

Estimation et diagnostic de réseaux de Petri partiellement observables

Amira Chouchane Dardour

▶ **To cite this version:**

Amira Chouchane Dardour. Estimation et diagnostic de réseaux de Petri partiellement observables. Automatique. Université d'Angers; École nationale d'ingénieurs de Sfax (Tunisie), 2018. Français. NNT : 2018ANGE0054 . tel-02316020

HAL Id: tel-02316020

https://theses.hal.science/tel-02316020

Submitted on 15 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE D'ANGERS
COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 601
Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication
Spécialité : *Automatique, productique et robotique*

L'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax
Spécialité : Génie Électrique

Par
Amira CHOUCHANE

ESTIMATION ET DIAGNOSTIC DE RESEAUX DE PETRI PARTIELLEMENT OBSERVABLES

Thèse présentée et soutenue à Angers, le 17 Décembre 2018
Unité de recherche : Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes, Angers, France
Renewable Energies & Electric Vehicles, Sfax, Tunisie
Thèse N° : 131224

Rapporteurs avant soutenance :

Kamel Belkhiria	Professeur, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir, Tunisie
Mohamed Ghazel	Directeur de Recherche, IFSTTAR -COSYS/Estas, France

Composition du Jury :

Dimitri Lefebvre	Professeur, l'université Le Havre Normandie, France
Kamel Belkhiria	Professeur, l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir, Tunisie
Mohamed Ghazel	Directeur de Recherche, IFSTTAR -COSYS/Estas, France
Isabel Demongodin	Professeur, Aix Marseille Université, France

Directeurs de thèse

Philippe Declerck	Maître de conférence, l'Ecole d'ingénieurs de l'Université d'Angers, France
Anas Kamoun	Professeur, l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, Tunisie

Dédicace

À mes chers parents

À mon cher mari et ma chère fille

À mon cher frère et mes chères soeurs

À toute ma famille et belle famille

À tous mes amis

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma forte reconnaissance à mes directeurs de thèse : Philippe DECLERCK, maître de conférence à l'ISTIA, Ecole d'ingénieurs de l'université d'Angers en France et Anas KAMOUN, professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax (ENIS) en Tunisie. Je les remercie de m'avoir permis de relever le défi de la cotutelle de thèse entre l'ISTIA de l'Université d'Angers au sein du Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS), et L'ENIS au sein du laboratoire de Renewable Energies and Electric Vehicles (RELEV). Je tiens à les remercier aussi pour leur précieux conseils, leur patience et leur disponibilité tout au long de l'élaboration de mon travail.

Je tiens aussi à remercier M. Kamel BELKHIRIA, professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Monastir en Tunisie et M. Mohamed GHAZEL, directeur de Recherche à IFSTTAR-COSYS/Estas en France, d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse et pour le temps qu'ils ont consacré, malgré leurs charges et leurs responsabilités, à l'évaluation de mes travaux avec soin. Je remercie également M. Dimitri LEFEBVRE, professeur à l'université Le Havre Normandie en France et Mme Isabel DEMONGODIN, professeur à Aix Marseille Université en France, pour avoir accepté d'en être les examinateurs. Merci pour le temps et l'effort que vous m'avez consacré et de m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon Jury de thèse.

Mes sincères remerciements vont aussi à mes co-encadrants de thèse M. Othman NASRI, Maître-assistant à l'École Nationale d'Ingénieurs de Sousse en Tunisie et M. Atef KHEDHER, Maître-assistant à l'Institut Supérieur des Sciences Appliquées et de Technologie de Gafsa en Tunisie, pour leurs attentions de tout instant sur mes travaux,

pour leurs conseils avisés et leurs écoutes qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse.

Je ne peux terminer sans adresser mes plus profonds et sincères remerciements aux êtres qui me sont les plus chers. Je pense bien évidement à mes très chers parents à qui je dois tout. Je leur dédie cette thèse de doctorat et leur exprime tout mon amour. Je les remercie infiniment et j'espère les rendre fiers. Je suis également très reconnaissante à mon mari qui m'a toujours soutenu. Je n'aurais jamais pu aller aussi loin sans toi. Sans oublier ma belle fille Ayouta, je tiens à m'excuser pour les nombreuses heures d'absence. Je dédie également ce mémoire à mon cher frère et mes chères soeurs, à ma famille, à ma belle-famille ainsi qu'à tous mes amis.

Table des matières

Dédicace **i**

Remerciements **ii**

Table des figures **viii**

Liste des tableaux **x**

Introduction générale **xi**

1 Contexte général xi
2 Objectifs de la thèse xiii
3 Contributions xiv
4 Plan du document xvi

Chapitre 1
Généralités sur le diagnostic des SEDs modélisés par RdPs

1.1 Introduction 2
1.2 Modélisation des SEDs par RdPs 2
1.2.1 RdPs autonomes 2
1.2.1.1 Définition d'un RdP 2
1.2.1.2 Dynamique d'un RdP 4
1.2.1.3 Structures fondamentales du RdP 6
1.2.1.4 Structures particulières d'un RdP 7
1.2.1.5 Propriétés des séquences de franchissements 8
1.2.1.6 Propriétés des marquages 9

1.2.2 Graphe de marquages 10
1.2.3 Graphe de couverture 12
1.2.4 RdPs étiquetés 15
1.2.4.1 Définition informelle 15
1.2.4.2 Définition formelle 15
1.2.4.3 La fonction d'étiquetage 15
1.2.5 RdPs temporisés 16
1.2.5.1 RdP p-temporisé 16
1.2.5.2 RdP t-temporisé 17
1.3 Diagnostic des SEDs modélisés par des RdPs 18
1.3.1 Lexique de diagnostic 18
1.3.2 Les types des défauts 19
1.3.3 Différentes techniques pour le diagnostic des RdPs 20
1.3.3.1 Diagnostic selon la modélisation des défauts 20
1.3.3.2 Diagnostic selon l'observabilité des places et des transitions d'un RdP 20
1.3.3.3 Diagnostic selon la structure de prise de décision 21
1.3.3.4 Diagnostic en ligne/hors ligne 25
1.4 État de l'art sur le diagnostic des RdPs 26
1.4.1 Approches à base de diagnostiqueurs 27
1.4.2 Approches à base d'estimation de marquages de base 29
1.4.3 Approches à base d'analyse arrière (B-W Analysis) 29
1.4.4 Approches par résolution des problèmes PLNE 30
1.4.5 Approches par relaxation des contraintes 31
1.4.6 Approches à base d'espace de parité dynamique 32
1.5 Conclusion 33

Chapitre 2
Adaptation de l'algorithme de Fourier-Motzkin pour la résolution du polyèdre paramétrique $A.x \leq b$

2.1 Introduction 35
2.2 L'algorithme de Fourier-Motzkin pour la résolution de $A.x \leq b$ dans $\mathbb{R}^n$ . . 35
2.2.1 Phase1 : La procédure d'élimination de Fourier-Motzkin 36
2.2.1.1 Etape1 : Calcul des bornes d'une variable 36
2.2.1.2 Etape 2 : Élimination et construction d'un nouveau système 37

2.2.2 Phase2 : Calcul numérique d'une solution arbitraire 38
2.2.3 La complexité de l'algorithme de Fourier-Motzkin 41
2.2.4 Extension de Fourier-Motzkin : les théorèmes d'accélération d'Imbert 42
2.3 L'algorithme de Fourier-Motzkin pour la résolution de $A.x \leq b$ dans $\mathbb{Z}^n$ . . 46
2.4 Reformulation Algébrique d'élimination de Fourier-Motzkin 49
2.4.1 Reformulation Algébrique d'élimination de Fourier-Motzkin sans élimination des inégalités redondantes 49
2.4.2 Reformulation Algébrique de l'élimination de Fourier-Motzkin avec élimination des inégalités redondantes 51
2.4.3 Implémentation algorithmique 53
2.5 Conclusion 57

Chapitre 3
Diagnostic d'un RdPE partiellement observable sur un horizon élémentaire glissant

3.1 Introduction 59
3.2 Estimation d'un espace d'état d'un RdPE sur un horizon élémentaire glissant 61
3.2.1 Le principe de l'estimation 61
3.2.2 Polyèdre des vecteurs d'explication candidats 63
3.2.3 Calcul numérique de l'ensemble des vecteurs d'explication candidats 64
3.2.3.1 Implémentation algorithmique 66
3.2.3.2 L'espace des solutions en présence de boucles 68
3.2.4 L'ensemble des marquages cohérents 71
3.3 Estimation d'un sous ensemble réduit de l'espace d'état 72
3.3.1 L'ensemble des vecteurs d'explication candidats minimaux pour un sous-réseau non observable de classe "UBCF" 72
3.3.2 Généralisation pour un sous-réseau non observable non UBCF . . . 74
3.3.2.1 Les vecteurs d'explication candidats minimaux de *rang* 0 . 75
3.3.2.2 Autres vecteurs d'explication candidats minimaux x_{un} de "*rang* supérieur à 0" 77
3.3.2.3 Condition d'arrêt 80
3.3.3 Discussion 82
3.3.4 L'ensemble des marquages de base 85
3.4 Elimination des solutions inadéquates 87
3.4.1 Principe 87

3.4.2 Analyse de "l'ordonnançabilité" . . . 88
3.5 Diagnostic sur un horizon élémentaire glissant . . . 93
3.6 Application . . . 95
3.7 Conclusion . . . 97

Chapitre 4
Diagnostic d'un RdPE partiellement observable sur un horizon fuyant

4.1 Introduction . . . 99
4.2 Reformulation du problème . . . 100
4.2.1 Événements indiscernables . . . 101
4.2.2 Polyèdre final . . . 103
4.3 Diagnostic sur un horizon fuyant en utilisant la programmation linéaire . . . 103
4.3.1 Détection des défauts . . . 104
4.3.2 Isolation des défauts . . . 108
4.3.3 Application . . . 110
4.4 Étude de la complexité et comparaison . . . 113
4.5 Comparaison numérique avec l'approche discrète basée sur les marquages de base . . . 115
4.6 Discussions . . . 118
4.6.1 Marquage initial inconnu et extension à un horizon glissant . . . 118
4.6.2 Calcul en parallèle pour la réduction du temps de calcul : Décomposition en sous structures . . . 120
4.7 Conclusion . . . 122

Conclusion générale **124**

Bibliographie **127**

Table des figures

1.1 L'évolution d'un RdP généralisé 5
1.2 Le schéma d'un séquencement dans un RdP 6
1.3 La configuration d'un parallélisme dans un RdP 6
1.4 La configuration d'une synchronisation dans un RdP 7
1.5 La configuration de l'exclusion mutuelle dans un RdP 7
1.6 La forme d'un graphe d'état 8
1.7 La forme d'un graphe d'événements 8
1.8 Exemple d'un RdP borné 11
1.9 Graphe de marquages du RdP de Figure 1.8 11
1.10 Exemple d'un RdP non borné 14
1.11 Graphe de couverture du RdP non borné de la Figure 1.10 15
1.12 Principe d'évolution d'un RdP p-temporisé 17
1.13 Principe d'évolution d'un RdP t-temporisé 18
1.14 Défaut permanent 19
1.15 Défaut intermittent 19
1.16 Défaut transitoire 20
1.17 Le principe de diagnostic centralisé 22
1.18 Le principe de diagnostic décentralisé sans coordinateur 22
1.19 Le principe de diagnostic décentralisé avec coordinateur 23
1.20 Le principe de diagnostic distribué 24

3.1 Exemple d'un RdPE 62
3.2 RdPE avec un sous réseau non observable cyclique 69
3.3 Sous-réseau non observable BCF 74
3.4 Exemple d'un RdPE avec un sous-réseau non observable non BCF 75
3.5 Exemple d'un RdPE avec un sous-réseau non observable acyclique 83
3.6 Temps d'exécution des algorithmes en fonction du poids de pondération λ 84
3.7 Le principe d'estimation des marquages de base 85
3.8 Exemple d'un RdPE 86
3.9 RdPE avec transitions de défaut 95

4.1 RdPE avec un circuit non observable et des événements indiscernables . . . 111
4.2 Système de fabrication 115
4.3 Modèle RdPE du système de fabrication de Figure 4.2 116

Liste des tableaux

1.1 Exemples d'évenements et d'états d'un RdP 3

2.1 Les cas du calcul des bornes et d'élimination des variables du système $A.x \leq b$ 38

3.1 Tableau comparatif avec l'approche tabulaire 84
3.2 Tableau des marquages de base $\mathcal{M}_b(M_0, t_3t_3t_2t_1)$ 86

4.1 Approche de diagnostic à base d'estimation de marquages de base 117
4.2 Tableau comparatif 118

Introduction générale

1 Contexte général

Pour la supervision et la surveillance automatisée des systèmes, une modélisation mathématique doit être faite. Les variables du système sont soient des variables continues, soient des variables discrètes. Ainsi selon cette classification, les systèmes dynamiques sont divisés en différentes catégories selon le type des variables qui caractérise le système. Nous nous intéressons aux Systèmes à Événements Discrets (SEDs) qui représentent en général des systèmes complexes. La modélisation des systèmes dynamiques dépend de leurs comportements et de leurs dynamiques au cours du temps. Ainsi, un processus est modélisable par un SED si on ne s'intéresse qu'à des instants particuliers d'un système continu qui correspondent à certains événements importants pour la commande ou le diagnostic. Des exemples classiques sont les réseaux de transport et les systèmes de production manufacturière. La modélisation par des SEDs est aussi utilisée dans le cas des systèmes discrets dont l'état évolue à l'occurrence d'événements, comme les systèmes informatiques et les systèmes multimédias, etc.

Dans la littérature, il existe deux outils graphiques et mathématiques performants pour la modélisation des SEDs, qui sont les automates à état fini et les Réseaux de Petri (RdPs). Dans ce cadre, nous choisissons le formalisme des RdPs. La raison principale de ce choix est que la représentation des RdPs est un modèle général qui met en jeu des phénomènes de synchronisme, d'assemblage et de partage de ressources. Équipés de structures riches, les RdPs s'adaptent parfaitement à la description des différents types

de SEDs [DA89], [GS07].

Les systèmes industriels sont devenus de plus en plus complexes avec l'automatisation des processus et les développements technologiques. Par conséquent, les défauts qui peuvent affecter ces systèmes sont inévitables. Il peut y avoir différentes sources de défauts, par exemple des erreurs de modélisation, des défauts de capteurs, des défauts d'actionneurs, du bruit, etc. Ainsi, pour garantir le bon déroulement d'un procédé et pour une action de maintenance proactive, un système de diagnostic est nécessaire. Il consiste à récupérer toutes les informations accessibles sur l'évolution du système puis à prendre des décisions sur la présence de défauts, leurs localisations et leurs gravités. Les techniques utilisées pour le diagnostic des RdPs dépendent des informations disponibles sur le système ainsi que des défauts détectables affectant le système [WH05] [BFHJ03]. Pour la modélisation des défauts, on trouve les défauts à base d'événements (event-based faults), les défauts à base d'états (state-based faults) et les défauts à base mixte (mixed-based faults). Les défauts à base d'événements modélisent les défauts du système comme un ensemble de transitions, et l'occurrence de ces défauts est équivalente au franchissement des transitions associées. Leurs détection et localisation sont effectuées seulement en se basant sur un ensemble d'événements observés. Cette modélisation à base d'événements a l'avantage de détecter les défauts intermittents qui sont de courts événements qui peuvent conduire à des états instables [GL07] [GRM$^+$08] [RTRBALLM12]. Les défauts à base d'états considèrent que l'occurrence d'un défaut est équivalente à la variation de l'état (marquage) du RdP dont la déviation par rapport au comportement normal est exprimée par la perte ou l'adjonction des jetons. L'inconvénient de la modulation des défauts basée sur l'état est qu'elle ne peut pas détecter les défauts intermittents [WH05] [BFHJ03]. Les défauts à base mixte sont la combinaison de l'occurrence d'événements de défauts et de l'atteignabilité des états de défauts [WH05]. Notons que le diagnostic devra affronter le manque d'informations en raison du manque d'accessibilité des événements (exprimés par les transitions) et des états (représentés par les marquages) du système, l'origine venant de limitations techniques et économiques.

2 Objectifs de la thèse

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse traitent le problème de diagnostic des RdPs Étiquetés (RdPEs) partiellement observables par estimation d'états. Les défauts du système sont modélisés par un ensemble de transitions non observables, et l'occurrence de certains défauts est équivalente au tir des transitions non observables associées. Il existe également des transitions non observables qui présentent des comportements normaux. La procédure de diagnostic est déclenchée suite à l'observation d'une séquence de transitions observables à partir d'un marquage initial connu.

De nombreuses approches ont été développées pour le diagnostic des RdPEs partiellement observables à base d'estimation d'état. Nous allons, dans ce qui suit, donner quelques-unes de ces approches avec des exemples de problématiques qui relèvent du contexte de notre étude.

— La structure du sous-réseau non observable : la plupart des processus présentent pratiquement une évolution périodique. Néanmoins, l'hypothèse de l'acyclicité imposée sur les sous-réseaux non observables des RdPEs est prises dans de nombreux travaux [CGS10a] [CHS17]. D'autres approches de diagnostic des RdPEs n'ont montré leur efficacité que dans le cas particulier où le sous-réseau non observable est "une machine à états" acyclique. Nous pouvons citer aussi d'autres hypothèses structurelles de sous-réseau non observable qui existe dans la littérature à l'exemple des structures "contact-free" et "backward Conflict free" [GCS05] [CGS04].

— Le traitement séquentiel des événements : la plupart des approches de diagnostic qui existent dans ce contexte sont basées sur le traitement séquentiel de chaque événement produit par la séquence observée dans une procédure en ligne. Une problématique consiste à étendre l'estimation pour une seule transition observée à une séquence de transitions observées même si des résultats existent pour l'estimation d'un juste un sous-ensemble de l'espace d'état [LH11]. En effet pour chaque transition de la séquence observée, une estimation d'un ensemble de séquences non observables cohérent avec cette transition est effectuée. Le franchissement d'une séquence non observable estimée et la transition observable associée génèrent un

ensemble de nouveaux marquages utilisés comme marquages initiaux dans l'estimation associée à la transition observable suivante. La procédure de recherche est répétée pour chaque transition de la séquence observée. Cependant, cette procédure présente certains inconvénients. En effet, comme cette technique doit considérer tous les marquages initiaux possibles par rapport à la transition observée précédente dans l'estimation associée à la transition observée suivante, cette procédure est coûteuse du point du vue temps et la bornitude de l'espace est aussi une problématique [RH09a].

— La complexité temporelle des algorithmes d'estimation : la plupart des algorithmes existant pour le diagnostic des RdPEs partiellement observables à base d'estimation d'état ont une complexité exponentielle dans le pire des cas [CGS10a] [CHS17] [DFMU09].

Notre objectif est alors de développer une approche de diagnostic à base d'estimation d'état qui essaye d'éviter ces écueils par une nouvelle description du problème qui permette la détection et la localisation rapide des défauts.

3 Contributions

Les contributions de cette thèse sont résumées dans les points suivants.

— **Contribution 1**

Une première contribution permet d'estimer un espace d'état candidat qui inclut tout l'espace d'état d'un RdPE borné partiellement observable par une approche algébrique malgré la présence des circuits dans le sous-réseau non observable. Si le sous-réseau non observable n'inclut pas de circuits, alors l'espace d'état candidat et l'espace d'état réel coïncident. Cette estimation est faite sur un horizon élémentaire glissant [CDN$^+$16]. L'observateur est conçu en deux phases. La première phase est un pré-calcul hors ligne qui est basé sur l'algorithme d'élimination de Fourier-Motzkin. La seconde phase est une procédure d'estimation en ligne qui détermine des séquences non observables candidates cohérentes avec la transition observée considérée. Notons qu'un avantage de cette approche en deux phases est

que la phase hors ligne contient la partie coûteuse en temps de l'algorithme de Fourier-Motzkin. Quant à l'estimation en ligne, cette procédure est polynomiale par rapport à la longueur de la séquence observée. L'inconvénient de cette approche d'estimation qui cherche à déterminer tout l'espace d'état est le risque d'une explosion combinatoire de l'espace d'état.

— **Contribution 2**

Pour éviter le problème de l'explosion combinatoire de l'approche d'estimation de la contribution 1, une approche d'estimation repose sur l'estimation d'un sous-ensemble de l'espace d'état appelé l'ensemble des marquages de base. Elle s'appuie sur la première contribution mais sans calcul explicite de tout l'espace d'état candidat . Contrairement aux approches existantes qui s'appuient sur l'estimation des marquages de base, cette approche est applicable même si le sous-réseau non observable contient des cycles.

— **Contribution 3**

Le problème est maintenant de vérifier si une solution candidate calculée est aussi associée à un état possible de réseau. Classiquement, l'hypothèse de l'acyclicité est faite dans de nombreux travaux, mais elle limite le champ d'application des résultats associés car de nombreux processus présentent une évolution périodique. L'approche proposée consiste à construire un RdP p-temporisé où toutes les places présentent une temporisation unitaire et à analyser l'ordonnançabilité de la solution candidate en calculant le calendrier associé, c'est-à-dire les compteurs des tirs des transitions. L'existence d'une séquence temporelle pour le RdP prouve que la solution candidate associée correspond à un état possible du réseau.

— **Contribution 4**

Quoique l'approche 1 conçue pour le diagnostic repose sur l'estimation d'un sous-ensemble de l'espace d'état qui définit l'ensemble des marquages de base (contribution 2), cette approche reste aussi coûteuse du point du vue temps et espace de solutions puisque le nombre des marquages de base peut être énorme [BLG17]. Ainsi, une deuxième approche pour le diagnostic à base d'estimation d'état est définie par une nouvelle description du problème sur un horizon fuyant décrit al-

gébriquement sous la forme d'un polyèdre [CDKK18]. Contrairement à l'approche 1 de diagnostic, nous considérons le cas de présence des événements observables indiscernables c-à-d qu'il existe deux transitions observables différentes qui ont le même label. Il peut exister également des circuits dans le sous-réseau non observable. La détection des défauts est exprimée par des problèmes d'optimisation linéaire en nombres entiers (OLNE) (ou programmation linéaire en nombres entiers (PLNE)). Un problème PLNE est considéré comme un problème NP-difficile. Ainsi, sa résolution est exponentielle dans le pire des cas. En utilisant la technique de fluidisation, les états de diagnostic pourraient être calculés en résolvant des problèmes de Programmation Linéaire (PL) au lieu des problèmes PLNE. En effet, des algorithmes de programmation linéaire efficaces, tels que l'algorithme de Simplex, l'algorithme de Karmarkar et l'algorithme de Khashiyan, peuvent être appliqués.

4 Plan du document

Ce mémoire est structuré de la manière suivante :

Dans le chapitre 1, nous décrivons les RdPs et nous présentons les notations que nous allons utiliser dans le reste de la thèse. Nous présentons une revue des résultats significatifs trouvés dans la littérature pour le diagnostic des SEDs modélisés par des RdPs.

Dans le chapitre 2, nous rappelons d'abord l'algorithme classique de Fourier-Motzkin constitué de deux phases pour la détermination d'une solution réelle arbitraire du polyèdre $A.x \leq b$ dans $\mathbb{R}$. Ensuite, les deux théorèmes d'accélération d'Imbert sont introduits qui permettent d'éliminer les inégalités redondantes produites par la première phase de l'algorithme de Fourier-Motzkin. Nous appliquons l'algorithme de Fourier-Motzkin pour la résolution dans un temps polynomial des problèmes PLNE dans le cas particulier des systèmes 1-monotone où la solution d'un problème PLNE et de sa relaxation coïncident lorsqu'elles existent. À la fin de ce chapitre, nous reformulons algébriquement l'algorithme de Fourier-Motzkin pour la résolution du polyèdre paramétrique $A.x \leq b$.

Dans le chapitre 3, nous présentons un algorithme qui permet d'estimer un espace d'état candidat cohérent avec l'évolution d'un RdPE partiellement observable sur un ho-

rizon élémentaire glissant. Basé sur l'algorithme d'élimination de Fourier-Motzkin, il est complété par un algorithme de calcul numérique qui permet de déterminer toutes les solutions entières d'un polyèdre. Une extension de cet algorithme permet de déterminer un sous-ensemble de l'espace d'état candidat appelé l'ensemble des marquages de base candidat. Les solutions candidates qui ne correspondent pas à des évolutions possibles du réseau sont éliminées par l'analyse de "l'ordonnançabilité". À la fin du chapitre, une première approche de diagnostic à base d'estimation d'état sur un horizon élémentaire glissant est conçue et des indicateurs de défauts qui nous permettent de localiser et de caractériser les défauts du processus sont définis.

Dans le chapitre 4, nous concevons une deuxième approche pour le diagnostic des RdPEs partiellement observables. À l'inverse de la première approche, nous supposons que deux transitions observables différentes peuvent partager le même label. Une nouvelle description du problème sur un horizon fuyant décrit algébriquement sous la forme d'un polyèdre. Pour le diagnostic, nous ajoutons des critères d'optimisation. Ainsi, des problèmes PLNE sont construits. Une relaxation de ces problèmes est effectuée et utilisée pour la détection et la localisation des défauts dans un temps polynomial, puisque la résolution de ces problèmes d'optimisation en nombres entiers est exponentielle dans le pire des cas.

1

Généralités sur le diagnostic des SEDs modélisés par RdPs

Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord un préliminaire sur les RdPs, leurs différents modèles, leurs principales propriétés et leurs fonctionnalités. Nous introduisons par la suite quelques concepts et terminologie relatives au diagnostic des systèmes. Nous présentons une revue de la littérature pour le diagnostic des SEDs modélisés par des RdPs.

1.1 Introduction

Le diagnostic est une branche importante de l'automatique puisqu'elle analyse le bon déroulement de l'évolution et de la production des processus. Faire le diagnostic, cela revient à préciser les différents types des défauts à détecter, ses principes de mise en oeuvre et ses critères d'évaluation. Ainsi, concevoir une stratégie de diagnostic n'est pas très évident. Cependant, la plupart des systèmes sont des systèmes complexes qui supposent une approche spécifique pour leurs modélisations et leurs analyses. La nature des connaissances disponibles sur le système ainsi que sur les défauts détectables qui l'affectent conduit à la mise en oeuvre de stratégies spécifiques. Dans ce mémoire, nous nous intéressons au diagnostic des SEDs. Les automates à états finis [All08], [AFH94], [BCD05] et les RdPs [CGS10a] [WH05] [LD07] [DFMU09] constituent des outils mathématiques et graphiques relativement bien adaptés pour la modélisation et le diagnostic des SEDs puisqu'ils modélisent les comportements normaux et/ou défaillants. Nous nous intéressons dans ce document au diagnostic des SEDs en se basant sur le formalisme des RdPs.

Dans ce chapitre, nous commençons par représenter quelques types des RdPs, leurs définitions et leurs propriétés. Dans une deuxième partie, nous présentons un état de l'art sur le diagnostic des RdPs.

1.2 Modélisation des SEDs par RdPs

Il existe deux principaux types de RdPs qui sont les RdPs autonomes et les RdPs non autonomes. Un RdP autonome décrit le fonctionnement d'un SED sans interaction avec le temps tandis qu'un RdP non autonome décrit un SED dont l'évolution est conditionnée par le facteur de temps sur les transitions ou les places.

1.2.1 RdPs autonomes

1.2.1.1 Définition d'un RdP

1.2.1.1.1 Définition informelle Un RdP est un graphe orienté constitué d'un ensemble fini de places $P = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$ représentées par des cercles. Ces places présentent

les états du système. Les événements du système sont visualisés par un ensemble de transitions $TR = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ qui sont représentées graphiquement par des traits. Des arcs orientés (p_i, t_j) relient des places à des transitions et des arcs orientés (t_j, p_i) relient des transitions à des places. Le tableau (TABLE 1.1) donne quelques exemples d'événements et d'états.

TABLE 1.1 – Exemples d'évenements et d'états d'un RdP

Exemples d'événements	Exemple d'états
-Une commande arrive -La machine débute le traitement de la commande -La machine termine le traitement de la commande -La commande est envoyée	-Une machine est au repos -Une machine est en réparation -Une commande est en attente -Une commande est en cours de traitement

Les définitions suivantes décrivent les RdPs :

— Marquage d'une place : Nous notons $M(p_i)$ le marquage de la place p_i qui représente le nombre de jetons contenus dans p_i à un instant donné.

— Marquage d'un RdP : C'est le vecteur M de dimension égale au nombre de places, composé du nombre de jetons dans chaque place du RdP.

— L'application d'incidence avant : Nous notons $Pre : P \times TR \to N$ l'application d'incidence avant définie par $Pre = W^-(p_i, t_j)$ qui est le poids de l'arc (p_i, t_j).

— L'application d'incidence arrière : Nous notons $Post : TR \times P \to N$ l'application d'incidence arrière définie par $Post = W^+(p_i, t_j)$ qui est le poids de l'arc (t_j, p_i).

— Places d'entrée d'une transition : Nous notons ${}^\bullet t_j = \{p_i \in P | Pre(p_i, t_j) > 0\}$ l'ensemble des places d'entrée de t_j.

— Places de sortie d'une transition : Nous notons $t_j{}^\bullet = \{p_i \in P | Post(p_i, t_j) > 0\}$ l'ensemble des places de sortie de t_j.

— Transitions d'entrée d'une place : Nous notons ${}^\bullet p_i = \{t_j \in TR | Post(p_i, t_j) > 0\}$ l'ensemble des transitions d'entrée de p_i.

— Transitions de sortie d'une place : Nous notons ${}^\bullet p_i = \{t_j \in TR | Pre(p_i, t_j) > 0\}$ l'ensemble des transitions de sortie de p_i.

— Séquence de franchissements : C'est le franchissement successif de transitions dans

un ordre donné à partir d'un marquage donné. Nous notons TR^* l'ensemble des séquences de franchissements.

1.2.1.1.2 Définition formelle d'un RdP

Le RdP est un quadruplet

$$R =< P, T, W^-, W^+ > \tag{1.1}$$

P et TR représentent un ensemble fini respectivement de places et de transitions. Les matrices $W^- = Pre$ et $W^+ = Post$ sont respectivement la matrice d'incidence avant et arrière. Si $Pre(p_i, t_j), Post(p_i, t_j) \in \{0, 1\}$ alors le réseau est un RdP ordinaire sinon, c'est un RdP généralisé.

On dit que le RdP est marqué si le marquage initial de réseau M_0 est connu. Un RdP marqué est noté par $< R, M_0 >$.

1.2.1.2 Dynamique d'un RdP

1.2.1.2.1 Conditions de franchissement d'une transition : Une transition t est franchissable (ou tirable, ou validée) si

$$\forall p_i \in P; M(p_i) \geq Pre(p_i, t) \tag{1.2}$$

Si t est franchissable, cela ne signifie pas qu'elle est automatiquement franchie mais que c'est une possibilité. Pour dire que la transition t est franchissable à partir du marquage M, nous utilisons la notation $M[t >$.

1.2.1.2.2 Franchissement d'une transition t : Le franchissement d'une transition t entraîne des modifications dans le marquage du RdP : on enlève $n_i = Pre(p_i, t)$ jetons de p_i et on ajoute $m_j = Post(p_j, t)$ jetons de p_j.

1.2.1.2.3 Marquage résultant de franchissement d'une transition t : Soit t une transition franchissable d'un RdP marqué $< R, M_0 >$ et p une place d'entrée de t.

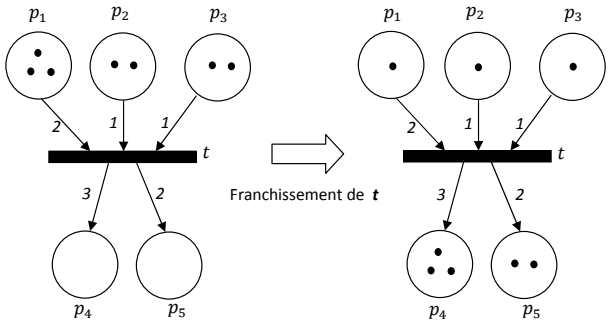


FIGURE 1.1 – L'évolution d'un RdP généralisé

Soit $M(p)$ le marquage de p avant le franchissement de t. Le franchissement de t résulte un nouveau marquage de p défini par :

$$M'(p) = M(p) + Post(p,t) - Pre(p,t) \tag{1.3}$$

M et M' appartiennent à l'ensemble des marquages atteignables à partir du marquage initial M_0 en franchissant une ou plusieurs transitions. Nous notons cet ensemble $A(R, M_0)$ et nous le définissons comme suit :

Définition :

Un marquage M est atteignable à partir d'un marquage initial M_0 s'il existe une séquence de franchissements σ à partir de M_0 dont le franchissement résulte un nouveau marquage M, on note $M_0[\sigma > M$. Formellement, l'ensemble des marquages accessibles $A(R, M_0)$ à partir du marquage M_0 est défini comme suit :

$$A(R, M_0) = \{M \mid \exists \sigma \in TR^*; M_0[\sigma > M\} \tag{1.4}$$

La propriété de l'accessibilité (atteignabilité) permet de savoir si un état non désiré d'un réseau de Petri R risque de se produire.

1.2.1.2.4 Marquage résultant de franchissement d'une séquence de transitions : La dynamique de fonctionnement d'un RdP se traduit par l'évolution des marquages. Alors, si on passe d'un marquage M_i à un marquage M_f par une séquence de

franchissements σ ($M_i[\sigma > M_f$), ceci est décrit par l'équation fondamentale :

$$M_f = M_i + W * x \tag{1.5}$$

avec $W = W^+ - W^-$ est la matrice d'incidence, et x est le vecteur qui contient le nombre de franchissement de chaque transition $t_j \in TR$ associé à la séquence σ. Nous définissons alors la fonction de comptage comme suit :

$$\begin{array}{rccl} \pi : & TR^* & \rightarrow & \mathbb{N}^n \ , \ n = |TR| \\ & \sigma & \mapsto & x = \pi(\sigma) \end{array} \tag{1.6}$$

$\pi(\sigma)$ est appelé le vecteur de compte associé à la séquence σ.

1.2.1.3 Structures fondamentales du RdP

Lorsqu'on modélise des systèmes dynamiques, on rencontre des situations typiques. Parmi ces situations, on trouve le séquencement, le parallélisme, la synchronisation, le partage de ressources, le schéma producteur/consommateur, etc.

— Le séquencement : C'est une situation dans laquelle une série d'événements doivent obligatoirement se dérouler les uns après les autres (Figure 1.2).



FIGURE 1.2 – Le schéma d'un séquencement dans un RdP

— Le parallélisme : Le parallélisme signifie qu'un processus peut se décomposer en des sous-processus qui s'exécutent indépendamment (Figure 1.3). Pour que le processus soit considéré comme terminé, il faut que tous les sous-processus soient terminés.

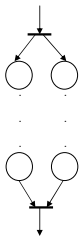


FIGURE 1.3 – La configuration d'un parallélisme dans un RdP

— La synchronisation : Il se peut que deux processus séquentiels qui se déroulent indépendamment aient besoin de se synchroniser. Dans ce cas, on crée un rendez-vous qui force chaque processus à attendre que l'autre ait atteint un certain point avant de continuer (Figure 1.4).

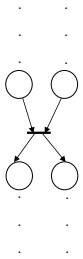


FIGURE 1.4 – La configuration d'une synchronisation dans un RdP

— Le partage de ressources (exclusion mutuelle) : Deux processus indépendants peuvent avoir besoin d'une même ressource qui ne peut être utilisée que par un seul à la fois. Cette situation est représentée par une place correspondant à la disponibilité de la ressource. Si la ressource est disponible (un jeton dans la place correspond à la ressource), l'un des processus peut la prendre, ce qui bloque l'autre. Quand il a fini d'utiliser la ressource, il remet un jeton dans la place de la ressource, libérant ainsi l'autre processus (Figure 1.5).

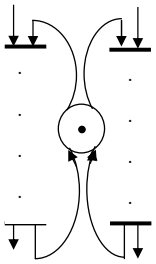


FIGURE 1.5 – La configuration de l'exclusion mutuelle dans un RdP

1.2.1.4 Structures particulières d'un RdP

— Graphe d'état : C'est un RdP tel que toute transition a exactement une place d'entrée et une place de sortie (Figure 1.6)

— Graphe d'événements : C'est un RdP tel que toute place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie (Figure 1.7).



FIGURE 1.6 – La forme d'un graphe d'état

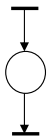


FIGURE 1.7 – La forme d'un graphe d'événements

1.2.1.5 Propriétés des séquences de franchissements

1. **Définition formelle**

   Une séquence de franchissements σ de M_0 à M_n est une suite de transitions $t_0...t_{n-1}$ telle qu'il existe des marquages $M_1, ..., M_n$ vérifiant :

   $$M_0[t_0 > M_1...M_{n-1}[t_{n-1} > M_n \tag{1.7}$$

2. **Existence d'un marquage**

   Pour toute séquence de transitions $\sigma \in TR^*$, il existe un marquage M tel que celle-ci soit franchissable :

   $$\forall \sigma \in TR^*; \exists M \in \mathbb{N}^m | M[\sigma > \tag{1.8}$$

3. **Séquence répétitive**

   Définition 1.1 *Une séquence $\sigma \in TR^*$ est appelée répétitive s'il existe un marquage $M_1 \in A(R, M_0)$ tel que $M_1[\sigma > M_2[\sigma > M_3[\sigma > ...$, c-à-d si la séquence σ peut être franchie infiniment à partir du marquage M_1.*

   Propriété 1 *Une séquence σ est répétitive $\Leftrightarrow$ $\exists v \in \mathbb{N}^n; v > 0$ tel que $W.v \geq 0$ et $v = \pi(\sigma)$ [Mur89].*

4. **Vivacité**

Définition 1.2 *Une transition t_j est vivante pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage atteignable M_k , il existe une séquence de franchissements à partir de M_k contenant t_j :*

$$\forall M_k \in A(R, M_0), \exists \sigma; M_k[\sigma > \ et\, \sigma = ...t_j... \tag{1.9}$$

Si une transition t_j est vivante alors, à tout instant, on sait que t_j peut être franchie dans le futur.

Définition 1.3 *Une transition t_j est quasi vivante pour un marquage initial M_0 s'il existe une séquence de franchissements à partir de M_0 contenant t_j :*

$$\exists \sigma; M_0[\sigma > \ et\, \sigma = ...t_j... \tag{1.10}$$

Définition 1.4 *Un RdP est vivant pour un marquage initial M_0 si quel que soit $M \in A(R, M_0)$ et quelle que soit la transition $t \in TR$, il existe une séquence de franchissements $\sigma \in TR^*$ qui inclut t à partir de M_0.*

Cette propriété permet de savoir si le système ne comporte pas de blocage.

5. **Réversibilité**
   Un RdP est réversible (réinitialisale) pour un marquage initial M_0 si $\forall M \in A(R, M_0)$, il existe $\sigma \in TR^*; M[\sigma > M_0$.

1.2.1.6 Propriétés des marquages

1. **La bornitude**

Définition 1.5 *Une place p_i est bornée pour un marquage initial M_0 s'il existe une constante $q \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $M \in A(R, M_0)$; $M(p_i) \leq q$. On dit aussi que p_i est $q-$bornée.*

Définition 1.6 *Un réseau de Petri R pour un marquage initial M_0 est borné si toutes ses places sont bornées. On dit aussi qu'un réseau de Petri est q-borné si toutes ses places sont q-bornées.*

Si pour un réseau de Petri $< R, M_0 >$, le nombre de jetons dans un ou plusieurs places peut croître infiniment, alors le réseau de Petri $< R, M_0 >$ est non borné.

2. **La bornitude structurelle**

Définition 1.7 *Un RdP est structurellement borné s'il est borné quel que soit le marquage initial M_0.*

Propriété 2 *Un RdP est structurellement borné si et seulement s'il existe un vecteur entier non nul $v \in \mathbb{N}^m$ qui vérifie $v^\top.W \geq 0$. Le vecteur v est appelé P-invariant.*

La propriété essentielle d'un P-invariant est donc que le nombre pondéré des jetons associé à ce P-invariant est constant quel que soit le marquage initial et l'évolution du réseau.

1.2.2 Graphe de marquages

Définition 1.8 *Le graphe de marquages, également appelé l'arbre d'accessibilité ou d'atteignabilité, d'un RdP (R, M_0) est un graphe des noeuds et des arcs dans lequel :*

- *Les noeuds : correspondent à des marquages atteignables à partir du marquage M_0*
- *Les arcs : correspondent à des transitions actives.*

Alors, le graphe de marquages est une représentation graphique de l'ensemble des marquages atteignables à partir d'un marquage initial connu M_0 en appliquant les règles de franchissement.

Exemple 1 *Soit le RdP de la Figure 1.8. Le graphe de marquages du RdP de la Figure 1.8 pour le marquage initial $M_0 = (1\ 0\ 0\ 0\ 0)^\top$ est décrit dans la Figure 1.9.*

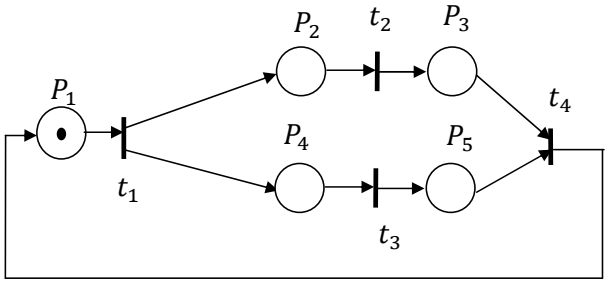


FIGURE 1.8 – Exemple d'un RdP borné

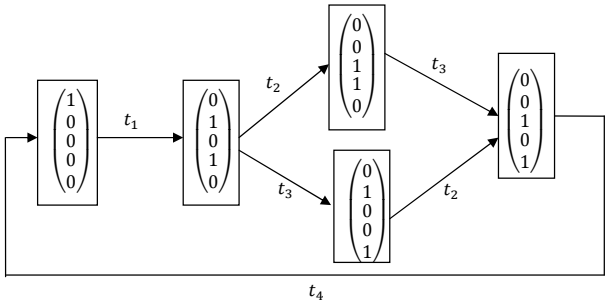


FIGURE 1.9 – Graphe de marquages du RdP de Figure 1.8

Ci-dessous, nous présentons un algorithme qui permet de déterminer le graphe de marquages noté $G_A(R, M_0)$ pour un marquage initial M_0.

Algorithme 1 L'algorithme de construction du graphe de marquages $G_A(R, M_0)$

Entrées: $< R, M_0 >$

Sorties: $G_A(R, M_0)$

$A(R, M_0) = \{M_0\}$;

$A_{explorer} = \{M_0\}$;

Tant que $A_{explorer} \neq \emptyset$ **faire**

Créer les noeuds étiquetés par $M \in A_{explorer}$

$\forall M \in A_{explorer}$; déterminer les couples (M, t_j) tels que $M[t_j \succ$

Créer les arcs étiquetés par t_j associés aux couples (M, t_j)

Pour chaque couple (M, t_j) déterminer $M' = M + W.x(t_j)$

$A_{explorer} = \{M' \notin A(R, M_0)\}$

$A(R, M_0) = A(R, M_0) \bigcup A_{explorer}$

Fin Tant que

Initialement, nous initialisons l'ensemble des marquages atteignables $A(R, M_0)$ à M_0 et l'ensemble des marquages à explorer $A_{explorer}$ aussi à M_0. Nous construisons le premier noeud étiqueté par M_0. Nous déterminons ensuite les transitions t_j qui sont actives à partir de M_0 et nous traçons les arcs correspondants. Le franchissement de ces transitions t_j à partir du marquage M_0 conduit à d'autres marquages possibles M'. Alors, $A_{explorer}$ est réinitialisé à l'ensemble des marquages M' non déjà construit et nous traçons les noeuds étiquetés par M'. Cette procédure se répète jusqu'à trouver tous les marquages atteignables à partir de M_0.

Le graphe de marquages nous permet de déterminer quelques propriétés du RdP :

— La bornitude : Si l'algorithme de construction de $G_A(R, M_0)$ converge, alors le nombre des marquages est fini et par conséquent le réseau N est borné pour un marquage initial M_0.

— La répétitivité : Pour déterminer les séquences répétitives, il suffit de déterminer les cycles dans le graphe de marquages $G_A(R, M_0)$.

Nous pouvons distinguer d'après le graphe de marquages de la Figure 1.9 que le réseau est borné pour le marquage initial $M_0 = (1\ 0\ 0\ 0\ 0)^\top$. Puisqu'on a aussi des cycles, il existe alors des séquences répétitives.

Un graphe de marquages ne peut plus être construit quand le réseau est non borné c-à-d quand le nombre de marquages accessibles est infini. D'où le recours au graphe dit de couverture.

1.2.3 Graphe de couverture

Pour les RdPs bornés, le graphe de couverture est exactement le graphe de marquages. Pour les RdPs non bornés, l'ensemble des marquages atteignables est infini, ce qui signifie qu'au moins une place dans un tel réseau peut avoir un nombre non borné de jetons. Cela implique également qu'il existe au moins une séquence infinie de franchissements de certaines transitions du réseau. Ainsi, un graphe de couverture fini peut être produit par la création d'un ensemble réduit de marquages qui est équivalent à cet ensemble infini. Le symbole spécial ω est utilisé pour représenter un grand nombre arbitraire de jetons dans une place non bornée. Soit la définition suivante qui sert à construire le graphe de

couverture.

Définition 1.9 *Un marquage M' couvre un marquage M si, pour chaque place, le nombre de marques de M' est supérieur ou égal au nombre de marques de M :*

$$\forall p_i, M'(p_i) \geq M(p_i) \tag{1.11}$$

Notation : $M' \geq M$.

La couverture est stricte si de plus :

$$\forall p_i, M'(p_i) > M(p_i) \tag{1.12}$$

Notation : $M' > M$.

Le mécanisme de construction d'un graphe de couverture d'un RdP non borné est similaire à la construction du graphe de marquages d'un RdP borné, sauf que pour chaque nouveau marquage ajouté, nous vérifions s'il ne couvre pas un marquage déjà existant dans le graphe de couverture qui est en cours de construction. Si c'est le cas, toutes les composantes des marquages supérieurs sont remplacées par ω. L'algèbre de ω est donnée par [SP90] :

$$\omega \pm \alpha = \omega \ , \ \omega \geq \alpha \ , \ \omega \geq \omega \ , \tag{1.13}$$

où α est une constante arbitraire. L'algorithme basique de construction du graphe de couverture noté $G_C(R, M_0)$ pour le marquage initial M_0 est décrit comme suit :

Algorithme 2 L'algorithme de construction du graphe de couverture $G_C(R, M_0)$

Entrées: $< R, M_0 >$

Sorties: $G_C(R, M_0)$

$A(R, M_0) = \{M_0\}$;

$A_{explorer} = \{M_0\}$;

Tant que $A_{explorer} \neq \emptyset$ **faire**

Créer les noeuds étiquetés par $M \in A_{explorer}$

$\forall M \in A_{explorer}$; déterminer les couples (M, t_j) tels que $M[t_j \succ$

Créer les arcs étiquetés par t_j associés aux couples (M, t_j)

Pour chaque couple (M, t_j) déterminer $M' = M + W.\pi(t_j)$

Si $M' \geq M$ **alors**

Pour i de 1 à $|P|$ **faire**

Si $M'(p_i) > M(p_i)$ **alors**

Nous remplaçons $M'(p_i)$ par ω

Fin Si

Fin Pour

Fin Si

$A_{explorer} = \{M' \notin A(R, M_0)\}$

$A(R, M_0) = A(R, M_0) \bigcup A_{explorer}$

Fin Tant que

Exemple 2 *Soit le RdP de Figure 1.10 non borné pour le marquage initial* $M_0 = (1\ 0\ 0)^\top$.

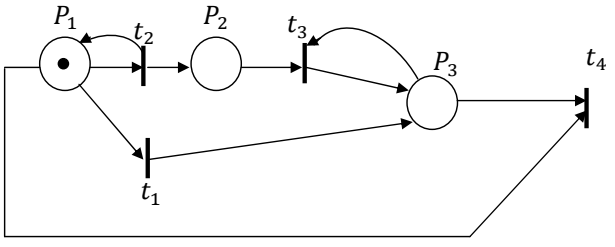


FIGURE 1.10 – Exemple d'un RdP non borné

Le graphe de couverture associé au RdP de Figure 1.10 pour le marquage initial $M_0 = (1\ 0\ 0)^\top$ *est décrit dans la Figure 1.11.*

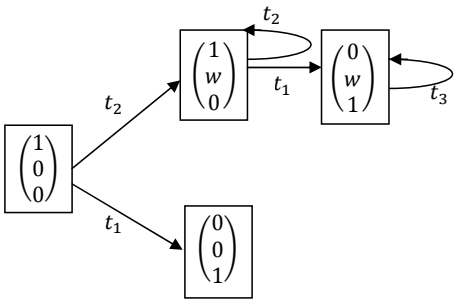


FIGURE 1.11 – Graphe de couverture du RdP non borné de la Figure 1.10

Une extension de graphe de couverture est le graphe de couverture minimal [Fin91].

1.2.4 RdPs étiquetés

1.2.4.1 Définition informelle

Un RdP Étiqueté (RdPE) est un RdP marqué (R, M_0) telle qu'on associe une étiquette à chaque transition $t \in TR$.

1.2.4.2 Définition formelle

Un RdPE est une structure $(R, M_0, AL, Ł)$ où (R, M_0) est un RdP marqué, AL est un ensemble d'alphabets (étiquettes), et $Ł : TR \rightarrow AL \bigcup \{\varepsilon\}$ est une fonction d'étiquetage des transitions qui attribue à chaque transition $t \in TR$ un alphabet de AL ou lui attribue la chaîne vide ε.

Une transition est étiquetée par la chaîne vide si son tir ne peut pas être observé. Alors, une transition étiquetée par un alphabet de AL est une transition observable et une transition étiquetée par la chaîne vide ε est une transition non observable.

1.2.4.3 La fonction d'étiquetage

La fonction $Ł$ sera étendue à $Ł : TR^* \rightarrow AL^* \bigcup \{\varepsilon\}$ par $Ł(t_1 t_2 ... t_k) = Ł(t_1)Ł(t_2)...Ł(t_k)$. La fonction d'étiquetage $Ł$ peut ne pas être injective alors il peut exister $t_i, t_j \in TR$ telles que si $t_i \neq t_j$ alors $Ł(t_i) = Ł(t_j)$.

Selon la fonction d'étiquetage, nous pouvons définir 4 types de RdPEs :

— Un RdPE $\lambda-$libre : Il n'existe pas de transitions étiquetées par la chaîne vide ε.

— Un RdPE libre : Il n'existe pas de transitions étiquetées par la chaîne vide ε, et deux transitions différentes ne peuvent pas avoir la même étiquette.

— Un RdPE déterministe : Deux transitions qui sont franchissables simultanément ne doivent pas partager la même étiquette.

— Un RdPE partiellement observable : L'ensemble des transitions TR est partitionné en un ensemble de transitions observables TR_{ob} et un ensemble de transitions non observables TR_{un}.

Dans ce mémoire, nous allons utilisé les notations suivantes liés aux RdPEs partiellement observables :

- Nous notons respectivement TR^*_{ob} et TR^*_{un} l'ensemble des séquences de franchissements observables et l'ensemble des séquences de franchissements non observables.

- Nous notons respectivement $W_{ob} = W^+_{ob} - W^-_{ob}$ et $W_{un} = W^+_{un} - W^-_{un}$ les restrictions de matrice d'incidence W respectivement sur TR_{ob} et TR_{un}. Nous désignons par $\Lambda_{|F}$ la restriction d'une matrice Λ sur l'ensemble F. Alors, nous notons $W_{ob} = W_{|TR_{ob}}$ et $W_{un} = W_{|TR_{un}}$.

1.2.5 RdPs temporisés

Pour ce type de réseau non autonome, la contrainte de temps est introduite soit sur les places (RdP p-temporisé), soit sur les transitions (RdP t-temporisé).

1.2.5.1 RdP p-temporisé

Définition informelle

Un RdP P-temporisé est un RdP tel qu'on associe une temporisation à chaque place $p_i \in P$ correspondant à la durée minimale de séjour d'un jeton dans une place. On notera d_i la temporisation de la place p_i.

Définition formelle

Un RdP p-temporisé est un doublet $(R, Tempo)$ où R est un réseau Place/transition, et

Tempo : $P \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction de temporisation associée aux places.

Principe de fonctionnement

Lorsqu'un jeton arrive à la place p_i, le jeton reste indisponible pendant un temps d_i.

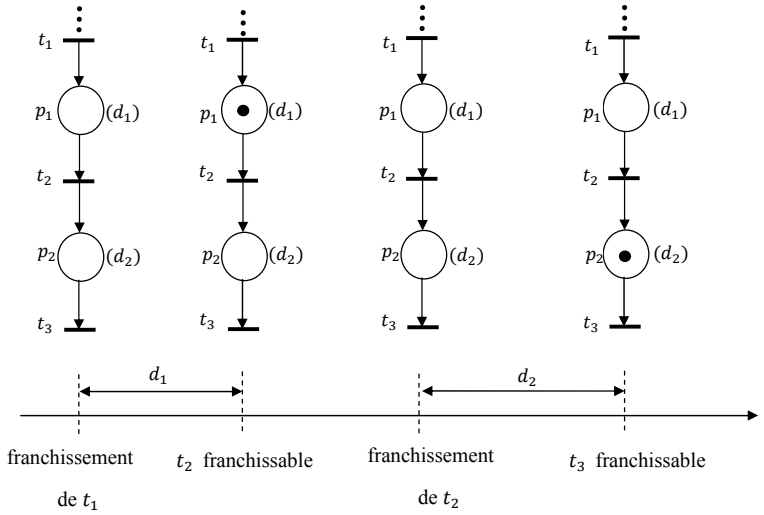


FIGURE 1.12 – Principe d'évolution d'un RdP p-temporisé

1.2.5.2 RdP t-temporisé

Définition informelle

Un RdP t-temporisé est un RdP tel que l'on associe une temporisation à chaque transition correspondant à la durée entre l'instant où la transition devient franchissable et le temps de franchissement de la transition. On notera d_i la temporisation de la transition t_i.

Définition formelle

Un RdP t-temporisé est un doublet $(R, Tempo)$ où R est un réseau Place/transition, et Tempo : $TR \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction de temporisation associée aux transitions.

Principe de fonctionnement

Lorsqu'une transition $t_i \in TR$ devient franchissable, son franchissement sera après un temps d_i (t_i sera gelée pendant un temps égal à d_i). Quand la durée s'écoule, la transition est franchie.

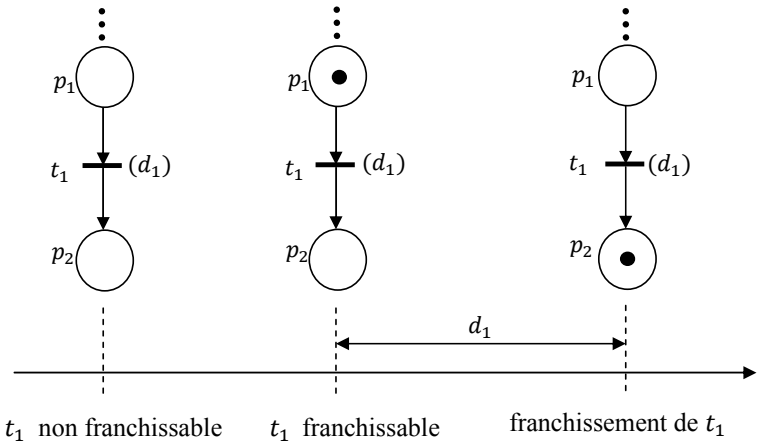


FIGURE 1.13 – Principe d'évolution d'un RdP t-temporisé

1.3 Diagnostic des SEDs modélisés par des RdPs

1.3.1 Lexique de diagnostic

— Diagnostic : C'est le processus de détection et d'isolation des défauts (Fault Detection and Isolation : FDI). Il peut inclure aussi l'identification des défauts.

— Détection des défauts : C'est une décision binaire qui détermine si le système est en fonctionnement normal ou anormal.

— Isolation (localisation) des défauts : C'est déterminer l'emplacement des défauts. Cette détection peut être précise ou non.

— Identification des défauts :

C'est la détermination de l'amplitude et de l'évolution probable du défaut au cours du temps [Met12].

— Un défaut : C'est une déviation d'un élément d'un système de son comportement normal.

— Une défaillance : C'est une déviation d'un système par rapport à son comportement normal qui l'empêche de remplir sa fonction souhaitée. Une défaillance est le résultat de l'existence d'un ou plusieurs défauts. Par contre, la présence d'un défaut ne conduit pas obligatoirement à une défaillance.

— Une dégradation : C'est le résultat d'un défaut non lié directement aux mécanismes du système, mais plutôt à des facteurs environnementaux (l'humidité, la tempéra-

ture), ou à des facteurs liés à sa durée de vie. Dans ce cas, le système fonctionne sous son régime nominal et au-dessous d'un seuil d'arrêt. Une dégradation peut aboutir à une défaillance.

— Une panne : C'est la conséquence d'une défaillance aboutissant à une interruption permanente.

Lors de son fonctionnement, un système dynamique peut évoluer sous trois modes de fonctionnement : mode de fonctionnement normal, dégradé et défaillant.

1.3.2 Les types des défauts

— Défaut permanent : C'est un défaut qui est tout le temps présent. En général, il interfère en permanence sur le fonctionnement du système. Un défaut permanent est représenté par un signal de type échelon.

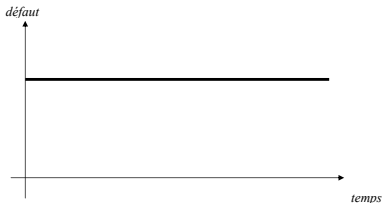


FIGURE 1.14 – Défaut permanent

— Défaut fugitif (ou intermittent) : C'est un défaut qui apparaît et disparaît successivement sans raison apparente.

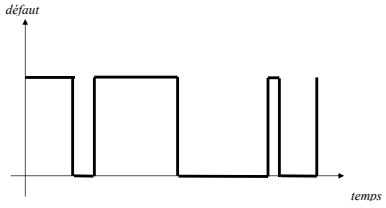


FIGURE 1.15 – Défaut intermittent

— Défaut transitoire : C'est un défaut qui se produit une seule fois et pendant une courte période de temps. Il n'est pas dû à un défaut de composant, mais à une ressource qui ne peut pas répondre temporairement aussi vite que prévu. Par exemple, il peut être dû à une ressource qui n'est pas disponible provisoirement.

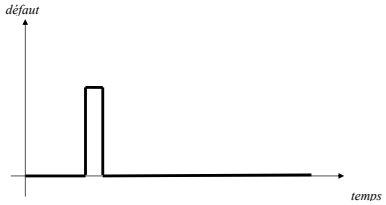


FIGURE 1.16 – Défaut transitoire

1.3.3 Différentes techniques pour le diagnostic des RdPs

1.3.3.1 Diagnostic selon la modélisation des défauts

Dans la littérature, les techniques utilisées pour le diagnostic des RdPs dépendent de la connaissance disponible sur le système ainsi que les défauts qui l'affectent [BFHJ03] [AP94] [WH05] [CBC09]. Pour la modulation des défauts, nous trouvons les défauts à base d'événements, les défauts à base d'états et les défauts mixtes.

1.3.3.1.1 Défauts à base d'événements Les défauts sont modélisés par un ensemble de transitions du RdP et l'occurrence d'un défaut est équivalente au franchissement de la transition associée. La détection et l'isolement des défauts sont effectués en se basant uniquement sur les événements observés. Cette modélisation des défauts à base d'événements a l'avantage de pouvoir détecter des défauts du type intermittent [GRM$^+$08], [RTRBALLM12], [GL07].

1.3.3.1.2 Défauts à base d'états L'occurrence d'un défaut est équivalente à la variation du marquage du RdP déviant de son comportement nominal et qui est exprimée par des pertes ou des duplications de jetons. L'inconvénient de la modélisation des défauts à base d'états est qu'il n'est pas possible de détecter les défauts de type intermittent [WH05] [BFHJ03].

1.3.3.1.3 Défauts mixtes L'occurrence d'un défaut est la combinaison de franchissement des transitions des défauts et l'atteignabilité des états de défauts [WH05].

1.3.3.2 Diagnostic selon l'observabilité des places et des transitions d'un RdP

— L'observabilité des places : Pour les RdPs, l'observabilité des places (des états) consiste à la reconnaissance de marquages du réseau. Dans la littérature, le diagnostic du système basé sur les RdPs se fait en considérant le cas des places observables [SM12] [DFMU09], périodiquement observables (observables à la fin de chaque période) [WH05] ou partiellement observables [LD07], selon la disponibilité du système.

— L'observabilité des transitions : Les événements observables sont la conséquence du changement de l'état des capteurs (passage de 0 à 1 ou de 1 à 0) ou/et le changement de l'état des commandes (passage de l'activation vers la désactivation et vice versa c-à-d le passage de 0 à 1 ou de 1 à 0). Une transition est dite non observable si son franchissement ne peut pas être directement détecté. Dans la littérature, les approches de diagnostic sont appliquées à des RdPs avec des transitions toutes observables [BCC16] ou RdPs avec des transitions partiellement observables (l'ensemble des transitions est la réunion des transitions observables et non observables) [CGS10a] [WH05].

Dans un RdP, nous pouvons trouver en même temps des places non observables et des transitions non observables [BME+06].

1.3.3.3 Diagnostic selon la structure de prise de décision

Le choix de la structure de prise de décision de diagnostic peut être déterminé selon la distribution des composants du système et ses moyens d'observation et de contrôle. Les structures de prise de décision sont centralisées, décentralisées ou distribuées.

1.3.3.3.1 Diagnostic centralisé La structure centralisée consiste à associer un seul module de diagnostic au modèle global du système [Lef12], [GTY09], [CGPS11]. Le module de diagnostic collecte les différentes informations sur le système et relève ses observations pour prendre sa décision finale sur l'état de fonctionnement du système (normal ou anormal).

La limitation majeure de cette structure est qu'elle peut aboutir à une explosion combinatoire. En plus, elle admet une faible robustesse et une faible maintenabilité.

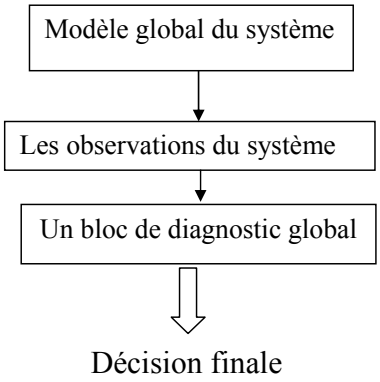


FIGURE 1.17 – Le principe de diagnostic centralisé

1.3.3.3.2 Diagnostic décentralisé sans coordinateur La structure décentralisée consiste à associer plusieurs modules de diagnostic locaux au modèle global du système. Chaque module reçoit les informations qui lui sont associées et fait ses observations locales pour prendre une décision locale. Pour ce type de structure, on n'a pas besoin d'un coordinateur pour prendre une décision finale de diagnostic.

Un inconvénient majeur de ce type de structure est qu'il peut aboutir à un problème d'indécision.

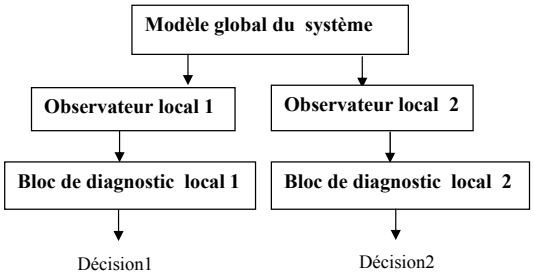


FIGURE 1.18 – Le principe de diagnostic décentralisé sans coordinateur

1.3.3.3.3 Diagnostic décentralisé avec coordinateur Afin de résoudre le problème d'indécision et permettre aux modules de diagnostic locaux de réussir leur diagnostic du système entier, un coordinateur doit être mis en oeuvre pour la communication

(communication limitée) entre les différentes décisions locales afin de prendre à la fin une décision finale qui a un aspect conditionnel [LWSC10], [Zem03] , [STT10].

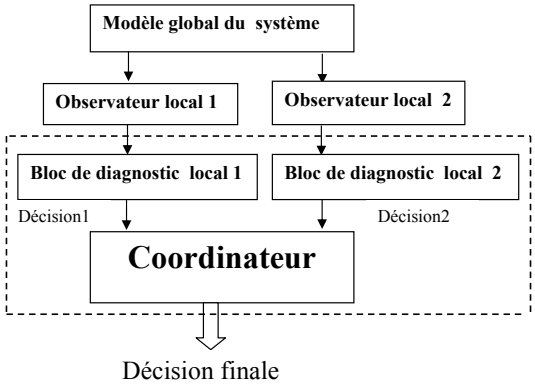


FIGURE 1.19 – Le principe de diagnostic décentralisé avec coordinateur

Iordache et Antsaklis [IA06], ont introduit le concept de l'admissibilité décentralisé (d-admissibility). Pour appliquer ce concept, chaque module de diagnostic doit observer toutes les transitions détectables et doit transmettre ces informations à tous les autres modules qui ne peuvent pas l'observer. Ceci peut représenter une hypothèse pas toujours réalisable en pratique. La formalisation d'un problème PLNE peut être utilisée pour réduire la quantité de communication nécessaire par la solution.

Gasparri et al [GDPG$^+$11], ont proposé un cadre général pour une loi de communication véritable décentralisée qui peut être effectivement appliquée. Pour réaliser le concept de "d-admissibility", ils ont supposé que la communication entre les superviseurs se limite à un voisin-prés c-à-d les superviseurs sont accessibles les uns des autres par rapport à un certain rayon de communication "r". Ils ont appliqué "des contraintes généralisées de l'exclusion mutuelle" pour le calcul des marquages afin d'exiger une classe spécifique d'états.

Rudie et al [RLL99], ont supposé que chaque superviseur utilise une combinaison de l'observation locale et de l'information communiquée (obtenue à partir des lectures de capteurs disponibles pour un autre superviseur). Puisque la communication peut être coûteuse, une stratégie visant à minimiser la communication entre les superviseurs est développée.

Lu et al [LWSC10], ont proposé une approche de diagnostic décentralisé hybride (hy-

bride du point du vue RdP et automate à état fini mixés) qui est appliquée à un système modélisé par un RdP borné non contrôlable avec des défauts observables à base d'états. La conception de coordonnateurs est faite par RdP hybride et basée sur le contrôle de flux de réseau.

Mouchaweh et al [SMPCM08], ont introduit une communication très limitée entre les superviseurs qui est assurée par un coordonnateur simple basé sur un ensemble de règles. L'objectif est de résoudre le problème d'ambiguïté de diagnostic en raison de l'observation partielle de superviseurs. La notion de codiagnosticabilité est adaptée pour assurer le diagnostic de tous les défauts.

1.3.3.3.4 Diagnostic distribué Pour ce type de structure, le système à modéliser est un système décomposable en sous systèmes indépendants (système multimodèle). Un module de diagnostic local est associé à chaque sous modèle qui reçoit les observations associées à ce sous modèle. Afin de gérer les conflits décisionnels, un protocole de communication permet la communication entre les modules locaux de diagnostic. Par conséquent, on obtient une décision locale au niveau de chaque sous modèle [BCB12], [BJ04].

Les méthodes diffèrent selon deux critères :

1. L'observabilité des interactions entre les différents modules de diagnostic
2. Le protocole de communication qui permet aux superviseurs (agents) d'échanger leur évaluation des variables partagées.

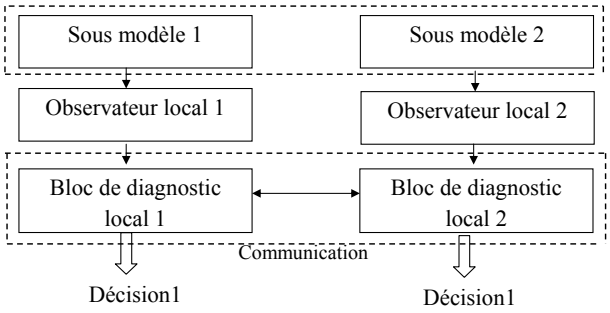


FIGURE 1.20 – Le principe de diagnostic distribué

Dans la littérature, beaucoup d'algorithmes sont associés aux protocoles de communication pour un diagnostic distribué des SEDs modélisés par des RdPs, afin de réduire le

coût de la communication et diminuer au maximum les retards de communication. Dans la partie suivante, nous représentons quelques approches dans la littérature selon le premier critère, c-à-d l'observabilité des interactions.

Dans [FBJ02] [GL03], les différents modules interagissent via des places communes. La condition imposée est que les transitions d'entrée et les transitions de sortie des places communes soient observables mais indiscernables (différentes transitions peuvent avoir la même étiquette).

Boel et Jiroveanu ont considéré que les interactions entre les modules sont non observables en supposant que les transitions d'entrée et les transitions de sortie des places communes sont non observables. Pour éviter le calcul qui peut être énorme pour l'estimation de l'ensemble des comportements locaux possibles (en raison du manque de connaissances du marquage des places communes où certains jetons peuvent entrer dans un modèle RdP représentant un composant), une méthode "d'atteignabilité arrière" a été proposée : à partir de l'observation locale, un superviseur local cherche des traces minimales qui expliquent l'observation en faisant l'hypothèse locale minimale sur le marquage des places communes [BJ04], [JB04]. L'idée de base est que si deux superviseurs sont d'accord sur les évaluations des variables partagées communes à composantes locales et par suite leurs résultats locaux sont cohérents, alors ils seront également acceptés par un algorithme global de détection de défaut (l'idée principale d'un algorithme distribué).

Dans [JB06], les auteurs ont déterminé un algorithme distribué pour le problème de diagnostic. La communication entre les modules est faite via des transitions surveillables qui ne deviennent activées que lorsque certaines conditions sont remplies.

L'approche distribuée de diagnostic peut aider à atténuer le problème de l'explosion d'état qui se produit souvent dans la modélisation de systèmes complexes à événements discrets. Un inconvénient de la structure distribuée est le temps nécessaire pour la communication entre les différents blocs de diagnostic. Un autre inconvénient est la complexité du protocole.

1.3.3.4 Diagnostic en ligne/hors ligne

Selon la disponibilité des informations qui décrivent le comportement normal et le comportement défectueux du système ainsi que les éventuels éléments défaillants qui lui sont associés, on peut décider si le diagnostic doit être fait en ligne avec ou sans calcul préliminaire effectué hors ligne.

1.3.3.4.1 Diagnostic avec calcul préliminaire hors ligne Le diagnostic avec calcul préliminaire hors-ligne consiste à utiliser un ensemble d'observations sur le système, ainsi que le comportement normal et défaillant qui sont connus à l'avance, pour établir son module de diagnostic [GL07], [CGS10b] [Lef12]. Cette étape est suivie par un diagnostic en ligne qui consiste à appliquer ce module trouvé au système qui évolue en temps réel pour détecter et localiser les défauts.

L'avantage de cette approche est qu'elle permet de réduire l'effort de calcul en ligne.

1.3.3.4.2 Diagnostic sans calcul préliminaire hors ligne Dans ce cas, le module de diagnostic est établi en temps réel en utilisant l'ensemble des observations et des comportements obtenus lors de l'évolution du système. Ainsi, la réponse de diagnostic doit être plus rapide que la réponse du système, ce qui représente une limitation pour le diagnostic en ligne sans calcul préliminaire hors ligne [RTRBALLM12] [FMU11] [JB04].

D'autres limites pour cette méthode est l'augmentation régulière du nombre d'observations et la complexité du calcul.

1.4 État de l'art sur le diagnostic des RdPs

Pour la détection et la localisation des défauts, il existe deux catégories principales d'approches : le diagnostic à base d'estimation d'état et le diagnostic à base d'espace de parité dynamique.

Le diagnostic des RdPs par estimation d'état est basé sur l'estimation des marquages et/ou des séquences de franchissements du réseau pour la détection et la localisation de défauts. Pour cette catégorie d'approches, nous trouvons les approches à base des

diagnostiqueurs, les approches à base d'estimation de marquages de base, les approches à base d'analyse arrière (B-W Analysis), les approches par résolution des problèmes PLNE et les approches par relaxation des contraintes.

Les approches à base d'espace de parité dynamique se basent sur une certaine redondance d'information. Il existe trois types de redondance : la redondance matérielle, la redondance structurelle et la redondance analytique. Dans certaines applications qui nécessitent un niveau élevé de sécurité, à titre d'exemple le pilotage automatique d'un avion, la redondance matérielle est le bon choix grâce à sa fiabilité et ses bonnes performances. Mais, celle-ci provoque un coût et un encombrement élevé dans le système, du fait des capteurs additionnels utilisés. La redondance analytique présente une alternative intéressante à la redondance matérielle. En effet, la redondance d'information est assurée par un modèle du système à la place des capteurs additionnels. Ainsi le diagnostic à base de la redondance analytique est réalisé en utilisant le modèle du système qui doit être surdéterminé et un ensemble d'observations. La redondance structurelle présente aussi une deuxième alternative de la redondance matérielle.

1.4.1 Approches à base de diagnostiqueurs

Un diagnostiqueur est un graphe qui permet de déterminer l'état courant du système à partir d'un ensemble de mesures. Ce graphe est construit hors ligne et intègre à la fois le comportement normal et le comportement défectueux du système.

Pour les RdPs autonomes

Dans [BFHJ03], le problème de diagnostic des RdPEs a été étudié. Ce problème est formulé comme un problème de reconstruction de trajectoire d'état à partir des événements observés. Un diagnostiqueur construit hors ligne est modélisé sous la forme d'un RdP ayant certaines places étiquetées par des défauts et des transitions étiquetées par des alarmes. La réception des alarmes en ligne, qui correspondent aux franchissements des transitions, déclenche la reconstruction de trajectoire d'état pour visiter les places défectueuses. La technique de dépliage est utilisée qui consiste à éliminer les parallélismes dans le réseau et de produire des successions d'événements. Le graphe résultant est constitué d'un ensemble de sous-graphes acycliques et causaux qui explicitent des exécutions

possibles du système.

Les auteurs dans [RBLMRT06] se sont intéressés au diagnostic du RdP Interprété (RdPI) avec des places et des transitions partiellement observables. Le modèle RdPI d'un diagnostiqueur est constitué d'une seule place et du même nombre de transitions que le modèle du système. Le marquage actuel de la place de diagnostiqueur est suffisant pour déterminer et localiser les défauts qui se produisent dans le système.

Dans [RTRBALLM12], un diagnostiqueur inclut deux modèles réduits pour le diagnostic du système : un pour suivre le comportement réel et l'autre pour établir le comportement estimé. La différence du marquage dans ces deux modèles, appelée résidu, fournit suffisamment d'informations pour la localisation des défauts.

Lefebvre [Lef12] a estimé en ligne les séquences d'événements, qui contiennent les défauts en analysant des séquences d'événements observables avec la mesure de la variation partielle de marquages obtenus à l'aide du graphe d'atteignabilité du RdP place/transition.

Dans [CGS$^+$13] [RWSW17], un diagnostiqueur sous forme d'un automate à états finis appelé Graphe d'Atteignabilité de Base (GAB) est conçu pour un RdPE borné partiellement observable admettant des événements observables indiscernables. Ce graphe permet d'effectuer à la fois l'analyse de diagnosticabilité et le diagnostic en ligne, en utilisant un sous-ensemble de marquages atteignables appelé marquages de base. Cependant, le calcul de GAB est exponentiel par rapport au nombre de noeuds. Afin de réduire la complexité de cette méthode, les auteurs dans [RWSW17] ont construit un diagnostiqueur basé sur un GAB étendue qui est de complexité polynomiale en nombre de noeuds pour un RdPE borné.

Dans [LGT17], un diagnostiqueur sous forme d'un automate appelé Graphe de Marquages de Défauts (GMD) est un graphe orienté non-déterministe. Chaque noeud indique un marquage de défaut et chaque arc indique un événement observable. Une fonction de retard "delay" est utilisée pour déterminer le nombre maximum de noeuds de défauts successifs possibles. Ce graphe est aussi utilisé pour l'analyse de diagnosticabilité du réseau.

Pour les RdPs non autonomes

Pour les SEDs temporisés, les auteurs de [WMS15] ont proposé une approche de diagnostic à base d'un diagnostiqueur pour un RdP temporisé partiellement observable. Les

défauts sont assimilés à un sous-ensemble de transitions non observables. L'approche se base sur la construction d'un graphe de diagnostic des défauts qui est calculé de manière incrémentale en utilisant le Graphe de Classe d'État (GCE).

Dans [BCS14], les auteurs se sont concentrés sur le diagnostic d'un RdP temporisé marqué. À partir du GCE, les auteurs ont introduit un nouveau graphe appelé GCE Modifié (GCEM) qui permet d'associer un état de diagnostic à chaque temps d'observation.

Dans [GTB05], un diagnostiqueur est conçu pour un RdP temporel de comportement partiellement observable, qui est un graphe d'états où chaque transition est étiquetée par un seul événement observable et un seul intervalle de franchissement. Ensuite, la mise en oeuvre d'une approche de diagnostic en ligne utilise d'abord les événements observables pour estimer les marquages du système (analyse des états accessibles) puis exploite les contraintes temporelles sur les événements.

Un autre type des diagnostiqueurs à base de chroniques consiste à associer à chaque mode de défaut, que l'on désire identifier, une chronique (ou un scénario) qui est spécifiée hors ligne. Ensuite, elle utilise une technique de reconnaissance en ligne de ces chroniques afin d'identifier les scénarios de défauts. Si des événements observés correspondent aux motifs de la chronique et si leur occurrence a lieu selon le contexte et les contraintes spécifiées, alors une instance de la chronique doit être reconnue. Une chronique peut être considérée comme un ensemble de motifs d'événements liés entre eux par des relations de contraintes temporelles. Ainsi, les chroniques peuvent être modélisées par des RdPs temporelles ou temporisés [STT10]. Dans la littérature, nous trouvons aussi des chroniques qui sont modélisées par RdPs colorés [CBC09].

1.4.2 Approches à base d'estimation de marquages de base

Dans [CGS$^+$13, RWSW17], les auteurs ont présenté une approche de diagnostic pour les RdPEs avec des transitions partiellement observables et un sous-réseau non observable acyclique. Les défauts n'étaient pas nécessairement modélisés par des transitions non observables mais pouvaient aussi être modélisés par des transitions observables indiscernables. L'approche de diagnostic était basée sur la notion de marquages de base et définit un ensemble réduit de marquages actuels cohérents avec une séquence observée.

Dans [RH09b], le RdPE est accompagné d'une description de la probabilité de chaque séquence de franchissements. Une approche de diagnostic en ligne estime d'une manière récursive ces croyances (le degré de confiance en ce qui concerne l'apparition de défauts appartenant à chaque type) pour le suivi de transitions défectueuses existantes dans les chemins d'exécution.

1.4.3 Approches à base d'analyse arrière (B-W Analysis)

Pour les RdPs autonomes

Dans [AP94], deux types de jetons dans un RdP généralisé sont considérés : les jetons normaux (noires) qui représentent des conditions satisfaites, et les jetons inhibiteurs (blancs) qui représentent des conditions non remplies. Un raisonnement de type chaînage arrière (B-W. Analysis) est défini. Les règles de franchissement arrière par exemple à l'aide de la logique floue sont représentées sous forme d'un RdP. Ces règles de franchissement permettent de rendre compte d'éventuelles incohérences dans le raisonnement de recherche des causes et par suite la détection des défauts.

Pour le diagnostic des défauts d'un SED modélisé par un RdP logique qui admet des transitions partiellement observables, l'auteur [Lef14] a proposé une méthode qui fournit des décisions de diagnostic via l'analyse de séquences d'observations décomposées en séquences d'observations élémentaires. Afin de fournir un diagnostic en ligne, un algorithme de "B-W Analysis" a été suggéré qui analyse les sous-séquences de longueurs bornées.

Pour les RdPs non autonomes

Une approche en ligne de franchissement arrière appliquée sur un RdP temporel permet la représentation de l'espace de marquages et la détermination du temps maximal de maintien des jetons dans les différentes places. Si un tel état est invalide, donc il correspond à un défaut [SJ93].

Pour la détection de défauts dans un graphe d'événements à flux temporel [dec] [DB14a], une résolution "arrière/avant" calcule le plus grand estimé de l'état. La détection d'un défaut est exprimée comme des variations dans les valeurs des temporisations.

1.4.4 Approches par résolution des problèmes PLNE

Pour les RdPs autonomes

Dans [BCDT09], une approche permet d'expliquer le dernier événement observé en fonction de l'ensemble des événements défectueux possibles. Pour atteindre ce résultat, les g-marquages sont introduits. Les g-marquages sont des marquages du RdP place/transition qui peuvent avoir des composantes négatives et dont l'estimation est toujours unique. Le calcul en ligne consiste à résoudre des problèmes PLNE formulés sur la structure de réseau et sur la base de g-marquages. Cependant, il est montré que certains problèmes PLNE peuvent être réécrits en leurs équivalents, qui sont formulés sur des sous-réseaux appropriés qui influent sur l'occurrence de l'événement observé. Ces sous-réseaux sont calculés hors ligne et permettent de réduire l'effort de calcul pour résoudre des problèmes PLNE au prix d'une légère augmentation de la mémoire.

Dans [DFM08] [DFMU09] [CDKK17], les défauts d'un RdPE partiellement observable sont modélisés par des transitions non observables. L'approche de diagnostic est basée sur la résolution de certains problèmes PLNE pour chaque transition observée de la séquence de tirs observée. La mise à jour du marquage initial après chaque transition considérée de la séquence observée a été évitée.

Pour les RdPs non autonomes

Une approche de diagnostic distribuée pour un RdPE t-temporel partiellement observable est conçue dans [FMU11] [FMU13]. Les défauts sont modélisés par des transitions non observables. Deux transitions observables peuvent partager la même étiquette. Une approche en ligne attend un événement observable pour déclencher son algorithme qui définit et résout certains problèmes PLNE qui décident si le comportement du système est normal ou est susceptible de présenter certains défauts.

1.4.5 Approches par relaxation des contraintes

Pour les RdPs autonomes

La technique de fluidisation a été explorée pour le diagnostic de défauts [MSCS12]. En utilisant la fluidisation, les états de diagnostic pourraient être calculés en résolvant des

problèmes PL au lieu des problèmes PLNE. L'idée principale de fluidisation d'un RdP est la relaxation du nombre des tirs de transitions en supposant les tirs en quantités réelles positives. Les auteurs dans [MSCS12] ont montré que la fluidisation d'un RdP purement logique avec des observations partielles produit un RdP Continu (RdPC) non temporisé. En supposant la convexité de la séquence observée, les états de diagnostic sont calculés en résolvant des problèmes PL pour le RdPC non-temporisé. Une mise à jour du marquage initial après chaque transition observée de l'observation était nécessaire. Pour la détection et la localisation de défauts, deux problèmes PL ont été définis pour chaque transition de la séquence observée et pour chaque transition de défaut.

Pour les RdPs non autonomes

L'approche de diagnostic [DB14a] se base sur la reconstruction de la plus petite/plus grande séquence de transitions non observables dans des RdPs temporisés en se basant sur l'observation en ligne des occurrences de franchissement de certaines transitions observables sur un horizon glissant. Le RdP qui peut être non borné et qui peut contenir des cycles, est décrit sous la forme du polyèdre $A.x \leq b$ qui décrit la séquence temporelle possible x et la relation fondamentale du marquage. Une technique de calcul utilisant la résolution des problèmes PL est donnée, sous l'hypothèse de "Backward/Forward Conflict Freeness" du sous-réseau non observable.

1.4.6 Approches à base d'espace de parité dynamique

Dans [WH05], la redondance analytique est utilisée pour le diagnostic d'un RdP. Des places supplémentaires sont ajoutées au RdP initial, pour la détection et l'identification des défauts en utilisant des techniques de décodage algébriques. Le système est modélisé par un RdP tel que les événements ne sont pas directement observables, alors que l'état du système est périodiquement observable. Deux types de défauts sont à détecter : les défauts de places et les défauts de transitions. Cette approche se base sur la construction des relations de redondances analytiques pour la détection et la localisation des défauts associés aux transitions et/ou aux places du RdP. Même si certaines informations de l'état sont absentes, les relations de redondances analytiques peuvent être construites systématiquement par des techniques de codage/décodage algébriques, telles que les méthodes de

décodage traditionnelles (par exemple, le décodage de Berlekamp-Massey [Ber15]) et les méthodologies développées plus récemment pour la résolution des systèmes d'équations génériques polygonales composées. L'avantage de cette approche est qu'elle maintient le niveau de redondance (le nombre de places supplémentaires/capteurs) petit. En plus, elle n'a pas besoin de reconstituer les différents chemins d'évolution d'état du réseau.

Les auteurs dans [HV99] ont introduit la redondance structurelle qui permet de faciliter la détection, l'identification ainsi que la correction des défauts. L'approche se concentre principalement sur "les embarqués séparés" pour lesquels la fonctionnalité du RdP d'origine est conservée dans sa forme exacte. L'utilisation de ces embarqués conduit à des moniteurs qui fonctionnent en même temps que le système d'origine et qui permettent de détecter et d'identifier les différents types de défauts en effectuant des contrôles de cohérence entre l'état du RdP d'origine et celle de superviseur.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre introductif, nous avons défini quelques extensions de RdPs que nous allons utiliser pour le diagnostic. Nous avons également exposé quelques propriétés importantes des RdPs qui doivent être considérées lors de la supervision du système. Nous avons représenté ensuite un état de l'art du diagnostic des RdPs. Une première catégorie des approches à base d'estimation d'état a été rappelée. Ces approches se basent sur la construction totale ou partielle de l'espace d'état. Une deuxième catégorie des approches porte sur l'espace de parité dynamique qui s'appuie sur la redondance des informations dans le système pour la détection des défauts.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au diagnostic des RdPEs partiellement observables en utilisant la technique de l'estimation d'état. Cette problématique a été largement abordée au cours de ces dernières années. La procédure de diagnostic est déclenchée suite à l'observation d'une séquence de transitions observables obtenue lors du fonctionnement du système. Deux approches seront développées. La première est à base d'estimation de l'ensemble des marquages de base. Les algorithmes existants pour l'estimation de ce sous-ensemble de marquages sont exponentiels dans le pire des cas et ne sont applicables que

pour des RdPEs avec des sous-réseaux non observables acycliques. Nous allons alors élaborer au chapitre 3 une approche de diagnostic par l'implémentation d'un algorithme original pour l'estimation de marquages de base sur un horizon glissant, applicable même si le sous-réseau non observable contient des boucles. Cet algorithme est basé sur les éliminations de Fourier-Motzkin appliquées sur un polyèdre paramétrique $A.x \leq b$ de paramètres b_i. Cet algorithme sera exploité dans le chapitre suivant. Une deuxième approche sera développée au chapitre 4, basée sur l'estimation d'état sur un horizon fuyant qui utilise la relaxation des problèmes PLNE pour la détection et la localisation des défauts dans un temps polynomial.

2

Adaptation de l'algorithme de Fourier-Motzkin pour la résolution du polyèdre paramétrique $A.x \leq b$

Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons l'algorithme d'élimination de Fourier-Motzkin dont l'objectif initial est de tester l'existence de solution réelle pour un polyèdre $A.x \leq b$. Une reformulation algébrique qui intègre les deux théorèmes d'accélération d'Imbert est établie. Cet algorithme sera utilisé dans le chapitre suivant pour l'estimation et le diagnostic des RdPEs partiellement observables sur un horizon élémentaire glissant.

2.1 Introduction

L'algorithme de Fourier-Motzkin a d'abord été introduit comme une méthode pour tester l'existence de solution pour un ensemble d'inégalités linéaires de la forme polyédrique $A.x \leq b$ sur les variables réelles [Dan72] [Kuh56]. L'algorithme de Fourier-Motzkin se décompose en deux phases. La première phase est une phase d'élimination des variables. Cette phase est appelée phase d'élimination de Fourier-Motzkin. La deuxième phase est la détermination d'une solution arbitraire en se basant sur les nouvelles inégalités produites à la première phase suite aux éliminations successives des variables.

Dans ce chapitre, nous présentons l'algorithme de Fourier-Motzkin et les deux théorèmes d'accélération d'Imbert qui permettent d'éliminer les inégalités redondantes suite aux éliminations des variables. Ensuite, nous analysons l'applicabilité de l'algorithme de Fourier-Motzkin pour la résolution en nombres entiers du polyèdre $A.x \leq b$ dans le cas d'un ensemble d'inégalités monotones : pour cette classe de systèmes linéaires, la résolution sur les entiers et les réels coïncident pour des solutions optimales. À la fin du chapitre, nous reformulons algébriquement l'algorithme d'élimination de Fourier-Motzkin ainsi que les deux théorèmes d'accélération d'Imbert.

2.2 L'algorithme de Fourier-Motzkin pour la résolution de $A.x \leq b$ dans $\mathbb{R}^n$

Soit le système linéaire de la forme :

$$A.x \leq b \ ; x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

avec

A : une matrice de dimension $m \times n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

m : le nombre d'inégalités du système

n : le nombre de variables du système

b : Vecteur de dimension $m \times 1$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$x = [x_1...x_n]^\top$ où x_i avec $i \in [1...n]$ sont les variables du système.

L'algorithme de Fourier-Motzkin se décompose en deux phases : la première phase est la phase d'élimination de Fourier-Motzkin qui représente la phase d'éliminations successives des variables. La deuxième phase est la phase de détermination d'une solution arbitraire si celle-ci existe.

2.2.1 Phase1 : La procédure d'élimination de Fourier-Motzkin

Cette phase permet de transformer un système d'inégalités de n inconnues en un système d'inégalités à $n-1$ inconnues en éliminant une variable à chaque fois. Cette phase est constituée à son tour de deux étapes consécutives qui sont répétées jusqu'à l'avant dernière variable. La première étape est le calcul de bornes pour la variable x_l qui est une fonction des variables x_{l+1} jusqu'à x_n. La deuxième phase est la construction d'un nouveau système en éliminant la variable x_l et par conséquent la construction d'un nouveau système de variables x_{l+l} jusqu'à x_n. Pour la dernière variable x_n, nous obtenons deux bornes qui sont en fonction des paramètres connus. Ainsi, en déterminant x_n, nous pouvons déterminer successivement x_{n-1} jusqu'à x_1. Le test d'existence d'une solution, appelée condition de faisabilité, est réalisé en vérifiant si la limite inférieure de chaque variable est inférieure ou égale à sa limite supérieure. C'est en particulier vrai pour la dernière variable x_n.

2.2.1.1 Etape1 : Calcul des bornes d'une variable

Au début de chaque étape, le système est mis sous la forme suivante :

$$(S) : \begin{cases} a^l_{pos}.x_l + A^l_{pos}.x^{'} \leq b^l_{pos} & S^+ \\ -a^l_{neg}.x_l + A^l_{neg}.x^{'} \leq b^l_{neg} & S^- \\ a^l_{zer}.x_l + A^l_{zer}.x^{'} \leq b^l_{zer} & S^0 \end{cases} \tag{2.2}$$

où x_l est la variable à éliminer et le vecteur $x' = [x_{l+1}x_{l+2}...x_n]^\top$ est le vecteur composé

des autres variables après l'élimination de x_l. Le sous-système S^+ correspond au sous-système des n^+ inégalités, qui sont associées au coefficient "1" de x_l. Le sous-système S^- correspond au sous-système des n^- inégalités, qui sont associées au coefficient " -1" de x_l. Le sous-système S^0 correspond au sous-système des n^0 inégalités, qui ne contiennent pas la variable x_l. Les vecteurs a^l_{pos} et a^l_{neg} sont deux vecteurs d'éléments tous égaux à "1". Le nombre des lignes de a^l_{pos} et a^l_{neg} est égal respectivement à n^+ et n^-. Le vecteur a^l_{zer} est un vecteur des éléments tous égaux à 0 et son nombre de lignes est égal à n^0. Les dimensions des autre vecteurs et matrices peuvent être déduites facilement à partir du système (2.2).

Si les deux sous-systèmes S^+ et S^- existent, alors la variable x_l admet deux bornes (supérieure et inférieure) finies et définies comme suit :

$$max[(A^l_{neg}.x^{'} - b^l_{neg})_{i,.}] \leq x_l \leq min[(b^l_{pos} - A^l_{pos}.x^{'})_{i,.}]. \tag{2.3}$$

Notons que la notation $\Lambda_{i,.}$ désigne la i^{ime} ligne de la matrice Λ. En particulier si Λ est un vecteur, $\Lambda_{i,.}$ désigne le i^{ime} élement du vecteur Λ. Alors, x_l a pour borne inférieure le maximum des éléments du vecteur $(A^l_{neg}.x^{'} - b^l_{neg})$ et a pour borne supérieure le minimum des éléments du vecteur $(b^l_{pos} - A^l_{pos}.x^{'})$.

Si S^+ n'existe pas dans (S), alors la limite supérieure de x_l est égale à $+\infty$. Si S_- n'existe pas dans (S), alors la limite inférieure de x_l est égale à $-\infty$.

2.2.1.2 Etape 2 : Élimination et construction d'un nouveau système

Cette phase consiste en la mise à zéro de coefficients associés à x_l, en additionnant chaque ligne de S^+ avec chaque ligne de S_- et en conservant les lignes de S^0. Le nouveau système généré après l'élimination de x_l est :

$$\begin{cases} [(A^l_{pos})_{j,.} + (A^l_{neg})_{k,.}].x^{'} \leq (b^l_{pos})_{j,.} + (b^l_{neg})_{k,.} \\ A^l_{zer}.x^{'} \leq b^l_{zer} \end{cases} \tag{2.4}$$

avec $j \in [1...n^+]$ et $k \in [1...n^-]$. Pour la construction d'un nouveau système, le système est mis sous la forme (2.2) après la normalisation des coefficients non nuls de x_{l+1} dans

toutes les inégalités et l'élimination des inégalités qui représentent une redondance dans l'information.

L'élimination de variable x_l n'est pas toujours possible. En effet, si le système (2.2) ne contient que la forme S^+ ou ne contient que la forme S^-, alors l'élimination de x_l n'est pas possible et la procédure d'élimination des variables est arrêtée. Le tableau (TABLE 2.1) visualise les différents cas pour le calcul des bornes et l'élimination des variables.

TABLE 2.1 – Les cas du calcul des bornes et d'élimination des variables du système $A.x \leq b$

Forme de (S)	$inf \leq x_l \leq sup$	La possibilité d'éliminer x_l	Système produit pour l'élimination de x_{l+1}
$\begin{cases} S^+ \\ S^- \\ S^0 \end{cases}$	$\begin{cases} inf = max[(A^l_{neg}.x^{'} - b^l_{neg})_{i,.}] \\ sup = min[(b^l_{pos} - A^l_{pos}.x^{'})_{i,.}] \end{cases}$	$\times$	$\begin{cases} [(A^l_{pos})_{j,.} + (A^l_{neg})_{k,.}].x^{'} \leq (b^l_{pos})_{j,.} + (b^l_{neg})_{k,.} \\ A^l_{zer}.x^{'} \leq b^l_{zer} \end{cases}$
$\begin{cases} S^+ \\ S^- \end{cases}$	$\begin{cases} inf = max[(A^l_{neg}.x^{'} - b^l_{neg})_{i,.}] \\ sup = min[(b^l_{pos} - A^l_{pos}.x^{'})_{i,.}] \end{cases}$	$\times$	$[(A^l_{pos})_{j,.} + (A^l_{neg})_{k,.}].x^{'} \leq (b^l_{pos})_{j,.} + (b^l_{neg})_{k,.}$
$\begin{cases} S^+ \\ S^0 \end{cases}$	$\begin{cases} inf = -\infty \\ sup = min[(b^l_{pos} - A^l_{pos}.x^{'})_{i,.}] \end{cases}$		$A^l_{zer}.x^{'} \leq b^l_{zer}$
$\begin{cases} S^- \\ S^0 \end{cases}$	$\begin{cases} inf = max[(A^l_{neg}.x^{'} - b^l_{neg})_{i,.}] \\ sup = +\infty \end{cases}$		$A^l_{zer}.x^{'} \leq b^l_{zer}$
S^+	$\begin{cases} inf = -\infty \\ sup = min[(b^l_{pos} - A^l_{pos}.x^{'})_{i,.}] \end{cases}$		Arrêt de toutes les éliminations
S^-	$\begin{cases} inf = max[(A^l_{neg}.x^{'} - b^l_{neg})_{i,.}] \\ sup = +\infty \end{cases}$		Arrêt de toutes les éliminations
S^0	$\begin{cases} inf = -\infty \\ sup = +\infty \end{cases}$		$A^l_{zer}.x^{'} \leq b^l_{zer}$

2.2.2 Phase2 : Calcul numérique d'une solution arbitraire

Si l'élimination des variables de x_1 à x_n est possible, alors l'application successive de la phase 1 sur le polyèdre (2.1) donne le système d'inégalités de la forme suivante :

$$\begin{cases} f_{1I}(x_2, x_3, ..., x_n) & \leq x_1 \leq & f_{1S}(x_2, x_3, ..., x_n) \\ f_{2I}(x_3, x_4, ..., x_n) & \leq x_2 \leq & f_{2S}(x_3, x_4, ..., x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{(n-1)I}(x_n) & \leq x_{n-1} \leq & f_{(n-1)S}(x_n) \\ C_I & \leq x_n \leq & C_S \end{cases} \tag{2.5}$$

avec f_{iI}, f_{iS} des fonctions linéaires, et C_I, C_S deux constantes.

Alors, pour le calcul numérique d'une solution possible, la phase 2 commence par le choix d'une valeur arbitraire de $x_n \in [C_I \ , \ C_S]$, puis la détermination d'une valeur arbitraire de $x_{n-1} \in [f_{(n-1)I}(x_n) \quad f_{(n-1)S}(x_n)]$ et ainsi de suite jusqu'à déterminer x_1.

Exemple 3 *Soit le système des inégalités suivant :*

$$\begin{cases} -x_2 - 2.x_3 \leq \frac{1}{2} \\ -x_1 + x_2 + 2.x_3 \leq 1 \\ 2.x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \\ -x_1 - 2.x_2 + x_3 \leq -\frac{1}{3} \\ x_2 \leq 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

— ***Phase 1*** *:*

— *Etape 1 :*

Après la normalisation des coefficients de x_1 et le classement des inégalités, nous obtenons :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}.x_2 \leq \frac{1}{2} \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \\ -x_1 - 2.x_2 + x_3 \leq -\frac{1}{3} \\ -x_1 + 1.x_2 + 2.x_3 \leq 1 \\ 0.x_1 + x_2 \leq 0 \\ 0.x_1 - x_2 - 2.x_3 \leq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.7}$$

Alors, nous obtenons :

$$Max(-2.x_2 + x_3 + \tfrac{1}{3},\ x_2 + 2.x_3 - 1) \leq x_1 \leq Min(-\tfrac{1}{2}.x_2 + \tfrac{1}{2},\ x_2 + x_3 + 1)$$

— *Etape 2 :*

Le nouveau système après l'élimination de x_1 est :

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}.x_2 + x_3 \leq \frac{1}{6} \\ \frac{3}{2}.x_2 + 2.x_3 \leq \frac{3}{2} \\ -3.x_2 \leq \frac{2}{3} \\ x_3 \leq 2 \\ x_2 \leq 0 \\ -x_2 - 2.x_3 \leq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.8}$$

— *Etape 1 :*

Nous mettons le nouveau système sous la forme :

$$\begin{cases} x_2 + \frac{4}{3}.x_3 \leq 1 \\ x_2 \leq 0 \\ -x_2 + \frac{2}{3}.x_3 \leq \frac{1}{9} \\ -x_2 \leq \frac{2}{9} \\ -x_2 - 2.x_3 \leq \frac{1}{2} \\ 0.x_2 + x_3 \leq 2 \end{cases} \tag{2.9}$$

Alors, nous obtenons :

$Max(\frac{2}{3}.x_3 - \frac{1}{9},\ -\frac{2}{9},\ -2.x_3 - \frac{1}{2}) \leq x_2 \leq Min(0,\ -\frac{4}{3}.x_3 + 1)$

On peut vérifier que $-2/9 < 0$.

— *Etape 2 :*

Le nouveau système après l'élimination de x_2 *est :*

$$\begin{cases} 2.x_3 \leq \frac{10}{9} \\ \frac{4}{3}.x_3 \leq \frac{11}{9} \\ -\frac{2}{3}.x_3 \leq \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}.x_3 \leq \frac{1}{9} \\ 0 \leq \frac{2}{9} \\ -2.x_3 \leq \frac{1}{2} \\ x_3 \leq 2 \end{cases} \tag{2.10}$$

— *Etape 1 :*

Nous mettons le nouveau système sous la forme :

$$\begin{cases} x_3 \leq \frac{5}{9} \\ x_3 \leq \frac{11}{12} \\ x_3 \leq \frac{1}{6} \\ x_3 \leq 2 \\ -x_3 \leq \frac{9}{4} \\ -x_3 \leq \frac{1}{4} \\ 0 \leq \frac{2}{9} \quad (\textit{inégalité triviale vérifiée} \rightarrow \textit{nous pouvons l'éliminer}\ ) \end{cases} \tag{2.11}$$

Alors, nous obtenons :

$Max(-\frac{9}{4},\ -\frac{1}{4}) \leq x_3 \leq Min(\frac{5}{9},\ \frac{11}{12},\ \frac{1}{6}, 2)$, *ainsi* $-\frac{1}{4} \leq x_3 \leq \frac{1}{6}$.

— ***Phase 2 :***

Nous avons $-\frac{1}{4} \leq x_3 \leq \frac{1}{6}$ *alors, la condition de faisabilité qui est* $-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{6}$ *est bien vérifiée. Alors, il existe* $x \in \mathbb{R}^3$ *tel que l'inégalité matricielle (2.6) est vérifiée.*

- *Nous choisissons* $x_3 = 0$.
- *Pour* $x_3 = 0$, *on a* $x_2 \in [-\frac{1}{9}\ 0]$. *Nous choisissons alors* $x_2 = 0$.
- *Pour* $x_3 = 0$ *et* $x_2 = 0$, *on a* $Max(\frac{1}{3},\ -1) \leq x_1 \leq Min(\frac{1}{2},\ 1)$. *Ainsi* $\frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{1}{2}$. *Nous choisissons alors* $x_1 = \frac{1}{2}$.

Ainsi, une solution possible de (2.6) dans $\mathbb{R}^3$ *est* $x = (\frac{1}{2}\ 0\ 0)^\top$.

2.2.3 La complexité de l'algorithme de Fourier-Motzkin

Si on part du système (2.2) à m inégalités linéaires, le nombre d'inégalités produites après l'élimination de la première variable x_1 est $|S^+| * |S^-| + |S^0|$. Dans le pire des cas, si $|S^+| = |S^-| = \frac{m}{2}$ alors le nombre d'inégalités produites est $m' = \frac{m^2}{4}$. Nous supposons de nouveau que pour les m' nouveaux systèmes produits, on a $|S^+| = |S^-| = \frac{m'}{2}$, alors le nombre d'inégalités produites après l'élimination de x_2 est $\frac{m'^2}{4} = \frac{m^4}{4^3}$. Après n élimina-

tions successives et sous la même hypothèse qu'après l'élimination d'une variable x_l, nous obtenons un système qui n'obtient que les deux formes S^+ et S^- tel que $|S^+| = |S^-|$. Dans ce cas, le nombre d'inégalités produites après l'élimination successive de x_1 à x_n est $4.(\frac{m}{4})^{2^n}$, ce qui correspond à une complexité en mémoire doublement exponentielle.

Un inconvénient de l'algorithme d'élimination de Fourier-Motzkin est qu'il peut produire de nombreuses contraintes inutiles (redondantes) qui peuvent être supprimées du système sans changer son ensemble de solutions. Il existe trois approches principales pour éliminer les inégalités redondantes avant qu'ils se produisent. L'approche algébrique générale de Cernikov [BEGFB94], l'approche algébrique matricielle de Kohler [Koh67], et l'approche d'arbre d'Impert [Imb90]. Ces trois méthodes produisent le même nombre d'inégalités non redondantes. Dans ce travail, nous choisissons les deux théorèmes « d'accélération » d'Imbert. Ils sont basés sur la mémorisation de la manière dont les contraintes (inégalités) sont construites et sur des vérifications syntaxiques, limitant ainsi la nécessité de résoudre des programmes linéaires ou de calculer des rangs matriciels. [BEGFB94] [Koh67].

2.2.4 Extension de Fourier-Motzkin : les théorèmes d'accélération d'Imbert

Avant l'élimination de la variable x_l à partir du système (2.2), nous devons éliminer les inégalités redondantes pour construire le nouveau système des variables $\{x_{1+1}, \ldots x_n\}$ en utilisant un nombre minimal de contraintes. Nous notons O_{l-1} l'ensemble des variables de x_1 à x_{l-1} qui sont officiellement éliminées. Nous associons à chaque inégalité i trois informations sous forme d'un triplet (H_l^i, E_l^i, I_l^i), comme suit :

— L'historique H_l^i d'une inégalité i du système (2.2) est l'ensemble des indices des inégalités du système initial ayant servi à générer l'inégalité i après l'élimination des variables de x_1 à x_{l-1}.

— L'ensemble des variables effectivement éliminées E_l^i pour l'inégalité i est l'ensemble des variables éliminées suite à une sommation d'un $+1$ et de -1 après l'élimination des variables de x_1 à x_{l-1}.

— L'ensemble des variables implicitement éliminées I_l^i pour l'inégalité i, est l'ensemble des variables qui apparaissent dans au moins une des inégalités de l'historique H_l^i, sans apparaître dans l'inégalité i ni être effectivement éliminée. Autrement dit, I_l^i est l'ensemble des variables x_j avec $j \in [q+1...n]$ qui sont éliminées suite à une sommation d'un $+1$ et de -1 pour l'élimination des variables de x_1 à x_{l-1} pour l'inégalité i.

Alors, nous avons, $H_{l-1}^i \subset H_l^i$, $E_{l-1}^i \subset E_l^i$ et $I_{l-1}^i \subset I_l^i$.

Une inégalité non redondante a la propriété que son histoire est minimale. Nous utilisons alors ces deux importants théorèmes d'Imbert.

Théorème 1 *(Le premier théorème d'accélération d'Imbert) [Imb93]*
Si H_l^i est minimal, alors $1 + |E_l^i| \leq |H_l^i| \leq 1 + |E_l^i \bigcup (I_l^i \bigcap O_{l-1})|$.

Par conséquent, si l'inégalité $1 + |E_l^i| \leq |H_l^i| \leq 1 + |E_l^i \bigcup (I_l^i \bigcap O_{l-1})|$ est non vérifiée, alors l'inégalité i est redondante, d'où on doit l'éliminer. Le premier théorème d'accélération d'Imbert détecte rapidement la plupart des redondances mais pas toutes.

Soit le deuxième théorème d'accélération d'Imbert qui détecte les inégalités d'historique minimal :

Théorème 2 *(Le deuxième théorème d'accélération d'Imbert) [Imb93]*
Si l'inégalité i est telle que $1 + |E_l^i| = |H_l^i|$, alors H_l^i est minimal.

Exemple 4 *Soit le système des inégalités suivant où on associe à chaque inégalité i le triplet $(H_l^i; E_l^i; I_l^i)$.*

Inégalité	$(H_1^i; E_1^i; I_1^i)$
$x_3 + x_4 + x_5 \leq 1$	$(\{1\}; \{\}; \{\})$
$-x_1 - 2.x_4 \leq 0$	$(\{2\}; \{\}; \{\})$
$-x_2 - 2.x_5 \leq 0$	$(\{3\}; \{\}; \{\})$
$2.x_2 + 3.x_5 \leq 1$	$(\{4\}; \{\}; \{\})$
$-x_2 \leq 0$	$(\{5\}; \{\}; \{\})$
$-x_3 \leq 0$	$(\{6\}; \{\}; \{\})$
$x_1 + x_2 - 2.x_3 \leq 1$	$(\{7\}; \{\}; \{\})$
$x_1 + x_2 + 2.x_3 + 2.x_4 + 2.x_5 \leq 1$	$(\{8\}; \{\}; \{\})$
$x_2 + x_5 \leq 4$	$(\{9\}; \{\}; \{\})$

Selon le deuxième théorème d'Imbert toutes les inégalités sont minimales. Alors, nous conservons toutes les inégalités pour l'élimination de x_1. Pour l'élimination de x_1 :

- *Nous additionnons l'inégalité 2 et 7. Alors, $H_2^1 = \{2, 7\}$ et $E_2^1 = \{x_1\}$. Il n'existe pas d'autres variables qui sont annulées lors de l'élimination de x_1. Alors, $I_2^1 = \{\}$.*
- *Nous additionnons l'inégalité 2 et 8. Alors, $H_2^2 = \{2, 8\}$ et $E_2^2 = \{x_1\}$. La variable x_4 est éliminée lors d'élimination de x_1. Alors, $I_2^2 = \{x_4\}$.*

L'élimination de x_1 donne $O_1 = \{x_1\}$ et le nouveau système est :

Inégalité	$(H_2^i; E_2^i; I_2^i)$
$x_2 - 2.x_3 - 2.x_4 \leq 1$	$(\{2, 7\};\ \{x_1\};\ \{\})$
$x_2 + 2.x_3 + 2.x_5 \leq 1$	$(\{2, 8\};\ \{x_1\};\ \{x_4\})$
$x_3 + x_4 + x_5 \leq 1$	$(\{1\}; \{\}; \{\})$
$-x_2 - 2.x_5 \leq 0$	$(\{3\}; \{\}; \{\})$
$2.x_2 + 3.x_5 \leq 1$	$(\{4\}; \{\}; \{\})$
$-x_2 \leq 0$	$(\{5\}; \{\}; \{\})$
$-x_3 \leq 0$	$(\{6\}; \{\}; \{\})$
$x_2 + x_5 \leq 4$	$(\{9\}; \{\}; \{\})$

D'après le tableau précédent, nous avons $1 + |E_2^i| = |H_2^i|$ pour tout i. Par conséquent, selon le deuxième théorème d'Imbert, toutes les inégalités sont minimales. Nous conservons donc toutes les inégalités lors de l'élimination de x_2. L'élimination de x_2 donne $O_2 = \{x_1, x_2\}$ et le nouveau système est :

Inégalité	$(H_3^i; E_3^i; I_3^i)$
$-2.x_3 - 2.x_4 - 2.x_5 \leq 1$	$(\{2,7,3\};\ \{x_1,x_2\};\ \{\})$
$-2.x_3 - 2.x_4 \leq 1$	$(\{2,7,5\};\ \{x_1,x_2\};\ \{\})$
$2.x_3 \leq 1$	$(\{2,8,3\};\ \{x_1,x_2\};\ \{x_4x_5\})$
$2.x_3 + 2.x_5 \leq 1$	$(\{2,8,5\};\ \{x_1,x_2\};\ \{x_4\})$
$-x_5 \leq 4$	$(\{3,9\};\ \{x_2\};\ \{x_4x_5\})$
$x_5 \leq 4$	$(\{5,9\};\ \{x_2\};\ \{\})$
$x_3 + x_4 + x_5 \leq 1$	$(\{1\};\{\};\{\})$
$-x_3 \leq 0$	$(\{6\};\{\};\{\})$

Selon le deuxième théorème d'Imbert, toutes les inégalités sont minimales. Nous conservons donc toutes les inégalités lors de l'élimination de x_3. *L'élimination de* x_3 *donne* $O_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ *et le nouveau système est :*

Inégalité	$(H_4^i; E_4^i; I_4^i)$
$-2.x_4 - 2.x_5 \leq 2$	$(\{2,7,3,8\};\ \{x_1,x_2,x_3\};\ \{x_4x_5\})$
$-2.x_4 \leq 2$	$(\{2,3,7,8,5\};\ \{x_1,x_2,x_3\};\ \{x_4x_5\})$
$0 \leq 1$	$(\{2,8,3,6\};\ \{x_1,x_2,x_3\};\ \{x_4x_5\})$
$-2.x_4 + 2.x_5 \leq 2$	$(\{2,8,5,7\};\ \{x_1,x_2,x_3\};\ \{x_4\})$
$2.x_5 \leq 1$	$(\{8,2,5,6\};\ \{x_1,x_2,x_3\};\ \{x_4\})$
$0 \leq 3$	$(\{2,7,3,1\};\ \{x_1,x_2,x_3\};\ \{x_4x_5\})$
$2.x_5 \leq 3$	$(\{2,7,5,1\};\ \{x_1,x_2,x_3\};\ \{x_4\})$
$x_4 + x_5 \leq 1$	$(\{1,6\};\{x_3\};\{\})$
$-x_5 \leq 4$	$(\{3,9\};\{x_2\};\{\})$
$x_5 \leq 4$	$(\{5,9\};\{x_2\};\{\})$

La deuxième inégalité du tableau précédent n'est pas minimale selon le premier théorème d'Imbert. En effet : $|H_4^2 \bigcup (I_4^2 \bigcap O_3)| = |\{x_1,x_2,x_3\} \bigcup (\{x_4,x_5\} \bigcap \{x_1,x_2,x_3\})| = |\{x_1,x_2,x_3\}| = 3$. *Ainsi, la relation* $1 + |E_4^2| \leq |H_4^2| \leq 1 + |E_4^2 \bigcup (I_4^2 \bigcap O_3)|$ *n'est pas vérifiée. Par conséquent, cette inégalité peut être éliminée.*

Les autres inégalités sont minimales selon le deuxième théorème d'Imbert. L'élimination de x_4 *donne* $O_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *et le nouveau système est :*

Inégalité	$(H_5^i; E_5^i; I_5^i)$
$0 \leq 4$	$(\{2,7,3,8,1,6\};\ \{x_1,x_2,x_3,x_4\};\ \{x_4x_5\})$
$4.x_5 \leq 4$	$(\{2,8,5,7,1,6\};\ \{x_1,x_2,x_3,x_4\};\ \{x_4\})$
$2.x_5 \leq 1$	$(\{2,8,5,6\};\ \{x_1,x_2,x_3\};\ \{x_4\})$
$2.x_5 \leq 3$	$(\{7,2,5,1\};\ \{x_1,x_2,x_3\};\ \{x_4\})$
$-x_5 \leq 4$	$(\{3,9\};\ \{x_2\};\ \{\})$
$x_5 \leq 4$	$(\{5,9\};\{x_2\};\{\})$
$2.x_5 \leq 1$	$(\{2,8,5,6\};\ \{x_1,x_2,x_3\};\ \{x_4\})$
$2.x_5 \leq 3$	$(\{2,7,5,1\};\ \{x_1,x_2,x_3\};\ \{x_4\})$

2.3 L'algorithme de Fourier-Motzkin pour la résolution de $A.x \leq b$ dans $\mathbb{Z}^n$

Dans cette section, nous nous interessons à l'algorithme de Fourier-Motzkin pour la détermination des solutions entières de $A.x \leq b$ pour une classe particulière de systèmes qui sont les systèmes 1-monotones.

Soit le système linéaire en nombres entiers :

$$A.x \leq b \ \ ; x \in \mathbb{Z}^n \tag{2.12}$$

où A est une matrice de dimension $m \times n$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ avec m est le nombre d'inégalités du système et n est le nombre de variables du système. Le vecteur b est de dimension $m \times 1$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Le vecteur $x = [x_1...x_n]^\top$ est le vecteur des variables x_i , $i \in [1...n]$ du système.

La relaxation linéaire du système (2.12) est le système produit lorsqu'on omet les contraintes d'intégrité, c-à-d le système (2.1). Utiliser l'algorithme de Fourier-Motzkin et arrondir les solutions de la relaxation (2.1) ne fonctionnent en général pas pour déterminer une solution entière du système (2.12). En effet, arrondir une solution non entière peut générer une solution non admissible. En outre, si l'élimination de Fourier-Motzkin répond parfaitement au problème de faisabilité pour un système linéaire sur les réels, elle

est incomplète pour les systèmes en nombres entiers. Autrement dit, si la condition de faisabilité est vérifiée pour le système en nombres entiers (2.12), cela ne signifie pas qu'il existe une solution entière pour le système. Il ne s'agit en effet que d'une condition nécessaire mais non suffisante pour l'existence d'une solution dans $\mathbb{Z}^n$.

Exemple 5 *Si nous retournons à l'exemple 3 et dans le but de déterminer une solution du système (2.6) dans $\mathbb{Z}^3$.*

amira

- *Nous avons $-\frac{1}{4} \leq x_3 \leq \frac{1}{6}$ alors la seule possibilité est $x_3 = 0$.*
- *Pour $x_3 = 0$, on a $x_2 \in [-\frac{1}{9}\ 0]$ nous avons une seule possibilité $x_2 = 0$.*
- *Pour $x_3 = 0$ et $x_2 = 0$, on a $\frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{1}{2}$, alors il n'existe pas une valeur de x_1 dans $\mathbb{Z}$.*

Ainsi, le système (2.6) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^3$.

Maintenant, nous découvrons une classe particulière de problèmes linéaires à variables entières pour laquelle l'existence d'une solution entière est équivalente à l'existence d'une solution réelle.

Définition 2.1 *Un système linéaire est inf-monotone (respectivement sup-monotone) s'il peut être réécrit sous la forme $A.x \leq b$, où chaque ligne de A a au plus un élément strictement négatif (respectivement positif). Un système linéaire est monotone si toutes les inégalités qui le composent sont soit toutes sup-monotones soit toutes inf-monotones [Nar01].*

Définition 2.2 *Un ensemble F possède un plus petit élément (ou minimum global) α si $\alpha \in F$ et si $\forall x \in F, x \geq \alpha$. Le plus petit élément est unique lorsqu'il existe. On le note $min(F)$ [Nar01].*

Corollaire 1 *L'ensemble des solutions d'un système monotone $A.x \leq b$ possède, s'il est non vide et minoré, un plus petit élément.*

Les systèmes d'inégalités inf-monotones (respectivement sup-monotones) ont une propriété remarquable lorsque les coefficients négatifs (respectivement positifs) de la matrice A ont des valeurs unitaires : les extrêmums globaux des solutions réelles et entières coïncident lorsqu'ils existent.

Définition 2.3 *Un système inf-monotone (respectivement sup-monotone) $Ax \leq b$ est 1-inf-monotone (respectivement 1-sup-monotone) si A et b ont des coefficients entiers et si les éléments strictement négatifs (respectivement positifs) de A sont tous égaux à -1 (respectivement 1).Un système linéaire est 1-monotone si toutes les inégalités qui le composent sont soit toutes 1-sup-monotones soit toutes 1-inf-monotones [Nar01].*

Le théorème suivant indique que les minimums des solutions réelles et entières coïncident lorsqu'ils existent.

Théorème 3 *Soit $A.x \leq b$ un système 1-monotone. Si le polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n | A.x \leq b\}$ admet un plus petit élément, alors le plus petit élément a des coordonnées entières, c.-à-d. $min(P) = min(Q)$, où $Q = \{x \in \mathbb{Z}^n \,| A.x \leq b\}$ [Nar01].*

Géométriquement, ces systèmes définissent des polyèdres (éventuellement, en nombres entiers) qui ont une structure de demi-treillis. L'algorithme de Fourier-Motzkin pour les systèmes 1-monotones est de complexité polynomiale (et même linéaire).

Exemple 6 *Soit le système 1-inf-monotone suivant :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Ainsi, nous avons le système des inégalités suivantes :

$$\begin{cases} x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ -x_1 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2.x_1 - x_2 \leq -2 \end{cases} \tag{2.14}$$

— ***Phase 1*** *:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - \frac{1}{2}.x_2 \leq -1 \\ -x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x_1 \leq Min(x_2,\ -x_2 + 4,\ \tfrac{1}{2}.x_2 - 1)$$

Le nouveau système après l'élimination de x_1 *est :*

$$\begin{cases} x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq 3 \\ -x_2 \leq 1 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x_2 \leq 3$$

— ***Phase 2*** *:*

Nous avons $0 < 3$ *alors, la condition de faisabilité est bien vérifiée. Alors, il existe* $x \in \mathbb{Z}^2$ *tel que l'inégalité matricielle (2.13) est vérifiée.*

Si $x_2 = 0$ *alors* $x_1 = -1$*, ainsi une solution possible de (2.13) dans* $\mathbb{Z}^2$ *est* $x = (-1\ 0)^\top$.

2.4 Reformulation Algébrique d'élimination de Fourier-Motzkin

2.4.1 Reformulation Algébrique d'élimination de Fourier-Motzkin sans élimination des inégalités redondantes

Après l'élimination de la variable x_{l-1}, et dans le but de déterminer les bornes de la variable x_l qui sont en fonction des éléments du vecteur $X_{l+1} = [x_{l+1}\ x_{l+2}...x_n]^\top$, on nor-

malise les valeurs de la première colonne et on permute les lignes de la matrice résultante de l'élimination de x_{l-1}. On obtient alors la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} a^l_{pos} & A^l_{pos} \\ -a^l_{neg} & A^l_{neg} \\ a^l_{zer} & A^l_{zer} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_l \\ X_{l+1} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b^l_{pos} \\ b^l_{neg} \\ b^l_{zer} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

La forme matricielle (2.15) est sous la forme :

$$A_l.X_l \leq b_l \tag{2.16}$$

où $X_l = \begin{pmatrix} x_l \\ X_{l+1} \end{pmatrix}$, $A_l = \begin{pmatrix} a^l_{pos} & A^l_{pos} \\ -a^l_{neg} & A^l_{neg} \\ a^l_{zer} & A^l_{zer} \end{pmatrix}$ et $b_l = \begin{pmatrix} b^l_{pos} \\ b^l_{neg} \\ b^l_{zer} \end{pmatrix}$.

La procédure d'élimination de la variable x_l peut être faite par une multiplication à gauche de A_l par une matrice N_l comme suit :

$$N_l.A_l.X_l \leq N_l.b_l \tag{2.17}$$

La matrice N_l est définie dans la proposition suivante :

Proposition 4 *L'élimination de la variable x_l du système $A_l.X_l \leq b_l$ est faite par une multiplication à gauche de l'inégalité matricielle par la matrice N_l. Cette matrice est une matrice diagonale par blocs définie comme suit :*

$$N_l = \left(\begin{array}{lll} m_1 & I_{n^- \times n^-} & 0_{n^- \times n^0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n^+} & I_{n^- \times n^-} & 0_{n^- \times n^0} \\ \hline 0_{n^0 \times n^+} & 0_{n^0 \times n^-} & I_{n^0 \times n^0} \end{array}\right) \tag{2.18}$$

où la matrice $m_i = 0_{n^- \times n^+}$, sauf la i^{th} colonne qui est un vecteur unitaire. Les matrices $I_{n^- \times n^-}$ et $I_{n^0 \times n^0}$ sont les matrices d'identité d'ordre n^- et n^0, respectivement.

Preuve

Pour l'annulation de la première colonne, nous ajoutons chaque ligne de la matrice A_l,

associée à "+1" dans la première colonne, à toutes les lignes de A_l associée à "-1" dans la première colonne. Ceci est visualisé par la multiplication $\begin{pmatrix} m_i & I_{n^- \times n^-} & 0_{n^- \times n^0} \end{pmatrix} * A_l$. *La multiplication* $\begin{pmatrix} 0_{n^0 \times n^+} & 0_{n^0 \times n^-} & I_{n^0 \times n^0} \end{pmatrix} * A_l$ *conserve les zéros de la première colonne. Ainsi, nous pouvons construire la matrice d'élimination (2.18).*

La procédure d'élimination est possible si la colonne correspondant à x_l présente les coefficients 1 et -1 qui correspondent à $m_i \neq 0$ dans la matrice N_l.

Exemple 7 *Nous considérons le système (2.13) de l'exemple 6. Le système (2.13) est réécrit sous la forme* $A_1.X_1 \leq b_1$ *où* $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $X_1 = (x_1\ x_2)^\top$ *alors la matrice d'élimination N_1 qui élimine la variable x_1 est définie comme suit :* $N_1 = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. *Nous obtenons alors* $N_1.A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $N_1.b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Le nouveau système obtenu après l'élimination de la colonne des zéros associée à x_1 et la mise du système sous la forme (2.15) est* $A_2.X_2 \leq b_2$ *où* $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $X_2 = x_2$.

2.4.2 Reformulation Algébrique de l'élimination de Fourier-Motzkin avec élimination des inégalités redondantes

Après l'élimination des variables de x_1 à x_{l-1}, nous associons à l'inégalité matricielle $A_l.X_l \leq b_l$ du vecteur inconnu $X_l = [x_l \ldots x_n]^\top$ trois vecteurs H_l, E_l,et I_l, de dimension n_v avec $n_v = n_l^+.n_l^- + n_l - n_l^+ - n_l^-$ définis comme suit :

$$H_l = \begin{pmatrix} H_{l-1}^1 \bigcup H_{l-1}^{n_l^+ +1} \\ \vdots \\ \underline{H_{l-1}^1 \bigcup H_{l-1}^{n_l^+ + n_l^-}} \\ H_{l-1}^2 \bigcup H_{l-1}^{n_l^+ +1} \\ \vdots \\ \underline{H_{l-1}^2 \bigcup H_{l-1}^{n_l^+ + n_l^-}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline H_{l-1}^{n_l^+} \bigcup H_{l-1}^{n_l^+ +1} \\ \vdots \\ \underline{H_{l-1}^{n_l^+} \bigcup H_{l-1}^{n_l^+ + n_l^-}} \\ H_{l-1}^{n_l^+ . n_l^- +1} \\ \vdots \\ H_{l-1}^{n_v} \end{pmatrix} ; E_l = \begin{pmatrix} E_{l-1}^1 \bigcup E_{l-1}^{n_l^+ +1} \\ \vdots \\ \underline{E_{l-1}^1 \bigcup E_{l-1}^{n_l^+ + n_l^-}} \\ E_{l-1}^2 \bigcup E_{l-1}^{n_l^+ +1} \\ \vdots \\ \underline{E_{l-1}^2 \bigcup E_{l-1}^{n_l^+ + n_l^-}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline E_{l-1}^{n_l^+} \bigcup E_{l-1}^{n_l^+ +1} \\ \vdots \\ \underline{E_{l-1}^{n_l^+} \bigcup E_{l-1}^{n_l^+ + n_l^-}} \\ E_{l-1}^{n_l^+ . n_l^- +1} \\ \vdots \\ E_{l-1}^{n_v} \end{pmatrix} ; I_l = \begin{pmatrix} I_{l-1}^1 \bigcup I_{l-1}^{n_l^+ +1} \\ \vdots \\ \underline{I_{l-1}^1 \bigcup I_{l-1}^{n_l^+ + n_l^-}} \\ I_{l-1}^2 \bigcup I_{l-1}^{n_l^+ +1} \\ \vdots \\ \underline{I_{l-1}^2 \bigcup I_{l-1}^{n_l^+ + n_l^-}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline I_{l-1}^{n_l^+} \bigcup I_{l-1}^{n_l^+ +1} \\ \vdots \\ \underline{I_{l-1}^{n_l^+} \bigcup I_{l-1}^{n_l^+ + n_l^-}} \\ I_{l-1}^{n_l^+ . n_l^- +1} \\ \vdots \\ I_{l-1}^{n_v} \end{pmatrix}$$

Le vecteur H_l est appelé le vecteur d'historique après l'élimination des variables de x_1 à x_{1-1}. Le vecteur E_l est appelé le vecteur des variables effectivement éliminées après l'élimination des variables de x_1 à x_{1-1}, et le vecteur I_l est appelé le vecteur des variables implicitement éliminées, après l'élimination des variables de x_1 à x_{1-1}.

À partir des trois vecteurs H_l, E_l , I_l et l'ensemble $O_{l-1} = x_1, ..., x_{l-1}$, nous pouvons déterminer les nouvelles inégalités redondantes produites après l'élimination de x_{l-1} et la construction d'un nouveau système de variables x_l à x_n avec un nombre minimal de contraintes.

Ainsi, nous allons modifier la matrice d'élimination N_l afin de mettre à zéro les lignes qui correspondent à des contraintes redondantes. Ainsi, l'expression (2.17) est transformée comme suit :

$$N'_l.A_l.X_l \leq N'_l.b_l \tag{2.19}$$

avec

$$N'_l = \begin{pmatrix} V(H_l^1, E_l^1, I_l^1, O_{l-1}) & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \ddots\ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots 0 & V(H_l^{n_v}, E_l^{n_v}, I_l^{n_v}, O_{l-1}) \end{pmatrix} .N_l \tag{2.20}$$

où la fonction V est définie comme suit :

$$\begin{cases} V(H_l^i, E_l^i, I_l^i, O_{l-1}) = 0 & si\ 1 + |E_l^i| \leq |H_l^i| \leq 1 + |E_l^i \bigcup (I_l^i \bigcap O_{l-1})| \text{ n'est pas vérifié} \\ = 1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.21}$$

2.4.3 Implémentation algorithmique

L'algorithme qui suit décrit les éliminations de Fourier-Motzkin appliquées au polyèdre paramétrique $A.x \leq b$ de paramétres b_i avec application de deux théorèmes d'Imbert pour l'élimination des inégalités redondantes.

Algorithme 3 L'algorithme d'élimination de Fourier-Motzkin appliqué au polyèdre paramétrique $A.x \leq b$ de paramétres b_i (avec élimination complète de variables)

Entrées: $A; b$

Sorties: A_+, b_+, A_-, b_-, zp, zn

$A_+ = []; b_+ = []; A_- = []; b_- = []; zp = []; zn = [];$

$n =$ nombre des colones de A

Pour l de 1 à n **faire**

$[A_{nor}, b_{nor}] =$ normalisation (A, b)

$[A_c, b_c] =$ classification (A_{nor}, b_{nor})

$[A^l_{pos}, b^l_{pos}, A^l_{neg}, b^l_{neg}] =$ extraction (A_c, b_c)

$n^+ =$ nombre des lignes de A^l_{pos}

$n^- =$ nombre des lignes de A^l_{neg}

$n^0 =$ nombre des lignes de A^l_{zer}.

$$zp = \begin{pmatrix} zp \\ n^+ \end{pmatrix}$$

$$zn = \begin{pmatrix} zn \\ n^- \end{pmatrix}$$

$$A_+ = \left(\begin{array}{c|c} A_+ & \\ \hline 0_{n^+ \times l} & A^l_{pos} \end{array}\right)$$

$$b_+ = \begin{pmatrix} b_+ \\ \hline b^l_{pos} \end{pmatrix}$$

$$A_- = \left(\begin{array}{c|c} A_- & \\ \hline 0_{n^- \times l} & A^l_{neg} \end{array}\right)$$

$$b_- = \begin{pmatrix} b_- \\ \hline b^l_{neg} \end{pmatrix}$$

$A1 = N'_l.A_c$

$b1 = N'_l.b_c$

$A = A1(., 2 : (n - l + 1))$

$b = b1$

Fin Pour

La fonction "normalisation" permet la normalisation des éléments de la première colonne. La fonction "classement" permet la permutation des lignes des matrices A_{nor} et b_{nor} pour obtenir les formes S^+, S^- et S^0. Après ces prétraitements, la fonction "extraction" permet d'extraire les matrices A^l_{pos}, b^l_{pos}, A^l_{neg} et b^l_{neg} à partir des inégalités produites exprimées par (A_c, b_c). Ces matrices et vecteurs, qui permettent de déterminer en ligne les bornes des variables x_l ; $l \in [1...n]$, sont stockés dans les matrices blocs et vecteurs A_+, A_-, b_+ et b_-, pour les utiliser dans le calcul numérique des variables du système quand les paramètres b_i sont connus. Les nombres des lignes de ces matrices sont stockés dans les vecteurs zp et zn.

L'étape suivante est la mise à zéro des coefficients associés à x_l et l'élimination des inégalités redondantes en multipliant A_c et b_c par N'_l. On obtient alors une nouvelle inégalité matricielle qui a comme inconnue le vecteur $[x_{l+1}, ..., x_n]^\top$ en supprimant la colonne de zéros associée à x_l. Cette procédure est répétée pour toutes les variables successivement jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ variable.

Exemple 8 *Soit le système* $\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix}$

1. *Pour* x_1 :

   $Max(x_2 - b_3, x_3 - b_4) \leq x_1 \leq Min(b_1, b_2)$;

   $A_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $b_+ = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$; $zp = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$; $A_- = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$; $b_+ = \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$; $zn = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$.

2. *Pour* x_2 :

Après élimination de x_1*, on aura* $\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ +1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & +1 \\ 0 & +1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \leq \begin{pmatrix} b_1 + b_3 \\ b_2 + b_3 \\ b_5 \\ b_1 + b_4 \\ b_2 + b_4 \\ b_6 \end{pmatrix}$

Alors, on obtient $-b_5 \leq x_2 \leq Min(b_1 + b_3, b_2 + b_3)$ *;*

$A_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *;* $b_+ = \begin{pmatrix} b_1 + b_3 \\ \hline b_2 + b_3 \\ \hline b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ *;* $zp = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *;* $A_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ \hline 0 & +1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$ *;* $b_- = \begin{pmatrix} b_5 \\ \hline b_3 \\ \hline b_4 \end{pmatrix}$ *;* $zn = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. *Pour* x_3 *:*

Après élimination de x_2*, on aura* $\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .x_3. \leq \begin{pmatrix} b_1 + b_4 \\ b_2 + b_4 \\ b_6 \\ b_1 + b_3 + b_5 \\ b_2 + b_3 + b_5 \end{pmatrix}$

Alors, on obtient $-b_6 \leq x_3 \leq Min(b_1 + b_4, b_2 + b_4)$ *;*

$A_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *;* $b_+ = \begin{pmatrix} b_1 + b_4 \\ \hline b_2 + b_4 \\ \hline b_1 + b_3 \\ \hline b_2 + b_3 \\ \hline b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ *;* $zp = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *;*$A_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & +1 \\ \hline 0 & +1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$ *;* $b_- =$

$$\begin{pmatrix} b_6 \\ \hline b_5 \\ \hline b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} ; zn = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la reformulation algébriquement de l'algorithme d'élimination de Fourier-Motzkin qui change le polyèdre $A.x \leq b$ en une autre forme algébrique plus facile à exploiter. Les deux théorèmes "d'accélération" d'Imbert sont exploités pour l'élimination des inégalités redondantes produites suite aux éliminations successives des variables.

Dans le chapitre suivant, nous verrons comment la nouvelle forme algébrique du polyèdre $A.x \leq b$ peut être utilisée pour la mise en place d'une approche pour l'estimation et le diagnostic d'un RdPE partiellement observable.

3

Diagnostic d'un RdPE partiellement observable sur un horizon élémentaire glissant

Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons une approche de diagnostic d'un RdPE partiellement observable basé sur l'estimation d'état avec un horizon élémentaire glissant. Notre approche d'estimation consiste à observer en ligne une séquence de franchissements de transitions observables à partir de laquelle nous déterminons un sous-ensemble de l'espace d'état, appelé l'ensemble des marquages de base, sans calcul explicite de tout l'espace d'état.

3.1 Introduction

Un système de diagnostic est essentiel pour la fiabilité des systèmes techniques complexes. Il consiste à prendre des décisions sur la présence des défauts, leur localisation et leurs gravités à partir d'un ensemble de mesures. Ce chapitre s'intéresse au problème de diagnostic d'un SED modélisé par un RdPE partiellement observable. La technique s'appuie sur une estimation d'état sur un horizon glissant.

La stratégie adoptée dans ce chapitre pour l'estimation d'état est la suivante. Tout d'abord, il s'agit de décrire algébriquement le problème d'estimation des vecteurs de franchissement des séquences non observables cohérentes avec le franchissement d'une seule transition de la séquence observée à partir d'un marquage initial connu. Ces vecteurs sont exprimés sous la forme d'un polyèdre $A.x \leq b$. Le paramètre A dépend uniquement de la structure du RdPE tandis que le paramètre b dépend du marquage initial et de la transition observée. Lorsqu'une solution x correspond à une séquence de franchissements, la solution est appelée vecteur d'explication. Ainsi, un vecteur x solution du polyèdre $A.x \leq b$ est un vecteur candidat d'un vecteur d'explication. Pour le traitement de l'information suivante, ici la transition suivante de la séquence observée, une mise à jour de l'ensemble des marquages initiaux possibles est nécessaire. Une première approche proposée dans ce chapitre pour l'estimation d'état est basée sur un observateur qui est conçu en deux phases. La première phase est un pré-calcul hors ligne qui est basé sur l'adaptation de l'algorithme d'élimination de Fourier-Motzkin, présenté au chapitre 2, qui va changer le polyèdre $A.x \leq b$ de paramètres b_i associé au système en une forme algébrique plus facile à exploiter. La seconde phase est une procédure d'estimation en ligne qui détermine les vecteurs candidats des vecteurs d'explication en exploitant les données actuelles. Dans ce but, un algorithme de calcul numérique de toutes les solutions entières du polyèdre $A.x \leq b$ est développé. Il est une extension de la phase 2 de l'algorithme de Fourier-Motzkin. Notons qu'un avantage de cette approche d'estimation d'état en deux phases est que la phase hors ligne contient la partie coûteuse en temps et n'est effectuée qu'une seule fois.

L'énumération exhaustive de tout l'espace d'état cohérent avec l'observation en ligne

donne des résultats corrects mais souffre de l'explosion combinatoire. Une solution à ce problème a été proposée en estimant seulement un sous-ensemble de l'espace d'état. En particulier, il a été démontré dans [CGS10b] [ZTZG17] que seul un sous-ensemble de marquages actuels appelé "marquages de base" doit être calculé pour le diagnostic. L'ensemble des marquages de base représente l'ensemble des marquages actuels pour des vecteurs de tirs minimaux des séquences non observables qui activent la séquence observée. Ces vecteurs sont appelés vecteurs d'explication minimaux. Dans la littérature, toutes les approches d'estimation des marquages de base imposent l'hypothèse de l'acyclicité du sous-réseau non observable.

Dans ce chapitre, une deuxième approche est proposée pour l'estimation d'état à base de marquages de base. Nous développons une nouvelle méthodologie qui permet de déterminer des vecteurs d'explication minimaux candidats malgré la présence des circuits dans le sous-réseau non observable. Cette approche se base sur le même principe que la première approche d'estimation, sans énumération explicite de tout l'ensemble des états cohérents. Une vérification de la solution candidate calculée si elle est aussi un vecteur d'explication est effectuée par l'analyse de "l'ordonnançabilité". Pour le diagnostic, nous supposons que les défauts qui peuvent affecter le système sont des événements indésirables qui sont modélisés par les tirs de certaines transitions non observables. Après chaque occurrence d'un événement observable, nous calculons des indicateurs de défauts à base des vecteurs d'explication minimaux qui nous permettent de localiser et de caractériser les défauts du système.

Le plan de ce chapitre se présente comme suit. Nous commençons par décrire le principe de l'estimation d'état et introduire un modèle de défaut. Ensuite, une approche d'estimation d'un ensemble de vecteurs d'explication candidats est introduite. Une deuxième approche permet de calculer un ensemble de vecteurs d'explication minimaux candidats. Ensuite, une analyse de l'ordonnançabilité des vecteurs candidats permet de sélectionner ceux qui sont associés à des vecteurs d'explication. Une méthode de diagnostic basée sur l'ensemble des vecteurs d'explication minimaux est enfin introduite.

3.2 Estimation d'un espace d'état d'un RdPE sur un horizon élémentaire glissant

3.2.1 Le principe de l'estimation

Le problème considéré dans cette section est le suivant. Nous considérons un RdPE où la matrice d'incidence W et le marquage initial M_0 sont connus. Compte tenu d'un mot observé w qui est l'image d'une séquence de franchissements des transitions observables $\sigma_{ob} \in TR^*_{ob}$ ($w = L(\sigma_{ob})$) générée par l'évolution du RdPE, nous voulons estimer des séquences de franchissements non observables $\sigma_{un} \in TR^*_{un}$ qui sont cohérentes avec le mot observé w.

Le principe d'estimation des séquences non observables qui activent σ_{ob} à partir de M_0 est basé sur le traitement des données produites par les transitions de la séquence observée σ_{ob} successivement dans une procédure en ligne. Soit $\sigma_{ob} = t_{ob}^{<1>} t_{ob}^{<2>} ... t_{ob}^{<h>}$ avec $t_{ob}^{<k>}$ est la k^{ime} transition observée de σ_{ob} et $h = card(\sigma_{ob})$ est la longueur de l'observation. Alors, à chaque itération $< k >$, nous cherchons les séquences non observables possibles qui activent $t_{ob}^{<k>}$. Le franchissement d'une séquence non observable trouvée, notée $\sigma_{un}^{<k>}$, et la transition observée $t_{ob}^{<k>}$ génèrent de nouveaux marquages utilisés comme des marquages initiaux possibles dans l'itération suivante. La procédure de recherche est faite pour la transition observée $t_{ob}^{<1>}$ jusqu'à la transition observée $t_{ob}^{<h>}$ successivement. Finalement, nous obtenons :

$$M^{<1>}[\sigma_{un}^{<1>} t_{ob}^{<1>} \succ M^{<2>}[\sigma_{un}^{<2>} t_{ob}^{<2>} \succ M^{<3>} ... M^{<h>}[\sigma_{un}^{<h>} t_{ob}^{<h>} \succ M^{<h+1>} \qquad (3.1)$$

où $M^{<1>} = M_0$. Alors, le dernier marquage $M^{<h+1>}$ est un marquage actuel possible cohérent avec la séquence observée σ_{ob} à partir de M_0. Les marquages actuels possibles sont les marquages obtenus en traitant toutes les séquences de franchissements possibles $\{\sigma_{un}^{<1>}, \sigma_{un}^{<2>}, ..., \sigma_{un}^{<h>}\}$.

La technique utilisée dans ce chapitre pour déterminer les séquences non observables possibles qui peuvent activer successivement les transitions d'une séquence observée σ_{ob} est basée sur la détermination des vecteurs de compte associés. Lorsqu'un vecteur de

compte correspond à une séquence de franchissements qui peut être suivie par le RdP, ce vecteur de compte est appelé vecteur d'explication. Soit alors la définition suivante :

Définition 3.1 *Soit $\sigma_{un}^{<k>}$ une séquence de franchissements non observable qui conduit au franchissement de la transition observée $t_{ob}^{<k>}$ à partir d'un marquage donné $M^{<k>}$. Un vecteur d'explication de $t_{ob}^{<k>}$ à partir de $M^{<k>}$ est le vecteur de compte de $\sigma_{un}^{<k>}$ noté $x_{un}^{<k>}$. Les ensembles de toutes les séquences non observables possibles et les vecteurs d'explication sont désignés respectivement par $SEQ(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>})$ et $E(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>})$. Formellement,*

$$\begin{aligned} SEQ(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>}) &= \{\sigma_{un}^{<k>} \mid \sigma_{un}^{<k>} \in TR_{un}^{*} \text{ tel que } M^{<k>}[\sigma_{un}^{<k>} \succ M' \text{ et } M'[t_{ob}^{<k>} \succ\} \\ E(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>}) &= \{x_{un}^{<k>} = \pi(\sigma_{un}^{<k>}) \mid \sigma_{un}^{<k>} \in SEQ(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>})\}. \end{aligned}$$

Exemple 9 *Considérons le RdPE de la Figure 3.1. Pour un marquage initial $M =$*

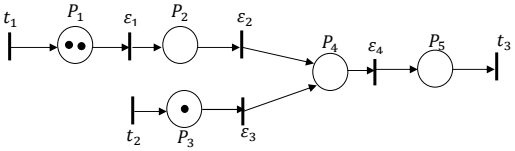


FIGURE 3.1 – Exemple d'un RdPE

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *l'ensemble des vecteurs d'explication* $E(M, t_3) = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\top}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\top}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\top}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\top}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\top}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\top}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\top}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\top}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{\top}\}$.
Un sous-ensemble possible des séquences non observables $SEQ(M, t_3)$ associées aux vecteurs d'explication de $E(M, t_3)$ est $\{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4,\ \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4,\ \varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4,\ \varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_2\varepsilon_4,\ \varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_4,$ $\varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4, \varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_4,\ \varepsilon_3\varepsilon_4,\ \varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_3\varepsilon_4\}$.

3.2.2 Polyèdre des vecteurs d'explication candidats

Nous considérons ci-dessous une seule itération de la procédure d'estimation. L'approche algébrique est basée sur l'équation fondamentale du marquage et les conditions de franchissement d'une transition dans un RdPE. La formulation algébrique d'un vecteur d'explication possible est faite en utilisant le raisonnement suivant : si on observe le franchissement d'une transition $t_{ob}^{<k>}$ pour un marquage initial $M^{<k>}$, alors il existe une séquence de franchissements non observable $\sigma_{un}^{<k>}$ et un marquage M' tel que $M^{<k>}[\sigma_{un}^{<k>} \succ M'$ et $M'[t_{ob}^{<k>} \succ$. Ainsi, M' est le marquage atteignable à partir du marquage $M^{<k>}$ en franchissant la séquence non observable $\sigma_{un}^{<k>}$, et ce marquage M' permet le franchissement de la transition observée $t_{ob}^{<k>}$.

Comme $M^{<k>}[\sigma_{un}^{<k>} \succ M'$, alors le marquage M' satisfait l'équation suivante :

$$M' = M^{<k>} + W_{un} \cdot x_{un}^{<k>} \tag{3.2}$$

avec W_{un} est la matrice d'incidence du sous-réseau non observable. En outre $M'[t_{ob}^{<k>} \succ$, ce qui nous permet d'écrire l'inégalité suivante :

$$M' \geq W_{ob}^{-}(., t_{ob}^{<k>}) \tag{3.3}$$

En remplaçant M' par son expression (3.2), nous obtenons :

$$-W_{un}.x_{un}^{<k>} \leq M^{<k>} - W_{ob}^{-}(., t_{ob}^{<k>}) \tag{3.4}$$

En plus, comme on doit avoir la contrainte de positivité $x_{un}^{<k>} \geq 0$, alors le vecteur $x_{un}^{<k>}$ doit vérifier l'inégalité matricielle suivante :

$$\mathbb{A}.x_{un}^{<k>} \leq b^{<k>} \tag{3.5}$$

avec $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -W_{un} \\ -I_{n\times n} \end{pmatrix}$ et $b^{<k>} = \begin{pmatrix} M^{<k>} - W_{ob}^{-}(., t_{ob}^{<k>}) \\ 0_{n\times 1} \end{pmatrix}$.

La matrice $\mathbb{A}$ est de dimension $m \times n$ avec $n = |TR_{un}|$ et $m = |P| + n$. Le nombre

de lignes m peut être réduit si nous supprimons les lignes nulles qui correspondent aux places non connectées à une transition non observable ou décrivant une boucle élémentaire. Contrairement au vecteur $b^{<k>}$, la matrice $\mathbb{A}$ ne dépend pas de l'itération $< k >$.

3.2.3 Calcul numérique de l'ensemble des vecteurs d'explication candidats

Pour la détermination des vecteurs d'explication candidats solutions du polyèdre (3.5), nous allons développer un algorithme de calcul numérique qui détermine toutes les solutions entières possibles du polyèdre (3.5). Cet algorithme consiste à déterminer les solutions d'un nouveau système algébrique produit hors ligne suite à l'application de l'algorithme d'élimination de Fourier-Motzkin sur le polyèdre (3.5) des paramètres $b_i^{<k>}$.

Nous considérons la forme générale $A.x \leq b$ d'un polyèdre paramètrique des paramètres b_i. Nous supposons que les variables de x_1 à x_{l-1} sont éliminées. Pour l'élimination de x_l, nous mettons le système sous la forme (2.15). Nous supposons que les matrices A^l_{neg} et A^l_{pos} et les vecteurs b^l_{neg} et b^l_{pos}, qui définissent l'intervalle de x_l dans (2.3), ont été déterminés en phase 1 (Algorithme 3).

L'algorithme numérique conçu dans ce chapitre est une extension de la phase 2 de l'algorithme de Fourier-Motzkin qui va effectuer le calcul numérique de toutes les solutions du polyèdre de la forme $A.x \leq b$ dans $\mathbb{Z}^n$ en déterminant successivement x_n jusqu'à x_1. Le vecteur $X_{l+1} = [x_{l+1}\ x_{l+2}...x_n]^\top$ utilisé dans le chapitre 2 est remplacé ci-dessous par la notation $(\chi_{l+1})_{.,j}$ qui est la $j^{\text{ième}}$ possibilité de la valeur du vecteur X_{l+1} sur les entiers. Alors, χ_{l+1} est la matrice dont les colonnes représentent toutes les possibilités des valeurs du vecteur X_{l+1}. Soit α_{l+1} le nombre de toutes les valeurs possibles de X_{l+1} sur les entiers. Alors, α_{l+1} est le nombre des colonnes de (χ_{l+1}). Pour la $j^{\text{ième}}$ possibilité du vecteur entier X_{l+1}, une possibilité des bornes inférieure et supérieure de x_l est donnée respectivement par $A^l_{neg}.(\chi_{l+1})_{.,j} - b^l_{neg}$ et $b^l_{pos} - A^l_{pos}.(\chi_{l+1})_{.,j}$. Soit B^l_{neg} (respectivement B^l_{pos}) une matrice dont le nombre de colonnes est égal à α_{l+1}, chaque colonne étant le vecteur b^l_{neg} (respectivement b^l_{pos}). Ainsi, $B^l_{neg} = (b^l_{neg}\ b^l_{neg}\ ....\ b^l_{neg})$ et $B^l_{pos} = (b^l_{pos}\ b^l_{pos}\ ....\ b^l_{pos})$.

On suppose que la matrice χ_{l+1} est connue, ayant été calculée à l'itération $l+1$ de la

phase 2 étendue. En générant toutes les valeurs possibles de X_{l+1}, on pourra établir les inégalités suivantes vérifiées par la variable x_l.

$$\begin{pmatrix} \underset{i=1..n_l^-}{max}(\Psi_{i,1}) \\ \vdots \\ \underset{i=1..n_l^-}{max}(\Psi_{i,\alpha_{l+1}}) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x_l \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \underset{i=1..n_l^+}{min}(\Upsilon_{i,1}) \\ \vdots \\ \underset{i=1..n_l^+}{min}(\Upsilon_{i,\alpha_{l+1}}) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

avec $\Psi = A^l_{neg} * \chi_{l+1} - B^l_{neg}$, et $\Upsilon = -A^l_{pos} * \chi_{l+1} + B^+_l$. De plus, chaque valeur de x_l est une valeur entière entre la partie entière supérieure de $\underset{i=1..n_l^-}{max}(\Psi_{i,j})$ et la partie entière inférieure de $\underset{i=1..n_l^+}{min}(\Upsilon_{i,j})$ notées respectivement $\lceil \underset{i=1..n_l^-}{max}(\Psi_{i,j}) \rceil$ et $\lfloor \underset{i=1..n_l^+}{min}(\Upsilon_{i,j}) \rfloor$. Pour la $j^{\text{ième}}$ possibilité de la valeur du vecteur X_{l+1} représentée par le vecteur $(\chi_{l+1})_{.,j}$, la matrice $(\chi_l)_{.,j}$ considère toutes les possibilités de x_l et est représentée par la matrice :

$$(\chi_l)_{.,j} = \begin{pmatrix} \Phi_j & \Phi_j + 1 & \dots & \Gamma_j - 1 & \Gamma_j \\ (\chi_{l+1})_{.,j} & (\chi_{l+1})_{.,j} & \dots & (\chi_{l+1})_{.,j} & (\chi_{l+1})_{.,j} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

où $\Phi_j = \lceil \underset{i=1..n_l^-}{max}(\Psi_{i,j}) \rceil$ et $\Gamma_j = \lfloor \underset{i=1..n_l^+}{min}(\Upsilon_{i,j}) \rfloor$. Par conséquent, dans la partie inférieure de la matrice, le vecteur $(\chi_{l+1})_{.,j}$ est dupliqué un nombre de fois égal au nombre d'entiers entre $\lceil \underset{i=1..n_l^-}{max}(\Psi_{i,j}) \rceil$ et $\lfloor \underset{i=1..n_l^+}{min}(\Upsilon_{i,j}) \rfloor$. Cette duplication peut être exprimée par le produit $(\chi_{l+1})_{.,j}.\overrightarrow{1}$ où $\overrightarrow{1}$ est un vecteur-ligne de "1" de dimension $\lfloor \underset{i=1..n_l^+}{min}(\Upsilon_{i,j}) \rfloor - \lceil \underset{i=1..n_l^-}{max}(\Psi_{i,j}) \rceil + 1$.

Pour résumer, chaque colonne de $(\chi_l)_{.,j}$ est un vecteur possible X_l pour la $j^{\text{ième}}$ possibilité du vecteur entier X_{l+1} et on obtient la matrice χ_l pour laquelle les colonnes décrivent toutes les solutions candidates pour x_l à x_n :

$$\chi_l = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \Phi_1 \dots \Gamma_1 & \Phi_2 \dots \Gamma_2 & \dots & \Phi_{\alpha_{l+1}} \dots \Gamma_{\alpha_{l+1}} \\ (\chi_{l+1})_{.,1}.\overrightarrow{1} & (\chi_{l+1})_{.,2}.\overrightarrow{1} & \dots & (\chi_{l+1})_{.,\alpha_{l+1}}.\overrightarrow{1} \end{array} \right) \tag{3.8}$$

où les barres verticales expriment la concaténation des matrices.

Finalement, la répétition de la procédure conduit à la détermination des matrices $\chi_n, \chi_{n-1}, ..., \chi_1$, et la dernière matrice obtenue χ_1 représente l'ensemble de toutes les solutions du système (3.5) dans $\mathbb{Z}^n$.

3.2.3.1 Implémentation algorithmique

L'algorithme suivant résume la procédure de calcul numérique de toutes les solutions entières positives du polyèdre de la forme $A.x \leq b$ dans $\mathbb{Z}^n$ à partir des inégalités produite par la phase 1 de Fourier-Motzkin (Algorithme 3).

Algorithme 4 Calcul numérique en ligne des solutions entières de $A.x \leq b$

Entrées: A_+, b_+, A_-, b_-, zp, zn %Données par Algorithme 3

Sorties: χ %La matrice de colonnes les solutions de $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid A.x \leq b\}$

$\chi_{n+1} = [\,]$

Pour l de n à 1 **faire**

$(A^l_{pos}, b^l_{pos}, A^l_{neg}, b^l_{neg})$=extract$(A_+, b_+, A_-, b_-, zp, zn)$

γ_l = vecteur colonne d'éléments les valeurs minimales de chaque colonne de la matrice $(-A^l_{pos} * \chi_{l+1} + \left[\begin{array}{c|c|c} b^l_{pos} & .... & b^l_{pos} \end{array}\right])$

β_l = vecteur colonne d'éléments les valeurs maximales de chaque colonne de la matrice $(A^l_{neg} * \chi_{l+1} - \left[\begin{array}{c|c|c} b^l_{neg} & .... & b^l_{neg} \end{array}\right])$

α_{l+1} = nombre de colonnes de χ_{l+1}

Pour j de 1 à α_{l+1} **faire**

Si $\{\nexists y \in \mathbb{Z} | (\beta_l)_{.,j} \leq y \leq (\gamma_l)_{.,j}\}$ **alors**

Nous supprimons la colonne numéro j de χ_{l+1}

${I_l}^j = [\,]$;

sinon

${I_l}^j = \left[\begin{array}{cc} (\beta_l)_{.,j} & (\gamma_l)_{.,j} \end{array}\right]$

Fin Si

$I = \left[\begin{array}{c} I \\ {I_l}^j \end{array}\right]$

Fin Pour

η = le nombre de lignes de I ;

${In_l}^j$ = l'ensemble des entiers positifs dans l'intervalle associé à ${I_l}^j$.

$\chi_l = \left(\begin{array}{c|c|c} {In_l}^1 & ... & {In_l}^\eta \\ \hline (\chi_{l+1})_{.,1} \cdots (\chi_{l+1})_{.,1} & \cdots & (\chi_{l+1})_{.,\eta} \cdots (\chi_{l+1})_{.,\eta} \end{array}\right)$.

Fin Pour

$\chi = \chi_1$.

Les matrices A^l_{pos} et b^l_{pos} pour déterminer la borne supérieure de x_l, et les matrices A^l_{neg} et b^l_{neg} pour déterminer la borne inférieure de x_l, sont récupérées à partir des matrices A_+, b_+, A_- et b_-, qui sont déterminées hors-ligne par l'**algorithm 3**. Pour chaque colonne

de χ_{l+1} illustrant une possibilité de valeurs de x_{l+1} à x_n, nous déterminons la borne supérieure $(\gamma_l)_{.,j}$ et la borne inférieure $(\beta_l)_{.,j}$ de x_l associé. Comme les deux valeurs $(\gamma_l)_{.,j}$ et $(\beta_l)_{.,j}$ peuvent être des valeurs non-admissibles, nous supprimons dans ce cas la colonne correspondante. À la fin, nous obtenons une matrice I à deux colonnes qui contient les deux bornes possibles de x_l pour toute colonne de χ_{l+1}, permettant de reconstruire χ_l. Cette procédure est répétée jusqu'à la détermination de χ_1. Les colonnes de la matrice $\chi = \chi_1$ sont l'ensemble des solutions de $A.x \leq b$ dans $\mathbb{Z}^n$.

Exemple 10 *(suite de l'exemple 9) : Nous supposons que* $b = (2\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0)^\top$ *alors :*

$$\chi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \chi_2 = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right),$$

$$\chi_1 = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

3.2.3.2 L'espace des solutions en présence de boucles

L'espace de solutions admissibles de (3.5) sur $\mathbb{R}$ est noté $S^{\mathbb{R}}_{un}(M^{<k>}, t^{<k>}_{ob}) = \{x^{<k>}_{un} \in \mathbb{R}^n | \mathbb{A}.x^{<k>}_{un} \leq b^{<k>}\}$ et nous notons $S^{\mathbb{Z}}_{un}(M^{<k>}, t^{<k>}_{ob}) = S^{\mathbb{R}}_{un}(M^{<k>}, t^{<k>}_{ob}) \cap \mathbb{Z}^n$ l'espace de solutions admissibles de (3.5) sur $\mathbb{Z}$. Le théorème suivant donne un résultat utile [SB02].

Théorème 5 *Pour un sous-réseau non observable acyclique d'un RdPE :*

(i) $(\forall x^{<k>}_{un} \in \mathbb{Z}^n$ *qui satisfait* $\mathbb{A}.x^{<k>}_{un} \leq b^{<k>})$ *;* $(\exists \sigma^{<k>}_{un} \in SEQ(M^{<k>}, t^{<k>}_{ob})$ *tel que* $x^{<k>}_{un} = \pi(\sigma^{<k>}_{un}))$

(ii) $\{x^{<k>}_{un} \in \mathbb{Z}^n \mid \mathbb{A}.x^{<k>}_{un} \leq b^{<k>}\} = E(M^{<k>}, t^{<k>}_{ob})$.

Alors, sous l'hypothèse de non cyclicité du sous-réseau non observable de RdPE, l'espace des solutions $S^{\mathbb{Z}}_{un}(M^{<k>}, t^{<k>}_{ob})$ coïncide avec l'ensemble des vecteurs d'explication $E(M^{<k>}, t^{<k>}_{ob})$ pour une itération $< k >$. Dans le cas général et si le sous-réseau non observable du RdPE est cyclique, cet espace des solutions inclut l'ensemble des vecteurs d'explication $E(M^{<k>}, t^{<k>}_{ob})$ pour une itération $< k >$. Cette inclusion peut être stricte car la solution de l'équation fondamentale du marquage d'un RdP n'est pas toujours

l'image d'une vraie séquence de franchissements [JBB08] [CGS04]. Par conséquent, nous avons :

$$S_{un}^{\mathbb{R}}(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>}) \supseteq S_{un}^{\mathbb{Z}}(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>}) \supseteq E(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>}) \tag{3.9}$$

Comme les solutions de $S_{un}^{\mathbb{R}}(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>})$ et $S_{un}^{\mathbb{Z}}(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>})$ sont des vecteurs d'explication possibles, alors elles sont appelées *solutions candidates* ou *vecteurs candidats respectivement dans* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{Z}$.

Exemple 11 *Soit le RdPE de la Figure (3.2) avec un sous-réseau non observable cyclique. L'ensemble des transitions non observables et observables sont respectivement* $TR_{un} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ *et* $TR_{ob} = \{t_1, t_2, t_3\}$.

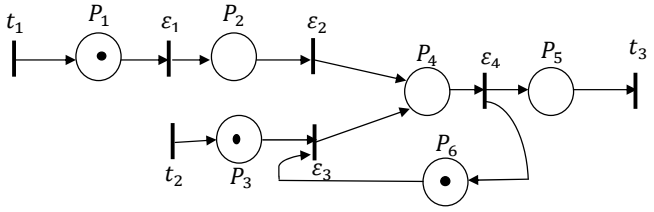


FIGURE 3.2 – RdPE avec un sous réseau non observable cyclique

Les matrices d'incidence des sous-réseaux non observable et observable sont respectivement définies comme suit :

$$W_{un} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \end{bmatrix} \text{ et } W_{ob} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs d'explication candidats vérifient le polyèdre $\mathbb{A}.x_{un}^{<k>} \leq b^{<k>}$ *avec le vecteur d'inconnus* $x_{un}^{<k>} = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^\top$. *La matrice* $\mathbb{A}$ *et le vecteur* $b^{<k>}$ *sont définis par* $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -W_{un} \\ -I_{4\times4} \end{bmatrix}$ *et* $b^{<k>} = (b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6\ 0\ 0\ 0\ 0)^\top$ *où* $b_i^{<k>} = (M)_i^{<k>} - W_{ob}{}^{-}(p_i, t_{ob}^{<k>})$ *avec* $i \in \{1...6\}$.

— ***L'application hors ligne des éliminations de Fourier-Motzkin :***

L'application hors ligne des éliminations de Fourier-Motzkin sur le système $\mathbb{A}.x_{un}^{<k>} \leq b^{<k>}$ *donne le système d'inégalités suivant :*

$$\begin{cases} max(-b_2, 0) \leq x_1 \leq b_1 \\ max(x_4 - x_3 - b_4, 0) \leq x_2 \leq b_1 + b_2 \\ max(x_4 - b_1 - b_2 - b_4, 0) \leq x_3 \leq min(b_3, x_4 + b_6) \\ max(-b_6, -b_5, 0) \leq x_4 \leq b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \end{cases}$$

— ***Le calcul numérique de toutes les solutions en ligne :***

On suppose qu'on observe un événement t_3 *à partir du marquage initial* $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Les vecteurs candidats dans* $\mathbb{Z}$ *des vecteurs d'explication* $E(M_0, t_3)$ *sont décrits par les colonnes de la matrice* χ_1 *et sont établis successivement comme suit :*

$\chi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\chi_3 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$, $\chi_2 = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$,

$$\chi_1 = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Les colonnes encadrées de la matrice ci-dessous $\chi_{un} = \chi_1$ *sont des vecteurs de compte qui ne correspondent pas à des séquences de franchissements, alors ils ne sont pas des vecteurs d'explication.*

$$\chi_{un} = \left(\begin{array}{|c|} \hline 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right) \square$$

Pour une transition observée $t_{ob}^{<k>}$, l'ensemble $E(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>})$ est défini pour un marquage donné $M^{<k>}$. L'ensemble des vecteurs d'explication noté $E^{<k>}$ à l'itération $< k >$ est l'union de ces ensembles et est obtenu en considérant l'ensemble des marquages initiaux

possibles $\mathcal{M}$ déterminés à l'itération $< k-1 >$, soit

$$E^{<k>} = \bigcup_{M^{<k>} \in \mathcal{M}^{<k>}} E(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>}) \tag{3.10}$$

Remarque. 3. Nous avons $\sum_{M^{<k>} \in \mathcal{M}^{<k>}} |E(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>})| \geq |E^{<k>}|$ car deux marquages différents $M^{<k>} \in \mathcal{M}^{<k>}$ peuvent produire deux vecteurs identiques qui correspondent à un seul élément dans $E^{<k>}$.

3.2.4 L'ensemble des marquages cohérents

Soit $\{\sigma_{un}^{<1>}, \sigma_{un}^{<2>}, ..., \sigma_{un}^{<h>}\}$ un ensemble de séquences non observables associées à des vecteurs d'explication possibles $\{x_{un}^{<1>}, x_{un}^{<2>}, ..., x_{un}^{<h>}\}$ pour successivement les transitions observées $\{t_{ob}^{<1>}, t_{ob}^{<2>}, ..., t_{ob}^{<h>}\}$. Ainsi, nous pouvons écrire : $M^{<1>}[\sigma_{un}^{<1>} t_{ob}^{<1>} \succ M^{<2>}[\sigma_{un}^{<2>} t_{ob}^{<2>} \succ M^{<3>} ... M^{<h>}[\sigma_{un}^{<h>} t_{ob}^{<h>} \succ M^{<h+1>}$. Par conséquent, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} M^{<2>} = M^{<1>} + W_{un}.\ x_{un}^{<1>} + W_{ob}(., t_{ob}^{<1>}) \\ M^{<3>} = M^{<2>} + W_{un}.\ x_{un}^{<2>} + W_{ob}(., t_{ob}^{<2>}) \\ . \\ . \\ M^{<h+1>} = M^{<h>} + W_{un}.\ x_{un}^{<h>} + W_{ob}(., t_{ob}^{<h>}) \end{cases} \tag{3.11}$$

Par conséquent, en additionnant les termes $M^{<k>}$ du système (3.11) et comme $M^{<1>} = M_0$ et $M^{<h+1>} = M$, nous obtenons l'expression d'un marquage actuel possible présenté comme suit :

$$M = M_0 + W_{un}.\ \sum_{k=1}^{h} x_{un}^{<k>} + W_{ob}.\ \sum_{k=1}^{h} x_{ob}^{<k>} \tag{3.12}$$

avec $x_{ob}^{<k>} = \pi(t_{ob}^{<k>})$. L'ensemble des marquages actuels pour une observation w à partir du marquage initial connu M_0, noté $\mathcal{M}(M_0, w)$, représente les marquages actuels possibles en utilisant toutes les combinaisons possibles des vecteurs d'explication $E^{<k>}$,

où $k \in [1..h]$.

3.3 Estimation d'un sous ensemble réduit de l'espace d'état

Parmi les séquences de franchissements non observables $SEQ(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>})$ qui valident le franchissement de la transition observée $t_{ob}^{<k>}$ à partir d'un marquage donné $M^{<k>}$, nous voulons sélectionner ceux dont le vecteur de franchissement est minimal, appelés les vecteurs d'explication minimaux et qui sont définis formellement comme suit :

$$\begin{aligned} E_{min}(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>}) \;=\; & \{\pi(\sigma_{un}^{<k>}) \in E(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>}) | \forall \xi \subset E(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>}), \nexists v \in \xi \\ & \textit{tel que } v \leq \pi(\sigma_{un}^{<k>}) \textit{ et } v \neq \pi(\sigma_{un}^{<k>})\} \end{aligned} \tag{3.13}$$

L'ensemble des vecteurs d'explication minimaux à l'itération $< k >$ noté $E_{min}^{<k>}$ est obtenu en considérant l'ensemble de tous les marquages initiaux possibles $M^{<k>}$ déterminés à l'itération $< k-1 >$.

Exemple 12 *Considérons le RdPE de Figure 3.1. L'ensemble des vecteurs d'explication* $E(M, t_3)$ *pour* $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est :* $E(M, t_3) = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^\top\}$. *L'ensemble des vecteurs d'explication minimaux est* $E_{min}(M, t_3) = \{(1\,1\,0\,1)^\top, (0\,0\,1\,1)^\top\}$.

3.3.1 L'ensemble des vecteurs d'explication candidats minimaux pour un sous-réseau non observable de classe "UBCF"

La détermination de l'ensemble des vecteurs d'explication minimaux pour un RdPE peut être un problème difficile puisque les vecteurs peuvent ne pas être uniques. Ceci dépend de la structure du sous-réseau non observable. L'ensemble des vecteurs d'explication minimaux est un singleton pour une classe particulière de RdPEs pour laquelle le sous-réseau non observable est appelé Unitary Backward Conflict Free (UBCF). Dans ce cas,

la détermination de ce vecteur peut être faite dans un temps polynomial [Nar01]. Soient les définitions suivantes :

Définition 3.2 *Un sous-réseau non observable d'un RdPE est appelé "Backward Conflict Free" (BCF) si aucun couple de deux transitions non observables distinctes n'a de place de sortie commune.*

Si le sous-réseau non observable est BCF, alors le polyèdre associé $\mathbb{A}.x_{un}^{<k>} \leq b^{<k>}$ est inf-monotone. En effet, si le sous-réseau non observable est BCF, alors chaque place a au plus une seule transition non observable d'entrée. Ainsi, dans la matrice d'incidence associée W_{un}, chaque ligne a au plus un seul coefficient positif. Par conséquent, chaque ligne de $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -W_{un} \\ -I_{n\times n} \end{pmatrix}$ a au plus un seul coefficient négatif et le polyèdre associé $\mathbb{A}.x_{un}^{<k>} \leq b^{<k>}$ est inf-monotone.

Définition 3.3 *Un sous-réseau non observable est "Unitary Backward Conflict Free" (UBCF) si le sous-réseau est BCF et tous les poids des arcs d'entrée du sous-réseau sont unitaires.*

Si le sous-réseau non observable est UBCF, alors le polyèdre associé $\mathbb{A}.x_{un}^{<k>} \leq b^{<k>}$ est 1-inf-monotone. Ainsi, si un vecteur d'explication existe, il est unique. Par conséquent, le vecteur minimum de $x_{un}^{<k>}$ est aussi le vecteur qui a la somme minimum $c^{\top}.x_{un}^{<k>}$ avec c est le vecteur unitaire. Par conséquent, le vecteur minimum peut être obtenu en résolvant le problème d'optimisation défini comme suit :

$$\begin{cases} \min(c^{\top}.x_{un}^{<k>}) \text{ tel} \quad \text{que} \\ \mathbb{A}.x_{un}^{<k>} \leq b^{<k>} \\ x_{un}^{<k>} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.14}$$

Comme il est défini dans $\mathbb{R}$, il peut être résolu par l'un des algorithmes classiques de programmation linéaire [Sch98] [YH11].

Exemple 13 *Soit le RdPE de Figure 3.3*

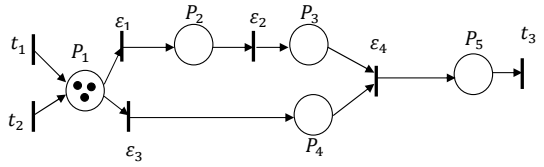


FIGURE 3.3 – Sous-réseau non observable BCF

La matrice d'incidence du sous-réseau non observable BCF et le vecteur des inconnus sont définis comme suit :

$$W_{un} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} ; x_{un} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Nous supposons le franchissement de la transition observée t_3 à partir du marquage initial $M = (3\ 0\ 0\ 0\ 0)^\top$.

Pour déterminer le vecteur d'explication minimal $E_{min}(M_0, t_3)$, nous résolvons le problème linéaire (3.14) associé au RdPE de Figure 3.3, puisque le sous-réseau non observable est BCF. En utilisant l'algorithme du simplex, nous obtenons $x_{un} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$ avec $(c^\top.x_{un}) = 4$. Le vecteur trouvé x_{un} est associé à la séquence possible de tir $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4$ et ainsi $E_{min}(M_0, t_3) = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top\}$.

3.3.2 Généralisation pour un sous-réseau non observable non UBCF

Dans le cas où le sous-réseau non observable est non UBCF, le vecteur d'explication minimal peut ne pas être unique. Alors, nous pouvons distinguer deux sous-ensembles de vecteurs d'explication minimaux : l'ensemble des vecteurs d'explication minimaux qui ont la plus petite somme d'éléments $c^\top.x_{un}^{<k>}$ et ceux dont la valeur de la somme est supérieure. En effet, un vecteur minimal n'est pas nécessairement un vecteur qui admet la somme la plus faible.

Exemple 14 *Soit le RdPE de Figure 3.4 avec un marquage initial $M_0 = (2\,0\,1\,0\,0\,3)^\top$ et une transition observée t_3.*

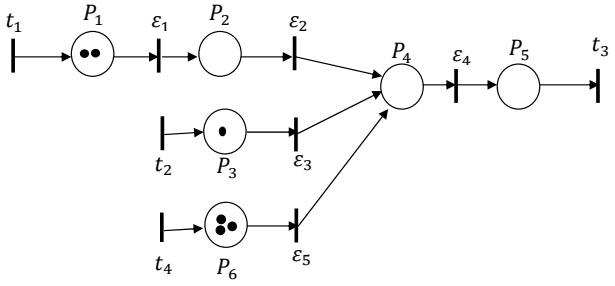


FIGURE 3.4 – Exemple d'un RdPE avec un sous-réseau non observable non BCF

Les vecteurs $(0\,0\,1\,1\,0)^\top$ *et* $(0\,0\,1\,1)^\top$ *associés respectivement aux séquences de tirs* $\varepsilon_3\varepsilon_4$ *et* $\varepsilon_5\varepsilon_4$ *sont les vecteurs d'explication minimaux qui ont la plus faible somme* $c^\top.x_{un}^{<1>} = 2$. *Cependant, le vecteur* $(1\,1\,0\,1\,0)^\top$ *est également un vecteur d'explication minimal associé à la séquence de tirs* $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4$ *de somme* $c^\top.x_{un}^{<1>} = 3$.

Alors pour déterminer toutes les solutions minimales, nous procédons de la manière suivante :

1. Nous déterminons les vecteurs d'explication minimaux candidats associés à $min(c^\top.x_{un}^{<k>})$. Soit μ_{min} cette valeur.
2. À partir de la valeur μ_{min} trouvée, nous déterminons les solutions minimales candidates qui ont une somme d'éléments $c^\top.x_{un}^{<k>} > \mu_{min}$ en incrémentant à chaque fois de 1 la valeur de $c^\top.x_{un}^{<k>}$ ($c^\top.x_{un}^{<k>} = \{\mu_{min}+1, \mu_{min}+2, ..., \mu_{min}+s\}$) et en calculant pour chaque incrémentation les vecteurs minimaux candidats associés à des sommes d'éléments $c^\top.x_{un}^{<k>}$.
3. Nous testons une condition d'arrêt pour l'incrémentation de $c^\top.x_{un}^{<k>}$ (la valeur de s).

L'ensemble des vecteurs minimaux candidats sont alors la réunion de tous les vecteurs minimaux candidats trouvés après chaque incrémentation de $c^\top.x_{un}^{<k>}$. Dans la suite, nous allons détailler cette procédure.

3.3.2.1 Les vecteurs d'explication candidats minimaux de *rang* 0

Nous proposons la définition suivante :

Définition 3.4 *L'ensemble des vecteurs d'explication candidats minimaux de rang* 0 *est l'ensemble des vecteurs qui ont le minimum de sommes* $c^{\top}.x_{un}^{<k>}$ *où* c *est un vecteur unitaire.*

Par conséquent, l'ensemble de tous les vecteurs d'explication candidats minimaux de *rang* 0 satisfont le problème PLNE suivant :

$$\begin{cases} \min(c^{\top}.x_{un}^{<k>}) \text{ tel que} \\ \mathbb{A}.x_{un}^{<k>} \leq b^{<k>} \\ x_{un}^{<k>} \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \tag{3.15}$$

La résolution du problème PLNE (3.15) par un algorithme classique de résolution des problèmes PLNE (par exemple, l'algorithme de séparation et d'évaluation) permet de déterminer un seul vecteur entier possible qui vérifie (3.15) avec la plus petite valeur de la fonction coût, notée μ_{min}. Pour déterminer tous les vecteurs minimaux de coût μ_{min}, notés $\chi_{min}(\mu_{min})$, nous écrivons le problème PLNE (3.15) sous la forme augmentée suivante :

$$\begin{cases} \min \mu \text{ tel que} \\ \mathbb{A}_{aug}.\mathbb{X}_{un}^{<k>} \leq b_{aug}^{<k>} \\ x \in \mathbb{Z}^n, \mu \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \tag{3.16}$$

avec $\mathbb{A}_{aug} = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & 0_{m\times 1} \\ c^{\top} & -1 \end{bmatrix}$, le vecteur d'inconnues $\mathbb{X}_{un}^{<k>} = \begin{bmatrix} x_{un}^{<k>} \\ \mu \end{bmatrix}$, et le vecteur $b_{aug}^{<k>} = \begin{bmatrix} b^{<k>} \\ 0 \end{bmatrix}$.

La détermination de toutes les solutions du polyèdre (3.16) est d'abord effectuée par l'application de l'algorithme d'élimination de Fourier-Motzkin sur le polyèdre (3.16) de paramètres $b_i^{<k>}$ et μ (algorithme 3), qui donne la valeur de μ_{min} qui est ensuite suivie par l'algorithme numérique de résolution pour $\mu = \mu_{min}$ et le vecteur de données $b^{<k>}$ connu (algorithme 4). Ces solutions constituent l'ensemble des vecteurs d'explication candidats minimaux de *rang* 0 noté $\chi_{min}(\mu_{min})$.

Exemple 15 *Soit le RdPE de la Figure 3.4. La matrice d'incidence du sous-réseau non observable et le vecteur d'inconnues sont définis comme suit.*

$$W_{un} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ; x_{un}^{<k>} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Pour déterminer les vecteurs d'explication candidats minimaux $x_{un}^{<k>}$ de rang 0, nous mettons le système sous la forme matricielle (3.16). L'application hors ligne de l'algorithme d'élimination de Fourier-Motzkin donne le système d'inégalités suivant :

$$\begin{cases} max(0, x_2 - b_2) \leq x_1 \leq min(b_1, \mu - x_2 - x_3 - x_4 - x_5) \\ max(0, x_4 - b_3) \leq x_2 \leq min(b_1 + b_2, \frac{1}{2}.(-x_3 - x_4 - x_5 + \mu + b_2)) \\ max(0, x_4 - x_5 - b_1 - b_2 - b_4, 3.x_4 - x_5 - \mu - b_2 - 2.b_4) \leq x_3 \leq b_3 \\ max(0, -b_5) \leq x_4 \leq min(x_5 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4, \frac{1}{3}.(x_5 + \mu + b_2 + b_3 + 2.b_4)) \\ max(0, -b_1 - b_2 - b_3 - b_4 - b_5, -\mu - b_2 - b_3 - 2.b_4 - 3.b_5) \leq x_5 \leq b_6 \\ \mu \geq max(0, -(b_2 + b_3 + 2.b_4 + 3.b_5 + b_6)) \end{cases} \quad (3.17)$$

Pour l'évolution en ligne du système, nous supposons le tir de la transition observée t_3 à partir du marquage initial $M = (2\ 0\ 1\ 0\ 0\ 3)^\top$.

–Détermination de μ_{min} : La résolution du problème PLNE (3.15) associé à ce système par un algorithme classique de résolution donne $\mu_{min} = 2$.

–La détermination de toutes les solutions numériques du système (3.17) pour $\mu_{min} = 2$ donne les vecteurs d'explication candidats minimaux de rang 0 défini par l'ensemble $\chi_{min}(\mu_{min}) = \{(0\ 0\ 1\ 1\ 0)^\top, (0\ 0\ 0\ 1\ 1)^\top\}$.

3.3.2.2 Autres vecteurs d'explication candidats minimaux x_{un} de "*rang* supérieur à 0"

Pour déterminer les vecteurs d'explication candidats minimaux qui n'ont pas la somme minimale d'éléments, on peut modifier la valeur de μ à partir de sa valeur minimale μ_{min} en

incrémentant à chaque fois de 1 sa valeur, et nous résolvons le système $\mathbb{A}_{aug}.\mathbb{X}_{un}^{<k>} \leq b_{aug}^{<k>}$ pour la nouvelle valeur de μ.

Par conséquent, pour la $j^{\text{ième}}$ incrémentation de la valeur de μ à partir de μ_{min}, la résolution produit tous les vecteurs $\{x_{un}^{<k>} | c^{\top}.x_{un}^{<k>} \leq \mu_{min} + j\}$ qui satisfont $\mathbb{A}_{aug}.\mathbb{X}_{un}^{<k>} \leq b_{aug}^{<k>}$. Ainsi, comme $\{x_{un}^{<k>} | c^{\top}.x_{un}^{<k>} \leq \mu_{min} + j - 1\} \subset \{x_{un}^{<k>} | c^{\top}.x_{un}^{<k>} \leq \mu_{min} + j\}$, nous pouvons conclure que les vecteurs $\{x_{un}^{<k>} | c^{\top}.x_{un}^{<k>} \leq \mu_{min} + j - 1\}$ satisfaisant $\mathbb{A}_{aug}.\mathbb{X}_{un}^{<k>} \leq b_{aug}^{<k>}$ sont générés à nouveau. Par conséquent, une autre technique est nécessaire : nous reformulons notre problème afin que pour la $j^{\text{ième}}$ incrémentation de μ à partir de μ_{min}, nous produisons seulement les vecteurs d'explication candidats minimaux $x_{un}^{<k>}$ de somme d'éléments $c^{\top}.x_{un}^{<k>} = \mu_{min} + j$.

L'approche est la suivante : nous prenons $c^{\top}.x_{un}^{<k>} = \alpha$ avec $\alpha = \mu_{min} + j$ alors $\alpha \leq c^{\top}.x_{un}^{<k>} \leq \alpha$ et le problème est reformulé comme suit :

$$\begin{pmatrix} A \\ c^{\top} \\ -c^{\top} \end{pmatrix} .x_{un}^{<k>} \leq \begin{pmatrix} b^{<k>} \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Nous rappelons que c est un vecteur unitaire. Comme nous ne cherchons que les vecteurs d'explication candidats minimaux, nous devons ajouter la procédure suivante.

Soit $\chi(\alpha)$ l'ensemble des solutions du système (3.18), qui est l'ensemble des vecteurs d'explication candidats de la somme d'éléments égale à α. Nous notons $\chi_{min}(\alpha)$ les vecteurs minimaux de la somme d'éléments égale à α. Par conséquent, nous avons :

$$\chi_{min}(\alpha) \subseteq \chi(\alpha) \tag{3.19}$$

Donc, parmi les solutions du système (3.18), nous pouvons trouver des vecteurs non minimaux. Pour les enlever, on compare les vecteurs de l'ensemble $\chi(\alpha)$ avec les vecteurs de l'ensemble des vecteurs d'explication candidats minimaux ayant une somme d'éléments inférieure ou égale à $\alpha - 1$ noté $\chi_{min}(\mu \leq \alpha - 1)$. Alors par construction, nous obtenons :

$$\chi_{min}(\mu \leq \alpha - 1) = \chi_{min}(\mu_{min}) \bigcup \chi_{min}(\mu_{min} + 1) ... \bigcup \chi_{min}(\alpha - 1) \tag{3.20}$$

Nous définissons alors l'ensemble des vecteurs R_α qui est l'ensemble des vecteurs non minimaux de $\chi(\alpha)$ et qui est défini comme suit :

$$R_\alpha = \{x \in \chi(\alpha) \; tel \; que \; \exists x' \in \chi_{min}(\mu \leq \alpha - 1); x - x' \geq 0 \; et \; x \neq x'\} \tag{3.21}$$

L'ensemble des vecteurs minimaux ayant une somme d'éléments égale à α est donc :

$$\chi_{min}(\alpha) = \chi(\alpha) \backslash R_\alpha \tag{3.22}$$

Ainsi, l'ensemble des vecteurs d'explication candidats minimaux trouvés jusqu'à la $j^{\text{ième}}$ incrémentation ($j = \alpha - \mu_{min}$) est égal à :

$$\chi_{min}(\mu \leq \alpha) = \chi_{min}(\mu \leq \alpha - 1) \bigcup \chi_{min}(\alpha) \tag{3.23}$$

Exemple 16 *Suite de l'exemple (15). Pour déterminer les vecteurs d'explication candidats minimaux de rang supérieur à* 0*, nous mettons le système sous la forme matricielle (3.18). L'application hors ligne de l'algorithme d'élimination de Fourier-Motzkin au système (3.18) associé au RdPE de Figure 3.4 donne le système d'inégalités suivant :*

$$\begin{cases}
\bullet x_1 \in [max(0, x_2 - b_2, \alpha - x_2 - x_3 - x_4 - x_5) \\
\qquad min(b_1, \alpha - x_2 - x_3 - x_4 - x_5)] \\
\bullet x_2 \in [max(0, -x_3 - x_4 - x_5 + \alpha - b_1, -x_3 + x_4 - x_5 - b_4) \\
\qquad min(b_1 + b_2, \frac{1}{2}.(-x_3 - x_4 - x_5 + \alpha + b_2))] \\
\bullet x_3 \in [max(0, -x_4 - x_5 - 2.b_1 - b_2 + \alpha, x_4 - x_5 - b_1 - b_2 - b_4, 3.x_4 - x_5 - b_2 - 2.b_4 - \alpha) \\
\qquad b_3] \\
\bullet x_4 \in [max(0, -b_5, -x_5 - 2.b_1 - b_2 - b_3 + \alpha) \\
\qquad min(x_5 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4, \frac{1}{3}.(x_5 + b_2 + b_3 + 2.b_4 + \alpha))] \\
\bullet x_5 \in [max(0, -b_1 - b_2 - b_3 - b_4 - b_5, -b_2 - b_3 - 2.b_4 - 3.b_5 - \alpha, -\frac{3}{2}.b_1 - b_2 - b_3 - \frac{1}{2}.b_4 + \frac{1}{2}.\alpha) \\
\qquad b_6]
\end{cases} \tag{3.24}$$

Pour la transition observée t_3 à partir du marquage initial $M = (2\ 0\ 1\ 0\ 0\ 3)^\top$, le

système (3.24) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} max(0, x_2, \alpha - x_2 - x_3 - x_4 - x_5) \leq x_1 \leq min(2, \alpha - x_2 - x_3 - x_4 - x_5) \\ max(0, -x_3 - x_4 - x_5 - 2 + \alpha, -x_3 + x_4 - x_5) \leq x_2 \leq min(2, \frac{1}{2}.(-x_3 - x_4 - x_5 + \alpha)) \\ max(0, -x_4 - x_5 - 4 + \alpha, x_4 - x_5 - 2, 3.x_4 - x_5 - \alpha) \leq x_3 \leq 1 \\ max(1, -x_5 - 3 + \alpha) \leq x_4 \leq min(x_5 + 3, \frac{1}{3}.(x_5 + 1 + \alpha)) \\ max(0, 2 - \alpha, -4 + \frac{1}{2}.\alpha) \leq x_5 \leq 3 \end{cases}$$

– *Selon l'exemple précédent, pour le coût minimal* $\mu_{min} = 2$*, nous avons* $\chi_{min}(\mu_{min}) = \{s_1 = (0\ 0\ 1\ 1\ 0)^\top, s_2 = (0\ 0\ 0\ 1\ 1)^\top\}$.

– *Pour* $\mu = 3$ *;* $\chi(\mu = 3) = \{v_1 = (1\ 1\ 0\ 1\ 0)^\top, v_2 = (1\ 0\ 1\ 1\ 0)^\top, v_3 = (1\ 0\ 0\ 1\ 1)^\top, v_4 = (0\ 0\ 1\ 1\ 1)^\top, v_5 = (0\ 0\ 0\ 1\ 2)^\top\}$*. On a* $v_2 - s_1 > 0$ *,* $v_4 - s_1 > 0$ *,* $v_3 - s_2 > 0$ *et* $v_5 - s_2 > 0$ *alors* $R_3 = \{v_2, v_4, v_3, v_5\}$*. Par conséquent, nous obtenons* $\chi_{min}(\mu = 3) = \chi(\mu = 3) \backslash R_3 = \{(1\ 1\ 0\ 1\ 0)^\top\}$.

Ainsi, $\chi_{min}(\mu \leq 3) = \{s_1 = (0\ 0\ 1\ 1\ 0)^\top, s_2 = (0\ 0\ 0\ 1\ 1)^\top, s_3 = (1\ 1\ 0\ 1\ 0)^\top\}$.

Pour la détermination de tout l'ensemble des vecteurs d'explication minimaux candidats, la fixation d'une condition d'arrêt de l'incrémentation de μ à partir de μ_{min} est nécessaire pour que l'observateur converge dans un temps fini.

3.3.2.3 Condition d'arrêt

Si le sous-réseau non observable est Structurellement Borné Bloqué (SBB) (deadlock structurally bounded), alors nous pouvons déterminer une condition d'arrêt d'incrémentation de μ à partir de μ_{min} en déterminant une limite supérieure de la fonction coût $c^\top.x_{un}^{<k>}$. Ce réseau, qui est une sous-classe d'un RdP structurellement borné, est défini formellement comme suit :

Définition 3.5 *Un RdP est SBB si et seulement s'il existe un vecteur entier strictement positif* $\kappa > 0$ *tel que* $\kappa^\top.W < 0$ *avec* W *est la matrice d'incidence du RdP [Mur89].*

La proposition suivante permet de déterminer une limite supérieure de la fonction coût qui est la somme de tir des transitions non observables.

Proposition 6 *Nous considérons un RdPE avec un marquage initial connu $M^{<k>}$ et un sous-réseau non observable SBB. Pour une transition observée $t_{ob}^{<k>}$ à partir d'un marquage initial $M^{<k>}$, la somme de tir des transitions non observables est définie comme suit :*

$$c^{\top}.x_{un}^{<k>} \leq \kappa^{\top}.(M^{<k>} + W_{ob}(.,t_{ob}^{<k>})) \tag{3.25}$$

avec c est un vecteur unitaire et κ est un vecteur entier strictement positif tel que $\kappa^{\top}.W_{un} < 0$.

Preuve

Le sous réseau non observable du RdPE est SSB. Alors, il existe $\kappa > 0$ tel que $\kappa^{\top}.W_{un} < 0$.

Nous avons $M^{<k+1>} = M^{<k>} + W_{un}.x_{un}^{<k>} + W_{ob}(.,t_{ob}^{<k>})$ alors $\kappa^{\top}.M^{<k+1>} = \kappa^{\top}.M^{<k>} + \kappa^{\top}.W_{un}.x_{un}^{<k>} + \kappa^{\top}.W_{ob}(.,t_{ob}^{<k>})$. De plus, nous avons $\kappa^{\top} > 0$ et $M^{<k+1>} \geq 0$, alors $\kappa^{\top}.M^{<k+1>} \geq 0$. Par conséquent, nous avons $\kappa^{\top}.M^{<k>} + \kappa^{\top}.W_{ob}(.,t_{ob}^{<k>}) \geq -\kappa^{\top}.W_{un}.x_{un}^{<k>}$. En outre, nous avons $\kappa^{\top}.W_{un} < 0$ ainsi $-\kappa^{\top}.W_{un} \geq (1 \dots 1)$ alors $-\kappa^{\top}.W_{un}.x_{un}^{<k>} \geq (1 \dots 1).x_{un}^{<k>}$. Par conséquent, $c^{\top}.x_{un}^{<k>} \leq \kappa^{\top}.M^{<k>} + \kappa^{\top}.W_{ob}(.,t_{ob}^{<k>})$.

La relation précédente (3.25) doit être satisfaite pour tout vecteur κ strictement positif qui satisfait $\kappa^{\top}.W_{un} < 0$. Alors, pour réduire le nombre d'itérations afin de déterminer tous les vecteurs d'explication minimaux, nous choisissons κ tel que $\kappa^{\top}.(M^{<k>} + W_{ob}(.,t_{ob}^{<k>}))$ soit le plus petit que possible.

Alors, le vecteur κ doit vérifier le système suivant :

$$\begin{cases} \min \kappa^{\top}.(M^{<k>} + W_{ob}(.,t_{ob}^{<k>})) \\ \kappa^{\top}.W_{un} < 0 \\ \kappa > 0 \end{cases} \tag{3.26}$$

Le vecteur κ peut être déterminé par la résolution de (3.26) par un algorithme classique de résolution des problèmes PLNE.

Maintenant si le RdPE est q-borné et le sous réseau non observable est acyclique, nous pouvons déterminer une autre limite supérieure de sommes de tirs des transitions non observables qui activent $t_{ob}^{<k>}$ à $M^{<k>}$.

Propriété 3 *Étant donné un RdPE q-borné avec un sous-réseau non observable acyclique, la longueur maximale des séquences de tirs non observables à partir de tout* $M \in A(R, M_0)$ *est bornée supérieurement par* $q.|TR_{un}|$ *[RH06].*

Ainsi, pour un RdPE q-borné avec un sous-réseau non observable SBB acyclique, la somme de tir des transitions non observables est définie comme suit :

$$c^{\top}.x_{un}^{<k>} \leq min(\kappa^{\top}.(M^{<k>} + W_{ob}(., t_{ob}^{<k>}))\ ,\ q.|TR_{un}|) \tag{3.27}$$

Exemple 17 *Nous revenons à l'exemple 16.*

- *La résolution du système (3.26) donne* $\kappa = (2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)^{\top}$ *pour* $\min(\kappa^{\top}.(M_0 + W_{ob}(., t_3))) = 4$.
- *Le RdPE de Figure 3.4 est q-borné. Alors,* $q.|TR_{un}| = 30$.

D'après les deux points précédents, $c^{\top}.x_{un}^{<1>} \leq 4$.

3.3.3 Discussion

L'algorithme décrit ci-dessous est une récapitulation de la procédure de calcul numérique des vecteurs minimaux vérifiant le polyèdre en nombre entier $A.x \leq b$.

Algorithme 5 Calcul numérique en ligne des solutions minimales entières de $A.x \leq b$

Entrées: $A.x \leq b$

Sorties: χ_{min} %La matrice de colonnes les solutions de $\{min(x) \mid A.x \leq b\ ,\ x \in \mathbb{Z}^n\}$

Calcul de valeur de $\mu_{min} = \{min(\sum_i x_i) \mid A.x \leq b\ ,\ x \in \mathbb{Z}^n\}$

$\mu = \mu_{min}$;

$\chi_{min} = \emptyset$;

Répéter

Calcul de $\chi_{min}(\mu)$;

$\chi_{min} = \chi_{min} \bigcup \chi_{min}(\mu)$;

$\mu = \mu + 1$;

Jusqu'à condition d'arrêt vérifiée

Retourner χ_{min}

L'algorithme commence par une initialisation de la valeur de μ à μ_{min}. Ensuite, on calcule l'ensemble $\chi_{min}(\mu)$ qui est la matrice de colonnes les solutions minimales de $A.x \leq b$ de somme d'éléments μ. Puis, on incrémente de 1 la valeur de μ et on recommence l'opération jusqu'à atteindre la condition d'arrêt pour l'incrémentation de μ.

Dans le but de faire une étude comparative avec l'approche tabulaire de calcul des vecteurs d'explication minimaux, qui est appliquée aux RdPEs avec des sous-réseaux non observables acycliques [CGS+13] [RWSW17], nous considérons le RdPE de Figure (3.5) où on fait changer à chaque fois la valeur de λ qui est le poids de l'arc reliant la place p_5 à la transition t_3.

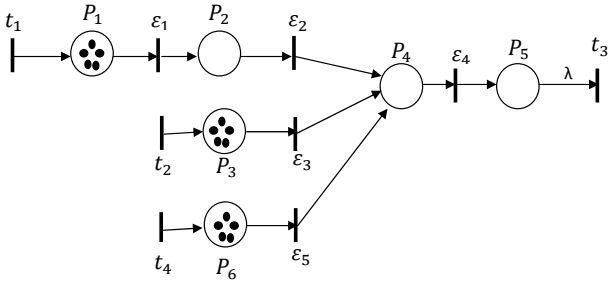


FIGURE 3.5 – Exemple d'un RdPE avec un sous-réseau non observable acyclique

Le sous-réseau non observable de RdPE de Figure (3.5) est acyclique, alors les vecteurs

minimaux calculés associés au polyèdre (3.5) sont des vecteurs d'explication minimaux. Le tableau comparatif (TABLE 3.1) visualise le temps de calcul des vecteurs d'explication minimaux déterminés par notre approche et celui par l'approche tabulaire pour chaque valeur donnée de λ. Nous constatons que notre algorithme est plus rapide que celui de l'algorithme tabulaire, surtout pour les valeurs élevées de λ. En effet, pour l'algorithme tabulaire, le nombre de doublons fabriqués est énorme et la procédure qui sert à les enlever augmente le temps d'exécution. Par contre, pour notre algorithme incrémentale, seulement une élimination de certaines solutions non minimales est nécessaire. Mais, il reste aussi nécessaire de mieux amélioré cet algorithme proposé. Nous avons aussi visualisé les résultats de (Tab. 3.1) sous forme de courbes (Figure 3.6).

TABLE 3.1 – Tableau comparatif avec l'approche tabulaire

	Temps d'exécution de l'approche tabulaire (en seconde)	Temps d'execution de notre approche (en seconde)	Nombre des vecteurs d'explication minimaux
$\lambda = 1$	0.04	15.35	3
$\lambda = 2$	0.07	23.43	6
$\lambda = 3$	0.13	35.74	10
$\lambda = 4$	0.78	57.74	15
$\lambda = 5$	6.33	95.89	21
$\lambda = 6$	45.17	88.06	25
$\lambda = 7$	391.20	71.64	27
$\lambda = 8$	5108.10	50.586	27

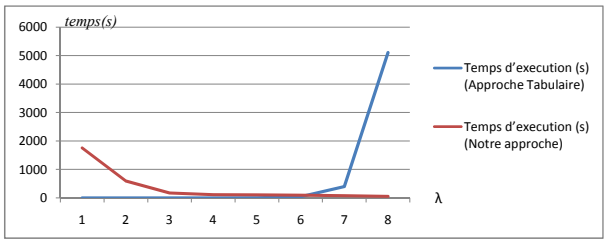


FIGURE 3.6 – Temps d'exécution des algorithmes en fonction du poids de pondération λ

3.3.4 L'ensemble des marquages de base

L'ensemble des marquages de base d'un mot observé w à partir d'un marquage initial M_0, noté $\mathcal{M}_b(M_0, w)$, représente l'ensemble des marquages actuels en tirant un nombre minimal de transitions non observables pour activer w à partir de M_0. Ainsi, $\mathcal{M}_b(M_0, w) \subseteq \mathcal{M}(M_0, w)$.

La procédure générale de détermination de l'ensemble des marquages de base est similaire à celle qui a été introduite pour l'estimation de l'ensemble des marquages actuels sur un horizon élémentaire glissant, sauf que les vecteurs à estimer sont des vecteurs d'explication minimales et les marquages de départ sont des marquages de base (Figure 3.7).

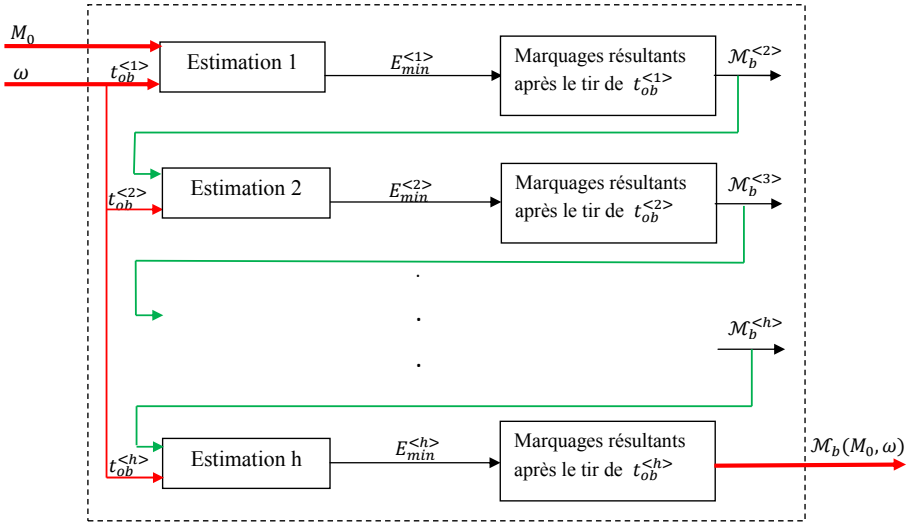


FIGURE 3.7 – Le principe d'estimation des marquages de base

L'ensemble des marquages actuels à partir d'un marquage initial connu M_0 peut être déterminé en partant d'un nouvel ensemble de marquages initiaux qui sont l'ensemble des marquages de base $\mathcal{M}_b(M_0, w)$ à partir desquels on recherche tous les autres marquages actuels possibles. Alors, un marquage actuel est réécrit comme suit [CGS10b] :

$$M = M_b + W_{un}.x'_{un} \tag{3.28}$$

avec $M_b \in \mathcal{M}_b(M_0, w)$ et $x'_{un} \geq 0$ tel que $x'_{un} = \pi(\sigma_{un})$, $\sigma_{un} \in TR^*$.

Exemple 18 *Soit le RdPE de Figure 3.8. Nous considérons l'observation $t_3t_3t_2t_1$ à partir*

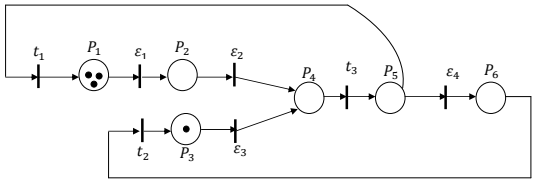


FIGURE 3.8 – Exemple d'un RdPE

du marquage initial $M_0 = [3\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]^\top$. Nous considérons d'abord l'événement t_3. Après tout calcul fait, nous obtenons $E_{min}(M_0, t_3) = \{[0\ 0\ 1\ 0]^\top, [1\ 1\ 0\ 0]^\top\}$.

- *Pour $e'_1 = [0\ 0\ 1\ 0]^\top$ associé à la séquence de tirs ε_3, le marquage résultant produit après le tir de $\varepsilon_3 t_3$ est $M_b(t_3) = [3\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^\top$.*
- *Pour $e''_1 = [1\ 1\ 0\ 0]^\top$ associé à la séquence de tirs $\varepsilon_1\varepsilon_2$, le marquage résultant produit après le tir de $\varepsilon_1\varepsilon_2 t_3$ est $M_b(t_3) = [2\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0]^\top$.*

Les nouveaux marquages initiaux pour l'observation suivante t_3 sont alors $[3\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^\top$ et $[2\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0]^\top$. Nous faisons le même travail pour t_3, ensuite t_2 puis t_1. Les calculs sont résumés dans Tab. 3.2. Ainsi, l'ensemble des marquages de base $\mathcal{M}_b(M_0, t_3t_3t_2t_1) = \{[3\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ ]^\top, [2\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ ]^\top\}$.

TABLE 3.2 – Tableau des marquages de base $\mathcal{M}_b(M_0, t_3t_3t_2t_1)$

t_j	M_0	$E_{min}(M_0, t_j)$	$M_b(t_{ob,1}..t_j)$
t_3	$[3\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]^\top$	$[0\ 0\ 1\ 0]^\top$	$[3\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^\top$
		$[1\ 1\ 0\ 0]^\top$	$[2\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0]^\top$
t_3	$[3\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]^\top$	$[1\ 1\ 0\ 0]^\top$	$[2\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ ]^\top$
	$[2\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0]^\top$	$[0\ 0\ 1\ 0]^\top$	$[2\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ ]^\top$
		$[1\ 1\ 0\ 0]^\top$	$[1\ 0\ 1\ 0\ 2\ 0\ ]^\top$
t_2	$[2\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0]^\top$	$[0\ 0\ 0\ 1]^\top$	$[2\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ ]^\top$
	$[1\ 0\ 1\ 0\ 2\ 0]^\top$	$[0\ 0\ 0\ 1]^\top$	$[1\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ ]^\top$
t_1	$[2\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0]^\top$	ε	$[3\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ ]^\top$
	$[1\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0]^\top$	ε	$[2\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ ]^\top$

3.4 Elimination des solutions inadéquates

3.4.1 Principe

Dans cette partie, le problème est de vérifier si une solution candidate calculée est aussi un vecteur d'explication pour l'itération $< k >$. Plus formellement, nous nous concentrons sur la deuxième inclusion de (3.9)

$$S_{un}^{\mathbb{Z}}(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>}) \supseteq E(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>}). \tag{3.29}$$

L'hypothèse de l'acyclicité est présentée dans de nombreux articles, ce qui limite la portée des résultats exposés dans ces travaux. La technique utilisée dans cette partie est de déterminer une séquence arbitraire associée à un vecteur d'explication candidat considéré. Puisqu'une séquence de franchissements est une succession d'événements, l'idée est d'introduire une priorité entre les événements en modifiant légèrement le RdP.

Nous notons que les relations établies précédemment pour le RdP décrivent le fait que pour chaque place p_l, le flux des jetons de sortie de p_l est inférieur ou égal au flux des jetons d'entrée et à leur marquage initial. Cependant, le modèle algébrique n'exprime pas la priorité entre les événements. Dans cette section, nous associons à chaque place une temporisation égale à une unité de temps élémentaire, ce qui implique que le flux d'entrée ne présente pas d'effet immédiat sur le flux de sortie.

Considérons le cas d'un RdP avec des arcs de poids tous unitaires. Si nous observons le tir d'une transition d'entrée d'une place p_l, alors un jeton est produit, mais aucune transition de sortie de p_l ne consomme immédiatement ce jeton. Par conséquent, ce modèle de temps distingue deux événements différents qui sont le tir des transitions d'entrée et le tir des transitions de sortie. En outre, le tir des transitions de sortie se produit après le tir des transitions d'entrée pour chaque place du RdP. L'introduction d'une temporisation unitaire conduit à une faible restriction du comportement du RdP qui va être une hypothèse de tirs non simultanés des transitions d'entrée et des transitions de sortie quand il y une relation de causalité entre les événements associés. Ainsi, l'approche proposée consiste à construire un RdP P-temporisé où toutes les places présentent une temporisa-

tion unitaire et un marquage initial défini par $M^{<k>}$ et d'analyser l' « ordonnançabilité » du vecteur candidat en calculant le « calendrier » associé, c'est-à-dire les compteurs des tirs des transitions. L'existence d'une séquence temporelle pour le RdPE prouve que le vecteur de compte associé est un vecteur d'explication. Comme l'article [DB14b] indique que le temps peut être considéré dans l'estimation, nous adaptons cette approche à ce contexte.

3.4.2 Analyse de "l'ordonnançabilité"

Dans cette partie, l'instant $t \in \mathbb{Z}$ est discret et l'occurrence de chaque événement est synchronisée avec une horloge externe. Pour chaque itération $< k >$, l'origine du temps zéro est supposée être l'instant survenant à la production de l'estimation du marquage $M^{<k>}$ par le tir de la transition $t_{ob}^{<k-1>}$ (*Rappelons que $M^{<k>}[x^{<k>} \succ M'$ et $M'[t_{ob}^{<k>} \succ M^{<k+1>}$).

Chaque transition ε_i est associée au nombre d'événements qui se produisent avant ou à l'instant τ et qui est noté $x_i(\tau)$. Comme x_i est associé à l'itération $< k >$, nous avons $x_i(\tau) = 0$ pour $\tau < 0$ et $x_i(\tau) \geq 0$ pour $\tau \geq 0$. En plus, on peut déduire que $x_i(\tau = 0) = 0$ à partir de la définition de l'origine du temps si l'on suppose que chaque place présente une temporisation non nulle (pas de tir d'une transition non observable à $\tau = 0$). Notons que pour une transition donnée ε_i, s'il y a deux instants différents τ_1 et τ_2 tels que $x_i(\tau_1) \neq x_i(\tau_2)$, alors nous pouvons conclure le tir d'au moins une fois de la transition ε_i.

Comme la procédure générale considère un seul tir d'une transition observable, nous avons $x_{ob}^{<k>}(\tau) = 0$ pour $0 \leq \tau \leq h_k$ sauf $x_{ob,j}^{<k>}(\tau = h_k) = 1$ avec $x_{ob,j}^{<k>}$ est l'élément du vecteur x_{ob} associé à $t_{ob}^{<k>}$ et h_k est la date du tir de $t_{ob}^{<k>}$ qui est supposée suffisamment grande pour ne pas limiter la vérification.

Enfin, l'objectif de cette partie est le suivant. Comme le vecteur candidat $x_{un}^{<k>}$ est connu, le but est de vérifier l'existence d'une séquence arbitraire de temps $\sigma_{un}^{<k>}(\tau)$ pour $0 \leq \tau \leq h_k$ partant de $\left(x_{un}^{<k>}(\tau = 0) = 0 \text{ et } x_{ob,j}^{<k>}(\tau = h_k) = 0\right)$ et conduisant à $\left(x_{un}^{<k>}(\tau = h_k) = x_{un}^{<k>} \text{ et } x_{ob,j}^{<k>}(\tau = h_k) = 1\right)$ avec j est l'élément du vecteur x_{ob} associé à $t_{ob}^{<k>}$ et $x_{ob,j}^{<k>}(\tau = \tau_i)$ est le nombre de tir de $t_{ob}^{<k>}$ à l'instant $\tau = \tau_i$. Si la séquence existe,

nous pouvons conclure que le vecteur candidat $x_{un}^{<k>}$ est un vecteur d'explication.

L'évolution peut être décrite par les inégalités suivantes exprimant les relations entre les nombres de tirs des transitions. Pour chaque place $p_l \in P$ associée à une temporisation unitaire Δ_l, on peut écrire que le flux de sortie des jetons à l'instant $\tau \geq 1$ est inférieur ou égal à l'addition du marquage initial de p_l et du flux d'entrée avec un retard Δ_l. Alors pour l'itération $< k >$, nous obtenons la relation :

$$(W^-)_{l,.}.x^{<k>}(\tau) \leq (W^+)_{l,.}.x^{<k>}(\tau - \Delta_l) + M_l^{<k>} \quad ; \tau \in \{1, \ldots, h_k\} \tag{3.30}$$

La considération de toutes les places dans le problème d'estimation donne :

$$W_{un}^-.x_{un}^{<k>}(\tau) + W_{ob}^-.x_{ob}^{<k>}(\tau) \leq W_{un}^+.x_{un}^{<k>}(\tau - \Delta_l) + W_{ob}^+.x_{ob}^{<k>}(\tau - \Delta_l) + M^{<k>} \quad ; \tau \in \{1, \ldots, h_k\} \tag{3.31}$$

Les informations sur l'itération $< k >$ sont :

$$\begin{cases} x_{ob}^{<k>}(\tau) = 0 \text{ pour } 0 \leq \tau \leq h_k \text{ sauf } x_{ob,j}^{<k>}(\tau = h_k) = 1 \text{ avec } x_{ob,j}^{<k>} = \pi(t_{ob}^{<k>}) \\ x_{un}^{<k>}(\tau = 0) = 0 \text{ et } x_{un}^{<k>}(\tau = h_k) = x_{un}^{<k>} \end{cases} \tag{3.32}$$

Alors, les relations (3.31) et (3.32) peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} W_{un}^{-} & & & & & \\ -W_{un}^{+}W_{un}^{-} & & (0) & & & \\ & -W_{un}^{+}W_{un}^{-} & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -W_{un}^{+}W_{un}^{-} & & \\ & (0) & & & -W_{un}^{+}W_{un}^{-} & \\ & & & & & -W_{un}^{+} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{un}^{<k>}(1) \\ x_{un}^{<k>}(2) \\ \vdots \\ x_{un}^{<k>}(h_k-1) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} M^{<k>} + W_{un}^{+}.x_{un}^{<k>}(0) \\ M^{<k>} \\ \vdots \\ M^{<k>} \\ M^{<k>} - W_{un}^{-}.x_{un}^{<k>}(h_k) \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

En outre, la trajectoire est non décroissante alors nous ajoutons la condition

$$x_{un}^{<k>}(\tau-1) \leq x_{un}^{<k>}(\tau) \quad ;\tau \in \{1,\ldots,h_k\} \tag{3.34}$$

Cette condition est traduite par la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} -I_{n\times n} & & & & & \\ I_{n\times n} & -I_{n\times n} & & (0) & & \\ & I_{n\times n} & -I_{n\times n} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & I_{n\times n} & -I_{n\times n} & \\ & (0) & & & I_{n\times n} & -I_{n\times n} \\ & & & & & I_{n\times n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{un}^{<k>}(1) \\ x_{un}^{<k>}(2) \\ \vdots \\ x_{un}^{<k>}(h_k-1) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -I_{n\times n}.x_{un}^{<k>}(0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_{n\times n}.x_{un}^{<k>}(h_k) \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

avec $n = |TR_{un}|$. La contrainte de positivité du vecteur candidat $x_{un}^{<k>}$ sur l'horizon $[1...h_k]$ donne la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} -I_{n\times n} & & & & \\ & -I_{n\times n} & & (0) & \\ & & -I_{n\times n} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -I_{n\times n} \\ & (0) & & & & -I_{n\times n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{un}^{<k>}(1) \\ x_{un}^{<k>}(2) \\ \vdots \\ x_{un}^{<k>}(h_k-1) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

Si nous considérons les trois relations (3.33), (3.35) et (3.36), nous obtenons un polyèdre de la forme :

$$\mathbf{D} \cdot \vartheta \leq \mathbf{E}^{<k>} \tag{3.37}$$

avec $\vartheta = \begin{pmatrix} x_{un}^{<k>}(1) \\ x_{un}^{<k>}(2) \\ \cdots \\ x_{un}^{<k>}(h_k-1) \end{pmatrix}$. La matrice $\mathbf{D}$ et le vecteur $\mathbf{E}^{<k>}$ ne sont pas donnés mais peuvent être facilement déduits. L'existence d'une séquence de tirs associée au vecteur candidat considéré $x_{un}^{<k>}$ peut être vérifiée en résolvant un problème de minimisation :

$$\begin{cases} \min \lambda^{\top}.\vartheta \quad , \lambda > 0 \\ \mathbf{D} \cdot \vartheta \leq \mathbf{E}^{<k>} \\ \vartheta \geq \mathbf{0} \\ \vartheta \in \mathbb{Z}^{n.(h_k-1)} \end{cases} \tag{3.38}$$

Si l'espace des solutions est non vide, le problème de minimisation (3.38) converge vers une solution optimale finie, puisque l'espace est inférieurement borné par zéro, et nous pouvons conclure que la solution candidate $x_{un}^{<k>}$ est aussi un vecteur d'explication pour l'itération $< k >$. Sinon, la solution candidate $x_{un}^{<k>}$ va être éliminée de l'ensemble des solutions candidates $S_{un}^{\mathbb{Z}}(M^{<k>}, t_{ob}^{<k>})$ et une nouvelle solution candidate doit être sélectionnée et vérifiée.

Remarque :

Nous pouvons également considérer un problème de maximisation étant donné que la trajectoire est bornée supérieurement (puisque la trajectoire est non décroissante et $x_{un}^{<k>}(\tau = h_k) = x_{un}^{<k>}$, nous avons $x_{un}^{<k>}(\tau \leq h_k) \leq x_{un}^{<k>}(\tau = h_k)$).

Exemple 19 *Suite de l'exemple 11*

Maintenant, nous vérifions si les vecteurs candidats représentés par les colonnes de la matrice χ_{un} dans l'exemple 11 sont associés à des vraies séquences de tirs. Pour ce but, nous établissons les relations temporelles suivantes associées aux places p_1, p_2, p_3 p_4 p_5 et p_6. Nous notons x_1, x_2, x_3 et x_4 les vecteurs de compte respectivement de ε_1, ε_2, ε_3 et ε_4. Nous notons y_1, y_2 et y_3 les vecteurs de compte respectivement de t_1, t_2 et t_3. Soit $x = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^\top$.

$$\begin{cases} x_2(\tau) \leq x_1(\tau - 1) + M_2 \\ x_4(\tau) \leq x_2(\tau - 1) + x_3(\tau - 1) + M_4 \\ y_3(\tau) \leq x_4(\tau - 1) + M_5 \\ x_3(\tau) \leq x_4(\tau - 1) + M_6 \\ x_1(\tau - 1) \leq x_1(\tau) \\ x_2(\tau - 1) \leq x_2(\tau) \\ x_3(\tau - 1) \leq x_3(\tau) \\ x_4(\tau - 1) \leq x_4(\tau) \end{cases} \quad \textit{pour } \tau \in \{1, \ldots, h_k\}.$$

Nous considérons arbitrairement l'horizon $h_k = 4$ et le vecteur coût $\lambda = (\mathbb{1}_4^\top \mathbb{1}_4^\top \mathbb{1}_4^\top)^\top$ avec $\mathbb{1}_4$ est un vecteur unitaire à 4 éléments. Nous avons $y_3(\tau) = 0$ pour $\tau \leq 3$ et $y_3(\tau) = 1$ pour $\tau = 4$.

Si nous considérons le vecteur candidat $(1\ 1\ 0\ 1)^\top$, le problème est de déterminer une séquence temporelle reliant le vecteur de compte de départ $x(\tau = 0) = (0\ 0\ 0\ 0)^\top$ à $x(\tau = h) = (1\ 1\ 0\ 1)^\top$. La résolution du problème de maximisation de la fonction coût $\lambda^\top \vartheta$ avec $\vartheta = \begin{pmatrix} x(\tau = 1) \\ x(\tau = 2) \\ x(\tau = 3) \end{pmatrix}$ donne les résultats du tableau suivant :

τ	0	1	2	3	4
y_3	0	0	0	0	1
x_1	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	1
x_3	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	1	1
L'évenement		ε_1	ε_2	ε_4	t_3

Alors, le vecteur candidat $x = (1\ 1\ 0\ 1)^\top$ *est associé à une vraie séquence de tirs* $\sigma = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4$. *Ainsi,* x *est un vecteur d'explication.*

La résolution du problème de maximisation pour chaque vecteur candidat de χ_{un} *donne les résultats présentés par le tableau suivant :*

Le vecteur candidat	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	*L'événement*
$(0\ 1\ 0\ 1)^\top$	[ ]	[ ]	[ ]	$\emptyset$
$(1\ 1\ 0\ 1)^\top$	$(1\ 0\ 0\ 0)^\top$	$(1\ 1\ 0\ 0)^\top$	$(1\ 1\ 0\ 1)^\top$	$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4$
$(0\ 0\ 1\ 1)^\top$	$(0\ 0\ 1\ 0)^\top$	$(0\ 0\ 1\ 1)^\top$	$(0\ 0\ 1\ 1)^\top$	$\varepsilon_3\varepsilon_4$
$(1\ 0\ 1\ 1)^\top$	$(1\ 0\ 1\ 0)^\top$	$(1\ 0\ 1\ 1)^\top$	$(1\ 0\ 1\ 1)^\top$	$\varepsilon_3\varepsilon_1\varepsilon_4$
$(0\ 1\ 1\ 1)^\top$	[ ]	[ ]	[ ]	$\emptyset$
$(1\ 1\ 1\ 1)^\top$	$(1\ 0\ 1\ 0)^\top$	$(1\ 1\ 1\ 1)^\top$	$(1\ 1\ 1\ 1)^\top$	$\varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_2\varepsilon_4$
$(0\ 1\ 1\ 2)^\top$	[ ]	[ ]	[ ]	$\emptyset$
$(1\ 1\ 1\ 2)^\top$	$(1\ 0\ 1\ 0)^\top$	$(1\ 1\ 1\ 1)^\top$	$(1\ 1\ 1\ 2)^\top$	$\varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_2\varepsilon_4\varepsilon_4$

Ainsi, $E(M_0, t_3) \supset \{(1\ 1\ 0\ 1)^\top, (0\ 0\ 1\ 1)^\top, (1\ 0\ 1\ 1)^\top, (1\ 1\ 1\ 1)^\top, (1\ 1\ 1\ 2)^\top\}$

3.5 Diagnostic sur un horizon élémentaire glissant

Dans cette section, nous développons des méthodes de diagnostic à base d'estimation d'état. Nous supposons que le modèle de défauts est disponible. Les défauts du système sont modélisés par des transitions non observables. Naturellement, il peut se trouver aussi d'autres transitions non observables qui représentent des comportements normaux. Nous désignons par TR_f l'ensemble des transitions non observables modélisant des défauts

et TR_{nf} l'ensemble des transitions non observables qui représentent des comportements normaux. Nous pouvons alors écrire :

$$TR_{un} = TR_{nf} \cup TR_f \tag{3.39}$$

Nous considérons le polyèdre (3.5) qui décrit l'évolution de sous-réseau non observable pour une transition observée $t_{ob}^{<k>}$ à partir d'un marquage initial connu $M^{<k>}$.

Après avoir classé les variables du système et réordonné les colonnes de la matrice $\mathbb{A}$, le système (3.5) est réécrit de la manière suivante :

$$(A_{nf}\ A_f).\begin{pmatrix} x_{nf}^{<k>} \\ x_f^{<k>} \end{pmatrix} \leq b^{<k>} \tag{3.40}$$

avec $x_{un}^{<k>} = \begin{pmatrix} x_{nf}^{<k>} \\ x_f^{<k>} \end{pmatrix}$ où $x_{un}^{<k>}$, $x_{nf}^{<k>}$ et $x_f^{<k>}$ sont respectivement les vecteurs de compte des transitions non observables dans TR_{un}, TR_{nf} et TR_f pour la transition observée $t_{ob}^{<k>}$. Les matrices $A_{nf} = \begin{pmatrix} -W_{nf} \\ -I_{|TR_{nf}|\times|TR_{nf}|} \end{pmatrix}$ et $A_f = \begin{pmatrix} -W_f \\ -I_{|TR_f|\times|TR_f|} \end{pmatrix}$ avec $W_{nf} = (W_{un})_{|TR_{nf}}$ et $W_f = (W_{un})_{|TR_f}$.

Notre méthode de diagnostic est basée sur la détermination de l'ensemble des vecteurs d'explication minimaux pour chaque transition $t_{ob}^{<k>}$ d'un mot observé w, qui est l'image d'un sous-ensemble réduit des séquences non observables qui activent la transition observée considérée $t_{ob}^{<k>}$, et de déterminer si ces séquences correspondent à des comportements normaux ou défectueux pour chaque itération k.

Pour chaque transition observée $t_{ob}^{<k>}$, nous pouvons définir l'indicateur du défaut $J_k^-(T_f^i)$ qui exprime le nombre minimal d'occurrences du défaut T_f^i. Il est définit comme suit :

$$J_k^-(T_f^i) = min\{x_f^{<k>}(T_f^i)\ ,\ \forall e \in E_{min}^{<k>}\ \} \tag{3.41}$$

avec $x_f^{<k>}(T_f^i)$ est l'élément du vecteur $x_f^{<k>}$ associé au nombre de tirs de la transition du défaut T_f^i. L'occurrence du défaut T_f^i est assurée si le défaut T_f^i est produit dans toutes les séquences non observables minimales qui ont activé $t_{ob}^{<k>}$, c-à-d si $x_f^{<k>}(T_f^i) \neq 0\ ; \forall\ e \in$

$E_{min}^{<k>}$. Alors, le défaut T_f^i est assuré si $J_k^-(T_f^i) \geq 1$. Si $\exists e \in E_{min}^{<k>}$ tel que $x_f^{<k>}(T_f^i) = 0$, c-à-d si $J_k^-(T_f^i) = 0$, donc nous ne pouvons pas conclure sur l'existence de T_f^i.

Nous pouvons également définir un deuxième indicateur du défaut pour chaque transition de défaut T_f^i comme suit :

$$I_k(T_f^i) =\mid E_{min}^{<k>} \text{ sachant } x_f^{<k>}(T_f^i) \neq 0 \mid \tag{3.42}$$

L'indicateur $I_k(T_f^i)$ est le nombre de vecteurs d'explication minimaux $e \in E_{min}^{<k>}$ tel que l'élément associé à la transition du défaut T_f^i dans le vecteur e est différent de zéro.

Pour chaque transition du défaut $T_f^i \in TR_f$, nous définissons les triplets caractéristiques des défauts comme suit :

$$(J_k^-(T_f^i), I_k(T_f^i), \mid E_{min}^{<k>} \mid) \tag{3.43}$$

Ainsi, nous pouvons interpréter comme suit :

— Si le défaut T_f^i est détecté c-à-d $J_k^-(T_f^i) \geq 1$, nous avons $I_k(T_f^i) =\mid E_{min}^{<k>} \mid$.

— Si nous ne pouvons pas conclure sur l'existence du défaut T_f^i c-à-d $J_k^-(T_f^i) = 0$, il existe deux cas :

1. Si $I_k(T_f^i) = 0$, alors le défaut T_f^i ne se produit pas dans les séquences minimales non observables qui activent $t_{ob}^{<k>}$ à partir de $M^{<k>}$, mais peut être produit dans les autres séquences non minimales qui activent $t_{ob}^{<k>}$ à partir de $M^{<k>}$.
2. Si $I_k(T_f^i) \geq 1$, alors le défaut T_f^i peut être produit au moins dans une séquence minimale non observable qui active $t_{ob}^{<k>}$ à partir de $M^{<k>}$, mais pas dans toutes les séquences minimales.

3.6 Application

Nous considérons le modèle de défaut de la Figure 3.9. Soit l'ensemble des transitions non observables $TR_{un} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7, \varepsilon_8, \varepsilon_9, \varepsilon_{10}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{14}\}$ tel que $TR_{nf} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7, \varepsilon_8, \varepsilon_9, \varepsilon_{10}\}^\top$ et $TR_f = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{14}\}$. L'ensemble des transitions

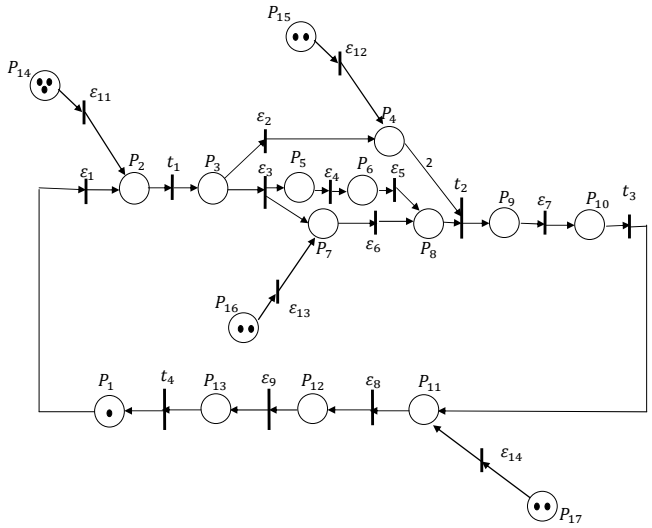


FIGURE 3.9 – RdPE avec transitions de défaut

observables est $TR_{ob} = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$. L'ensemble des places est $P = \{P_1, P_2, P_3,$ $P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}P_{14}, P_{15}, P_{16}, P_{17}\}$. Soit la séquence observée t_1t_2 pour un marquage initial $M_0 = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 3\ 2\ 2\ 2)^\top$.

— Pour t_1 :

Les séquences non observables les plus courtes qui activent t_1 sont $\{\varepsilon_1, \varepsilon_{11}\}$ associées à $E_{min}(M_0, t_1)$. Alors, on obtient les triplets caractéristiques suivants pour chaque transition de défaut :

$(J_1^-(\varepsilon_{11}), I_1(\varepsilon_{11}), \mid E_{min}(M_0, t_1) \mid) = (0\ ,\ 1\ ,\ 2)$

$(J_1^-(\varepsilon_{12}), I_1(\varepsilon_{12}), \mid E_{min}(M_0, t_1) \mid) = (0\ ,\ 0\ ,\ 2)$

$(J_1^-(\varepsilon_{13}), I_1(\varepsilon_{13}), \mid E_{min}(M_0, t_1) \mid) = (0\ ,\ 0\ ,\ 2)$

$(J_1^-(\varepsilon_{14}), I_1(\varepsilon_{14}), \mid E_{min}(M_0, t_1) \mid) = (0\ ,\ 0\ ,\ 2).$

— Pour t_2 :

Après le tir de $\varepsilon_1 t_1$ ou $\varepsilon_{11} t_1$, nous obtenons l'ensemble des marquages initiaux possibles pour t_2 qui sont $\mathcal{M}_b(M_0, t_1) = \{(0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 3\ 2\ 2\ 2)^\top,$ $(0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 12\ 2\ 2\ 2)^\top\}$. Les séquences non observables les plus courtes qui activent t_2 à partir des marquages $M \in \mathcal{M}_b(M_0, t_1)$ sont $\{\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5, \varepsilon_{12}\varepsilon_3\varepsilon_6\}$ associé à $\{E_{min}(M, t_2),\ \forall M \in \mathcal{M}_b(M_0, t_1)\}$. Alors, on obtient les triplets caractéristiques suivants :

$(J_1^-(\varepsilon_{11}), I_1(\varepsilon_{11}), \mid E_{min}(M_0, t_1) \mid) = (0\ ,\ 0\ ,\ 3)$
$(J_1^-(\varepsilon_{121}), I_1(\varepsilon_{12}), \mid E_{min}(M_0, t_1) \mid) = (1\ ,\ 3\ ,\ 3)$
$(J_1^-(\varepsilon_{13}), I_1(\varepsilon_{13}), \mid E_{min}(M_0, t_1) \mid) = (0\ ,\ 1\ ,\ 3)$
$(J_1^-(\varepsilon_{14}), I_1(\varepsilon_{14}), \mid E_{min}(M_0, t_1) \mid) = (0\ ,\ 0\ ,\ 3).$

Pour plus d'explication, pour la transition observée t_1 la transition de défaut ε_{11} est incluse dans une des deux séquences non observables les plus courtes qui activent t_1. Alors, le tir au moins une fois de ε_{11} peut conduire à la non cohérence du système. Pour la transition observée t_2, la transition de défaut ε_{12} est incluse dans toutes les séquences non observables les plus courtes qui activent t_2. Ainsi, le défaut ε_{12} est sûrement produit au moins une fois. La transition de défaut ε_{13} est incluse dans une des séquences non observables les plus courtes qui activent t_2 parmis trois. Alors, le tir au moins une fois de ε_{13} peut conduire à la non cohérence du système.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthodologie pour l'estimation d'état d'un RdPE partiellement observable à partir d'une séquence observée d'événements par estimation des marquages de base. Nous sommes partis du constat que pour l'état de l'art actuel, les approches ne permettent pas d'estimer l'ensemble des marquages de base que pour des RdPEs avec des sous-réseaux non observables acycliques en se basant sur un algorithme d'estimation exponentiel dans le pire des cas. La méthode que nous avons présentée consiste à établir une nouvelle approche pour l'estimation d'un ensemble candidat de marquages de base même en présence de cycles dans le sous-réseau non observable. Ensuite, en se basant sur cet algorithme ainsi que sur l'analyse de l'ordonnançabilité, nous avons abouti à la méthodologie générique proposée pour la détection des défauts par estimation de marquages de base.

Même si la cardinalité de l'ensemble des marquages de base est inférieure ou égale à la cardinalité de l'ensemble total des marquages atteignables cohérent avec une séquence observée, leur cardinalité peut être importante [BLG17]. Alors pour éviter l'explosion combinatoire, on réduit encore la taille de l'ensemble des états à estimer. Dans le chapitre

suivant, nous présentons une deuxième approche de diagnostic à base d'estimation d'état qui permet d'estimer un sous-ensemble de marquages cohérents. Nous optimisons une fonction coût pour le diagnostic d'un RdPE partiellement observable.

4

Diagnostic d'un RdPE partiellement observable sur un horizon fuyant

Résumé

Dans ce chapitre, une approche de diagnostic à base d'estimation d'état sur un horizon fuyant est conçue. La mise à jour des marquages initiaux pour chaque itération est évitée. Une technique de relaxation des contraintes est utilisée pour une approche de diagnostic polynomiale. Le cas d'un marquage initial inconnu mais borné est traité. Pour améliorer la vitesse de la procédure de diagnostic, deux techniques sont utilisées. La première est le diagnostic sur un horizon glissant pour réduire la taille du système à résoudre. La deuxième technique est la décomposition en sous structures pour un calcul en parallèle.

4.1 Introduction

Plusieurs approches présentées dans la littérature pour le diagnostic d'un RdPE partiellement observable sont basées sur l'estimation d'un sous-ensemble de l'espace d'état afin d'éviter l'explosion combinatoire et réduire le temps d'estimation. Cette problématique est aussi causée par les traitements successifs de chaque transition de la séquence observée pour l'estimation de l'état global. En effet, une mise à jour des marquages initiaux possibles pour chaque transition observée est nécessaire. Dans ce contexte, de nombreux travaux ont été faits pour réduire cette complexité temporelle et spatiale.

Dans [CGPS11], les auteurs ont conçu une approche de diagnostic basée sur l'estimation de l'ensemble des marquages de base. Pour la détection des défauts, les auteurs ont défini un nombre de problèmes PLNE proportionnel au nombre des transitions des défauts et au nombre des marquages de base. Comme le nombre des marquages de base possible peut être important, alors le nombre des problèmes PLNE à résoudre pour la détection des défauts est aussi important. Dans [DFMU09], les auteurs ont proposé une approche de diagnostic basée sur la résolution d'au plus un nombre de problèmes PLNE égal au nombre des transitions des défauts. L'effort de calcul en ligne de l'algorithme de détection suggéré augmente avec le nombre des transitions observées. Toutes ces approches basées sur la résolution des problèmes PLNE restent de complexité exponentielle malgré les efforts produits pour diminuer le nombre des variables des problèmes PLNE et pour réduire le nombre des problèmes PLNE à résoudre.

Dans ce chapitre, une deuxième approche proposée pour le diagnostic, basée sur l'estimation d'état sur un horizon fuyant, permet d'estimer un nombre limité de séquences non observables cohérentes avec l'observation. À l'inverse de la première approche proposée au chapitre 3 basée sur l'estimation des marquages de base, nous supposons que deux transitions observables différentes peuvent partager le même label. La technique de la relaxation de problèmes PLNE offre une décision de diagnostic dans un temps polynomial. Pour une amélioration du temps de calcul, une généralisation de notre approche sur un

horizon glissant sera établie. Une décomposition du sous réseau non observable en sous structures indépendantes permet de réaliser des calculs en parallèle

Le plan de ce chapitre se présente comme suit. Nous commençons par établir un nouveau polyèdre du système qui considère tous les événements observés dans le même modèle. Ensuite, une deuxième approche de diagnostic est établie basée sur la relaxation d'un ensemble de problèmes PLNE. L'étude de la complexité de cette approche est établie. Une application d'un système de production est introduite, ce qui permet d'appliquer les deux approches de diagnostic développées au cours de cette thèse. Les différents résultats d'estimation d'état et de diagnostic, seront ainsi illustrés par cet exemple.

4.2 Reformulation du problème

Dans cette section, le but est de développer des relations sur l'horizon $\{1,\ldots,k\}$ vérifiées par les vecteurs d'explication associés à $t_{ob}^{<1>}$ à $t_{ob}^{<k>}$ d'une séquence w. Nous rappelons que $|P|=m, |TR_{un}|=n, |TR_{ob}|=n'$ et $|AL|=n''$.

$L : TR \rightarrow AL \bigcup \{\varepsilon\}$ est une fonction d'étiquetage des transitions qui attribue à chaque transition $t \in TR$ un alphabet de AL ou lui attribue la chaîne vide ε.

D'après l'inégalité matricielle (3.4) vérifiée par un vecteur d'explication associé à $t_{ob}^{<k>}$ à l'itération $< k >$ et le système d'équations (3.11) sur l'horizon $\{1,\ldots,k\}$ qui sont établies au chapitre 3, nous obtenons :

$$\begin{cases} -W_{un}.x_{un}^{<k>} + W_{ob}^{-}.x_{ob}^{<k>} \leq M^{<k>} \\ M^{<k>} = M^{<1>} + W_{un}.\sum_{j=1}^{k-1} x_{un}^{<j>} + W_{ob}.\sum_{j=1}^{k-1} x_{ob}^{<j>} \quad ; k \geq 2 \end{cases} \tag{4.1}$$

pour $k \geq 2$, le système (4.1) donne :

$$-W_{un}\,.\sum_{j=1}^{k} x_{un}^{<j>} - W_{ob}.\sum_{j=1}^{k-1} x_{ob}^{<j>} + W_{ob}^{-}.x_{ob}{}^{<k>} \leq M^{<1>} \tag{4.2}$$

Soient les notations suivantes qui sont associées à l'horizon $\{1,\ldots,h\}$ avec $h=|w|$.
$X_{un} = \left(\begin{array}{cccc} (x_{un}^{<1>})^T & (x_{un}^{<2>})^T & (x_{un}^{<3>})^T & \ldots \quad (x_{un}^{<h>})^T \end{array} \right)^T$ et

$X_{ob} = \Big(\ (x_{ob}^{<1>})^T \quad (x_{ob}^{<2>})^T \quad (x_{ob}^{<3>})^T \quad \dots \quad (x_{ob}^{<h>})^T \ \Big)^T$.

Les dimensions de X_{un} et X_{ob} sont respectivement $h.n$ et $h.n'$. Nous avons $(x_{ob})_i{}^{<j>} = (0...0\ 1\ 0...0)^\top$ puisque nous partons de l'hypothèse d'un seul franchissement d'une transition observable pour chaque étape $< k >$.

En considérant la première relation du système (4.1) pour $k = 1$ et (4.2) pour $k \geq 2$, et puisque $M^{<1>} = M_0$, nous obtenons le système suivant :

$$A_h.X_{un} + B_h.X_{ob} \leq b_h \text{ avec } \ X_{un}, X_{ob} \geq 0 \tag{4.3}$$

où A_h= $\begin{pmatrix} -W_{un} & 0 & 0 & & 0 \\ -W_{un} & -W_{un} & 0 & & 0 \\ -W_{un} & -W_{un} & -W_{un} & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -W_{un} & -W_{un} & -W_{un} & \dots & -W_{un} \end{pmatrix}$,

$B_h = \begin{pmatrix} W_{ob}^- & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -W_{ob} & W_{ob}^- & 0 & \dots & 0 \\ -W_{ob} & -W_{ob} & W_{ob}^- & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -W_{ob} & -W_{ob} & -W_{ob} & \dots & W_{ob}^- \end{pmatrix}$ et $b_h = \begin{pmatrix} M_0 \\ M_0 \\ M_0 \\ \vdots \\ M_0 \end{pmatrix}$.

La dimension des matrices A_h et B_h et le vecteur b_h sont respectivement $(h.m \times h.n)$, $(h.m \times h.n')$ et $(h.m \times 1)$.

Remarque :

Nous notons que A_h, B_h, b_h, X_{un} et X_{ob} dépendent de l'horizon $\{1, \dots, h\}$. Si l'horizon est réduit à $\{1, 1\}$, nous obtenons l'inégalité bien connue (3.4).

4.2.1 Événements indiscernables

Le premier non-déterminisme est produit par le fait que l'étiquette ε est associée à toutes les transitions non observables de TR_{un}. Le deuxième non-déterminisme est comme suit. Considérons le cas où la fonction d'étiquetage n'est pas injective. La même étiquette d'un alphabet de AL peut être associée à plus d'une transition observable. Par conséquent,

plusieurs transitions observables peuvent partager le même label $a \in AL$, ce qui conduit à une ambiguïté dans les données car nous ne pouvons pas déduire la transition effectivement franchie. Par conséquent, l'émission de l'étiquette est dite ambiguë car elle ne permet pas de distinguer les transitions associées. Soit $\Omega_a \subset TR_{ob}$ l'ensemble des transitions observables associées à l'étiquette a. Formellement, $\Omega_a = \{t_j \in TR_{ob} \mid L(t_j) = a\}$. Soit $(x_{ob})_j$ le nombre de tirs de t_j.

Nous définissons comme suit le vecteur de compte des étiquettes observées. Le vecteur $y^{<k>}$ de dimension $n'' = |AL|$ décrit le vecteur de compte des étiquettes observées pour l'itération $< k >$ où le composant associé à une étiquette unique de l'ensemble AL est le nombre d'occurrences de cette étiquette générée par les transitions observables du RdPE pour l'itération $< k >$. Ainsi, la notation suivante est associée à l'horizon $\{1, \ldots, h\}$: $Y = \begin{pmatrix} (y^{<1>})^T & (y^{<2>})^T & (y^{<3>})^T & \ldots & (y^{<h>})^T \end{pmatrix}^T$. La dimension de Y est $h.n''$. Nous avons ${y_j}^{<k>} \in \{0, 1\}$ comme nous considérons par hypothèse un seul franchissement d'une transition observable pour chaque étape $< k >$.

Nous pouvons déduire un lien entre ${(x_{ob})_j}^{<k>}$ pour $t_j \in \Omega_a$ et $(y_a)^{<k>}$ pour un label $a \in AL$ observé, qui est $\sum_{t_j \in \Omega_a} {(x_{ob})_j}^{<k>} = (y_a)^{<k>}$ avec ${(x_{ob})_j}^{<k>}$, $(y_a)^{<k>} \in \{0, 1\}$. Cette égalité décrit parfaitement le problème des transitions observables indiscernables. Comme nous supposons qu'il y a un tir unique d'une transition qui se produit à chaque itération, le cas ${(x_{ob})_j}^{<k>} = 1$ implique $(y_a)^{<k>} = 1$. Par conséquent, après avoir construit la matrice associée $C \geq 0$ avec les composants appropriés 0 ou 1, nous pouvons écrire : $C.{x_{ob}}^{<k>} = y^{<k>}$ pour $k \in \{1, \ldots, h\}$, où les dimensions de C sont $(n'' \times n')$, et nous obtenons :

$$\boldsymbol{C}.X_{ob} = Y \tag{4.4}$$

avec $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & C & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & C \end{pmatrix}$.

La dimension de la matrice $\boldsymbol{C}$ est $(h.n'' \times h.n')$. La relation $\boldsymbol{C}.X_{ob} = Y$ est équivalente à $\boldsymbol{C}.X_{ob} \leq Y$ et $-\boldsymbol{C}.X_{ob} \leq -Y$. En plus, on a $0 \leq X_{ob} \leq u$, avec u est le vecteur unitaire.

4.2.2 Polyèdre final

Finalement, le modèle algébrique du RdPE en présence des transitions observables indiscernables est défini comme suit :

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b} \text{ avec } \boldsymbol{X} \geq 0 \tag{4.5}$$

$$\text{avec } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \boldsymbol{C} & 0 \\ -\boldsymbol{C} & 0 \\ B_h & A_h \end{pmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_{ob} \\ X_{un} \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} u \\ Y \\ -Y \\ b_h \end{pmatrix}.$$

Les dimensions de $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{b}$ sont respectivement $h.(m + n' + 2.n'') \times h.(n + n')$, $h.(n + n') \times 1$ et $h.(m + n' + 2.n'') \times 1$. Notons que si $n' = n''$, $C{=}I_{n'' \times n''}$, alors $\boldsymbol{C}{=}I_{h.n'' \times h.n''}$, $X_{ob} = Y$ et le système est réduit à $A_h.X_{un} \leq b_h - B_h.Y$ avec $X_{un} \geq 0$.

4.3 Diagnostic sur un horizon fuyant en utilisant la programmation linéaire

L'espace des solutions admissibles du polyèdre (4.5) sur $\mathbb{R}$ est $S^{\mathbb{R}}(M_0, w) = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{\mathrm{h.(n+n')}} | \boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{X} \geq 0\}$ et l'espace des solutions admissibles du polyèdre (4.5) sur $\mathbb{Z}$ est $S^{\mathbb{Z}}(M_0, w) = S^{\mathbb{R}}(M_0, w) \cap \mathbb{Z}^{h.(n+n')}$. Les solutions de $S^{\mathbb{R}}(M_0, w)$ et $S^{\mathbb{Z}}(M_0, w)$ sont les vecteurs candidats respectivement sur $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{Z}$ de l'ensemble des vecteurs d'explication $E(M_0, w)$ en présence des transitions non observables indiscernables.

Si nous considérons X_{un}, X_{ob} sur les entiers, ce système peut être résolu par des solveurs standards de programmation linéaire entière en ajoutant un critère. Cependant, cette résolution est exponentielle dans le pire des cas, et une relaxation du système (4.5) peut être préférable. Ainsi, des algorithmes efficaces de programmation linéaire, tels que l'algorithme de Simplex, l'algorithme de Karmarkar et l'algorithme de Khashiyan peuvent être appliqués.

Dans la suite, l'objectif est de déterminer la solution candidate optimale $S^{\mathbb{R}}$ pour un

critère linéaire dédié au problème de diagnostic. Nous montrons qu'un diagnostic peut être fait malgré la relaxation dans $\mathbb{R}$ en déterminant une borne inférieure et une borne supérieure (si cela est possible) pour les occurrences des défauts.

4.3.1 Détection des défauts

Le processus contient un défaut s'il y a au moins le franchissement d'une transition de défaut. Cela signifie que la somme de tirs des transitions des défauts est supérieure ou égale à 1. Soit le critère associé $\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}$ où le vecteur $\boldsymbol{c}_{\text{det}}$ est la concaténation du vecteur de $h.n'$ zéros et le vecteur $\begin{pmatrix} (c^{<1>})^{\top} & (c^{<2>})^{\top} & (c^{<3>})^{\top} & \dots & (c^{<h>})^{\top} \end{pmatrix}^{\top}$ associés respectivement à TR_{ob} et TR_{un} sur l'horizon $\{1, ..., h\}$. Les composants $(c^{<i>})_j$ pour toute transition de défaut $j \in TR_f \subseteq TR_{un}$ sont égaux à 1 pour tout $i = \{1, ..., h\}$, tandis que les autres sont nuls. Par conséquent, $c^{<1>} = c^{<2>} = ... = c^{<h>}$. Ainsi, nous pouvons considérer le critère J_{det}^{-} défini comme suit :

$$\begin{cases} J_{\text{det}}^{-} = \min(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \\ \boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b} \text{ avec } \boldsymbol{X} \geq 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

En résolvant le problème d'optimisation (4.6) dans $\mathbb{Z}$, le critère calculé noté $J_{\text{det}}^{-}(\mathbb{Z}) = \min_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X})$ est un minorant du nombre de défauts détectés. Ces vecteurs d'explication existent car nous supposons que le RdPE est vivant sur l'horizon $\{1, \dots, h\}$. Ainsi selon le premier critère, nous pouvons déduire que :

— Si $J_{\text{det}}^{-}(\mathbb{Z}) \geq 1$, alors au moins un défaut est détecté sur l'horizon.

Symétriquement, nous pouvons définir un autre critère J_{det}^{+} qui donne un majorant des nombres d'occurrences de défauts.

$$\begin{cases} J_{\text{det}}^{+} = \max(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \\ \boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b} \text{ avec } \boldsymbol{X} \geq 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

En résolvant le problème d'optimisation (4.7) dans $\mathbb{Z}$, le nombre maximal des défauts détectés ne peut pas être plus grand que la valeur obtenue notée $J_{\text{det}}^{+}(\mathbb{Z}) = \max_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X})$. Ainsi selon le deuxième critère, nous pouvons déduire l'interprétation suivante :

— Si $J^{+}_{\text{det}}(\mathbb{Z}) = 0$, alors pas de défauts détectés.

Remarque 1 *Si $J^{-}_{\text{det}}(\mathbb{Z}) = 0$ et $J^{+}_{\text{det}}(\mathbb{Z}) \geq 1$, alors nous ne pouvons pas conclure sur l'existence d'un défaut. Néanmoins, on peut toujours dire que le nombre de défauts détectés est compris entre $J^{-}_{\text{det}}(\mathbb{Z})$ et $J^{+}_{\text{det}}(\mathbb{Z})$ sous la condition de vivacité du RdPE.*

Notons que les interprétations précédentes portant sur la présence des défauts n'ont pas besoin d'une hypothèse supplémentaire comme l'acyclicité du sous-réseau non observable. En effet, si le vecteur de compte obtenu n'est pas un vecteur d'explication et si $J^{-}_{\text{det}}(\mathbb{Z}) \geq 1$ alors, un vecteur d'explication possible ne peut donner que la même valeur de $J^{-}_{\text{det}}(\mathbb{Z})$ ou une valeur plus grande. De même, si $J^{+}_{\text{det}}(\mathbb{Z}) = 0$, il n'y aura pas de meilleur vecteur de compte conduisant à un critère supérieur à zéro. Nous présentons alors la proposition suivante :

Proposition 7 *Pour un RdPE avec un sous-réseau non observable cyclique, si un vecteur obtenu n'est pas un vecteur d'explication, alors les vecteurs d'explication possibles ne peuvent donner que la même valeur ou une valeur supérieure à $\min_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}^{\top}_{\text{det}}.\boldsymbol{X})$ et la même valeur ou une valeur inférieure à $\max_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}^{\top}_{\text{det}}.\boldsymbol{X})$.*

Preuve

1. *Nous considérons les deux fonctions coût suivantes :*

$$f^{-} = \{\min(\boldsymbol{c}^{\top}_{\text{det}}.\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{X} \geq 0\ ,\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{Z}^{h.(n+n')}\}$$
$$f^{-}_{cyc} = \{\min(\boldsymbol{c}^{\top}_{\text{det}}.\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{X} \geq 0\ ,\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{Z}^{h.(n+n')} \text{ et } \exists \sigma \in TR^{*}_{un} \text{ tel que } \pi(\sigma) = \boldsymbol{X}\}$$

$\forall \boldsymbol{X}$ *tel que* $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{X} \geq 0\ ,\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{Z}^{h.(n+n')}$, *nous avons* $\boldsymbol{c}^{\top}_{\text{det}}.\boldsymbol{X} \geq f^{-}$ *et en particulier* $f^{-}_{cyc} \geq f^{-}$. *Le cas* f^{-}_{cyc} *différent de* f^{-} *est possible puisque nous avons la condition* $\pi(\sigma) = \boldsymbol{X}$.

2. *Nous considérons les deux fonctions coût suivantes :*

$$f^{+} = \{\max(\boldsymbol{c}^{\top}_{\text{det}}.\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{X} \geq 0\ ,\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{Z}^{h.(n+n')}\}$$
$$f^{+}_{cyc} = \{\max(\boldsymbol{c}^{\top}_{\text{det}}.\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{X} \geq 0\ ,\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{Z}^{h.(n+n')} \text{ et } \exists \sigma \in TR^{*}_{un} \text{ tel que } \pi(\sigma) = \boldsymbol{X}\}$$

$\forall \boldsymbol{X}$ *tel que* $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{X} \geq 0,\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{Z}^{h.(n+n')}$, *nous avons* $\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X} \leq f^{+}$, *particulièrement* $f_{cyc}^{+} \leq f^{+}$. □

Naturellement, si le sous-réseau non observable est acyclique, c-à-d si le vecteur de compte calculé décrit une séquence possible, alors les interprétations pour les occurrences de défauts tendent à être plus précises car cela conduit à la réduction de l'espace $S^{\mathbb{Z}}(M_0, w) = E(M_0, w)$.

Le même raisonnement est valable si nous relaxons les problèmes de minimisation et de maximisation dans $\mathbb{R}$. Nous pouvons facilement montrer que :

$$\begin{aligned} &(1)\ \min_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \leq \lceil \min_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rceil \leq \min_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \\ &(2)\ \max_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \geq \lfloor \max_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rfloor \geq \max_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \end{aligned} \tag{4.8}$$

En effet,

1. Nous considérons les deux fonctions coût suivantes :

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{R}}^{-} &= \{\min_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b} \text{ avec } \boldsymbol{X} \geq 0, \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{h.(n+n')}\} \\ f_{\mathbb{Z}}^{-} &= \{\min_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b} \text{ avec } \boldsymbol{X} \geq 0, \boldsymbol{X} \in \mathbb{Z}^{h.(n+n')}\} \end{aligned} \tag{4.9}$$

   $\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{h.(n+n')}$ tel que $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{X} \geq 0$, nous avons $\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X} \geq f_{\mathbb{R}}^{-}$, particulièrement $\min_{\mathbb{Z}} \boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X} \geq f_{\mathbb{R}}^{-}$. Ainsi, $\min_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \leq \min_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X})$. Nous pouvons aussi écrire que $\min_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \leq \lceil \min_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rceil \leq \min_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X})$

2. Nous considérons les deux fonctions coût suivantes :

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{R}}^{+} &= \{\max_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b} \text{ avec } \boldsymbol{X} \geq 0, \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{h.(n+n')}\} \\ f_{\mathbb{Z}}^{+} &= \{\max_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b} \text{ avec } \boldsymbol{X} \geq 0, \boldsymbol{X} \in \mathbb{Z}^{h.(n+n')}\} \end{aligned} \tag{4.10}$$

   $\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{h.(n+n')}$ tel que $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{X} \leq 0$, nous avons $\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X} \leq f_{\mathbb{R}}^{+}$, en particulier $\max_{\mathbb{Z}} \boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X} \leq f_{\mathbb{R}}^{+}$. Ainsi, $\max_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \geq \max_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X})$. Nous pouvons aussi écrire que $\max_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \geq \lfloor \max_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rfloor \geq \max_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X})$.

Selon les deux résultats de (4.8), la décision de détection de défaut est décrite par la proposition suivante :

Proposition 8 *Considérons un RdPE avec* $TR = TR_{ob} \bigcup TR_{un}$ *décrit dans (4.5). Soit* $TR_f \subseteq TR_{un}$ *l'ensemble des transitions de défauts. Ainsi,*

- *Si* $\lceil \min_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rceil \geq 1$*, alors au moins un défaut est détecté sur l'horizon* $\{1, ..., h\}$.
- *Si* $\lfloor \max_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rfloor = 0$*, alors aucun défaut n'est détecté sur l'horizon* $\{1, ..., h\}$.
- *Si* $\min_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) = 0$ *et* $\max_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \geq 1$*, alors nous ne pouvons pas conclure sur l'existence d'un défaut sur l'horizon* $\{1, ..., h\}$.

Preuve

– *Nous supposons que* $\lceil \min_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rceil \geq 1$*. Nous avons démontré précédemment que* $\lceil \min_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rceil \leq \min_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X})$*, alors* $\min_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \geq 1$*. La proposition 7 implique qu'un défaut est détecté.*

– *Nous supposons que* $\lfloor \max_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rfloor = 0$*. Nous avons démontré précédemment que* $\lfloor \max_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rfloor \geq \max_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X})$*, alors* $\max_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) = 0$*. Par conséquent, selon la proposition 7 nous pouvons déduire qu'il n'y a pas de défaut détecté.*

Remarque

Si $\max(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) = +\infty$, l'interprétation donnée par les points 1 et 3 de la proposition 8 peut encore être retenue.

Nous notons que le nombre d'occurrences des défauts est compris entre les deux valeurs $\lceil \min_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rceil$ et $\lfloor \max_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rfloor$. Les défauts détectés peuvent être la répétition du tir de la même transition de défaut ou le tir des transitions de défauts différents. En outre, le défaut détecté peut être intermittent c-à-d qu'il peut apparaître puis disparaître. Ces défauts dépendent de l'état de dégradation et peuvent varier de défauts naissants intermittents à des défauts avancés et permanents [OBM16]. Ainsi, la détection de ces types de défauts est possible, ce qui représente un avantage pour cette méthode de détection.

Discussion

Si un défaut est détecté en résolvant les problèmes d'optimisation (4.6) et (4.7) dans $\mathbb{Z}$, alors il est certainement détecté en résolvant les problèmes d'optimisation (4.6) et (4.7) dans $\mathbb{R}$. Inversement, si un défaut est détecté en résolvant des problèmes PLNE, il peut arriver qu'en utilisant leurs relaxations ce défaut est non détecté et l'état de diagnostic dans ce cas est "incertain". Évidemment, c'est un inconvénient de cette approche de diagnostic. Cependant, dans de nombreux cas, le diagnostic basé sur la résolution des

problèmes relaxés est la seule solution viable surtout que la complexité de calcul des problèmes PLNE peut être importante [Bar97].

4.3.2 Isolation des défauts

Dans cette partie, nous concevons une méthode d'isolation d'un défaut unique associé à une transition de défaut T_f^i. Nous considérons ci-dessous le critère $\boldsymbol{c}_{loc_i}^\top.\boldsymbol{X}$ où le vecteur $\boldsymbol{c}_{loc_i}$ est la concaténation d'un vecteur de $h.n'$ zéros associée à TR_{ob} et le vecteur $\left(\begin{array}{cccccc} (c^{<1>})^\top & (c^{<2>})^\top & (c^{<3>})^\top & \dots & (c^{<h>})^\top \end{array} \right)^\top$ avec $c^{<1>} = c^{<2>} = ... = c^{<h>}$. Les vecteurs prennent la forme $c^{<k>} = 0$ avec $k \in [1...h]$ sauf $(c^{<k>})_i = 1$ pour la transition de défaut considérée T_f^i.

Nous pouvons définir un premier indicateur de défaut $[J_{loc}^-]_i$ associé à la transition de défaut T_f^i qui décrit un minorant du nombre d'occurrence de défaut T_f^i :

$$\left\{ \begin{array}{l} [J_{loc}^-]_i = \min(\boldsymbol{c}_{loc_i}^\top.\boldsymbol{X}) \\ \text{tel que} \quad \boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b} \text{ avec } \boldsymbol{X} \geq 0 \end{array} \right. \tag{4.11}$$

Nous notons $[J_{loc}^-(\mathbb{Z})]_i = \min_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^\top.\boldsymbol{X})$ la fonction coût du problème d'optimisation (4.11) résolu dans $\mathbb{Z}$. Nous pouvons interpréter que :

— Si $\min_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^\top.\boldsymbol{X}) \geq 1$, alors le défaut associé à T_f^i est détecté.

En outre, $\min_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^\top.\boldsymbol{X})$ est un minorant en nombre entier du nombre d'occurrence de défauts détectés T_f^i, et la situation $\min_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^\top.\boldsymbol{X}) > 1$ décrit un défaut répété. Symétriquement, un deuxième critère $[J_{loc}^+]_i$ peut définir un majorant pour le nombre d'occurrence de défaut T_f^i :

$$\left\{ \begin{array}{l} [J_{loc}^+]_i = \max(\boldsymbol{c}_{loc_i}^\top.\boldsymbol{X}) \\ \text{tel que} \quad \boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{b} \text{ avec } \boldsymbol{X} \geq 0 \end{array} \right. \tag{4.12}$$

Nous notons $[J_{loc}^+(\mathbb{Z})]_i = \max_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^\top.\boldsymbol{X})$ la fonction coût du problème d'optimisation (4.12) résolu dans $\mathbb{Z}$. Nous pouvons déduire que :

— Si $\max_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X}) = 0$ alors le défaut associé à la transition T_f^i ne s'est pas produit.

Pour résumer, l'intervalle $\{\min_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X}),\ \max_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X})\}$ avec $0 \leq \min_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X}) \leq \max_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X})$ montre que le nombre de défauts détectés pour la transition T_f^i est entre $\min_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X})$ et $\max_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X})$.

De la même manière que pour la détection, et en remplaçant $\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}$ par $\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}$ pour chaque transition de défaut T_f^i, nous pouvons démontrer que la relaxation des problèmes de minimisation et de maximisation sur $\mathbb{R}$ donne les résultats suivants :

$$\min_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X}) \leq \lceil \min_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rceil \leq \min_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X}) \tag{4.13}$$

$$\max_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X}) \geq \lfloor \max_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rfloor \geq \max_{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X}) \tag{4.14}$$

Par conséquent, nous considérons la proposition suivante pour l'isolation des défauts par la relaxation des problèmes :

Proposition 9 *Considérons un RdPE avec $TR = TR_{ob} \bigcup TR_{un}$ décrit dans (4.5). Soit $T_f^i \in TR_f$ une transition de défaut tel que $TR_f \subseteq TR_{un}$. Ainsi,*

- *Si $\lceil \min_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rceil \geq 1$ et $\max_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X})$ est fini, alors le défaut associé à la transition T_f^i présente un nombre d'occurrence entre $\lceil \min_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rceil$ et $\lfloor \max_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rfloor$ sur l'horizon $\{1, ..., h\}$.*
- *Si $\lfloor \max_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X}) \rfloor = 0$ alors pas de défaut associé à la transition T_f^i qui s'est produit sur l'horizon $\{1, ..., h\}$.*
- *Si $\min_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X}) = 0$ et $\max_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{c}_{loc_i}^{\top}.\boldsymbol{X}) = +\infty$, alors les informations disponibles ne permettent pas de conclure quant à la présence d'un défaut associé à la transition T_f^i sur l'horizon $\{1, ..., h\}$.*

Preuve

La preuve est similaire à la preuve de la proposition 8 en remplaçant $\boldsymbol{c}_{det}$ par $\boldsymbol{c}_{loc_i}$ et en se basant sur les deux résultats (4.13) et (4.14).

4.3.3 Application

Nous considérons le RdPE de la Figure 4.1 contenant un circuit non observable et présentant le cas de transitions observables indiscernables. La chaîne qui va de la transition t_3 à la place p_2 décrit le comportement nominal du processus, tandis que la partie restante représente l'exploitation non autorisée. La place p_2 représente le stock de pièces dans un système de fabrication et son marquage est le nombre de pièces. Le tir de la transition t_3 modélise l'entrée autorisée d'une pièce et ε_3 représente l'entrée légale dans le stock. Cependant, une utilisation illégale des pièces est exprimée par le sous-réseau restant. Le tir de la transition du défaut ε_2 modélise la sortie illégale d'une pièce, tandis que p_1 représente sa copie conduisant à la fabrication d'une nouvelle pièce mais de qualité inférieure. La transition du défaut ε_1 décrit que toutes les pièces initiales et nouvelles sont stockées dans la place p_2 donc, les tirs de ε_1 et ε_2 décrivent des situations défectueuses. Le système de supervision peut observer la sortie des pièces exprimées par t_1 ou t_2 mais ne peut pas distinguer entre les franchissements de deux transitions.

Soit $TR_{un} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ et $TR_{ob} = \{t_1, t_2, t_3\}$. L'ensemble des alphabets AL est $\{a, b\}$. Le label b est associé à la transition t_3 ($\Omega_b = \{t_3\}$), et les transitions de $\Omega_a = \{t_1, t_2\}$ partagent le même label a. Ainsi, $n = |TR_{un}| = 3$, $n' = |TR_{ob}| = 3$, $n'' = |AL| = 2$, $m = |P| = 5$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'ensemble des transitions des défauts $TR_f \subset TR_{un}$ est $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Les matrices d'incidence W_{un} et W_{ob}^- associées à TR_{un} et TR_{ob} sont comme suit : $W_{un} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $W_{ob} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $W_{ob}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Simulation. Le marquage initial M_0 est nul. Nous rappelons que $M_i = M(p_i)$ est le marquage de départ de la place p_i. Les observations sont définies par la séquence d'étiquettes ba, ce qui signifie que nous avons le tir de la transition t_3 suivi par le tir de t_1 ou t_2. Une séquence réaliste donnant ces transitions observées est $t_3\varepsilon_3\varepsilon_2 t_1$ mais les défauts ε_3 et ε_2 ne sont pas observés et la transition t_1 est observée à travers l'étiquette ambiguë

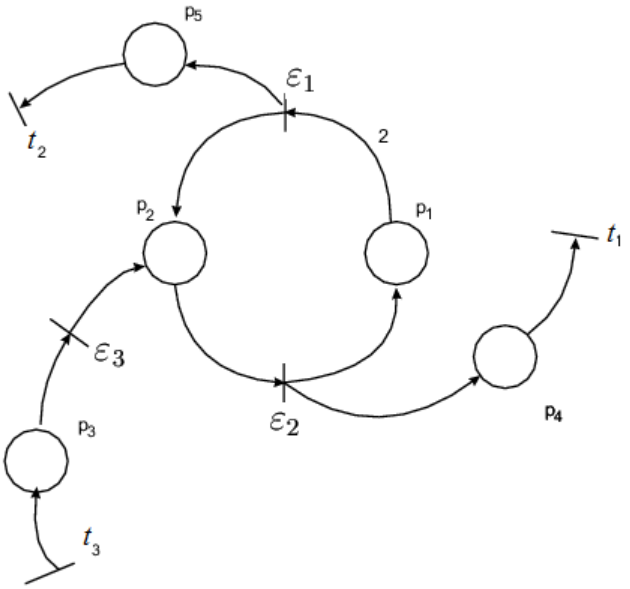


FIGURE 4.1 – RdPE avec un circuit non observable et des événements indiscernables

a. Ainsi, l'horizon associé est $\{1,2\}$ et $h=2$. Nous avons $Y = \begin{pmatrix} (y^{<1>})^T & (y^{<2>})^T \end{pmatrix}^T$ avec $(y^{<1>}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ et $(y^{<2>}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ et les vecteurs à estimer sont $x_{un} = \begin{pmatrix} (x_{un}{}^{<1>})^T & (x_{un}{}^{<2>})^T \end{pmatrix}^T$ et $x_{ob} = \begin{pmatrix} (x_{ob}{}^{<1>})^T & (x_{ob}{}^{<2>})^T \end{pmatrix}^T$.

Détection

Le vecteur ligne $\boldsymbol{c}_{\text{det}}^{\top}$ pour les transitions des défauts ε_1 et ε_2 est la concaténation d'un vecteur de $h.n' = 6$ zéros associés à TR_{ob} et $\begin{pmatrix} (c^{<1>})^{\top} & (c^{<2>})^{\top} \end{pmatrix}^{\top}$ avec $c^{<1>} = c^{<2>} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\top}$. Alors, $\boldsymbol{c}_{\text{det}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\top}$ et, les optimisations donnent $J^{-}_{\text{det}}(\mathbb{R}) = 1$ et $J^{+}_{\text{det}}(\mathbb{R}) = 3$ ce qui montre l'existence d'au moins un défaut et pas plus de 3 occurrences de défauts (donné aussi dans la première ligne du tableau ci-dessous).

Isolation

Le vecteur $\boldsymbol{c}_{loc_1}$ associé à la transition du défaut ε_1 est similaire à $\boldsymbol{c}_{\text{det}}$ sauf que $c^{<1>} = c^{<2>} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\top}$. Le vecteur $\boldsymbol{c}_{loc_2}$ associé à la transition du défaut ε_2 est similaire à $\boldsymbol{c}_{\text{det}}$ sauf que $c^{<1>} = c^{<2>} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\top}$. Les résultats sont présentés dans les deux dernières lignes du tableau suivant.

	$J^-(\mathbb{R})$	$J^+(\mathbb{R})$
$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$	1	3
$\{\varepsilon_1\}$	0	1
$\{\varepsilon_2\}$	0.666	2

— Pour la transition du défaut ε_1 : Aucune conclusion ne peut être faite sur la transition du défaut ε_1 sauf que le nombre d'occurrences de ε_1 ne peut pas être égal ou supérieur à 2.

— Pour la transition du défaut ε_2 : Les solutions relaxées sur $\mathbb{R}$ sont :

1. Pour $[J^-_{loc}(\mathbb{R})]_2 = 0.666$, on a $x_{ob} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0.666 & 0.333 & 0 \end{pmatrix}^\top$ et $x_{un} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0.666 & 0.333 \end{pmatrix}^\top$.
2. Pour $[J^+_{loc}(\mathbb{R})]_2 = 2$, on a $x_{ob} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$ et $x_{un} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^\top$.

   La dernière ligne fait l'isolement du défaut ε_2 puisque la partie entière supérieure du critère minimal est 1.

Donc, la relaxation sur $\mathbb{R}$ conduit à des solutions entières pour $[J^+_{loc}(\mathbb{R})]_2 = 2$ mais à une "fluidification" des solutions à l'itération $< 2 >$ pour $[J^-_{loc}(\mathbb{R})]_2 = 0.666$.

La séquence d'étiquettes *ba* signifie que nous avons deux cas possibles qui sont maintenant explorés. Nous pouvons supprimer l'ambiguïté de l'étiquette a si nous modifions le problème d'estimation de telle sorte que $n'' = n' = 3$ et $C = I_{n'xn'}$. En d'autres termes, deux transitions observables différentes ne partagent pas le même label.
Le cas 1 (respectivement, cas 2) qui est le franchissement de la transition t_3 suivi par le tir de t_1 (respectivement, t_2) est construit si nous prenons $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$ (respectivement, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$). Les résultats sont donnés dans le tableau suivant (x_{ob} n'est pas donné puisque $x_{ob} = Y$)

	$[J^-_{loc}(\mathbb{R})]_2$	x_{un} for $[J^-_{loc}(\mathbb{R})]_2$	$[J^+_{loc}(\mathbb{R})]_2$	x_{un} for $[J^+_{loc}(\mathbb{R})]_2$
Cas 1 :	1	$(0\mathbf{0}00\mathbf{1}1)^\top$	2	$(0\mathbf{0}01\mathbf{2}1)^\top$
Cas 2 :	2	$(0\mathbf{0}01\mathbf{2}1)^\top$	2	$(0\mathbf{0}01\mathbf{2}1)^\top$

Les résultats sont cohérents car les étiquettes non ambiguës qui simplifient le problème conduisent à une restriction de l'intervalle $[[J^{-}_{loc}(\mathbb{R})]_2, [J^{+}_{loc}(\mathbb{R})]_2]$.

4.4 Étude de la complexité et comparaison

Dans cette section, nous présentons une comparaison entre l'approche de diagnostic proposée dans ce chapitre et certaines approches présentées dans la littérature pour le diagnostic des RdPEs partiellement observables basées sur la programmation linéaire.
Un problème PLNE est considéré comme un problème NP-difficile ; c'est-à-dire que sa résolution est effectuée dans un temps exponentiel et ne peut avoir une complexité polynomiale que dans des cas particuliers.

Parmi les algorithmes de résolution classiques, on peut citer la méthode du plan de coupe (cutting-plane method) et la méthode de séparation et d'évaluation progressive (branch-and-bound method), qui présentent une complexité exponentielle dans le pire des cas. Par conséquent, et étant donné que la complexité des problèmes PLNE dépend fortement du nombre de variables, certains travaux ont été réalisés pour réduire le nombre de variables des problèmes PLNE et réduire le nombre des problèmes PLNE à résoudre.

Dans [CGPS11], les auteurs ont conçu une approche de diagnostic basée sur l'estimation de l'ensemble des marquages de base $\mathcal{M}_b(M_0, w)$. Les auteurs ont défini $(|TR_f| \times |M_b(w)|)$ problèmes PLNE pour la détection des défauts. Le nombre des marquages possible de $M_b(w)$ pouvant être important, et par conséquent le nombre des problèmes PLNE à résoudre pour la détection des défauts est considérable. Dans [BCDT09], les auteurs ont suggéré une approche de diagnostic d'un RdP qui nécessite un calcul en ligne de l'ensemble des événements du type défaut en se basant sur le dernier événement observé du mot w. Le calcul en ligne consiste à résoudre des problèmes PLNE basés sur des g-marquages, qui sont des marquages pouvant avoir des composantes négatives. La procédure de détection est basée sur la résolution d'au plus $(2*|w|*|TR_f|)$ problèmes PLNE. Dans [DFMU09], les auteurs ont proposé une approche de diagnostic basée sur la résolution d'au plus $(|TR_f|+1)$ problèmes PLNE pour les RdPEs bornés. L'efficacité des approches mentionnées précé-

demment n'est assurée que dans le cas particulier où le sous-réseau non observable est une "machine à états" acyclique. En fait, dans ce cas, la matrice d'incidence du sous-réseau non observable est une matrice totalement unimodulaire. La résolution dans un temps polynomial est possible car les solutions du problème relaxé sont entières. Dans ce cas, les approches de détection proposées sont d'une complexité polynomiale, sinon elles sont d'une complexité exponentielle.

Les auteurs dans [MSCS12] ont montré que la fluidisation d'un RdP purement logique et partiellement observable produit un RdP Continu (RdPC) non temporisé avec un ensemble convexe de marquages cohérents à une observation donnée w. En utilisant cette propriété de convexité, l'état de diagnostic est calculé en résolvant des problèmes de Programmation Linéaire (PL) non entiers pour le RdPC non temporisé. Pour la détection de défaut, deux problèmes PL non entiers ont été définis pour chaque transition de la séquence observée w et pour chaque transition de défaut $T_f^i \in TR_f$. Ainsi, pour la détection de défaut, $(2 * |w| * |TR_f|)$ problèmes PL non entiers doivent être résolus en supposant que l'inégalité associée au sous-réseau non observable n'admet pas de solutions inadéquates. Cependant, la mise à jour du marquage initial après chaque transition considérée de l'observation w est nécessaire. Par conséquent, la complexité augmente avec le nombre de transitions observées [CKNK19]. C'est pourquoi les auteurs dans [RH09a] ont émis l'hypothèse que le marquage a été périodiquement connu ou a été périodiquement remis à zéro.

Dans ce chapitre, pour éviter la procédure d'estimation en se basant sur le traitement séquentiel de chaque transition de la séquence observée avec l'utilisation des boucles, nous généralisons cette procédure en utilisant des calculs matriciels et vectoriels à la place des boucles. Une nouvelle description du problème est établie, non pas pour une seule transition de la séquence observée mais pour tout l'ensemble des transitions de la séquence observée. En fait, l'algèbre matricielle est un exemple général de vectorisation [Wic14]. Pour la détection des défauts, au plus deux problèmes PL non entiers sont définis pour la séquence observée w. L'hypothèse de l'acyclicité n'est pas considérée pour notre approche, contrairement à de nombreux travaux dans ce contexte. Par ailleurs, la même étiquette peut être associée à plusieurs transitions observables. L'isolation des défauts est établie

par la résolution d'au plus $(2 * |TR_f|)$ problèmes PL non entiers. Par conséquent, notre approche de diagnostic est d'une complexité pratique polynomiale.

4.5 Comparaison numérique avec l'approche discrète basée sur les marquages de base

Dans cette partie, nous vérifions l'efficacité numérique de notre approche en la comparant avec les approches discrètes basées sur les marquages de base [CGS10b]. Nous considérons sur une étude de cas présentée dans [MSCS12], qui peut être facilement trouvée sur le web. Le système de fabrication automatisé est illustré dans la Figure 4.2 et le RdPE associé est représenté à la Figure 4.3.

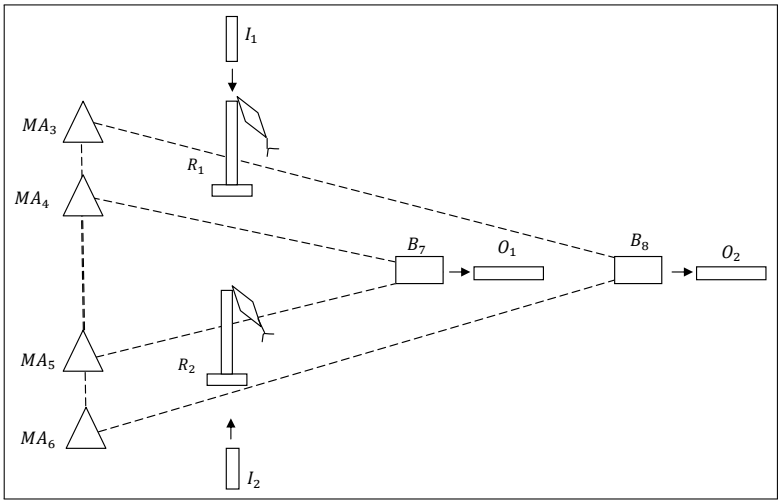


FIGURE 4.2 – Système de fabrication

L'usine de la Figure 4.2 représente une partie d'un grand système de fabrication où MA_3, MA_4, MA_5 et MA_6 sont quatre machines, R_1 et R_2 sont deux robots, B_7 et B_8 sont deux tampons. Deux entrées de pièces à traiter sont I_1 et I_2, et deux sorties pour les pièces traitées sont O_1 et O_2. Deux types de produits finis sont produits par deux lignes de production. Les deux robots R_1 et R_2 qui sont modélisés respectivement par les transitions t_1 et t_2, prennent des pièces des tampons modélisés respectivement par les places p_1 et p_2. Les quatre pièces prises par le robot R_1 sont emballées en couple et placés sur deux bandes transporteuses différentes modélisées respectivement par les places p_3 et

p_4, qui suivent deux lignes parallèles à deux niveaux différents avec p_4 qui est située dans le niveau le plus bas, et p_3 qui est située dans le niveau le plus haut.

Les pièces dans la bande transporteuse représentée par la place p_4 sont traitées par la machine modélisée par la transition ε_7 puis sont mises dans un tampon commun représenté par la place p_7.

Les transitions t_3 et t_4 modélisent respectivement la sortie des pièces des bandes transporteuses modélisées par p_3 et p_6 avec un tampon commun modélisé par p_8. En revanche, la transition t_5 modélise la sortie des pièces du tampon commun p_7. Les défauts du système modélisés par les événements non observables ε_9 et ε_{10} représentent une certaine rupture dans les plus hautes bandes transporteuses au début des deux lignes de production. Les événements non observables ε_7 et ε_8 représentent des événements non défectueux. Chaque pièce sortant respectivement de p_7 et p_8 correspond une nouvelle pièce entrante respectivement dans p_1 et p_2, et le processus est répété cycliquement.

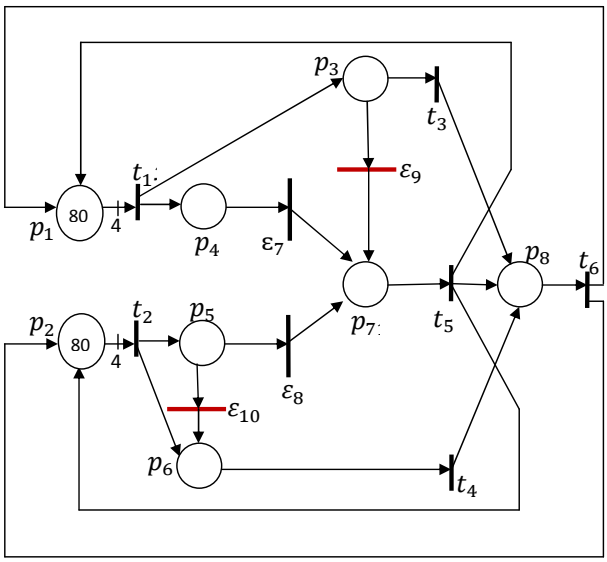


FIGURE 4.3 – Modèle RdPE du système de fabrication de Figure 4.2

Les transitions observables de l'ensemble $TR_{ob} = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$ sont étiquetées comme suit : $L(t_1) = a$, $L(t_2) = b$, $L(t_3) = c$, $L(t_4) = d$, $L(t_5) = e$, $L(t_6) = f$. Nous considérons l'observation $w = aaaabbbbeeeeeeeeeeeeeddddaaaa$ associée à la séquence unique observée $t_1t_1t_1t_1t_2t_2t_2t_2t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_4t_4t_4t_4t_1t_1t_1t_1$ à partir du marquage initial $\begin{pmatrix} 80 & 80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Le Tableau (TABLE 4.1) représente le nombre des marquages de base et le temps de calcul en se basant sur l'algorithme tabulaire de calcul des vecteurs d'explication minimaux [CGS10b, CGS+13, RWSW17]. Nous remarquons que le nombre des marquages de base est considérable surtout pour les 4 dernières observations, quoique le RdPE cconsidéré admette un nombre limité de places et des transitions.

TABLE 4.1 – Approche de diagnostic à base d'estimation de marquages de base

Observation w	Nombre de marquages de base	$Temps\ d'excution(s)$
$t_1t_1t_1t_1$	1	0.149
$t_1t_1t_1t_1t_2t_2t_2t_2$	1	5.79
$t_1t_1t_1t_1t_2t_2t_2t_2t_5t_5t_5t_5$	81	18.10
$t_1t_1t_1t_1t_2t_2t_2t_2t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5$	4830	43.463
$t_1t_1t_1t_1t_2t_2t_2t_2t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5$	34650	297.308
$t_1t_1t_1t_1t_2t_2t_2t_2t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_4t_4t_4$	34650	227.509
$t_1t_1t_1t_1t_2t_2t_2t_2t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_4t_4t_4t_1t_1t_1t_1$	34650	739.524

Dans le tableau (TABLE 4.2), une étude comparative est présentée pour l'isolation des défauts pour trois approches différentes : l'approche basée sur les marquages de base, l'approche basée sur la résolution des problèmes PLNE et l'approche basée sur la relaxation des problèmes PLNE. En utilisant Matlab, les calculs sont effectués sur un PC Intel avec une horloge de 1.80 Ghz. Les trois états de diagnostic, notés N, U, et D, correspondent respectivement à un état Normal, un état Incertain et un état de Défaut. Nous notons Δ_1 et Δ_2 les états de diagnostic respectivement des transitions des défauts ε_9 et ε_{10}.

Pour le marquage initial $\begin{pmatrix} 80 & 80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, le nombre de marquages de base est énorme, ce qui affecte considérablement le temps d'exécution de l'approche. En particulier, en considérant une séquence observée de 28 transitions, l'approche produit 34650 marquages de base pour la dernière transition observée et prend 739 secondes (12mn). Au contraire, le temps d'exécution de notre approche à base de relaxation des problèmes PLNE est négligeable (0.181 secondes). En plus, le temps d'exécution de notre approche ne dépend pas du marquage initial, alors que pour l'approche discrète, une multiplication par 50 a pour conséquence que le calcul ne se termine qu'après un jour

[MSCS12]. La simulation montre également l'efficacité de notre approche basée sur la résolution des problèmes PL non entiers par rapport à l'approche basée sur la résolution des problèmes PLNE.

TABLE 4.2 – Tableau comparatif

Observation w	Approche à base de marquages de base		Approche basée sur des problèmes PLNE		Approche basée sur des problèmes PL	
	(Δ_1, Δ_2)	Temps d'exécution(s)	(Δ_1, Δ_2)	Temps d'exécution(s)	(Δ_1, Δ_2)	Temps d'exécution(s)
$t_1t_1t_1t_1$	(U, N)	0.149	(U, N)	0.15	(U, N)	0.058
$t_1t_1t_1t_1t_2t_2t_2t_2$	(U, U)	5.79	(U, U)	0.15	(U, U)	0.052
$t_1t_1t_1t_1t_2t_2t_2t_2t_5t_5t_5t_5$	(U, U)	18.10	(U, U)	0.155	(U, U)	0.0618
$t_1t_1t_1t_1t_2t_2t_2t_2t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5$	(U, U)	43.463	(U, U)	0.164	(U, U)	0.089
$t_1t_1t_1t_1t_2t_2t_2t_2t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5$	(D, N)	297.308	(D, N)	0.167	(D, N)	0.101
$t_1t_1t_1t_1t_2t_2t_2t_2t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_4t_4t_4t_4$	(D, N)	227.509	(D, N)	0.168	(D, N)	0.144
$t_1t_1t_1t_1t_2t_2t_2t_2t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_5t_4t_4t_4t_4t_1t_1t_1t_1$	(D, N)	739.524	(D, N)	0.182	(D, N)	0.181

4.6 Discussions

4.6.1 Marquage initial inconnu et extension à un horizon glissant

Nous considérons le cas où le marquage initial M_0 est inconnu, mais admet une borne supérieure connue U. Le vecteur b_h dans le système (4.3) peut être réécrit comme $b_h = \mathcal{I}.M_0$ avec $\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I & I & I & \dots & I \end{pmatrix}^T$.

Le système (4.3) devient $A_h.X_{un} + B_h.X_{ob} \leq b_h = \mathcal{I}.M_0 \leq \mathcal{I}.U$. Par conséquent, la forme des systèmes (4.3) et (4.5) est conservée si M_0 est remplacé par sa borne U. Si le marquage initial M_0 du RdPE est connu, nous prenons simplement $U = M_0$.

L'approche est maintenant étendue à un horizon glissant $\{k, \dots, k + h - 1\}$ où k représente l'horizon considéré et h sa largeur constante. Une simple modification des indices permet la généralisation des résultats suivants (l'horizon $\{1, \dots, h\}$ est remplacé

par $\{k, \ldots, k+h-1\}$). Cependant, la borne supérieure du marquage $M^{<k>}$ pour l'indice $< k >$ maintenant noté U^k est exploitée dans l'estimation des vecteurs de compte sur l'horizon $\{k, \ldots, k+h-1\}$. D'ailleurs, nous montrons ci-dessous qu'il peut être déterminé à l'horizon précédent $k-1$. Par conséquent, la procédure générale est la répétition de deux calculs pour $k \geq 1$ où $k = 1$ correspond au premier calcul :

— L'estimation des vecteurs de compte basée sur cette borne supérieure $\{k, \ldots, k+h-1\}$.

— Le calcul de la future borne supérieure U^{k+1} du marquage $M^{<k+1>}$ en utilisant les données de l'horizon $\{k, \ldots, k+h-1\}$

La borne supérieure U^{k+1} est exploitée à l'horizon suivant $\{k+1, \ldots, k+h\}$. Le démarrage de l'approche complète U^1 qui est la borne supérieure du marquage initial M_0 ou directement le marquage initial s'il est connu.

Maintenant, nous décrivons le calcul de la borne supérieure. La détermination de la borne supérieure U^{k_2} du marquage $M^{<k_2>}$ est faite à l'horizon précédent $\{k_1, \ldots, k_1+h-1\}$ avec $k_2 = k_1 + 1$ en connaissant U^{k_1} et les observations associées. En effet, nous pouvons écrire :

$$M^{<k_2>} = M^{<k_1>} + W_{un}.{X_{un}}^{<k_1>} + W_{ob}.{X_{ob}}^{<k_1>} \leq U^{k_1} + W_{un}.{X_{un}}^{<k_1>} + W_{ob}.{X_{ob}}^{<k_1>} \tag{4.15}$$

Alors, (4.3) devient $\begin{pmatrix} A_h \\ A'_h \end{pmatrix}.X_{un} + \begin{pmatrix} B_h \\ B'_h \end{pmatrix}.X_{ob} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}.M^{<k_2>} \leq \begin{pmatrix} \mathcal{I} \\ I \end{pmatrix}.U^{k_1}$

avec $A'_h = \begin{pmatrix} -W_{un} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, $B'_h = \begin{pmatrix} -W_{ob} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ ou

$$\begin{pmatrix} A_h & 0 \\ A'_h & I \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} X_{un} \\ M^{<k_2>} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathcal{I} \\ I \end{pmatrix}.U^{k_1} - \begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix}.X_{ob} \text{ avec } X_{un},\ M^{<k_2>} \geq 0$$

Le système (4.5) est réécrit comme suit :

$$\boldsymbol{A'}.\boldsymbol{X'} \leq \boldsymbol{b'} \text{ avec } \boldsymbol{X'} \geq 0 \tag{4.16}$$

avec $\boldsymbol{A'} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \boldsymbol{C} & 0 & 0 \\ -\boldsymbol{C} & 0 & 0 \\ B_h & A_h & 0 \\ B'_h & A'_h & I \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X'} = \begin{pmatrix} X_{ob} \\ X_{un} \\ M^{<k_2>} \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{b'} = \begin{pmatrix} u \\ Y \\ -Y \\ \mathcal{I}.U^{k_1} \\ U^{k_1} \end{pmatrix}$.

Finalement, le l-éme composant de la borne supérieure U^{k_2} est donné par l'optimisation suivante :

Algorithme.

Pour chaque $l-$éme composant de $U_l^{k_2}$, faire

$U_l^{k_2} = max \begin{pmatrix} 0 & c^T \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ M^{<k_2>} \end{pmatrix}$ pour le système (4.16) avec c est nul sauf son $l-$ième composant qui égal à 1.

Procédure d'accélération

Clairement, les événements observables peuvent apparaître très rapidement. Si les calculs qui utilisent les données de l'horizon $\{k, \ldots, k+h-1\}$ ne sont pas terminés quand des nouveaux franchissements de transitions observables arrivent, un retard dans les calculs sur l'horizon suivant $\{k+1, \ldots, k+h\}$ et dans le diagnostic est produit. Pour éviter un éventuel retard cumulatif entre les observations et la génération des états de diagnostic, nous pouvons limiter les calculs en sautant certaines estimations. Nous pouvons modifier l'estimation ci-dessus de la borne supérieure U^{k_2} en ignorant $k_2 = k_1+1$ dans les relations au profit de $k_2 \in \{k_1+2, \ldots, k_1+h-1\}$. Donc, l'estimation du nouveau vecteur de compte commence à k_2. Si $k_2 = q = k_1+h-1$, le nombre d'estimations ignorées des vecteurs de compte et des marquages est alors $h-2$.

4.6.2 Calcul en parallèle pour la réduction du temps de calcul : Décomposition en sous structures

Dans toutes les approches de diagnostic conçues dans ce mémoire et en particulier l'approche élaborée dans ce chapitre, les calculs sont effectués sur un polyèdre de la forme $A.x_{un} \leq b$ qui exprimée l'évolution du sous-réseau non observable. Le sous-réseau non observable est le graphe résultant de l'élimination des transitions observables du réseau.

Comme ce graphe peut être non connexe, il peut représenter l'union disjointe d'une famille de sous-graphes connexes, G_1,. . . , G_q. Dans ce cas, la matrice A peut être écrite sous la forme d'une matrice diagonale par bloc, après une permutation de lignes et de colonnes [Cor97, PF90].

La permutation des lignes de la matrice A peut être formalisée comme la multiplication à gauche de la matrice A par la matrice de permutation P, qui est la matrice d'identité ayant des lignes réordonnées. Alors, le polyèdre $A.x_{un} \leq b$ est décrit comme suit :

$$P.A.x_{un} \leq P.b \tag{4.17}$$

La permutation des colonnes de la matrice A est le résultat de la multiplication à droite de la matrice A par la matrice de permutation Q, qui est la matrice d'identité ayant des colonnes réordonnées. En outre, la permutation des colonnes de A conduit à une permutation des variables de x_{un} (permutation des lignes de x_{un}). Par conséquent, cette permutation conduit à la multiplication à gauche de x_{un} par la matrice de permutation $Q^\top$. Comme $Q^\top = Q^{-1}$ (une propriété des matrices de permutation), alors le polyèdre (4.17) est écrit comme suit :

$$P.A.Q.Q^\top.x_{un} \leq P.b \tag{4.18}$$

Par conséquent, le polyèdre $A.x_{un} \leq b$ est équivalent au nouveau polyèdre décrit comme suit :

$$A_d.x_d \leq b_d \tag{4.19}$$

avec $A_d = P.A.Q$, $x_d = Q^\top.x_{un}$ et $b_d = P.b$. L'inégalité (4.19) est sous la forme matricielle

diagonale suivante :

$$\begin{pmatrix} A_{|G_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{|G_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{|G_q} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_{un|G_1} \\ x_{un|G_2} \\ \vdots \\ x_{un|G_q} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_{|G_1} \\ b_{|G_2} \\ \vdots \\ b_{|G_q} \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

où q est le nombre de sous-graphes connexes. Alors, l'application des calculs sur le polyèdre $A.x_{un} \leq b$ est équivalente à l'application des calculs sur les polyèdres $A_{|G_i}.x_{un|G_i} \leq b_{|G_i}$ associés aux blocs diagonaux. Ces calculs peuvent être faits simultanément, ce qui permet de réduire énormément le temps du calcul.
La forme diagonale (4.20) est équivalente à la partition du graphe associée au sous-réseau non observable qui est définie comme suit :

Définition 4.1 *[BS95] [BS97] Une partition d'un graphe est une séparation des sommets du graphe en des ensembles non vides de sommets disjoints deux à deux dont l'union permet de trouver tous les sommets.*

Formellement, on peut définir une partition d'un graphe comme suit :

Définition 4.2 *[HL07] Une partition d'un graphe G des sommets V en q sous-graphes sépare l'ensemble des sommets V en un ensemble $\mathcal{P}_q = \{V_1, ..., V_q\}$, qui satisfait les trois propriétés ci-dessous :*

1. $\forall V_i \in \mathcal{P}_q, V_i \neq \emptyset$ *and* $V_i \subset V$
2. $\cup_{i=1..q} V_i = V$
3. $\forall (V_i, V_j) \in \mathcal{P}_q^2, i \neq j \Rightarrow V_i \cap V_j = \emptyset$

Alors, la forme (4.20) est équivalente à la partition du graphe du sous-réseau non observable en q sous-graphes non connexes $\mathcal{P}_q = \{G_1, ..., G_q\}$.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une technique d'estimation d'état et une approche de diagnostic des RdPEs partiellement observables basées sur la programmation

linéaire. Nous avons considéré le cas où une étiquette peut être émise par les tirs de diverses transitions observables conduisant à un non-déterminisme. De plus, le sous-réseau non observable de RdPE peut contenir des circuits. Les défauts du système sont modélisés par quelques transitions non observables.

Une procédure d'estimation d'état est élaborée sur un horizon fuyant. L'évolution du système pour toutes les transitions supposées successivement observées (de mot observé) est décrite par une seule inégalité matricielle en nombre entier, afin d'éviter le traitement séquentiel de chaque transition de la séquence observée. Une technique de relaxation des contraintes dans $\mathbb{R}$ est établie pour déterminer une borne inférieure et une borne supérieure pour les occurrences de défauts. La technique d'estimation est numériquement efficace car les algorithmes standard de programmation linéaire peuvent être utilisés (rappelons que l'algorithme Simplex est exponentiel dans le pire des cas mais est polynomial en moyenne [Sch98]).

Comme illustré par l'exemple comparatif, la détection et l'isolation des défauts peuvent produire efficacement des résultats bien que l'approche utilise un modèle relaxé qui néglige les conditions de tir des transitions non observables et la caractéristique entière des vecteurs de comptage. Il est certain que la précision des résultats peut être améliorée (mais avec une perte d'efficacité en terme de complexité) si des solveurs de programmation linéaire en nombres entiers sont appliqués.

La dernière partie de ce chapitre est une tentative pour résoudre quelques problèmes liés aux méthodes proposées dans ce mémoire et qui ne sont pas encore résolus. Une première problématique concerne le cas où le marquage initial est inconnu mais borné. Une deuxième problématique est l'amélioration de la vitesse de détection et de localisation des défauts. Nous avons alors proposé deux techniques possibles. La première est le diagnostic sur un horizon glissant pour réduire la taille du système à résoudre. La deuxième technique est la décomposition du sous-réseau non observable en des sous-structures indépendantes pour effectuer des calculs en parallèle.

Conclusion générale

Dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés aux problèmes d'estimation et de diagnostic des SEDs modélisés par des RdPEs partiellement observables. Le modèle de défauts est supposé disponible et les défauts du système sont modélisés par un ensemble de transitions non observables. La procédure de l'estimation et de diagnostic du système est déclenchée suite à l'observation d'une séquence de transitions observables à partir d'un marquage initial connu.

Un premier observateur d'état conçu sur un horizon glissant permet de déterminer tout l'espace d'état cohérent avec la séquence observée en ligne. Un modèle algébrique du système est établi sous la forme d'un polyèdre $A.x \leq b$. L'approche d'estimation est constituée de deux étapes. Une première étape permet de déterminer un espace d'état candidat qui est l'ensemble des solutions entières du polyèdre $A.x \leq b$. Ainsi, nous avons conçu un algorithme original qui permet de déterminer toutes les solutions entières de $A.x \leq b$. Il est inspiré de l'algorithme de Fourier-Motzkin qui est un algorithme conçu pour tester l'existence d'une solution pour un ensemble d'inégalités linéaires sur les variables réelles. Une deuxième étape consiste à éliminer les solutions candidates calculées qui ne sont pas associées à une trajectoire possible du RdPE. Cette procédure est réalisée en construisant un RdP p-temporisé où toutes les places présentent une temporisation unitaire. On analyse alors l'ordonnançabilité de la solution candidate en calculant le calendrier associé. L'existence d'une séquence temporelle pour le RdP prouve que la solution candidate associée correspond à une séquence possible du réseau.

Le risque de l'explosion combinatoire peut être une limitation pour ce premier obser-

vateur. Alors, pour combattre ce problème, nous avons conçu un deuxième observateur qui ne calcule qu'un sous-espace réduit d'état, appelé l'ensemble des marquages de base. Dans la littérature, de nombreux travaux sont basés sur le calcul des marquages de base pour un RdPE partiellement observable avec un sous-réseau non observable sans cycles. A contrario, l'approche que nous avons proposée pourra aussi considérer les cas présentant un sous-réseau non observable avec des circuits. Enfin, cet observateur est utilisé pour le diagnostic du système. Nous avons par ailleurs défini des indicateurs de défauts qui permettent de localiser et de caractériser les défauts du système.

Malgré cette amélioration permettant de réduire l'espace d'état à estimer, l'ensemble des marquages de base peut être important. Ainsi, un troisième observateur d'état permettant d'éviter ces écueils est enfin établi. Une nouvelle description du problème sur un horizon fuyant est présentée. À l'inverse des premier et deuxième observateurs d'état, cet observateur considère le cas où deux transitions observables différentes peuvent partager le même label. L'observateur se base sur la résolution des problèmes PLNE. Une technique de relaxation des contraintes est utilisée pour appliquer cet observateur au diagnostic du système dans un temps polynomial. En effet, des algorithmes efficaces de programmation linéaire, tels que l'algorithme du Simplex, l'algorithme de Karmarkar et l'algorithme de Khashiyan, peuvent être appliqués. Une extension possible pour cette approche est le traitement du cas où le marquage initial est inconnu mais admet une borne supérieur connue. Pour accélérer la procédure de diagnostic, deux techniques sont proposés. La première est le diagnostic sur un horizon glissant qui remplace l'horizon fuyant pour éviter le problème d'augmentation des matrices surtout pour les grands réseaux. Le calcul en parallèle est aussi possible en décomposant le sous-réseau non observable en des entités indépendantes.

Pour le troisième observateur conçu pour le diagnostic des RdPE partiellement observables, l'horizon ne peut pas être augmenté infiniment car il est lié au temps d'exécution. Une perspective sera donc de traiter cette limitation de l'approche. Par exemple, on pourra adopter l'hypothèse que le marquage est périodiquement connu [RH09a].

Une deuxième perspective sera de concevoir une approche de diagnostic d'un RdPE partiellement observable décrit par son modèle nominal. Nous avons utilisé le modèle de défauts pour le diagnostic du système. Des techniques bien connues dans la littérature pour

le diagnostic des SEDs ont été basées sur un modèle de défaut [WMS15, CGS+13, LGT17]. Cependant, les techniques fondées sur un modèle de défauts nécessitent des ressources financières et techniques pour élaborer un modèle complet et exact [Rot10]. En outre, en raison de la structure complexe de certains SEDs et de leur environnement perturbateur, il peut exister soient des défauts non modélisables, soient des défauts qui compliquent énormément la description du système. Par conséquent, une décision erronée peut être produite pouvant ainsi entraîner de fausses alarmes ou bien des problèmes de non-détection [ZWS17, HHH17, WJL18]. L'avantage majeur d'une approche de diagnostic basée sur un modèle nominal (modèle de comportement normal) est que la construction du modèle est généralement moins difficile à réaliser, car seul le comportement sans défaut doit être représenté [ACBK15] [LCD+18]. Une piste à explorer serait d'utiliser des inégalités particulières produites hors ligne lors des éliminations de Fourier-Motzkin des variables associées aux transitions non observables d'un modèle nominal pour la détection de défauts. Ces inégalités sont des relations de redondances analytique qui expriment un ensemble de contraintes sur l'évolution des marquages du réseau ne faisant pas apparaître de variable inconnue. Un défaut sera détecté si au moins une de ces contraintes n'est pas vérifiée.

Enfin, il serait intéressant d'étudier la diagnosticabilité du système. La diagnosticabilité exprime la capacité de localiser un défaut après un nombre fini d'observations pour n'importe quelle évolution du système. En exploitant de nouveau l'algorithme Fourier-Motzkin, nous visons à développer une approche permettant de décider sur la diagnosticabilité du système si possible dans un temps polynomial.

Bibliographie

[ACBK15] Sabrina Aouaouda, Mohammed Chadli, Moussa Boukhnifer, and Hamid-Reza Karimi. Robust fault tolerant tracking controller design for vehicle dynamics : A descriptor approach. *mechatronics*, 30 :316–326, 2015.

[AFH94] Rajeev Alur, Limor Fix, and Thomas A Henzinger. A determinizable class of timed automata. In *International Conference on Computer Aided Verification*, pages 1–13. Springer, 1994.

[All08] Adib Allahham. *Surveillance des systèmes à événements discrets commandés : Conception et implémentation en utilisant l'automate programmable industriel*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2008.

[AP94] Cosimo Anglano and Luigi Portinale. Bw analysis : a backward reachability analysis for diagnostic problem solving suitable to parallel implementation. In *International Conference on Application and Theory of Petri Nets*, pages 39–58. Springer, 1994.

[Bar97] A Barg. Complexity issues in coding theory, to appear in handbook of coding theory,(vs pless, wc huffman and ra brualdi eds.), 1997.

[BCB12] Hammadi Bennoui, Allaoua Chaoui, and Kamel Barkaoui. On structural analysis of interacting behavioral petri nets for distributed causal

model-based diagnosis. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 23(07) :1523–1541, 2012.

[BCC16] Francesco Basile, Pasquale Chiacchio, and Jolanda Coppola. A novel model repair approach of timed discrete-event systems with anomalies. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 13(4) :1541–1556, 2016.

[BCD05] Patricia Bouyer, Fabrice Chevalier, and Deepak D'Souza. Fault diagnosis using timed automata. In *International Conference on Foundations of Software Science and Computation Structures*, pages 219–233. Springer, 2005.

[BCDT09] Francesco Basile, Pasquale Chiacchio, and Gianmaria De Tommasi. An efficient approach for online diagnosis of discrete event systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(4) :748–759, 2009.

[BCS14] Francesco Basile, Maria Paola Cabasino, and Carla Seatzu. State estimation and fault diagnosis of time labeled petri net systems with unobservable transitions. *IEEE Trans. Autom. Control*, pages 997–1009, 2014.

[BEGFB94] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, and Venkataramanan Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. Siam, 1994.

[Ber15] Elwyn Berlekamp. *Algebraic coding theory*. World Scientific, 2015.

[BFHJ03] Albert Benveniste, Eric Fabre, Stefan Haar, and Claude Jard. Diagnosis of asynchronous discrete-event systems : a net unfolding approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(5) :714–727, 2003.

[BJ04] Rene K Boel and George Jiroveanu. Distributed contextual diagnosis for very large systems. 2004.

[BLG17] Abderraouf Boussif, Baisi Liu, and Mohamed Ghazel. An experimental comparison of three diagnosis techniques for discrete event sys-

tems. In *DX'17-28th International Workshop on Principles of Diagnosis*, page p8, 2017.

[BME+06] Rebiha Bekrar, Nadhir Messai, Najib Essounbouli, Abdelaziz Hamzaoui, Bernard Riera, et al. Identification of discrete event systems using ordinary petri nets. In *IARACD-Workshop on Advanced on Control and Diagnosis, Nancy, France*, volume 11, 2006.

[BS95] Tiffany M Barnes and Carla D Savage. A recurrence for counting graphical partitions. *the electronic journal of combinatorics*, 2(1) :R11, 1995.

[BS97] Tiffany M Barnes and Carla D Savage. Efficient generation of graphical partitions. *Discrete applied mathematics*, 78(1-3) :17–26, 1997.

[CBC09] Christine Choppy, Olivier Bertrand, and Patrice Carle. Coloured petri nets for chronicle recognition. In *International Conference on Reliable Software Technologies*, pages 266–281. Springer, 2009.

[CDKK17] Amira Chouchane, Philippe Declerck, Atef Kheder, and Anas Kamoun. Diagnosis using an estimation method for partially observed petri net. In *2017 20th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*, volume 50. IEEE, 2017.

[CDKK18] Amira Chouchane, Philippe Declerck, Atef Khedher, and Anas Kamoun. Diagnostic based on estimation using linear programming for partially observable petri nets with indistinguishable events. *International Journal of Systems Science : Operations & Logistics*, pages 1–14, 2018.

[CDN+16] Amira Chouchane, Philippe Declerck, Othman Nasri, Atef Kheder, and Anas Kamoun. Linear algebraic formalism for state estimation of labeled petri net. In *2016 17th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA)*, pages 717–722. IEEE, 2016.

[CGPS11] Maria Paola Cabasino, Alessandro Giua, Marco Pocci, and Carla Seatzu. Discrete event diagnosis using labeled petri nets. an application to ma-

nufacturing systems. *Control Engineering Practice*, 19(9) :989–1001, 2011.

[CGS04] Daniele Corona, Alessandro Giua, and Carla Seatzu. Marking estimation of petri nets with silent transitions. In *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, volume 1, pages 966–971. IEEE, 2004.

[CGS10a] Maria Paola Cabasino, Alessandro Giua, and Carla Seatzu. Diagnosis using labeled petri nets : faults may either be silent or undistinguishable events. In *Proc. IEEE Conference on Automation Science and Engineering, Toronto, Canada*, 2010.

[CGS10b] Maria Paola Cabasino, Alessandro Giua, and Carla Seatzu. Fault detection for discrete event systems using petri nets with unobservable transitions. *Automatica*, 46(9) :1531–1539, 2010.

[CGS+13] Maria Paola Cabasino, Alessandro Giua, Carla Seatzu, et al. Diagnosis using labeled petri nets with silent or undistinguishable fault events. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics : Systems*, 43(2) :345–355, 2013.

[CHS17] Maria Paola Cabasino, Christoforos N Hadjicostis, and Carla Seatzu. Marking observer in labeled petri nets with application to supervisory control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(4) :1813–1824, 2017.

[CKNK19] Amira Chouchane, Atef Khedher, Othman Nasri, and Anas Kamoun. Diagnosis of partially observed petri net based on analytical redundancy relationships. *Asian Journal of Control*, 21(5) :1–14, 2019.

[Cor97] Thomas Cormen. Introduction à l'algorithmique. 1997.

[DA89] R David and H Alla. Du grafcet aux réseaux de petri. traité des nouvelles technologies, série automatique. *Hermès, Paris*, 1989.

[Dan72] George B Dantzig. Fourier-motzkin elimination and its dual. Technical report, STANFORD UNIV CA DEPT OF OPERATIONS RESEARCH, 1972.

[DB14a] Philippe Declerck and Patrice Bonhomme. State estimation of timed labeled petri nets with unobservable transitions. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 11(1) :103–110, 2014.

[DB14b] Philippe Declerck and Patrice Bonhomme. State estimation of timed labeled petri nets with unobservable transitions. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 11(1) :103–110, 2014.

[dec]

[DFM08] M Dotoli, MP Fanti, and AM Mangini. Fault detection of discrete event systems using petri nets and integer linear programming. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2) :6554–6559, 2008.

[DFMU09] Mariagrazia Dotoli, Maria Pia Fanti, Agostino Marcello Mangini, and Walter Ukovich. On-line fault detection in discrete event systems by petri nets and integer linear programming. *Automatica*, 45(11) :2665–2672, 2009.

[FBJ02] Eric Fabre, Albert Benveniste, and Claude Jard. Distributed diagnosis for large discrete event dynamic systems. In *Proc of the IFAC congress*, 2002.

[Fin91] Alain Finkel. The minimal coverability graph for petri nets. In *International Conference on Application and Theory of Petri Nets*, pages 210–243. Springer, 1991.

[FMU11] Maria Pia Fanti, Agostino Marcello Mangini, and Walter Ukovich. Fault detection by labeled petri nets and time constraints. In *Dependable Control of Discrete Systems (DCDS), 2011 3rd International Workshop on*, pages 168–173. IEEE, 2011.

[FMU13] Maria Pia Fanti, Agostino Marcello Mangini, and Walter Ukovich. Fault detection by labeled petri nets in centralized and distributed approaches. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 10(2) :392–404, 2013.

[GCS05] Alessandro Giua, Daniele Corona, and Carla Seatzu. State estimation of λ-free labeled petri nets with contact-free nondeterministic transitions. *Discrete Event Dynamic Systems*, 15(1) :85–108, 2005.

[GDPG+11] Andrea Gasparri, Donato Di Paola, Alessandro Giua, Giovanni Ulivi, and David Naso. Consensus-based decentralized supervision of petri nets. In *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, pages 1128–1135. IEEE, 2011.

[GL03] Sahika Genc and Stéphane Lafortune. Distributed diagnosis of discrete-event systems using petri nets. In *International Conference on Application and Theory of Petri Nets*, pages 316–336. Springer, 2003.

[GL07] Sahika Genc and Stéphane Lafortune. Distributed diagnosis of place-bordered petri nets. *IEEE Trans. Automation Science and Engineering*, 4(2) :206–219, 2007.

[GRM+08] E García, L Rodríguez, F Morant, A Correcher, E Quiles, and R Blasco. Fault diagnosis with coloured petri nets using latent nestling method. In *Industrial Electronics, 2008. ISIE 2008. IEEE International Symposium on*, pages 986–991. IEEE, 2008.

[GS07] Alessandro Giua and Carla Seatzu. A systems theory view of petri nets. In *Advances in control theory and applications*, pages 99–127. Springer, 2007.

[GTB05] Mohamed Ghazel, A Togueni, and M Bigang. A monitoring approach for discrete events systems based on a time petri net model. In *Proc. of 16th IFAC world congress*, pages 5–15, 2005.

[GTY09] Mohamed Ghazel, Armand Toguyéni, and Pascal Yim. State observer for des under partial observation with time petri nets. *Discrete Event Dynamic Systems*, 19(2) :137–165, 2009.

[HHH17] Hamed Habibi, Ian Howard, and Reza Habibi. Bayesian sensor fault detection in a markov jump system. *Asian Journal of Control*, 19(4) :1465–1481, 2017.

[HL07] Zhiquan Hu and Hao Li. Partition of a graph into cycles and vertices. *Discrete Mathematics*, 307(11) :1436–1440, 2007.

[HV99] Christoforos N Hadjicostis and George C Verghese. Monitoring discrete event systems using petri net embeddings. In *International Conference on Application and Theory of Petri Nets*, pages 188–207. Springer, 1999.

[IA06] Marian V Iordache and Panos J Antsaklis. Decentralized supervision of petri nets. *Supervisory Control of Concurrent Systems : A Petri Net Structural Approach*, pages 93–123, 2006.

[Imb90] Jean-Louis Imbert. About redundant inequalities generated by fourier's algorithm. In *Artificial Intelligence IV*, pages 117–127. Elsevier, 1990.

[Imb93] Jean-Louis Imbert. Fourier's elimination : Which to choose ? In *PPCP*, pages 117–129, 1993.

[JB04] George Jiroveanu and René K Boel. Contextual analysis of petri nets for distributed applications. In *16th Int. Symp. on Mathematical Theory of Networks and Systems (Leuven, Belgium)*, volume 135, page 136, 2004.

[JB06] George Jiroveanu and René K Boel. A distributed approach for fault detection and diagnosis based on time petri nets. *Mathematics and Computers in Simulation*, 70(5-6) :287–313, 2006.

[JBB08] George Jiroveanu, René K Boel, and Behzad Bordbar. On-line monitoring of large petri net models under partial observation. *Discrete Event Dynamic Systems*, 18(3) :323–354, 2008.

[Koh67] David A Kohler. Projections of convex polyhedral sets. Technical report, CALIFORNIA UNIV BERKELEY OPERATIONS RESEARCH CENTER, 1967.

[Kuh56] Harold W Kuhn. Solvability and consistency for linear equations and inequalities. *The American Mathematical Monthly*, 63(4) :217–232, 1956.

[LCD+18] Linlin Li, Mohammed Chadli, Steven X Ding, Jianbin Qiu, and Ying Yang. Diagnostic observer design for t–s fuzzy systems : Application

to real-time-weighted fault-detection approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(2) :805–816, 2018.

[LD07] Dimitri Lefebvre and Catherine Delherm. Diagnosis of des with petri net models. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 4(1) :114–118, 2007.

[Lef12] Dimitri Lefebvre. Diagnosis with petri nets according to partial events and states observation. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(20) :1244–1249, 2012.

[Lef14] Dimitri Lefebvre. On-line fault diagnosis with partially observed petri nets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(7) :1919–1924, 2014.

[LGT17] Baisi Liu, Mohamed Ghazel, and Armand Toguyéni. On-the-fly and incremental technique for fault diagnosis of discrete event systems modeled by labeled petri nets. *Asian Journal of Control*, 19(5) :1659–1671, 2017.

[LH11] Lingxi Li and Christoforos N Hadjicostis. Least-cost transition firing sequence estimation in labeled petri nets with unobservable transitions. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 8(2) :394–403, 2011.

[LWSC10] Feihua Lu, Weimin Wu, Hongye Su, and Jian Chu. Non-blocking decentralized control of discrete event systems based on petri nets. *Asian Journal of Control*, 12(3) :323–335, 2010.

[Met12] Salowa Methnani. *Diagnostic, reconstruction et identification des défauts capteurs et actionneurs : application aux station d'épurations des eaux usées*. PhD thesis, Université de Toulon, 2012.

[MSCS12] Cristian Mahulea, Carla Seatzu, Maria Paola Cabasino, and Manuel Silva. Fault diagnosis of discrete-event systems using continuous petri nets. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A : Systems and Humans*, 42(4) :970–984, 2012.

[Mur89] Tadao Murata. Petri nets : Properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*, 77(4) :541–580, 1989.

[Nar01] Guy Alain Narboni. *Un cas remarquable de systèmes linéaires : les systèmes monotones Résolution et application à la vérification formelle de programmes*. PhD thesis, 2001.

[OBM16] Najla Haje Obeid, Thierry Boileau, and Babak Nahid Mobarakeh. Model dynamique et signature du défaut inter-spires intermittent dans les têtes de bobines d'une msap. In *Symposium de Genie Electrique*, 2016.

[PF90] Alex Pothen and Chin-Ju Fan. Computing the block triangular form of a sparse matrix. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 16(4) :303–324, 1990.

[RBLMRT06] E Ruiz-Beltran, E Lopez-Mellado, and A Ramirez-Trevino. Fault diagnosis based on petri net reduced models. In *Electrical and Electronics Engineering, 2006 3rd International Conference on*, pages 1–5. IEEE, 2006.

[RH06] Yu Ru and Christoforos N Hadjicostis. State estimation in discrete event systems modeled by labeled petri nets. In *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, pages 6022–6027. IEEE, 2006.

[RH09a] Yu Ru and Christoforos N Hadjicostis. Bounds on the number of markings consistent with label observations in petri nets. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 6(2) :334–344, 2009.

[RH09b] Yu Ru and Christoforos N Hadjicostis. Fault diagnosis in discrete event systems modeled by partially observed petri nets. *Discrete Event Dynamic Systems*, 19(4) :551, 2009.

[RLL99] Karen Rudie, Stéphane Lafortune, and Feng Lin. Minimal communication in a distributed discrete-event control system. In *American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999*, volume 3, pages 1965–1970. IEEE, 1999.

[Rot10] Matthias Roth. *Identification and Fault Diagnosis of Industrial Closed-loop Discrete Event Systems : Identifikation und Fehlerdiagnose Industrieller Ereignisdiskreter Closed-Loop-Systeme*. Logos Verlag Berlin GmbH, 2010.

[RTRBALLM12] Antonio Ramirez-Trevino, Elvia Ruiz-Beltran, Jesús Aramburo-Lizarraga, and Ernesto Lopez-Mellado. Structural diagnosability of des and design of reduced petri net diagnosers. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A : Systems and Humans*, 42(2) :416–429, 2012.

[RWSW17] Ning Ran, Shouguang Wang, Hongye Su, and Chengying Wang. Fault diagnosis for discrete event systems modeled by bounded petri nets. *Asian Journal of Control*, 19(4) :1532–1541, 2017.

[SB02] Geert Stremersch and René K Boel. Structuring acyclic petri nets for reachability analysis and control. *Discrete Event Dynamic Systems*, 12(1) :7–41, 2002.

[Sch98] Alexander Schrijver. *Theory of linear and integer programming*. John Wiley & Sons, 1998.

[SJ93] VS Srinivasan and Mohsen A Jafari. Fault detection/monitoring using time petri nets. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, 23(4) :1155–1162, 1993.

[SM12] Moamar Sayed-Mouchaweh. Decentralized fault free model approach for fault detection and isolation of discrete event systems. *European Journal of Control*, 18(1) :82–93, 2012.

[SMPCM08] M Sayed-Mouchaweh, A Philippot, and Véronique Carré-Ménétrier. Decentralized diagnosis based on boolean discrete event models : application on manufacturing systems. *International journal of production research*, 46(19) :5469–5490, 2008.

[SP90] P David Stotts and Terrence W Pratt. Coverability graphs for a class of

synchronously executed unbounded petri net. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 10(3) :253–260, 1990.

[STT10] Ramla Saddem, Armand Toguyeni, and Moncef Tagina. Consistency's checking of chronicles' set using time petri nets. In *Control & Automation (MED), 2010 18th Mediterranean Conference on*, pages 1520–1525. IEEE, 2010.

[WH05] Yingquan Wu and Christoforos N Hadjicostis. Algebraic approaches for fault identification in discrete-event systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(12) :2048–2055, 2005.

[Wic14] Hadley Wickham. *Advanced r*. Chapman and Hall/CRC, 2014.

[WJL18] Shenquan Wang, Yulian Jiang, and Yuanchun Li. Distributed h8 consensus fault detection for uncertain t-s fuzzy systems with time-varying delays over lossy sensor networks. *Asian Journal of Control*, 2018.

[WMS15] Xu Wang, Cristian Mahulea, and Manuel Silva. Diagnosis of time petri nets using fault diagnosis graph. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(9) :2321–2335, 2015.

[YH11] S Anbu Yazhini and DS HarishRam. High level synthesis of data flow graphs using integer linear programming for switching power reduction. In *Signal Processing, Communication, Computing and Networking Technologies (ICSCCN), 2011 International Conference on*, pages 475–479. IEEE, 2011.

[Zem03] Ryad Zemouri. *Contribution à la surveillance des systèmes de production à l'aide des réseaux de neurones dynamiques : Application à la e-maintenance*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2003.

[ZTZG17] Ma Ziyue, Yin Tong, Li Zhiwu, and Alessandro Giua. Basis marking representation of petri net reachability spaces and its application to the reachability problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(3) :1078–1093, 2017.

[ZWS17] Meng Zhou, Zhenhua Wang, and Yi Shen. Fault detection and isolation method based on h-/h8 unknown input observer design in finite frequency domain. *Asian Journal of Control*, 19(5) :1777–1790, 2017.

Titre : titre (en français) Estimation et diagnostic de réseaux de Petri partiellement observables

Mots clés : Diagnostic, réseaux de Petri étiquetés partiellement observables, marquages de base, horizon glissant, relaxation des problèmes PLNE, horizon fuyant.

Résumé : Avec l'évolution de la technologie, l'homme a procédé à la conception de systèmes de plus en plus complexes mais aussi de plus en plus sensibles aux défauts qui peuvent les affecter. Une procédure de diagnostic contribuant au bon déroulement du processus est ainsi nécessaire. Dans ce contexte, le but de cette thèse est le diagnostic des systèmes à événements discrets modélisés par des Réseaux de Petri Étiquetés (RdPE) partiellement observables. Sous l'hypothèse que chaque défaut est modélisé par le tir d'une transition non observable, deux approches de diagnostic à base d'estimation d'état sont développées. Une première approche composée de deux étapes consiste à estimer l'ensemble des marquages de base sur un horizon élémentaire glissant. La première étape consiste à déterminer un ensemble de vecteurs candidats à partir d'une approche algébrique. La deuxième étape consiste à éliminer les solutions candidates calculées qui ne sont pas associées à une trajectoire possible du RdPE. Comme l'ensemble des marquages de base pourra aussi être important, une deuxième approche de diagnostic évitera cet écueil en n'estimant pas les marquages. Une technique de relaxation des problèmes de Programmation Linéaire en Nombres Entiers (PLNE) sur un horizon fuyant est utilisée afin d'avoir un diagnostic en temps polynomial.

Title : titre (en anglais) Estimation and diagnosis of partially observed Petri nets

Keywords : Diagnostic, partially observed Labeled Petri Nets, basis markings, sliding horizon, relaxation of ILP problems, receding horizon.

Abstract : With the evolution of technology, humans have made available systems increasingly complex but also increasingly sensitive to faults that may affect it. A diagnostic procedure which contributes to the smooth running of the process is thus necessary. In this context, the aim of this thesis is the diagnosis of discrete event systems modeled by partially observed Labeled Petri Nets (LPNs). Under the assumption that each defect is modeled by the firing of an unobservable transition, two diagnostic approaches based on state estimation are developed. A first approach is to estimate the set of basis markings on a sliding elementary horizon. This approach is carried out in two steps. The first step is to determine a set of candidate vectors from an algebraic approach. The second step is to eliminate the calculated candidate solutions that are not associated with a possible trajectory of the LPN. As the set of basis markings can also be huge, a second diagnostic approach will avoid this pitfall by not estimating the markings. A relaxation technique of Integer Linear Programming (ILP) problems on a receding horizon is used to have a diagnosis in polynomial time.