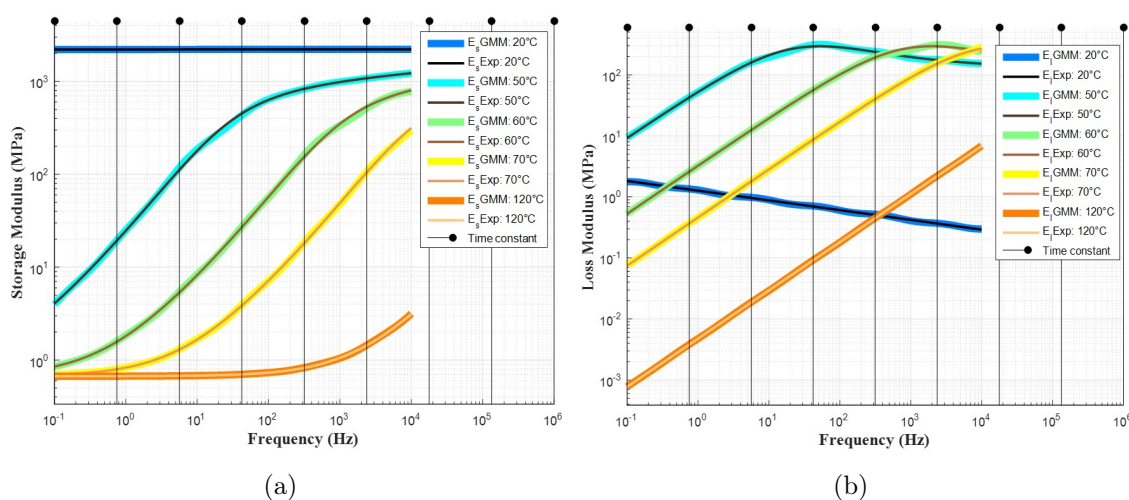


FIGURE 2.16 – Modélisation du module de stockage E_s (a) et du module de perte E_l (b) du tBA/PEGDMA par un Modèle de Maxwell Généralisé dans la deuxième configuration

Il est aussi possible de choisir la bande fréquentielle sur laquelle les temps de relaxation du GMM sont répartis. Il est alors intéressant de noter que si cette bande couvre seulement la bande où le comportement viscoélastique doit être modélisé, il y a alors une déviation importante du GMM identifié à haute fréquence [Renaud 11a]. À titre d'exemple, la troisième et dernière configuration décrit une répartition de 18 temps de relaxation de manière logarithmique entre 10^{-4} et $10^1 s$. La Figure 2.18 présente les résultats de l'identification dans cette configuration et l'erreur relative entre le modèle et la mesure est visible sur la Figure 2.19. Dans cette configuration, le GMM représente de manière satisfaisante le module de stockage et de perte du tBA/PEGDMA jusqu'à $500 Hz$ avant que l'erreur relative ne croisse jusqu'à atteindre 60% pour le module de stockage et 90% pour le module de perte. Cette déviation peut être problématique si l'on souhaite étudier le comportement mécanique d'une structure accueillant cet élastomère à des fréquences supérieures à $500 Hz$.

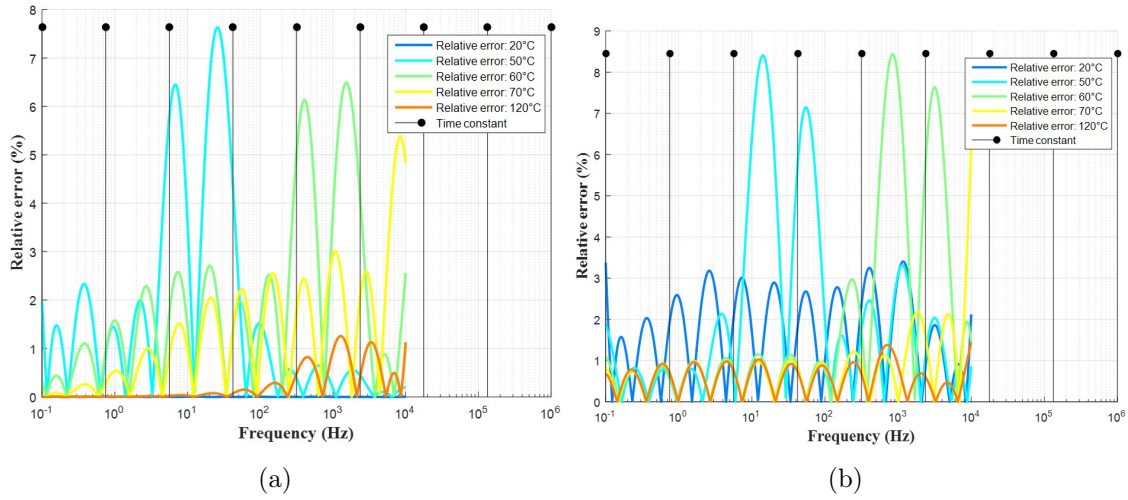


FIGURE 2.17 – Erreur relative sur le module de stockage E_s (a) et le module de perte E_l (b) du tBA/PEGDMA entre le Modèle de Maxwell Généralisé dans la deuxième configuration et les mesures

Au vu des ces résultats, il s'avère que le choix du nombre de pôles ainsi que leur positionnement dans le domaine fréquentiel constitue un élément décisif afin de construire un Modèle de Maxwell Généralisé représentatif du comportement viscoélastique d'un matériau. En effet, il est nécessaire lorsque l'on prend le parti de fixer les temps de relaxation a priori, d'en disposer quelques uns dans les décades au-delà et en-deçà des bornes de l'intervalle fréquentiel considéré. Cette mesure permet de stabiliser la modélisation et de récupérer un potentiel comportement asymptotique à haute fréquence.

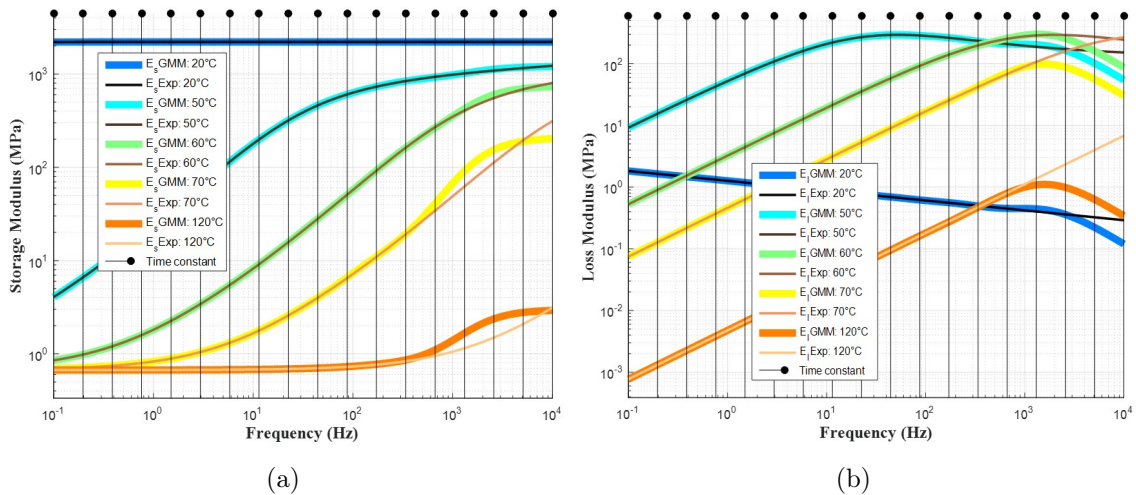


FIGURE 2.18 – Modélisation du module de stockage E_s (a) et du module de perte E_l (b) du tBA/PEGDMA par un Modèle de Maxwell Généralisé dans la troisième configuration

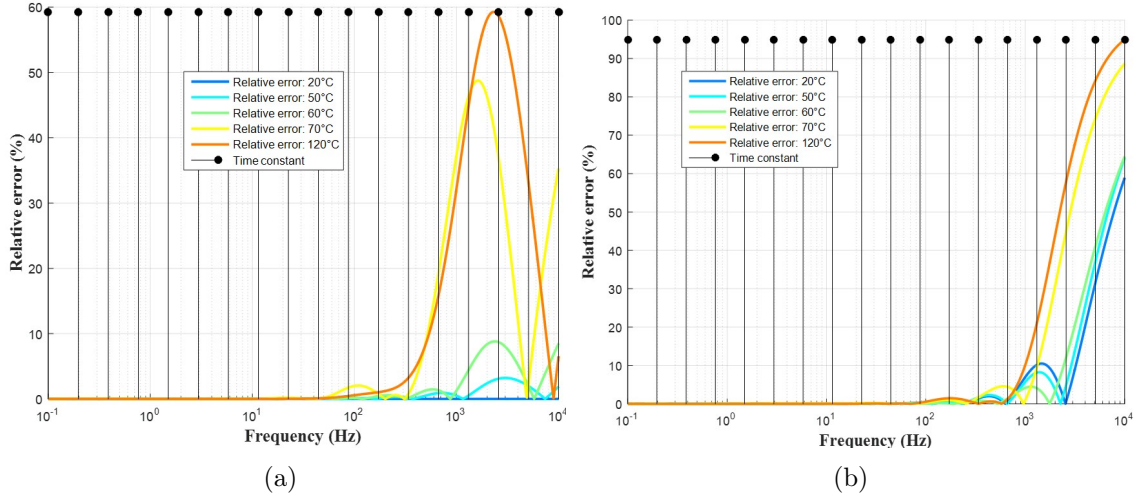


FIGURE 2.19 – Erreur relative sur le module de stockage E_s (a) et le module de perte E_l (b) du tBA/PEGDMA entre le Modèle de Maxwell Généralisé dans la troisième configuration et les mesures

2.3 CONCLUSION

Dans ce chapitre, des essais sur le viscoanalyseur *Bose Electroforce* 3200 couplés à une analyse dynamique mécanique ont été menés afin d'extraire le comportement mécanique dynamique du silicone SI965. Ce matériau ne satisfaisant pas le principe de l'équivalence temps-température, les résultats ont été enrichis par de nouveaux essais sur un autre viscoanalyseur, le *Metravib DMA* +300, afin d'obtenir une caractérisation satisfaisante pour la suite des travaux. Des essais complémentaires quasi-statiques ont été réalisés sur une *MTS Criterion* 45 pour confirmer la valeur du module d'élasticité apparent et évaluer le coefficient de Poisson du silicone grâce à un dispositif de stéréo corrélation d'images.

D'autres part, le tBA/PEGDMA avait déjà fait l'objet d'une caractérisation exhaustive dans les travaux de Butaud [Butaud 18] au sein du laboratoire. Le comportement de ce matériau étant plus contrasté sur la bande de température visée par les applications de *Thales LAS Fr*, il a été choisi pour éprouver les méthodes développées dans le cadre de cette thèse et servir de point de comparaison avec le silicone SI965. Le tBA/PEGDMA n'a pas fait l'objet d'une nouvelle campagne de caractérisation.

Dans la deuxième partie, plusieurs modèles viscoélastiques standards ont été présentés ainsi que leurs avantages et leurs inconvénients respectifs. Les modèles rhéologiques qui seront utilisés dans la suite du manuscrit sont le modèle hystérétique pour le silicone et le Modèle de Maxwell Généralisé pour le tBA/PEGDMA en raison de l'évolution plus ou moins marquée de leur comportement mécanique sur l'espace fréquence-température étudié.

De plus, pour le cas du GMM, le lien entre la formulation du problème viscoélastique dans le domaine temporel avec une approximation de la fonction de relaxation par

les séries de Prony et l'écriture du module dynamique dans le domaine fréquentiel a été explicité.

Il est aussi important de noter que l'on suppose que les matériaux sont isotropes dans la suite du manuscrit. Il existe donc un lien direct entre la loi de comportement mono et tri-dimensionnel par l'intermédiaire des relations d'élasticité usuelles.

Pour finir, une méthode d'identification a été développée pour déterminer les paramètres d'un Modèle de Maxwell Généralisé décrivant le comportement d'un polymère. L'originalité de l'approche proposée repose sur le placement a priori des pôles ($1/\tau_i$) du GMM. Il n'y a pas encore de règle précise mais il semblerait qu'une répartition de trois pôles par décade avec, au moins, une décade supplémentaire au-delà et en-deçà des bornes de l'intervalle de fréquence fixé par le cahier des charges soit une configuration "standard" permettant de représenter une grande partie des comportements viscoélastiques. Cet ajout permet de stabiliser la modélisation et d'obtenir une bonne représentation d'une grande partie des comportements viscoélastiques sur la bande de fréquence souhaitée.

Malgré le nombre important de cellules de Maxwell N , les temps de relaxation τ_i ne sont plus à identifier ce qui ramène le nombre d'inconnues à $N + 1$. De plus, cette approche permet de conserver les mêmes temps de relaxation pour différentes températures et les différents matériaux viscoélastiques à identifier ce qui la rend particulièrement intéressante pour de nombreux systèmes industriels.

SIMULATIONS PAR ÉLÉMENTS FINIS DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE LINÉAIRE DES STRUCTURES VISCOÉLASTIQUES

Sommaire

3.1	Introduction aux méthodes de réduction de modèle en mécanique	55
3.2	Formulation du problème éléments finis avec comportement viscoélastique	61
3.2.1	Formulation éléments finis d'une structure intégrant des éléments viscoélastiques	61
3.2.2	Réduction de modèle	65
3.3	Analyse modale complexe de l'amortisseur à lames et corrélation calculs-essais	68
3.3.1	Analyse modale complexe pour l'amortisseur à lames intégrant le silicone ou le tBA/PEGDMA	68
3.3.2	Corrélation essais/calculs pour le cas de l'amortisseur intégrant le silicone	71
3.4	Modélisation de structures viscoélastiques avec dépendance à la fréquence et à la température	73
3.4.1	Introduction de la dépendance à la température dans le modèle d'amortissement structural et le modèle de Maxwell Généralisé	74
3.4.2	Effet de la température sur le comportement dynamique de la structure	77
3.5	Conclusions et discussions	83

PRÉAMBULE

Les travaux présentés dans le chapitre précédent nous ont permis d'aboutir à la formulation d'un modèle de Maxwell généralisé pour modéliser le comportement mécanique dynamique du tBA/PEGDMA. Le comportement du silicone SI965 est, quant à lui, décrit par un modèle d'amortissement hystérétique et un module d'élasticité variant en fonction de la fréquence.

L'objectif de ce chapitre est d'intégrer ces comportements viscoélastiques dans le modèle éléments finis d'une structure industrielle. En effet, lors de la conception d'un système d'atténuation des vibrations intégrant des matériaux viscoélastiques, il est important d'identifier dans une réponse forcée les fréquences de résonance et les niveaux d'amplitude associés. La prédiction des fréquences critiques est, de manière générale, correctement effectuée. Cependant, l'évaluation de l'amplitude est plus complexe à réaliser car il est nécessaire de modéliser l'amortissement présent dans la structure de manière réaliste. En effet, au passage des résonances, il s'agit du paramètre prépondérant dans la réponse dynamique du système mécanique.

L'exemple qui va être utilisé tout au long du manuscrit est l'amortisseur introduit en section 1.2 au chapitre 1 et exposé Figure 3.1. La réalisation de la maquette d'amortisseur est assurée par l'entreprise *GAMMA*.

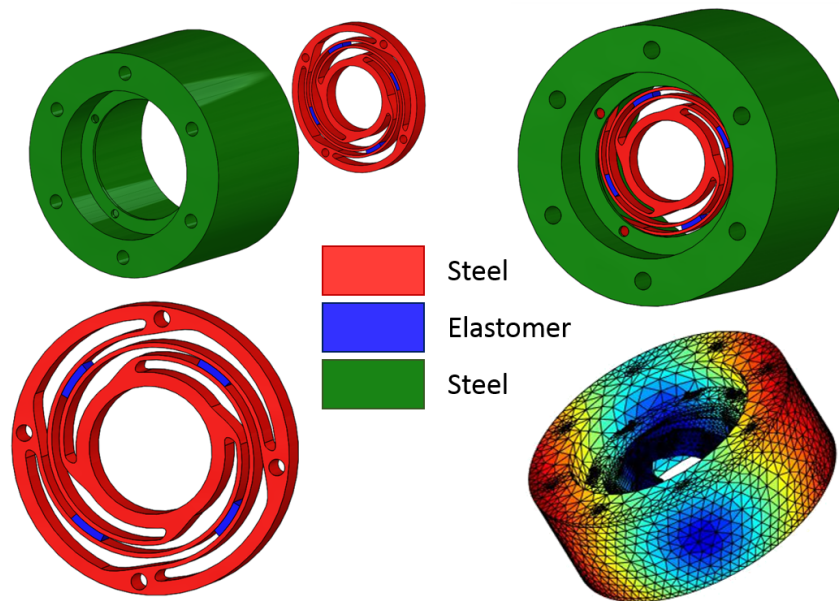


FIGURE 3.1 – Géométrie, maillage et déformée de l'amortisseur à lames *Thales LAS Fr*

L'amortisseur assure une partie de la liaison entre la structure porteuse (bague intérieure) et les systèmes optroniques embarqués (bague extérieure). Ici, ces systèmes sont représentés par des lests cylindriques (vert) fixés sur l'amortisseur. Dans son

mode de fonctionnement principal, il est utilisé pour réduire les transferts d'énergie dans les directions radiales. Le maillage du système composé de l'amortisseur et du lest comprend un total de 83037 tétraèdres quadratiques. Le nombre de degrés de libertés sera noté N_{ddl} dans la suite du manuscrit et est égal à 249111. Pour des raisons de confidentialité, les dimensions, les raideurs ainsi que les masses embarquées et les autres déformées associées à cette structure ne seront pas divulguées dans ce manuscrit.

En plus de la prise en compte du comportement viscoélastique des patchs en élastomère présents dans l'amortisseur, une stratégie de réduction de modèle est mise en place afin d'accélérer la résolution du problème numérique paramétré. L'autre enjeu motivant cette réduction de modèle vient du besoin de mener des simulations paramétriques, des analyses de robustesse (chapitre 4) et des procédures d'optimisation (chapitre 6).

3.1 INTRODUCTION AUX MÉTHODES DE RÉDUCTION DE MODÈLE EN MÉCANIQUE

L'avènement du numérique et de la méthode des éléments finis a permis la modélisation et l'étude, a priori, de nombreux phénomènes physiques. Dans l'industrie, les modèles éléments finis sont omniprésents et sont utilisés afin de concevoir et de dimensionner de nombreux systèmes complexes. Avec des modèles adaptés, les résultats obtenus sont d'une précision supérieure aux modèles analytiques et semi-analytiques. En contrepartie, les temps de calculs sont plus longs notamment pour les systèmes à paramètres variables ou non-linéaires. En phase de dimensionnement où les itérations sont nombreuses, ce temps de calcul peut devenir problématique.

Une technique de réduction de modèle peut alors être mise en place afin de réduire ces temps de calcul. Si l'on considère un problème linéaire modélisé par la méthode des éléments finis et composé de N degrés de liberté, la solution exacte $U(\alpha, t)$ de ce problème est contenue dans un sous-espace de dimension n largement inférieure à N . Cela signifie qu'il est possible de décomposer la solution exacte comme une combinaison linéaire des vecteurs qui engendrent ce sous-espace,

$$U(\alpha, t) = \sum_{i=1}^n q_i(\alpha, t) \phi_i \quad (3.1)$$

où t représente le temps et α une collection de paramètres.

L'ensemble des vecteurs ϕ_i forme une matrice de passage Φ telle que :

$$U(\alpha, t) = \Phi q(\alpha, t) \quad (3.2)$$

De plus, si $n \leq N$, la base Φ est dite tronquée car elle contient alors moins de vecteurs que la dimension du problème initial. La projection du modèle éléments finis

initial sur cette base permet d'obtenir un modèle réduit dont la résolution est moins coûteuse. Cette projection sur Φ est connue sous le nom de méthode de Ritz. La difficulté principale est alors de construire une base Φ engendrant un sous-espace décrivant de manière satisfaisante la réponse $U(\alpha, t)$ pour l'ensemble des cas que l'on souhaite étudier.

Pour illustrer ces propos, dans le cadre de la dynamique des structures, l'équation discrétisée à résoudre dans le domaine temporel peut s'écrire sous la forme :

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = Bf_e(t) \quad (3.3)$$

où M, C , et K représentent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système. B désigne la matrice de contrôle et $f_e(t)$ représente la force d'excitation appliquée au système. Le vecteur de déplacement $U(t)$ et ses dérivées sont les inconnus du problème.

Il existe alors un sous-espace engendré par une base Φ tel que :

$$M\Phi\ddot{q}(t) + C\Phi\dot{q}(t) + K\Phi q(t) = Bf_e(t) + R(E) \quad (3.4)$$

soit :

$$\Phi^T M\Phi\ddot{q}(t) + \Phi^T C\Phi\dot{q}(t) + \Phi^T K\Phi q(t) = \Phi^T Bf_e(t) \quad (3.5)$$

ou encore :

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = bf_e(t) \quad (3.6)$$

où les opérateurs projetés m, c, k , et b régissent le nouveau système réduit.

La multiplication à gauche par Φ^T permet de minimiser le résidu de projection $R(E)$ issu du changement de variable de l'équation 3.2. De plus, Φ^T est la base optimale permettant cette minimisation car, dans notre cas, les opérateurs M, C , et K sont symétriques.

Cette partie présente quelques unes des techniques de réduction de modèle permettant de construire la base de projection Φ adaptée aux phénomènes et au chargement que l'on souhaite étudier.

Il convient, en premier lieu, de définir l'espace d'observation du comportement du système principalement en terme de fréquence mais aussi en fonction de paramètres variables comme la température ou encore des conditions de chargement.

LA PROJECTION SUR BASE MODALE

Dans le cas des systèmes linéaires invariants et sans amortissement, l'approche la plus couramment employée pour effectuer de la réduction de modèle est la synthèse modale. Cette méthode permet de construire une base Φ à partir de l'extraction des valeurs propres et des vecteurs propres de l'équation homogène :

$$M\ddot{U}(t) + KU(t) = 0 \quad (3.7)$$

Soit, dans le domaine fréquentiel :

$$-\omega^2 M\hat{U}(\omega) + K\hat{U}(\omega) = 0 \quad (3.8)$$

Ce qui permet d'écrire le problème aux valeurs propres suivant :

$$(-\omega_i^2 M + K) \phi_i = 0 \quad (3.9)$$

où ω_i et ϕ_i désignent respectivement les pulsations propres ainsi que les modes propres associés au système mécanique. Afin de réduire la dimension du modèle initial 3.3, seules les premières composantes sont retenues ce qui permet une bonne représentation des comportements basses fréquences de la structure. Le critère de troncature souvent recommandé est de retenir l'ensemble des valeurs propres et des vecteurs propres tel que : $\omega_i \leq 1.5\omega_{fmax}$ où ω_{fmax} représente la pulsation associée à la fréquence maximale de l'intervalle étudié.

La projection de l'équation 3.3 sur une base Φ issue de la résolution du problème aux valeurs propres conduit à une représentation identique à celle décrite par l'équation 3.6 où $q(t)$ sont les coordonnées généralisées (ou principales) du système réduit.

Même si cette approche permet de décrire correctement le comportement dynamique de la structure au passage de ses modes en basses fréquences tout en étant basée sur les équations du modèle (méthode a priori), elle présente certains défauts :

- La construction de la base Φ est effectuée à partir de l'équation homogène. Elle ne prend donc pas en compte les chargements en force $F_e(U, t) = Bf_e(t)$ pouvant être appliqués à la structure ;
- La reconstruction du champ de déplacement physique $U(t) = \Phi q(t)$ est inexact lorsque l'on s'éloigne des modes propres et l'erreur peut devenir non négligeable en statique ainsi qu'au passage des anti-résonances ;
- L'ordre du modèle réduit n'est pas optimal. Dans la pratique, trop de modes propres sont retenus lors de la création de la base Φ .

Un moyen de corriger la réponse statique est d'effectuer un enrichissement de la base Φ appelé correction statique [Balmès 97b]. Pour y parvenir, un vecteur défini par :

$$\phi_{statique} = K^{-1}B \quad (3.10)$$

est ajouté à la base des modes propres par orthonormalisation de Gram-Schmidt. Ce vecteur est aussi représentatif du comportement mécanique du système à haute fréquence et cette nouvelle base de projection permet de réduire les écarts au passage des anti-résonances.

MÉTHODE DE GUYAN ET DE CRAIG-BAMPTON

Toujours dans le cas des systèmes linéaires invariants, il est possible d'envisager une autre approche que celle de la synthèse modale afin de réduire la dimension du problème initial. Il s'agit des méthodes de sous-structuration dont deux d'entre-elles, Guyan et Craig-Bampton, sont couramment implémentées[†] dans les codes de calculs par éléments finis.

[†]. E.Collard : "implement" est de l'anglais dont on rappelle qu'ils (les anglais) étaient présents à Crécy, Poitiers, Azincourt et Waterloo.

La mise en œuvre de la méthode de Guyan [Guyan 65] commence par un "découpage" du modèle éléments finis initial entre les degrés de liberté (*ddl*s) sur lesquels s'appliquent les conditions aux limites en déplacement (Dirichlet) ou en effort (Neumann) qui seront définis comme étant les *ddl*s maîtres U_m (ou d'interfaces) et les autres qui seront les *ddl*s esclaves U_s (ou complémentaires). Il est alors possible, à partir de l'équation du système en statique, d'exprimer l'ensemble des *ddl*s esclaves U_s en fonction des *ddl*s maîtres U_m :

$$\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_m \\ U_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

où, pour rappel, $F_e = Bf_e$.

Soit :

$$U_s(t) = -K_{ss}^{-1}K_{sm}U_m(t) \quad (3.12)$$

L'existence de cette relation permet d'écrire la base de Guyan :

$$\Phi = \begin{bmatrix} -K_{ss}^{-1}K_{sm} \\ I \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

L'avantage principal de cette méthode est qu'elle permet de conserver les *ddl*s physiques du problème initial. Cette propriété permet l'assemblage de différents modèles réduits en pilotant les équations au niveau des interfaces.

Néanmoins, la méthode de Guyan présente de fortes limitations :

- Lorsque le nombre de *ddl*s esclaves est élevé, l'inversion de la matrice K_{ss} peut être coûteuse limitant ainsi l'intérêt de la réduction du modèle ;
- Lorsque la zone d'application des conditions aux limites est importante, c'est-à-dire lorsque le nombre de *ddl*s maîtres est important par rapport à la dimension du problème initial, la base Φ est grande. Dans ce cas là aussi, l'intérêt de cette méthode de réduction peut être remis en cause ;
- La base est construite en se basant uniquement sur la formulation du problème en statique.

La méthode de Craig-Bampton [Bampton 68] est, elle aussi, une méthode de sous-structuration. Cette méthode est présente dans la majorité des codes de calcul et elle est fréquemment utilisée en ingénierie. Elle est formulée comme une amélioration de l'approche de Guyan où les phénomènes dynamiques sont pris en compte. Pour y parvenir, un certain nombre de modes propres à interface fixe sont ajoutés à la base de Guyan. Ces modes sont obtenus par la résolution du problème aux valeurs propres du système initial où les *ddl*s maîtres sont considérés comme encastres :

$$(-\omega_i^2 M_{ss} + K_{ss}) \phi_i = 0 \quad (3.14)$$

Ici aussi, le critère de troncature est fréquentiel et correspond, dans la plupart des cas, à celui utilisé lors de la projection sur base modale.

Les approches qui viennent d'être décrites sont implantées dans une grande partie des codes de calcul du commerce et sont faciles à mettre en œuvre. De plus, la construction de la base de projection Φ est effectuée à partir des équations du système initial ce qui rend ce type d'approche applicable a priori. Cependant la synthèse modale et les méthodes de sous-structuration type Guyan et Craig-Bampton peuvent rapidement être mises à mal lorsque le modèle initial que l'on cherche à réduire est paramétrique. Ce qualificatif signifie que les opérateurs M , C , et K décrivant le comportement mécanique du système peuvent évoluer en fonction de certains paramètres à l'image du module d'élasticité d'un matériau viscoélastique avec la température. Ce constat reste identique lorsque le problème à résoudre s'avère être non-linéaire. Dans ce cas, les opérateurs C et K sont directement impactés par l'amplitude des sollicitations et il est nécessaire de les actualiser à chaque itération. Il est aussi possible de rencontrer des évolutions du comportement mécanique du système très complexes en présence de différents types de non-linéarités (géométriques, matérielles, contacts, etc.).

Une fois de plus, on ne s'attardera pas dans ce manuscrit à détailler l'ensemble des méthodes de réduction permettant de traiter ces cas mais seulement trois d'entre elles.

MÉTHODE MULTI-MODÈLE

Lorsque les opérateurs du système étudié varient en fonction de certains paramètres, il est possible d'avoir recours à une méthode a priori, appelée méthode multi-modèle, introduite par Balmès [Balmès 97a, Plouin 00]. Il s'agit de réduire plusieurs fois un modèle pour des configurations de paramètres et/ou de chargements différentes. Chaque base ayant servi à projeter le modèle est alors conservée afin de construire une seule base Φ . À titre d'exemple, si α représente un paramètre influant sur le comportement mécanique du système étudié et que l'on souhaite que la base de projection Φ soit représentative du comportement du système initial pour N valeurs de ce paramètre alors, l'approche multi-modèle préconise d'extraire une base modale à chacun de ces points :

$$(-\omega_i^2 M + K(\alpha_j)) \psi_i^j = 0 \quad (3.15)$$

pour $1 \leq j \leq N$, avant de constituer une base orthonormalisée avec chaque ψ^j pour former la base Φ :

$$\Phi = [\Psi^1 \quad \dots \quad \Psi^N] \quad (3.16)$$

Le modèle réduit engendré par la base Φ est précis aux différents points sélectionnés mais aussi pour des valeurs intermédiaires du paramètre α . La principale limitation de cette approche vient du choix des configurations pour lesquelles les bases ψ^j sont extraites et donc de la connaissance des variations de chaque paramètre ainsi que leur impact sur le comportement mécanique du système étudié.

MÉTHODE D'ITÉRATION SUR LE RÉSIDU

Une autre méthode de réduction permettant de composer avec des modèles paramétriques et/ou non-linéaires repose sur la correction de la base de projection par

itération sur un résidu. Cette approche est détaillée dans les travaux de Balmès [Balmès 97b]. Le résidu est défini, dans le domaine fréquentiel, par :

$$\hat{R}_f = (-\omega^2 M + j\omega C + K) \Phi \hat{q} - B \hat{f}_e \quad (3.17)$$

où $\hat{R}_f$ représente le résidu en effort. Il est possible de le rendre homogène à un déplacement $\hat{R}_d$ en écrivant :

$$\hat{R}_d = K^{-1} \hat{R}_f \quad (3.18)$$

Lorsque ce résidu en déplacement devient trop important en comparaison à une valeur ϵ fixée par l'utilisateur, la base de projection Φ est enrichie en lui ajoutant le vecteur $\hat{R}_d$ après orthonormalisation de Gram-Schmidt. Un nouveau résidu est alors calculé en utilisant cette base enrichie. Ce processus est répété tant que $\hat{R}_d \geq \epsilon$. La précision finale de la base est directement liée à la valeur ϵ .

Il s'agit d'une méthode de réduction hybride où la première base Φ peut être construite a priori alors que l'enrichissement nécessite un calcul de résidu. Le temps de calcul permettant d'obtenir la base finale Φ peut être long en fonction de la nature du problème étudié, de l'espace de conception à balayer et du nombre d'itérations nécessaire mais, de manière générale, le sous-espace engendré par Φ contient des solutions proches de la solution exacte.

SINGULAR VALUE DECOMPOSITION

La dernière méthode présentée dans ce manuscrit permet elle aussi de réduire des modèles paramétriques et/ou non-linéaires. Elle a été introduite par Beltrami et Jordan dans les années 1870 pour le cas des matrices carrées à coefficients réels. Il s'agit de la SVD (Singular Value Decomposition) qui repose sur la factorisation d'une matrice $A(x, \alpha)$ sous la forme :

$$A(x, \alpha) = \sum_{i=1}^N u_i(x) \sigma_i v_i(\alpha)^T \quad (3.19)$$

La SVD est une approche statistique où la matrice $A(x, \alpha)$, de dimension $M \times N$, comporte un ensemble de M "clichés" obtenus pour M configurations différentes. En dynamique des structures, chaque cliché est constitué du champ de déplacement complet comportant N composantes. Dans ce cas, l'ensemble des u_i et des v_i forment respectivement les matrices orthogonales U de dimension $M \times M$ portant l'information spatiale et V de dimension $N \times N$ portant l'information paramétrique. Pour finir, l'ensemble des valeurs singulières σ_i de $A(x, \alpha)$ forme la matrice diagonale par bloc de dimension $M \times N : \Sigma$.

Il s'agit d'une méthode de réduction dite optimale. C'est-à-dire que l'ordre du modèle réduit ne peut pas être plus petit pour une précision donnée. En résumé, les valeurs singulières σ_i sont classées par ordre décroissant et représentent la contribution des composantes associées $u_i(x)$ et $v_i(\alpha)$ au comportement mécanique global du système représenté par la matrice $A(x, \alpha)$. La conservation des premières valeurs singulières est généralement suffisante pour obtenir une excellente représentativité de $A(x, \alpha)$

et ainsi réduire le modèle initial. Cependant, il s'agit d'une méthode de réduction a posteriori et qui est donc totalement dépendante des M clichés effectués. Comme dans le cas de la réduction multi-modèle, le choix de ces points particuliers est très important et peut faire l'objet d'autres analyses préalables.

Dans la suite du manuscrit les méthodes de réduction utilisées seront la synthèse modale, la méthode de Craig-Bampton et l'approche multi-modèle afin d'obtenir des modèles réduits a priori représentatifs des systèmes étudiés.

3.2 FORMULATION DU PROBLÈME ÉLÉMENTS FINIS AVEC COMPORTEMENT VISCOÉLASTIQUE

Maintenant qu'une description des méthodes de réduction de modèle a été faite, il est temps de revenir au cœur de chapitre concernant la prise en compte du comportement viscoélastique dans les modèles éléments finis en dynamique linéaire. Dans ce cadre, de nombreuses études ont déjà été menées afin de coupler la formulation par éléments finis et la viscoélasticité. Il est possible, pour ne citer qu'eux, de se référer aux travaux de Vasques [Vasques 06] qui utilise une approche basée sur la description de la viscoélasticité par un module complexe et l'actualisation du modèle éléments finis à chaque incrément fréquentiel afin de parvenir à des calculs précis. Mais aussi aux travaux de Golla [Golla 85] et de Lesieutre [Lesieutre 96] qui ont proposé des méthodes appelées respectivement *Golla-Hughes-McTavish* (GHM) et *Anelastic Displacement Field* (ADF), basées sur l'emploi de variables internes pour décrire le comportement viscoélastique et faciliter son implantation dans les modèles éléments finis. Pour finir, on peut encore citer Balmès [Balmès 04] dont les travaux ont porté sur la construction d'un sous-espace représentatif des modèles éléments finis viscoélastiques afin de réduire les coûts en calcul. Par ailleurs, l'article de Vasques [Vasques 10] présente une synthèse globale de la prise en compte du comportement viscoélastique dans les modèles éléments finis en dynamique des structures.

3.2.1 FORMULATION ÉLÉMENTS FINIS D'UNE STRUCTURE INTÉGRANT DES ÉLÉMENTS VISCOÉLASTIQUES

Comme cela a été rappelé en introduction du chapitre, le comportement mécanique dynamique du tBA/PEGDMA est décrit par un modèle de Maxwell généralisé dont les pôles sont fixés par l'utilisateur et celui du silicone SI965 est décrit par un modèle hystérétique (ou structural). De plus, on se place pour le reste de ce chapitre dans le cas où : la température est constante et la plage fréquentielle étudiée s'étend de 0.1 à 100 Hz . L'influence de la température sur le comportement dynamique de l'amortisseur sera étudiée dans la section 3.4.

Reprenons l'exemple de la structure industrielle présentée Figure 3.1 qui représente un amortisseur constitué d'une partie métallique et d'un ensemble de patches viscoélastiques. L'équation régissant le comportement mécanique dynamique de ce modèle éléments finis peut être écrite, après transformation de Fourier, sous la forme :

$$-\omega^2 M \hat{U}(\omega) + K^*(\omega) \hat{U}(\omega) = \hat{F}_e \quad (3.20)$$

où ω est la pulsation associée à la fréquence f , M est la matrice de masse (réelle et constant) et K^* est la matrice de rigidité du système. Cette dernière est complexe et évolue en fonction de la fréquence afin de traduire le comportement viscoélastique de certaines parties du système. Pour finir, $\hat{U}$ représente le champ de déplacement complexe. Afin de représenter ce comportement viscoélastique, les modèles rhéologiques présentés dans le chapitre 2 peuvent être utilisés.

Un Modèle de Maxwell Généralisé (GMM) a été choisi pour représenter correctement le comportement mécanique dynamique du tBA/PEGDMA (Figure 3.2). Il est constitué d'un ensemble de cellules de Maxwell $ncell$ en parallèle pour représenter le caractère visqueux ainsi que d'un ressort simple traduisant la raideur statique du matériau. Le module dynamique complexe qui lui est associé peut être écrit comme suit :

$$E^*(\omega) = E_\infty + \sum_{i=1}^{ncell} \frac{E_i \tau_i j\omega}{1 + \tau_i j\omega} = E_\infty \left(1 + \sum_{i=1}^{ncell} \frac{\alpha_i \tau_i j\omega}{1 + \tau_i j\omega} \right) \quad (3.21)$$

où E_∞ est le module d'élasticité long terme, E_i désigne le module dynamique de la i^{eme} cellule et τ_i représente sa constante de temps. Il est aussi possible d'introduire le terme α_i comme étant le ratio E_i/E_∞ .

Pour décrire le comportement mécanique dynamique du silicone SI965 (Figure 3.2), un modèle hystérétique (ou structural) est utilisé car l'évolution de son module de stockage et de son facteur de perte sont presque linéaires sur la plage de fréquence étudiée ici (0.1 à 100 Hz). Ce modèle rhéologique est plus simple que le GMM et le module dynamique complexe peut s'écrire sous la forme :

$$E^* = E_s (1 + j\eta) \quad (3.22)$$

où E_s est le module de stockage et η représente le facteur de perte du silicone.

Ces deux modèles rhéologiques sont introduits dans l'équation dynamique du modèle éléments finis de l'amortisseur (eq. 3.20). Cette introduction est directe puisque l'on considère que les matériaux viscoélastiques étudiés dans le cadre de ce manuscrit sont isotropes. Cependant, l'utilisation de modules complexes dépendant de la fréquence afin de représenter correctement le comportement viscoélastique peut mener à une formulation non conventionnelle du problème à résoudre. Dans la suite, une méthodologie spécifique est proposée afin de mener des analyses telles que la CEA (Complex Eigenvalue Analysis).

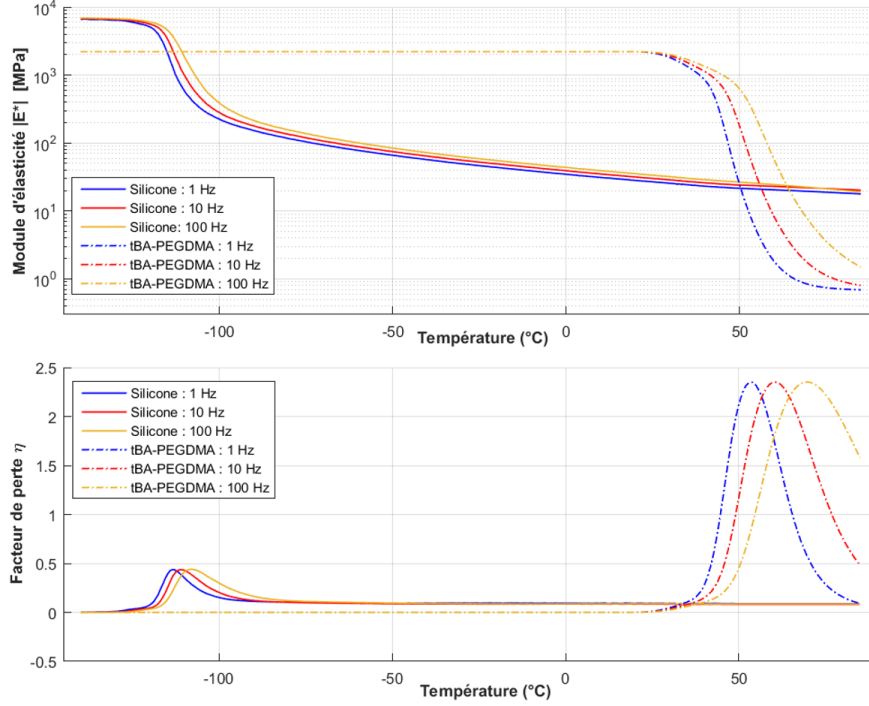


FIGURE 3.2 – Rappel des comportements mécaniques dynamiques du silicone SI695 et du tBA/PEGDMA

Les équations homogènes associées à la relation 3.20 qui décrivent le comportement dynamique de l'amortisseur avec les modèles rhéologiques choisis et permettent d'extraire les valeurs propres du système peuvent s'écrire :

$$-\omega^2 M \hat{U} + K_{elastic} \hat{U} + j\eta K_{visco} \hat{U} = 0 \quad (3.23)$$

si le comportement viscoélastique est constant sur la bande fréquentielle étudiée (amortissement hystérétique) ou :

$$-\omega^2 M \hat{U} + K_{elastic} \hat{U} + K_{visco} \sum_{i=1}^{ncell} \frac{\alpha_i \tau_i j\omega}{1 + \tau_i j\omega} \hat{U} = 0 \quad (3.24)$$

si le comportement viscoélastique est plus complexe (modèle de Maxwell généralisé). Ici, $K_{elastic} = K_{acier} + K_{visco}$ représente la matrice de raideur élastique du système où K_{acier} et K_{visco} désignent respectivement les matrices de raideur associées à la structure spirale en acier et aux composants viscoélastiques. Elles sont complétées avec des termes nuls pour être de la même dimension que le modèle éléments finis initial 3.20.

Pour résoudre les équations homogènes 3.23 et 3.24 correctement, une formulation d'état du problème est proposée pour chacune d'elles. Cette transformation n'est pas forcément utile avec le modèle d'amortissement hystérétique mais elle est nécessaire

pour le GMM à cause de la dépendance des paramètres à la fréquence afin de résoudre un problème aux valeurs propres généralisé [Festjens 12b]. L'approche présentée est très proche de l'approche ADF (Anelastic Displacement Field) proposée par Lesieutre [Lesieutre 96].

En introduisant :

$$\hat{U}^{(d)} = j\omega\hat{U}, \quad (3.25)$$

la formulation d'état dans le cas du modèle d'amortissement hystérétique conduit à :

$$j\omega \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{U}^{(d)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_{elastic} - j\eta K_{visco} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{U}^{(d)} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Dans le cas du Modèle de Maxwell Généralisé et pour un seul matériau viscoélastique présent dans l'amortisseur, une variable d'état interne est définie :

$$\hat{U}^{(i)} = \frac{\tau_i}{1 + j\omega\tau_i} \hat{U}^{(d)} \quad (3.27)$$

et la formulation d'état est alors écrite sous la forme suivante :

$$j\omega \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{U}^{(d)} \\ \hat{U}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -K_{elastic} & 0 & -A \\ 0 & d(T) & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U} \\ \hat{U}^{(d)} \\ \hat{U}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Où :

$$T = \begin{bmatrix} \tau_1 I & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{ncell} I \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$d(T) = \begin{bmatrix} \tau_1 I \\ \vdots \\ \tau_{ncell} I \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 K_{visco} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{ncell} K_{visco} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Le problème principal avec la formulation d'état est la dimension du nouveau système à résoudre. Pour le modèle d'amortissement hystérétique, la dimension est $2 \times N_{ddl}$. Pour le GMM, la formulation d'état conduit à un système de dimension $(n_{bcell} + 2) \times N_{ddl}$ où N_{ddl} représente le nombre de degrés de liberté du modèle éléments finis initial 3.20. De plus, les modèles éléments finis pour ce type de structure mécanique sont constitués d'un grand nombre de degrés de liberté, $N_{ddl} = 249111$ dans notre cas, ce qui accentue le besoin de réduire la taille du système d'état.

3.2.2 RÉDUCTION DE MODÈLE

Afin de réduire la taille du système d'état à résoudre, la matrice de masse M ainsi que les matrices de raideur élastique $K_{elastic}$ et de raideur des élastomères K_{visco} peuvent être projetées sur une base réduite.

Dans le paragraphe qui va suivre les méthodes de réduction utilisées pour le modèle éléments finis avec le silicone et avec le tBA/PEGDMA sont détaillées et les variations des caractéristiques mécaniques sur la plage de fréquence considérée (0.1 à 100 Hz) mais également sur celle en température (20 à 80°C), sont observées. Dans la section 3.4, où la dépendance à la température va être introduite dans le GMM, nous souhaitons conserver les mêmes bases de projection. Leur synthèse est donc effectuée en prenant en compte l'influence de ce paramètre sur le comportement mécanique de l'amortisseur.

Pour le problème associé au modèle d'amortissement hystérétique avec le silicone SI965, la faible variation du module de stockage et du facteur de perte sur l'espace fréquence-température considéré nous permet de n'utiliser qu'une base construite à partir des modes normaux Φ_e . Afin de construire cette base, il s'agit de résoudre l'équation suivante pour en extraire les p premiers modes :

$$(-\omega_p^2 M + K_{elastic} + K_{visco}) \phi_p = 0 \quad (3.32)$$

$$\Phi_e = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_p] \quad (3.33)$$

Les caractéristiques mécaniques du tBA/PEGDMA, quant à elles, présentent des variations plus importantes dans le domaine étudié. Pour correctement prendre en compte le comportement viscoélastique et réduire le coût de calcul, les opérateurs M , $K_{elastic}$ and K_{visco} sont projetés sur une base multi-modèle [Balmes 97a, Plouin 00] dont la description générale est présentée dans la section précédente 3.1. Dans le cas d'un problème en dynamique des structures avec un comportement viscoélastique, l'approche multi-modèle permet la construction d'une base de projection représentative de la variation de raideur du matériau en fonction de la fréquence et de la température. Le tBA/PEGDMA étant un matériau respectant le principe de l'équivalence temps-température, il est possible de ne considérer qu'une seule température et choisir trois fréquences différentes, représentatives des phases vitreuse, caoutchoutique et de transition vitreuse, pour lesquelles est effectuée l'extraction d'une base réduite de modes propres. L'inverse, c'est-à-dire le choix d'une fréquence et de trois températures correspondant aux différentes phases du matériau viscoélastique, aurait aussi été possible. L'objectif est de construire une base représentative du comportement de l'amortisseur lorsque le tBA/PEGDMA est raide, (i.e à haute fréquence ou à basse température), lorsqu'il est souple (i.e. à basse fréquence ou à haute température) et au passage de la transition vitreuse (par exemple pour une température fixe de 55°C à 1 Hz comme l'illustre la Figure 3.2).

Dans la pratique, la première fréquence choisie est la borne inférieure de l'intervalle étudié. Pour créer cette base "Basse Fréquence" Φ_{BF} , les p premiers modes propres

sont extraits en résolvant :

$$\left(-\omega_p^2 M + K_{elastic} + Re \left(K_{visco} \sum_{i=1}^{ncell} \frac{\alpha_i \tau_i j \omega_{BF}}{1 + \tau_i j \omega_{BF}} \right) \right) \phi_p = 0 \quad (3.34)$$

La deuxième fréquence (indicée MF) est localisée autour de la transition vitreuse pour une température donnée et la dernière fréquence choisie (indicée HF) correspond à la borne supérieure de l'intervalle étudié. Les bases associées Φ_{MF} and Φ_{HF} sont construites en résolvant la même équation que pour les basses fréquences 3.34 mais en remplaçant ω_{BF} par respectivement ω_{MF} et ω_{HF} . Pour finir, ces trois bases sont concaténées en utilisant une ortho-normalisation de Gram-Schmidt pour former la base multi-modèle T .

Dans les deux cas, les opérateurs projetés respectivement sur Φ_e pour le cas de l'amortisseur avec les patches en silicone SI965 et sur T pour celui avec les patches en tBA/PEGDMA, seront notés m pour la matrice réduite de masse, $k_{elastic}$ pour la raideur élastique et k_{visco} pour la raideur des élastomères.

Un autre moyen de réduire les temps de calcul, dans le cas du modèle avec GMM, est de formuler l'hypothèse selon laquelle les pôles de ce modèle rhéologique, c'est-à-dire l'inverse des constantes de temps τ_i peuvent être positionnés a priori sur l'intervalle de fréquence étudié. Les avantages et les inconvénients de ce choix ont déjà été discutés dans le chapitre 2 et il a été montré que malgré cette approche, la modélisation du comportement mécanique dynamique du tBA/PEGDMA peut être très précise en fonction du nombre de pôles. De plus, comme cela a déjà été expliqué auparavant, cette hypothèse permet d'utiliser les mêmes pôles pour différents matériaux et différentes températures. Enfin, les constantes de temps du GMM ne sont plus dépendantes de la fréquence.

Cet ensemble d'hypothèses sera regroupé sous les termes : "hypothèse des pôles communs" dans la suite du manuscrit.

Pour les deux cas étudiés, la stratégie de réduction de modèle et l'hypothèse sur les constantes de temps pour le modèle de Maxwell généralisé permettent d'aboutir à des temps de calcul plus raisonnables (quelques secondes contre quelques heures). Pour le modèle d'amortissement hystérétique associé à l'amortisseur avec le silicone SI965, le système d'état s'écrit sous la forme :

$$j\omega \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{q}^{(d)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -k_{elastic} - j\eta k_{visco} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{q}^{(d)} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

où q représente les coordonnées généralisées.

La formulation d'état réduite pour le cas de l'amortisseur avec le tBA/PEGDMA et le Modèle de Maxwell Généralisé est :

$$j\omega \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{q}^{(d)} \\ \hat{q}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -k_{elastic} & 0 & -a \\ 0 & d(t) & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{q}^{(d)} \\ \hat{q}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Où :

$$t = \begin{bmatrix} \tau_1 I & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{ncell} I \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$d(t) = \begin{bmatrix} \tau_1 I \\ \vdots \\ \tau_{ncell} I \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$a = \begin{bmatrix} \alpha_1 k_{visco} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{ncell} k_{visco} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Dans le formulation ci-dessus, l'hypothèse des "pôles communs" au niveau du GMM n'a pas d'impact. Mais, il est important de noter que si l'amortisseur était composé de plusieurs matériaux viscoélastiques différents modélisés par des GMM, l'équation homogène du système 3.24 deviendrait la suivante :

$$-\omega^2 M \hat{U} + K_{elastic} \hat{U} + \sum_{k=1}^{nmat} \left(K_{visco}^k \sum_{i=1}^{ncell} \frac{\alpha_{ik} \tau_{ik} j \omega}{1 + \tau_{ik} j \omega} \right) \hat{U} = 0 \quad (3.40)$$

La formulation d'état de ce cas plus général est exposée dans l'article de Chevallier [Chevallier 11]. Dans ce cas ou, pour des températures non-homogènes au niveau des différents matériaux viscoélastiques (section 3.4), l'hypothèse des "pôles communs" prend tout son sens au niveau numérique en permettant une réduction importante de la taille de la représentation d'état.

La Figure 3.3 présente un schéma de la méthode mise en place afin de prendre en compte le comportement viscoélastique du tBA/PEGDMA, représenté par un GMM, dans un modèle éléments finis comme celui de l'amortisseur à lames (3.1). On y retrouve les trois étapes détaillées précédemment à savoir la représentation d'état du système complet, la réduction de la taille du modèle grâce à la projection des opérateurs sur une base multi-modèle et enfin la formulation d'état du problème réduit.

Pour finir, il est important de noter que cette formulation est aussi utilisable dans le domaine temporel moyennant l'emploi de la transformée de Fourier inverse. En effet, les matrices d'état décrivant le comportement du système sont indépendantes de la fréquence et restent inchangées lors du changement de domaine. Cela permet d'employer exactement la même approche lorsque l'on veut étudier le comportement mécanique du système soumis à des chocs et analyser sa réponse en régime transitoire.

Maintenant que les deux formulations 3.35 et 3.36 se présentent sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé, il est possible d'effectuer certaines simulations comme une analyse modale complexe (CEA-Complex Eigenvalue Analysis).

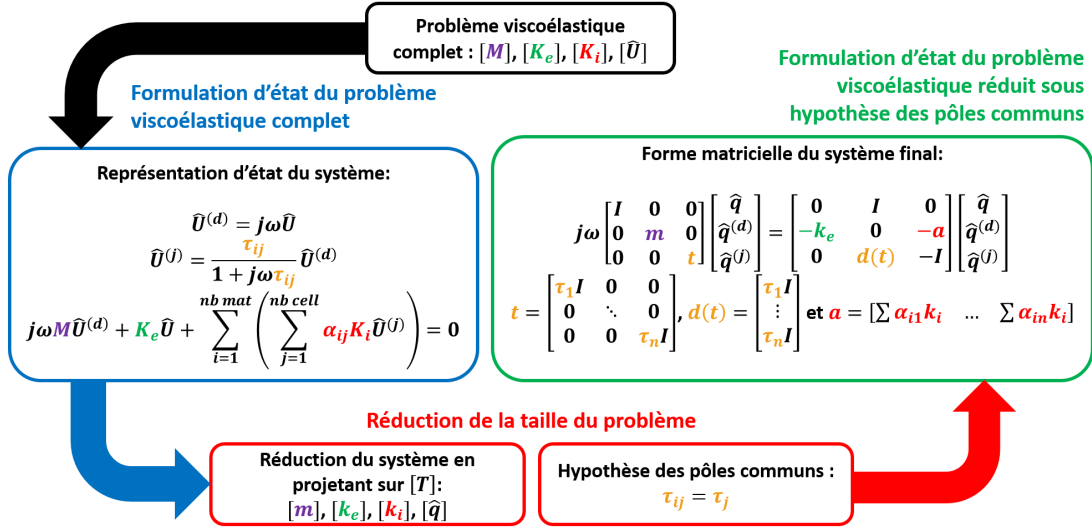


FIGURE 3.3 – Méthode d’implantation du GMM dans le modèle éléments finis de l’amortisseur à lames dans le domaine fréquentiel.

3.3 ANALYSE MODALE COMPLEXE DE L’AMORTISSEUR À LAMES ET CORRÉLATION CALCULS-ESSAIS

3.3.1 ANALYSE MODALE COMPLEXE POUR L’AMORTISSEUR À LAMES INTÉGRANT LE SILICONE OU LE TBA/PEGDMA

L’analyse modale complexe (CEA) est une méthode pouvant être employée afin de déterminer les fréquences propres et les amortissements modaux d’une structure viscoélastique. Ces deux paramètres sont révélateurs du comportement mécanique dynamique des systèmes amortissants et ont une importance particulière lors du dimensionnement car ils permettent d’identifier les intervalles fréquentiels particuliers et les maximums d’amplitude subis par le système. De plus, il s’agit d’une approche plus rapide que le passage par un calcul de réponse du système dans le domaine fréquentiel ou dans le domaine temporel pour évaluer l’amortissement modal. C’est à dire par l’évaluation de la bande passante à $-3db$ ou la détermination du décrément logarithmique.

Dans notre cas, en considérant que la pulsation complexe extraite grâce à la CEA est :

$$\omega_i^* = -\zeta_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (3.41)$$

alors les fréquences propres et les amortissements modaux associés sont :

$$\begin{aligned} \omega_i &= |\omega_i^*| \\ \text{soit } f_i &= \omega_i / 2\pi \\ \text{et } \zeta_i &= -\text{Re}(\omega_i^*) / \omega_i \end{aligned} \quad (3.42)$$

La pulsation complexe et son conjugué constituent deux pôles complexes conjugués du système mécanique.

L'analyse modale complexe est menée dans le cas du modèle d'amortissement hystérétique et le diagramme fréquence-amortissement modal est tracé Figure 3.4. Pour des raisons de confidentialité, les fréquences propres ne seront pas explicites et les graphiques seront présentés en fonction d'un ratio de fréquence. La fréquence propre permettant d'obtenir ce ratio sera la fréquence d'intérêt notée f_0 .

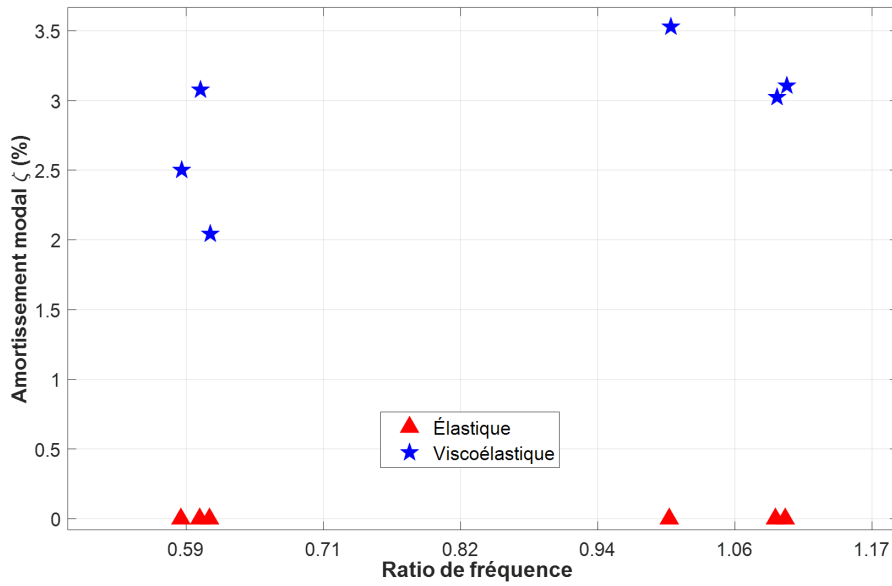


FIGURE 3.4 – Analyse modale complexe pour le cas avec le silicone SI965 : Système élastique (rouge) contre système viscoélastique (bleu)

Même si cela n'est pas visible sur le graphique (écart relatif de 0.98%), il y a un léger décalage des fréquences propres à cause de l'ajout du facteur de perte η en facteur de la matrice des raideurs des élastomères K_{visco} . Une comparaison entre le système élastique (triangle rouge) et le système viscoélastique (étoile bleu) est présentée. Toutes les fréquences propres extraites à partir du problème élastique pur se situent sur l'axe des abscisses parce qu'aucun amortissement n'est introduit dans ce système. L'analyse modale complexe permet de prendre en compte le comportement viscoélastique des éléments et de calculer l'amortissement modal pour chacun des modes de vibrations.

L'ensemble des amortissements modaux se situe aux alentours des 3% ce qui est généralement faible pour un système d'amortissement des vibrations exploitant des matériaux viscoélastiques.

La Figure 3.5 présente la CEA de l'amortisseur avec les patches en tBA/PEGDMA, dont le comportement mécanique est modélisé par un modèle de Maxwell généralisé, pour trois températures différentes.

Ces résultats sont conformes à ce qui était attendu. Comme précédemment, mais

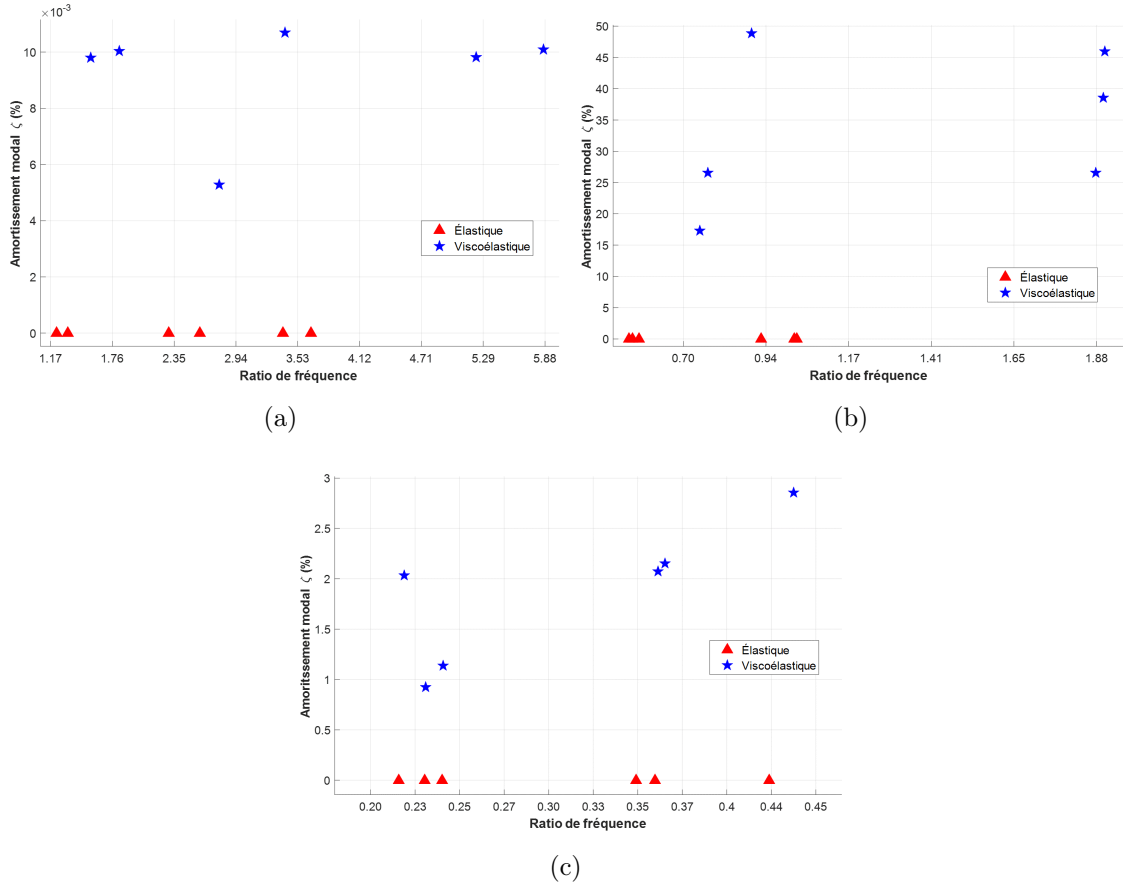


FIGURE 3.5 – Analyse modale complexe pour le cas avec le tBA/PEGDMA : à 20°C (a), à 60°C (b) et à 120°C (c)

de manière bien plus marquée, les fréquences propres du système viscoélastique sont plus ou moins décalées vers les hautes fréquences par rapport à celles d'un système purement élastique. Cela est encore dû à l'ajout de l'amortissement en facteur de la matrice de raideur des éléments viscoélastiques K_{visco} comme écrit dans l'équation 3.24 (ce dernier peut être très élevé au passage de la transition vitreuse pour le cas du tBA/PEGDMA).

À basse température (Figure 3.5(a)) : le tBA/PEGDMA est en phase vitreuse. Les six premières fréquences propres de l'amortisseur sont donc élevées et plus espacées comparativement au cas du silicone, entre $1.17f_0$ Hz et $5.88f_0$ Hz, et les amortissements modaux, situés autour de 0.01%, sont très faibles. Cette observation permet de confirmer que l'amortisseur dissipe très peu d'énergie à basse température (ou à haute fréquence).

À haute température (Figure 3.5(c)) : le polymère se trouve dans sa phase caoutchoutique et devient souple (120°C). Les fréquences propres de la structure sont donc diminuées et sont réparties entre $0.2f_0$ Hz et $0.45f_0$ Hz. Les amortissements modaux associés se trouvent entre 0.9 et 2.8%. Dans cette configuration ces paramètres ont des valeurs plus faibles que dans le cas de l'amortisseur avec le silicone

SI965 ce qui implique que le système est plus souple et que la dissipation est, elle aussi, moindre.

Autour de la phase de transition vitreuse (Figure 3.5(b)) : la rigidité du tBA/PEGDMA se trouve entre ses deux comportements asymptotiques et son facteur de perte est extrêmement élevé (même pour un matériau viscoélastique). Cette combinaison permet alors à l'amortisseur exploitant ce matériau de présenter des amortissements modaux importants allant de 17 à 49% pour des fréquences de résonances compris entre $0.7f_0$ Hz et $1.88f_0$ Hz. Dans la gamme de température autour de la transition vitreuse du tBA/PEGDMA, la dissipation de l'énergie vibratoire au niveau de l'amortisseur est bien plus importante pour celui employant le silicone SI965.

Il est à noter que ce constat serait inversé si l'on se plaçait autour de -110°C , température pour laquelle le silicone possède sa phase de transition vitreuse alors que le tBA/PEGDMA serait rigide.

D'autre part, une telle représentation est utile pour quantifier les effets des variables du système (comme la température) sur la localisation des pôles. Cet aspect sera développé dans la section 3.4.

3.3.2 CORRÉLATION ESSAIS/CALCULS POUR LE CAS DE L'AMORTISSEUR INTÉGRANT LE SILICONE

À ce point, une validation de la méthode permettant de prendre en compte le comportement viscoélastique dans le modèle éléments finis de l'amortisseur serait nécessaire. Cependant, cette confrontation n'est possible que pour le cas de l'amortisseur avec les patches en silicone SI965 puisqu'il s'agit de l'unique version maquetée par *Thales LAS Fr* et réalisée par *GAMMA*. Pour rappel, le tBA/PEGDMA est présenté dans ce manuscrit pour éprouver les méthodes développées et apporter un point de comparaison puisque son comportement mécanique dynamique est différent de celui du silicone.

De nombreux essais ont été menés sur l'amortisseur avec les patches en silicone pour des lests et des directions de sollicitation multiples et une attention particulière a été portée pour trois configurations. Pour des raisons de confidentialité, ces configurations ne peuvent pas être décrites dans ce manuscrit mais pour chacune d'entre elle, une fréquence propre particulière ainsi que l'amortissement modal qui lui est associé ont été déterminés.

D'un autre côté, une modélisation de chacune de ces trois configurations d'essais a été effectuée et la réponse de l'amortisseur dans le domaine fréquentiel a été calculée. Le tableau 3.1 résume l'ensemble des résultats obtenus à la fois pour les essais expérimentaux et les calculs numériques issus du calcul de la réponse forcée dans le domaine fréquentiel ainsi que de la CEA. Pour cette dernière, la fréquence de résonance est déduite en utilisant la relation : $f_{\text{résonance}} = \text{Im}(\omega_i^*)/2\pi$. D'après ce comparatif, les erreurs relatives les plus importantes se situent au niveau de la troisième configuration avec un écart relatif respectif de 8.4% et de 3.7% pour l'amortissement modal

et la fréquence de résonance entre les essais expérimentaux et les résultats issus de la CEA. On considère de manière générale que la CEA prédit correctement le comportement modal de l'amortisseur avec les patches en silicone SI965.

Configuration 1	$f_{resonance}$ (Hz)	ζ_{modal} (%)
Expérimental	f_0	7.81
Réponse forcée	f_0	7.87
CEA	$0.989f_0$	7.9
Configuration 2	$f_{resonance}$ (Hz)	ζ_{modal} (%)
Expérimental	f_0	9.1
Réponse forcée	$0.975f_0$	8.7
CEA	$0.975f_0$	8.7
Configuration 3	$f_{resonance}$ (Hz)	ζ_{modal} (%)
Expérimental	f_0	7.1
Réponse forcée	$1.03f_0$	6.85
CEA	$1.03f_0$	6.5

TABLE 3.1 – Comparatif entre les fréquences propres et les amortissements modaux obtenus expérimentalement et par simulations numériques

Cependant, au moment de cette première validation, les travaux exposés dans le chapitre 2 n'avaient pas encore été menés. Les simulations avaient donc été effectuées avec les paramètres matériaux fournis par l'entreprise chargée de réaliser la maquette de l'amortisseur à lames : *GAMMA*.

Si on compare les taux d'amortissements modaux exposés dans la Figure 3.4 et ceux affichés dans le tableau 3.1, on peut noter une différence. Il en est de même pour les fréquences de résonance qui devaient être retrouvées dans la pratique. Une nouvelle démarche de validation en prenant cette fois en compte les essais réalisés en interne sur le viscoanalyseur *Bose Electroforce 3200* et en externe par la société *Metravib* grâce à son viscoanalyseur *Metravib DMA +300* sur le silicone SI965 a été menée. Les résultats de la corrélation calcul-essai ont été extrêmement mauvais avec des écarts relatifs au niveau des fréquences propres du système de l'ordre des 30%. Une explication a alors été cherchée.

Dans un premier temps, il s'avère que pour déterminer les propriétés du silicone, *GAMMA* n'utilise pas de viscoanalyseur ou de machine d'essai quasi-statique mais a recours à une méthode résonante. En effet, une masse mobile est reliée à un bâti par l'intermédiaire de plots en silicone SI965 et une excitation est appliquée au bâti. Ce système à un degré de liberté permet de remonter aux propriétés mécaniques dynamiques de l'élastomère en analysant la réponse au passage de la fréquence de résonance et en utilisant la méthode de la bande passante à $-3dB$.

D'autre part, en étudiant de manière plus approfondie l'ensemble des essais réalisés par *Thales LAS Fr* sur l'amortisseur, il est apparu qu'en fonction du niveau de solli-

citation, les fréquences de résonance du système étaient différentes alors que le mode concerné était, a priori, le même. Cette observation se rencontre dans les systèmes présentant un comportement non-linéaire.

Ainsi, ces deux éléments laissent à penser que le comportement mécanique du silicone SI965 utilisé par l'entreprise *GAMMA* afin de réaliser l'amortisseur à lames est non-linéaire. En effet, la différence la plus importante entre tous les moyens d'essais mis en œuvre pour caractériser l'élastomère est le taux de déformation de l'échantillon. On retrouve aussi cette différence au niveau des essais de qualification réalisés par *Thales LAS Fr.* Pour des questions de coût et de temps, il n'a pas été possible d'effectuer une nouvelle campagne d'essai sur l'amortisseur où les niveaux d'excitation auraient été assez bas pour s'approcher des taux de déformation couverts par les essais DMA.

Le chapitre 5 a pour objectif, entre autres, de pousser cette investigation et de proposer une cartographie des différents moyens de caractérisation qui auront été utilisés durant ces travaux de thèse en fonction du taux de déformation de l'échantillon.

3.4 MODÉLISATION DE STRUCTURES VISCOÉLASTIQUES AVEC DÉPENDANCE À LA FRÉQUENCE ET À LA TEMPÉRATURE

La prise en compte du comportement viscoélastique du silicone SI965 et du tBA/PEGDMA, respectivement par un modèle d'amortissement hystérétique et un GMM avec "pôles communs", permet d'étudier le comportement dynamique de l'amortisseur dans le domaine fréquentiel pour une température donnée. Cependant, ce paramètre est d'une importance capitale lorsque des matériaux viscoélastiques sont présents.

Dans cette partie, il s'agit de proposer une méthode afin d'intégrer la dépendance à la température dans un GMM avec "pôles communs" avant de mener une analyse modale complexe paramétrique pour observer l'évolution du comportement de l'amortisseur en fonction de cette variable. Le cas du modèle d'amortissement hystérétique est aussi traité.

Par anticipation avec le chapitre 4, la plage de température d'intérêt est comprise entre 20°C à 80°C pour le cas du silicone SI965. Cependant, pour éprouver la méthode développée, la plage de température choisie pour effectuer l'étude du tBA/PEGDMA s'étendra de 15°C à 180°C afin de capter l'ensemble des états du polymère.

À titre de rappel, la Figure 3.2 présente l'évolution d'élasticité et du facteur de perte pour le silicone SI965 et le tBA/PEGDMA en fonction de la température et pour un jeu de trois fréquences d'excitation.

3.4.1 INTRODUCTION DE LA DÉPENDANCE À LA TEMPÉRATURE DANS LE MODÈLE D'AMORTISSEMENT STRUCTURAL ET LE MODÈLE DE MAXWELL GÉNÉRALISÉ

De nombreuses études ont permis d'observer la dépendance du comportement des polymères à la température et ont proposé des méthodes pour la prendre en compte [Sperling 91, Teng 01, Pathan 17, Joseph 17, Sefrani 06].

Malgré la connaissance de cette dépendance à la température, il n'est pas aisé de la prendre en compte dans les modèles d'amortissement classiques comme le modèle d'amortissement structural ou de Maxwell Généralisé quand le principe d'équivalence temps-température n'est pas respecté. Dans la suite, une méthode est proposée pour y parvenir.

Notons que même si le tBA/PEGDMA respecte le principe de l'équivalence temps-température, la méthode mise en place afin de prendre en compte l'influence de la température dans l'écriture du Modèle de Maxwell Généralisé (GMM) peut être transposée à un matériau viscoélastique ne respectant pas ce principe.

Dans le cas du silicone SI965, le facteur de perte est presque constant sur la plage de température étudiée et son module décroît de manière quasi linéaire (Figure 3.2) entre 20°C à 80°C . Dans le modèle d'amortissement hystérétique servant à décrire le comportement de ce matériau : $E^* = E(1 + j\eta)$, seul le module sera supposé dépendre de la température $E = E_{\infty} + \alpha T$ donc la matrice de raideur de la partie viscoélastique K_{visco} varie linéairement avec la température et l'équation homogène de l'amortisseur avec les patches en silicone peut s'écrire de la manière suivante dans le domaine fréquentiel :

$$-\omega^2 M \hat{U} + K_{elastic} \hat{U} + j\eta K_{visco}(T) \hat{U} = 0 \quad (3.43)$$

Le comportement mécanique dynamique du tBA/PEGDMA est représenté par un Modèle de Maxwell Généralisé sous hypothèse des pôles communs :

$$E^*(\omega) = E_{\infty}(T) \left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i(T) j\omega\tau_i}{1 + j\omega\tau_i} \right) \quad (3.44)$$

Les constantes de temps sont donc fixées a priori et elles ne dépendent pas de la fréquence et de la température.

En considérant le nombre de paramètres d'un GMM, le problème d'identification peut se ramener à un problème d'optimisation sous-contraint. La formulation de cette hypothèse des pôles communs correspond à un ajout de contraintes ce qui mène à une meilleure définition du problème d'optimisation et assure ainsi l'existence et l'unicité des paramètres identifiés (E_{∞} et les α_i). Les évolutions du module long terme et des coefficients α_i en fonction de la température sont compliquées. Pour extraire cette information, une identification de ces paramètres est menée à chaque

incrément de température à l'aide de la méthode des moindres carrés afin d'être en accord avec les résultats expérimentaux.

La méthode d'identification mise en place s'appuie sur celle présentée chapitre 2 section 2.2.3. Pour rappel, une initialisation, servant ici à lancer la procédure d'identification pour le premier incrément de température, est effectuée en résolvant le système linéaire 2.38. Cette étape est effectuée au niveau du comportement asymptotique du tBA/PEGDMA, lorsqu'il est en phase vitreuse et que l'amortissement est global est faible. En ayant recours à la fonction "*fmincon*" (optimisation sous contrainte de *Matlab* [Byrd 00]), on obtient alors les valeurs de E_∞ et de l'ensemble des α_i pour le premier incrément de température. L'incrément suivant $i + 1$ est initialisé avec les résultats obtenus à l'incrément courant i et ainsi de suite jusqu'à ce que l'ensemble de la plage de température soit balayée comme l'illustre la Figure 3.6. Les évolutions du module long terme E_∞ et des ratios de raideur dynamique α_i du GMM en fonction de la température sont exposées dans la Figure 3.7. Comme cela a été déjà mentionnée, l'intervalle de température est plus large que celui où l'observation du comportement du silicone SI965 a été effectuée afin de capturer l'ensemble des variations des coefficients $\alpha_i(T)$.

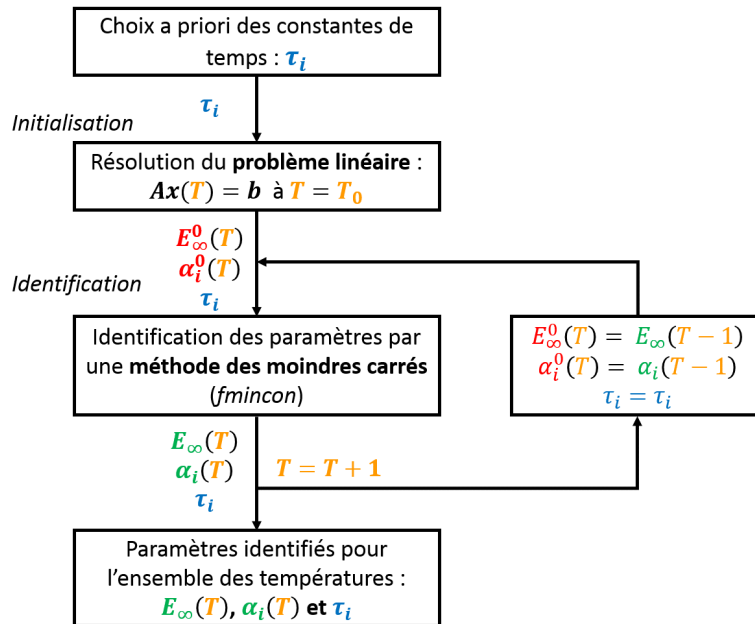


FIGURE 3.6 – Procédure d'identification des paramètres du Modèle de Maxwell Généralisé en fonction de la température

En intégrant le modèle dans la formulation du problème de structure, on obtient la matrice de raideur représentant les parties viscoélastiques K_{visco} ainsi que les coefficients $\alpha_i(T)$ dépendant de la température. L'équation homogène de l'amortisseur avec les patches en tBA/PEGDMA peut alors s'écrire :

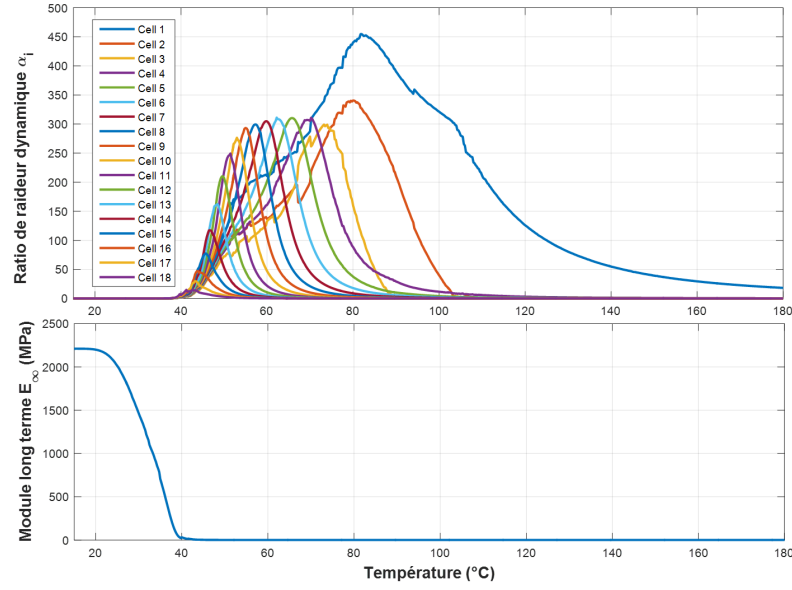


FIGURE 3.7 – Variation du module long terme E_∞ et des coefficients α_i du Modèle de Maxwell Généralisé en fonction de la température

$$-\omega^2 M \hat{U} + K_{elastic} \hat{U} + K_{visco}(T) \sum_{i=1}^{ncell} \frac{\alpha_i(T) \tau_i j \omega}{1 + \tau_i j \omega} \hat{U} = 0 \quad (3.45)$$

La formulation d'état présentée au chapitre 3 permet de passer de l'équation précédente à un problème aux valeurs propres généralisé en utilisant la forme donnée dans l'équation 3.36.

Pour finir, on peut remarquer que l'évolution de chaque ratio de raideur dynamique α_i en fonction de la température à la forme d'une gaussienne. Pour des raisons de temps, il n'y a pas eu de recherches approfondies sur cet aspect, mais il serait intéressant d'analyser ces évolutions en détails afin de voir si un lien existe entre elles et si ce lien pourrait mener à une réduction supplémentaire du nombre de paramètres à identifier. Le lecteur intéressé trouvera un lien entre le modèle thermo-mécanique présenté dans ce manuscrit et un modèle thermo-mécanique envisageable pour les matériaux viscoélastiques respectant l'équivalence temps-température comme le tBA/PEGDMA en annexe A.

D'autre part, les premiers coefficients α_i sont liés aux premières constantes de temps τ_i , c'est-à-dire aux hautes fréquences, et présentent des évolutions moins régulières que les autres. En y regardant de plus près, il semblerait qu'il y ait des phénomènes de compensation entre elles et la somme de leur contribution aboutit à une forme gaussienne. D'autre part, les τ_i qui leur correspondent sont en dehors de la bande de caractérisation initiale. Ces cellules avaient été ajoutées afin de réduire l'erreur de modélisation sous hypothèse des pôles communs dans le GMM. En

conclusion, il semblerait que ce groupe de cellules soient liées.

Cet aspect peut venir du fait que les pôles du GMM sont fixés a priori et sans règle particulière mis à part la minimisation de l'erreur de représentation du comportement mécanique expérimental. En effet, il serait surement bénéfique d'optimiser le nombre de pôles nécessaires dans le GMM durant la procédure d'identification afin de réduire leur nombre sans nuire à la représentativité du modèle comme dans les travaux de Renaud [Renaud 11b].

3.4.2 EFFET DE LA TEMPÉRATURE SUR LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE LA STRUCTURE

Les dépendances à la température respectives du silicone SI965 et du tBA/PEGDMA ont été prises en compte dans leurs modèles rhéologiques respectifs et finalement dans le modèle de l'amortisseur. Les équations homogènes peuvent être formulées sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé.

Avec ces modèles écrits en température, il est possible d'effectuer des analyses modales complexes pour différentes températures et observer le comportement mécanique dynamique global de l'amortisseur en termes de fréquence propre et d'amortissement modal. Ce couple de paramètres est directement lié à la notion de pôle du système et sera, par la suite, désigné par ce terme.

La Figure 3.8 montre l'évolution du lieu des pôles complexes en fonction de la température pour l'amortisseur avec les patches en silicone. Seulement les six premiers pôles sont représentés pour une température comprise entre 20°C et 80°C .

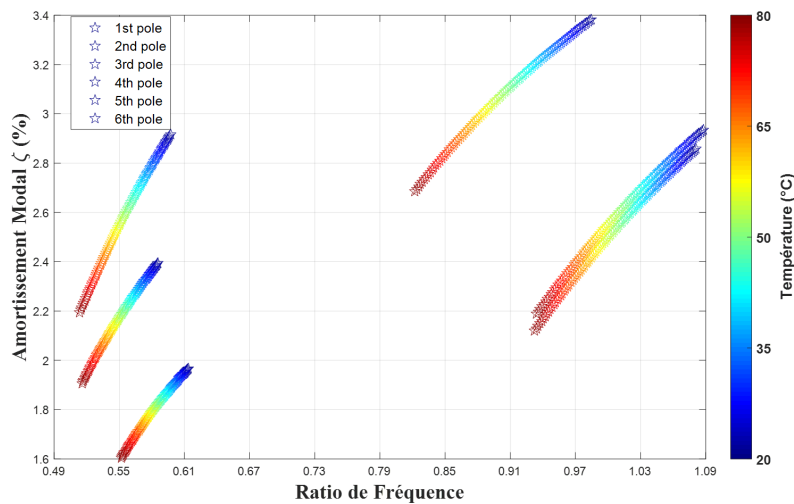


FIGURE 3.8 – Évolution des fréquences propres et des amortissements modaux pour l'amortisseur avec les patches en silicone SI965 en fonction de la température

L'évolution des pôles est régulière comme on pouvait s'y attendre. À cause de l'assouplissement de la raideur du silicone SI965 en fonction de la température, on

constate une chute des valeurs propres du système d'environ 8.3%. Cette perte de raideur conduit aussi à une réduction de l'amortissement modal de l'ordre de 16.7%. Les trajectoires décrites par les pôles de l'amortisseur sont semblables mais des distorsions sont visibles à cause de l'effet structure, c'est-à-dire à cause de la répartition locale de patches en élastomères sur un squelette métallique. En effet, chaque pôle est associé à un mode de vibration qui sollicite l'amortisseur, et a fortiori les patches en silicone, d'une manière qui lui est propre. L'assouplissement du matériau n'impacte donc pas les modes de vibration de la même manière puisque son taux de déformation n'est pas identique d'un mode à l'autre.

Cependant, comme le montre la Figure 3.9, l'évolution des lieux des pôles en fonction de la température pour le cas de l'amortisseur avec les patches en tBA/PEGDMA est plus complexe que celui avec les patches en silicone. Ici aussi, le graphique ne présente que les six premiers modes mais pour une gamme de température plus large allant de 15°C à 180°C afin de capturer l'ensemble des variations possibles.

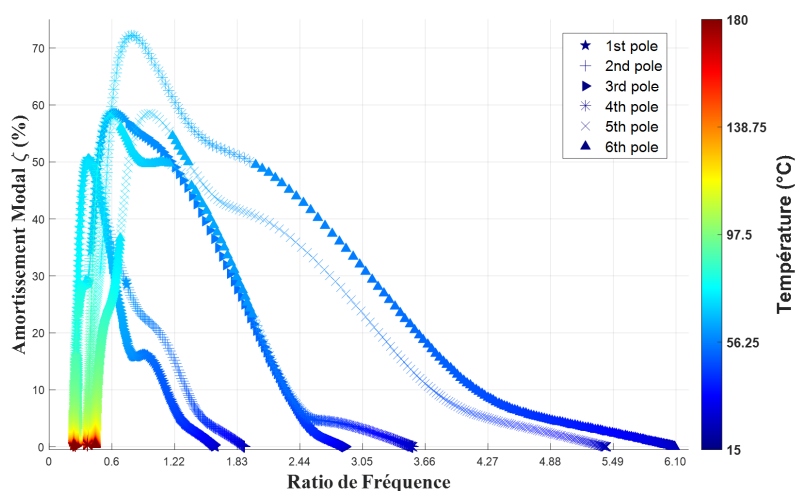


FIGURE 3.9 – Évolution des fréquences propres et des amortissements modaux pour l'amortisseur avec les patches en tBA/PEGDMA en fonction de la température

Nous pouvons remarquer que l'évolution des pôles n'est pas continue et qu'il y a des "sauts" entre les différentes trajectoires en fonction de la température. Il paraît impossible de conclure sur l'évolution des modes de vibrations du système à partir de l'analyse du lieu des pôles seulement. Notons que la forme générale de l'évolution des pôles de l'amortisseur ressemble à celles de $\alpha_i(T)$ du GMM employé (Figure 3.7). Si nous souhaitons effectuer une comparaison entre les deux élastomères, le silicone SI965 et le tBA/PEGDMA, et étudier leur impact sur la localisation des pôles, il devient indispensable de traquer l'ensemble des modes de vibration sur l'intervalle de température.

Pour y parvenir, un index de suivi basé sur le principe du *Modal Assurance Criterion* (MAC) a été créé. Le mode j à traquer est extrait à 15°C : $\phi_j(15^{\circ}\text{C})$ lorsque le tBA/PEGDMA est dans sa phase vitreuse. De plus, pour chaque incrément de tem-

pérature T , une CEA est réalisée afin d'extraire les pôles complexes de l'amortisseur mais aussi une base des modes propres de la structure $\Phi(T)$. Ensuite, la colinéarité entre le mode à traquer $\phi_j(15^\circ C)$ et chaque vecteur de la base $\Phi(T)$ pour chaque incrément de température T est calculée. L'index retourne alors le numéro du vecteur propre de la base le plus colinéaire au mode traqué. L'expression de cet index pour une température donnée T est la suivante :

$$index(T) = \frac{|\phi_j(15^\circ C)^H \cdot M \cdot \Phi(T)|^2}{\phi_j(15^\circ C)^H \cdot \phi_j(15^\circ C) \cdot \Phi(T)^H \cdot \Phi(T)} \quad (3.46)$$

Où H désigne la transposée hermitienne de la matrice. Pour rappel, la représentation d'état finale du problème avec le Modèle de Maxwell Généralisé est obtenue après projection des opérateurs M , K_e et, K_{visco} sur une base multi-modèle obtenue à partir de la concaténation de trois bases modales. Il est à noter que ce processus permet d'ajouter à la première base modale Φ_{BF} , les informations contenues dans les deux autres bases modales qui sont orthogonales aux vecteurs de Φ_{BF} . En d'autres termes, les premiers vecteurs de la base multi-modèle correspondent à ceux de la première base modale extraite Φ_{BF} et correspondent donc des modes de vibrations physiques ayant une représentation spatiale cohérente (comme un mode de flexion pour une poutre). Les autres vecteurs de la base multi-modèle, issus de Φ_{MF} et Φ_{HF} , ne sont que des résidus du processus d'orthonormalisation qui représentent l'information manquante et ne sont pas des modes de vibration à proprement parler.

Fort de ce constat, l'utilisation de l'index de suivi ne nécessite pas de déterminer la colinéarité du mode suivi j avec l'ensemble des vecteurs de la base $\Phi(T)$ mais seulement avec les p premiers vecteurs correspondant à des modes de vibrations physiques. Le mode sélectionné j peut alors être suivi sur l'ensemble de l'intervalle de température comme le montre la Figure 3.10(a) pour le 4^{ème} mode de l'amortisseur. Il devient alors possible de reconstruire ce mode et de tracer l'évolution du pôle qui lui est associé en fonction de la température (Figure 3.10(b)).

La variation du 4^{ème} pôle de l'amortisseur avec les patches en tBA/PEGDMA en fonction de la température est importante par rapport à celle observée dans le cas de l'amortisseur avec le silicone SI965. Ce phénomène vient du fait que l'intervalle de température couvert est plus large et surtout que la phase de transition vitreuse du tBA/PEGDMA y est incluse. On remarque que les fréquences propres de l'amortisseur décroissent au fur et à mesure que la température augmente et passent de $6.1f_0$ Hz à $0.25f_0$ Hz. Cette évolution provient de la chute importante du module d'élasticité du tBA/PEGDMA au passage de la transition vitreuse, de 2211 MPa à 0.67 MPa. Aux extrémités de la plage de température, l'amortissement modal du 4^{ème} mode est aux alentours de 1.5% mais le maximum est atteint autour des 65°C pour une valeur proche des 58%. Pour finir, il reste un phénomène notable autour de $2.5f_0$ Hz. Le saut observé dans la trajectoire décrite par le 4^{ème} pôle (Figure 3.10(b)) correspond à une rotation du mode ou combinaison de plusieurs mode. La Figure 3.11 montre ce phénomène plus en détail. Appelons T_0 la température avant

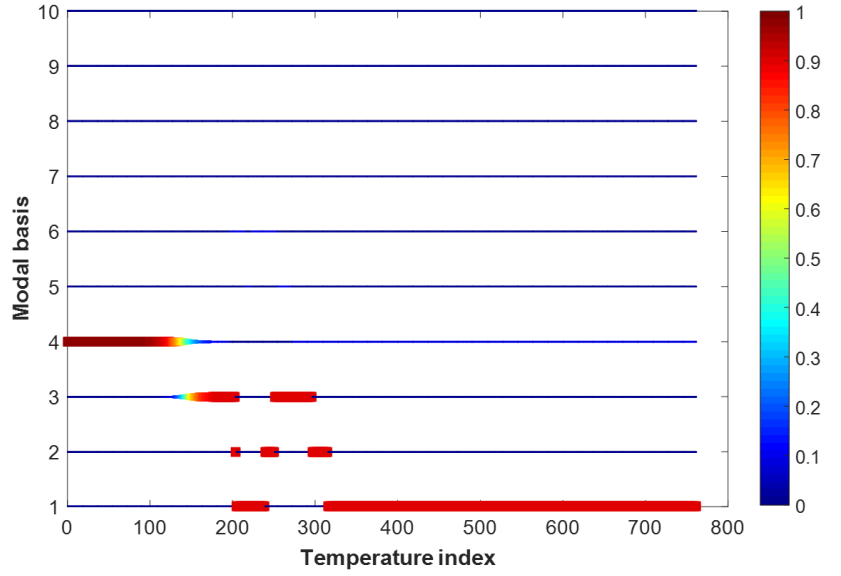
cette zone particulière, T_c la température autour de laquelle se produit la rotation de mode et T_1 la température se situant après cet intervalle. On constate qu'à T_0 , le 4^{ème} mode est bien identifié, et qu'ensuite, au voisinage de T_c , on peut observer une combinaison de deux modes qui sont alors nécessaire pour correctement le décrire. Lorsque l'on s'éloigne de cette zone (T_1), la rotation est complète et le 4^{ème} mode est de nouveau bien identifié. Ce phénomène est corrélé avec ce qui se passe sur l'index de suivi au niveau du 120^{ème} incrément environ (Figure 3.10(a)).

En résumé, les outils présentés dans cette section permettent de prendre en compte la dépendance à la température du silicone SI965 et du tBA/PEGDMA dans leur modèles rhéologiques respectifs ainsi que dans le modèle éléments finis de l'amortisseur. Pour les variations importantes dans la trajectoire des pôles, un index de suivi peut être utilisé afin de traquer le ou les pôles d'intérêt sur l'ensemble de l'intervalle de température afin de pouvoir comparer le comportement mécanique dynamique de l'amortisseur avec les patches en silicone et celui avec les patches en tBA/PEGDMA.

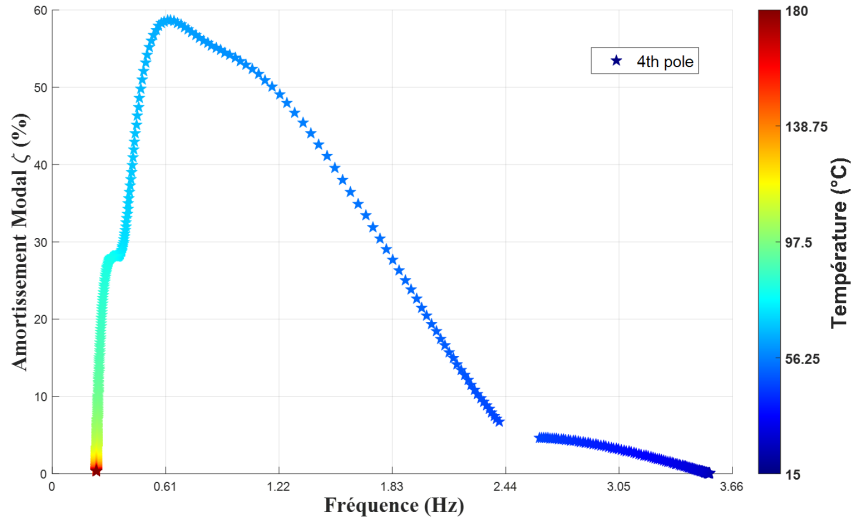
En effet, ces deux matériaux présentent des comportements mécaniques différents sur l'espace fréquence-température étudié. Ces différences affectent directement le comportement global de l'amortisseur en fonction de l'élastomère choisi. L'amortisseur avec les patches en silicone SI965 présente une évolution régulière de la trajectoire de ses six premiers pôles avec un amortissement maximal d'environ 3.4% pour le 4^{ème} mode à f_0 Hz ($20^\circ C$). À l'inverse, les pôles de l'amortisseur avec les patches en tBA/PEGDMA révèlent des évolutions plus marquées à cause du changement de phase de l'élastomère. Cependant, ce phénomène permet d'atteindre des amortissements modaux bien plus élevés moyennant une rigidité globale plus faible avec pour le 4^{ème} mode par exemple, un amortissement modal de l'ordre de 58% à $0.61f_0$ Hz ($65^\circ C$).

On retrouve ici un principe important du dimensionnement des systèmes d'atténuation des vibrations par voie passive : il existe toujours un compromis à trouver entre rigidité, dissipation et niveau de sollicitation.

3.4 MODÉLISATION DE STRUCTURES VISCOÉLASTIQUES AVEC DÉPENDANCE À LA FRÉQUENCE ET À LA TEMPÉRATURE



(a)



(b)

FIGURE 3.10 – Index de suivi du 4^{ieme} mode de l'amortisseur en fonction de l'incrément en température (a) et Évolution de ce pôle reconstruit en fonction de la température (b)

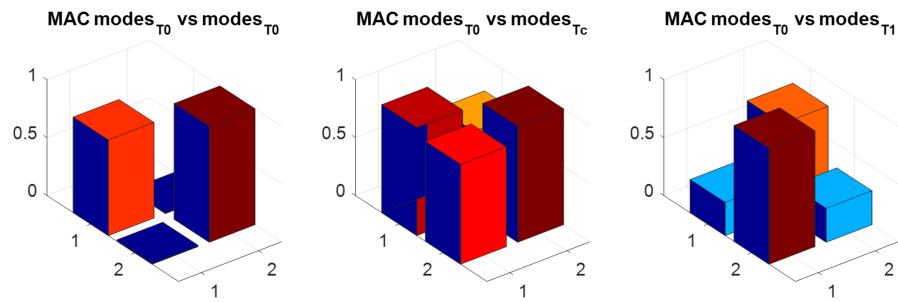


FIGURE 3.11 – Zoom sur le croisement entre le mode 3 et le mode 4 s'effectuant autour de $2.5f_0 \text{ Hz}$

3.5 CONCLUSIONS ET DISCUSSIONS

En plus d'une présentation succincte de plusieurs méthodes de réduction ainsi que de leurs avantages et leurs inconvénients, ce chapitre a permis de présenter une méthode permettant de prendre en compte le comportement viscoélastique dans le modèle éléments finis d'une structure industrielle (3.1) ainsi qu'un "enrichissement" de la formulation pour les deux modèles rhéologiques afin de prendre en compte la température sur la base des résultats des essais décrits dans le chapitre 2.

Cette approche a été détaillée pour les deux modèles rhéologiques qui avaient été retenus dans le chapitre 2 pour représenter respectivement le comportement mécanique dynamique du silicone SI965 et du tBA/PEGDMA. La formulation d'état choisie a permis d'exprimer les matrices d'état du système viscoélastique indépendamment de la fréquence. Même si cette représentation est relativement simple à mettre en place dans le cas où la dissipation est introduite sous la forme d'un modèle d'amortissement hystérétique, elle est plus complexe dans le cas où le schéma rhéologique sélectionné est celui de Maxwell Généralisé. Dans ce cas, une variable interne spécifique doit être introduite lors du passage en représentation d'état. De plus, afin d'utiliser la même représentation pour des structures pouvant potentiellement accueillir différents matériaux viscoélastiques et présentant un champ de température hétérogène, il est nécessaire d'utiliser l'hypothèse que les pôles du GMM (i.e. inverses des temps de relaxation) peuvent être positionnés a priori sur la bande de fréquence (ils ne dépendent donc plus de ce paramètre) et qu'ils sont les mêmes pour tous les matériaux et toutes les températures. Cette hypothèse des "pôles communs" a déjà été décrite dans le chapitre 2 lors de l'identification des paramètres du GMM devant représenter le comportement du tBA/PEGDMA. Cette hypothèse permet aussi de fortement réduire la dimension de la représentation d'état dans le cas où plusieurs matériaux viscoélastiques sont présents ce qui représente un gain non négligeable en terme de temps de calcul. Par ailleurs, une méthode de réduction a été mise en œuvre pour chacun des deux cas présentés dans ce chapitre. Pour l'amortisseur utilisant le silicone, il s'agit d'une base créée à partir des modes propres normaux du modèle éléments finis associé alors que pour l'amortisseur avec les patchs en tBA/PEGDMA il s'agit d'une base multi-modèle. Cette dernière est créée à partir de la concaténation de trois bases modales extraites à trois fréquences différentes afin de correctement représenter les variations du comportement mécanique de ce polymère sur l'espace température-fréquence considéré dans notre étude.

Des analyses modales complexes, permettant de rapidement déterminer les fréquences propres et les amortissements modaux d'un système viscoélastique, ont été menées dans le cas de l'amortisseur avec des patchs en silicone SI965 ainsi que pour l'amortisseur avec les patchs en tBA/PEGDMA pour trois températures différentes : 20, 60 et 120°C. On retrouve bien les différents états du tBA/PEGDMA et leurs impacts sur le comportement dynamique de la structure. Il est aussi à noter, comme on pouvait s'y attendre, qu'au passage de la transition vitreuse l'amortisseur

avec tBA/PEGDMA présente des amortissements modaux bien supérieurs à ceux de l'amortisseur avec le silicone SI965.

Par ailleurs, il apparaît que la validation de la méthode de calcul n'est pas directement possible. En effet, le comportement mécanique du silicone SI965 semble non-linéaire et donc dépendant du taux de déformation appliqué. Une campagne expérimentale spécifique pour de bas niveaux de sollicitation afin d'atteindre des taux de déformation proches de ceux des essais sur viscoanalyseur n'a pu être réalisée faute de disponibilité des moyens. En revanche, des travaux ont été menés dans le cadre de la thèse pour approfondir cette question et sont présentés en chapitre 5.

Enfin, la température est un paramètre d'importance majeure dans le cadre de l'étude du comportement mécanique de l'amortisseur à lames puisque des matériaux viscoélastiques sont employés. Un "enrichissement" de la formulation habituelle pour les deux modèles rhéologiques est proposée afin de prendre en compte la température sur la base des résultats expérimentaux décrits dans le chapitre 2. Dans le cas du Modèle de Maxwell Généralisé, avec "pôles communs", cela permet d'aboutir à un modèle thermo-mécanique où les raideurs dynamiques de chaque cellule α_i et le module long terme E_∞ dépendent de la température. Il reste cependant un certain nombre de points à éclaircir comme l'influence des cellules les unes sur les autres, la manière de poser le problème d'optimisation permettant l'identification des paramètres du GMM (système lié à cause du nombre de cellules élevé), l'explication approfondie des sauts présents sur la CEA paramétrique, la définition de l'index de suivi de mode et l'analyse des croisements entre les modes. Pour finir, les CEA paramétriques respectivement pour l'amortisseur à lames avec les patches en silicone SI965 et celui avec les patches en tBA/PEGDMA, permettent d'étudier l'évolution des paramètres modaux en fonction de la température pour les deux solutions. Il est alors possible de les comparer et ainsi choisir un matériau viscoélastique plutôt qu'un autre en fonction de l'amortissement recherché et de la plage de température considérée. Cependant, le champ de température à l'extérieur et à l'intérieur des patches viscoélastiques est une variable difficile à connaître avec précision et peut même être considérée comme une source d'incertitude. Cet aspect est développé dans le chapitre 4.

ÉTUDE DE LA ROBUSTESSE DES SOLUTIONS AMORTISSANTES VISCOÉLASTIQUES

Sommaire

4.1	Introduction	86
4.1.1	Contexte général de l'étude	86
4.1.2	Définition des incertitudes	88
4.1.3	Modélisation des incertitudes et propagation dans les modèles	89
4.1.4	Introduction à l'analyse de robustesse et à l'optimisation en présence d'incertitudes	92
4.1.5	Présentation de l'approche Info-Gap	97
4.2	Analyse de robustesse basée sur la méthode Info-Gap	99
4.2.1	Formulation du problème Info-Gap lié à l'amortisseur	100
4.2.2	L'analyse de robustesse comme outil de conception	101
4.3	Conclusions et perspectives	102

PRÉAMBULE

Les chapitres 2 et 3 nous ont permis de caractériser, de modéliser et d'implanter les comportements viscoélastiques du silicone SI965 et du tBA/PEGDMA dans le modèle éléments finis de l'amortisseur à lames (Figure 4.1).

Le passage par une formulation d'état a permis d'effectuer des analyses modales complexes afin d'étudier le comportement mécanique dynamique de l'amortisseur avec les deux types d'élastomère en fonction de la fréquence et de la température. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'impact que peuvent avoir les incertitudes et les méconnaissances sur le comportement dynamique de structures viscoélastiques. Dans un premier temps, une introduction aux concepts d'incertitude et de robustesse est proposée. Une seule source d'incertitude sera considérée dans l'exemple d'application : le champ de température. Un des objectifs est de proposer un outil pour le

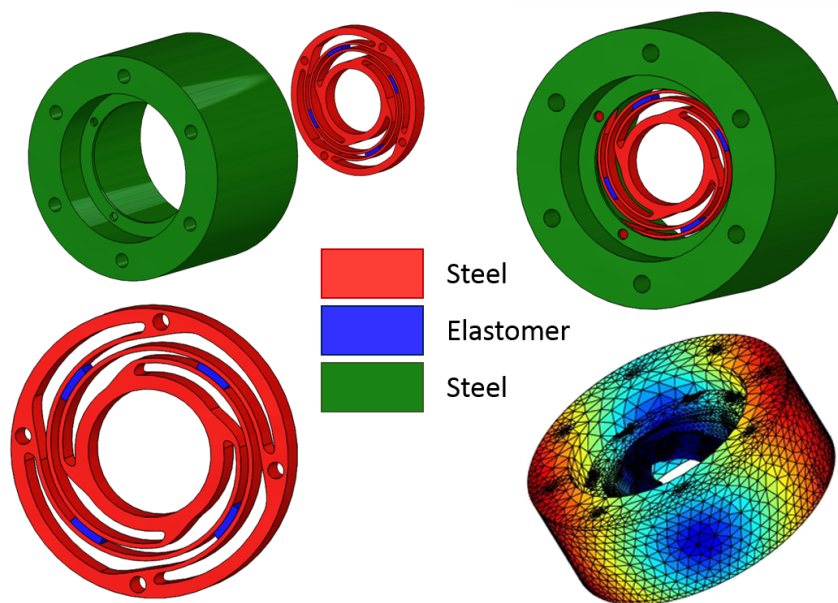


FIGURE 4.1 – Rappel de la géométrie, maillage et déformée de l'amortisseur à lames *Thales LAS Fr*

choix des matériaux dans une structure de contrôle passif des vibrations en présence d'incertitudes.

Pour y parvenir, les formulations thermo-mécaniques relatives au modèle d'amortissement hystérétique dans le cas du silicone SI965 (équation 3.43) et au GMM avec "pôles communs" dans le cas du tBA/PEGDMA (équation 3.45) proposées au chapitre 3 sont utilisées. Enfin une formulation de l'incertitude sur le champ de température basée sur la théorie Info-Gap est proposée afin d'étudier la robustesse de l'amortisseur. Le cas de l'amortisseur avec les patches en silicone SI965 est comparé à celui de l'amortisseur avec les patches en tBA/PEGDMA.

4.1 INTRODUCTION

4.1.1 CONTEXTE GÉNÉRAL DE L'ÉTUDE

De manière générale, les différentes phases de conception d'un produit (CAO, calculs, expériences, etc.) visent à fournir une solution technique adaptée à un Cahier des Charges Fonctionnel (CdCF) établi. Un premier modèle CAO du système est réalisé et des calculs sont menés afin d'évaluer le comportement statique et dynamique. Un ensemble d'études numériques permet de déterminer une solution viable vis-à-vis du CdCF. Un prototype est alors fabriqué et des essais sont réalisés afin d'infirmer ou de confirmer les résultats numériques. Lorsque cette étape est validée, il est possible de faire des boucles essai-calcul supplémentaires afin d'améliorer la

solution proposée comme par exemple, en réduisant sa masse, en modifiant certains matériaux, en modifiant la géométrie, etc. Cette phase permet d'aboutir à une solution dite "optimisée" selon un ou plusieurs critères (coût, masse, encombrement, etc.). Cette optimisation repose sur l'écriture d'équations (fonction(s) objectif(s)) liant les différentes contraintes et le ou les paramètres à optimiser de manière déterministe. Il est possible que la solution optimale ne soit pas unique, c'est-à-dire qu'il n'existe pas une solution idéale, et cet ensemble de solutions peut être représenté, dans un cas simple, par un front de Pareto.

Cependant, dans le monde réel, l'ensemble des paramètres propres au système ainsi que l'environnement dans lequel il évolue sont entachés d'incertitudes. Par exemple, il est impossible de retrouver exactement les mêmes cotes fonctionnelles sur deux pièces usinées provenant d'une même chaîne de production comme il est impossible de répéter à l'identique les mêmes conditions aux limites d'une campagne d'essai à l'autre. Ces incertitudes peuvent avoir un impact important sur le comportement statique et dynamique du système à concevoir et mener à des situations critiques : dégradation importante des performances, défaillance, ruine, etc.

En comparaison, dans la majeure partie des applications de ce travail, les appareils optroniques embarqués et les systèmes qui les accueillent, en plus des différents scénarios vibratoires auxquels ils sont sujets, évoluent dans des environnements présentant des caractéristiques radicalement différentes : zones arides, montagneuses, maritimes, etc. Cela a pour conséquence de renforcer les contraintes recensées dans le cahier des charges lorsque l'on souhaite qu'un même système soit fonctionnel dans n'importe quelles circonstances.

Un paramètre important à prendre en compte lors de la conception de systèmes amortissants exploitant des matériaux viscoélastiques est la température qui peut fortement impacter le comportement mécanique de la structure. Une première illustration de l'influence de la température sur le comportement dynamique de l'amortisseur avec des patches en tBA/PEGDMA a été présentée dans le chapitre 3. Cependant, il s'avère que ce paramètre est souvent entaché d'incertitudes. En effet, le champ de température n'est généralement pas uniforme, et il évolue dans le temps. La contrainte formulée dans le CdCF pour un amortisseur avec élastomères est donc définie avec une marge d'erreur. Aucune information précise n'étant disponible pour décrire le profil de cette variation, le champ de température peut donc considéré comme un paramètre incertain.

Dans ce contexte, le choix du polymère à utiliser dans la conception de la solution dissipative est complexe. Historiquement, ce choix reposait sur l'avis d'un expert régulièrement confronté à cette problématique. Il est désormais possible de prendre en compte les différentes sources d'incertitudes dans la modélisation ainsi que dans les simulations afin de quantifier leurs effets sur les performances. Ce type d'approche peut être combiné avec une méthode d'optimisation pour aboutir à des solutions optimales et robustes.

La suite de cette section a pour objectif de présenter les différents types d'incertitudes, les théories permettant de les modéliser ainsi que les concepts d'analyse de

robustesse et de conception robuste avant d'en présenter une application concrète sur un exemple (Figure 4.1).

4.1.2 DÉFINITION DES INCERTITUDES

De manière générale et même si les dénominations peuvent varier d'un auteur à l'autre, l'ensemble des incertitudes rencontrées peut être classé dans les deux catégories [Oberkampf 02] suivantes :

- Les incertitudes stochastiques (irréductibles, aléatoires ou intrinsèques) qui proviennent de la variabilité inhérente au système étudié et à l'environnement dans lequel il évolue. À titre d'exemple, elles peuvent représenter la variabilité des propriétés matériaux, la variabilité de la température, ou la variabilité géométrique et affectent à la fois la structure mécanique mais aussi les instruments de mesures.
- Les incertitudes épistémiques (réductibles, subjectives, méconnaissances ou ignorances) qui découlent directement d'un manque de connaissances des phénomènes mis en jeu. Elles peuvent donc être atténuées par un gain d'information. Ce manque de connaissances, ou encore méconnaissances, peut être lié aux relations de comportement des matériaux, à des phénomènes particuliers se déroulant au niveau des raccordements entre sous-structures, ou d'autres effets non-linéaires. En résumé, ces incertitudes représentent notre incapacité à obtenir de l'information et/ou à appréhender correctement les phénomènes complexes.

La Figure 4.2 illustre ces concepts. Cependant, ce schéma est encore généralisable. En effet, il est possible, lorsque cela est nécessaire, d'introduire des incertitudes directement sur le système et d'en ajouter sur les quantités mesurées.

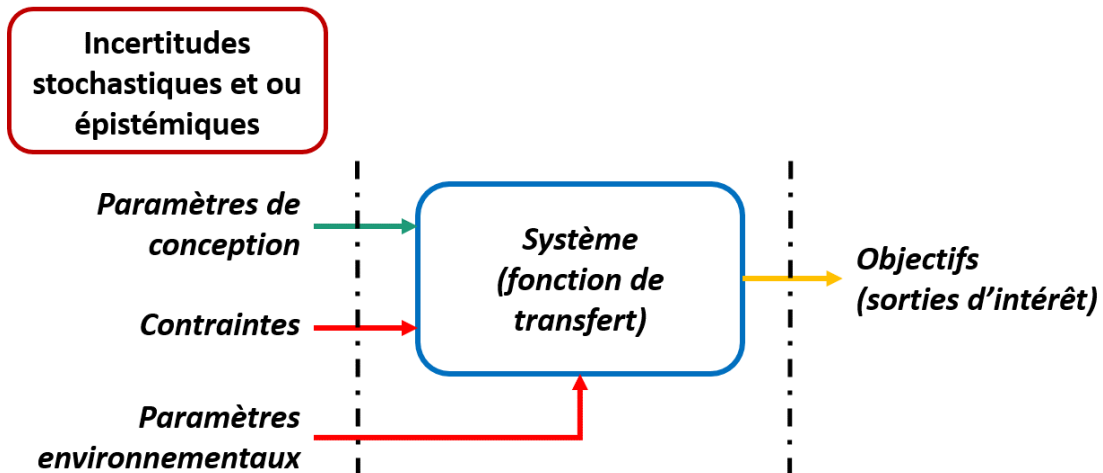


FIGURE 4.2 – Schéma de représentation des incertitudes en conception

Les questions découlant naturellement de la Figure 4.2 sont les suivantes :

- Comment est-il possible de modéliser les incertitudes stochastiques et épistémiques ?
- Comment évaluer l'impact de ces incertitudes sur nos sorties d'intérêts (objectifs) ?
- Est-il possible d'aboutir à des systèmes optimisés malgré l'existence de ces incertitudes ?

Les sections 4.1.3 et 4.1.4 tentent d'apporter des éléments de réponses à ces questions.

4.1.3 MODÉLISATION DES INCERTITUDES ET PROPAGATION DANS LES MODÈLES

Dans l'optique de prendre en compte les incertitudes stochastiques et épistémiques, il est nécessaire de poser un cadre mathématique permettant de les modéliser. Cette partie propose diverses approches permettant de répondre à un grand nombre de problèmes différents. De plus, pour la suite du manuscrit, nous nous plaçons dans le cadre d'une approche directe concernant la prise en compte des incertitudes. C'est-à-dire que ces dernières sont appliquées uniquement sur les variables d'entrée ou les opérateurs du système étudié afin d'étudier et/ou de modifier leur impact sur les sorties d'intérêt. Les approches inverses ne seront pas abordées dans ce manuscrit.

L'approche probabiliste est généralement employée dans le cas où les incertitudes considérées sont stochastiques et les méconnaissances sont faibles. Une représentation schématique d'une incertitude stochastique est donnée Figure 4.3 (1). Il existe différentes manières de construire la loi de probabilité et de choisir ses paramètres :

- Définition a priori de la loi de probabilité. Une correction peut être apportée à la loi de probabilité en fonction des observations effectuées par l'intermédiaire du théorème de Bayes [Schuëller 06].
- Définition à partir d'un estimateur statistique construit après un nombre d'expérience élevé et basé sur la fréquence d'apparition des différents événements.
- Définition basée sur le principe du maximum d'entropie [Soize 05]. En résumé, il s'agit d'une approche permettant d'aboutir à la meilleure loi de probabilité vérifiant un ensemble de contraintes définies par l'information à disposition.

La définition d'une loi de probabilité basée sur un estimateur statistique est moins fréquente que les deux autres dans le cadre de la dynamique des structures car le nombre d'expériences à réaliser s'avère souvent trop important.

Une fois les incertitudes modélisées, elles sont introduites dans le modèle. Ici, dans le cadre d'une approche directe, les deux visions suivantes sont possibles :

- 1) Les méthodes paramétriques, qui reposent sur la prise en compte des incertitudes au niveau des paramètres de conception, des contraintes et des paramètres environnementaux exposés Figure 4.2. Les paramètres sont alors considérés comme des variables aléatoires modélisées préalablement, et l'objectif est de quantifier leur impact sur les sorties d'intérêt. Il existe deux approches pour propager les incertitudes :
 - La simulation de Monte Carlo [Massa 08] qui permet l'implémentation des

lois de probabilité dans le modèle. Pour représenter les distributions associées à chaque paramètre, la méthode est basée sur la génération de tirages aléatoires combinée à une résolution du problème déterministe pour chacun d'eux. Il est ainsi possible de déterminer les lois de probabilité des sorties d'intérêt. Cette méthode est très simple à mettre en œuvre mais le nombre de tirage peut être très élevé avant que le résultat ne soit satisfaisant à cause d'une convergence assez lente. Afin de pallier ce problème diverses améliorations de la méthode ont été proposées. On peut par exemple citer la méthode du Quasi-MC [Asmussen 07] et les méthodes du Latin Hypercube [McKay 79].

- La méthode des éléments finis stochastiques qui permet de prendre en compte le caractère aléatoire des paramètres comme une dimension supplémentaire du système étudié. La discrétisation spatiale est réalisée par la méthode des éléments finis classique. Dans ce cadre, deux approches sont possibles. La première utilise une méthode de perturbation (méthode des éléments finis stochastiques par perturbation) entre les caractéristiques des sorties d'intérêt et les paramètres aléatoires du système [Gregory B. Beacher 81]. Pour y parvenir, il faut en premier lieu discrétiser spatialement les champs stochastiques associés aux paramètres aléatoires avant d'approximer la "partie aléatoire" de chaque champ par un développement en série de Taylor autour de sa moyenne. La seconde approche repose sur la projection des champs stochastiques sur le chaos polynomial (méthode spectrale des éléments finis stochastiques) [Ghanem 91] afin d'obtenir une décomposition des parties spatiales et aléatoires de ces derniers. Cette décomposition est ensuite combinée à la discrétisation du système par la méthode des éléments finis classique. Dans les deux cas, il est possible d'observer les variations des sorties d'intérêt en fonction des paramètres aléatoires du problème.
- 2) Les méthodes non-paramétriques qui visent à prendre en compte les incertitudes au niveau du modèle, c'est-à-dire au niveau des opérateurs de masse, de raideur et d'amortissement en dynamique des structures [Soize 05, Soize 13]. Dans cette approche les matrices globales sont alors considérées comme aléatoires ce qui permet de réduire de manière drastique les temps de calcul auxquels l'approche paramétrique pouvait mener pour des systèmes complexes avec de nombreuses sources d'incertitudes. Le principal inconvénient de cette méthode est la perte d'information sur les phénomènes à l'œuvre dans le système puisque l'incertitude est introduite au moyen d'un paramètre de dispersion n'ayant aucune signification physique. La propagation des incertitudes dans ces approches est effectuée grâce à une simulation de Monte Carlo (ou de ces améliorations).

L'ensemble de ces méthodes sont mises en défaut lorsqu'elles sont employées pour prendre en compte des incertitudes épistémiques. En effet, lorsque la représentation d'une méconnaissance par une loi de probabilité devient une hypothèse trop forte,

il faut définir de nouvelles méthodes afin de la modéliser et de la propager dans le système pour pouvoir analyser son impact sur les sorties d'intérêt. Les approches non-probabilistes ont été développées pour répondre à ce besoin. Elles peuvent être divisées en plusieurs familles, chacune étant basée sur une modélisation des incertitudes épistémiques différente (voir Figure 4.3) :

- 1) La théorie des intervalles est décrite dans les thèses de Puel [Puel 04] et d'Enjalbert [Enjalbert 09]. Elle repose sur une représentation de l'incertitude épistémique sur un paramètre comme un intervalle de tolérance fixe avec des bornes déterministes (Figure 4.3 (2)). La propagation des incertitudes est effectuée par des opérations arithmétiques et l'observation porte sur les bornes extrêmes de variation des réponses d'intérêt. La mise en place de cette méthode est simple mais aboutit, en règle générale, à une vision pessimiste du fonctionnement du système, ce qui peut conduire à un sur-dimensionnement important.
- 2) La théorie des intervalles flous [Zadeh 65] : Cette approche est moins pessimiste que la théorie précédente. En effet, même si l'incertitude est toujours comprise dans un intervalle à bornes déterministes, une fonction d'appartenance à l'intervalle est ajoutée pour prendre en compte le biais "humain" (Figure 4.3 (3)). Ce biais peut-être illustré par la définition d'un adjectif comme "tiède" dont la signification varie au sein d'un même groupe d'individu. La fonction d'appartenance permettant de représenter ce phénomène prend souvent une forme simple (triangle, trapèze, gaussienne) et introduit de l'aléa sur l'intervalle. La méthode des éléments finis flous (*Fuzzy Finite Element Method*) [Rao 95] permet de combiner la théorie des intervalles flous et la méthode des éléments finis classique.
- 3) La théorie de Dempster-Shafer ou théorie des preuves [Dempster 68, Shafer 76] : Cette approche peut être vue comme une combinaison de la théorie des intervalles et de l'approche probabiliste. En effet, l'incertitude est représentée par un intervalle auquel une probabilité est associée. En résumé, elle permet de caractériser la variabilité d'une sortie d'intérêt grâce à deux quantités appelées :
 - La croyance, qui représente la somme des preuves en faveur de l'occurrence de cet événement ;
 - La plausibilité, qui représente la sommes de preuves à l'encontre de l'occurrence de cet événement.Ces deux quantités permettent d'encadrer la probabilité que cet événement ait lieu.
- 4) La théorie des méconnaissances : Dans cette théorie introduite par Barthe et Ladevèze dans [Barthe 03] et développée par Puel [Puel 04] et Enjalbert [Enjalbert 09], l'incertitude sur un paramètre est toujours représentée par un intervalle mais cette fois les bornes supérieures et inférieures sont définies comme

des variables aléatoires (Figure 4.3 (4)). Il s'agit d'une méthode hybride couplant à la fois l'approche non-probabiliste et les méthodes probabilistes afin d'obtenir une vision plus "réaliste" d'un système soumis à des incertitudes que la théorie des intervalles dans le cas où les incertitudes sont épistémiques.

- 5) L'approche Info-Gap : Développée par Yakov [Ben-Haim 06a] depuis les années 90 et reposant sur les travaux d'Elishakoff [Ben-Haim 13], cette approche, plus qu'une simple modélisation des incertitudes épistémiques, propose un cadre afin d'être en mesure de prendre des décisions dans un contexte où les incertitudes sont sévères. La théorie sous-jacente (modèles convexes) peut être vue comme une généralisation des concepts de la théorie des intervalles. Dans cette approche, le "Gap" représente l'écart entre la valeur nominale d'un paramètre et l'information "Info" à connaître afin de satisfaire un critère de performance. En résumé, les bornes de l'intervalle d'incertitude sont variables (Figure 4.3 (5)). La section 4.1.5 propose une vision plus détaillée de la méthode Info-Gap dans son intégralité.

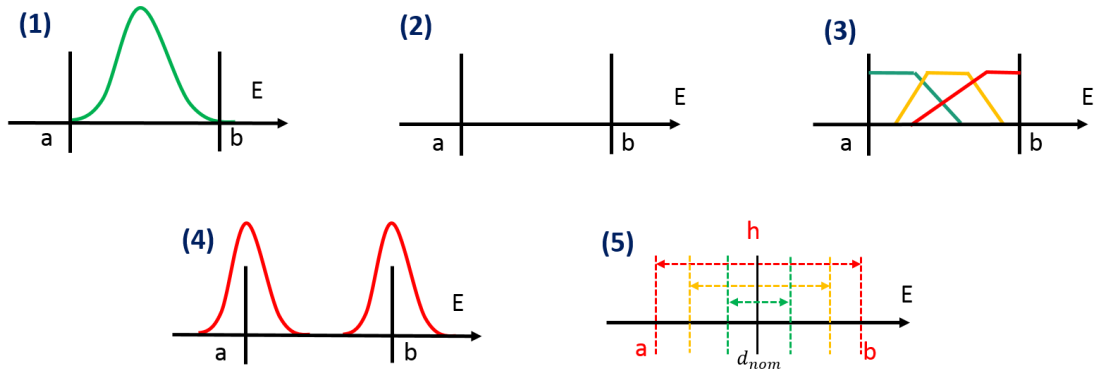


FIGURE 4.3 – Schéma des différentes modélisations des incertitudes : (1) stochastique, (2) théorie des intervalles, (3) théorie des ensembles flous, (4) théorie des méconnaissances, (5) théorie Info-Gap (ensembles convexes)

Les approches probabilistes et non-probabilistes permettent de représenter un grand nombre d'incertitudes stochastiques et épistémiques et de les propager dans le système étudié de manière plus ou moins complexe. Cette étape permet ensuite d'observer l'impact des incertitudes sur le comportement du système et les sorties d'intérêt.

Il faut désormais définir une métrique pour évaluer cet impact et des méthodes afin d'aboutir à des systèmes moins sensibles aux incertitudes.

4.1.4 INTRODUCTION À L'ANALYSE DE ROBUSTESSE ET À L'OPTIMISATION EN PRÉSENCE D'INCERTITUDES

Avant de rentrer dans le vif du sujet, il est nécessaire de définir un terme propre à l'analyse des systèmes incertains et qui reviendra plusieurs fois dans ce manuscrit :

la robustesse.

En considérant une fonction objectif fun liant les entrées et les sorties d'un système, comme cela est schématisé sur la Figure 4.2, on entend par robustesse la capacité de cette fonction à "résister" aux incertitudes. Cela peut, par exemple, se représenter par une faible variation de la fonction $fun(E)$ lorsque le paramètre E est variable.

Lors de la conception d'un système, si les incertitudes ne sont pas prise en compte, des solutions optimales peuvent être obtenues en résolvant un problème d'optimisation déterministe afin de répondre aux objectifs fixés. En considérant un seul paramètre E et la fonction objectif fun à minimiser, ce type de problème peut prendre la forme suivante :

$$\begin{cases} \min_E fun(E) \\ \text{avec} \\ E_{inf} \leq E \leq E_{sup} \\ f_i(E) = 0, i = 1, \dots, n_f \\ g_j(E) \leq 0, j = 1, \dots, n_g \end{cases} \quad (4.1)$$

où E_{inf} et E_{sup} représentent respectivement les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle de variation du paramètre E , f décrit l'ensemble des contraintes d'égalités et g l'ensemble des contraintes d'inégalité.

Comme l'illustre la colonne de gauche de la Figure 4.4, la minimisation de $fun(E)$ conduit à une valeur optimale du paramètre E et la performance visée $P_c = fun(E)_{visée}$ est largement atteinte. Il est à noter que h représente le niveau d'incertitude sur le paramètre E .

Une manière de démontrer la limite des solutions obtenues par la résolution d'un problème d'optimisation déterministe en présence d'incertitudes sur le système revient à effectuer une analyse de robustesse.

Pour y parvenir, il faut définir une ou plusieurs métriques de performance. Il existe énormément de manières pour définir cette quantité et un grand nombre d'entre elles sont recensées dans [Beyer 07] et [Göhler 16]. Les plus intuitives sont présentées ci-dessous :

- Si la sortie d'intérêt peut être exprimée sous la forme d'une distribution, il est alors possible de baser la mesure de la robustesse sur l'espérance et/ou la variance. Le but est alors de déterminer la valeur moyenne et la dispersion à laquelle elle est sujette afin d'estimer la dégradation possible de la solution. Dans ce cas, il est aussi possible d'évaluer directement la probabilité que la sortie d'intérêt soit bien comprise sur l'intervalle de performance visé.
- Sans condition sur la sortie d'intérêt, et si l'objectif à terme est de garantir un certain niveau performance en présence d'incertitudes, l'expression de la robustesse peut alors être basée sur la mesure du pire cas. La valeur de performance conservée est alors celle étant la plus mauvaise au regard des incertitudes présentes. Cette approche aboutit à une vision plutôt "pessimiste" des performances du système. C'est l'approche qui sera principalement utilisée dans ce manuscrit. Pour finir, il est possible d'assouplir cette vision de la robustesse

en pénalisant l'expression du pire cas. Il s'agit alors de mesures basées sur les quantiles.

La colonne centrale de la Figure 4.4 permet d'illustrer schématiquement le principe de l'analyse de robustesse dans le pire cas, comme pour l'approche Info-Gap (Figure 4.3 (5)). Lorsque le paramètre E est incertain et couvre un intervalle h compris entre les valeurs E_{min} et E_{max} , la fonction objectif renvoie alors un ensemble de valeurs comprises entre $fun(E - h)$ et $fun(E + h)$ et la valeur conservée pour représenter la performance est la moins bonne de cet ensemble. À chaque itération, l'intervalle h devient de plus en plus grand, jusqu'à un certain seuil $h_0 = |E_{max} - E_{min}|$ et la performance du système décroît jusqu'à $P(h = h_0)$ qui est largement inférieure à la performance visée P_c .

En résumé, une analyse de robustesse permet bien de quantifier la robustesse d'une solution en présence d'incertitudes a posteriori. Il faut cependant choisir une mesure de robustesse pertinente en fonction du type d'incertitude, du problème étudié, des sorties d'intérêt considérées et du niveau de performance à atteindre. La forme de la solution n'est pas modifiée ce qui signifie que la robustesse intrinsèque du système reste inchangée.

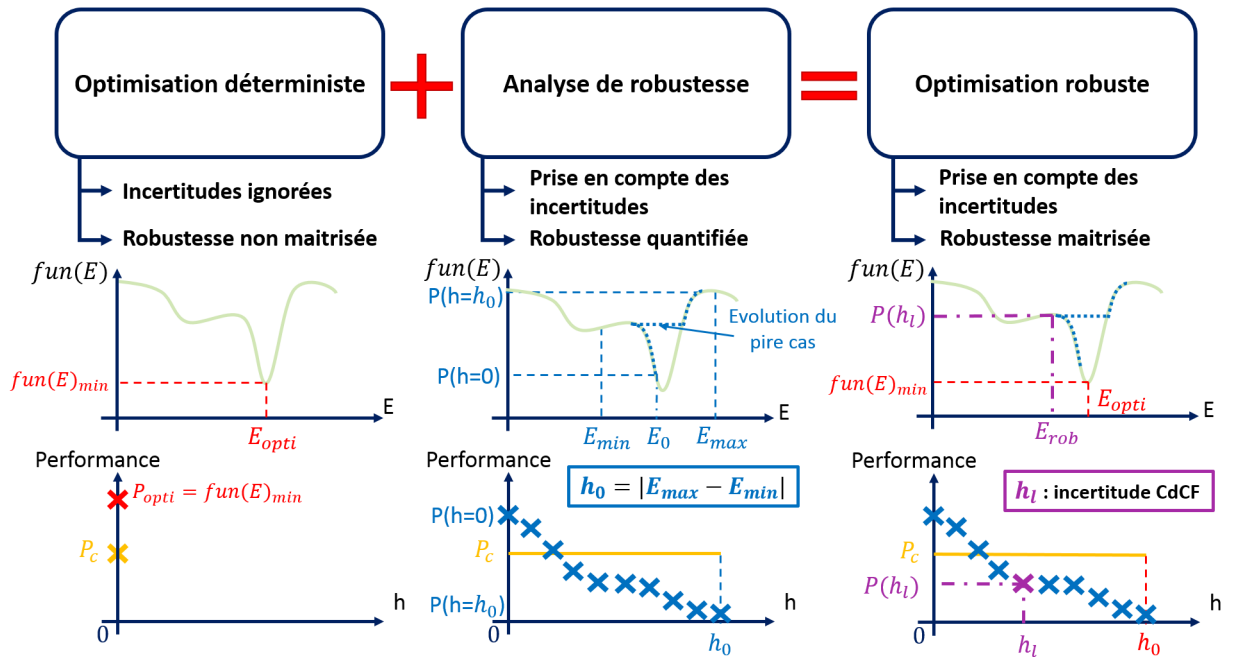


FIGURE 4.4 – Comparaison entre l'optimisation déterministe, l'analyse de robustesse et l'optimisation robuste d'un système

Afin d'améliorer la robustesse d'un système et d'aboutir à une solution optimisée en présence d'incertitudes, il est nécessaire de mettre en place des méthodes de conception robuste. Ces méthodes peuvent être vues comme une combinaison du problème d'optimisation déterministe et de l'analyse de robustesse comme l'illustre

la colonne de droite sur la Figure 4.4. Il s'agit alors, pour une incertitude définie et représentée par un horizon d'incertitude h_l , de remonter à un paramètre E_{rob} assurant à la fois la meilleure robustesse et la meilleure performance possible du système.

Il existe différentes méthodes permettant d'aboutir à la conception d'un système dit "robuste" envers les incertitudes identifiées. Elles peuvent être classées dans deux familles principales se basant sur :

- la fiabilité, *Reliability-Based Design Optimization* (RBDO)
- la conception robuste, *Robust Design Optimization* (RDO)

Cependant, la vision de "conception robuste" diffère d'une approche à l'autre comme l'illustrent les graphiques (1) et (2) de la Figure 4.5. Le graphique (3) présente la combinaison de ces deux familles appelée *Reliability-Based Robust Design Optimization* (RRDO) [Plevris 09].

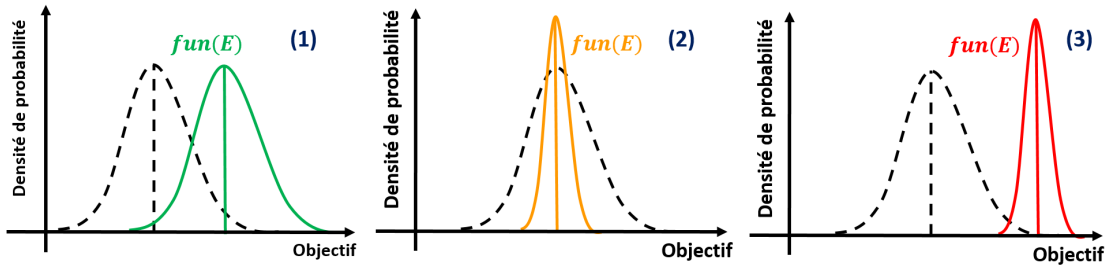


FIGURE 4.5 – Illustration des différentes méthodes de conception robuste envisageables : (1) RBDO, (2) RDO, et (3) RRDO

La RBDO (1) cherche à faire traduire la moyenne de la solution afin de réduire la probabilité de défaillance du système en présence d'incertitude. Un exemple peut être trouvé dans [Plevris 09]. Le problème d'optimisation associé peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min_E fun(E) \\ \text{avec} \\ E_{inf} \leq E \leq E_{sup} \\ f_i(E) = 0, i = 1, \dots, n_f \\ g_j(E) \leq 0, j = 1, \dots, n_g \\ P_f(E) \leq P_c \end{cases} \quad (4.2)$$

où la formulation est proche d'un problème d'optimisation déterministe sauf que certains paramètres, ici E , peuvent être incertains et une contrainte est ajoutée. En effet, il faut que la probabilité de défaillance P_f du système conditionnée par le paramètre incertain E soit inférieure à une probabilité d'occurrence critique P_c tout en minimisant $fun(E)$.

La RDO (2), quant à elle, permet de minimiser la fonction objectif tout en minimisant une mesure de la variabilité d'une ou de plusieurs réponses d'intérêt $\sigma(x, E)$ en pré-

sence d'incertitude sur le paramètre E . Le problème associé peut s'écrire [Plevris 09] :

$$\begin{cases} \min_E [fun(E), \sigma(x, E)] \\ \text{avec} \\ E_{inf} \leq E \leq E_{sup} \\ f_i(E) = 0, i = 1, \dots, n_f \\ g_j(E) \leq 0, j = 1, \dots, n_g \end{cases} \quad (4.3)$$

Le choix de la fonction σ dépend généralement du problème et il est à noter qu'il s'agit d'un problème multi-objectifs par nature puisque la minimisation porte sur deux fonctions en même temps fun et σ .

Dans les deux approches, RBDO et RDO, il est possible de formuler le problème à résoudre de manière à prendre en compte plusieurs paramètres incertains et à minimiser plusieurs fonctions objectifs et plusieurs mesures de la variabilité. Pour finir, l'approche RDO est généralement plus simple à mettre en œuvre puisque la minimisation de la dispersion revient à réduire la probabilité de défaillance sans avoir à la calculer de manière explicite. Or, cette étape présente dans l'approche RBDO peut être coûteuse en terme de temps de calcul.

Ces deux méthodes peuvent cependant être vues comme des approches complémentaires et de leur combinaison est appelée *Reliability-Based Robust Design Optimization* (RRDO) [Plevris 09]. La Figure 4.5 (3) est une illustration de la vision proposée par cette approche. Un problème de RRDO s'écrit donc logiquement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min_E [fun(E), \sigma(x, E)] \\ \text{avec} \\ E_{inf} \leq E \leq E_{sup} \\ f_i(E) = 0, i = 1, \dots, n_f \\ g_j(E) \leq 0, j = 1, \dots, n_g \\ P_f(E) \leq P_c \end{cases} \quad (4.4)$$

en combinant à la fois la minimisation de la dispersion de la solution et en s'assurant que la probabilité de défaillance soit toujours inférieure à un seuil fixé.

En conclusion, les métriques possibles pour définir la robustesse d'un système vis-à-vis des incertitudes sont nombreuses et liées à la nature du problème. Cependant, l'objectif d'une analyse de robustesse demeure inchangé. En effet, dans tous les cas, le but est de mesurer l'impact des incertitudes sur les sorties d'intérêt afin de déterminer si le système étudié satisfait tous les objectifs fixés même si les paramètres sont incertains. De cette manière, une quantification de la robustesse est obtenue. À la suite de ce type d'analyse, des modifications peuvent être apportées au système afin d'améliorer sa robustesse ou, en anticipant la présence d'incertitudes dans la modélisation du problème global, il est possible de directement recourir à une méthode "d'optimisation robuste". Ce type de méthode permet de déterminer une solution optimale robuste, c'est-à-dire une solution minimisant l'impact des sources d'incertitudes tout en essayant d'atteindre les performances visées.

Dans ce manuscrit, les analyses de robustesse ne seront menées que pour une seule source d'incertitude à la fois et en n'étudiant qu'une seule grandeur d'intérêt à la fois. Ces analyses utiliseront l'approche Info-Gap qui est présentée dans la section suivante. Dans le chapitre 6 l'approche Info-Gap sera employée pour prendre en compte une source d'incertitude et elle sera intégrée à une procédure d'optimisation afin de mener une optimisation robuste, de type RDO, du système étudié.

4.1.5 PRÉSENTATION DE L'APPROCHE INFO-GAP

La méthode Info-Gap est abordée de manière plus détaillée dans cette sous-partie puisqu'il s'agit de la méthode de modélisation et d'analyse de robustesse qui sera employée dans l'ensemble de ce manuscrit.

Comme cela a déjà été mentionné dans la section précédente, l'approche Info-Gap est développée depuis les années 90 par Yakov [Ben-Haim 06a] et propose un outil d'aide à la décision en présence d'incertitude ou de méconnaissances. La philosophie derrière cette approche repose sur l'idée qu'en présence d'informations manquantes, il est préférable de s'orienter vers une solution robuste plutôt que vers la solution la plus performante. La modélisation Info-Gap d'une incertitude est une quantification non-probabiliste de cette dernière basée sur l'écart, le "Gap", entre ce qui est connu et l'"Info" nécessaire afin de satisfaire un critère de performance défini. Cette approche est employée dans des domaines divers. Il y a déjà eu des travaux menés portant sur le recalage de modèle [Ben-Haim 98] et également sur le positionnement optimal de capteurs et d'excitateurs [Vinot 05], en dynamique des structures.

La mise en œuvre d'une approche Info-Gap pour un problème paramétrique, repose sur la définition de trois types de données :

- Le modèle du système étudié. Il décrit la relation entre les entrées, désignées par le vecteur u , et les sorties d'intérêt définies par le vecteur y . Les entrées comportent à la fois les paramètres "connus" et les paramètres inconnus. Le modèle du système s'écrit alors :

$$\mathcal{M}(u) = y \quad (4.5)$$

En dynamique des structures, les modèles peuvent représenter le lien entre les efforts extérieurs F_e et le champ de déplacement U et s'écrire, dans le domaine fréquentiel, sous la forme :

$$(-\omega^2 M + j\omega C + K) \hat{U} = \hat{F}_e \quad (4.6)$$

- Le modèle d'incertitude. Dans la théorie Info-Gap, il définit l'écart entre la valeur nominale du paramètre $\tilde{u}$ et son degré d'incertitude, de méconnaissance. En terme plus technique, ce modèle représente l'espace de variation de l'incertitude centré sur la valeur nominale du paramètre. Les bornes peuvent s'écarter et la taille de cet intervalle est contrôlée par un paramètre h appelé horizon

d'incertitude comme illustré sur le schéma Figure 4.3 (5). Il est possible de comparer ce modèle d'incertitude à un intervalle de tolérance pouvant être variable et positionné autour de la valeur nominale d'une cote fonctionnelle. Il existe une multitude de modèles d'incertitudes disponible dans la théorie Info-Gap. Dans le cadre de ce manuscrit, on retiendra un modèle sous forme d'enveloppe pouvant s'écrire :

$$U(h, \tilde{u}) = \{u : |u - \tilde{u}| \leq h\}, h \geq 0 \quad (4.7)$$

Cette formulation est écrite en écart absolu et signifie que le paramètre incertain, et donc variable, u peut prendre un ensemble de valeurs comprises entre $\tilde{u} \pm u$. L'écart entre la valeur nominale $\tilde{u}$ et la vraie valeur u inconnue est piloté par une valeur réelle positive, l'horizon d'incertitude h . De la même manière que lors de l'écriture d'une fonction objectif, il est possible de réunir plusieurs sources d'incertitudes sous un seul modèle d'incertitude. Cependant, cette combinaison peut mener, si les grandeurs considérées sont suffisamment différentes, à une hiérarchisation de la contribution de chacune des sources d'incertitudes. Afin de gérer ce type de problème, il est possible de reformuler le modèle d'incertitude en utilisant des écarts relatifs et/ou en pondérant les différentes familles d'incertitudes.

- Un critère de performance. Il s'agit généralement d'une contrainte y_c que doit satisfaire le vecteur des sorties d'intérêt y . S'il s'agit d'un seuil à respecter, elle peut être écrite sous la forme :

$$|y| \leq y_c \quad (4.8)$$

C'est le respect ou non de cette condition qui permet à l'utilisateur de l'approche Info-Gap de prendre une décision. En dynamique des structures, ce critère de performance peut par exemple être le niveau maximal de contrainte admissible dans la structure ou un niveau de déplacement maximal en un point à ne pas dépasser.

Ces trois éléments combinés permettent de définir deux fonctions d'aide à la décision nommées fonction de robustesse et fonction d'opportunité. La fonction d'opportunité est la représentation duale de la fonction de robustesse et elle ne sera pas mise en œuvre dans ce manuscrit. Un exemple d'utilisation de cette fonction peut être trouvé dans [Ben-Haim 04].

La fonction de robustesse, notée $\hat{h}(y_c)$, permet de définir le plus grand niveau d'incertitude pour lequel le critère de performance est encore satisfait (premier *max* de l'équation 4.9). Elle peut être vue comme l'évaluation de la résistance du système aux incertitudes et de manière générale, c'est une grandeur que l'on cherche à maximiser. La manière de la formuler est directement liée à la définition du modèle de système, du modèle d'incertitude et du critère de performance. Dans l'exemple générique utilisé dans cette section, le critère de performance représente un seuil à ne pas dépasser. Il s'agit alors d'évaluer pour chaque valeur d'horizon d'incertitude h croissant, le pire des cas relatif au modèle $\mathcal{M}(u)$ en considérant le modèle d'incertitude $U(h, \tilde{u})$ (second *max* de l'équation 4.9) et de le comparer au critère de performance y_c . La fonction de robustesse associée s'écrit :

$$\hat{h}(y_c) = \max \{h : [\max_{u \in U(h, \tilde{u})} \mathcal{M}(u)] \leq y_c\}, y_c \geq 0 \quad (4.9)$$

La mise en œuvre de l'approche Info-Gap sur le cas de l'amortisseur à lames est présentée dans la section 4.2 de ce chapitre et dans le chapitre 6 dans le cadre d'une autre problématique. Dans les deux cas, nous n'avons considéré qu'un seul critère de performance à la fois même si l'approche permet d'en prendre en compte une multitude.

4.2 ANALYSE DE ROBUSTESSE BASÉE SUR LA MÉTHODE INFO-GAP

La section précédente a permis de constater que le comportement mécanique des matériaux viscoélastiques était dépendant de la fréquence et de la température. Ces dépendances peuvent être prises en compte dans les simulations numériques (comme l'analyse modale complexe) par l'intermédiaire de différents modèles rhéologiques et il est ainsi possible d'évaluer la capacité d'amortissement des structures pour chaque comportement matériau. Il apparaît que les résultats varient de manière significative en fonction du champ de température cependant, ce paramètre est difficile à connaître avec exactitude dans la pratique.

D'autre part, comme cela a déjà été mentionné, en considérant un manque de connaissance sur un paramètre d'entrée ou une variable environnementale propre au système étudié, il devient dangereux de prendre des décisions sur le meilleur dimensionnement à effectuer sans prendre en compte ces incertitudes.

En pratique, l'amortisseur à lames est soumis à des modifications importantes du champ de température qui peuvent être vues comme des variations imprévisibles comprises entre $20^\circ C$ et $80^\circ C$. À cause de la position de cet amortisseur dans le système complet, il est complexe de connaître précisément le champ de température dans les patches viscoélastiques. De plus, il est généralement hétérogène même si l'on se cantonne à l'observation d'un seul patch. En résumé, la température nominale à laquelle est soumise le système dans la réalité peut varier et le profil de variation est une inconnue considérée comme un manque de connaissance. Dans un tel environnement thermique, il paraît intéressant d'être en mesure, lors de la phase de conception, de garantir un certain niveau d'amortissement de l'amortisseur et d'orienter le choix d'un matériau viscoélastique en prenant en compte à la fois son efficacité et sa sensibilité aux incertitudes. Ce type de question a déjà été abordé dans [Guedri 10, Capillon 16] en considérant une approche probabiliste. Cependant, un tel niveau d'information n'est pas toujours disponible et, dans ce manuscrit, le problème est formulé dans le cas où la répartition statistique des données sur le

champ de température est inconnue.

Dans ce cadre, une analyse de robustesse va être menée afin d'évaluer la sensibilité du matériau viscoélastique présent dans l'amortisseur en fonction de la méconnaissance sur le champ de température et de quantifier la performance du système en terme d'amortissement modal dans un contexte incertain.

4.2.1 FORMULATION DU PROBLÈME INFO-GAP LIÉ À L'AMORTISSEUR

Afin de modéliser l'incertitude sur le champ de température et de réaliser l'analyse de robustesse de l'amortisseur, l'approche Info-Gap est employée. Comme cela a déjà été mentionné, cette méthode est particulièrement adaptée lorsqu'il est nécessaire de prendre des décisions dans le cadre où les incertitudes sont non-probabilistes [Ben-Haim 06b, Ben-Haim 11, Kuczkowiak 14, Atamturktur 15]. À titre de rappel, cette approche repose sur l'utilisation de trois types de données :

- Un modèle du système $\mathcal{M}$ pour évaluer la réponse d'intérêt y pour des paramètres d'entrée donnés u : $y = \mathcal{M}(u)$.
- un critère de performance,
- un modèle d'incertitude Info-Gap décrivant comment les paramètres d'entrée u varient autour de leurs valeurs nominales.

Dans cette étude, la réponse d'intérêt est l'amortissement modal du 4^{ième} mode de l'amortisseur, et le modèle du système est le modèle éléments finis utilisé au chapitre précédent et dans la section précédente (Figure 4.1) qui permet de calculer cet amortissement en fonction de l'ensemble des paramètres d'entrée (dimensions, matériaux, ...). De manière générale, ce modèle peut s'écrire, dans le domaine fréquentiel, sous la forme :

$$[-\omega^2 M + K_{elastic} + K_{visco}^*] \hat{U} = 0 \quad (4.10)$$

L'équation 3.42 est utilisée pour extraire l'amortissement modal en se basant sur le calcul des fréquences propres complexes fournies par l'analyse modale complexe (CEA) pour les deux types de matériaux viscoélastiques : le silicone SI965 et le tBA/PEGDMA.

Le modèle d'incertitude Info-Gap utilisé pour représenter la méconnaissance sur le champ de température est exprimé sous la forme suivante :

$$U(h, \tilde{T}) = \left\{ T : |T - \tilde{T}| \leq h \right\}, h \geq 0 \quad (4.11)$$

où h représente l'horizon d'incertitude variant dans cette étude entre 0 et 30°C autour de la température nominale $\tilde{T}$ fixée à la température de transition vitreuse du tBA/PEGDMA (50°C). De cette manière, l'intervalle couvert par la température s'étend de 20°C à 80°C. À titre de rappel, ce type d'incertitude est schématisé Figure 4.3 (5).

Le critère de performance choisi permet de s'assurer que l'amortissement modal du mode considéré est toujours supérieur à une valeur critique ζ_c en présence d'une incertitude sur le champ de température. Ainsi, l'objectif de performance peut être écrit comme une inégalité :

$$\zeta_4(T) \geq \zeta_c \quad (4.12)$$

La robustesse pour une valeur critique donnée s'écrit :

$$\hat{h}(\zeta_c) = \max \left\{ h : \left[\min_{T \in U(h, \bar{T})} \zeta_4(T) \right] \geq \zeta_c \right\}, \zeta_c \geq 0 \quad (4.13)$$

Il est possible d'étudier l'évolution de celle-ci en faisant varier le seuil critique. Dans notre cas, ce seuil sera fixé à une valeur. La robustesse peut être déterminée à partir du tracé de la courbe de robustesse qui représente l'évolution de la métrique de performance en fonction de l'horizon d'incertitude.

4.2.2 L'ANALYSE DE ROBUSTESSE COMME OUTIL DE CONCEPTION

Maintenant que le problème Info-Gap est correctement formulé, il est possible d'évaluer les performances de l'amortisseur en terme d'amortissement pour un niveau d'incertitude croissant. La Figure 4.6 présente les résultats de l'analyse Info-Gap pour l'amortissement modal associé au 4^{ème} mode à la fois pour l'amortisseur avec le silicone SI965 (étoiles vertes) et le tBA/PEGDMA (étoiles bleues).

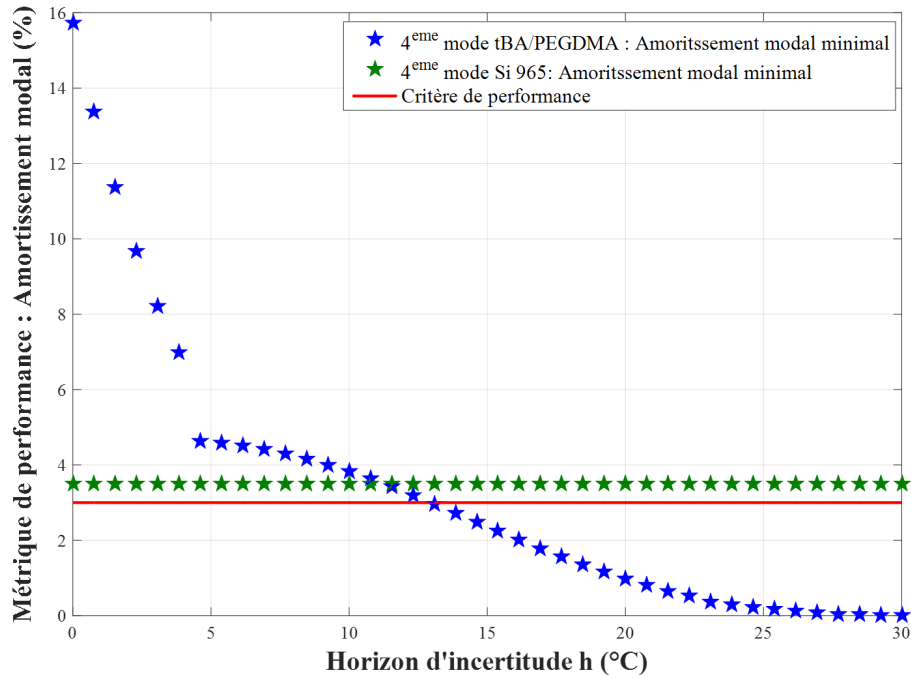


FIGURE 4.6 – Courbe de robustesse : Comparaison entre l'amortissement modal minimal atteint grâce au silicone SI965 (vert) et au tBA/PEGDMA (bleu) en fonction de l'horizon d'incertitude h

Ici, la robustesse représente le maximum de méconnaissance qui peut être toléré sur la valeur nominale de la température tout en s'assurant que le critère de performance est respecté. Les courbes obtenues pour les deux matériaux viscoélastiques se croisent ce qui signifie qu'un changement a lieu entre les solutions lorsque

l'horizon d'incertitude augmente. Dans cette illustration, la valeur du critère de performance sur l'amortissement modal a été arbitrairement choisie à 3% et correspond à la droite rouge sur la Figure 4.6. L'objectif est de s'assurer que cette performance est atteinte même dans un environnement incertain. Il apparaît que l'amortisseur avec les patchs en silicone possède un amortissement modal supérieur au critère de performance sur la totalité de l'horizon d'incertitude tandis que l'amortissement modal assuré par l'amortisseur avec les patchs en tBA/PEGDMA est bien plus élevé que la performance requise pour un horizon d'incertitude inférieur à $h = 13^{\circ}C$. En d'autres termes, pour le cas du tBA/PEGDMA, le modèle dynamique est supposé être robuste pour une variation de $\pm 13^{\circ}C$ autour d'une valeur nominale de $50^{\circ}C$ pour la température. En dehors de cet intervalle, la robustesse continue de décroître avec l'augmentation de l'horizon d'incertitude et le critère de performance n'est plus assuré.

Plusieurs conclusions peuvent être tirées de ces résultats. En considérant le cas du tBA/PEGDMA qui est un matériau viscoélastique qui présente une variation de son comportement mécanique importante en fonction du champ de température, l'efficacité d'un système l'utilisant peut être sérieusement affectée en présence de méconnaissance et, un critère de performance donné peut ne pas être satisfait pour un fort niveau d'incertitude. Ce phénomène n'apparaît pas dans le cas de l'amortisseur avec les patchs en silicone SI965, qui est un matériau plus stable en fonction de la température, et mène donc à un système globalement plus robuste. La contrepartie de cette robustesse réside dans un niveau de performance assez faible. En effet, l'amortissement modal obtenu avec le silicone est autour des 3.5% pour l'ensemble de l'horizon d'incertitude ce qui signifie que ce matériau peut rapidement devenir "inutilisable" si la performance requise augmente légèrement.

Pour finir, dans cet exemple, il serait intéressant d'améliorer la qualité des informations disponibles sur le champ de température afin de réduire la méconnaissance sur ce paramètre avec des campagnes de caractérisation par exemple. En effet, si l'incertitude sur la température était finalement de l'ordre de $\pm 10^{\circ}C$ autour de $50^{\circ}C$, cela aboutirait à un changement dans le choix du matériau viscoélastique et à l'obtention de bien meilleures capacités en terme d'amortissement.

4.3 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Ce chapitre a permis d'introduire certains aspects importants pour les travaux menés dans ce manuscrit comme les différents types d'incertitudes, les méthodes permettant de les modéliser et de les propager dans les modèles étudiés avec pour objectif, dans un premier temps, de quantifier la robustesse du système. Une méthode d'optimisation robuste d'un système industriel sera présentée dans le chapitre 6.

En s'appuyant sur les travaux de modélisation des comportements du tBA/PEGDMA et du silicone SI965 au chapitre 3, il a été possible de coupler la formulation thermomécanique du comportement de l'amortisseur et l'analyse de robustesse par l'approche Info-Gap afin de créer un outil d'aide à la conception robuste de solution

amortissante. Ici, la problématique était de choisir le meilleur matériau viscoélastique pour satisfaire une performance voulue en présence de méconnaissance sur le champ de température. Ces matériaux présentent, de manière générale, de bonnes propriétés en terme d'amortissement mais leur comportement mécanique peut significativement varier en fonction de la fréquence et de la température. Ainsi, dans un environnement incertain, les performances obtenues peuvent être très différentes d'une solution technique à l'autre. Une méthodologie a donc été mise en place afin d'étudier l'impact de la méconnaissance sur le champ de température sur les performances de l'amortisseur de *Thales LAS Fr* pour les deux matériaux viscoélastiques : le silicone SI965 et le tBA/PEGDMA. Finalement, la robustesse des deux solutions techniques a été quantifiée en utilisant la méthode Info-Gap qui se prête bien à ce type d'application où aucune information probabiliste n'est disponible. Les résultats montrent que le choix de la meilleure solution peut changer en fonction du critère de performance et du degré de méconnaissance. En résumé, l'approche proposée dans ce manuscrit offre un moyen de quantifier à la fois l'efficacité et la robustesse d'une solution technique et ainsi aider les utilisateurs à choisir correctement le matériau viscoélastique à employer pour aboutir à la meilleure performance en terme d'amortissement en fonction du niveau d'incertitude.

Cependant, il est à noter que la méthode exposée dans ce manuscrit est simplement constituée d'une entrée incertaine et d'une sortie d'intérêt. Par exemple, on ne se préoccupe pas des variations de fréquence de résonance et il serait judicieux, dans le cadre d'une application industrielle, de les prendre en compte en ajoutant une sortie d'intérêt à l'analyse de robustesse Info-Gap avec une performance associée à minima.

INVESTIGATION SUR LE COMPORTEMENT NON-LINÉAIRE D'UN AMORTISSEUR AVEC ÉLASTOMÈRES

Sommaire

5.1	Contexte de l'étude et stratégie d'analyse du comportement non-linéaire d'une structure	106
5.2	Caractérisation des phénomènes non-linéaires présents dans l'amortisseur	113
5.2.1	Nature et localisation des non-linéarités	113
5.2.2	Caractérisation du comportement non-linéaire des élastomères chargés	114
5.2.3	Impact des butées sur le comportement dynamique de l'amortisseur	122
5.3	Modélisation simplifiée et simulation du comportement dynamique non-linéaire de l'amortisseur	123
5.3.1	Modélisation simplifiée de l'amortisseur à lames	123
5.3.2	Identification des paramètres et simulation du comportement dynamique non-linéaire pour un modèle simplifié de l'amortisseur	126
5.4	Modélisation éléments finis et simulation du comportement dynamique non-linéaire de l'amortisseur à lames .	130
5.4.1	Formulation du problème éléments finis non-linéaire . . .	130
5.4.2	Réduction du modèle éléments finis de l'amortisseur et simulation temporelle	131
5.4.3	Évaluation de la contribution des non-linéarités sur le comportement mécanique de l'amortisseur	135
5.5	Conclusions et perspectives	138

PRÉAMBULE

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes concentrés sur la caractérisation et la modélisation du comportement viscoélastique ainsi que de son impact sur le comportement mécanique d'un amortisseur utilisé par *Thales LAS Fr* dans le cadre de la dynamique linéaire. L'influence de certains paramètres comme la fréquence et la température a alors été étudiée et un outil d'aide à la conception pour ce type de système en présence d'incertitudes a été proposé.

Cependant, dans la réalité, les fortes hypothèses permettant de se placer dans le cadre de la dynamique linéaire ne sont généralement pas respectées. En effet, il apparaît que l'amortisseur étudié possède un comportement non-linéaire se traduisant par un assouplissement global du système pour des amplitudes de sollicitation élevées. Ce chapitre vise à investiguer les phénomènes non-linéaires mis en jeu dans la dynamique de ce système et sur la manière de les modéliser afin de les prendre en compte dans la formulation éléments finis du problème. On s'intéressera particulièrement à la caractérisation du comportement dynamique du silicone SI965 en fonction de son taux de déformation, à la possibilité de prédire l'assouplissement du système et l'évolution de la fréquentielle dans ce contexte ainsi qu'à la possibilité d'évaluer la contribution des phénomènes non-linéaires en fonction du niveau de sollicitation.

5.1 CONTEXTE DE L'ÉTUDE ET STRATÉGIE D'ANALYSE DU COMPORTEMENT NON-LINÉAIRE D'UNE STRUCTURE

Une campagne d'essais sur l'amortisseur à lames menée chez *Thales LAS Fr* a confirmé que la fréquence propre d'intérêt du système et son amortissement modal variaient pour des niveaux d'excitations différents. La Figure 5.1 résume la situation. Les excitations utilisées pour la campagne d'essai sont de nature aléatoire et il est important de noter que pour le niveau d'excitation élevé, la fréquence de résonance du système a tendance à se décaler vers les basses fréquences. Ce phénomène peut résulter d'un assouplissement général de l'amortisseur en fonction de l'amplitude d'excitation et permet de supposer que le comportement de ce système est non-linéaire.

Pour des raisons de confidentialité, les tracés seront affichés en fonction d'un ratio de fréquence obtenu à l'aide d'une division par f_0 représentant la fréquence de résonance d'intérêt mesurée expérimentalement lorsque le niveau d'excitation est considéré faible.

La suspicion de non-linéarités dans l'amortisseur à lames justifie de mettre en œuvre une stratégie d'analyse spécifique, notamment présentée dans [Cooper 17] et telle que proposée sur la Figure 5.2. Cette partie introductive permet de détailler les

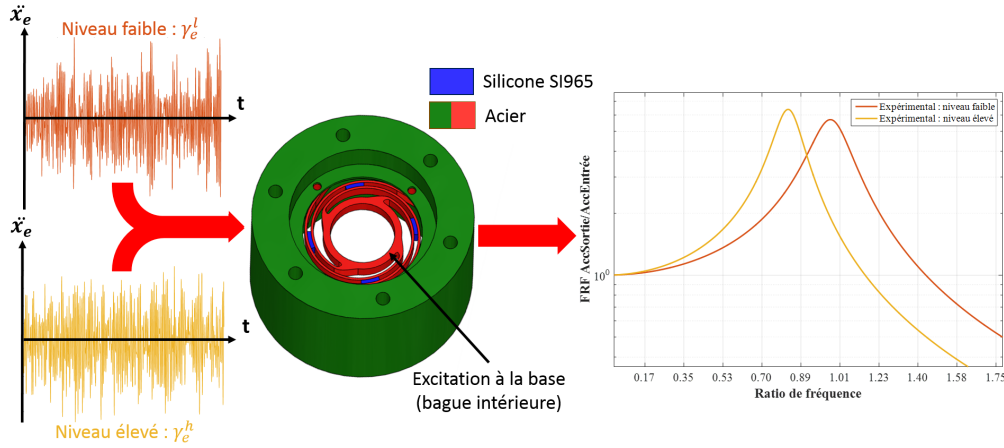


FIGURE 5.1 – Comportement mécanique non-linéaire constaté durant les campagnes d'essais chez *Thales LAS Fr*

étapes de l'analyse, et celles-ci seront appliquées spécifiquement au cas de l'amortisseur dans les sections suivantes.

Détection des non-linéarités

La première étape vise à confirmer la présence de comportement non-linéaires par la mise en œuvre de méthodes spécifiques de détection expérimentale. Il s'agit de confirmer l'observation d'effets non-linéaires pour évaluer la nécessité de construire un modèle adéquat.

Dans la littérature, ces méthodes de détection sont, en grande partie, présentées dans les articles de Worden et Tomlinson [Tomlinson 00] et de Kerschen [Kerschen 06]. Elles sont généralement réparties en fonction de leur domaine d'application :

- **Dans le domaine fréquentiel** : La présence de non-linéarités peut être confirmée lorsque, pour différents niveaux d'excitations, des distorsions/sauts sur les FRF et sur les diagrammes de Nyquist sont visibles. En effet, dans le cas d'un système mécanique linéaire, ces caractéristiques sont indépendantes des conditions initiales et restent invariantes. Il est aussi possible de tester la réciprocity des FRF en comparant la FRF_{AB} à la FRF_{BA} la première lettre en indice désignant le point d'excitation et la seconde le point de mesure. Si elles sont différentes cela peut être révélateur de la présence d'une non-linéarité. Cependant cette approche est complexe à mettre en place expérimentalement lorsque l'excitation est réalisée par un système autre que le marteau de choc et elle peut engendrer des erreurs comme cela est exposé dans [Wyckaert 94]. Pour finir, il est aussi possible d'utiliser la cohérence [Newland 12] afin de détecter la présence d'un comportement non-linéaire comme cela est suggéré dans [Allemang 87] et appliqué dans [Kerschen 06] dans le cas d'une non-linéarité de type géométrique. Le principal défaut de cet indicateur, qui est généralement disponible et utilisé lors des essais expérimentaux, repose sur son incapacité à distinguer l'effet des non-linéarités de celui du bruit.

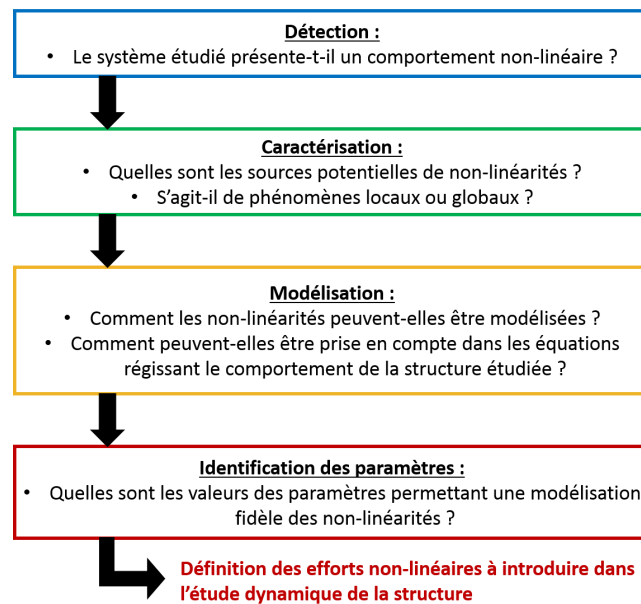


FIGURE 5.2 – Processus d’analyse des systèmes non-linéaires en dynamique des structures d’après [Cooper 17]

- **Dans le domaine temporel :** L’étude des signaux temporels issus de mesures accélérométriques (ou des degrés de liberté d’intérêt en numérique) permet généralement de constater la présence ou non de phénomènes non-linéaires. En effet, si des distorsions (fréquences multiples, modulations, ...) apparaissent alors que l’excitation est purement sinusoïdale, cela peut être révélateur d’un comportement non-linéaire du système étudié. Il est à noter que ces distorsions sont généralement plus visibles sur les signaux d’accélération que de vitesse et de déplacement, surtout lorsque les non-linéarités entraînent l’apparition d’harmoniques dans la réponse de la structure.
- **Dans le domaine temps-fréquence :** Pour finir, il est possible d’avoir recours à des méthodes permettant d’exploiter à la fois le domaine temporel et le domaine fréquentiel afin de détecter la présence de non-linéarités. Une représentation dans le plan temps-fréquence de la réponse d’un système mécanique, aussi appelée spectrogramme, constitue un moyen pratique d’identifier la présence d’harmoniques dans le signal. Dans le cas linéaire, sous excitation harmonique pure, la réponse correspond à une unique droite de fréquence constante à tout instant. L’activation de non-linéarités conduit à l’émergence de plusieurs raies fréquentielles. Afin de pouvoir correctement exploiter les informations fournies par un spectrogramme, il est généralement nécessaire d’effectuer un post-traitement des signaux expérimentaux. Deux approches sont couramment utilisées dans le cadre de la dynamique des structures. D’une part l’utilisation de la transformée de Hilbert [Simon 84] dont un exemple est proposé dans [Renaud 12] lors de l’étude du phénomène de crissement de frein et d’autre part, la transformée en ondelettes [Staszewski 98] qui est utilisée, entre

autre, dans [Dossogne 15] afin d'observer la nature des transferts vibratoires entre une aile de F-16 et un missile. Dans les deux cas, l'objectif est de séparer les différentes composantes formant le signal expérimental afin de faciliter l'explication des différents phénomènes visibles sur le spectrogramme.

Lorsque les réponses dynamiques à analyser résultent d'une excitation dite appropriée, le post-traitement à effectuer avant d'employer les méthodes citées précédemment est limité voir inutile [Peyret 16b]. Cependant, si l'excitation est réalisée par un sinus balayé ou un "*stepped-sine*", il devient plus dangereux d'analyser directement les réponses sans un post-traitement adapté sauf pour l'approche utilisant la transformée en ondelettes. De plus, cette phase préliminaire de filtrage qui doit permettre de séparer les différentes contributions constituant le signal de sortie représente une réelle question lors de l'étude d'un système non-linéaire. En effet, en dynamique non-linéaire, le principe de superposition n'est plus vérifié ce qui limite l'utilisation de filtres linéaires "simples" comme les filtres Butterworth. Il est alors plus judicieux de se tourner vers des méthodes comme l'*Empirical Mode Decomposition* qui, couplée à la transformée de Hilbert forment la transformée de Hilbert-Huang [Huang 98], ou le filtrage de Kalman [Kalman 60, Dion 13b]. Ces deux approches seront abordées plus en détails dans la section 5.2.2.

Le principal défaut des différentes méthodes de détection citées ci-dessus est qu'elles sont particulièrement performantes, moyennant le post-traitement adéquat, pour des excitations du type "*stepped-sine*" et sinus balayé. Cependant, les campagnes d'essais ayant recours à ce type d'excitation sont longues et donc rarement effectuées dans le milieu industriel. De plus, comme cela est illustré Figure 5.1, les FRF obtenues lors d'essais sous excitation aléatoire sont issues d'un ensemble de moyenne de transformée de Fourier des signaux temporels ce qui leur donnent un aspect de FRF linéaire (pic symétrique) et nuit à la détection de comportement non-linéaire a priori. Il existe peu de travaux récents sur la détection de phénomènes non-linéaires lorsque les structures sont soumises à des excitations aléatoires. Il est néanmoins possible de citer les travaux de Hot [Hot 12] qui a développé deux indicateurs basés sur la comparaison des sous-espaces extraits par une Analyse en Composante Principale à partir des réponses temporelles pour différents niveaux d'excitation afin de détecter la présence de non-linéarité dans le cas de panneaux modulaires d'un satellite.

Caractérisation des non-linéarités

Une fois qu'un comportement non-linéaire a été détecté, il convient ensuite de le caractériser. Il s'agit à la fois de préciser le type de non-linéarité en présence, et de localiser les sources afin de définir si le phénomène non-linéaire est global ou local. Les interfaces ou les liaisons, par exemple, sont des lieux privilégiés à l'apparition de phénomènes non-linéaires locaux. De manière générale, il est possible de classer les phénomènes physiques à l'origine du comportement non-linéaire des systèmes en quatre grandes familles :

- ***Les non-linéarités géométriques*** : Elles apparaissent lorsque les déplacements deviennent grands par rapport au cadre de la mécanique vibratoire li-

néaire et/ou lorsque les déformations sont importantes. L'exemple le plus classique est celui du pendule simple présenté dans [Nayfeh 08] où lorsque les battements du pendule deviennent importants, il n'est plus possible d'approximer la composante sinusoïdale simplement par son développement limité au premier ordre. Plus récemment, ce type de non-linéarité a été étudié pour des structures industrielles comme des ailes d'avions [Dowell 03], des systèmes poulie-courroie [Michon 08] ou encore des rotors [Shad 11].

- **Les lois de comportement matériau non-linéaire** : Pour certains type de matériaux, comme les élastomères, les matériaux composites ou encore les alliages à mémoire de forme [Warminski 11], les lois de comportement dépendent directement du déplacement et de la vitesse et ne peuvent plus être approximées par des lois linéaires dans certains cas. Pour les élastomères chargés comme le silicone SI965, il est important de noter la présence de deux phénomènes pouvant se manifester même à faible taux de déformation : l'effet Mullins [Mullins 48] et l'effet Payne (ou Fletcher-Gent) [Fletcher 57, Payne 60]. L'effet Mullins représente un assouplissement des contraintes et est observable lors des premiers cycles de charges-décharges appliqués à un élastomères. Avant que ce "rodage" soit effectué, la raideur apparente de l'élastomère est plus élevée. Pour plus de détails, il est possible de se référer aux travaux suivants [Saintier 01, Cantournet 03, Boukamel 06]. L'effet Payne quant à lui, représente une diminution rapide du module élastique en fonction du taux de déformation de l'élastomère et persiste malgré les cycles. Il est donc primordial d'y prêter une attention particulière en mécanique vibratoire. L'évolution de l'amortissement paraît plus complexe mais de manière générale, il semble croître avec l'augmentation de l'amplitude avant de diminuer. De manière grossière, il est possible de voir l'action de l'effet Payne sur le comportement dynamique de l'élastomère comme le passage d'une transition vitreuse. Il existe de nombreux travaux sur l'étude de ce phénomène [Austrell 97, Lion 04, Delattre 13, Jrad 13] et sur son évolution en fonction du taux de charge [Harris 86, Fröhlich 05, Gacem 07].
- **Les phénomènes de contact et de frottement** : Ces non-linéarités, plus locales, se situent généralement au niveau des interfaces du système. Elles ont des origines variées : contacts non-permanents, écrasements, frottements, ... et possèdent chacune une caractéristique particulière : raideur bilinéaire, loi puissance, échelon, etc. Il existe de nombreux travaux sur la prise en compte du frottement aussi bien au niveau de la caractérisation expérimentale [Michon 05, Dion 13a], que sur l'identification [Festjens 12a] et sur la modélisation [Al Majid 02, Peyret 16a]. Les travaux expérimentaux de Noël [Noël 14] et numériques de Renson [Renson 15] présentent une étude globale du comportement dynamique d'un satellite comportant plusieurs types de non-linéarités. Un point particulier de cette étude montre la présence de liaisons avec des butées conduisant à des phénomènes de contacts non-permanents qui se traduisent notamment, par l'apparition d'harmoniques sur les spectrogrammes et des phénomènes de sauts sur les signaux temporels pour un niveau de sollicitation élevé.
- **Les couplages multi-physiques** : Ces phénomènes sortent du contexte de

la thèse mais il est important de signaler que le couplage entre plusieurs physiques comme par exemple, les couplages fluide-structure et électro-mécanique, peuvent être à l'origine du comportement non-linéaire d'un système.

Il est à noter que les non-linéarités peuvent porter sur la raideur de la structure, son amortissement, voire les deux en même temps.

De plus, parmi l'ensemble des méthodes de caractérisation disponible dans la littérature [Tomlinson 00, Kerschen 06], la méthode *Restoring Force Surface* (RFS), introduite par Masri et Caughey [Masri 79], a prouvé à de nombreuses reprises sa capacité à caractériser l'évolution de la raideur et de l'amortissement dans les structures non-linéaires grâce à sa formulation. En effet, en représentant cette *Restoring Force* en fonction du déplacement, de la vitesse et de l'accélération, il est possible de directement visualiser le type de non-linéarité associé à la structure où à une de ses sous-parties. Cette approche sera présentée plus en détails dans la section 5.4.3 puisqu'elle sera employée directement sur l'exemple de l'amortisseur à lames.

Modélisation des non-linéarités

Une fois la source de la ou des non-linéarités définies, il s'agit d'opter pour une modélisation permettant de les prendre en compte dans l'étude dynamique de la structure.

Les non-linéarités de raideur $K(x(t))$ peuvent être représentées par un ensemble de modèles en fonction de leur nature. Quelques exemples sont listés ci-dessous :

- Raideur de contact de Hertz où, dans les conditions d'application de la théorie de Hertz :

$$K(x(t)) = kx^{3/2}(t) \quad (5.1)$$

- Raideurs polynomiales dont l'exemple le plus courant est l'oscillateur de Duffing :

$$K(x(t)) = kx(t) + k_3x^3(t) \quad (5.2)$$

- Raideurs multilinéaires qui peuvent être rencontrées lorsque qu'il y a des jeux fonctionnels. Dans ce cas, en fonction d'une valeur donnée en déplacement x_{gap} , la raideur peut s'écrire :

$$K(x(t)) = k_1x(t) \text{ pour } x \leq x_{gap} \quad (5.3)$$

$$K(x(t)) = (k_1 + k_2)x(t) \text{ pour } x \geq x_{gap} \quad (5.4)$$

Il en est de même avec les non-linéarités en amortissement $C(\dot{x}(t))$. Il existe des modèles du type polynomial comme dans le cas du frottement fluide à grande vitesse qui s'exprime sous la forme :

$$C(\dot{x}(t)) = c_1\dot{x}(t) + c_2\dot{x}(t)|\dot{x}(t)| \quad (5.5)$$

Dans le cas du frottement de Coulomb, l'amortissement peut être approché par un modèle multilinéaire :

$$C(\dot{x}(t)) = -\mu N \text{sign}(\dot{x}(t)) \quad (5.6)$$

où μ désigne le coefficient de frottement et N l'effort normal s'exerçant sur la structure.

Identification des paramètres de modélisation

La dernière étape, une fois que la phase de modélisation a été menée à bien, consiste à identifier les paramètres des modèles qui permettront de décrire le comportement non-linéaire du système. Il existe à l'heure actuelle de nombreuses techniques permettant de traiter différents types de données (temporelles, fréquentielles, modales) et de non-linéarités (géométrique, comportement, frottement, contact, etc.) afin d'identifier les paramètres d'un modèle non-linéaire. La majeure partie des développements concernant cet aspect de la mécanique non-linéaire sont disponibles dans les articles de Worden et Tomlinson [Tomlinson 00], de Kerschen [Kerschen 06] et de Noël [Noël 17]. À titre d'exemple, il est possible de citer la méthode *Nonlinear Auto-Regressive Moving Average with eXogeneous inputs* (NARMAX) [Leontaritis 85] et la méthode RFS qui exploitent directement des données temporelles ou encore la méthode *Conditioned Reverse Path* (CRP) [Richards 98] exploitant des données fréquentielles, les transformées en ondelettes [Joseph 05] ou de Hilbert [Feldman 07] permettant une exploitation du plan temps-fréquence et pour finir, des méthodes d'identification modales comme la *NonLinear Resonant Decay Method* (NLRDM) [Platten 09] .

De manière générale, dans les différentes méthodes d'identification des paramètres mises en place, l'estimation est effectuée soit par une minimisation des écarts au sens des moindres carrés, soit par la résolution d'un problème d'optimisation non-linéaire.

À titre d'information, cette étape d'estimation des paramètres peut être effectuée sans nécessairement passer par les phases de détection et de caractérisation en postulant un modèle a priori et en le corrigeant au fur et à mesure. Cependant, ce raccourci n'est pas nécessairement judicieux puisque l'interprétation physique des phénomènes devient plus complexe. Le nombre d'itérations avant d'aboutir à une estimation valable peut être élevé et le modèle identifié peut s'avérer être une solution non optimale (minimum local) de l'espace des solutions possibles.

Face aux suspicions de non-linéarités dans le cas de l'amortisseur à lames, la démarche d'analyse décrite précédemment a été mise en œuvre. L'enjeu est d'expliquer le phénomène d'assouplissement observé (Figure 5.1) et de permettre à *Thales LAS Fr* de le prendre en compte dans les prochains développements de solutions anti-vibratoires. Ce chapitre vise donc à caractériser, modéliser et identifier les non-linéarités présentes dans le cas de l'amortisseur avant d'effectuer des simulations de son comportement dynamique en intégrant les non-linéarités identifiées pour valider les hypothèses qui auront été formulées.

La phase de détection n'a pu être menée complètement car sa réalisation nécessitait de nouvelles campagnes expérimentales coûteuses et difficiles à imposer dans le planning contraint du pôle expérimental de l'industriel. Des recommandations pour

les futures campagnes ont donc été formulées, et le travail ici présenté postulera la détection de non-linéarités sur la base unique du décalage fréquentiel observé.

Dans un premier temps, modélisation simple de l'amortisseur à la fréquence de vibration d'intérêt est proposée afin d'effectuer une simulation du comportement dynamique sous excitation aléatoire. L'objectif est de valider l'impact des non-linéarités prises en compte. Ensuite une formulation plus physique du problème non-linéaire, découlant directement du modèle éléments finis sera proposée et la méthode RFS sera mise en œuvre afin de visualiser la contribution de chaque non-linéarité en fonction du niveau d'excitation. Malheureusement, cette étape restera numérique dans ce manuscrit puisqu'aucun résultats d'essais n'a été conservés par *Thales LAS Fr* pour confronter les résultats expérimentaux et numériques.

5.2 CARACTÉRISATION DES PHÉNOMÈNES NON-LINÉAIRES PRÉSENTS DANS L'AMORTISSEUR

5.2.1 NATURE ET LOCALISATION DES NON-LINÉARITÉS

Dans le cas de l'amortisseur à lames plusieurs origines physiques de non-linéarités ont été envisagées : une origine géométrique liée au profil en spirale de la structure de l'amortisseur et aux grands déplacements, une origine matériau liée à la présence d'élastomères chargés, et une origine de type contact liée à la présence de butées.

Le premier type de non-linéarité à avoir été testé est la non-linéarité géométrique engendrée par de grands déplacements et plus particulièrement par de grandes rotations. En effet, à cause de la géométrie particulière en forme de spirale de la partie métallique de l'amortisseur, d'importantes rotations peuvent être constatées malgré les relativement faibles niveaux de sollicitation. Cependant, dans le cadre de fonctionnement nominal de l'amortisseur défini par *Thales LAS Fr* en terme d'amplitude et de direction des sollicitations, cette hypothèse a rapidement été écartée car l'assouplissement engendré par ce type de non-linéarité était bien trop faible. Il ne parvenait pas à expliquer un glissement supérieur à 1% de la fréquence de résonance du mode d'intérêt vers les basses fréquences.

Le deuxième cas de non-linéarité envisagé est une non-linéarité matérielle liée à la présence de patches en silicone SI965 distribués à divers endroits de la structure métallique. Ce type de silicone est chargé avec des particules de noir de carbone afin d'améliorer ses performances mécaniques en terme de rigidité. Cependant, son comportement mécanique dépend de l'amplitude d'excitation et plus particulièrement du taux de déformation de l'élastomère et ce constat est vérifié dès les plus petits taux. Il s'agit de l'effet Payne précédemment cité [Payne 60, Fletcher 57] et il s'avère que cette non-linéarité peut expliquer à elle seule la majeure partie de l'assouplissement constaté lors des essais sur l'amortisseur à lames. Une caractérisation détaillée de cet

effet est proposée en section 5.2.2.

Pour finir, l'amortisseur à lames possède des butées mécaniques assurées par des plots en silicone SI965 positionnés à des endroits stratégiques et dont la fonction principale est d'assurer la tenue des appareils optiques suspendus aux chocs lors des phases de catapultage et d'appontage. La connaissance de cette information nous a, dans un premier temps, poussé à mettre ce phénomène de côté puisque le cadre de la thèse portait uniquement sur le fonctionnement des systèmes soumis à des vibrations faibles niveaux correspondant au domaine de pléines performance de l'équipement. Cependant, lors d'une excitation importante (pour des niveaux de vibrations élevés, dit de "robustesse" et correspondant à des performances dégradées), la baisse de rigidité apparente de l'amortisseur à lames imputable à l'effet Payne était trop importante par rapport à ce qui était observé sur les résultats expérimentaux et le niveau d'amortissement de la structure semblait diminuer de manière non négligeable. Ces deux observations pouvant être révélatrices d'un raidissement, l'étude de la contribution des butées mécaniques est apparu nécessaire. La section 5.2.3 propose une vérification qualitative de l'activation ou non des butées en phase "robustesse" et, faute de temps, une approximation rapide de leur impact sur le comportement dynamique de l'amortisseur.

5.2.2 CARACTÉRISATION DU COMPORTEMENT NON-LINÉAIRE DES ÉLASTOMÈRES CHARGÉS

L'objectif de cette partie est de confirmer la présence de l'effet Payne et de le caractériser sur une plage de déformation importante. Il est à noter que les simulations menées sur l'amortisseur à lames dans le cadre de la dynamique linéaire prédisent un taux de déformation des patches en silicone allant jusqu'à 13% pour les niveaux vibratoires les plus sévères (niveau de "robustesse").

La nécessité de caractériser le comportement dynamique du silicone SI965 sur cette plage de taux de déformation a conduit à mettre en place un moyen d'essai spécifique. En effet, les essais sur un viscoanalyseur classique de type *Metravib* sont adaptés pour le balayage en fréquence et en température mais ne permettent pas d'atteindre des taux de déformations importants sous sollicitation dynamique.

Pour y parvenir, un banc d'essai et une méthode de caractérisation dérivés de la méthode de Oberst [Oberst 52] ont été développés (Figure 5.3). L'éprouvette est composée de deux plaques en acier inoxydable de dimensions $206 \times 30 \times 1 \text{ mm}^3$, d'une entretoise en acier inoxydable de dimensions $60 \times 30 \times 2.5 \text{ mm}^3$ collée entre les deux plaques à l'extrémité encastree et d'un patch en silicone SI965 de dimensions $50 \times 30 \times 2.5 \text{ mm}^3$ collé à l'autre extrémité de la poutre sandwich. Le silicone est présent uniquement sur une portion de l'éprouvette afin d'obtenir un taux de déformation en cisaillement uniforme. De plus la poutre de Oberst est dimensionnée pour atteindre un taux de déformation du patch en silicone de l'ordre de 12%, ce qui correspond à une flèche de 10 mm en bout de poutre, tout en ayant une pre-

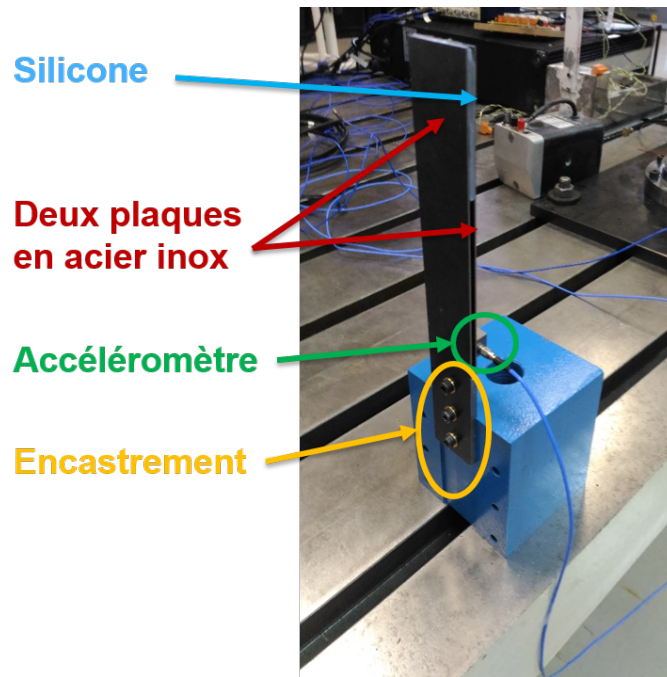


FIGURE 5.3 – Montage expérimental pour la caractérisation de l'effet Payne : Poutre de Oberst modifiée [Jaboviste 19]

mière fréquence de résonance en condition encastrée-libre proche de la fréquence de résonance d'intérêt de l'amortisseur à lames. Pour une flèche plus grande, les plaques seraient déformées plastiquement ce qui nuirait au bon déroulement des essais ainsi qu'à leur post-traitement.

L'essai consiste donc à appliquer une flèche de 10 mm en bout de poutre en condition encastrée-libre par l'intermédiaire d'un fil de pêche, d'un jeu de masses étalons et d'une poulie. Le fil est ensuite sectionné et un accéléromètre, placé lui aussi au bout de la poutre, permet de relever l'accélération en fonction du temps. Les perturbations dues à la présence de l'accéléromètre à savoir, son câble et sa masse, sont à prendre en compte lors de la phase de dimensionnement pour ce type de montage car leur impact sur le comportement dynamique est non négligeable. Dans cette configuration, la force d'excitation, correspondant au lâcher, est, théoriquement, appropriée au premier mode de vibration de la poutre. La fréquence d'oscillation libre de cette dernière est donc confondue avec sa première fréquence propre et l'amplitude de ce mouvement décroît lentement jusqu'à ce que le système atteigne son état de repos.

La Figure 5.4 (a) présente un signal accélérométrique à l'état brut tel qu'obtenu lors d'un essai sur la poutre de Oberst. Les Figures 5.4 (b) à (e) présentent les post-traitements réalisés pour exploiter le signal mesuré.

- **Figure 5.4 (b)** Le signal brut d'accélération est d'abord intégré deux fois par la méthode des trapèzes afin d'obtenir le signal en déplacement. L'incrément de temps Δt utilisé est égal à $1/F_s$ où F_s désigne la fréquence d'échantillonnage qui est, dans cette application de 51200 Hz. Cependant, les mesures expérimentales

sont, généralement, entachées de bruit qui se retrouve lui aussi intégré dans le cas présent. Il faut alors retirer cette contribution d'ordre 2. Cette opération est communément effectuée avant l'intégration et se nomme : suppression de la composante continue. L'hypothèse sous-jacente en dynamique des structures est que le système oscille autour de sa position d'équilibre.

- **Figure 5.4 (c)** Le signal de déplacement ne comporte pas uniquement la contribution du premier mode de vibration. En effet, viennent le perturber : les réponses des autres modes de vibration et les moyens de mesures. Il s'agit d'un signal multi-composantes. Afin de séparer l'ensemble des contributions le formant, la méthode *Empirical Mode Decomposition* (EMD) [Huang 98] est utilisée. Cette approche est une méthode de décomposition d'un signal représentant un ensemble de composantes en somme de plusieurs éléments simples appelés : *Intrinsic Mode Functions* (IMF) ou modes intrinsèques. L'extraction de ces modes repose sur une interpolation par spline cubique des enveloppes supérieure et inférieure du signal en s'appuyant sur ses extremums. La moyenne des deux enveloppes m_1 est retranchée au signal initial $x(t)$ est donne la première composante $h_1 = x(t) - m_1$. Cette composante doit satisfaire deux propriétés importantes :

- Le nombre d'extremums et de passages par 0 doivent être égaux ou différer de 1 au maximum.
- En tout point, la valeur moyenne des enveloppes définies par les maximums et les minimums locaux doit être de 0.

Si ce n'est pas le cas, la même démarche est appliquée à la composante h_1 au lieu de $x(t)$ jusqu'à obtenir une composante satisfaisant ces deux propriétés. Il s'agit d'une étape cruciale qui permet de s'assurer que chaque IMF est un signal monochromatique pour lequel l'amplitude et la fréquence peuvent quand même être modulées.

Il est à noter que l'EMD repose sur un processus itératif dont le critère d'arrêt est généralement formulé en terme d'énergie. De plus, il existe un lien direct entre ces modes intrinsèques extraits d'une mesure de sortie $x(t)$ et les modes de vibration de la structure dans le cas d'une réponse libre.

- **Figure 5.4 (d)** Le mode intrinsèque correspondant au premier mode de vibration de la poutre de Oberst est isolé et l'objectif est d'identifier l'évolution de son amplitude, de sa fréquence instantanée et de son amortissement au cours du temps. De manière générale, la transformée de Hilbert est utilisée mais elle présente des effets de bords importants. Un moyen de contourner ce problème est de prolonger le signal étudié. Cependant, dans le cadre de ce manuscrit, une autre méthode est mise en œuvre. Elle repose en partie sur l'idée employée dans le filtrage de Kalman et présentée dans la thèse de Festjens [Festjens 14]. En postulant que l'EMD permet bien un découplage modal, la réponse faiblement non-linéaire du premier mode de vibration de la poutre de Oberst peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\ddot{q} + 2\xi(q_m)\omega_0(q_m)\dot{q} + \omega_0^2(q_m)q = 0 \quad (5.7)$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre où ξ et ω_0 dépendent directement de l'amplitude q_m de la réponse temporelle q . Afin d'alléger les notations, la dépendance de ces paramètres à q_m sera implicite. La solution à cette équation s'écrit sous la forme :

$$q(t, \xi, \omega_0) = q_m e^{-\xi \omega_0 t} \cos(\omega_r t + \phi) \quad (5.8)$$

où, comme indiqué sur la Figure 5.4 (d) :

$$q(t, \xi, \omega_0) = e^{-\xi \omega_0 t} (A \cos(\omega_r t) + B \sin(\omega_r t)) \quad (5.9)$$

avec $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ la pulsation réduite. En partant de ce constat, le signal réel est approximé par la solution analytique sur une fenêtre représentant une période. L'identification des paramètres ξ et ω_0 sur cette période se fait en minimisant, au sens des moindres carrés, la fonction objectif suivante :

$$F_{objectif} = \min_{\omega_0, \xi} \sum_{i=1}^n (q(t_i, \xi, \omega_0) - q_{exp}(t_i))^2 \quad (5.10)$$

où q désigne la forme analytique du signal en déplacement, q_{exp} le déplacement expérimental extrait par EMD et en notant t_i ($1 \leq i \leq n$) les n pas de temps compris dans la période $[t; t + T]$ considérée. Ensuite, la fenêtre glisse d'un incrément de temps : $t \rightarrow t + dt$ et le processus d'identification est de nouveau effectué jusqu'à ce que l'ensemble du signal soit balayé.

- **Figure 5.4 (e) et (f)** Cette approche d'identification par une méthode des moindres carrés glissant permet de traquer les évolutions respectives de l'amortissement ξ et de la pulsation propre ω_0 en fonction du temps et de reconstruire le signal expérimental ainsi que son enveloppe. Il s'agit plus d'une fréquence instantanée "moyenne" que d'une fréquence instantanée au sens de celle fournie par la transformée de Hilbert. Sachant qu'il s'agit d'un essai de lâcher sur une structure amortie, l'amplitude diminue avec le temps alors que la fréquence instantanée augmente, passant de $0.807f_0$ Hz à $1.015f_0$ Hz, et que l'amortissement semble passer par un maximum vers 7% avant de décroître pour tendre vers 2%.

Les résultats confirment la présence d'un assouplissement du comportement mécanique de la poutre de Oberst en fonction de l'amplitude du déplacement. Un des phénomènes expliquant le comportement non-linéaire de l'amortisseur à lames est donc bien l'effet Payne se produisant au niveau du silicone SI965 dont le comportement dynamique dépend du taux de déformation. Il reste à le caractériser de manière plus explicite.

Afin d'extraire directement la dépendance du module d'élasticité du silicone SI965 au taux de déformation, le post-traitement mis en place pour suivre l'évolution de la fréquence instantanée et de l'amortissement lors des essais sur la poutre de Oberst est couplé à une étude paramétrique menée sur un modèle numérique du montage

INVESTIGATION SUR LE COMPORTEMENT NON-LINÉAIRE D'UN AMORTISSEUR AVEC ÉLASTOMÈRES

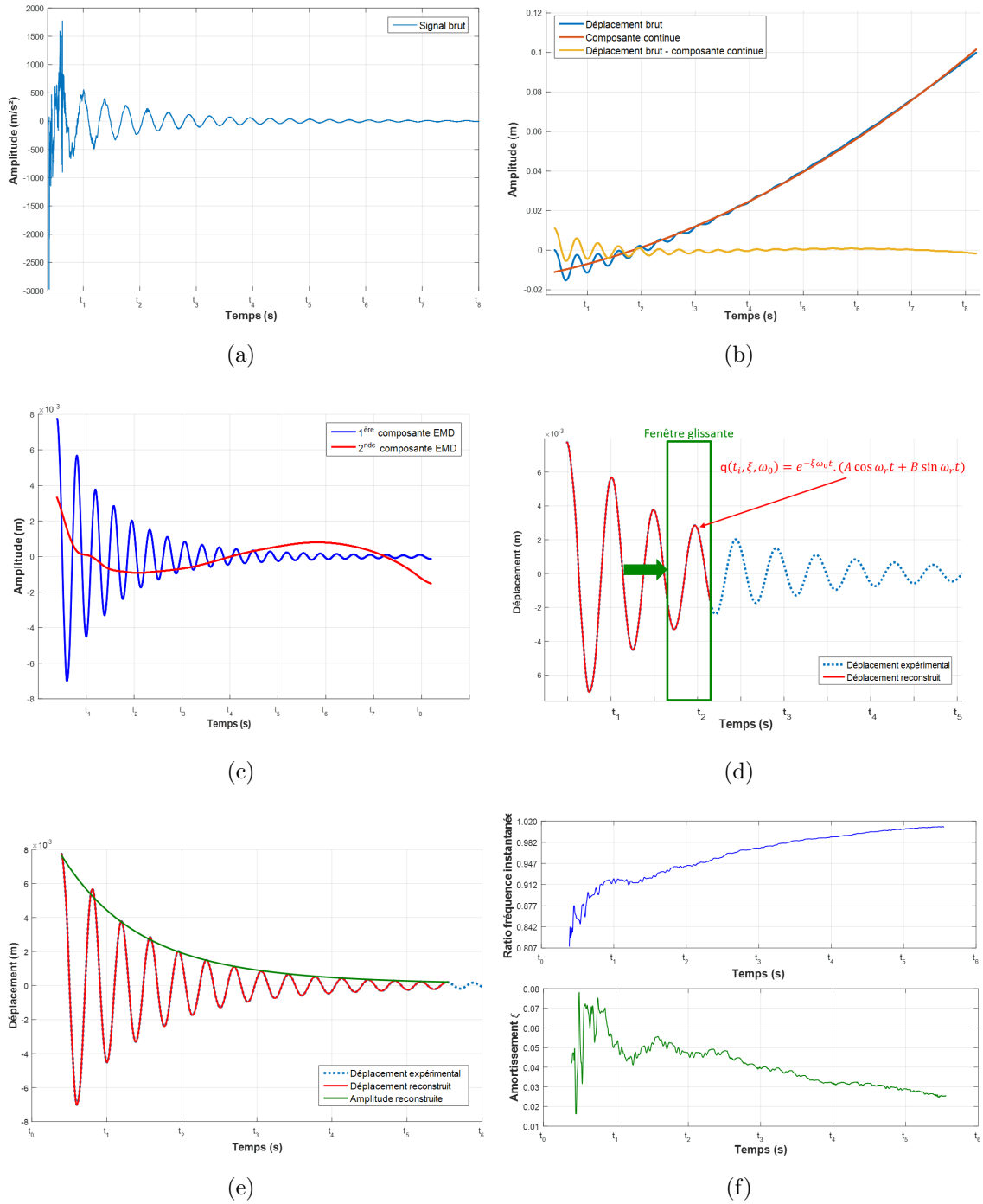


FIGURE 5.4 – Post-traitement des essais sur la poutre de Oberst modifiée : Accélération brute (a), Déplacement et composante continue (b), EMD sur le déplacement (c), Identification de la fréquence instantanée et de l'amortissement par une méthode des moindres carrés glissants (d), signal de déplacement expérimental reconstruit (e) et fréquence instantanée et amortissement en fonction du temps (f)

expérimental comme illustré sur le schéma de la Figure 5.5.

Avant de continuer, il est important de préciser que, principalement pour des raisons de temps, l'évolution de l'amortissement n'a pas été post-traitée dans ce manuscrit. Il sera donc représenté par un amortissement nominal déterminé lors des essais sur viscoanalyseur présentés dans le chapitre 2 soit un facteur de perte $\eta = 11\%$ et du même ordre de grandeur que celui déterminé lors des essais sur la poutre de Oberst.

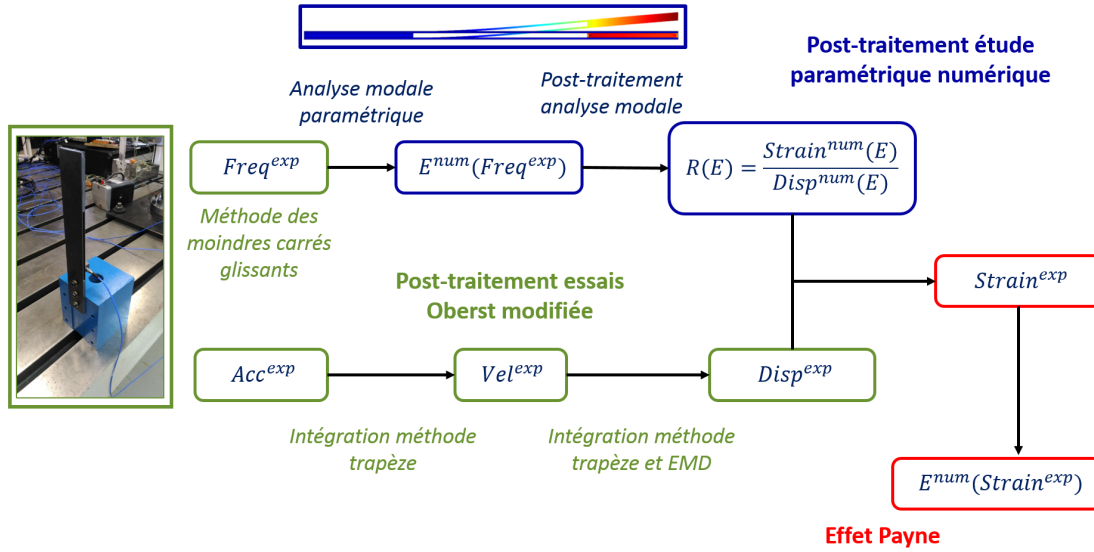


FIGURE 5.5 – Organigramme du post-traitement des données pour extraire l'effet Payne

Afin d'estimer la diminution du module d'élasticité du silicone SI965 en fonction du taux de déformation, une analyse modale paramétrique est menée en faisant varier ce module de manière à couvrir l'ensemble de la plage des fréquences instantanées observées expérimentalement. Pour rappel, ces fréquences instantanées correspondent bien à l'évolution de la fréquence propre du premier mode de vibration de la poutre de Oberst. À partir de là, il est possible de construire un ratio taux de déformation sur déplacement dépendant du module d'élasticité. La multiplication de ce ratio par le déplacement relevé expérimentalement permet alors d'estimer le taux de déformation vu par l'échantillon de silicone SI965 durant les essais de lâcher, et ainsi d'aboutir à l'expression de son module d'élasticité en fonction de ce paramètre.

La Figure 5.6 a l'allure connue de l'évolution de raideur des élastomères utilisés dans l'amortisseur à lames et permet de visualiser et de quantifier la décroissance du module due à l'effet Payne. En effet, le module d'élasticité chute de 19 MPa pour un taux de déformation de 0.2% à 6.8 MPa pour un taux de déformation de 9.5% ce qui représente un assouplissement important de l'élastomère et explique une partie importante du comportement non-linéaire de l'amortisseur à lames.

Afin de vérifier par un autre moyen l'existence de l'effet Payne et valider les conclusions énoncées, des essais ont également été effectués sur un viscoanalyseur

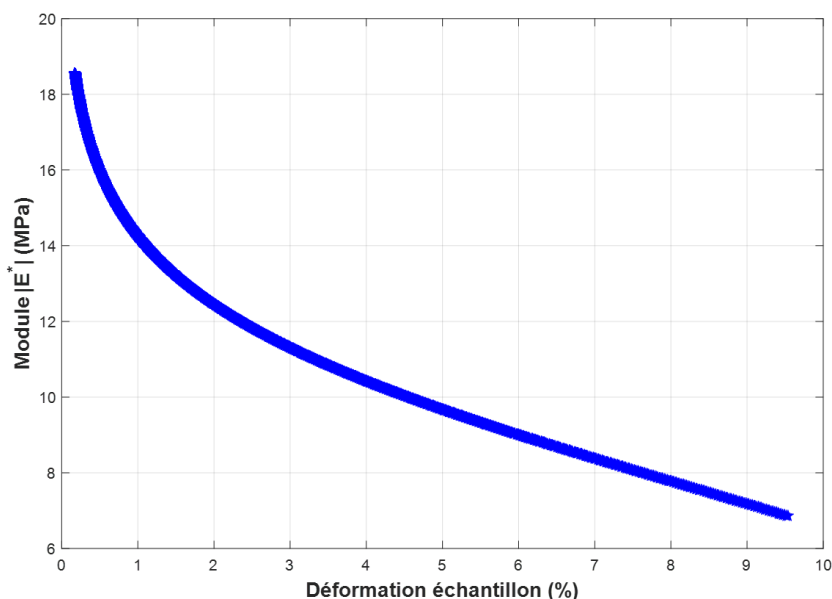


FIGURE 5.6 – Évolution du module élastique du silicone SI965 en fonction du taux de déformation : Effet Payne

Metravib +300 DMA au laboratoire *FEMTO-ST*.

Un porte-échantillon permettant d'effectuer une sollicitation de type cisaillement pur a été dimensionné et réalisé durant la thèse (Figure 5.7). Il est fonctionnel et l'assemblage est symétrique mais il n'est pas optimisé en terme de masse mobile ce qui restreint la plage de taux de déformation accessible, par rapport à celle couverte par les essais sur la poutre de Oberst, puisque les limites machines sont rapidement atteintes. Lors des essais, deux patches circulaires en silicone SI965 de diamètre 20 *mm* et d'épaisseur 2 *mm* sont collés sur un jeu de trois cylindres eux-mêmes pris dans des mors. Les essais préliminaires ayant montrés que les écarts de rigidité observés pour des fréquences d'excitation de 40, 50 et 60 *Hz* étaient négligeables ($< 3\%$), l'excitation permettant d'obtenir les résultats présentés Figure 5.8 (disque bleu) est un sinus d'amplitude variable et de fréquence 50 *Hz* asservi en force. De plus les essais sont réalisés à température ambiante (environ 25°C). Il est important de noter que le pilotage se fait en force, que le chargement statique en cisaillement est nul et que l'amplitude dynamique varie entre 1 et 65 *N*. Le matériau est considéré homogène et isotrope. Le passage du module de cisaillement au module d'élasticité est assuré par les relations d'élasticité classiques.

La Figure 5.8 présente l'évolution du module d'élasticité du silicone Si965 en fonction de son taux de déformation pour l'ensemble des types d'essais réalisés durant la thèse. Les décalages sont principalement dus à la température à laquelle ont été réalisés les essais. En effet, la température ambiante pour les premiers essais sur le viscoanalyseur à 1, 10 et 100 *Hz* (DMA traction - triangle turquoise) et sur la MTS à 0.215 *Hz* (MTS quasi-statique - triangle vert) était d'environ 18°C alors que celle pour les essais sur le viscoanalyseur en cisaillement (DMA cisaillement - disque bleu)

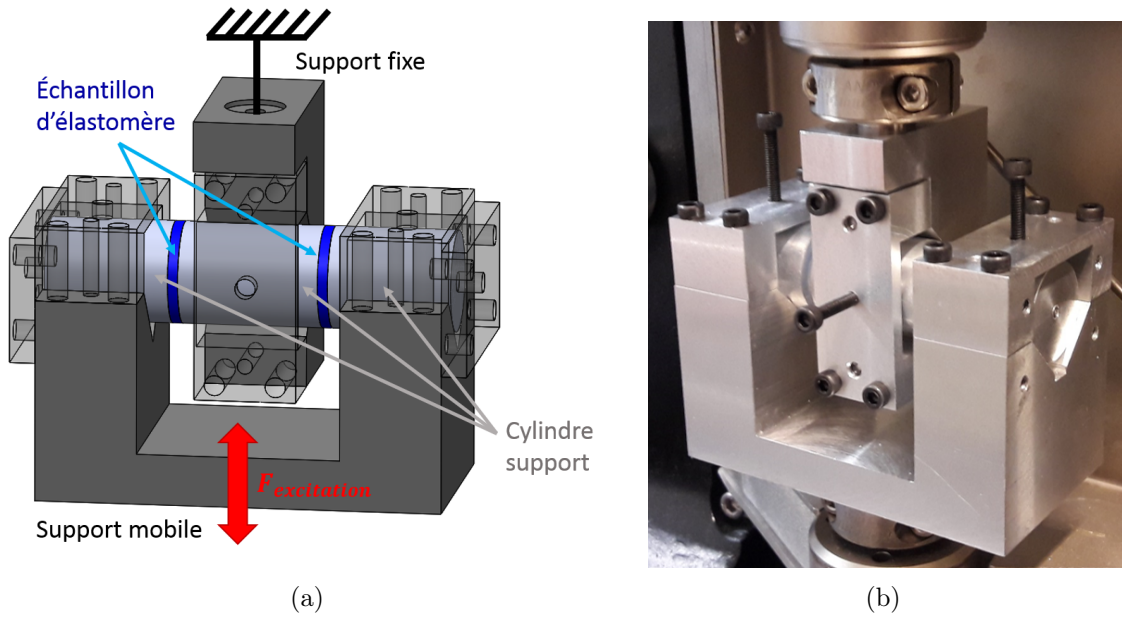


FIGURE 5.7 – CAO du porte-échantillon en cisaillement (a) et montage sur viscoanalyseur Metravib DMA +300 pour la caractérisation de l'effet Payne (b)

et sur la poutre de Oberst (Oberst modifiée - disque bleu marin) était de $25^{\circ}C$. Les deux essais dont l'objectif est d'explorer l'évolution du module d'élasticité en fonction du taux de déformation, c'est-à-dire les essais sur viscoanalyseur en cisaillement et ceux de type Obsert modifiée, peuvent être comparés. En s'éloignant des relevés inférieurs à 1% de déformation pour éviter les effets de bords potentiels dus au post-traitement des essais type Oberst modifiée, l'écart relatif entre les deux types de mesures est de 20% autour de 1% de déformation et chute à 13% autour des 2% de déformation. De plus, les deux courbes semblent converger vers la même asymptote et présentent globalement la même forme de décroissance traduisant l'assouplissement du silicone SI965.

De nombreux paramètres peuvent expliquer une partie de écarts constatés. Citons notamment : les différences de montage, la réalisation de mesures dans des conditions différentes ou encore un post-traitement différent des données.

On peut conclure des différents essais que le silicone SI965 utilisé dans l'amortisseur à lames est bien sujet à l'effet Payne et que celui-ci entraîne un assouplissement important de la raideur de la structure au passage du mode d'intérêt pour les niveaux d'excitation jugés élevés. Dans la suite du manuscrit, la courbe conservée pour décrire l'effet Payne sera celle issue des essais de type Oberst modifiée.

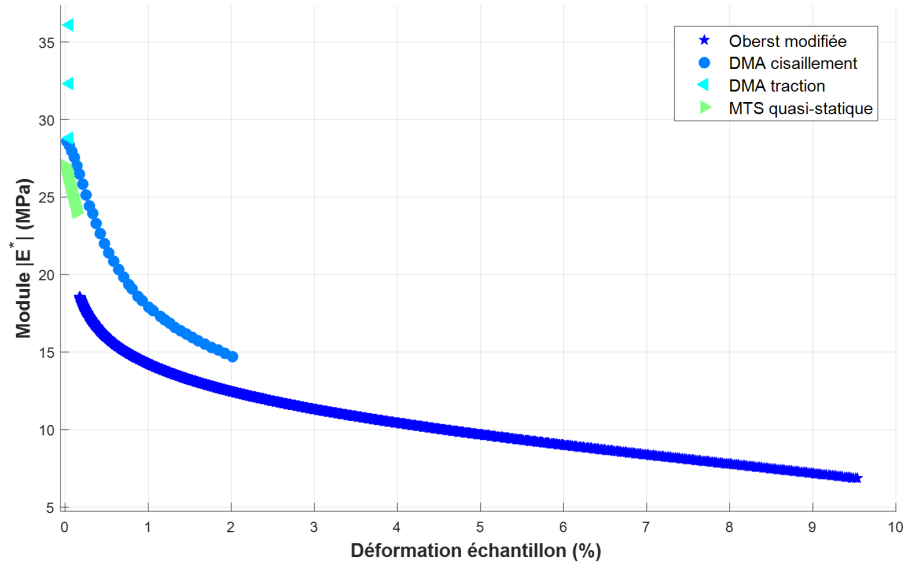


FIGURE 5.8 – Représentation du module d'Young du silicone SI965 en fonction du taux de déformation pour les différents moyens de caractérisation utilisés dans le manuscrit

5.2.3 IMPACT DES BUTÉES SUR LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE L'AMORTISSEUR

Comme cela a déjà été mentionné dans la section 5.2.1, il semblerait que lors de la phase "robustesse", le niveau d'excitation imposé par l'environnement vibratoire soit assez important pour déclencher de façon intermittente les butées mécaniques. À titre de rappel, ces butées sont réalisées par des plots en silicone SI965.

Afin de vérifier cette hypothèse, le déplacement de l'amortisseur est déterminé, dans le cadre de la dynamique linéaire, par simulation numérique à l'aide de la méthode des éléments finis, et comparé au jeu disponible avant sollicitation des butées. Le jeu au niveau des butées, dans la configuration d'intérêt, est de : $x_{gap} = 1.2 \text{ mm}$. Cela peut être traduit par une condition du type : si $x_r \geq x_{gap}$ alors il y a contact. Ici x_r désigne le déplacement relatif entre le centre de la bague intérieure et celui de la bague extérieure. La Figure 5.9 permet de visualiser, pour un niveau d'excitation élevé, la sollicitation des butées (valeur à 1) ou non (valeur à 0) au cours du temps. Il est à noter que pour une excitation de niveau faible, l'indicateur reste à 0 ce qui signifie que les butées ne sont pas sollicitées.

Selon les simulations numériques, il apparaît donc que les butées sont susceptibles d'être sollicitées lors de l'utilisation de l'amortisseur sous fortes amplitudes vibratoires et peuvent conduire à des phénomènes d'impacts. Il n'y aura pas, dans ce manuscrit, de réelle étude du rôle des butées sur le comportement dynamique de l'amortisseur à lames. Néanmoins, ces butées mécaniques étant réalisées avec des plots en élastomère, on supposera, en première approximation, que le contact généré

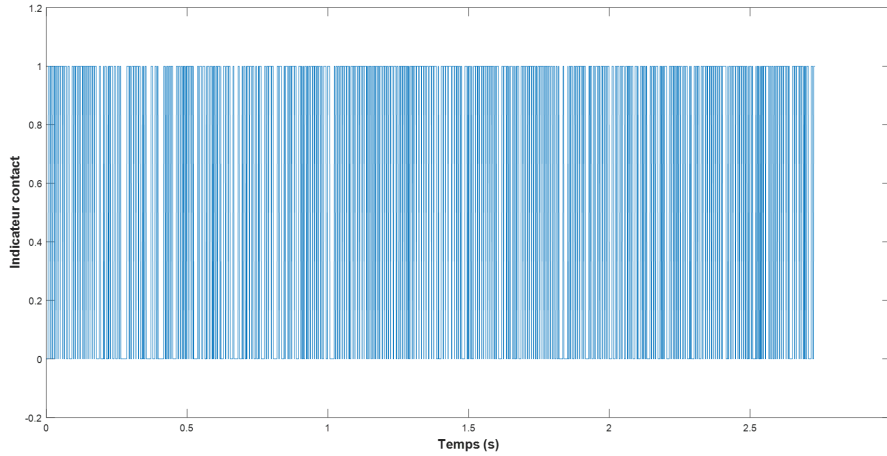


FIGURE 5.9 – Graphique représentant l'activation ou non des butées à chaque instant

est purement élastique ce qui correspondra à un ajout de raideur notée K_c dans la suite du manuscrit.

5.3 MODÉLISATION SIMPLIFIÉE ET SIMULATION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE NON-LINÉAIRE DE L'AMORTISSEUR

Maintenant que les phénomènes non-linéaires pouvant influencer la réponse dynamique de l'amortisseur ont été détectés, il s'agit de les prendre en compte dans l'écriture du problème dynamique lié au système. Il est important de noter que l'étude du comportement dynamique du système est restreinte à un mode de vibration d'intérêt et son voisinage. Dans un premier temps, une approche simplifiée, permettant de vérifier si les non-linéarités matériau et de contact expliquent l'assouplissement du système, est présentée avant de proposer une formulation plus physique du problème en établissant un lien entre le modèle éléments finis complet de l'amortisseur et un modèle réduit représentatif. Pour finir, le dernier aspect présenté dans cette partie concerne l'utilisation de la méthode RFS (*Restoring Force Surface*) afin de quantifier a posteriori l'effet des non-linéarités en fonction du niveau de sollicitation.

5.3.1 MODÉLISATION SIMPLIFIÉE DE L'AMORTISSEUR À LAMES

Lors des campagnes d'essais réalisées chez *Thales LAS Fr* pour lesquelles un comportement non-linéaire a été identifié, l'amortisseur était soumis à une excitation à la base. Lors de ces essais, il apparaît que la manière de solliciter la structure engendre l'excitation d'un seul mode. Il est donc possible, dans un premier temps, d'utiliser une modélisation simplifiée de l'amortisseur à lames comme le suggère la Figure 5.10.

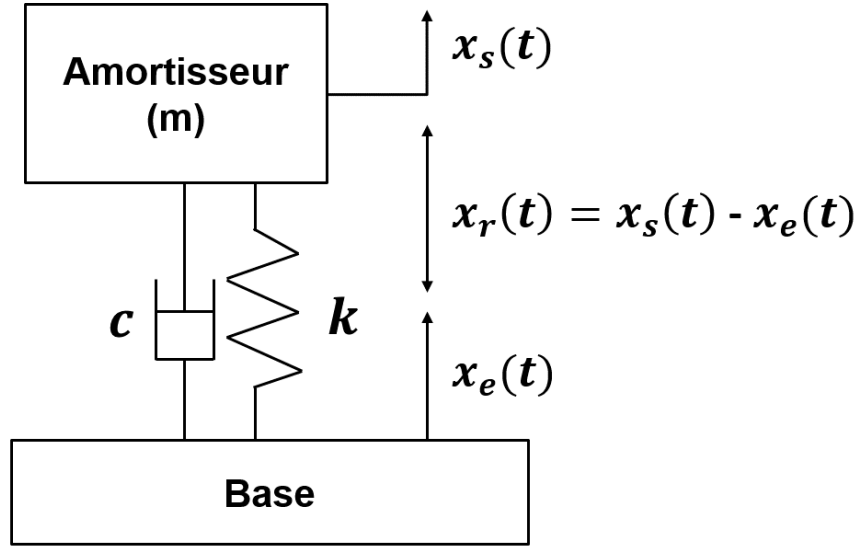


FIGURE 5.10 – Système à 1 ddl linéaire avec excitation à la base

Dans ce cas, l'équation régissant la réponse dynamique linéaire de l'amortisseur sur le mode d'intérêt sous excitation à la base peut alors s'écrire :

$$m(\ddot{x}_r + \gamma_e) + c\dot{x}_r + kx_r = 0 \quad (5.11)$$

$$\text{soit } \ddot{x}_r + 2\xi\omega_0\dot{x}_r + \omega_0^2x_r = -\gamma_e \quad (5.12)$$

où γ_e désigne l'accélération appliquée à la base, x_r correspond au déplacement relatif entre la bague encastrée et la bague libre de l'amortisseur, et k , c , m représentent respectivement, la raideur modale, l'amortissement modal et la masse modale associés au mode d'intérêt. La gestion du signal d'excitation sera détaillée un peu plus loin.

Au regard de la caractérisation menée en section 5.2.2, deux phénomènes supplémentaires doivent être modélisés :

- l'effet Payne et la variation de raideur, donc de pulsation, associée ;
- les butées et la génération de contacts élastiques.

Lorsque l'effet Payne est pris en compte, le système devient non-linéaire et l'évolution du module de stockage du silicone SI965 modifie l'écriture de la pulsation propre. Le modèle permettant de prendre en compte ce phénomène est basé sur un recalage entre les données expérimentales fournies par les essais sur la poutre de Oberst présentés Figure 5.3 et un modèle analytique provenant du développement à l'ordre 1 de l'équation d'équilibre d'un oscillateur de Duffing,

$$\omega_0^2(x_r) = \beta + \alpha x_r^2 \quad \text{pour } 0 \leq x_r \leq x_{seuil} \quad (5.13)$$

$$\omega_0^2(x_r) = \text{constante} \quad \text{pour } x_r \geq x_{seuil} \quad (5.14)$$

où x_{seuil} représente l'allongement à partir duquel l'effet Payne n'a plus d'influence sur le système (asymptote horizontale). De plus, lors des essais sur la poutre de Oberst,

les niveaux de déformations atteints (environ 9%) se sont avérés trop faibles pour couvrir convenablement l'ensemble de l'intervalle d'étude. En effet, pour les niveaux d'excitation les plus sévères, la déformation des plots en silicone dépasse celle atteinte sur la poutre (environ 13%).

Afin d'avoir quand même une idée sur l'évolution du comportement du système en fonction de l'amplitude de l'excitation et en attendant de nouveaux tests, la courbe caractéristique de l'effet Payne présentée précédemment (Figure 5.6) a été extrapolée comme l'illustre la Figure 5.11 (b). L'élastomère conserve sa tendance à s'assouplir jusqu'à un certain taux de déformation (9%) correspondant à un déplacement relatif x_{seuil} entre les deux bagues de l'amortisseur. Il est important de remarquer que le passage d'une courbe représentant l'évolution du module d'élasticité du silicone en fonction de son taux de déformation à une courbe représentant la variation de la fréquence instantanée (ou de la pulsation instantanée) en fonction de l'amplitude de débattement est directe grâce au travail mené durant l'identification de l'effet Payne basée sur l'expérience avec la poutre d'Oberst modifiée (Figure 5.5).

Dans ce manuscrit, l'action des butées est modélisée par l'ajout d'un contact bilatéral qui se déclenche lorsque $|x_r| \geq x_{gap}$. De plus, le contact est considéré comme élastique et correspond donc à un ajout de raideur k_c . Dans le cas traité, le déclenchement du contact se fait avant que l'effet Payne ne s'estompe soit : $x_{gap} \leq x_{seuil}$.

En prenant en compte l'ensemble de ces phénomènes, le nouveau schéma représentatif du comportement dynamique non-linéaire de l'amortisseur autour du mode d'intérêt est exposé Figure 5.11 (a). L'équation dynamique qui lui est associée peut s'écrire :

$$\ddot{x}_r + 2\xi\omega_0(x_r)\dot{x}_r + \omega_0(x_r)^2 x_r = -\gamma_e \quad \text{pour} \quad x_r - x_{gap} < x_r < x_r + x_{gap} \quad (5.15)$$

$$\begin{cases} \text{avec} & \omega_0(x_r)^2 = \beta + \alpha x_r^2 & \text{pour} & 0 \leq x_r \leq x_{seuil} \\ & \omega_0(x_r)^2 = \text{constante} & \text{pour} & x_r \geq x_{seuil} \end{cases}$$

$$\ddot{x}_r + 2\xi\omega_0(x_r)\dot{x}_r + (\omega_0(x_r)^2 + \omega_c^2)x_r = -\gamma_e \quad \text{pour} \quad x_r \geq x_r + x_{gap} \quad \text{ou} \quad x_r \leq x_r - x_{gap} \quad (5.16)$$

$$\begin{cases} \text{avec} & \omega_0(x_r)^2 = \beta + \alpha x_r^2 & \text{pour} & 0 \leq x_r \leq x_{seuil} \\ & \omega_0(x_r)^2 = \text{constante} & \text{pour} & x_r \geq x_{seuil} \end{cases}$$

Par ailleurs, lors des campagnes d'essais menées chez *Thales LAS Fr*, les différents scénarios d'excitation sont représentés par des Densités Spectrales de Puissance (DSP). Dans ce manuscrit, l'accent est mis sur deux scénarios en particulier. Un dont le niveau d'excitation est faible (environnement pleine performance) et un autre avec un niveau élevé (environnement "robustesse" à performance dégradée) qui porteront respectivement les indices l pour *low* et h pour *high*. De plus, il est supposé que les signaux aléatoires initiaux ayant permis de construire les DSP possèdent une moyenne nulle i.e que l'accélération n'est pas permanente, constante ou lentement variable ce qui correspondrait à une composante "statique" du signal. Les signaux d'excitation

sont alors seulement porteurs des phénomènes dynamiques. Au niveau de la source d'excitation cela signifie que sa valeur efficace est égale à son écart type.

Dans notre cas, les DSP sont connues et on veut retrouver les valeurs efficaces (égales aux écarts-types) des signaux aléatoires en terme d'accélération afin de déterminer le terme γ_e présent dans les équations du système étudié. L'expression générale permettant de déterminer cette valeur issue de la DSP $G(f)$ est la suivante [Lalanne 99] :

$$\gamma_{eff}^2 = \int_0^\infty G(f) df \quad (5.17)$$

Cependant, il apparait, pour les deux niveaux d'excitation faible et élevé, que la DSP est constante sur la plage de fréquence où se trouve le mode d'intérêt associé à f_r avant d'évoluer pour des fréquences deux fois élevées. On fait alors l'hypothèse que la DSP est constante ($G(f) = G_0$) sur l'ensemble du domaine fréquentiel d'intérêt (f_1 à f_2) même si les niveaux au-delà du mode étudié ne seront plus représentatifs. Dans ce cas particulier, l'expression permettant de remonter à la valeur efficace du signal d'excitation aléatoire en accélération est [Lalanne 99] :

$$\gamma_{eff} = \sqrt{G_0(f_2 - f_1)} = s_{\ddot{x}} \quad (5.18)$$

En pratique, la valeur efficace en accélération du signal aléatoire d'excitation pour le niveau faible est de γ_e^l et le niveau élevé, γ_e^h , est quatre fois plus important que γ_e^l .

Les équations 5.15 et 5.16 sont résolues dans le domaine temporel sous *Matlab* grâce au solver "*ode45*". Ce dernier est basé sur l'algorithme de Dormand-Price, un cas particulier de la méthode de Runge-Kutta. Afin de pouvoir utiliser ce type d'algorithme de résolution, il est nécessaire de passer d'un problème d'ordre 2 à un problème d'ordre 1 en utilisant une représentation d'état comme celle proposée ci-dessous respectivement pour le cas sans et avec contact :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \ddot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0(x_r)^2 & -2\xi\omega_0(x_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma_e^l \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \ddot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\omega_0(x_r)^2 + \omega_c^2) & -2\xi\omega_0(x_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma_e^h \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

5.3.2 IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES ET SIMULATION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE NON-LINÉAIRE POUR UN MODÈLE SIMPLIFIÉ DE L'AMORTISSEUR

Avant de réaliser les simulations, il convient d'identifier les différents paramètres présents dans le modèle non-linéaire simplifié de l'amortisseur à lames.

Suite aux essais sur la poutre de Oberst modifiée, l'évolution de la fréquence instantanée associée à la pulsation ω_0 en fonction de l'amplitude en déplacement x_r est connue (Figure 5.5). Les coefficients α et β décrivant cette évolution sont déterminés

au sens des moindres carrés en résolvant :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{r1}^2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{rn}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{01}^2 \\ \vdots \\ \omega_{0n}^2 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

où β et α sont les coefficients extraits à partir du recalage. Il est à noter que β représente la rigidité modale du système dans le cadre de la dynamique linéaire.

D'autre part, l'évolution du facteur de perte du silicone *SI965* en fonction du taux de déformation n'a pas été déterminée dans ce manuscrit. Le terme d'amortissement ξ est donc directement recalé sur la réponse du système à bas niveau de sollicitation au passage du mode d'intérêt.

Pour finir, le contact bilatéral se déclenche lorsque le déplacement relatif est supérieur à $x_{gap} = 1.2 \text{ mm}$. Le choix de cette valeur est basée sur l'étude des plans de l'amortisseur et sur l'expertise des ingénieurs de *Thales LAS Fr*. La valeur de ω_c est arbitrairement fixée à 100 rad^{-1} .

Les résultats des simulations sont exposés Figure 5.11 (c) pour le niveau d'excitation faible γ_e^l et (d) pour le niveau d'excitation élevé γ_e^h . Les courbes orange et jaune représentent les fonctions de transfert obtenues expérimentalement lors des campagnes d'essais respectivement pour la DSP faible et la DSP élevée. La courbe bleu représente la fonction de transfert liée au système à 1 *ddl* non-linéaire approximant le comportement dynamique de l'amortisseur à lames autour du mode d'intérêt. Afin de post-traiter les résultats de la même manière que lors des campagnes d'essais réalisées dans l'entreprise, il faut, avant de construire l'estimateur H_1 de la fonction de transfert, recalculer l'accélération absolue comme étant la somme de l'accélération d'excitation et l'accélération relative :

$$\gamma_s = \gamma_r + \gamma_e \quad (5.22)$$

L'estimateur H_1 est défini comme le rapport entre l'interspectre de la transformée de Fourier du signal d'entrée γ_e avec celle du signal de sortie γ_s et l'autospectre de la transformée de Fourier du signal d'entrée γ_e . Il s'agit d'un bon estimateur de la fonction de transfert lorsque le ratio signal sur bruit est jugé bon en entrée ce qui est généralement le cas en simulation et durant les campagnes d'essais de *Thales LAS Fr*.

À première vue, l'introduction des deux effets non-linéaires permet bien d'expliquer l'assouplissement de l'amortisseur à lames en fonction du niveau d'excitation constaté expérimentalement. Lorsque ce niveau est faible, l'écart relatif entre la fonction de transfert issue du modèle à 1 *ddl* non-linéaire et des essais est de 3.5% sur la fréquence et de 1% en terme de niveau. Dans le cas où le niveau de sollicitation est élevé, l'écart relatif entre les essais et la simulation est de 2.5% sur la fréquence et de 17% sur le niveau. Comme cela a déjà été mentionné, les variations au niveau de l'amortissement en fonction du taux de déformation n'ayant pas été pris en compte, la comparaison des niveaux a peu de sens. Cependant, en ce qui concerne la prédiction du glissement de la fréquence de résonance, les résultats obtenus avec ce modèle

à 1 *ddl* non-linéaire sous excitation aléatoire confirme l'hypothèse de départ quant à son origine.

5.3 MODÉLISATION SIMPLIFIÉE ET SIMULATION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE NON-LINÉAIRE DE L'AMORTISSEUR

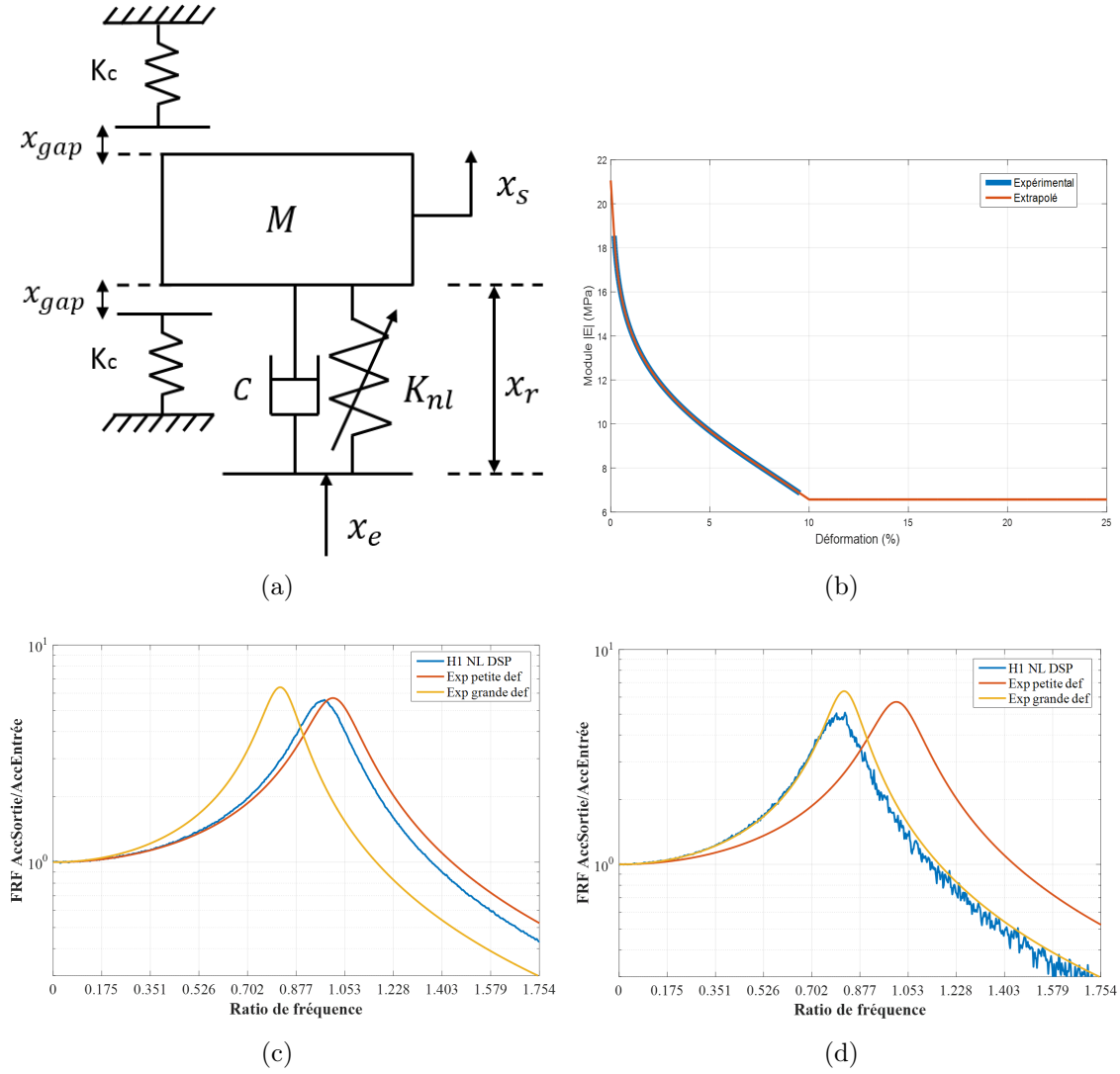


FIGURE 5.11 – Schéma dynamique équivalent du comportement de l'amortisseur autour de son mode de vibration (a) avec effet Payne extrapolé (b) et résultats de la simulation non-linéaire sous excitation aléatoire à faible niveau γ_e^l (c) et, niveau élevé γ_e^h (d)

5.4 MODÉLISATION ÉLÉMENTS FINIS ET SIMULATION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE NON-LINÉAIRE DE L'AMORTISSEUR À LAMES

5.4.1 FORMULATION DU PROBLÈME ÉLÉMENTS FINIS NON-LINÉAIRE

L'enjeu de cette dernière partie est d'appliquer la méthodologie développée en section 5.3 sur un système à 1 *ddl* au cas de l'amortisseur complet lorsque celui-ci est étudiée autour d'une fréquence propre d'intérêt .

Comme énoncé en chapitre 3, l'équation gouvernant le comportement dynamique de l'amortisseur à lames en régime libre peut s'écrire, dans le domaine fréquentiel, sous la forme suivante :

$$-\omega^2 M \hat{x} + K_{elas} \hat{x} + j\eta K_{visco} \hat{x} = 0 \quad (5.23)$$

où M , K_{elas} et K_{visco} représentent respectivement les matrices de masse de l'amortisseur, de raideur associée à la partie élastique du système ($K_{elas} = K_{acier} + K_{visco}$) et de raideur associé à la partie élastomère du système. Pour le moment, il n'y a pas de séparation entre les plots en silicone servant uniquement de butées et ceux assurant l'atténuation des vibrations.

L'amortissement est assuré par l'introduction de la variable η qui représente le facteur de perte structural du silicone pour un modèle d'amortissement hystérétique déjà présenté dans le chapitre 3. Dans cette partie, ce modèle est indépendant de la fréquence et de la température afin de simplifier l'approche présentée mais il n'est valable que dans le domaine fréquentiel puisque l'équation dynamique du système ainsi formulée ne possède pas de transformée de Fourier inverse.

Cependant, l'étude des systèmes non-linéaires se fait généralement dans le domaine temporel. Il est néanmoins possible de trouver un équivalent à l'amortissement structural dans le domaine temporel si l'on se place autour d'une fréquence de résonance fixée f_0 , associée au mode d'intérêt, et que l'étude du comportement dynamique du système est restreint à un intervalle étroit autour de cette dernière. Pour y parvenir, il est possible d'écrire :

$$-\omega^2 M \hat{x} + j\eta K_{visco} \hat{x} + K_{elas} \hat{x} = 0 \quad (5.24)$$

$$-\omega^2 M \hat{x} + j\omega C \hat{x} + K_{elas} \hat{x} = 0 \quad (5.25)$$

Les deux équations précédentes étant équivalentes au passage de la fréquence d'intérêt f_0 , on peut en déduire que :

$$j\omega_0 C = j\eta K_{visco} \quad (5.26)$$

$$\text{soit } C = \frac{\eta}{\omega_0} K_{visco} \quad (5.27)$$

En posant $K_{elas} = K$, l'équation décrivant le comportement dynamique de l'amortisseur à lames peut alors s'écrire dans le domaine temporel sous la forme classique :

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad (5.28)$$

Par ailleurs, lors des essais réalisés chez *Thales LAS Fr*, les conditions aux limites sont toutes appliquées sur la bague intérieure qui est directement liée à un bâti servant à la fois, à bloquer certains mouvements, et à exciter la structure puisque ce dernier est lié au pot vibrant. Les degrés de liberté x du problème considéré sont découplés en degrés de liberté bloqués x_b , excités x_e et libres x_l . En considérant les différents types de ddl, l'équation 5.28 s'écrit :

$$\begin{bmatrix} M_{bb} & M_{be} & M_{bl} \\ M_{eb} & M_{ee} & M_{el} \\ M_{lb} & M_{le} & M_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_b \\ \ddot{x}_e \\ \ddot{x}_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{bb} & C_{be} & C_{bl} \\ C_{eb} & C_{ee} & C_{el} \\ C_{lb} & C_{le} & C_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{x}_e \\ \dot{x}_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{be} & K_{bl} \\ K_{eb} & K_{ee} & K_{el} \\ K_{lb} & K_{le} & K_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ x_e \\ x_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Les deux premières lignes correspondent aux équations permettant d'extraire x_b et x_e qui ne sont pas les inconnues du problème. Dans le cadre des essais, les vecteurs $\ddot{x}_b$, $\dot{x}_b$, x_b sont tous nuls et le vecteur $\ddot{x}_e$ correspond à l'accélération imposée au niveau de la bague intérieure. Il est alors possible de réécrire l'équation relative aux *ddl* libres de la manière suivante :

$$M_{ll}\ddot{x}_l(t) + C_{ll}\dot{x}_l(t) + K_{ll}x_l(t) = -(M_{le}\ddot{x}_e(t) + C_{le}\dot{x}_e(t) + K_{le}x_e(t)) \quad (5.30)$$

S'agissant d'un problème non-linéaire à cause de la présence de l'effet Payne et des butées, les opérateur de raideur (K_{ll} et K_{le}) et d'amortissement (C_{ll} et C_{le}) dépendent directement du déplacement x_l . De plus, en remplaçant ces matrices par celles utilisées pour décrire le comportement de l'amortisseur dans l'équation 5.23 grâce aux relations établies dans 5.26, on aboutit à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} M_{ll}\ddot{x}_l(t) + \frac{\eta}{\omega_0}K_{ll}^{visco}(x_l)\dot{x}_l(t) + K_{ll}^{elas}(x_l)x_l(t) = \\ -(M_{le}\ddot{x}_e(t) + \frac{\eta}{\omega_0}K_{le}^{visco}(x_l)\dot{x}_e(t) + K_{le}^{elas}(x_l)x_e(t)) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Les matrices K_{visco} et K_{elas} devront donc être actualisées en fonction de x_l . En effet, le module de stockage de l'élastomère va varier comme indiqué dans la Figure 5.11 (b). De la même manière que lors de l'étude du système à 1 *ddl* non-linéaire, le lien entre le taux de déformation de l'élastomère dans le patch et le déplacement x_l est directement donné par le post-traitement des essais sur la poutre de Oberst (Figure 5.5).

5.4.2 RÉDUCTION DU MODÈLE ÉLÉMENTS FINIS DE L'AMORTISSEUR ET SIMULATION TEMPORELLE

Afin de ramener l'étude du modèle complet au cas d'un système à 1 *ddl* tel qu'étudier en section 5.3, une réduction de modèle est réalisée en projetant le modèle sur un sous-espace de taille réduite représentant au mieux la dynamique du système global sur un intervalle restreint autour de la fréquence de résonance d'intérêt.

Dans notre cas, seul le comportement dynamique de l'amortisseur au niveau d'une

fréquence de résonance et de son proche voisinage nous intéresse. Une première approche pourrait consister à projeter directement l'ensemble du problème sur le mode ϕ_l associé à cette fréquence en assumant que les deux types de non-linéarités présentes n'ont pas d'impact significatif sur la forme de ce mode c'est-à-dire en supposant que les non-linéarités sont faibles. Cette hypothèse ne semble pas irréaliste ici au vu des résultats expérimentaux obtenus. Il correspond au mode de la structure encastree à chaque *ddl* soumis à une condition aux limites de Dirichlet (cinématique) ou de Neumann (force). Dans la pratique, le mode ϕ_l est trouvé en résolvant :

$$(-\omega_l^2 M_{ll} + K_{ll}^{elas})\phi_l = 0 \quad (5.32)$$

où ω_l est la pulsation propre de l'amortisseur à interfaces fixes.

Cependant, même si elle s'avère judicieuse pour l'ensemble des *ddls* libres, cette base ne rend pas compte de la vraie physique du problème. Pour y parvenir, il faut l'enrichir avec un vecteur représentant la direction de l'excitation appliquée à la bague intérieure V_{exc} .

Le vecteur V_{exc} présente des 1 en vis-à-vis de tous les *ddls* excités et des 0 ailleurs. Les deux vecteurs sont assemblés grâce à une orthonormalisation de Gram-Schmidt. La normalisation se fait par rapport à la matrice masse M du système complet. En reprenant la convention de différentiation des *ddls* précédemment utilisée, la base de projection complète Φ peut s'écrire :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \phi_e \\ \phi_l & 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

En introduisant la superposition modale, $x_l = \phi_l q_l$ et $x_e = \phi_e q_e$ où q_l et q_e désignent respectivement, les coordonnées généralisées libres et excitées. Dans ce cadre, l'équation 5.30 peut être projetée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \phi_l^T M_{ll} \phi_l \ddot{q}_l(t) + \frac{\eta}{\omega_0} \phi_l^T K_{ll}^{visco}(q_l) \phi_l \dot{q}_l(t) + \phi_l^T K_{ll}^{elas}(q_l) \phi_l q_l(t) = \\ -(\phi_e^T M_{le} \phi_e \ddot{q}_e(t) + \frac{\eta}{\omega_0} \phi_e^T K_{le}^{visco}(q_l) \phi_e \dot{q}_e(t) + \phi_e^T K_{le}^{elas}(q_l) \phi_e q_e(t)) \end{aligned} \quad (5.34)$$

En notant, m_{ii} et k_{ii} les opérateurs projetés, on obtient l'équation du problème réduit :

$$\begin{aligned} m_{ll} \ddot{q}_l(t) + \frac{\eta}{\omega_0} k_{ll}^{visco}(q_l) \dot{q}_l(t) + k_{ll}^{elas}(q_l) q_l(t) = \\ -(m_{le} \ddot{q}_e(t) + \frac{\eta}{\omega_0} k_{le}^{visco}(q_l) \dot{q}_e(t) + k_{le}^{elas}(q_l) q_e(t)) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Le second membre de l'équation peut être assimilé à une force extérieure généralisée f_e . En supposant dans un premier temps l'accélération imposée comme étant une excitation harmonique, on a directement accès à la vitesse et au déplacement

associés :

$$\ddot{x}_e(t) = A \sin(\omega t) \quad (5.36)$$

$$\dot{x}_e(t) = -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t) + B \quad \text{avec, } \dot{x}_e(t=0) = 0 \quad \text{soit } B = 0 \quad (5.37)$$

$$x_e(t) = -\frac{A}{\omega^2} \sin(\omega t) + C \quad \text{avec, } x_e(t=0) = 0 \quad \text{soit } C = 0 \quad (5.38)$$

Il est à noter que pour des questions de temps, la généralisation de ce cas d'excitation à un signal aléatoire n'a pas été effectuée durant la thèse et constitue une perspective de travail. Le problème réduit décrit par l'équation 5.35 est alors équivalent à un système non-linéaire à 1 *ddl* étudié dans la section 5.3 et décrit par l'équation 5.16, mais dans l'espace des coordonnées généralisées. Même si les coordonnées généralisées q ne sont pas des déplacements, la Figure 5.12 propose une schématisation de la démarche adoptée dans cette section.

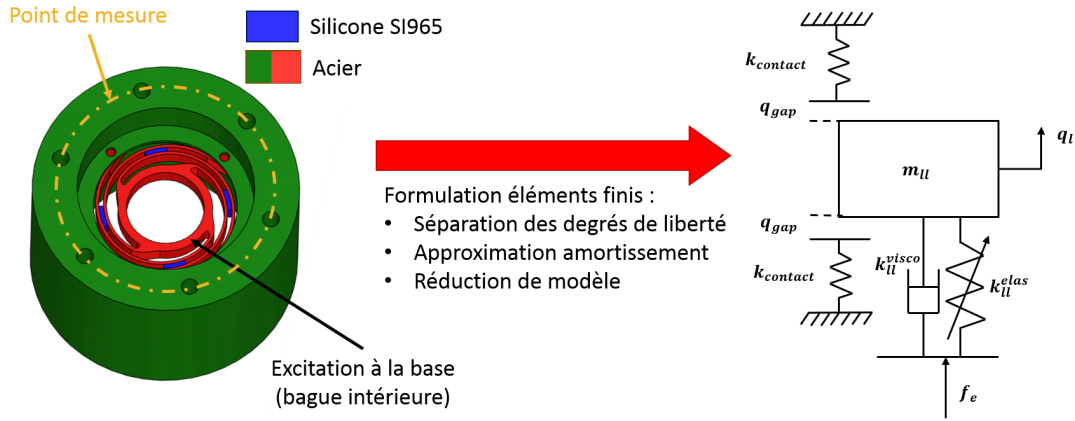


FIGURE 5.12 – Passage du modèle éléments finis non-linéaire complet de l'amortisseur à sa représentation réduite autour du mode d'intérêt

L'effet Payne étant déjà pris en compte lors de la construction des matrices K_{ll}^{visco} et K_{le}^{visco} , il reste à y ajouter le déclenchement du contact élastique comme dans la section 5.3. L'équation du système réduit lorsque $q_l \geq q_{gap}$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} m_{ll} \ddot{q}_l(t) + \frac{\eta}{\omega_0} k_{ll}^{visco}(q_l) \dot{q}_l(t) + k_{ll}^{elas}(q_l) + k_{ll}^{contact} q_l(t) = \\ - (m_{le} \ddot{q}_e(t) + \frac{\eta}{\omega_0} k_{le}^{visco}(q_l) \dot{q}_e(t) + k_{le}^{elas}(q_l) + k_{le}^{contact} q_e(t)) \end{aligned} \quad (5.39)$$

Pour le moment, la valeur de q_{gap} est une approximation. En effet, on considère que le débattement relatif avant le contact est de l'ordre de 1.5 mm mais en réalité, cet écart n'est pas identique sur l'ensemble de la structure. Si l'on voulait parvenir à une formulation plus propre, il faudrait exprimer un vecteur x_{gap} pour l'ensemble des *ddls* libres ayant une chance d'entrer en contact comme étant la différence entre les

déplacements projetés sur la normale N aux surfaces maîtres et esclaves avant de le projeter dans le sous-espace engendré par une base particulière $\phi_{l,gap}$ de la manière suivante :

$$x_{gap} = x_l^i - x_l^j \quad \text{avec} \quad i \neq j \quad (5.40)$$

$$q_{gap} = \phi_{l,gap}^{-1} x_{gap} \quad (5.41)$$

De la même manière que précédemment, les algorithmes de résolution classiques ne sont pas conçus pour résoudre directement un problème d'ordre 2. Une formulation d'état d'un système est nécessaire afin de réduire cet ordre. Cette dernière est écrite en l'absence de contact ($q_l \leq q_{gap}$), les dépendances temporelles et au déplacements sont omises pour alléger les notations :

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_l \\ \ddot{q}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\frac{k_{ll}^{elas}}{m_{ll}} & -\frac{\eta}{\omega_0} \frac{k_{ll}^{visco}}{m_{ll}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_l \\ \dot{q}_l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m_{le}}{m_{ll}} \ddot{q}_e(t) + \frac{\eta}{\omega_0} \frac{k_{le}^{visco}}{m_{ll}} \dot{q}_e(t) + \frac{k_{le}^{elas}}{m_{ll}} q_e(t) \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

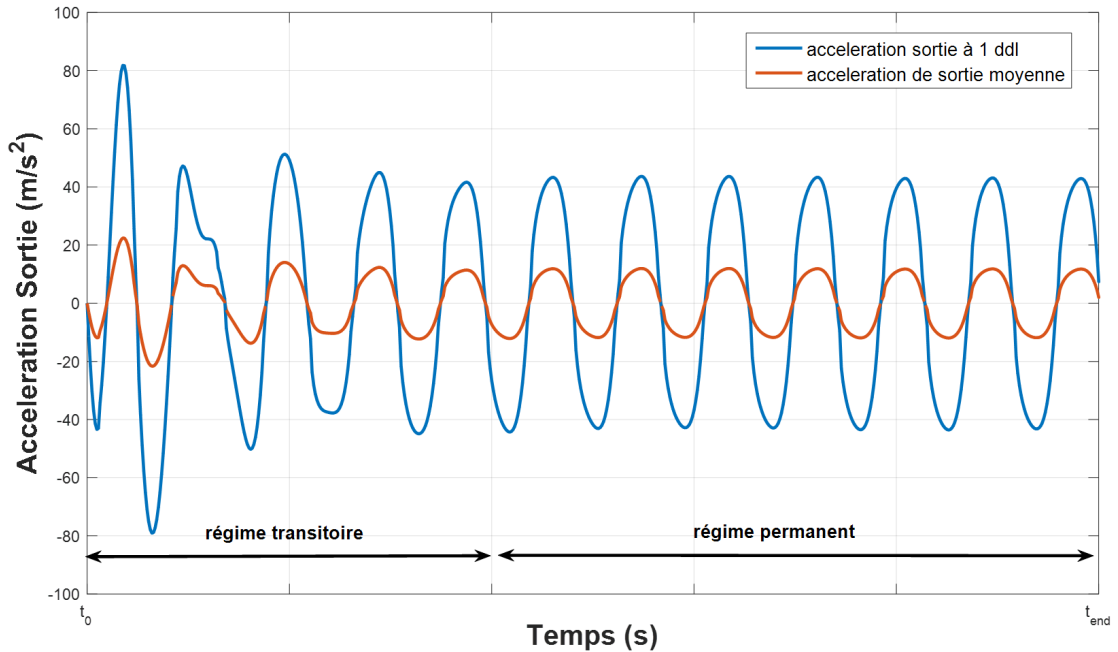


FIGURE 5.13 – Réponse de l'amortisseur à lames pour une excitation harmonique

Le système est résolu sous *Matlab* grâce à la fonction "*ode45*" comme dans la section précédente.

La Figure 5.13 représente la réponse en accélération de l'amortisseur à lames pour 1 *ddl* particulier (en bleu) dont la localisation est affichée Figure 5.12 et la moyenne des accélérations des *ddls* libres moyen (en orange) en fonction du temps. S'agissant d'une excitation harmonique appliquée sur un système dissipatif avec des conditions initiales nulles pour les inconnues cinématiques, on constate la présence d'un régime transitoire avant que la réponse du système ne se stabilise, autour de 0.1s pour laisser

apparaître le régime permanent. Ce régime est caractérisé par une distorsion de la réponse de l'amortisseur à lames soumis à une excitation harmonique. La forme n'est plus une sinusoïde pure ce qui est un signe révélateur de la présence de non-linéarités dans le système étudié.

5.4.3 ÉVALUATION DE LA CONTRIBUTION DES NON-LINÉARITÉS SUR LE COMPORTEMENT MÉCANIQUE DE L'AMORTISSEUR

Avant d'entamer cette dernière partie, une petite remise en contexte est nécessaire. Il a été montré que l'emploi du silicone SI965 et la présence de butées dans l'amortisseur à lames entraînent l'apparition de comportements non-linéaires dans le système en fonction du niveau d'excitation en plus d'une dépendance à la fréquence et à la température propre aux matériaux viscoélastiques. L'objectif initial était la construction d'un modèle prédictif prenant en compte l'ensemble de ces phénomènes. Cependant un tel travail nécessiterait la mise en place de plusieurs campagnes d'essais allant de la caractérisation intégrale du silicone chargé aux essais sur l'amortisseur complet lui-même en passant par l'étude du phénomène de contact intermittent. Au niveau matériau, l'équivalence temps/température ne peut pas être utilisée sur le silicone et il présente une forte dépendance au taux de déformation. Il faudrait donc effectuer des tests en traction, compression et cisaillement pour différentes fréquences, températures, et amplitudes de déformation afin de connaître le comportement mécanique dynamique du matériau sur tout le domaine d'intérêt avant de développer un modèle rhéologique permettant d'intégrer toutes ces variables et respectant des contraintes multiples comme : le respect de l'équation de Clausius-Duhem, l'identification des paramètres à partir de tests simples et peu coûteux ainsi qu'une implantation aisée dans les codes éléments finis (contraintes plus industrielles). Pour finir, il faudrait aussi mener une étude complète du mécanisme de contact lié à la présence de butée dans l'amortisseur à lames. Au vu de la quantité de travail, aussi bien au niveau expérimental que théorique, pour parvenir à un modèle physique prédictif associé à ce type de dispositif amortissant, cet investissement a été jugé trop important en terme de temps et pas assez proche des objectifs fixés par *Thales LAS Fr* pour être mené à bien durant la thèse.

Cependant, il est possible de récolter des informations intéressantes a posteriori sur le comportement dynamique d'un système complexe sans avoir recours à une démarche aussi poussée. Cette idée ayant été jugée intéressante d'un point de vue industriel, c'est son développement qui sera présenté dans cette dernière partie en se basant sur la méthode RFS (*Restoring Force Surface*). Cette partie propose donc une étude de la contribution des phénomènes non-linéaires présents dans le cas de l'amortisseur à lames et caractérisés précédemment. Il aurait été intéressant de mener une analyse similaire à partir des données expérimentales, mais l'industriel n'ayant pas pu nous fournir ces données expérimentales, le travail présenté dans ce manuscrit restera purement numérique.

Comme cela a déjà été mentionné au début de ce chapitre, cette approche a été initialement proposée par Masri et Caughey [Masri 79] avant d'être enrichie par de nombreux travaux au fil des années [Crawley 86, Worden 89] et est encore utilisée actuellement afin d'observer le comportement non-linéaire des structures [Dossogne 15, Cooper 17]. Le principal avantage de cette méthode réside dans le fait qu'il n'y a pas besoin d'avoir une connaissance précise des non-linéarités présentes dans la système a priori. En effet, cette méthode permet de détecter et de caractériser le(s) type(s) de non-linéarité(s) présent(s) généralement au passage des fréquences propres et même d'extraire une fonction mathématique représentative du comportement mécanique global du système non-linéaire autour de cette fréquence. Elle s'appuie sur la connaissance de la matrice de masse $[M]$ (ou sur la masse modale participante) et sur l'accélération en entrée et en sortie du système. Cette approche peut-être mise en œuvre en utilisant directement les données expérimentales mesurées à l'aide d'accéléromètres distribués de manière judicieuse sur la structure ou d'un vibromètre.

L'équation dynamique d'un système mécanique non-linéaire peut, en l'absence de forces extérieures, s'écrire sous la forme :

$$M\ddot{x}(t) + F(\dot{x}(t), x(t)) = 0 \quad (5.43)$$

où $F(\dot{x}(t), x(t))$ regroupe tous les termes linéaires et non-linéaires dépendant des vecteurs vitesse $\dot{x}(t)$ et déplacement $x(t)$. Ou bien, en séparant les composantes linéaire et non-linéaire :

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) + f_{nl}(\dot{x}(t), x(t)) = 0 \quad (5.44)$$

où M , C , et K représentent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système. $f_{nl}(\dot{x}(t), x(t))$ est le terme regroupant l'ensemble des phénomènes non-linéaires propres au système.

De manière générale, il s'agit donc d'extraire directement le terme $F(\dot{x}(t), x(t))$ de l'équation 5.43 :

$$F(\dot{x}(t), x(t)) = -M\ddot{x}(t) \quad (5.45)$$

L'objectif est alors de tracer ce terme en fonction du déplacement $x(t)$ et de la vitesse $\dot{x}(t)$ pour obtenir des informations importantes sur le comportement dynamique du système à moindre coût. Cependant, cette formulation très générale ne permet pas de découpler les effets non-linéaires entre eux et prend aussi en compte le comportement linéaire du système sous cette forme. Néanmoins, il est possible d'éliminer ces termes si on est capable d'exprimer correctement les termes d'amortissement et de raideur associés au comportement élastique de la structure.

La méthode RFS est ici appliquée sur les résultats numériques obtenus à la section 5.4.2 (équation 5.42). Dans ce cas, pour extraire la *restoring force*, il faut extraire l'accélération généralisée des *ddl*s libres $\ddot{q}_l$ et repasser dans l'espace des coordonnées physiques grâce à la transformée suivante :

$$\ddot{x}_l(t) = \phi_l \ddot{q}_l(t) \quad (5.46)$$

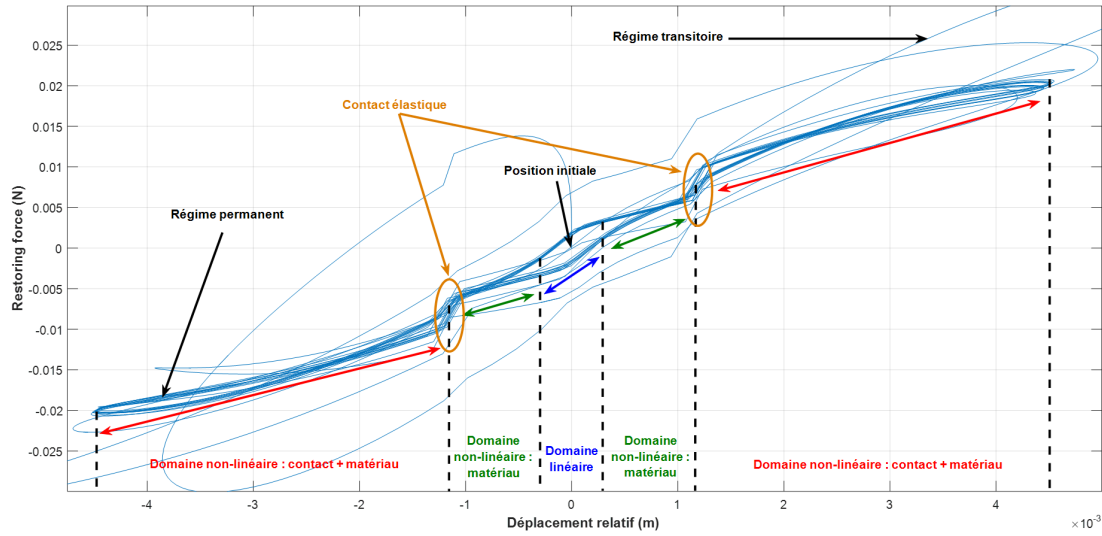


FIGURE 5.14 – Tracé de la *Restoring Force* en fonction du débattement relatif entre la bague intérieure et la bague extérieure de l'amortisseur

La Figure 5.14, montre le tracé de la *restoring force* pour le système projeté en fonction de son déplacement. Dans ce cas, les conditions initiales étant toutes nulles, le régime transitoire est représenté par quelques "cycles exotiques", jusqu'à atteindre le régime permanent du système (cycle limite). Une fois ce régime atteint, il est possible d'observer les différents domaines de fonctionnement du système réduit autour de f_0 . Pour un déplacement relatif faible oscillant autour de 0, le comportement du système peut être assimilé à celui d'un système linéaire et la présence d'un modèle de type amortissement structural est à l'origine du cycle d'hystérésis. Lorsque le niveau d'excitation augmente, un assouplissement du système, dû à l'effet Payne, est observable. La pente reliant la *restoring force* et le déplacement relatif diminue progressivement. Si le débattement entre la bague intérieure et la bague extérieure augmente encore, l'effet des butées en silicone devient visible et impacte le comportement dynamique de l'amortisseur à lames. Ce dernier survient lorsque la valeur q_{gap} est atteinte et provoque une rigidification brutale du système. Une fois ce seuil franchi, la non-linéarité dominante redevient l'effet Payne.

En conclusion, en fonction du niveau de l'excitation sur la bague intérieure, le système peut rapidement présenter un comportement non-linéaire ce qui entraîne un changement important dans l'approche qui doit être mise en place afin de l'étudier correctement. La méthode RFS permet de récolter des informations intéressantes sur le comportement dynamique d'un système non-linéaire comme la contribution des différentes non-linéarités en fonction du débattement relatif entre la bague intérieure et extérieure. De plus, il s'agit d'une méthode relativement simple à mettre en œuvre et peu coûteuse au niveau de la simulation si le modèle est d'une taille raisonnable. La simulation menée avec un modèle réduit de l'amortisseur à lames permet de valider l'implémentation de la méthode RFS et de démontrer son utilité comme outil de diagnostic du comportement dynamique non-linéaire d'un système

complexe. Enfin, la méthode RFS est employée, dans le cadre de ce manuscrit, sur un exemple numérique. Pour autant, la démarche proposée est générique et pourrait s'appliquer sur des signaux expérimentaux quelconques sans connaissance préalable des non-linéarités.

5.5 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

L'investigation menée sur le comportement non-linéaire de l'amortisseur a permis d'identifier plusieurs phénomènes contribuant à son apparition. En effet, le silicone SI965 est un élastomère chargé de particule de noir de carbone qui présente un assouplissement important dès les plus petits taux de déformation autrement connu sous le nom d'effet Payne. Une expérience basée sur la méthode de Oberst couplée à un post-traitement approprié reposant sur l'utilisation de l'EMD et une méthode des moindres carrés glissant a permis de caractériser cette dépendance. Des essais plus classiques menés sur un viscoanalyseur ont permis de confirmer la présence de l'effet Payne et ce phénomène d'assouplissement de l'élastomère lorsque le taux de déformation augmente. Il existe néanmoins des écarts relatifs assez conséquents entre les deux méthodes de caractérisation pouvant, en partie, être expliqués par les moyens expérimentaux, de mesures et les techniques de post-traitement. Ce point nécessiterait une investigation plus poussée qui n'a pas pu être menée durant cette thèse.

D'autre part, il semblerait que les butées mécanique réalisées en silicone SI965 puissent être sollicitées lorsque les niveaux de vibrations "robustesse" sont atteints. Dans ce manuscrit, leur effet a simplement été traduit par l'ajout d'une raideur élastique principalement pour des raisons de temps. Un travail complet sur cet aspect serait intéressant surtout si l'étude de l'amortisseur était élargie à des scénarios de chocs sévères.

La prise en compte de ces deux phénomènes non-linéaires semble expliquer correctement l'assouplissement de l'amortisseur au niveau du mode d'intérêt lorsque les sollicitations auxquelles il est soumis deviennent importantes. Cependant, l'évolution de l'amortissement, à cause de l'effet Payne et de l'action des butées mécaniques, n'ayant pas été traité durant la thèse, il reste encore une part importante de travail à accomplir pour obtenir une représentation correcte de l'amplitude maximale au passage de la fréquence de résonance d'intérêt.

Malgré ces lacunes, les résultats semblent intéressants du point de vue de *Thales LAS Fr* et pourraient déboucher sur des études conjointes avec un fabricant. Le temps pour parvenir à un modèle totalement prédictif de l'amortisseur ayant été jugé trop important, les travaux menés dans la thèse se sont alors restreints à fournir un outil afin d'évaluer le comportement non-linéaire de ce système a posteriori. Pour y parvenir, la méthode RFS est choisie pour sa polyvalence et sa facilité de mise en

œuvre.

Au niveau numérique, afin de rendre l'approche plus physique, un modèle réduit basé sur la formulation éléments finis de l'amortisseur à lames et prenant en compte les phénomènes non-linéaires est proposé. La méthode RFS a alors été utilisée sur ce modèle afin de quantifier l'impact des non-linéarités et aussi détecter les différents niveaux de déplacement pour lesquelles elles interviennent au passage de la fréquence de résonance d'intérêt.

L'observation de la *restoring force* permet de constater que le comportement non-linéaire de l'amortisseur est bien celui attendu et implanté numériquement. Cependant, la méthode RFS n'a pas pu être appliquée sur des résultats expérimentaux afin d'effectuer une phase de corrélation essais/calculs. En effet, durant la thèse, il n'a pas été possible d'obtenir les données nécessaires à cette étape cruciale. Il reste donc, là aussi, une part importante de travail à mener avant de répondre à l'ensemble des questions encore en suspend concernant :

- La validité du modèle réduit non-linéaire de l'amortisseur à lames.
- Le déclenchement effectif des butées mécaniques.
- L'extension de l'approche aux excitations aléatoires et à plusieurs modes de vibration.

CONCEPTION D'UN DISPOSITIF DE CONTRÔLE DES VIBRATIONS PASSIF ET ROBUSTE BASÉ SUR L'IMPLANTATION D'UN MTMD

Sommaire

6.1	Contexte de l'étude	142
6.2	Étude numérique du comportement dynamique d'une structure couplée à un MTMD	146
6.2.1	Conception du MTMD et formulation éléments finis du système global	146
6.2.2	Optimisation du réglage du MTMD	149
6.2.3	Analyse de robustesse du MTMD optimisé par la méthode Info-Gap	154
6.2.4	Méthode de conception robuste appliquée au MTMD nominal	158
6.2.5	Conclusion de l'étude numérique	162
6.3	Étude expérimentale du comportement dynamique d'une structure couplée à un MTMD	164
6.3.1	Conception d'un MTMD externe au SO	165
6.3.2	Essais vibratoires sur le SO et corrélation calculs/essais	168
6.3.3	Essais vibratoires sur le SO couplé au MTMD	172
6.4	Conclusion de chapitre	179

PRÉAMBULE

Dans ce dernier chapitre, l'objectif est de proposer un nouveau dispositif anti-vibratoire adapté à la structure supportant les appareils optiques et située en aval des amortisseurs étudiés dans les chapitres précédents. Cette structure, qui sera désignée sous le terme de Support Optique (SO) dans la suite du chapitre, présente

un mode de vibration dont la déformée pourrait nuire aux performances optiques des systèmes embarqués. La solution de contrôle des vibrations retenue est basée sur l'implantation d'un réseau d'absorbeurs à masses accordées communément appelé MTMD (*Multiple Tuned Mass Damper*) dans la littérature. Ce chapitre propose une conception de MTMD ainsi que l'optimisation des paramètres de conception en fonction d'un critère énergétique. Une analyse de robustesse de cette dernière en présence de d'incertitudes sur la fréquence propre associée au mode problématique est ensuite proposée. Lors de ces deux étapes, l'influence de l'amortissement, de la masse du MTMD ainsi que du nombre d'absorbeurs dont il est constitué, sur la solution optimale et sa robustesse, est étudiée. Enfin, une procédure d'optimisation robuste est proposée afin de rendre le réglage du MTMD insensible à la source d'incertitude considérée.

Dans la dernière partie, une maquette du SO est réalisée et une confrontation calculs/essais est présentée. Ensuite, une maquette simplifiée du MTMD est réalisée avec les préconisations de réglage des absorbeurs issues de l'étude numérique. Pour finir, des essais de la maquette du SO couplé au MTMD sont réalisés afin de vérifier la pertinence des outils numériques développés et de valider le recours à une solution anti-vibratoire de type MTMD pour *Thales LAS Fr.*

6.1 CONTEXTE DE L'ÉTUDE

Jusqu'à présent, les travaux présentés dans ce manuscrit ont porté sur la caractérisation, la modélisation et l'identification du comportement mécanique du silicone SI965 ainsi que la prise en compte de ce comportement particulier dans une série d'analyse sur le comportement dynamique de l'amortisseur à lames. Ce composant est un filtre mécanique conçu pour limiter l'énergie vibratoire venant du porteur et de l'enveloppe et transmise aux systèmes optiques dans les trois dimensions de l'espace comme l'illustre la Figure 6.1.

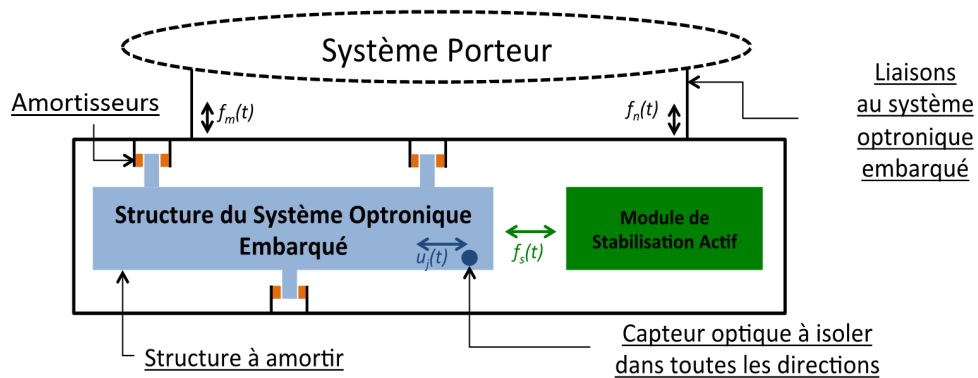


FIGURE 6.1 – Schéma d'un système optique embarqué

Néanmoins, malgré la présence du filtre mécanique, l'énergie parvient à atteindre la structure située en aval et supportant les optiques. Même si à l'heure actuelle, le niveau d'énergie n'est pas suffisant pour altérer les performances des système *Thales LAS Fr*, il pourrait le devenir dans l'avenir avec l'augmentation de celles-ci.

L'objectif à atteindre dans ce chapitre est donc d'atténuer les vibrations résiduelles présentes au niveau de cette structure support baptisée Support Optique (SO). Les différents éléments constituant le système complet (SO et optiques) ainsi que les matériaux employés sont présentés dans la Figure 6.2. Les masses et raideurs de la maquette sont dans les ordres de grandeur de celles d'un matériel considéré comme représentatif. Elle est composée d'un bras (SO) relié à plusieurs lests. Les deux pièces cylindriques correspondent à des systèmes optiques et le lest parallélépipédique est une masse ajoutée pour se rapprocher d'une configuration représentative.

Le mode de vibration excité pouvant potentiellement nuire à la stabilité des optiques est le premier mode de flexion du SO visible sur la Figure 6.2 car il correspond ici aux déformations de plus fortes amplitudes. Afin de répondre aux exigences de *Thales LAS Fr*, il s'agit maintenant de concevoir un système de contrôle des vibrations passif respectant certaines contraintes. L'encombrement et la masse ajoutée de la solution retenue doivent être aussi faibles que possible. De plus, les performances anti-vibratoires du dispositif doivent, dans la mesure du possible, être stables vis-à-vis de la fréquence et de l'amplitude d'excitation ainsi que de la température ambiante.

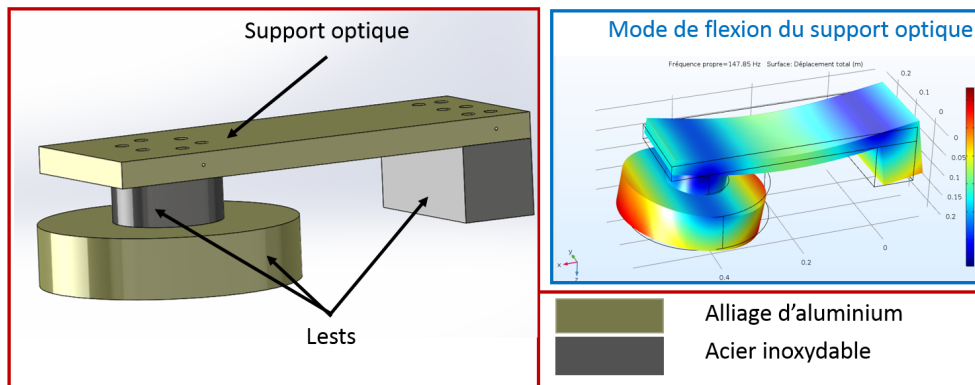


FIGURE 6.2 – CAO du support optique et des lests (Gauche) ; Premier mode de flexion de du SO en libre-libre (Droite).

Une étude préliminaire ayant pour objectif de tester numériquement différentes solutions d'amortissement passives a été menée. Les observations effectuées durant ce travail ont permis d'éliminer les solutions passives classiques reposant sur la dissipation thermique de l'énergie vibratoire comme les patches précontraints d'élastomères ou les interfaces frottantes. En effet, le SO s'avère être une structure trop rigide et massive pour que le taux de déformation local nécessaire au bon fonctionnement de ces solutions soit assez important, à moins de consentir à une augmentation significative de l'encombrement et de la masse ajoutée.

Il est spécifié dans le cahier des charges que le système de contrôle des vibrations doit être particulièrement efficace au niveau du mode de flexion du SO et dans son voisinage. Le choix s'est alors porté sur le développement d'une solution de type absorbeur à masse accordée. Il est important de noter pour la suite du chapitre qu'un absorbeur masse accordée sera désigné par l'acronyme TMD ("*Tuned Mass Damper*") et qu'un ensemble de TMDs ayant la même fonction sera désigné par l'acronyme MTMD ("*Multiple Tuned Mass Damper*").

Un TMD est un dispositif de contrôle des vibrations passif permettant d'absorber l'énergie vibratoire de la structure à laquelle il est lié au passage d'une fréquence propre f_0 . Il est généralement représenté par un système masse-ressort où la masse m et la raideur k sont réglables et doivent satisfaire la relation suivante :

$$2\pi f_0 = 2\pi f_{TMD} = \sqrt{k/m} \quad (6.1)$$

Ce type de dispositif est efficace sur une bande fréquentielle étroite et sa performance anti-vibratoire dépend fortement du réglage de ces paramètres. Afin d'améliorer cette fonction, une source de dissipation (généralement par effet Joule), représentée par un amortisseur c , est ajoutée. Cela permet la cohabitation de deux phénomènes : absorption et dissipation et permet d'élargir légèrement la plage fréquentielle de fonctionnement.

Historiquement, le concept de TMD a été introduit par Frahm [Frahm 11] afin de réduire les débattements des navires. Plus tard, Den Hartog [Den Hartog 85] a étudié ce dispositif avec de l'amortissement et a déterminé le réglage optimal permettant d'obtenir le minimum de déplacement dans le cas d'une excitation harmonique. Les travaux de Bishop et Welbourn [Bishop 52] présentent le cas où l'amortissement de la structure porteuse est non nul et plus récemment, Crandall et Mark [Crandall 14] se sont intéressés sur le réglage du TMD en cas d'excitation aléatoire.

Une des principales limitations d'un TMD est liée à son efficacité réduite à une bande étroite et très sensible à la présence d'incertitudes.

Celles-ci peuvent être liées à l'assemblage des composants, leur fabrication et l'environnement en général. Le TMD perd alors grandement en efficacité face à la variation de la fréquence propre de la structure induite par ces dispersions.

Des travaux d'optimisation pour améliorer les performance et la robustesse d'un TMD sont présentés dans [Marano 07] où une optimisation fiabiliste des paramètres de l'absorbeur est proposée, et dans [Marano 10, Greco 15] où une optimisation robuste est conduite à partir d'une description stochastique des incertitudes.

Une autre stratégie pour améliorer la robustesse et élargir la bande fréquentielle d'efficacité de tels dispositifs est d'utiliser un réseau d'absorbeur afin de contrôler une seule fréquence propre d'intérêt. Ce type de dispositif est généralement appelé "*Multiple Tuned Mass Damper*" (MTMD). Un nombre important de travaux ont porté sur l'analyse ce dispositif, surtout dans le secteur du bâtiment, pour en faire

état de manière exhaustive. L'objectif généralement poursuivi est de minimiser l'impact de l'énergie vibratoire d'une structure porteuse autour d'une fréquence propre en jouant maintenant sur l'ensemble des paramètres de tous les TMDs formant le MTMD. Cette minimisation peut être menée sur une multitude de critères différents [Allani 15] comme la minimisation de l'amplitude de la réponse en accélération, en déplacement ou, la minimisation de l'énergie de déformation ou encore, une combinaison d'un ensemble de critères à l'échelle locale ou globale. Le choix de la fonction objectif à minimiser repose généralement sur l'expertise de l'utilisateur et la ou les grandeurs d'intérêts définies dans le cahier des charges. L'optimisation du MTMD qui en découle ainsi que l'étude de l'influence de nombreux paramètres de conception comme le taux d'amortissement, le ratio de masse, la raideur, etc. ont été décrits dans de nombreux travaux comme [Kareem 95, Li 00, Li 02, Li 03, Han 08, Hoang 05] pour ne citer qu'eux. Certains travaux plus récents tentent de définir un cadre plus précis pour le dimensionnement des MTMDs en proposant une certaine distribution des masses de chaque TMD [Bandivadekar 12] ou une certaine répartition fréquentielle des TMDs par rapport à la fréquence propre de la structure porteuse [Carcatterra 12]. Pour finir, des travaux ont porté sur la généralisation de l'emploi des MTMDs pour contrôler plusieurs fréquences propres problématiques d'une structure porteuse. Il apparaît que les conclusions observées pour le cas mono-fréquentiel s'appliquent bien si les modes à contrôler sont éloignés [Warburton 81]. Un exemple concret peut être trouver dans [Wang 05] où l'objectif est de limiter l'amplitude de deux modes de vibration d'un immeuble.

En résumé, le désaccordage des propriétés des absorbeurs permet donc de garantir l'efficacité du dispositif sur une plus grande bande fréquentielle et pallier aux variations paramétriques en contexte incertain. [Miguel 16] présente dans ce cadre une démarche d'optimisation robuste sur un MTMD constitué de trois TMDs.

D'autre part, l'emploi de MTMDs comme dispositif anti-vibratoire est une solution couramment employée dans le secteur industriel comme en témoigne le nombre de brevets déposés par un large éventail d'entreprise. La majeure partie d'entre eux concernent des applications dans le domaine du BTP en raison des restrictions moindres en terme de masse ajoutée et d'encombrement. Cependant, les MTMDs sont de plus en plus employés dans des secteurs plus contraignants de ce point de vue. À titre d'exemple, il est possible de se référer au brevet de PSA [Olivier 17] dans le secteur automobile où l'objectif est de piéger l'énergie vibratoire à laquelle est soumise une structure tournante, le brevet de Boeing [Steven F. Griffin 16] dans le secteur aéronautique dont l'objectif principal est limiter les débattements d'une antenne et le brevet de Carcatterra [Carcatterra Antonio 13] qui trouve une application dans le secteur spatiale afin de calmer le mode de respiration d'un support du satellite UNISAT.

Dans ce contexte, l'objectif de ce chapitre porte sur la conception d'un réseau d'absorbeurs à masses accordées (MTMD) afin de réduire le niveau vibratoire du SO

autour de la fréquence propre associée à son premier mode de flexion.

Pour y parvenir, une première phase d'étude numérique du SO et de son MTMD est menée. L'ensemble du SO et du MTMD sera désigné par le terme "système global" dans la suite du manuscrit. Après une formulation du problème éléments finis, une procédure d'optimisation des paramètres du MTMD est mise en œuvre afin de minimiser l'énergie de déformation sur un intervalle fréquentiel particulier et une analyse de robustesse de la solution optimale en présence d'incertitudes épistémiques sur la fréquence propre à contrôler est effectuée. Ces études sont menées pour différents jeux de paramètres et une méthode d'optimisation robuste est proposée en combinant la procédure d'optimisation et l'analyse de robustesse basée sur la théorie Info-Gap.

Enfin, la seconde partie présente l'étude expérimentale du SO seul et couplé au MTMD. Pour des raisons de temps et de réalisation, la géométrie du MTMD a été simplifiée pour se rapprocher de celle proposée dans [Carcattera 12]. L'objectif est de mettre à l'épreuve les méthodes d'accordages développées lors de l'étude numérique du système grâce à une série d'essais vibratoires.

6.2 ÉTUDE NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE STRUCTURE COUPLÉE À UN MTMD

Dans cette partie, on s'intéresse au dimensionnement du MTMD afin de réduire de manière optimale le niveau d'énergie vibratoire présente au passage du premier mode de flexion du SO. Ce processus d'optimisation est ensuite mis en œuvre pour différents jeux de paramètres en faisant varier l'amortissement du MTMD, sa masse et le nombre d'absorbeur le constituant avant de mener une série d'analyse de robustesse de ces solutions optimales en considérant une méconnaissance de la fréquence propre associée au mode de flexion. Pour finir, une stratégie d'optimisation robuste est développée afin d'obtenir le meilleur compromis performance/robustesse possible. Ces méthodes seront appliquées sur un modèle réduit du système global dans le cadre de la dynamique linéaire.

6.2.1 CONCEPTION DU MTMD ET FORMULATION ÉLÉMENTS FINIS DU SYSTÈME GLOBAL

Afin de réduire le niveau vibratoire dans une bande fréquentielle donnée autour du premier mode de flexion du SO, un réseau d'absorbeurs dynamiques est implanté à l'extrémité supportant les lests représentant les optiques comme l'illustre la Figure 6.3. Ce type de système anti-vibratoire est généralement disposé à l'endroit où le débattement est plus important pour le mode considéré afin qu'il soit correctement sollicité. La stratégie présentée dans ce chapitre est basée sur l'intégration d'un réseau d'absorbeurs dynamiques (MTMD) dans la structure porteuse. Chaque absorbeur consiste en un cylindre (rouge) remplissant le rôle de masse mobile et des lames flexibles (dorées) assurant le guidage de cette masse mobile dans une direction

privilegiée et la liaison avec le SO. Elles permettent, par conséquent, de piloter la raideur de chaque absorbeur. L'amortissement est un amortissement structural lié aux matériaux utilisés. La géométrie des TMDs a été définie de manière à ce que leur première fréquence propre soit bien découplée des suivantes et proche de la fréquence propre du premier mode de flexion du SO et à ce que l'encombrement soit réduit. L'intégration du SO dans le système final couplé à la forme du mode de flexion (Figure 6.2) contraignent le positionnement des absorbeurs dynamiques. La Figure 6.3 présente finalement l'architecture des absorbeurs et la localisation retenue pour le réseau. Cette configuration sera considérée comme le cas nominal dans la suite du chapitre.

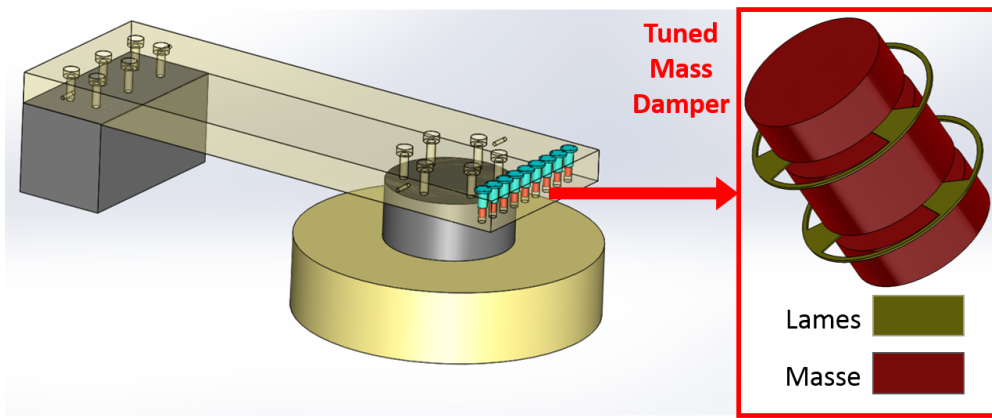


FIGURE 6.3 – CAO du SO avec MTMD et vue détaillée d'un TMD

En conséquence, les masses mobiles sont réalisées en acier inoxydable et les lames de liaisons sont réalisées dans un matériau équivalent ayant la masse volumique de l'acier, un facteur de perte η_{lames} de l'ordre du pour cent et une raideur variable assurant l'accordage des TMDs sur la fréquence propre du premier mode de flexion du SO. Rappelons que le SO est constitué d'acier inoxydable et d'alliage d'aluminium.

L'étude du comportement dynamique du système global est effectuée au voisinage d'un unique mode de vibration dans le cadre de la dynamique linéaire et les hypothèses de modélisation sont les suivantes :

- Les caractéristiques mécaniques des matériaux sont indépendantes de la fréquence ;
- Les caractéristiques mécaniques des matériaux sont indépendantes de la température ;
- L'amortissement du support optique (SO) et des lames est modélisé avec un modèle d'amortissement hystérétique ;
- Le facteur de perte de l'acier inoxydable est supposé égal à celui de l'alliage d'aluminium employé : $\eta_{acier} = \eta_{alu} = \eta_{so} = 0.1\%$;
- Le facteur de perte des lames est $\eta_{lames} = 1\%$;
- Les liaisons sont considérées comme parfaites.

Le maillage est constitué d'éléments tétraédriques quadratiques ce qui représente un ensemble de $N = 516743$ degrés de liberté.

Dans ce cadre, l'équation dynamique du système global dans le domaine fréquentiel peut s'écrire :

$$-\omega^2 M \hat{U} + K^* \hat{U} = \hat{F} \quad (6.2)$$

$$\text{avec } K^* = (1 + j\eta_{so})K_{so} + (1 + j\eta_{lames})K_{lames} \quad (6.3)$$

$$\text{où } K_{so} = K_{acier} + K_{alu} \quad (6.4)$$

$$\text{et } K_{lames} = \sum_{i=1}^9 K_{lames}^i \quad (6.5)$$

où ω est la pulsation associée à la fréquence f , M est la matrice de masse du système global et K_{so} est la matrice de raideur issue de l'assemblage des matrices de raideurs associées à l'acier inoxydable et à l'alliage d'aluminium. Il est à noter que K_{so} englobe la raideur des masses mobiles composant le MTMD. K_{lames} représente la matrice de raideur associée à l'ensemble des lames de liaisons. Ces matrices sont toutes de dimensions $N \times N$. $\hat{U}$ est l'inconnue du problème et désigne le champ de déplacement alors que $\hat{F}$ représente l'ensemble des forces extérieures appliquées au système global.

Afin d'éviter les temps de calcul excessifs à cause du nombre important de degrés de liberté, il est possible de réduire la taille du système en projetant les opérateurs M , K_{so} et K_{lames} sur une base tronquée comme cela a déjà été effectué dans les chapitres précédents.

En tenant compte des hypothèses énoncées précédemment et en supposant que les facteurs de perte considérés sont trop faibles pour modifier la forme des modes du système conservatif sous-jacent, il est possible d'utiliser une base modale Φ_e constituée des p premiers vecteurs propres normaux en s'appuyant sur l'équation suivante :

$$(-\omega_p^2 M + K_{so} + K_{lames}) \phi_p = 0 \quad (6.6)$$

$$\text{tel que } \Phi_e = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_p] \quad (6.7)$$

Ici, $p = 17$ car Φ_e est formée des six modes de corps rigide, des neuf premiers modes déformables du MTMD, chacun d'eux correspondant à un mode de pompage d'un des absorbeurs, et de deux modes déformables du SO sachant que la seconde fréquence propre est située au-delà de $1.5f_{max}$ où f_{max} représente la fréquence maximale étudiée. L'équation du système réduit peut alors s'écrire :

$$[-\omega^2 m + (1 + j\eta_{so})k_{so} + (1 + j\eta_{lames})k_{lames}] \hat{q} = \hat{f} \quad (6.8)$$

où $\hat{q}$ désigne les coordonnées généralisées et $\hat{f}$ la force d'excitation généralisée. La base de projection est choisie de façon à ce que l'erreur moyenne liée à la projection sur l'intervalle fréquentiel soit de l'ordre de 0.1%.

6.2.2 OPTIMISATION DU RÉGLAGE DU MTMD

La formulation réduite du problème éléments finis étant définie, il est possible de mettre en place une procédure d'optimisation du MTMD afin de réduire le niveau vibratoire du premier mode de flexion du SO. Pour y parvenir, il est nécessaire de définir des variables de conception qui seront libres de varier dans un certain intervalle afin de minimiser une fonction objectif.

L'amortissement étant un paramètre complexe à contrôler dans la pratique, le facteur de perte associé aux lames η_{lames} est considéré comme invariant durant la procédure d'optimisation. Son influence sera présentée plus loin dans cette section. Les variables de conception restantes sont donc les raideurs de chacune des lames de liaisons qui seront numériquement pilotées par des coefficients α_i pour $i = 1 \dots 9$ en écrivant :

$$k_{lames} = \sum_{i=1}^9 \alpha_i k_{lames}^i \quad (6.9)$$

Durant la thèse, plusieurs stratégies d'optimisation ont été testées comme la minimisation de l'énergie de déformation et la maximisation de l'amortissement modal. La maximisation de l'amortissement modal est une méthode présentant des temps de calcul bien plus courts que pour l'autre critère en énergie puisque, chaque itération ne nécessite de réaliser qu'une analyse modal complexe et ne nécessite pas un calcul du champ de déplacement complet. De plus, cette méthode permet d'améliorer les capacités de dissipation intrinsèque du système global indépendamment de la force extérieure.

Cependant, seuls les résultats obtenus sur la base de l'énergie de déformation sont présentés dans ce chapitre, le lecteur intéressé trouvera les résultats obtenus en cherchant à maximiser l'amortissement modal du système global en annexe B.

De manière générale, l'énergie de déformation élastique $\mathcal{E}_d$ est définie par la relation suivante :

$$\mathcal{E}_d = \frac{1}{2} U^T K^* U \quad (6.10)$$

Cependant, il est aussi possible de l'exprimer à partir de l'opérateur réduit et des coordonnées généralisées car :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_e^T K^* \Phi_e = k^* \text{ soit } K^* = \Phi_e^{-T} k^* \Phi_e^{-1} \\ \Phi_e^T M \Phi_e = I \text{ soit } \Phi_e^{-1} = \Phi_e^T M \text{ et } \Phi_e^{-T} = M^T \Phi_e = M \Phi_e \\ U = \Phi_e q \text{ et } U^T = q^T \Phi_e^T \end{array} \right.$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\mathcal{E}_d = \frac{1}{2} U^T K^* U = \frac{1}{2} q^T \Phi_e^T M \Phi_e^T k^* \Phi_e^T M \Phi_e q = \frac{1}{2} q^T k^* q \quad (6.11)$$

L'objectif est de minimiser de cette énergie de déformation élastique sur un intervalle de fréquences autour du premier mode de flexion du SO et, en ajoutant les variables

de conceptions α_i qui permettent de contrôler la raideur des lames de liaisons, le problème d'optimisation à résoudre s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min_{\alpha_i} \bar{\mathcal{E}}_d(\alpha_i) \\ \text{avec} \\ \alpha_{inf} \leq \alpha_i \leq \alpha_{sup}, i = 1, \dots, 9 \end{cases} \quad (6.12)$$

où $\alpha_{inf} = 0.8$ et $\alpha_{sup} = 1.2$ représentent respectivement les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle de variation des paramètres α_i et $\bar{\mathcal{E}}_d$ la valeur moyenne de l'énergie de déformation sur la bande de fréquence considérée.

6.2.2.1 OPTIMISATION DU MTMD NOMINAL

Le processus d'optimisation est effectué avec un facteur de perte sur l'ensemble des composants du système global de : $\eta_{so} = 0.1\%$ sauf pour celui associé aux lames de liaisons qui est : $\eta_{lames} = 1\%$.

La Figure 6.4 (a) montre les Fonctions de Réponse en Fréquence (FRF) pour le système sans (bleu) et avec (orange) le MTMD optimisé sur la bande fréquentielle d'intérêt ainsi que la localisation de la source d'excitation et des points d'observation (b). La Figure 6.4 (c) présente les valeurs des coefficients α_i agissant sur la raideur des lames de liaisons. Leur valeur initiale est fixée à 1 (noir) et il apparait que les valeurs après optimisation sont réparties de manière quasi-linéaire (rouge) et sur un espace restreint par rapport aux limites fixées au niveau du problème d'optimisation. Cela signifie que les fréquences propres du MTMD sont proches de la fréquence propre du SO à contrôler.

Cette optimisation permet d'obtenir une atténuation importante de l'amplitude maximale observée entre le système sans et avec le MTMD optimisé d'un facteur de 4.2 même s'il est à noter que l'ajout de ce dispositif entraîne un léger surplus en terme d'amplitude avant et après le passage du premier mode de flexion du SO.

Il est à noter que, dans la suite de ce manuscrit, la solution optimale obtenue dans cette configuration, c'est-à-dire avec un MTMD composé de neuf TMDs, une masse volumique des masses accordées qui sera notée $\rho_{TMD} = \rho_{nominal}$ et les facteurs de perte suivants : $\eta_{so} = 0.1\%$ et $\eta_{lames} = 1\%$ sera désignée par le terme : solution optimale nominale.

6.2.2.2 ANALYSE PARAMÉTRIQUE DE LA CONCEPTION OPTIMALE NOMINALE

Afin d'étudier l'influence d'autres paramètres sur l'efficacité du MTMD, le même problème d'optimisation est résolu pour les cas suivants :

- Cas 1 : Le facteur de perte η_{lames} associé aux lames de liaisons est variable : $[0.1\% ; 0.3\% ; 1\% ; 10\%]$ pour une masse volumique des masses accordées ρ_{nom} et un MTMD composé de neuf TMDs ;
- Cas 2 : La masse volumique des masses accordées ρ_{TMD} est variable : $[0.5\rho_{nominal} ; \rho_{nominal} ; 2\rho_{nominal}]$, pour un facteur de perte $\eta_{lames} = 1\%$ et un MTMD composé de neuf TMDs ;

6.2 ÉTUDE NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE STRUCTURE COUPLÉE À UN MTMD

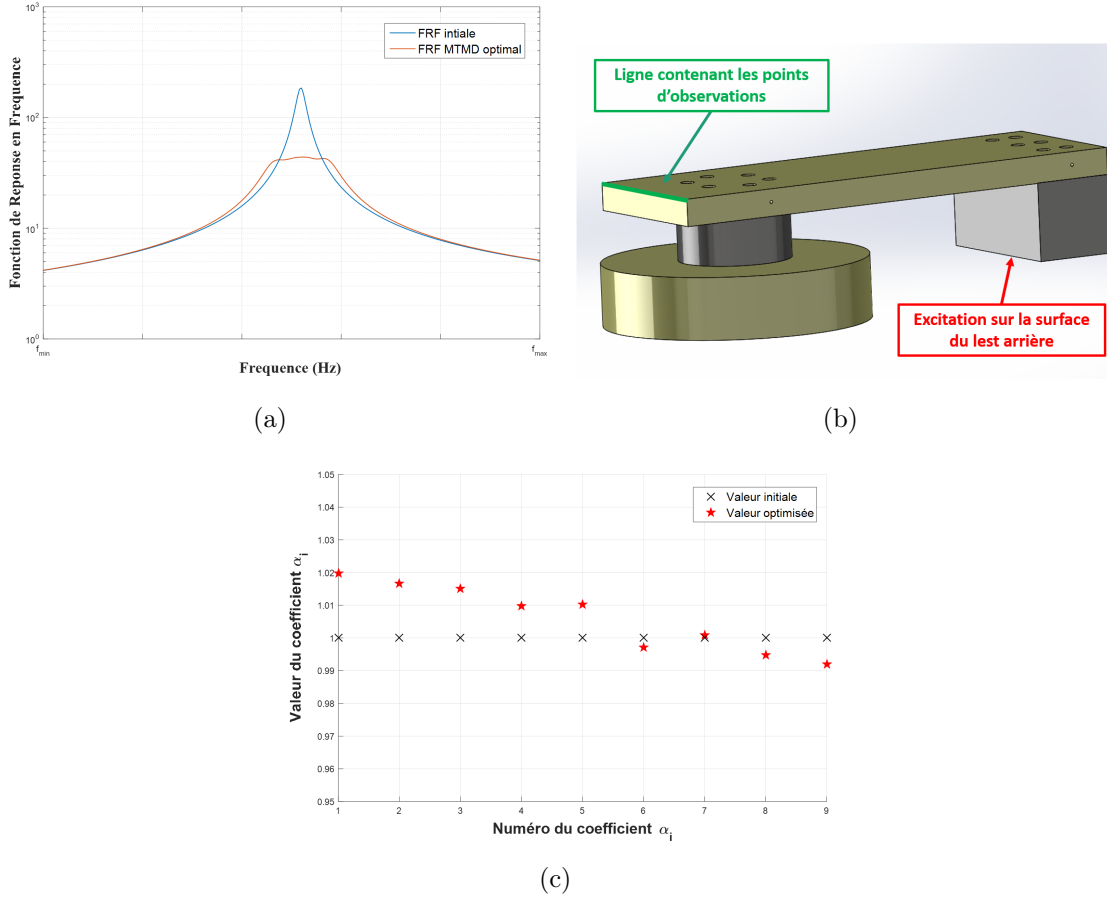


FIGURE 6.4 – Comparaison entre la FRF du SO et la FRF du SO avec un MTMD optimal (a), localisation de la source d'excitation et des points de mesures (b) et, valeur des coefficients α_i pour les neuf TMDs (c)

- Cas 3 : Le nombre de TMD constituant le MTMD est variable : $[1 ; 9 ; 18]$ pour une masse mobile totale identique (étude à iso-masse) et un facteur de perte $\eta_{lames} = 1\%$.

La Figure 6.5 (a) montre les résultats obtenus pour le Cas 1 et permet de confirmer l'existence d'un facteur de perte optimal pour les lames de liaisons comme l'avait montré Den Hartog [Den Hartog 85] avec un seul TMD. Dans le cas présenté dans ce manuscrit, il semble qu'il se situe autour de 1%. Il est intéressant de noter que lorsqu'il est trop élevé (10%), l'atténuation est moins élevée mais la FRF obtenue ressemble à la FRF initiale avec un meilleur amortissement apparent. Cela provient du fait que l'énergie vibratoire rencontre des difficultés à entrer dans le MTMD, d'où l'absence de fréquences de résonance secondaires visibles mais que, le peu d'énergie transmise est dissipé par effet Joule dans les lames.

Lorsque le facteur de perte est faible (0.1% et 0.3%), l'énergie vibratoire du mode à contrôler entre facilement dans le MTMD mais elle est plus difficilement dissipée ce qui entraîne une augmentation de l'amplitude des fréquences de résonance secon-

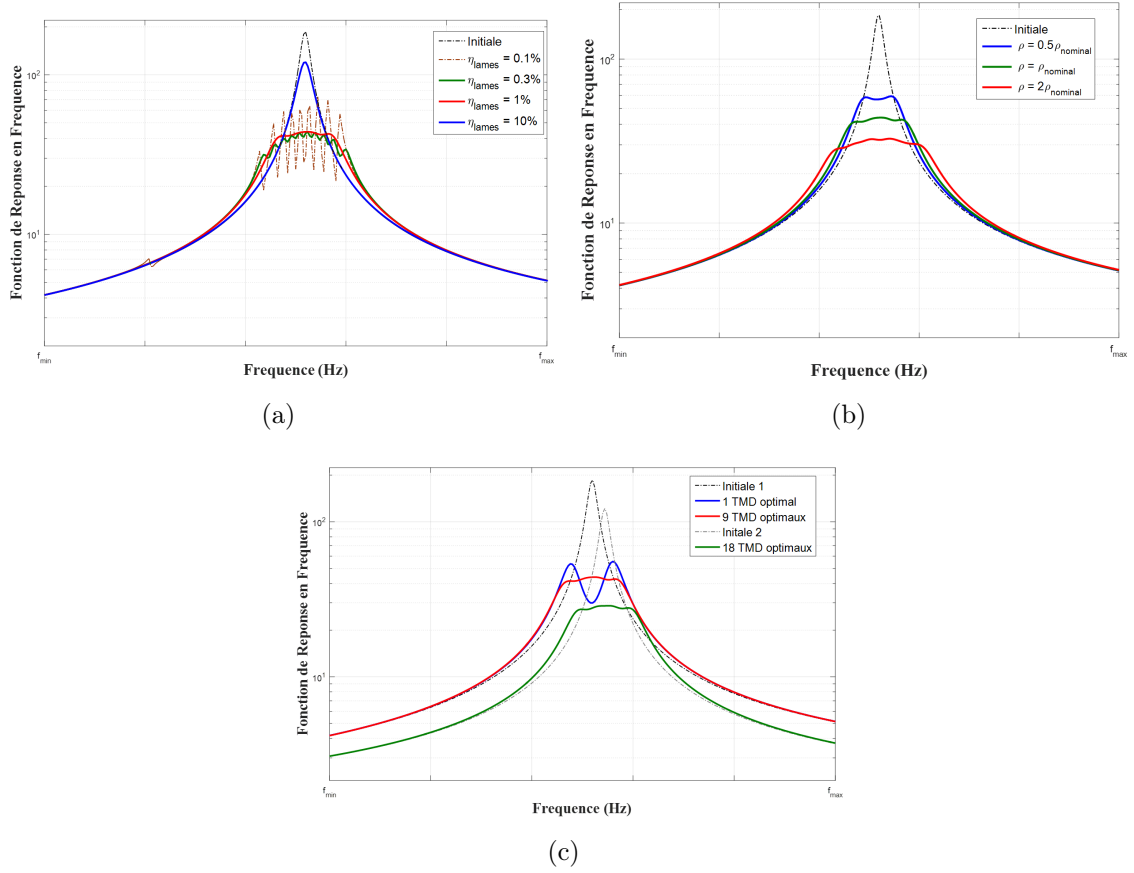


FIGURE 6.5 – Influence du facteur de perte des lames η_{lames} (a), de la masse volumique des masses mobiles des TMDs ρ_{TMD} (b) et du nombre de TMD constituant le MTMD (c) sur la FRF de la solution optimale

dares tout en réduisant néanmoins le niveau vibratoire moyen du système global par rapport au cas du SO seul. En pratique, ces faibles niveaux d'amortissement sont complexes à observer car les dispositifs comme le MTMD sont couplés à la structure primaire par des assemblages mécaniques eux-mêmes sources d'amortissement. Lorsque le facteur de perte η_{lames} est proche de sa valeur optimale (1%), la FRF est totalement lissée autour du mode de vibration à contrôler et les deux effets, absorption et dissipation, cohabitent.

Les résultats observés sur la Figure 6.5 (b) permettent de confirmer que la masse mobile effective des dispositifs à masses accordées agit directement sur leur efficacité. En effet, plus cette dernière est élevée, plus le niveau d'énergie pouvant être absorbé est élevé. Cela est vrai tant que le mode à contrôler possède assez d'énergie pour correctement solliciter le MTMD. Pour la solution optimale nominale, le facteur d'atténuation est de 4.2 alors que pour le cas $\rho_{TMD} = 0.5\rho_{nominal}$ il est réduit à 3.1. Pour le cas $\rho_{TMD} = 2\rho_{nominal}$ ce facteur est de 5.6. Sur le concept présenté sur la Figure 6.3, l'ajout du MTMD n'augmente pas la masse globale du système ce qui

peut sembler être un avantage. Cependant, dans la pratique, il existera toujours un compromis à trouver entre la rigidité et la masse globale du système global pour qu'il puisse respecter ses différentes fonctions mécaniques. De plus, une augmentation de la masse mobile pour améliorer les performances du MTMD, associée à un débattement important des TMDs au passage de leurs fréquences propres peut rendre le dimensionnement complexe en raison du niveau de contraintes existant dans les lames de liaisons.

Pour finir, les FRFs tracées sur la Figure 6.5 (c) qui, à titre de rappel sont obtenues à iso-masse, montrent l'influence du nombre d'absorbeurs composant le MTMD. À la FRF précédente obtenue initialement (Initiale 1) est ajoutée une nouvelle FRF initiale (Initial 2) correspondant à la CAO nominale du SO modifiée pour lui permettre d'accueillir les 18 TMDs. La perte de masse et de raideur du fait de ces opérations mène à un décalage de la fréquence propre du premier mode de flexion du SO de 0.6 Hz . Lorsqu'il s'agit d'un simple TMD, la FRF du système optimisé est la même que celle rencontrée couramment dans la littérature ([Den Hartog 85]) avec deux maximums de même amplitude répartis de part et d'autre du mode d'intérêt. Le rapport entre l'amplitude maximale de la FRF du SO initial et de la solution avec 1 TMD est de 3.35. Néanmoins, lorsque le nombre de masses accordées constituant le MTMD devient assez important, ce phénomène de démultiplication des pics d'amplitude s'estompe pour laisser place à un "plateau" d'amplitude moyenne. Ce "plateau" vient d'une part de l'amortissement présent dans les lames de liaisons et, plus globalement, dans l'assemblage mécanique, mais aussi du fait que les fréquences propres du MTMD sont réparties dans une bande fréquentielle étroite autour de la fréquence propre d'intérêt. Cela a pour effet d'augmenter la densité modale sur cet intervalle ce qui mène à un couplage des modes entre eux. Entre les solutions à 9 et 18 TMDs, la différence en terme de gain relatif sur l'amplitude est négligeable (respectivement 4.21 et 4.23). De plus, en terme d'énergie de déformation élastique sur la bande fréquentielle d'intérêt, le gain entre ces deux solutions est lui aussi négligeable car l'écart relatif est de 0.2%. Entre la solution à 1 TMD et les autres l'écart relatif en terme d'énergie de déformation est de l'ordre de 1.6% ce qui est encore un écart assez faible.

En conclusion, cette étude des différentes solutions optimisées permet de confirmer la présence d'un niveau d'amortissement optimal permettant de lisser les pics de résonance tout en conservant la capacité d'absorption du MTMD. La masse effective des masses mobiles est elle aussi un facteur important permettant d'améliorer les performances anti-vibratoires du MTMD certainement jusqu'à un point critique qui n'a pas été déterminé dans ce manuscrit. Enfin, le nombre de cellules, si la masse mobile effective est la même pour toutes les solutions, semble n'avoir que peu d'influence sur le gain en terme d'énergie de déformation. Le choix d'une solution plutôt que d'une autre peut alors être justifié en se basant sur le gain en terme d'amplitude maximale observée.

La solution optimale déterminée ici est obtenue en conditions déterministes et la présence d'incertitudes peut remettre en cause cette solution et sa performance. Il est

donc nécessaire d'évaluer la robustesse de la solution obtenue en contexte incertain.

6.2.3 ANALYSE DE ROBUSTESSE DU MTMD OPTIMISÉ PAR LA MÉTHODE INFO-GAP

Le but de cette section est d'étudier la robustesse de la solution optimale nominale obtenue précédemment ainsi que de ses déclinaisons en fonction de différents jeux de paramètres lorsqu'il y a une méconnaissance de la fréquence propre associée au premier mode de flexion du SO.

Dans la section précédente, le processus d'optimisation déterministe employé a permis d'obtenir une solution optimisée pour un jeu de paramètres nominaux sans aucune source d'incertitude. L'accordage du MTMD est conduit sur la base d'une fréquence propre fixée. Cependant, lorsque le SO est utilisé dans la pratique, la fréquence propre d'intérêt peut varier à cause de plusieurs changements dans la répartition des masses embarquées. Sachant que ce type d'incertitude affecte directement la performance du MTMD, il apparaît alors intéressant d'étudier la robustesse de la solution appliquée, c'est-à-dire la capacité du MTMD à réduire l'énergie de déformation élastique au voisinage du premier mode de flexion du SO quand la fréquence propre qui lui est associée est incertaine.

De la même manière qu'au chapitre 4 ce type d'incertitude peut être considéré comme une méconnaissance de la fréquence propre d'intérêt et peut être pris en compte en s'appuyant sur la théorie Info-Gap [Ben-Haim 06a]. De plus, plutôt que d'établir le modèle d'incertitude directement sur la fréquence propre, il a été choisi de travailler avec une incertitude sur la matrice de raideur du SO, K_{so} par l'intermédiaire d'un coefficient qui sera noté α_{so} .

À titre de rappel, l'approche Info-Gap repose sur la définition de trois données :

- Un modèle du système étudié ;
- Un modèle d'incertitude ;
- Un critère de performance.

6.2.3.1 ANALYSE DE ROBUSTESSE DE LA SOLUTION OPTIMALE NOMINALE

Dans le cadre de l'étude présentée ici, le modèle $\mathcal{M}$ du système étudié peut s'écrire dans le domaine fréquentiel :

$$[-\omega^2 m + (\alpha_{so} + j\eta_{so})k_{so} + (1 + j\eta_{lames})k_{lames}] \hat{q} = \hat{f} \quad (6.13)$$

Cette équation est la même que l'équation 6.8 lorsque $\alpha_{so} = 1$ et l'équation 6.11 est utilisée pour calculer l'énergie de déformation élastique sur la bande fréquentielle d'intérêt.

Le modèle d'incertitude Info-Gap utilisé pour représenter la méconnaissance sur la matrice de raideur du SO, c'est-à-dire sur la fréquence propre associée au premier mode de flexion est exprimé sous la forme suivante :

$$U(h, \tilde{\alpha}_{so}) = \{\alpha_{so} : |\alpha_{so} - \tilde{\alpha}_{so}| \leq h\}, h \geq 0 \quad (6.14)$$

où h représente l'horizon d'incertitude variant, dans cette étude entre 0 et 20% de la valeur nominale de $\tilde{\alpha}_{so}$ ce qui représente une plage totale de variation de la partie réelle de la raideur comprise entre $\tilde{\alpha}_{so} - 20\%\tilde{\alpha}_{so}$ et $\tilde{\alpha}_{so} + 20\%\tilde{\alpha}_{so}$. Le balayage de cet intervalle de raideur permet bien d'englober les bornes de variation de la fréquence propre d'intérêt.

La performance du MTMD est évaluée sous la forme d'un ratio, entre l'énergie de déformation élastique sur la plage fréquentielle étudiée du système avec et sans MTMD, R_0^{MTMD} défini par :

$$R_0^{MTMD} = \frac{\mathcal{E}_d^{MTMD}}{\mathcal{E}_d^0} \quad (6.15)$$

où, l'on note $\mathcal{E}_d^{MTMD}$ l'énergie calculée quand le MTMD est présent et $\mathcal{E}_d^0$ lorsqu'il n'y est pas. De cette manière, lorsque le MTMD perd en efficacité, ce ratio tend vers 1.

De plus, il est possible de choisir un niveau d'énergie de déformation critique $\mathcal{E}_d^{crit}$ et de construire le ratio associé R_0^{crit} :

$$R_0^{crit} = \frac{\mathcal{E}_d^{crit}}{\mathcal{E}_d^0} \quad (6.16)$$

et formuler ainsi un critère de performance à satisfaire :

$$R_0^{MTMD}(\alpha_{so}) \leq R_0^{crit} \quad (6.17)$$

Ce critère garantit une performance minimale du MTMD.

La fonction de robustesse du système est alors définie comme étant le plus grand horizon d'incertitude h qui peut être toléré sur la variation de la raideur du SO tout en satisfaisant le critère de performance dans le pire des cas :

$$\hat{h}(R_0^{crit}) = \max \{h : [\max_{\alpha_{so} \in U(h, \tilde{\alpha}_{so})} R_0^{MTMD}(\alpha_{so})] \leq R_0^{crit}\}, R_0^{crit} \geq 0 \quad (6.18)$$

Il est à noter qu'ici, le pire des cas est défini comme étant le cas où le MTMD est le moins efficace sur l'intervalle h observé, c'est-à-dire lorsque le ratio R_0^{MTMD} est maximal.

Avec cette formulation complète du problème Info-Gap, il est possible d'évaluer la performance du MTMD en fonction d'une méconnaissance sur la raideur du SO (i.e sur la fréquence propre associée au premier mode de flexion du SO).

La Figure 6.6 présente les résultats de l'analyse de robustesse obtenus pour la solution optimale nominale (étoiles noires) et les FRFs du SO et de cette solution optimale nominale pour différentes valeurs de h .

Pour $h = 0$, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas d'incertitude dans le modèle, le ratio R_0^{MTMD} est minimal ce qui signifie que l'efficacité du MTMD est maximale comme le montre les FRFs dans le cadre bleu qui correspondent à la celles de la Figure 6.4. Lorsque l'horizon d'incertitude augmente, c'est-à-dire lorsque la fréquence propre

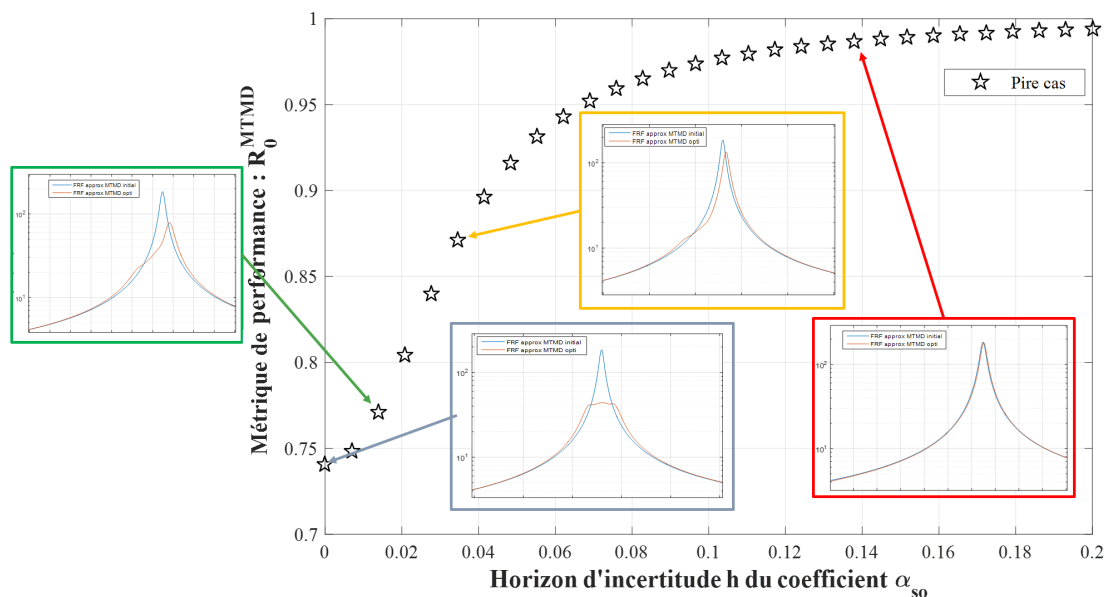


FIGURE 6.6 – Fonction de robustesse de la solution optimale nominale et les FRFs comparatives avec et sans MTMD pour différentes valeurs de h

d'intérêt varie, dans un intervalle de plus en plus grand, le ratio augmente rapidement comme cela était attendu et finit par tendre vers 1 ce qui traduit une diminution continue des performances du MTMD.

En plus de la fonction de robustesse présentant un critère de performance en énergie, les tracés des FRFs pour différentes valeurs de h permettent d'obtenir des informations complémentaires sur l'évolution de l'amplitude de la solution optimale nominale. À titre d'exemple, pour le cadre jaune à $h = 3.5\%$, l'efficacité du MTMD en terme de ratio d'énergie à diminuer de moitié et le rapport entre les amplitudes maximales du SO simple ou avec MTMD est de 1.37 au lieu de 4.2 à $h = 0$.

Les résultats obtenus grâce à l'analyse de robustesse permettent d'évaluer la performance de la solution optimale nominale lorsque la fréquence sur laquelle elle est accordée est incertaine. La sensibilité de l'accordage du MTMD est confirmée et il semble raisonnable de dire qu'une optimisation purement déterministe de ce type de dispositif n'est pas suffisante lorsqu'il doit être employé dans le secteur industriel.

6.2.3.2 ÉTUDE DE L'INFLUENCE DES PARAMÈTRES SUR LA ROBUSTESSE DE LA SOLUTION OPTIMALE

La même démarche d'analyse de robustesse est appliquée sur l'ensemble des jeux de paramètres décrit dans la section 6.2.2.2 en cas d'incertitude sur la fréquence propre du mode de flexion du SO.

La Figure 6.7(a) représente les trois courbes de robustesse obtenues pour le cas 1, c'est-à-dire, un facteur de perte dans les lames de liaisons η_{lames} de 0.3% (vert),

6.2 ÉTUDE NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE STRUCTURE COUPLÉE À UN MTMD

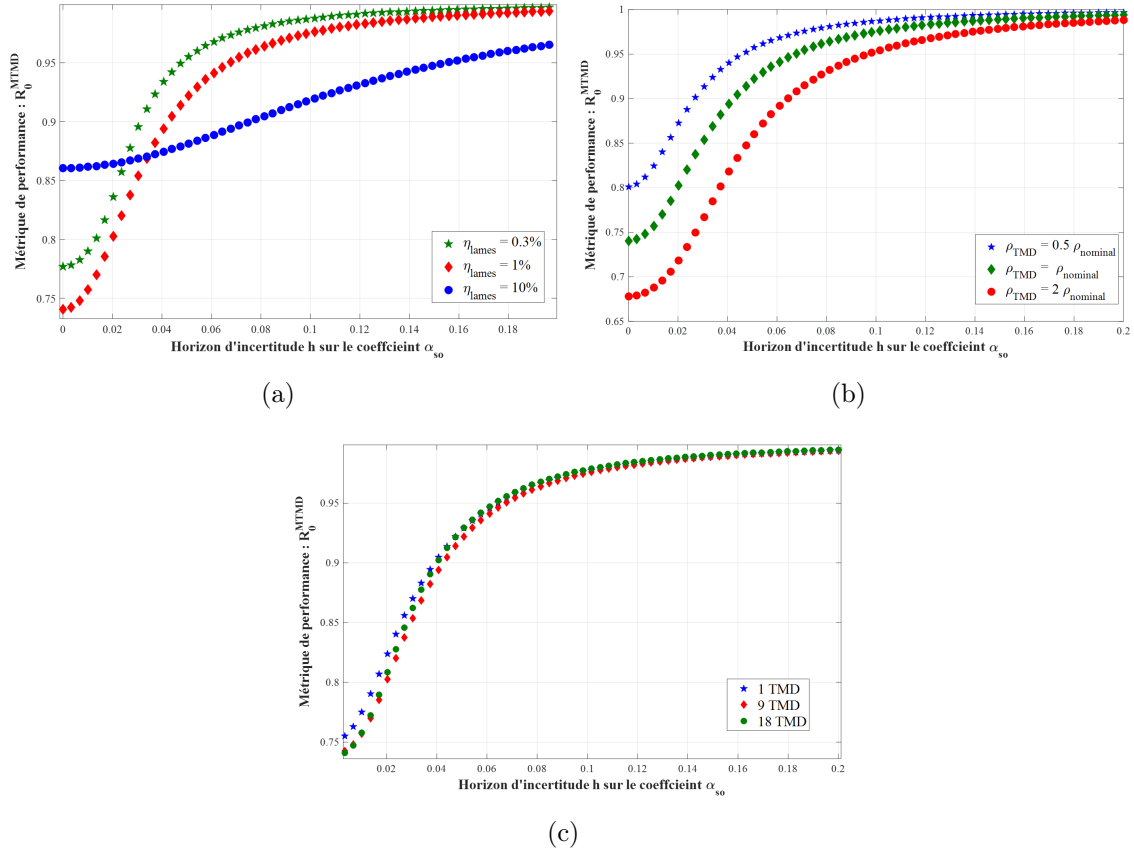


FIGURE 6.7 – Influence du facteur de perte des lames η_{lames} (a), de la masse volumique des masses mobiles des TMDs ρ_{TMD} (b) et du nombre de TMD constituant le MTMD (c) sur la fonction de robustesse de la solution optimale

de 1% (rouge) et de 10% (bleu). L'analyse de robustesse permet de confirmer l'observation faite sur la Figure 6.5(a). En effet, lorsque le niveau d'incertitude est nul ($h = 0$), la présence d'un facteur de perte trop important ou trop faible mène à une diminution de la performance du MTMD que ce soit en terme d'amplitude ou d'énergie de déformation. Cependant, lorsque le niveau d'incertitude augmente, il semble qu'un important facteur de perte (10%) dans les liaisons permette d'améliorer la robustesse du système. En effet, la croissance du ratio R_0^{MTMD} est moindre pour ce cas et au-delà d'un horizon d'incertitude $h = 3.5\%$ cette solution devient même plus performante.

Les fonctions de robustesse du système global optimisé pour des valeurs de masse volumique des masses accordées de $0.5\rho_{nominal}$ (bleu), $\rho_{nominal}$ (vert) et $2\rho_{nominal}$ (rouge) sont présentées Figure 6.7(b). Comme cela a été constaté sur les FRFs de la Figure 6.5(b), l'augmentation de la masse mobile effective permet d'améliorer les performances du dispositif autant du point de vue du niveau d'amplitude que du ratio d'énergie de déformation élastique. De plus, lorsque l'horizon d'incertitude croît,

il apparaît que cette hiérarchie est conservée même si les écarts relatifs entre les trois solutions optimisées se réduisent. La solution avec la masse mobile la plus importante est donc à la fois la plus performante mais aussi la plus robuste.

La Figure 6.7(c) est obtenue en traçant les courbes de robustesse des solutions optimales pour 1 (bleu), 9 (rouge) et 18 (vert) absorbeurs dynamiques constituant le MTMD. Les calculs sont effectués pour une masse mobile équivalente entre les différents MTMDs. Il semblerait ici, en regardant le ratio d'énergie de déformation R_0^{MTMD} lorsque $h = 0$, que le simple TMD soit légèrement moins performant que les MTMDs à 9 et 18 absorbeurs. De plus, pour les trois solutions, le ratio croît de manière identique lorsque h augmente pour converger vers 1. Pour observer une différence plus flagrante, il faudrait reformuler le critère de performance en combinant l'aspect énergétique à l'amplitude maximale. D'autre part, il semble qu'entre les solutions à 9 et à 18 TMDs, la différence en terme de performance soit quasi nulle quelle que soit la valeur de h .

En conclusion, l'analyse de robustesse menée en considérant la fréquence propre associée au premier mode de flexion du SO comme incertaine permet de confirmer la décroissance rapide de l'efficacité des solutions optimales obtenues par un processus déterministe. Dans l'exemple présenté dans cette section, il semble néanmoins possible d'améliorer la robustesse de la solution en augmentant la capacité de dissipation dans les lames de liaisons, ce qui réduit quand même la performance du MTMD, ou en augmentant la masse mobile effective de chaque TMD, ce qui améliore aussi les performances du dispositif anti-vibratoire mais augmente sa charge embarquée ainsi que son encombrement.

Une méthode de conception robuste est donc développée pour améliorer les performances du réseau d'absorbeurs en contexte incertain.

6.2.4 MÉTHODE DE CONCEPTION ROBUSTE APPLIQUÉE AU MTMD NOMINAL

Dans cette dernière section de l'étude numérique, l'objectif est de proposer une méthode afin d'améliorer la robustesse du MTMD lorsque la fréquence propre associée au premier mode de flexion du SO est incertaine, sans augmenter la masse mobile effective ou l'amortissement dans les lames de liaisons. En effet, d'un point de vue industriel, il paraît plus raisonnable de développer des dispositifs anti-vibratoires robustes même si leurs performances doivent alors être moindres en comparaison à celles observées pour les solutions obtenues par optimisation déterministe.

Les résultats ne seront présentés que pour le cas du MTMD nominal, c'est-à-dire lorsque qu'il est composé de 9 TMDs, que le facteur de perte dans les lames η_{lames} est de 1% et que la masse volumique des masses accordées est égale à $\rho_{nominal}$.

Pour aboutir à la conception robuste du MTMD, une méthode d'optimisation robuste est mise en place. Ici, le but est de rendre le réglage du MTMD insensible

à un certain taux de variation de la fréquence propre à laquelle il est accordé tout en assurant le meilleur niveau de performance possible. La métrique employée est le ratio d'énergie de déformation élastique R_0^{MTMD} défini précédemment.

Schématiquement, cela revient à coupler le problème d'optimisation et l'analyse de robustesse présentés précédemment. De cette manière, la dispersion à minimiser est héritée de cette modélisation Info-Gap de l'incertitude qui impacte directement la valeur du ratio R_0^{MTMD} . L'horizon d'incertitude sur lequel l'optimisation robuste est effectué h_{rob} est fixé de manière arbitraire et il est plus petit que celui défini dans la section 6.2.3.1 : $h_{rob} \leq h$. La variabilité de la fréquence propre du premier mode de flexion du SO est toujours représentée par l'intermédiaire du coefficient α_{so} qui permet de perturber la matrice de raideur du SO K_{so} . Le modèle d'incertitude s'écrit donc :

$$U(h_{rob}, \tilde{\alpha}_{so}) = \{\alpha_{so} : |\alpha_{so} - \tilde{\alpha}_{so}| \leq h_{rob}\}, h_{rob} \geq 0 \quad (6.19)$$

Pour finir, la fonction objectif à minimiser est construite en considérant l'écart relatif entre le pire des cas observé sur l'horizon d'incertitude h_{rob} en terme de ratio R_0^{MTMD} , c'est-à-dire le ratio le plus élevé, et le ratio d'énergie de déformation élastique obtenu pour la solution après optimisation déterministe R_0^{opti} . Les variables de conception sont toujours les raideurs des lames de liaisons numériquement pilotées par les coefficients α_i pour $i = 1 \dots 9$.

Le problème d'optimisation robuste à résoudre peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha_i} \frac{|max(R_0^{MTMD}(\alpha_i, \alpha_{so})) - R_0^{opti}|}{|R_0^{opti}|} \\ \text{avec} \\ \alpha_{so} \in U(h_{rob}, \tilde{\alpha}_{so}) \\ h_{rob} \geq 0 \\ \alpha_{inf} \leq \alpha_i \leq \alpha_{sup}, i = 1, \dots, 9 \end{array} \right. \quad (6.20)$$

où $\alpha_{inf} = 0.8$ et $\alpha_{sup} = 1.2$ représentent respectivement les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle de variation du paramètre α_i , et où h_{rob} , l'horizon d'incertitude sur lequel le réglage doit être robuste prendra deux valeurs à titre d'exemple : 3% et 6%.

Une fois ce problème résolu et les coefficients robustes optimaux α_i déterminés, la même analyse de robustesse que celle présentée en section 6.2.3.1 est menée. La fonction de robustesse est donnée par l'équation 6.18 est menée. La Figure 6.8 montre les résultats de cette analyse de robustesse pour la solution optimale nominale (rouge) déjà étudiée précédemment, et pour les deux réglages optimaux et robustes lorsque les horizons d'incertitudes sur la fréquence propre sont de 3% (vert) et 6% (bleu).

Pour les deux solutions issues de l'optimisation robuste, la courbe de robustesse commence par un palier constant pour un certain niveau de performance en terme

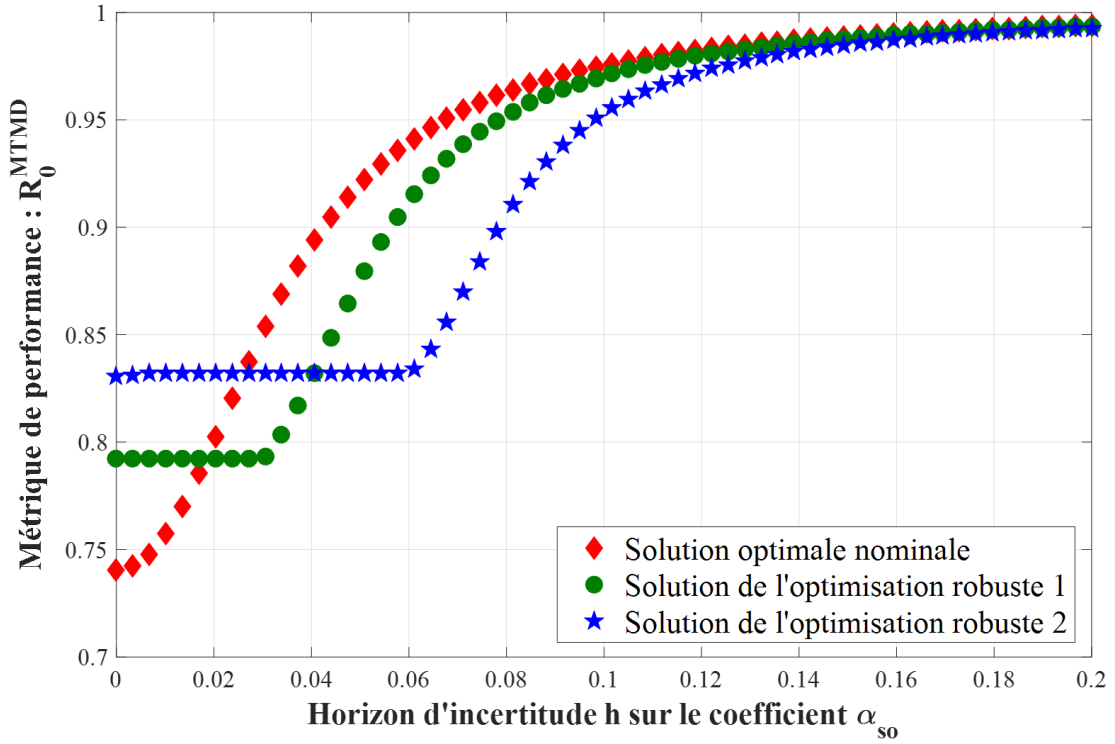


FIGURE 6.8 – Fonction de robustesse de la solution optimale (rouge) et des deux solutions optimales robustes pour $h_{rob} = 3\%$ (vert) et $h_{rob} = 6\%$ (bleu)

de ratio d'énergie de déformation élastique R_0^{MTMD} avant de tendre vers 1 avec une forme proche de celle de la courbe de robustesse associée à la solution optimale nominale. Pour le palier le plus court, c'est à dire pour le cas où $h_{rob} = 3\%$, la performance est d'environ 0.79 alors que pour le cas où $h_{rob} = 6\%$, le palier est plus large mais la performance est moindre : $R_0^{MTMD} = 0.835$. Comme cela était prévisible, le gain en robustesse du MTMD se traduit par une perte de sa capacité à réduire l'énergie de déformation élastique sur la bande fréquentielle d'intérêt autour du premier mode de flexion du SO. De plus, ce graphique permet d'établir une hiérarchie des différentes solutions observées vis-à-vis d'une métrique de performance, R_0^{MTMD} en fonction d'un niveau d'incertitude h sur la raideur du SO. Pour h compris entre 0 et 0.018, la solution optimale nominale est plus performante, puis vient la solution optimale robuste obtenue pour $h_{rob} = 3\%$ et enfin celle obtenue pour $h_{rob} = 6\%$. Entre $h = 0.018$ et $h = 0.04$, la première solution optimale robuste devient meilleure que les deux autres et pour h supérieur à 0.04, la hiérarchie initiale est complètement inversée. Dans ce cadre, un apport de connaissance sur la variation de la fréquence propre du premier mode de flexion du SO peut mener à la sélection d'une solution particulière par rapport aux autres.

Il est à noter que la formulation choisie du problème d'optimisation robuste permet bien de rendre la solution insensible à la méconnaissance sur la fréquence propre à laquelle le MTMD doit être accordé sur l'horizon d'incertitude fixé h_{rob} .

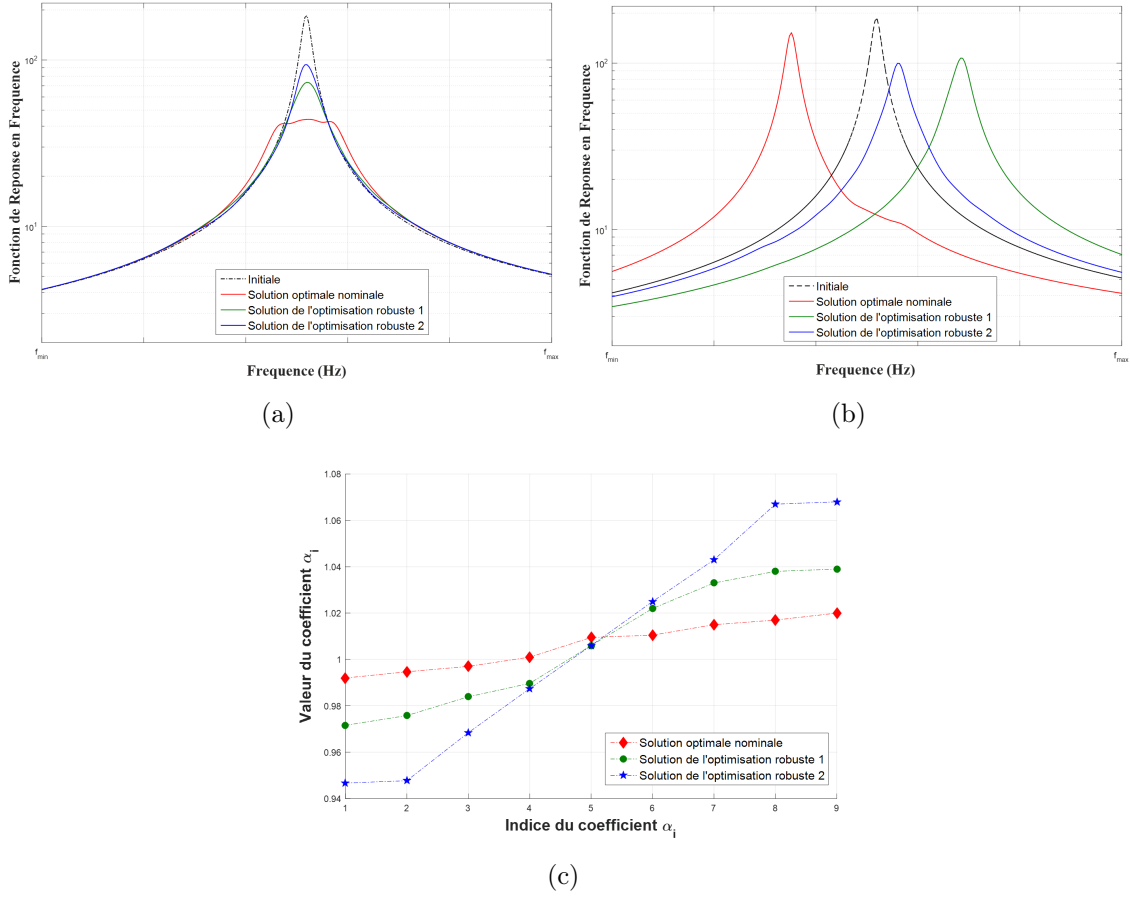


FIGURE 6.9 – FRFs de la solution optimale et des deux solutions optimales robustes pour $h = 0$ (a) et $h = 6\%$ (b) et répartition des coefficients α_i pour chacune des solutions (c)

Les tracés (a) et (b) de la Figure 6.9 montrent les FRFs de la solution optimale nominale (rouge) et des deux solutions issues de l'optimisation robuste pour $h_{rob} = 3\%$ (verte) et de $h_{rob} = 6\%$ (bleue) comparativement à la FRF du SO simple, le tout pour deux valeurs d'horizon d'incertitude, respectivement, $h = 0$ et $h = 6\%$. Cette représentation permet d'observer la performance des solutions en terme d'amplitude maximale au passage du mode d'intérêt.

Lorsqu'il n'y a pas d'incertitude sur la fréquence propre du premier mode de flexion du SO, la solution optimale nominale est bien plus performante que les autres. Les FRFs des solutions issues du processus d'optimisation robuste peuvent être assimilées à la FRF du système initial avec un amortissement supérieur. Il n'y a plus ce phénomène de plateau d'amplitude moyen, le MTMD agit comme une source d'amortissement apparent supplémentaire au passage du mode d'intérêt et la solution obtenue pour $h_{rob} = 3\%$ est plus performante que celle obtenue pour $h_{rob} = 6\%$. Cependant, lorsque l'horizon d'incertitude augmente ($h = 6\%$) la hiérarchie des solutions en terme d'amplitude maximale s'inverse comme cela était prévu d'après

l'analyse de la Figure 6.8. En effet, les rapports des amplitudes maximales observées entre les solutions avec et sans MTMD et le SO initial sont respectivement, pour la solution optimale nominale, pour la solution optimale robuste lorsque $h_{rob} = 3\%$ et celle lorsque $h_{rob} = 6\%$, de 1.21, 1.73 et 1.86.

Pour finir, la Figure 6.9 (c) permet de visualiser la valeur des coefficients α_i permettant de régler la position des pôles du MTMD pour la solution optimale nominale (rouge), la solution optimale robuste obtenue pour $h_{rob} = 3\%$ (vert) et pour $h_{rob} = 6\%$ (bleu). Afin de simplifier la lecture de ce graphique, les coefficients α_i ont été préalablement classés par ordre croissant. Il apparaît alors que pour une optimisation déterministe, l'ensemble des pôles du MTMD s'agglomère dans une bande étroite autour de la fréquence propre à contrôler alors que lorsqu'une contrainte en robustesse est introduite, les pôles ont tendance à être répartis sur une bande fréquentielle plus large. De manière générale, ces courbes peuvent être considérées comme quasi-linéaires pour les trois solutions avec un effet de bord pour la solution optimale robuste obtenue pour $h_{rob} = 6\%$. Ce résultat était prévisible puisqu'en considérant le MTMD comme un filtre mécanique, si l'ensemble des pôles était concentré sur une seule fréquence, on obtiendrait une pente de filtrage verticale et un filtre parfait à bande étroite alors qu'en répartissant les pôles, la pente se trouverait plus ou moins inclinée, permettant d'agrandir la bande de fonctionnement du filtre mais le rendant moins efficace.

Au niveau industriel, la définition d'un critère de positionnement des pôles d'un MTMD reliant leur paramètres classiques, à savoir la masse, la raideur et l'amortissement, au coefficient directeur d'une pente quasi-linéaire permettant de satisfaire un certain niveau de robustesse pourrait être intéressant.

6.2.5 CONCLUSION DE L'ÉTUDE NUMÉRIQUE

En conclusion, cette section portant sur l'étude numérique du comportement dynamique d'une structure couplée à un MTMD a permis d'introduire une solution technique particulière composée de 9 TMDs et directement implantée dans le SO afin de limiter l'encombrement et la masse ajoutée.

Une modélisation éléments finis de la structure a été effectuée ainsi que la formulation réduite associée afin de pouvoir mener plusieurs optimisations pour différents jeux de paramètres ainsi que des analyses de robustesse plus rapidement.

Une procédure d'optimisation déterministe cherchant à minimiser l'énergie de déformation élastique sur une bande fréquentielle donnée autour du premier mode de flexion de SO à contrôler a permis de déterminer une solution optimale nominale en terme de répartition des pôles du MTMD. Cette opération a été répétée pour différents jeux de paramètres initiaux afin d'en étudier l'influence sur le comportement dynamique du système global.

Cependant, il apparaît qu'en condition réelle, la fréquence propre à laquelle doit être accordée le MTMD varie de manière aléatoire à cause d'un changement dans la ré-

partition des masses embarquées. La robustesse des solutions déterministes optimales obtenues est étudiée à l'aide de la théorie Info-Gap.

Il en ressort que le nombre de TMD, pour des conceptions à masse accordée égale, influe sur l'amplitude maximale de la FRF du système global mais impacte très peu la robustesse quand la métrique de performance est définie en terme d'énergie de déformation. Une augmentation de la masse mobile effective permet d'améliorer à la fois, la performance du MTMD et sa robustesse. Lorsque le paramètre considéré est le facteur de perte dans les lames de liaisons, il semblerait qu'il existe une valeur optimale permettant d'améliorer les performances en terme d'amplitude maximale et d'énergie de déformation élastique. De plus, lorsqu'il devient élevé, les performances se dégradent mais le système devient plus robuste vis-à-vis de l'incertitude considérée.

Dans la dernière partie, une méthode d'optimisation robuste permettant de rendre le réglage du MTMD insensible à un certain niveau de méconnaissance h sur la fréquence propre d'intérêt et pour une métrique basée sur l'énergie de déformation élastique est proposée. Cette amélioration de la robustesse entraîne une réduction de la performance car la répartition des pôles du MTMD, qui est quasi-linéaire autour de la fréquence d'intérêt, est plus dispersée que lors de l'optimisation déterministe. Un changement de l'incertitude considérée et/ou de la métrique de performance employée mènerait, sans doute, à un jeu de réglage des absorbeurs dynamiques composant le MTMD.

La conception robuste du MTMD se traduit, au passage du premier mode de flexion du SO à contrôler, par un amortissement virtuellement supplémentaire. Afin de le confirmer, la structure est soumise à un choc. Un demi-sinus d'une largeur de 0.005 s et d'une amplitude de 0.1 g est appliqué au niveau du lest parallélépipédique et les points d'observation sont toujours situés à l'extrémité du SO où il y a les lests représentant les optiques comme le montre la Figure 6.4 (b). D'une manière similaire à celle employée dans le chapitre 5 et plus précisément dans la section 5.4.1, le modèle éléments finis est découpé entre ses différents degrés de liberté : excités, libres, et encastrés avant d'être projeté sur une base modale tronquée et enrichie pour représenter correctement la direction d'excitation. Le modèle d'amortissement hystérique est aussi approximé par un amortissement visqueux autour du mode d'intérêt.

Les résultats de la simulation sont présentés sur la Figure 6.10. Lorsque le SO n'est pas couplé à un MTMD (noir), la réponse est une sinusoïde décroissante classique dont la fréquence correspond au premier mode de flexion en condition encastré-libre et dont la décroissance est pilotée par son amortissement intrinsèque (hypothèse de liaison parfaite). Lorsque le SO est couplé à un MTMD dont le réglage est obtenu par optimisation déterministe (rouge), la réponse présente une décroissance très rapide à la fréquence du mode d'intérêt. Il apparaît néanmoins un phénomène de battement de l'énergie vibratoire entre le SO et le MTMD comme en témoigne la modulation en amplitude sur la réponse. Ce type de phénomène est typique des MTMDs et la valeur du temps caractéristique de battement apporte même des informations sur le

nombre de TMD constituant le MTMD. Le lecteur intéressé pourra trouver plus de détails dans [Weaver 96] et [Carcattera 04]. La réponse du SO associé à une conception robuste du MTMD (bleue), ici pour $h_{rob} = 6\%$, est une sinusoïde décroissante où le phénomène de battement est difficilement détectable. De plus, il apparait clairement, sur cette représentation temporelle, que le MTMD avec ce réglage "robuste" agit comme un amortissement supplémentaire par rapport à la réponse du SO seul (noire).

Pour finir, d'un point de vue industriel, le réglage optimal robuste pourrait permettre de réduire les phénomènes de fatigue mécanique.

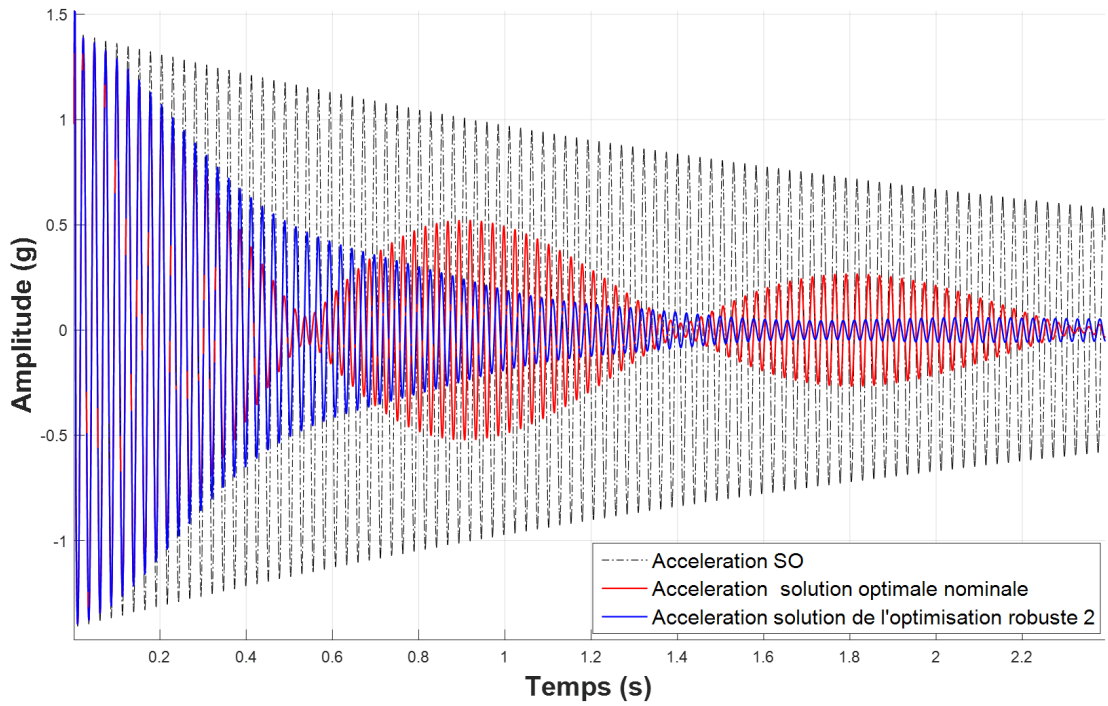


FIGURE 6.10 – Réponse transitoire du SO (noir), de la solution optimale nominale (rouge) et de la solution optimale robuste obtenue pour $h_{rob} = 6\%$ (bleu)

6.3 ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE STRUCTURE COUPLÉE À UN MTMD

Une étude expérimentale a été menée pour valider les résultats obtenus numériquement. Au regard du temps disponible en fin de thèse et de la complexité de la solution intégrée, il a été décidé, dans un premier temps, de valider la démarche de dimensionnement sur une solution MTMD rapportée, basée sur une conception issue de la littérature. La conception de la solution MTMD retenue est présentée

dans la première partie et les outils numériques présentés dans la section 6.2 sont de nouveau mis en œuvre afin de déterminer le réglage de l'ensemble des absorbeurs. Cette simplification a été nécessaire afin de réduire le temps de développement de la solution technique.

La deuxième partie présente la maquette échelle 1 : 1 du Support Optique ainsi que l'ensemble des essais vibratoires qui ont été réalisés sur cette structure. Elle est complétée par une corrélation calculs/essais sur une bande fréquentielle comportant les quatre premiers modes de vibrations.

Enfin, la dernière partie présente les résultats des essais vibratoires obtenus sur le SO couplé au MTMD. Les deux principaux objectifs sont d'une part, de valider les outils numériques ayant servis au dimensionnement du MTMD et d'autre part, d'obtenir une première preuve de concept concernant l'utilisation de ce type de dispositif anti-vibratoire sur des produits *Thales LAS Fr.*

6.3.1 CONCEPTION D'UN MTMD EXTERNE AU SO

Principalement pour des raisons de temps et de facilité de développement, la conception du MTMD initialement proposée dans la section 6.2 a été repensée pour se rapprocher de celle présentée dans les travaux de Carcaterra [Carcaterra 12] comme le montre la Figure 6.11 (a).

Le MTMD se présente sous la forme d'un ensemble de poutres encastrées-libres assurant la fonction d'absorbeur dynamique et possédant une épaisseur de 2 mm, une largeur de 5 mm et de longueurs variables. Les poutres de chaque étage en vis-à-vis ont des longueurs identiques.

Le matériau dans lequel sont réalisés ces deux "peignes" de poutres présente une raideur et un taux d'amortissement qui peuvent être pilotés. La réalisation d'un MTMD exploitant ce type de matériau fait l'objet d'une demande de brevet de la part de *Thales LAS Fr.* La solution technique permettant d'obtenir le réglage des TMDs souhaité ne sera donc pas détaillée dans ce manuscrit.

La Figure 6.11 (b) illustre l'implantation de cette version du MTMD sur le SO ainsi que les positions de la source d'excitation et des nœuds d'observation qui seront utilisées afin de tracer les FRFs.

Le MTMD est positionné à l'extrémité du SO supportant les lests optiques puisque, comme cela a été expliqué dans la section 6.3, il s'agit d'un endroit où le débattement est important au passage du premier mode de flexion du SO.

À l'aide des méthodes présentées dans la section 6.2, les répartitions des pôles du MTMD sont déterminées (Figure 6.12 (c)). Elles sont obtenues par une optimisation déterministe (rouge) et par la procédure d'optimisation robuste lorsque $h_{rob} = 6\%$. Il apparaît, pour le MTMD étudié, que ces deux répartitions sont similaires. Le niveau de performance en terme d'énergie de déformation élastique mais aussi du point de vue du niveau d'amplitude est élevé comme en témoigne la Figure 6.12 (a). Le

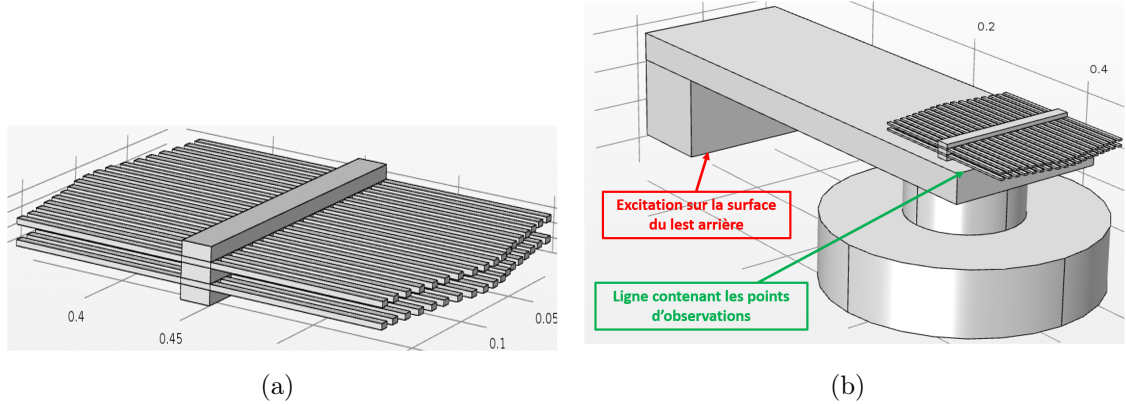


FIGURE 6.11 – Nouvelle conception du MTMD inspirée des travaux de Carcaterra [Carcattera 12] (a) et, son implantation sur le SO (b)

rapport entre l'amplitude maximale atteinte par la FRF du SO seul et celle du SO couplé au MTMD est de 12 pour un facteur de perte estimé au niveau des poutres de $\eta_{TMD} = 1\%$ et un facteur de perte général estimé pour le reste de la structure de $\eta_{SO} = 0.3\%$ dans les deux cas. Ce dernier est plus élevé que lors de l'étude numérique (section 6.2) car il est issu d'un recalage à partir des essais vibratoires réalisés sur le SO seul qui seront présentés dans la section 6.3.2. En considérant une méconnaissance sur la fréquence propre à contrôler et une métrique de performance sur l'énergie de déformation élastique, la robustesse du dispositif est aussi accru et ne diffère pas de manière significative comme cela est illustré par la Figure 6.12 (b). Le ratio d'énergie de déformation élastique R_0^{MTMD} passe de 0.74 (section 6.2) à 0.5 lorsque l'horizon d'incertitude est de $h = 0$ et l'efficacité du MTMD décroît plus lentement.

Pour s'en convaincre, la Figure 6.12 (d) présente les FRFs obtenues sur le SO avec et sans MTMD, lorsque la raideur du SO K_{so} varie entre $0.75K_{so}$ et $1.15K_{so}$ ce qui permet d'évaluer l'efficacité du dispositif en présence d'incertitudes sur la raideur du système principal. Lorsque K_{so} varie de $\pm 5\%$, le ratio entre les amplitudes maximales de la FRF initiale et celle avec le MTMD est de 9.5 pour un ratio d'énergie $R_0^{MTMD} = 0.52$. Quand cette variation est de l'ordre $\pm 15\%$, le ratio entre les amplitudes maximales passe à 1.8 alors que celui en énergie de déformation est égale à 0.73.

L'ensemble de ces différences infimes entre les deux procédures de dimensionnement, optimisation déterministe et optimisation robuste, pour le MTMD considéré et les critères observés vient de l'augmentation drastique de sa masse mobile. Cette augmentation explique aussi les performances accrues par rapport à celles obtenues lors de l'étude numérique menée dans la section 6.2.

La maquette du MTMD a été réalisée sur la base de ces dimensionnements numériques, et des essais vibratoires ont été menés pour caractériser son comportement. La répartition des pôles du MTMD étant similaire entre la procédure d'optimisation déterministe et celle d'optimisation robuste, le réglage des absorbeurs dynamiques

6.3 ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE STRUCTURE COUPLÉE À UN MTMD

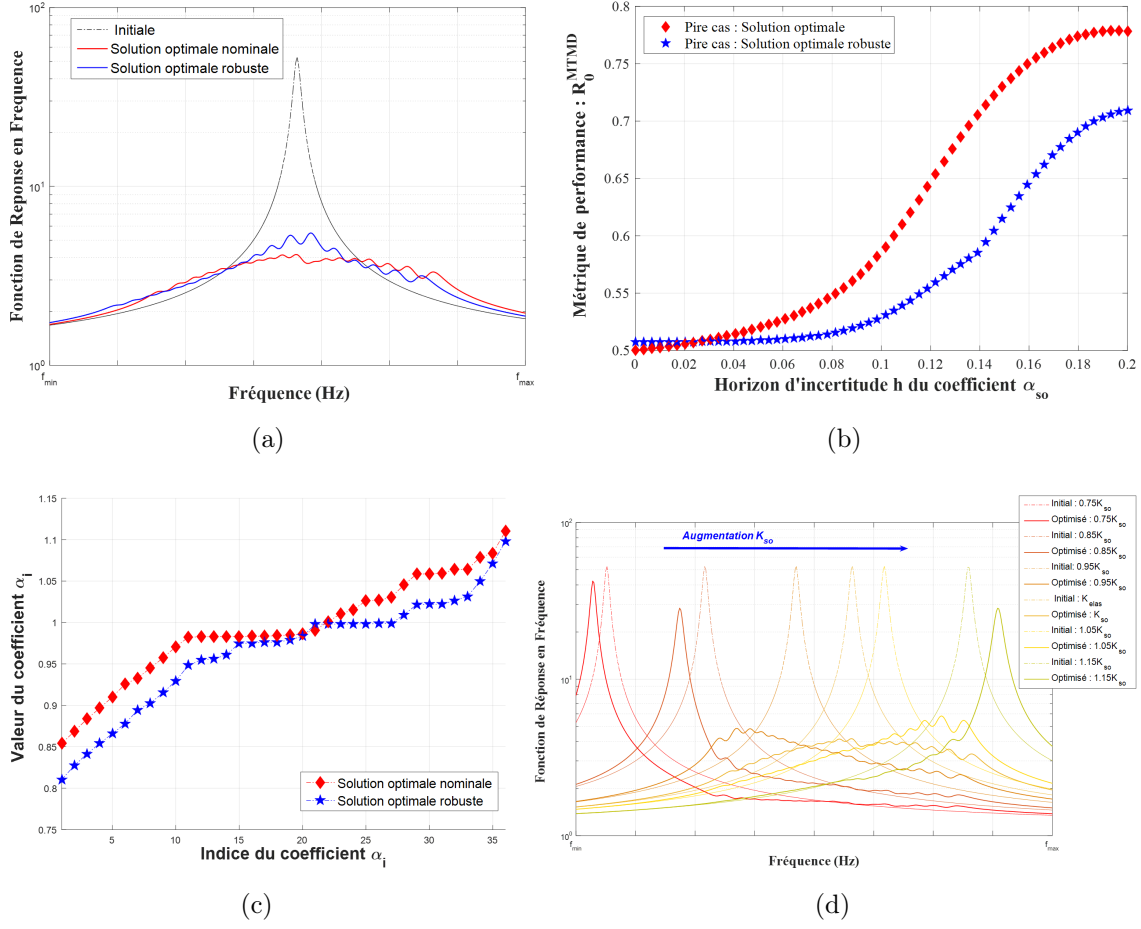


FIGURE 6.12 – Comparaison entre la FRF du SO et celle du SO avec le nouvel MTMD (a), courbe de robustesse du nouveau système optimal nominale en présence de méconnaissance sur la raideur du SO (b), répartition des pôles du MTMD obtenue par optimisation déterministe (c) et, évolution de la paire FRF du SO et FRF du système global optimisé lorsque la raideur du SO varie (d)

est effectué en se basant sur la répartition de la première.

6.3.2 ESSAIS VIBRATOIRES SUR LE SO ET CORRÉLATION CALCULS/ESSAIS

Dans cette section, l'objectif est de réaliser des essais sur une maquette échelle 1 : 1 du Support Optique et d'effectuer un recalage du modèle numérique.

La Figure 6.13 permet de visualiser la maquette du SO ainsi que les deux montages utilisés. Les matériaux utilisés sont de l'acier inoxydable et un alliage d'aluminium de série 6000 comme cela était illustré dans la section 6.2 sur la Figure 6.2.

La Figure 6.13 (c) présente l'emplacement des 14 points de mesures sur le SO. Les points 2 à 5 comportent des accéléromètres tri-axes. Aux points 6, 7 et 8 une mesure accélérométrique dans les trois dimensions de l'espace est rendue possible grâce à l'utilisation de trois accéléromètres mono-axe. Des accéléromètres mono-axes orientés selon Z sont placés sur les autres points. Sur cette photo, il est aussi possible de voir les quatre points d'ancrage de la suspension permettant de suspendre la structure en condition libre-libre.

La Figure 6.13 (a) montre la configuration expérimentale adoptée pour le cas des essais réalisés à l'aide d'un marteau de choc. La bande fréquentielle excitée s'étend de 0 à 750 Hz et un total de 50 coups au point 5 pour chacune des directions de l'espace est effectué. Il est à noter que l'orientation des axes est aussi donnée sur cette photo.

Pour finir, la Figure 6.13 (b) est une photographie de la configuration testée avec une excitation au pot vibrant. Ce dernier est relié à la structure par l'intermédiaire d'une tige souple au niveau du point 6. L'excitation est un sinus balayé allant de 100 à 700 Hz en 2.5 s et est appliquée selon Z.

Dans les deux configurations d'essais, une chaîne d'acquisition LMS est utilisée pour enregistrer les mesures accélérométriques et de force sur la bande fréquentielle d'intérêt. Le logiciel associé permet alors d'exporter les mesures au format universel pour effectuer le post-traitement sur un logiciel d'identification modale développé au département Mécanique Appliquée : *MODAN*.

Avant de présenter les résultats de l'identification, il est à noter que la cohérence est bonne ≥ 0.9 sur la bande fréquentielle d'intérêt pour l'ensemble des essais.

Le logiciel *MODAN* s'appuie sur la méthode d'identification inverse LSCF "*Least Square Complex Frequency*" et son extension directe dans le cas où plusieurs FRFs expérimentales sont utilisées simultanément durant le processus d'identification : la méthode *PolyMAX*. De cette manière, il est possible d'obtenir les fréquences propres du SO, ainsi que les amortissements modaux et les déformées des modes de vibration si la géométrie est renseignée.

Sur la bande fréquentielle d'intérêt, quatre modes de vibrations du SO sont excités. Pour des raisons de confidentialité, les valeurs des fréquences propres ne seront pas affichées. La fréquence propre notée f_1 est associée au premier mode de flexion du SO c'est-à-dire le mode problématique sur lequel doit agir le MTMD.

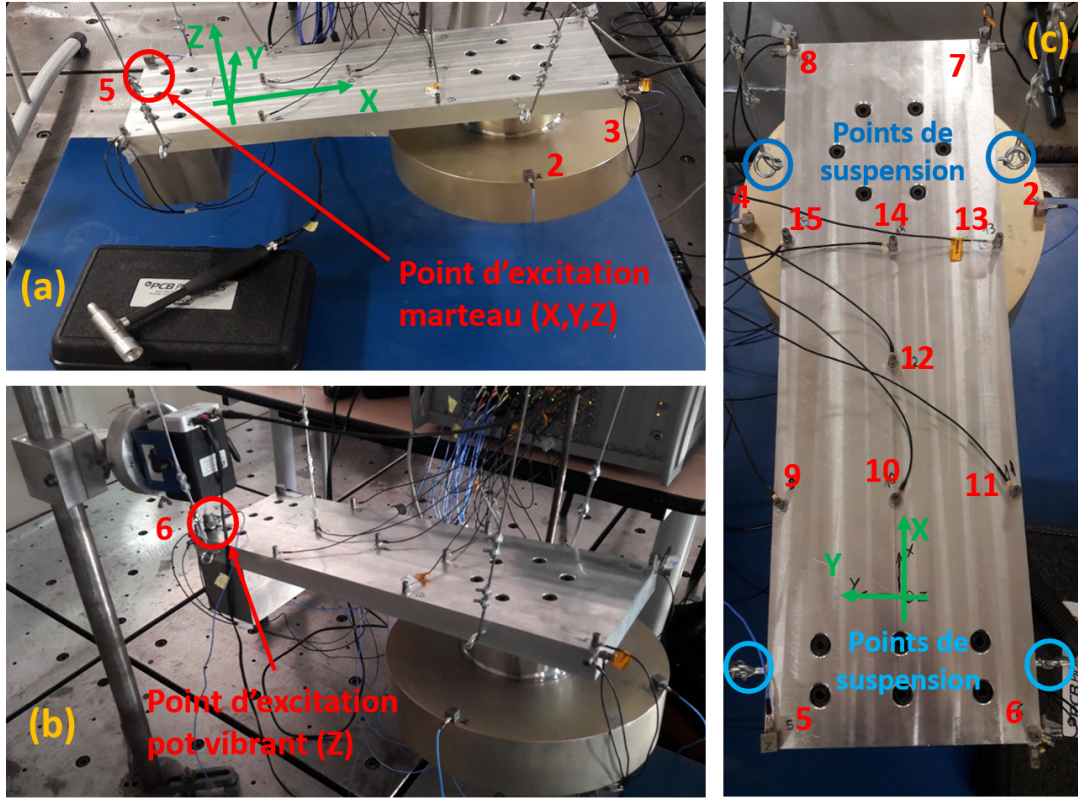


FIGURE 6.13 – Set-up expérimental du SO en libre-libre pour les essais avec marteau de choc (a), et avec pot vibrant (b) avec une cartographie des points d'intérêts : accéléromètres et attaches (c)

Deux méthodes d'excitation sont utilisées pour l'analyse expérimentale afin de mener des études comparatives et recaler le modèle numérique. Les résultats des essais sont présentés sur la Figure 6.14.

Les écarts relatifs les plus importants entre la simulation et les essais sont répertoriés dans le Tableau 6.1. Ce tableau comporte aussi les amortissement modaux expérimentaux pour l'ensemble des essais.

Les écarts observés au niveau des fréquences propres semblent corrects par rapport aux hypothèses de modélisation formulées et à la dispersion inhérente aux essais expérimentaux. De plus, les quatre modes de vibrations identifiés sont des modes réels. L'amortissement modal est sensiblement le même entre les différents essais pour le mode d'intérêt associé à la fréquence propre f_1 ainsi que les deux suivants. En revanche, au niveau du quatrième mode, l'écart entre les chocs marteaux et l'excitation au pot vibrant est important. Il est sans doute lié à la différence entre les types d'excitation et à leur niveau puisque, comme le montre la Figure 6.15 qui permet de visualiser les déformées numériques (a) et expérimentales (b), le quatrième mode de

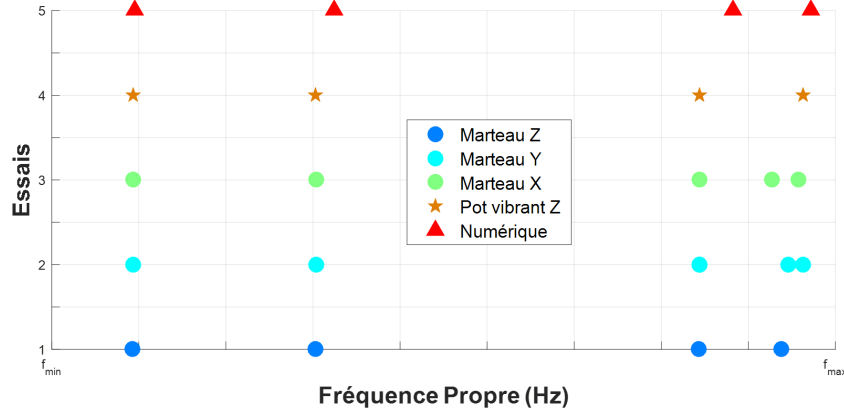


FIGURE 6.14 – Fréquences propres des quatre premiers modes de vibration du SO pour l'ensemble des essais réalisés et la simulation numérique

	f_1	f_2	f_3	f_4
$e_{relatif}^{max}$	0.9%	4%	4.2%	4.2%
$\xi_{marteau}^X$	0.16%	0.14%	0.35%	1.9%
$\xi_{marteau}^Y$	0.12%	0.15%	0.4%	1.8%
$\xi_{marteau}^Z$	0.16%	0.19%	0.34%	2%
ξ_{spot}^Z	0.17%	0.16%	0.41%	0.48%

TABLE 6.1 – Écart relatif maximal entre les fréquences propres issues de la simulation numérique et celles issues des essais vibratoires et amortissements modaux pour les différents tests

vibration de la structure est un mode de bascule du lest cylindrique suivant l'axe X ce qui entraîne une sollicitation en cisaillement au niveau des deux interfaces permettant l'assemblage du Support Optique et des lests.

Mis à part ce mode, les autres sont plus classiques et ne sont pas liés à l'assemblage des différents composants. Le premier mode de vibration correspond au premier mode de flexion du SO, c'est-à-dire le mode d'intérêt de cette étude, le second est le premier mode de torsion et le troisième le second mode de flexion.

Une manière de s'assurer que les modes expérimentaux et numériques sont identiques est d'utiliser le "*Modal Assurance Criterion*" (MAC). Ce critère est défini par la relation suivante :

$$MAC_{ij} = \sqrt{\frac{(\psi_i^T M \phi_j)(\psi_j^T M \phi_i)}{(\psi_i^T M \psi_i)(\phi_j^T M \phi_j)}} \quad (6.21)$$

où ψ et ϕ sont les modes de vibration de la structure étudiée obtenus de deux manières différentes. Généralement, un ensemble de modes ψ vient de l'étude numérique alors que l'autre ensemble ϕ est issu d'essais vibratoires. La matrice M désigne la matrice de masse du système. Le MAC est un produit scalaire fournissant une me-

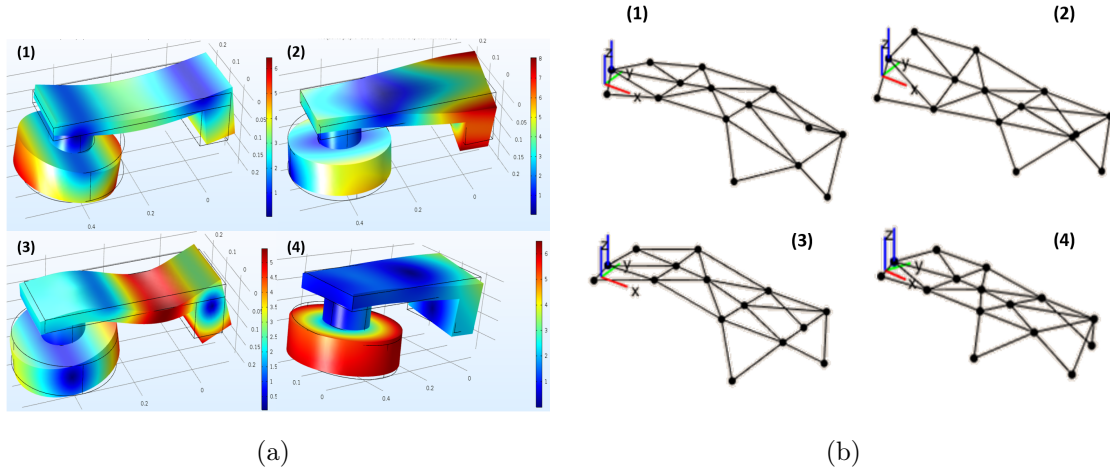


FIGURE 6.15 – Représentation des déformées modales issues de la simulation numérique (a) et des essais vibratoires (b)

sure de la corrélation entre les modes. Lorsque deux modes sont identiques, ils sont colinéaires et le produit scalaire (MAC) est égale à 1. Au contraire, lorsqu'ils sont différents, ils sont au mieux orthogonaux, et le MAC est de 0. Si deux modes ont des déformées plus ou moins semblables, le MAC prend une valeur entre 1 et 0. De manière générale, lorsque ce critère est supérieur à 0.8, on considère que les deux modes sont correctement corrélés et qu'ils sont donc identiques.

Une transformation est nécessaire pour faire correspondre les nœuds expérimentaux et numériques avant d'appliquer le "*Modal Assurance Criterion*" (MAC) et la structure étudiée ne présente pas de mode double sur la bande fréquentielle d'intérêt.

La Figure 6.16 présente les matrices MAC obtenues en comparant les modes issus des essais vibratoires au marteau selon les trois directions de l'espace et au pot vibrant selon Z par rapport à ceux issus de l'étude numérique.

De manière générale, les modes expérimentaux et numériques sont bien corrélés. Il semble néanmoins que les chocs marteaux selon Y au niveau du point 5 n'excitent pas correctement le second mode de flexion de la structure ce qui entraîne une absence de corrélation à ce niveau dans la matrice MAC. De plus, les MAC autour de 0.5-0.6 proviennent du fait que les déformées du premier mode de flexion et du second mode de flexion ainsi que du mode de torsion et du mode de bascule de la tête optique, présentent des similitudes.

Au vu des résultats des essais vibratoires sur la maquette du SO et des résultats de l'étape de corrélation calculs/essais, le modèle numérique est considéré comme satisfaisant malgré les hypothèses formulées et la maquette conforme aux attentes de *Thales LAS Fr.*

L'amortissement modal expérimental au niveau du premier mode de flexion du SO est plus élevé que celui utilisé dans l'étude numérique. Cela peut s'expliquer par

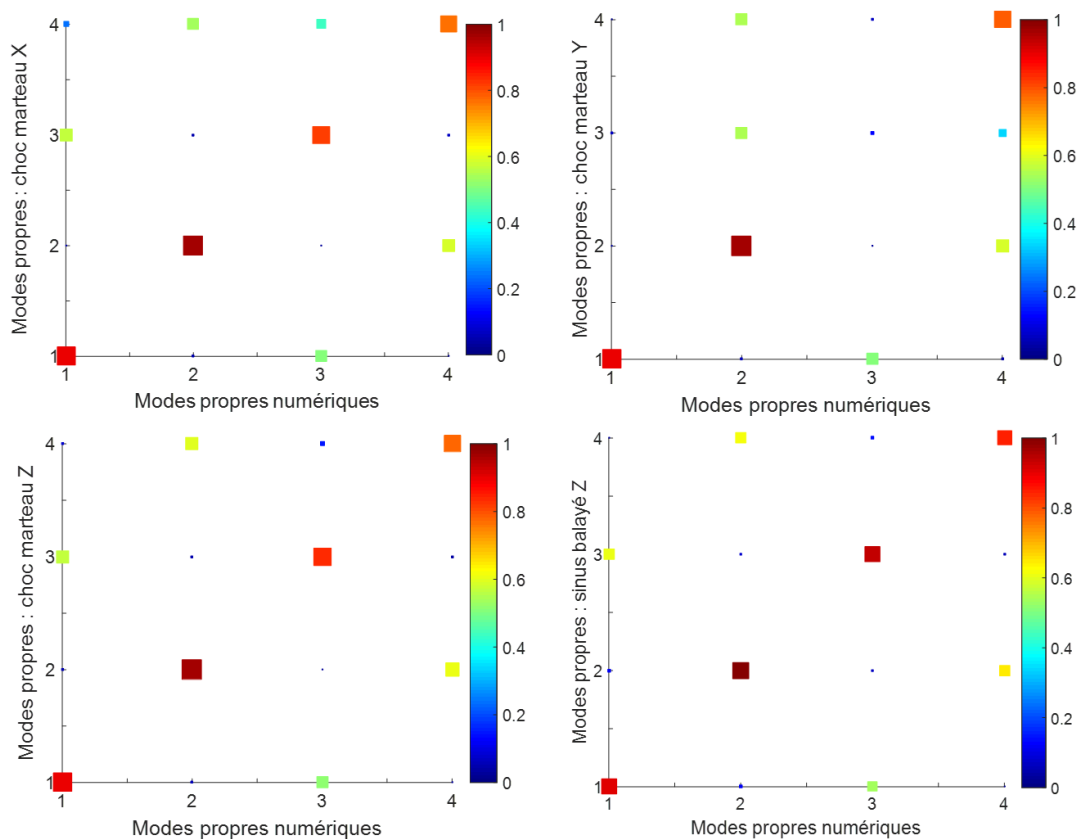


FIGURE 6.16 – MAC entre les modes de vibrations issues des différents essais vibratoires et ceux issus de la simulation numérique

des phénomènes dissipatifs se produisant au niveau des liaisons qui sont considérées comme parfaites dans la simulation. Ce dernier a donc été recalé avant de mener à bien le dimensionnement du MTMD présenté dans la section 6.3.1 ($\eta_{so}^{exp} = 0.3\%$).

6.3.3 ESSAIS VIBRATOIRES SUR LE SO COUPLÉ AU MTMD

Dans cette dernière section, des essais vibratoires sur la maquette échelle 1 : 1 du Support Optique couplé au MTMD présenté en section 6.3.1 sont effectués afin de valider la méthode de dimensionnement mise en place, les outils numériques utilisés, et l'implantation de ce type de dispositif anti-vibratoire sur les produits *Thales LAS Fr.*

Le dispositif MTMD conçu comprend deux peignes mais les essais n'ont pu être réalisés qu'avec un seul puisque l'autre a été jugé non-conforme (Figure 6.17 (a)). En effet, comme cela a déjà été mentionné dans la section 6.3.1, le matériau constituant les peignes est particulier. Son usinage et sa manutention nécessitent une attention particulière.

Afin de simplifier la fabrication des peignes, la courbe de répartition des pôles

6.3 ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE STRUCTURE COUPLÉE À UN MTMD

du MTMD (Figure 6.12 (a)) est approximée par une droite au sens des moindres carrés. La pente de cette droite permet de déterminer l'évolution de la longueur des différentes poutres formant le peigne.

Le MTMD est fixé sur le SO, à l'endroit où le débattement induit par le premier mode de flexion est important, c'est-à-dire au-dessus des lests représentant les optiques comme le montre la Figure 6.17 (c). La maquette du système global est suspendue par les mêmes points d'attaches que lors des essais sur le SO seul.

Cette figure, montre également le positionnement des différents points de mesures. Les accéléromètres utilisés sont tous des mono-axes orientés selon Z .

Comme le montre la Figure 6.17 (b), les mesures accélérométriques sont couplées à de la mesure de champ effectuée à l'aide d'un vibromètre 3D *Polytech*. L'objectif est de tester l'emploi de ce type de dispositif de mesures expérimentales sur une structure industrielle complexe.

Pour finir, l'excitation de la structure est réalisée à l'aide d'un marteau de choc au niveau du point 1 et uniquement selon l'axe Z . La bande fréquentielle excitée s'étend de 0 à 500 Hz et 20 coups sont effectués pour chaque configuration : sans et avec MTMD.

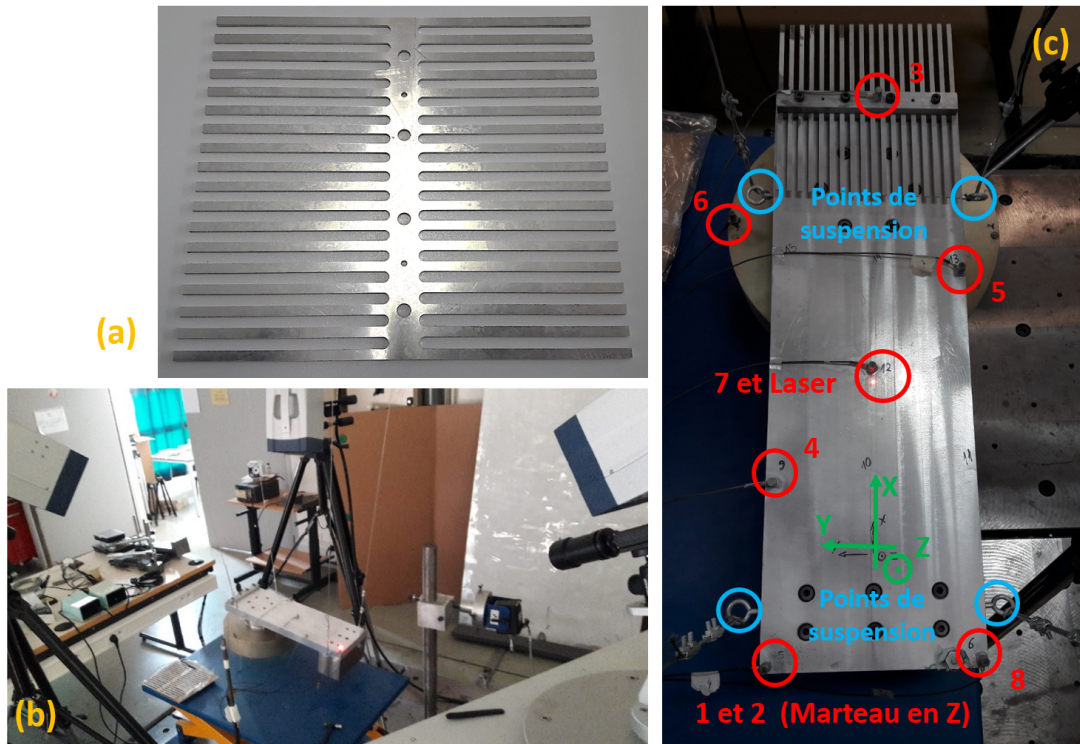


FIGURE 6.17 – MTMD constitué de 36 poutres encastrés-libres (a), set-up expérimental du SO associé au MTMD en libre-libre pour les essais avec marteau de choc et vibrométrie 3D (b) et, cartographie des points d'intérêts : accéléromètres, laser, excitation et attaches (c)

Cette fois, la chaîne d'acquisition utilisée pour enregistrer l'ensemble des mesures

(accéléromètre, vibromètre et marteau de choc) dans les deux configurations est la chaîne *Polytech* associée au vibromètre 3D. Les mesures brutes sont exportées au format universel pour être post-traitées sous le logiciel *MODAN*.

La cohérence est supérieure à 0.85 sur la bande fréquentielle d'intérêt pour l'ensemble des essais même si celle relative aux mesures vibrométriques est généralement la moins élevée. Cependant la cohérence n'est pas bonne (≤ 0.5) pour les mesures relevées au point 6 qui se situe sur le lest optique sûrement à cause du faible niveau d'excitation. Elles ne seront donc pas prises en compte dans la suite de l'étude.

D'autre part, avec le montage utilisé, les angles d'incidence des trois lasers sont trop élevés ce qui détériore leur niveau de réception et complexifie la récupération de mesures sur les poutres encastrées-libres constituant le MTMD. Il a néanmoins été possible d'observer les déplacements du SO avec et sans le MTMD lors d'essais où l'excitation était un sinus balayé allant de 100 à 700 Hz en 2.5 s , appliquée au point 8 selon l'axe Z . Les résultats de ces essais n'ont pas été conservés pour le post-traitement car la cohérence était mauvaise (≤ 0.5) mais les images, obtenues grâce au vibromètre 3D *Polytech*, du premier mode de flexion du SO sont présentées sur la Figure 6.18 (a). La Figure 6.18 (b) représente toujours le premier mode de flexion du SO mais lorsque ce dernier est couplé au MTMD. Il apparaît alors qu'une partie de l'énergie vibratoire entre bien dans le dispositif et qu'un nombre conséquent de poutres encastrées-libres sont alors actives. Les absorbeurs qui sont, spatialement, les plus éloignés de la source d'excitation (point 8 dans le cas du pot vibrant) sont les plus sollicités. Ce phénomène était prévisible puisqu'ils se trouvent à un endroit où le débattement induit par le premier mode de flexion du SO est important.

Pour finir, la suspension utilisée dans cet exemple pour représenter la condition libre-libre, présente un défaut majeur vis-à-vis de l'utilisation de la mesure de champ. En effet, avec l'excitation réalisée au marteau de choc, il est possible d'observer des mouvements de corps rigides dus au dimensionnement de la suspension sur les signaux temporels issues des mesures vibrométriques (Figure 6.19 (a)). Ces oscillations basses fréquences agissent comme des porteuses des oscillations caractéristiques du comportement dynamique de la structure et nuisent surtout à la focalisation des trois têtes laser sur un point unique.

Il est à noter que ces mouvement de corps rigides sont aussi présents sur les mesures accélérométriques mais dans des proportions moindres.

Les Figures 6.19 (b) et (c) montrent respectivement l'ensemble des FRFs entre les différents points de mesures accélérométriques et la force de référence pour la configuration sans et avec MTMD. Elles sont directement issues de l'environnement *MODAN*.

Pour la configuration sans MTMD, l'identification modale menée sous *MODAN* permet de déterminer la fréquence propre du premier mode de flexion du SO ainsi que

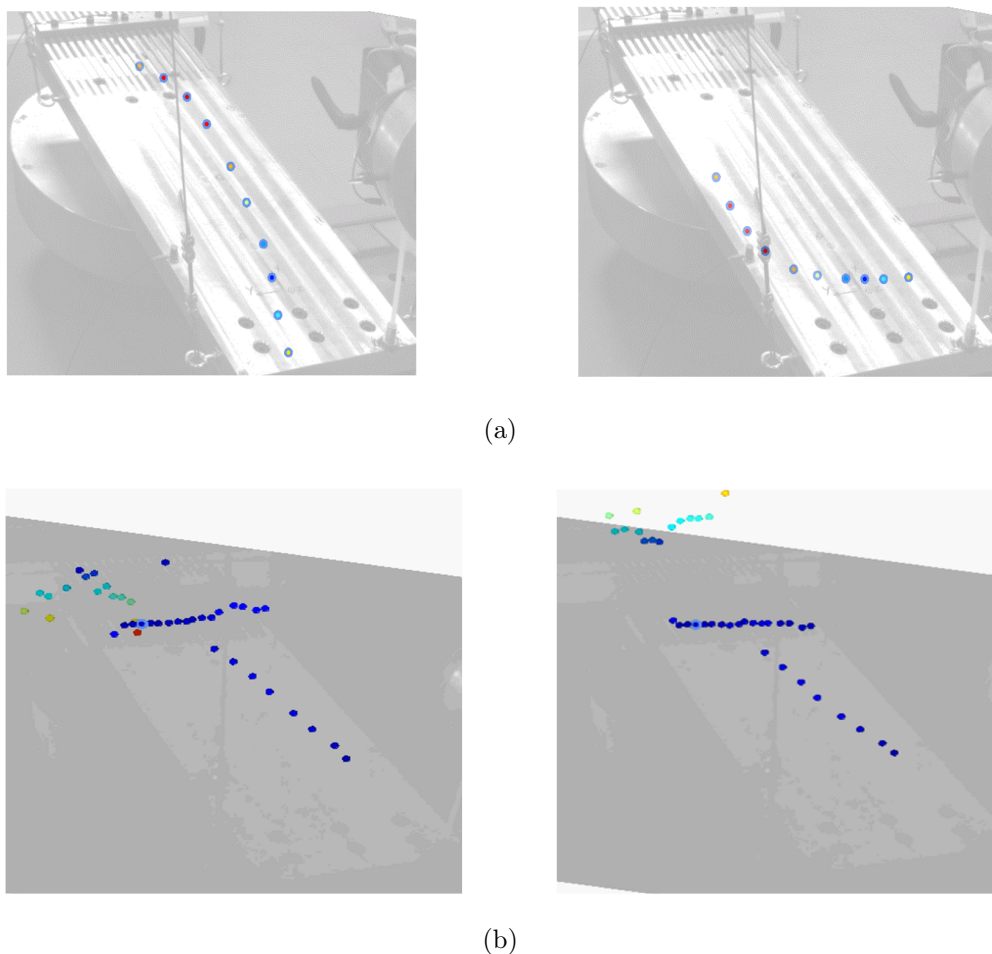


FIGURE 6.18 – Mesures au vibromètre *3D Polytech* : premier mode de flexion du SO (a) et premier mode de flexion du SO couplé au MTMD (b)

l'amortissement modal associé. Il apparaît que cette fréquence propre est plus élevée que lors des premiers essais vibratoires présentés en section 6.3.2 avec un écart relatif d'environ 3%. Cependant, la différence est bien plus marquée au niveau de l'amortissement modal avec une valeur de 0.011% contre 0.16% dans la section 6.3.2. Ce décalage peut en grande partie être expliqué par démontage et remontage des différents composants mécaniques afin de réaliser les usinages nécessaires à l'implantation du MTMD sur le SO. En effet, entre les premiers essais présentés dans la section précédente et ceux présentés ici et même pendant leur déroulement, aucun contrôle de serrage des vis n'a été effectué alors qu'il s'agit d'un paramètre de réglage important et influent sur l'amortissement. À l'avenir, ce défaut pourra être corrigé en effectuant un serrage à la clé dynamométrique ou à l'angle.

Pour la configuration avec le MTMD, il n'est plus possible de mener une identification modale de la structure globale directement. En effet, l'implantation du

MTMD sur le SO engendre l'apparition d'un nombre important de modes locaux au voisinage du mode global de flexion comme dans une grande partie des cas où le système étudié est composé d'un assemblage de pièce mécanique de tailles différentes. La procédure d'identification modale est alors plus délicate à mettre en œuvre avant de pouvoir effectuer un recalage de modèle correct. Il est par exemple possible de mener différentes étapes d'identification pour chaque composant du MTMD, puis pour le MTMD entier avant de s'intéresser à la structure globale. Si ce niveau de raffinement n'est pas suffisant il est alors possible de mener une identification en faisant varier certains paramètres mécaniques des composants ou de la structure porteuse. Pour des raisons de temps, ce type de démarche n'a pas pu être appliqué dans le cadre de cette thèse.

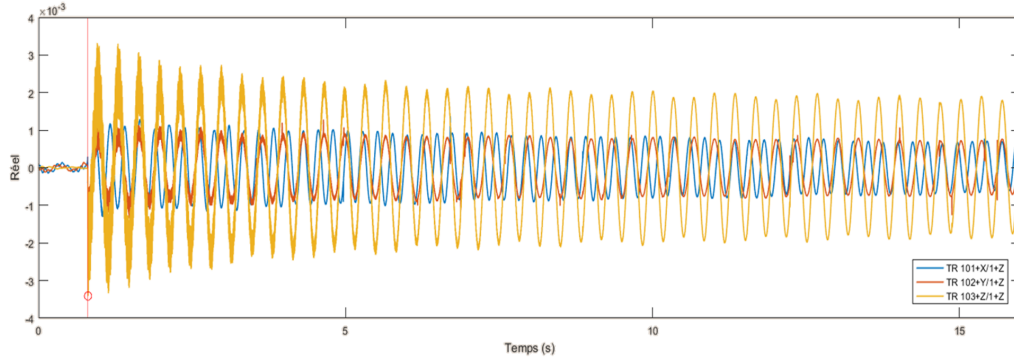
Néanmoins, il reste possible d'effectuer des mesures comparatives afin de quantifier l'impact du MTMD sur le comportement dynamique du SO. La Figure 6.20 montre l'amplitude de la FRF entre l'accéléromètre 3 situé sur le MTMD et le point d'excitation en 1 dans les deux configurations : sans et avec MTMD. Le choix s'est porté sur cette FRF en particulier puisqu'elle lie deux points des extrémités opposées du SO par lesquels peut passer un faisceau optique.

Le MTMD, malgré la présence d'un seul et unique "peigne" de poutres encastrées-libres, est correctement accordé sur la fréquence propre du premier mode de flexion du SO ce qui permet de valider la démarche de dimensionnement et les outils numériques proposés dans la section 6.2. En terme d'amplitude maximale, le rapport est d'environ 50 entre le SO sans et avec MTMD et le ratio d'énergie de déformation élastique sur la plage de fréquence d'intérêt (bornes verte) R_0^{MTMD} se situe au alentours de 0.2.

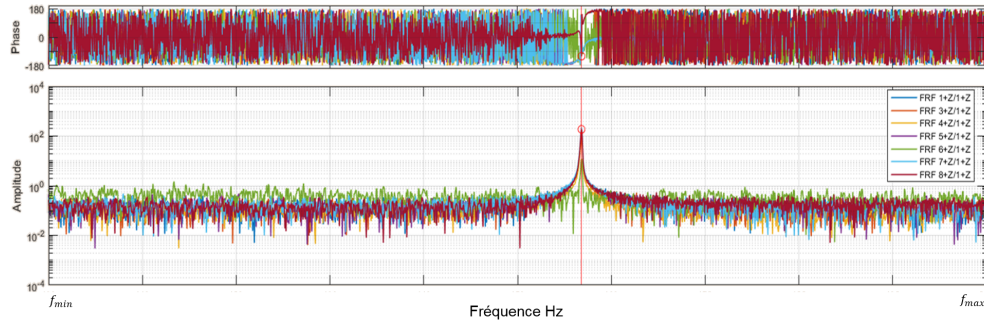
Les performances atteintes, pour ces deux métriques, grâce à l'implantation du MTMD sont meilleures que celles prévues par l'étude numérique. Une grande partie de cet écart peut être expliquée par la mesure erronée de l'amortissement du SO au passage du mode de flexion comme l'a laissé voir l'écart entre les mesures expérimentales mais aussi par la difficulté à contrôler et à évaluer correctement l'amortissement au sein des poutres encastrées-libres. De plus, on peut raisonnablement espérer que l'ajout du second peigne permette de lisser correctement la réponse de la structure au passage du premier mode de flexion.

Du point de vue de *Thales LAS Fr*, les résultats obtenus lors des essais sur la maquette et les outils de dimensionnement du MTMD développés sont en phase avec les attentes et leur permettent de valider la possibilité d'utiliser ce type de dispositif anti-vibratoire sur leurs futurs produits.

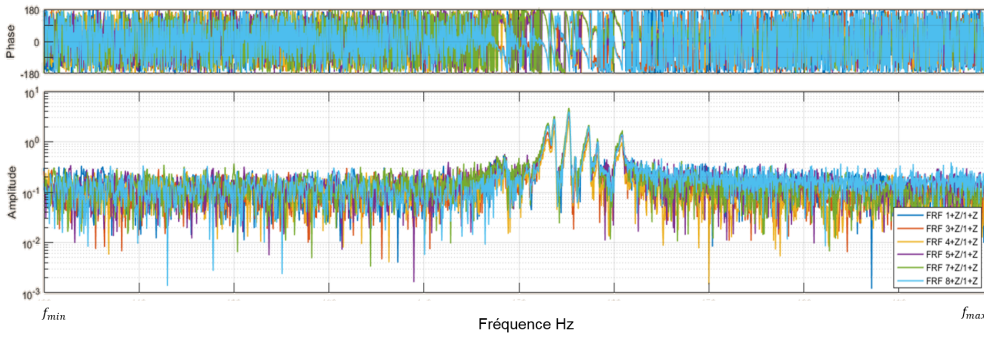
6.3 ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE STRUCTURE COUPLÉE À UN MTMD



(a)



(b)



(c)

FIGURE 6.19 – Signaux temporels mesurés par les trois têtes laser du vibromètre 3D *Polytech* (a), FRFs entre les différents points de mesures et la force injectée en $m/s^2/N$ pour le SO seul (b) et, pour le SO avec le MTMD (c)

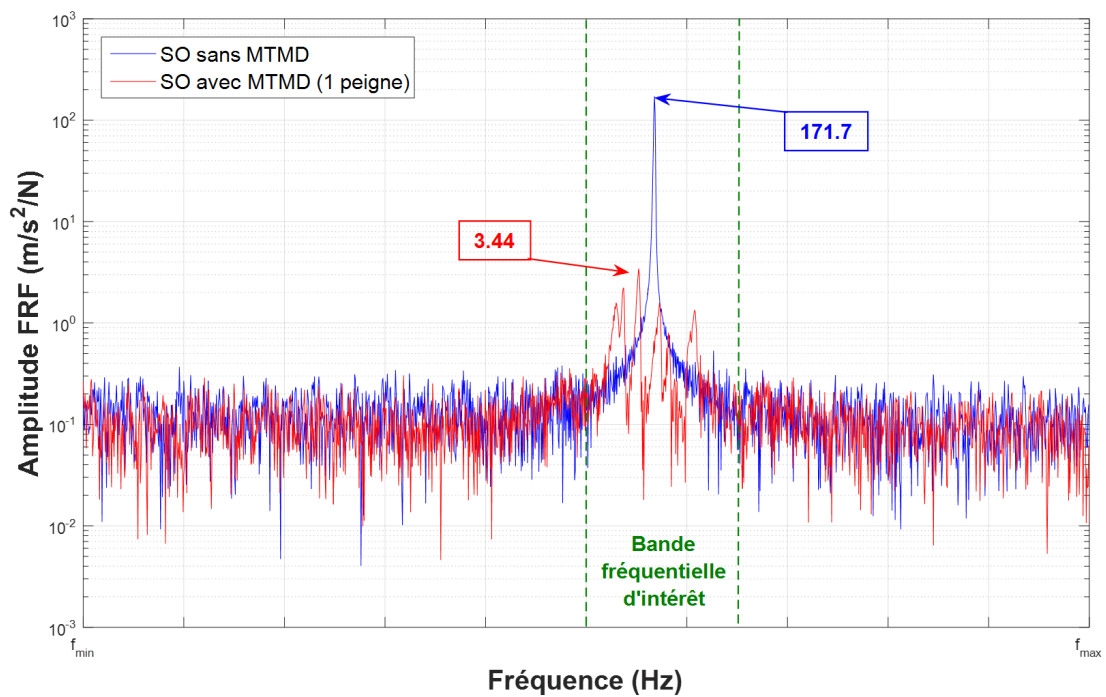


FIGURE 6.20 – Comparaison entre la FRF du SO seul et celle du SO associé au MTMD entre l'accéléromètre 3 et la force d'excitation appliquée au niveau du point 1 en $m/s^2/N$

6.4 CONCLUSION DE CHAPITRE

Dans ce dernier chapitre, l'objectif était de dimensionner une solution d'amortissement passif de type MTMD afin de réduire le niveau vibratoire présent dans le Support Optique autour de son premier mode de flexion pour, à terme, améliorer les performances optiques de systèmes embarqués.

Dans la première partie, une solution technique a été proposée et un dimensionnement du MTMD basé sur une procédure d'optimisation déterministe a été effectué. La fonction objectif à minimiser a été définie en terme d'énergie de déformation élastique sur une bande fréquentielle d'intérêt autour du premier mode de flexion du SO et le réglage optimal en termes de raideur, de masse et d'amortissement a été déterminé. Cette démarche a été reconduite sur différents jeux de paramètres afin d'évaluer leur influence sur la performance du dispositif anti-vibratoire.

Par ailleurs, il s'est avéré, que lors de la phase de fonctionnement des systèmes optiques, la fréquence propre du SO à laquelle devait être accordée le MTMD pouvait varier de manière aléatoire entre deux valeurs extrêmes à cause des différentes rotations possibles et de la répartition des masses. Cela a été intégré dans l'étude comme une méconnaissance du système et une analyse de robustesse de la solution optimale basée sur la théorie Info-Gap a été proposée. La métrique de performance a été définie comme le ratio entre l'énergie de déformation élastique du SO sans MTMD par rapport à celle du SO avec MTMD sur une bande fréquentielle d'intérêt et l'influence de certains paramètres du MTMD sur la robustesse du système global a été étudiée. Pour finir, une procédure d'optimisation robuste couplant l'optimisation déterministe et l'analyse de robustesse Info-Gap a été proposée afin de rendre le réglage optimal du MTMD insensible à l'incertitude considérée sur une certaine plage de variation. Ce gain de robustesse se fait au détriment de la performance mais permet de garantir un certain niveau d'amortissement induit par l'implantation du MTMD malgré cette variation de la fréquence propre associée au premier mode de flexion du SO. Dans le contexte industriel imposé par *Thales LAS Fr*, le développement d'outil de conception robuste s'avère être un besoin essentiel.

Dans la deuxième partie, l'objectif poursuivi a été de valider les outils numériques ayant servis au dimensionnement du MTMD et d'obtenir une première preuve de concept concernant l'utilisation de ce type de dispositif anti-vibratoire sur des produits *Thales LAS Fr*. Pour y parvenir, le MTMD a été conçu comme un dispositif rapporté à la structure principale et cette solution technique a été dimensionnée à l'aide des outils numériques exposés dans la première partie. Une maquette de Support Optique a été réalisée et un ensemble d'essais vibratoires ont permis d'identifier le comportement modal de cette structure. Les résultats expérimentaux et numériques étant bien corrélés, le MTMD a été réalisé à l'aide d'un matériau particulier et des essais vibratoires ont été menés sur le SO couplé à ce dispositif. Le matériau ne fait pas l'objet de plus d'informations en raison d'un brevet en cours de dépôt. Au vu des résultats intéressants en terme d'atténuation des amplitudes maximales

et de l'énergie de déformation élastique malgré l'absence d'une partie des absorbeurs dynamiques suite à des difficultés de fabrication, il apparait que les outils numériques permettant de dimensionner les MTMD sont opérationnels et l'utilisation de ce type de dispositif amortissant sur les produits *Thales LAS Fr* semble possible.

Il reste néanmoins de nombreux points en suspens qui feront l'objet de travaux futurs notamment au travers de la thèse d'Emmanuel Bachy avec *Thales LAS Fr* qui doit démarrer en janvier 2019.

Parmi ces points, il est possible de citer l'extension des outils de dimensionnement des MTMD aux cas où les sources d'incertitudes sont multiples et pour des critères de performances plus proches des contraintes industrielles comme la déviation d'une ligne de visée par exemple. D'un point de vue expérimental, il reste encore des tâches à effectuer à court et moyen termes comme la réalisation d'une campagne d'essais vibratoires avec les deux peignes constituant le MTMD et la modification de la suspension permettant d'assurer la condition libre-libre du système global. De plus, il faudra prêter une attention particulière à la mesure de l'amortissement modale du SO au passage du premier mode de flexion ainsi qu'au contrôle et à l'évaluation du facteur de perte au sein des poutres encastrées-libres formant le MTMD. Il faudra aussi mettre en place une démarche d'identification modale spécifique aux structures assemblées présentant des modes locaux afin de pouvoir effectuer un recalage de modèle.

Une fois ces étapes maîtrisées, il s'agira d'abord de réaliser un MTMD intégré comme envisagé initialement pour réduire l'encombrement généré et faciliter l'intégration dans les produits embarqués avant de chercher à le miniaturiser d'avantage et d'y ajouter certains phénomènes non-linéaires comme le frottement pour garantir une insensibilité à la température ambiante.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVES

Les enjeux de cette thèse étaient liés à l'amortissement passif des structures optiques embarquées.

Pour stabiliser ces systèmes, une stratégie avait déjà été mise en place dans les bureaux d'études de *Thales LAS Fr* et reposait sur l'implantation de dispositifs intégrant des matériaux viscoélastiques situés entre la structure porteuse et les appareils optiques afin de réduire les transferts vibratoires et ainsi assurer le bon fonctionnement de ces derniers.

Le premier apport du travail de thèse a visé à accroître les connaissances relatives aux propriétés mécaniques de l'élastomère utilisé, le silicone SI965, en fonction de la température, de la fréquence (cadre linéaire) et de son taux de déformation (cadre non-linéaire). L'objectif étant ensuite de prendre en compte ces comportements dans des simulations par éléments finis, type analyse modale complexe et réponse forcée, afin de les comparer aux résultats expérimentaux. Ces travaux ont été enrichis par la prise en compte d'incertitudes au niveau du champ de température, en s'appuyant sur la méthode Info-Gap, afin de quantifier la capacité d'amortissement du dispositif viscoélastique dans un contexte incertain. Pour finir, une étude de l'influence des non-linéarités de type matériau et contact sur le comportement dynamique de l'amortisseur à lames a été menée.

Le second apport du travail de thèse a porté sur la conception d'un dispositif anti-vibratoire directement sur les systèmes embarqués (SO) situés en aval des amortisseurs. Afin de contrôler le niveau vibratoire au voisinage d'un mode potentiellement problématique du point de vue des performances optiques, la solution technique qui a été retenue est basée sur l'implantation d'un réseau d'absorbeurs à masses accordées (MTMD). Son réglage optimal a été déterminé afin de minimiser l'énergie de déformation du SO au voisinage du mode d'intérêt et une analyse de robustesse a été menée en considérant la fréquence propre associée à ce mode comme méconnue. L'influence de certains paramètres du MTMD à savoir, le facteur de perte des liaisons, le nombre d'absorbeurs et la masse mobile totale, sur l'atténuation du niveau vibratoire et de l'énergie de déformation est étudiée en se basant sur les FRFs et les courbes de robustesse. Une procédure d'optimisation robuste a été ensuite proposée afin d'obtenir un dimensionnement robuste du MTMD en contexte incertain. Enfin, une maquette représentative du SO a été réalisée et un MTMD simplifié lui a été ajouté. Ce MTMD est dimensionné en se servant des outils numériques qui ont

été développés durant la thèse afin de les valider et d'obtenir une première preuve de concept concernant l'utilisation de ce type de dispositif anti-vibratoire.

La première contribution de cette thèse est la formulation d'un modèle thermo-mécanique du comportement viscoélastique des élastomères. Elle est basée sur le modèle de Maxwell Généralisé et sur l'hypothèse que les temps de relaxations peuvent être sélectionnés a priori tout en étant indépendants de la température. Dans ce cas, et sur la base d'une caractérisation expérimentale du comportement dynamique de l'élastomère en fonction de la fréquence et de la température, il est possible d'identifier les raideurs dynamiques de chaque cellule composant le modèle de Maxwell généralisé ainsi que son module long terme qui dépendent alors de la température.

Une formulation d'état originale permet alors de prendre en compte ce modèle thermo-mécanique de comportement viscoélastique afin d'effectuer des simulations éléments finis pour analyser le comportement dynamique de dispositifs anti-vibratoires intégrant des élastomères, comme l'amortisseur à lames, dans les domaines fréquentiel et temporel.

Par ailleurs, il apparaît que le champ de température est un paramètre incertain pouvant être considéré comme une méconnaissance dans le cas de l'application présentée. La formulation thermo-mécanique du comportement dynamique de l'amortisseur à lames a alors été couplée à une analyse de robustesse basée sur la théorie Info-Gap afin de créer un outil d'aide à la conception des solutions d'amortissement exploitant des éléments viscoélastiques dans un contexte incertain. Cet outil constitue la deuxième contribution de cette thèse.

L'amortisseur à lames présente un comportement assouplissant en fonction du niveau de sollicitation auquel il est soumis. Il est apparu que cet assouplissement était dû à l'utilisation du silicone SI965 dans la conception du dispositif anti-vibratoire. La troisième contribution de cette thèse concerne donc la caractérisation du comportement non-linéaire d'un matériau viscoélastique (effet Payne) basée sur une méthode de Oberst modifiée et l'identification de l'évolution des paramètres modaux en fonction de l'amplitude de sollicitation. Ce travail permet d'aboutir à l'évolution du module d'élasticité du silicone SI965 en fonction de son taux de déformation.

Par ailleurs, l'impact des butées mécaniques mises en place au niveau de l'amortisseur est aussi abordé. Ces non-linéarités sont ensuite prises en compte dans deux modélisations, l'une simplifiée et l'autre basée sur la méthode des éléments finis de l'amortisseur à lames au voisinage d'un mode de vibration d'intérêt. La quatrième contribution de ces travaux de thèse est une stratégie d'identification de l'impact des non-linéarités, de type matériau et contact, sur le comportement dynamique de l'amortisseur à lames.

Enfin, la dernière contribution de cette thèse est le développement d'une méthode de dimensionnement robuste d'une solution technique et intégrée de contrôle des vibrations de type MTMD. L'objectif était de garantir une certaine performance

en terme d'atténuation du niveau vibratoire de la structure support des optiques au voisinage de son premier mode de flexion alors que la fréquence propre associée était considérée comme une méconnaissance. Cette procédure d'optimisation robuste repose sur la minimisation d'un ratio d'énergie de déformation tout en garantissant la présence d'un "plateau" de robustesse pour un horizon d'incertitude donné.

Suite à ces travaux de thèse, de nombreuses perspectives peuvent être envisagées et certaines d'entre elles seront couvertes dans la thèse CIFRE d'Emmanuel Bachy avec *Thales LAS Fr.*

À court terme, l'objectif est de transférer l'ensemble des outils de dimensionnement concernant les dispositifs anti-vibratoire intégrant des éléments viscoélastiques et les dispositifs de type MTMD en contexte incertain au bureau d'étude mécanique ainsi que la méthode de caractérisation de l'effet Payne. Pour y parvenir, les approches développées devront subir des développements annexes afin de les rendre plus robustes et plus accessibles. En ce qui concerne les travaux sur le MTMD, il faudra aussi réaliser une caractérisation modale expérimentale sur un peigne de poutres encastrées-libres avant de mener des essais vibratoires sur le support optique avec les deux peignes et comparer plus finement les résultats numériques et expérimentaux. L'objectif sera ensuite de tendre vers une solution miniaturisée et intégrée du dispositif MTMD pour répondre au cahier des charges fixé par le contexte industriel.

Par ailleurs, au niveau numérique, il serait aussi intéressant de généraliser les outils afin de pouvoir prendre en compte plusieurs sources d'incertitudes de natures différentes tout en évaluant plusieurs sorties d'intérêt pour se rapprocher un peu plus des besoins réels du secteur industriel. Au niveau expérimental, il faudrait effectuer une campagne de caractérisation du comportement dynamique non-linéaire de l'amortisseur à lames à l'aide d'excitations de type sinus balayé et à amplitude variable contrôlée afin de valider la modélisation des phénomènes non-linéaires proposée ainsi que les différents outils numériques mis en œuvre.

À plus long terme, il serait intéressant d'explorer la possibilité de recourir à une source de dissipation par frottement sec dans les systèmes MTMD afin de les rendre moins sensibles aux conditions environnementales. Cela pourrait se faire par l'introduction de liaisons sèches ou en recourant à de nouvelles stratégies d'isolation vibratoire comme les assemblages multicouches avec des structurations particulières qui s'inscrivent dans la famille des structures composites architecturées. Il est à noter que ces solutions architecturées pourraient aussi être directement dimensionnées afin de former le système MTMD complet avec des propriétés mécaniques spécifiques. L'objectif final serait alors de concevoir un dispositif de contrôle des vibrations consistant en une structure architecturée dimensionnée pour un niveau de performance en amortissement choisi dans une large bande de fréquence, d'amplitude de sollicitation, et de température.

CONTRIBUTIONS

Article scientifique et brevet :

K. Jaboviste, E. Sadoulet-Reboul, N. Peyret, C. Arnould, E. Collard, G. Chevalier, *On the compromise between performance and robustness for viscoelastic damped structures. Mechanical Systems and Signal Processing* (2019)

K. Jaboviste, E. Sadoulet-Reboul, N. Peyret, C. Arnould, E. Collard, G. Chevalier, *Amortissement des structures aéroportées : Dispositif de contrôle des vibrations passif basé sur l’implantation d’un réseau d’absorbeurs dynamiques*. Demande de brevet (2018 – 2019)

A. Abbad, K. Jaboviste, M. Ouisse, N. Dauchez, *Acoustic performances of silicone foams for sound absorption. Journal of Cellular Plastics* (2017)

Conférences avec actes :

K. Jaboviste, E. Sadoulet-Reboul, N. Peyret, C. Arnould, E. Collard, G. Chevallier, *A complete framework for the design of viscoelastic insulators*. IMAC XXXV (2017)

K. Jaboviste, E. Sadoulet-Reboul, N. Peyret, C. Arnould, E. Collard, G. Chevalier, *Conception robuste de dispositifs d’amortissement intégrant des matériaux viscoélastiques*. CFM (2017)

K. Jaboviste, E. Sadoulet-Reboul, N. Peyret, C. Arnould, E. Collard, G. Chevalier, *Identification of nonlinear viscoelastic parameters based on an enhanced Oberst beam method*. IMAC XXXVI (2018)

Conférences sans actes :

K. Jaboviste, E. Sadoulet-Reboul, N. Peyret, C. Arnould, E. Collard, G. Chevalier, *Framework for the design of viscoelastic insulators. Journées Jeunes Chercheurs en vibration, Acoustique et Bruit* (2016)

K. Jaboviste, E. Sadoulet-Reboul, N. Peyret, C. Arnould, E. Collard, G. Cheval-

lier, *Analyse expérimentale et numérique du comportement non-linéaire d'un dispositif d'amortissement avec éléments viscoélastiques et butées. Groupe de Recherche DYNOLIN (DYnamique NON-LINéaire)* (2017)

MODÈLE THERMO-MÉCANIQUE DANS LE CAS D'UN MATÉRIAU VISCOÉLASTIQUE RESPECTANT L'ÉQUIVALENCE TEMPS-TEMPÉRATURE

Dans le chapitre 3, un modèle thermo-mécanique du comportement du tBA/PEGDMA a été proposé en se basant sur un modèle de Maxwell généralisé et l'hypothèse que les constantes de temps τ_i de ce dernier pouvaient être fixées a priori et ne dépendaient pas de la fréquence et de la température. Dans le cas d'une traction uni-axiale, le module d'élasticité peut s'écrire :

$$E^*(\omega) = E_\infty(T) \left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i(T) j\omega\tau_i}{1 + j\omega\tau_i} \right) \quad (\text{A.1})$$

où E_∞ est le module d'élasticité long terme, τ_i représente la constante de temps associée à la i^{eme} cellule et $\alpha_i = E_i/E_\infty$ représente son ratio de raideur dynamique.

Ce modèle est valable pour les matériaux viscoélastiques ne respectant pas le principe de l'équivalence temps-température. Cependant, il a été montré dans [Butaud 15], que le tBA/PEGDMA est un matériau compatible avec ce principe et la courbe maîtresse décrivant son comportement a été obtenue à l'aide de la loi WLF (*Williams-Landel-Ferry*). Dans ce cas, il est possible d'écrire le module d'élasticité du matériau sous la forme :

$$E(t, T) = E(ta(T), T_0) \quad (\text{A.2})$$

dans le domaine temporel, et sous la forme :

$$E^*(\omega, T) = E\left(\frac{\omega}{a(T)}, T_0\right) \quad (\text{A.3})$$

dans le domaine fréquentiel. Dans les deux cas, $a(T)$ est un facteur constant unique, aussi appelé facteur de translation. Il permet de lier le comportement du matériau à

la température T à celui observé à la température de référence T_0 . Il en existe donc un pour chaque couple $(T; T_0)$ et $a(T = T_0) = 1$.

Dans le cas d'un modèle de Maxwell généralisé servant à décrire le comportement d'un matériau viscoélastique respectant le principe de l'équivalence temps-température, il est alors possible d'écrire, pour une température unique T_1 :

$$E^* = E_\infty \left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i j \omega \tau_i}{1 + j \omega \tau_i} \right) = E_\infty \left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i j \tau_i \omega / a(T_1)}{1 + j \tau_i \omega / a(T_1)} \right) \quad (\text{A.4})$$

L'extension à un ensemble de température T est alors directe et il est possible d'écrire :

$$E^*(T, \omega) = E_\infty \left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i j \tau_i \omega / a(T)}{1 + j \tau_i \omega / a(T)} \right) \quad (\text{A.5})$$

En conclusion, dans le cas d'un matériau respectant le principe d'équivalence temps-température, la dépendance à la température est portée par l'ensemble des constantes de translation a . Il semblerait donc plus logique de faire porter cette dépendance aux constantes de temps τ_i plutôt qu'aux ratios de raideur dynamique α_i . De plus, l'évolution de l'ensemble des $a(T)$ en fonction de la température étant "simple", les variations des $\tau_i(T)$ devraient être moins complexes que celles des $\alpha_i(T)$ exposées dans le chapitre 3.

B

RÉSULTATS COMPLÉMENTAIRES SUR L'OPTIMISATION DÉTERMINISTE D'UN MTMD

L'objectif est celui présenté au chapitre 6. Il s'agit de réduire le niveau vibratoire au passage du premier mode de flexion du SO. Durant la thèse, une stratégie d'optimisation basée sur la maximisation de l'amortissement modal du système global (SO et MTMD nominal) sur la bande fréquentielle d'intérêt a été testée.

La maximisation de l'amortissement modal est une méthode présentant des temps de calcul courts puisque chaque itération ne nécessite de réaliser qu'une analyse modale complexe et ne nécessite pas un calcul du champ de déplacement complet. De plus, il semble que cette méthode permette d'améliorer les capacités de dissipation intrinsèque du système global indépendamment de la force extérieure [Zuo 04].

B.1 CRITÈRE D'OPTIMISATION : AMORTISSEMENT MODAL

En reprenant les équations 6.2 et 6.8 établies dans le chapitre 6, il est possible d'effectuer une analyse modale complexe (CEA) afin de déterminer la pulsation complexe de chacun des modes de vibrations sur la bande fréquentielle d'intérêt en résolvant le problème d'état suivant :

$$j\omega \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{q}^{(d)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -(1 + j\eta_{so})k_{so} - (1 + j\eta_{lames})k_{lames} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{q}^{(d)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

où q représente les coordonnées généralisées. Sachant que la pulsation complexe extraite grâce à la CEA s'écrit sous la forme :

$$\omega_p^* = -\zeta_p \omega_p \pm j\omega_p \sqrt{1 - \zeta_p^2} \quad (\text{B.2})$$

alors les fréquences propres et les amortissements modaux associés s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \omega_p &= |\omega_p^*| \\ \text{soit } f_p &= \omega_p/2\pi \\ \text{et } \zeta_p &= -\text{Re}(\omega_p^*)/\omega_p \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Les facteurs de perte η_{so} et η_{lames} sont considérés comme invariants durant la procédure d'optimisation et les variables de conception sont les raideurs de chacune des lames de liaisons qui seront pilotées par des coefficients α_i pour $i = 1 \dots 9$ en écrivant :

$$k_{lames} = \sum_{i=1}^9 \alpha_i k_{lames}^i \quad (\text{B.4})$$

L'objectif est alors de maximiser l'amortissement modal minimal extrait de la CEA sur un intervalle de fréquence donné autour du premier mode de flexion du SO. En ajoutant les variables de conceptions α_i , il est possible d'écrire le problème d'optimisation à résoudre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \max_{\alpha_i} \min(\zeta(\alpha_i)) \\ \text{avec} \\ \alpha_{inf} \leq \alpha_i \leq \alpha_{sup}, i = 1, \dots, 9 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

où $\alpha_{inf} = 0.8$ et $\alpha_{sup} = 1.2$ représentent respectivement les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle de variation des paramètres α_i et $\min(\zeta)$ l'amortissement modal minimal associé à l'un des p modes propres présents sur la bande de fréquence d'intérêt, extrait durant la CEA à chaque itération du processus d'optimisation.

B.2 RÉSULTATS DE LA PROCÉDURE D'OPTIMISATION AVEC LE CRITÈRE D'AMORTISSEMENT MODAL

La procédure d'optimisation est effectuée avec un facteur de perte sur l'ensemble des composants du système global de : $\eta_{so} = 0.1\%$ sauf pour celui associé aux lames de liaisons qui est : $\eta_{lames} = 1\%$.

La Figure B.1 (a) montre les FRFs pour le système sans (noir) et avec un MTMD optimisé en utilisant différentes stratégies. La localisation des points d'observation et d'excitation est disponible au chapitre 6 sur la Figure 6.4 (b). La solution optimale déterminée à partir de la minimisation de l'énergie de déformation (rouge) ainsi que la solution optimale robuste (bleu), développée pour limiter l'impact d'une méconnaissance sur la fréquence propre associée au premier mode de flexion du SO, sont présentées dans le chapitre 6.

La solution issue de la maximisation de l'amortissement modal (vert) permet une réduction de l'amplitude maximale et agit, à la manière de la solution optimale robuste, comme un amortissement fictif ajouté. La Figure B.1 (b) présente les valeurs

B.2 RÉSULTATS DE LA PROCÉDURE D'OPTIMISATION AVEC LE CRITÈRE D'AMORTISSEMENT MODAL

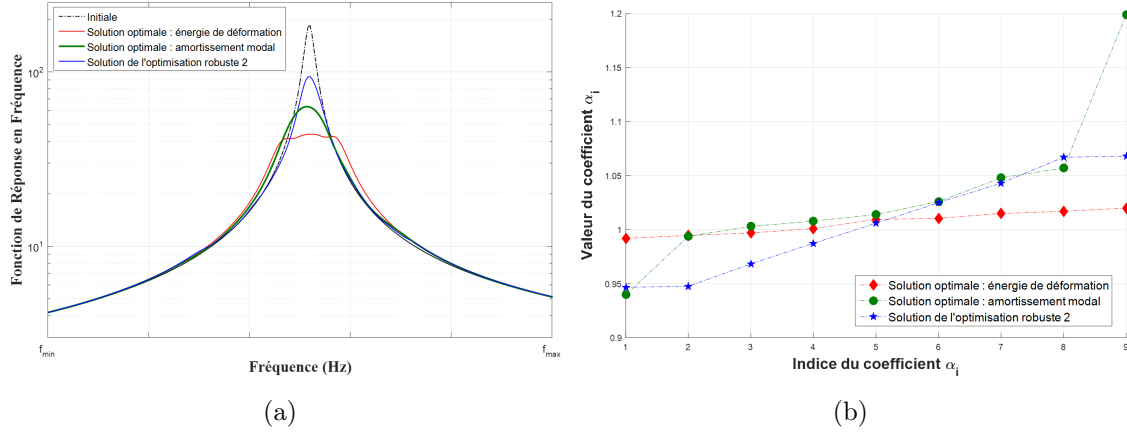


FIGURE B.1 – Comparaison entre la FRF du SO et les FRFs du SO couplé à un MTMD réglé grâce à différentes stratégie d'optimisation (a) et, valeur des coefficients α_i pour les neuf TMDs pour chacune des stratégies d'optimisation (b)

des coefficients α_i agissant sur la raideur des lames de liaisons pour chaque stratégie d'optimisation. Il est à noter que le critère sur l'amortissement modal minimal permet bien d'aboutir à une répartition des pôles du MTMD moins dense que celle obtenue avec le critère en énergie de déformation et plus proche de celle obtenue avec la procédure d'optimisation robuste. Afin d'étudier l'effet de cette répartition, une analyse de robuste de la solution optimale obtenue avec le critère sur l'amortissement modal est menée lorsqu'une méconnaissance sur la fréquence propre associée au premier mode de flexion du SO est considérée. La Figure B.2 présente les courbes de robustesse pour les différentes stratégies d'optimisation employées. Il s'avère que, lorsque l'optimisation est menée en maximisant l'amortissement modal minimal, un petit "plateau" de robustesse est présent et que la décroissance de l'efficacité du MTMD en terme de ratio d'énergie est plus faible que dans le cas où l'optimisation repose sur la minimisation de l'énergie de déformation.

En conclusion, ce critère d'optimisation basé sur la maximisation des amortissements modaux d'une structure couplé à un MTMD semble intéressant en terme de temps de calcul, 20% plus rapide que le calcul de l'énergie de déformation modale, et de robustesse mais, pour des raisons de temps, il n'a pas été étudié en détails. Par ailleurs, il apparaît qu'un certain nombre de minimums locaux existent en utilisant ce critère en l'état. Il serait intéressant de l'enrichir en utilisant aussi les fréquences propres et en traquant correctement le mode de vibration à contrôler de la structure principale.

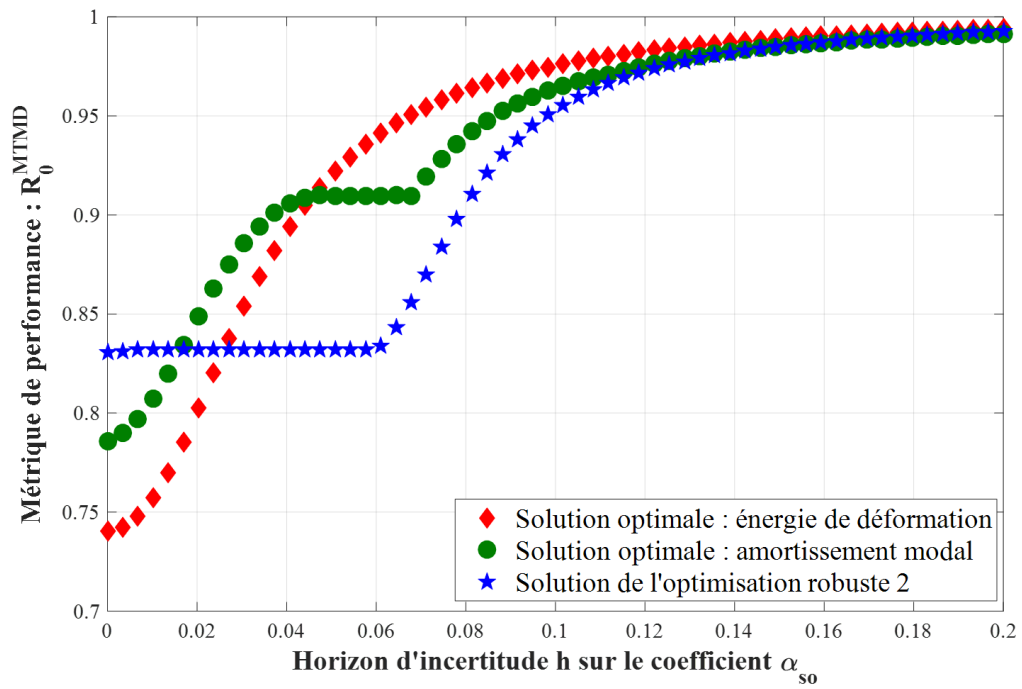


FIGURE B.2 – Courbes de robustesse pour différentes stratégies d'optimisation

BIBLIOGRAPHIE

- [Al Majid 02] A. Al Majid & R. Dufour. *Formulation of a hysteretic restoring force model. Application to vibration isolation*. Non-linear Dynamics, vol. 27, no. 1, pages 69–85, 2002. 110
- [Allani 15] A. Allani. *Design and optimization of tuned mass dampers for civil engineering structures*. PhD thesis, Université Paris-Est, November 2015. 145
- [Allemang 87] R. J. Allemang & D. L. Brown. *Experimental Modal Analysis and Dynamic Component Synthesis. Volume 6. Software User's Guide*. Rapport technique, Cincinnati univ oh dept of mechanical and industrial engineering, 1987. 107
- [Asmussen 07] S. Asmussen & P. W. Glynn. *Stochastic simulation : algorithms and analysis*, volume 57. Springer Science & Business Media, 2007. 90
- [AST 11] *ASTM D5992-96(2011), Standard Guide for Dynamic Testing of Vulcanized Rubber and Rubber-Like Materials Using Vibratory Methods*, ASTM International, West Conshohocken, PA, 2011. 23
- [Atamturktur 15] S. Atamturktur, Z. Liu, S. Cogan & H. Juang. *Calibration of imprecise and inaccurate numerical models considering fidelity and robustness : a multi-objective optimization-based approach*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 51, no. 3, pages 659–671, 2015. 100
- [Austrell 97] P. E. Austrell. *Modeling of elasticity and damping for filled elastomers*. Report TVSM, vol. 1009, 1997. 110
- [Bagley 86] R. L. Bagley & P. J. Torvik. *On the fractional calculus model of viscoelastic behavior*. Journal of Rheology, vol. 30, no. 1, pages 133–155, 1986. 40
- [Balmes 97a] E. Balmes. *Model reduction for systems with frequency dependent damping properties*. Office national d'études et de recherche aérospatial. ONERA-Publications, 1997. 59, 65
- [Balmès 97b] E. Balmès. *Modèles expérimentaux complets et modèles analytiques réduit en dynamique des strcutures*. HdR, Université PARIS VI, 1997. 57, 60

- [Balmes 04] E. Balmes. *Viscoelastic vibration toolbox, User Manual*, 2004. 61
- [Bampton 68] M. C. Bampton & R. R. Craig Jr. *Coupling of substructures for dynamic analyses*. Aiaa Journal, vol. 6, no. 7, pages 1313–1319, 1968. 58
- [Bandivadekar 12] T. Bandivadekar & R. Jangid. *Mass distribution of multiple tuned mass dampers for vibration control of structures*. International Journal of Civil and Structural Engineering, vol. 3, no. 1, pages 70–84, 2012. 145
- [Barthe 03] D. Barthe, A. Deraemaeker, P. Ladevèze & G. Puel. *On a theory of quantification of the lack of knowledge (lok) in structural computation*. Proceedings IMAC XXI, 2003. 91
- [Ben-Haim 98] Y. Ben-Haim, S. Cogan & L. Sanseigne. *Usability of mathematical models in mechanical decision processes*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 12, no. 1, pages 121–134, 1998. 97
- [Ben-Haim 04] Y. Ben-Haim. *Uncertainty, probability and information-gaps*. Reliability engineering & system safety, vol. 85, no. 1-3, pages 249–266, 2004. 98
- [Ben-Haim 06a] Y. Ben-Haim. Info-gap decision theory : decisions under severe uncertainty. Elsevier, 2006. 92, 97, 154
- [Ben-Haim 06b] Y. Ben-Haim. Info-Gap Decision Theory, Second Edition : Decisions Under Severe Uncertainty 2nd Edition. Academic Press ; 2 edition, October 2006. 100
- [Ben-Haim 11] Y. Ben-Haim & F. M. Hemez. *Robustness, fidelity and prediction-looseness of models*. Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 468, no. 2137, pages 227–244, 2011. 100
- [Ben-Haim 13] Y. Ben-Haim & I. Elishakoff. Convex models of uncertainty in applied mechanics, volume 25. Elsevier, 2013. 92
- [Beyer 07] H.-G. Beyer & B. Sendhoff. *Robust optimization—a comprehensive survey*. Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 196, no. 33-34, pages 3190–3218, 2007. 93
- [Bishop 52] R. Bishop & D. Welbourn. *The problem of the dynamic vibration absorber*. Engineering, Lond, vol. 174, page 769, 1952. 144
- [Boroson 14] E. Boroson, S. Missoum, P.-O. Mattei & C. Vergez. *Optimization under uncertainty of nonlinear energy sinks*.

- In ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, pages V008T11A084–V008T11A084. American Society of Mechanical Engineers, 2014. 17
- [Boukamel 06] A. Boukamel. *Modélisation mécaniques et numériques des matériaux et structures en élastomères*. PhD thesis, Université de la Méditerranée-Aix-Marseille II, 2006. 110
- [Butaud 15] P. Butaud. *Contribution à l'utilisation des polymères à mémoire de forme pour les structures à amortissement contrôlé*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2015. 13, 22, 28, 31, 187, 209
- [Butaud 18] P. Butaud, M. Ouisse, V. Placet, F. Renaud, T. Travailliot, A. Maynadier, G. Chevallier, F. Amiot, P. Delobelle, E. Foltête et al. *Identification of the viscoelastic properties of the tBA/PEGDMA polymer from multi-loading modes conducted over a wide frequency-temperature scale range*. Polymer Testing, vol. 69, pages 250–258, 2018. 23, 33, 50
- [Byrd 00] J. C. G. Byrd R. H. & J. Nocedal. *A Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming*. Meathematical Programming, vol. 89, no. 1, pages 149–185, 2000. 45, 75
- [Cantournet 03] S. Cantournet & R. Desmorat. *Modélisation thermodynamique du frottement interne et de l'hystérésis d'un élastomère*. Comptes Rendus Mecanique, vol. 331, no. 4, pages 265–270, 2003. 110
- [Capillon 16] R. Capillon, C. Desceliers & C. Soize. *Uncertainty quantification in computational linear structural dynamics for viscoelastic composite structures*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 305, pages 154–172, 2016. 99
- [Caputo 71] M. Caputo & F. Mainardi. *Linear models of dissipation in anelastic solids*. La Rivista del Nuovo Cimento (1971-1977), vol. 1, no. 2, pages 161–198, 1971. 35
- [Carcattera Antonio 13] A. A. Carcattera Antonio. *Vibration damping device*, March 31 2013. US Application 13910752. 145
- [Carcattera 04] A. Carcattera & A. Akay. *Transient energy exchange between a primary structure and a set of oscillators : Return time and apparent damping*. The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 115, no. 2, pages 683–696, 2004. 164
- [Carcattera 12] A. Carcattera, A. Akay & C. Bernardini. *Trapping of vibration energy into a set of resonators : Theory and application to aerospace structures*. Mechanical Systems and

- Signal Processing, vol. 26, pages 1–14, 2012. 17, 18, 145, 146, 165, 166, 209, 212
- [Chevalier 10] Y. Chevalier & J. V. Tuong. Mechanics of viscoelastic materials and wave dispersion. Iste, 2010. 35
- [Chevallier 11] G. Chevallier, F. Renaud, J.-L. Dion & S. Thouviot. *Complex eigenvalue analysis for structures with viscoelastic behavior*. In ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, pages 561–569. American Society of Mechanical Engineers, 2011. 67
- [Collard 13] E. Collard & T. Fabrice. *Element de suspension pour la liaison mecanique d’une charge suspendue dans un support*, 2013. FR3001267A1. 12, 209
- [Cooper 17] S. B. Cooper, D. Di Maio & D. J. Ewins. *Nonlinear Vibration Analysis of a Complex Aerospace Structure*. In Nonlinear Dynamics, Volume 1, pages 55–68. Springer International Publishing, 2017. 106, 108, 136, 211
- [Crandall 14] S. H. Crandall & W. D. Mark. Random vibration in mechanical systems. Academic Press, 2014. 144
- [Crawley 86] E. Crawley & K. O'DONNELL. *Identification of nonlinear system parameters in joints using the force-state mapping technique*. In 27th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, page 1013, 1986. 136
- [Dealy 09] J. Dealy & D. Plazek. *Time-temperature superposition—a users guide*. Rheol. Bull, vol. 78, no. 2, pages 16–31, 2009. 30
- [Delattre 13] A. Delattre, S. Méo, F. Lacroix, C. Richard & S. Lejeunes. *Experimental and constitutive modeling of a filled rubber with emphasis on the dynamical properties*. Constitutive Models for Rubber VIII, page 137, 2013. 110
- [Dempster 68] A. P. Dempster *et al.* *Upper and lower probabilities generated by a random closed interval*. The Annals of Mathematical Statistics, vol. 39, no. 3, pages 957–966, 1968. 91
- [Den Hartog 85] J. P. Den Hartog. Mechanical vibrations. Courier Corporation, 1985. 144, 151, 153
- [Dion 97] J. Dion & S. Vialard. *Identification or rubber shock absorber mounts*. Mécanique industrielle et matériaux, vol. 50, no. 5, pages 232–237, 1997. 44
- [Dion 13a] J.-L. Dion, G. Chevallier & N. Peyret. *Improvement of measurement techniques for damping induced by micro-sliding*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 34, no. 1-2, pages 106–115, 2013. 110

- [Dion 13b] J.-L. Dion, C. Stephan, G. Chevallier & H. Festjens. *Tracking and removing modulated sinusoidal components : a solution based on the kurtosis and the extended Kalman filter*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 38, no. 2, pages 428–439, 2013. 109
- [Dossogne 15] T. Dossogne, J.-P. Noël, C. Grappasonni, G. Kerschen, B. Peeters, J. Dehille, M. Vaes & J. Schoukens. *Nonlinear ground vibration identification of an F-16 aircraft-Part 2 : understanding nonlinear behaviour in aerospace structures using sine-sweep testing*. In Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, 2015. 109, 136
- [Dowell 03] E. Dowell, J. Edwards & T. Strganac. *Nonlinear aeroelasticity*. Journal of aircraft, vol. 40, no. 5, pages 857–874, 2003. 110
- [Ege 12] K. Ege, T. Boncompagne, B. Laulagnet & J.-L. Guyader. *Experimental estimations of viscoelastic properties of multilayer damped plates in broad-band frequency range*. arXiv preprint arXiv :1210.3333, 2012. 24
- [Emri 05] I. Emri. *Rheology of solid polymers*. Rheology Reviews, vol. 2005, page 49, 2005. 30
- [Enjalbert 09] P. Enjalbert. *Sur la théorie des méconnaissances en conception robuste*. PhD thesis, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan, 2009. 91
- [Feldman 07] M. Feldman. *Considering high harmonics for identification of non-linear systems by Hilbert transform*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 21, no. 2, pages 943–958, 2007. 112
- [Ferry 80] J. D. Ferry & J. D. Ferry. Viscoelastic properties of polymers. John Wiley & Sons, 1980. 35
- [Festjens 12a] H. Festjens, G. Chevallier & J.-L. Dion. *A numerical quasi-static method for the identification of frictional dissipation in bolted joints*. In ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, pages 353–358. American Society of Mechanical Engineers, 2012. 110
- [Festjens 12b] H. Festjens, G. Chevallier, F. Renaud, J.-L. Dion & R. Lemaire. *Effectiveness of multilayer viscoelastic insulators to prevent occurrences of brake squeal : A numerical study*. Applied Acoustics, vol. 73, no. 11, pages 1121–1128, 2012. 64

- [Festjens 14] H. Festjens. *Contribution à la caractérisation et à la modélisation du comportement dynamique des structures assemblées*. PhD thesis, Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris, 2014. 116
- [Fletcher 57] W. Fletcher & A. Gent. *Dynamic shear properties of some rubber-like materials*. British Journal of Applied Physics, vol. 8, no. 5, page 194, 1957. 110, 113
- [Frahm 11] H. Frahm. *Device for damping vibrations of bodies.*, April 18 1911. US Patent 989,958. 144
- [Fröhlich 05] J. Fröhlich, W. Niedermeier & H.-D. Luginsland. *The effect of filler–filler and filler–elastomer interaction on rubber reinforcement*. Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, vol. 36, no. 4, pages 449–460, 2005. 110
- [Gacem 07] H. Gacem. *Comportement visco-hyperélastique des élastomères : viscoélasticité non linéaire, application aux multicouches*. PhD thesis, Paris 6, 2007. 110
- [Gaul 91] L. Gaul, P. Klein & S. Kemple. *Damping description involving fractional operators*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 5, no. 2, pages 81–88, 1991. 36
- [Gendelman 01] O. Gendelman, L. Manevitch, A. F. Vakakis & R. M’closkey. *Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : Part I—Dynamics of the underlying Hamiltonian systems*. Journal of Applied Mechanics, vol. 68, no. 1, pages 34–41, 2001. 17
- [Ghanem 91] R. G. Ghanem & P. D. Spanos. *Stochastic Finite Element Method : Response Statistics*. In Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach, pages 101–119. Springer, 1991. 90
- [Göhler 16] S. M. Göhler, T. Eifler & T. J. Howard. *Robustness metrics : consolidating the multiple approaches to quantify robustness*. Journal of Mechanical Design, vol. 138, no. 11, page 111407, 2016. 93
- [Golla 85] D. F. Golla & P. C. Hughes. *Dynamics of viscoelastic structures—a time-domain, finite element formulation*. Journal of applied mechanics, vol. 52, no. 4, pages 897–906, 1985. 61
- [Gourc 13] E. Gourc. *Etude du contrôle passif par pompage énergétique sous sollicitation harmonique : Analyses théoriques et expérimentales*. PhD thesis, Toulouse, INSA, 2013. 17
- [Gourc 14] E. Gourc, G. Michon, S. Seguy & A. Berlioz. *Experimental investigation and design optimization of targeted energy*

- transfer under periodic forcing*. Journal of Vibration and Acoustics, vol. 136, no. 2, page 021021, 2014. 17, 18, 209
- [Gourc 16] E. Gourc, L. D. Elce, G. Kerschen, G. Michon, G. Aridon & A. Hot. *Performance comparison between a nonlinear energy sink and a linear tuned vibration absorber for broad-band control*. In Nonlinear Dynamics, Volume 1, pages 83–95. Springer, 2016. 17
- [Gourdon 06] E. Gourdon & C.-H. Lamarque. *Nonlinear energy sink with uncertain parameters*. Journal of computational and nonlinear dynamics, vol. 1, no. 3, pages 187–195, 2006. 17
- [Greco 15] R. Greco, A. Lucchini & G. C. Marano. *Robust design of tuned mass dampers installed on multi-degree-of-freedom structures subjected to seismic action*. Engineering Optimization, vol. 47, no. 8, pages 1009–1030, 2015. 144
- [Gregory B. Beacher 81] T. S. I. Gregory B. Beacher. *Stochastic FEM In Settlement Predictions*. Journal of the Geotechnical Engineering Division, vol. 107, no. 4, pages 449–463, 1981. 90
- [Guedri 10] M. Guedri, A. Lima, N. Bouhaddi & D. Rade. *Robust design of viscoelastic structures based on stochastic finite element models*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 24, no. 1, pages 59–77, 2010. 99
- [Guillaume 03] P. Guillaume, P. Verboven, S. Vanlanduit, H. Van Der Auweraer & B. Peeters. *A poly-reference implementation of the least-squares complex frequency-domain estimator*. In Proceedings of IMAC, volume 21, pages 183–192, 2003. 23
- [Guyan 65] R. J. Guyan. *Reduction of stiffness and mass matrices*. AIAA journal, vol. 3, no. 2, pages 380–380, 1965. 58
- [Han 93] C. D. Han & J. K. Kim. *On the use of time-temperature superposition in multicomponent/multiphase polymer systems*. Polymer, vol. 34, no. 12, pages 2533–2539, 1993. 30
- [Han 08] B. Han & C. Li. *Characteristics of linearly distributed parameter-based multiple-tuned mass dampers*. Structural Control and Health Monitoring : The Official Journal of the International Association for Structural Control and Monitoring and of the European Association for the Control of Structures, vol. 15, no. 6, pages 839–856, 2008. 145
- [Harris 86] J. Harris & A. Stevenson. *On the role of nonlinearity in the dynamic behavior of rubber components*. Rubber chemistry and technology, vol. 59, no. 5, pages 740–764, 1986. 110
- [Hoang 05] N. Hoang & P. Warnitchai. *Design of multiple tuned mass dampers by using a numerical optimizer*. Earthquake engi-

- neering & structural dynamics, vol. 34, no. 2, pages 125–144, 2005. 145
- [Hot 12] A. Hot, G. Kerschen, E. Foltête & S. Cogan. *Detection and quantification of non-linear structural behavior using principal component analysis*. Mechanical systems and signal processing, vol. 26, pages 104–116, 2012. 109
- [Huang 98] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. C. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N.-C. Yen, C. C. Tung & H. H. Liu. *The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis*. In Proceedings of the Royal Society of London A : mathematical, physical and engineering sciences, volume 454, pages 903–995. The Royal Society, 1998. 109, 116
- [Jaboviste 19] K. Jaboviste, E. S. Reboul, N. Peyret, G. Chevallier, C. Arnould & E. Collard. *Identification of Nonlinear Viscoelastic Parameters Based on an Enhanced Oberst Beam Method*. In Nonlinear Dynamics, Volume 1, pages 379–382. Springer, 2019. 24, 115, 209, 211
- [Joseph 05] L. Joseph & T. Minh-Nghi. *A wavelet-based approach for the identification of damping in non-linear oscillators*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 47, no. 8, pages 1262–1281, 2005. 112
- [Joseph 17] S. V. Joseph & S. Mohanty. *Temperature effects on buckling and vibration characteristics of sandwich plate with viscoelastic core and functionally graded material constraining layer*. Journal of Sandwich Structures & Materials, page 1099636217722309, 2017. 74
- [Jrad 13] H. Jrad, J. L. Dion, F. Renaud, I. Tawfiq & M. Haddar. *Experimental characterization, modeling and parametric identification of the non linear dynamic behavior of viscoelastic components*. European Journal of Mechanics-A/Solids, vol. 42, pages 176–187, 2013. 110
- [Kalman 60] R. E. Kalman. *A new approach to linear filtering and prediction problems*. Journal of basic Engineering, vol. 82, no. 1, pages 35–45, 1960. 109
- [Kareem 95] A. Kareem & S. Kline. *Performance of multiple mass dampers under random loading*. Journal of structural engineering, vol. 121, no. 2, pages 348–361, 1995. 145
- [Kerschen 06] G. Kerschen, K. Worden, A. F. Vakakis & J.-C. Golinval. *Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics*. Mechanical systems and signal processing, vol. 20, no. 3, pages 505–592, 2006. 107, 111, 112

-
- [Kuczkowiak 14] A. Kuczkowiak, S. Cogan, M. Ouisse, E. Foltête & M. Corus. *Robust Expansion of Experimental Mode Shapes Under Epistemic Uncertainties*. In Model Validation and Uncertainty Quantification, Volume 3, pages 419–427. Springer International Publishing, 2014. 100
- [Lakes 98] R. S. Lakes. Viscoelastic solids, volume 9. CRC press, 1998. 35
- [Lalanne 99] C. Lalanne. Vibrations aléatoires. Hermès Science publications, 1999. 126
- [Leaderman 41] H. Leaderman. *Textile materials and the time factor : I. Mechanical behavior of textile fibers and plastics*. Textile Research, vol. 11, no. 4, pages 171–193, 1941. 30
- [Leontaritis 85] I. Leontaritis & S. A. Billings. *Input-output parametric models for non-linear systems part I : deterministic non-linear systems*. International journal of control, vol. 41, no. 2, pages 303–328, 1985. 112
- [Lesieutre 95] G. Lesieutre & E. Bianchini. *Time domain modeling of linear viscoelasticity using anelastic displacement fields*. Journal of Vibration and Acoustics, vol. 117, no. 4, pages 424–430, 1995. 35
- [Lesieutre 96] G. A. Lesieutre & U. Lee. *A finite element for beams having segmented active constrained layers with frequency-dependent viscoelastics*. Smart Materials and Structures, vol. 5, no. 5, page 615, 1996. 61, 64
- [Li 00] C. Li. *Performance of multiple tuned mass dampers for attenuating undesirable oscillations of structures under the ground acceleration*. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, vol. 29, no. 9, pages 1405–1421, 2000. 145
- [Li 02] C. Li. *Optimum multiple tuned mass dampers for structures under the ground acceleration based on DDMF and ADMF*. Earthquake engineering & structural dynamics, vol. 31, no. 4, pages 897–919, 2002. 145
- [Li 03] C. Li & Y. Liu. *Optimum multiple tuned mass dampers for structures under the ground acceleration based on the uniform distribution of system parameters*. Earthquake engineering & structural dynamics, vol. 32, no. 5, pages 671–690, 2003. 145
- [Lion 04] A. Lion & C. Kardelky. *The Payne effect in finite viscoelasticity : constitutive modelling based on fractional derivatives and intrinsic time scales*. International Journal of Plasticity, vol. 20, no. 7, pages 1313–1345, 2004. 110

- [Makris 97] N. Makris. *Causal hysteretic element*. Journal of engineering mechanics, vol. 123, no. 11, pages 1209–1214, 1997. 36
- [Marano 07] G. C. Marano, R. Greco, F. Trentadue & B. Chiaia. *Constrained reliability-based optimization of linear tuned mass dampers for seismic control*. International Journal of Solids and Structures, vol. 44, no. 22-23, pages 7370–7388, 2007. 144
- [Marano 10] G. C. Marano, R. Greco & S. Sgobba. *A comparison between different robust optimum design approaches : application to tuned mass dampers*. Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 25, no. 1, pages 108–118, 2010. 144
- [Masri 79] S. Masri & T. Caughey. *A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic problems*. Journal of Applied Mechanics, vol. 46, no. 2, pages 433–447, 1979. 111, 136
- [Massa 08] F. Massa, K. Ruffin, T. Tison & B. Lallemand. *A complete method for efficient fuzzy modal analysis*. Journal of Sound and Vibration, vol. 309, no. 1-2, pages 63–85, 2008. 89
- [Mattei 16] P.-O. Mattei, R. Ponçot, M. Pachebat & R. Côte. *Nonlinear targeted energy transfer of two coupled cantilever beams coupled to a bistable light attachment*. Journal of Sound and Vibration, vol. 373, pages 29–51, 2016. 17
- [McKay 79] M. D. McKay, R. J. Beckman & W. J. Conover. *Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code*. Technometrics, vol. 21, no. 2, pages 239–245, 1979. 90
- [Michon 05] G. Michon, L. Manin & R. Dufour. *Hysteretic behavior of a belt tensioner : modeling and experimental investigation*. Modal Analysis, vol. 11, no. 9, pages 1147–1158, 2005. 110
- [Michon 08] G. Michon, L. Manin, R. G. Parker & R. Dufour. *Duffing oscillator with parametric excitation : analytical and experimental investigation on a belt-pulley system*. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, vol. 3, no. 3, page 031001, 2008. 110
- [Miguel 16] L. F. Miguel, R. H. Lopez, A. J. Torii, L. F. Miguel & A. T. Beck. *Robust design optimization of TMDs in vehicle-bridge coupled vibration problems*. Engineering Structures, vol. 126, pages 703–711, 2016. 145
- [Mullins 48] L. Mullins. *Effect of stretching on the properties of rubber*. Rubber Chemistry and Technology, vol. 21, no. 2, pages 281–300, 1948. 110

-
- [Nayfeh 08] A. H. Nayfeh & D. T. Mook. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 2008. 110
- [Newland 12] D. E. Newland. *An introduction to random vibrations, spectral & wavelet analysis*. Courier Corporation, 2012. 107
- [Noël 14] J.-P. Noël, L. Renson & G. Kerschen. *Complex dynamics of a nonlinear aerospace structure : experimental identification and modal interactions*. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, no. 12, pages 2588–2607, 2014. 110
- [Noël 17] J.-P. Noël & G. Kerschen. *Nonlinear system identification in structural dynamics : 10 more years of progress*. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 83, pages 2–35, 2017. 112
- [Oberkampf 02] W. L. Oberkampf, S. M. DeLand, B. M. Rutherford, K. V. Diegert & K. F. Alvin. *Error and uncertainty in modeling and simulation*. *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 75, no. 3, pages 333–357, 2002. 88
- [Oberst 52] H. Oberst & K. Frankenfeld. *Damping of the bending vibrations of thin laminated metal beams connected through adherent layer*. *Acustica*, vol. 2, pages 181–194, 1952. 23, 114
- [Olivier 17] S. Olivier. *Dispositif de piege vibratoire a resonateurs distribues*, May 12 2017. FR Patent 3035939. 145
- [Oustaloup 91] A. Oustaloup. *La commande crone : commande robuste d'ordre non entier*. Hermes, 1991. 44
- [Pathan 17] M. Pathan, S. Patsias, J. Rongong & V. Tagarielli. *Measurements and predictions of the viscoelastic properties of a composite lamina and their sensitivity to temperature and frequency*. *Composites Science and Technology*, vol. 149, pages 207–219, 2017. 74
- [Payne 60] A. Payne. *A note on the existence of a yield point in the dynamic modulus of loaded vulcanizates*. *Journal of Applied Polymer Science*, vol. 3, no. 7, pages 127–127, 1960. 110, 113
- [Pennisi 16] G. Pennisi. *Contrôle passif de vibrations à l'aide d'absorbeurs non-linéaires. Étude théorique et investigations expérimentales*. PhD thesis, Toulouse, ISAE, 2016. 17
- [Peyret 16a] N. Peyret, G. Chevallier & J.-L. Dion. *Dynamic Damping in Joints : Multiscale Model Taking into Account Defects in a Nominally Plane Surface*. *International Journal of Applied Mechanics*, vol. 8, no. 08, page 1650097, 2016. 110

- [Peyret 16b] N. Peyret, J.-L. Dion & G. Chevallier. *A framework for backbone experimental tracking : Piezoelectric actuators, stop-sine signal and Kalman filtering*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 78, pages 28–42, 2016. 109
- [Placet 10] V. Placet & E. Foltête. *Is Dynamic Mechanical Analysis (DMA) a non-resonance technique ?* In EPJ web of conferences, volume 6, page 41004. EDP Sciences, 2010. 28
- [Platten 09] M. F. Platten, J. R. Wright, G. Dimitriadis & J. E. Cooper. *Identification of multi-degree of freedom non-linear systems using an extended modal space model*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 23, no. 1, pages 8–29, 2009. 112
- [Plevris 09] V. Plevris. *Innovative computational techniques for the optimum structural design considering uncertainties*. School of Civil Engineering, 2009. 95, 96
- [Plouin 00] A.-S. Plouin & E. Balmès. *Steel/viscoelastic/steel sandwich shells computational methods and experimental validations*. In International Modal Analysis Conference, volume 4062, pages 384–390, 2000. 59, 65
- [Pritz 98] T. Pritz. *Frequency dependences of complex moduli and complex Poisson's ratio of real solid materials*. Journal of Sound and Vibration, vol. 214, no. 1, pages 83–104, 1998. 33
- [Pritz 00] T. Pritz. *Measurement methods of complex Poisson's ratio of viscoelastic materials*. Applied acoustics, vol. 60, no. 3, pages 279–292, 2000. 33
- [Puel 04] G. Puel. *Sur une théorie des méconnaissances en dynamique des structures*. PhD thesis, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan, 2004. 91
- [Rao 95] S. Rao & J. P. Sawyer. *Fuzzy finite element approach for analysis of imprecisely defined systems*. AIAA journal, vol. 33, no. 12, pages 2364–2370, 1995. 91
- [Renaud 11a] F. Renaud. *Etude de l'incidence des comportements dissipatifs dans les instabilités vibratoires des systèmes de freinages*. PhD thesis, Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris, 2011. 23, 48, 209
- [Renaud 11b] F. Renaud, J.-L. Dion, G. Chevallier, I. Tawfiq & R. Le-maire. *A new identification method of viscoelastic behavior : Application to the generalized Maxwell model*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 25, no. 3, pages 991–1010, 2011. 42, 44, 77, 210
- [Renaud 12] F. Renaud, G. Chevallier, J.-L. Dion & G. Taudière. *Motion capture of a pad measured with accelerometers during squeal*

- noise in a real brake system*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 33, pages 155–166, 2012. 108
- [Renson 15] L. Renson, J.-P. Noël & G. Kerschen. *Complex dynamics of a nonlinear aerospace structure : numerical continuation and normal modes*. Nonlinear Dynamics, vol. 79, no. 2, pages 1293–1309, 2015. 110
- [Richards 98] C. Richards & R. Singh. *Identification of multi-degree-of-freedom non-linear systems under random excitations by the “reverse path” spectral method*. Journal of Sound and Vibration, vol. 213, no. 4, pages 673–708, 1998. 112
- [Rouleau 13] L. Rouleau. *Modélisation vibro-acoustique de structures sandwich munies de matériaux visco-élastiques*. PhD thesis, Paris, CNAM, 2013. 41
- [Saintier 01] N. Saintier. *Fatigue multiaxiale dans un élastomère de type NR chargé : mécanismes d’endommagement et critère local d’amorçage de fissure*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001. 110
- [Salençon 09] J. Salençon. *Viscoélasticité pour le calcul des structures*. Editions Ecole Polytechnique, 2009. 34
- [Schuëller 06] G. Schuëller. *Developments in stochastic structural mechanics*. Archive of Applied Mechanics, vol. 75, no. 10-12, pages 755–773, 2006. 89
- [Sefrani 06] Y. Sefrani & J.-M. Berthelot. *Temperature effect on the damping properties of unidirectional glass fibre composites*. Composites Part B : Engineering, vol. 37, no. 4, pages 346–355, June 2006. 74
- [Shad 11] M. R. Shad, G. Michon & A. Berlioz. *Modeling and analysis of nonlinear rotordynamics due to higher order deformations in bending*. Applied Mathematical Modelling, vol. 35, no. 5, pages 2145–2159, 2011. 110
- [Shafer 76] G. Shafer. *A mathematical theory of evidence*, volume 42. Princeton university press, 1976. 91
- [Simo 06] J. C. Simo & T. J. Hughes. *Computational inelasticity*, volume 7. Springer Science & Business Media, 2006. 37, 38
- [Simon 84] M. Simon & G. Tomlinson. *Use of the Hilbert transform in modal analysis of linear and non-linear structures*. Journal of Sound and Vibration, vol. 96, no. 4, pages 421–436, 1984. 108
- [Soize 05] C. Soize. *A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics*. Journal of sound and vibration, vol. 288, no. 3, pages 623–652, 2005. 89, 90

- [Soize 13] C. Soize. *Stochastic modeling of uncertainties in computational structural dynamics—recent theoretical advances*. Journal of Sound and Vibration, vol. 332, no. 10, pages 2379–2395, 2013. 90
- [Sperling 91] L. Sperling & J. Fay. *Factors which affect the glass transition and damping capability of polymers*. Polymers for Advanced Technologies, vol. 2, no. 1, pages 49–56, 1991. 74
- [Staszewski 98] W. Staszewski. *Identification of non-linear systems using multi-scale ridges and skeletons of the wavelet transform*. Journal of Sound and Vibration, vol. 214, no. 4, pages 639–658, 1998. 108
- [Steven F. Griffin 16] G. D. G. Steven F. Griffin. *Dynamic shape maintenance of aerospace subsystems using tuned mass dampers*, November 03 2016. US Application 20160319895. 145
- [Sun 18] W. Sun, Z. Wang, X. Yan & M. Zhu. *Inverse identification of the frequency-dependent mechanical parameters of viscoelastic materials based on the measured FRFs*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 98, pages 816–833, 2018. 23
- [Teng 01] T.-L. Teng & N.-K. Hu. *Analysis of damping characteristics for viscoelastic laminated beams*. Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 190, no. 29, pages 3881–3892, 2001. 74
- [Tomlinson 00] G. Tomlinson & K. Worden. *Nonlinearity in structural dynamics : detection, identification and modelling*. CRC Press, 2000. 107, 111, 112
- [Vakakis 01] A. F. Vakakis & O. Gendelman. *Energy pumping in non-linear mechanical oscillators : part II—resonance capture*. Journal of Applied Mechanics, vol. 68, no. 1, pages 42–48, 2001. 17
- [Van Gurp 98] M. Van Gurp & J. Palmen. *Time-temperature superposition for polymeric blends*. Rheol Bull, vol. 67, no. 1, pages 5–8, 1998. 30
- [Vasques 06] C. Vasques, B. Mace, P. Gardonio & J. D. Rodrigues. *Arbitrary active constrained layer damping treatments on beams : Finite element modelling and experimental validation*. Computers & structures, vol. 84, no. 22-23, pages 1384–1401, 2006. 61
- [Vasques 10] C. Vasques, R. Moreira & J. D. Rodrigues. *Viscoelastic Damping Technologies-Part I : Modeling and Finite Element Implementation*. Journal of advanced research in Mechanical Engineering, vol. 1, no. 2, 2010. 61

-
- [Vaurigaud 11] B. Vaurigaud, A. T. Savadkoohi & C.-H. Lamarque. *Targeted energy transfer with parallel nonlinear energy sinks. Part I : design theory and numerical results*. Nonlinear dynamics, vol. 66, no. 4, pages 763–780, 2011. 17
- [Vinh 67] T. Vinh. *Sur le passage du régime harmonique au régime transitoire viscoélastique*. Mémorial de l'artillerie française, vol. 3, 1967. 44
- [Vinot 05] P. Vinot, S. Cogan & V. Cipolla. *A robust model-based test planning procedure*. Journal of Sound and Vibration, vol. 288, no. 3, pages 571–585, 2005. 97
- [Wang 05] J.-F. Wang & C.-C. Lin. *Seismic performance of multiple tuned mass dampers for soil-irregular building interaction systems*. International journal of solids and structures, vol. 42, no. 20, pages 5536–5554, 2005. 145
- [Warburton 81] G. Warburton. *Optimum absorber parameters for minimizing vibration response*. Earthquake engineering & structural dynamics, vol. 9, no. 3, pages 251–262, 1981. 145
- [Warminski 11] J. Warminski, S. Lenci, M. P. Cartmell, G. Rega & M. Wiercigroch. *Nonlinear dynamic phenomena in mechanics*, volume 181. Springer Science & Business Media, 2011. 110
- [Weaver 96] R. Weaver. *The effect of an undamped finite degree of freedom "fuzzy" substructure : Numerical solutions and theoretical discussion*. The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 100, no. 5, pages 3159–3164, 1996. 164
- [Williams 55] M. L. Williams, R. F. Landel & J. D. Ferry. *The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids*. Journal of the American Chemical society, vol. 77, no. 14, pages 3701–3707, 1955. 30
- [Worden 89] K. Worden & G. Tomlinson. *Application of the restoring force surface method to nonlinear elements*. In International Modal Analysis Conference, 7 th, Las Vegas, NV, pages 1347–1355, 1989. 136
- [Wyckaert 94] K. Wyckaert. *Development and evaluation of detection and identification schemes for the nonlinear dynamical behaviour of mechanical structures*. 1994. 107
- [Zadeh 65] L. A. Zadeh. *Information and control*. Fuzzy sets, vol. 8, no. 3, pages 338–353, 1965. 91
- [Zuo 04] L. Zuo & S. A. Nayfeh. *Minimax optimization of multi-degree-of-freedom tuned-mass dampers*. Journal of Sound and Vibration, vol. 272, no. 3-5, pages 893–908, 2004. 189

LISTE DES FIGURES

1.1	Photo d'un PoD de désignation laser fixé sous un avion de chasse de type Rafale	10
1.2	Schéma d'un système optique embarqué	11
1.3	CAO d'un amortisseur utilisé pour suspendre les systèmes optiques embarqués [Collard 13]	12
1.4	Evolution d'un module de stockage (E') et du facteur de perte ($\tan\delta$) classique d'un matériau viscoélastique linéaire en fonction de la température pour une fréquence donnée [Butaud 15] (gauche) et cycle contrainte-déformation pour un essai de traction quasi-statique (droite)	13
1.5	CAO simplifiée du Support Optique avec ses lests représentatifs	15
1.6	Illustration de l'effet de l'amortissement par dissipation et par absorption sur un mode de vibration	16
1.7	Exemple de systèmes d'amortissement des vibrations par absorption : absorbeur dynamique unique implanté dans la tour Taipei 101 (bleu), réseau de poutres encastrées-libres formant un MTMD implanté dans le satellite UNISAT (vert) [Carcattera 12] et, photo d'un absorbeur dynamique non-linéaire monté sur un oscillateur linéaire (rouge) [Gourc 14]	18
2.1	Machine de test mécanique (a) <i>MTS Criterion 45</i> et Viscoanalyseurs (b) <i>Metravib DMA +300</i> , (c) <i>Bose Electroforce 3200</i>	22
2.2	Viscoanalyseur haute fréquence [Renaud 11a]	23
2.3	Poutre sandwich utilisée dans la méthode de Oberst [Jaboviste 19]	24
2.4	Évolution de la contrainte appliquée (bleu) sur l'échantillon et de la déformation mesurée (orange)	26
2.5	Éprouvettes pour le viscoanalyseur <i>Bose Electroforce 3200</i> (haut) et pour la <i>MTS Criterion 45</i> (bas)	27
2.6	Silicone SI965 : évolution du module de stockage E' et du facteur de perte ($\eta = \tan\delta$) en fonction de la température pour plusieurs fréquences mesurés sur le viscoanalyseur <i>Bose Electroforce 3200</i>	29
2.7	Courbe maîtresse issue des travaux de Butaud [Butaud 15] montrant l'évolution du module de stockage E' et du facteur de perte $\eta = \tan\delta$ du tBA/PEGDMA en fonction de la fréquence réduite.	31
2.8	Diagramme Cole-Cole (a) et diagramme Wicket (b) pour le silicone SI965, mesurés sur <i>Bose Electroforce 3200</i>	31

2.9	Silicone SI965 : évolution du module de stockage E' et du facteur de perte ($\eta = \tan\delta$) en fonction de la température pour plusieurs fréquences mesurés sur le viscoanalyseur <i>Metravib DMA +300</i>	32
2.10	tBA/PEGDMA : évolution du module de stockage E' et du facteur de perte ($\eta = \tan\delta$) en fonction de la température pour plusieurs fréquences	34
2.11	Modèle rhéologiques standards pour la viscoélasticité	37
2.12	Modèle de Maxwell généralisé (a) et modèle de Zener fractionnaire (b)	40
2.13	Évolutions du module et de la phase pour les différents modèles viscoélastiques (issues des travaux de Renaud [Renaud 11b])	42
2.14	Modélisation du module de stockage E_s (a) et du module de perte E_l (b) du tBA/PEGDMA par un Modèle de Maxwell Généralisé dans la configuration nominale	46
2.15	Erreur relative sur le module de stockage E_s (a) et le module de perte E_l (b) du tBA/PEGDMA entre le Modèle de Maxwell Généralisé dans la configuration nominale et les mesures	46
2.16	Modélisation du module de stockage E_s (a) et du module de perte E_l (b) du tBA/PEGDMA par un Modèle de Maxwell Généralisé dans la deuxième configuration	48
2.17	Erreur relative sur le module de stockage E_s (a) et le module de perte E_l (b) du tBA/PEGDMA entre le Modèle de Maxwell Généralisé dans la deuxième configuration et les mesures	49
2.18	Modélisation du module de stockage E_s (a) et du module de perte E_l (b) du tBA/PEGDMA par un Modèle de Maxwell Généralisé dans la troisième configuration	49
2.19	Erreur relative sur le module de stockage E_s (a) et le module de perte E_l (b) du tBA/PEGDMA entre le Modèle de Maxwell Généralisé dans la troisième configuration et les mesures	50
3.1	Géométrie, maillage et déformée de l'amortisseur à lames <i>Thales LAS Fr</i>	54
3.2	Rappel des comportements mécaniques dynamiques du silicone SI695 et du tBA/PEGDMA	63
3.3	Méthode d'implantation du GMM dans le modèle éléments finis de l'amortisseur à lames dans le domaine fréquentiel.	68
3.4	Analyse modale complexe pour le cas avec le silicone SI965 : Système élastique (rouge) contre système viscoélastique (bleu)	69
3.5	Analyse modale complexe pour le cas avec le tBA/PEGDMA : à 20°C (a), à 60°C (b) et à 120°C (c)	70
3.6	Procédure d'identification des paramètres du Modèle de Maxwell Généralisé en fonction de la température	75
3.7	Variation du module long terme E_∞ et des coefficients α_i du Modèle de Maxwell Généralisé en fonction de la température	76

3.8	Évolution des fréquences propres et des amortissements modaux pour l'amortisseur avec les patchs en silicone SI965 en fonction de la température	77
3.9	Évolution des fréquences propres et des amortissements modaux pour l'amortisseur avec les patchs en tBA/PEGDMA en fonction de la température	78
3.10	Index de suivi du 4 ^{ieme} mode de l'amortisseur en fonction de l'incrément en température (a) et Évolution de ce pôle reconstruit en fonction de la température (b)	81
3.11	Zoom sur le croisement entre le mode 3 et le mode 4 s'effectuant autour de $2.5f_0$ Hz	82
4.1	Rappel de la géométrie, maillage et déformée de l'amortisseur à lames <i>Thales LAS Fr</i>	86
4.2	Schéma de représentation des incertitudes en conception	88
4.3	Schéma des différentes modélisations des incertitudes : (1) stochastique, (2) théorie des intervalles, (3) théorie des ensembles flous, (4) théorie des méconnaissances, (5) théorie Info-Gap (ensembles convexes)	92
4.4	Comparaison entre l'optimisation déterministe, l'analyse de robustesse et l'optimisation robuste d'un système	94
4.5	Illustration des différentes méthodes de conception robuste envisageables : (1) RBDO, (2) RDO, et (3) RRDO	95
4.6	Courbe de robustesse : Comparaison entre l'amortissement modal minimal atteint grâce au silicone SI965 (vert) et au tBA/PEGDMA (bleu) en fonction de l'horizon d'incertitude h	101
5.1	Comportement mécanique non-linéaire constaté durant les campagnes d'essais chez <i>Thales LAS Fr</i>	107
5.2	Processus d'analyse des systèmes non-linéaires en dynamique des structures d'après [Cooper 17]	108
5.3	Montage expérimental pour la caractérisation de l'effet Payne : Poutre de Oberst modifiée [Jaboviste 19]	115
5.4	Post-traitement des essais sur la poutre de Oberst modifiée : Accélération brute (a), Déplacement et composante continue (b), EMD sur le déplacement (c), Identification de la fréquence instantanée et de l'amortissement par une méthode des moindres carrés glissants (d), signal de déplacement expérimental reconstruit (e) et fréquence instantanée et amortissement en fonction du temps (f)	118
5.5	Organigramme du post-traitement des données pour extraire l'effet Payne	119
5.6	Évolution du module élastique du silicone SI965 en fonction du taux de déformation : Effet Payne	120
5.7	CAO du porte-échantillon en cisaillement (a) et montage sur visconalyseur <i>Metravib DMA +300</i> pour la caractérisation de l'effet Payne (b)	121

5.8	Représentation du module d'Young du silicone SI965 en fonction du taux de déformation pour les différents moyens de caractérisation utilisés dans le manuscrit	122
5.9	Graphique représentant l'activation ou non des butées à chaque instant	123
5.10	Système à 1 ddl linéaire avec excitation à la base	124
5.11	Schéma dynamique équivalent du comportement de l'amortisseur autour de son mode de vibration (a) avec effet Payne extrapolé (b) et résultats de la simulation non-linéaire sous excitation aléatoire à faible niveau γ_e^l (c) et, niveau élevé γ_e^h (d)	129
5.12	Passage du modèle éléments finis non-linéaire complet de l'amortisseur à sa représentation réduite autour du mode d'intérêt	133
5.13	Réponse de l'amortisseur à lames pour une excitation harmonique . .	134
5.14	Tracé de la <i>Restoring Force</i> en fonction du débattement relatif entre la bague intérieure et la bague extérieure de l'amortisseur	137
6.1	Schéma d'un système optique embarqué	142
6.2	CAO du support optique et des lests (Gauche); Premier mode de flexion de du SO en libre-libre (Droite).	143
6.3	CAO du SO avec MTMD et vue détaillée d'un TMD	147
6.4	Comparaison entre la FRF du SO et la FRF du SO avec un MTMD optimal (a), localisation de la source d'excitation et des points de mesures (b) et, valeur des coefficients α_i pour les neuf TMDs (c) . . .	151
6.5	Influence du facteur de perte des lames η_{lames} (a), de la masse volumique des masses mobiles des TMDs ρ_{TMD} (b) et du nombre de TMD constituant le MTMD (c) sur la FRF de la solution optimale	152
6.6	Fonction de robustesse de la solution optimale nominale et les FRFs comparatives avec et sans MTMD pour différentes valeurs de h	156
6.7	Influence du facteur de perte des lames η_{lames} (a), de la masse volumique des masses mobiles des TMDs ρ_{TMD} (b) et du nombre de TMD constituant le MTMD (c) sur la fonction de robustesse de la solution optimale	157
6.8	Fonction de robustesse de la solution optimale (rouge) et des deux solutions optimales robustes pour $h_{rob} = 3\%$ (vert) et $h_{rob} = 6\%$ (bleu)	160
6.9	FRFs de la solution optimale et des deux solutions optimales robustes pour $h = 0$ (a) et $h = 6\%$ (b) et répartition des coefficients α_i pour chacune des solutions (c)	161
6.10	Réponse transitoire du SO (noir), de la solution optimale nominale (rouge) et de la solution optimale robuste obtenue pour $h_{rob} = 6\%$ (bleu)	164
6.11	Nouvelle conception du MTMD inspirée des travaux de Carcaterra [Carcaterra 12] (a) et, son implantation sur le SO (b)	166

6.12	Comparaison entre la FRF du SO et celle du SO avec le nouvel MTMD (a), courbe de robustesse du nouveau système optimal nominale en présence de méconnaissance sur la raideur du SO (b), répartition des pôles du MTMD obtenue par optimisation déterministe (c) et, évolution de la paire FRF du SO et FRF du système global optimisé lorsque la raideur du SO varie (d)	167
6.13	Set-up expérimental du SO en libre-libre pour les essais avec marteau de choc (a), et avec pot vibrant (b) avec une cartographie des points d'intérêts : accéléromètres et attaches (c)	169
6.14	Fréquences propres des quatre premiers modes de vibration du SO pour l'ensemble des essais réalisés et la simulation numérique	170
6.15	Représentation des déformées modales issues de la simulation numérique (a) et des essais vibratoires (b)	171
6.16	MAC entre les modes de vibrations issues des différents essais vibratoires et ceux issus de la simulation numérique	172
6.17	MTMD constitué de 36 poutres encastres-libres (a), set-up expérimental du SO associé au MTMD en libre-libre pour les essais avec marteau de choc et vibrométrie 3D (b) et, cartographie des points d'intérêts : accéléromètres, laser, excitation et attaches (c)	173
6.18	Mesures au vibromètre 3D <i>Polytech</i> : premier mode de flexion du SO (a) et premier mode de flexion du SO couplé au MTMD (b)	175
6.19	Signaux temporels mesurés par les trois têtes laser du vibromètre 3D <i>Polytech</i> (a), FRFs entre les différents points de mesures et la force injectée en $m/s^2/N$ pour le SO seul (b) et, pour le SO avec le MTMD (c)	177
6.20	Comparaison entre la FRF du SO seul et celle du SO associé au MTMD entre l'accéléromètre 3 et la force d'excitation appliquée au niveau du point 1 en $m/s^2/N$	178
B.1	Comparaison entre la FRF du SO et les FRFs du SO couplé à un MTMD réglé grâce à différentes stratégie d'optimisation (a) et, valeur des coefficients α_i pour les neuf TMDs pour chacune des stratégies d'optimisation (b)	191
B.2	Courbes de robustesse pour différentes stratégies d'optimisation	192

LISTE DES TABLES

2.1	Répartition des temps de relaxation du Modèle de Maxwell Généralisé dans la configuration nominale	45
2.2	Paramètres identifiés du Modèle de Maxwell Généralisé dans sa configuration nominale pour différentes températures	47
2.3	Configuration des différents GMM étudiés	47
3.1	Comparatif entre les fréquences propres et les amortissements modaux obtenus expérimentalement et par simulations numériques	72
6.1	Écart relatif maximal entre les fréquences propres issues de la simulation numérique et celles issues des essais vibratoires et amortissements modaux pour les différents tests	170

Title : Experimental characterization and modeling of damping devices for the reduction of mechanical vibration and the stabilization of embedded systems

Keywords : Damping, Viscoelasticity, Multiple Tuned Mass Damper, Payne Effect, Generalized Maxwell Model, Robustness

Abstract : The work carried out during this thesis deals with the study of the dynamic mechanical behavior of passive damping solutions used for the reduction of vibration levels and the stabilization of embedded optoelectronic systems within Thales LAS France company. These solutions integrate elastomer materials with high dissipative power, whose behavior must be perfectly controlled for a good mechanical dimensioning of vibration isolation, despite their dependence on temperature and frequency. The general objective is to improve the knowledge of these material behavior, the characterization techniques, and the method taking into account this behavior in the numerical simulations in order to improve the practices used in the engineering department that design the structures hosting these systems.

In this context, the work presented first focuses on the characterization, the modeling and the identification of the viscoelastic behavior of elastomers used in Thales LAS France damping devices. A Generalized Maxwell Model (GMM) is used to describe this behavior, and is introduced into a finite element model of the damper to obtain a satisfactory physical representation of its dynamic mechanical behavior. The problem is rewritten as an original state space representation that is associated with a model reduction strategy to reduce computation times. Various simulations are moreover performed to illustrate the potential of the proposed approach, such as complex modal analysis, frequency response and temporal response. Since temperature has a major influence on the mechanical behavior of elastomers, a specific thermomechanical material model is proposed by identifying the temperature evolution of GMM parameters, and a robustness analysis on the dissipation ability of the damper in the presence of a lack-of-knowledge on this variable is carried out based on the Info-Gap theory.

Experimental test results showed the appearance of a softening of the structure under heavy load, suggesting the presence of non-linearities. Another aspect of this thesis deals with the characterization, the modeling and the identification of non-linear phenomena that can impact the dynamic behavior of the damper. Two sources have been highlighted: a material non-linearity related to the dependence of the mechanical characteristics of the elastomers to the rate of deformation (Payne effect), and a contact non-linearity related to the presence of mechanical stops. These behaviors were implemented in a reduced representation of the damper to explain the nonlinear phenomena observed experimentally during the damping device qualification campaigns.

Finally, the last part of this thesis deals with the design of a network of tuned mass absorbers (MTMD) in order to reduce the vibratory level of a structural part supporting optical systems. After a formulation of the finite element problem, a procedure for optimizing the parameters of the MTMD is implemented and a robustness analysis of the optimal solution in the presence of uncertainties on the specific eigenfrequency to be controlled is performed. This study is carried out for different sets of parameters and a robust design optimization method is proposed by combining the optimization procedure and the Info-Gap theory. Finally, a model of the studied system is realized as well as a simplified version of its associated MTMD in order to test the tuning rules resulting from numerical studies thanks to a series of experimental tests.

Titre : Caractérisation expérimentale et modélisation de solutions amortissantes pour la réduction des transferts vibratoires et la stabilisation de systèmes embarqués

Mots clés : Amortissement, Viscoélasticité, Absorbeurs à masses accordées, Effet Payne, Modèle de Maxwell Généralisé, Robustesse

Résumé : Les travaux effectués durant cette thèse portent sur l'étude du comportement mécanique dynamique de solutions amortissantes passives utilisées pour la réduction des niveaux vibratoires et la stabilisation des systèmes optroniques embarqués au sein de l'entreprise Thales LAS France. Ces solutions intègrent des matériaux élastomères au fort pouvoir dissipatif dont le comportement doit être parfaitement maîtrisé pour un bon dimensionnement de l'isolation vibratoire, et ce malgré leur dépendance à la température et à la fréquence. L'objectif général est d'améliorer la connaissance du comportement de ces matériaux, leur caractérisation, leur prise en compte dans les simulations numériques afin d'améliorer les pratiques employées dans les bureaux d'études qui conçoivent les structures accueillant ces systèmes.

Dans ce cadre, les travaux présentés portent tout d'abord sur la caractérisation, la modélisation et l'identification du comportement viscoélastique des élastomères employés dans des amortisseurs de Thales LAS France. Un modèle de type Maxwell généralisé (GMM) est utilisé pour décrire ce comportement, et est introduit dans un modèle éléments finis de l'amortisseur afin d'obtenir une représentation physique satisfaisante de son comportement mécanique dynamique. Le problème est réécrit sous la forme d'une représentation d'état originale qui est associée à une stratégie de réduction de modèle pour réduire les temps de calcul. Différentes simulations sont alors réalisées pour illustrer le potentiel de l'approche proposée, analyse modale complexe, réponse fréquentielle et réponse temporelle. La température ayant une influence primordiale sur le comportement mécanique des élastomères, un modèle matériau thermomécanique spécifique est proposé en identifiant l'évolution en température de paramètres du GMM, et une analyse de robustesse portant sur la capacité de dissipation de l'amortisseur témoin en présence de méconnaissances sur cette variable est réalisée en se basant sur la théorie Info-Gap.

L'analyse d'une campagne d'essais a permis de constater l'apparition d'un assouplissement de la structure sous de fortes sollicitations, laissant augurer la présence de non-linéarités. Un autre aspect abordé durant cette thèse porte ainsi sur la caractérisation, la modélisation et l'identification des phénomènes non-linéaires pouvant impacter le comportement dynamique de l'amortisseur. Deux sources ont été mises en évidence : une non-linéarité matérielle liée à la dépendance des caractéristiques mécaniques des élastomères au taux de déformation (effet Payne), et une non-linéarité de type contact liée à la présence de butées. Ces comportements ont été implémentés dans une représentation réduite de l'amortisseur afin d'expliquer les phénomènes non-linéaires observés expérimentalement au cours des campagnes de qualification du produit.

Enfin, la dernière partie de ces travaux de thèse porte sur la conception d'un réseau d'absorbeurs à masses accordées (MTMD) afin de réduire le niveau vibratoire d'une pièce structurale supportant les systèmes optiques. Après une formulation du problème éléments finis, une procédure d'optimisation des paramètres du MTMD est mise en œuvre et une analyse de robustesse de la solution optimale en présence d'incertitudes sur la fréquence propre à contrôler est effectuée. Cette étude est menée pour différents jeux de paramètres et une méthode d'optimisation robuste est proposée en combinant la procédure d'optimisation et la théorie Info-Gap. Pour finir, une maquette du système étudié est réalisée ainsi qu'une version simplifiée de son MTMD associé afin de mettre à l'épreuve les règles d'accordage issues des études numériques grâce à une série d'essais vibratoires.