



HAL
open science

Blossoming bijections, multitriangulations: What about other surfaces?

Mathias Lepoutre

► **To cite this version:**

Mathias Lepoutre. Blossoming bijections, multitriangulations: What about other surfaces?. Combinatorics [math.CO]. Université Paris Saclay (COmUE), 2019. English. NNT: 2019SACLX067. tel-02326948

HAL Id: tel-02326948

<https://theses.hal.science/tel-02326948>

Submitted on 22 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Bijections bourgeonnantes, Multitriangulations: Quid des autres surfaces?

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay
préparée à l'École polytechnique

École doctorale n°580 Sciences et technologies de l'information et de la
communication (STIC)
Spécialité de doctorat : mathématiques et informatique

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 24/09/2019, par

MATHIAS LEPOUTRE

Composition du Jury :

Béatrice de Tillière Professeure, Université Paris Dauphine (CEREMADE)	Présidente
Guillaume Chapuy Directeur de Recherche, CNRS, Université Paris Diderot (IRIF)	Rapporteur
Stefan Felsner Professeur, Technische Universität Berlin (Institut für Mathematik)	Rapporteur
Marni Mishna Professeure, Simon Fraser University (Mathematics Department)	Examinatrice
Dominique Poulalhon Maîtresse de Conférence, Université Paris Diderot (IRIF)	Examinatrice
Gilles Schaeffer Directeur de Recherche, CNRS, École polytechnique (LIX)	Examineur
Marie Albenque Chargée de Recherche, CNRS, École polytechnique (LIX)	Directrice de thèse
Vincent Pilaud Chargé de Recherche, CNRS, École polytechnique (LIX)	Co-directeur de thèse

Cette thèse s’articule autour de deux projets principaux. Le premier projet, concerne l’extension de la bijection bourgeonnante d’ouverture de cartes planaires proposée par Schaeffer [Sch97] au cas des cartes non planaires. Dans un premier article [Lep19], je présente une généralisation de la bijection de Schaeffer au cas des cartes d’une surface orientable de genre fixé, et utilise cette bijection pour retrouver un résultat structurel, la rationalité paramétrique de la série des cartes, qui avait été prouvé par des méthodes analytiques par Bender et Canfield [BC91], mais dont on ne connaissait pas encore de preuve bijective. Afin d’obtenir des résultats de rationalité bivariée, correspondant à l’énumération des cartes par sommets et faces plutôt que simplement par arêtes, je présente ensuite un travail en collaboration avec Marie Albenque [AL19] qui raffine la bijection et les calculs menant à la rationalité paramétrique des cartes dans [Lep19]. Cette extension a aussi été l’occasion de simplifier sensiblement les calculs menant à la rationalité, et fournit donc une meilleure interprétation combinatoire des résultats de rationalité. Enfin, une collaboration avec Maciej Dołęga [DL19] nous a permis de généraliser la bijection de [Lep19] au cas des cartes pointées, et au cas des cartes d’une surface quelconque (pas nécessairement orientable), ce qui nous a alors permis d’obtenir de nouveaux résultats de rationalité sur la série des cartes d’une surface quelconque. Je mentionne aussi les limites de cette méthode à travers une tentative de généralisation de cette approche au cas des hexangulations, explorée avec Baptiste Louf.

Le deuxième projet, en collaboration avec Vincent Pilaud [LP19] porte sur les multitriangulations de surfaces quelconques en généralisant notamment les résultats obtenus par Pilaud et Santos [PS09]. Ce projet n’est pas encore finalisé, et plusieurs points demeurent donc pour l’instant à l’état de conjectures.

Cette thèse est organisée comme suit:

- La partie I, rédigée en français, et composée de trois chapitres, consiste en une introduction et un résumé de ma thèse. Le chapitre 1 présente les notions utilisées, et propose une brève bibliographie des différentes approches d’étude des cartes. Le chapitre 2 consiste en un résumé détaillé de mes travaux sur les bijections bourgeonnantes [Lep19, AL19, DL19], et mentionne la tentative de généralisation au cas des hexangulations. Enfin le chapitre 3 présente un résumé détaillé de mes travaux sur les multitriangulations [LP19], ainsi que plusieurs possibles nouvelles pistes de recherches autour des multitriangulations dans la section 3.5.
- La partie II, rédigée en anglais, présente en trois chapitres mes trois articles [Lep19, AL19, DL19] traitant de l’étude des cartes.
- La partie III, rédigée en anglais, contient un unique chapitre, qui présente mon article en cours [LP19] traitant de l’étude des multitriangulations.

Table des Matières

I	Introduction et résumé	9
1	Cartes: énumération, bijections	11
1.1	Échauffement: les cartes planaires 4-valentes	11
1.2	Énumération, rationalité, structure	14
1.2.1	Méthode de Tutte	14
1.2.2	Rationalité des séries génératrices de cartes non planaires . . .	14
1.2.3	Rationalité bivariée	15
1.2.4	Autres résultats énumératifs concernant les cartes	16
1.2.5	Structure des orientations d'une carte	17
1.3	Combinatoire bijective des cartes	18
1.3.1	Bijections pour cartes planaires	19
1.3.2	Bijections pour cartes sur d'autres surfaces	25
1.3.3	Applications probabilistes	28
1.4	Les cartes: formalisme, propriétés	29
1.4.1	Surface, carte	29
1.4.2	Propriétés de cartes	33
1.4.3	Marches	38
2	Bijection bourgeonnante sur une surface quelconque	41
2.1	L'ouverture	41
2.1.1	Ouverture d'une carte de genre supérieur	41
2.1.2	Extension aux cartes non-bicoloriables	45
2.1.3	Extension aux cartes non orientables	47
2.1.4	Extension aux cartes pointées	49
2.2	Décomposition des cartes unicellulaires	51
2.2.1	Carte unicellulaire, cœur, schéma	51
2.2.2	Réenracinement	56
2.2.3	Élagage, raccourci, feuilles colorées	57
2.2.4	Le cas non-orientable: carte virtuellement enracinée, réen- racinement sur un coin	58
2.3	Le cas 4-valent	60
2.3.1	Encodage des branches par des chemins de Motzkin	60
2.3.2	Le graphe d'inclinaison	64
2.4	Résultats énumératifs	65
2.4.1	Rationalité univariée en groupant par une surjection	67
2.4.2	Rationalité en groupant par une permutation	69
2.4.3	Rationalité pour les schémas avec cycles inclinés	73
2.5	Extension au cas des hexangulations biparties	76

3	Multitriangulations sur une surface quelconque	79
3.1	Introduction	79
3.2	Multitriangulations d'un polygone infini	80
3.2.1	Polygones infinis	80
3.2.2	Multitriangulations infinies	81
3.3	Multitriangulations d'une surface quelconque	83
3.3.1	Surfaces et revêtement universel	84
3.3.2	k -croisement, k -étoile et k -triangulations sur une surface quelconque	84
3.3.3	Propriétés structurelles	86
3.4	Multitriangulations d'un demi-cylindre	88
3.4.1	Demi-cylindre avec deux points marqués	88
3.4.2	Demi-cylindre quelconque	89
3.5	Ouvertures probabilistes	91
3.5.1	Grande multitriangulation aléatoire du disque	91
3.5.2	Multitriangulation infinies et limites de multitriangulations	93
3.5.3	k -triangulation du disque, $(2k + 1)$ -angulations de grand genre	93

II Blossoming bijection for pointed maps on any surface 95

1	Blossoming bijection for higher-genus maps	97
1.1	Introduction	97
1.2	Orientations in higher genus	100
1.2.1	General	100
1.2.2	Structure of orientations of a graph	102
1.3	Closing and opening maps	104
1.3.1	Blossoming maps and their closure	105
1.3.2	The opening algorithm	107
1.3.3	Opening a bicolored map	109
1.4	Enumeration and rationality	112
1.4.1	Getting rid of well-rootedness	112
1.4.2	Reducing a unicellular map to a labeled scheme	115
1.4.3	Analyzing a scheme	117
1.4.4	The offset graph	120
1.5	Rationality of maps with a given scheme	122
1.5.1	Counting rerooted pruned maps	122
1.5.2	Proof of the symmetry	124
1.5.3	Proof of the sum cancellation	125
1.6	Opening non-bicolored maps	127
2	Bivariate rationality of higher-genus maps	131
2.1	Introduction	131
2.2	Notations, definitions and first constructions	134
2.2.1	Notations	134
2.2.2	Maps	134
2.2.3	Orientations	136
2.2.4	Blossoming maps, blossoming cores, blossoming schemes	137
2.3	Bijection for higher-genus maps, counting vertices and faces	138

2.3.1	Closure of blossoming maps	138
2.3.2	Good blossoming maps and closures	139
2.3.3	From unicellular maps to schemes	141
2.3.4	Proof of Theorem 2.3.11	142
2.4	Criterion for rationality via Motzkin walks	144
2.4.1	Weighted Motzkin paths	145
2.4.2	Symmetry and rationality	146
2.4.3	Decomposition of cores	148
2.5	Bijjective proof of the rationality of $M_g(z_\bullet, z_\circ)$	150
2.5.1	Definitions and offset graph	152
2.5.2	The univariate case	156
2.5.3	The bivariate case	160
3	Blossoming bijection and parametric rationality on any surface	165
3.1	Introduction	165
3.1.1	Enumeration – solving functional equations	166
3.1.2	Enumeration – understanding the nature of enumerated objects	167
3.1.3	Organization of the paper	168
3.2	Definitions	169
3.3	Bijection	171
3.3.1	Left-most geodesic tree	171
3.3.2	Blossoming unicellular maps	175
3.3.3	Opening of a map along a spanning tree	176
3.3.4	Closing a unicellular blossoming map	178
3.3.5	Opening and closure are inverse bijections	179
3.3.6	An opening bijection for general maps	181
3.4	Decomposition of a unicellular map	181
3.4.1	Core, scheme	182
3.4.2	Rerooting	185
3.4.3	The shortcut algorithm	187
3.5	The 4-valent case	188
3.5.1	Motzkin paths	189
3.5.2	Branches as Motzkin paths	190
3.5.3	Structure of the offset submap	193
3.6	Enumerative results for general maps	198
3.6.1	Rationality in D	198
3.6.2	Rationality for schemes with no offset cycle	200
3.6.3	Rationality for schemes with offset loops	201
III	Multitriangulations on any surface	203
1	Multitriangulations on any surface	205
1.1	Multitriangulations of infinite polygons	207
1.1.1	Infinite polygons	207
1.1.2	Infinite multitriangulations	207
1.1.3	Proof of Theorem 1.1.8	209
1.2	Multitriangulations of a general surface	215
1.2.1	Surfaces and their universal covers	215

1.2.2	<i>k</i> -crossings, <i>k</i> -stars and <i>k</i> -triangulations on surfaces	215
1.2.3	Structural properties	217
1.3	Multitriangulations of the half-cylinder	221
1.3.1	Half-cylinder with two marked points	221
1.3.2	Half-cylinders with arbitrary many marked points	223

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier du fond du cœur mes deux directeurs de thèse, *Marie Albenque* et *Vincent Pilaud*, qui m'ont tous deux guidé tout au long de ma thèse, tant scientifiquement qu'humainement, et ce depuis le moment où je les ai contactés pendant mon année au MPRI. Merci à Marie de m'avoir transmis les thématiques scientifiques qui ont été au cœur de mon travail de thèse, de m'avoir expliqué parfois à plusieurs reprises certains travaux que je ne connaissais pas, d'avoir persévéré dans sa résolution de me faire faire des exposés moins chargés, et surtout de m'avoir suivi de près pour tout mes choix scientifiques et stratégiques. Merci aussi pour le travail que nous avons pu effectuer ensemble dans le cadre de notre papier commun et désolé de ne pas avoir été très réceptif à tes tentatives de me faire faire des probas. Merci à Vincent d'avoir été présent même quand je ne travaillais pas sur ses thématiques, merci d'avoir su trouver un projet qui cadrerait si bien avec ma thèse. J'ai été très content d'avoir ce projet en parallèle, et de pouvoir y passer des après-midi de réflexion en sa compagnie.

Merci à *Stefan Flesner* et *Guillaume Chapuy* d'avoir accepté de rapporter ma thèse, et également d'avoir assisté à ma soutenance de mi-parcours pour ce dernier. Merci à Stefan, qui a subi la barrière de la langue en plus de celle de ma tendance à trop chercher la concision dans les explications. Merci à Guillaume, pour les nombreux retours pertinents qu'il m'a transmis, et qui me permettent d'avoir une version plus accessible de mon manuscrit à présenter. Merci également pour les multiples discussions que nous avons pu avoir à différentes reprises, au sujet de ton article *A bijection for rooted maps on orientable surfaces*, et également au sujet de mes propres travaux de thèse.

Je profite de cette section pour remercier également mes anciens tuteurs de stage, *Bernd Bickel* et *Marni Mishna*. C'est notamment lors de mon stage avec Bernd que j'ai pris goût pour la recherche, même si j'ai par la suite changé de thématique. Mon travail de stage avec Marni a été ma première expérience de recherche en combinatoire, et je lui suis très reconnaissant de l'accueil qu'elle m'a réservé à Vancouver. Je garde de ces deux stages à l'étranger des souvenirs impérissables, tant dans le travail qu'en dehors. Je remercie également Marni d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie enfin *Gilles Schaeffer*, *Dominique Poulhalon* et *Béatrice de Tilière* d'avoir accepté de remplir le rôle d'examinateur de ma thèse. Merci plus particulièrement à Gilles, sans les travaux duquel ma thèse n'aurait pas pu exister, et qui a également supervisé ma formation à l'X, ma formation au MPRI, l'équipe combinatoire du LIX, et maintenant le LIX lui-même.

Je tiens également à remercier tous mes coauteurs. Le travail de recherche étant souvent solitaire, pouvoir travailler avec eux a été une vraie aide pour moi. Je remercie donc Bernd et *Eder Miguel*, Marni, *Éric Fusy* et *Julien Courtiel*, *Maciej Dołęga*, et bien sûr Marie et Vincent. Merci plus particulièrement à Maciej, pour m'avoir proposé cette collaboration, et m'avoir invité à Cracovie, pour une semaine qui restera dans ma mémoire comme une très belle expérience de recherche. Merci également à Éric pour les nombreux trajets commun en voiture de Cachan au labo, pour les discussions scientifiques toujours intéressantes, et notamment pour m'avoir posé la question de l'étude de la série bivariée des cartes.

Je suis également reconnaissant envers tous les enseignants avec lesquels j'ai été

amené à enseigner pour des TD à l'X: *Damien Rohmer, Emmanuel Haucourt, Simon Bliudze, Philippe Chassignet...* Merci aux autres membres du laboratoires avec lesquels j'ai eu l'occasion de discuter à diverses occasions: *Luca Castelli, Jérémie Bettinelli, Yann Ponty, Maks Ovsjanikov, Pooran Memari...* Merci à Luca pour les pauses café instructives autour du dernier reportage visionné, et à Yann pour les discussions sur la montagne ou la musique. Merci également aux membres du LRI participant au séminaire commun, et plus particulièrement *Florent Hiver* et *Viviane Pons*.

Merci à Brigitte Vallée pour les quelques discussions que nous avons pu avoir sur mon avenir professionnel après la thèse, et pour l'intérêt qu'elle porte aux questions soulevées.

Merci enfin à l'équipe administrative du LIX, de la Graduate School, et de l'école doctorale. Un merci plus particulier à *Evelyne Rayssac* et *Vanessa Molissa*.

Je tiens également à remercier tous les doctorants que j'ai été amené à rencontrer pendant ma thèse, avec qui nous avons pu partager les joies et difficultés de la vie de doctorant. Ceux avec qui j'ai partagé un directeur des thèse et un bureau: Thibaut, jamais en manque d'un sujet politique à aborder, Joël, jamais le dernier à se moquer de mes bâillements matinaux, et Julian, jamais en manque de questions pointues sur la langue française; ceux que j'ai croisés au labo, Justine, Hugo, Amadeo, Dorian, Étienne...; et ceux que j'ai croisés à différents séminaires, conférence et autres: Baptiste, avec lequel j'ai travaillé quelques temps, Aram, Arthur, Mickael, Paul, Matthias, et de nombreux autres.

Pour mon expérience au bureau de l'association doc'union, je remercie particulièrement Olga, Theyv, et Robin, mais aussi Safir, Léo, Florian, Giuliano, et les autres.

Enfin, je tiens à remercier tous mes amis qui n'ont pas de rapport direct avec ma thèse, mais qui m'ont indirectement aidé à persévérer au travers des difficultés. Dans un soucis de concision, je ne vais pas chercher à tous les nommer, mais je pense en particulier à mes camarades de l'X, aux membres du PBB, des OPS, de la chorale Esperanza, du chœur Stella Maris, du chœur sainte-Cécile, de la chorale Gaudete, de la team Croatie, des associations À Bras Ouverts et Veni Compositor, et tous ceux que je connais par des biais autres.

Je remercie tous mes colocs pour ces belles années passées à Cachan à la colops: Sébastien, François-Xavier, Margaux et Christophe, Delphine, Cyprien, Constantin, Louise, Thomas, Karolien, et Alexandre.

Merci à ma famille de m'avoir accompagné de près ou de loin tout au long de ma thèse, j'espère que ma soutenance vous permettra de comprendre un peu plus précisément ce à quoi j'ai consacré 3 ans de ma vie.

Merci à Godelive qui occupe une place importante dans mon cœur et ma vie, notamment pour m'avoir supporté pendant la période de rédaction de ma thèse.

Je tiens enfin à remercier pour leur présence et leur soutien tous ceux qui auront pu se libérer et faire le déplacement pour assister à ma soutenance.

Partie I

Introduction et résumé

Chapitre 1

Cartes: énumération, bijections

Les cartes sont des objets combinatoires très riches qui présentent de nombreux liens d'une profondeur remarquable avec d'autres domaines scientifiques. Pour une présentation plus approfondie des cartes et de leurs liens avec plusieurs autres domaines scientifiques, on redirige le lecteur vers le livre de Schaeffer [Sch15] sur les cartes planaires.

Dans la section 1.1, après avoir brièvement introduit les cartes, on s'intéressera au traitement particulier du cas des cartes planaires 4-valentes par Tutte pour le point de vue énumératif, puis par Schaeffer pour le point de vue bijectif. Dans la section 1.2, on s'intéressera plus en détail à l'étude énumérative des cartes, et aux différents résultats connus ayant trait à la structure des cartes ou de leurs séries génératrices. Dans la section 1.3, on s'intéressera plus en détail à l'approche bijective de l'étude des cartes. Enfin, dans la section 1.4 on introduira dans le détail les cartes, et le formalisme qu'on utilisera ensuite pour les étudier, ainsi que plusieurs notions qui seront utiles dans la suite de cette thèse.

1.1 Échauffement: les cartes planaires 4-valentes

Définition 1.1.1. *Un graphe est un ensemble fini de sommets reliés par des arêtes. Par défaut, un graphe peut contenir des boucles ou des arêtes multiples.*

Une carte est le plongement d'un graphe sur une surface sans croisement d'arête, considéré à homéomorphisme près. Une carte sépare la surface sous-jacente en plusieurs régions homéomorphes à des disques, qu'on appelle des faces. Un coin est un secteur angulaire entre deux arêtes adjacentes au niveau d'un sommet.

Une carte est dite planaire si la surface sous-jacente est une sphère, eulérienne si tous ses sommets sont de degré pair, 4-valente si tous ses sommets sont de degré 4, et bipartite si ses sommets peuvent être colorés en deux couleurs de telle sorte qu'il n'y ait pas d'arête monochromatique. Une carte est une quadrangulation si toutes ses faces sont de degré 4.

Le nombre v de sommets, le nombre e d'arêtes, et le nombre f de faces d'une carte planaire sont reliés par la formule d'Euler:

$$v - e + f = 2.$$

Certaines cartes peuvent présenter des symétries, ce qui complique leur énumération. Pour contourner ce problème, on enracine les cartes. Une carte est dite enracinée si un de ses coins est distingué. Ce coin est appelé la racine de la carte.

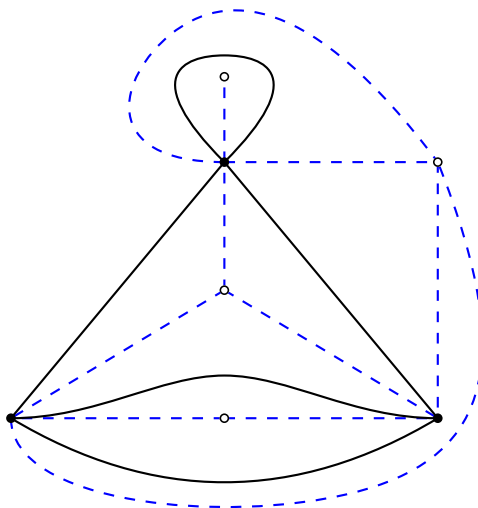


Figure 1.1: Une carte planaire m , dont les arêtes sont pleines et noires, et les sommets sont les points noirs; et sa *quadrangulée*, dont les sommets sont les sommets et les faces de m , et les arêtes sont représentées en bleu et en pointillé.

La série génératrice des cartes planaires enracinées, noté $M_0(z)$, est définie par $M_0(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}} M_{0;n} z^n$, où $M_{0;n}$ dénote le nombre de cartes planaires enracinées à n arêtes.

Tutte fut le premier à définir et étudier les cartes dans les années 60. Dans son article [Tut63], il s'intéressa aux cartes planaires eulériennes, c'est-à-dire les cartes dont tous les sommets ont degré pair. Notons que l'étude des cartes eulériennes peut être restreinte à celle des cartes 4-valentes, qui est particulièrement intéressante car celles-ci sont en bijection avec les cartes quelconques (voir théorème 1.4.1 et figure 1.1). Pour cette raison, et par souci de simplicité, on présente dans cette section le cas restreint des cartes 4-valentes, de travaux qui traitent initialement de cartes eulériennes quelconques.

En observant les configurations possible de la carte autour de la racine, Tutte obtint une équation de récurrence sur la série des cartes, qu'il parvint ensuite à résoudre, obtenant le résultat suivant:

Théorème 1.1.2 (Tutte [Tut63]). *Le nombre de carte 4-valentes planaires enracinées à n sommets s'écrit:*

$$\frac{2(2n)! 3^n}{n! (n+2)!} = 2 \frac{3^n}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n}.$$

Il est intéressant de noter la ressemblance étonnante entre l'expression du théorème 1.1.2 et les fameux nombres de Catalan, qui s'écrivent $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, et énumèrent entre autres l'ensemble des arbres binaires à n sommets. Cette ressemblance appelle une explication combinatoire, sous la forme d'une bijection avec des arbres binaires ayant un poids 3 sur chaque sommet.

Ce n'est que beaucoup plus tard, après de nombreux travaux énumératifs plus poussés, que les premières explications bijectives de cette ressemblance furent proposées, d'abord par Cori et Vauquelin [CV81], puis par Schaeffer [Sch97].

Schaeffer propose ainsi une bijection entre cartes eulériennes (c'est-à-dire dont tous les sommets sont de degré pair) et une certaine famille d'arbres, appelés *arbres*

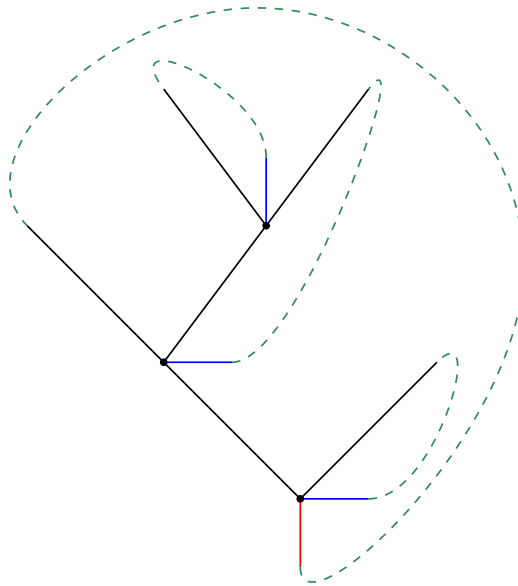


Figure 1.2: Une illustration du cas 4-valent de la bijection de Schaeffer. Un arbre binaire (noir) décoré par des bourgeons (bleus) et muni d'une racine (rouge) peut être refermé en une carte 4-valente (l'ensemble), à la condition qu'il soit *équilibré*.

eulériens équilibrés, et présentée plus en détail dans la section 1.3.1. Une illustration du cas 4-valent est donné dans la figure 1.2.

Dans le cas 4-valent, les arbres eulériens sont des arbres binaires, dont chaque sommet est décoré par un *bourgeon*, placée dans un des 3 emplacements possibles. Ces arbres sont donc énumérés par $\frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$. L'ensemble de ces arbres est noté \mathcal{T}^\times .

Dans le cas où ces arbres vérifient une condition supplémentaire d'*équilibre*, Schaeffer décrit alors un algorithme qui permet de générer une carte 4-valente, dont l'arbre de départ est un arbre couvrant. Les feuilles permettent quand à elles d'encoder les arêtes de la carte qui ne font pas partie de l'arbre couvrant.

En utilisant un argument de réenracinement, il parvient alors à montrer que parmi les arbres de \mathcal{T}^\times , il y a une proportion exactement $\frac{2}{n+2}$ d'arbres équilibrés, ce qui permet de retrouver le théorème 1.1.2.

À la suite des travaux de Tutte, de nombreux autres résultats énumératifs furent obtenus, utilisant diverses techniques de calcul. On donnera un aperçu de ces travaux dans la section 1.2.

À la suite des travaux de Cori, Vauquelin, et Schaeffer, de nombreuses autres bijections pour cartes furent proposées. On donnera un aperçu de ces travaux dans la section 1.3.

La principale contribution de cette thèse, qui sera présentée dans le chapitre 2, consiste à proposer une généralisation de la bijection proposée par Schaeffer [Sch97], et ainsi de proposer des interprétations combinatoire de plusieurs résultats énumératifs énoncés dans la section 1.2.

1.2 Énumération, rationalité, structure

1.2.1 Méthode de Tutte

Dans une série de travaux [Tut62, BT64, Tut63, Tut73, Tut82] incluant ses travaux sur les cartes eulériennes (voir section 1.1), Tutte posa les bases de l'étude énumérative des cartes. Il est intéressant de noter qu'une de ses motivations initiales était certainement de démontrer le célèbre théorème des 4 couleurs, qui stipule que les sommets d'une carte planaire peuvent être colorés de 4 couleurs distinctes, de telle sorte qu'il n'y ait pas d'arête monochromatique. Cependant, les cartes se sont vite révélées être des objets combinatoires profonds, dont l'étude, indépendamment de ses nombreux liens avec d'autres domaines scientifique, se montrera très enrichissante.

Le schéma suivi par Tutte et ses collaborateurs et successeurs pour obtenir des résultats énumératifs asymptotiques, exacts ou structurels sur les cartes fonctionne en deux temps:

1. Dans un premier temps, on cherche à obtenir une équation de récurrence sur la série génératrice étudiée, qu'on appelle *équation de décomposition*. Dans le cas des cartes, cette équation s'obtient généralement en considérant les différentes configurations possible d'une carte après que l'on a retiré ou contracté l'arête racine de la carte. Pour écrire une équation de décomposition, il est souvent nécessaire d'introduire d'une variable qu'on appelle *catalytique*, qui est utile dans le calcul, mais qu'on ne cherche pas à étudier.
2. Dans un second temps, on cherche à utiliser des méthodes analytiques pour résoudre les équations obtenues. Celles-ci ne sont généralement pas linéaires, et les résoudre constitue en fait la plupart du temps la plus grande part du travail. Dans le cas où l'équation obtenue est quadratique, Tutte et Brown développèrent une méthode de résolution, qu'on appelle *méthode quadratique*, et qui fut ensuite étudiée plus en détails et systématisée par Goulden et Jackson [GJ04, section 2.9].

C'est par cette méthode que Tutte obtint de nombreux résultats énumératifs sur les cartes planaires, tels que le théorème 1.1.2.

1.2.2 Rationalité des séries génératrices de cartes non planaires

En utilisant des techniques analytiques similaires, Walsh et Lehman [WL72], suivis plus tard par Bender et Canfield, se sont penchés sur le cas des cartes sur d'autres surfaces que la sphère. Ces derniers exprimèrent dans [BC86] une formule d'énumération asymptotique des cartes:

Théorème 1.2.1 (Bender & Canfield [BC86]). *Le nombre de cartes enracinées sur une surface \mathcal{S} de genre g (orientable ou non), noté $|\mathcal{M}_{\mathcal{S};n}|$, vérifie:*

$$|\mathcal{M}_{\mathcal{S};n}| \sim t_{\mathcal{S}} \cdot n^{\frac{5(g-1)}{2}} \cdot 12^n,$$

où $t_{\mathcal{S}}$ est une constante qui vérifie une équation récursive non linéaire.

Puis ils étudièrent plus en détail la série génératrice des cartes sur une surface orientable, et obtinrent dans [BC91] le résultat suivant:

Théorème 1.2.2 (Bender & Canfield [BC91]). *Pour $g > 0$, la série des cartes enracinées sur le tore à g trous, notée M_{S_g} , est une fonction rationnelle en $\rho := \sqrt{1-12z}$, de la forme:*

$$M_{S_g}(z) = \frac{(\rho - 1)^{2g} P_g(\rho)}{\rho^{5g-3} (\rho + 2)^{b_g} (\rho + 5)^{c_g}},$$

où b_g et c_g sont des entiers, et P_g est un polynôme tel que $P_g(0) = P_g(1) = 0$.

Ils conjecturent également (ce qui sera confirmé plus tard dans [AG99]) que c_g est nul pour tout g , et que le degré de P_g est au plus $5g + b + c - 4$.

1.2.3 Rationalité bivariée

Jusqu'à présent, on s'est intéressé à l'énumération des cartes en fonction de leur nombre d'arêtes. Néanmoins, on peut s'intéresser à une énumération plus précise. On parle d'énumération bivariée quand on décide de compter les cartes en fonction à la fois de leur nombre de sommets et d'arêtes. Il s'agit, de par la formule d'Euler (voir définition 1.1.1), d'une généralisation directe de l'énumération univariée.

En utilisant une paramétrisation due à Arquès [Arq87], Bender, Canfield, et Richmond obtinrent le résultat d'énumération bivariée suivant:

Théorème 1.2.3 (Bender, Canfield & Richmond [BCR93]). *Pour $g > 0$, la série des cartes enracinées sur le tore à g trous comptées par sommets et faces, notée M_{S_g} , est de la forme:*

$$M_{S_g}(s, f) = \frac{P_g(p, q)}{((1 - 2p - 2q)^2 - 4pq)^{5g-3} (1 - p)^{d_g}},$$

où p et q sont des séries définies par $s = p(1 - p - 2q)$ et $f = q(1 - q - 2p)$, d_g est un entier, et P_g est un polynôme premier avec le dénominateur.

De nouveau, ils conjecturent, à raison, que d_g est toujours nul. Cela peut en fait se déduire du fait que la série des cartes énumérées par sommets et faces est nécessairement symétrique par dualité, et donc, puisque la définition de p et q est elle aussi symétrique, elle est aussi symétrique en p et q , ce qui implique à la fois que d_g est nul et que P_g est symétrique. La nullité de l'exposant d_g permet également de déduire que l'exposant c_g du théorème 1.2.2 est nul pour tout g .

C'est notamment cette observation de symétrie qui permettra ensuite à Arquès et Giorgetti de montrer le théorème suivant:

Théorème 1.2.4 (Arquès & Giorgetti [AG99]). *Pour $g > 0$, la série des cartes enracinées sur le tore à g trous comptées par sommets et faces, notée M_{S_g} , est de la forme:*

$$M_{S_g}(s, f) = \frac{pq(1 - p - q)P_g(p, q)}{((1 - 2p - 2q)^2 - 4pq)^{5g-3}},$$

où p et q sont des séries définies par $s = p(1 - p - 2q)$ et $f = q(1 - q - 2p)$, et P_g est un polynôme symétrique à coefficients entiers et de degré au plus $6g - 6$.

Arquès et Giorgetti étendirent ensuite leurs résultats aux surfaces non orientables par le théorème suivant:

Théorème 1.2.5 (Arquès & Giorgetti [AG00]). *Pour $g > 0$, la série des cartes enracinées sur une surface \mathcal{S} (orientable ou non) de genre g , comptées par sommets et faces, notée $M_{\mathcal{S}}$, est de la forme:*

$$M_{\mathcal{S}}(s, f) = \frac{P_g(p, q, a)}{((1 - 2p - 2q)^2 - 4pq)^{5g-3}},$$

où p et q sont des séries définies par $s = p(1 - p - 2q)$ et $f = q(1 - q - 2p)$, a est une série définie par $a := \sqrt{(1 - 2p - 2q)^2 - 4pq}$, et P_g est un polynôme symétrique en p et q de degré au plus $6g - 3$.

1.2.4 Autres résultats énumératifs concernant les cartes

La hiérarchie KP

L'approche initialement développée par Tutte n'est pas la seule à produire des résultats énumératifs. La hiérarchie KP (Kadomtsev–Petviashvili) est une famille infinie et dénombrable d'équations, ayant un nombre infini et dénombrable d'inconnues. Cette famille d'équations, vue comme une généralisation d'une autre famille d'équation appelée hiérarchie KdV , a été beaucoup étudiée par les mathématicien [MJJD00, Oko00].

Ces travaux furent ensuite repris par Goulden et Jackson [GJ08], qui, en montrant que la série génératrice des triangulations d'une surface orientable donnée était solution de ce système d'équations. Ceci permit ensuite à Bender, Gao et Richmond [BGR08] de donner une formule de récurrence explicite bien plus simple que celles jusqu'alors connues pour la constante t_g impliquée dans le cas orientable de l'énumération des cartes de genre g (voir théorème 1.2.1), et de donner un équivalent asymptotique pour t_g :

Théorème 1.2.6 (Bender, Gao & Richmond [BGR08]). *La constante t_g vérifie:*

$$t_g \sim \frac{40 \sin(\frac{\pi}{5})K}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1440g}{e} \right)^{-\frac{g}{2}},$$

où K est une constante.

Les résultats de Goulden et Jackson permirent ensuite à Carell et Chapuy [CC15] d'obtenir des équations de récurrence sur les cartes de genre fixé à la simplicité étonnante.

Théorème 1.2.7 (Carell & Chapuy [CC15]). *La série génératrice $Q_g^n(x)$ des cartes enracinées de genre g avec n arêtes et un poids x par face (qui correspond également à la série génératrice des quadrangulations biparties de genre g ayant n faces et avec un poids x par face blanche) satisfait l'équation de récurrence suivante:*

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{6} Q_g^n(x) &= \frac{(1+x)(2n-1)}{3} Q_b^{n-1}(x) + \frac{(2n-3)(2n-2)(2n-1)}{12} Q_{g-1}^{n-2}(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k+l=n \\ k,l \geq 1}} \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 1}} (2k-1)(2l-1) Q_i^{k-1}(x) Q_j^{l-1}(x). \end{aligned}$$

La récurrence topologique

La récurrence topologique est une méthode générale de résolution d'équations, développée par Eynard et ses collaborateurs [EO09, Eyn11], et basée sur la théorie des intégrales de matrices [LZ04, Chapitre 5]. En empruntant des idées tirées de la récurrence topologique, et en les appliquant aux cartes biparties d'une surface orientable de genre g , Chapuy et Fang [CF16] obtinrent des résultats de rationalité puissants en une infinité de variables:

Théorème 1.2.8 (Chapuy & Fang [CF16]). *La série génératrice exponentielle L_g des cartes biparties de genre g avec un poids t par arête et p_i par face de degré $2i$ est de la forme:*

$$L_g = \sum_{\alpha, \beta, a, b} c_{a,b}^{\alpha, \beta} \frac{\nu_\alpha \zeta_\beta}{(1 - \nu)^a (1 - \zeta)^b},$$

où:

- $c_{a,b}^{\alpha, \beta}$ est un nombre rationnel,
- la somme est une somme finie, et α et β sont des partitions d'entiers qui vérifient certaines contraintes supplémentaires,
- les variables ν_α , ζ_β , ν , et ζ sont des combinaisons linéaires infinies en $p_k z^k$ avec des coefficients explicites, où:
- z est défini par $z = t \left(1 + \sum_{k \geq 1} \binom{2k-1}{k} p_k z^k \right)$.

De la même manière que dans le cas planaire développé dans la section 1.1, la série z qui intervient dans le théorème 1.2.8 s'interprète directement comme une série d'arbres (il s'agit de la série univariée correspondant à la série des arbres bourgeonnants définis par l'équation 2.1).

1.2.5 Structure des orientations d'une carte

Une *orientation* d'une carte est une orientation de chacune de ses arêtes.

Dans cette section, on s'intéresse à des résultats de structure qui se démarquent quelques peu des résultats énumératifs précédent. Il s'agit ici d'étudier la structure de l'ensemble des orientations d'une carte donnée qui respectent un certain nombre de contraintes. Les orientations seront introduites plus en détail dans la section 1.4.2.

Le premier travail dans ce sens est celui de Propp [Pro93], qui montre que pour tout graphe, la structure des orientations du graphe qui ont une certaine *circulation* est celle d'un treillis distributif.

Un *treillis* est un ensemble E muni d'une relation d'ordre, telle que toute paire d'éléments de E possède une borne supérieure et une borne inférieure. Un treillis est dit *distributif* si les lois de bornes supérieure et inférieure sont distributives l'une par rapport à l'autre.

On considère un graphe G muni d'une orientation R et d'un sommet marqué v_0 . Supposons dans un souci de simplicité que R est fortement connexe. Soit C un cycle dirigé de G , on appelle *circulation de R le long de C* la différence entre le nombre d'arêtes de C dont l'orientation coïncide avec celle de R , et le nombre d'arêtes de C dont l'orientation ne coïncide pas avec celle de R . On appelle c_R la fonction qui à chaque cycle C de G associe la circulation de R le long de C . On dit que R est une c -orientation (où c est une fonction qui à chaque cycle C de G associe un entier) si

$c_R = c$. La fonction c est dite *faisable* si G admet une c -orientation. L'ensemble des c -orientations d'un graphe est muni d'une opération appelée *écrasement du sommet*. Cette opération peut être appliqué à un sommet v si celui-ci est une source, et consiste à inverser l'orientation de toutes les arêtes incidentes v , de telle sorte à ce que v devienne un puits.

Théorème 1.2.9 (Propp [Pro93]). *Soit c une circulation faisable d'un graphe G .*

L'ensemble des c -orientations de G , muni de l'opération d'écrasement d'un sommet différent du sommet marqué v_0 , possède la structure d'un treillis distributif.

Notons que Propp ne travaille pas sur des cartes mais bien sur des graphes, ce qui implique que ses résultats peuvent être appliqués à une carte quelconque, indifféremment de la surface sur laquelle elle est plongée, et sans distinguer les cycles faciaux des autres cycles. Au contraire, Felsner [Fel04] s'intéresse au cas des cartes planaires, avec un point de vue qu'on peut considérer dans ce cas comme le dual de celui de Propp (remarquons que la dualité n'est pas définie pour un graphe, mais qu'elle l'est bien pour une carte orientée sur une surface orientable). Il décrit les α -orientations comme les orientations qui ont un certain nombre d'arêtes entrantes et sortantes au niveau de chaque sommet, déterminé par la fonction α . Il montre ensuite que la structure des α -orientations d'une carte munies de l'opération de retournement des cycles dits *essentiels* est celle d'un treillis distributif, et donne plusieurs applications de ce résultat.

Théorème 1.2.10 (Felsner [Fel04]). *L'ensemble des α -orientations d'une carte planaire fixée possède la structure d'un treillis distributif.*

Notons que la fonction α est définie sur les sommets, ce qui revient dans le dual à ne considérer que les cycles faciaux, alors que les circulations définies par Propp contraignent tous les cycles du dual; néanmoins, dans le cas planaire, ces deux approches sont équivalentes, puisque la donnée de la circulation le long des cycles faciaux d'une carte permet de déterminer la circulation le long de n'importe que cycle.

Citons enfin les travaux de Felsner et Knauer [FK09], qui étudient les *treillis localement distributifs supérieurs*, et donnent une caractérisation de ceux-ci en termes de coloration de graphe. Ceci leur permet dans un contexte très général de prouver la distributivité de certains treillis, et notamment la plupart de ceux qui apparaissent dans des questions combinatoires. En particulier, leur résultats permettent de retrouver les résultats de Propp [Pro93] et Felsner [Fel04].

1.3 Combinatoire bijective des cartes

Comme évoqué dans le chapitre 1, plusieurs techniques, à la suite de celle initialement développée par Tutte, ont permis d'obtenir de nombreux résultats concernant l'énumération et la structure de nombreux modèles de cartes, planaires ou non, en fournissant notamment des formules dont la simplicité semble souvent dépasser ce à quoi on se serait attendu à première vue.

En plus des nombreux liens profonds avec d'autres domaines scientifiques (voir par exemple la section 1.3.3), c'est une des raisons pour lesquelles le domaine de la combinatoire bijective des cartes s'est fortement développé au cours des deux

dernières décennies: peut-on expliquer par des constructions bijectives la simplicité des formules d'énumération ou des séries génératrices des cartes?

Prenons l'exemple du théorème de Bender et Canfield 1.2.2: celui-ci prouve la rationalité paramétrique de la série génératrice des cartes sur un g -tore. Puisque la paramétrisation $\rho = \sqrt{1 - 12z}$ ressemble à une série génératrice d'arbres¹, on s'attendrait naturellement, d'un point de vue combinatoire, à ce que les cartes d'une surface orientable puissent être décomposées en une autre famille d'objets énumérés par une série génératrice rationnelle, sur lesquels seraient accrochés des arbres énumérés essentiellement par ρ . Les travaux présentés dans cette thèse présenteront une telle décomposition.

La plupart des travaux bijectifs se sont d'abord concentrés sur les cartes planaires. Pour différentes familles de cartes planaires, on décrit alors des bijections qui permettent d'ouvrir ces cartes, et d'obtenir des arbres, munis d'une structure additionnelle qui permet la fermeture. On peut séparer ces bijections en deux grandes familles:

- celles dans lesquelles l'arbre obtenu est un arbre couvrant de la carte initiale, décoré par des bourgeons qui représentent les arêtes qui ne sont pas dans l'arbre couvrant, qu'on appellera *bijection bourgeonnante*,
- et celles dans lesquelles l'arbre obtenu a des sommets noirs et blancs, qui correspondent aux sommets et aux faces de la carte initiale, et possède une décoration supplémentaire. Ces arbres décorés sont parfois appelés *mobiles*.

Dans les deux cas, on commence généralement par décorer la carte de départ par une structure canonique, propre à chaque famille de cartes.

1.3.1 Bijections pour cartes planaires

Bijection bourgeonnante

La première bijection de type bourgeonnant fut décrite par Schaeffer [Sch97]. La généralisation de cette bijection, qu'on a présentée dans le cas 4-valent dans la section 2.3, au cas des cartes sur des surfaces quelconques, est un des résultats principaux de cette thèse, et sera présentée dans le chapitre 2. On décrit maintenant cette bijection plus en détail dans le cas Eulérien.

On appelle *arbre eulérien* un arbre plan enraciné sur un sommet de degré 1, dont tous les sommets de degrés 1, appelés *feuilles*, sont colorés soit en blanc, soit en noir, dont la feuille racine est noire, et telle que chaque sommet de degré $2k$ est adjacent à $k - 1$ feuilles blanches. Une arête est noire si elle n'est pas adjacente à une feuille blanche.

Notons que dans les travaux présentés dans cette thèse, on ne considérera pas les feuilles comme des sommets de degré 1, mais plutôt comme des demi-arêtes. Ainsi, les feuilles noires et blanches de [Sch97] correspondront à nos bourgeons enracinables et non-enracinables.

En décomposant les arbres eulériens en un squelette noir sur lequel on accroche des feuilles blanches, et en utilisant des techniques classiques d'énumération (see [Tut62]), on obtient la formule d'énumération suivante:

¹Plus précisément, le développement de ρ s'écrit $1 - 6z - 18z^2 \dots$, et on reconnaît que le coefficient de z^n vaut $-2 \cdot 3^n \text{Cat}(n - 1)$, où $\text{Cat}(n)$ dénote le n -ième nombre de Catalan.

Proposition 1.3.1 ([Sch97], Proposition 2). *Le nombre d'arbres eulériens ayant d_i sommets de degré $2i$, k feuilles noires, $k - 2$ feuilles blanches et n arêtes noires est donné par*

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!} \prod_{i \geq 1} \frac{\binom{2i-1}{i}^{d_i}}{d_i!}. \quad (1.1)$$

Deux arbres eulériens sont dits *conjugués* si l'un s'obtient à partir de l'autre en changeant laquelle des feuilles noires est la racine. À un arbre étiqueté on associe un mot appelé *mot de contour* obtenu comme suit: on part de la racine et on fait le tour de l'arbre dans le sens antihoraire, et on écrit a pour chaque feuille blanche rencontrée, et b pour chaque feuille noire rencontrée. Notons que la conjugaison d'un arbre donne lieu à une conjugaison² de son mot de contour. On peut montrer (voir théorème 1.4.2) qu'il existe exactement 2 manières de conjuguer le mot de contour d'un arbre pour que ce mot soit sous la forme $d_1 b d_2 b$, où d_1 et d_2 sont des mots de Dyck. Les feuilles blanches associées à ces deux lettres b sont dites *libres*, et les arbres correspondants sont dits *équilibrés*.

En étudiant précisément les nombres d'arbres eulériens et d'arbres eulériens équilibrés dans une classe de conjugaison, en fonction de la présence ou non d'une symétrie centrale, on obtient la formule d'énumération suivante:

Proposition 1.3.2 ([Sch97], Proposition 3). *Le nombre d'arbres eulériens équilibrés ayant d_i sommets de degré $2i$, k feuilles noires et n arêtes noires est donné par*

$$2 \frac{(n-1)!}{k!} \prod_{i \geq 1} \frac{\binom{2i-1}{i}^{d_i}}{d_i!}. \quad (1.2)$$

Suivant [Sch97], on décrit maintenant une bijection Φ entre les arbres eulériens équilibrés et les cartes planaires enracinées (sur une arête orientée), illustrée dans la figure 1.3, qui permet grâce à la proposition 1.3.2 de retrouver bijectivement le théorème suivant:

Théorème 1.3.3 (Tutte [Tut62]). *Le nombre de cartes planaires eulériennes ayant e arêtes et v sommets, dont d_i sommets de degré $2i$, s'écrit:*

$$\frac{2e!}{(e-v+2)!} \prod_{i \geq 1} \frac{\binom{2i-1}{i}^{d_i}}{d_i!}. \quad (1.3)$$

Le mot de contour d'un arbre eulérien équilibré s'écrit $d_1 b d_2 b$, et les mots de Dyck d_1 et d_2 peuvent être vus comme des mots de parenthésages, ce qui produit naturellement un appariage entre les feuilles non libres, associant une feuille blanche avec une feuille noire qui la suit dans l'ordre facial. On apparie également les 2 feuilles libres. La bijection Φ consiste à fusionner les deux feuilles de chaque paire en une unique arête.

Une arête d'une carte est un *pont* si enlever cette arête déconnecte la carte. L'orientation d'une arête définit naturellement deux parties qu'on appelle l'*origine* et la *destination*. L'algorithme Φ^{-1} consiste à couper des arêtes de la face racine

²au sens de la théorie des mots; c'est-à-dire que deux mots u et v sont dits conjugués s'il existe deux mots a et b tels que $u = ab$ et $v = ba$.

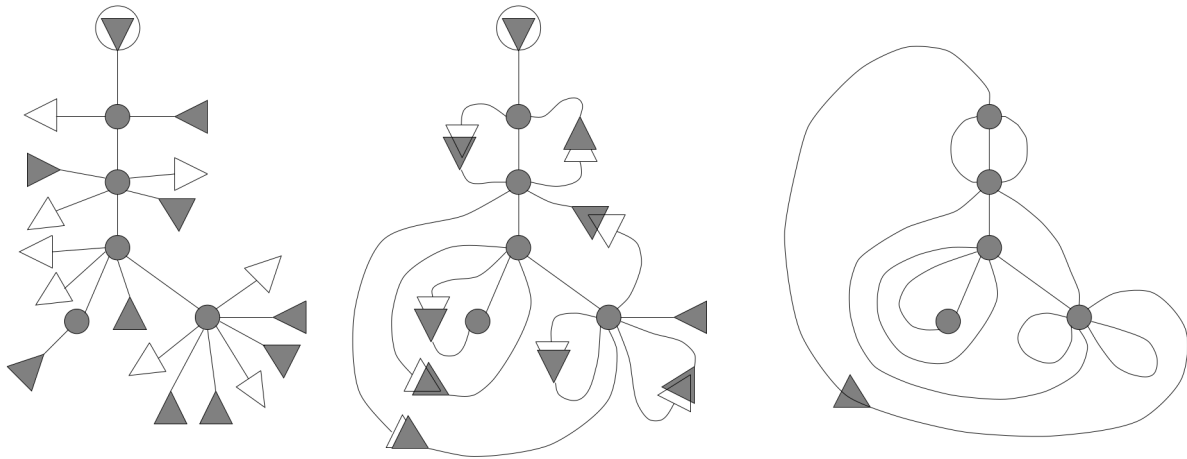


Figure 1.3: Un exemple d’application de l’algorithme de clôture Φ . Le mot de contour de l’arbre de gauche s’écrit $abaaabbabbababbb$, et la décomposition indiquée par les lettres soulignées indique que l’arbre est équilibré (figure tirée de [Sch97]).

qui ne sont pas des ponts, jusqu’à obtenir un arbre. Les arêtes de la face racine qui ne sont pas des ponts ne sont adjacentes qu’une seule fois à la face racine; on les oriente dans le sens de l’ordre facial.

On commence par couper l’arête racine et attacher deux feuilles noires aux demi-arêtes résultantes. L’arête e est définie comme la prochaine arête non-adjacente à une feuille autour du sommet racine, dans l’ordre facial. Puis, tant que la carte n’est pas unicellulaire, on répète les étapes suivantes:

- si l’arête e n’est pas un pont, on la coupe et on attache une feuille blanche et une feuille noire aux demi-arête résultantes situées à l’origine et à la destination de e .
- l’arête e est redéfinie comme la prochaine arête non-adjacente à une feuille autour de la destination de e , dans l’ordre facial.

Théorème 1.3.4 ([Sch97]). *L’algorithme Φ est une bijection entre cartes eulériennes équilibrées et cartes planaires enracinées.*

Notons que l’algorithme d’ouverture de [Sch97] peut être décrit de manière différente, en associant à la carte m une orientation canonique, qui se trouve être l’orientation duale-géodésique décrite dans la section 1.4.2, et en lui appliquant un algorithme qu’on appelle *algorithme d’ouverture d’une carte orientée*, et qu’on décrit dans l’algorithme 1, sans chercher à entrer dans un formalisme précis, qui sera introduit dans la section 1.4.

L’algorithme 1 est présenté ici sous la forme que l’on utilisera dans la section 2.1; cela pourrait être considéré comme un anachronisme, mais a pour but d’aider le lecteur faire des liens entre la partie bibliographique et les résultats présentés plus tard. Notons également que cette présentation unifiée des bijections bourgeonnantes doit beaucoup aux travaux d’Albenque et Poulhalon [AP15], qui seront évoqués dans la section 1.3.1. Plusieurs présentations et versions différentes de cet algorithme existent dans la littérature;

- on décide souvent d’initialiser la carte à renvoyer au seul sommet racine et d’ajouter les arêtes plutôt que de les retirer.

Algorithme 1 l'algorithme d'ouverture d'une carte orientée

Entrée: Une carte enracinée, munie d'une orientation.

Sortie: Une carte orientée et décorée par des demi-arêtes.

On part de la racine de la carte, et on commence à parcourir les coins de la carte en faisant le tour de la face courante.

répéter:

si on rencontre une arête encore non visitée **alors:**

si cette arête est orientée vers le sommet courant **alors:**

 on garde l'arête et on continue le tour en longeant cette arête dans la longueur.

sinon:

 on coupe l'arête en deux demi-arêtes: l'une au niveau du sommet courant, appelée *pousse*, et l'autre au niveau du sommet opposé, appelée *feuille*.

fin si

sinon: si on rencontre une arête déjà visitée **alors:**

 on parcourt cette arête dans le sens de la longueur.

sinon: si on rencontre une demi-arête **alors:**

 on enjambe la demi-arête.

fin si

jusqu'à ce que: on retrouve la racine.

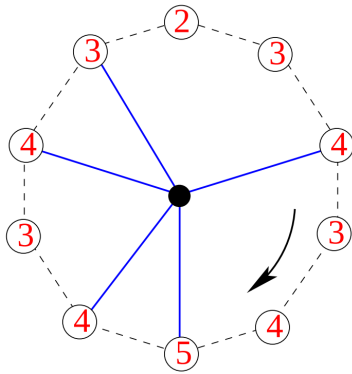
renvoyer: la carte obtenue.

- la manière dont on coupe les arêtes varie d'un modèle de carte à l'autre: dans certains cas on garde juste la pousse ou juste la feuille, dans d'autres on encode la manière de refermer la carte obtenue sous une autre forme que par des bourgeons, dans d'autres enfin on se contente de marquer ces arêtes, sans les couper.
- pour cette raison, il est plus difficile de donner un algorithme générique pour la fermeture des cartes ainsi obtenues, mais il s'agit de manière générale d'un algorithme comparable à la bijection Φ décrite précédemment et introduite dans [Sch97].

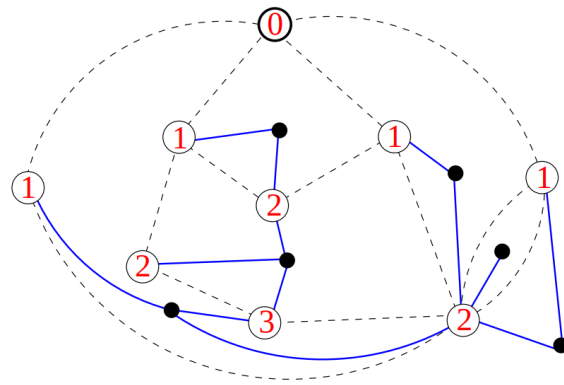
À la suite de Schaeffer [Sch97], de nombreux travaux de combinatoire bijective des cartes utilisent cette idée de mettre en bijection des familles de cartes planaires avec des arbres bourgeonnants, en se basant sur une orientation canonique de la carte, et en appliquant un algorithme du type de l'algorithme 1.

Notons par exemple les travaux de Poulhalon et Schaeffer [PS06], qui étudièrent les triangulations simples du plan, en proposant une bijection avec des arbres bourgeonnants. Ils utilisent une construction appelée *bois de Schnyder*, qui peut s'exprimer comme une α -orientation au sens des travaux de Felsner [Fel04] (voir section 1.2.5). Ils choisissent alors l'orientation correspondant au bois de Schnyder minimal (au sens du treillis des α -orientations) pour définir une orientation canonique pour les triangulations. Leur algorithme d'ouverture est alors similaire à l'algorithme 1. Cela leur permet d'obtenir un algorithme d'encodage des triangulations, optimal au sens de la théorie de l'information, d'obtenir des formules d'énumération, et un algorithme efficace de génération aléatoire.

Citons également les travaux de Bernardi [Ber06]. On appelle *carte couverte* une carte munie d'un arbre couvrant marqué. Le nombre de cartes couvertes de taille n



(a) Un exemple de l'opération appliquée à chaque face dans la création d'une mobile: ici une face de degré 10, constituée de sommets blancs et d'arêtes pointillées, donne lieu à la création d'un sommet noir, relié à des sommets blancs par 5 arêtes bleues.



(b) L'application de l'opération décrite à gauche sur une carte plane bipartie donne lieu à la création d'un arbre bleu, qui contient tous les sommets noirs créés, et tous les sommets blancs sauf le sommet pointé.

(figures tirées de [BDFG04])

peut s'écrire $Cat(n) \cdot Cat(n + 1)$, où $Cat(n)$ est le n -ième nombre de Catalan, que l'on a déjà rencontré dans la section 1.1. La première preuve bijective de ce résultat fut donnée par Bernardi [Ber06], en associant une orientation canonique à une carte munie d'un arbre couvrant, et en appliquant un algorithme d'ouverture proche de l'algorithme 1, mais dans lequel la manière de refermer l'arbre obtenu est encodé par une partition non croisée. Il retrouve alors la formule d'énumération en prouvant que son algorithme constitue une bijection entre les cartes couvertes de taille n et les paires constituées d'un arbre de taille n et d'une partition non croisée de taille $n + 1$.

Bijections par mobiles

On peut considérer que la première bijection de type mobiles fut celle introduite par Cori et Vauquelin [CV81], qui fut ensuite reformulée et simplifiée par Schaeffer [Sch98], qui proposa une bijection entre quadrangulations planaires enracinées et une classe d'arbres appelés *arbres bien étiquetés*. Cette bijection fut ensuite étendue par Bouttier, Di Francesco et Guitter [BDFG04] au cas des cartes pointées eulériennes avec degrés des faces prescrits. Ils montrent que leur bijection peut être spécialisée au cas des cartes pointées biparties, et c'est sous cette version moins générale mais plus simple qu'on décrit maintenant cette bijection.

On part d'une carte plane bipartie pointée m , et on étiquette chaque sommet par sa distance au sommet pointé. On ajoute un sommet (qu'on dit *noir*, par opposition aux sommets de m , dits *blancs*) à l'intérieur de chaque face. Pour chaque face f de degré $2k$, on relie le sommet noir associé à f à chacun des k sommets incidents à f dont l'étiquette est plus grande que celle du sommet qui le suit dans le sens horaire autour de f , comme illustré par la figure 1.4a. Après avoir appliqué cette opération à chaque face, on efface toutes les arêtes de m , ce qui déconnecte le sommet pointé, que l'on efface également (voir figure 1.4b).

On peut montrer que la carte obtenue de cette manière est un arbre plan, qu'on appelle $\Phi(m)$. On appelle *mobile* un arbre qui vérifie les propriétés suivantes:

- ses sommets sont colorés en noir et en blanc, et les sommets blancs possèdent une étiquette entière,
- chaque arête relie un sommet blanc à un sommet noir,
- si n et p sont les étiquettes de deux sommets blancs qui se suivent dans le sens horaire autour d'un sommet noir, alors on a $p \geq n - 1$.

Un mobile est dit *bien-étiqueté* si la plus petite de ses étiquettes vaut 1.

Théorème 1.3.5 (Bouttier, Di Francesco & Guitter [BDFG04]). *La fonction Φ est une bijection entre les cartes planaires biparties pointées, et les mobiles, qui se restreint en une bijection entre cartes planaires biparties et mobiles bien-étiquetés.*

Tentative d'unification

Devant l'abondance de travaux concernant la combinatoire bijective des cartes planaires, plusieurs travaux ont cherché à unifier le plus possible de ces bijections sous un modèle commun.

Dans une série de travaux [BF12a, BF12b, BF14, BF18], Bernardi et Fusy proposent une *master bijection*, qu'ils appliquent ensuite à diverses familles de cartes, ce qui leur permet de retrouver de nombreuses bijections déjà existantes [BDFG02, BDFG04, Ber06, Sch97, FSP08].

Ils considèrent des cartes munies d'une orientation sur chaque demi-arête, qu'ils appellent *bi-orientation*; les arêtes se séparent alors en trois types: celles dont l'orientation des deux demi-arêtes coïncide, celles qui sont sortantes des deux côtés, et celles qui sont entrantes des deux côtés. Ils attribuent également un poids entier à chaque demi arête. Une *\mathbb{Z} -bi-orientation acceptable* est une bi-orientation décorée par des poids, qui vérifie des conditions supplémentaires reminiscentes de celles évoquées dans la section 1.2.5. Un *\mathbb{Z} -mobile* est un arbre de type mobile décoré de bourgeons et d'étiquettes entières. La master bijection est une bijection entre un ensemble de cartes munies d'une \mathbb{Z} -bi-orientation acceptable, et un ensemble de \mathbb{Z} -mobiles, à travers laquelle on peut surveiller l'évolution de nombreux paramètres.

La master bijection de Bernardi et Fusy a pour avantage de généraliser un très grand nombre de bijections existantes, tant de type mobiles que de type bourgeonnantes. Néanmoins, le fait même qu'elle unifie des travaux aussi divers implique parfois qu'elle ne saisit pas la simplicité de certains modèles, tels que les triangulations simples [PS06] ou les quadrangulations simples [Fus07, Chapitre 3], pour lesquels la master bijection produit un mobile qui est un arbre couvrant de la superposition de la carte de départ avec sa duale et leur quadrangulée, alors que les bijections existantes [PS06] et [Fus07, Chapitre 3] produisent des arbres couvrant de la carte de départ.

Albenque et Poulhalon [AP15] proposent une autre tentative d'unification, en se concentrant plus précisément sur les bijections bourgeonnantes, afin de capturer toutes ces bijections sans leur ajouter de couche de complexité.

Elles considèrent des cartes munies d'une orientation *minimale et accessible*, des conditions encore une fois reminiscentes de la section 1.2.5. Elles prouvent alors l'existence d'une partition des arêtes en un arbre couvrant et son complémentaire, qui satisfait des conditions supplémentaires. Ceci leur permet de décrire un algorithme d'ouverture du type de l'algorithme 1, de retrouver des nombreuses bijections

existantes [Sch97, Ber06, PS06, Fus07], et d'en exhiber de nouvelles (orientations planes bipolaires, d -angulations de girth d d'un p -gone), ainsi que de proposer un modèle générique d'encodage des cartes.

Autres bijections pour cartes planaires

Notons enfin que plusieurs bijections ne peuvent pas être rangées dans les deux grandes catégories qu'on a décrites.

Citons tout d'abord les travaux récents de Louf [Lou18]. Au contraire de plusieurs bijections décrites précédemment, qui peuvent être vues comme des parcours en largeur des cartes, Louf décrit une bijection appelée *cut and slide* qui peut être vue comme un parcours en profondeur de la carte initiale. Cette bijection lui permet notamment de donner une première explication bijective d'une formule quadratique d'énumération de cartes obtenue par la hiérarchie KP (voir section 1.2.4).

Citons enfin les modèles d'Ising. Il s'agit de cartes munies d'un modèle physique de matière, originellement étudiées par les physiciens. Bien que des bijections avec des arbres existent [BDFG07] pour de tels modèles, ces bijections ne rentrent pas dans les catégories décrites ci-dessus.

1.3.2 Bijections pour cartes sur d'autres surfaces

On l'a vu, la littérature ne manque pas d'exemples de bijections permettant de décomposer des modèles de cartes planaires en des arbres décorés. Néanmoins, les cartes sur d'autres surfaces n'ont pas été laissées pour compte, et bien que la bibliographie sur ce sujet est moins débordante, de nombreux travaux ont été menés. Plusieurs travaux s'intéressent au cas des surfaces orientables de genre quelconque, ou encore aux surfaces non-orientables quelconques, tandis que d'autres se concentrent plus spécifiquement sur le tore de genre 1.

Mobiles sur une surface quelconque

Marcus et Schaeffer [MS01] décrivent très tôt une généralisation de la bijection des mobiles décrite dans [Sch98] au cas des cartes orientables de genre quelconque. Quelques années plus tard, rejoints par Chapuy [CMS09], ils analysent plus en détail les conséquences structurelles et énumératives de cette bijection.

La bijection de Marcus et Schaeffer associe à une quadrangulation pointée de genre g un mobile de genre g , que l'on peut décrire comme une carte unicellulaire de genre g munie d'un étiquetage des sommets qui vérifie certaines conditions additionnelles. Chapuy Marcus et Schaeffer [CMS09] procèdent alors à une étude approfondie des propriétés énumératives des schémas de genre g . Leur méthode consiste en plusieurs étapes successives de décomposition, inspirées en partie des travaux de Wright sur les graphes [Wri77, Wri78]:

- une carte unicellulaire est vue comme une *carte réduite*, sur laquelle sont accrochés des arbres.
- une carte réduite est vue comme un *schéma* dont les arêtes sont décorées par des chemins de Motzkin.
- un *schéma* est vu comme un *schéma standard* dont les sommets sont correctement réétiquetés.

Remarquons tout de suite que dans la suite, nous reprendrons cette démarche à notre avantage dans les sections 2.2 et 2.3. Les cartes réduites correspondent à nos *cœurs*, et les schémas standards ne sont pas sans rappeler les surjections utilisées dans la section 2.4.1. Néanmoins, du fait de la nature différente des cartes considérées, les deux approches diffèrent dans le détail.

En étudiant les séries d'arbres et de chemins de Motzkin impliquées, ainsi que la famille des schémas standard, ils parviennent ainsi à prouver de manière bijective le résultat asymptotique suivant, qui précise le théorème 1.2.1:

Théorème 1.3.6 (Chapuy, Marcus & Schaeffer[CMS09]). *Le nombre de quadrangulations biparties enracinées de genre g ayant n faces satisfait:*

$$q_{g,n} \sim \frac{3^g}{(6g-3)2^{11g-7}\Gamma\left(\frac{5g-3}{2}\right)} \cdot C_g \cdot n^{\frac{5}{2}(g-1)} \cdot 12^n,$$

où C_g est une constante combinatoire exprimée simplement comme une somme sur l'ensemble des schémas standards.

Malgré ce résultat puissant concernant l'asymptotique du nombre de cartes de genre fixé, la décomposition ne permet pas tout à fait (à part pour le cas $g = 1$, où un calcul explicite complet est possible) de montrer la rationalité paramétrique exprimée par le théorème 1.2.2; mais seulement qu'avec le même changement de variable, la série des cartes d'une surface donnée est algébrique de degré 2.

Remarque 1. Outre les obstacles techniques, ce résultat semble difficile à montrer du fait que la décomposition en schéma introduite ne préserve par la rationalité des séries, ce qui implique que la rationalité doit être montrée pour la somme des séries correspondant à chaque schéma. Notons par ailleurs que la série des chemins de Motzkin (non décoré) qui apparaît correspond à un changement de variable qui ne semble pas correspondre directement aux résultats énumératifs dans le cas non orientable, énoncés dans le théorème 1.2.5. En effet la série U utilisée pour énumérer les chemins de Motzkin fait apparaître un radical différent de la série a impliquées dans le théorème 1.2.5.

Il n'existe à notre connaissance (en dehors de celle qui sera présentée dans la section 2.1.3) que deux bijections qui permettent de décomposer des cartes générales sur des surfaces non orientable, et toutes deux sont des généralisations de [CMS09].

Chapuy et Dołęga [CD17] proposent une généralisation directe de [CMS09], en proposant une nouvelle description de la bijection [MS01] qui ne repose plus sur l'existence d'une orientation globalement cohérente, mais utilise une orientation locale diffusée précautionneusement; et fonctionne donc également sur les carte non-orientables. Ils parviennent ainsi à obtenir des résultats énumératifs similaires à ceux de [CMS09] pour le cas non-orientable.

Cependant leur bijection reste limitée au seul cas des quadrangulations biparties. Bettinelli [Bet16] propose alors à son tour une nouvelle description de la bijection [CD17], ce qui lui permet de généraliser l'algorithme [CD17] au cas des cartes quelconques sur une surface quelconque. Cependant, l'orientation locale qu'il utilise doit satisfaire des contraintes globales, ce qui en complique l'énumération des cartes obtenues et retire le côté bijectif de la construction. Néanmoins, dans le cas des triangulations et des quadrangulations, ces conditions se simplifient, et sa bijection lui

permet alors de retrouver les résultats énumératifs de [CD17] pour les quadrangulations, ainsi que des formules d'énumération asymptotique énoncées par Gao [Gao91], dans le cas des triangulations.

Autres bijections

Bernardi et Chapuy proposent dans [BC11] une généralisation de la bijection de [Ber06] au cas des surfaces orientables quelconques. Une *carte couverte* est une carte m de genre g munie d'une sous-carte unicellulaire couvrante³ de genre g' , avec $0 \leq g' \leq g$. Bernardi et Chapuy décrivent une bijection entre cartes couvertes de genre g avec n arêtes et paires constituées d'un arbre de taille n et d'une carte unicellulaire bipartie de genre g avec $n + 1$ arêtes.

Leur bijection est constituée de deux étapes:

- dans un premier temps, ils associent à une carte couverte une orientation dite *connexe à gauche*, et montrent que la donnée de la carte couvrante ou de l'orientation sont équivalentes.
- dans un second temps, ils décrivent un algorithme local qui permet l'ouverture d'une carte m munie d'une orientation connexe à gauche en un arbre couvrant de m et un *mobile* de genre g , qui encode la manière de refermer l'arbre pour retrouver m .

Cette bijection leur permet d'obtenir de nouveaux résultats énumératifs, et notamment de généraliser les conséquences énumératives de [Ber06]. Notons également que cette approche permet dans le cas planaire de retrouver la master bijection de Bernardi et Fusy (décrite dans la section 1.3.1), et donc toutes les bijections qui peuvent être exprimées en utilisant la master bijection; ainsi que la bijection de Marcus et Schaeffer [MS01] dans le cas des surfaces orientables de genre quelconque.

L'étude de la première étape de leur bijection est intéressante du point de vue des bijections bourgeonnantes. En effet, la bijection inverse de cette première étape, qui prend en entrée une carte m munie d'une orientation connexe à gauche, et produit une carte couverte, peut être vue comme une variante de l'algorithme 1, dans laquelle on marque les arêtes au lieu de les ouvrir.

La définition d'orientation connexe à gauche est encore une fois réminiscente de la notion d' α -orientation minimale (voir section 1.2.5). Une manière de voir cette bijection est de dire que l'algorithme 1 appliqué à une carte m de genre g munie d'une orientation connexe à gauche produit une carte unicellulaire de genre g' qui vérifie $0 \leq g' \leq g$.

Plusieurs travaux ultérieurs ont utilisé ce point de vue pour décrire de nouvelles bijections bourgeonnantes pour certaines familles de cartes en genre supérieur.

Despré, Gonçalves et Lévêque [DGL17] généralisent ainsi les travaux de Poulhalon et Schaeffer [PS06] au cas des triangulations toroïdales, en se basant sur une généralisation des bois de Schnyder sur le tore proposée par Gonçalves, Knauer et Lévêque [GKL15].

Fusy et Lévêque [FL18] proposent ensuite une généralisation en genre 1 des travaux de Bernardi et Fusy [BF12a]. Ils construisent une bijection entre les d -angulations toroïdales enracinées sur une face ayant une *essential girth* d et vérifiant

³c'est-à-dire d'un sous ensemble des arêtes de m tel que la carte formé de ces arêtes et des sommets de m est connexe et unicellulaire.

une certaine condition supplémentaire, et une certaine famille de cartes unicellulaires décorées. Cela leur permet d'obtenir des résultats énumératifs concernant les triangulations et les quadrangulations biparties toroïdales *essentiellement simples*.

Ces travaux font appel aux résultats de Felsner et Knauer [FK09] pour définir une orientation canonique aux cartes considérées, afin de leur appliquer l'algorithme d'ouverture tel que décrit par Bernardi et Chapuy [BC11], de telle sorte à produire une carte de genre maximal. Cependant, dans le cas des surfaces de genre supérieur, les résultats de [FK09] n'impliquent pas, comme dans le cas planaire, l'existence d'une unique α -orientation minimale. Au lieu de cela, comme montré par Gonçalves, Knauer et Lévêque [GKL15, section 7], [FK09] décompose l'ensemble des α -orientations d'une carte en plusieurs composantes connexes au sein desquelles deux cartes peuvent s'obtenir l'une à partir de l'autre par une suite de retournements faciaux. Afin d'obtenir une orientation sur laquelle appliquer l'algorithme d'ouverture, il faut alors faire le choix d'une composante connexe, dont on extrait ensuite l'orientation minimale. Ce choix est important, notamment pour assurer que l'ouverture aura bien genre maximal et être capable d'écrire une bijection inverse. Il est généralement fait en considérant une base des cycles non contractibles de la surface considérée et en appliquant des contraintes sur ces cycles.

Notons que dans notre cas, la bijection décrite dans la section 2.1.1 se base sur les travaux de Propp. Ceux-ci s'écrivent en termes de graphes plutôt que de cartes, ce qui, en ignorant le plongement de la carte, a pour implication concrète de prendre directement en compte les cycles non-contractibles d'une carte, et d'assurer la connexité de l'ensemble des c -orientations d'une carte de genre g .

1.3.3 Applications probabilistes

En plus de l'interprétation combinatoire de résultats énumératifs obtenus par des méthodes analytiques, une des grandes motivations de la combinatoire bijective demeure son utilisation par les probabilistes dans l'étude des surfaces aléatoires. On présente ici un très bref historique des principaux résultats de ce domaine. Le lecteur qui souhaiterait en savoir plus peut se tourner vers les notes de cours de Miermont [Mie14]

En utilisant les résultats bijectifs de Schaeffer [Sch98], Chassaing et Schaeffer [CS04] parvinrent à montrer que le rayon d'une quadrangulation aléatoire de taille n , renormalisé par $n^{\frac{1}{4}}$, converge en distribution. Puis, Marckert et Mokkadem [MM06] définirent une notion de carte infinie aléatoire appelée *carte Brownienne*, et parvinrent à montrer que les grandes quadrangulations convergent en un sens faible vers celle-ci. Le Gall [LG07] parvint ensuite à montrer que les grandes $2p$ -angulations renormalisées convergent en loi pour la distance de Gromov-Hausdorff le long de sous-suites, vers la carte Brownienne, dont il donne une nouvelle définition comme un quotient de l'arbre continu aléatoire. Enfin, Miermont [Mie13] et Le Gall [LG13] parvinrent à prouver la convergence en loi des grandes quadrangulations planaires aléatoires renormalisées pour la distance de Gromov-Hausdorff, vers la carte Brownienne.

Le cas du genre supérieur a été étudié plus récemment. Dans une série de travaux [Cha09b, Mie09, Bet10, Bet12], le même type de résultats ont été obtenus dans le cas des cartes de genre fixé, et le travail de Bettinelli et Miermont [BM19] montre la convergence en loi des grandes quadrangulations de genre g aléatoires renormalisées

pour la distance de Gromov-Hausdorff, vers une surface appelée la surface Brownienne de genre g .

Notons que les travaux de Le Gall [LG07, LG13] font notamment état d'une forme d'universalité de la carte Brownienne, qui est, à constante près, la limite d'échelle de plusieurs familles de cartes planaires, en l'occurrence les triangulations et les $2p$ -angulations. Cette universalité, dont les travaux suivants ne feront que confirmer la pertinence, est un phénomène intéressant et demeure un sujet de recherche vivant. Néanmoins, il est à noter que, bien qu'il semble que toutes les familles raisonnables de cartes convergent vers la carte Brownienne, cela n'est pas toujours facile à prouver, suivant les familles de cartes.

Tous les travaux présentés jusque là se basent sur des bijections de type mobile pour obtenir des résultats probabilistes. Mais plusieurs autres travaux ont été menés qui utilisent à bon escient des bijections de type bourgeonnantes pour obtenir de nouveaux résultats. Ainsi, Addario-Berry et Albenque [ABA17] montrent la convergence des triangulations planaires simples en utilisant [AP15]. En utilisant une approche similaire, Bernardi, Collet et Fusy [BCF14] montrent la convergence des cartes simples du plan. Plus récemment, Beffara, Huynh et Lévêque montrent la convergence le long de sous-suites des triangulations simples de genre 1.

Ces résultats encourageants concernant l'utilisation de bijections bourgeonnantes à des fins probabilistes peuvent laisser penser que les bijections bourgeonnantes présentées plus tard (voir section 1.3) pourraient bien être utilisées à bon escient dans ce sens. Remarquons en particulier la relative simplicité combinatoire de l'algorithme d'ouverture dans le cas non-orientable (section 2.1.3), notamment vis-à-vis des bijections par mobiles dans les surfaces non-orientables [CD17, Bet16].

1.4 Les cartes: formalisme, propriétés

1.4.1 Surface, carte

Graphe plongé sur une surface

Dans cette thèse, je m'intéresse à des cartes combinatoires plongées sur des surfaces. Les surfaces considérées sont des variétés compactes et connexes de dimension 2, sans bord.

Soit $g \in \mathbb{N}$ un entier. Le *tore à g trous*, noté \mathcal{S}_g , est la surface obtenue en recollant g poignées sur une sphère. L'entier g est appelé le *genre* de la surface. Les tores à 0 et 1 trous sont plus simplement appelés *sphère* et *tore*. Soit $g \in (\frac{1}{2} \cdot \mathbb{N} \setminus \{0\})$ un demi-entier ou un entier non nul. La *surface non-orientable de genre g* , notée \mathcal{N}_g , est la surface obtenue en recollant $2g$ *crosscaps*⁴ sur une sphère. Les surfaces non-orientables de genre $\frac{1}{2}$ et 1 sont appelées *plan projectif* et *bouteille de Klein*. Le genre d'une surface \mathcal{S} est noté $g_{\mathcal{S}}$.

Le théorème de classification (voir par exemple [Sti12]) implique que toute surface est soit orientable, auquel cas elle est homéomorphe au tore à g trous, pour un certain entier $g \in \mathbb{N}$; soit non-orientable, auquel cas elle est homéomorphe à la surface non-orientable de genre g , pour un certain $g \in (\frac{1}{2} \cdot \mathbb{N} \setminus \{0\})$.

⁴Une crosscap est la surface obtenue en recollant le bord d'un ruban de Möbius au bord d'un disque.

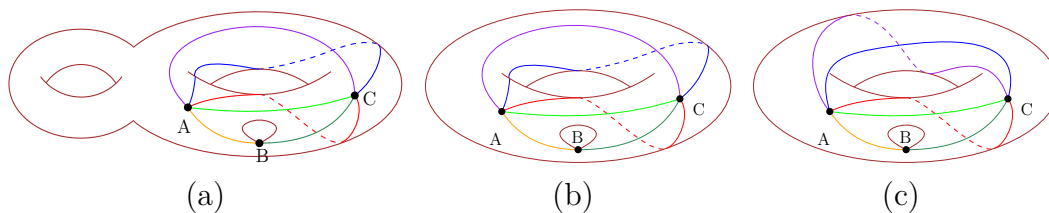


Figure 1.5: Un graphe plongé sur une surface de manière non cellulaire (1.5a), et deux représentations d’une même carte toroïdale (1.5b et 1.5c). Notons que ces deux représentations, bien qu’elles ne puissent pas être obtenues l’une de l’autre par une déformation continue, sont bien homéomorphes.

Un *graphe* G est un objet combinatoire composé d’un ensemble de *sommets*, noté \mathbf{V}_G , et d’un multi-ensemble, noté \mathbf{E}_G , de paires de sommets, appelées *arêtes*. En particulier, à moins que le contraire ne soit précisé, les graphes ne sont pas orientés, et peuvent avoir des boucles et des arêtes multiples. Les arêtes d’un graphe peuvent être divisées dans la longueur en deux *demi-arêtes*. L’ensemble des demi-arêtes de G est noté \mathbf{H}_G . À une demi-arête $h \in \mathbf{H}_G$ peut naturellement être associé le sommet auquel elle est attachée, noté $v_G(h)$, et la demi-arête à laquelle elle est appariée, notée $\zeta_G(h)$.

Le plongement d’un graphe sur une surface est dit *propre* s’il ne contient pas de croisement d’arêtes. Les arêtes du plongement propre d’un graphe découpent la surface sous-jacente en un ensemble de composantes connexes, appelée *faces*. Le plongement propre d’un graphe sur une surface est dit *cellulaire* si toutes ses faces sont homéomorphes à des disques. Cela implique en particulier que le graphe est connexe. Une *carte* m sur une surface \mathcal{S} est le plongement propre d’un graphe G_m sur \mathcal{S} , considéré à homéomorphisme (voir figure 1.5).

Notations et conventions

On définit maintenant plusieurs conventions sur les cartes, illustrées dans la figure 1.6.

Le graphe G_m est appelé le *graphe sous-jacent* de m , et on définit par extension $\mathbf{V}_m := \mathbf{V}_{G_m}$, $\mathbf{E}_m := \mathbf{E}_{G_m}$, et $\mathbf{H}_m := \mathbf{H}_{G_m}$ les ensembles de sommets, d’arêtes et de demi-arêtes de la carte m . On note également \mathbf{F}_m l’ensemble des faces de m .

On note n_m^v , n_m^e , and n_m^f le nombre de sommets, d’arêtes et de faces de la carte m . On note également g_m le genre de la surface dans laquelle m est plongée. La formule d’Euler stipule:

$$n_m^v - n_m^e + n_m^f = 2 - 2g_m.$$

Un secteur angulaire autour d’un sommet, délimité par deux demi-arêtes, est appelé un *coin*. L’ensemble des coins de m est noté \mathbf{C}_m . À un coin c peuvent naturellement être associés le sommet, noté $v_m(c)$, et la face, notée $f_m(c)$, auxquels il est incident.

À chaque sommet d’une carte on associe de manière arbitraire une orientation qu’on appelle *directe*. Cette orientation permet de définir une permutation $\sigma_m : \mathbf{C}_m \rightarrow \mathbf{C}_m$ appelé *rotation autour du sommet*, qui à un coin c associe le coin $\sigma_m(c)$ qui suit c dans le sens direct autour du sommet $v_m(c)$. On appelle également *rotation autour du sommet* la permutation $\sigma_m : \mathbf{H}_m \rightarrow \mathbf{H}_m$ qui à une demi-arête h associe la demi-arête $\sigma_m(h)$ qui suit h dans le sens direct autour du sommet $v_m(h)$.

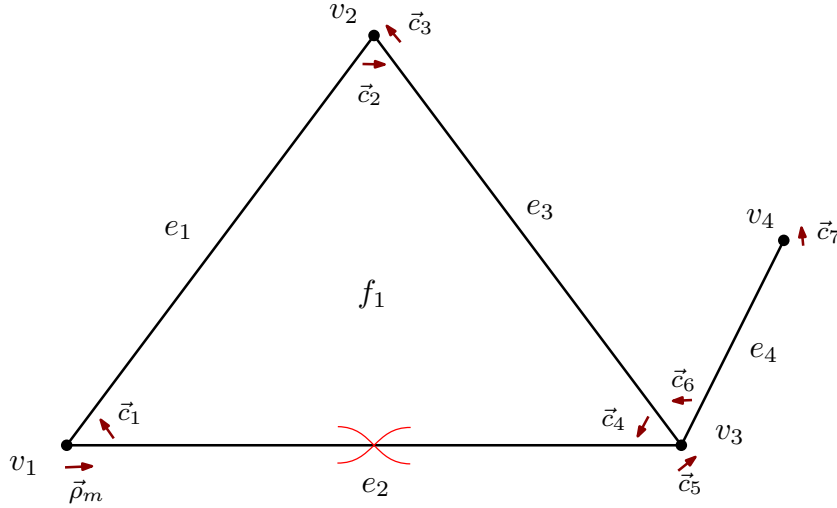


Figure 1.6: Exemple d'une carte m unicellulaire du plan projectif, qui possède 4 sommets et 4 arêtes. Les sommets sont dessinés dans le plan avec leur orientation directe, et la décoration rouge sur l'arête e_2 indique que $\tau_m(e_2) = -1$. On a les relations suivantes: $\vec{\sigma}_m(\vec{\rho}_m) = \vec{c}_1$, $\vec{\theta}_m(\vec{\rho}_m) = \vec{c}_4$, ou encore $\vec{\sigma}_m(\vec{c}_7) = \vec{c}_7$.

Un *coin orienté* \vec{c} est un coin c muni d'un signe $\varepsilon_m(\vec{c})$, qu'on appellera *spin*, qui vaut 1 si l'orientation de \vec{c} coïncide avec l'orientation directe de $v_m(c)$, et -1 sinon. L'ensemble des coins orientés de m est noté $\vec{\mathbf{C}}_m$. Le *coin renversé* de \vec{c} , noté \bar{c} , est défini par $\bar{c} = (c, -\varepsilon_m(c))$.

La rotation autour du sommet peut être étendue aux coins orientés de la manière suivante: $\sigma_m(\vec{c}) := \sigma_m^{\varepsilon_m(\vec{c})}(c)$, $\vec{\sigma}_m(\vec{c}) := (\sigma_m(\vec{c}), \varepsilon_m(\vec{c}))$, $\vec{\bar{\sigma}}_m(\vec{c}) := (\sigma_m(\vec{c}), -\varepsilon_m(\vec{c}))$. Notons que la fonction $\vec{\bar{\sigma}}_m$ est une involution. La demi-arête qui sépare c et $\sigma_m(\vec{c})$ est notée $h_m(\vec{c})$, et l'arête associée est notée $e_m(\vec{c})$. On peut noter que toute demi-arête $h_m(\vec{c})$ possède exactement 2 antécédents pour h_m : \vec{c} , et $\vec{\bar{\sigma}}_m(\vec{c})$.

On appelle *rotation autour de la face*, et on note $\vec{\theta}_m : \vec{\mathbf{C}}_m \rightarrow \vec{\mathbf{C}}_m$, la permutation qui à un coin orienté \vec{c} associe le coin orienté qui le suit⁵ autour de la face $f_m(c)$ (et de la même manière que pour σ_m , on note également $\theta_m(\vec{c})$ et $\vec{\bar{\theta}}_m(\vec{c})$ le coin non orienté et le coin renversé de $\vec{\theta}_m(\vec{c})$). Remarquer que la fonction $\vec{\bar{\theta}}_m$ est aussi une involution, et que les demi-arêtes $h_m(\vec{c})$ et $h_m(\vec{\bar{\theta}}_m(\vec{c}))$ sont appariées.

Soit e une arête. On peut montrer facilement que pour tout coin orienté \vec{c} tel que $e_m(\vec{c}) = e$, l'expression $\varepsilon_m(\vec{c}) \cdot \varepsilon_m(\vec{\bar{\theta}}_m(\vec{c}))$ a la même valeur. Ce signe, noté $\tau_m(e)$, est appelé le *twist* de e .

Dans le cas des surfaces orientables, il est possible de choisir une orientation directe pour chaque sommet qui soit globalement cohérente, c'est-à-dire telle que le twist de chaque arête soit égal à 0. On identifie alors tout coin c au coin orienté $(c, 1)$ de spin positif. Les fonctions $\vec{\sigma}_m$ et $\vec{\bar{\theta}}_m$ sont alors notées simplement σ_m et θ_m , et les notions de spin et de twist n'ont plus lieu d'être. Cela permet de définir de manière globale des notions telles que la gauche et la droite, ou encore un sens horaire ou anti-horaire.

Les cartes telles que définies ci-dessus sont susceptibles d'admettre des automorphismes. Cela rend leur énumération plus ardue, et complique l'approche bijective

⁵Puisque les faces d'une carte sont homéomorphes à des disques par définition, il est possible d'en suivre le bords en partant d'un coin orienté.

qui cherche à les étudier. L'enracinement, en brisant toute symétrie potentielle, permet de se débarrasser de ce problème. On munit toute carte m d'un coin orienté marqué $\vec{\rho}_m \in \vec{\mathcal{C}}_m$, appelé *coin-racine*.

L'ensemble des cartes enracinées d'une surface \mathcal{S} est noté $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$. Le sous ensemble des cartes ayant n_e arêtes (resp. n_v sommets et n_f faces) est noté $\mathcal{M}_{\mathcal{S};n_e}$ (resp. $\mathcal{M}_{\mathcal{S};n_v,n_f}$). Les *séries génératrices univariée* et *bivariée* des cartes enracinées sur une surface \mathcal{S} sont définies comme suit:

$$M_{\mathcal{S}}(z) := \sum_{m \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}} z^{n_m^e} = \sum_{n_e \in \mathbb{N}} |\mathcal{M}_{\mathcal{S};n_e}| \cdot z^{n_e},$$

$$M_{\mathcal{S}}(x, y) := \sum_{m \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}} x^{n_m^v} y^{n_m^f} = \sum_{n_v, n_f \in \mathbb{N}^*} |\mathcal{M}_{\mathcal{S};n_v,n_f}| \cdot x^{n_v} y^{n_f}.$$

Une *carte pointée* est une carte enracinée dont un des sommets, dit *pointé*, et noté p_m , est distingué. Les familles de cartes pointées et leurs séries génératrices sont distinguées par un \bullet en exposant. On peut noter par exemple que la série bivariée des cartes pointées enracinées d'une surface \mathcal{S} vérifie: $M_{\mathcal{S}}^{\bullet}(x, y) = x \cdot \frac{\partial M_{\mathcal{S}}(x, y)}{\partial x}(x, y)$. Une carte *pointée sur la racine* est une carte pointée telle que $v_m(\vec{\rho}_m) = p_m$.

On définit maintenant une involution classique sur les cartes qu'on appelle la dualité. Le dual d'une carte m est la carte m^* , plongée dans la même surface, qui possède le même ensemble de coins, dont les sommets correspondent aux faces de m , dont les faces correspondent aux sommets de m , et telle que l'ordre des coins orientés autour des sommets de l'une correspond à l'ordre des coins orientés autour des faces de l'autre. Elles possèdent également la même racine. Les arêtes d'une carte et de sa duale sont aussi en correspondance. Dans la pratique, on identifie les coins d'une carte et de sa duale, mais pas leurs sommets et faces, ni leurs arêtes. En particulier, pour tout coin orienté \vec{c} , on a $\sigma_m(\vec{c}) = \theta_{m^*}(\vec{c})$. On note $v_{m^*}(f)$, $f_{m^*}(v)$ et $e_{m^*}(e)$ le sommet, la face et l'arête de m^* associés à la face f , au sommet v , et à l'arête e de m .

Notons que cette manière de considérer que plusieurs cartes distinctes, ici une carte et sa duale, partagent néanmoins des coins (ou des sommets, faces...), est commode d'un point de vue algorithmique et descriptif. Elle sera donc réutilisée dans la suite. Ce qui distingue les différentes cartes est alors l'ordre des coins autour des sommets et des faces, mais ces fonctions incluent une référence à la carte concernée en indice, ce qui évite les confusions.

Autres définitions

Il existe d'autres manières de définir les cartes combinatoires. La définition donnée précédemment est basée sur la donnée du graphe sous-jacent et son plongement pour construire la carte.

Deux autres définitions, plus combinatoires, peuvent également être rencontrées. La première consiste dans le cas orientable à définir une carte m par ses fonctions σ_m et ζ_m , définies sur l'ensemble de ses demi-arêtes. On peut alors exprimer une carte comme une paire composée d'une permutation et d'une involution, avec une condition supplémentaire qui permet d'assurer que la carte est connexe. Cette définition alternative implique des liens profonds entre l'étude des cartes combinatoires et d'autres domaines mathématiques comme la théorie des représentations du groupe symétrique. Notons qu'une définition de ce type peut également être donnée dans le

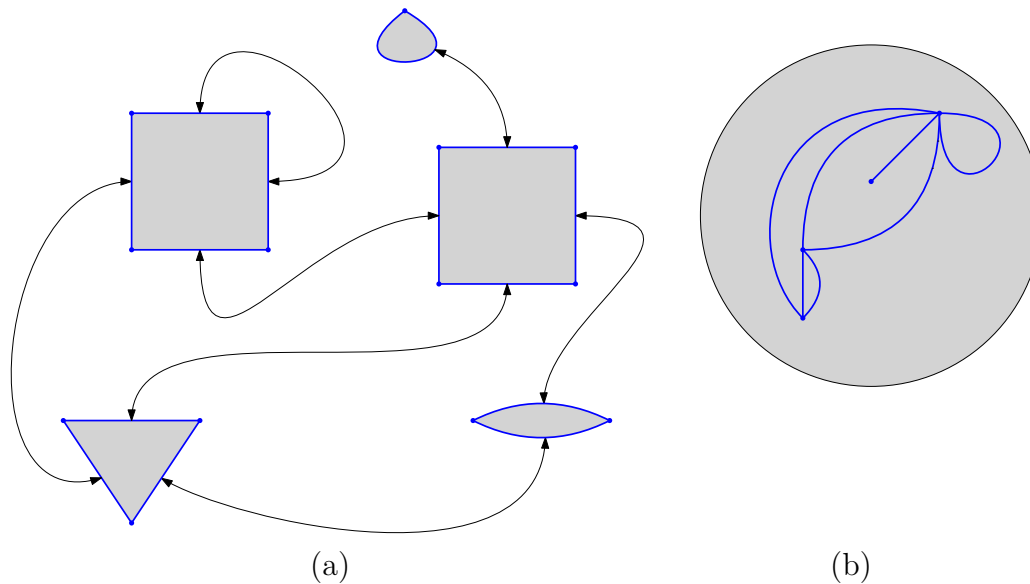


Figure 1.7: Un exemple de représentation d'une carte planeire (1.7b) par un ensemble de polygones dont les arêtes sont appariées (1.7a).

cas des surfaces non orientables, en ajoutant une donnée correspondant à la notion de twist, quotientée par l'opération qui, étant donné un sommet, inverse le twist de toutes les arêtes incidente à ce sommet.

La définition des cartes comme recollement de polygones, peut être considérée comme une construction duale de la construction par permutations, et est illustrée par la figure 1.7. Elle consiste à prendre un ensemble de polygones (qui correspondent aux faces de la carte, ou encore dont le dual correspond aux cycles de la permutation σ_{m^*}) dont la somme des degrés est paire. Les bords des polygones sont alors collés deux à deux, ce qui crée une surface compacte sans bords, qui, lorsqu'elle est connexe, peut être interprétée comme une carte.

Notons qu'on utilisera souvent la représentation par recollement de polygones pour dessiner des surfaces, en utilisant un seul polygone dont on identifie les côtés deux par deux. Dans certains cas on utilisera une méthode intermédiaire qui consiste à représenter une carte sur un disque et d'indiquer des arêtes du bords à identifier. Ces représentations sont illustrées dans la figure 1.8.

1.4.2 Propriétés de cartes

On étudie maintenant quelques propriétés supplémentaires de cartes.

Degrés

Soit m une carte sur une surface \mathcal{S} . Le degré d'un sommet v (resp. d'une face f) de m , noté $\delta_m(v)$ (resp. $\delta_m(f)$), est le nombre de coins incidents à ce sommet (resp. à cette face). Le *poils par sommet* (resp. *poils facial*) de m , noté δ_m^v (resp. δ_m^f), est la suite d'entiers $(n_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la carte m possède n_i sommets (resp. faces) de degré i . On peut remarquer que ces suites sont nécessairement presque nulles. On note $\mathcal{M}_{\mathcal{S}; \delta^v, \delta^f}$ l'ensemble des cartes qui ont δ_m^v pour poils par sommet et δ_m^f pour poils facial. La *série génératrice multivariée* des cartes est

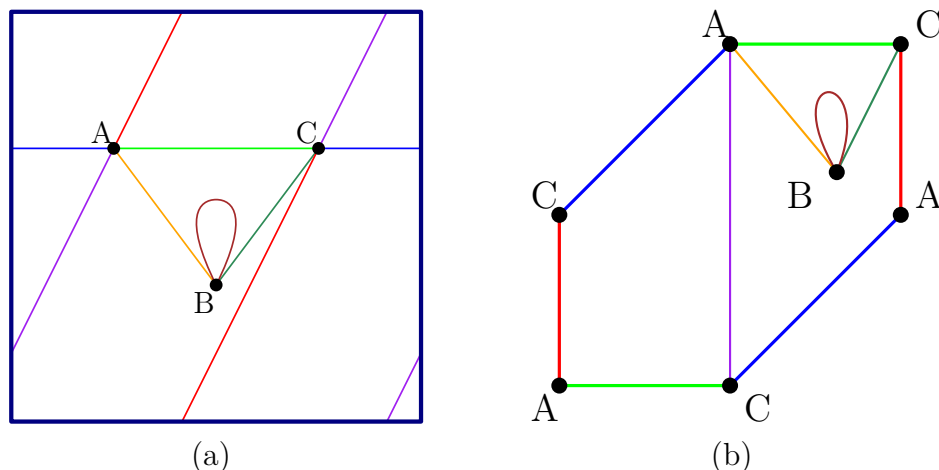


Figure 1.8: Deux représentations possibles de la carte toroïdale représentée dans la figure 1.5b. Dans la figure 1.8a, les bords opposés du carré doivent être identifiés pour construire le tore, et dans la figure 1.8a, les arêtes grasses opposées doivent être identifiées pour retrouver la carte toroïdale.

définie comme suit:

$$M_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{m \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}} \mathbf{x}^{\delta_m^v} \mathbf{y}^{\delta_m^f} = \sum_{\delta^v, \delta^f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}} |\mathcal{M}_{\mathcal{S}; \delta^v, \delta^f}| \cdot \mathbf{x}^{\delta^v} \mathbf{y}^{\delta^f},$$

avec les conventions que $\mathbf{x} := (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, $\mathbf{y} := (y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ et que $(z_i)_{i \in \mathbb{N}^*}^{(n_i)_{i \in \mathbb{N}^*}} := \prod_{i \in \mathbb{N}^*} z_i^{n_i}$.

Un graphe est dit *eulérien* si tous ses sommets sont de degré pair. Un graphe est dit *biparti* si ses sommets peuvent être séparés en deux sous-ensembles, qu'on appelle les sommets *blancs* et les sommets *noirs*, de telles sortes toutes les arêtes du graphes relient des sommets de couleurs différentes; ou de manière équivalente, si tous ses cycles sont de longueur paire. Une carte est dite *eulérienne* ou *bipartie* si son graphe sous-jacent l'est. Par convention, le sommet racine d'une carte bipartie est noir. On peut remarquer qu'une carte bipartie n'a pas de boucles et que ses faces sont toutes de degré pair. Une carte est dite bicoloriable si son dual est biparti. De la même manière, on distingue les faces *noires* et *blanches* d'une carte bicoloriable, avec la convention que la face racine est noire. Une carte bicoloriable est nécessairement eulérienne, et il s'agit même d'une équivalence pour le cas des cartes planaires. Cependant, sur les autres surfaces, cela n'est pas une équivalence, et il existe des cartes dont toutes les faces ont degré pair, mais qui ne sont pas biparties, et possèdent des cycles non-contractibles de longueur impaire.

On note respectivement $\mathcal{BP}_{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{BC}_{\mathcal{S}}$ l'ensemble des cartes biparties et bicoloriables d'une surface \mathcal{S} . On note $\mathcal{BP}_{\mathcal{S}; \delta^f}$ et $\mathcal{BC}_{\mathcal{S}; \delta^v}$ leur sous-ensemble ayant un poids facial ou un poids par sommet fixé. Pour que ces ensembles soient non vides, il faut que tous les coefficients d'indice impair dans δ soit nuls. Les *séries génératrices multivariées* des cartes biparties et bicoloriables sont définies comme suit:

$$\begin{aligned} BP_{\mathcal{S}}(\mathbf{z}) &:= \sum_{m \in \mathcal{BP}_{\mathcal{S}}} \mathbf{z}^{\delta_m^f}, \\ BC_{\mathcal{S}}(\mathbf{z}) &:= \sum_{m \in \mathcal{BC}_{\mathcal{S}}} \mathbf{z}^{\delta_m^v}. \end{aligned}$$

Le *poids coloré facial* d'une carte bipartie m , noté γ_m^f , est le couple $(\gamma_m^{f\bullet}, \gamma_m^{f\circ})$ tel que $\gamma_m^{f\bullet}$ et $\gamma_m^{f\circ}$ sont le nombre de faces noires et de faces blanches de m . Le *poids coloré par sommet* d'une carte bicoloriable m , noté γ_m^v , est le couple $(\gamma_m^{v\bullet}, \gamma_m^{v\circ})$ tel que $\gamma_m^{v\bullet}$ et $\gamma_m^{v\circ}$ sont le nombre de sommets noirs et de sommets blancs de m . Les *séries génératrices colorées multivariées* des cartes biparties et bicoloriables sont définies comme suit:

$$BP_S(x, y, \mathbf{z}) := \sum_{m \in \mathcal{BP}_S} x^{\gamma_m^{v\bullet}} y^{\gamma_m^{v\circ}} \mathbf{z}^{\delta_m^f},$$

$$BC_S(x, y, \mathbf{z}) := \sum_{m \in \mathcal{BC}_S} x^{\gamma_m^{f\bullet}} y^{\gamma_m^{f\circ}} \mathbf{z}^{\delta_m^v}.$$

Une *quadrangulation bipartie* est une carte bipartie dont toutes les faces sont de degré 4. Une *carte 4-valente bicoloriable* est une carte bicoloriable dont tous les sommets ont degré 4. L'ensemble des quadrangulations biparties avec n^f faces est noté $\mathcal{BP}_{S;n^f}^\square := \mathcal{BP}_{S;(0,0,0,n^f,0\dots)}$, et l'ensemble de toutes les quadrangulations biparties est noté $\mathcal{BP}_S^\square := \bigcup_{n^f \in \mathbb{N}^*} \mathcal{BP}_{S;n^f}^\square$. L'ensemble des cartes 4-valentes bicoloriables avec n^v sommets est noté $\mathcal{BC}_{S;n^v}^\times := \mathcal{BC}_{S;(0,0,0,n^v,0\dots)}$, et l'ensemble de toutes les cartes 4-valentes bicoloriables est noté $\mathcal{BC}_S^\times := \bigcup_{n^v \in \mathbb{N}^*} \mathcal{BC}_{S;n^v}^\times$. Les *séries génératrices bivariées* des quadrangulations biparties et des cartes 4-valentes bicoloriables sont définies par

$$BP_S^\square(x, y) := \sum_{m \in \mathcal{BP}_S^\square} x^{\gamma_m^{v\bullet}} y^{\gamma_m^{v\circ}},$$

$$BC_S^\times(x, y) := \sum_{m \in \mathcal{BC}_S^\times} x^{\gamma_m^{f\bullet}} y^{\gamma_m^{f\circ}}.$$

Orientation

Une *orientation* d'une carte est une orientation de chacune de ses arêtes. En particulier, une orientation o induit une fonction *origine*, notée $h_{m;o}^0 : \mathbf{E}_m \rightarrow \mathbf{H}_m$, et une fonction *destination*, notée $h_{m;o}^1 : \mathbf{E}_m \rightarrow \mathbf{H}_m$, qui à une arête e associent une demi-arête origine et une demi-arête destination. Dans un souci de concision, quand cela n'est pas ambigu, on les note plus simplement h_m^0 et h_m^1 . Ces fonctions sont telles que $h_m^0(e) = \zeta_m(h_m^1(e))$, et $e_m(h_m^0(e)) = e$. On note également $v_m^0(e) := v_m(h_m^0(e))$ et $v_m^1(e) := v_m(h_m^1(e))$.

L'existence d'une orientation globalement cohérente d'une surface orientable nous permet de définir le dual d'une orientation d'une carte orientable. Soit m une carte orientable, et o une orientation de m . L'orientation duale de o , notée o^* , est l'orientation de m^* telle que les arêtes de m^* sont orientées vers la gauche de leur arête correspondante dans m . Alors que la dualité est une involution sur les cartes, il est à noter que la dualité n'est pas une involution sur les cartes orientées, mais que $(o^*)^*$ est l'orientation inverse de o (c'est à dire que $h_{m;o}^0 = h_{m;(o^*)^*}^1$).

Une orientation o d'une carte bipartie m est dite *bipartie* si tout cycle orienté de m a autant d'arêtes qui vont en avant pour o que d'arêtes qui vont en arrière pour o . Un sommet v est un *puits* (resp. une *source*) si toutes ses demi-arêtes incidentes sont des demi-arêtes destination (resp. origine). En particulier, un sommet ou un puits ne peuvent pas être incidents à une boucle. Une face f d'une carte d'une surface orientable est dite *horaire* (resp. *antihoraire*) si elle n'est à la gauche (resp.

à la droite) d'aucune de ses arêtes incidentes. En particulier, une face horaire ou antihoraire ne peut pas être incidente à un pont. Le *degré entrant* (resp. *degré sortant*) d'un sommet est le nombre d'arêtes dont il est la destination (resp. la source). Une orientation d'une carte eulérienne est dite *eulérienne* si chacun de ses sommets a un degré entrant égal à son degré sortant. Une orientation d'une carte bicoloriable est dite *bicoloriable* si son orientation duale est bipartie. En d'autres termes, tout cycle orienté de la surface qui ne passe pas par les sommets de m croise autant d'arêtes qui vont vers sa gauche que d'arêtes qui vont vers sa droite.

On peut noter que toute orientation d'une carte bipartie (resp. eulérienne, bicoloriable) n'est pas bipartie (resp. eulérienne, bicoloriable), mais que toute carte bipartie (resp. eulérienne, bicoloriable) admet au moins une orientation bipartie (resp. eulérienne, bicoloriable), et que toute carte qui admet une orientation bipartie (resp. eulérienne, bicoloriable) est elle-même bipartie (resp. eulérienne, bicoloriable). Notons aussi que toute orientation bipartie est également eulérienne, et que, bien que toute orientation eulérienne d'une carte planaire soit également bicoloriable, ce n'est pas le cas pour les autres surfaces, dans lesquelles il existe des orientations eulériennes de cartes bicoloriables qui ne sont pas elles-mêmes bicoloriables.

L'ensemble des orientations biparties d'une carte bipartie est muni d'une opération appelée *écrasement du sommet*, qui prend une source v en argument et inverse l'orientation de toutes les arêtes incidentes à v , de telle sorte que v devient un puits. L'ensemble des orientations bicoloriables d'une carte bicoloriable est muni d'une opération appelée *retournement de face*, qui prend une face horaire f en argument et inverse l'orientation de toutes les arêtes incidentes à f , de telle sorte que f devient antihoraire.

La distance de graphe entre deux sommets u et v d'un graphe G est le nombre d'arêtes d'un plus court chemin dans G allant de u à v . L'*étiquetage géodésique* d'une carte pointée m , noté $\lambda_m^g : \mathbf{V}_m \rightarrow \mathbb{N}$, est l'application qui à chaque sommet v de m associe la distance de graphe entre p_m et v . L'*étiquetage géodésique* d'une carte non-pointée m est l'étiquetage de la carte pointée sur la racine correspondante. L'étiquetage géodésique de deux sommets incidents à la même arête diffère au plus de 1. Dans le cas où la carte m est bipartie, l'étiquetage géodésique de deux sommets incidents à la même arête diffère toujours de 1 exactement. L'*orientation géodésique* d'une carte pointée bipartie est l'orientation telle que pour toute arête e , on a $\lambda_m^g(v_m^1(e)) = \lambda_m^g(v_m^0(e)) - 1$. Le sommet pointé d'une carte bipartie est le seul puits de son orientation géodésique. L'*orientation duale-géodésique* d'une carte orientable bicoloriable m est l'orientation duale de l'orientation géodésique de m^* . La face $f_m^*(p_{m^*})$ est la seule face horaire de m pour son orientation duale-géodésique.

Carte unicellulaire, carte bourgeonnante

Un graphe est un *arbre* s'il est connexe et ne contient pas de cycle. Une carte est dite *unicellulaire* si elle possède une seule face. Les cartes unicellulaires du plan sont appelés *arbres plans*. Le graphe induit d'un arbre plan est un arbre. Cependant, sur toutes les autres surfaces, les cartes unicellulaires ne sont pas des arbres.

Soit m une carte unicellulaire. On note ${}^t\vec{\mathbf{C}}_m$ l'ensemble des coins orientés qui s'écrivent sous la forme $\vec{\theta}_m^{(i)}(\vec{\rho}_m)$, pour un certain $i \in \mathbb{Z}$. Ces coins peuvent être obtenus en effectuant un tour de la face en partant de la racine $\vec{\rho}_m$. La première fois qu'on rencontre à nouveau le coin (non-orienté) ρ_m , puisque m est unicellulaire

et $\vec{\theta}_m$ bijective, chaque coin a été visité exactement une fois, et chaque arête a été parcourue une fois de chaque côté. Par conséquent, le spin avec lequel on arrive à nouveau sur ρ_m est égal à $\varepsilon_m(\vec{\rho}_m)$. Par conséquent, chaque coin (non-orienté) possède exactement une version (orientée) dans ${}^t\mathbf{C}_m$.

À chaque coin $\vec{c} \in {}^t\mathbf{C}_m$ on associe un *indice d'ordre facial* défini comme étant le plus petit entier $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\vec{c} = \vec{\sigma}_m^i(\vec{\rho}_m)$. On appelle *ordre facial en partant de la racine* et on note \preccurlyeq_m l'ordre total sur ${}^t\mathbf{C}_m$ correspondant. On appelle *ordre facial* l'ordre cyclique correspondant. Notons que la racine est toujours le dernier coin pour l'ordre facial partant de la racine.

Par exemple, pour la carte de la figure 1.6, la suite des coins de ${}^t\mathbf{C}_m$ dans l'ordre facial partant de la racine est le suivant: $\vec{c}_4, \vec{c}_2, \vec{c}_1, \vec{c}_5, \vec{c}_7, \vec{c}_6, \vec{c}_3, \vec{\rho}_m$.

On appelle *carte bourgeonnante* une carte munie de *bourgeons*, c'est-à-dire de demi-arêtes qui ne sont pas appariées. Soit m une carte bourgeonnante. On note \mathbf{H}_m^s l'ensemble des bourgeons de m , et \mathbf{H}_m^e l'ensemble des demi-arêtes appariées de m . On note également $\vec{\mathbf{C}}_m^s := h_m^{-1}(\mathbf{H}_m^s)$ et $\vec{\mathbf{C}}_m^e := h_m^{-1}(\mathbf{H}_m^e)$ l'ensemble des coins orientés qui précèdent de telles demi-arêtes. Notons que les fonctions e_m et ζ_m ne sont pas définies sur \mathbf{H}_m^s , et que la fonction e_m n'est pas définie sur $\vec{\mathbf{C}}_m^s$. La définition de la fonction $\vec{\theta}_m$ peut être étendue à $\vec{\mathbf{C}}_m^s$ par $\vec{\theta}_m(\vec{c}) := \vec{\sigma}_m(\vec{c})$.

On appelle *carte intérieure* de m , et on note m° , la carte obtenue obtenue à partir de m en lui retirant tous ses bourgeons. Le *degré intérieur* (resp. *degré bourgeonnant*) d'un sommet v de m , noté $\delta_m^\circ(v)$ (resp. $\delta'_m(v)$), est son degré dans m° (resp. le nombre de bourgeons incidents à ce sommet). Le degré d'un sommet est égal à la somme de son degré intérieur et de son degré bourgeonnant.

Pour toute carte m , on appelle *carte des coins de m* la carte dont les sommets sont les coins de m , et les arêtes correspondent aux opérations $\sigma_m, \sigma_m^{-1}, \theta_m$, et θ_m^{-1} . Notons qu'il s'agit d'une carte 4-valente et bicoloriable. Une carte bourgeonnante est dite *bicoloriable* si tout cycle dans son graphe des coins croise un nombre pair de demi-arêtes. En particulier, une carte bourgeonnante bicoloriable est également eulérienne. De nouveau, si la surface sous-jacente n'est pas une sphere, la réciproque n'est pas vérifiée.

On décide souvent d'orienter les bourgeons. Un bourgeon entrant (orienté vers son sommet) est appelé une *feuille*, alors qu'un bourgeon sortant est appelé une *pousse*. L'ensemble des feuilles (resp. des pousses) et des coins les précédant sont notés $\mathbf{H}_{m_a}^l$ (resp. \mathbf{H}_m^b) et $\vec{\mathbf{C}}_m^l$ (resp. $\vec{\mathbf{C}}_m^b$). On note également ${}^t\vec{\mathbf{C}}_m^b := {}^t\vec{\mathbf{C}}_m \cap \vec{\mathbf{C}}_m^b$ et ${}^t\vec{\mathbf{C}}_m^l := {}^t\vec{\mathbf{C}}_m \cap \vec{\mathbf{C}}_m^l$.

La bijection de Tutte

On introduit ici une première bijection sur les cartes, qui a d'abord été introduite par Tutte [Tut63] pour les cartes planaires.

Théorème 1.4.1 (Tutte [Tut63]). *Il existe une bijection entre l'ensemble des cartes d'une surface \mathcal{S} ayant n_e arêtes, n_v sommets et n_f faces, et l'ensemble des quadrangulations biparties de \mathcal{S} ayant n_e faces, n_v sommets noirs, et n_f sommets blancs.*

Preuve. On considère une carte m sur une surface \mathcal{S} , ayant n_e arêtes, n_v sommets et n_f faces.

On appelle *quadrangulée* de m la carte q dont les sommets sont les faces et les sommets de m , et qui pour chaque coin c de m , possède une arête qui va du sommet

de q correspondant à $v_m(c)$ à celui correspondant à $f_m(c)$. La carte q est enraciné sur le coin de q incident au sommet de q correspondant à $v_m(\rho_m)$, qui précède l'arête de q correspondant à ρ_m .

Chaque face de q correspond à une arête de m , et est donc de degré 4. Chaque arête de q relie un sommet de q correspondant à un sommet de m à un sommet de q correspondant à une face de m , ce qui prouve que q est bipartie, et puisque le sommet racine de q correspond à un sommet de m , le nombre de sommets noirs et blancs de q correspond bien au nombre de sommets et faces de m .

Le caractère local de cette bijection, en plus de l'observation qu'elle ne modifie pas la structure topologique locale, implique que q est bien une carte, est qu'elle est plongée sur la surface \mathcal{S} . \square

On appelle *carte radiale* de m la carte duale de la quadrangulée de m .

1.4.3 Marches

On appelle Σ^* l'ensemble des mots sur un alphabet Σ . On munit l'alphabet Σ d'une fonction de *valuation*, notée h , à valeurs dans $\{-1\} \cup \mathbb{N}$. Cette fonction est étendue en un morphisme de (Σ^*, \cdot) sur $(\mathbb{Z}, +)$, pour définir la *valuation* d'un mot de Σ^* . Un mot de Σ^* est représenté par une marche unidimensionnelle (partant de 0 par défaut), dans laquelle une lettre a est représentée par un pas de hauteur $h(a)$. La valuation d'une marche correspond à la hauteur de son point d'arrivée. La *hauteur* d'une lettre a d'un mot $u \cdot a \cdot v$ est définie comme la valuation de u .

On appelle *pont sur Σ^** les mots de Σ^* qui ont une valuation égale à 0. On appelle *chemin positif sur Σ^** les mots de Σ^* dont tous les facteurs à gauche ont une valuation positive. On appelle *ponts positifs sur Σ^** les mots de Σ^* qui sont à la fois des ponts et des chemins positifs. On appelle *mots de Lukaciewicz sur Σ^** l'ensemble des mots qui s'écrivent $w \cdot a$, où w est un pont positif sur Σ^* , et a est une lettre telle que $h(a) = -1$. Les ensembles des ponts, des chemins positifs, des ponts positifs, et des mots de Lukaciewicz sur Σ^* sont notés Σ_b^* , Σ_p^* , Σ_d^* , et Σ_l^* .

Le théorème suivant est extrait de [Lot83]:

Théorème 1.4.2 (Dvoretzki-Motzkin). *Soit $w \in \Sigma^*$ un mots tels que $h(\sigma) = -k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de facteurs u tels que $w = uv$ et $vu \in (\Sigma_l^*)^k$ est exactement de k .*

Dans la suite, on s'intéressera plus particulièrement à trois alphabets. Le premier alphabet, appelé *alphabet de Dyck*, est défini par

$$\Sigma_1 := \{a, b\},$$

avec $h(a) = 1$ et $h(b) = -1$. Quand rien de plus n'est précisé, un *mot de Dyck* est un pont positif sur l'alphabet de Dyck. Sinon on parle de *pont de Dyck*, de *chemin de Dyck positif*, et de *mot de Dyck-Lukaciewicz*. La série génératrice des chemins de Dyck énumérés par leur demi longueur est notée N^C et vérifie l'équation de décomposition suivante: $N^C(z) = 1 + z(N^C(z))^2$. Les mots de Dyck de longueur $2n$ sont énumérés par les célèbres nombres de Catalan, notés N_n^C (ou $Cat(n)$), et définis par $N_0^C = 1$ et $N_{n+1}^C = \sum_{k < n} N_k^C N_{n-k}^C$. En utilisant le théorème 1.4.2, on obtient l'expression close suivante: $N_n^C = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

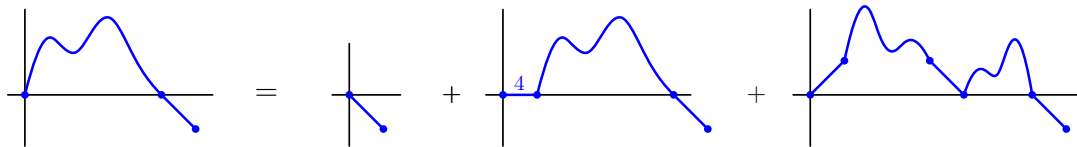


Figure 1.9: Une illustration de l'équation de décomposition des chemins de Motzkins décorés.

Le deuxième alphabet, appelé *alphabet de Motzkin*, est défini par

$$\Sigma_2 := \{a, b, c\},$$

avec $h(a) = 1$, $h(b) = -1$, et $h(c) = 0$. Quand rien de plus n'est précisé, un *mot de Motzkin* est un pont positif sur l'alphabet de Motzkin. Sinon on parle de *pont de Motzkin*, de *chemin de Motzkin positif*, et de *mot de Motzkin-Lukaciewicz*. La série génératrice des chemins de Motzkin énumérés par leur longueur est notée N^M et vérifie l'équation de décomposition suivante: $N^M(z) = 1 + zN^M(z) + (z \cdot N^M)^2$. Les mots de Motzkin de longueur n sont énumérés par les nombres de Motzkin, notés N_n^M .

Le troisième alphabet, appelé *alphabet de Motzkin décoré*, est défini par

$$\Sigma_3 := \{a, b, c_1, c_2, c_3, c_4\},$$

avec $h(a) = 1$, $h(b) = -1$, et $h(c_i) = 0$ pour tout i . Quand rien de plus n'est précisé, un *mot de Motzkin décoré* est un pont positif sur l'alphabet de Motzkin décoré. Sinon on parle de *pont de Motzkin décoré*, de *chemin de Motzkin décoré positif*, et de *mot de Motzkin-Lukaciewicz décoré*. La série génératrice des chemins de Motzkin décorés énumérés par leur longueur est notée $N^{M'}$ et vérifie l'équation de décomposition suivante, illustrée dans la figure 1.9: $N^{M'}(z) = 1 + 4zN^{M'}(z) + (z \cdot N^{M'})^2$.

Chapitre 2

Bijection bourgeonnante pour carte pointée sur une surface quelconque et rationalité paramétrique

2.1 L'ouverture

Dans cette section sont présentées les versions successives de l'algorithme d'ouverture d'une carte présentées dans [Lep19] et [DL19]. Dans la section 2.1.1, après avoir introduit les objets nécessaires et étudié la structure des orientations d'une carte, on utilise l'algorithme 1 pour effectuer l'ouverture d'une carte bicoloriable sur une surface orientable. Dans la section 2.1.2, on étend cette construction au cas des cartes non bicoloriable. Dans la section 2.1.3, on présente une autre version de l'ouverture, qui ne fait pas intervenir d'orientation, et qui permet donc l'ouverture d'une carte bipartie sur une surface quelconque. Enfin, dans la section 2.1.4, on étend la construction de la section précédente au cas des cartes pointées et enracinées.

2.1.1 Ouverture d'une carte de genre supérieur

Dans cette section, on s'intéresse uniquement à des cartes plongées sur des surfaces orientables.

Structure des orientations

En appliquant le théorème 1.2.9 au cas des orientations biparties d'une carte bipartie, on obtient le théorème suivant:

Théorème 2.1.1. *L'ensemble des orientations biparties d'une carte bipartie donnée, muni de la clôture transitive de l'opération d'écrasement d'un sommet qui n'est pas le sommet racine, a la structure d'un treillis distributif.*

Par dualité, on obtient simplement le corollaire suivant:

Corollaire 2.1.2. *L'ensemble des orientations bicoloriables d'une carte bicoloriable donnée, muni de la clôture transitive de l'opération de retournement d'une face qui n'est pas la face racine, a la structure d'un treillis distributif.*

Et par conséquent, puisqu'un treillis distributif a nécessairement un unique maximum et un unique minimum, on obtient le corollaire suivant:

Corollaire 2.1.3. *L'orientation duale-géodésique d'une carte bicoloriable est l'unique orientation bicoloriable de cette carte qui n'a pas de face anti-horaire.*

Comme expliqué dans la section 1.2.5, le choix d'utiliser la structure de c -orientation de la carte duale, plutôt que la structure des α -orientations de la carte, permet de contraindre les orientations le long de tous les cycles de la carte, et non pas seulement le long des cycles faciaux. Comme discuté dans la section 1.3.2, cela a pour avantage d'induire un résultat d'unicité (corollaire 2.1.3), plutôt qu'une décomposition des orientations en plusieurs composantes connexes ayant chacune un minimum.

Cartes unicellulaires bourgeonnantes

On définit maintenant quelques propriétés supplémentaires des cartes bourgeonnantes unicellulaires, illustrées dans la figure 2.1c.

Une carte unicellulaire enracinée m munie d'une orientation est dite *bien orientée* si dans le tour de la face partant de la racine, chaque arête est d'abord parcourue en sens inverse puis en sens direct. Notons que cette définition n'est valable que dans le cas d'une surface orientable, et qu'il est possible dans une surface non orientable qu'une arête soit parcourue deux fois dans le même sens dans le tour de la face partant de la racine.

Une carte unicellulaire bien orientée m est dite *bien étiquetée* si elle est munie d'un étiquetage de ses coins $\lambda_m : \mathbf{C}_m \rightarrow \mathbb{Z}$ qui vérifie les propriétés suivantes:

- le coin racine a étiquette 0,
- les étiquettes de deux coins adjacents et incidents au même sommet diffèrent de 1, et la plus grande étiquette est à gauche de l'arête qui les séparent,
- les étiquettes de deux coins adjacents le long d'une arête sont égales.

On définit l'*étiquette* d'un bourgeon comme la plus grande étiquette qui lui est adjacente. On dit qu'un bourgeon est *noir* (resp. *blanc*) si son étiquette est paire (resp. impaire).

On dit qu'une carte m est *enracinée sur une pousse* si $\rho_m \in \mathbf{C}_m^b$. On dit qu'une carte bien orientée et bien étiquetée m est *bien enracinée* si toutes ses étiquettes sont positives. Notons en particulier qu'une carte bien enracinée est nécessairement enracinée sur une pousse. On note \mathcal{B}_g l'ensemble des cartes bourgeonnantes unicellulaires enracinées bien orientées et bien étiquetées de genre g , \mathcal{P}_g l'ensemble des cartes bourgeonnantes unicellulaires bien orientées et bien étiquetées de genre g qui sont enracinées sur une pousse, et \mathcal{R}_g l'ensemble des cartes bourgeonnantes unicellulaires bien enracinées bien orientées et bien étiquetées de genre g .

Un bourgeon d'une carte enracinée sur une pousse est dit *enracinable* s'il est soit la pousse racine, soit une feuille. On note $\mathcal{R}_{g, n_r^\bullet, n_r^\circ, n_v^\circ, n_v^\bullet, \dots}$ l'ensemble des cartes de \mathcal{R}_g qui ont n_r^\bullet bourgeons enracinables noirs, n_r° bourgeons enracinables blancs, et n_v^{2k} sommets de degré $2k$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On définit la clôture d'une carte $m \in \mathcal{B}$ de manière semblable à celle définie par Schaeffer dans [Sch97] (voir fonction Φ dans la section 1.3.1). À chaque fois que le premier bourgeon qui suit une pousse dans le tour de la face racine est une feuille, on fusionne ce bourgeon et cette feuille en une unique arête orientée.

Dans le cas où la carte m est bien enracinée, l'appariement peut facilement être fait de manière non récursive de la manière suivante. Puisque m est bien enracinée, son mot de contour w est un chemin de Dyck. Chaque pousse correspondant à un pas montant de w de hauteur k est alors appariée à la feuille correspondant au premier pas descendant de w de hauteur $k + 1$.

L'ouverture

L'algorithme d'ouverture qu'on utilise maintenant est celui décrit dans la section précédente sous le nom d'algorithme 1. Pour le confort du lecteur, on reporte cet algorithme dans l'algorithme 2, dans une présentation légèrement différente prenant avantage des résultats de Bernardi et Chapuy [BC11] présenté dans la section 1.3.2. L'ouverture d'une carte orientée m est notée $\text{open}(m)$. Une illustration de l'ouverture est donnée dans la figure 2.1.

Algorithme 2 l'algorithme d'ouverture

Entrée: Une carte enracinée m de genre g munie d'une orientation *connexe à gauche*.

Sortie: Une carte couvrante unicellulaire o de genre $g' \leq g$ orientée et bourgeonnante.

On initialise c à ρ_m , o à m , et E_V à \emptyset (E_V est l'ensemble des arêtes déjà visitées).

répéter:

si $c \in \mathbf{C}_o^e$ and $e_o(c) \notin E_V$ **alors:** \triangleright c est suivi par une arête de o encore non visitée

on pose $e := e_o(c)$

on ajoute e à E_V

si e est orientée vers $v_m(c)$ **alors:**

on pose $c \leftarrow \theta_o(c)$ \triangleright on garde e et on continue le tour

sinon: \triangleright on coupe l'arête e dans o en deux bourgeons

on enlève e de o

on ajoute une pousse dans o après c

on ajoute une feuille dans o avant $\theta_m(c)$

fin si

sinon: \triangleright c est suivi par un bourgeon dans o , ou par une arête déjà visitée, que l'on a choisi de garder dans o

on pose $c \leftarrow \theta(c)$ \triangleright on continue le tour

fin si

jusqu'à ce que: $c = \rho_m$

renvoyer: o

Théorème 2.1.4. *L'algorithme d'ouverture est une bijection entre*

- les cartes de $\mathcal{BC}_{g, n_f^\bullet, n_f^\circ, n_v^2, n_v^4, \dots}$ munies de leur orientation géodésique, et
- les cartes de $\mathcal{R}_{g, n_f^\bullet, n_f^\circ, n_v^2, n_v^4, \dots}$

Par conséquent:

$$BC_g(x, y, \mathbf{z}) = R_g(x, y, \mathbf{z}).$$

Preuve. La preuve du théorème 2.1.4 est basée sur les éléments suivants:

- l'orientation duale géodésique d'une carte est connexe à gauche, et on obtient donc une carte couvrante unicellulaire de genre $g' \leq g$.

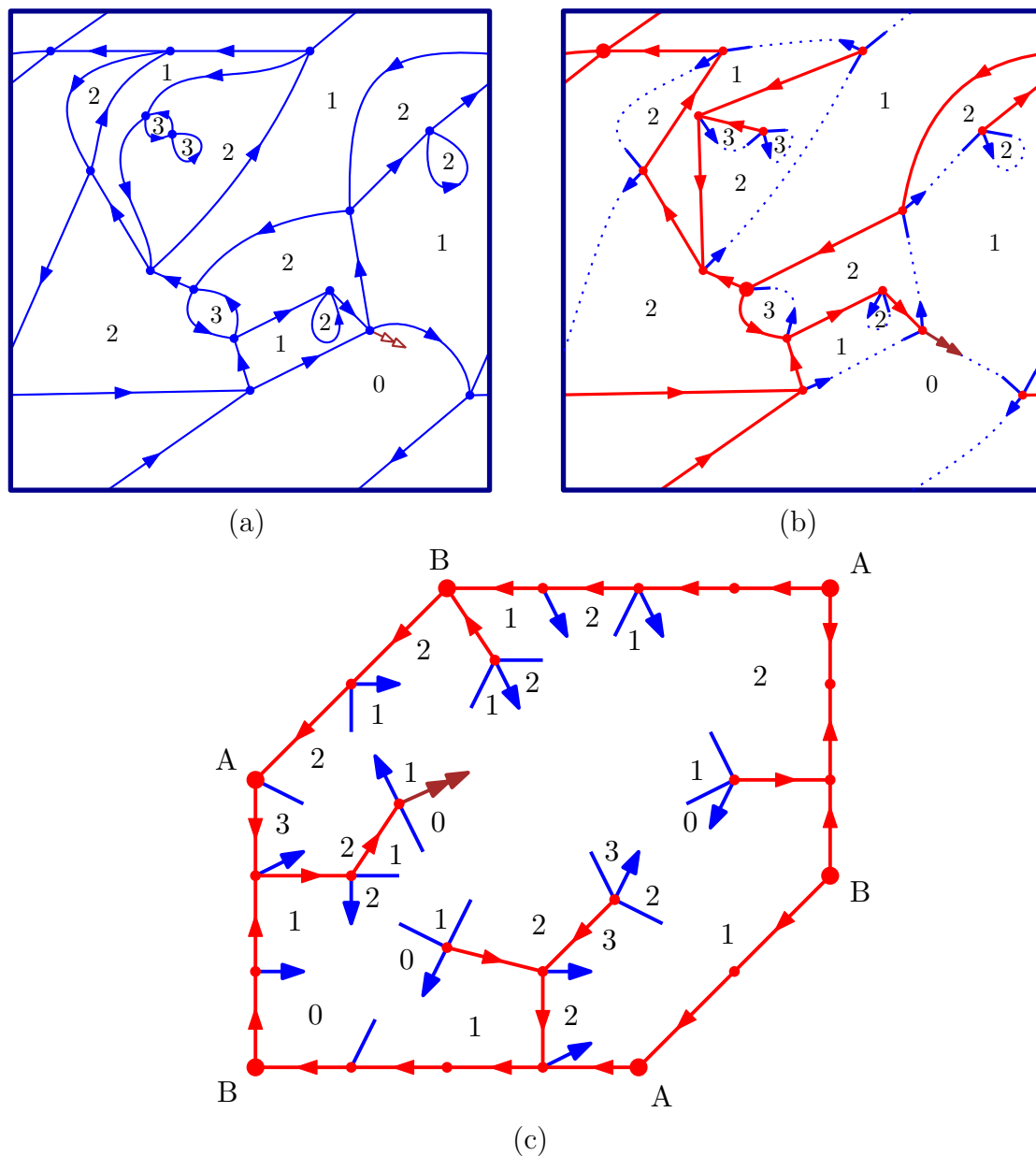


Figure 2.1: L'ouverture (b) d'une carte toroïdale munie de son orientation dual-géodésique (a; les côtés opposés du carrés sont identifiés) produit une carte unicellulaire bien orientée, bien étiquetée, et bien enracinée (c; les côtés opposés de l'hexagone sont identifiés).

- En remarquant que l'algorithme d'ouverture se comporte d'une manière similaire sur une carte et sa duale, et en prouvant que l'algorithme d'ouverture sur une carte bipartie munie de son orientation géodésique produit un arbre, on déduit que l'ouverture de m est bien une carte de \mathcal{R}_g .
- La fermeture d'une carte $b \in \mathcal{R}_g$ donne une carte bicoloriable m de genre g , munie d'une orientation bicoloriable sans cycle antihoraire, ce qui implique, grâce au corollaire 2.1.3 qu'il s'agit bien de son orientation duale-géodésique.
- Tous les appariements de la fermeture ayant lieu au sein d'une unique face, on peut prouver de la même manière que dans le case planaire que les deux algorithmes sont inverses l'une de l'autre.

□

2.1.2 Extension aux cartes non-bicoloriables

L'algorithme d'ouverture tel qu'on l'a défini dans la section précédente dépend intimement de l'existence de l'orientation duale-géodésique d'une carte m , elle-même définie comme l'orientation duale de l'orientation géodésique de m^* . Par conséquent, si m n'est pas bicoloriable, cette orientation n'est pas bien définie sur les arêtes qui relient deux sommets de m^* qui sont à égale distance de la racine.

Dans le cas planaire, la bijection de Schaeffer [Sch97], définie pour les cartes Eulérienne, a ensuite été étendue au cas des cartes quelconques par Bouttier, Di Francesco et Guitter [BDFG02]. Dans leur article d'unification des bijections bourgeonnantes planaires, Albenque et Poulalhon [AP15] reformulent cette bijection en utilisant le formalisme des *orientations fractionnelles*, introduit précédemment par Bernardi et Fusy [BF12a]. Dans cette section, on généralise une présentation proche de celle de [AP15] au cas des cartes orientables de genre quelconque.

La carte *face-doublée* (resp. *sommet-doublée*) d'une carte m est la carte m^{\parallel} (resp. m^{\dagger}) dont toutes les arêtes sont remplacées par deux arêtes parallèles (resp. dans laquelle on ajoute un sommet au milieu de chaque arête. Les faces (resp. sommets) créées de la sorte sont appelées *faces-arête* (resp. *sommets-arête*). Remarquons que ces deux notions sont duales l'une de l'autre, de telle sorte que $(m^{\parallel})^* = (m^*)^{\dagger}$, et que m^{\parallel} est bicoloriable, alors que m^{\dagger} est bipartie.

Une *orientation face-doublée* (resp. *orientation sommet-doublée*) de m est une orientation de m^{\parallel} (resp. de m^{\dagger}), avec la contrainte additionnelle qu'aucune face-arête (resp. aucun sommet-arête) n'est horaire (resp. n'est un puits). L'*orientation doublée géodésique* (resp. *dual-géodésique*) d'une carte m quelconque est l'orientation face-doublée (resp. sommet-doublée) de m correspondant à l'orientation géodésique de m^{\dagger} (resp. l'orientation dual-géodésique de m^{\parallel}).

Ces orientations de la carte doublée peuvent alternativement être vues comme des *orientations fractionnelles* de m , ce qui signifie que pour chaque arête e de m , plutôt que de choisir une des deux orientations possibles de e , on choisit plutôt une combinaison linéaire à coefficients fractionnels des 2. En particulier, une *demi-orientation* est une orientation dans laquelle chaque arête est orientée soit dans un sens, soit dans les deux, auquel cas elle est dite *bi-orientée*. Notons que les demi-orientations d'une carte sont en bijection avec les orientations doublées de cette carte.

La *demi-orientation géodésique* (resp. *dual-géodésique*) d'une carte m est la demi-orientation de m correspondant à son orientation doublée géodésique (resp.

dual-géodésique) Une demi-orientation est dite *bipartie* (resp. *bicoloriable*) si son orientation sommet-doublée (resp. face-doublée) correspondante est elle-même bipartie (resp. bicoloriable). Notons que la demi-orientation géodésique est bipartie, et peut alternativement être définie en orientant chaque arête vers le sommet le plus proche de la racine, de telle sorte que les arêtes reliant deux sommets à égale distance de la racine sont bi-orientées.

On peut sans problème appliquer le théorème 1.2.9 de Propp aux orientations de la version doublée d'une carte m . Cependant, celles-ci peuvent inclure des orientations qui ne sont pas des orientations doublées de m . Néanmoins, par définition, le minimum du treillis des orientations sera bien une orientation doublée de m , et pourra donc être interprétée comme une demi-orientation.

Théorème 2.1.5. *L'ensemble des orientations sommet-doublées (resp. sommet-doublé) bipartie (resp. bicoloriable) d'une carte m , muni de l'opération d'écrasement d'un sommet différent du sommet racine (resp. l'opération de retournement d'une face différente de la face racine), possède la structure d'un treillis distributif.*

Une face d'une orientation fractionnelle est dite *horaire* si elle n'a pas d'arête orientée de manière complètement antihoraire. Le corollaire suivant est une conséquence directe du théorème 2.1.5:

Corollaire 2.1.6. *La demi-orientation dual-géodésique d'une carte m est son unique demi-orientation bicoloriable sans autre face horaire que la face racine.*

Algorithme 3 L'algorithme d'ouverture fractionnelle

Entrée: Une carte m de genre g , munie de sa demi-orientation dual-géodésique.

Sortie: Une carte unicellulaire bourgeonnante $o = \text{open}(m)$ de genre $g' \leq g$ munie d'une demi-orientation.

On initialise c à ρ_m , o à m , et E_V à \emptyset (E_V est l'ensemble des arêtes déjà visitées).

répéter:

si $c \in \mathbf{C}_o^e$ and $e_o(c) \notin E_V$ **alors:** \triangleright c est suivi par une arête de o encore non visitée

on pose $e := e_o(c)$

on ajoute e à E_V

si e est bi-orientée ou orientée vers $v_m(c)$ **alors:**

on pose $c \leftarrow \theta_o(c)$ \triangleright on garde e et on continue le tour

sinon: \triangleright on coupe l'arête e dans o en deux bourgeons

on enlève e de o

on ajoute une pousse dans o après c

on ajoute une feuille dans o avant $\theta_m(c)$

fin si

sinon: \triangleright c est suivi par un bourgeon dans o , ou par une arête déjà visitée, que l'on a choisi de garder dans o

on pose $c \leftarrow \theta(c)$

\triangleright on continue le tour

fin si

jusqu'à ce que: $c = \rho_m$

renvoyer: o

On donne maintenant dans l'algorithme 3 une version pour carte demi-orientée de l'algorithme 2. Cet algorithme revient à appliquer l'algorithme 3 à la carte face-doublée de m , et de supprimer certains des bourgeons obtenus. Notons que cet algorithme, de la même manière que l'algorithme 2, peut être interprété comme le tour d'un arbre d'exploration en largeur du dual de m . L'algorithme de clôture demeure inchangé.

Une carte unicellulaire est dite *bien demi-orientée* si, dans le tour de la face partant de la racine, chaque arête qui n'est pas bi-orientée est d'abord visitée à contre-sens. La définition de *bon étiquetage* demeure la même, avec la règle supplémentaire que des coins séparés par une arête bi-orientée ont la même étiquette. L'ensemble des cartes bourgeonnantes unicellulaires bien demi-orientées, bien étiquetées, et bien enracinées, d'une surface orientable de genre g , est noté $\mathcal{R}_g^{\frac{1}{2}}$.

Théorème 2.1.7. *L'algorithme d'ouverture d'une carte munie de sa demi-orientation dual-géodésique est une bijection de \mathcal{M}_g vers $\mathcal{R}_g^{\frac{1}{2}}$, qui induit:*

$$M_g(x, y, \mathbf{z}) = R_g^{\frac{1}{2}}(x, y, \mathbf{z}),$$

où chaque sommet d'une carte de degré i de \mathcal{M}_g ou $\mathcal{R}_g^{\frac{1}{2}}$ a poids z_i , chaque face noire ou blanche d'une carte de \mathcal{M}_g a poids x ou y , et chaque bourgeon enracinable noir ou blanc d'une carte de $\mathcal{R}_g^{\frac{1}{2}}$ a poids x ou y .

Remarque 2. Le théorème 2.1.4, en conjonction avec le théorème 1.4.1, forme une bijection entre \mathcal{M}_g et \mathcal{R}_g^\times , qui induit l'équation suivante:

$$M_g(x, y) = R_g^\times(x, y).$$

La bijection présentée dans le théorème 2.1.7 permet donc l'ouverture d'une carte quelconque en gardant la trace de plus de paramètres.

Cependant, de la même manière que dans le cas planaire, l'énumération des cartes de $\mathcal{R}_g^{\frac{1}{2}}$ est plus difficile que celle des cartes de \mathcal{R}_g^\times , notamment du fait qu'il est plus difficile de définir une opération de réenracinement sur ces cartes.

2.1.3 Extension aux cartes non orientables

On s'intéresse maintenant à l'ouverture de cartes non orientables. Plusieurs éléments menant au théorème 2.1.4 sont basés sur l'existence d'une orientation globalement cohérente de la surface sous-jacente, qui permet de définir une notion de gauche et de droite. Notons par exemple que la notion d'orientation duale perd son sens dans une surface non orientable, de même que la notion de bon étiquetage d'une carte bien orientée. Notons aussi qu'une carte unicellulaire sur une surface non-orientable peut avoir des arêtes qu'on appelle à *sens unique*, c'est-à-dire qui sont parcourues deux fois dans le même sens dans le tour de la face partant de la racine. Dans le cas des surfaces orientable, toute les arêtes sont à *double sens*, et sont parcourues d'abord dans un sens puis dans l'autre dans le tour de la face.

Notre stratégie consiste alors à redéfinir l'algorithme d'ouverture sans utiliser de notion d'orientation. Pour cela, on décrit l'arbre dual de l'ouverture comme l'arbre géodésique maximal d'une carte bipartie, et on applique ensuite l'algorithme d'ouverture directement sur cet arbre.

Cette stratégie est illustrée dans sa version pointée dans la figure 2.2.

Soit m une carte unicellulaire bourgeonnante. On redéfinit de manière unique l'*étiquetage des coins* de m comme l'unique fonction $\lambda_m : \mathbf{C}_m \rightarrow \mathbb{Z}$ qui vérifie les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} \lambda_m(\rho_m) = 0, \\ \lambda_m(\theta_m(\vec{c})) = \lambda_m(c), & \text{si } \vec{c} \in \vec{\mathbf{C}}_m^e, \\ \lambda_m(\theta_m(\vec{c})) = \lambda_m(c) + 1, & \text{si } \vec{c} \in {}^t\vec{\mathbf{C}}_m^b, \\ \lambda_m(\theta_m(\vec{c})) = \lambda_m(c) - 1, & \text{si } \vec{c} \in {}^t\vec{\mathbf{C}}_m^l. \end{cases}$$

De la même manière que dans la section 2.1.1, cet étiquetage nous permet de donner une couleur, noire ou blanche, aux bourgeons de m , en fonction de la parité des étiquettes des coins adjacents.

L'étiquetage des coins de m est un *bon étiquetage* s'il vérifie la condition supplémentaire suivante:

$$\lambda_m(\sigma_m(\vec{c})) = \lambda_m(c) - 1, \text{ si } \vec{c} \in \mathbf{C}_m^e \text{ et } c \preccurlyeq_m \sigma_m(c).$$

La carte m est désormais dite *bien bourgeonnante* si son étiquetage des coins est un bon étiquetage. Une carte bien bourgeonnante m est dite *enracinée sur une pousse* si $\vec{\rho}_m \in {}^t\mathbf{C}_m^b$, et *bien enracinée* si tous ses coins ont une étiquette positive. Notons qu'une carte bien enracinée est nécessairement enracinée sur une pousse.

On redéfinit \mathcal{B}_S , \mathcal{P}_S , et \mathcal{R}_S , comme l'ensemble des cartes bien bourgeonnantes, enracinées sur une pousse, et bien enracinées, sur une surface \mathcal{S} .

Un arbre couvrant t d'une carte m est dit *géodésique* si la distance de tout sommet v à la racine est la même dans m et dans t . Cette distance est notée $\lambda_m(v)$. Si m est une carte bipartie, on appelle *arbre géodésique maximal* et on note $t_l(m)$ l'arbre géodésique de m dont le mot de contour est maximal pour l'ordre lexicographique. La remarque précédente prouve l'unicité de l'arbre géodésique maximal. L'arbre géodésique maximal d'une carte bicoloriable peut être obtenu par l'algorithme 4.

Soit m une carte bicoloriable munie d'un arbre couvrant t de m^* . L'algorithme 5 permet l'ouverture de m autour de cet arbre, et génère une carte notée $\Phi(m, t)$.

On appelle *ouverture* d'une carte bipartie m et on note $\Phi_l(m) := \Phi(m, t_l(m))$ l'ouverture de la carte duale de m autour de son arbre géodésique maximal.

Théorème 2.1.8. *L'ouverture est une bijection entre \mathcal{BP}_S et \mathcal{R}_S qui induit:*

$$BP_S(x, y, \mathbf{z}) = R_S(x, y, \mathbf{z}),$$

où les cartes de \mathcal{BP}_S sont comptées avec un poids x par sommet noir, y par sommet blanc, et z_i par face de degré i ; et les cartes de \mathcal{R}_S sont comptées avec un poids x par bourgeon enracinable noir, y par bourgeon enracinable blanc, et z_i par face de degré i .

La nouvelle présentation de l'algorithme d'ouverture, basée sur l'utilisation de coins orientés, rend la preuve du théorème 2.1.8 assez similaire à celle du cas orientable. Notons néanmoins qu'il est plus difficile d'utiliser les résultats existants, qui utilisent l'orientation pour effectuer l'ouverture.

Algorithme 4 l'arbre géodésique maximal d'une carte pointée

Entrée: Une carte pointée bipartie m .

Sortie: L'arbre géodésique maximal de m , noté t .

On initialise \vec{c} à $\vec{\rho}_m$, t à \emptyset , et E_V à \emptyset (E_V est l'ensemble des arêtes déjà visitées).

répéter:

si $e_m(\vec{c}) \notin E_V$ **alors:** ▷ c est suivi par une arête encore non visitée

on ajoute e à E_V

si $\lambda_m(\theta_m(\vec{c})) = \lambda_m(c) + 1$ **alors:**

on ajoute $e_m(\vec{c})$ à t

fin si

sinon:

si $e_m(\vec{c}) \in t$ **alors:**

on pose $\vec{c} \leftarrow \vec{\theta}_m(\vec{c})$

sinon:

on pose $\vec{c} \leftarrow \vec{\sigma}_m(\vec{c})$

fin si

fin si

jusqu'à ce que: $\vec{c} = \vec{\rho}_m$

renvoyer: t

2.1.4 Extension aux cartes pointées

On s'intéresse maintenant à l'ouverture des cartes pointées. L'intérêt d'étudier les cartes pointées est de pouvoir obtenir des informations concernant la distance entre le sommet pointé et le reste de la carte (et notamment le sommet racine). Notons néanmoins que contrairement au cas des mobiles (voir section 1.3.1), cet algorithme d'ouverture pour carte pointée utilise tout de même la racine, et les réenracinements impliqués dans la section 2.2 ne peuvent pas s'interpréter directement comme l'ouverture d'une autre carte pointée.

L'algorithme d'ouverture d'une carte pointée non orientable est illustré dans la figure 2.2.

Un arbre couvrant t d'une carte pointée m est dit *géodésique* si la distance entre tout sommet v de m et le sommet pointé p_m est la même dans m et dans t . On note $\lambda_m(v)$ la différence entre la distance entre v et p_m et la distance entre v et $v_m(\rho_m)$. Comme précédemment, un arbre géodésique t est dit *maximal* si son mot de contour est maximal pour l'ordre lexicographique. L'arbre géodésique maximal peut être obtenu par l'algorithme 6.

On décrit maintenant dans l'algorithme 7 un algorithme d'ouverture du dual d'une carte pointée munie d'un arbre couvrant.

L'algorithme de clôture décrit par Schaeffer [Sch97] (voir section 1.3.1) est défini pour une carte qui n'est pas nécessairement bien enracinée, et on conserve cette définition. Notons que le travail de la section précédente correspond au cas d'une carte pointée sur la racine.

Théorème 2.1.9. *L'algorithme d'ouverture est une bijection entre \mathcal{BP}_S^\bullet et \mathcal{B}_S qui induit:*

$$BP_S^\bullet(x, y, \mathbf{z}) = B_S(x, y, \mathbf{z}),$$

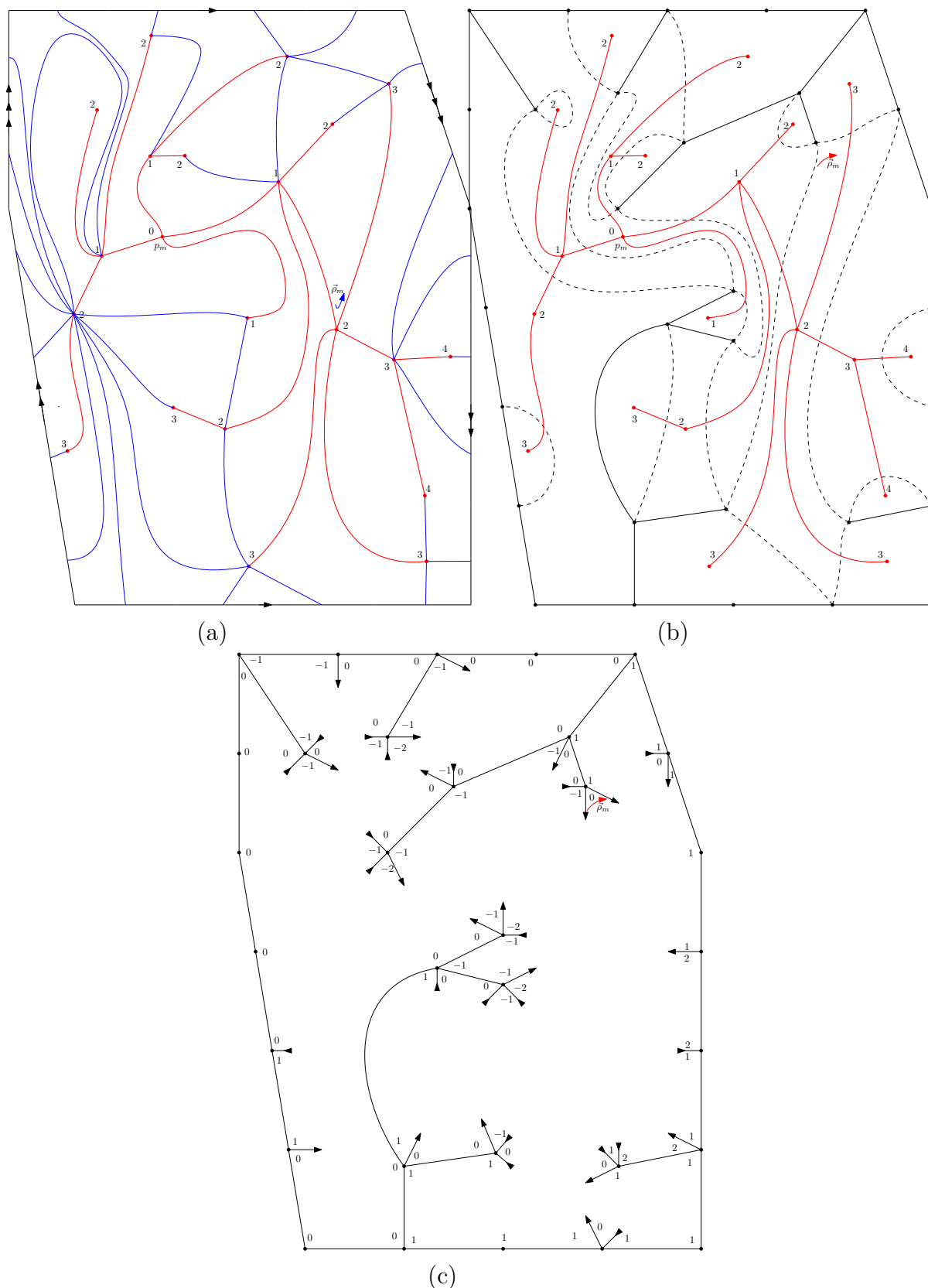


Figure 2.2: L'ouverture (b) d'une carte bipartite munie de son arbre géodésique maximal (a; les côtés opposés de l'hexagone sont identifiés dans le sens des flèches, ce qui forme une carte sur la bouteille de Klein) produit une carte bien enracinée (c; les arêtes opposées de l'hexagone sont identifiées comme précédemment).

Algorithme 5 l'ouverture d'une carte autour d'un arbre couvrant de sa carte duale

Entrée: Une carte bipartie m munie d'un arbre couvrant t .

Sortie: L'ouverture de m^* autour de t , notée o .

On initialise \vec{c} à $\vec{\rho}_{m^*}$ et o à m^* .

répéter:

si $\vec{c} \in \vec{C}_o^e$ and $e_m(\vec{c}) \notin t$ **alors:**

 on enlève $e_{m^*}(\vec{c})$ de o

 on ajoute une pousse dans o après \vec{c}

 on ajoute une feuille dans o avant $\theta_m(c)$

sinon:

 on pose $\vec{c} \leftarrow \vec{\theta}_o(\vec{c})$

fin si

jusqu'à ce que: $\vec{c} = \vec{\rho}_m$

renvoyer: o

où les cartes de $\mathcal{BP}_{\mathcal{S}}^{\bullet}$ sont comptées avec un poids x par sommet noir, y par sommet blanc, et z_i par face de degré i ; et les cartes de $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ sont comptées avec un poids x par feuille noire, y par feuille blanche, z_i par face de degré i , et un poids additionnel de x (resp. y) si la plus petite étiquette est paire (resp. impaire).

Preuve. La preuve de ce théorème, bien qu'elle demeure élémentaire, demande de porter une attention particulière aux cas où les algorithmes diffèrent de ceux de la section précédente à cause du pointage de la carte. Notons également qu'elle ne peut pas se baser sur les résultats existants, qui ne traitent généralement pas le cas des cartes pointées. \square

2.2 Décomposition des cartes unicellulaires

Dans cette section, on va chercher à décomposer les cartes obtenues par l'algorithme d'ouverture, avec pour objectif dans les sections suivantes de pouvoir obtenir des résultats énumératifs et structurels sur les séries génératrices de cartes.

Dans la section 2.2.1, on appliquera la méthode notamment utilisée dans le cas des mobiles par Chapuy, Marcus et Schaeffer [CMS09], et on présentera les notions de cœur et de schéma d'une carte unicellulaire. Dans la section 2.2.2, on présentera l'algorithme de réenracinement, qui permet de déplacer la racine d'une carte, tout en préservant son caractère bien étiqueté. Enfin, dans la section 2.2.3, on présentera la décomposition des cartes en cœurs enracinés sur le schéma.

2.2.1 Carte unicellulaire, cœur, schéma

Soit \mathcal{S} une surface. Un *cœur* de \mathcal{S} est une carte unicellulaire de \mathcal{S} qui n'a pas de sommet de degré intérieur 1. Un *schéma* de \mathcal{S} est un cœur de \mathcal{S} qui n'a pas de sommet de degré intérieur 2.

Élagage

On considère une carte m de \mathcal{S} . Le *cœur de m* , noté $c(m)$, est la carte obtenue à partir de m en lui retirant itérativement ses sommets de degré intérieur 1, ainsi que

Algorithme 6 l'arbre géodésique maximal

Entrée: Une carte bipartie m .

Sortie: L'arbre géodésique maximal de m , noté t .

On initialise \vec{c} à $\vec{\rho}_m$, t à \emptyset , et E_V à \emptyset (E_V est l'ensemble des arêtes déjà visitées).

répéter:

si $e_m(\vec{c}) \notin E_V$ **alors:** $\triangleright c$ est suivi par une arête encore non visitée

on note m' la carte m privée des arêtes de $E_V \setminus t$

on note m'' la carte m' privée de l'arête de $e_m(\vec{c})$

si (1) $\lambda_m(\theta_m(\vec{c}) = \lambda_m(c) + 1$ ou (2) m'' n'est pas connexe, ou (3) $h_{m'}(c) \neq$

$h_{m''}(c)$ **alors:**

on ajoute $e_m(\vec{c})$ à t

fin si

on ajoute $e_m(\vec{c})$ à E_V

sinon:

si $e_m(\vec{c}) \in t$ **alors:**

on pose $\vec{c} \leftarrow \vec{\theta}_m(\vec{c})$

sinon:

on pose $\vec{c} \leftarrow \vec{\sigma}_m(\vec{c})$

fin si

fin si

jusqu'à ce que: $\vec{c} = \vec{\rho}_m$

renvoyer: t

toutes les demi-arêtes incidentes à ce sommet. Dans le cas où ce sommet contenait la racine, le bourgeon nouvellement créé (en coupant l'arête incidente au sommet enlevé) est une pousse, et on réenracine la carte sur le coin qui le précède. Dans le cas contraire, le bourgeon nouvellement créé est une feuille. Notons que dans le cas où \mathcal{S} est une sphère, le cœur de m est réduit à un sommet. Une carte peut être vue comme un cœur sur les bourgeons enracinables duquel sont greffés des arbres. Par conséquent, l'algorithme qui construit le cœur d'une carte est appelé l'*élagage*, et les arbres greffés sur le cœur d'une carte sont appelés ses *parties arborescentes*. Un exemple d'élagage est fourni dans la figure 2.3.

Supposons maintenant que m est bien bourgeonnante. La convention choisie concernant le type des bourgeons créés lors de l'élagage de m implique que l'étiquetage des coins de m et de $c(m)$ coïncident sur leurs coins communs (à un décalage commun à tous les coins de la carte dû au changement de racine). En particulier, le cœur d'une carte bien bourgeonnante est également bien bourgeonnant.

On note \mathcal{T} l'ensemble des arbres qui peuvent être obtenus comme partie arborescente d'une carte bien bourgeonnante m , dans le cas où cet arbre ne contient pas la racine. plus précisément, un arbre $T \in \mathcal{T}$ est soit vide, dans le cas où il correspond à une feuille directement attachées au coeur de m ; soit c'est un arbre enraciné sur un bourgeon dont tous les sommets ont degré pair, et dont tout sommet de degré $2k$ est incident à $k - 1$ pousses, sauf la racine, qui est adjacente à k pousses. Notons que ces arbres sont très proches de ceux définis par Schaeffer [Sch97] (voir section 1.3.1).

On note $T_\bullet(z_\bullet, z_\circ, \mathbf{x})$ (resp. $T_\circ(z_\bullet, z_\circ, \mathbf{x})$) la série génératrice des arbres de \mathcal{T} , avec le poids qu'ils auraient s'ils étaient greffés à une feuille noire (resp. blanche)

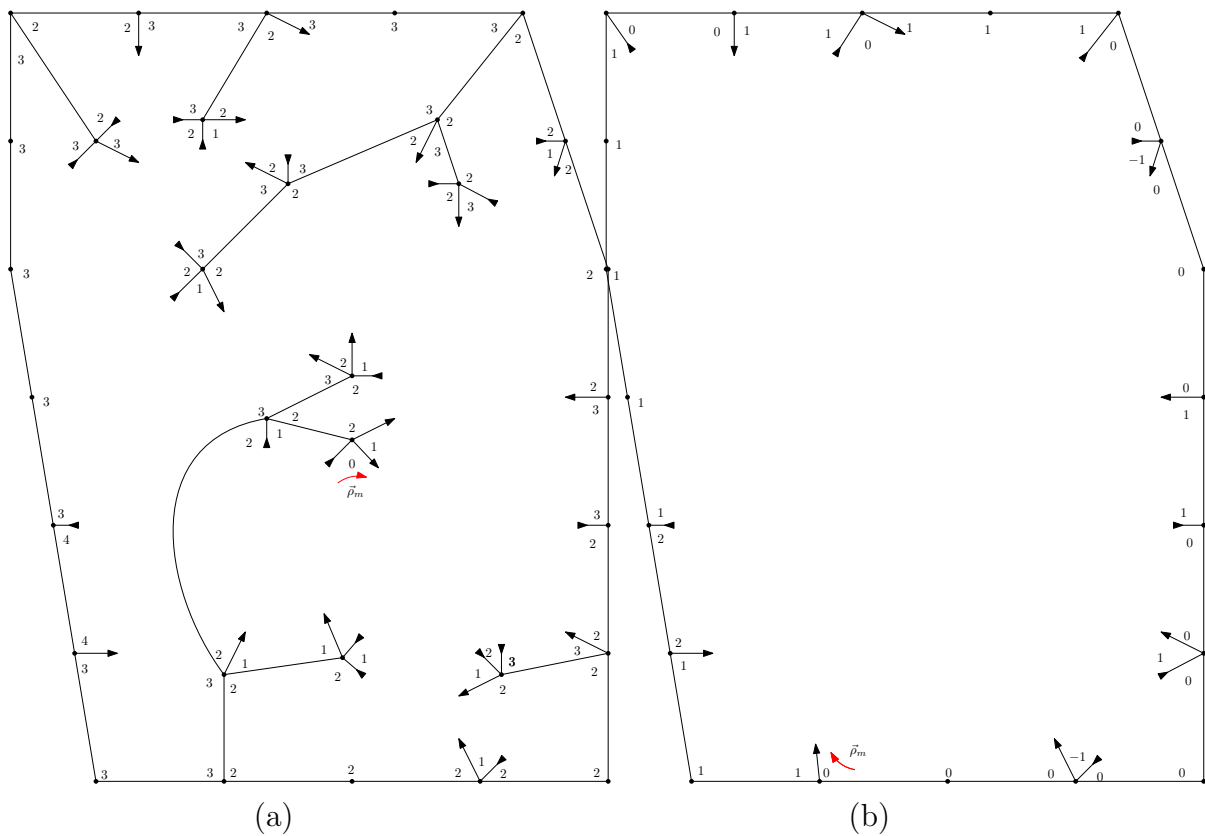


Figure 2.3: L'élagage d'une carte d'une carte bien enracinée (a; les côtés opposés de l'hexagone sont recollés de la même manière que dans la figure 2.2c) produit un cœur enraciné sur une pousse (b).

Algorithme 7 l'ouverture d'une carte autour d'un arbre couvrant de sa carte pointée duale

Entrée: Une carte pointée bipartie m munie d'un arbre couvrant t .

Sortie: L'ouverture de m^* autour de t , notée o .

On initialise o à m^* et \vec{c} à $\vec{\rho}_o$.

répéter:

si $\vec{c} \in \vec{C}_o^e$ and $e_m(\vec{c}) \notin t$ **alors:**

on enlève $e_{m^*}(\vec{c})$ de o

si $\lambda_m(v_m(\sigma(\vec{c}))) = \lambda_m(v_m(c)) + 1$ **alors:**

on ajoute une pousse dans o après \vec{c}

on ajoute une feuille dans o avant $\theta_m(c)$

sinon:

on ajoute une feuille dans o après \vec{c}

on ajoute une pousse dans o avant $\theta_m(c)$

fin si

sinon:

on pose $\vec{c} \leftarrow \vec{\theta}_o(\vec{c})$

fin si

jusqu'à ce que: $\vec{c} = \vec{\rho}_o$

renvoyer: o

d'un cœur. Par exemple, le poids de l'arbre vide dans $T_o(z_\bullet, z_o, \mathbf{x})$ est z_o . Notons également que $T_o(z_\bullet, z_o, \mathbf{x}) = T_\bullet(z_o, z_\bullet, \mathbf{x})$.

Les séries T_o et T_\bullet sont reliées par les équations suivantes, où k représente le demi-degré d'un sommet, et les i_j représentent le nombres de pousses entre chaque paire d'arêtes:

$$\begin{cases} T_\bullet &= z_\bullet + \sum_{k \geq 1} \left(z_k \cdot \sum_{i_1 + \dots + i_k \leq k-1} \prod_{1 \leq j \leq k} T_\bullet^{(-1)} \sum_{1 \leq l \leq j}^{j-1+} i_l \right), \\ T_o &= z_o + \sum_{k \geq 1} \left(z_k \cdot \sum_{i_1 + \dots + i_k \leq k-1} \prod_{1 \leq j \leq k} T_o^{(-1)} \sum_{1 \leq l \leq j}^{j-1+} i_l \right), \end{cases} \quad (2.1)$$

avec la convention que $T_\bullet^{-1} := T_o$ (et inversement).

Notons qu'en posant $t_\bullet = t_o$, on obtient une série génératrice qui correspond à la série z du théorème 1.2.8.

On appelle \mathcal{T}^\times le sous-ensemble des arbres 4-valents de \mathcal{T} . Ces arbres sont énumérés par la série univariée T^\times et les séries bivariées T_\bullet^\times et T_o^\times , définies par:

$$\begin{cases} T^\times(z) &= z + 3 \cdot T^\times{}^2 \\ T_\bullet^\times &= z_\bullet + T_\bullet^\times{}^2 + 2 \cdot T_o^\times T_\bullet^\times, \\ T_o^\times &= z_o + T_o^\times{}^2 + 2 \cdot T_o^\times T_\bullet^\times. \end{cases}$$

De la même manière, on appelle \mathcal{T}^* le sous-ensemble des arbres 6-valents de \mathcal{T} . Ces arbres sont énumérés par la série univariée T^* définie par:

$$T^* = z + 10 \cdot T^*{}^3.$$

Décomposition en schéma

Un cœur est dit *enraciné sur le schéma* si le degré de son sommet racine est au moins 3. L'ensemble des cœurs enracinés sur le schéma d'une surface \mathcal{S} est noté $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$.

Un étiquetage λ des coins d'un schéma l est dit *décent* s'il vérifie les conditions suivantes:

$$\begin{cases} \lambda(\rho_l) &= 0, \\ \lambda(\sigma_l(\vec{c})) &= \lambda(c) + 1, \quad \text{si } \vec{c} \in {}^t\vec{\mathcal{C}}_l^b, \\ \lambda(\sigma_l(\vec{c})) &= \lambda(c) - 1, \quad \text{si } \vec{c} \in {}^t\vec{\mathcal{C}}_l^i, \\ \lambda(\sigma_l(\vec{c})) &= \lambda(c) - 1, \quad \text{si } \vec{c} \in \vec{\mathcal{C}}_l^e \text{ et } c \preceq_l \sigma_l(\vec{c}). \end{cases} \quad (2.2)$$

Un étiquetage décent ne vérifie pas nécessairement $\lambda(\theta_l(\vec{c})) = \lambda(c)$ pour $\vec{c} \in \vec{\mathcal{C}}_l^e$. Par conséquent, un étiquetage décent n'est pas forcément un bon étiquetage. Un étiquetage est *quasi-décent* s'il respecte les conditions d'un étiquetage décent, sauf éventuellement la première.

Un *schéma étiqueté* est un schéma enraciné sur une pousse et muni d'un étiquetage décent. L'ensemble des schémas étiquetés d'une surface \mathcal{S} est noté $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$. L'étiquetage associé à un schéma étiqueté l n'est pas nécessairement son étiquetage des coins tels que défini dans la section 2.1.3, mais le remplace, et on y fera référence simplement comme l'étiquetage des coins de l , noté λ_l . Notons qu'un schéma étiqueté n'est pas nécessairement bien bourgeonnant.

On considère maintenant un cœur enraciné sur le schéma $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}}$. Le *schéma de* c , noté $l(c)$, est le schéma étiqueté obtenu en supprimant itérativement les sommets de degré intérieur 2 et les demi-arêtes qui leur sont adjacentes, tout en fusionnant les 2 demi-arêtes non appariées ainsi obtenues. L'étiquette d'un coin de $l(c)$ est défini comme égale à l'étiquette du coin correspondant dans c .

L'ensemble des sommets, arêtes et bourgeons correspondant à une arête donnée de $l(c)$ est appelé une *branche*. Un sommet de c est un *sommet du schéma* s'il est aussi un sommet de $l(c)$, ou de manière équivalente, s'il est de degré au moins 3.

Dans le tour de c partant de la racine, chaque côté d'une branche est visité d'une traite. Par conséquent, l'ordre facial des coins de l coïncide avec la restriction de l'ordre facial des coins de c aux coins de l , ce qui implique que l'étiquetage de l est décent.

Notons que sur un plan projectif, tous les sommets d'un cœur sont de degré intérieur 2, et que la décomposition d'un cœur en un schéma n'est pas définie sur cette surface.

Schéma désétiqueté

Soit $l \in \mathcal{L}$ un schéma étiqueté. La *hauteur* d'un sommet v de l , notée $\lambda_l^h(v)$ est définie par:

$$\lambda_l^h(v) := \min_{\substack{c \in \mathcal{C}_l \\ v_l(c) = v}} \lambda_l(c).$$

On définit un nouveau étiquetage des coins de l , que l'on appelle *étiquetage relatif*, et qu'on note λ_l^r , de la manière suivante:

$$\lambda_l^r(c) := \lambda_l(c) - \lambda_l^h(v_m(c)).$$

Le *type relatif* d'une demi-arête h , noté $\lambda_m^r(h)$, est définie comme la plus petite étiquette relative d'un coin adjacent à h . Le *type relatif* d'un sommet v , noté $\lambda_m^r(v)$, est définie comme la plus grande étiquette relative d'une demi-arête adjacente à v .

Remarquons que la variation des étiquettes relatives des coins autour d'un sommet correspond à la variation de l'étiquetage des coins, et que l'étiquetage relatif d'un schéma est donc quasi-décent.

On appelle *schéma désétiqueté* la carte obtenue à partir d'un schéma étiqueté en oubliant son étiquetage des coins associé. L'ensemble des schémas désétiquetés d'une surface \mathcal{S} est noté $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$.

Remarquons que les étiquetages relatifs des coins de deux schémas étiquetés ayant le même schéma désétiqueté coïncident, et qu'on peut donc étendre l'étiquetage relatif aux schémas désétiquetés.

2.2.2 Réenracinement

Notre stratégie pour étudier les cartes unicellulaire consiste à les décomposer successivement en cœur et en schéma. Néanmoins, pour pouvoir appliquer cette stratégie avec succès, il nous faut être capable de manipuler la racine d'une carte, pour passer d'une carte bien enracinée à un cœur enraciné sur la racine, auquel on sait associer un schéma étiqueté.

On considère une carte $m \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$, et un bourgeon enracinable s de m . Le *réenracinement de m sur s* , noté $\Omega(m, s)$, est la carte obtenue à partir de m en remplaçant la pousse racine par une feuille, en enracinant la carte obtenue sur le coin précédant s pour l'ordre facial, et en remplaçant s par une pousse. Remarquons que $\Omega(m, h_m(\vec{\rho}_m)) = m$, et que pour tout bourgeon enracinable s , $\Omega(\Omega(m, s), h_m(\vec{\rho}_m)) = m$.

Un exemple de réenracinement est donné dans la figure 2.4.

Lemme 2.2.1. *Le réenracinement d'une carte bien bourgeonnante et enracinée sur une pousse est lui-même une carte bien bourgeonnante et enracinée sur une pousse.*

Preuve. Soit m une carte bien bourgeonnante et enracinée sur une pousse, et l une feuille de m . La fusion de $h_m(\vec{\rho}_m)$ avec l crée deux faces qu'on appelle f_l et f_r (voir figure 2.4b).

On peut montrer que le changement de l'ordre facial partant de la racine (qui inverse l'ordre d'apparition des coins de f_l et f_r) et le changement de l'étiquetage des coins (qui sont translatés d'une certaine valeur suivant qu'ils appartiennent à f_l ou f_r) se compensent exactement, de telle sorte que $\Omega(m, l)$ est bien bourgeonnante. \square

Un bourgeon enracinable s d'une carte bien bourgeonnante enracinée sur une pousse m est dit *bien enracinable* si le réenracinement de m sur s est bien enraciné.

Lemme 2.2.2. *Une carte bien bourgeonnante enracinée sur une pousse possède exactement 2 bourgeons bien enracinables.*

Preuve. Soit $m \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$. On note $-k$ la hauteur minimale du mot de contour de m . Les bourgeons bien-enracinables sont ceux qui correspondent aux premiers points de hauteur $-k + 1$ et $-k$ du mot de contour.

Une étude attentive de l'évolution des étiquette des faces f_1 et f_2 définies dans la preuve du lemme 2.2.1 permet de montrer que le réenracinement de m sur un

de ces deux bourgeon est effectivement bien enraciné, contrairement à tout autre réenracinement. \square

Deux cartes de $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$ sont dites *racine-équivalentes* si elles peuvent être obtenues l'une à partir de l'autre par un réenracinement. On appelle *carte déracinée* de m , et on note \bar{m} , la classe d'équivalence de m pour la racine-équivalence. D'une manière équivalente, la carte déracinée de m , notée \bar{m} , s'obtient à partir de m en enlevant la racine, et en oubliant quels bourgeons sont des feuilles ou des pousses, mais en retenant quels bourgeons sont enracinables. Remarquons qu'on peut retrouver m à partir de \bar{m} simplement en choisissant un bourgeon enracinable de \bar{m} .

Le *schéma déraciné* d'une carte bien enracinée $m \in \mathcal{R}$ est la carte déracinée du schéma désétiqueté du réenracinement du cœur de m sur un bourgeon du schéma. Soit \bar{s} un schéma déraciné. On note $\mathcal{R}_{\bar{s}}$ (resp. $\mathcal{C}_{\bar{s}}$) l'ensemble des cartes de \mathcal{R} (resp. \mathcal{C}) qui ont \bar{s} pour schéma déraciné, et $\mathcal{M}_{\bar{s}}$ l'ensemble des cartes dont l'ouverture a \bar{s} pour schéma déraciné. On note également \mathcal{C}_l (resp. \mathcal{C}_s) l'ensemble des cœurs de \mathcal{C} qui ont l comme schéma étiqueté (resp. s comme schéma désétiqueté), avec $l \in \mathcal{L}$ et $s \in \mathcal{S}$.

Soit $m \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$. Un *tronc* de m est un bourgeon ou une arête de m qui est incident à un sommet du cœur de m , mais n'est pas à l'intérieur de son cœur. Un tronc de m est dit *accroché au schéma* s'il est incident à un sommet du schéma de m . Le nombre de troncs accrochés au schéma d'une carte m enracinée sur une pousse, dépend seulement de son schéma désenraciné \bar{s} , et est donc noté $n_{\bar{s}}^{rs}$. On peut montrer dans le cas orientable que ce nombre est toujours non nul, et en particulier, dans le cas d'une carte 4-valente, on a $n_{\bar{s}}^{rs} = 2g - v_4$, où v_4 note le nombre de sommets de degré intérieur 4 de \bar{s} .

2.2.3 Élagage, raccourci, feuilles colorées

Dans sa version originale présentée dans [Lep19], la décomposition d'une carte $m \in \mathcal{R}_{\bar{s}}$ est constituée de 3 étapes successives. On commence par réenraciner m sur l'un de ses bourgeons enracinables, pour obtenir une carte $m' \in \mathcal{P}_{\bar{s}}$, ce qui induit grâce aux lemmes 2.2.1 et 2.2.2 l'équation suivante:

$$\frac{dR_{\bar{s}}(z)}{dz} = 2 \cdot P_{\bar{s}}(z). \quad (2.3)$$

L'élagage d'une carte consiste à couper tous ses troncs. On note $\mathcal{C}_{\bar{s}}^{\bullet}$ l'ensemble des cœurs ayant \bar{s} pour schéma déraciné, et qui ne sont pas nécessairement enracinés sur le schéma. L'élagage induit l'équation suivante:

$$P_{\bar{s}}(z) = \frac{dT}{dz} \cdot \frac{C_{\bar{s}}^{\bullet}(T(z))}{T(z)}. \quad (2.4)$$

Enfin, on réenracine un cœur $c \in \mathcal{C}_{\bar{s}}^{\bullet}$ sur un bourgeon enracinable du schéma, ce qui induit l'équation suivante:

$$n_{\bar{s}}^{rs} \cdot C_{\bar{s}}^{\bullet}(t) = \frac{d(C_{\bar{s}}^{\bullet}(t))}{dt}, \quad (2.5)$$

où $n_{\bar{s}}^r$ est le nombre de bourgeons enracinables de \bar{s} .

Le regroupement de ces 3 équations, après simplification, s'écrit:

$$R_{\bar{s}}(z) = \frac{2}{n_{\bar{s}}^{rs}} \cdot C_{\bar{s}}(T(z)). \quad (2.6)$$

Le fait que ces équations se simplifient de la sorte est une étape importante de la décomposition de l'ouverture des cartes. En particulier, après le premier réenracinement, la série des cartes sur une surface s'exprime comme l'intégrale d'une autre série, et il est alors plus difficile de montrer la rationalité paramétrique de cette série. Notons que dans les travaux antérieurs de combinatoire énumérative des cartes, on prend souvent le parti d'étudier directement les cartes pointées, dont la série correspond déjà à la dérivée de la série des cartes. Dans notre cas, il se trouve que la dérivation de la série R induite par l'opération de réenracinement (qui produit des cartes de \mathcal{P}) ne correspond pas directement à la dérivation induite par le pointage des cartes (qui produit par l'ouverture des cartes de \mathcal{B}).

Le fait qu'une telle simplification ait lieu peut se voir en réunissant les 3 étapes en une seule bijection. On appelle *cœur décoré* un cœur $c \in \mathcal{C}$ muni d'une suite d'arbres de \mathcal{T} indexés par les bourgeons enracinables de c . L'ensemble des cœurs décorés est noté \mathcal{D} . On appelle *algorithme raccourci* la fonction qui correspond à la concaténation des étapes décrites précédemment, et qui à une carte bien enracinée m munie d'un tronc accroché au schéma τ marqué, associe le cœur décoré constitué du réenracinement de l'élagage de m sur le bourgeon correspondant à τ , dont chaque bourgeon enracinable est décoré de l'arbre correspondant coupé pendant l'élagage. Puisque toute carte bien bourgeonnante possède exactement 2 bourgeons bien enracinables, chaque cœur décoré à exactement 2 antécédents par l'algorithme raccourci, ce qui permet de retrouver la formule 2.6.

Cette nouvelle présentation a par ailleurs l'avantage de permettre un suivi des paramètres de couleur des bourgeons au travers de la bijection, afin d'obtenir une version bivariée de l'équation 2.6):

Théorème 2.2.3. *L'algorithme raccourci induit:*

$$R_{\bar{s}}(z_{\bullet}, z_{\circ}) = \frac{C_{\bar{s}}^{\bullet}(T_{\bullet}, T_{\circ})}{n_{\bar{s}}^{rs}}, \quad (2.7)$$

où $C_{\bar{s}}^{\bullet}(T_{\bullet}, T_{\circ}) := C_{\bar{s}}(T_{\bullet}, T_{\circ}) + C_{\bar{s}}(T_{\circ}, T_{\bullet})$.

Preuve. On remarque que la couleur des bourgeons est préservée si et seulement si le tronc marqué est blanc, ou dans l'autre sens, si le bourgeon bien enracinable marqué est blanc. Dans le cas contraire, les couleurs noires et blanches sont entièrement échangées.

Or on peut montrer que les deux bourgeons bien enracinables ont des couleurs différentes, ce qui est suffisant pour conclure la preuve. \square

2.2.4 Le cas non-orientable: carte virtuellement enracinée, réenracinement sur un coin

L'algorithme raccourci présenté dans la section précédente, qui permet l'énumération des cartes obtenues par l'algorithme d'ouverture, repose sur la possibilité de réenraciner un cœur sur une arête enracinable du schéma.

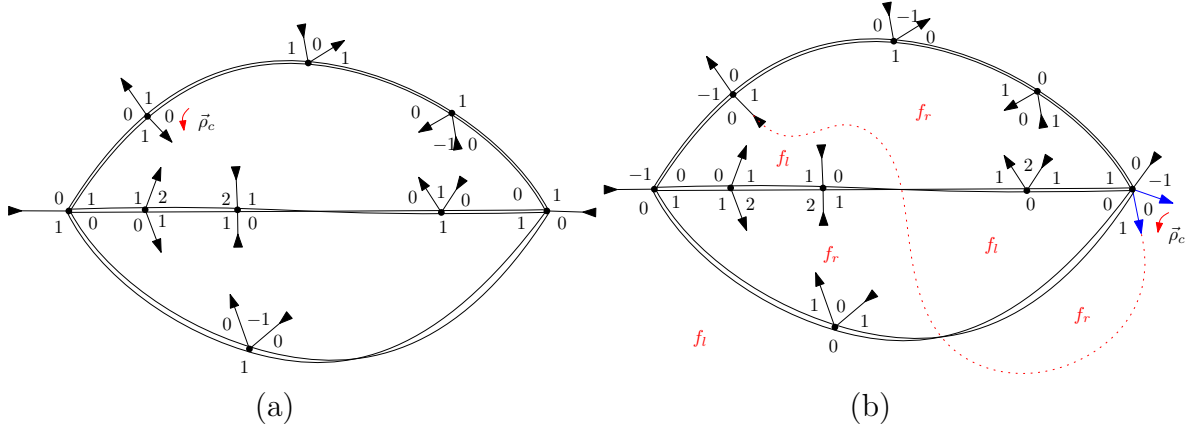


Figure 2.4: Le cœur de la figure 2.2b est représenté directement dans le plan, en représentant les arêtes comme des rubans, qui sont torsadés si l'arête a un twist égal à -1 (a). Ce cœur est ensuite réenraciné sur un coin du schéma, ce qui produit un cœur virtuellement enraciné sur le schéma (a).

Malheureusement cela n'est pas toujours possible sur une surface non-orientable, puisqu'il existe des cœurs non-orientables qui n'ont pas de bourgeon enracinable sur le schéma.

Une carte *virtuellement enracinée* est une carte enracinée sur une pousse avec 2 pousses marquées: celle qui suit $\vec{\rho}_m$, et une autre qui suit $\vec{\sigma}_m^{-1}(\vec{\rho}_m)$; et telle que $\vec{\sigma}(\vec{\rho}_m) \notin {}^t\mathbf{C}_m^b$ et $\vec{\sigma}^{-2}(\vec{\rho}_m) \notin {}^t\mathbf{C}_m^b$. Les 2 pousses marquées sont dites *virtuelles*. Les pousses virtuelles n'ont pas de couleurs, et ne sont pas prises en compte dans le poids d'une carte, ni dans le degré d'un sommet. On appelle *degré virtuel* d'un sommet son degré quand on compte les pousses virtuelles.

Dorénavant, les ensembles \mathcal{P} , \mathcal{C} , \mathcal{L} et \mathcal{U} incluent à la fois les cartes réellement enracinées et virtuellement enracinées.

Un *coin enracinable* d'une carte $m \in \mathcal{P}$ est un coin orienté $\vec{c} \in {}^t\mathbf{C}_m$ qui n'est pas adjacent à un bourgeon non-enracinable. Soit \vec{c} un coin enracinable de m . Le *réenracinement de m sur \vec{c}* (illustré dans la figure 2.4), noté $\Omega(m, \vec{c})$, est la carte m' obtenue à partir de m par la procédure suivante:

- si \vec{c} est suivi d'un bourgeon enracinable s , on réenracine m' sur s .
- si \vec{c} est suivi par une arête, on ajoute deux bourgeons virtuels à la place de \vec{c} : une pousse b suivie par une feuille l ; puis on réenracine m' sur l .
- si m' contient des bourgeons virtuels qui ne sont pas adjacents à la racine, on les enlève.

Remarquons que le fait que les pousses virtuelles d'une carte virtuellement enracinée ne puissent pas être suivies ou précédées par une autre pousse assure que, si \vec{c} est un coin enracinable de m , le coin \vec{c}_ρ de $\Omega(m, \vec{c})$ qui contient ρ_m est enracinable, et que $\Omega(\Omega(m, \vec{c}), \vec{c}_\rho) = m$. Remarquons également que si m est virtuellement enracinée, $\vec{\sigma}_m(\vec{\rho}_m)$ est enracinable et $\Omega(m, \vec{\sigma}_m(\vec{\rho}_m)) = m$.

Lemme 2.2.4. *Le réenracinement d'une carte $m \in \mathcal{P}$ sur un coin enracinable est:*

- une carte virtuellement enracinée sur une pousse si $\vec{c} \in {}^t\mathbf{C}_m^e$, ou
- une carte réellement enracinée sur une pousse si $\vec{c} \in {}^t\mathbf{C}_m^s$.

Notons qu'une carte virtuellement enracinée ne peut pas être bien enracinée, et que par conséquent les coins bien enracinables d'une carte sont nécessairement suivis

d'un bourgeon bien enraciné.

Lemme 2.2.5. *Toute carte enracinée sur une pousse possède exactement 2 bourgeons bien enracinables, qui sont réels.*

Preuve. On remarque qu'une carte enracinée sur une pousse possède au moins une pousse réelle. Le lemme 2.2.2 permet de conclure. \square

L'algorithme raccourci est défini de la même manière que précédemment, à la différence près qu'on s'autorise maintenant à réenraciner le cœur sur n'importe quel coin enracinable, sans s'imposer qu'il soit suivi d'un bourgeon. On obtient un résultat énumératif similaire:

Théorème 2.2.6. *L'algorithme raccourci induit, pour tout schéma déraciné \bar{s} :*

$$R_{\bar{s}}(z_{\bullet}, z_{\circ}) = \frac{C_{\bar{s}}^{\bullet}(T_{\bullet}, T_{\circ})}{n_{\bar{s}}^{rc}}, \quad (2.8)$$

où $C_{\bar{s}}^{\bullet}(T_{\bullet}, T_{\circ}) := C_{\bar{s}}(T_{\bullet}, T_{\circ}) + C_{\bar{s}}(T_{\circ}, T_{\bullet})$, et $n_{\bar{s}}^{rc}$ note le nombre de coins enracinables de \bar{s} .

2.3 Le cas 4-valent

Dans cette section, on restreint notre étude au cas des cartes 4-valentes, ce qui nous permet d'aller plus loin dans l'analyse des familles de cartes considérées. La restriction d'une famille de cartes au cas 4-valent est indiqué par un \times en exposant.

Dans la section 2.3.1, on verra que les cœurs peuvent s'écrire comme des schémas décorés par des chemins de Motzkin. Dans la section 2.3.2, on étudiera de plus près la structure des schémas désétiquetés et de leur *graphe d'inclinaison*.

2.3.1 Encodage des branches par des chemins de Motzkin

Décomposition en schéma

Dans cette section, d'une manière similaire à la décomposition d'une carte unicellulaire en un cœur décoré par des arbres, on effectue la décomposition d'un cœur en un schéma étiqueté décoré par des chemins de Motzkin décorés (définis dans la section 1.4.3).

Soit $l \in \mathcal{L}^{\times}$ un schéma étiqueté. On oriente chaque arête de l de telle sorte que chaque arête est d'abord visitée dans le sens contraire de son orientation dans le tour de la face partant de la racine. Notons que cette définition coïncide bien avec la définition d'une bonne orientation dans la présentation de [Lep19] pour le cas orientable. Les branches d'un cœur sont orientées en fonction de l'arête correspondante de leur schéma.

On définit la *hauteur à l'origine* (resp. *hauteur à la destination*) d'une arête e de l , que l'on note $\lambda_l^0(e)$ (resp. $\lambda_l^1(e)$), comme étant la plus petite étiquette d'un coin adjacent à la demi-arête origine $h_l^0(e)$ (resp. la demi-arête destination $h_l^1(e)$) de e .

Un *schéma étiqueté décoré* $(l, (b_e)_{e \in \mathbf{E}_l})$ est un schéma étiqueté l équipé d'une suite de chemins de Motzkin décorés $(b_e)_{e \in \mathbf{E}_l}$ indexés par les arêtes de l , telle que chaque chemin b_e va de la hauteur $\lambda_l^0(e)$ à la hauteur $\lambda_l^1(e)$.

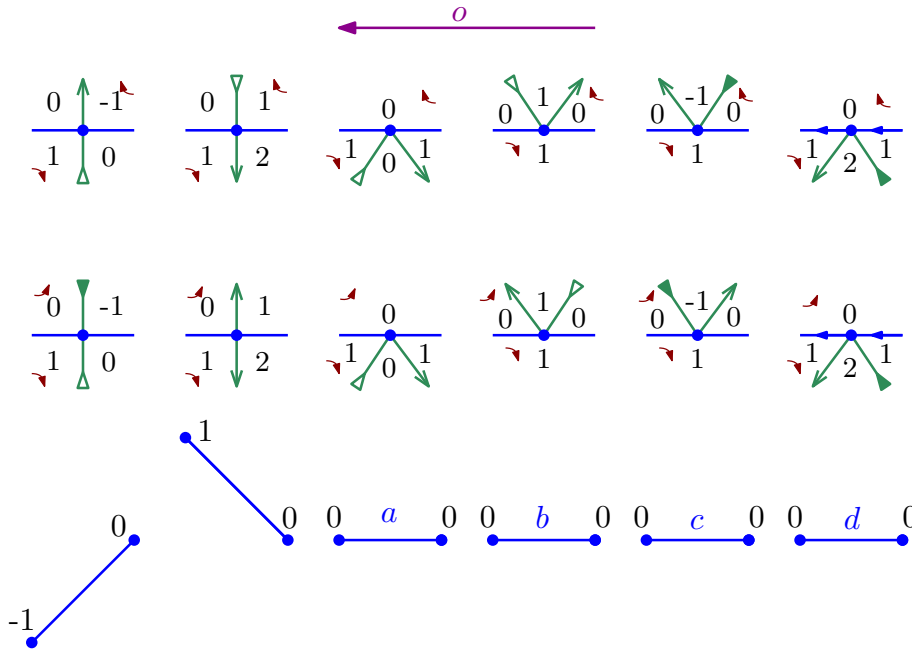


Figure 2.5: Une illustration des 6 types possibles de sommets d'une branche. La flèche violette indique l'orientation de la branche, et les flèches marrons indique le sens de parcours des coins. La première ligne correspond à une branche double sens, la deuxième à une branche sens unique, et la dernière à la représentation du sommet comme pas de Motzkin décoré dans la décomposition en schéma.

La *décomposition en schéma* d'un cœur $c \in \mathcal{C}^\times$ est le schéma étiqueté décoré constitué du schéma étiqueté de c , et décoré par une suite de chemin de Motzkin décorés qui encodent les branches de c . Les sommets d'une branche ont degré intérieur 2, et peuvent être de 6 types différents, en fonction de la valeur relative des étiquettes des coins qui leur sont incidents, illustrés par la figure 2.5. Pour le premier type de sommet, la valeur des étiquettes augmente de 1 le long de la branche au niveau de ce sommet, pour le deuxième type, elle diminue de 1, et pour les 4 autres types elle reste la même.

Lemme 2.3.1. *La décomposition en schéma est une bijection entre les cœurs enracinés sur le schéma et les schémas étiquetés décorés.*

La décomposition en schéma est illustrée dans la figure 2.6.

Énumération des chemins de Motzkin décorés

Afin de tirer des conclusions énumératives du lemme 2.3.1, on étudie maintenant de plus près les séries génératrices des chemins de Motzkin décorés, dans leurs versions univariées et bivariées.

On note $B(t)$ (resp. $D(t)$) la série des chemins de Motzkin-Lukaciewicz décorés (resp. des ponts de Motzkin décorés), énumérés par leur longueur.

Les séries B et D sont reliés par les équations de décomposition suivantes:

$$\begin{cases} D(t) &= t + 4tD(t) + tD^2(t) \\ B(t) &= 1 + 4tB(t) + 2tB(t)D(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

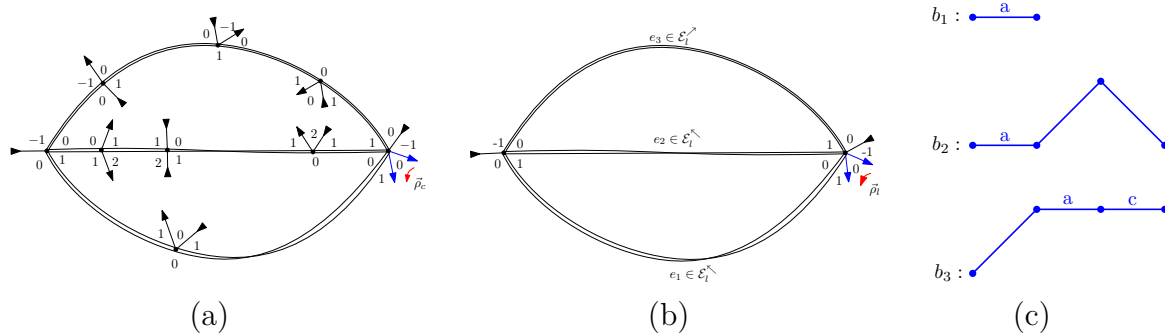


Figure 2.6: Un cœur enraciné sur le schéma (a) peut être décomposé en un schéma étiqueté (b) décoré par des branches (c).

Ces équations induisent les égalités suivantes:

$$\begin{cases} t &= \frac{D}{1 + 4D + D^2} \\ B &= \frac{1 + 4D + D^2}{1 - D^2} \end{cases}$$

La série génératrice d'un chemin de Motzkin décoré allant de hauteur i à hauteur j peut alors s'écrire: $B \cdot D^{|j-i|}$.

Une fonction F en une seule variable est dite $|-symétrique$ si $F(\frac{1}{t}) = F(t)$.

Le lemme suivant est une généralisation directe du lemme énoncé dans [CMS09] pour les chemins de Motzkin non décorés:

Lemme 2.3.2. *Soit f et F deux fonctions telles que $f(t) = F(D(t))$. Alors f est rationnelle si et seulement si F est rationnelle et $|-symétrique$.*

Preuve. On remarque que la famille des t^{-k} est une base de la famille des polynômes symétriques en D , et on montre que ce résultat s'étend aux fractions rationnelles. \square

On note $B_\bullet(t_\bullet, t_\circ)$ (resp. $D_\bullet(t_\bullet, t_\circ)$, $E_\bullet(t_\bullet, t_\circ)$) la série des ponts de Motzkin décorés (resp. des chemins de Motzkin-Lukaciewicz décorés, resp. des mots de Motzkin décorés), où les pas montants ou descendant de hauteur paire, ainsi que 2 des 4 types de pas horizontaux, ont poids t_\bullet , alors que tous les autres pas ont poids t_\circ . On note également $B_\circ(t_\bullet, t_\circ) := B_\bullet(t_\circ, t_\bullet)$, $D_\circ(t_\bullet, t_\circ) := D_\bullet(t_\circ, t_\bullet)$, et $E_\circ(t_\bullet, t_\circ) := E_\bullet(t_\circ, t_\bullet)$.

Notons que par symétrie, on a:

$$\begin{cases} B_\bullet &= B_\circ \\ E_\bullet &= E_\circ \\ t_\circ \cdot D_\bullet &= t_\bullet \cdot D_\circ, \end{cases}$$

et on note donc $B := B_\bullet$ et $E := E_\bullet$. Notons également que $E = \frac{D_\bullet}{t_\bullet} = \frac{D_\circ}{t_\circ}$.

Ces séries vérifient les équations de décomposition suivante:

$$\begin{cases} E &= 1 + 2(t_\bullet + t_\circ)E + t_\bullet t_\circ E^2 \\ B &= 1 + 2(t_\bullet + t_\circ)B + t_\bullet t_\circ EB \end{cases}$$

La résolution de ces équations donne:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{\circ} = \frac{1}{D_{\bullet} + 2\left(\frac{D_{\bullet}}{D_{\circ}} + 1\right) + \frac{1}{D_{\circ}}} \\ t_{\bullet} = \frac{1}{D_{\circ} + 2\left(\frac{D_{\circ}}{D_{\bullet}} + 1\right) + \frac{1}{D_{\bullet}}} \\ E = \frac{1 - 2(t_{\bullet} + t_{\circ}) - \sqrt{(1 - 2t_{\bullet} - 2t_{\circ})^2 - 4t_{\bullet}t_{\circ}}}{2t_{\bullet}t_{\circ}} \\ B = \frac{1}{\frac{1}{E} - t_{\bullet}t_{\circ}E} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2t_{\bullet} - 2t_{\circ})^2 - 4t_{\bullet}t_{\circ}}} \end{array} \right. . \quad (2.10)$$

On note, pour $i \leq j$:

$$\Delta_i^j(x, y) := x^{|[i,j[\cap(2\mathbb{Z})|]} y^{|[i,j[\cap(2\mathbb{Z}+1)|]}.$$

La série génératrice d'un chemin de Motzkin allant de hauteur i à hauteur j , avec $i \leq j$, dans laquelle les pas montants ou descendants de hauteur paire, ainsi que 2 des 4 types de pas horizontaux, ont poids t_{\bullet} , alors que tous les autres pas ont poids t_{\circ} , s'exprime alors:

$$B \cdot \Delta_i^j(D_{\bullet}, D_{\circ}).$$

Une fonction f en deux variables est dite symétrique (resp. $\|$ -symétrique, \times -symétrique) si elle vérifie $f(x, y) = f(y, x)$ (resp. $f(x, y) = f(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$, $f(x, y) = f(\frac{1}{y}, \frac{1}{x})$).

On donne maintenant la version bivariée du lemme 2.3.2, prouvée dans [AL19]:

Lemme 2.3.3. *Soit f une fonction symétrique et F et F la fonction telle que $F(D_{\circ}, D_{\bullet}) = f(t_{\circ}, t_{\bullet})$. Alors F est aussi symétrique.*

De plus, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

1. f est rationnelle,
2. F est rationnelle et $\|$ -symétrique.

Preuve. On commence par montrer que la famille des $(t_{\bullet}^{-k}, t_{\circ}^{-k})$ est une base de la famille des polynômes symétriques et $\|$ -symétriques en D_{\bullet} et D_{\circ} , puis on montre que ce résultat s'étend aux fractions rationnelles. \square

Conséquences énumératives de la décomposition en schéma

Dans le cas univarié, énumère les cartes de \mathcal{C}^{\times} en attribuant un poids $t^{\frac{1}{2}}$ à chaque bourgeon, et on ajoute un facteur t additionnel, de telle sorte que le poids obtenu est bien le même que le poids habituel de t par bourgeon enracinable. Avec ces poids, chaque sommet d'une branche a poids t , de telle sorte que le lemme 2.3.1 a pour conséquence énumérative:

Lemme 2.3.4. *La décomposition en schéma induit, pour tout $l \in \mathcal{L}^{\times}$:*

$$C_l(t) = t^{\frac{n_l^s}{2} + 1} \cdot \prod_{e \in \mathbf{E}_l} B \cdot D^{|\lambda_l^1(e) - \lambda_l^0(e)|},$$

où n_l^s note le nombre de bourgeons de l .

Dans le cas bivarié, la nécessité de tenir compte de la couleur de chaque bourgeon rend l'astuce précédente inutilisable en l'état. Il nous faut donc étudier de plus près le poids de chaque sommet d'une branche.

Une arête e de l est dite *croissante* (resp. *décroissante*) si $\lambda_l^0(e) \leq \lambda_l^1(e)$ (resp. $\lambda_l^1(e) > \lambda_l^0(e)$). On rappelle qu'une arête e est dite *sens unique* ou *double sens*, suivant que chacun des ses deux côtés est parcouru dans le même sens ou non dans le tour de la face partant de la racine.

Les ensembles des arêtes double-sens croissantes, double-sens décroissantes, sens-unique croissantes, et sens-unique décroissantes de l sont notées \mathbf{E}_l^{\nearrow} , \mathbf{E}_l^{\searrow} , \mathbf{E}_l^{\nwarrow} , et \mathbf{E}_l^{\swarrow} .

On note \mathbf{S}_l^r l'ensemble des bourgeons enracinables réels de l . La *hauteur* d'un bourgeon enracinable s , notée $\lambda_l^h(s)$, est la plus petite étiquette d'un coin qui lui est adjacent.

Lemme 2.3.5. *La décomposition en schéma induit, pour tout $l \in \mathcal{L}^\times$:*

$$\begin{aligned} C_l^\times(t_\bullet, t_\circ) &= \prod_{s \in \mathbf{S}_l^r} \Delta_{\lambda_l^h(s)}^{\lambda_l^h(s)+1}(t_\circ, t_\bullet) \cdot \prod_{e \in \mathbf{E}_l^{\nearrow}} B \cdot \Delta_{\lambda_l^0(e)}^{\lambda_l^1(e)}(D_\bullet, D_\circ) \cdot \prod_{e \in \mathbf{E}_l^{\searrow}} B \cdot \Delta_{\lambda_l^1(e)}^{\lambda_l^0(e)}(D_\circ, D_\bullet) \\ &\cdot \prod_{e \in \mathbf{E}_l^{\nwarrow}} B \cdot \Delta_{\lambda_l^0(e)}^{\lambda_l^1(e)}(t_\circ t_\bullet E, t_\circ t_\bullet E) \cdot \prod_{e \in \mathbf{E}_l^{\swarrow}} B \cdot \Delta_{\lambda_l^1(e)}^{\lambda_l^0(e)}(E, E). \end{aligned}$$

Preuve. On expose dans la figure 2.5 les différents types de sommets d'une branche. On remarque que dans tous les cas, le poids des 4 sommets horizontaux est $2t_\bullet + 2t_\circ$, et que le poids d'un pas montant suivi d'un pas descendant est $t_\bullet + t_\circ$. La formule exprimée dans le lemme 2.3.5 suit alors. \square

Notons que dans le cas où la surface sous-jacente est orientable, toutes les arêtes sont à double-sens, et la formule du lemme 2.3.5 s'écrit alors:

$$C_l^\times(t_\bullet, t_\circ) = \prod_{s \in \mathbf{S}_l^r} \Delta_{\lambda_l^h(s)}^{\lambda_l^h(s)+1}(t_\circ, t_\bullet) \cdot \prod_{e \in \mathbf{E}_l^{\nearrow}} B \cdot \Delta_{\lambda_l^0(e)}^{\lambda_l^1(e)}(D_\bullet, D_\circ) \cdot \prod_{e \in \mathbf{E}_l^{\searrow}} B \cdot \Delta_{\lambda_l^1(e)}^{\lambda_l^0(e)}(D_\circ, D_\bullet)$$

2.3.2 Le graphe d'inclinaison

On s'intéresse maintenant plus en détail à la structure d'un schéma.

Théorème 2.3.6. *Un schéma désétiqueté $s \in \mathcal{U}^\times$ (virtuellement ou réellement enraciné) n'a pas de sommet de type relatif (voir section 2.2.1) plus grand que 1.*

Preuve. Il est clair qu'un sommet de degré virtuel 4 est de type relatif au plus 1. Le fait que les bourgeons virtuels d'une carte ne sont ni suivis ni précédés d'un autre bourgeon implique que c'est aussi le cas d'un sommet de degré 4 et de degré virtuel 6. \square

Une arête d'un schéma désétiqueté s est dite *équilibrée* (resp. *décalée*) si ses deux demi-arêtes ont type relatif 0 (resp. 2). Une arête constituée de deux demi-arêtes h_0 et h_1 est dite *inclinaison vers h_1* si h_0 est de type relatif 0 et h_1 est de type 1. On appelle *graphe d'inclinaison* de s le graphe orienté constitué des arêtes inclinées de s . Un *cycle incliné* de s est un cycle orienté de son graphe d'inclinaison. Une *boucle inclinée* de s est un cycle incliné de longueur 1.

Dans le cas où la surface sous-jacente est orientable, l'absence d'arêtes à double-sens contraint suffisamment la structure d'un schéma désétiqueté pour qu'on puisse prouver le théorème suivant:

Théorème 2.3.7. *Un schéma d'une surface orientable n'a pas de cycle incliné.*

Preuve. On suppose par l'absurde qu'il existe un cycle incliné C , qui est donc constitué de sommets de type relatif 1 exclusivement. Regardant attentivement la structure des coins autour de C , en fonction des étiquettes relatives, on constate qu'il n'est pas possible de donner un ordre dans lequel ces coins peuvent être parcourus, ce qui permet de conclure la preuve. \square

Dans le cas où la surface sous-jacente n'est pas orientable, il existe des exemples de schéma qui ont des cycles inclinés. Une étude approfondie du graphe d'offset d'un schéma sur une surface non-orientable permet d'étendre le théorème 2.3.7:

Théorème 2.3.8. *Soit $s \in \mathcal{U}_S^\times$ un schéma désétiqueté 4-valent réellement enraciné d'une surface \mathcal{S} .*

- *Tout cycle incliné de s est de type I, IIa, IIb ou III (voir Figure 2.7).*
- *En particulier, un cycle incliné contient au plus 2 arêtes, et toutes sont à double sens, ce qui implique qu'un schéma orientable (réellement enraciné) n'a pas de cycle incliné.*
- *De plus, la longueur totale des cycles d'inclinaisons est au plus égale à $2g_S$.*

Preuve. La première partie de cette preuve suit celle du théorème 2.3.7, avec un niveau de complexité supérieur dû au fait que la carte n'est pas orientable, ce qui implique que certains coins peuvent avoir des spins négatifs, et des arêtes peuvent être à double sens.

La deuxième partie de la preuve, qui vise à borner la longueur totale des cycles inclinés d'un schéma, est basée sur une opération qui consiste à retirer une boucle inclinée du schéma. En étudiant attentivement l'évolution lors de cette opération de la longueur des cycles inclinés et de la caractéristique d'Euler de la carte, on en déduit l'inégalité du théorème 2.3.8. \square

Remarque 3 (Perspectives). Le théorème 2.3.8 ne traite pour l'instant que le cas des schémas réellement enracinés, mais on peut bien sûr se demander s'il est possible de l'étendre au cas des cartes virtuellement enracinées, afin d'obtenir un théorème universel de la forme du graphe d'inclinaison d'un schéma.

2.4 Résultats énumératifs

Dans cette section, on utilise le travail des sections précédentes pour obtenir des interprétations combinatoire de plusieurs des résultats énumératifs présentés dans la section 1.2.1.

Dans la section 2.4.1, on prouvera la rationalité univariée de la série C_s dans le cas où s n'a pas de cycle incliné, en utilisant comme dans [Lep19] un regroupement des schémas en fonction d'une certaine surjection. Dans la section 2.4.2, on développera une autre manière de grouper les schémas, cette fois en fonction d'une certaine bijection, ce qui nous permettra de prouver la rationalité tant univariée que bivariée de la série C_s^\bullet , toujours dans le cas où s n'a pas de cycle incliné. Enfin, dans

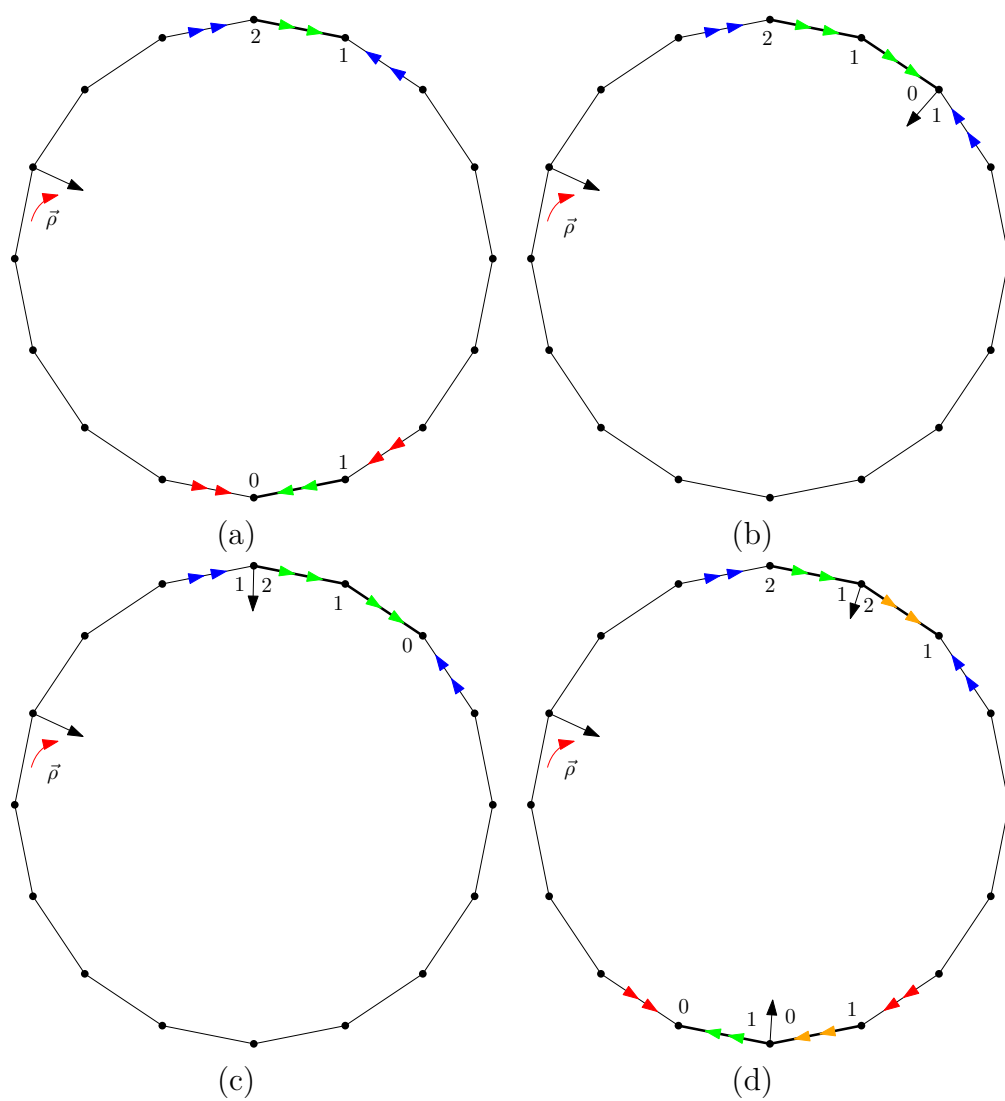


Figure 2.7: Des cycles inclinés de types I, IIa, IIb, and III (a, b, c, and d)

la section 2.4.3, on s'intéresse au cas des schémas quelconques, en montrant tout d'abord la rationalité en t_\bullet , t_\circ et E de la série C_s^\bullet , puis en donnant un résultat plus précis pour le cas où les seuls cycle inclinés de s sont des boucles.

2.4.1 Rationalité univariée en groupant par une surjection

Théorème 2.4.1. *Soit s un schéma désétiqueté de genre $g \geq 1$ sans cycle incliné. La série $B^{2g} \cdot C_s$ est $|-$ -symétrique en D .*

Preuve. Puisque le graphe d'inclinaison de s est acyclique, on note v_1, \dots, v_{n_v} les sommets de s de telle manière qu'aucune arête $v_i v_j$ ne soit inclinée vers v_j avec $j \leq i$. On appelle cela une *appellation cohérente*. Autrement dit, on renomme les sommets par une extension linéaire de l'ordre partiel induit par le graphe d'inclinaison.

On note \mathcal{S}_n l'ensemble des surjections de $[1, n]$ dans $[1, k]$. On dit qu'une telle surjection a *taille* n et *hauteur* k .

À un schéma étiqueté l on associe une surjection p_l , appelée *hauteur relative des sommets*, et définie par:

- $p_l(i) = p_l(j) \iff \lambda_l^h(v_i) = \lambda_l^h(v_j)$,
- $p_l(i) < p_l(j) \iff \lambda_l^h(v_i) < \lambda_l^h(v_j)$.

Par commodité, on écrira parfois $p_l(v_i)$ au lieu de $p_l(i)$.

Notons que cette notion de surjection associée à un schéma rappelle la notion de *schéma standard* décrite dans [CMS09].

Soit s un schéma désétiqueté, et supposons qu'il n'a pas d'arête inclinée. La série génératrice des cœurs ayant s pour schéma désétiqueté et dont le schéma étiqueté l a p pour surjection associée p s'écrit:

$$C_s^p = t^{\frac{n_s^s}{2}+1} \cdot B^{n_m^e} \cdot \sum_{p \in \mathcal{S}_{n_v}^v} \sum_{0=\lambda_1 < \dots < \lambda_k} \prod_{e \in \mathbf{E}_s} D^{|\lambda_{p(v_s^1(e))} - \lambda_{p(v_s^0(e))}|}.$$

Remarquons qu'on fait ici le choix d'imposer que la hauteur minimale d'un sommet est 0, plutôt que d'imposer que la hauteur de la racine soit 0, mais cela n'influe pas sur le résultat du calcul.

En développant le calcul, et en notant $\mathcal{C}_s^{p,i}$ le nombre d'arêtes e telles que $p(v_s^1(e)) > i$ et $p(v_s^0(e)) \leq i$, ou telles que $p(v_s^0(e)) > i$ et $p(v_s^1(e)) \leq i$, on obtient:

$$C_s = t^{\frac{n_s^s}{2}+1} \cdot B^{n_m^e} \cdot \sum_{p \in \mathcal{S}_{n_v}^v} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{D^{\mathcal{C}_s^{p,i}}}{1 - D^{\mathcal{C}_s^{p,i}}}.$$

On prend maintenant en compte les arêtes inclinées de s . On dit qu'une arête qui relie v_i à v_j et est inclinée vers v_j (avec donc $i < j$) est une *égalité* (resp. *inversion*, *anti-inversion*) pour la surjection p si $p(i) = p(j)$ (resp. $p(i) > p(j)$, $p(i) < p(j)$). On note $n_s^{p,t}$ (resp. $n_s^{p,i}$, $n_s^{p,a}$) le nombre d'égalités (resp. inversion, anti-inversions) de s pour p .

En observant de près l'influence de l'inclinaison d'une arête sur sa longueur, en fonction de la hauteur relative des sommets, on obtient l'équation suivante:

$$C_s = t^{\frac{n_s^s}{2}+1} \cdot B^{n_m^e} \cdot \sum_{p \in \mathcal{S}_{n_v}^v} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{D^{\mathcal{C}_s^{p,i}}}{1 - D^{\mathcal{C}_s^{p,i}}} \right) \cdot D^{n_s^{p,t} + n_s^{p,a} - n_s^{p,i}}. \quad (2.11)$$

Pour montrer la symétrie de C_s , on calcule maintenant $\overline{C_s^p}$, obtenu à partir de C_s^p en remplaçant D par D^{-1} . On obtient:

$$\overline{C_s} = t^{\frac{n_s^v}{2}+1} \cdot (-1)^{n_s^v} B^{n_m^e} \cdot \sum_{p \in \mathcal{S}_{n_s^v}} \left((-1)^{k-1} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 + \frac{D^{C_s^{p,i}}}{1 - D^{C_s^{p,i}}} \right) \right) \cdot D^{-n_s^{p,t} - n_s^{p,a} + n_s^{p,i}}$$

On dit qu'une surjection o *raffine* une surjection p , et on écrit $o \preccurlyeq p$, si

$$o(i) \leq o(j) \implies p(i) \leq p(j).$$

En considérant le produit $\prod_{i=1}^{k-1} \left(1 + \frac{D^{C_s^{p,i}}}{1 - D^{C_s^{p,i}}} \right)$ comme un choix des inégalités de p à garder ou non, on obtient l'équation suivante:

$$\overline{C_s} = t^{\frac{n_s^v}{2}+1} \cdot (-1)^{n_s^v} B^{n_m^e} \cdot \left(\sum_{o \in \mathcal{S}_{n_s^v}} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{D^{C_s^{o,i}}}{1 - D^{C_s^{o,i}}} \right) \cdot \sum_{p \preccurlyeq o} \left((-1)^{k_p-1} D^{-n_s^{p,t} - n_s^{p,a} + n_s^{p,i}} \right). \quad (2.12)$$

On définit la *surjection miroir* de p la surjection \bar{p} telle que $\bar{p}(i) = k_p - p(i) + 1$.

Lemme 2.4.2.

$$\sum_{p \preccurlyeq \bar{o}} (-1)^{k_p-1} D^{-n_s^{p,t} - n_s^{p,a} + n_s^{p,i}} = (-1)^{n_s^e} \cdot D^{n_s^{o,t} + n_s^{o,a} - n_s^{o,i}}.$$

Preuve. Notons tout d'abord que dans le cas où le graphe d'offset n'a aucune arête inclinée, ce lemme est une conséquence directe de la formule d'Euler-Poincaré appliquée à un polytope appelé le permutoèdre, dont les facettes sont encodées par des surjections.

Le cas général est plus complexe, mais peut être prouvé par une étude attentive de la structure des surjections qui raffinent une certaine surjection, de manière à montrer que toutes les contributions s'annulent, sauf celle d'une unique permutation définie à partir de o . Notons que c'est la preuve de ce lemme qui requiert que l'appellation des sommets soit cohérente (et qui implique donc que le théorème 2.4.1 ne s'applique qu'aux schémas sans cycle incliné). \square

En appliquant le lemme 2.4.2 à l'équation 2.12, et en remarquant que $C_s^{o,i} = C_s^{\bar{o}, k_o - i + 1}$, on obtient:

$$\overline{C_s} = (-1)^{n_s^v + n_i^e + 1} C_s,$$

ce qui permet de conclure la preuve du théorème 2.4.1. \square

Le théorème 2.4.1, en conjonction avec le lemme 2.3.2, permet de montrer que la série $B^{2g} \cdot C_s$ est rationnelle en T . Suivant que \bar{s} possède ou non une symétrie non triviale, on a $C_{\bar{s}} = \frac{C_s}{2}$ ou $C_{\bar{s}} = C_s$.

Le théorème 2.2.6, le théorème 2.1.8, et le théorème 1.4.1, dans leurs versions univariées, permettent de conclure sur le théorème suivant:

Théorème 2.4.3. *Soit s un schéma désétiqueté de genre $g \geq 1$ sans cycle incliné. Si g est entier, la série génératrice $M_{\bar{s}}(z)$ est rationnelle en la série d'arbres $T(z)$.*

Sinon, la série $M_{\bar{s}}(z)$ s'écrit $\sqrt{1 - 8T(z) + 12T(z)^2 \cdot R(T(z))}$, où R est une fonction rationnelle.

Puisqu'une surface donnée n'admet qu'un nombre fini de schémas déracinés, et grâce au théorème 2.3.7, on en déduit le corollaire suivant:

Corollaire 2.4.4. *La série génératrice $M_g(z)$ des cartes orientables de genre $g \geq 1$ est rationnelle en la série d'arbres $T(z)$.*

2.4.2 Rationalité en groupant par une permutation

La méthode développée dans la section précédente ne semble pas pouvoir facilement se généraliser pour découler sur la version bivariée du théorème 2.4.1. Par ailleurs, les sommes alternées qui interviennent ne sont pas très satisfaisante d'un point de vue combinatoire, et le fait que celles-ci finissent par s'annuler semble indiquer une structure plus simple que celle qu'on a réussi à capter par des surjections. C'est en fait une construction proche de celle impliquée dans la preuve du lemme 2.4.2 qui nous permettra d'améliorer ces points, en effectuant un regroupement des schémas en fonction d'une permutation plutôt que d'une surjection.

Cas univarié

On commence par montrer le théorème 2.4.5 (qui est identique au théorème 2.4.1), en utilisant cette nouvelle méthode.

Théorème 2.4.5. *Soit s un schéma désétiqueté de genre $g \geq 1$ sans cycle incliné. La série $B^{2g} \cdot C_s$ est $|-$ symétrique en D .*

Preuve. Comme précédemment, on choisit une appellation cohérente des sommets de s .

À chaque schéma étiqueté l , on associe une permutation notée π_l et appelée *ordre relatif des sommets*, telle que pour tous $i < j$, soit $\lambda_l^h(v_{\pi_l(i)}) < \lambda_l^h(v_{\pi_l(j)})$, ou $\lambda_l^h(v_{\pi_l(i)}) = \lambda_l^h(v_{\pi_l(j)})$ et $\pi_l(i) < \pi_l(j)$. En d'autres termes, il s'agit de l'ordre lexicographique sur les appellations de sommets de l induit par le couple (hauteur du sommet, appellation). On écrira parfois $\pi_l^{-1}(v_i)$ au lieu de $\pi_l^{-1}(i)$.

Exemple. Dans le cas d'un schéma l ayant 4 sommets, dont les hauteurs des sommets v_1 à v_4 sont 2, 5, 0 et 2, la permutation π_l s'écrit 3142.

On note C_s^π la série génératrice des cœurs dont le schéma étiqueté a π pour ordre relatif des sommets.

Une arête e recouvre la hauteur relative k si $\pi^{-1}(v_s^1(e)) \leq k$ et $\pi^{-1}(v_s^0(e)) > k$, ou $\pi^{-1}(v_s^0(e)) \leq k$ et $\pi^{-1}(v_s^1(e)) > k$. Une arête e qui rejoint un sommet v_i et un sommet v_j et est inclinée vers v_j dépasse à hauteur relative $k : +$ (resp. $k : -$) si $\pi^{-1}(v_i) < k$ (resp. $> k$) et $\pi^{-1}(v_j) = k$. On note $\mathfrak{C}_s^{\pi,k}$ le nombre d'arêtes de s qui recouvrent la hauteur relative k . On note $\mathfrak{O}_s^{\pi,k:+}$ (resp. $\mathfrak{O}_s^{\pi,k:-}$) le nombre d'arêtes qui dépassent à hauteur $k : +$ (resp. $k : -$). Enfin on note $\delta_s^{\pi,k}$ le désaccord appellation-ordre, qui vaut 1 si $\pi(k) > \pi(k+1)$ et 0 sinon.

Lemme 2.4.6. *La série C_s^π vérifie:*

$$C_s^\pi = t^{\frac{n_s}{2}+1} \cdot B^{n_e} \cdot D^{0_{s^+} - 0_{s^-}} \cdot \prod_{k \in [1, n_v-1]} \frac{D^{\delta_s^{\pi, k} \cdot c_s^{\pi, k}}}{1 - D^{c_s^{\pi, k}}}$$

Preuve. La preuve de ce lemme est proche du début de la preuve du théorème 2.4.1. Remarquons que le facteur $D^{\delta_s^{\pi, k} \cdot c_s^{\pi, k}}$ provient de l'étude du cas d'égalité des hauteurs de deux sommets, en lien avec la définition de l'ordre relatif des sommets. Le facteur $D^{0_{s^+} - 0_{s^-}}$ est un facteur correctif qui permet de prendre en compte le fait que certaines arêtes sont inclinées. La simplicité de ce facteur est notamment due au fait qu'on a choisi une appellation cohérente. \square

D'une manière similaire au cas des surjections, on définit la *permutation miroir* de π comme la permutation $\bar{\pi}$ qui vérifie $\bar{\pi}(i) = n - \pi(i) + 1$.

Lemme 2.4.7.

$$\overline{C_s^\pi} = (-1)^{n_e + n_v - 1} \cdot C_s^\pi,$$

où la barre représente la *|*-transposée: $\overline{F(D)}(t) := F\left(\frac{1}{D}\right)(t)$.

Preuve. On applique la transposition à l'expression de C_s^π donnée dans le lemme 2.4.6. En observant que B est *|*-antisymétrique, et en observant que $C_s^{\bar{\pi}, k} = C_s^{\pi, n_v - k}$, $0_{s^+}^{\bar{\pi}, k} = 0_{s^+}^{\pi, n_v - k + 1}$, et $\delta_s^{\bar{\pi}, k} = 1 - \delta_s^{\pi, n_v - k + 1}$, on obtient bien l'égalité recherchée. \square

En sommant sur toutes les permutations possibles, étant donné l'anti-symétrie de B , la formule d'Euler permet de conclure la preuve du théorème 2.4.5. \square

De la même façon que le théorème 2.4.1, le théorème 2.4.5 permet de prouver le théorème 2.4.3 et le corollaire 2.4.4.

Cas bivarié

On s'intéresse maintenant au cas bivarié de l'énumération des cœurs. On utilise une méthode similaire à celle utilisée précédemment, mais plus détaillée, ce qui nous permet de tenir compte de la couleur des bourgeons dans l'énumération.

Théorème 2.4.8. *Soit s un schéma désétiqueté de genre $g \geq 1$ sans cycle incliné. La série $B^{2g} \cdot C_s^\bullet$ est $\|\$ -symétrique en D_\bullet et D_\circ .*

Preuve. On suit de près la preuve du théorème 2.4.5, et on commence par choisir une appellation cohérente des sommets de s . L'ordre relatif des sommets d'un schéma étiqueté l est dorénavant représenté par une *permutation binaire* $(\pi_l, \zeta_l) \in \mathfrak{S}_{n_v} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{[n_v-1]}$, où π_l est la permutation définie précédemment et $\zeta_l(k) \equiv \lambda_l^h(v_{\pi_l(k+1)}) - \lambda_l^h(v_{\pi_l(k)}) \pmod{2}$.

Dans le cas bivarié, le poids d'une branche ne dépend pas seulement de la hauteur de ses extrémités, mais aussi de leur parité, ce qui complique l'écriture d'une formule close pour la série C_s^π , comparable à celle donnée dans le lemme 2.4.6. Au lieu de cela, on donne donc une relation de récurrence sur le poids d'un schéma jusqu'à une certaine hauteur relative, ce qui permet, en connaissant la parité des hauteurs intermédiaires, de connaître le poids des branches adjacentes à cette hauteur.

On considère un schéma étiqueté l . La *troncation croissante* (resp. *décroissante* de l à hauteur k de l est obtenu à partir de l par la procédure suivante:

- on note $X = v_{\pi_l([1,k-1])}$ (resp. $X = v_{\pi_l([k+1,n_v(l)])}$) l'ensemble des sommets de l qui ont hauteur relative strictement inférieure (resp. supérieure) à k ,
- on supprime les bourgeons de l .
- on donne type relatif 0 aux demi-arêtes adjacentes aux sommets de X ,
- on donne type relatif 0 aux demi-arêtes adjacentes aux sommets de $v_{\pi_l(k)}$ et dont la demi-arête opposée est adjacente à un sommet de X .
- on fusionne les sommets de X avec $\pi_l(k)$ et on efface les boucles ainsi créées.

Si c est une couleur (\bullet ou \circ), on note $-c$ l'autre couleur. On note ${}^c\mathcal{L}_s^{(\pi,\zeta),k}$ l'ensemble des schémas étiquetés $l \in L_s^\pi$ tels que $\lambda_l^h(\pi(k))$ est paire, si $c = \circ$ (resp. impaire, si $c = \bullet$).

Pour toute arête orientée $e = (u_0, u_1) \in E(l)$, pour tout $k \leq n_v(l)$, et pour tout $\varepsilon \in \{0, 1\}$, on définit alors:

$$h_l^{\varepsilon,k,+}(e) = \begin{cases} h_l(\pi(k)), & \text{if } \pi^{-1}(u_\varepsilon) < k \text{ or if } \pi^{-1}(u_\varepsilon) = k \text{ and } \pi^{-1}(u_{1-\varepsilon}) < k, \\ h_l^\varepsilon(e), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

and

$$h_l^{\varepsilon,k,-}(e) = \begin{cases} h_l(\pi(k)), & \text{if } \pi^{-1}(u_\varepsilon) > k \text{ or if } \pi^{-1}(u_\varepsilon) = k \text{ and } \pi^{-1}(u_{1-\varepsilon}) > k, \\ h_l^\varepsilon(e), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

On définit alors la série génératrice suivante:

$$\begin{aligned} {}^c\mathcal{G}_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k;\pm} = & \sum_{l \in {}^c\mathcal{L}_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k;\pm}} \left(\prod_{e \in E^{\nearrow}(\ell)} \Delta_{h_\ell^{0,k;\pm}(e)}^{h_\ell^{1,k;\pm}(e)}(D_\bullet, D_\circ) \prod_{e \in E^{\searrow}(\ell)} \Delta_{h_\ell^{1,k;\pm}(e)}^{h_\ell^{0,k;\pm}(e)}(D_\circ, D_\bullet) \right. \\ & \left. \cdot \prod_{e \in E^{\nwarrow}(\ell)} \Delta_{h_\ell^{0,k;\pm}(e)}^{h_\ell^{1,k;\pm}(e)}(D, D) \prod_{e \in E^{\swarrow}(\ell)} \Delta_{h_\ell^{1,k;\pm}(e)}^{h_\ell^{0,k;\pm}(e)}(t_\bullet t_\circ D, t_\bullet t_\circ D) \right). \end{aligned}$$

On note $\mathbf{E}_s^{\pi,k,\nearrow}$ et $\mathbf{E}_s^{\pi,k,\searrow}$ (resp. $\mathbf{E}_s^{\pi,k,\nwarrow}$, $\mathbf{E}_s^{\pi,k,\swarrow}$) l'ensemble des arêtes double-sens et sens unique e de s telles que e va du sommet v_i au sommet v_j , avec $\pi^{-1}(i) \leq k < \pi^{-1}(j)$ (resp. $\pi^{-1}(i) > k \geq \pi^{-1}(j)$). Remarquons que $\mathbf{E}_s^{\pi,k,\nearrow} = \mathbf{E}_s^{\bar{\pi},k,\searrow}$, et $\mathbf{E}_s^{\pi,k,\nwarrow} = \mathbf{E}_s^{\bar{\pi},k,\swarrow}$. On note $\text{of}_s^{\pi,k}$ la fonction qui à une arête e associe 1 si e s'écrit $v_i v_j$ avec $\pi^{-1}(i) < k$ et $\pi^{-1}(j) = k$ et que e est inclinée vers v_j ou décalée; et 0 sinon. On note $\text{uf}_s^{\pi,k}$ la fonction qui à une arête e associe 1 si e s'écrit $v_i v_j$ avec $\pi^{-1}(i) = k$ et $\pi^{-1}(j) > k$ et que e est inclinée vers v_i ou décalée; et 0 sinon.

On définit:

$$W_{s,e}^{\pi,0,k}(x, y) := (xy)^{\delta_{s,\nu}^{\pi,k,+}} \cdot \frac{x^{\text{of}_s^{\pi,k,+}(e)}}{x^{\text{uf}_s^{\pi,k}(e)}}, \quad (2.13)$$

$$W_{s,e}^{\pi,1,k}(x, y) := x \cdot \frac{y^{\text{of}_s^{\pi,k,+}(e)}}{x^{\text{uf}_s^{\pi,k}(e)}}. \quad (2.14)$$

Enfin, on note:

$${}^c W_{s,e}^{(\pi,\zeta),k} := \begin{cases} W_{s,e}^{\pi,\zeta(k),k}(D_{-c}, D_c), & \text{if } e \in E_s^{\pi,k,\nearrow}, \\ W_{s,e}^{\pi,\zeta(k),k}(D_c, D_{-c}), & \text{if } e \in E_s^{\pi,k,\searrow}, \\ W_{s,e}^{\pi,\zeta(k),k}(D, D), & \text{if } e \in E_s^{\pi,k,\nwarrow}, \\ W_{s,e}^{\pi,\zeta(k),k}(t_\bullet t_\circ D, t_\bullet t_\circ D), & \text{if } e \in E_s^{\pi,k,\swarrow}, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.15)$$

La série ${}^cW_{s,e}^{(\pi,\zeta),k}$ peut s'interpréter comme le poids de l'arête e entre les hauteurs relative k et $k+1$, dans le cas où la différence $\lambda_l^h(v_{\pi(k+1)}) - \lambda_l^h(v_{\pi(k)})$ a la plus petite valeur possible ayant la bonne parité (donnée par ζ).

La définition de la série ${}^cS_s^{\pi,k;\pm}$ et une étude attentive des cas possibles conduit au lemme suivant:

Lemme 2.4.9. *La série génératrice ${}^cS_s^{\pi,k;\pm}$ satisfait les équations de récurrence suivantes:*

$$\begin{aligned} {}^cS_s^{(\pi,\zeta),n_v;+} &= 1, \\ {}^cS_s^{(\pi,\zeta),1;-} &= 1. \end{aligned}$$

For any $k < n_v$:

$${}^cS_s^{(\pi,\zeta),k;+} = \frac{\prod_{e \in E(s)} {}^cW_{s,\nu,e}^{(\pi,\zeta),k}}{1 - (D_\circ D_\bullet)^{c_s^{\pi,k}}} \cdot ((-1)^{\zeta(k)c}) S_s^{(\pi,\zeta),(k+1);+},$$

Finally, for any $k > 1$:

$${}^cS_s^{(\pi,\zeta),k;-} = \frac{\prod_{e \in E(s)} ((-1)^{\zeta(k)c}) W_{s,\nu,e}^{(\pi,\zeta),k-1}}{1 - (D_\circ D_\bullet)^{c_s^{\pi,k-1}}} \cdot ((-1)^{\zeta(k)c}) S_s^{(\pi,\zeta),(k-1);-}.$$

En remarquant notamment que pour toute arête e :

$$\overline{{}^cW_{s,\nu,e}^{(\pi,\zeta),k}} = \frac{((-1)^{\zeta(k)+1}c) \overline{W_{s,\nu,e}^{(\pi,\zeta),\bar{k}-1}}}{D_\bullet D_\circ}, \quad (2.16)$$

on peut en déduire par récurrence sur k le lemme suivant:

Lemme 2.4.10.

$$\overline{{}^cS_s^{(\pi,\zeta),k;-}} = (-1)^{k-1} \cdot \bar{c} S_s^{\overline{(\pi,\zeta)},n_v-k+1;+}$$

En utilisant le lemme 2.3.5, on peut donner une expression pour R_s^\bullet qui consiste essentiellement à ajouter à ${}^cS_s^{(\pi,\zeta),n_v;+}$ des facteurs B pour chaque arête de s , à compter la contribution des bourgeons de s , et à sommer sur toutes les permutations binaires possibles. Cette expression, en plus de la formule d'Euler, permet de conclure la preuve du théorème 2.4.5. \square

Le théorème 2.4.8, en conjonction avec le lemme 2.3.3, permet de montrer que la série $B^{2g} \cdot C_s$ est rationnelle. Le théorème 2.2.6, le théorème 2.1.8, et le théorème 1.4.1, dans leurs versions bivariées, permettent alors de conclure sur le théorème suivant:

Théorème 2.4.11. *Soit s un schéma désétiqueté de genre $g \geq 1$ sans cycle incliné. Si g est entier, la série génératrice $M_{\bar{s}}(z_\bullet, z_\circ)$ est rationnelle en les séries d'arbres T_\bullet et T_\circ .*

Sinon, la série $M_{\bar{s}}(z_\bullet, z_\circ)$ s'écrit $\sqrt{(1 - 2(T_\bullet + T_\circ))^2 - 4T_\bullet T_\circ} \cdot R(T_\bullet, T_\circ)$, où R est une fonction rationnelle et symétrique.

Puisqu'une surface donnée n'admet qu'un nombre fini de schémas désétiquetés, et grâce au théorème 2.3.7, on en déduit le corollaire suivant, qui fournit une explication combinatoire au théorème 1.2.4:

Corollaire 2.4.12. *La série génératrice $M_g(z_\bullet, z_\circ)$ des cartes orientables de genre $g \geq 1$ est rationnelle en les séries d'arbres T_\bullet et T_\circ .*

2.4.3 Rationalité pour les schémas avec cycles inclinés

On a prouvé dans la section précédente que la série des cartes d'une surface orientable donnée est rationnelle en les deux séries d'arbres T_\bullet et T_\circ . Or on sait par le théorème 1.2.5 et les résultats d'énumération exacts que ce n'est pas le cas sur une surface non orientable.

Dans cette section on va tout d'abord donner une explication combinatoire à la rationalité exprimée dans le théorème 1.2.5, avant de se pencher sur le cas des schémas dont tous les cycles inclinés sont des boucles.

Rationalité dans le cas général

Théorème 2.4.13. *Pour tout schéma désétiqeté u de genre $g \geq 1$, la série $C_s(t_\bullet, t_\circ)$ est rationnelle en t_\bullet , t_\circ , et E .*

Remarquons tout de suite que la rationalité de C_l (où l est un schéma étiqueté) en t_\bullet , t_\circ , et E découle directement du lemme 2.3.5. Cependant, puisqu'il y a un nombre infini de schémas étiquetés par schéma désétiqeté, cette remarque n'est pas suffisante pour prouver le théorème 2.4.13.

Les deux méthodes que l'on a présentées précédemment pour prouver la rationalité en t_\bullet et t_\circ dans le cas où s n'a pas de cycle incliné utilisaient cette absence de cycle pour attribuer une appellation cohérente aux sommets de s , ce qui n'est pas possible dans le cas général.

Néanmoins, en ce qui concerne la méthode utilisant les surjections, si la présence d'une appellation cohérente était nécessaire au lemme 2.4.9, ce n'est pas le cas de l'équation 2.11, qui permet donc de prouver directement la version univariée du théorème 2.4.13.

On pourrait donc donner une version bivariée de l'équation 2.11 pour prouver le théorème 2.4.13, mais puisqu'on ne cherche ici qu'à montrer la rationalité en t_\bullet , t_\circ , et E , et qu'on n'a pas besoin d'une expression exacte de C_s , on donne une preuve plus simple du théorème 2.4.13, ce qui, on l'espère, constituera une interprétation combinatoires plus convaincante de la rationalité exprimée par le théorème.

Dans le cas bivarié, le groupement des schéma par une surjection n'est pas suffisant pour donner une expression de C_s , puisque le poids des branches et des bourgeons dépend de la parité de la hauteur des sommets. Cela nous entraîne donc à définir et utiliser les *surjections binaires* au lieu des simples surjections.

On appelle *surjection binaire* une surjection $p : [1, n] \rightarrow [1, k]$, avec $k \in [1, n]$, accompagnée d'une suite $\varepsilon \in \{0, 1\}^{k-1}$. L'ensemble des surjection binaires de taille n est noté \mathcal{BS}_n .

Preuve. Soit l un schéma étiqueté et s son schéma désétiqeté. On donne aux sommets de s (et par conséquent, à ceux de l) une appellation arbitraire: $v_1 \cdots v_{n_v}$, pas nécessairement cohérente. La *surjection binaire associée à l* est la surjection binaire (p, ε) qui vérifie:

- $p(i) = p(j) \iff \lambda_l^h(v_i) = \lambda_l^h(v_j)$,
- $p(i) < p(j) \iff \lambda_l^h(v_i) < \lambda_l^h(v_j)$,
- $h_l(v_{i+1}) - h_l(v_i) \equiv \varepsilon_i \pmod{2}$.

L'ensemble des schémas étiquetés associés à la surjection binaire (p, ε) est noté $\mathcal{L}_{(p, \varepsilon)}$. Puisque des sommets qui ont la même image par la surjection on aussi la

même hauteur, on note $h_l(p^{-1}(i))$ la hauteur commune des sommets de $p^{-1}(i)$, pour tout $i \in [1, k]$.

Le schéma étiqueté canonique d'une surjection binaire (p, ε) , noté $l_{(p, \varepsilon)}$, est le schéma étiqueté l tel que $\lambda_l^h(p^{-1}(i+1)) - \lambda_l^h(p^{-1}(i)) = 2 - \varepsilon_i$ pour tout $i \in [1, k-1]$. En d'autres termes, il s'agit du schéma étiqueté de $\mathcal{L}_{(p, \varepsilon)}$ qui minimise l'écart maximal entre les hauteurs de ses sommets.

On appelle $f_{(p, \varepsilon)}$ la bijection entre les suites d'entiers positifs de longueur k et $\mathcal{L}_{(p, \varepsilon)}$ (où p est de hauteur k), qui à une suite $(a_i)_{i \in [1, k-1]}$ associe le schéma étiqueté l tel que $\lambda_l^h(p^{-1}(i+1)) - \lambda_l^h(p^{-1}(i)) = 2(a_i + 1) - \varepsilon_i$ pour tout $i \in [1, k-1]$. Remarquons que le schéma étiqueté canonique associé à (p, ε) peut être défini par $l_{(p, \varepsilon)} := f_{(p, \varepsilon)}(0)$.

On note $\mathbf{E}_{s,p}^{\nearrow}$ (resp. $\mathbf{E}_{s,p}^{\searrow}$, $\mathbf{E}_{s,p}^{\swarrow}$, $\mathbf{E}_{s,p}^{\nwarrow}$) l'ensemble des arêtes de s qui correspondent à des arêtes de \mathbf{E}_l^{\nearrow} (resp. \mathbf{E}_l^{\searrow} , \mathbf{E}_l^{\swarrow} , \mathbf{E}_l^{\nwarrow}), pour tout $l \in \mathcal{L}_p$. On note comme précédemment $\mathbf{C}_{s,p}^{i \nearrow}$ (resp. $\mathbf{C}_{s,p}^{i \searrow}$, $\mathbf{C}_{s,p}^{i \swarrow}$, $\mathbf{C}_{s,p}^{i \nwarrow}$) le nombre d'arêtes de $\mathbf{E}_{s,p}^{\nearrow}$ (resp. $\mathbf{E}_{s,p}^{\searrow}$, $\mathbf{E}_{s,p}^{\swarrow}$, $\mathbf{E}_{s,p}^{\nwarrow}$) qui peuvent s'écrire (u, v) , avec $\pi(u) \leq i$ et $\pi(v) > i$. On définit aussi $\mathbf{C}_{s,p}^i := \mathbf{C}_{s,p}^{i \nearrow} + \mathbf{C}_{s,p}^{i \searrow} + \mathbf{C}_{s,p}^{i \swarrow} + \mathbf{C}_{s,p}^{i \nwarrow}$.

La bijection $f_{(p, \varepsilon)}$, en conjonction avec le lemme 2.3.5, induit:

$$\sum_{l \in \mathcal{L}_{(p, \varepsilon)}} C_l = C_{l_{(p, \varepsilon)}} \cdot \prod_{i \in [1, k-1]} \frac{1}{1 - D^{2\mathbf{C}_{s,p}^i} \cdot (t_\bullet t_\circ)^{(\mathbf{C}_{s,p}^{i \nearrow} + \mathbf{C}_{s,p}^{i \searrow} + 2\mathbf{C}_{s,p}^{i \swarrow})}}.$$

En sommant sur l'ensemble des surjections binaires, on obtient:

$$C_s = \sum_{(p, \varepsilon) \in \mathcal{BS}_{n_v}} C_{l_{(p, \varepsilon)}} \cdot \prod_{i \in [1, k-1]} \frac{1}{1 - D^{2\mathbf{C}_{s,p}^i} \cdot (t_\bullet t_\circ)^{(\mathbf{C}_{s,p}^{i \nearrow} + \mathbf{C}_{s,p}^{i \searrow} + 2\mathbf{C}_{s,p}^{i \swarrow})}}.$$

Le lemme 2.3.5 assure la rationalité de $C_{l_{(p, \varepsilon)}}$ en t_\bullet , t_\circ et E , ce qui permet de conclure la preuve du théorème 2.4.13. \square

Le théorème 2.4.13, en conjonction avec le théorème 2.2.6, le théorème 2.1.8, et le théorème 1.4.1, et l'expression de B tirée de l'équation 2.10, permettent de prouver le corollaire suivant, qui donne une interprétation combinatoire de la rationalité exprimée dans le théorème 1.2.5:

Corollaire 2.4.14. *Soit \mathcal{S} une surface quelconque de genre $g \geq 1$.*

La série génératrice $M_{\mathcal{S}}(z_\bullet, z_\circ)$ est rationnelle en les séries d'arbres T_\bullet et T_\circ et en la série $\sqrt{(1 - 2(T_\bullet + T_\circ))^2 - 4T_\bullet T_\circ}$.

Rationalité des schémas avec boucles inclinées

Théorème 2.4.15. *Soit s un schéma désétiqueté de genre $g \geq 1$ qui a k boucles inclinées, et pas d'autres cycles inclinés.*

La série $\frac{B^{2g} \cdot C_s^\bullet}{E^k}$ est $\|\cdot\|$ -symétrique en D_\bullet and D_\circ .

Preuve. On définit à partir de s un nouveau schéma désétiqueté noté $g(s)$, obtenu en appliquant à chaque boucle inclinée de s l'opération g illustrée par la figure 2.8.

Supposons tout d'abord que s possède une unique boucle inclinée, notée ℓ . L'opération g , tel qu'illustrée dans la figure 2.8 dans les 3 cas possibles où s est réellement enracinée, consiste à ajouter une feuille de chaque côté de la demi-arête de ℓ de type 1, de telle sorte que cette demi arête ait type 0.

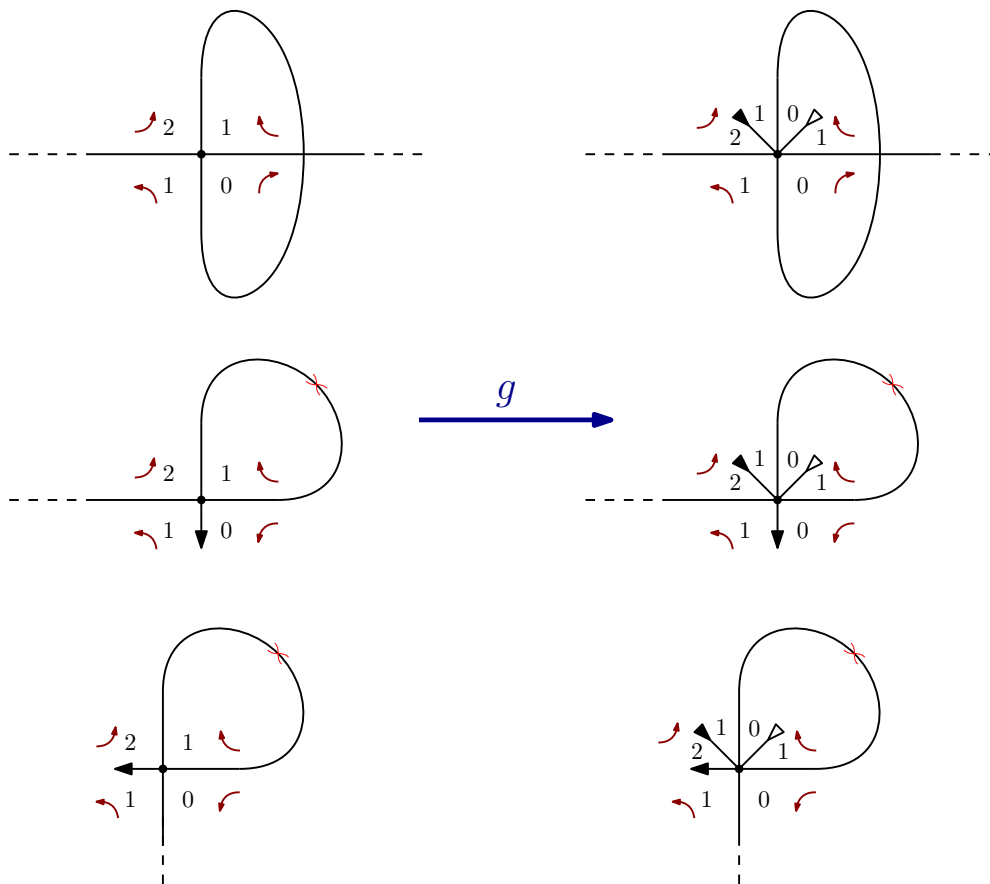


Figure 2.8: Un illustration de l'opération g sur les 3 types possibles de boucle inclinée d'un schéma désétiqueté réellement enraciné. La croix rouge sur une arête indique que l'arête a un twist égal à -1 .

On note $\mathcal{C}_{g(s)}$ la famille des cœurs enracinés sur le schéma, qui ont $g(s)$ comme schéma désétiqueté, et dont tous les sommets qui ne font pas partie du schéma ont degré 4. Dans la série C_s^\bullet , la boucle ℓ a toujours poids $B D t_\bullet t_\circ$ (par le lemme 2.3.5); alors que dans la série $C_{g(s)}^\bullet$, la nouvelle boucle $g(\ell)$ a toujours poids B . Puisque, mis à part la boucle et les deux feuilles additionnelle (qui ont deux couleurs différentes), le reste de s et $g(s)$ est identique, on obtient l'équation suivante:

$$C_s^\bullet = D \cdot C_{g(s)}^\bullet.$$

Revenons maintenant au cas où s a k boucles inclinées. En appliquant la même opération g sur chacune de ces k boucles, on obtient:

$$C_s^\bullet = D^k \cdot C_{g(s)}^\bullet.$$

Puisque le fait que s soit 4-valent n'est pas nécessaire à la preuve du théorème 2.4.8, mais qu'on n'utilise que le fait que les demi-arêtes ne peuvent avoir type relatif que 0 ou 1, et que s n'a pas de cycle incliné, on peut appliquer le dit théorème 2.4.8 à $g(s)$, et conclure la preuve du théorème 2.4.15. \square

Le lemme 2.3.3, le théorème 2.2.6, le théorème 2.1.8, et le théorème 1.4.1 permettent alors de conclure:

Théorème 2.4.16. *Soit s un schéma désétiqueté de genre $g \geq 1$ qui a k boucles inclinées, et pas d'autres cycles inclinés.*

La série $\frac{B^{2g} \cdot M_{\bar{s}}}{E^k}$ est rationnelle en les séries d'arbres T_\bullet and T_\circ .

Remarque 4 (perspectives). Les théorèmes 2.4.13 et 2.4.15 donnent des résultats de rationalité plus forts que le théorème 1.2.5 pour les schémas qui n'ont pas de cycles incliné, ou qui n'ont que des boucles inclinées.

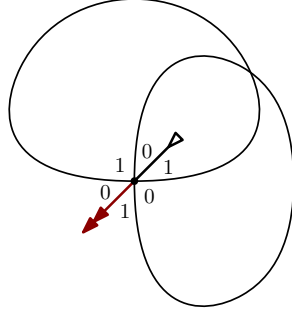
Cependant, le théorème 2.3.8 indique qu'il existe également des schémas qui ont des cycles inclinés de longueur 2. Il serait donc souhaitable de trouver une opération semblable à la fonction g décrite dans la preuve du théorème 2.4.15 que l'on pourrait appliquer aux cycles inclinés de longueur 2, de manière à obtenir un résultat universel de rationalité de la série C_s .

2.5 Extension au cas des hexangulations biparties

Cette section traite d'un travail mené en collaboration avec Baptiste Louf.

Dans les sections 2.3 et 2.4, on a appliqué les résultats bijectifs pour obtenir des résultats énumératifs concernant les cartes 4-valentes bicoloriables, et donc, grâce au théorème 1.4.1, les cartes quelconques. Cependant les résultats des sections 2.1 et 2.2 concernent toutes les cartes bicoloriables, et il existe des résultats énumératifs comparables concernant ces familles de cartes (voir notamment le théorème 1.2.8), que l'on pourrait vouloir retrouver en employant la même méthode.

Dans cette section, on s'intéresse donc à la famille de carte qui semble être la plus simple après les cartes 4-valentes, à savoir les cartes 6-valentes, sur une surface orientable. Malheureusement, il semble que l'approche développée pour les cartes 4-valentes ne permette pas de capturer les propriétés énumératives intéressantes de familles de cartes plus complexes, comme le montre le résultat suivant:


 Figure 2.9: Un schéma désétiqueté 6-valent, dénoté s_0 .

Théorème 2.5.1. *La série des cartes 6-valentes sur le tore à g trous, dénotée M_g^* , n'est pas rationnelle par schéma¹ en la série d'arbres $T^*(t)$.*

Preuve. Pour prouver le théorème 2.5.1, on va montrer que la série $M_{s_0}^*(t)$, où s_0 est le schéma désétiqueté représenté dans la figure 2.9, n'est pas rationnelle en la série d'arbres $T^*(t)$.

On distingue $\binom{5}{2,2,1} = 30$ types de sommets de degré 6 et de degré intérieur 2, que l'on classe en fonction de l'évolution des étiquettes relatives le long de la branche. Plus précisément, il existe 1, 6, 16, 6, et 1 types de sommets tels que les étiquettes relatives varient de 2, 1, 0, -1 , et -2 le long de la branche.

Afin d'encoder les branches d'une carte 6-valentes, on étudie donc un nouveau type de marches, qu'on appelle les *marches de Motzkin à grand pas*, qui ont 1 type de pas de hauteur 2, 6 types de pas de hauteur 1, 16 types de pas de hauteur 0, 6 types de pas de hauteur -1 , et 1 type de pas de hauteur -2 .

Comme dans le lemme 2.3.4, on donne un poids $t^{\frac{1}{2}}$ à chaque bourgeon, de telle sorte que chaque sommet d'une branche a poids t^2 .

On note D_1 la série génératrice des marches de Motzkin à grand pas, qui finissent à hauteur -1 , et sont positives avant leur dernier pas. Notons que de telles marches finissent nécessairement par un pas -1 ou un pas -2 . On note D_2 la série génératrice des marches de Motzkin à grand pas, qui finissent à hauteur -2 , et sont positives avant leur dernier pas. Notons que de telles marches finissent nécessairement par un pas -2 . On note B la série génératrice des marches de Motzkin à grand pas qui finissent à hauteur 0.

Les équations de décomposition de ces séries de marches peuvent s'écrire:

$$\begin{cases} D_1 &= t^2 \cdot (6 + 16D_1 + 6(D_1^2 + D_2) + D_1^3 + 2D_1D_2) \\ D_2 &= t^2 \cdot (1 + 16D_2 + 6D_1D_2 + (D_1^2 + D_2)D_2) \\ B &= 1 + t^2 \cdot \left(16 + 12 \frac{D_1}{1 - D_2} + 2 \left(D_2 + \frac{D_1^2}{1 - D_2} \right) \right) \cdot B \end{cases}$$

On peut éliminer la variable D_1 de ces équations et écrire:

$$\begin{cases} t^2 &= \frac{D_2 \cdot (1 - D_2)^2}{D_2^4 + 14 D_2^3 + 6 D_2^2 + 14 D_2 + 1} \\ B &= \frac{(D_2^4 + 14 D_2^3 + 6 D_2^2 + 14 D_2 + 1) \cdot (1 - D_2)}{D_2^5 - 3 D_2^4 - 34 D_2^3 - 34 D_2^2 - 3 D_2 + 1} \end{cases}$$

¹dans le sens où la restriction de cette série à la série des cartes ayant un schéma donné n'est pas toujours rationnelle.

Par élimination de la variable D_2 , on obtient alors:

$$(162000t^{10} - 97200t^8 + 21240t^6 - 2016t^4 + 77t^2 - 1) \cdot B^4 + (180t^4 - 36t^2 + 1) \cdot B^2 - 9t^2 = 0$$

Par conséquent, la série génératrice B^2 est algébrique de degré 2 (et non pas rationnelle comme on l'aurait espéré). Or, la série génératrice C_{s_0} peut s'écrire $t^2 B^2$, et n'est donc pas rationnelle. \square

Chapitre 3

Multitriangulations sur une surface quelconque

3.1 Introduction

Les triangulations sont des cartes dont toutes les faces sont de degré 3. Il s'agit d'une des familles de cartes les plus simples et les plus étudiées à la fois.

D'un point de vue structurel, les ensembles sans croisements d'arcs entre des points marqués sur le bord d'une surface donnée forment un complexe simplicial pur et simple, dont les facettes sont des triangulations. En particulier, les triangulations admettent une opération de flip naturelle, qui consiste à échanger un arc a avec l'autre diagonale du quadrangle formé des deux triangles qui contiennent a . Ces propriétés structurelles sont par exemple utilisées pour générer des exemples intéressants d'algèbres amassées dont la structure combinatoire est tirée des triangulations de surface et des flips qui les relient.

Dans ce chapitre, on appelle *triangulation* un ensemble, maximal et sans croisement, d'arcs reliant un certain nombre de points placés sur le bord de la surface. Une direction de recherche intéressante consiste à considérer au lieu de cela les ensembles maximaux d'arcs qui n'ont «pas trop» de croisements. Il existe alors plusieurs manières de restreindre les croisements. On peut par exemple imposer que les arcs forment au plus ℓ croisements au total, ou qu'il n'existe pas $\ell + 2$ arcs qui se croisent deux à deux, ou encore qu'un arc donné ne croise pas plus de ℓ arcs. Toutes ces conditions traduisent des restrictions qui forcent le graphe d'intersection des arcs à être un «petit graphe». En particulier, elles correspondent à un graphe d'intersection ayant au plus ℓ arêtes, ou qui n'a pas de $(\ell + 2)$ -clique, ou de degré maximal au plus ℓ . Remarquons que toutes ces restrictions mènent aux triangulations classiques quand $\ell = 0$. La première (au plus ℓ croisements) a été étudiée en détail dans [PR14]. On s'intéresse dans ce chapitre (et dans le chapitre 1) à la deuxième restriction, qui a déjà été considérée dans la littérature dans le cas du disque.

Une k -*triangulation* d'un n -gone convexe est un ensemble maximal de diagonales sans $(k + 1)$ -croisement, c'est-à-dire sans ensemble de $k + 1$ diagonales qui se croisent deux à deux. Les k -triangulations ont été introduites dans [CP92] et particulièrement étudiées dans [Nak00, DKM02, Jon05, Jon03, SS12, PS09]. Elles satisfont de fortes propriétés structurelles, qui généralisent naturellement des propriétés classiques des triangulations d'un n -gone convexe (qui correspondent au cas $k = 1$):

1. Une k -triangulation du n -gone est composée de $k(2n-2k-1)$ diagonales [CP92, Nak00, DKM02].
2. Toute diagonale de longueur au moins $k+1$ peut être flippée, et le graphe de flips est régulier et connexe [Nak00, DKM02].
3. Toute k -triangulation se décompose en un complexe de k -étoiles [PS09].
4. L'ensemble des k -triangulations du n -gone est énuméré par un déterminant de nombres de Catalan [Jon05, Jon03]. Il est donc en bijection avec certaines familles de k -uplets de chemins de Dyck qui ne se croisent pas [SS12].

L'objectif de ce travail est d'introduire une bonne notion de k -triangulations sur une surface, de telle sorte que les propriétés (1) à (3) ci-dessus soient vérifiées (notons que, puisqu'il y a une infinité de k -triangulations pour toute surface qui n'est pas un disque, le résultat énumératif (4) sera naturellement perdu). On part donc d'une surface \mathcal{S} à bords et on place des points sur ses bords. On considère alors des ensembles sans $(k+1)$ -croisement d'arcs (à homotopie près) qui relient des points marqués. La bonne notion de $(k+1)$ -croisement requiert de considérer le revêtement universel $\bar{\mathcal{S}}$ de la surface \mathcal{S} . En particulier, un $(k+1)$ -croisement est la projection d'un ensemble de $k+1$ arcs qui se croisent deux à deux dans le revêtement universel $\bar{\mathcal{S}}$. La subtilité de cette définition est qu'il existe des ensembles de $k+1$ arcs qui se croisent, mais qui n'admettent pas de représentants qui se croisent deux à deux dans le revêtement universel $\bar{\mathcal{S}}$. Armé de cette solide notion de k -triangulation de \mathcal{S} , on va prouver un analogue des propriétés (i) et (iii) ci-dessus, et discuter la propriété (ii).

Notre approche consiste à considérer d'abord les k -triangulations d'un disque ayant un nombre infini de sommets (voir section 3.2). Sous certaines conditions assez faibles qui assurent une sorte de finitude locale, on montre que ces k -triangulations infinies se décomposent en k -étoiles, et admettent une opération de flip. On considère ensuite les k -triangulations de surfaces comme le quotient par des groupes Fuchsien de k -triangulations infinies et périodiques (voir section 3.3). La plupart des propriétés structurelles des k -triangulations sont préservées par ce quotient. Comme on l'expliquera ensuite, la principale difficulté demeure alors la compréhension du comportement de la périodicité lors de l'opération de flip.

3.2 Multitriangulations d'un polygone infini

L'objectif de cette section est d'étudier les k -triangulations d'un polygone infini. La propriété centrale utilisée est l'existence d'une décomposition en k -étoiles établie dans [PS09] dans le cas des k -triangulations du n -gone. En fait, bon nombre des arguments utilisés dans [PS09] peuvent être facilement adaptés au cas du polygone infini en supposant une sorte de finitude locale, que l'on présente maintenant.

3.2.1 Polygones infinis

On donne maintenant une définition plus précise d'un polygone infini (définition 3.2.1) et deux définitions de finitude locale (définitions 3.2.2 et 3.2.3), qui seront utiles plus tard.

Définition 3.2.1. *Un polygone P est un ensemble, fini ou infini, muni d'un ordre cyclique noté $u \prec v \prec w$. Les éléments de P sont appelés des points et les paires d'éléments de P sont appelées des diagonales. Pour toute paire de points $u, w \in P$, on définit l'intervalle $[u, w] := \{v \in P \mid u \leq v \leq w\}$, et de la même manière les intervalles $[u, w[$, $]u, w]$ et $]u, w[$ (avec des crochets ouverts pour les inégalités strictes). Deux diagonales (t, u) et (v, w) de P se croisent si $t \prec v \prec u \prec w$ ou $t \prec w \prec u \prec v$.*

Définition 3.2.2. *Si u et v sont deux points d'un polygone P tels que l'intervalle $]u, w[$ est vide, on dit que u est le prédécesseur de v et que v est le successeur de u , et on écrit $v = u + 1$ et $u = v - 1$. Un polygone P est rangé si chaque point de P a un prédécesseur et un successeur. En particulier, un polygone fini est rangé.*

En particulier, notons qu'un polygone rangé est nécessairement discret, c'est-à-dire que tous ses points sont isolés. Néanmoins la réciproque n'est pas vrai. Par exemple, le sous-ensemble $\{-1\} \cup \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ de \mathbb{R} est discret, mais pas rangé, puisque -1 n'a pas de successeur.

Définition 3.2.3. *Un ensemble D de diagonales d'un polygone P est*

- *E -fini si chaque diagonale de D croise un nombre fini de diagonales de D ,*
- *V -fini si chaque sommet de P est incident à un nombre fini de diagonales de D .*

3.2.2 Multitriangulations infinies

On définit maintenant les k -triangulations d'un polygone infini exactement de la même manière que celles d'un polygone (fini) convexe.

Définition 3.2.4. *Un k -croisement d'un polygone P est un ensemble de k diagonales de P qui se croisent deux-à-deux. Une k -triangulation de P est un ensemble maximal pour l'inclusion de diagonales de P sans $(k + 1)$ -croisement.*

Définition 3.2.5. *La longueur d'une diagonale (u, v) d'un polygone P , notée $\ell(u, v)$ est définie comme le minimum entre $]u, v[$ et $]u, v[$ (remarquons qu'elle peut être infinie). On dit qu'une diagonale (u, v) est k -pertinente (resp. k -négligeable, resp. une diagonale du k -bord) si elle vérifie $\ell(u, v) > k$ (resp. $\ell(u, v) < k$, resp. $\ell(u, v) = k$).*

Remarque 5. Remarquons qu'une diagonale contenue dans un $(k + 1)$ -croisement est nécessairement k -pertinente. Par conséquent, une k -triangulation contient au moins toutes les diagonales k -négligeables et du k -bord.

Exemple 1. La figure 3.1 donne un exemple de 2-triangulation d'un polygone infini rangé. Dans toutes les images, on ne représente les diagonales que jusqu'à une certaine profondeur, et on invite le lecteur à compléter l'image si nécessaire.

Comme observé dans [PS09], de nombreuses propriétés combinatoires des k -triangulations découlent naturellement de la structure de leur décomposition en k -étoiles, qui généralise les triangles dans les triangulations.

Définition 3.2.6. *Une k -étoile d'un polygone P est un ensemble de diagonales de P de la forme $\{(s_i, s_{i+k}) \mid 0 \leq i \leq 2k\}$, où $s_0 \prec \dots \prec s_{2k}$ (les indices sont modulo $2k + 1$).*

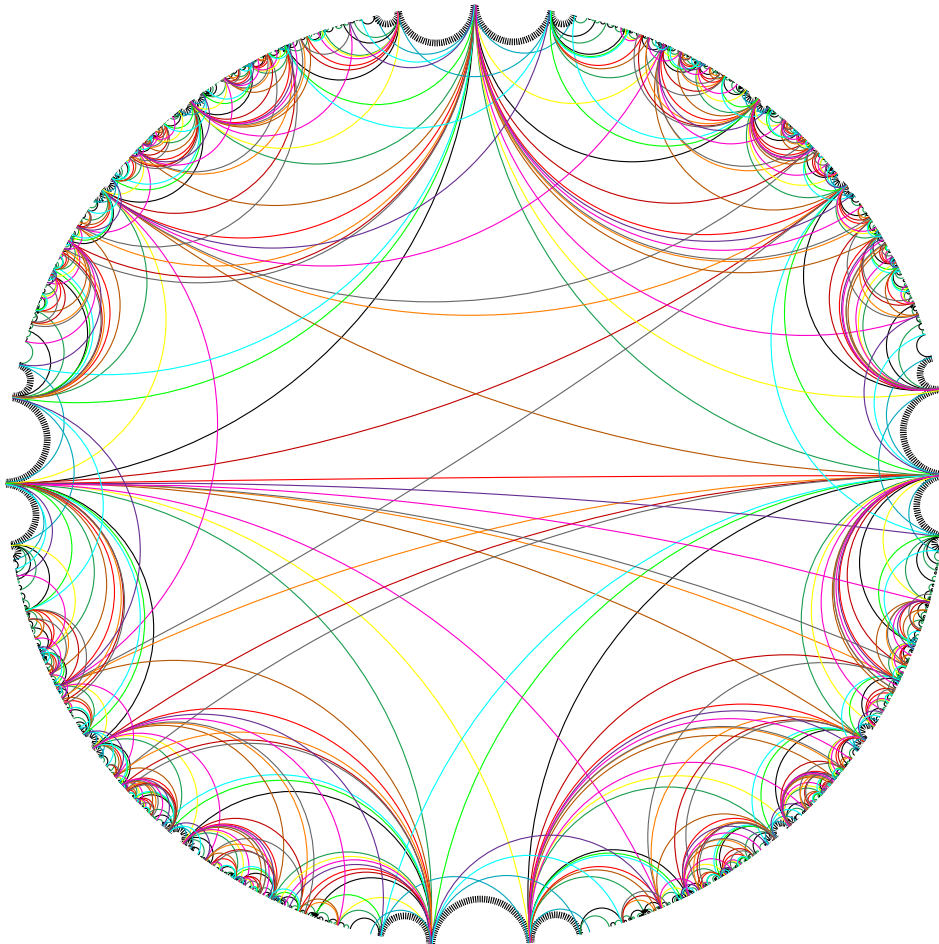


Figure 3.1: Une 2-triangulation d'un polygone infini.

Définition 3.2.7. *Un angle d'un ensemble D de diagonales d'un polygone P est une paire de diagonales de la forme $\{(u, v), (v, w)\}$ avec $u \prec v \prec w$ et tel que D ne contient aucune diagonale de la forme (v, t) avec $w \prec t \prec u$. L'angle est noté $\angle(u, v, w)$, et on dit que v est l'apex de $\angle(u, v, w)$. Un angle est k -pertinent si chacune de ses deux diagonales est soit k -pertinente soit du k -bord.*

L'une des contributions de ce travail est de prouver le théorème structurel suivant, qui concerne la structure des k -triangulations infinies et étend le résultat de [PS09].

Théorème 3.2.8. *Soit T une k -triangulation E -finie d'un polygone rangé P . Alors:*

1. *Tout angle k -pertinent de T est contenu dans une unique k -étoile de T .*
2. *Toute diagonale k -pertinente (resp. du k -bord, resp. k -négligeable) de T est contenue dans exactement deux (resp. une, resp. aucune) k -étoiles de T .*
3. *Pour toute diagonale k -pertinente e de T , il existe une unique diagonale f qui n'est pas dans T et telle que $T \Delta \{e, f\}$ est une autre k -triangulation de P (où Δ dénote la différence symétrique). De plus, la diagonale f ne dépend que des deux k -étoiles de T qui contiennent e .*

Preuve. On reprend la structure de preuve développée dans [PS09] dans le cas des k -triangulations d'un polygone fini. Les arguments qui y sont utilisés n'utilisent

jamais le fait que le polygone est fini, mais seulement l'existence d'un successeur et d'un prédécesseur (assurée ici par le fait que le polygone est rangé), et l'existence d'une diagonale dite *maximale* croisant un angle (assurée ici par la E -finitude de la k -triangulation).

La preuve se décompose alors en cinq étapes successives:

- on commence par décrire les $(k - 1)$ -croisements qui croisent un angle, et par montrer que sous les hypothèses du théorème ils possèdent un maximum.
- on montre que tout angle k -pertinent appartient à une k -étoile.
- on montre que toute diagonale k -pertinente appartient à deux k -étoiles.
- on étudie la position relative de deux k -étoiles.
- on montre qu'une diagonale k -pertinente peut être flippée. □

Exemple 2. La figure 3.2 illustre la décomposition en 2-étoiles de la 2-triangulation de la figure 3.1.

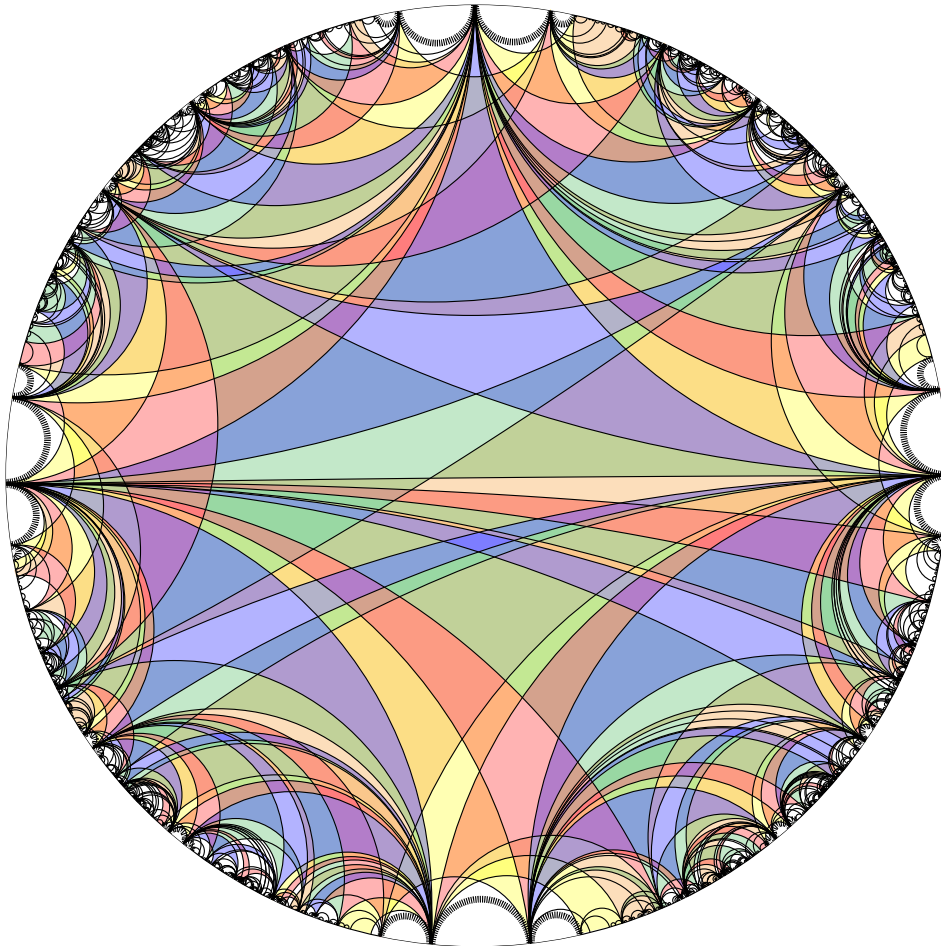


Figure 3.2: La décomposition en 2-étoiles de la 2-triangulation de la figure 3.1.

3.3 Multitriangulations d'une surface quelconque

L'objectif de cette section est de fournir une bonne définition des multitriangulations de surface, et de discuter certaines de leurs propriétés. La définition naïve (dans laquelle on interdit $k + 1$ arcs de la surface de se croiser deux-à-deux) engendre des

objets au comportement peu intéressant, et on utilise donc le revêtement universel pour proposer une meilleure définition.

3.3.1 Surfaces et revêtement universel

Définition 3.3.1. *On considère une surface connexe \mathcal{S} ayant des bords et un ensemble V de points marqués sur le bord. Un arc de \mathcal{S} est une courbe sur \mathcal{S} qui relie deux points de V et dont l'intérieur est distinct du bord de \mathcal{S} . On considère les arcs à homotopie près, relativement à leur extrémités, et on interdit les arcs homotopiques à un segment du bord de \mathcal{S} .*

Dans cette section, on utilise la représentation des surfaces comme quotients du plan hyperbolique par les groupe Fuschien. Comme on n'utilisera que les aspects combinatoires de cette description, on prend la liberté de rester assez informel sur cette représentation. Toute surface \mathcal{S} peut être construite à partir d'un polygone P en recollant certaines de ses arêtes (les arêtes du polygone qui ne sont pas recollées forment le bord de la surface \mathcal{S}). Dans le cas où la surface est de genre $g > 1$ et n'a pas de bord, il existe un sous-groupe Γ d'isométries du disque hyperbolique \mathbb{D} dont le polygone P est le domaine fondamental, et tel que la surface \mathcal{S} est isomorphe au quotient \mathbb{D}/Γ . Le disque \mathbb{D} est le *revêtement universel* de la surface \mathcal{S} . Si la surface a des bords, on utilise une représentation similaire. On plonge P dans le plan hyperbolique \mathbb{D} , et on considère le sous-groupe Γ des isométries du disque \mathbb{D} généré par les identifications des arêtes de P dont le recollement engendre la surface \mathcal{S} . Le revêtement universel de la surface \mathcal{S} est alors le sous-ensemble $\bar{\mathcal{S}}$ du disque hyperbolique \mathbb{D} pavé par les images de P par Γ . On note $\pi : \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ la projection du revêtement universel $\bar{\mathcal{S}}$ vers la surface \mathcal{S} . Cette représentation est illustrée par exemple dans la figure 3.3.

3.3.2 k -croisement, k -étoile et k -triangulations sur une surface quelconque

Un point de \mathcal{S} est nécessairement situé sur un bord de \mathcal{S} , et correspond à une infinité de points de $\bar{\mathcal{S}}$, situés sur le bord du disque. Notons également qu'une diagonale dans \mathcal{S} correspond à une infinité de diagonales dans $\bar{\mathcal{S}}$. On définit les k -croisements, les k -étoiles et les k -triangulations d'une surface \mathcal{S} en projetant sur \mathcal{S} les objets correspondants dans le revêtement universel $\bar{\mathcal{S}}$.

Définition 3.3.2. *Soient \mathcal{S} une surface, Γ le sous-groupe d'isométries du plan hyperbolique \mathbb{D} correspondant, $\bar{\mathcal{S}}$ le revêtement universel de \mathcal{S} , et $\pi : \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ la projection canonique correspondante.*

1. *Un k -croisement sur \mathcal{S} est la projection $\pi(\bar{a}_1), \dots, \pi(\bar{a}_k)$ d'un k -croisement $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$ de $\bar{\mathcal{S}}$.*
2. *Une k -étoile de \mathcal{S} est la projection $\pi(\bar{S})$ d'une k -étoile \bar{S} de $\bar{\mathcal{S}}$.*
3. *Une k -triangulation de \mathcal{S} est la projection $\pi(\bar{T})$ d'une k -triangulation \bar{T} de $\bar{\mathcal{S}}$ qui soit Γ -periodique.*

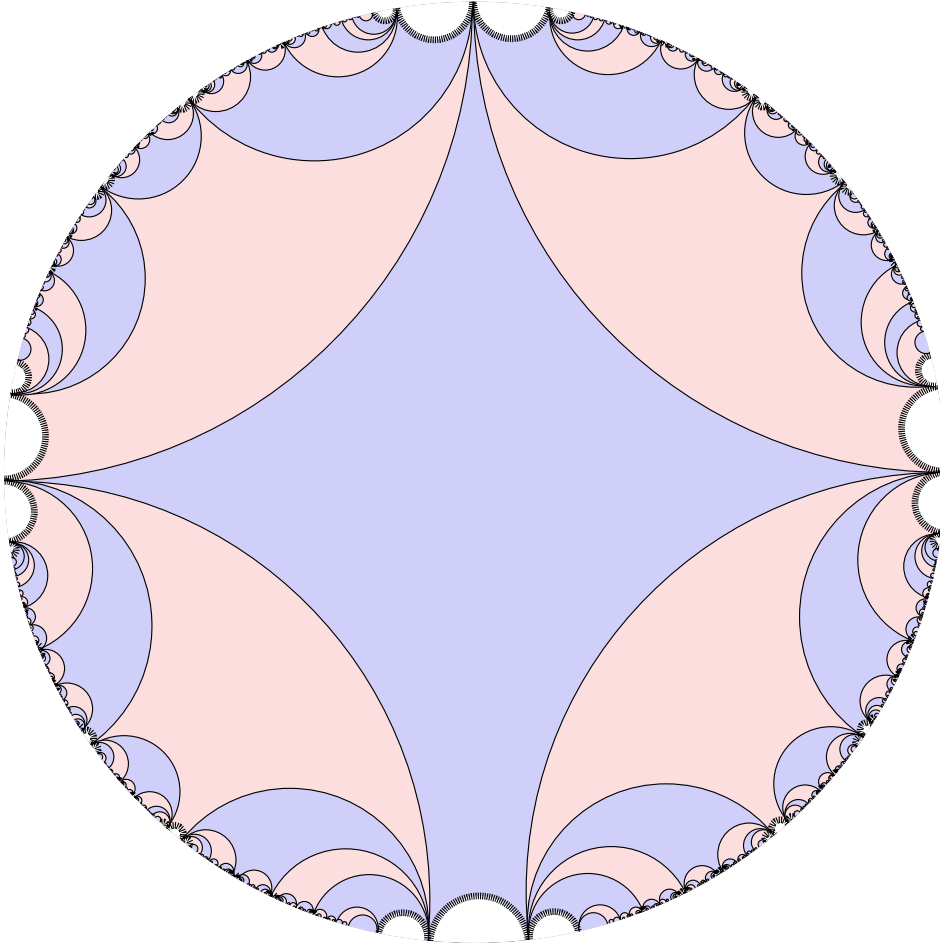


Figure 3.3: Le tore à 1 trou et 1 bord, représenté comme le quotient de son revêtement universel par un groupe Fuschien.

Remarque 1. Attention: un k -croisement n'est PAS un ensemble d'arcs de \mathcal{S} qui se croisent deux à deux. En particulier, il existe des ensembles d'arcs qui se croisent deux à deux dans \mathcal{S} qui n'admettent pas de représentants dans $\bar{\mathcal{S}}$ qui se croisent deux à deux. L'exemple le plus simple qu'on puisse donner est celui d'un arc qui s'intersecte lui-même, dont les différents représentants peuvent ne pas se croiser.

Remarque 2. Par définition, toute k -triangulation d'une surface \mathcal{S} est un ensemble maximal d'arcs de \mathcal{S} sans $(k + 1)$ -croisement (au sens de la définition 3.3.2 (i)). On conjecture que cela constitue en fait une caractérisation des k -triangulations de \mathcal{S} . En effet, on peut remarquer que le relèvement d'un tel ensemble T maximal d'arcs de \mathcal{S} sans $(k + 1)$ -croisement dans son recouvrement universel est par définition un ensemble \bar{T} de diagonales de $\bar{\mathcal{S}}$ sans $(k + 1)$ -croisement, mais il n'est pas évident que cet ensemble est nécessairement maximal.

Le lemme suivant permet de faire le lien entre cette section et la section précédente.

Lemme 3.3.3. *Si T est une k -triangulation de \mathcal{S} , la k -triangulation \bar{T} correspondante dans $\bar{\mathcal{S}}$ est une k -triangulation E -finie d'un polygone rangé.*

3.3.3 Propriétés structurelles

On s'intéresse maintenant aux propriétés structurelles des k -triangulations d'une surface. Notre approche se base à nouveau sur le concept des k -étoiles. Le théorème suivant est une conséquence du lemme 3.3.3 et du théorème 3.2.8.

Théorème 3.3.4. *Tout arc k -pertinent (resp. du k -bord, resp. k -négligeable) d'une k -triangulation T d'une surface \mathcal{S} est contenue dans exactement 2 (resp. 1, resp. 0) k -étoiles de T .*

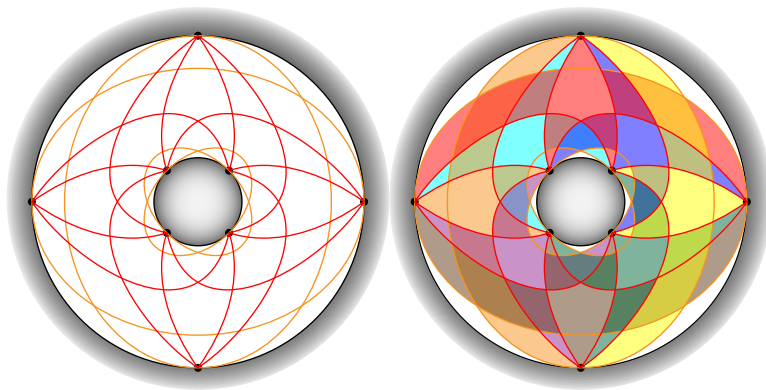


Figure 3.4: À gauche, une 2-triangulation d'un cylindre (les arcs 2-pertinents sont dessinés en rouge, et ceux du 2-bord en orange), et à droite sa décomposition en 2-étoiles.

Le théorème suivant est basé sur une opération de découpage d'une k -triangulation le long d'un arc pertinent, et sur l'étude attentive de ses conséquences énumératives.

Théorème 3.3.5. *Soit \mathcal{S} une surface de genre g ayant b bords et n points marqués sur le bord, de sorte que b° bords n'aient pas de points marqués. Alors toute k -triangulation de \mathcal{S} possède précisément $n - b^\circ + 2k(2g + b - 2)$ k -étoiles et $k(n - b^\circ) + k(2k + 1)(2g + b - 2)$ arcs k -pertinents.*

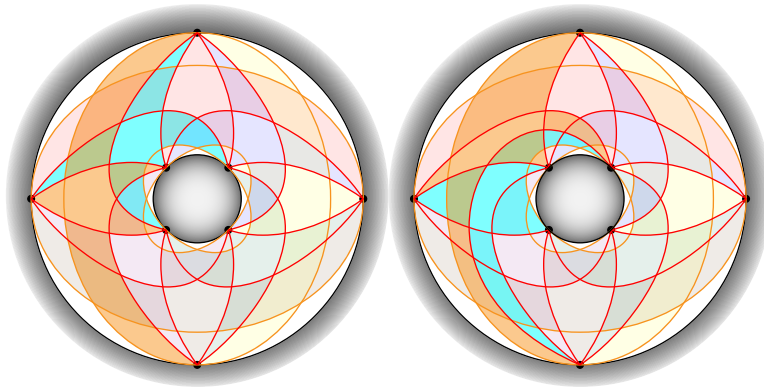


Figure 3.5: Le flip d'un arc 2-pertinent d'une 2-triangulation d'un cylindre.

Enfin, on énonce une dernière propriété concernant l'existence de flips dans les multitriangulations de surface, sous la forme d'une conjecture, dont l'étude plus approfondie motivera le reste de ce chapitre.

Conjecture 3.3.6. *Tout arc k -pertinent d'une k -triangulation d'une surface quelconque peut être flippé.*

Pour flipper un arc k -pertinent a d'une k -triangulation T d'une surface \mathcal{S} , l'idée naturelle consiste à flipper toutes les copies \bar{a} de l'arc a dans la k -triangulation \bar{T} du revêtement universel $\bar{\mathcal{S}}$. Néanmoins, cela ne fonctionne que si, à tout instant, le flip d'une copie \bar{a} dans \bar{T} ne modifie pas le flip d'une autre copie de a dans \bar{T} . On dit que le flip de a dans T est *séquentiel* si cette méthode fonctionne, et *non-séquentiel* sinon.

Notre approche de la conjecture 3.3.6 consisterait à montrer que tout flip non-séquentiel d'une k -triangulation d'une surface \mathcal{S} peut se réduire au flip non-séquentiel d'une k -triangulation du demi-cylindre \mathcal{C} . Pour cela, on considère un arc k -pertinent a d'une k -triangulation T de \mathcal{S} , et on note S et S' les deux k -étoiles de T qui contiennent a . On distingue alors deux cas :

- Si S et S' sont distinctes, alors a n'apparaît qu'une fois dans S et une fois dans S' . On peut montrer en utilisant la section 3.2 que le flip de a est alors séquentiel.
- Supposons au contraire que $S = S'$, de telle sorte que a apparaît deux fois dans S . Soient \bar{a} et \bar{a}' deux copies de a dans une copie \bar{S} de S dans \bar{T} . Soit $\gamma \in \Gamma$ l'isométrie de $\bar{\mathcal{S}}$ tel que $\gamma(\bar{a}) = \bar{a}'$. On considère l'ensemble \bar{U} des arcs des étoiles $\gamma^i(\bar{S})$ pour $i \in \mathbb{Z}$. On applique toutes les identifications de sommets successifs de \bar{U} qui ne décroise aucune paire d'arcs de \bar{U} . Ces identifications peuvent être faites dans n'importe quel ordre. On obtient une k -triangulation \bar{V} d'un polygone infini dont le groupe d'isométries est généré par γ . Par conséquent, \bar{V} est le relèvement d'une k -triangulation V d'un cylindre \mathcal{C} .

Conjecture 3.3.7. *La procédure décrite ci-dessus génère bien une k -triangulation \tilde{V} d'un demi-cylindre. De plus, on peut entièrement comprendre les flips de la k -triangulation T sur la surface \mathcal{S} à partir de ceux de la k -triangulation V sur le demi-cylindre.*

Bien que cette approche ne soit pas encore entièrement fixée, c'est surtout elle qui motive l'étude plus approfondie des k -triangulations du demi-cylindre, qui sera l'objet de la section 3.4.

3.4 Multitriangulations d'un demi-cylindre

Cette section est dédiée aux multitriangulations du demi-cylindre, défini comme suit.

Définition 3.4.1. *Un demi-cylindre est un cylindre qui possède des points marqués sur son bord inférieur, mais pas sur son bord supérieur.*

L'étude des multitriangulations du demi-cylindre a deux objectifs:

- celles-ci présentent des exemples de flips non-séquentiels,
- en admettant la conjecture 3.3.7, elles suffisent à comprendre tout flip non séquentiel d'une k -triangulation d'une surface quelconque.

3.4.1 Demi-cylindre avec deux points marqués

On s'intéresse tout d'abord au cas des multitriangulations du demi-cylindre qui n'ont que deux points marqués. Cela fournit déjà des exemples intéressants de flips non séquentiels, et nous permet de développer des notations et des représentations (figures 3.6 et 3.7).

On considère le demi-cylindre à deux points $\{u, v\}$. Son revêtement universel est une bande infinie, avec des points u_j, v_j pour $j \in \mathbb{Z}$ qui s'alternent sur le bord inférieur (de telle sorte que $u_j + 1 = v_j = u_{j+1} - 1$).

Pour tout mot $w := w^1 \dots w^k \in \{u, v\}^k$ (avec $k \geq 1$), on note \bar{T}_w l'ensemble des arcs de \mathcal{S} constitué:

- des arcs $(w_j^i, w_j^i + k + i)$ pour tout $i \in [k]$ et $j \in \mathbb{Z}$,
- des arcs du k -bord et k -négligeables $(\epsilon_j, \epsilon_j + i)$ pour $i \in [k]$, $\epsilon \in \{u, v\}$ et $j \in \mathbb{Z}$.

Une illustration des ensembles \bar{T}_{uvu} et \bar{T}_{uuu} est ainsi fournie dans la figure 3.6.

Une étude attentive permet de montrer la propriété suivante:

Proposition 3.4.2. *L'ensemble des k -triangulations de \mathcal{S} est $\{T_w \mid w \in \{u, v\}^k\}$.*

Et par conséquent, on obtient l'existence des flips.

Proposition 3.4.3. *Tout arc d'une k -triangulation du cylindre à deux points peut être flippé. En particulier, flipper l'arc de T_w correspondant à la i -ième lettre de w induit la k -triangulation $T_{w'}$, où w' est le mot obtenu à partir de w en changeant sa i -ième lettre.*

Remarque 3. Dans la proposition 3.4.3, le flip est séquentiel si et seulement si $i = 1$.

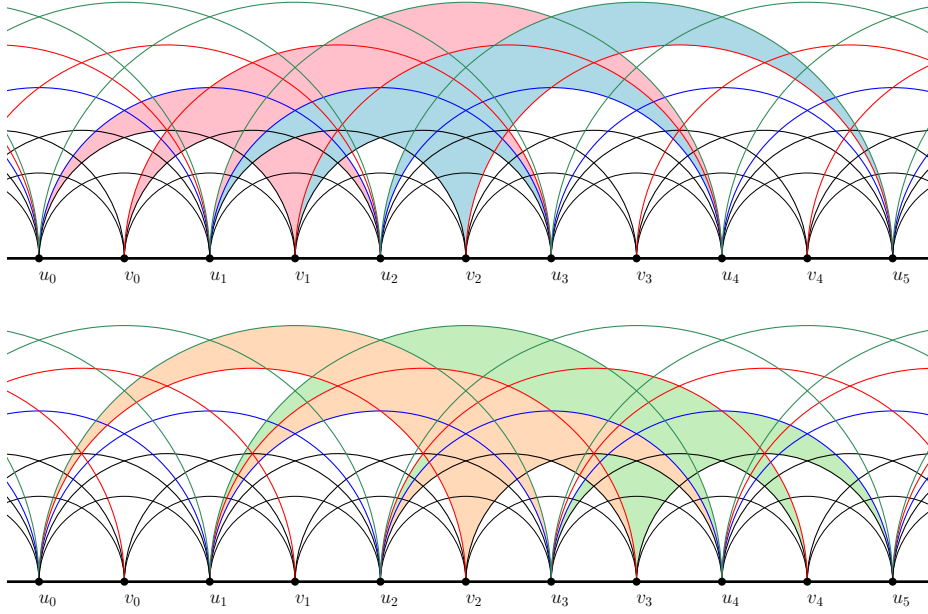


Figure 3.6: Deux 3-triangulations \bar{T}_{uvu} (haut) et \bar{T}_{uvu} (bas) d'un demi-cylindre, reliées par un flip non séquentiel, et représentées dans leur revêtement universel. L'arc $u_i v_{i+2}$ du demi-cylindre est flippé en l'arc $v_i u_{i+3}$. Les diagonales du revêtement appartiennent à deux copies successives de la même 3-étoile.

3.4.2 Demi-cylindre quelconque

On considère maintenant un demi-cylindre arbitraire \mathcal{C}_n ayant n points $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ sur le bord inférieur, et pas de points sur le bord supérieur. Pour tout point $v_i \in \mathcal{C}_n$, on dénote $(v_i^j)_{j \in \mathbb{Z}}$ ses copies successives sur le revêtement universel $\bar{\mathcal{C}}_n$ (qui est une bande infinie). L'objectif de cette section est de discuter la conjecture suivante, qui étend la propriété 3.4.3:

Conjecture 3.4.4. *Tout arc k -pertinent d'une k -triangulation du demi-cylindre \mathcal{C}_n peut être flippé.*

Pour discuter cette conjecture, il est nécessaire d'introduire une meilleure représentation des arcs d'un demi-cylindre \mathcal{C}_n , illustrée dans la figure 3.7.

Soit A un ensemble d'arêtes k -pertinentes ou du k -bord de \mathcal{C}_n sans $(k+1)$ -croisement, contenant au moins les arcs du k -bord, et a un arc k -pertinent de A . On note l_a , i_a et j_a la longueur, et l'indice des extrémités gauches et droites de a . Remarquons que $l_a > k$ car a est k -pertinent, et que $l_a \leq kn$ car A ne contient pas de $(k+1)$ -croisement. Remarquons également que $i_a + l_a - j_a = 0$ (dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) par définition.

On représente \mathcal{C}_n par une grille cylindrique G de largeur n et de hauteur $kn - n + 1$, dont les colonnes, indexées par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, représentent les points de \mathcal{C}_n , et dont les lignes, indexées par $[k, kn]$, représentent les longueurs d'arêtes. On représente chaque arc a de A par un symbole \bullet en position (i_a, l_a) dans G . On munie la grille G d'un réseau orienté, qui a une arête du point (i, l) au point $(i-1, l+1)$, et une arête du point $(i, l+1)$ au point (i, l) , pour $l < kn$ et $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ainsi qu'une arête du point (i, kn) au point (i, kn) pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Cette représentation est appelée la *représentation en H* .

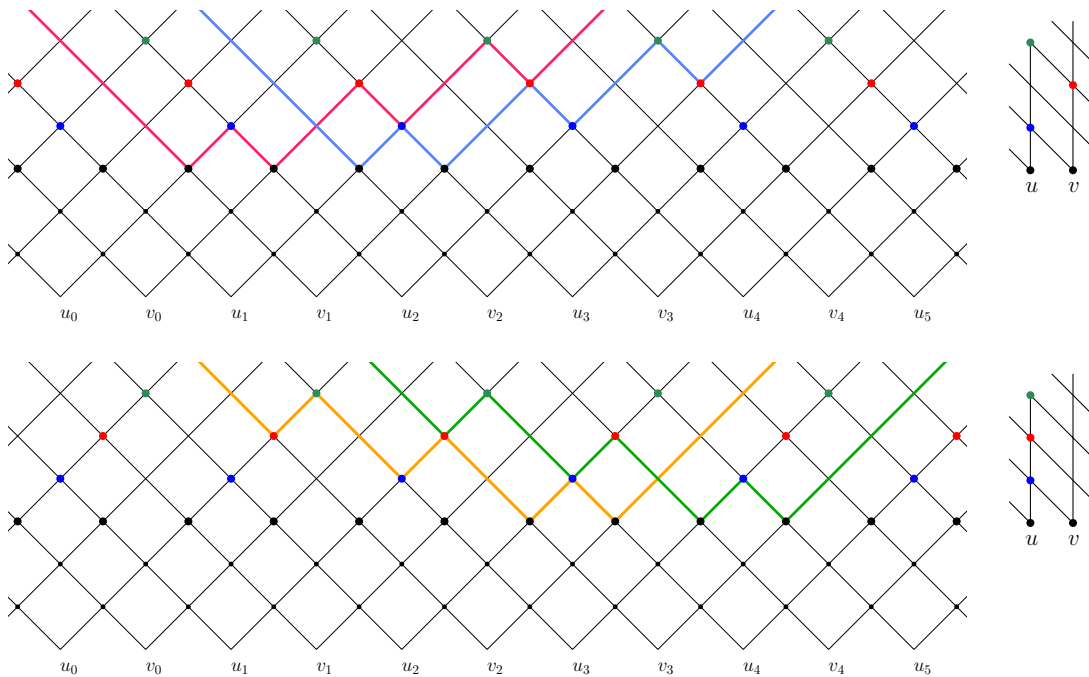


Figure 3.7: La représentation en V (à gauche) et en H (à droite) des 3-triangulations de la figure 3.6.

Le *tour antihoraire* d'une face f de A partant d'un arc a est décrit par la procédure suivante:

1. si a est au dessus de f , a devient le plus long arc partant de v_{i_a} et ayant longueur inférieure à l_a . Ceci est bien défini car A contient le k -bord.
2. sinon, si l_a est la plus grande longueur d'un arc finissant sur le point v_{j_a} , on affecte à a la plus longue arête partant du point v_{i_a} .
3. Sinon, on affecte à a le plus petit arc finissant sur le point v_{j_a} et ayant longueur supérieure à l_a .

Si cette procédure ne revient pas sur l'arête a initiale, cela signifie que la face correspondante n'est pas finie, mais infinie et périodique.

On peut facilement effectuer cette procédure sur la représentation en H , en suivant les arêtes du réseau (voir 3.7 à droite). On appelle *drift* de la face f l'entier δ_f égal à la différence entre la longueur totale des arcs de C_f qui sont au-dessus et au-dessous de f . Alors f est finie si et seulement si $\delta_f = 0$.

Conjecture 3.4.5. *Un ensemble A d'arcs de \mathcal{C}_n sans $(k+1)$ -croisement est une k -triangulation si et seulement si il a $n-1$ faces, qui ont toutes drift 0 et longueur $2k+1$.*

Soit T une k -triangulation de \mathcal{C}_n , S une k -étoile de T , et a un arc adjacent à S par ses deux côtés. Soit C_S le cycle correspondant à S dans la représentation en H . Soit $C_{S,d}^1$ le sous-cycle de C partant de l'arête sortante supérieure de a , et finissant sur l'arête entrante inférieure de a . Soit $C_{S,d}^2$ le sous-cycle de C partant de l'arête sortante inférieure de a , et finissant sur l'arête entrante supérieure de a .

Conjecture 3.4.6. *Les cycles $C_{S,d}^1$ et $C_{S,d}^2$ ont exactement 2 points d'intersection.*

La conjecture 3.4.4 peut être déduite des conjectures 3.4.5 et 3.4.6.

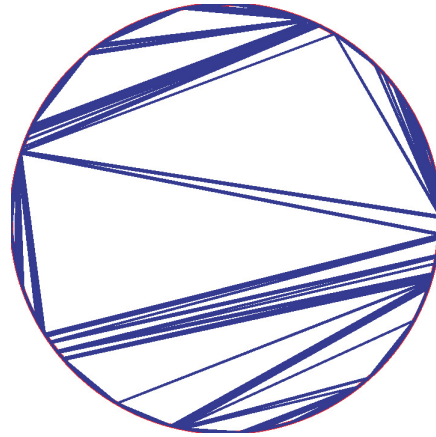


Figure 3.8: Une simulation de la triangulation Brownienne du disque. Figure due à Kortchemski [Kor14]

3.5 Ouvertures probabilistes

Il est intéressant de noter que plusieurs questions d'ordre probabilistes peuvent se poser au sujet des multitriangulations. À ma connaissance, personne ne s'est encore penché sur ce genre de questions. Cela peut certainement être en partie expliqué par l'éloignement thématique entre la communauté combinatoire algébrique qui s'est intéressée aux multitriangulations et la communauté probabiliste.

Aldous [Ald94] étudia en 1994 la limite des triangulations d'un polygone. Plus précisément, il dessine des triangulations de taille n dans le polygone régulier à n côtés dessiné sur le cercle unité. Il montra alors la convergence de ce plongement de la multitriangulation dans le disque, vers un sous-ensemble aléatoire du disque, appelé *triangulation Brownienne du disque*, dont il donna plusieurs propriétés intéressantes, et qu'on peut en fait considérer en quelque sorte comme le dual du plongement dans le disque de l'arbre Brownien, et qui est illustrée dans la figure 3.8.

Suite à Aldous, de nombreux travaux ont été menés concernant cette triangulation Brownienne, et on redirige le lecteur intéressé vers la revue de Curien [Cur14] sur le sujet. Notons néanmoins que la triangulation Brownienne présente une certaine forme d'universalité, et qu'elle est en fait la limite de nombreux modèles d'ensemble de diagonales sans intersections, telles que les p -angulations pour p quelconque, les dissections, ou encore les arbres non croisés. La triangulation Brownienne possède aussi en elle-même des propriétés intéressantes telle que la présence de faces de taille macroscopique, qui sont toujours des triangles.

3.5.1 Grande multitriangulation aléatoire du disque

Au vu de ces travaux, la première question que l'on peut naturellement se poser est la suivante: quid de la multitriangulation Brownienne du disque?

Résultat

Afin de faire un premier pas vers la réponse à cette question, on peut se demander à quoi ressemble une grande multitriangulation aléatoire. La figure 3.9 présente des simulations de grandes multitriangulations du disque.

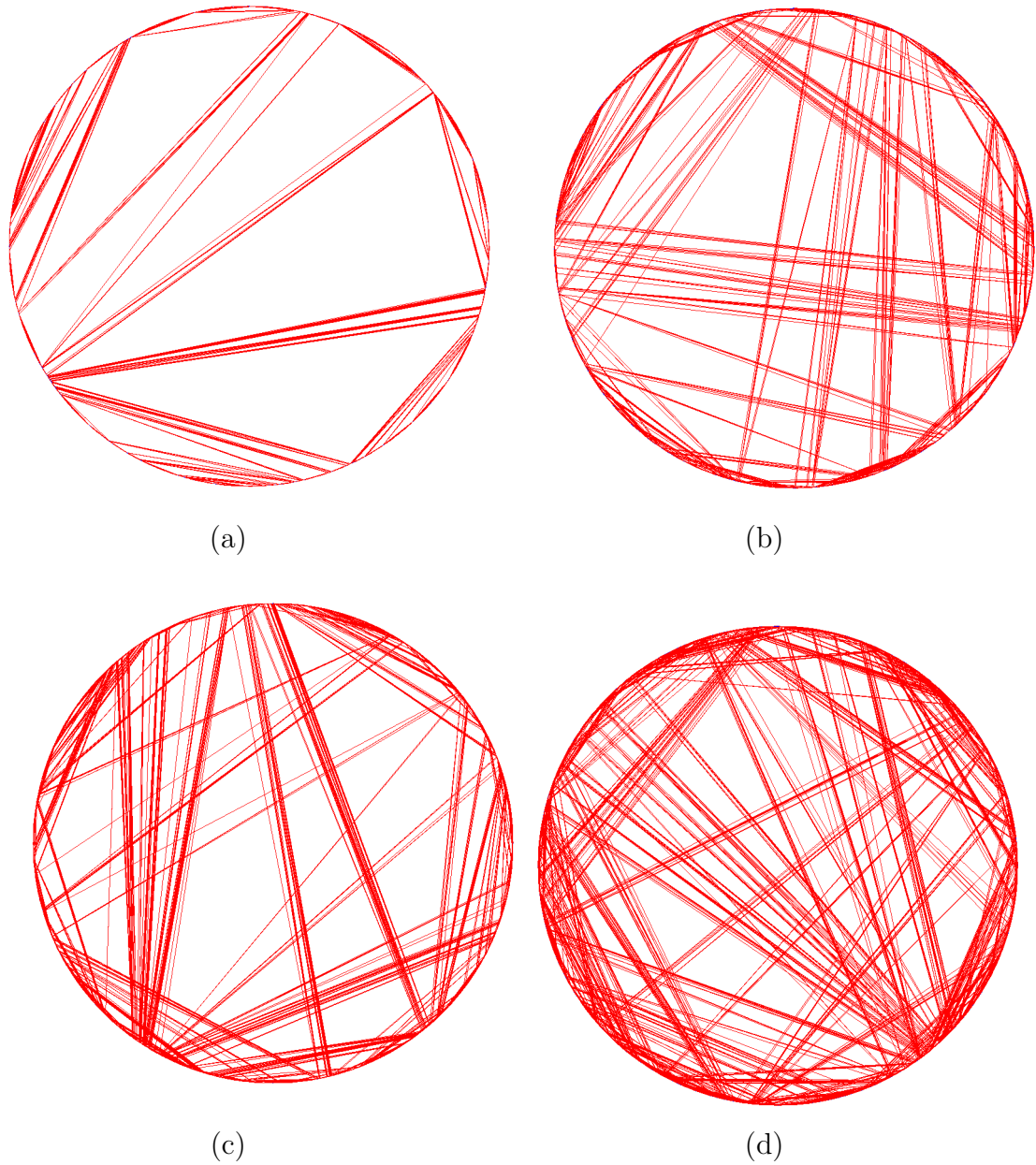


Figure 3.9: Des exemples de grandes multitriangulations aléatoires: une triangulation de taille 5000 (a), une 2-triangulation de taille 1000 (b), une 2-triangulation de taille 5000 (c), et une 3-triangulation de taille 2000 (d).

Notons que dans le cas $k = 1$, on retrouve bien la triangulation Brownienne du disque. Il est intéressant de remarquer que les cas suivants présentent des similitudes avec la triangulation Brownienne, comme la présence de faces macroscopiques, ou encore l'amoncellement de grands nombres de diagonales presque parallèles.

Méthode

Les k -triangulations présentées dans la figure 3.9 sont obtenues de la manière suivante: on part d'une k -triangulation fixée de taille n , et on effectue aléatoirement un grand nombre de flips. Il s'agit d'une marche aléatoire sans mémoire sur le graphe de flips des k -triangulations de taille n , noté G_n . Les résultats cités précédemment assurent que G_n est connexe et $(kn - 2k^2 - k)$ -régulier. Ceci assure que la loi uniforme est vecteur propre de G_n , associé à la valeur propre 1. Le théorème de Perron Frobenius indique qu'il s'agit de la plus grande valeur propre de G_n . Pour s'éviter de devoir montrer que G_n est apériodique, on se donne une faible probabilité de rester sur place à chaque pas de temps.

Les résultats classiques sur les chaînes de Markov permettent alors de montrer que la loi de la marche converge vers la loi uniforme sur toutes les k -triangulations de taille n . Sans chercher à borner formellement le temps de mélange, on effectue un grand nombre de flips, qui permet expérimentalement de bien mélanger la k -triangulation de départ.

3.5.2 Multitriangulation infinies et limites de multitriangulations

Dans l'introduction de son article fondateur sur la triangulation Brownienne du disque, Aldous affirme: «We wish to consider the idea of letting n go to infinity and studying triangulations of the ∞ -gon, i.e. the circle. This question doesn't make much sense as combinatorics, but we can shift viewpoint and consider random triangulations of the n -gon».

Au contraire, la section 3.2 aura on l'espère convaincu le lecteur de la pertinence combinatoire de la notion de (multi)triangulation d'un polygone infini.

Notons que la notion de polygone rangé ne semble pas immédiatement correspondre à la limite de grands polygones. Si l'on prend par exemple la représentation du tore à un trou et un bord sur son revêtement universel (voir figure 3.3), l'ensemble des points du polygone n'est en fait pas tout à fait le cercle, mais plutôt un ensemble dont les coordonnées angulaires, écrites en base 5, peuvent être simplement décrites.

Néanmoins, il serait intéressant d'explorer cette piste plus en profondeur, et de savoir si la notion de multitriangulations du disque qu'on a introduite pourrait fournir des informations sur les (multi)triangulations Browniennes, ou réciproquement.

3.5.3 k -triangulation du disque, $(2k+1)$ -angulations de grand genre

Curien introduit dans [Cur16] une nouvelle famille de triangulations aléatoires infinies du demi-plan, qu'il appelle les *triangulations infinies stochastiques hyperboliques du plan*, qui généralisent un modèle plus courant qu'on appelle *triangulation*

planaire infinie uniforme. En plus d'en étudier les propriétés, il conjecture avec Benjaminini que ces objets peuvent être obtenus comme limites locale des triangulations aléatoires uniformes ayant n sommets et étant de genre $(\theta \cdot n)$; cette conjecture a été récemment démontrée par Budzinski et Louf [BL19].

Une k -triangulation du disque peut aussi être considérée comme une carte, en oubliant son plongement sur le disque, et en ne gardant que l'ordre des arêtes autour de chaque sommet. On appelle cette carte *multitriangulation dépliée*. La surface obtenue a alors naturellement un bien plus grand genre, du fait des nombreux croisements de la représentation dans le disque. Par ailleurs, la décomposition en k -étoiles implique que la carte obtenue, mis à part dans le k -bord, est une $(2k+1)$ -angulation.

En utilisant la formule d'Euler et les résultats énumératifs déjà énoncés, on peut calculer le genre g d'une k -triangulation dépliée, en fonction du nombre n d'arêtes, du nombre m d'arêtes, ou du nombre f de faces¹:

$$\begin{aligned} g &= \frac{k-1}{2k} \cdot m - \frac{k-1}{2} \\ &= (k-1) \cdot n - (k-1)^2 \\ &= (k-1) \cdot f + (k-1) \end{aligned}$$

Les multitriangulations dépliées forment donc un modèle de cartes dans lesquelles le genre est asymptotiquement proportionnel à la taille. Notons qu'elles peuvent ainsi naturellement être considérées comme des cartes hyperboliques, d'une manière indépendante de nos travaux utilisant le recouvrement universel d'une surface.

Il pourrait donc être intéressant d'étudier plus en détail les propriétés des multitriangulations dépliées, et notamment de savoir si ce modèle de carte possède des propriétés similaires aux triangulations de grand genre étudiées dans [BL19].

¹Attention, toutes les faces ne sont pas des $(2k+1)$ -gones, il y a en fait k faces qui correspondent au k -bord.

Part II

Blossoming bijection for pointed maps on any surface

Chapter 1

Blossoming bijection for higher-genus maps

This chapter is extracted from [Lep19], that was published in the Journal of Combinatorial Theory, series A. It was presented in a talk at the conference FPSAC in 2018 in Dartmouth. It was also rewarded the second prize of the "Best Scientific Contribution" of the Computer Science Doctoral School of Université Paris Saclay.

Abstract

In 1997, Schaeffer described a bijection between Eulerian planar maps and some trees. In this work we generalize his work to a bijection between maps on an orientable surface of any fixed genus and some unicellular maps with the same genus. An important step of this construction is to exhibit a canonical orientation for maps, that allows to apply the same local opening algorithm as Schaeffer did.

As an important byproduct, we obtain the first bijective proof of a result of Bender and Canfield from 1991, when they proved that the generating series of maps in higher genus is a rational function of the generating series of planar maps.

1.1 Introduction

A *map* of genus g is a proper embedding of a graph in \mathbb{S}_g , the torus with g holes. In addition to be rich combinatorial objects by themselves, maps have many links with various fields of algebra and mathematical physics (*e.g.* [LZ04, Eyn11]). The probabilistic approach of maps, leading to the definition of continuous surfaces such as the Brownian map, is also a very active domain. The structural study of maps is a deep subject, and it seems that it is always interesting to have a better understanding of maps, given the very diverse related topic.

Planar maps (or maps of genus 0) have been studied extensively since the pioneering work of Tutte in the sixties [Tut63]. In a series of work, Tutte obtained remarkable formulas for many families of maps. His techniques rely on some recurrence relations for maps, obtained through combinatorial decomposition, and some clever manipulations of generating series. They were extended in the late eighties to the case of maps with higher genus by Bender and Canfield, who first obtained the

asymptotic number of maps on any orientable surface of genus g [BC86] and then obtained in [BC91] in 1991 the following stronger result:

Theorem 1.1.1 (Bender and Canfield [BC91]). *For any $g \geq 0$, the generating series $M_g(z)$ of maps of genus g enumerated by edges is a rational function of z and $\sqrt{1 - 12z}$.*

The enumerative results obtained using Tutte’s techniques show some underlying very strong structural properties of maps, and call for bijective explanations. The first such explanation was the bijection of Cori and Vauquelin [CV81]. Indeed, the enumerative formula of planar maps obtained by Tutte has a very simple closed form, that Cori and Vauquelin were the first to explain bijectively in 1981. This work was soon followed by many others, starting with the pioneering work of Schaeffer, in the late 90’s, and was the beginning of the bijective combinatorics of maps.

In this vein, the purpose of this paper is to give a bijective explanation of enumerative results in higher genus. In particular, our main result is the first bijective proof of Théorème 1.1.1, for $g \geq 2$.

In the planar case, Schaeffer exhibits in [Sch97] a constructive bijection between Eulerian planar maps and some so-called *blossoming trees*. The blossoming tree associated to a map is one of its spanning trees, decorated by some *stems*, that enable to reconstruct the “missing edges”. Our work is a generalization of [Sch97] to maps of any genus.

In genus $g > 0$, the natural counterpart of trees are unicellular maps (*i.e.* maps with only one face) and we obtain in this work the following result (the terminology is introduced in Section 1.3.3):

Theorem 1.1.2. *There exists a constructive weight-preserving and genus-preserving bijection between rooted bicolored maps and well-rooted well-labeled well-oriented unicellular blossoming maps.*

Thanks to this theorem, the enumeration of maps boils down to the much easier enumeration of this specific family of unicellular blossoming maps. Using techniques used in particular by Chapuy, Marcus, and Schaeffer in [CMS09], we are able to decompose these unicellular maps into a *scheme* with *branches*. Similarly to [CMS09], the proof of Théorème 1.1.1 then amounts to showing a certain symmetry, that we are able to prove.

Let us now put our work in context of the existing literature. In the planar case, there are numerous bijections between maps and some families of decorated trees. Two main trends emerge in these bijections. Either the decorated trees are some blossoming trees as already described (*e.g.* [CV81, Sch97, BDFG02, PS06]) or the trees are decorated by some integers that capture some metric properties of the maps (*e.g.* [Sch98, BDFG04]). Bijections of the latter type have been successfully extended to higher genus [CMS09, Cha09a, Mie09], and to non-orientable surfaces ([CD17, Bet16]). These techniques (in particular, see [CMS09]), exhibit a decomposition (which is known to be rational by Théorème 1.1.1) of maps into trees. This allows to show in a bijective way that the generating series of maps can be expressed as a rational function of some auxiliary functions U , whose degree of algebraicity is just higher than the enumerative results of Théorème 1.1.1. Note however that, in the case $g = 1$, Chapuy Marcus and Schaeffer [CMS09] were able to carry on the calculation and give a bijective proof of Théorème 1.1.2.

The situation is different in the case of bijections with blossoming trees. As demonstrated by Bernardi [Ber06] in the planar case and generalized by Bernardi and Chapuy [BC11], a map endowed with an orientation of its edges with specific properties can also be viewed (by what can be seen as an opening algorithm) as a map endowed with a spanning unicellular embedded graph (whose genus can be smaller than the genus of the initial surface). This generalizes blossoming bijections to a broader setup where maps come with an orientation, even though the genus of the resulting map is not fixed. To obtain a bijective scheme starting from non-oriented maps, the common strategy will be to find a good way to define a canonical orientation, apply the opening algorithm, and prove that the resulting has the correct genus. This has been done in genus 1 in several recent works; [DGL17] presents a bijection for simple triangulations of genus 1 (with some additional constraints), while [BL17] presents a bijection for essentially 4-connected triangulations. However, our work, which generalizes [Sch97], is the first blossoming bijection that applies to maps in any genus.

In the planar case, the general theory of α -orientations developed by Felsner [Fel04] has been successfully combined with the result of [Ber06] to give general bijective schemes [BF12a, BF12b, AP15], which enable to recover the previously known bijections. It would be highly desirable to obtain systematic bijective schemes in higher genus by combining Bernardi and Chapuy's result together with the theory of c -orientations introduced by Propp [Pro93] or its extension by Felsner and Knauer [FK09]. The main difficulty to tackle would be to characterize the orientations that produce spanning unicellular embedded graph whose genus matches the genus of the original surface. The orientation we choose in our work does produce such embedded graphs, and our work can hence be seen as an important step in that direction.

The bijection of Schaeffer [Sch97] for Eulerian maps was extended by Bouttier, di Francesco and Guitter [BDFG02] to general maps. This work was then revisited by Albenque and Poulhalon [AP15], whose general framework allows to see the bijection of [BDFG02] as the opening of a map, endowed with a well-chosen fractional orientation. In Section 1.6, we generalize these extensions to maps on surfaces of any genus, so as to get a direct bijection between general maps and some unicellular blossoming maps.

Our main result deals with the rationality of bicolourable 4-valent maps. It would be very interesting to have similar rationality results for general bicolourable maps, with a control on the degrees of the vertices, for instance by giving a rational parametrization of bicolourable maps of degree at most 6. We plan to explore this direction in future work.

In [BCR93], Bender, Canfield and Richmond generalized the work of [BC91], by enumerating maps by vertices and faces instead of edges only. Similarly, they prove the existence of a rational parametrization of the generating series in higher genus. It would be really interesting to generalize our work so as to obtain a combinatorial explanation of this more general rational parametrization. This is another direction that we wish to explore in future work.

To conclude, note that there are a lot of other more precise structural or enumerative properties of maps and related objects that can be proved using involved mathematical studies and calculations. For instance, Carrell and Chapuy [CC15] were able to give many recurrence formulas for maps in any genus, and their gener-

ating functions, while Eynard [Eyn11] uses the so-called "random matrix method" to perform the enumeration of maps. These results (and others), which are often way more precise than the rationality of generating functions, still call for bijective or combinatorial explanations.

Organization of the paper: In Section 1.2, we recall definitions about maps and orientations and state Propp's theorem adapted to our setting. In Section 1.3, we define an explicit and constructive bijection between (4-valent or not) bicolorable maps and a family of unicellular maps. In Section 1.4, we analyse this family by reducing these maps to schemes, reducing the proof of Théorème 1.1.1 to the rationality of a restricted family of maps, that all have the same *scheme*, or alternatively, the symmetry of this series in terms of an intermediate series. In Section 1.5 we prove this symmetry by doing some additional work based on surjections. Finally in Section 1.6 we present an extension of our main bijection to general maps (not necessarily bicolorable), using fractional orientations.

Notation: In this article, combinatorial families are named with calligraphic letters, their generating series is the corresponding capital letter, and an object of the family, is usually denoted by the corresponding lower case letter. The size being denoted by $|\cdot|$, we therefore have for a combinatorial family \mathcal{S} : $S(z) = \sum_{s \in \mathcal{S}} z^{|s|}$.

1.2 Orientations in higher genus

1.2.1 General

We begin with some definitions about maps. [embedded graph, map] An *embedded graph* is an embedding of a connected graph into a given compact surface, taken up to orientation-preserving homeomorphisms of the surface. An embedded graph is *cellularly embedded* if all its *faces* (connected component of the complement) are homeomorphic to discs. A *map* is a cellularly embedded graph.

The set of maps, counted by number of edges, is denoted \mathcal{M} . In this paper we only consider maps embedded on orientable surfaces. *General maps* have no other restriction, and in particular, can have loops or multiple edges.

A map on an orientable surface can alternatively be defined as a graph equipped with a cyclic order on edges around each vertex, or as a gluing of polygons.

Note that if a graph is non-cellularly embedded, its face might be surfaces with any genus and any positive number of borders.

[genus] The *genus* of a map is the genus of its underlying surface.

The genus of an embedded graph is the genus of the map obtained by replacing each border of each face of the embedded graph by a disk. Since any face of an embedded graph has a positive number of borders, the genus of an embedded graph is lower or equal to the genus of its underlying surface. All families of maps can be refined by their genus; we denote this refinement by an index indicating the topological genus, so that for instance \mathcal{M}_0 is the set of maps in the sphere. See Figure 1.1a for an example of map of genus 1.

[corner, degree] An adjacency between a face and a vertex is called a *corner*. Note that a single pair vertex-face can give rise to several distinct corners. The *degree* of a face (resp. vertex) is the number of adjacent corners. [rooting] A map is said to be *rooted* if one of its corners, called the *root corner* (indicated by a brown arrow in the pictures), is distinguished. The vertex and face adjacent to the root

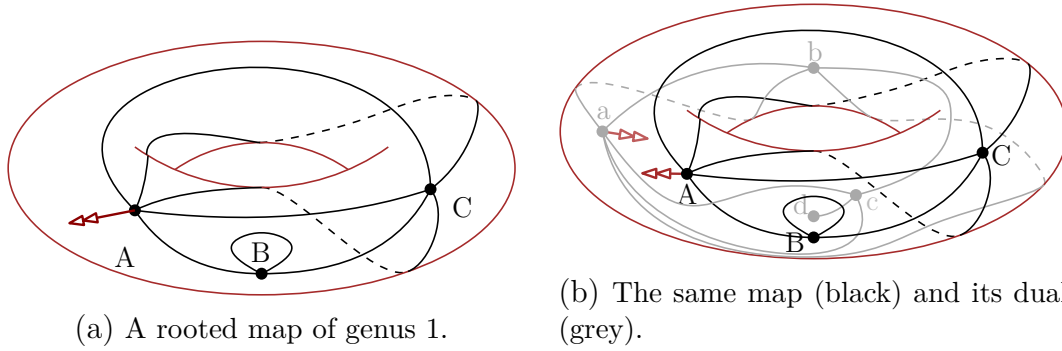


Figure 1.1: Examples of maps. The root corner is indicated by a double-arrow.

corner are called *root vertex* and *root face*.

Because they may have non-trivial automorphisms, the enumeration of non-rooted maps is difficult. Rather, from now on, we choose to always consider rooted map.

The set of vertices (resp. edges, faces) of a map $m \in \mathcal{M}$ is denoted $\mathcal{V}(m)$ (resp. $\mathcal{E}(m)$, $\mathcal{F}(m)$). The number of vertices (resp. edges, faces) of m is denoted $v(m)$ (resp. $e(m)$, $f(m)$). These notation can also be specified by degree, so that for instance $f_k(m)$ is the number of degree- k -faces of m . The genus of m is denoted $g(m)$. We recall Euler's formula:

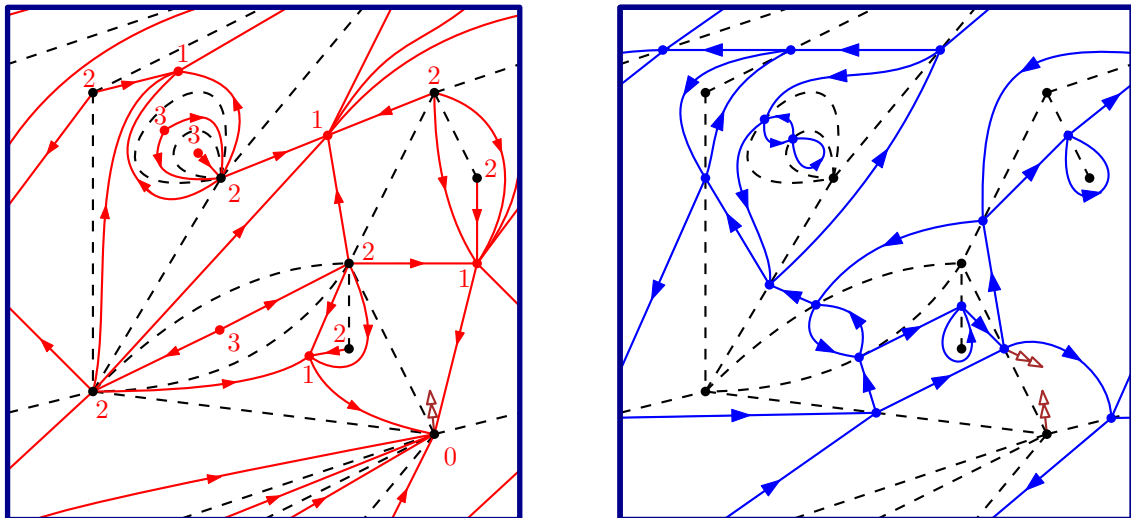
Proposition 1.2.1 (Euler's formula). *For any map $m \in \mathcal{M}$, $v(m) - e(m) + f(m) = 2 - 2g(m)$.*

[dual map] Since an edge connects two vertices and separates two faces, we can define the *dual map* m^* of m by exchanging the role of vertices and faces, and swapping the connection and separation induced by each edge (see Figure 1.1b). The root corner remains the same (but its vertex and its face are exchanged). Note that duality is involutive: $(m^*)^* = m$.

[unicellular, tree] An embedded graph is called *unicellular* if it has only one face. A *tree* is an embedded graph with no cycle. Trees are unicellular and have genus 0. Note that in genus 0, any unicellular embedded graphs is a tree, whereas in a positive-genus surface, a unicellular embedded graph may have any genus lower than the genus of the surface.

[bipartite map, bicolable map] A map is *bipartite* if its underlying graph is bipartite, which means that its vertices can be *properly* (so that no 2 adjacent vertices have same color) colored black and white. Dually, a map is *bicolorable* if its faces can be *properly* (so that no 2 adjacent faces have same color) colored black and white. Note that in particular, a bipartite map has no loop. Note also that the faces of a bipartite map and the vertices of a bicolable map necessarily have even degree. The set of bipartite (resp. bicolable) maps counted by number of faces (resp. vertices) is denoted \mathcal{BP} (resp. \mathcal{BC}). The generating series of bipartite and bicolable maps, $BP(z)$ and $BC(z)$, can be refined in the following way:

$$BP(\mathbf{z}) = BP(z_1, z_2, \dots) = \sum_{m \in \mathcal{BP}} \prod_{k=1}^{\infty} z_k^{f_{2k}(m)} \stackrel{\text{duality}}{=} \sum_{m \in \mathcal{BC}} \prod_{k=1}^{\infty} z_k^{v_{2k}(m)} = BC(z_1, z_2, \dots) = BC(\mathbf{z}). \quad (1.1)$$



(a) A map (dashed black) with its (bipartite quadrangulation) quadrangulated map (full red), with geodesic orientation.

(b) A map (dashed black) with its (4-valent bicolorable) radial map (full blue), with dual-geodesic orientation.

Figure 1.2: Classical constructions on a toroidal map.

Remark 6. A map is called *Eulerian* if all its vertices have even degree. Note that bicolorable maps are Eulerian, and in fact the notions are equivalent in genus 0. However this is not the case in higher genus, where some additional non-local constraints appear along non-contractible cycles. Though Eulerian is a more common property for graph, it seems that, in our setup, bicolability is a more relevant map property, in particular in view of Proposition 1.2.2.

[quadrangulation, 4-valent map] A map is called a *quadrangulation* if all its faces have degree 4. Dually, a map is *4-valent* if all its vertices are of degree 4. The set of bipartite quadrangulations (resp. bicolorable 4-valent maps), counted by number of faces (resp. number of vertices), is denoted \mathcal{BP}^\square (resp. \mathcal{BC}^\times). Their generating series therefore satisfy: $BP^\square(z) = BP(0, z, 0, 0, \dots) \stackrel{\text{duality}}{=} BC(0, z, 0, 0, \dots) = BC^\times(z)$.

Proposition 1.2.2 (folklore). *General maps of genus g with n edges are in bijection with 4-valent bicolorable maps of genus g with n vertices, or dually, with bipartite quadrangulations of genus g with n faces. Therefore, $M_g(z) = BC_g^\times(z) = BP_g^\square(z)$.*

Proof. Starting from a map m , we construct bijectively as follows a 4-valent bicolorable map called the *radial map* and denoted r . We create a vertex in r for each edge of m . For each corner of m , we then add an edge in r between the two vertices corresponding to the edges of m adjacent to the chosen corner. Out of the two corners of r corresponding to the root corner of m , we choose the leftmost one as the root corner of r . See Figure 1.2b for an example (the orientation of the edges will be explained in Section 1.2.2). \square

Note that the radial map is the dual of the so-called *quadrangulated map* (see Figure 1.2a).

1.2.2 Structure of orientations of a graph

[orientation, dual orientation] An *orientation* of a map is an orientation of each of

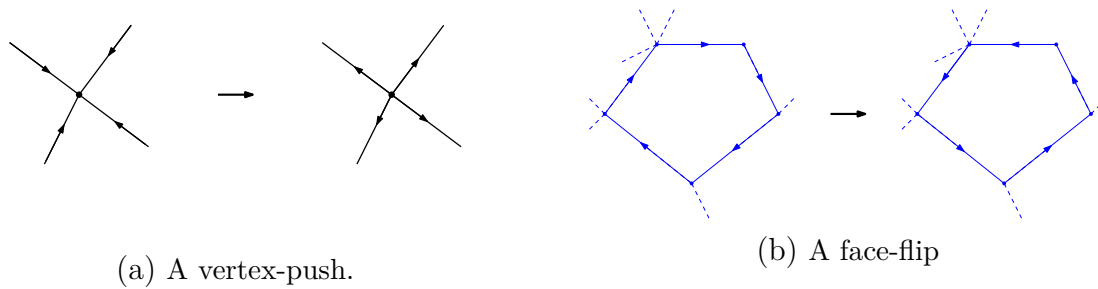


Figure 1.3: Some operations on orientations of maps.

its edges. The *dual orientation* o^* of an orientation o of a map m is the orientation of m^* where all dual edges are oriented from the face to the right of the primal edge toward the face to its left. Note that applying duality twice reverses the orientation (duality on oriented maps is not involutive).

Orientations provide additional structural properties to maps, useful for algorithmic purposes. However, since our final purpose is to study maps without an orientation, it is convenient to assign a canonical orientation to maps. Such an orientation will be provided in Corollary 1.2.6, and will be obtained as the minimum of a lattice of orientations, as described below.

[bipartite orientation, vertex-push] An orientation of a map is called *bipartite*, if it has as many forward edges as backward edges along any cycle (note that any cycle of a bipartite map is made of an even number of edges). The set of bipartite orientations is endowed with the *vertex-push* operation (see Section 1.2.2), that changes a sink distinct from the root into a source, by reversing all adjacent edges.

A map that has a bipartite orientation is necessarily bipartite.

[bicolorable orientation] An orientation of a map is called *bicolorable* if its dual orientation is bipartite. In other words, each dual cycle has as many edges crossing to the right as edges crossing to the left. A map that has a bicolorable orientation is necessarily bicolorable.

Remark 7. This definition is reminiscent to some other works on orientations of maps on the torus [GKL15]. Here, however, it works in any genus.

Remark 8. A bicolorable orientation is Eulerian, meaning that all vertices have equal indegree and outdegree. However, again, the 2 notions are not equivalent on a surface of positive genus, but this is not only due to Remark 6: even if the map is bicolorable, an Eulerian orientation is not necessarily bicolorable, because of the existence of some non-contractible dual cycles inducing additional non-local constraints for bicolorability of the orientation.

[face-flip] The set of bicolorable orientations is endowed with the operation dual to vertex push, called the *face-flip*.

Remark 9. Face-flips can alternatively be defined in the following way (see Figure 1.3b): take a clockwise face distinct from the root, and change the orientation of all edges adjacent to that face.

Vertices of a bipartite map can be labeled by their distance to the root. Since the map is bipartite, two adjacent vertices cannot have the same label. [geodesic orientation, dual-geodesic orientation] The *geodesic orientation* of a bipartite rooted

map is the orientation whose edges are all oriented towards their extremity with smaller label.

The dual of the geodesic orientation is called the *dual-geodesic orientation* (see Figure 1.2b for an example).

Along any cycle, forward (resp. backward) edges in the geodesic orientation correspond to a label increasing (resp. decreasing) by exactly 1. Therefore, the geodesic orientation is bipartite, and the dual-geodesic orientation is bicolorable.

The next result directly follows from [Pro93, Theorem 1].

Theorem 1.2.3 (Propp). *The transitive closure of the vertex-push operation endows the set of bipartite orientations of a fixed bipartite map with a structure of distributive lattice.*

In particular, this means that this set has a unique minimum for vertex-push. By definition, the only sink of the geodesic orientation is the root vertex, which means that the geodesic orientation is minimal for the vertex-push operation, and by consequence:

Corollary 1.2.4. *The minimum of the above-mentioned lattice of bipartite orientation of a map is the geodesic orientation of this map.*

Furthermore, we obtain by duality:

Corollary 1.2.5. *The transitive closure of the face-flip operation endows the set of bicolorable orientations of a fixed bicolorable map with a structure of distributive lattice, and its minimum is the dual-geodesic orientation.*

We can therefore characterize uniquely the dual-geodesic orientation of a given bicolorable map:

Corollary 1.2.6. *The dual-geodesic orientation of a bicolorable map is the unique bicolorable orientation of this map with no clockwise face other than the root face.*

Remark 10. In recent attempts to extend orientations on maps of higher genus, the notion of α -orientations, due to Felsner [Fel04], has been used (*e.g.* in [GKL15]). This leads to study Eulerian orientations (see Remark 8) instead of bicolorable orientations.

Unfortunately, Eulerian orientation with the face-flip operation give rise to several unconnected lattices. A classical approach would be to canonically select one of these connected component, and only work on this one. A natural choice for such a component is the set of bicolorable orientations, which are indeed a strict subset of Eulerian orientation. Therefore, defining bicolorable orientations in the first place seems more convenient for our purposes.

In the rest of this paper, we will use orientation of maps as an additional layer of information, useful for algorithmic purposes, but determined in a canonical way using Corollary 1.2.6.

1.3 Closing and opening maps

In this section, we describe an algorithm called the *opening algorithm*, that starts from an oriented map, and, if the orientation respects certain conditions, creates a

unicellular blossoming map whose *closure* is the original map. The first version of this algorithm was described by Schaeffer in [Sch97] and amounts to the opening of Eulerian planar maps with a canonical orientation. It was then generalized by Bernardi in [Ber06], and Bernardi and Chapuy in [BC11] for the higher-genus case, to the general case of a map with an orientation.

The present work, however, is a direct generalization of [Sch97], and we use the usual strategy of choosing a canonical orientation for each map. It is a particular case of [BC11] in which we are able to go further in the analysis. See Remark 15 for a more detailed discussion of the links between the two approaches.

1.3.1 Blossoming maps and their closure

[blossoming map, bud, leaf] A *blossoming* map b is a map with additional stems attached to its corners. These stems are oriented and hence can be of two types; an outgoing stem is called a *bud*, while an ingoing stem is called a *leaf*. We require that a blossoming map has as many buds as leaves. Blossoming maps are always assumed to be rooted on a bud.

[interior map] The *interior map* of a blossoming map b , denoted b° , is the map obtained from b by removing all its stems.

Most blossoming maps we usually consider are oriented, which leads to these additional definitions:

[blossoming degrees] In a blossoming oriented map, the *interior degree* (resp. *blossoming degree*, resp. *degree*) of a vertex is the degree of this vertex in the interior map (resp. the number of stems attached to it, resp. the sum of the interior and blossoming degrees). These can all be refined into *ingoing* and *outgoing* degrees.

As stated in Théorème 1.1.2, unicellular blossoming maps are instrumental to our approach, because they can encode maps, while being easier to analyse. To describe the bijection mentioned in Théorème 1.1.2, called the *closing algorithm*, we first introduce the *contour word* of a blossoming unicellular map.

[contour word] Let b be a blossoming unicellular map. The *contour word* of b is the word on 2 letters U and D defined as follows: when doing a clockwise tour of the unique face (which means that the face is on the right), starting from the root bud, write U (for up-step) for each bud and D (for down-step) for each leaf. The contour word can naturally be seen as a 1-dimensional walk with up- and down-steps, starting and ending at height 0.

We describe in Algorithm 8 how a unicellular blossoming map can be *closed* into a general map (see Figure 1.4 for a planar example, and Figure 1.7 from right to left for a genus-1 example). The result of the closing algorithm applied to a map b is called the *closure* of b and denoted $Close(b)$.

Note that the way stems are matched, which is similar to a well-parenthesizing matching, implies that the created edges are non-crossing. Note also that the cyclic definition of the closing algorithm means that the matching does not depend on the root. This implies that several blossoming unicellular maps can lead to the same map, up to the position of the root. However this is not the case anymore if we restrict the way a blossoming map can be rooted.

[well-rooted] A map b is called *well-rooted* if its contour word is a Dyck word.

Remark 11. When applying the closing algorithm to a well-rooted map, since the contour word is a Dyck path, the cyclic definition of the algorithm is not needed,

Algorithm 8 the closing algorithm

Let b be a unicellular blossoming map.

We write the contour word of b and match its steps by pairs upstep/downstep: each up-step U going from height i to $i + 1$ is matched to the first down-step D after U going from height $i + 1$ to i .

This is done in a cyclic manner, meaning that if there is no downstep going from height $i + 1$ to height i after the last upstep of the contour word going from height i to height $i + 1$, then this last upstep is to be matched with the first downstep going from height $i + 1$ to height i , whose existence is assured by the fact that the contour word ends at height 0.

The stems corresponding to matched steps are then merged into a single oriented edge.

The new map is rooted on the corner just on the right of the edge formed by the former root bud, around the root vertex.

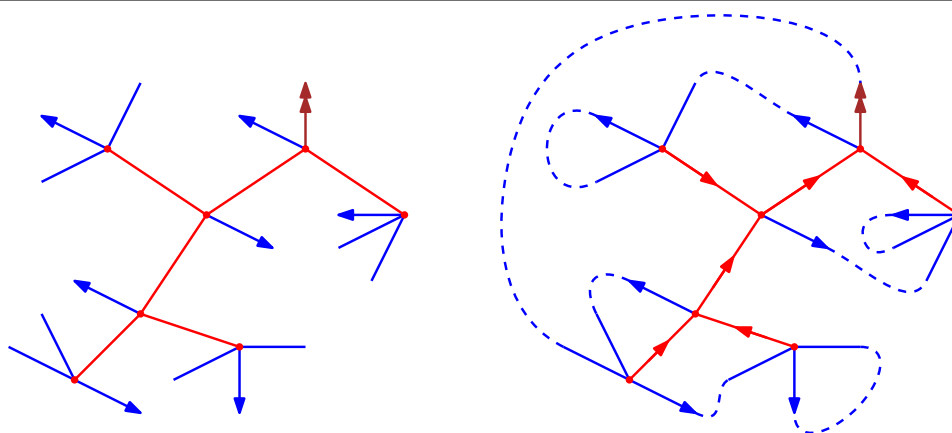


Figure 1.4: The closure of a (well-rooted) blossoming tree.

which implies that all closing edges have the root on their right.

[rootable stem, drifted contour word, well-rootable stem] A stem is called *rootable* if it is either a leaf or the root bud.

The *drifted contour word* of a map b is obtained from its contour word by changing the root up-step into a down-step. The drifted contour word goes from height 0 to height -2 , and its minimum height is denoted $-k$.

The first step going from height $-k + 2$ to height $-k + 1$ and the first step going from height $-k + 1$ to height $-k$ (and the corresponding stems) are called *well-rootable steps/stems*.

Note that well-rootable stems are rootable, and that if we apply a cyclic permutation to a drifted contour word, the well-rootable steps remain the same.

Remark 12. A map b is well-rooted if and only if its root bud is well-rootable.

[undirected map, root-equivalence, unrooted map] The *undirected map* of a blossoming map is the map obtained by forgetting the orientation of both the edges and the stems.

Two rooted blossoming unicellular maps are called *root-equivalent* if they have the same undirected map and the same set of rootable stems (in particular they do not necessarily have the same root).

The *unrooted map* \bar{b} of b is the equivalence class of b for root-equivalence.

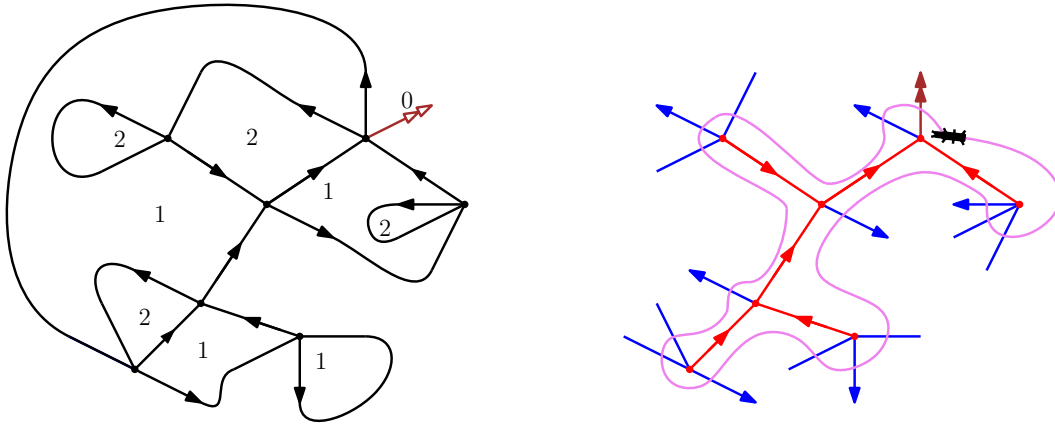


Figure 1.5: The opening of a planar map with dual-geodesic orientation.

Remark 13. By definition, \bar{b} contains the information of which stems are rootable. Hence, the blossoming orientation of b can be fully recovered from \bar{b} if we know which rootable stem of \bar{b} is the root of b .

Remark 14. Note that two root-equivalent map have the same well-rootable stems, so that it is possible to distinguish which rootable stems of an unrooted map are well-rootable. As a consequence, a well-rooted map can alternatively be seen as unrooted map with a distinguished well-rootable stem. This point of view will be useful in Section 1.4.1.

1.3.2 The opening algorithm

Given a rooted oriented map m , we describe the *opening algorithm* as follows (a more rigorous description will be given later in Algorithm 9). We explore the map starting from the root. When we meet an unexplored edge, if it is ingoing, we follow it, if it is outgoing, we cut it and replace it by a bud. When we meet an already explored edge, it was either followed, in which case we follow it back, or cut, in which case we just add a leaf. We stop when we get back to the root. The resulting blossoming map is called the *opening* of m and denoted $Open(m)$. A planar example of an execution of the opening algorithm is given in Figure 1.5, and a genus-1 example is given in Figure 1.7, from left to right.

More formally, we define the algorithm as a walk in the *corner map*. [corner map] Recall that a *corner* c is an adjacency between a face and a vertex, that we respectively denote $face(c)$ and $vertex(c)$. We define two permutations on the set of corners. If c is a corner, $NaF(c)$ is the next corner around $face(c)$ in clockwise order, while $NaV(c)$ is the next corner around $vertex(c)$ in counter-clockwise order. The inverse permutations are naturally called $PaF(c)$ and $PaV(c)$. A corner is delimited by two edges $NE(c)$ and $PE(c)$: $NE(c)$ joins $vertex(c)$ and $vertex(NaF(c))$ and separates $face(c)$ and $face(NaV(c))$, while $PE(c)$ joins $vertex(c)$ and $vertex(PaF(c))$ and separates $face(c)$ and $face(PaV(c))$.

The *corner map* of a map m is the oriented map whose vertices are the corners of m and which has for any corner c an edge from c to $NaV(c)$ and an edge from c to $NaF(c)$.

Note that the corner map is a bicolored 4-valent graph, endowed with a bicolored orientation. These definitions can be visualized in Figure 1.6a.

A formal definition of the opening algorithm, seen as an oriented walk on the corner map, is given in Algorithm 9, and illustrated in Figure 1.5.

Algorithm 9 the opening algorithm

Input: A map m embedded on a surface \mathcal{S} , rooted at a corner c_0 , along with an orientation.

Output: An oriented blossoming embedded graph $b = \text{open}(m)$, embedded on \mathcal{S} .
Set $c = c_0$, $b = \emptyset$, and $E_V = \emptyset$ (E_V is the set of visited edges).

Repeat:

$e = \text{NE}(c)$.

If $e \notin E_V$ and e is oriented toward $\text{vertex}(c)$ **Then:**

add e to E_V

add e to b

$c \leftarrow \text{NaF}(c)$

Else: If $e \notin E_V$ and e is outgoing from $\text{vertex}(c)$ **Then:**

add e to E_V

Add a bud to b in place of e .

$c \leftarrow \text{NaV}(c)$

Else: If $e \in E_V$ and e is oriented toward $\text{vertex}(c)$ **Then:**

Add a leaf to b in place of e .

$c \leftarrow \text{NaV}(c)$

$e \in E_V$ and e is outgoing from $\text{vertex}(c)$

$c \leftarrow \text{NaF}(c)$

End If

Until: $c = c_0$ **Return:** b .

This alternative definition highlights well the known symmetry between the roles of faces and vertices in the opening algorithm, which we express in Lemme 1.3.1, and illustrate in Figure 1.6b. In addition to Section 1.3.1, the following two definitions are needed. [reflected map] To a map m we associate a *reflected map* \widetilde{m} which is the same as m except that we switch the orientation of the underlying surface, which amounts to exchanging clockwise and counterclockwise, left and right. [complement submap] To a subgraph s of a graph g we associate the *complement subgraph* s^{\complement} defined with the same set of vertices as g along with all edges in g but not in s . This definition is naturally extended to the complement of a map by preserving the embedding.

Lemma 1.3.1. *Up to a change of orientation of the surface, a map and its dual yield complement interior submaps by the opening algorithm:*

$$\text{Open}(m)^{\circ} = \left(\left(\text{Open}(\widetilde{m}^*)^{\circ} \right)^* \right)^{\complement},$$

where the complement is taken with respect to m .

The reason why we use the interior map is that duality and complementarity are only defined for non-blossoming map. See Figure 1.6b for an illustration of Lemme 1.3.1.

Proof. Let m be a map, c a corner of m , and c^* its dual corner, in \widetilde{m}^* . It is easy to see (cf. Figure 1.6a) that $\text{NaF}(c)$ and $\text{NaV}(c^*)$ (resp. $\text{NaV}(c)$ and $\text{NaF}(c^*)$, $\text{PaF}(c)$ and $\text{PaV}(c^*)$, $\text{PaV}(c)$ and $\text{PaF}(c^*)$) are the same corners (in dual maps), and that $\text{NE}(c)$ and $\text{NE}(c^*)$ (resp. $\text{PE}(c)$ and $\text{PE}(c^*)$) are dual edges.

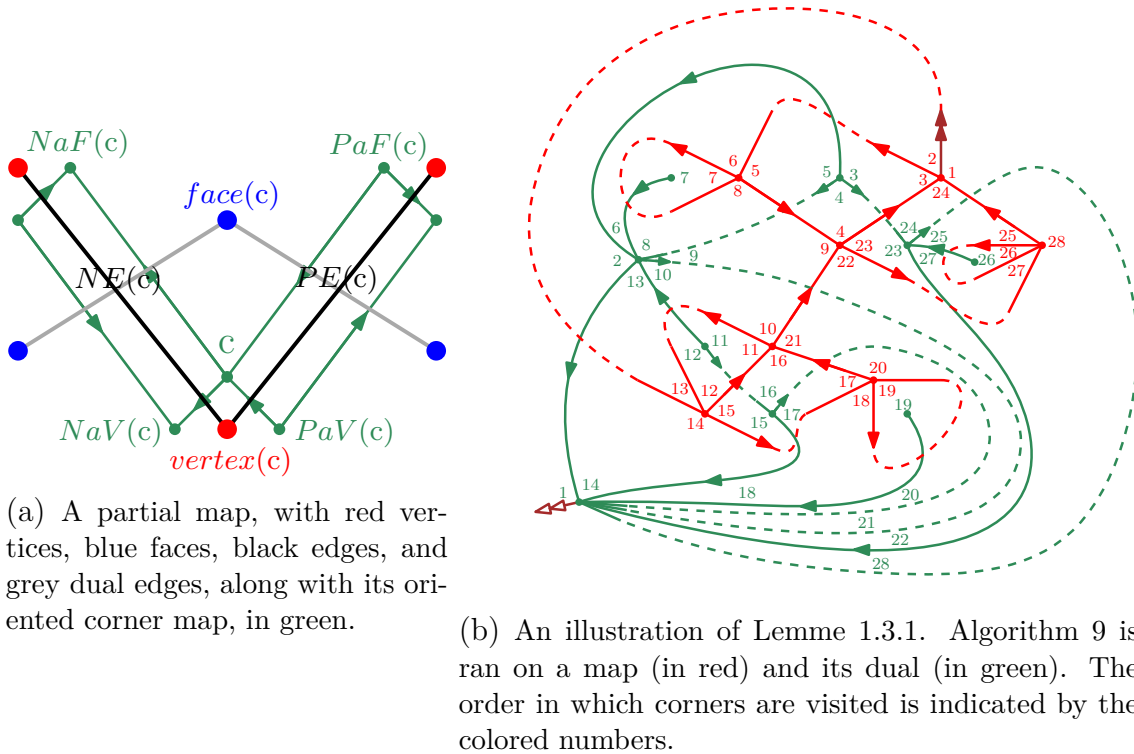


Figure 1.6: The opening algorithm is a walk on the corner map.

Let us run Algorithm 9 in parallel on m and \widetilde{m}^* , and show that the order in which dual corners are visited. This is done by induction: suppose that after k steps, the visited corners are exactly dual one from each other, and that the set of visited edges are also dual one from each other. If one algorithm reaches step 1 (resp. step 2), the other reaches step 2 (resp. 4). In any cases they either both add or both don't add e to E_V , and exactly one keeps e as an edge in b , while the other creates a stem instead.

Hence the walks on the dual corner maps are the same, and the resulting dual maps are complement one to another. \square

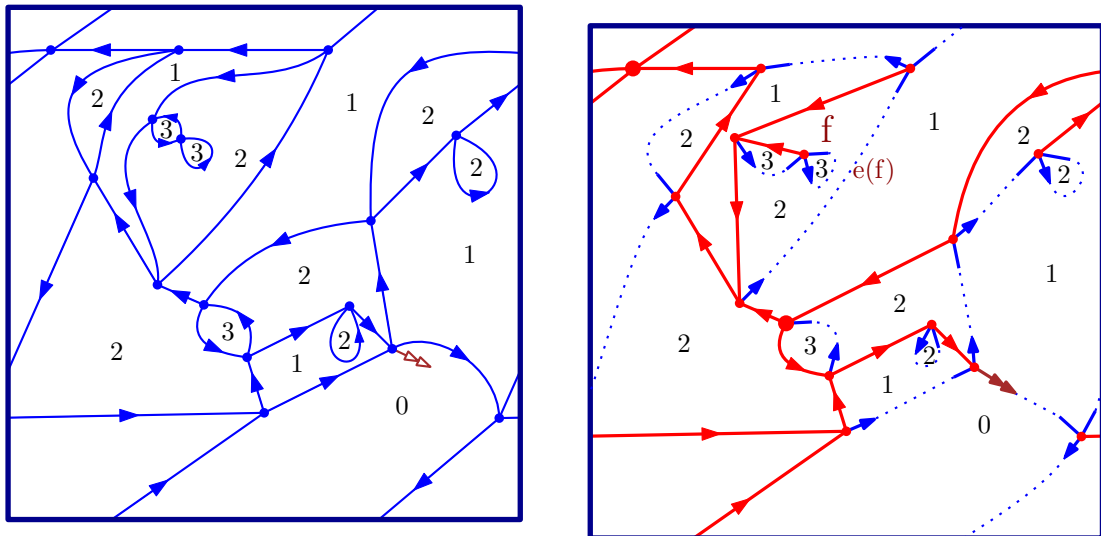
1.3.3 Opening a bicolored map

We are now willing to apply the opening algorithm to bicolored maps with dual-geodesic orientation, and prove that this yields a bijection. We first describe some properties that will prove useful to describe the resulting maps.

[well-oriented map] A unicellular map b is *well-oriented* if in a tour of the face starting from the root, each edge is first followed backward and then forward.

If b is a tree, this means that any interior edge is oriented toward the root. Note that this definition does not depend on whether the tour is clockwise or counter-clockwise.

Any unicellular map has a unique well-orientation, which can be straightforwardly obtained by doing a tour of the face. In relation to Remark 13, and in view of Section 1.4.1, this implies that the interior orientation of a well-rooted well-oriented unicellular blossoming map b can be easily recovered from the unrooted map \bar{b} if we know which rootable stem of \bar{b} is the root of b .



(a) A map of \mathcal{BC}_1^\times with its dual-geodesic orientation.

(b) A map of \mathcal{O}_1^\times .

Figure 1.7: A 4-valent bicolourable map with dual-geodesic orientation, and its opening.

[well-labeled map] A blossoming oriented map is said to be *well-labeled* if its corners are labeled in such a way that:

- the labels of two corners adjacent around a vertex differ by 1, in which case the higher label is to the right of the separating edge (or stem),
- the labels of two corners adjacent along an edge coincide, and
- the root bud has labels 0 and 1.

Looking at the sequence of labels of corners around any fixed vertex, it is clear that the orientation of a well-labeled map is in particular Eulerian. Note that if the map has no stem, then having a well-labeling is equivalent to having a bicolourable orientation (indeed, the orientation of a dual edge corresponds to the difference of label between its endpoints, so that any dual cycle has as many forward and backward edges). In particular, this is stronger than having an Eulerian orientation.

The set of well-rooted well-labeled well-oriented unicellular blossoming maps, counted by vertex degrees (similarly to bicolourable maps), is denoted \mathcal{O} . The subset of \mathcal{O} made of 4-valent maps is denoted \mathcal{O}^\times .

Recall from Equation (1.1) that the weight of a bicolourable map m is $\prod_{k>0} z_k^{v_{2k}(m)}$. Therefore, two maps have the same weight if and only if they have the same repartition of vertex degrees.

We can now state our main bijective theorem:

Theorem 1.3.2. *When performed on the dual-geodesic orientation, the opening algorithm is a weight-preserving bijection from \mathcal{BC}_g to \mathcal{O}_g , whose inverse is the closing algorithm. Therefore, $BC_g(\mathbf{z}) = O_g(\mathbf{z})$.*

Applying Théorème 1.3.2 to $\mathbf{z} = (0, z, 0, \dots)$ and using Proposition 1.2.2, we obtain the following corollary:

Corollary 1.3.3. *The opening algorithm on 4-valent bicolourable maps yields:*

$$M_g(z) = O_g^\times(z).$$

Remark 15. A more complete study of the opening algorithm in higher genus was carried in [BC11] by Bernardi and Chapuy. Instead of oriented maps, they consider covered maps, that are maps with a marked unicellular spanning submap, and show that they are in correspondence with oriented maps equipped with a so-called *left-connected* orientation. They show that the opening of such oriented maps gives rise to a unicellular spanning submap. However, this submap can be of any genus smaller or equal to the genus of the underlying surface. We could show that the dual-geodesic orientation is left-connected to conclude that the opening algorithm yields a unicellular spanning submap, but we would still have to prove that this map is of maximal genus. However, in our particular case, because the chosen orientation is not any left-connected orientation, but the dual of the geodesic orientation, we don't need to use this result. We show directly that the opening of a map with geodesic orientation is easily described, and use Lemme 1.3.1 to conclude about maps with dual-geodesic orientation.

Proof of Théorème 1.3.2. We first prove that the opening of a map of \mathcal{BC}_g is in \mathcal{O}_g , then that the closure of a map \mathcal{O}_g is in \mathcal{BC}_g , and finally prove that they are inverse bijections.

- Applying the opening algorithm on a bicolored map of genus g endowed with its dual-geodesic orientation yields a well-rooted well-labeled well-oriented unicellular blossoming map of genus g with same weight:

We look at the opening of a bipartite map endowed with its geodesic orientation. A direct analysis of the algorithm implies that, in this case, the blossoming map obtained is the rightmost breadth-first-search exploration tree, along with its buds and leaves.

Now let m be a bicolored map with its dual-geodesic orientation, and o the opening of m . Because of Lemme 1.3.1, we know that o° is the dual of the complement of the leftmost breadth-first-search exploration tree of m^* starting from the root. In particular, it is a unicellular map of maximum genus.

Since the walk on the corner map of m corresponding to the opening algorithm corresponds to a clockwise tour of the unique face of o starting from the root, the rules of the algorithm naturally imply that o is both well-oriented and well-rooted. If we label each corner of o with the distance in m^* from its adjacent face to the root face, then o is also well-labeled.

- The closure of a map $o \in \mathcal{O}_g$ yields a bicolored map m of genus g with same weight and with dual-geodesic orientation:

Let o be a map of \mathcal{O}_g and $m = \text{Close}(o)$. By construction, during the closing algorithm, no stem remains unmatched, and the created edges are non-crossing. This implies that m is indeed correctly embedded, and has genus g (and not more).

Since o is well-labeled, the height in the contour word corresponds to the labels of the corners. By consequence, the labels of corners that become adjacent along an edge by the merge of two stems are the same. Therefore, after the closure, each face of m can be naturally labeled by the common label of its corners.

This labeling on faces corresponds to a labeling of dual vertices such that two adjacent vertices have label that differ by 1 exactly. This implies that the orientation of m^* is a bipartite orientation, and equivalently that the orientation of m

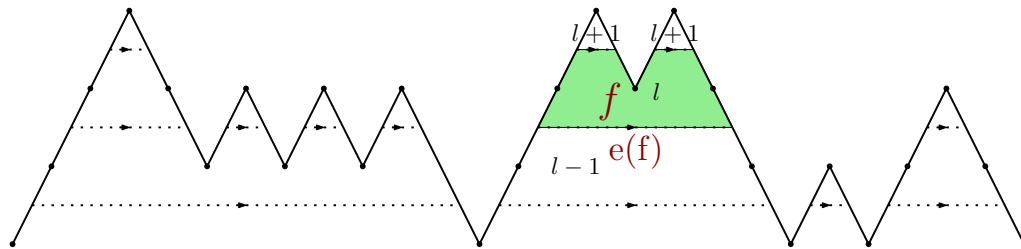


Figure 1.8: The contour word of the map displayed in Figure 1.7b. The face f , after closure, has 1 counterclockwise adjacent edge, called $e(f)$.

is bicolourable. Hence, thanks to Corollary 1.2.6, in order to conclude that m is endowed with its dual-geodesic orientation, we just have to prove that the map m has no clockwise face other than the root face.

A non-root face f of m with label l is enclosed by a certain number (possibly 0) of edges of o , a certain number (possibly 0) of edges formed by merging a bud and a leaf with adjacent labels l and $l + 1$, and exactly one edge formed by merging a bud and a leaf with adjacent labels $l - 1$ and l (see Figure 1.8 for an example). This last edge is denoted $e(f)$.

By definition, $e(f)$ is formed by the merging of a bud and a leaf, coming in this order in a clockwise tour of the face starting from the root. By consequence, f is on the left of $e(f)$, which implies that f is not clockwise.

- The two operations are inverse bijections:

Applying the opening algorithm to the closure of a well-rooted well-labeled well-oriented unicellular blossoming map b yields the original map b itself. Indeed, any closure edge is first met outgoing (see Remark 11 on well-rooted maps), whereas any non-closure edge is first met ingoing, because b is well-oriented.

Reciprocally, if the opening of an oriented map m of genus g yields a unicellular blossoming map b of genus g , then the closure of b yields m . Indeed, there is a unique way to do a planar matching of the stems of b . \square

1.4 Enumeration and rationality

Although the opening bijection works for any bicolourable map, we now restrict our work to 4-valent bicolourable maps, keeping in mind that these are in bijection with general maps. The next two sections develop the analysis of the family \mathcal{O}_g^\times , so as to obtain a bijective proof of Théorème 1.1.1, through Corollary 1.3.3.

Figure 1.9 gives a recap of the definitions and relations between some sets of maps, that have already been defined or will be in the upcoming section. It can be used as an outliner of our work up to Section 1.4.3.

1.4.1 Getting rid of well-rootedness

The analysis of objects such as the maps of \mathcal{O}_g^\times is made difficult by the non-locality of a condition such as well-rootedness. The following theorem enables to go past that condition in the rest of the analysis.

\mathcal{M}_g	maps of genus g	
\mathcal{BC}_g^\times	4-valent bicolored maps of genus g	Prop.1.2.2: $M_g(z) = \mathcal{BC}_g^\times(z)$
\mathcal{O}_g^\times	well-rooted well-labeled well-oriented blossoming unicellular maps of genus g	Cor.1.3.3: $M_g(z) = \mathcal{O}_g^\times(z)$
\mathcal{U}_g	well-labeled well-oriented blossoming unicellular maps of genus g	Thm.1.4.1: $O_g^\times(z) = z^{2g-1} \cdot \frac{2}{z} \int_0^z U_g(t) dt$
\mathcal{T}	rooted binary trees oriented toward the root, with 2 buds on each inner vertex	Decomposition: $T(z) = z + 3T(z)^2$
\mathcal{P}_g	pruned well-labeled well-oriented blossoming unicellular maps of genus g	Lem.1.4.5: $U_g(z) = \frac{\partial T}{\partial z} \cdot P_g(T(z))$
\mathcal{R}_g	scheme-rooted pruned well-labeled well-oriented blossoming unicellular maps of genus g	Lem.1.4.7: $P_g(z) \simeq \frac{1}{2g-v_4} \cdot \frac{\partial(tR_g(t))}{\partial t}(z)$

Figure 1.9: A recap of some families of maps, and some relations between them.

The generating series of \mathcal{O}_g^\times where maps are counted by leaves instead of vertices is denoted ${}^l\mathcal{O}_g^\times$. A straight-forward calculation from Euler’s formula gives $O_g^\times(z) = z^{2g-1} \cdot {}^l\mathcal{O}_g^\times$. The set of rooted (but not necessarily well-rooted) well-labeled well-oriented 4-valent unicellular maps, counted by leaves, is denoted \mathcal{U} . Recall Section 1.3.1 for the definition of the unrooted map.

Theorem 1.4.1. *Let \bar{m} be an unrooted map with $n+1$ rootable stems (which means its representants, the corresponding rooted maps, have n leaves and n buds).*

There is a 2-to- $(n+1)$ application from rooted well-labeled well-oriented 4-valent unicellular map with unrooted map \bar{m} , to well-rooted well-labeled well-oriented 4-valent unicellular map with unrooted map \bar{m} .

Recall the definition of a well-rootable stem, given in Section 1.3.1. Théorème 1.4.1 directly follows from Lemme 1.4.2:

Lemma 1.4.2. *There is a bijection, called rerooting, between rooted well-labeled well-oriented 4-valent unicellular maps with unrooted map \bar{m} , $2n$ stems and a marked well-rootable stem, and well-rooted well-labeled well-oriented 4-valent unicellular maps with unrooted map \bar{m} , $2n$ stems and a marked rootable stem.*

Lemme 1.4.2 is illustrated in Figure 1.10.

Proof. Let o be a well-rooted well-labeled well-oriented 4-valent unicellular map with unrooted map \bar{m} , $2n$ stems and a marked rootable stem.

The *rerooting* algorithm is defined as follows: if the marked stem is the root, we do nothing at all. Otherwise, the root bud and the marked leaf are joined into a single oriented edge. This divides the face into 2 faces called: f_L and f_R , on the left and right of the newly created edge. We decrease all labels of corners of the sub-face f_L by 2. The orientation of the new edge is reversed, and it is then cut back into a bud and a leaf. The former root is marked, and the former marked leaf becomes the root bud. The interior orientation is then redefined so that the map is well-oriented, which can be easily done by doing a tour of the face.

The rerooted map is denoted u . It is by definition a rooted well-oriented 4-valent unicellular map with unrooted map \bar{m} , $2n$ stems and a marked rootable

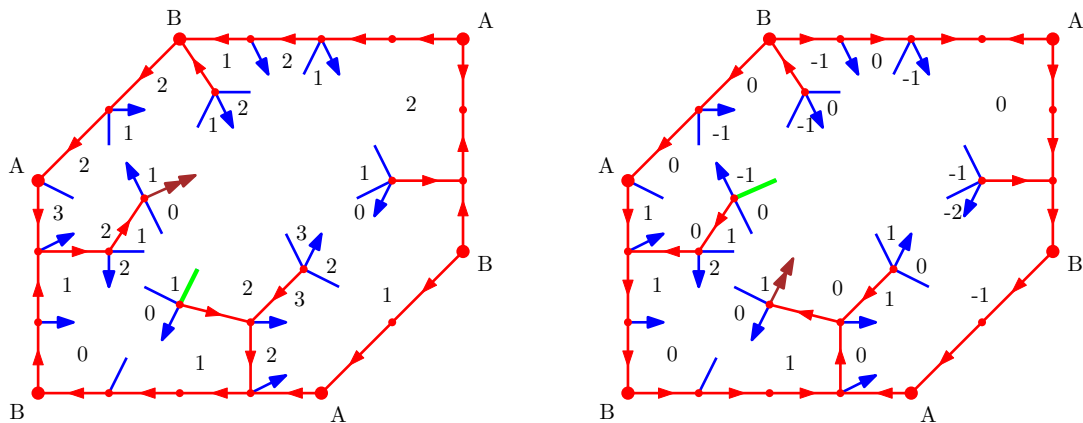


Figure 1.10: A map of \mathcal{O} with a marked rootable stem (in green) is bijectively mapped (by the rerooting algorithm) to a map of \mathcal{U} with a marked well-rootable stem (in green). In the 2 maps the opposite sides are identified, so that the maps are of genus 1, and the 2 scheme vertices are A and B .

stem. The contour word of u is obtained from that of o by a cyclic permutation, and by consequence, since o is well-rooted, the marked edge of u is well-rootable.

In order for the obtained labeling and orientation to fulfill the last condition of a well-labeled map (recall Section 1.3.3), in case the root does not already have labels 01, all labels will be shifted accordingly in the end. However this does not alter the first 2 conditions, and we therefore proceed to prove, before shifting, that they are satisfied.

Two labels adjacent along an edge were either both unchanged, or both reduced by 2. Two labels separated by a stem which is not marked nor the root are unchanged. Out of the two labels separated by a marked stem or the root, one is unchanged, and the other is reduced by 2. However the orientation of the stem is also changed. In all these cases, the labels remain compatible with the orientation after rerooting.

Affirmation 1.4.3. *An interior edge has opposite orientation before and after rerooting if and only if it separates f_L and f_R , in which case, before rerooting, f_L is on its right and f_R on its left.*

Proof. Because we deal with well-oriented maps, the orientation of the interior edges in the map before and after rerooting are determined by the order of apparition of their sides in a tour of the face starting from the root.

If both sides of the edge are adjacent to the same sub-face, they appear in the same order in a clockwise tour of the face starting from the root before and after rerooting, which implies that the orientation of the edge is unchanged by the rerooting.

If the two sides of the edge are not adjacent to the same sub-face, then the well-orientedness of the map before and after rerooting implies that the edge is counter-clockwise around f_L and clockwise around f_R before rerooting, whereas it is clockwise around f_L and counter-clockwise around f_R after rerooting. \square

Now we consider two adjacent corners separated by an edge e , and check that their labels are compatible with the orientation of e .

If the two sides of e are both adjacent to f_R , the labels and orientation were unchanged, so they remain compatible. If the two sides of e are both adjacent to f_L , the orientation was unchanged whereas the label were both reduced by 2, so they remain compatible.

If e has one side on each sub-face, then before rerooting, the label in f_L was higher than the other one by 1, whereas after rerooting it is reduced by 2, and is hence smaller than the other (unchanged) label by 1. Since both o and u are well-oriented, this is compatible with the change of orientation of the edge.

A very similar proof can be made for the inverse bijection. \square

The considered families of maps can be restricted by unrooted map, so that for instance ${}^l\mathcal{O}_m^\times$ is the subset of ${}^l\mathcal{O}$ whose unrooted map is the 4-valent unrooted map \overline{m} .

Corollary 1.4.4. *The following holds:*

$${}^l\mathcal{O}_m^\times(t) = \frac{2}{t} \int_0^t U_{\overline{m}}(z) dz.$$

Proof. The bijection of Théorème 1.4.1 yields: $(n+1) \cdot [t^n]{}^l\mathcal{O}_m^\times(t) = 2 \cdot [t^n]U_{\overline{m}}(t)$, which leads to the equation on generating functions. \square

1.4.2 Reducing a unicellular map to a labeled scheme

The framework applied in this subsection has become classical when studying unicellular maps. In particular, it is developed by Chapuy, Marcus and Schaeffer in [CMS09].

[extended scheme] The *extended scheme* of a unicellular blossoming map u is the unicellular map of genus g obtained by iteratively removing from the interior map u° all vertices of interior degree 1.

A unicellular map u is composed of an extended scheme upon which are attached some stems and treelike parts. These treelike parts, with their leaves, are binary trees, oriented towards the root of the map. Furthermore, on each interior vertex of these trees is attached a bud. The set of such trees, counted by leaves, is denoted \mathcal{T} . Its generating series satisfies the recurrence relation $T(z) = z + 3T(z)^2$. The generating series of such trees with a marked leaf (or equivalently doubly rooted) is $z \cdot \frac{\partial T}{\partial z}(z)$.

The *pruning* procedure is defined as follows: each treelike part is replaced by a rootable stem: a root bud if the tree contains the root, a leaf otherwise (see Figure 1.11 left and middle). The image of \mathcal{U} by the pruning procedure, counted by leaves, is denoted \mathcal{P} .

Lemma 1.4.5. *The pruning algorithm yields:*

$$U(z) = \frac{\partial T}{\partial z} \cdot P(T(z)).$$

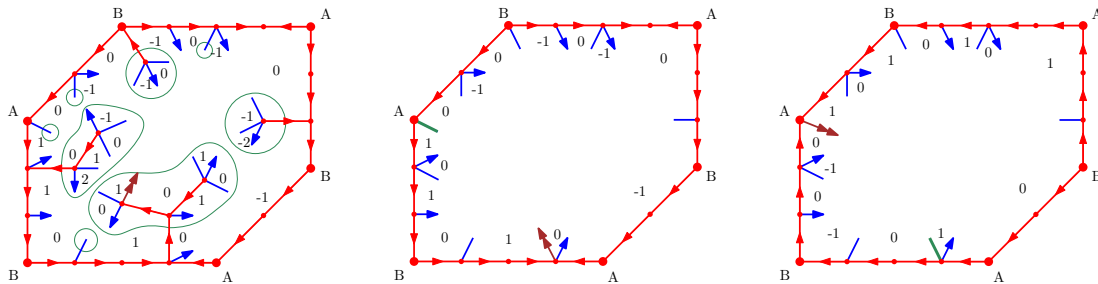


Figure 1.11: On these maps, the three pairs of opposite sides are identified, so that they only have 2 scheme vertices each, denoted A and B . A map of \mathcal{U} (left), whose treelike parts are encompassed in green, is pruned (middle). One of its scheme rootable stems is marked (in green), and the map is then rerooted (right) on this marked stem, while marking (in green) the former root stem.

Proof. In order to recover a map of \mathcal{U} from a pruned map p , we need to replace each leaf of p by a tree. Then the root bud of p (which has weight 0) is replaced by a tree with a marked leaf. The marked leaf is replaced by a root bud (decreasing the weight by 1), and the tree is oriented toward this new root. The equation follows. \square

All vertices of the pruned map are of interior degree 2, 3 or 4. We call v_2^s , v_3^s , and v_4^s the number of such vertices. When the notation is ambiguous, we specify which map is concerned by writing $v_2^s(m)$ for example. A quick calculation based on Euler formula gives: $v_3^s + 2v_4^s = 4g - 2$. There are thus a bounded number of vertices of degree 3 or 4, the other ones being of degree 2. Vertices of interior degree at least 3 in the pruned map are called *scheme vertices*, and a stem (resp. bud, leaf) attached on a scheme vertex (which is then necessarily of interior degree 3 since the map is 4-valent) is called a *scheme stem* (resp. *scheme bud*, *scheme leaf*). A map is said to be *scheme-rooted* if its root is a scheme bud. After pruning, a sequence of adjacent vertices (of interior degree 2) between two scheme vertices is called a *branch*.

Lemma 1.4.6. *Let $p \in \mathcal{P}$. Out of its $v_3^s = 4g - 2v_4^s - 2$ scheme stems, p has exactly $2g - v_4^s$ rootable scheme stems. In particular $v_3^s > 0$.*

Proof. • Suppose the map p is scheme-rooted. Since p is well-oriented, all edges of a branch are oriented the same way, which implies that all vertices of interior degree 2 have interior out- and in-degree equal to 1.

By consequence, the sums of interior in- and out-degrees of scheme vertices are equal. Since the map is Eulerian, the sum of blossoming in- and out-degrees of scheme vertices are equal. Hence there are as many scheme buds as scheme leaves, that is $2g - v_4^s - 1$ each.

- Conversely, if the root is on a vertex of interior degree 2, the root-vertex has interior in-degree 2 and interior out-degree 0, whereas all other vertices of interior degree 2 have interior out- and in-degree equal to 1.

By consequence, the sum of interior out-degrees of scheme vertices is equal to the sum of interior in-degrees of scheme vertices, plus 2. Since the map is Eulerian, the sum of blossoming in-degrees of scheme vertices is equal to the sum of blossoming out-degrees of scheme vertices, plus 2. Hence there are $2g - v_4^s$ scheme leaves and $2g - v_4^s - 2$ scheme buds.

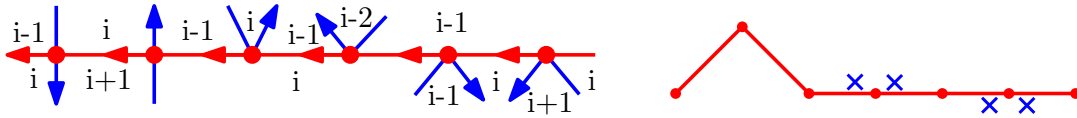


Figure 1.12: An example of a branch displaying the 6 possible types of vertices of degree 2, and the corresponding weighted Motzkin path.

In any case there is a positive number of scheme stems, which implies that $v_3^s > 0$. \square

We now proceed to reroot the pruned map on a scheme stem. We choose a rootable scheme stem among the $2g - v_4^s$ possible choices and mark it. The *rerooting-on-the-scheme* algorithm (see Figure 1.11 middle and right), is the same as the rerooting described in the proof of Lemme 1.4.2.

The subset of \mathcal{P} composed of *scheme-rooted* maps is denoted \mathcal{R} . We call $\mathcal{P}^{\bar{e}}$ (resp. $\mathcal{R}^{\bar{e}}$) the subset of maps of \mathcal{P} (resp. \mathcal{R}) that have \bar{e} as an unrooted extended scheme.

Lemma 1.4.7. *The rerooting-on-the-scheme algorithm yields:*

$$P_{\bar{e}}(z) = \frac{1}{2g - v_4^s(\bar{e})} \cdot \frac{\partial(tR_{\bar{e}}(t))}{\partial t}(z).$$

Now that the map is rooted on a scheme bud, since it is well-oriented, all edges of a branch have the same orientation. We call *merging* the procedure that replaces each branch by a single edge with the same orientation (see Figure 1.13).

The map we obtain is called the *labeled scheme*. It is not well-labeled because corners adjacent along an edge do not necessarily have the same label anymore, but the rule around a vertex is still respected. The set of labeled schemes is denoted \mathcal{L} .

1.4.3 Analyzing a scheme

For $l \in \mathcal{L}$, we now want to determine which maps have l as labeled scheme. Each edge of l should be replaced by a valid branch. However we need to be sure that after replacement, the map is well-labeled, and agrees with the labeling of the scheme. Therefore, following [CMS09], we express the generating series of branches with prescribed height on the extremities.

There are 6 types of vertices of interior degree 2, displayed in Figure 1.12 left. If the bud and leaf are on opposite sides, the label of the corners either increases on both side or decreases on both sides. In the 4 other cases, the stems are on the same side, and the label remains the same before and after the vertex. Therefore each type of vertex of interior degree 2 can be represented by a step, depending on the variation of the labels around it: an up-step if the label increases, a down-step if it decreases, and 4 types of horizontal steps if it stays the same, represented with a blue cross placed accordingly to the position of the bud (see Figure 1.12 right). These steps are called *weighted Motzkin steps*, and together they form a *weighted Motzkin path*, whose variation of height corresponds to the variation of labels of the corresponding branch.

An edge of the labeled scheme going from label i to label j can therefore be replaced by a weighted Motzkin path going from height i to height j , as illustrated in Section 1.4.3.

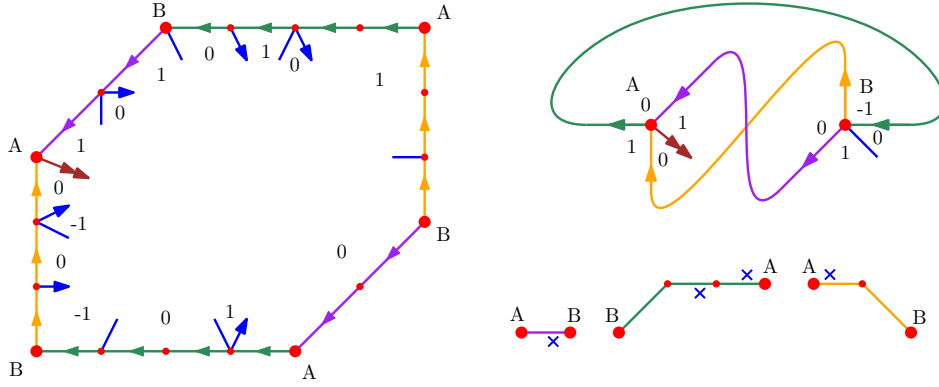


Figure 1.13: Reducing a map of \mathcal{R} to a labeled scheme, by replacing each branch by a weighted Motzkin path.

We denote by \mathcal{D} the set of weighted Motzkin paths going from height 0 to height -1 , that remain non-negative before the last step, counted by length, and by \mathcal{B} the set of weighted Motzkin paths going from height 0 to height 0, counted by length. Following [FS09, p.76-77], we obtain the following decomposition equations:

$$D = z(1 + 4D + D^2) \quad (1.2)$$

$$B = 1 + 4zB + 2zDB. \quad (1.3)$$

After combination the two equation, B is rewritten as a function of D only:

$$B = \frac{1 + 4D + D^2}{1 - D^2}.$$

The generating series of paths going from height i to j is: $B \cdot D^{|i-j|}$.

Remark 16. The role of B and D is very similar to the role of B and U in the work of Chapuy, Marcus and Schaeffer in [CMS09]. A few subtle differences may be noted: in our case there are 4 different horizontal steps instead of only 1. Furthermore, an element of \mathcal{B} may be of length 0, which is not the case in [CMS09], and leads to simpler formulae.

Recall that our purpose is to prove that $M_g(t)$, the series of maps of genus g , is rational in t . Using the lemmas of Section 1.4, we will be able to express the generating series in terms of the auxiliary function D . A key observation of [CMS09] is that rationality in t amounts to symmetry in D , thanks to Lemme 1.4.8.

For a function Ψ in D , we denote its *transposition* $\bar{\Psi}(D) = \Psi(D^{-1})$. We say that Ψ is *symmetric* (resp. *antisymmetric*) in D if $\Psi = \bar{\Psi}$ (resp. $\Psi = -\bar{\Psi}$). Note for example that B is antisymmetric.

Lemma 1.4.8. *A function is rational in z if and only if it is rational and symmetric in D .*

Proof. Since $z = \frac{1}{D^{-1}+4+D}$, any function which is rational in z is rational and symmetric in D .

Let f be a function rational and symmetric in D , whose irreducible expression is $\frac{P}{Q}$. We denote d the average degree of P , which is half the sum of the higher and lower degree of P . By symmetry, it is also the average degree of Q . By symmetry,

$P \cdot D^{-d}$ and $Q \cdot D^{-d}$ are both symmetric in D and D^{-1} . In case d is not an integer, $P \cdot D^{-d}$ and $Q \cdot D^{-d}$ are not polynomials in D and D^{-1} . However, in this case, $P \cdot D^{-d} \cdot (D^{-\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}})$ and $Q \cdot D^{-d} \cdot (D^{-\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}})$ are symmetric polynomials in D and D^{-1} .

Therefore, in any case, f can be written as the ratio of 2 symmetric polynomials. Since the family of polynomials $z^{-k} = (D^{-1} + 4 + D)^k$ generates all symmetric polynomials, f can be written as a rational function of z^{-1} , which is enough to conclude the proof. \square

[unlabeled scheme] An *unlabeled scheme* is a scheme where we forgot all labels. We denote by \mathcal{S} the set of unlabeled schemes. The set of unrooted unlabeled scheme is denoted $\overline{\mathcal{S}}$. We specialize our classes of maps depending on the scheme obtained by following the previous steps. For instance, \mathcal{R}_s is the set of maps $r \in \mathcal{R}$ whose scheme is s .

Similarly, $\mathcal{M}_{\overline{s}}$ is the set of maps such that, if you apply the radial construction, then the opening algorithm, then the first rerooting, then the pruning, then the second rerooting, then replace branches by edges, then forget labels (see Figure 1.9), you obtain a scheme whose unrooted version is \overline{s} .

Remark 17. The family \mathcal{M} will be restricted by unrooted scheme rather than unlabeled scheme. Indeed, the rerooting procedures are many-to-many applications rather than bijections, which means that going through them does not associate a fixed unlabeled scheme to a given map. Rather, it associate several unlabeled schemes, that all have the same unrooted scheme.

We denote R^b the generating series of \mathcal{R} , counted only by leaves attached on a branch, instead of all leaves, and R_s^b its restriction to maps with unlabeled scheme s . Note that $R_s(z) = z^{2g - v_4^*(s) - 1} R_s^b(z)$.

Theorem 1.4.9. *For any $s \in \mathcal{S}$, R_s^b is rational and symmetric in D .*

Section 1.5 will be dedicated to prove Théorème 1.4.9. To that end, an additional study on the structure of the schemes will be required, that will be carried on in Section 1.4.4.

In the rest of Section 1.4.3, we show that Théorème 1.4.9, in conjunction with the work of Section 1.4, leads to Théorème 1.4.10, a refined version of Théorème 1.1.1, where the unrooted scheme obtained by our bijection is specified.

Theorem 1.4.10. *For any \overline{s} in $\overline{\mathcal{S}}$, the generating series $M_{\overline{s}}(t)$ is a rational function of $T(t)$.*

Since $\overline{\mathcal{S}}_g$ is finite for any fixed g , this theorem implies that $M_g(t) = \sum_{\overline{s} \in \overline{\mathcal{S}}_g} M_{\overline{s}}(t)$ is rational in $T(t)$, which is equivalent to Théorème 1.1.1.

Remark 18. The main reason why we are able to obtain the rationality of M_g is that, unlike in [CMS09], the rationality holds for each scheme, which makes it possible to analyse more specifically one scheme at a time. The reason why maps are rational by scheme in our case but not in [CMS09] remains somewhat of a mystery.

Proof of Théorème 1.4.10. We derive from the previous sections (see also Figure 1.9) that:

$$M_{\bar{s}}(t) = BC_{\bar{s}}^{\times}(t) \tag{1.4}$$

$$= O_{\bar{s}}^{\times}(t), \quad \text{because of Corollary 1.3.3} \tag{1.5}$$

$$= t^{2g-1} \cdot {}^l O_{\bar{s}}(t), \quad \text{by definition} \tag{1.6}$$

$$= t^{2g-1} \cdot \frac{2}{t} \int_0^t U_{\bar{s}}(z) dz, \quad \text{because of Corollary 1.4.4} \tag{1.7}$$

$$= 2t^{2g-2} \int_0^t \frac{dT}{dz} \cdot P_{\bar{s}}(T(z)) \cdot dz, \quad \text{because of Lemme 1.4.5} \tag{1.8}$$

$$= \frac{2t^{2g-2}}{2g - v_4^s(s)} \int_0^t \frac{d(uR_{\bar{s}}(u))}{du}(T(z)) \cdot \frac{dT}{dz} \cdot dz, \quad \text{because of Lemme 1.4.7} \tag{1.9}$$

$$= \frac{2t^{2g-2}}{2g - v_4^s(s)} \cdot T(t) \cdot R_{\bar{s}}(T(t)), \quad \text{by a change of variable} \tag{1.10}$$

$$\tag{1.11}$$

Hence, in order to prove that $M_{\bar{s}}(t)$ is rational in T (and t), it suffices to prove that $R_{\bar{s}}(z)$ is rational in z , or equivalently that $R_{\bar{s}}$ is rational and symmetric in D , thanks to Lemme 1.4.8. For all $\bar{s} \in \bar{\mathcal{S}}$, we have $R_{\bar{s}} = \sum_{\substack{t \in \mathcal{S} \\ \bar{t} = \bar{s}}} R_t$.

Therefore, Théorème 1.4.9 is enough to conclude the proof. \square

Remark 19. Note that we apply twice the rerooting algorithm, the first time from a well-rootable stem to any rootable stem, and the second time from a rootable stem to a rootable scheme stem. In the course of the proof of Théorème 1.4.10, these two operations, in terms of generating functions, correspond to an integral and a derivative. Although the two rerooting operations are separated by the pruning operation, it appears that a change of variable allows the integral and derivative to cancel out. This can actually be seen in a combinatorial way, by merging the two rerooting operations and the pruning operation into a single operation, which result in Lemme 1.4.11.

Lemma 1.4.11. *For any unrooted scheme \bar{s} , there is a $(2g - v_4^s(\bar{s}))$ -to-2 application from maps of $\mathcal{O}_{\bar{s}}^{\times}$ to maps of $\mathcal{R}_{\bar{s}}$ with a tree associated to each of its rootable stems.*

1.4.4 The offset graph

We now label each scheme vertex with the minimal label of its corners, and relabel the corners relatively to this minimum, by subtracting the vertex label from each corner label. This second label is called the *offset label*. In case the outgoing and ingoing edges around a vertex are alternated, the offset labels around the vertex are 0101. Otherwise, the sequence is 0121.

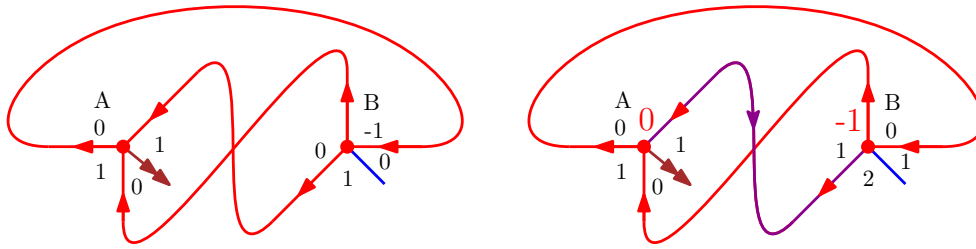


Figure 1.14: The scheme on the left has the usual labels. On the right, these labels define labels on vertices (red), and offset labels (black). An offset oriented edge (purple) appears. Here, the offset graph is reduced to this single offset edge.

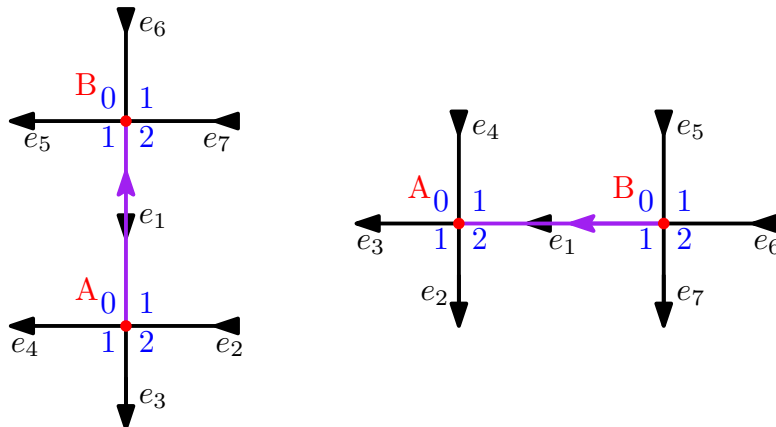


Figure 1.15: illustration of the two possible cases of first visited edge of an offset cycle. In both cases, e_2 to e_7 can *a priori* be either stems or edges, and belong or not to the offset graph.

The edges of the scheme can be of two different types. Look at the offset labels around it. If the offset labels are the same (01 or 12) on both sides, the edge is called *level*. If the labels are 01 on one side and 12 on the other, the edge is *offset* toward the second one. We define the *offset graph* as the oriented sub-graph of the scheme where only the offset edges are kept, along with their orientation. See Figure 1.14 for an example.

Proposition 1.4.12. *The offset graph of a scheme is acyclic.*

Proof. Let's assume by contradiction that there exists a labeled scheme $l \in \mathcal{L}$ whose offset graph is not acyclic and let C be a simple cycle of the offset graph of l . Since an offset edge ends with relative labels 12, any vertex of type 0101 has indegree 0 in the offset graph, so that all vertices of C have to be of type 0121.

Let e_1 be the first edge of C visited during a clockwise tour of l starting from the root. Since l is well-oriented, e_1 is visited backward first. Depending on whether it is visited forward or backward in the offset graph, we are in one of the two cases depicted in Figure 1.15.

- Assume we are in the leftmost case. Consider now the first visited edge (or stem) adjacent to vertex A , and call it $e_f(A)$. It may be the root bud or a normal edge, but in both cases, $e_f(A)$ has to be visited backward first in the tour, and hence it is either e_3 or e_4 .

Suppose $e_f(A) = e_4$, then e_3 cannot be an interior edge because it would have to be visited backward first in the tour, whereas it is outgoing from A and cannot have been visited before e_4 by definition of $e_f(A)$. Hence e_3 is a bud, and e_2 is visited before e_1 in the tour. If $e_f(A) = e_3$, then e_2 is visited before e_1 .

In any case both e_2 and e_3 are visited before e_1 , which implies they are not part of C . This is a contradiction because C is a cycle which is oriented in the offset graph, which means it does not contain e_4 , because e_4 has offset label 01 around A .

- Now assume we are in the rightmost case. We define similarly $e_f(B)$ to be the first visited edge (or stem) around B . Again, since it has to be outgoing, it is either e_1 or e_7 .

Suppose $e_f(B) = e_7$. Then both e_7 and e_6 are visited before e_1 in the tour, which implies they are not in C . Moreover, since e_5 has relative label 01 around B , it cannot be part of the offset cycle C . This is a contradiction.

Therefore $e_f(B) = e_1$. Then similarly to the leftmost case, we conclude that e_7 is a bud. By consequence, since C is a cycle in the offset graph, the edge coming right after e_1 in C has to be e_6 , which has relative label 12 around B .

The same reasoning (we already know we are in the rightmost case) can be applied on e_6 , the second visited vertex of C , and so on. By induction we conclude that C is only made of edges whose orientation in the map and the offset graph coincide. Additionally, the only edges or stems outgoing from C are on its left, whereas the only edges or stems ingoing from C are on its right. We also know that the left part of C is visited backward all at once, from e_1 to e_3 .

Now, in a clockwise tour of the face, which edge (or stem) $e_f^r(C)$ is visited just before the first time we meet the right side of C ? Since in the tour, $e_f^r(C)$ has to be visited backward first (even if it is the root), it can not be any of the edges or stems on the right of C . Since there is no good candidate for $e_f^r(C)$, there is a contradiction, which implies that the offset graph is acyclic. \square

1.5 Rationality of maps with a given scheme

In this section we prove Théorème 1.4.9. Throughout all the section, s is an unlabeled scheme.

1.5.1 Counting rerooted pruned maps

We now proceed to compute the generating function of all maps with a fixed unlabeled scheme. A branch from height i to height j in a scheme contributes for $B \cdot D^{|i-j|}$. To get the total participation of an unlabeled scheme to R_s^b , we need to sum over all possible labelings of the vertices. To deal with the relativity of label, instead of requiring that the root has label 01, we arbitrarily decide that the lowest height has to be 0, which is not equivalent since the maps are not necessarily well-rooted.

To make things simpler, we first analyse the case of an unlabeled scheme s with no offset edge. In this case, we obtain:

$$R_s^b = \sum_{\substack{h_1 \cdots h_{n_v} \in \mathbb{N} \\ \min(h_1, \dots, h_{n_v}) = 0}} \prod_{\substack{(v_i, v_j) \in \mathcal{E}(s) \\ i < j}} B \cdot D^{|h_i - h_j|}. \quad (1.12)$$

For a given affectation of heights, we define a function characterizing the ordering of heights of vertices. We set k to be the total number of distinct heights. To each vertex v_i we associate an integer $o(i)$ between 1 and k such that $h_i < h_j$ (resp. $h_i = h_j$, $h_i > h_j$) if and only if $o(i) < o(j)$ (resp. $o(i) = o(j)$, $o(i) > o(j)$). Note that o is necessarily a surjection. The size of the image of a surjection o is denoted $k(o)$. Whenever it is unambiguous, we simply write k . We denote $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. We denote $S(n)$ the set of surjection from $[n]$ to $[k]$, for any k in $[n]$.

We can therefore rewrite the formula for the generating series:

$$R_s^b = B^{n_e} \cdot \sum_{o \in S(n_v)} \sum_{0 = h_1 < \dots < h_k} \prod_{\substack{(v_i, v_j) \in \mathcal{E}(s) \\ i < j}} D^{|h_{o(i)} - h_{o(j)}|}. \quad (1.13)$$

Remark 20. This idea of grouping the labeled schemes that have the same relative ordering of scheme vertices is reminiscent to the use of *standard schemes* in [CMS09].

For a subset S of vertices, we define the cut of a subgraph as: $C(S) = |\{(u, v) \in \mathcal{E}(s) \text{ such that } u \in S \text{ and } v \notin S\}|$. We also define: $\Phi_o(i) = \frac{D^{C(o^{-1}([i]))}}{1 - D^{C(o^{-1}([i]))}}$.

Lemma 1.5.1. *For an unlabeled scheme $s \in \mathcal{S}$ with no offset edge, we have:*

$$R_s^b = B^{n_e} \cdot \sum_{o \in S(n_v)} \prod_{i=1}^{k-1} \Phi_o(i). \quad (1.14)$$

Proof. We apply the change of variables: $I_i = h_{i+1} - h_i$:

$$R_s^b = B^{n_e} \cdot \sum_{o \in S(n_v)} \sum_{I_1, \dots, I_{k-1} \in \mathbb{N}^*} \prod_{\substack{(v_i, v_j) \in \mathcal{E}(s) \\ o(i) \leq o(j)}} D^{I_{o(i)} + I_{o(i)+1} + \dots + I_{o(j)-1}}. \quad (1.15)$$

Our expression can then be rewritten in terms of cut:

$$R_s^b = B^{n_e} \cdot \sum_{o \in S(n_v)} \sum_{I_1, \dots, I_{k-1} \in \mathbb{N}^*} \prod_{i=1}^{k-1} D^{I_i \cdot C(o^{-1}([i]))} \quad (1.16)$$

$$= B^{n_e} \cdot \sum_{o \in S(n_v)} \prod_{i=1}^{k-1} \sum_{I_i \in \mathbb{N}^*} D^{I_i \cdot C(o^{-1}([i]))} \quad (1.17)$$

$$= B^{n_e} \cdot \sum_{o \in S(n_v)} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{D^{C(o^{-1}([i]))}}{1 - D^{C(o^{-1}([i]))}}. \quad (1.18)$$

□

Now we take offset edges into account. Since the offset graph is acyclic (Proposition 1.4.12), we relabel the vertices so that for all oriented offset edge (v_i, v_j) with $i < j$, the edge is offset toward j . In other words, vertices are relabeled according to a linear extension of the partial order induced by the offset graph.

Consider an offset edge $e = (v_i, v_j) \in \mathcal{O}$ with $i < j$. We say that e is a *tie* (resp. an *inversion*, resp. an *anti-inversion*) if $o(i) = o(j)$ (resp. $o(i) > o(j)$, resp. $o(i) < o(j)$). We call n_t (resp. n_i , resp. n_a) the number of ties (resp. inversions, resp. anti-inversions). Whenever it is necessary, we specify which surjection is concerned by writing $n_t(o)$ for instance.

Lemma 1.5.2. *For any unlabeled scheme $s \in \mathcal{S}$, we have:*

$$R_s^b = B^{n_e} \cdot \sum_{o \in S(n_v)} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \Phi_o(i) \right) \cdot D^{n_t(o) + n_a(o) - n_i(o)}. \quad (1.19)$$

Proof. Consider the formula given in Lemme 1.5.1. To take offset edges into account, we need to change slightly the weight of each offset edge e . If e is a tie, the corresponding branch was given weight B instead of $B \cdot D$. If e is an inversion, the corresponding branch was given weight $B \cdot D^{h_{o(i)} - h_{o(j)}}$ instead of $B \cdot D^{h_{o(i)} - h_{o(j)} - 1}$. If e is an anti-inversion, the corresponding branch was given weight $B \cdot D^{h_{o(j)} - h_{o(i)}}$ instead of $B \cdot D^{h_{o(j)} + 1 - h_{o(i)}}$. To take these defects into account we therefore need to multiply by a factor depending on the number of inversions, ties, and anti-inversions. This leads to Lemme 1.5.2. \square

1.5.2 Proof of Théorème 1.4.9

We start from the formula of Lemme 1.5.2 and use the fact that $\overline{\Phi_o(i)} = -(1 + \Phi_o(i))$. Recall that B is asymmetric. Therefore,

$$\overline{R_s^b} = \overline{B^{n_e}} \cdot \sum_{o \in S(n_v)} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \overline{\Phi_o(i)} \right) \cdot D^{-n_t - n_a + n_i} \quad (1.20)$$

$$= (-1)^{n_e} \cdot B^{n_e} \cdot \sum_{o \in S(n_v)} \left((-1)^{k-1} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} (1 + \Phi_o(i)) \right) \cdot D^{-n_t - n_a + n_i}. \quad (1.21)$$

Given two surjections o and p , we say that o *refines* p and p *coarsens* o , and write $o \preceq p$, if:

$$\forall x, y; \quad o(x) = o(y) \Rightarrow p(x) = p(y). \quad (1.22)$$

This means equivalently that the partial order on vertices induced by o is an extension of the one induced by p .

A term of the development of the product $\prod_{i=1}^{k(o)-1} (1 + \Phi_o(i))$ corresponds to a permutation p that coarsens o ; indeed, for each i , we have to choose 1 or $\Phi_o(i)$ in the product, which corresponds to choosing whether or not to merge $o^{-1}(i)$ and $o^{-1}(i+1)$. Therefore, $\prod_{i=1}^{k(o)-1} (1 + \Phi_o(i)) = \sum_{p \succeq o} \prod_{i=1}^{k(p)-1} \Phi_p(i)$.

Hence we can rewrite the previous expression by first developing the product, and then interverting the two summations:

$$\overline{R_s^b} = (-1)^{n_e} \cdot B^{n_e} \cdot \sum_{o \in S(n_v)} \left((-1)^{k(o)-1} \cdot \sum_{p \succeq o} \prod_{i=1}^{k(p)-1} \Phi_p(i) \right) \cdot D^{-n_t(o) - n_a(o) + n_i(o)} \quad (1.23)$$

$$= (-1)^{n_e} \cdot B^{n_e} \cdot \sum_{p \in S(n_v)} \prod_{i=1}^{k(p)-1} \Phi_p(i) \cdot \sum_{o \preceq p} \left((-1)^{k(o)-1} \cdot D^{-n_t(o) - n_a(o) + n_i(o)} \right). \quad (1.24)$$

The *reverse* \bar{p} of a surjection p is defined as follows: $\bar{p}(i) = k(p) + 1 - p(i)$. Since $C(\mathcal{S}) = C(\mathcal{S}^{\mathcal{L}})$, $\prod_{i=1}^{k(p)-1} \Phi_p(i) = \prod_{i=1}^{k(\bar{p})-1} \Phi_{\bar{p}}(i)$. As a consequence:

$$\overline{R_s^b} = (-1)^{n_e} \cdot B^{n_e} \cdot \sum_{p \in S(n_v)} \prod_{i=1}^{k(\bar{p})-1} \Phi_{\bar{p}}(i) \cdot \sum_{o \preceq p} \left((-1)^{k(o)-1} \cdot D^{-n_t(o) - n_a(o) + n_i(o)} \right) \quad (1.25)$$

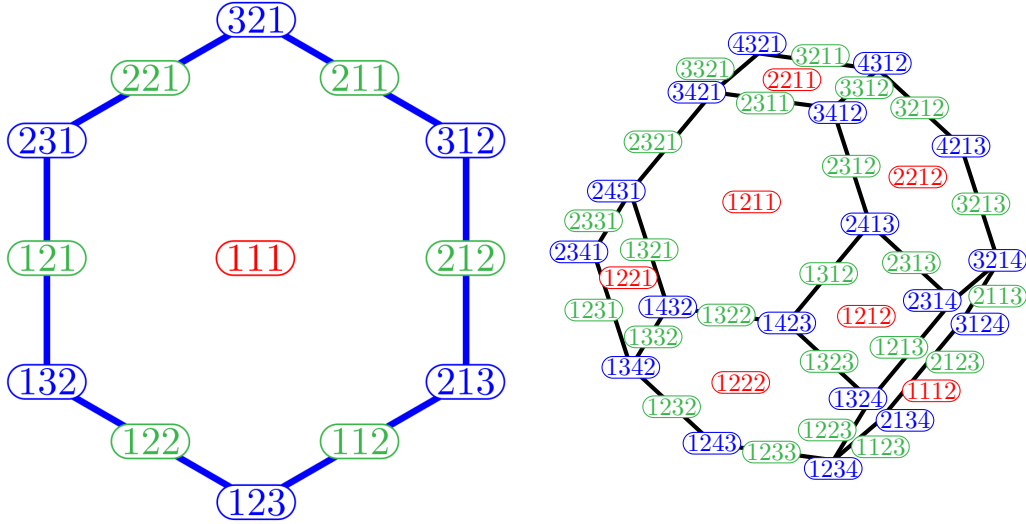


Figure 1.16: Permutahedra of dimension 2 and 3. Faces of dimension 0, 1, and 2 are represented in blue, green, and red.

We apply the change of variable $p \rightarrow \bar{p}$:

$$\overline{R}_s^b = (-1)^{n_e} \cdot B^{n_e} \cdot \sum_{p \in S(n_v)} \prod_{i=1}^{k(p)-1} \Phi_p(i) \cdot \sum_{o \preceq \bar{p}} \left((-1)^{k(o)-1} \cdot D^{-n_t(o)-n_a(o)+n_i(o)} \right). \quad (1.26)$$

To conclude that R_s^b is symmetric, it is now enough to prove that for any offset graph, and for any surjection p , the following lemma holds:

Lemma 1.5.3. *For any surjection p :*

$$\sum_{o \preceq \bar{p}} \left((-1)^{k(o)-1} \cdot D^{-n_t(o)-n_a(o)+n_i(o)} \right) = (-1)^{n_e} \cdot D^{n_t(p)+n_a(p)-n_i(p)}. \quad (1.27)$$

The general case of Lemme 1.5.3 will be proved in Section 1.5.3.

Remark 21. Note that, when the offset graph is empty, this formula can be obtained as a direct byproduct of the Euler-Poincaré formula applied to the permutahedron. The n -permutahedron (see Figure 1.16) is a polytope defined as the convex hull of the set of permutations: $Perm_n = Conv\{(\sigma_1, \sigma_2 \cdots \sigma_n) \text{ such that } \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$, where \mathfrak{S}_n is the set of permutations of size n . The n -permutahedron has dimension $n - 1$. The k -dimensional faces of the n -permutahedron correspond to surjections from $[n]$ to $[n - k]$. If $o \preceq p$, then the face corresponding to o is included into that of p .

The Euler-Poincaré formula states that, if f_k denotes the number of i -dimensional faces of a polytope, then: $\sum_{k \geq 0} (-1)^k f_k = 0$. A face of a polytope is also a polytope; in the case of the permutahedron, it is even the Cartesian product of lower-dimensional permutahedra. Therefore, the Euler-Poincaré formula applied to the face corresponding to \bar{p} implies: $\sum_{o \preceq \bar{p}} (-1)^{k(o)-1} = (-1)^{n_e}$.

1.5.3 Proof of Lemme 1.5.3

We now consider a more general context than above, with a variable X_{ij} for all $i < j$. For a surjection p of size n_v we define a monomial $X(p) = \prod_{i < j} (\delta_{p(i) > p(j)} X_{ij} + \delta_{p(i) \leq p(j)} X_{ij}^{-1})$. Note that no two permutations have the same monomial.

To a given surjection p , we associate a so-called *canonical permutation* $r(p)$ as follows:

$$r(p)(i) = |\{j \text{ such that } p(j) < p(i)\}| + |\{j \text{ such that } p(j) = p(i) \text{ and } j \geq i\}|.$$

This permutation is the linear extension of the partial order induced by p , such that each time a choice is to be made, elements are taken in decreasing order.

Lemma 1.5.4. *The alternated sum of monomials of surjections that refine a given surjection p is equal to the monomial of the canonical permutation of p :*

$$\sum_{o \leq p} (-1)^{k(o)} X(o) = (-1)^{n_v} X(r(p)). \quad (1.28)$$

Proof. We group all surjections refining p that have the same monomial. For any monomial, there is exactly one such surjection that is a permutation.

Let q be a permutation that refines p . An *admissible ascent* of a permutation q is a pair of numbers $(i, i+1)$ such that $q(i+1) < q(i)$ and $p(i+1) = p(i)$. The surjections that refine p and have same monomial as q are those which can be obtained from q by giving the same value to the pairs of successive numbers corresponding to some of its *admissible ascents*. The set of such surjections is therefore in bijection with the set of subsets of admissible ascents.

Consequently, except if q has no admissible ascent, the alternated sum of the ordered partitions that have the same monomial as q is 0. The only permutation that has no admissible ascent is $r(p)$, and $k(r(p)) = n_v$ (since $r(p)$ is a permutation). \square

Lemma 1.5.5. *For any surjection p , the following equality holds:*

$$X(r(p)) = X(\bar{p})^{-1}. \quad (1.29)$$

Proof. For $i < j$:

- If $p(i) > p(j)$, then the power of X_{ij} in $X(r(p))$ is -1 and the power of X_{ij} in $X(\bar{p})$ is 1.
- If $p(i) \leq p(j)$, then the power of X_{ij} in $X(r(p))$ is 1 and the power of X_{ij} in $X(\bar{p})$ is -1 .

\square

The following proposition is a direct consequence of Lemmes 1.5.4 and 1.5.5.

Proposition 1.5.6. *The reverse of the monomial associated to an ordered partition p is equal to the alternated sum of monomials associated to the ordered partitions that refine the reverse of p :*

$$X(p)^{-1} = \sum_{o \leq \bar{p}} (-1)^{k(o) - n_v} X(o). \quad (1.30)$$

We now specialize Proposition 1.5.6, so as to obtain a proof of Lemme 1.5.3.

Proof of Lemme 1.5.3. Recall that the vertices have been relabeled in an order which is a linear extension of the offset graph, and by consequence any oriented edge (i, j) of the offset graph satisfies $i < j$.

We use Proposition 1.5.6, and specialize X_{ij} to D to a power equal to the number of oriented offset edges (i, j) . We obtain:

$$X(p)^{-1} = \sum_{o \preceq \bar{p}} (-1)^{k(o) - n_v} X(o) \quad (1.31)$$

$$D^{n_t(p) + n_a(p) - n_i(p)} = \sum_{o \preceq \bar{p}} (-1)^{k(o) - n_v} \cdot D^{-n_t(o) - n_a(o) + n_i(o)}. \quad (1.32)$$

The Euler formula applied to a scheme states that $n_v - n_e = 1 - 2g$ and by consequence $(-1)^{n_v} = (-1)^{n_e + 1}$, which conclude the proof. \square

1.6 Opening non-bicolorable maps

In this section, we extend the opening bijection (Théorème 1.3.2) to general maps (not necessarily bicolorable), by considering fractional orientation. This generalization is based on the work of Bouttier, di Francesco and Guitter in [BDFG02], that was later revisited by Albenque and Poulalhon in [AP15].

We proved in Théorème 1.3.2 that the opening algorithm, applied to bicolorable maps with dual-geodesic orientation, is actually a bijection with a certain family of unicellular blossoming maps (namely \mathcal{O}). However, if the map is non-bicolorable, it is not possible to define its dual-geodesic orientation, because some adjacent faces may be at the same distances from the root face. Fractional orientation allow to deal with the case of adjacent faces with the same label.

We define the *face-doubled* (resp. *vertex-doubled*) version of a map m , denoted m^{\parallel} (resp. m^{\dagger}), as the map m where each edge is replaced by 2 adjacent copies of the edge (resp. divided into 2 parts by adding a new vertex in the midst of it). The faces (resp. vertices) hereby created are called *edge-faces* (resp. *edge-vertices*). Note that these are dual notions, so that $(m^{\parallel})^* = (m^*)^{\dagger}$, and that m^{\parallel} is bicolorable, while m^{\dagger} is bipartite. A *face-doubled orientation* (resp. *vertex-doubled orientation*) of a map m is an orientation of m^{\parallel} (resp. m^{\dagger}), with the additional constraint that no edge-face (resp. edge-vertex) is clockwise (resp. a sink).

The *geodesic doubled-orientation* (resp. *dual-geodesic doubled-orientation*) of a map m is the vertex-doubled (resp. face-doubled) orientation of m corresponding to the geodesic (resp. dual-geodesic) orientation of the bipartite map m^{\dagger} (resp. the bicolorable map m^{\parallel}).

These orientations of the doubled map can alternatively be seen as *fractional orientations* of the original map. This means that for each edge of the map, instead of choosing either one orientation of the edge or the other, we choose a fractional combination of the 2. In particular, we use *half-orientations*, which means that each edge is either oriented in one direction, or in both, in which case it is called *bi-oriented*. Note that half-orientations of a map are in bijection with doubled orientations of the doubled version of the map. A half-orientation is called *bipartite* (resp. *bicolorable*) if its corresponding orientation in the vertex-doubled (resp. face-doubled) map is bipartite (resp. bicolorable).

Note that the geodesic half-orientation is bipartite. It can alternatively be defined by labeling all vertices by their distance to the root, and orienting each edge according to the labels of its adjacent vertices: toward the vertex with smaller label if the labels are different, or bi-oriented if the labels are equal.

The work of Propp can perfectly be applied to orientations of the doubled version of a map. Note however that the resulting lattice will contain orientations that are not doubled orientations, but that by definition, the minimum of the lattice will necessarily correspond to a doubled orientation, which makes it possible to transcribe it back to a fractional orientation of the original map.

Theorem 1.6.1 (Propp). *The transitive closure of the vertex-push (resp. face-flip) operation endows the set of bipartite (resp. bicolorable) orientations of the vertex-doubled (resp. face-doubled) version of a fixed map with a structure of distributive lattice, whose minimum is a vertex-doubled (resp. face-doubled) orientation, namely the geodesic (resp. dual-geodesic) doubled orientation.*

A face of a map with a fractional orientation is called *clockwise* if it has no edge oriented completely counterclockwise. Théorème 1.6.1 leads to Corollary 1.6.2:

Corollary 1.6.2. *The dual-geodesic half-orientation of a map is the unique bicolorable half-orientation of this map with no clockwise face other than the root face.*

Algorithm 10 the fractional opening algorithm

Input: A map m embedded on a surface \mathcal{S} , rooted at a corner c_0 , along with a half-orientation.

Output: A half-oriented blossoming embedded graph $b = \text{open}(m)$, embedded on \mathcal{S} .

Set $c = c_0$, $b = \emptyset$, and $E_V = \emptyset$ (E_V is the set of visited edges).

Repeat:

$e = \text{NE}(c)$.

If $e \notin E_V$ and e is oriented toward $\text{vertex}(c)$ or bi-oriented **Then:**

add e to E_V

add e to b

$c \leftarrow \text{NaF}(c)$

Else: If $e \notin E_V$ and e is fully outgoing from $\text{vertex}(c)$ **Then:**

add e to E_V

Add a bud to b in place of e .

$c \leftarrow \text{NaV}(c)$

Else: If $e \in E_V$ and e is fully oriented toward $\text{vertex}(c)$ **Then:**

Add a leaf to b in place of e .

$c \leftarrow \text{NaV}(c)$

Else: If $e \in E_V$ and e is outgoing from $\text{vertex}(c)$ or bioriented **Then:**

$c \leftarrow \text{NaF}(c)$

End If

Until: $c = c_0$

We now redefine the opening algorithm (see Algorithm 10), by always considering that a bi-oriented edge is visited backward first. This roughly amounts to applying the classical opening algorithm to the face-doubled version of the map. Note that this algorithm can still be seen as the dual of a tour of a breadth-first-search exploration tree. The closing algorithm remains the same.

We redefine some properties to match fractional orientations. A unicellular map is called *well-half-oriented* if, in a tour of the face, the first occurrence of any edge is

either oriented backward or bi-oriented. The definition of a *well-labeled* map is the same, with the additional rule that the labels of corners adjacent around a vertex and separated by a bi-oriented edge have to be equal.

The set of well-rooted well-labeled well-half-oriented blossoming unicellular maps, is denoted \mathcal{OG} . We count maps of \mathcal{M} and \mathcal{OG} by vertex degrees of any parity (unlike bicolored maps, that we counted earlier only by even vertex degrees), so that for instance $M(\mathbf{z}) = M(z_1, z_2, \dots) = \sum_{m \in \mathcal{M}} \prod_{k=1}^{\infty} z_k^{v_k(m)}$.

We now state the generalization of Théorème 1.3.2 to general maps.

Theorem 1.6.3. *The opening algorithm on a dual-geodesically half-oriented map is a weight-preserving bijection from \mathcal{M}_g to \mathcal{OG}_g , whose reverse is the closing algorithm. Therefore, $M_g(\mathbf{z}) = OG_g(\mathbf{z})$.*

Remark 22. This result looks similar to Corollary 1.3.3. However, the bijection leading to Corollary 1.3.3 is really from 4-valent bicolored maps (to some blossoming maps), rather than from general maps. Although we were able, using Corollary 1.3.3 in conjunction with Proposition 1.2.2, to obtain rich enumerative and structural results on general maps, the bijection as it stands cannot be specialized to control the degree of faces, for instance.

In contrast, the bijection introduced in Section 1.6, is an opening bijection for general maps, and allows such specialization. It could be a starting point to obtaining further more precise result on the structure of general maps, as it was the case for planar maps [BDFG02].

Chapter 2

Bivariate rationality of higher-genus maps

This chapter is extracted from [AL19], which is still in preparation but will be submitted to a journal soon. It is a common work with my PhD advisor Marie Albenque.

Abstract

In [Lep19], the second author described a bijection between maps of genus g with n edges and a family of blossoming unicellular maps of genus g with n vertices, and used it to give the first combinatorial explanation of the parametric rationality of the generating series of maps of genus g , that was proved in [BC91].

Using the same bijection, we refine the decomposition of the obtained maps, so as to be able to keep track of the number of vertices and faces of the initial map. Improving and generalizing the method first developed in [Lep19], we then give the first combinatorial explanation of the bivariate parametric rationality of maps of genus g , enumerated by both vertices and faces, that was proved in [BCR93].

2.1 Introduction

A map of genus g is a proper embedding of a connected graph on the torus with g holes, such that all faces are topological discs, and considered up to orientation-preserving homeomorphisms. Maps were first introduced by Tutte in the 60's. In a series of papers, he developed a robust method that allowed him to obtain many enumerative results, through an analytic resolution of generating series obtained by a combinatorial decomposition [Tut62, Tut63]. Since then, the enumeration of maps has been studied extensively in various fields of mathematics and mathematical physics; other classical techniques to enumerate maps include matrix integrals, topological recursion and bijection with decorated trees (see for instance [LZ04], [Eyn11], [Sch15] and references therein).

The first enumerative results for maps of positive genus were obtained by Bender and Canfield in the 90's. They combined the method developed by Tutte together with some clever manipulation of recurrence relations on the generating functions to obtain first the asymptotic behavior of maps of a given genus enumerated by

edges [BC86]. They then refined their result into the following theorem. Let $M_g(z)$ denote the generating series of rooted maps of genus g enumerated by their number of edges, then:

Theorem 2.1.1 ([Tut63] for $g = 0$, [BC91] for $g \geq 1$). *For any genus g , the generating series $M_g(z)$ is a rational function of T , where T is (uniquely) defined by $T = z + 3T^2$.*

Though the number of maps with a fixed number of edges is finite, this is not the case for maps with a fixed number of vertices (or a fixed number of faces). But, since the number of vertices, edges, and faces (denoted respectively n_v , n_e , and n_f) of a map of genus g , are related by the famous Euler equation:

$$n_v - n_e + n_f = 2 - 2g, \quad (2.1)$$

a natural way to refine the result of Bender and Canfield is to count maps by both their number of vertices and their number of faces. Arquès obtained the first results in that direction and gave explicit formulae for the bivariate generating functions of maps in the sphere or in the torus [Arq85, Arq87]. In 1993, Bender, Canfield and Richmond [BCR93] then generalized Theorem 2.1.1 to every genus and gave an expression for the bivariate generating function $M_g(z_\bullet, z_\circ)$ enumerating maps of genus g counted by vertices and faces. Their expression was further simplified by Arquès and Giorgetti [AG99]:

Theorem 2.1.2 ([BCR93, AG99]). *For any fixed $g \geq 1$, $M_g(z_\bullet, z_\circ)$ has the following form:*

$$M_g(z_\bullet, z_\circ) = \frac{T_\bullet T_\circ (1 - T_\bullet - T_\circ) P_g(T_\bullet, T_\circ)}{((1 - 2T_\bullet - 2T_\circ)^2 - 4T_\bullet T_\circ)^{5g-3}}, \quad (2.2)$$

where T_\bullet and T_\circ are defined by $z_\bullet = T_\bullet(1 - T_\bullet - 2T_\circ)$ and $z_\circ = T_\circ(1 - T_\circ - 2T_\bullet)$, and $P_g(x, y)$ is a symmetric polynomial with integer coefficients, of total degree not greater than $6g - 6$.

A much more recent result about the bivariate enumeration of maps was given by Carrell and Chapuy [CC15]. Using the so-called KP-hierarchy, they obtain very nice recurrence relation for the number of maps with given genus and given number of vertices and faces, which allows them to compute very efficiently the coefficients of the polynomial P_g appearing in Theorem 2.1.2.

The simple formulae obtained in Theorem 2.1.1 call for a combinatorial explanation. By that, we mean a decomposition of rooted maps into simple objects (enumerated by a rational generating function) onto which are glued trees (enumerated by T). For $g = 0$, corresponding to the “planar case”, this was done by Cori and Vauquelin [CV81] who gave a bijection – later refined and simplified by Schaeffer [Sch98] – between planar maps and a certain class of labeled trees. Since planar maps are in bijection with 4-valent maps (see Proposition 2.2.1), another bijective explanation of Theorem 2.1.1 in the planar case was also given by Schaeffer in [Sch97], where he obtained a bijection between 4-valent maps and some decorated trees.

The bijection of [Sch98] was extended to higher genus in [CMS09], which enables to prove bijectively a statement slightly weaker than Theorem 2.1.1. In [Lep19], the second author extends the work of [Sch97] to higher genus, and, by following

the methodology developed in [CMS09], obtained a combinatorial explanation of Theorem 2.1.1.

The purpose of this paper is to provide a combinatorial explanation of the bivariate parametric rationality expressed in Theorem 2.1.2 by refining the decomposition given in [Lep19].

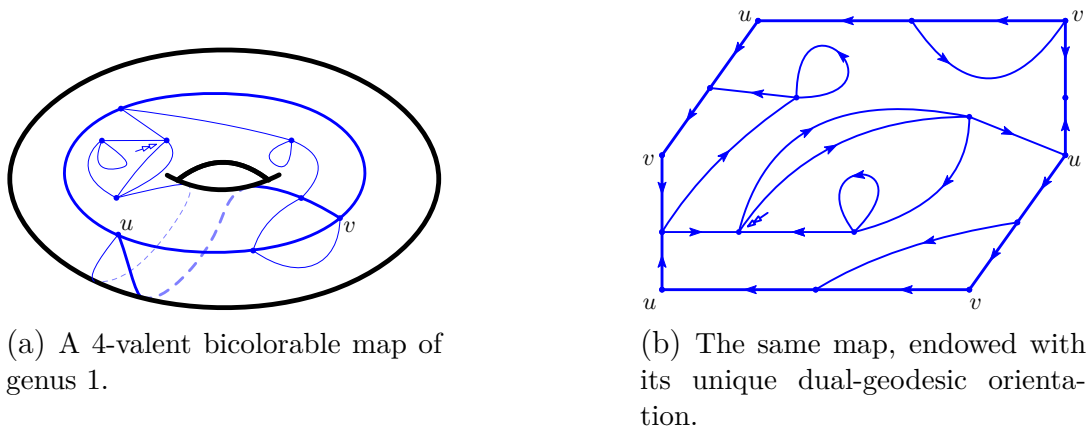
In the process, 3 main difficulties appear:

- We start with the *opening algorithm* (Theorem 2.3.7) generalizing the bijection of Schaeffer [Sch97], introduced in [Lep19]. We then follow the methodology introduced in [CMS09] and used in [Lep19], so as to decompose opened maps into *cores*, onto which are glued 2 sorts of trees, namely *black trees* and *white trees*, enumerated by T_\bullet and T_\circ . This decomposition is not bijective, but rather a many-to-many application, that sometimes mess up with colors. We prove in Theorem 2.3.11 that these changes of colors cancel out on average.
- Next, in order to prove that the generating series of cores is rational, following [CMS09], we decompose them into *schemes* decorated by some Motzkin paths. In the univariate case, these paths were expressed in terms of a generating function D , and a lemma from [CMS09] stated that the rationality of a generating function is equivalent to this series being rational and symmetric in D . Here, the paths are expressed in terms of two series denoted D_\circ and D_\bullet , and a bivariate version of the former lemma is stated in Lemma 2.4.3.
- Finally, in [Lep19], the D -symmetry of the generating function of cores is proved by grouping cores depending on a certain surjection encoding the relative ordering of the vertices of their scheme. However, this construction could not be easily extended to the bivariate setup. By encoding the relative ordering of vertices of a scheme by a permutation rather than a surjection, we provide a nicer, less convoluted proof of the univariate symmetry of the series of cores expressed in Theorem 2.5.13, even providing a closed formula in Lemma 2.5.14. We extend this construction to the bivariate setup, and obtain in Lemma 2.5.16, rather than a closed formula, a recurrence equation for the desired series, allowing to conclude about the symmetry of the series of cores in D_\bullet and D_\circ in Theorem 2.5.1.

Organization of the paper:

Section 2.2 is dedicated to introducing maps in more details, as well as some subfamilies of maps. In Section 2.3, we describe the opening bijection, as well as some additional decomposition steps (already given in [Lep19]), while making sure that we are able to track both the number of vertices and faces of the original map. In Section 2.4, we study the bivariate series of some Motzkin paths naturally appearing in Section 2.3, so as to prove, in Lemma 2.4.3, that the rationality stated in Theorem 2.1.2 amounts to the symmetry of a certain generating function. In Section 2.5, we prove the said symmetry, first in the univariate case, improving the proof of Theorem 2.1.1 given in [Lep19], and then in the bivariate case, concluding the proof of Theorem 2.1.2.

Acknowledgment: Both authors warmly thank Éric Fusy for suggesting this problem.



(a) A 4-valent bicolorable map of genus 1.

(b) The same map, endowed with its unique dual-geodesic orientation.

Figure 2.1: Two representations of the same 4-valent bicolorable map. In a, this is the classical representation of a map on a torus. It can be retrieved from b by gluing the opposite sides of the hexagon. The edges between the vertices u and v glued together are represented by bold edges in a. In the rest of the article, the representation of b will always be adopted.

2.2 Notations, definitions and first constructions

2.2.1 Notations

In this article, combinatorial families are named with calligraphic letters, their generating series in the corresponding capital letter, and an object of the family is usually denoted by the corresponding lower case letter. For $n \in \mathbb{N}^*$, we set $[n] = \{1, \dots, n\}$.

2.2.2 Maps

An embedded graph is a proper embedding of a connected graph on a surface, considered up to orientation-preserving homeomorphisms. A *face* of an embedded graph is a connected component of its complementary in the surface. An embedded graph is a *map* if all its faces are topologically equivalent to disks. In particular the underlying graph of a map is connected. In this work we always consider orientable surfaces, which can be classified by their genus. The genus of a map is the genus of its underlying surface.

For m a map, we denote respectively $V(m)$, $E(m)$ and $F(m)$, its set of vertices, edges and faces. Additionally, let $n_v(m)$, $n_e(m)$, and $n_f(m)$ denote respectively $|V(m)|$, $|E(m)|$ and $|F(m)|$. Whenever there is no ambiguity, we only write n_v for $n_v(m)$ (and so on). For m a map of genus g , Euler formula gives the following relation between n_v , n_e and n_f :

$$n_v - n_e + n_f = 2 - 2g. \quad (2.3)$$

An edge can be seen as the reunion of two *half-edges*, such that the removal of the middle point of an edge separates the two half-edges. The *degree* of a vertex is the number of half-edges adjacent to it. Equivalently, it is the number of edges adjacent to this vertex, with multiplicity. Similarly, the *degree* of a face is the number of edges adjacent to this face, with multiplicity.

A *corner* is an ordered pair (h, h') , where h and h' are two half-edges adjacent to the same vertex v such that h' directly follows h in counterclockwise order around v . The set of corners of a map m is denoted $C(m)$.

A map m is *rooted* by marking one of its corners, which is called the *root corner* and denoted ρ_m . The vertex and the face incident to ρ_m are respectively the root vertex and the root face. In the rest of the paper, all maps considered are assumed to be rooted.

The set of maps of genus g is denoted \mathcal{M}_g . The set of maps of genus g with n edges (resp. with n_v vertices and n_f faces) is denoted $\mathcal{M}_{g;n}$ (resp. $\mathcal{M}_{g;n_v,n_f}$). We recall the definition of the *univariate* and *bivariate* generating series of maps of genus g given in the introduction:

$$M_g(z) := \sum_{m \in \mathcal{M}_g} z^{n_e(m)} = \sum_{n > 0} |\mathcal{M}_{g;n}| \cdot z^n \quad (2.4)$$

$$M_g(z_\bullet, z_\circ) := \sum_{m \in \mathcal{M}_g} z_\bullet^{n_v(m)} z_\circ^{n_f(m)} = \sum_{n_v, n_f > 0} |\mathcal{M}_{g;n_v,n_f}| \cdot z_\bullet^{n_v} z_\circ^{n_f}. \quad (2.5)$$

A map is called *4-valent* if all its vertices have degree 4 and *bicolorable* if its faces can be properly colored in black and white (i.e. in such a way that every edge separates faces of distinct colors), see Figure 2.1.

Convention 1. Let m be a bicolorable map. By convention, we always consider the unique proper coloring (in black and white) of the faces of m in which the root face is black.

The set of 4-valent bicolorable maps of genus g is denoted \mathcal{BC}_g^\times . The set of 4-valent bicolorable maps of genus g with n faces (resp. n_\bullet black faces and n_\circ white faces) is denoted $\mathcal{BC}_{g;n}^\times$ (resp. $\mathcal{BC}_{g;n_\bullet,n_\circ}^\times$). The univariate and bivariate generating series of 4-valent bicolorable maps of genus g are defined as follows:

$$BC_g^\times(z) := \sum_{n > 0} |\mathcal{BC}_{g;n}^\times| z^n \quad (2.6)$$

$$BC_g^\times(z_\bullet, z_\circ) := \sum_{n_\bullet, n_\circ > 0} |\mathcal{BC}_{g;n_\bullet,n_\circ}^\times| z_\bullet^{n_\bullet} z_\circ^{n_\circ}. \quad (2.7)$$

The following classical bijection was first introduced by Tutte [Tut63]:

Proposition 2.2.1 (radial map). *There exists an explicit bijection between maps of genus g with n_v vertices and n_f faces, and 4-valent bicolorable maps of genus g with n_v black faces and n_f white faces. By consequence:*

$$M_g(z_\bullet, z_\circ) = BC_g^\times(z_\bullet, z_\circ) \quad (2.8)$$

Proof. Let m be a map of genus g with n_v vertices and n_f faces. The radial of m is the map r defined as follows, see Figure 2.2.

First, the vertices of r correspond to the edges of m . Then, each corner (h, h') of m , gives rise to an edge in r between the vertices corresponding to the edges e and e' (with $h \subset e$ and $h' \subset e'$). More precisely, for $e \in E(m)$, write v_e for the corresponding vertex in r . Then consecutive corners around e (in counterclockwise order) correspond to consecutive edges around v_e (in counterclockwise order). Finally, we root r at the corner adjacent to the face f corresponding to the root vertex of m , and just after the edge of r corresponding to ρ_m , in counterclockwise order around f .

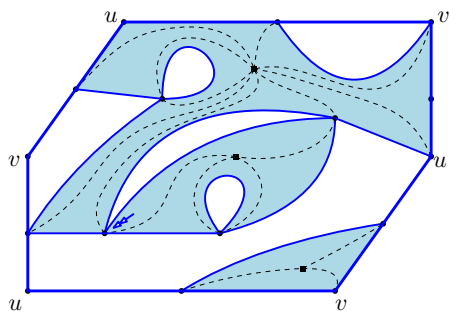


Figure 2.2: A map of genus 1 (dashed black) and its radial map (full blue).

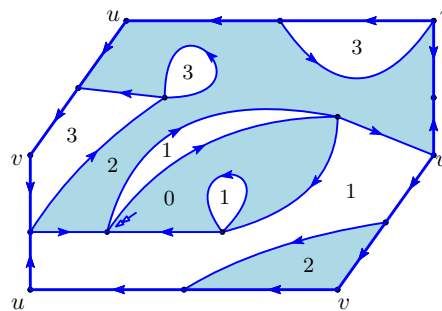


Figure 2.3: The construction of the dual-geodesic orientation based on the height of the faces.

It can be proved that r is a map of genus g . Moreover, since every edge of m is incident to 4 corners, r is 4-valent. Faces of r correspond either to a vertex or a face of m . For $c \in C(m)$, the corresponding edge of r separates the faces of r corresponding to the vertex and to the face adjacent to c . By consequence, r is bicolorable and the rooting convention ensures that vertices and faces of m correspond respectively to black and white faces of r . \square

A map m is *unicellular* if it has only one face. Then, the *clockwise contour* of m is the sequence of corners encountered while following the boundary of its unique face starting from ρ_m and in such a way that the face is on the right.

2.2.3 Orientations

An *orientation* of a map is an orientation of all its edges. An *oriented map* is a map endowed with an orientation. For the remainder of the section, let m be a fixed oriented map. A face of m is said to be *clockwise* (resp. *counterclockwise*) if its boundary forms a directed cycle such that ρ_m lies on its left (resp. on the right). For $e = \{u, v\} \in E(m)$ such that e is oriented from u to v in an orientation of m , we call u the *origin* of e and v its *destination*.

The orientation of m is *bicolorable* if along any simple oriented loop ℓ drawn on the underlying surface such that $\ell \cap V(m) = \emptyset$, there are as many edges (with multiplicity) crossing ℓ towards the right and towards the left. It is not difficult to see that if a map admits a bicolorable orientation, then it is bicolorable¹. In fact, reciprocally, any bicolorable map does admit one bicolorable orientation. We now describe one such orientation which will be quintessential to our work.

First, define the *height function* $h : F(m) \rightarrow \mathbb{N}$ of m as the unique function that satisfies the following conditions:

- The height of the root face is set to 0,
- The height of a non-root face is equal to the minimum of the height of its adjacent faces plus 1.

Note that $h(f)$ can equivalently be defined as the dual distance between f and the root face.

Since m is bicolorable, the heights of two adjacent faces differ exactly by 1. Then, the *dual-geodesic orientation* of m is defined as the orientation such that the face

¹Indeed, the existence of a bicolorable orientation implies directly that any cycle in the dual map has even length. Hence the dual map is bipartite.

on the left of an edge is the face with smaller height. It is clearly a bicolorable orientation.

It is easy to see that the dual-geodesic orientation is bicolorable and that a bicolorable map endowed with its dual-geodesic orientation has no clockwise face. The following theorem, stated in [Lep19, Corollary 2.19], which is a consequence of the more general work of Propp [Pro93], gives another characterization of the dual-geodesic orientation.

Theorem 2.2.2. *For any bicolorable map, the dual-geodesic orientation is the unique bicolorable orientation with no clockwise face.*

2.2.4 Blossoming maps, blossoming cores, blossoming schemes

A *blossoming map* is a map m , with some additional unmatched half-edges, called *stems*. The set of stems is denoted $S(m)$. The interior map \mathring{m} of m is the map induced by $E(m)$. For v a vertex of m , the *interior degree* of v – denoted $\mathring{\deg}(v)$ – is the degree of v in \mathring{m} . An orientation of a blossoming map m is an orientation of $E(m) \cup S(m)$. In an oriented blossoming map, a stem is called a *leaf* if it is oriented towards its incident vertex and a *bud* otherwise. We almost always consider blossoming maps with as many buds as leaves.

Convention 2. An oriented blossoming map is always rooted in a corner that precedes (in counterclockwise order) a bud. Equivalently, a rooted oriented blossoming map is a blossoming map with a marked bud.

Let m be a rooted blossoming unicellular map. The *core* of m – denoted $\Psi(m)$ – is the map obtained from m by removing iteratively its vertices of interior degree one. More precisely, for any vertex u of m of interior degree one, let v be the unique vertex incident to u . Erase u together with its stems, and add a stem σ adjacent to v in place of the former edge uv . If u was incident to the root bud, then make σ the root bud, and otherwise make it a leaf. A *blossoming core* is a rooted blossoming cellular map, such that all its vertices have interior degree greater than 1. By definition, for any rooted blossoming unicellular map m , $\Psi(m)$ is a blossoming core.

Let c be a blossoming core. The *scheme* of c – denoted $\Theta(c)$ – is the map obtained from c by removing its vertices of interior degree 2. More precisely, let u be a vertex of interior degree 2 and v, v' be its two neighbours. Remove u and its incident stems and merge the two former edges vu and uv' into an edge vv' .

The vertices of c of interior degree not smaller than 3 are called *scheme-vertices* and the stems incident to scheme-vertices are called *scheme-stems*. We identify scheme-vertices and scheme-stems of c with their image in $\Theta(c)$. We say that c is *scheme-rooted* if its root bud is a scheme-stem. By convention, the scheme $\Theta(c)$ of a scheme-rooted core c is rooted at the root bud of c . A *blossoming scheme* is a rooted blossoming cellular map, such that all its vertices have interior degree greater than 2. By definition, for any rooted blossoming scheme-rooted unicellular core c , $\Psi(c)$ is a blossoming scheme.

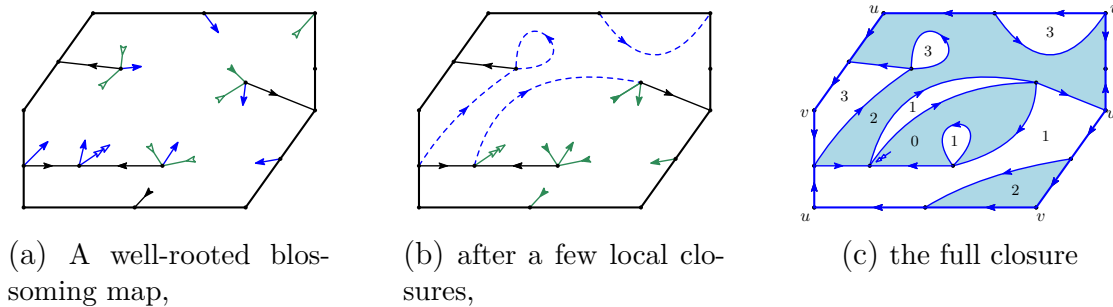


Figure 2.4: The closure of a well-rooted blossoming map.

2.3 Bijection for higher-genus maps, counting vertices and faces

2.3.1 Closure of blossoming maps

First definition of closure

Let m be a rooted blossoming unicellular map, with the same number of leaves and buds. The *closure* of m is defined as follows (see Figure 2.4). Consider the clockwise contour of m . It induces a cyclic ordering, denoted \preceq , on the stems. Let β be a bud (incident to $u \in V(m)$) such that the next stem for \preceq after β is a leaf ℓ (incident to $v \in V(m)$). The *local closure* of β consists in merging β and ℓ into an edge $\{u, v\}$ oriented from u to v . The local closure produces a new face which lies on the left of $\{u, v\}$ and which is denoted $f(\ell)$.

Next the *closure* of m is the map obtained by performing iteratively all possible local closures (after each local closure, the ordering on the stems is obtained by removing the two stems involved in the local closure from the previous ordering). The resulting map is rooted on the corner preceding the root bud before the closure.

We can prove that the closure is well-defined in the sense that it does not depend on the order in which the local closures are performed, and that all stems end up being matched.

Definition 2.3.1. *A rooted blossoming map m with the same number of leaves and buds is called well-rooted if the local closure involving its root bud can be the last local closure performed.*

Equivalently, a rooted blossoming map is well-rooted, if there is no local closure involving a bud β and a leaf ℓ such that $\beta \preceq \rho \preceq \ell$.

Equivalently, flip the orientation of the root bud of m to transform it into a “root leaf” and perform all the possible local closures. The resulting map will have two unmatched leaves and if one of those is the root leaf, then m is well-rooted.

Let m be a blossoming map and denote $\Phi(m)$ its closure. There is a clear bijection between edges of $\Phi(m)$ and the reunion of $E(m)$ and of the set of leaves of m . The edges in the image of $E(m)$ in $\Phi(m)$ are called *proper edges* and the other edges of $\Phi(m)$ are called *closure edges*. In the following, we identify $E(m)$ and the set of *proper-edges* of $\Phi(m)$ and view \hat{m} as a submap of $\Phi(m)$.

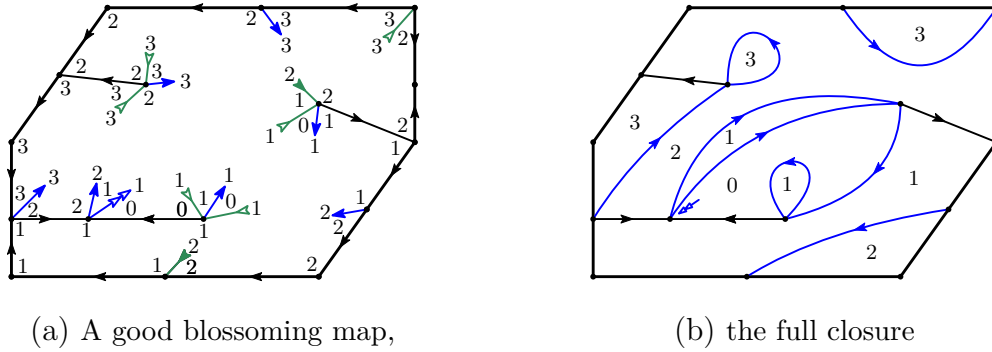


Figure 2.5: The closure with labels of a good blossoming map. The definition of good maps is given in Definition 2.3.6

Closure with labels

We now present an alternative description of the closure, slightly more formal, which is built upon a labeling of the corners of m . Let m be a rooted blossoming unicellular map. Recall that $C(m)$ denotes the set of corners of m . We define the *canonical labeling* $\lambda : C(m) \rightarrow \mathbb{Z}$ of m as follows. First, $\lambda(c) = 0$, where c is the corner directly preceding ρ_m . Then we perform a contour of m and apply the following rules. Let κ_1 and κ_2 be two successive corners, then the label $\lambda(\kappa_2)$ of κ_2 is equal to:

- $\lambda(\kappa_1)$ if κ_1 and κ_2 are incident along a common edge,
- $\lambda(\kappa_1) + 1$ if κ_1 and κ_2 are separated by a bud,
- $\lambda(\kappa_1) - 1$ if κ_1 and κ_2 are separated by a leaf.

The canonical labeling can be extended from corners to stems in the following way: for a stem σ adjacent to 2 corners with labels i and $i + 1$, we set $\lambda(\sigma) = i + 1$.

We can now give the new definition of the closure. Consider m endowed with its canonical labeling. For any bud β , denote $\ell_m(\beta)$ the first leaf after β (for \preceq) such that $\lambda(\beta) = \lambda(\ell_m(\beta))$. Then the *closure based on labels* of m is the map obtained by merging β and $\ell_m(\beta)$ into an oriented edge. The resulting map is rooted on the corner preceding the root bud before the closure.

The following result follows straightforwardly from the definitions:

Proposition 2.3.2. *Let m be a rooted unicellular blossoming map, with the same number of leaves and buds. Then the closure of m and the closure based on labels of m coincide.*

Moreover, m is well-rooted if and only if all its labels are non-negative.

2.3.2 Good blossoming maps and closures

The closure operation defined in the previous section can be applied *a priori* to any family of blossoming maps. Nevertheless, to obtain some interesting results, we now apply the closure on some specific families of maps. We follow the presentation of [Lep19, Section 3].

Definition 2.3.3 (well-oriented map). *A blossoming unicellular map endowed with an orientation is well-oriented if in a clockwise contour, each proper edge is first followed backward and then forward.*

It is easy to see that any unicellular map can be well-oriented in a unique way; perform the tour of the face and orient each proper edge backward the first time you follow it. Since the surface we consider is orientable, it implies that the second time an edge is followed, it will be forward.

Definition 2.3.4 (well-labeled map). *A blossoming oriented map is said to be well-labeled if its corners are labeled in such a way that:*

- *the root corner is labeled 0,*
- *the labels of two corners lying on the same side of an edge coincide, and*
- *the labels of two corners adjacent around a vertex differ by 1, in which case the higher label sits on the left of the separating edge (or stem).*

If such a labeling exists, it is called a good labeling of m .

Note first that an oriented map admits at most one good labeling. If m is a unicellular blossoming map, m is *well-labeled* if and only if the labeling λ of its corners defined in Section 2.3.1 is a good labeling.

Affirmation 2.3.5. *Let m be an oriented well-labeled (non-blossoming) map, then m admits a good labeling if and only if its underlying orientation is bicolorable.*

Consequently, the closure of a well-labeled unicellular map is a bicolorable map endowed with a bicolorable orientation.

Let u be a well-oriented well-labeled unicellular blossoming map. A leaf ℓ of u is said to be *black* (respectively *white*) if $\lambda(\ell)$ is *even* (respectively *odd*).

Definition 2.3.6. *The set of well-rooted, well-labeled, well-oriented unicellular 4-valent blossoming maps (respectively of genus g) enumerated by their number of leaves is denoted \mathcal{O}^\times (respectively \mathcal{O}_g^\times) and are called good maps.*

The subset of \mathcal{O}_g^\times of maps with $n_\bullet - 1$ black leaves and n_\circ white leaves is denoted $\mathcal{O}_{g;n_\bullet,n_\circ}^\times$.

Remark 4. The asymmetry in the definition of $\mathcal{O}_{g;n_\bullet,n_\circ}^\times$ comes *a priori* from the asymmetry in the rooting convention of blossoming maps (and more precisely from the fact that the root bud is always matched with a black leaf).

It can also be justified *a posteriori* by the following theorem.

Recall the definition of $\mathcal{BC}_{g;n_\bullet,n_\circ}^\times$ given in Section 2.2, we can refine Theorem 3.14 of [Lep19] into the following result:

Theorem 2.3.7. *The closure operation is a bijection between $\mathcal{O}_{g;n_\bullet,n_\circ}^\times$ and $\mathcal{BC}_{g;n_\bullet,n_\circ}^\times$.*

Proof. Theorem 3.14 of [Lep19] states that the closure operation is a bijection between \mathcal{O}_g^\times and \mathcal{BC}_g^\times , such that the number of leaves of a map in $\mathcal{O} \times_g$ is equal to the number of non-root faces of its closure.

Let $o \in \mathcal{O}_g^\times$ and let $m = \Phi(o)$. The definition of the closure based on labels ensures that all the corners incident to the same face f of $\Phi(o)$ have the same label, that we call *height* of f , and denote $h(f)$. Moreover, recall that for any leaf ℓ of m , $f(\ell)$ is the face of $\Phi(m)$ situated on the left of the closure edge associated to ℓ . Therefore f is a bijection between the set of leaves of m and $\mathcal{F}_{\Phi(m)} \setminus f_\rho$, such that,

additionally, the label of ℓ and $f(\ell)$ coincide. Consequently, since m is bicolourable, f is a bijection between black (resp. white) leaves of o and black (resp. white) non-root faces of m . Since the root face of m is black by definition, it concludes the proof. \square

Combining Theorem 2.3.7 and Proposition 2.2.1 gives the following result:

Corollary 2.3.8. *The closure operation combined with the radial construction gives a bijection between $\mathcal{O}_{g;n_\bullet,n_o}^\times$ and $\mathcal{M}_{g;n_\bullet,n_o}$. Consequently, for $g \geq 0$, we have the following equality of generating series:*

$$M_g(z_\bullet, z_o) = O_g^\times(z_\bullet, z_o). \tag{2.9}$$

2.3.3 From unicellular maps to schemes

Theorem 2.3.7 reduces the enumeration of bicolourable maps to the one of good unicellular maps. The now typical approach developed in [CMS09] to enumerate unicellular maps consists in decomposing a map into a core (as defined in Section 2.3.3) on which are grafted some trees. However, two technical issues need to be taken care of before applying this general strategy. The first one is to get rid of the assumption that we consider only well-rooted maps. The second one is to consider only scheme-rooted cores and not general cores. We explain how some ‘‘rerooting’’ techniques adapted from [Lep19, Sections 3 and 4] allow to bypass these difficulties.

We start with some definitions.

Definition 2.3.9 (rootable stem, well-rootable stem). *A stem is called rootable if it is either a leaf or the root bud. The set of rootable stems of a map m is denoted $S^\rho(m)$.*

Moreover, a rootable stem σ is called well-rootable if:

- *Either, it is the root bud and the map is well-rooted,*
- *Or, if by changing the root bud of m into a leaf and turning σ into the new root bud, we produce a well-rooted map.*

Definition 2.3.10 (unrooted map). *The undirected map of a blossoming map is the map obtained by forgetting the orientation of both the edges (if relevant) and the stems. Two rooted blossoming unicellular maps are called root-equivalent if they have the same undirected map and the same set of rootable stems (in particular, they do not necessarily have the same root). The unrooted map \bar{u} of a rooted unicellular blossoming map u is the equivalence class of u for root-equivalence.*

In the rest of the paper, all the families of unicellular maps (or families in bijection with some sets of unicellular maps by Theorem 2.3.7) can be refined by specifying the unrooted scheme (or the unrooted scheme of their image by the bijection). For instance, we denote $\mathcal{BC}_{\bar{s}}^\times$, the subset of \mathcal{BC}^\times such that $m \in \mathcal{BC}_{\bar{s}}^\times$ if and only if the unrooted scheme of $\Phi^{-1}(m)$ is equal to \bar{s} .

Recall the definition of scheme-rooted blossoming cores given in Section 2.2.4. The set of scheme-rooted well-labeled well-oriented 4-valent blossoming cores is denoted \mathcal{R}^\times . The subset of \mathcal{R}^\times restricted to cores of genus g with $n_\bullet - 1$ black leaves and n_o white leaves is denoted $\mathcal{R}_{g;n_\bullet,n_o}^\times$.

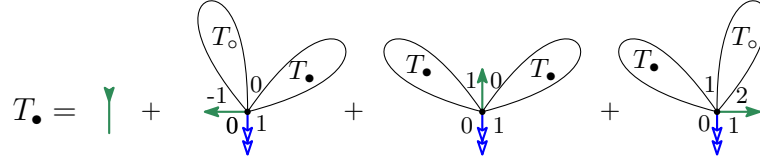


Figure 2.6: Schematic representation of the decomposition of trees in \mathcal{T}^{\times} that translate into the relations (2.10) for generating series. Labels around the root vertex are indicated.

When constructing the core of a unicellular blossoming map, the deleted edges form in fact a forest of rooted plane trees. We now define the set of these trees. Let \mathcal{T}^{\times} be the set of (possibly empty) well-oriented, well-labeled, 4-valent unicellular rooted maps of genus 0^2 .

To enumerate elements of \mathcal{T}^{\times} , we introduce the two following bivariate generating series:

$$T_{\bullet}(z_{\bullet}, z_{\circ}) = z_{\bullet} + \sum_{\substack{t \in \mathcal{T}^{\times} \\ t \text{ not empty}}} z_{\bullet}^{|\text{black leaves of } t|} z_{\circ}^{|\text{white leaves of } t|} \quad (2.10)$$

$$T_{\circ}(z_{\bullet}, z_{\circ}) = z_{\circ} + \sum_{\substack{t \in \mathcal{T}^{\times} \\ t \text{ not empty}}} z_{\bullet}^{|\text{white leaves of } t|} z_{\circ}^{|\text{black leaves of } t|} \quad (2.11)$$

Standard decomposition of trees as illustrated in Figure 2.6 allows to write the following equations, that characterize completely T_{\bullet} and T_{\circ} :

$$T_{\bullet}(z_{\bullet}, z_{\circ}) = z_{\bullet} + (T_{\bullet}^2 + 2T_{\bullet}T_{\circ}) \quad (2.12)$$

$$T_{\circ}(z_{\bullet}, z_{\circ}) = z_{\circ} + (T_{\circ}^2 + 2T_{\bullet}T_{\circ}) \quad (2.13)$$

We can now state the main result of this section:

Theorem 2.3.11. *Let r be in \mathcal{R}^{\times} . Then we have the following equality of generating series:*

$$O_{\bar{r}}^{\times}(z_{\bullet}, z_{\circ}) = \frac{R_{\bar{r}}^{\circ}(T_{\bullet}, T_{\circ})}{2g - |\mathring{V}_4(\bar{r})|}, \quad (2.14)$$

where $R_{\bar{r}}^{\circ}(T_{\bullet}, T_{\circ}) = R_{\bar{r}}(T_{\bullet}, T_{\circ}) + R_{\bar{r}}(T_{\circ}, T_{\bullet})$ and $\mathring{V}_4(\bar{r})$ denotes the set of vertices of interior degree 4 in \bar{r} .

This result is a refinement of [Lep19, Lemma 4.12] and combines two rerooting steps and a pruning, along with an analysis of the evolution of the parity of labels during the rerooting. Its proof requires to introduce a couple of additional definitions and is postponed to the next section.

2.3.4 Proof of Theorem 2.3.11

Definition 2.3.12. *Let o be a good blossoming unicellular map. A scheme trunk of o is either:*

²In genus 0, a unicellular blossoming map is a blossoming tree and \mathcal{T}^{\times} corresponds to the family of trees originally introduced by Schaeffer in [Sch97]

- an edge incident to a scheme vertex, which does not belong to the core (i.e, it is the “trunk” of a tree attached to the scheme),
- or, a rootable stem incident to a scheme vertex.

Recall the definition of the pruning operation Ψ defined in Section 2.2.4. A unicellular map u is made of a core on which are grafted some trees (of \mathcal{T}^\times), and the pruning of u can hence be seen as the removal of these trees. By consequence, the number of scheme trunks of u is equal to the number of the scheme-rootable stems of his core. It follows directly from [Lep19, Lemma 4.7], that a good unicellular map o has $2g - |V_4^\circ(\Psi(o))|$ scheme trunks.

Fix $o \in \mathcal{O}^\times$ and τ a scheme-trunk of o . Let $c = \Psi(o)$ be the blossoming core of o as defined in Section 2.2.4 (recall that by definition, the root bud of c corresponds to the tree which contains the root bud of o). By a slight abuse of notation, we denote by τ the rootable stem of c which corresponds to τ , see Figure 2.7b. Then, define c^τ to be the map obtained from c by changing the root bud into a leaf and changing τ into the root bud (see Figure 2.7c). The proof of [Lep19, Lemma 4.2] can be applied verbatim to prove that c^τ is a well-labeled well-oriented 4-valent map.

Definition 2.3.13. *Let s be a 4-valent well-oriented and well-labeled scheme-rooted blossoming core. A 4-valent scheme-rooted tree-decorated core is defined as $s^\star = (s, (t_\sigma)_{\sigma \in S^\rho(s)})$, where (t_σ) is a collection of trees in \mathcal{T}^\times indexed by the rootable stems of s .*

We denote \mathcal{D}^\times the set of 4-valent scheme-rooted tree-decorated cores.

Let $s^\star = (s, (t_\ell)) \in \mathcal{D}^\times$. A unicellular blossoming map with a marked scheme trunk is canonically associated to s^\star by the following construction. For any leaf σ of s , if t_σ is empty, do nothing, otherwise graft t_σ to s by merging the root bud of t_σ with σ . Let ρ be the root bud of s , graft t_ρ to s by merging its root bud with ρ (resp. doing nothing if t_ρ is empty) and mark the edge thus created (resp. mark ρ). In the following, we identify scheme-rooted tree-decorated cores with the corresponding blossoming maps with a marked scheme trunk.

Fix $o \in \mathcal{O}^\times$ and τ a scheme-trunk of o . Then o^τ is the scheme-rooted tree-decorated core obtained by replacing the root bud of o by a leaf and by marking τ , see Figure 2.7b. Note that by definition, the core of o^τ is $(\Psi(o))^\tau$, as defined above. In other words $\Psi(o^\tau) = (\Psi(o))^\tau$.

Proposition 2.3.14. *Let $o \in \mathcal{O}^\times$ and let τ be a scheme trunk of o . Then the application which maps (o, τ) to o^τ is a 2-to-1 application between 4-valent good unicellular maps with a marked scheme trunk and 4-valent scheme-rooted tree-decorated cores.*

Moreover, if we identify the corners of $\Psi(o^\tau)$ with their image in o , then their labels have either all the same parity or all the opposite parity. And, among the two preimages of o^τ , one has the same parity and the other one the opposite parity.

Proof. The first part of the proposition is only a reformulation of [Lep19, Lemma 4.7]. For the second part, observe that changing the orientation of a stem (i.e. transforming a bud into a leaf or vice-versa) does not change the parity of labels. Similarly, if a dangling tree not containing the root bud is replaced by a leaf, then the labels of the corners incident to that leaf are equal to the corresponding corners before deleting the tree.

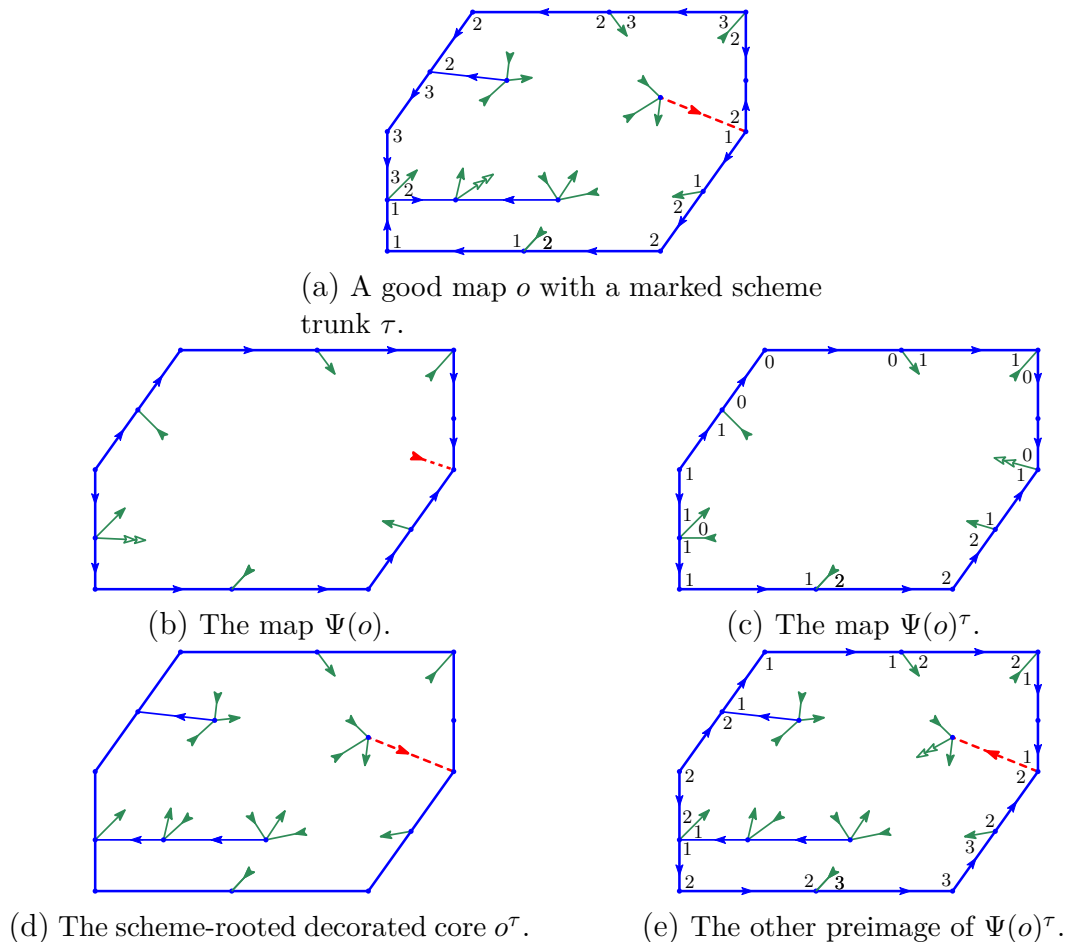


Figure 2.7: The different maps involved in the proof of Theorem 2.3.11

On the other hand, if we pick a rootable stem, make it the new root bud and transform the previous root bud into a leaf, then in the new map, either all labels switch parity or none do. Moreover, they switch parity if and only if the picked rootable stem is preceded by a corner with an odd label in the original map. For $o \in \mathcal{O}^\times$ and τ a scheme trunk of o , let ℓ be the leaf which is matched to the root bud of o in its closure. Then ℓ has label 1 and if we reroot o at ℓ , then the map we obtain is the other preimage of o^τ , which concludes the proof. \square

2.4 Criterion for rationality via Motzkin walks

In this section, we extend the methodology of [CMS09] to the bivariate case. We first introduce in Section 2.4.1 a family of weighted paths that will appear naturally in the enumeration of the blossoming cores. In Section 2.4.2, we give a criterion for rationality based on these weighted paths. Finally, in Section 2.4.3, we write the generating series of blossoming cores as a series in terms of the generating series of these paths.

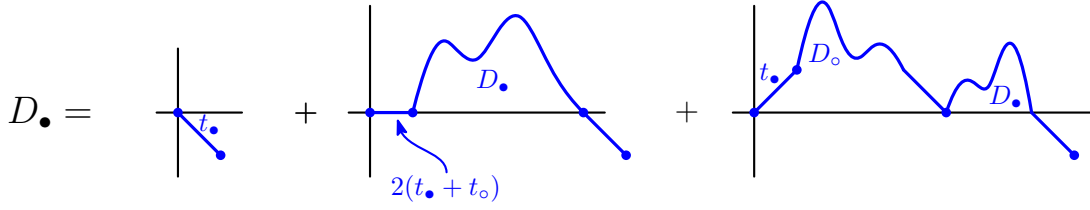


Figure 2.8: Schematic decomposition of primitive Motzkin walks.

2.4.1 Weighted Motzkin paths

A *Motzkin walk* w starting at height h of length ℓ is a walk in $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}$ starting at $(0, h)$ made of ℓ steps w_1, \dots, w_ℓ , such that $w_i \in \{(1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$, for $1 \leq i \leq \ell$. A step w_i is called *horizontal*, *up* or *down* if its second coordinate is respectively equal to 0, +1 or -1. For $1 \leq k \leq \ell$, the *height* at time k is equal to the ordinate of the walk when its abscissa is equal to x and the *height of the k -th step* is the height at time $k - 1$. The *increment* of w is the difference between the height at time ℓ and the height at time 0.

A *Motzkin bridge* is a Motzkin walk whose increment is equal to 0. A *primitive Motzkin walk* is a Motzkin walk starting at height 0 with increment -1 and such that the height of each step is non-negative. More generally, for $i, j \in \mathbb{Z}$, we denote $\mathcal{W}^{i \rightarrow j}$ the set of Motzkin walks starting at height i , with increment $j - i$.

For w a Motzkin walk, we denote respectively $h(w)$, $o(w)$ and $e(w)$, its number of horizontal steps, its number of non-horizontal steps with odd height (called odd steps) and its number of non-horizontal steps with even height (called even steps). For any $i, j \in \mathbb{Z}$, the following generating series will appear naturally in the next section:

$$W^{i \rightarrow j}(t_{\bullet}, t_{\circ}) = \sum_{w \in \mathcal{W}^{i \rightarrow j}} (2(t_{\bullet} + t_{\circ}))^{h(w)} t_{\bullet}^{e(w)} t_{\circ}^{o(w)} \quad (2.15)$$

We also consider the following generating series enumerating primitive Motzkin walks and Motzkin bridges:

$$D_{\bullet}(t_{\bullet}, t_{\circ}) = \sum_{\substack{w \text{ primitive} \\ \text{Motzkin walks}}} (2(t_{\bullet} + t_{\circ}))^{h(w)} t_{\bullet}^{e(w)} t_{\circ}^{o(w)} \quad (2.16)$$

$$D_{\circ}(t_{\bullet}, t_{\circ}) = \sum_{\substack{w \text{ primitive} \\ \text{Motzkin walks}}} (2(t_{\bullet} + t_{\circ}))^{h(w)} t_{\circ}^{e(w)} t_{\bullet}^{o(w)} \quad (2.17)$$

$$B(t_{\bullet}, t_{\circ}) = \sum_{w \text{ Motzkin bridges}} (2(t_{\bullet} + t_{\circ}))^{h(w)} t_{\bullet}^{e(w)} t_{\circ}^{o(w)} \quad (2.18)$$

Proposition 2.4.1. *The generating series D_{\bullet} , D_{\circ} and B satisfy the following “symmetric” relations:*

$$B(t_{\bullet}, t_{\circ}) = B(t_{\circ}, t_{\bullet}) \quad (2.19)$$

$$t_{\circ} D_{\bullet} = t_{\bullet} D_{\circ}, \quad (2.20)$$

and the following decomposition equations:

$$D_{\bullet} = t_{\bullet} + 2(t_{\bullet} + t_{\circ})D_{\bullet} + t_{\bullet} \cdot D_{\circ}D_{\bullet}, \quad (2.21)$$

$$D_{\circ} = t_{\circ} + 2(t_{\bullet} + t_{\circ})D_{\circ} + t_{\circ} \cdot D_{\bullet}D_{\circ}, \quad (2.22)$$

$$B = 1 + 2(t_{\bullet} + t_{\circ})B + (t_{\bullet}D_{\circ} + t_{\circ}D_{\bullet})B. \quad (2.23)$$

Proof. In a Motzkin bridge, the number of odd up-steps is clearly equal to the number of even down-steps and the number of even up-steps is equal to the number of odd down-steps, so that the number of odd steps is equal to the number of even steps, which gives the first equality. The same argument applied to positive bridges (enumerated by $\frac{D_\bullet}{t_\bullet}$) proves (2.20).

The three decomposition equations are obtained by the classical (see e.g. [FS09, Section I.5.3]) first-passage to 0 decomposition illustrated in Figure 2.8 in the case of D_\bullet . \square

2.4.2 Symmetry and rationality

In this section, we extend to the bivariate case the nice criterion for rationality stated in Lemma 9 in [CMS09]. The relations stated in Proposition 2.4.1 give the following two expressions for t_\circ and t_\bullet :

$$t_\bullet = \frac{1}{D_\circ + 2\left(\frac{D_\circ}{D_\bullet} + 1\right) + \frac{1}{D_\bullet}}, \quad (2.24)$$

$$t_\circ = \frac{1}{D_\bullet + 2\left(\frac{D_\bullet}{D_\circ} + 1\right) + \frac{1}{D_\circ}}. \quad (2.25)$$

This expression implies in particular that any function in the two variables t_\circ and t_\bullet can be seen as a function in D_\circ and D_\bullet .

Definition 2.4.2. *Let $f(x, y)$ be a function of two variables, we say that*

- *f is symmetric if $f(x, y) = f(y, x)$,*
- *f is \parallel -symmetric if $f(x, y) = f(x^{-1}, y^{-1})$.*
- *f is \times -symmetric if $f(x, y) = f(y^{-1}, x^{-1})$.*

We also denote \bar{f} the function such that $\bar{f}(x, y) = f(x^{-1}, y^{-1})$, so that f is \parallel -symmetric if and only if $f = \bar{f}$.

For instance, it is clear from (2.24) and (2.25) that – as functions of D_\bullet and D_\circ – t_\bullet and t_\circ are \times -symmetric.

Based on these definitions, we get the following nice criterion for rationality in z_\circ and z_\bullet .

Lemma 2.4.3. *Let f be a symmetric function and write F for the function such that $F(D_\circ, D_\bullet) = f(t_\circ, t_\bullet)$. Then F is also symmetric.*

Moreover, the two following properties are equivalent:

1. *f is a rational function.*
2. *F is a rational function and is \parallel -symmetric*

Proof. We start by proving that F is symmetric. The definition of D_\circ and D_\bullet immediately implies that $D_\circ(t_\circ, t_\bullet) = D_\bullet(t_\bullet, t_\circ)$. We can then write:

$$F(D_\circ, D_\bullet) = f(t_\circ, t_\bullet) = f(t_\bullet, t_\circ) = F(D_\bullet, D_\circ),$$

hence F is symmetric.

The implication (i) \implies (ii) is clear from the expression of t_\circ and t_\bullet in terms of D_\circ and D_\bullet .

We now turn our attention to the implication (ii) \implies (i).

Since F is symmetric and $\|$ -symmetric, it is also \times -symmetric. Let $Psym$ be the vector space of polynomials in D_\circ , D_\circ^{-1} , D_\bullet , and D_\bullet^{-1} , that are symmetric, $\|$ -symmetric, and \times -symmetric. The natural basis of $Psym$ is:

$$(D_{i,j})_{0 \leq i \leq j} := \left(D_\circ^i D_\bullet^j + D_\circ^j D_\bullet^i + D_\circ^{-i} D_\bullet^{-j} + D_\circ^{-j} D_\bullet^{-i} \right)_{0 \leq i \leq j}.$$

We prove by induction on $i + j$ that $D_{i,j}$ (with $0 \leq i \leq j$) can be written down as a polynomial in t_\circ^{-1} and t_\bullet^{-1} :

$$t_\bullet^{-i} t_\circ^{-j} = \left(D_\circ + 2 \left(\frac{D_\circ}{D_\bullet} + 1 \right) + \frac{1}{D_\bullet} \right)^i \cdot \left(D_\bullet + 2 \left(\frac{D_\bullet}{D_\circ} + 1 \right) + \frac{1}{D_\circ} \right)^j \quad (2.26)$$

$$= D_\circ^i \left(1 + 2 \left(\frac{1}{D_\bullet} + \frac{1}{D_\circ} \right) + \frac{1}{D_\circ D_\bullet} \right)^i \cdot D_\bullet^j \left(1 + 2 \left(\frac{1}{D_\circ} + \frac{1}{D_\bullet} \right) + \frac{1}{D_\bullet D_\circ} \right)^j \quad (2.27)$$

$$= D_\circ^i D_\bullet^j \left(1 + p_i \left(\frac{1}{D_\bullet}, \frac{1}{D_\circ} \right) \right) \left(1 + p_j \left(\frac{1}{D_\circ}, \frac{1}{D_\bullet} \right) \right), \quad (2.28)$$

where p_i and p_j are polynomials with no constant term.

This implies that any monomial of $t_\bullet^{-i} t_\circ^{-j} - D_\circ^i D_\bullet^j$ of the form $D_\circ^k D_\bullet^l$ with $k, l \geq 0$, satisfies $k + l < i + j$. Similarly, any monomial of $t_\circ^{-i} t_\bullet^{-j} - D_\bullet^i D_\circ^{-j}$ of the form $D_\circ^{-k} D_\bullet^{-l}$ with $k, l \geq 0$, satisfies $k + l < i + j$. By consequence (assuming that $i + j \neq 0$), any monomial of $t_\bullet^{-i} t_\circ^{-j} - D_\circ^i D_\bullet^j - D_\bullet^{-i} D_\circ^{-j}$ of the form $D_\circ^{-k} D_\bullet^{-l}$ or $D_\circ^k D_\bullet^l$ with $k, l \geq 0$, satisfies $k + l < i + j$. By a \circ/\bullet exchange, we also obtain that any monomial of $t_\circ^{-i} t_\bullet^{-j} - D_\bullet^i D_\circ^{-j} - D_\circ^{-i} D_\bullet^{-j}$ of the form $D_\bullet^{-k} D_\circ^{-l}$ or $D_\bullet^k D_\circ^l$ with $k, l \geq 0$, satisfies $k + l < i + j$.

As a function of D_\circ and D_\bullet , $t_\bullet^{-i} t_\circ^{-j} + t_\circ^{-i} t_\bullet^{-j}$ is rational, $\|$ -symmetric, and \times -symmetric. Hence so is $t_\bullet^{-i} t_\circ^{-j} + t_\circ^{-i} t_\bullet^{-j} - D_{i,j}$, which can therefore be written as a linear combination of $(D_{k,l})_{0 \leq k \leq l}$. Since $t_\bullet^{-i} t_\circ^{-j} + t_\circ^{-i} t_\bullet^{-j} - D_{i,j} = (t_\bullet^{-i} t_\circ^{-j} - D_\circ^i D_\bullet^j - D_\bullet^{-i} D_\circ^{-j}) + (t_\circ^{-i} t_\bullet^{-j} - D_\bullet^i D_\circ^{-j} - D_\circ^{-i} D_\bullet^{-j})$, and because of the result of the previous paragraph, the decomposition of $t_\bullet^{-i} t_\circ^{-j} + t_\circ^{-i} t_\bullet^{-j} - D_{i,j}$ on the basis $(D_{i,j})_{0 \leq i \leq j}$ can not have terms of the form $D_{k,l}$ with $k + l \geq i + j$. The induction hypothesis implies that $t_\bullet^{-i} t_\circ^{-j} + t_\circ^{-i} t_\bullet^{-j} - D_{i,j}$ is a polynomial of t_\circ^{-1} and t_\bullet^{-1} . Therefore, so is $D_{i,j}$.

To conclude the proof, let P and Q be two bivariate polynomials such that $F = P/Q$. By hypothesis, we clearly have:

$$F(D_\circ, D_\bullet) = \frac{1}{4} \left(\frac{P(D_\circ, D_\bullet)}{Q(D_\circ, D_\bullet)} + \frac{P(1/D_\circ, 1/D_\bullet)}{Q(1/D_\circ, 1/D_\bullet)} + \frac{P(1/D_\bullet, 1/D_\circ)}{Q(1/D_\bullet, 1/D_\circ)} + \frac{P(D_\bullet, D_\circ)}{Q(D_\bullet, D_\circ)} \right) \quad (2.29)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\tilde{P}(D_\circ, D_\bullet)}{Q(D_\circ, D_\bullet)Q(D_\bullet, D_\circ)Q(1/D_\circ, 1/D_\bullet)Q(1/D_\bullet, 1/D_\circ)}. \quad (2.30)$$

Hence F can be written as \tilde{P}/\tilde{Q} , where \tilde{P} and \tilde{Q} are two polynomials in D_\circ , D_\bullet , D_\circ^{-1} and D_\bullet^{-1} , which are both $\|$ -symmetric and \times -symmetric. Therefore, both of them can be written as polynomials in t_\circ^{-1} and t_\bullet^{-1} , which implies that f is rational in t_\circ and t_\bullet and concludes the proof. \square

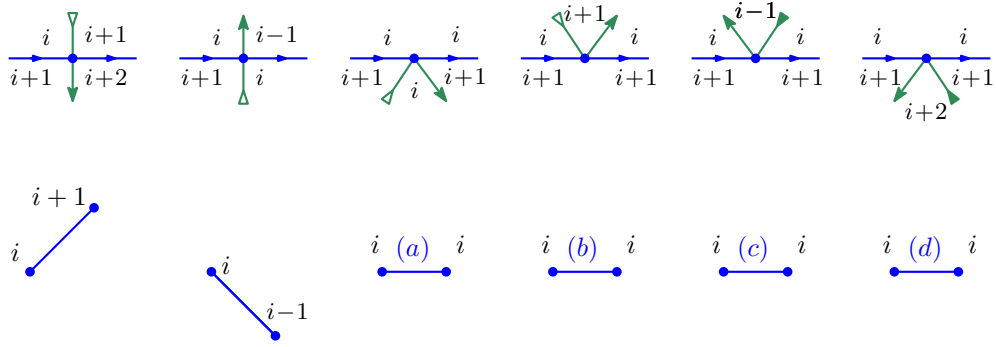


Figure 2.9: The illustration of the 6 types of branch vertices (top), and the corresponding steps in the typed Motzkin paths where the heights of the vertices are indicated (bottom). The color of the leaves correspond to the case where i is odd.

2.4.3 Decomposition of cores

To apply the criterion given in Lemma 2.4.3 to the series R_g , we give in this section a relatively explicit formula for R_g , seen as a function of D_\circ , D_\bullet and B . We follow here the approach of [CMS09].

Recall from Section 2.2.4 the definition of blossoming cores and blossoming schemes.

Definition 2.4.4. *A well-oriented blossoming scheme, equipped with a labeling of its corners, is called a labeled scheme if the labels of adjacent corners incident to the same vertex differ by 1, and the corner with higher label is on the left of the separating half-edge.*

The set of labeled schemes is denoted \mathcal{L} .

Note that a labeled scheme is not necessarily well-labeled because labels of corners adjacent along an edge may differ.

Fix c a scheme-rooted core of \mathcal{R}^\times . Vertices of interior degree 2 in c form sequences called *branches* between its scheme vertices. Since c is scheme-rooted, the orientation of all edges inside a branch coincide, so that $\Theta(c)$ is naturally endowed with an orientation, which implies that $\Theta(c)$ is well-oriented. Additionally, the labels of the corners of c turns $\Theta(c)$ into a labeled scheme.

Let \mathcal{R}_l denote the set of cores of \mathcal{R} having $l \in \mathcal{L}$ as a labeled scheme. To construct an element of \mathcal{R}_l from l , we need to replace each edge of l by a sequence of vertices of inner degree 2, in such a way that the labels around the scheme vertices after substitution coincide with the labels in the corners of l .

More precisely, let u and v be two scheme-vertices of c such that $e = \{u, v\}$ is an edge of l oriented from u to v . Denote $u = u_0, u_1, \dots, u_k = v$, the sequence of vertices in the corresponding branch in c . Then, if the halfedge at the origin (resp. destination) of $\{u_0, u_1\}$ (resp. of $\{u_{k-1}, u_k\}$) has labels $i+1, i$ (resp. $j+1, j$), we say that this branch has *height at the origin* i (resp. *height at the destination* j). Recall that e is the edge corresponding to this branch in l , then the halfedge at the origin (resp. destination) of e has labels $i+1, i$ (resp. $j+1, j$) and we write $h_l^0(e) = i$ (resp. $h_l^1(e) = j$).

Next, in a 4-valent well-oriented, well-labeled blossoming core, there are 6 possible vertices of interior degree 2, illustrated in Figure 2.9 (top). When following a

branch in the direction given by its orientation, the first type of vertex implies an increase of 1 in the labels, the second one a decrease of 1, and the last 4 do not change the value of the labels along the branch and each of them is given a type in $\{a, b, c, d\}$, see again Figure 2.9. Define the set of *typed Motzkin walks* to be the set of Motzkin walks such that each of their horizontal steps is decorated by a type in $\{a, b, c, d\}$. A branch with k edges in c corresponding to an edge e in l can then be encoded by a typed Motzkin walk from of length $k - 1$ starting at height $h_l^0(e)$ and ending at height $h_l^1(e)$.

Definition 2.4.5. A decorated labeled scheme is a couple $(l, (W_e)_{e \in E(l)})$, such that l is a labeled scheme l and for any $e \in E(l)$, W_e is a typed Motzkin path, that goes from height $h_l^0(e)$ to height $h_l^1(e)$.

We define an application ϕ from decorated labeled schemes to well-oriented well-labeled cores, by replacing each edge e of a decorated labeled scheme by the branch encoded by W_e .

To state the consequence of the construction ϕ in terms of generating series, we introduce a couple of additional notations. For $i \leq j$, we denote:

$$\Delta_i^j(x, y) := x^{|[i, j] \cap (2\mathbb{Z})|} \cdot y^{|[i, j] \cap (2\mathbb{Z}+1)|}.$$

Note in particular that $\Delta_i^i(x, y) = 1$. For an edge $e \in E(l)$, e is said to be *increasing* (resp. *decreasing*) if $h_l^0(e) \leq h_l^1(e)$ (resp. $h_l^0(e) > h_l^1(e)$). The set of increasing (resp. decreasing) edges of l is denoted $E^\uparrow(l)$ (resp. $E^\downarrow(l)$).

Lemma 2.4.6. The application ϕ is a bijection between decorated labeled schemes and scheme-rooted cores.

Moreover, for any labeled scheme l , we have the following identity:

$$R_l(t_\bullet, t_\circ) = \prod_{s \in \{\text{rootable stems of } l\}} \Delta_{\lambda(s)}^{\lambda(s)+1}(t_\circ, t_\bullet) \cdot \prod_{e \in E^\uparrow(l)} B \cdot \Delta_{h_l^0(e)}^{h_l^1(e)}(D_\bullet, D_\circ) \cdot \prod_{e \in E^\downarrow(l)} B \cdot \Delta_{h_l^1(e)}^{h_l^0(e)}(D_\circ, D_\bullet) \quad (2.31)$$

Proof. The fact that ϕ is a bijection is clear from the definitions so that we focus on the second assertion of the Lemma.

Let $(l, (W_e))$ be a decorated labeled scheme. The rootable stems of $\phi(l, (W_e))$ are either rootable stems of l or leaves created when replacing edge of l by the branch encoded by W_e . It is clear from Figure 2.9 that for any $e \in E(l)$:

- each odd step of W_e creates one white leaf in $\phi(l, (W_e))$,
- each even step of W_e creates one black leaf in $\phi(l, (W_e))$,
- each horizontal step of W_e of type (a) or (b) creates one white leaf if i is odd (resp. one black leaf if i is even) in $\phi(l, (W_e))$
- each horizontal step of W_e of type (c) or (d) creates one black leaf if i is odd (resp. one white leaf if i is even) in $\phi(l, (W_e))$,

We can then write:

$$R_l(t_\bullet, t_\circ) = \sum_{c \in \mathcal{R}_l} t_\bullet^{\{\text{black leaves of } c\}} t_\circ^{\{\text{white leaves of } c\}} \quad (2.32)$$

$$= \prod_{s \in \{\text{rootable stems of } l\}} \Delta_{\lambda(s)}^{\lambda(s)+1}(t_\circ, t_\bullet) \cdot \prod_{e \in E(l)} W^{h_l^0(e) \rightarrow h_l^1(e)}(t_\bullet, t_\circ). \quad (2.33)$$

Let, now e be in $E^\downarrow(l)$, then a path in $\mathcal{W}^{h_i^0(e) \rightarrow h_i^1(e)}$ can be decomposed as $h_i^0(e) - h_i^1(e)$ primitive Motzkin walks followed by a Motzkin bridge. It implies that for $e \in E^\downarrow(l)$:

$$W^{h_i^0(e) \rightarrow h_i^1(e)}(t_\bullet, t_\circ) = B(t_\bullet, t_\circ) \prod_{k=j+1}^i W_{[\geq k]}^{k \rightarrow (k-1)}(t_\bullet, t_\circ),$$

where $W_{[\geq k]}^{k \rightarrow (k-1)}(t_\bullet, t_\circ)$ is the generating series of Motzkin walks, with height not smaller than k , except after their last step. It is immediate to see that

$$W_{[\geq k]}^{k \rightarrow (k-1)}(t_\bullet, t_\circ) = \begin{cases} D_\bullet & \text{if } k \text{ is even} \\ D_\circ & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Hence, for $e \in E^\downarrow(l)$:

$$W^{h_i^0(e) \rightarrow h_i^1(e)}(t_\bullet, t_\circ) = B(t_\bullet, t_\circ) \cdot \Delta_{h_i^1(e)}^{h_i^0(e)}(D_\circ, D_\bullet).$$

A similar decomposition when e belongs to $E^\uparrow(l)$ concludes the proof of the lemma. \square

Corollary 2.4.7. *For any labeled scheme l , R_l is a rational function of D_\bullet and D_\circ .*

Proof. Thanks to (2.24) and (2.25), is easy to see on the expression of R_l given in Lemma 2.4.6 that, as a function of B , D_\circ , and D_\bullet , R_l is rational. Moreover, a little of algebra based on Proposition 2.4.1 and (2.24) and (2.25) gives the following expression for B :

$$B = \frac{1 + 2(D_\bullet + D_\circ) + 3D_\bullet D_\circ}{1 + D_\bullet D_\circ}, \quad (2.34)$$

so that R_l is also rational as a function of D_\bullet and D_\circ only. \square

Since $R_l^\circ(t_\bullet, t_\circ) = R_l(t_\bullet, t_\circ) + R_l(t_\circ, t_\bullet)$ is clearly symmetric. To apply the criterion of Lemma 2.4.3, we will prove in the next section that $\sum_{l \in \mathcal{L}} R_l^\circ$ – seen as a function of D_\bullet and D_\circ – is also \parallel -symmetric.

2.5 Bijective proof of the rationality of $M_g(z_\bullet, z_\circ)$

Let $l \in \mathcal{L}$ be a labeled scheme, then its *unlabeled scheme* – denoted $\text{us}(l)$ – is (unsurprisingly) defined as the scheme obtained from l after erasing its labels. The set of unlabeled schemes of genus g is denoted \mathcal{S}_g and $\mathcal{S} = \cup_{g \geq 0} \mathcal{S}_g$. Moreover, the unrooted map (recall Definition 2.3.10) of an unlabeled scheme is called an *unrooted scheme*. The set of unrooted schemes is denoted $\bar{\mathcal{S}}$.

As before, for $s \in \mathcal{S}$ and $\bar{s} \in \bar{\mathcal{S}}$, we denote $R_s = \sum_l R_l$, where the sum is taken over the set $\{l \in \mathcal{L}, \text{ such that } \text{us}(l) = s\}$ and $R_{\bar{s}} = \sum_s R_s$, where the sum is taken over the set of unlabeled schemes which admit \bar{s} as unrooted scheme. Then:

Theorem 2.5.1. *For any unlabeled scheme $s \in \mathcal{S}$, the series R_s° is rational in D_\bullet and D_\circ , and \parallel -symmetric.*

The proof of this theorem will be first given in the univariate case in Section 2.5.2 and in the general case in Section 2.5.3. We first explain why it concludes the bijective proof of the rationality result given in Theorem 2.1.2.

Theorem 2.5.1, in addition to Corollary 2.3.8, Theorem 2.3.11, and Lemma 2.4.3, allows to prove the following theorem:

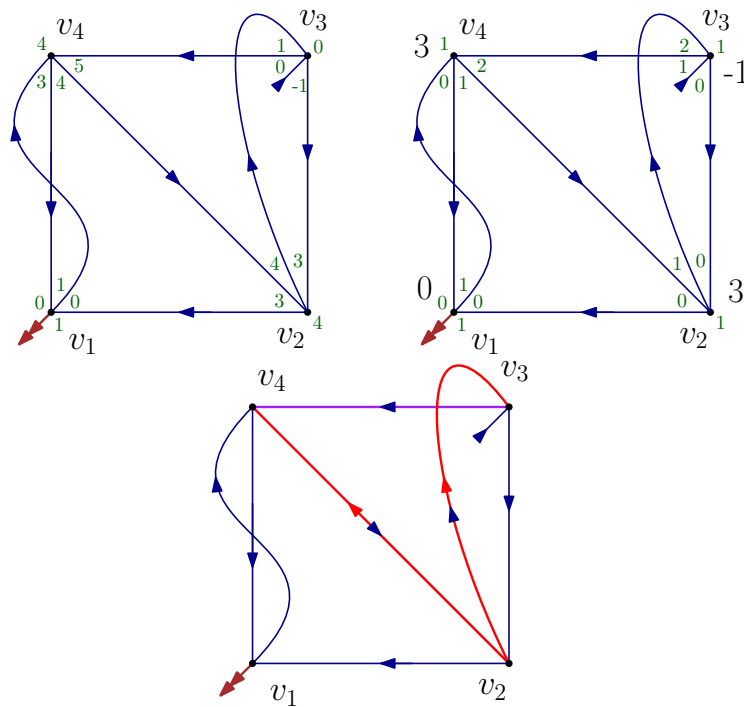


Figure 2.10: Example of a labeled scheme l of genus 2, with 4 vertices. On the left, l has a label on each corner (in dark green).

In the middle, the height of each vertex is indicated by the bigger black label (so that for instance $h_l(v_4) = 3$). Note that the relative labels (in dark green) are redundant with the orientation of the edges.

On the right, the unlabeled scheme $us(l)$. Its offset edges are represented by oriented red edges, while its shifted edge is represented by the purple edge. Note that the offset graph (the oriented red subgraph) is acyclic. The root bud is regular.

Let ν be the naming of $us(l)$ such that $\nu(v_i) = i$. Note that ν is consistent. The height order of l relative to ν $\pi_{l,\nu}$ is defined by $\pi_{l,\nu}(1) = v_3$, $\pi_{l,\nu}(2) = v_1$, $\pi_{l,\nu}(3) = v_2$ and $\pi_{l,\nu}(4) = v_4$.

Theorem 2.5.2. *For any unrooted scheme $\bar{s} \in \bar{\mathcal{S}}$, the generating series $M_{\bar{s}}(z_{\bullet}, z_{\circ})$ is rational in terms of the 2 series T_{\bullet} and T_{\circ} , defined in (2.10).*

Since the number of unrooted schemes of genus g is finite, it implies that $M_g(z_{\bullet}, z_{\circ})$ is also rational in terms of T_{\bullet} and T_{\circ} .

Proof. Let s be an unlabeled scheme. From Lemma 2.4.3 and Theorem 2.5.1, we can directly deduce that the series R_s^{\bullet} is rational in t_{\circ} and t_{\bullet} .

Fix now \bar{s} in $\bar{\mathcal{S}}$. The number of unlabeled schemes that admit \bar{s} as unrooted scheme is upper bounded by $2g$ and hence finite, which implies that $R_{\bar{s}}^{\bullet}$ is also rational as a series in t_{\circ} and t_{\bullet} .

By Theorem 2.3.11, we deduce that $O_{\bar{s}}^{\times}$ is rational in T_{\circ} and T_{\bullet} . By Corollary 2.3.8, we deduce that $M_{\bar{s}}$ is rational in T_{\circ} and T_{\bullet} , which concludes the proof. \square

In Section 2.5.1, we give some definitions and explain some basic operations. As a warm-up, and in order to improve the proof previously given in [Lep19], we prove in Section 2.5.2 a univariate version of Theorem 2.5.1, and conclude with its full proof in Section 2.5.3.

2.5.1 Definitions and offset graph

Relative labels and height

Let l be a labeled scheme. For $v \in V(l)$, the *height* $h_l(v)$ of v is defined as the minimum of the labels of its adjacent corners, i.e.:

$$h_l(v) = \min\{\lambda(\kappa), \text{ for } \kappa \text{ a corner incident to } v\}.$$

For $\kappa \in C(l)$, the *relative label* of κ is set to be the difference of $\lambda_l(\kappa)$ and $h_l(v(\kappa))$, where $v(\kappa)$ denotes the vertex incident to κ . Since l is well-labeled and 4-valent, relative labels belong to $\{0, 1, 2\}$. Moreover, relative labels can be retrieved from the orientation of the edges of $us(l)$. Therefore, from $us(l)$ and $(h_l(v))_{v \in V(l)}$, we can reconstruct l .

Halfedges and naming

A halfedge of an unlabeled scheme $s \in \mathcal{S}$ is said to be of *type 0* if it has adjacent relative labels 0 and 1, and of *type 1* if it has adjacent relative labels 1 and 2.

Definition 2.5.3 (balanced, shifted, and offset edges and stems). *Let $s \in \mathcal{S}$ be an unlabeled scheme. An edge $\{u, v\}$ of s is said to be:*

- balanced if it consists of two halfedges of type 0,
- shifted if it consists of two halfedges of type 1,
- offset toward v if it consists of a halfedge of type 0 on the side of u and a halfedge of type 1 on the side of v .

Similarly, a rootable stem is said to be:

- regular if it has adjacent relative labels 0 and 1,
- shifted if it has adjacent relative labels 1 and 2.

The following theorem was proved in [Lep19, Theorem 4.14]:

Theorem 2.5.4. *Let $s \in \mathcal{S}$ be an unlabeled scheme. The directed graph of offset edges of s is acyclic.*

Following Theorem 2.5.4, we can define *consistent* namings of a scheme:

Definition 2.5.5 (consistent naming). *Let $s \in \mathcal{S}$ be an unlabeled scheme. A naming of s is a bijection from $V(s)$ to $[n_v]$. A naming ν of s is called consistent if it is a linear extension of the partial order induced by the (acyclic) oriented graph of its offsets edges. In other words, a naming ν is consistent if, for any edge $\{u, v\}$ offset towards v , $\nu(u) < \nu(v)$.*

Definition 2.5.6 (height order relative to a naming, relative height of a vertex). *Let $l \in \mathcal{L}$ be a labeled scheme, and ν be a naming of $us(l)$.*

The height order of l relative to ν is the bijection $\pi_{l,\nu} : [n_v] \rightarrow V(l)$ such that for any $i < j$:

- *Either $h_l(\pi_{l,\nu}(i)) < h_l(\pi_{l,\nu}(j))$,*
- *Or $h_l(\pi_{l,\nu}(i)) = h_l(\pi_{l,\nu}(j))$ and $\nu(\pi_{l,\nu}(i)) < \nu(\pi_{l,\nu}(j))$.*

In other words, $\pi_{l,\nu}$ is the lexicographic order on the couple (height, naming).³

The inverse bijection $\pi_{l,\nu}^{-1} : V(l) \rightarrow [n_v]$ is called the relative height function.

Let s be an unlabeled scheme and ν a naming of s . Let $\pi : [n_v] \rightarrow V(s)$ be a bijection. We denote $\mathcal{L}_{s,\nu}^\pi$ the set of labeled schemes with unlabeled scheme s , and height order relative to ν given by π . In other words:

$$\mathcal{L}_{s,\nu}^\pi := \{l \in \mathcal{L}_s \mid \pi_{l,\nu} = \pi\} \quad (2.35)$$

We denote $\mathcal{R}_{s,\nu}^\pi$ the corresponding subset of \mathcal{R} :

$$\mathcal{R}_{s,\nu}^\pi := \bigcup_{l \in \mathcal{L}_{s,\nu}^\pi} \mathcal{R}_l. \quad (2.36)$$

Statistics on unlabeled schemes

We now define in Definitions 2.5.7 to 2.5.10 a few statistics on unlabeled schemes equipped with a permutation. These statistics allow to obtain nice close formulae for $R_{s,\nu}^\pi$, that will be stated in Lemmas 2.5.14 and 2.5.16. See Figure 2.11 for an illustration of these definitions.

Definition 2.5.7 (edge enclosing a relative height). *Let s be an unlabeled scheme, fix a bijection $\pi : [n_v] \rightarrow V(s)$, and k in $[n_v]$. An edge $\{u, v\} \in E(s)$ is said to be enclosing positively relative height k if*

- *either $\pi^{-1}(u) \leq k < \pi^{-1}(v)$,*
- *or $\pi^{-1}(v) \leq k < \pi^{-1}(u)$.*

Symmetrically, $\{u, v\}$ is said to be enclosing negatively relative height k if

- *either $\pi^{-1}(u) < k \leq \pi^{-1}(v)$,*
- *or $\pi^{-1}(v) < k \leq \pi^{-1}(u)$.*

³In [Lep19], the relative ordering of vertices was defined without the use of a naming, thus resulting in a partial order, represented as a surjection rather than a bijection. See Remark 5 for a more extensive comparison between the two approaches.

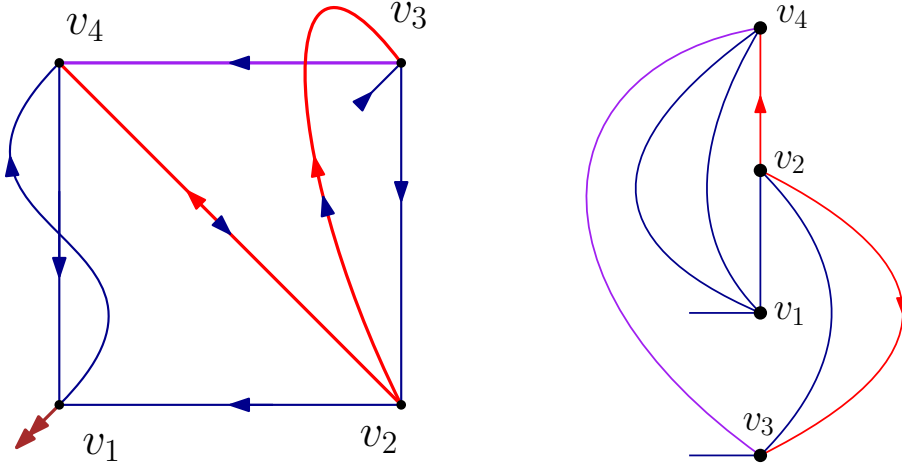


Figure 2.11: On the left, the unlabeled scheme $us(l)$ introduced in Figure 2.10.

On the right, $us(l)$ is represented as a graph, and its vertices are ordered accordingly to the total order $\pi_{l,\nu}$ described in Figure 2.10. The orientation of the edges and the relative labels of the corners are forgotten, but the offset and shifted edges (as well as the shifted buds when relevant) remain distinguished. Although this implies a loss of information, what remains is enough to read all statistics needed in the calculation of $R_{us(l)}^\bullet$.

For instance, we can read: $\mathfrak{C}_s^{\pi,1:+} = 3$, $\mathfrak{U}_s^{\pi,1} = 2$, $\mathfrak{B}_s^{\pi,2} = 1$, $\mathfrak{B}_s^{\pi,2:+} = 0$, $\delta_{s,\nu}^{\pi,1:+} = 1$, and $\delta_{s,\nu}^{\pi,2:+} = 0$.

The number of edges enclosing positively relative height k (resp. negatively) is denoted $\mathfrak{C}_s^{\pi,k:+}$ (resp. $\mathfrak{C}_s^{\pi,k:-}$).

Note that:

- $\mathfrak{C}_s^{\pi,1^-} = \mathfrak{C}_s^{\pi,n_v:+} = 0$
- for all $k \in [n_v - 1]$, $\mathfrak{C}_s^{\pi,k:+} = \mathfrak{C}_s^{\pi,(k+1):-}$

Definition 2.5.8 (overfitting and underfitting edges). *Let s be an unlabeled scheme, fix a bijection $\pi : [n_v] \rightarrow V(s)$, and k in $[n_v]$. An edge $e = \{u, v\} \in E(s)$ is overfitting (resp. underfitting) at relative height k if:*

- $\pi^{-1}(v) = k$ and $\pi^{-1}(u) < k$ (resp. $\pi^{-1}(u) > k$),
- and, e is either offset towards v or shifted.

We denote $of_s^{\pi,k} : E(s) \rightarrow \{0;1\}$ (resp. $uf_s^{\pi,k} : E(s) \rightarrow \{0;1\}$) the function that associates 1 to an edge overfitting (resp. underfitting) at relative height k , and 0 to other edges.

The overfit (resp. underfit) of s at relative height k , denoted $\mathfrak{O}_s^{\pi,k:+}$ (resp. $\mathfrak{O}_s^{\pi,k:-}$), is the number of overfitting (resp. underfitting) edges of s at relative height k . In other words:

$$\mathfrak{O}_s^{\pi,k} = \sum_{e \in E(s)} of_s^{\pi,k}(e) \quad \text{and} \quad \mathfrak{U}_s^{\pi,k} := \sum_{e \in E(s)} uf_s^{\pi,k}(e).$$

The total overfit (resp. total underfit) of s , denoted \mathfrak{O}_s^π (resp. \mathfrak{U}_s^π), is the number of overfitting (resp. underfitting) edges of s .

Note that for any s and π , $\mathcal{O}_s^{\pi,1} = \mathcal{U}_s^{\pi,n_v} = 0$. Note also that any offset edge either overfit or underfit at a unique relative height and that any shifted edge overfits at a unique relative height and underfits at a unique relative height.

Definition 2.5.9 (number of regular and shifted buds at a relative height). *Let s be an unlabeled scheme, fix a bijection $\pi : [n_v] \rightarrow V(s)$, and k in $[n_v]$.*

The number of regular (resp. shifted) buds at relative height k , denoted $\mathcal{B}_s^{\pi,k}$ (resp. $\mathcal{B}_s^{\pi,k,+}$), is the number of regular (resp. shifted) buds of s incident to the vertex $\pi(k)$.

Because vertices have total degree 4, there is at most one bud per scheme vertex. By consequence, $\mathcal{B}_s^{\pi,k} + \mathcal{B}_s^{\pi,k,+}$ is either 1 if there is a bud incident to the vertex of relative height k , and 0 otherwise.

Definition 2.5.10 (naming-ordering discordance indicator at a relative height). *Let s be an unlabeled scheme, fix $\nu : V(s) \rightarrow [n_v]$ a naming of its vertices, $\pi : [n_v] \rightarrow V(s)$ a bijection, and k in $[n_v]$. The naming ν and the ordering π are said to be concordant at relative height k if $\nu(\pi(k+1)) > \nu(\pi(k))$, and discordant otherwise.*

The naming-ordering discordance indicator at relative height k , denoted $\delta_{s,\nu}^{\pi,k,+}$ (or $\delta_{s,\nu}^{\pi,(k+1):-}$), is defined as being 1 if ν and π are discordant at relative height k , and 0 otherwise. In other words:

$$\delta_{s,\nu}^{\pi,k,+} = \delta_{s,\nu}^{\pi,(k+1):-} = \begin{cases} 1 & \text{if } \nu(\pi(k+1)) \leq \nu(\pi(k)) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let l be a labeled scheme having s as unlabeled scheme, and height order π relative to the naming ν . Fix k in $[n_v]$, then $h_l(\pi(k+1)) \geq h_l(\pi(k)) + \delta_{s,\nu}^{\pi,k,+}$. Indeed, by definition of the relative height order: $h_l(\pi(k+1)) \geq h_l(\pi(k))$, where the case of equality can only occur if $\nu(\pi(k+1)) > \nu(\pi(k))$, i.e. if ν and π are concordant at relative height k .

Mirror construction

We conclude this section by defining the mirror of an ordering. It will allow in Lemma 2.5.15 and Lemme 2.4.10 to obtain a symmetry results for $R_{s,\nu}^\pi$.

Definition 2.5.11 (mirror ordering). *Let s be an unlabeled scheme, and $\pi : [n_v] \rightarrow V(s)$ a bijection. The mirror of π , denoted $\bar{\pi}$, is the bijection such that, for all $k \in [n_v]$:*

$$\bar{\pi}(k) = \pi(n_v + 1 - k).$$

Note that the mirror operation is an involution, so that $\bar{\bar{\pi}} = \pi$.

Proposition 2.5.12. *Let s be an unlabeled scheme, ν a consistent naming of s , $\pi : [n_v] \rightarrow V(s)$ a bijection, k in $[n_v]$, and e in $E(m)$. We denote $\bar{k} := n_v + 1 - k$. The following equalities are direct consequences of the previous definition:*

- $\mathcal{C}_s^{\bar{\pi},k,+} = \mathcal{C}_s^{\pi,\bar{k},-}$
- $\mathcal{O}_s^{\bar{\pi},k} = \mathcal{U}_s^{\pi,\bar{k}}$
- $\mathcal{O}_s^{\bar{\pi}} = \mathcal{U}_s^\pi$

- $of_s^{\bar{\pi},k}(e) = uf_s^{\pi,\bar{k}}(e)$
- $B_s^{\bar{\pi},k} = B_s^{\pi,\bar{k}}$
- $B_s^{\bar{\pi},k:+} = B_s^{\pi,\bar{k}:+}$
- $\delta_{s,\nu}^{\bar{\pi},k:+} = 1 - \delta_{s,\nu}^{\pi,\bar{k}:-}$

2.5.2 The univariate case

We focus in this section on the univariate case. We define:

$$T(z) := T_o(z, z) = T_\bullet(z, z) \quad (2.37)$$

$$D(t) := D_o(t, t) = D_\bullet(t, t) \quad (2.38)$$

$$B(t) := B(t, t) \quad (2.39)$$

$$R(t) := R(t, t) \quad (2.40)$$

Before proving Theorem 2.5.1 in full generality in the next section, we first prove the following weaker univariate result:

Theorem 2.5.13. *For any unlabeled scheme $s \in \mathcal{S}$, the series $R_s(t)$ is rational and symmetric in D and D^{-1} .*

Note that a proof of Theorem 2.5.13 is already given in [Lep19], but we give here a different proof that can be extended to the general case. The differences between the two proofs will be discussed in Remark 5. Using a univariate version of Lemma 2.4.3 due to [CMS09], Theorem 2.5.13 can be used to prove the rationality of $M_g(z)$, the series of maps enumerated by edges, in terms of the series of trees $T(z)$, which is expressed in Theorem 2.1.1.

Note that in this univariate setup, shifted edges could be treated as balanced edges.

We denote by bR the generating series of \mathcal{R} , where the weight of scheme stems is set to 0, so that only leaves on a branch are taken into consideration. This is still a valid generating function since there is only a (fixed) finite number of stems on a given scheme. We define similarly the generating series ${}^bR_{s,\nu}^\pi$ and bR_l of the corresponding subfamilies of \mathcal{R} . In Lemma 2.5.14, we give a closed formula for the generating series ${}^bR_{s,\nu}^\pi$. An illustration is given in Figure 2.12.

Lemma 2.5.14. *Let $s \in \mathcal{S}$ be an unlabeled scheme, ν be a consistent naming of s , and π a bijection.*

$${}^bR_{s,\nu}^\pi = B^{ne} \cdot D^{0_s^\pi - U_s^\pi} \cdot \prod_{k \in [n_\nu - 1]} \frac{D^{\delta_{s,\nu}^{\pi,k:+}} \cdot C_s^{\pi,k:+}}{1 - D^{C_s^{\pi,k:+}}}, \quad (2.41)$$

where $C_s^{\pi,k:+}$, $0_s^{\pi,k}$, $U_s^{\pi,k}$, and $\delta_{s,\nu}^{\pi,k:+}$ are defined in Definitions 2.5.7, 2.5.8 and 2.5.10.

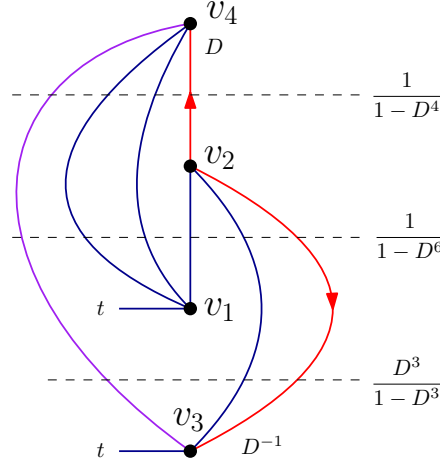


Figure 2.12: An illustration of Lemma 2.5.14 on the unlabeled scheme introduced previously, with the permutation $\pi = 1324$. Each contribution of the generating series is highlighted.

Proof. The family of maps $\mathcal{R}_{s,\nu}^\pi$ can be decomposed according to their labeled scheme, so that:

$${}^b R_{s,\nu}^\pi = \sum_{l \in \mathcal{L}_{s,\nu}^\pi} {}^b R_l$$

For a given labeled scheme l , the generating series ${}^b R_l$ can be easily computed as the product of the contribution of the branches of l , thanks to Lemma 2.4.6. Let e be an edge of l . We define the *stature* of e , denoted $\Delta(e)$ as the difference $|h_l^0(e) - h_l^1(e)|$. Setting $D_\bullet = D_\circ$ in Lemma 2.4.6 and ignoring the scheme rootable stems gives:

$${}^b R_l = \prod_{e \in E(l)} B \cdot D^{\Delta(e)}.$$

The stature of an edge $\{u, v\}$ depends only on the heights $h_l(u)$ and $h_l(v)$, and whether e is offset. Namely:

$$\Delta(\{u, v\}) = |h_l(u) - h_l(v)| + \epsilon_l(\{u, v\}), \quad (2.42)$$

where:

$$\epsilon_l(\{u, v\}) = \begin{cases} 0, & \text{if } \{u, v\} \text{ is not offset} \\ 1, & \text{if } \{u, v\} \text{ is offset toward } v \text{ and } h_l(v) \geq h_l(u) \\ -1, & \text{if } \{u, v\} \text{ is offset toward } v \text{ and } h_l(v) < h_l(u) \end{cases} \quad (2.43)$$

Note that in any case, $\Delta(\{u, v\}) \geq 0$.

By consequence:

$${}^b R_{s,\nu}^\pi = \sum_{l \in \mathcal{L}_{s,\nu}^\pi} \prod_{e \in E(l)} B \cdot D^{\Delta(e)}, \quad (2.44)$$

and by Definition 2.5.6:

$${}^b R_{s,\nu}^\pi = B^{n_e} \cdot \sum_{l \in \mathcal{L}_{s,\nu}^\pi} \prod_{\substack{\{u,v\} \in E(l) \\ \pi^{-1}(u) < \pi^{-1}(v)}} D^{h_l(v) - h_l(u) + \epsilon_l(\{u,v\})}. \quad (2.45)$$

The choice of a labeled scheme $l \in \mathcal{L}_{s,\nu}^\pi$ corresponds to the choice of the sequence $(h_k)_{k \in [n_v]}$ of the heights of the vertices $\pi(k)$ in l . Since l belongs to $\mathcal{L}_{s,\nu}^\pi$, this sequence must satisfy $h_{k+1} \geq h_k$ if $\nu(\pi(k+1)) > \nu(\pi(k))$, and $h_{k+1} > h_k$ if $\nu(\pi(k+1)) < \nu(\pi(k))$, or in other words: $h_{k+1} \geq h_k + \delta_{s,\nu}^{\pi,k;+}$. It should also be such that the label of the root is 01.

Alternatively, by a change of variable, the choice of a labeled scheme $l \in \mathcal{L}_{s,\nu}^\pi$ corresponds to the choice of the sequence $(I_k)_{k \in [n_v-1]} = (h_{k+1} - h_k)_{k \in [n_v-1]}$ of the differences between successive heights of the vertices $\pi(k)$ in l . This sequence must satisfy $I_k \geq \delta_{s,\nu}^{\pi,k;+}$ for any k . The convention that the root must have label 01 allows to go back to the previous representation. We denote $\mathcal{I}_{s,\nu}^\pi$ the set of such sequences. Then:

$${}^b R_{s,\nu}^\pi = B^{n_e} \cdot \sum_{(I_k) \in \mathcal{I}_{s,\nu}^\pi} \prod_{\substack{\{u,v\} \in E(l) \\ \pi^{-1}(u) < \pi^{-1}(v)}} D^{I_{\pi^{-1}(u)} + \dots + I_{\pi^{-1}(v)-1} + \epsilon_l(\{u,v\})}, \quad (2.46)$$

and by Definition 2.5.7:

$${}^b R_{s,\nu}^\pi = B^{n_e} \cdot \sum_{(I_k) \in \mathcal{I}_{s,\nu}^\pi} \prod_{k \in [n_v-1]} D^{I_k \cdot \mathbf{C}_s^{\pi,k;+}} \cdot \prod_{\{u,v\} \in E(l)} D^{\epsilon_l(\{u,v\})}. \quad (2.47)$$

Let $\{u, v\}$ be an edge of s offset toward v . By definition of a height order relative to a consistent naming, $h_l(v) \geq h_l(u)$ if and only if $\pi^{-1}(u) < \pi^{-1}(v)$. The equality case of this equivalence is in fact the only part of the proof of Theorem 2.5.13 where we use the fact that ν is consistent.

Since any shifted edge contributes once to $\mathbf{0}_s^\pi$ and once to \mathbf{U}_s^π , by Definition 2.5.8, we get:

$$\sum_{\substack{\{u,v\} \in E(l) \\ \pi^{-1}(u) < \pi^{-1}(v)}} \epsilon_l(\{u, v\}) = \mathbf{0}_s^\pi - \mathbf{U}_s^\pi. \quad (2.48)$$

Therefore:

$${}^b R_{s,\nu}^\pi = B^{n_e} \cdot D^{\mathbf{0}_s^\pi - \mathbf{U}_s^\pi} \cdot \sum_{(I_k) \in \mathcal{I}_{s,\nu}^\pi} \prod_{k \in [n_v-1]} D^{I_k \cdot \mathbf{C}_s^{\pi,k;+}} \quad (2.49)$$

$$= B^{n_e} \cdot D^{\mathbf{0}_s^\pi - \mathbf{U}_s^\pi} \cdot \prod_{k \in [n_v-1]} \frac{D^{\delta_{s,\nu}^{\pi,k;+} \cdot \mathbf{C}_s^{\pi,k;+}}}{1 - D^{\mathbf{C}_s^{\pi,k;+}}}. \quad (2.50)$$

□

We now state that, up to the mirror operation (recall Definition 2.5.11), $R_{s,\nu}^\pi$ is symmetric in D and D^{-1} :

Lemma 2.5.15. *Let s be an unlabeled scheme, $\nu : V(s) \rightarrow [n_v]$ a naming of its vertices, and $\pi : [n_v] \rightarrow V(s)$ a bijection. The following holds:*

$$\overline{R_{s,\nu}^\pi}(D) = R_{s,\nu}^\pi(D), \quad (2.51)$$

where $\overline{f}(D) = f(1/D)$.

Proof. By Lemma 2.5.14, we have:

$$\overline{{}^b R_{s,\nu}^\pi} = B^{n_e} \cdot D^{0_s^\pi - \mathbb{U}_s^\pi} \cdot \prod_{k \in [n_v - 1]} \frac{D^{\delta_{s,\nu}^{\pi,k: +} \cdot \mathfrak{C}_s^{\pi,k: +}}}{1 - D^{\mathfrak{C}_s^{\pi,k: +}}}. \quad (2.52)$$

Thanks to (2.34), we see that $\overline{B} = -B$ and hence:

$$\overline{{}^b R_{s,\nu}^\pi} = (-1)^{n_e} B^{n_e} \cdot D^{-0_s^\pi + \mathbb{U}_s^\pi} \cdot \prod_{k \in [n_v - 1]} \frac{D^{-\delta_{s,\nu}^{\pi,k: +} \cdot \mathfrak{C}_s^{\pi,k: +}}}{1 - D^{-\mathfrak{C}_s^{\pi,k: +}}}. \quad (2.53)$$

We apply the change of variable $\bar{k} := n_v + 1 - k$, and obtain, thanks to Proposition 2.5.12:

$$\overline{{}^b R_{s,\nu}^\pi} = (-1)^{n_e} B^{n_e} \cdot D^{-0_s^{\bar{\pi}: -} + 0_s^{\bar{\pi}: +}} \cdot \prod_{k \in [n_v - 1]} \frac{D^{(\delta_{s,\nu}^{\bar{\pi}, \bar{k}: -} - 1) \cdot \mathfrak{C}_s^{\bar{\pi}, \bar{k}: -}}}{1 - D^{-\mathfrak{C}_s^{\bar{\pi}, \bar{k}: -}}} \quad (2.54)$$

$$\overline{{}^b R_{s,\nu}^\pi} = (-1)^{n_e + n_v - 1} \cdot {}^b R_{s,\nu}^\pi, \quad \overline{{}^b R_{s,\nu}^\pi} = {}^b R_{s,\nu}^\pi, \quad (2.55)$$

where the last equality follows from Euler's formula: since s is a unicellular map of an orientable surface, $(-1)^{n_e + n_v - 1} = 1$.

We already observed in Section 2.4.2 that $\bar{t} = t$, hence reincorporating the weights of the scheme stems in $\overline{{}^b R_{s,\nu}^\pi}$ implies:

$$\overline{R_{s,\nu}^\pi} = R_{s,\nu}^\pi, \quad (2.56)$$

which concludes the proof. \square

The fact that the series R_s is rational and symmetric in D now follows easily:

Proof of Theorem 2.5.13. Let ν be a consistent naming of an unlabeled scheme s . Since B is rational in D , Lemma 2.5.14 implies that ${}^b R_{s,\nu}^\pi$ is rational in D . Since t is rational in D and the number of bijections π is finite, R_s is also rational in D .

$$\overline{R_s} = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{n_v}} \overline{R_{s,\nu}^\pi}, \quad (2.57)$$

where the sum is taken over all bijection $\pi : [n_v(s)] \rightarrow V(s)$. By Lemma 2.5.15:

$$\overline{R_s} = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{n_v}} R_{s,\nu}^\pi, \quad (2.58)$$

since the mirror operation is an involution:

$$\overline{\overline{R_s}} = R_s \quad (2.59)$$

\square

Remark 5. Note that the proof presented in this section differs from the one given in [Lep19].

In the former, the schemes are also grouped by relative ordering of the height of their vertices. However, unlike here, where the equality cases of the relative ordering

are resolved using a consistent naming of the vertices so as to obtain a bijection, the relative ordering in [Lep19] is represented by a surjection.

This results in some alternated sum on surjections, that end up canceling out after a steady work on the structure of surjections. Note also that this additional work include the definition of a so-called *canonical bijection* as a representative of a set of surjection, which can be seen as a very close analogous of the choice of a consistent labeling and the present definition of the relative ordering.

This bijection-grouping of schemes seems to be an overall better way of understanding the structure of schemes. Indeed, the expression obtained are simpler, and in particular do not involve alternated sums, which is more satisfying from a bijective point of view. Note also that we were not able to extend the original proof of [Lep19] to the bivariate setting.

2.5.3 The bivariate case

We now move to the bivariate case, and give in this section a proof of Theorem 2.5.1.

In the bivariate case, the weight of a branch in a labeled scheme depends not only on the stature of the corresponding edge, but also on the parity of its labels. For this reason, we introduce *binary bijections*, that allow one to sort labeled schemes not only by the relative ordering of their vertices, but also by the parity of the difference of height between any two of its vertices.

Giving a closed formula for the bivariate series of cores characterized by a given binary bijection is more complex than in the univariate case developed in the previous section (see Lemma 2.5.14). Rather, we describe a recursive decomposition of that series.

To do so, we introduce some additional terminology. Let s be an unlabeled scheme. A *binary bijection* of s is a couple $(\pi, \zeta) \in V(s)^{[n_v(s)]} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{[n_v(s)-1]}$ such that π is a bijection. The set of binary bijections associated to s is denoted \mathcal{BB}_s . For l be a labeled scheme, s its unlabeled scheme, and ν a consistent naming of s . The *binary bijection associated to l* is the couple made of $\pi_{l,\nu}$ – its height order relative to ν – and the function $\zeta_{l,\nu} : [n_v(s) - 1] \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ such that $\zeta_{l,\nu}(k) \equiv h_l(\pi_{l,\nu}(k+1)) - h_l(\pi_{l,\nu}(k)) \pmod{2}$. We denote $\mathcal{L}_{s,\nu}^{(\pi,\zeta)}$ the set of labeled scheme having unlabeled scheme s and binary bijection (π, ζ) . We denote $\mathcal{R}_{s,\nu}^{(\pi,\zeta)}$ the set of cores of \mathcal{R} whose labeled scheme belongs to $\mathcal{L}_{s,\nu}^{(\pi,\zeta)}$.

Next, for $k \in [n_v(s)]$, the ascending (resp. descending) truncation of l at relative height k is obtained as follows. Let $X = \pi_{l,\nu}([k-1])$ (resp. $X = \pi_{l,\nu}([k+1, n_v(l)])$), then:

- Delete all the stems of l .
- Set to 0 the type of all the half-edges adjacent to vertices of X (i.e: replace offset edges towards a vertex of X and shifted edges between two vertices of X by balanced edges, and shifted edges between $u \in X$ and $v \notin X$ by an edge offset towards v).
- Next, set to 0 the type of all the half-edges incident to $\pi_{l,\nu}(k)$, whose opposite half-edge is adjacent to a vertex of X .
- Finally, merge all the vertices in X with $\pi_{l,\nu}(k)$ and erase the self-loops thus created.

For $c \in \{\bullet, \circ\}$, we denote ${}^c\mathcal{L}_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k,+}$ (resp. ${}^c\mathcal{L}_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k,-}$) the set of ascending (resp. descending) truncations at relative height k of a labeled scheme having unlabeled scheme s and binary bijection (π, ζ) , and so that the height of the vertex $\pi(k)$ is even, if $c = \circ$, or odd, if $c = \bullet$.

For $e = \{u_0, u_1\} \in E(l)$ an edge of l oriented from vertex u_0 to vertex u_1 , for k in $[n_v(l)]$, and for $\varepsilon \in \{0, 1\}$, we then define:

$$h_l^{\varepsilon,k,+}(e) = \begin{cases} h_l(\pi(k)), & \text{if } \pi^{-1}(u_\varepsilon) < k \text{ or if } \pi^{-1}(u_\varepsilon) = k \text{ and } \pi^{-1}(u_{1-\varepsilon}) < k, \\ h_l^\varepsilon(e), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.60)$$

and

$$h_l^{\varepsilon,k,-}(e) = \begin{cases} h_l(\pi(k)), & \text{if } \pi^{-1}(u_\varepsilon) > k \text{ or if } \pi^{-1}(u_\varepsilon) = k \text{ and } \pi^{-1}(u_{1-\varepsilon}) > k, \\ h_l^\varepsilon(e), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.61)$$

Let l_1 and l_2 be two labeled schemes with unlabeled scheme s , whose ascending (resp. descending) truncation at height k are equal, and denote ℓ their common truncation. Note that, for any edge e , $h_{l_1}^{\varepsilon,k,+}(e) = h_{l_2}^{\varepsilon,k,+}(e)$ (resp. $h_{l_1}^{\varepsilon,k,-}(e) = h_{l_2}^{\varepsilon,k,-}(e)$). By a slight abuse of notation, we define $h_\ell^{\varepsilon,k,+}(e)$ (resp. $h_\ell^{\varepsilon,k,-}(e)$) as this common value. Similarly, the label of each of their rootable scheme stems having relative height higher (resp. smaller) than k coincide.

We also extend the definition of E^\uparrow and E^\downarrow to truncations and denote $E^\uparrow(\ell)$ (resp. $E^\downarrow(\ell)$), the set of edges of ℓ such that $h_l^{0,k,\pm}(e) \leq h_l^{1,k,\pm}(e)$ (resp. $h_l^{0,k,\pm}(e) > h_l^{1,k,\pm}(e)$). Next, we define an inverse operation on colors, defined by $-\bullet = \circ$. For $c \in \{\bullet, \circ\}$, $\pm \in \{+, -\}$ and s an unlabeled scheme, we now define the following generating series:

$${}^c\mathcal{S}_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k,\pm} = \sum_{\ell \in {}^c\mathcal{L}_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k,\pm}} \left(\prod_{e \in E^\uparrow(\ell)} \Delta_{h_\ell^{0,k,\pm}(e)}^{h_\ell^{1,k,\pm}(e)}(D_\bullet, D_\circ) \prod_{e \in E^\downarrow(\ell)} \Delta_{h_\ell^{1,k,\pm}(e)}^{h_\ell^{0,k,\pm}(e)}(D_\circ, D_\bullet) \right). \quad (2.62)$$

Additionally, let $E_{s,\nu}^{\pi,k,\uparrow}$ (respectively $E_{s,\nu}^{\pi,k,\downarrow}$) be the set of edges e enclosing height k positively, such that $e = \{u, v\}$ is oriented from u to v , with $\pi^{-1}(u) \leq k < \pi^{-1}(v)$ (respectively $\pi^{-1}(v) \leq k < \pi^{-1}(u)$). Let also $\mathfrak{C}_s^{\pi,k,\uparrow}$ and $\mathfrak{C}_s^{\pi,k,\downarrow}$ denote the number of such edges, and $\mathfrak{C}_s^{\pi,k} := \mathfrak{C}_s^{\pi,k,\uparrow} + \mathfrak{C}_s^{\pi,k,\downarrow}$.

We define the following functions:

$$W_{s,\nu,e}^{\pi,0,k}(x, y) := (xy)^{\delta_{s,\nu}^{\pi,k,+}} \cdot \frac{x^{\text{of}_s^{\pi,(k+1)}(e)}}{x^{\text{uf}_s^{\pi,k}(e)}}, \quad (2.63)$$

$$W_{s,\nu,e}^{\pi,1,k}(x, y) := x \cdot \frac{y^{\text{of}_s^{\pi,(k+1)}(e)}}{x^{\text{uf}_s^{\pi,k}(e)}}. \quad (2.64)$$

Finally, we denote:

$${}^cW_{s,\nu,e}^{\pi,\zeta,k} := \begin{cases} W_{s,\nu,e}^{\pi,\zeta(k),k}(D_{-c}, D_c), & \text{if } e \in E_{s,\nu}^{\pi,k,\uparrow} \\ W_{s,\nu,e}^{\pi,\zeta(k),k}(D_c, D_{-c}), & \text{if } e \in E_{s,\nu}^{\pi,k,\downarrow} \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.65)$$

We now have all the needed material to write the decomposition equations for ${}^c\mathcal{S}_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k,\pm}$.

Lemma 2.5.16. *The generating series $cS_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k:\pm}$ admit the following recursive characterization:*

$$cS_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),n_v:+} = 1, \quad (2.66)$$

$$cS_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),1:-} = 1. \quad (2.67)$$

For any $k < n_v$:

$$cS_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k:+} = \frac{\prod_{e \in E(s)} cW_{s,\nu,e}^{(\pi,\zeta),k}}{1 - (D_\circ D_\bullet)^{c_s^{\pi,k}}} \cdot ((-1)^{\zeta(k)} c) S_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),(k+1):+}, \quad (2.68)$$

Finally, for any $k > 1$:

$$cS_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k:-} = \frac{\prod_{e \in E(s)} ((-1)^{\zeta(k)} c) W_{s,\nu,e}^{(\pi,\zeta),k-1}}{1 - (D_\circ D_\bullet)^{c_s^{\pi,k-1}}} \cdot ((-1)^{\zeta(k)} c) S_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),(k-1):-} \quad (2.69)$$

Proof. From the definition of the truncation, an ascending truncation at relative height n_v and a descending truncation at relative height 1 of a labeled scheme ℓ are both reduced to a vertex, and all its half-edges have relative label 0. The initialisation cases follow easily.

Now consider $k < n_v(s)$. For $\ell \in \mathcal{L}_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k:+}$, set $\Delta_k := h_\ell(\pi(k+1)) - h_\ell(\pi(k))$. Then if $\zeta(k) = 1$, Δ_k can be any positive odd integer and if $\zeta(k) = 0$, Δ_k can be any even integer not smaller than $\delta_{s,\nu}^{\pi,k:+}$. Moreover for $e \in E_{s,\nu}^{\pi,k,\uparrow}$ (respectively for $e \in E_{s,\nu}^{\pi,k,\downarrow}$), such that the two half-edges of e are of type 0, then the contribution of e to $cS_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k:+}$ is equal to:

$$(D_c D_{-c})^{\Delta_k/2} \text{ if } \Delta_k \in 2\mathbb{N} \quad \text{and} \quad D_{-c} (D_c D_{-c})^{(\Delta_k-1)/2} \text{ if } \Delta_k \in 2\mathbb{N} + 1, \quad (2.70)$$

respectively equal to:

$$(D_c D_{-c})^{\Delta_k/2} \text{ if } \Delta_k \in 2\mathbb{N} \quad \text{and} \quad D_c (D_c D_{-c})^{(\Delta_k-1)/2} \text{ if } \Delta_k \in 2\mathbb{N} + 1. \quad (2.71)$$

Now consider that half-edges of s might have any type. A decreasing edge e positively enclosing height k has the same weight as previously, with the following correction terms (inverse \bullet and \circ if e is increasing):

- D_c^{-1} , if e is underfitting at height k ,
- D_c , if the edge is overfitting at height $k+1$, and $\zeta(k) = 0$,
- D_{-c} , if the edge is overfitting at height $k+1$, and $\zeta(k) = 1$.

Hence, for $\zeta(k) = 1$:

$$\frac{cS_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k:+}}{(-c) S_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),(k+1):+}} = \sum_{i \geq 0} \left(\prod_{e \in E_{s,\nu}^{\pi,k,\uparrow}} \frac{D_{-c} (D_\circ D_\bullet)^i (D_c)^{\text{of}_s^{\pi,k+1}(e)}}{D_{-c}^{-\text{uf}_s^{\pi,k}(e)}} \cdot \prod_{e \in E_{s,\nu}^{\pi,k,\downarrow}} \frac{D_c (D_\circ D_\bullet)^i (D_{-c})^{\text{of}_s^{\pi,k+1}(e)}}{D_c^{-\text{uf}_s^{\pi,k}(e)}} \right) \quad (2.72)$$

$$= \prod_{e \in E_{s,\nu}^{\pi,k,\uparrow}} \frac{D_{-c} (D_c)^{\text{of}_s^{\pi,k+1}(e)}}{(D_{-c})^{-\text{uf}_s^{\pi,k}(e)}} \cdot \prod_{e \in E_{s,\nu}^{\pi,k,\downarrow}} \frac{D_c (D_{-c})^{\text{of}_s^{\pi,k+1}(e)}}{(D_c)^{-\text{uf}_s^{\pi,k}(e)}} \cdot \sum_{i \geq 0} \left((D_\circ D_\bullet)^{c_s^{\pi,k}} \right)^i \quad (2.73)$$

$$= \frac{\prod_{e \in E(s)} W_{s,\nu,e}^{\pi,1,k}(D_{-c}, D_c)}{1 - (D_\circ D_\bullet)^{c_s^{\pi,k}}} \quad (2.74)$$

Similarly, if $\zeta(k) = 0$, then Δ_k can have any even value greater or equal to $\delta_{s,\nu}^{\pi,k: +}$. Hence:

$$\frac{{}^c S_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k: +}}{{}^c S_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),(k+1): +}} = \sum_{i \geq \delta_{s,\nu}^{\pi,k: +}} \left(\prod_{e \in E_{s,\nu}^{\pi,k,\uparrow}} \frac{(D_\circ D_\bullet)^i (D_{-c})^{\text{of}_s^{\pi,k+1}(e)}}{D_{-c}^{-\text{uf}_s^{\pi,k}(e)}} \cdot \prod_{e \in E_{s,\nu}^{\pi,k,\downarrow}} \frac{(D_\circ D_\bullet)^i (D_c)^{\text{of}_s^{\pi,k+1}(e)}}{D_c^{-\text{uf}_s^{\pi,k}(e)}} \right) \quad (2.75)$$

$$= \frac{\prod_{e \in E(s)} {}^c W_{s,\nu,e}^{(\pi,\zeta),k}}{1 - (D_\circ D_\bullet) {}^c S_s^{\pi,k}} \quad (2.76)$$

As a consequence, we obtain the recurrence relation:

$${}^c S_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k: +} = \frac{\prod_{e \in E(s)} {}^c W_{s,\nu,e}^{(\pi,\zeta),k}}{1 - (D_\circ D_\bullet) {}^c S_s^{\pi,k}} \cdot ((-1)^{\zeta(k)} c) S_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),(k+1): +}. \quad (2.77)$$

The other recurrence relation (for decreasing truncation) is obtained similarly. \square

The mirror operation can be extended to binary bijections in the following natural way: $(\bar{\pi}, \bar{\zeta}) := (\bar{\pi}, \bar{\zeta})$, where for any k , $\bar{\zeta}(k) = \zeta(n_v(s) - k)$. For any series F , recall from Section 2.4.2 that $\overline{F(D_\bullet, D_\circ)}^{\parallel} := F(\frac{1}{D_\bullet}, \frac{1}{D_\circ})$. In Lemma 2.5.17, similarly to Lemma 2.5.15, we express that, up to the mirror operation, the series ${}^c S_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k: +}$ is symmetric:

Lemma 2.5.17. *Let ν be a consistent naming of an unlabeled scheme s , π an ordering, and k a relative height. Recall that $\bar{k} = n_v + 1 - k$. The following holds:*

$$\overline{{}^c S_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k: +}}^{\parallel} = (-1)^{k-1} \cdot {}^{-c} S_{s,\nu}^{\overline{(\pi,\zeta)},\bar{k}: +} \quad (2.78)$$

Proof. We prove this result by recurrence on k . By Lemma 2.5.16, the case $k = 1$ holds.

We start with an easy computation. For $k \geq 1$,

$$W_{s,\nu,e}^{\pi,1,k}(x, y) \cdot W_{s,\nu,e}^{\bar{\pi},1,\bar{k}-1}(y, x) = x \cdot \frac{y^{\text{of}_s^{\pi,(k+1)}(e)}}{x^{\text{uf}_s^{\pi,k}(e)}} \cdot y \cdot \frac{x^{\text{of}_s^{\bar{\pi},\bar{k}}(e)}}{y^{\text{uf}_s^{\bar{\pi},(\bar{k}-1)}(e)}} = xy, \quad (2.79)$$

by Proposition 2.5.12. Similarly,

$$W_{s,\nu,e}^{\pi,0,k}(x, y) \cdot W_{s,\nu,e}^{\bar{\pi},0,\bar{k}-1}(x, y) = (xy)^{\delta_{s,\nu}^{\pi,k: +}} \cdot \frac{x^{\text{of}_s^{\pi,(k+1)}(e)}}{x^{\text{uf}_s^{\pi,k}(e)}} \cdot (xy)^{\delta_{s,\nu}^{\bar{\pi},\bar{k}-1: +}} \cdot \frac{x^{\text{of}_s^{\bar{\pi},\bar{k}}(e)}}{x^{\text{uf}_s^{\bar{\pi},(\bar{k}-1)}(e)}} = xy. \quad (2.80)$$

Note that $E_{s,\nu}^{\pi,(k-1),\uparrow} = E_{s,\nu}^{\bar{\pi},\bar{k},\downarrow}$ and $E_{s,\nu}^{\pi,(k-1),\downarrow} = E_{s,\nu}^{\bar{\pi},\bar{k},\uparrow}$. Together with the fact that $(W_{s,\nu,e}^{\pi,\varepsilon,k}(1/x, 1/y))^{-1} = W_{s,\nu,e}^{\bar{\pi},\varepsilon,k}(x, y)$, it implies that:

$$\overline{{}^c W_{s,\nu,e}^{(\pi,\zeta),k}}^{\parallel} = \frac{((-1)^{\zeta(k)+1} c) W_{s,\nu,e}^{\overline{(\pi,\zeta)},\bar{k}-1}}{D_\bullet D_\circ}. \quad (2.81)$$

Fix now $k > 1$. By Lemma 2.5.16, we can write:

$$\overline{cS_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k:-}} = \frac{\prod_{e \in E(s)} \overline{((-1)^{\zeta(k)c})W_{s,\nu,e}^{(\pi,\zeta),k-1}}}{1 - (D_o D_\bullet) c_s^{\pi,k-1}} \cdot \overline{((-1)^{\zeta(k)c})S_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),(k-1):-}}. \quad (2.82)$$

By Proposition 2.5.12 and Equation (2.81) and by recurrence hypothesis, we get:

$$\overline{cS_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k:-}} = (-1)^{k-2} \cdot \frac{\prod_{e \in E(s)} -c W_{s,\nu,e}^{\overline{(\pi,\zeta)},\bar{k}+1}}{(D_\bullet D_o) (1 - (D_o D_\bullet) -c_s^{\overline{(\pi,\zeta)},\bar{k}})} \cdot \overline{((-1)^{\zeta(k)+1}c)S_{s,\nu}^{\overline{(\pi,\zeta)},(\bar{k}+1):+}}, \quad (2.83)$$

and finally:

$$\overline{cS_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k:-}} = (-1)^{k-1} \cdot -c S_{s,\nu}^{\overline{(\pi,\zeta)},\bar{k}:+}, \quad (2.84)$$

which concludes the proof. \square

We are now able to prove Theorem 2.5.1, namely that R_s^\bullet is \parallel -symmetric.

Proof of Theorem 2.5.1. Let $s \in \mathcal{S}$ be an unlabeled scheme, ν a consistent naming of s and $(\pi, \zeta) \in \mathcal{BB}_s$. The contribution of scheme rootable stems of s , with binary bijection (π, ζ) , can be written as follows:

$$cP_{s,\nu}^{(\pi,\zeta):+} = \sum_{\rho \in \{\text{rootable stem of } s\}} \begin{cases} t_c, & \text{if } \sum_{i=1}^{\pi^{-1}(v_s(\rho))-1} \zeta(i) \equiv \lambda_r(\rho) \pmod{2}, \\ t_{-c}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.85)$$

$$cP_{s,\nu}^{(\pi,\zeta):-} = \sum_{\rho \in \{\text{rootable stem of } s\}} \begin{cases} t_c, & \text{if } \sum_{i=\pi^{-1}(v_s(\rho))}^{n_v(s)-1} \zeta(i) \equiv \lambda_r(\rho) \pmod{2}, \\ t_{-c}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.86)$$

Thanks to Lemma 2.4.6, the series R_s^\bullet can then be obtained in the following way:

$$R_s^\bullet = B^{n_e(s)} \cdot \sum_{(\pi,\zeta) \in \mathcal{BB}_s} \left(\circ P_{s,\nu}^{(\pi,\zeta):+} \cdot \circ S_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),1:+} + \bullet P_{s,\nu}^{(\pi,\zeta):+} \cdot \bullet S_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),1:+} \right) \quad (2.87)$$

$$= B^{n_e(s)} \cdot \sum_{(\pi,\zeta) \in \mathcal{BB}_s} \left(\circ P_{s,\nu}^{(\pi,\zeta):-} \cdot \circ S_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),n_v:-} + \bullet P_{s,\nu}^{(\pi,\zeta):-} \cdot \bullet S_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),n_v:-} \right). \quad (2.88)$$

By consequence:

$$\overline{R_s^\bullet} = \overline{B^{n_e(s)} \cdot \sum_{(\pi,\zeta) \in \mathcal{BB}_s} \left(\circ P_{s,\nu}^{(\pi,\zeta):+} \cdot \circ S_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),1:+} + \bullet P_{s,\nu}^{(\pi,\zeta):+} \cdot \bullet S_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),1:+} \right)} \quad (2.89)$$

By antisymmetry of B and Lemma 2.5.17, and since $\overline{t_o} = t_\bullet$:

$$\overline{R_s^\bullet} = (-1)^{n_e+n_v-1} \cdot B^{n_e} \sum_{(\pi,\zeta) \in \mathcal{BB}_s} \left(\bullet P_{s,\nu}^{\overline{(\pi,\zeta):-}} \cdot \bullet S_{s,\nu}^{\overline{(\pi,\zeta)},n_v(s):-} + \circ P_{s,\nu}^{\overline{(\pi,\zeta):-}} \cdot \circ S_{s,\nu}^{\overline{(\pi,\zeta)},n_v(s):-} \right) \quad (2.90)$$

$$= (-1)^{n_e+n_v-1} \cdot R_s^\bullet. \quad (2.91)$$

Since the surface is orientable, by Euler's formula, for any unlabeled scheme, we have $n_e + 2g - 1 = n_v$, which concludes the proof. \square

Chapter 3

Blossoming bijection for bipartite pointed map and parametric rationality of maps on any surface

This is extracted from a [DL19], which is still in preparation, but should be submitted to a journal soon. This collaboration with Maciej Dołęga was initiated by a visit of one week in Krakow in February 2019.

Abstract

We present a bijection between bipartite pointed maps on an arbitrary surface \mathcal{S} , and a family of unicellular blossoming maps on the same surface. Our bijection gives access to the degrees of all the faces, and distances from a pointed vertex in the initial map. The main construction generalizes recent work of the second author [Lep19], which covered the case of orientable surface.

Using in particular techniques introduced in [Lep19], and later extended to the bivariate setup by Albenque and the second autor [AL19], we then obtain the first combinatorial proof of the bivariate parametric rationality of the series of maps on a given surface with respect to their numbers of faces and vertices, first expressed in [AG00]. In particular, we provide a combinatorial interpretation of the structural difference between the rationality results of orientable and non-orientable maps.

3.1 Introduction

Maps are ubiquitous objects which have been studied by both mathematicians and physicists for decades. Roughly speaking, a map is a polygonal tiling of a surface \mathcal{S} , generalizing an important concept of triangulations. Rich structural properties of maps have multiple connections with various areas of discrete mathematics, algebraic geometry, number theory, statistical physics, and most recently random geometries. This has pushed the study of maps forward in recent years, especially in the enumerative context (see e.g. [LZ04, Eyn11] among others).

3.1.1 Enumeration – solving functional equations

The study of enumerative properties of planar maps was initiated by Tutte in the sixties [Tut63]. He studied structural properties of their generating function weighted by number of edges by building certain functional equations satisfied by this function. In the aforementioned paper Tutte guessed the solution of the equation he cooked up, however in the joint paper with Brown [BT64] they developed a more systematic method of solving similar equations containing one so-called *catalytic variable*. This method turned out to be very powerful and was substantially extended by Bousquet-Mélou and Jehanne [BMJ06] to the much broader context of enumerating various combinatorial objects. It took more than two decades to extend Tutte's original result, using similar methods, to the case of enumeration of higher genus maps [BC86]. In the case of the univariate generating function, that is the generating function weighted by number of edges, Bender and Canfield obtained asymptotic enumeration results that happened to be very similar in both the orientable and non-orientable cases:

Theorem 3.1.1 ([BC86]). *For each $g \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$, there exist constants t_g, p_g such that the number of rooted maps with n edges on the orientable (non-orientable, respectively) surface of genus g satisfies:*

$$\vec{o}_g(n) \sim t_g n^{\frac{5}{2}(g-1)} 12^n, \quad n\vec{o}_g(n) \sim p_g n^{\frac{5}{2}(g-1)} 12^n, \quad \text{respectively.}$$

Later on, Bender and Canfield refined their result in the case of orientable surfaces to the following one:

Theorem 3.1.2 ([BC91]). *For each $g \geq 0$, the generating series of orientable maps of genus g enumerated by the number of edges is a rational function of z and $\sqrt{1-12z}$.*

Next step was to study the bivariate generating functions of orientable maps enumerated by their number of vertices and faces, directly generalizing the univariate enumeration, thanks to Euler formula [BCR93]. The result obtained by Bender, Canfield and Richmond [BCR93] was refined by Arqués and Giorgetti [AG99], and shortly afterwards extended to the case of non-orientable surfaces [AG00].

Theorem 3.1.3 ([AG00]). *Set $g \geq 1$. The bivariate series of all maps (orientable or not) having genus g can be written:*

$$\frac{P_g(t_\bullet, t_\circ, a)}{a^{10g-6}},$$

where P_g is a polynomial of degree lower than or equal to $6g-3$, and t_\bullet, t_\circ , and a are defined by:

$$\begin{cases} t_\bullet &= z_\bullet + 2t_\bullet t_\circ + t_\bullet^2 \\ t_\circ &= z_\circ + 2t_\bullet t_\circ + t_\circ^2 \\ a &= \sqrt{(1-2(t_\bullet + t_\circ))^2 - 4t_\bullet t_\circ} \end{cases}. \quad (3.1)$$

Moreover, the bivariate series of orientable maps having genus g can be written:

$$\frac{P'_g(t_\bullet, t_\circ)}{a^{10g-6}},$$

where P'_g is a polynomial of degree lower than or equal to $6g-3$.

Note that Theorem 3.1.3 raises a strong structural difference between the generating functions of maps on orientable and non-orientable surfaces.

We finish this section by making the following remark. All these remarkable properties are obtained by rather indirect methods. Indeed, the general proof strategy so far was to build certain functional equations, and to use their particular form to find a solution with nice properties. On the other hand, these enumerative results give a strong indication that enumeration of maps should be strictly related with enumeration of some decorated binary trees and Motzkin paths, which are very simple combinatorial objects. Uncovering and understanding this hidden connection would lead to a conceptual proof of the aforementioned results, which naturally call for combinatorial interpretations. The desire to obtain such a better understanding was one of the reason that led to the rise of the bijective study of maps – nowadays a well-established domain on its own.

3.1.2 Enumeration – understanding the nature of enumerated objects

The motivation behind the usage of bijective methods of enumerating maps is twofold. On the one hand, to explain the remarkable enumerative properties of maps by a direct, combinatorial argument. On the other hand, to give an access to a better understanding of their geometric nature. This second motivation turned out to be a conceptual breakthrough leading to completely new areas such as random geometry. These methods show that any map can be constructed from trees with some additional decorations in a systematic way. We can naturally divide these bijections into two different families of constructions: labeled and blossoming ones.

Labeled objects

The first bijective method of map enumeration was due to Cori and Vauquelin [CV81] who were able to recover the celebrated formula of Tutte for the number of planar maps with n edges. They constructed a bijection between these maps and certain labeled trees, giving a bijective proof of Tutte’s formula. Their result also opened a way to study the limit geometry of planar maps, initiated in the pioneering work of Chassaing and Schaeffer [CS04]. Cori and Vauquelin’s method was improved and extended to the case of higher genus orientable surfaces by Chapuy, Marcus and Schaeffer [CMS09], hence providing a bijective proof of the orientable part of Theorem 3.1.1. Finally, Chapuy and the first author [CD17] found a way to drop the assumption of orientability in the Marcus-Schaeffer construction, which resulted in a universal bijection explaining the similarities between orientable and non-orientable asymptotic enumeration from Theorem 3.1.1.

Blossoming objects

Schaeffer also found a different bijection [Sch97] between Eulerian planar maps and so-called blossoming trees, that are planar trees with some additional decorations. It turned out that this bijection found many extensions, allowing enumeration of various families of planar maps, such as simple triangulations [PS06], or plane bipolar orientations [FPS09]. The blossoming bijections for planar maps were later unified into a single general scheme by Albenque and Poulalhon [AP15].

The first generalization of Schaeffer’s initial construction [Sch97] for higher genus orientable maps was provided by the second author in a recent work [Lep19], which allowed him to obtain the first combinatorial interpretation of the rationality presented in Theorem 3.1.2.

In a subsequent work by the second author and Albenque [AL19], they extended the previous work so as to track the number of vertices and faces of a map, and obtained a combinatorial interpretation of the bivariate rationality expressed in the orientable case of Theorem 3.1.3.

The main *bijective* result of the present work is the following theorem, which extends [Lep19] in two different directions:

- maps are not required to be orientable anymore,
- we are studying pointed maps, so that the blossoming objects bijectively encode metric properties of the initial map.

Theorem 3.1.4. *Let \mathcal{S} be a surface, and $n_{\bullet}, n_{\circ}, n_1, n_2, \dots$ be integers with finite sum.*

There is an explicit bijection Φ_l between bipartite pointed maps of \mathcal{S} with n_{\bullet} black vertices, n_{\circ} white vertices, and n_k faces of degree $2k$ (for any $k \in \mathbb{N}_+$), and well-blossoming maps of \mathcal{S} with n_{\bullet} black rootable stems, n_{\circ} rootable stems, and n_k vertices of degree $2k$ (for any $k \in \mathbb{N}_+$).

Moreover, $\Phi_l(m)$ is well-rooted if and only if m is a root-pointed map.

If we now consider the case where $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} = (0, n, 0, 0 \dots)$, in conjunction with the classical *radial construction*, we obtain the following corollary:

Corollary 3.1.5. *Let \mathcal{S} be a surface, and n_{\bullet}, n_{\circ} be integers. There is an explicit constructive bijection between maps of \mathcal{S} with n_{\bullet} vertices and n_{\circ} faces and well-rooted 4-valent maps of \mathcal{S} with n_{\bullet} black rootable stems and n_{\circ} white rootable stems.*

Using strictly combinatorial methods developed in [Lep19] and [AL19], we use Corollary 3.1.5 to give an interpretation of the rationality expressed in Theorem 3.1.3. Moreover, we provide an explanation of the aforementioned structural difference between orientable and non-orientable maps. We also obtain additional deeper rationality results, depending on certain properties of the maps, namely the form of the *offset graph* of the *scheme* of its opening.

Last, but not least, we hope that our bijection opens the doors to study the metric properties of some classes of random maps. Indeed, in most cases random maps are studied using labeled objects; however it was shown by Addario-Berry and Albenque [ABA17] that the blossoming approach can be more natural in certain cases. We hope that our bijection might shed some light on possible extension of the aforementioned result.

3.1.3 Organization of the paper

Section 3.2 provides all the necessary definitions. In Section 3.3 we state and prove our main bijective construction. Section 3.4 is devoted to the decomposition of the unicellular maps obtained previously into some smaller pieces. This decomposition allows us to obtain enumerative and structural results, presented in Section 3.4.

3.2 Definitions

A *surface* \mathcal{S} is a compact, connected, two dimensional real manifold. By the classification theorem a surface \mathcal{S} is uniquely determined by an integer $X_{\mathcal{S}} \leq 2$ called *Euler characteristic*¹ together with an information whether \mathcal{S} is orientable or not. Note that a surface \mathcal{S} with odd Euler characteristic cannot be orientable. An *embedded graph* on a surface \mathcal{S} is a proper (meaning that the edges are non-crossing) embedding of a graph on \mathcal{S} , considered up to homeomorphism. A *face* of an embedded graph is a connected component of its complement in \mathcal{S} . An embedded graph is a *map* if it is *cellularly embedded*, meaning that all its faces are simply connected. The set of maps on a surface \mathcal{S} is denoted $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$.

Let m be a map. We denote \mathbf{V}_m , \mathbf{E}_m and \mathbf{F}_m the set of vertices, edges and faces of m . We denote n_m^v , n_m^e and n_m^f the cardinal of these sets. Any map m on a surface \mathcal{S} satisfies Euler formula:

$$n_m^v - n_m^e + n_m^f = X_{\mathcal{S}} \quad (3.2)$$

The univariate and bivariate generating series of maps on a surface are defined by:

$$M_{\mathcal{S}}(z) := \sum_{m \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}} z^{n_m^e}, \quad (3.3)$$

$$M_{\mathcal{S}}(x, y) := \sum_{m \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}} x^{n_m^v} y^{n_m^f}. \quad (3.4)$$

Each edge of a map can be divided into two *halfedges* by removing its middle point. A *corner* is an adjacency between a vertex and a face, delimited by two halfedges. We denote \mathbf{C}_m the set of corners of a map m . The vertex and face adjacent to a corner c are denoted $v_m(c)$ and $f_m(c)$.

We arbitrarily associate to each vertex of m an orientation that we call *direct*. In particular, this defines a permutation called *vertex rotation* and denoted $\sigma_m : \mathbf{C}_m \rightarrow \mathbf{C}_m$ that takes a corner c and returns the next corner around $v_m(c)$ in direct order. An *oriented corner* \vec{c} is defined as a pair made of a corner c and a *spin* $s(\vec{c})$, which is 1 if the orientation of \vec{c} agrees with the direct orientation of the vertex $v_m(c)$, and -1 otherwise. The set of oriented corners of m is denoted $\vec{\mathbf{C}}_m$. The *reversed corner* of \vec{c} , denoted $\bar{\vec{c}}$, is defined by $\bar{\vec{c}} := (c, -s(\vec{c}))$. The vertex rotation can be extended to oriented corners in the following way: $\vec{\sigma}_m(\vec{c}) := (\sigma_m^{s(\vec{c})}(c), s(\vec{c}))$, and $\bar{\vec{\sigma}}_m(\vec{c}) := (\sigma_m^{s(\vec{c})}(c), -s(\vec{c}))$. Note that $\bar{\vec{\sigma}}_m$ is an involution. The edge associated to an oriented corner \vec{c} , denoted $e_m(\vec{c})$, is the edge that separates \vec{c} and $\sigma_m(\vec{c})$.

The *face rotation*, denoted $\vec{\theta}_m : \vec{\mathbf{C}}_m \rightarrow \vec{\mathbf{C}}_m$, is defined as follows: the next oriented corner after an oriented corner \vec{c} around $f_m(c)$ is denoted $\vec{\theta}_m(\vec{c})$. We also denote $\bar{\vec{\theta}}_m(\vec{c})$ the reverse corner of $\vec{\theta}_m(\vec{c})$. Note that $\bar{\vec{\theta}}_m$ is an involution. The *twist function*, denoted $\tau_m : \mathbf{E}_m \rightarrow \{+1, -1\}$, is then defined by $\tau_m(e_m(\vec{c})) := s(\vec{c}) \cdot s(\vec{\theta}_m(\vec{c}))$. The fact that $\vec{\theta}_m$ is a bijection ensures that the previous equation gives the same result for any oriented corner having the same associated edge, so that the twist function is well defined.

Remark 6. The definitions of σ_m , θ_m , and τ_m depend on the initial choice of a local orientation around each vertex. Changing the local orientation of a vertex v is called a *flip*. It amounts to change the twist value of all edges adjacent to v , and

¹or, equivalently, by nonnegative half-integer $g_{\mathcal{S}} \in \frac{1}{2} \cdot \mathbb{N}$ called *genus*, and defined by $X_{\mathcal{S}} = 2 - 2g_{\mathcal{S}}$.

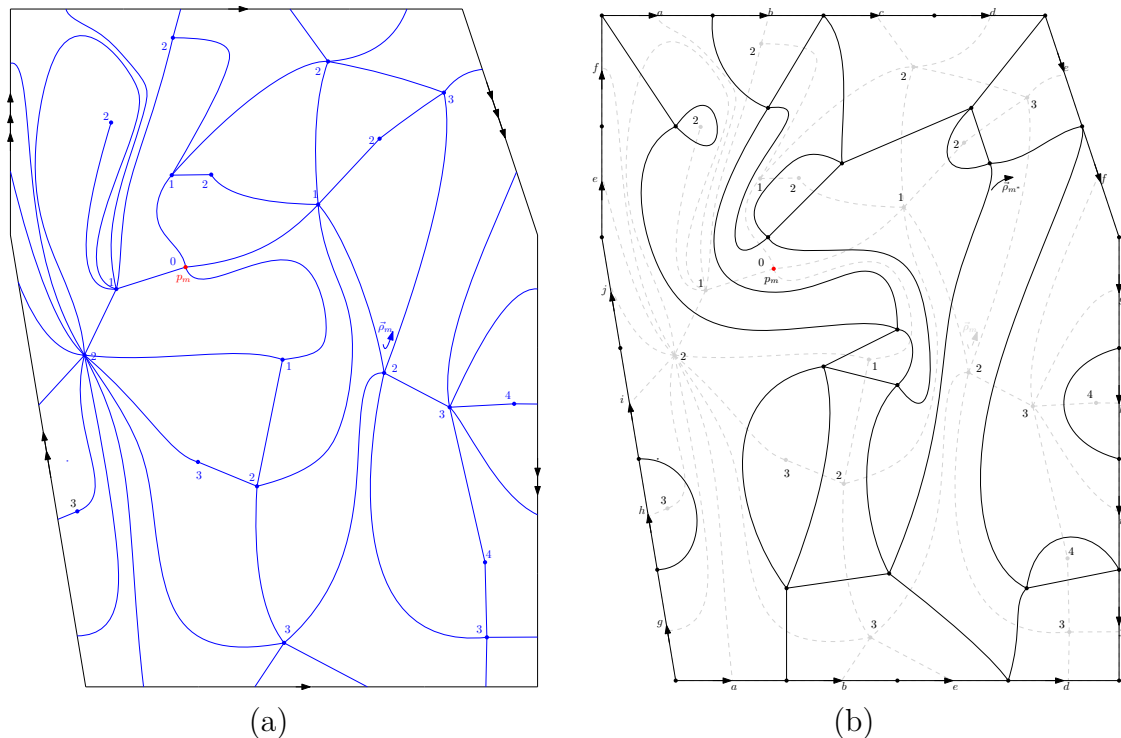


Figure 3.1: Figure a presents a bipartite map m with a pointed vertex p_m and root ρ_m . Labels of the vertices give the distance from the pointed vertex p_m . This map is embedded into the Klein bottle which is presented as the gluing of edges of the black hexagon in such a way that the direction of arrows is preserved by the gluing. Figure b figures the dual map m^* , which is bicolorable. Edges denoted by letters a, \dots, j should be identified such that the direction of arrows is preserved, and with this identification map m^* is also embedded into the Klein bottle.

modifying σ_m and θ_m accordingly: for instance σ_m should be changed to σ_m^{-1} around v . In particular, a map is orientable if and only if it is possible to apply a sequence of flips so as to make τ_m identically equal to 1. In other words, a map is orientable if there is a way of orienting its vertices which is globally consistent along edges.

The maps that we consider are *rooted*, that is they are equipped with a distinguished oriented corner $\vec{\rho}_m \in \vec{\mathcal{C}}_m$ called the *root corner*. This choice of a distinguished corner allows to remove any automorphisms that a map could have, thus allowing easier enumeration and bijections. A *pointed map* is a rooted map with an additional distinguished vertex called *pointed vertex* and denoted p_m . The families of pointed maps and their generating series are denoted by a \bullet . For instance, the generating series of pointed maps on a surface \mathcal{S} is denoted $M_{\mathcal{S}}^{\bullet}$. Note that $M_{\mathcal{S}}^{\bullet}(x, y) = \frac{\partial M_{\mathcal{S}}(x, y)}{\partial x}(x, y)$. A *root-pointed* map is a map m such that $p_m = v_m(\rho_m)$.

The *dual* of a map m is the map m^* defined on the same surface with the same set of corners, whose vertices are the faces of m , whose faces are the vertices of m , and such that the order of corners around vertices and faces corresponds to the order of corners around faces and vertices of m (see Figure 3.1). The orientation of the root of m and the root of m^* are opposite, meaning that vertex $v_m(\theta_m(\vec{\rho}_m))$ and face $f_{m^*}(\sigma_{m^*}(\vec{\rho}_{m^*}))$ are dual one of each other. Note that duality is an involution.

The degree of a vertex v or a face f , denoted $\delta_m(v)$ or $\delta_m(f)$, is the number of corners adjacent to it. A graph or a map is *bipartite* if all its cycles have even length.

In particular, all faces of a bipartite map have even degree. Vertices of a bipartite map can be separated into two distinct sets: the *black* (resp. *white*) vertices are vertices at even (resp. odd) distance from the root. The *vertex-color-weight* of a bipartite map m , denoted γ_m^v , is defined as the couple $(\gamma_m^{v\bullet}, \gamma_m^{v\circ})$, where $\gamma_m^{v\bullet}$ (resp. $\gamma_m^{v\circ}$) is the number of black (resp. white) vertices of m . A map is a *quadrangulation* if all its faces have degree 4.

A map is *bicolorable* if its dual is bipartite. Note that a bicolorable map is also *Eulerian*, which means that all its vertices have even degree. Although the two notions (bicolorable and Eulerian, or dually bipartite and even degree faces) are equivalent in the plane, this is not the case in other surfaces. Similarly to vertices of a bipartite map, faces of a bicolorable map can be separated into black and white faces. The *face-color-weight* of a bicolorable map m , denoted γ_m^f , is the color-weight of its dual: $\gamma_m^f := \gamma_{m^*}^v$. A map is 4-valent if all its vertices have degree 4. We denote $\mathcal{BP}_{\mathcal{S}}$ and $\mathcal{BC}_{\mathcal{S}}$ the sets of bipartite and bicolorable maps on a surface \mathcal{S} . We denote $\mathcal{BP}_{\mathcal{S}}^{\square}$ and $\mathcal{BC}_{\mathcal{S}}^{\times}$ the sets of bipartite quadrangulations and bicolorable 4-valent maps on a surface \mathcal{S} .

The *face-weight* of a bipartite map m , denoted δ_m^f , is the vector $(n_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$ such that for all i , n_i is the number of faces of m of degree $2i$. Similarly, the *vertex-weight* of a bicolorable map m , denoted δ_m^v , is the vector $(n_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$ such that for all i , n_i is the number of vertices of m of degree $2i$. The multivariate generating series of bipartite and bicolorable maps on a surface \mathcal{S} are defined as follows:

$$BP_{\mathcal{S}}(\mathbf{z}) := \sum_{m \in \mathcal{BP}_{\mathcal{S}}} \mathbf{z}^{\delta_m^f}, \quad (3.5)$$

$$BC_{\mathcal{S}}(\mathbf{z}) := \sum_{m \in \mathcal{BC}_{\mathcal{S}}} \mathbf{z}^{\delta_m^v}, \quad (3.6)$$

with the conventions that $\mathbf{z} := (z_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$ and $(z_i)_{i \in \mathbb{N}_+}^{(n_i)_{i \in \mathbb{N}_+}} := \prod_{i \in \mathbb{N}_+} z_i^{n_i}$. The colored multivariate generating series of bipartite and bicolorable maps on a surface \mathcal{S} are defined as follows:

$$BP_{\mathcal{S}}(\mathbf{z}, x, y) := \sum_{m \in \mathcal{BP}_{\mathcal{S}}} \mathbf{z}^{\delta_m^f} x^{\gamma_m^{v\bullet}} y^{\gamma_m^{v\circ}}, \quad (3.7)$$

$$BC_{\mathcal{S}}(\mathbf{z}, x, y) := \sum_{m \in \mathcal{BC}_{\mathcal{S}}} \mathbf{z}^{\delta_m^v} x^{\gamma_m^{f\bullet}} y^{\gamma_m^{f\circ}}. \quad (3.8)$$

The bivariate generating series of bipartite quadrangulations and bicolorable 4-valent maps are defined by:

$$BP_{\mathcal{S}}^{\square}(x, y) := BP_{\mathcal{S}}(\mathbf{z}, x, y)|_{\mathbf{z}=(0,1,0,\dots)} = \sum_{m \in \mathcal{BP}_{\mathcal{S}}^{\square}} x^{\gamma_m^{v\bullet}} y^{\gamma_m^{v\circ}}, \quad (3.9)$$

$$BC_{\mathcal{S}}^{\times}(x, y) := BC_{\mathcal{S}}(\mathbf{z}, x, y)|_{\mathbf{z}=(0,1,0,\dots)} = \sum_{m \in \mathcal{BC}_{\mathcal{S}}^{\times}} x^{\gamma_m^{f\bullet}} y^{\gamma_m^{f\circ}}. \quad (3.10)$$

3.3 Bijection

3.3.1 Left-most geodesic tree

Let m be a map on a surface \mathcal{S} . A *spanning tree* of m is the map t embedded on \mathcal{S} , obtained from m by keeping all its vertices but only a subset of edges of m such

that t is connected and acyclic. A spanning tree is naturally rooted at the oriented corner containing $\vec{\rho}_m$. Note that, except if \mathcal{S} is a sphere, t is not cellularly embedded. However, t can alternatively be seen as a planar map by cutting the surface \mathcal{S} along the edges of t , and gluing the resulting border to a disk.

Let t be a spanning tree of a pointed map m , and v be a vertex of m . To each vertex $v \in \mathbf{V}_m$, we associate a *height*, denoted $h_m(v)$, defined as the distance from v to p_m . By extension, the height of a corner c is the height of $v_m(c)$. Similarly, the *height in t* of v is the distance from v to p_m in t . The spanning tree t is called *geodesic* if for any vertex v of m , the height of v and the height in t of v are the same.

Definition 3.3.1 (contour word). *Let t be a spanning tree of a pointed map m . The contour word of t is the sequence of heights of corners of m in the tour of t starting from $\vec{\rho}(m)$. Because t is spanning and acyclic, each corner is visited once by such a tour, so that the length of the contour word is equal to the number of corners of m .*

Remark 7. If m is bipartite, the contour word of t uniquely characterizes t . Indeed, starting a tour from $\vec{\rho}_m$, any time a yet-unvisited edge going to a yet-unvisited vertex is met, this vertex does not have the same height as the current vertex (because the map is bipartite), so that the contour word is enough to decide whether this edge should be in t or not.

Definition 3.3.2 (leftmost geodesic tree). *Let m be a bipartite pointed map. The leftmost geodesic tree of m , denoted $t_\ell(m)$, is the geodesic tree of m which is maximal for the lexicographic order.*

The uniqueness of the leftmost geodesic tree of a bipartite map is a direct consequence of Remark 7. See Section 3.3.1

Lemma 3.3.3. *The leftmost geodesic tree of a bipartite pointed map can be computed by Algorithm 11.*

Proof. Let m be a bipartite pointed map, and t be the embedded graph computed by Algorithm 11. We are going to prove that t is the leftmost geodesic tree of m by successively proving following steps:

- (A) Algorithm 11 terminates and performs a tour of the root face of t , starting from $\vec{\rho}_m$.
- (B) graph t is a tree;
- (C) graph t is spanning and geodesic;
- (D) graph t is the leftmost geodesic tree of m .

In order to prove (A) we notice that at each step of the algorithm, we are updating a corner \vec{c} . Let \vec{c}_i denotes the corner \vec{c} at i -th step of the algorithm. We start from the proof that the algorithm terminates. In other terms we have to prove that $\vec{c}_{i+1} \notin \{\vec{c}_2, \dots, \vec{c}_i\}$ for each $i > 1$. Suppose that this is not the case, and let i be the minimal index for which $c_{i+1} \in \{\vec{c}_2, \dots, \vec{c}_i\}$. This means that there exists $1 \leq j < i$ such that $\vec{c}_{i+1} = \vec{c}_{j+1} =: \vec{c}$, but $\vec{c}_i \neq \vec{c}_j$. Then $\{\vec{c}_i, \vec{c}_j\} = \{\vec{\sigma}_m^{-1}(\vec{c}), \vec{\theta}_m^{-1}(\vec{c})\}$. In both cases, the two equalities imply respectively that $e_m(\vec{c}) \notin t$ and $e_m(\vec{c}) \in t$,

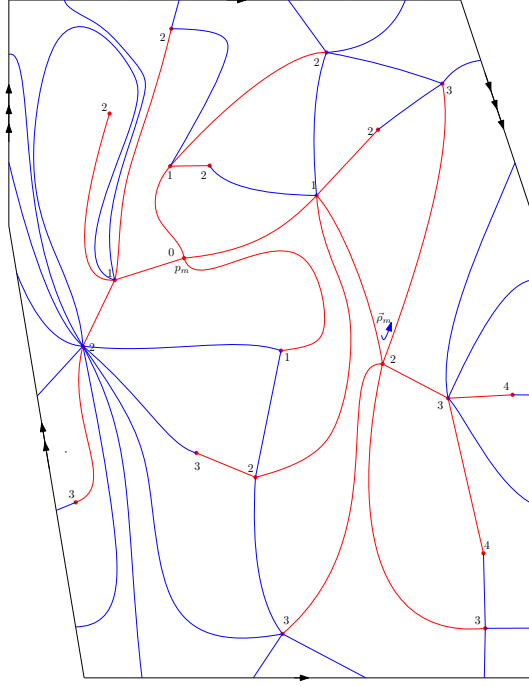


Figure 3.2: Leftmost geodesic tree of the map m^* from Figure 3.1b is depicted in red.

which is a contradiction. By consequence the algorithm terminates and performs a tour of the root face of t , starting from $\vec{\rho}_m$.

We are going to prove (B). Suppose that t is not acyclic, and denote C the set of edges that are part of a cycle of t , along with their incident vertices. Let v be a vertex of C with maximum height. Since m is bipartite, all vertices sharing an edge of C with v have height strictly smaller than v .

Let \vec{c}_0 be the first corner incident to v explored by the algorithm, and $(\vec{c}_i)_{i \in [1, k]}$ be the sequence of explored corners of v such that $e_m(\vec{c}_i) \in t$, in the same order as they are encountered by the algorithm. Suppose $e_m(\vec{c}_i) \notin C$. Then the part of t explored from \vec{c}_i is necessarily a tree, by definition of C . By consequence, at this step, the algorithm will just do the tour of this treelike part, so that no corner of v is explored between \vec{c}_i and $\vec{\sigma}_m(\vec{c}_i)$. Let j be the smallest i such that $e_m(\vec{c}_i) \in C$.

Consider the step of the algorithm when $\vec{c} = \vec{c}_j$. Since $v \in C$, we have $k \geq 2$, so that $\vec{\sigma}_m(\vec{c}_j) \neq \vec{c}_0$. By consequence, the edge $e := e_m(\vec{c})$ (as defined in the algorithm) is not explored yet. Thus Condition (1) is not satisfied by maximality of the label of v in C . Since v has at least 2 incident edges belonging to C (and these edges do not belong to $V \setminus t$), and since all vertices adjacent to v through edges from C are labeled by $h_m(v) - 1$ by maximality of the label of v , then condition (3) is not satisfied either. Additionally, these adjacent vertices are connected to the pointed vertex by paths of t not going through v (because v has maximal height), so that condition (2) is not satisfied either. This leads to a contradiction.

Now we want to show (C). We recall that Algorithm 11 performs a simple cycle on the subset \mathbf{C}_t of corners of m , which follows edges of a tree t (starting from $\vec{\rho}_m$). This means that at the last step of the algorithm all the edges incident to \mathbf{V}_t are visited. Suppose that t is not spanning. That means that there exists a vertex $v \in \mathbf{V}_m \setminus \mathbf{V}_t$. In particular, this means that the map $m'' = m \setminus (V \setminus t)$ is

Algorithm 11 the leftmost geodesic tree algorithm

Input: A bipartite pointed map m .

Output: The left-most geodesic tree of m , denoted t .

Set $t = \emptyset$, $\vec{c} = \vec{c}' = \vec{\rho}_m$, $m'' = m' = m$, and $V = \emptyset$ (V is the set of visited edges).

Repeat:

$e \leftarrow e_m(\vec{c})$

If $e \in V$ **Then:** ▷ e has already been visited

If $e \in t$ **Then:**

$\vec{c} \leftarrow \vec{\theta}_m(\vec{c})$

Else:

$\vec{c} \leftarrow \vec{\sigma}_m(\vec{c})$

End If

Else: ▷ e is unvisited yet

$\vec{c} \leftarrow \vec{\theta}_m(\vec{c})$

$m' \leftarrow m \setminus (V \setminus t)$ ▷ m' is made of all vertices of m , as well as edges that can still be in t at this point.

$m'' \leftarrow m' \setminus \{e\}$ ▷ m'' is made of edges that can be in t if the edge e is discarded.

If (1) $h_m(c') = h_m(c) + 1$ **ou** (2) m'' is disconnected **ou** (3) $h_{m''}(c) \neq h_m(c)$

Then:

add e to t

End If

add e to V

End If

Until: $\vec{c} = \vec{\rho}_m$ **Return:** t

disconnected, because vertex v is in a different connected component than \mathbf{V}_t . Since a map m'' is connected in the first step of the algorithm, this means that there exists the smallest step i , when we added an edge to V but not to t and we made a map m'' disconnected. This is a contradiction with condition (2) from the algorithm. Similarly, condition (3) enforces that at the end of the algorithm the distance in t from the vertex p_m to an arbitrary vertex v coincides with its height $h_m(v)$. Indeed, it is enough to notice that at each step of the algorithm the height in the map m' coincides with the distance from the pointed vertex p . Since at the last step of the algorithm the map m' coincides with t , the claim follows.

Finally, we are ready to conclude (D). Suppose t it is not the leftmost geodesic spanning tree: $t_\ell(m) \neq t$. Let \vec{c}_0 be the last common corner between $t_\ell(m)$ and t . Consider the step of the algorithm when $c = c_0$. By Remark 7 and Definition 3.3.2, either

(a) $h_m(\vec{c}') = h_m(\vec{c}) + 1$ and $e \in t_\ell(m)$ but $e \notin t$, or

(b) $h_m(\vec{c}') = h_m(\vec{c}) - 1$ and $e \notin t_\ell(m)$ but $e \in t$.

Case (a) is impossible because of condition (1). Suppose we are in case (b). Then either condition (2) or (3) is satisfied, which is a contradiction with the fact that $t_\ell(m) \subset m''$, while $t_\ell(m)$ is a geodesic spanning tree.

This concludes the proof. □

3.3.2 Blossoming unicellular maps

A map m is *unicellular* if it has a unique face. Note that a tree is unicellular. We call *tour corners* the oriented corners that can be written as $\vec{\theta}_m^i(\vec{\rho}_m)$ for some $i \in \mathbb{N}$. We denote ${}^t\vec{\mathbf{C}}_m$ the set of tour corners of m . Note that for any oriented corner \vec{c} , ${}^t\vec{\mathbf{C}}_m$ contains either \vec{c} or $\bar{\vec{c}}$, but not both. This is a way of choosing a unique orientation for each corner of a unicellular map. The *tour index* of a tour corner $\vec{c} \in {}^t\vec{\mathbf{C}}_m$ is the minimum $i \in \mathbb{N}_+$ such that $\vec{c} = \vec{\theta}_m^i(\vec{\rho}_m)$. The *tour order starting from the root* (or root order), denoted \preccurlyeq_m , is the total order corresponding to the tour index. Note that the root corner is the maximum corner for tour order. The *tour order* is the corresponding cyclic order.

A *blossoming* map m is a map with additional single (meaning that they are not matched to another halfedge to form an edge) halfedges, called *stems*. We denote $\vec{\mathbf{C}}_m^s$ the set of oriented corners that are followed by a stem, and $\vec{\mathbf{C}}_m^e$ the set of oriented corners that are followed by an edge. The function e_m is not defined on $\vec{\mathbf{C}}_m^s$. The definition of the vertex rotation is not impacted. Since a stem is not matched to another halfedge, we consider that the face rotation of a corner of $\vec{\mathbf{C}}_m^s$ is equal to its vertex rotation.

The *interior map* of a blossoming map m , denoted m° , is the (non-blossoming) map obtained from m by removing all its stems. The *interior degree* of a vertex v , denoted $\delta_m^\circ(v)$, is the degree of v in m° . The *blossoming degree* of a vertex v , denoted $\delta'_m(v)$, is the number of stems adjacent to v . Note that the degree of a vertex is equal to the sum of its interior and blossoming degree.

A blossoming map is *bicolorable* if any cycle in the graph of corners (induced by the operations $\vec{\sigma}_m$ and $\vec{\theta}_m$) crosses an even number of halfedges (edges or stems). Note in particular that a bicolorable blossoming map is Eulerian, but again, unless the underlying surface is a sphere, the converse is not necessarily true. Note also that each face of a bicolorable blossoming map has an even number of stems.

In this paper, stems are oriented. Outgoing stems are called *buds*, while ingoing stems are called *leaves*. We denote $\vec{\mathbf{C}}_m^b$ (resp. $\vec{\mathbf{C}}_m^l$) the set of oriented corners of m that are followed by a bud (resp. by a leaf). From this point on, we require that a blossoming map has as many buds as leaves.

The *corner labeling* of a unicellular blossoming map m is the unique function $\lambda_m : \mathbf{C}_m \rightarrow \mathbb{Z}$ that satisfies the following properties:

$$\begin{cases} \lambda_m(\rho_m) &= 0, \\ \lambda_m(\theta_m(\vec{c})) &= \lambda_m(c), & \text{if } \vec{c} \in {}^t\vec{\mathbf{C}}_m^e, \\ \lambda_m(\theta_m(\vec{c})) &= \lambda_m(c) + 1, & \text{if } \vec{c} \in {}^t\vec{\mathbf{C}}_m^b, \\ \lambda_m(\theta_m(\vec{c})) &= \lambda_m(c) - 1, & \text{if } \vec{c} \in {}^t\vec{\mathbf{C}}_m^l. \end{cases} \quad (3.11)$$

Note that the uniqueness of the previous definition comes from the fact that it can be computed by a tour of the unique face starting from the root.

A corner labeling is a *well-labeling* if it satisfies the following additional properties:

$$\begin{cases} \lambda_m(\sigma_m(c)) &= \lambda_m(c) - 1, & \text{if } c \in \mathbf{C}_m^e \text{ and } c \preccurlyeq_m \sigma_m(c), \\ \lambda_m(\sigma_m(c)) &= \lambda_m(c) + 1, & \text{if } c \in \mathbf{C}_m^e \text{ and } \sigma_m(c) \preccurlyeq_m c. \end{cases} \quad (3.12)$$

A *well-blossoming* map is a unicellular blossoming map whose corner labeling is a well-labeling. Note that in particular, a well-blossoming map is bicolorable. We denote $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ the set of well-blossoming maps on a surface \mathcal{S} .

A *bud-rooted* map is a well-blossoming map m such that $\vec{\rho}_m \in {}^t\vec{\mathbf{C}}_m^b$. We also say that such a map is *rooted on a bud*. A corner labeling is *non-negative* if all labels are non-negative. A *well-rooted* map is a well-blossoming map whose corner labeling is non-negative. Note that a well-rooted map is necessarily bud-rooted. We denote $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$) the set of well-rooted (resp. bud-rooted) maps on a surface \mathcal{S} .

A stem is said to be *black* (resp. *white*) if the highest adjacent to it is even (resp. odd). The face is said to be *black* (resp. *white*) if its minimum label is even (resp. odd).

The *face-color-weight* of a map $m \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$, denoted γ_m^f , is defined as the couple $(\gamma_m^{f\bullet}, \gamma_m^{f\circ})$, where $\gamma_m^{f\bullet}$ (resp. $\gamma_m^{f\circ}$) is the number of black (resp. white) leaves and face of m .

The *rootable-stem-color-weight* of a map $m \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$, denoted γ_m^r , is defined as the couple $(\gamma_m^{r\bullet}, \gamma_m^{r\circ})$, where $\gamma_m^{r\bullet}$ (resp. $\gamma_m^{r\circ}$) is the number of black (resp. white) rootable stems of m .

The colored multivariate generating series of $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$, and $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ are defined by:

$$B_{\mathcal{S}}(\mathbf{z}, x, y) := \sum_{m \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}} \mathbf{z}^{\delta_m^v} x^{\gamma_m^{f\bullet}} y^{\gamma_m^{f\circ}}, \quad (3.13)$$

$$P_{\mathcal{S}}(\mathbf{z}, x, y) := \sum_{m \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}} \mathbf{z}^{\delta_m^v} x^{\gamma_m^{r\bullet}} y^{\gamma_m^{r\circ}}, \quad (3.14)$$

$$R_{\mathcal{S}}(\mathbf{z}, x, y) := \sum_{m \in \mathcal{R}_{\mathcal{S}}} \mathbf{z}^{\delta_m^v} x^{\gamma_m^{r\bullet}} y^{\gamma_m^{r\circ}}. \quad (3.15)$$

The restriction of $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$, and $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ to 4-valent maps are denoted $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}^{\times}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}^{\times}$, and $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}^{\times}$. Their bivariate generating function are defined by:

$$F_{\mathcal{S}}^{\times}(x, y) := F_{\mathcal{S}}^{\times}((1)^{\mathbb{N}}, x, y), \quad (3.16)$$

where F is either B , P or R .

Remark 8. We use the face-color-weight for maps of $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ because this ensures that the opening is a weight-preserving bijection, where the weight of the pointed vertex becomes the weight of the face. However, in the subsequent parts of the paper, it appears that the rootable-stem-color-weight is more convenient to manipulate. Note that, by definition, the face-color-weight and the rootable-stem-color-weight of a map of $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ coincide. This allows us, in the course of the paper, to switch from the face-color-weight for maps of $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ (and $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$), to the rootable-stem-color-weight, for subsequent families of maps.

3.3.3 Opening of a map along a spanning tree

Let m be a bipartite pointed map, and t a spanning tree of m . The *opening of m along t* , denoted $\Phi(m, t)$, is the blossoming map obtained from m^* , the dual of m , by Algorithm 12. Furthermore, we call *opening of m* and denote $\Phi_{\ell}(m) := \Phi(m, t_{\ell}(m))$, the opening of m along its leftmost geodesic tree. See Figure 3.3 which shows how to obtain $\Phi_{\ell}(m)$ from the map m from Figure 3.1a.

Lemma 3.3.4. *Let m be a bipartite pointed map on a surface \mathcal{S} . Then the opening of m , $o := \Phi_{\ell}(m)$, is a well-blossoming map on \mathcal{S} ; the face-weight of m is equal to the vertex-weight of o : $\delta_m^f = \delta_o^v$; and the vertex-color-weight of m is equal to the face-color-weight of o : $\gamma_m^v = \gamma_o^f$.*

Moreover, if m is root-pointed, then o is well-rooted.

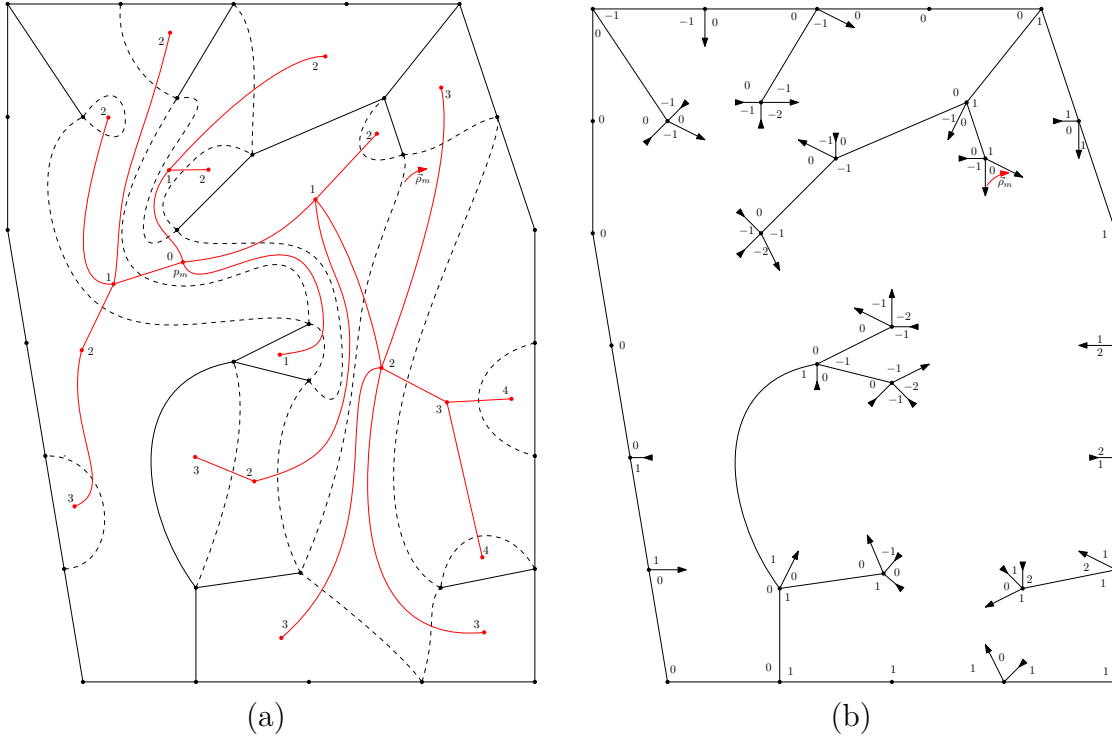


Figure 3.3: a: the map represented in Figure 3.1b, along with the leftmost geodesic tree of its dual. b: the opening of the dual of the previous map.

Proof. Let m be a bipartite pointed map on a surface \mathcal{S} , $t := t_\ell(m)$ be the leftmost geodesic tree of m , and $u := \Phi_\ell(m)$ be the opening of m .

- Similarly to Lemma 3.3.3, we can prove that this algorithm terminates and performs a simple cycle on corners of m^* , which follows edges not in t^* . Furthermore, condition (1) ensures that this cycle is exactly the dual of the cycle performed in Algorithm 11. By consequence, all corners are visited and the resulting map, which is the complement of the dual of a tree, is unicellular and cellularly embedded in \mathcal{S} .
- To each corner \vec{c} of o we associate the label $h_m(v_m(\vec{c})) - h_m(v_m(\vec{\rho}_m))$. Condition (2) ensures that this labeling satisfies Equation (3.11), so that it coincides with the corner labeling of o .
- Condition (1) of Algorithm 11 ensures that any edge $e_m(\vec{c})$ not in t satisfies $h_m(\theta_m(\vec{c})) = h_m(\vec{c}) - 1$, so that the corner labeling of o satisfies Equation (3.12) and is hence a well-labeling.
- If m is root-pointed, then $h_m(v_m(\vec{\rho}_m)) = 0$. Thus for any $v \in \mathbf{V}_m$ label $h_m(v) - h_m(v_m(\vec{\rho}_m)) = h_m(v)$ is non-negative, so that o is well-rooted.
- The degree of the vertices of m^* and o are the same. Every time we remove a black (resp. white) face out of o during the algorithm, we add a black (resp. white) bud into o .

□

Algorithm 12 the opening algorithm.

Input: A pointed map m and a spanning tree t .

Output: The opening of m along t , denoted $o := \Phi(m, t)$.

Set $o = m^*$, the dual of m , and denote t^* the dual of t

$\vec{c} \leftarrow \vec{\rho}_m$

Repeat:

If $\vec{c} \in \vec{C}_o^e$ **Then:** ▷ \vec{c} is followed by an edge in o

set $e \leftarrow e_o(\vec{c})$

If (1) $e \notin t^*$ **Then:**

$\vec{c} \leftarrow \vec{\theta}_o(\vec{c})$

▷ we keep e and continue the tour

Else:

▷ we disconnect the edge so as to create 2 stems

remove e from o

If (2) $h_m(v_m(\sigma_m(\vec{c}))) = h_m(v_m(\vec{c})) + 1$ **Then:**

add a bud in o after \vec{c}

add a leaf in o before $\vec{\theta}_{m^*}(\vec{c})$

Else:

add a leaf in o after \vec{c}

add a bud in o before $\vec{\theta}_{m^*}(\vec{c})$

End If

End If

Else:

▷ \vec{c} is followed by a stem in o

$\vec{c} \leftarrow \vec{\theta}_o(\vec{c})$

▷ we continue the tour

End If

Until: $\vec{c} = \vec{\rho}_o$

Return: o

3.3.4 Closing a unicellular blossoming map

Let $u \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ be a well-blossoming map on a surface \mathcal{S} . The *closure* of u , denoted $\Psi(u)$, is the bipartite pointed map of \mathcal{S} obtained by the following procedure:

1. match stems by pairs bud/leaf in the following recursive way: match a bud with a leaf if there is no unmatched stem between the bud and the leaf, for the cyclic tour order.
2. merge each pair of stems into a single edge.
3. all corners of minimum label are now in the same face; mark this face.
4. take the dual of the map so obtained; the pointed vertex is the dual of the previously marked face.

The matching procedure matches all stems. Furthermore, the order in which matchings are done does not affect subsequent matchings. This (in addition to step (3)) can be easily seen in the following alternative way of deciding the stem matching:

1. represent the sequence of stems in tour order starting from the root by a uni-dimensional walk: a bud is represented by an upstep and a leaf by a downstep.

2. a bud corresponding to an upstep b going from height i to height $i + 1$ is matched with the leaf corresponding either to the first downstep after b that goes from height $i + 1$ to height i (if it exists) or either to the first downstep of the walk that goes from height $i + 1$ to height i , otherwise (the existence of such a step comes from the fact that there are as many buds as leaves).

Lemma 3.3.5. *Let $u \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ be a well-blossoming map on a surface \mathcal{S} . Then the closure of u , $m := \Psi(u)$, is a bipartite pointed map on \mathcal{S} ; the face-weight of m is equal to the vertex-weight of u : $\delta_m^f = \delta_u^v$; and the vertex-color-weight of m is equal to the face-color-weight of u : $\gamma_m^v = \gamma_u^f$.*

Moreover, if u is well-rooted, then m is root-pointed.

Proof. Let $u \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ be a well-blossoming map on a surface \mathcal{S} , and $m := \Psi(u)$ be the closure of u . The vertex-weight of u is not modified when merging stems, so that it is equal to the face-weight of m .

Note (recursively) that if we merge pairs of stems in the order in which they are decided in step (1), the labels of the corners of the root face satisfy Equation (3.11), while for any other face f , the labels of corners of f are all the same. We label in m the dual vertex of f by this common label, minus the minimum of all corner labels of u .

Because u is well-blossoming, the labels of any two adjacent vertices of m differ by 1, which implies that m is bicolourable, and that the labeling of any vertex is smaller or equal to its height. Additionally, let $v \in \mathbf{V}_m$ be a vertex of m different from ρ_m . The corresponding face was created by merging together 2 stems into an edge e . The neighbour of v in m along e has label 1 less than v . Iteratively, this ensures the existence of a path from v to ρ_m of length equal to the label of v . This suffices to prove that the labeling of m actually coincides with the height labeling.

As a consequence, merging black (resp. white) bud with a leaf creates a black (resp. white) face in m . Furthermore, if u is well-rooted, ρ_u ends up in the face with minimum label, so that m is root-pointed. \square

3.3.5 Opening and closure are inverse bijections

Lemma 3.3.6. *Let u be a well-blossoming map. Then the opening of the closure of u is u itself: $\Phi_l(\Psi(u)) = u$.*

Proof. Let $u \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ be a well-blossoming map on a surface \mathcal{S} , and $m := \Psi(u)$ be the closure of u .

We denote s the set of edges of m that are dual to those created from u by merging 2 stems. Since u is unicellular, s is a spanning tree of m . Since the height and the height in s of vertices of m coincide (see the proof of Lemma 3.3.5), s is geodesic. Furthermore, the sequence of corners in a tour of s in m corresponds exactly to a tour of the face of u .

Suppose that s is not the leftmost geodesic tree of m . This means there exists a corner \vec{c} such that the tours of s and $t_\ell(m)$ coincide up to \vec{c} , but differ on the next edge (meaning in particular that the other extremity of the next edge comes later in the tour). Either of the following occurs:

- $h_m(\theta_m(\vec{c})) = h_m(\vec{c}) + 1$, and $e_m(\vec{c}) \in t_\ell(m)$, but $\vec{c} \in \mathbf{C}_u^e$. This implies that $h_u(\sigma_u(\vec{c})) = h_u(\vec{c}) + 1$, which is a contradiction with the fact that the corner labeling of u is a well-labeling.
- $h_m(\theta_m(\vec{c})) = h_m(\vec{c}) - 1$, and $e_m(\vec{c}) \notin t_\ell(m)$, but $\vec{c} \in \vec{\mathbf{C}}_u^s$. Note that these conditions actually imply that $\vec{c} \in \vec{\mathbf{C}}_u^l$. The merging of the leaf l following \vec{c} with its matched bud b divides u into two faces, a face f_ρ that contains the root, and a face f_0 that contains the lowest label. Since $t_l(m)$ is spanning, it contains an edge e going from f_ρ to f_0 . Let \vec{c}' be the first corner adjacent to e in the tour of $t_l(m)$; since $\vec{c}' \in f_\rho$ and Lemma 3.3.3 coincides with the tour of u up to \vec{c} , \vec{c}' comes after b in the tour of u . Since $t_l(m)$ is geodesic, we have $h_m(\theta(\vec{c}')) = h_m(v_m(c')) - 1$. By consequence, the higher-label side of the edge dual to e is visited after its other side in the tour of u , which is a contradiction with u being well-blossoming.

By consequence, s is the leftmost geodesic tree of m and the tour of the face of u corresponds to the tour of corners of m performed in Algorithm 12. Condition (1) of Algorithm 12 implies immediately that the interior of u corresponds to the interior of $\Phi_l(m)$. Since the opening and closing algorithms also preserve the labels of corners, and the orientation of stems only depends of their adjacent labels, this is enough to conclude that $u = \Phi_l(m)$. \square

Lemma 3.3.7. *Let m be a bipartite pointed map. Then the closure of the opening of m is m itself: $\Psi(\Phi_l(u)) = u$.*

Proof. Let m be a bipartite pointed map, and $u := \Phi_\ell(m)$ its opening. Condition (1) of Algorithm 12 ensures that the tour of corners in Algorithm 12 corresponds to the tour of the face of u . Additionally, the labels of these corners remain the same throughout the opening.

The matching of stems can be made in reverse order of creation in Algorithm 12. Indeed, consider a pair of stems (s_1, s_2) created by Algorithm 12 recursively (s_1 is created at the current position in the tour, and s_2 corresponds to the other extremity of the former edge) and suppose that all subsequently created pair of stems can be matched together in the closure algorithm. If condition (2) is satisfied at the creation of (s_1, s_2) , then s_1 is a bud and s_2 a leaf, and after the merging of already performed matchings, s_2 comes directly after s_1 in tour order, so that they are matched together by the closure. Now suppose that condition (2) is not satisfied. This means that in the leftmost geodesic tree of m , the pointed vertex and the root are not on the same side of the edge corresponding to (s_1, s_2) . In particular, this means that there is no corner in u of label i or less between s_2 and s_1 in tour order (where the labels surrounding s_1 are $i, i+1$). By consequence, s_1 and s_2 are matched in the closure. \square

Lemmas 3.3.4 to 3.3.7 imply the following theorem, stated in the introduction as Theorem 3.1.4:

Theorem 3.3.8. *Let \mathcal{S} be a surface, and $n_\bullet, n_\circ, n_1, n_2, \dots$ be integers with finite sum.*

The opening Φ_l is a bijection between bipartite pointed maps of \mathcal{S} with n_\bullet black vertices, n_\circ white vertices, and n_k faces of degree $2k$ (for any $k \in \mathbb{N}_+$), and well-blossoming maps of \mathcal{S} with $n_\bullet - 1$ black buds, n_\circ white buds, and n_k vertices of degree $2k$ (for any $k \in \mathbb{N}_+$).

Moreover, $\Phi_l(m) \in \mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ if and only if m is a root-pointed map.

This implies the following equalities:

$$BP_{\mathcal{S}}^{\bullet}(x, y, \mathbf{z}) = B_{\mathcal{S}}(x, y, \mathbf{z}), \quad (3.17)$$

$$BP_{\mathcal{S}}(x, y, \mathbf{z}) = R_{\mathcal{S}}(x, y, \mathbf{z}). \quad (3.18)$$

3.3.6 An opening bijection for general maps

Corollary 3.3.9 is a direct corollary of Theorem 3.3.8, in the special case where $n_k = 0$ for all $k \neq 2$.

Corollary 3.3.9. *Let \mathcal{S} be a surface, and n_{\bullet}, n_{\circ} be integers.*

The opening Φ_l is a bijection between bipartite root-pointed quadrangulations of \mathcal{S} with n_{\bullet} black vertices and n_{\circ} white vertices, and well-rooted 4-valent maps of \mathcal{S} with $n_{\bullet} - 1$ black buds and n_{\circ} white buds.

This implies the following equality:

$$BP_{\mathcal{S}}^{\square}(x, y) = R_{\mathcal{S}}^{\times}(x, y). \quad (3.19)$$

We now describe a well-known bijection on maps, attributed to Tutte, and sometimes called quadrangulated map. A quadrangulation is a map whose faces all have degree 4.

Let m be a map on a surface \mathcal{S} . Then the *quadrangulated map* of m , denoted $q(m)$, is the map of \mathcal{S} whose vertices are the faces and vertices of m , and whose edges are in a bijection with corners of m in the following way: the edge of $q(m)$ corresponding to a corner c of m connects the vertices of $q(m)$ corresponding to $v_m(c)$ and $f_m(c)$.

Theorem 3.3.10. *Let \mathcal{S} be a surface, and n_{\bullet}, n_{\circ} be integers. Tutte's operation is a bijection between maps of \mathcal{S} with n_{\bullet} vertices and n_{\circ} faces and bipartite quadrangulations of \mathcal{S} with n_{\bullet} black vertices and n_{\circ} white vertices, so that:*

$$M_{\mathcal{S}}(x, y) = BP_{\mathcal{S}}^{\times}(x, y). \quad (3.20)$$

This bijection is a classical result; see [AL19] for a short proof discussing the colored weight. Therefore Theorem 3.3.10 applied to Corollary 3.3.9 implies the following corollary, denoted Corollary 3.1.5 in the introduction:

Theorem 3.3.11. *Let \mathcal{S} be a surface, and n_{\bullet}, n_{\circ} be integers. There is an explicit constructive bijection between maps of \mathcal{S} with n_{\bullet} vertices and n_{\circ} faces and well-rooted 4-valent maps of \mathcal{S} with $n_{\bullet} - 1$ black buds and n_{\circ} white buds.*

This implies:

$$M_{\mathcal{S}}(x, y) = R_{\mathcal{S}}^{\times}(x, y). \quad (3.21)$$

3.4 Decomposition of a unicellular map

We now proceed to the study of maps obtained by the opening algorithm. In the present section, in a very similar manner to what was done in previous work by the second author [Lep19, AL19], we successively decompose maps into *cores* and

schemes, following the work of Chapuy Marcus and Schaeffer [CMS09], while proceeding to two successive *rerootings*.

Well-rooted maps of \mathcal{R}_S can be *rerooted* so as to obtain bud-rooted maps of \mathcal{P}_S . These can in turn be *pruned*, so as to obtain bud-rooted cores, which can be rerooted into scheme-rooted cores of \mathcal{C}_S . These 3 operations can be merged into a single one, whose enumerative consequence is given in Lemma 3.4.7. A scheme-rooted cores of \mathcal{C}_S can be reduced to a label scheme of \mathcal{L}_S , which in turn can be reduced to an unlabeled scheme of \mathcal{U}_S .

In Section 3.4.1, we introduce the core and scheme of a unicellular blossoming map. In Section 3.4.2 we describe the rerooting operation. In Section 3.4.3 we state the enumerative consequence of the complete pruning procedure.

3.4.1 Core, scheme

Interior core, interior scheme

Let \mathcal{S} be a surface. A *core* of \mathcal{S} is a unicellular map of \mathcal{S} with no vertex of interior degree 1. A *scheme* of \mathcal{S} is a core of \mathcal{S} with no vertex of interior degree 2 (nor 1).

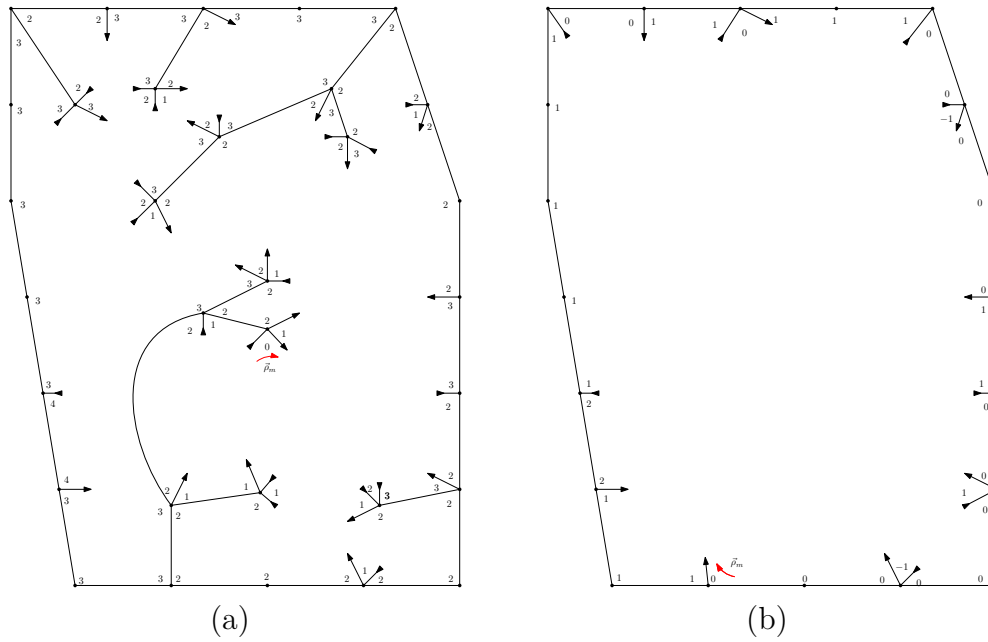
Let m be a (non-blossoming) unicellular map on a surface \mathcal{S} . The *interior core of m* is the core obtained from m by iteratively removing all vertices of degree 1 (and their adjacent edge). Note that if \mathcal{S} is a sphere, then the core of m is empty. A map can be seen as a core on which are attached trees. By consequence, the operation of iteratively removing vertices of degree 1 is also called *pruning*: retrieving the core just consists in cutting these trees.

Similarly, if c is a core, the *interior scheme of c* is the scheme obtained from c by iteratively removing vertices of interior degree 2, and merging their 2 formerly adjacent edges. A core can be seen as a scheme whose edges have been replaced by *branches*: sequences of vertices of interior degree 2. A vertex of c is a *scheme vertex* if it is also a vertex of the scheme of c . Note that a core in a projective plane is essentially a cycle, so that the scheme construction is not defined in genus less than 1.

Blossoming core

In order to be able to deal with blossoming maps, the previous operations have to be modified accordingly. Let $m \in \mathcal{R}_S$ be a well-blossoming map of \mathcal{S} . The map m is made of the core of its interior map, onto which are attached some stems and some trees. The *core of m* , denoted $c(m)$, is obtained by the pruning process, which consists in replacing each of these trees by a leaf if the tree does not contain the root, and by a bud otherwise, so as to obtain a well-blossoming map. This amounts to cutting the edge between the core and the tree and keeping the dangling halfedge, with adequate orientation. Note that the labels of the corners that belongs both to m and to $c(m)$ are the same in m and in $c(m)$. If ρ_m is a corner of $c(m)$, then it is also set to be the root of $c(m)$. Otherwise, the root of $c(m)$ is set to be the corner directly preceding the bud created by removing the tree of m that contains ρ_m . Note also that after this procedure all the vertices of $c(m)$ have interior degree at least equal to 2.

We denote \mathcal{T} the set of trees that can be cut from a core in the pruning process, so as to obtain a leaf. These trees can be empty, in case the original map already


 Figure 3.4: a: A well-rooted map m . b: The pruning of m .

had a leaf on its core. Otherwise, they are bud-rooted trees that can be described as follows: they are plane trees with $\deg(v) - 2$ buds attached to each internal vertex v , and whose leaf vertices are replaced by leaf stems.

We denote $T_{\bullet}(\mathbf{z}, x, y)$ the generating series of trees of \mathcal{T} with the weight it would have if it had been removed from a map so as to create a black leaf in the core. Note for instance that the weight of the empty tree in $T_{\bullet}(\mathbf{z}, x, y)$ is x . The generating series $T_{\circ}(\mathbf{z}, x, y)$ is defined by $T_{\circ}(\mathbf{z}, x, y) := T_{\bullet}(\mathbf{z}, y, x)$. We define $T^1 := T(\mathbf{z}, x, y)$, $T^{-1} := T(\mathbf{z}, y, x)$, where $\cdot \in \{\bullet, \circ\}$.

Lemma 3.4.1. *The series T_{\circ} and T_{\bullet} are related by the following equations:*

$$\begin{cases} T_{\bullet} &= x + \sum_{k \geq 1} \left(z_k \cdot \sum_{i_1 + \dots + i_k \leq k-1} \prod_{1 \leq j \leq k} T_{\bullet}^{(-1)} \begin{matrix} j-1+ \\ 1 \leq l \leq j \end{matrix} \right), \\ T_{\circ} &= y + \sum_{k \geq 1} \left(z_k \cdot \sum_{i_1 + \dots + i_k \leq k-1} \prod_{1 \leq j \leq k} T_{\circ}^{(-1)} \begin{matrix} j-1+ \\ 1 \leq l \leq j \end{matrix} \right). \end{cases} \quad (3.22)$$

Proof. Indeed, let $t \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ be a non-empty tree. Let $2k$, with $k \in \mathbb{N}^*$, denote the degree of its root vertex v ; this means that the interior degree of v is equal to k , and that v has $k - 1$ buds other than the root one attached to it. Let i_j denotes the number of buds between the $j - 1$ -th and the j -th edge attached to v . Then $i_1 + \dots + i_k \leq k - 1$, and the value of this sum uniquely determines the value of i_{k+1} . Moreover, let c_i be the label at the end of the tour of the i -th branch attached to v . Then the parities of c_j and c_{j+1} are the same if and only if i_{j+1} is odd. This analysis explains the form of the generating series for T_{\bullet} and T_{\circ} . \square

Because of Corollary 3.3.9 we are especially interested in enumerating 4-valent blossoming trees, whose generating function is given by

$$T_{\bullet}^{\times}(z_{\bullet}, z_{\circ}) := T_{\bullet}(0, 1, 0, \dots; z_{\bullet}, z_{\circ}).$$

The series T_{\bullet}^{\times} and T_{\circ}^{\times} are related by the following equations, obtained by specializing Lemma 3.4.1:

$$\begin{cases} T_{\bullet}^{\times} &= z_{\bullet} + (T_{\bullet}^{\times})^2 + 2T_{\circ}^{\times}T_{\bullet}^{\times}, \\ T_{\circ}^{\times} &= z_{\circ} + (T_{\circ}^{\times})^2 + 2T_{\circ}^{\times}T_{\bullet}^{\times}. \end{cases} \quad (3.23)$$

Blossoming scheme

Recall the definition of a well-labeling. A *decent labeling* of a blossoming scheme l is a labeling λ on \mathbf{C}_l which satisfies the following conditions:

$$\begin{cases} \lambda(\rho_l) &= 0, \\ \lambda(\sigma_l(\vec{c})) &= \lambda(c) + 1, & \text{if } \vec{c} \in {}^t\vec{\mathbf{C}}_l^b, \\ \lambda(\sigma_l(\vec{c})) &= \lambda(c) - 1, & \text{if } \vec{c} \in {}^t\vec{\mathbf{C}}_l^l, \\ \lambda(\sigma_l(\vec{c})) &= \lambda(c) - 1, & \text{if } \vec{c} \in {}^t\vec{\mathbf{C}}_l^e \text{ and } c \preceq_l \sigma_s(\vec{c}), \\ \lambda(\sigma_l(\vec{c})) &= \lambda(c) - 1, & \text{if } \vec{c} \in {}^t\vec{\mathbf{C}}_l^e \text{ and } c \preceq_l \sigma_s(\vec{c}). \end{cases} \quad (3.24)$$

A labeling that satisfies all this condition but the first is called *almost decent*.

A *labeled scheme* l is a bud-rooted scheme decorated with a decent labeling. Note that a decent labeling does not necessarily satisfy $\lambda(\theta_l(\vec{c})) = \lambda(c)$ for $\vec{c} \in {}^t\vec{\mathbf{C}}_l^e$, so that it may not coincide with the corner labeling. However, this decorative labeling overrides the usual canonical corner labeling, so that we simply denote it λ_l and sometimes refer to it as the corner labeling. The set of labeled schemes on a surface \mathcal{S} is denoted $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$.

A *scheme-rooted core* is a bud-rooted core whose root vertex is a scheme vertex. Let c be a scheme-rooted core. The *scheme of* c is the labeled scheme $s(c) \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ defined as the interior scheme of c , with the same root corner, and the same corner labels. Since c is scheme-rooted, in a tour of its face starting from the root, each side of a branch is visited all at once. By consequence, the root order of corners of $s(c)$ coincide in $s(c)$ and in c , and the corner labeling of $s(c)$ is decent. This confirms that $s(c)$ do belong to $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$. See Figure 3.7 for an illustration of the scheme of a core.

Unlabeled scheme

We extend the labeling λ_l of the corners of a labeled scheme l to its vertices: the *height* of a vertex $v \in \mathbf{V}_l$, denoted $\lambda_l^h(v)$, is defined by:

$$\lambda_l^h(v) = \min_{\substack{c \in \mathbf{C}_l \\ v_l(c)=v_l(c)}} \lambda_l(c).$$

We also define a new corner labeling on l called *relative labeling*, denoted λ_l^r :

$$\lambda_l^r(c) := \lambda_l(c) - \lambda_l^h(v_l(c)).$$

Note that:

- the difference of relative labels around a vertex correspond to the difference of corner labels,
- the minimum relative label incident to a vertex is always 0 by definition,
- the relative labeling of a labeled or unlabeled scheme is decent.

We call *unlabeled scheme* the map obtained from a labeled scheme by forgetting its height function, and its corner labeling (an exemple is given in Figure 3.8). Note that all labeled schemes having the same unlabeled scheme have the same relative labeling, so that unlabeled schemes naturally have a relative labeling too. The set of unlabeled schemes of a surface \mathcal{S} is denoted $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$.

The *relative type* of a halfedge of a scheme (labeled or unlabeled) is the minimum relative label adjacent to that halfedge. The *relative type* of a vertex is the maximum relative type of a halfedge incident to this vertex.

3.4.2 Rerooting

Virtually-rooted maps

In order to ensure that a labeled scheme always have a decent labeling, we only attributed a scheme to scheme-rooted cores. In the process of decomposing the opening of a map into a map, we hence need a tool that transforms a well-rooted map into a scheme-rooted one. A stem of a bud-rooted map is *rootable* if it is either the root bud or a leaf. In the next section, we will describe a way to reroot a scheme on any rootable stem. We would like to apply this procedure on a scheme leaf of the core, so as to obtain a scheme-rooted core.

In the orientable case, the second author showed in [Lep19] that a core always has at least one rootable scheme stem, so that the previous strategy is indeed possible. However, this is not true anymore in the case of non-orientable surfaces, and this leads us to define some *virtual* stems, and another rerooting operation.

A *virtually-rooted* map is a bud-rooted map m with two marked buds: the one following $\vec{\rho}_m$, and another one following $\vec{\sigma}_m^{-1}(\vec{\rho}_m)$, and such that $\vec{\sigma}(\vec{\rho}_m) \notin {}^t\mathbf{C}_m^b$ and $\vec{\sigma}^{-2}(\vec{\rho}_m) \notin {}^t\mathbf{C}_m^b$. Those 2 marked buds are called *virtual*. Virtual buds have no color, and are not taken into account in the weight of a map, nor in the degree of a vertex. The *virtual degree* of a vertex is the degree of that vertex when taking into account its virtual stems.

From now on, \mathcal{C} , \mathcal{L} and \mathcal{U} denote the sets of (virtually-rooted or not) scheme-rooted cores, labeled schemes, and unlabeled schemes.

Rerooting on a rootable stem

Let m be a bud-rooted map and s a rootable stem of m . The *rerooting of m on s* , denoted $\Omega(m, s)$, is the map obtained from m by changing the root bud to a leaf, changing s to a bud, and setting the root of $\Omega(m, s)$ to be the corner preceding s in tour order. The rerooting of a map does not change the status (real or virtual) of a stem. Note that (if ρ_m^s denote the root-bud of a bud-rooted map m) $\Omega(m, \rho_m^s) = m$, and that for any rootable stem s , $\Omega(\Omega(m, s), \rho_m^s) = m$.

Lemma 3.4.2. *The rerooting of a bud-rooted map on a rootable stem is a bud-rooted map.*

Proof. Let m be a bud-rooted map, and s a rootable stem of m (different from the root). It is clear that $\Omega(m, s)$ is rooted on a bud. Let us prove that it is well-blossoming.

There is a unique way to merge s and ρ_m into a single edge e to separate m into 2 faces . We denote by f_i the face which contains corners strictly smaller than s

with respect to \succsim_m , and f_r the other one (see Figure 3.5). The corner labeling of m and $\Omega(m, s)$ only depend on the orientation of the stems. Suppose that the labels around s in m are $i+1, i$. For any corner $c \in f_l$, we have $\lambda_{\Omega(m, s)}(c) = \lambda_m(c) - (i+1)$, whereas for any corner $c \in f_r$, we have $\lambda_{\Omega(m, s)}(c) = \lambda_m(c) - i + 1$.

Let \vec{c} be a corner of \mathbf{C}_m^e , such that $\vec{c} \preccurlyeq_m \vec{\sigma}_m(\vec{c})$, so that $\lambda_m(\sigma_m(\vec{c})) = \lambda_m(\vec{c}) - 1$ because m is well-blossoming. Suppose that both \vec{c} and $\vec{\sigma}_m(\vec{c})$ belong to the same face f_l or f_r . Then we also have $\vec{c} \preccurlyeq_{\Omega(m, s)} \vec{\sigma}_m(\vec{c})$, and $\lambda_{\Omega(m, s)}(\vec{\sigma}_m(\vec{c})) = \lambda_{\Omega(m, s)}(\vec{c}) - 1$. Suppose now that $\vec{c} \in f_l$, and $\vec{\sigma}_m(\vec{c}) \in f_r$. Then we have $\vec{c} \succcurlyeq_{\Omega(m, s)} \vec{\sigma}_m(\vec{c})$, and $\lambda_{\Omega(m, s)}(\vec{\sigma}_m(\vec{c})) - \lambda_{\Omega(m, s)}(\vec{c}) = -1 - (-i + 1) + (i + 1) = 1$. The second equation of Equation (3.12) can be proved the same way. \square

A stem s of a bud-rooted map m is *well-rootable* if the rerooting of m on s is well-rooted.

Lemma 3.4.3. *Any bud-rooted map has exactly 2 well-rootable stems.*

Proof. Let m be a bud-rooted, but not well-rooted map. Let $-k$ be the minimum value of the corner labeling of m . We denote \vec{c}_1 (resp. \vec{c}_2) the first corner (for root order) with label $-k + 1$ (resp. k). Note that $\vec{c}_1 \preccurlyeq_m \vec{c}_2$. Note also that both \vec{c}_1 and \vec{c}_2 are preceded by a leaf, denoted l_1 and l_2 , respectively.

A careful look at the evolution of labels on the faces f_l and f_r (defined in the proof of Lemma 3.4.2) allows to prove that the rerooting of m on l_1 or l_2 is well-rooted, while the rerooting of m on any other rootable stem is not well-rooted. The case when m is well-rooted can be proved in a very similar way. \square

Rerooting on a rootable corner

Let m be a (virtually-rooted or not) bud-rooted map. A *rootable corner* of m is an oriented corner $\vec{c} \in {}^t\mathbf{C}_m$ which is not adjacent to a non-rootable stem. Let \vec{c} be a rootable corner of m . The *rerooting of m on \vec{c}* , denoted $\Omega(m, \vec{c})$, is the map m' obtained from m by the following procedure:

- if \vec{c} is followed by a rootable stem s , reroot m' on s .
- if \vec{c} is followed by an edge, then add two virtual stems in place of \vec{c} : a bud b followed by a leaf l ; then reroot m' on l .
- if m' contains virtual stems not adjacent to the root corner, remove them.

Note that the fact that the virtual stems of a virtually rooted map m are not followed nor preceded by a real bud ensures that, if \vec{c} is a rootable corner of m , the corner \vec{c}_ρ of $\Omega(m, \vec{c})$ that contains ρ_m is rootable, and that $\Omega(\Omega(m, \vec{c}), \vec{c}_\rho) = m$. Note also that if m is virtually-rooted, $\vec{\sigma}_m(\vec{\rho}_m)$ is rootable and $\Omega(m, \vec{\sigma}_m(\vec{\rho}_m)) = m$.

Lemma 3.4.4. *The rerooting of a (virtually-rooted or not) bud-rooted map m on a rootable corner \vec{c} is either a virtually-rooted bud-rooted map if $\vec{c} \in {}^t\mathbf{C}_m^e$, or a real bud-rooted map if $\vec{c} \in {}^t\mathbf{C}_m^s$.*

Proof. This is clear if m is not virtually-rooted. Suppose m is virtually-rooted. If $\vec{c} \in {}^t\mathbf{C}_m^e$, then after the second step, m' is a bud-rooted map with 4 virtual stems: 2 virtual buds around the root corner of m' , and a bud followed by a leaf around $\vec{\rho}_m$. Hence removing these 2 virtual stems in the third step does not mess up with labels, and the resulting map m' is well-blossoming, and hence bud-rooted. The other case is similar. \square

Lemma 3.4.5. *Any bud-rooted map has exactly 2 well-rootable stems, and these are real.*

Proof. Any well-blossoming map has as many buds as leaves. In particular, a virtually-rooted map m has at least one real rootable stem. Applying Lemma 3.4.3 on the rerooting of m on a real rootable stem implies that m has exactly 2 real well-rootable stem. Since ρ_m is preceded by a bud, the root-bud is not well-rootable, which concludes the proof. \square

Unrooted maps

Two bud-rooted map are said to be *root-equivalent* if they can be obtained one from another by a rerooting-on-a-rootable-corner operation. We call *unrooted map of m* and denote \bar{m} the equivalence class of m for root-equivalence. Equivalently, the unrooted map of m is the map obtained from m by forgetting the root corner, forgetting the virtual corners, forgetting which stems are buds or leaves, and instead recalling which real stems are rootable or not. Note that m can be recovered from \bar{m} just by the choice of a rootable corner of \bar{m} .

The *unrooted scheme* associated to a well-rooted map $m \in \mathcal{R}$ is the unrooted map of the unlabeled scheme of the rerooting on a scheme rootable corner of the pruned map of m . Let \bar{s} be an unrooted scheme. We denote $\mathcal{R}_{\bar{s}}$ (resp. $\mathcal{C}_{\bar{s}}$) the set of maps of \mathcal{R} (resp. \mathcal{C}) that have \bar{s} as an unrooted scheme, and $\mathcal{M}_{\bar{s}}$ the set of maps whose opening have \bar{s} as an unrooted scheme.

We also denote \mathcal{C}_l (resp. \mathcal{C}_s) the set of maps of \mathcal{C} that have l as a labeled scheme (resp. s as an unlabeled scheme), for $l \in \mathcal{L}$ and $s \in \mathcal{U}$.

3.4.3 The shortcut algorithm

The pruning and rerooting operations can be merged into a single operation, referred to as the *shortcut algorithm* in [Lep19, AL19], although these previous works did not use virtual stems. A *decorated core* is a core $c \in \mathcal{C}$ along with both a sequence of trees (T_s) indexed by real rootable stems of c , and an integer $\varepsilon \in \{1, 2\}$.

The *shortcut algorithm* consists in the following operations:

- take a non virtually-rooted well-rooted map m with a marked rootable scheme corner \vec{c} .
- set ε to be the integer such that ρ_m is the ε -th well-rootable stem in the facial order starting from \vec{c} .
- perform the pruning algorithm, and keep the removed trees as decoration indexed by the rootable stem they were cut from.
- reroot the map on \vec{c} .

The *inverse shortcut algorithm* consists in the following operations:

- take a decorated scheme core $(c, (T_s), \varepsilon)$.
- set m to be the map obtained from c by gluing each tree T_s on the corresponding rootable stem s .
- reroot m on the ε -th rootable stem in the facial order starting from the root.
- mark the corner of m that contains ρ_c

Theorem 3.4.6. *The shortcut algorithm is a bijection between non virtually-rooted well-rooted maps with a marked rootable scheme corner having unrooted scheme \bar{s} , and decorated cores having unrooted scheme \bar{s} .*

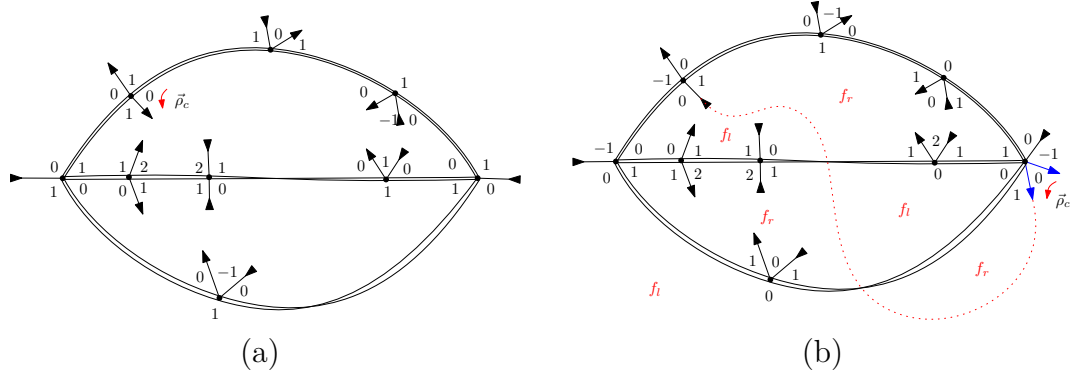


Figure 3.5: a: another representation of the core represented in Figure 3.4b. b: the rerooting of the previous core on a scheme rootable corner. In red, the merging of the two special stems, and the two special faces (see the proof of Lemma 3.4.2). This is a virtually-rooted scheme-rooted core, whose virtual stems are represented in blue.

Proof. • Lemma 3.4.3 ensures that $\varepsilon \in \{1, 2\}$, so that the shortcut algorithm produces a correct decorated core.

- Lemma 3.4.5 ensures that the inverse shortcut algorithm is a non virtually-rooted well-rooted map with a marked rootable scheme.
- It is clear that the two algorithms are inverse one of another, and that they preserve the unrooted scheme. □

Lemma 3.4.7. *The shortcut algorithm yields, for any unrooted unlabeled scheme \bar{s} :*

$$R_{\bar{s}}(\mathbf{z}, x, y) = \frac{C_{\bar{s}}^{\bullet}(T_{\bullet}, T_{\circ})}{n_{\bar{s}}^r}, \quad (3.25)$$

where $C_{\bar{s}}^{\bullet}(T_{\bullet}, T_{\circ}) := C_{\bar{s}}(T_{\bullet}, T_{\circ}) + C_{\bar{s}}(T_{\circ}, T_{\bullet})$, and $n_{\bar{s}}^r$ denote the number of rootable corners of \bar{s} .

Proof. The proof of the real orientable case of Lemma 3.4.7 given in [AL19] can be directly extended to this setup. □

3.5 The 4-valent case

We now restrict our study to the case of 4-valent maps, who are known by Theorem 3.3.10 to be in bijection with general maps. In this setup, the generating series can be studied more easily, as we are able to express the decomposition of cores into schemes by representing branches by decorated Motzkin paths, and to study in detail the combinatorial structure of schemes.

In Section 3.5.1, we introduce some series of decorated paths, and state a lemma that will be useful to express the rationality of a series written as a function of these decorated Motzkin paths series. In Section 3.5.2, we describe the decomposition of a core into a scheme whose edges are decorated with Motzkin paths, and its enumerative consequences. In Section 3.5.3, we study in more detail the structure of schemes, and in particular the form of their *offset graph*.

3.5.1 Motzkin paths

A *Motzkin walk* w of length ℓ is a finite sequence of steps w_1, \dots, w_ℓ , where $w_i \in \{-1, 0, 1\}$, for $1 \leq i \leq \ell$. A step w_i is called *horizontal*, *up* or *down* if it is equal to 0, +1 or -1, respectively. For $1 \leq k \leq \ell$, the *height at time k* is equal to $\sum_{i=1}^k w_i$ and the *height of the k -th step* is the height at time $k - 1$ (the height of the 0-th step is equal to 0 by convention). The *increment* of w is the height at time ℓ . A *Motzkin bridge* is a Motzkin walk whose increment is equal to 0. A *primitive Motzkin walk* is a Motzkin walk with increment -1 and such that the height of each step is non-negative.

We introduce D_\bullet , D_\circ and B as the following generating series:

$$D_\bullet(t_\bullet, t_\circ) = \sum_{w \text{ primitive Motzkin}} (2(t_\bullet + t_\circ))^{h(w)} t_\bullet^{e(w)} t_\circ^{o(w)} \quad (3.26)$$

$$D_\circ(t_\bullet, t_\circ) = \sum_{w \text{ primitive Motzkin}} (2(t_\bullet + t_\circ))^{h(w)} t_\circ^{e(w)} t_\bullet^{o(w)} \quad (3.27)$$

$$B(t_\bullet, t_\circ) = \sum_{w \text{ Motzkin bridges}} (2(t_\bullet + t_\circ))^{h(w)} t_\bullet^{e(w)} t_\circ^{o(w)}, \quad (3.28)$$

where $h(w)$, $o(w)$ and $e(w)$, denote the number of horizontal steps, non-horizontal steps with odd height (called odd steps) and non-horizontal steps with even height (called even steps), in w .

As proved in [AL19], the series B , D_\bullet and D_\circ satisfy the following symmetry equations:

$$B(t_\bullet, t_\circ) = B(t_\circ, t_\bullet), \quad (3.29)$$

$$t_\bullet D_\circ = t_\circ D_\bullet, \quad (3.30)$$

and the following decomposition equations:

$$D_\bullet = t_\bullet + 2(t_\bullet + t_\circ)D_\bullet + t_\bullet \cdot D_\circ D_\bullet, \quad (3.31)$$

$$D_\circ = t_\circ + 2(t_\bullet + t_\circ)D_\circ + t_\circ \cdot D_\bullet D_\circ, \quad (3.32)$$

$$B = 1 + 2(t_\bullet + t_\circ)B + 2t_\bullet \cdot D_\circ B. \quad (3.33)$$

We hence denote $D := \frac{D_\bullet}{t_\bullet} = \frac{D_\circ}{t_\circ}$. The previous equations imply the following properties:

$$t_\circ = \frac{1}{D_\bullet + 2\left(\frac{D_\bullet}{D_\circ} + 1\right) + \frac{1}{D_\circ}}, \quad (3.34)$$

$$t_\bullet = \frac{1}{D_\circ + 2\left(\frac{D_\circ}{D_\bullet} + 1\right) + \frac{1}{D_\bullet}}, \quad (3.35)$$

$$D = \frac{1 - 2(t_\bullet + t_\circ) - \sqrt{(1 - 2t_\bullet - 2t_\circ)^2 - 4t_\bullet t_\circ}}{2t_\bullet t_\circ}, \quad (3.36)$$

$$B = \frac{1}{\frac{1}{D} - t_\bullet t_\circ D} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2t_\bullet - 2t_\circ)^2 - 4t_\bullet t_\circ}}. \quad (3.37)$$

A function $F(x, y)$ is *||-symmetric* (resp. *||-antisymmetric*) if for any x, y , $F(x, y) = F(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ (resp. $F(x, y) = -F(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$). Note that $B(D_\bullet, D_\circ)$ is ||-antisymmetric and rational in t_\bullet , t_\circ and D , while $t_\bullet(\frac{1}{D_\bullet}, \frac{1}{D_\circ}) = t_\circ$.

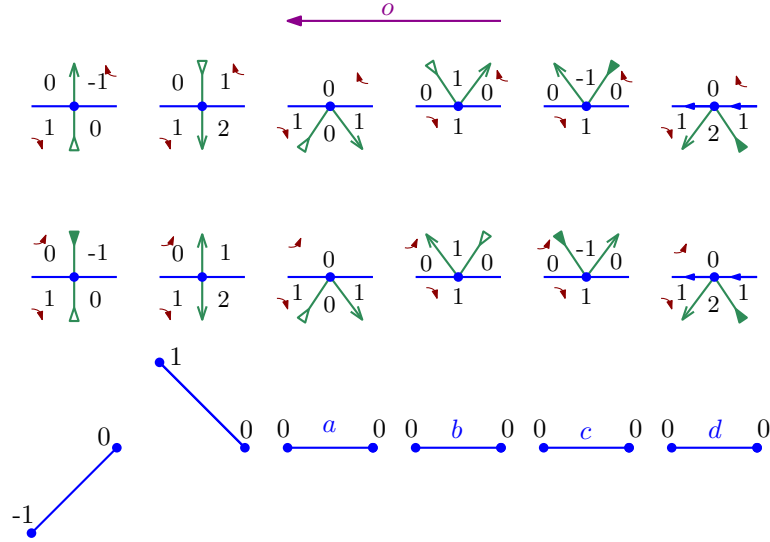


Figure 3.6: An illustration of the different types of branch vertices. The purple arrow represent the orientation of the edge, while the brown arrows represent the orientation of the corners in the facial tour. The first lines corresponds to a backward branch, while the second represents a forward branch. The last line is the Motzkin step encoding the vertex in the decomposition of a core into a scheme.

The following theorem was stated and proved in [AL19], and is the bivariate generalization of [CMS09, Lemma 9].

Lemma 3.5.1. *Let f be a symmetric function and write F for the function such that $F(D_\circ, D_\bullet) = f(t_\circ, t_\bullet)$. Then F is also symmetric.*

Moreover, the two following properties are equivalent:

1. f is a rational function,
2. F is a rational function and is $\|\cdot\|$ -symmetric.

3.5.2 Branches as Motzkin paths

We orient each edge of a scheme in such a way that it is first visited backward in the tour starting from the root.

Each of the 6 types of vertex of interior degree 2 in a branch can be matched to a step (see Figure 3.6): an upstep (resp. downstep) for a vertex across which the labels increase (resp. decrease) by 1 along the branch, and 4 types of horizontal step for vertices across which the labels remain the same along the branch.

We denote Motz_i^j the set of decorated Motzkin paths (where horizontal steps are decorated by labels a, b, c or d) starting from height i and finishing at height j .

For $i \leq j$, we also denote:

$$\Delta_i^j(x, y) := x^{|[i, j[\cap(2\mathbb{Z})|} y^{|[i, j[\cap(2\mathbb{Z}+1)|}.$$

Let l be a labeled scheme. If the halfedge at the origin (resp. destination) of an edge e of l has labels $i + 1, i$ (resp. $j + 1, j$), we say that this edge has *height at the origin* i (resp. *height at the destination* j) and write $\lambda_i^0(e) = i$ (resp. $\lambda_i^1(e) = j$). The edge e is said to be *increasing* (resp. *decreasing*) if $\lambda_i^0(e) \leq \lambda_i^1(e)$

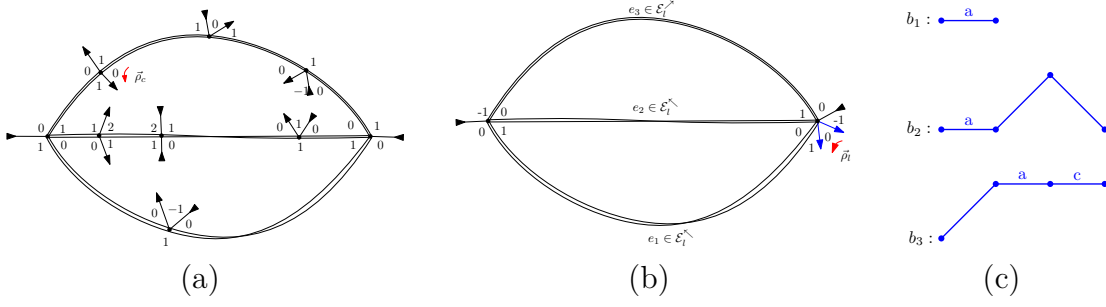


Figure 3.7: The bijection described in Lemma 3.5.2 applied to the blossoming core represented in Figure 3.5b. The core a , its labeled scheme b , and the Motzkin paths decorations c are successively represented.

(resp. $\lambda_l^0(e) > \lambda_l^1(e)$). An edge is said to be *backward* (resp. *forward*) if it is not (resp. it is) followed twice in the same direction in the tour of the face starting from the root. The set of increasing backward, decreasing backward, increasing forward, and decreasing forward edges of l are denoted \mathbf{E}_l^{\nearrow} , \mathbf{E}_l^{\searrow} , \mathbf{E}_l^{\nwarrow} , and \mathbf{E}_l^{\swarrow} .

We denote \mathbf{S}_l^{rs} the set of real rootable stems of l . We say that a rootable stem s which has labels $i+1, i$ has *height* i , and denote $\lambda_l(s) = i$.

A *decorated labeled scheme* is a labeled scheme, along with a sequence $(W_e)_{e \in \mathbf{E}_l}$ of Motzkin paths, indexed by edges of l , such that each path $W_e \in \text{Motz}_{\lambda_l^1(e)}^{\lambda_l^0(e)}$ goes from height $\lambda_l^0(e)$ to height $\lambda_l^1(e)$.

Lemma 3.5.2. *There is a bijection between scheme-rooted cores, and decorated labeled schemes. This bijection yields, for any labeled scheme l :*

$$\begin{aligned}
 C_l(t_\bullet, t_\circ) &= \prod_{s \in \mathbf{S}_l^{rs}} \Delta_{\lambda_l(s)}^{\lambda_l(s)+1}(t_\circ, t_\bullet) \cdot \prod_{e \in \mathbf{E}_l^{\nearrow}} B \cdot \Delta_{\lambda_l^0(e)}^{\lambda_l^1(e)}(D_\bullet, D_\circ) \cdot \prod_{e \in \mathbf{E}_l^{\searrow}} B \cdot \Delta_{\lambda_l^1(e)}^{\lambda_l^0(e)}(D_\circ, D_\bullet) \\
 &\quad \cdot \prod_{e \in \mathbf{E}_l^{\nwarrow}} B \cdot \Delta_{\lambda_l^1(e)}^{\lambda_l^0(e)}(D, D) \cdot \prod_{e \in \mathbf{E}_l^{\swarrow}} B \cdot \Delta_{\lambda_l^1(e)}^{\lambda_l^0(e)}(t_\circ t_\bullet D, t_\circ t_\bullet D), \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

where $D := \frac{D_\bullet}{t_\bullet} = \frac{D_\circ}{t_\circ}$.

An illustration of the aforementioned bijection is given in Figure 3.7.

Proof. The first part of the statement is rather clear. Indeed, let c be a scheme-rooted clear. By performing a facial tour of c starting from the root, we visit some branches of c and some scheme vertices. Note that for a given branch of c the edges belonging to this branch are either all forward or all backward. Moreover, each vertex belonging to this branch has to be similar to one of those represented in Figure 3.6. We therefore encode the sequence of the vertices of each branch of c by the corresponding decorated Motzkin walk. Since the core c can be recovered from solely its labeled scheme l and the Motzkin path associated to each edge of l , this establishes the bijection of Lemma 3.5.2.

Let us compute $C_l(t_\bullet, t_\circ)$. By definition:

$$C_l(t_\bullet, t_\circ) = \sum_{c \in \mathcal{C}_l} t_\bullet^{r_c} t_\circ^{r_c} \quad (3.39)$$

$$= \prod_{s \in \mathbf{S}_l^s} \Delta_{\lambda_l(s)}^{\lambda_l(s)+1}(t_\circ, t_\bullet) \cdot \prod_{e \in \mathbf{E}_l^{\nearrow}} \sum_{W_e \in \text{Motz}_{\lambda_l^1(e)}^{\lambda_l^0(e)}} W_e(t_\bullet, t_\circ) \cdot \prod_{e \in \mathbf{E}_l^{\searrow}} \sum_{W_e \in \text{Motz}_{\lambda_l^1(e)}^{\lambda_l^0(e)}} W_e(t_\bullet, t_\circ) \quad (3.40)$$

$$\cdot \prod_{e \in \mathbf{E}_l^{\nwarrow}} \sum_{W_e \in \text{Motz}_{\lambda_l^1(e)}^{\lambda_l^0(e)}} W_e(t_\bullet, t_\circ) \cdot \prod_{e \in \mathbf{E}_l^{\swarrow}} \sum_{W_e \in \text{Motz}_{\lambda_l^1(e)}^{\lambda_l^0(e)}} W_e(t_\bullet, t_\circ), \quad (3.41)$$

where $W_e(t_\bullet, t_\circ)$ is the generating function of decorated Motzkin paths that can be associated to the edge e , with rootable-stem-color-weight. We now proceed to analyze the expression $W_e(t_\bullet, t_\circ)$ in four different cases: $e \in \mathbf{E}_l^{\nearrow}, \mathbf{E}_l^{\searrow}, \mathbf{E}_l^{\nwarrow}$, and $e \in \mathbf{E}_l^{\swarrow}$.

First of all, each $W_e \in \text{Motz}_i^j$ can be uniquely decomposed as a concatenation of one (decorated) Motzkin bridge and $|j - i|$ (decorated) primitive Motzkin walks, and translated such that it starts at height i . Indeed, if $i \leq j$, we consider its reverse version in which we inverse the order of steps and we decompose it by taking the longest possible walk from height j to height $j - 1$, which stays strictly above height $j - 1$; then the longest possible walk from height $j - 1$ to height $j - 2$, which stays strictly above height $j - 2$; and so on, until we reach level i and the rest gives us a Motzkin bridge starting and ending at height i .

Let $e \in \mathbf{E}_l$ be a backward edge, and let $W_e \in \text{Motz}_i^j$. By analyzing Figure 3.7 we can see that a vertex corresponding to a non-horizontal step with odd (resp. even) height have weight t_\bullet (resp. t_\circ). Moreover, out of 4, there are always exactly 2 decorated horizontal steps with weight t_\bullet , and 2 with weight t_\circ . If $e \in \mathbf{E}_l^{\nearrow}$, the decomposition of the reversed path of W_e into primitive Motzkin walks and a final Motzkin bridge yields:

$$\sum_{W_e \in \text{Motz}_{\lambda_l^1(e)}^{\lambda_l^0(e)}} W_e(t_\bullet, t_\circ) = B \cdot \Delta_{\lambda_l^0(e)}^{\lambda_l^1(e)}(D_\bullet, D_\circ).$$

Similarly, if $e \in \mathbf{E}_l^{\searrow}$:

$$\sum_{W_e \in \text{Motz}_{\lambda_l^1(e)}^{\lambda_l^0(e)}} W_e(t_\bullet, t_\circ) = B \cdot \Delta_{\lambda_l^1(e)}^{\lambda_l^0(e)}(D_\circ, D_\bullet).$$

Now, let $e \in \mathbf{E}_l$ be a forward edge and let $W_e \in \text{Motz}_i^j$. Again, by analyzing Figure 3.7, we can see that a vertex corresponding to an upstep (resp. to a downstep) has weight 1 (resp. $t_\bullet t_\circ$). Moreover, again, out of 4, there are always exactly 2 decorated horizontal steps with weight t_\bullet , and 2 with weight t_\circ . If $e \in \mathbf{E}_l^{\nwarrow}$, then recall that the inverse path of W_e is decomposed into a sequence of primitive Motzkin walks, followed by a final Motzkin bridge. Since, in a primitive Motzkin path, the difference between the numbers of downsteps and upsteps is always equal to 1, and the last downstep should have weight 1, these paths are enumerated by D . Similarly, Motzkin bridges have as many upsteps as downsteps and are enumerated by B . This yields:

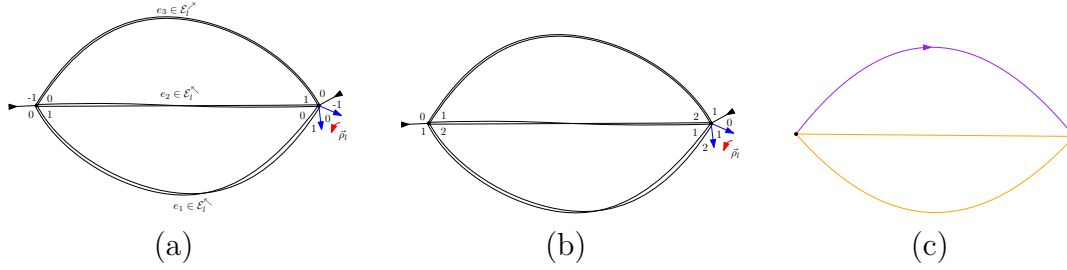


Figure 3.8: A labeled scheme a, its unlabeled scheme b, and its offset graph c (the offset edge is the purple oriented edge, the two non-oriented orange edges are shifted edges).

$$\sum_{W_e \in \text{Motz}_{\lambda_i^0(e)}^{\lambda_i^1(e)}} W_e(t_\bullet, t_o) = B \cdot \Delta_{\lambda_i^0(e)}^{\lambda_i^1(e)}(D, D).$$

Again, a similar analysis for the case $e \in \mathbf{E}_i^\swarrow$ yields:

$$\sum_{W_e \in \text{Motz}_{\lambda_i^0(e)}^{\lambda_i^1(e)}} W_e(t_\bullet, t_o) = B \cdot \Delta_{\lambda_i^1(e)}^{\lambda_i^0(e)}(t_\bullet t_o D, t_\bullet t_o D),$$

since in this case the last downstep of each primitive Motzkin walk should have weight $t_\bullet t_o$.

This concludes the proof. \square

3.5.3 Structure of the offset submap

We now study in more details the structure of a scheme.

Theorem 3.5.3. *An unlabeled scheme $s \in \mathcal{U}^\times$ (virtually rooted or not) has no vertex of relative type more than 1.*

Proof. Suppose that s is not virtually-rooted. Then the cyclic sequence of relative labels around any vertex is either $(0, 1, 0, 1)$ or $(0, 1, 2, 1)$, in which cases these vertices have relative 0 or 1. Now suppose s is virtually-rooted. We obtain similarly that all non-root vertices of s have relative 0 or 1. The root bud of s has virtual degree 6. Since the 2 virtual stems of s are not followed nor preceded by a bud, and the relative labeling of s is almost decent, the cyclic sequence of relative labels around the root vertex, starting from the root, is necessarily of the form $(1, 2, 1, \varepsilon, 1, 0)$, where ε is either 0 or 1, so that in any case, the root vertex has relative type 1. \square

An edge of l is said to be *balanced* (resp. *shifted*) if it is made of halfedges of relative type 0 (resp. of type 1). An edge uv is said to be *offset toward v* if the halfedge u has relative type 0 and the halfedge v has relative type 1. The *offset graph of l* is the directed graph made of the offset edges of l . An *offset cycle* is an oriented cycle of the offset graph. An *offset loop* is an offset cycle of length 1 (see Figure 3.8).

It was proved in [Lep19] that any unlabeled scheme on an orientable surface has no offset cycle. Using this acyclicity, it was proved [Lep19, AL19] that the series of

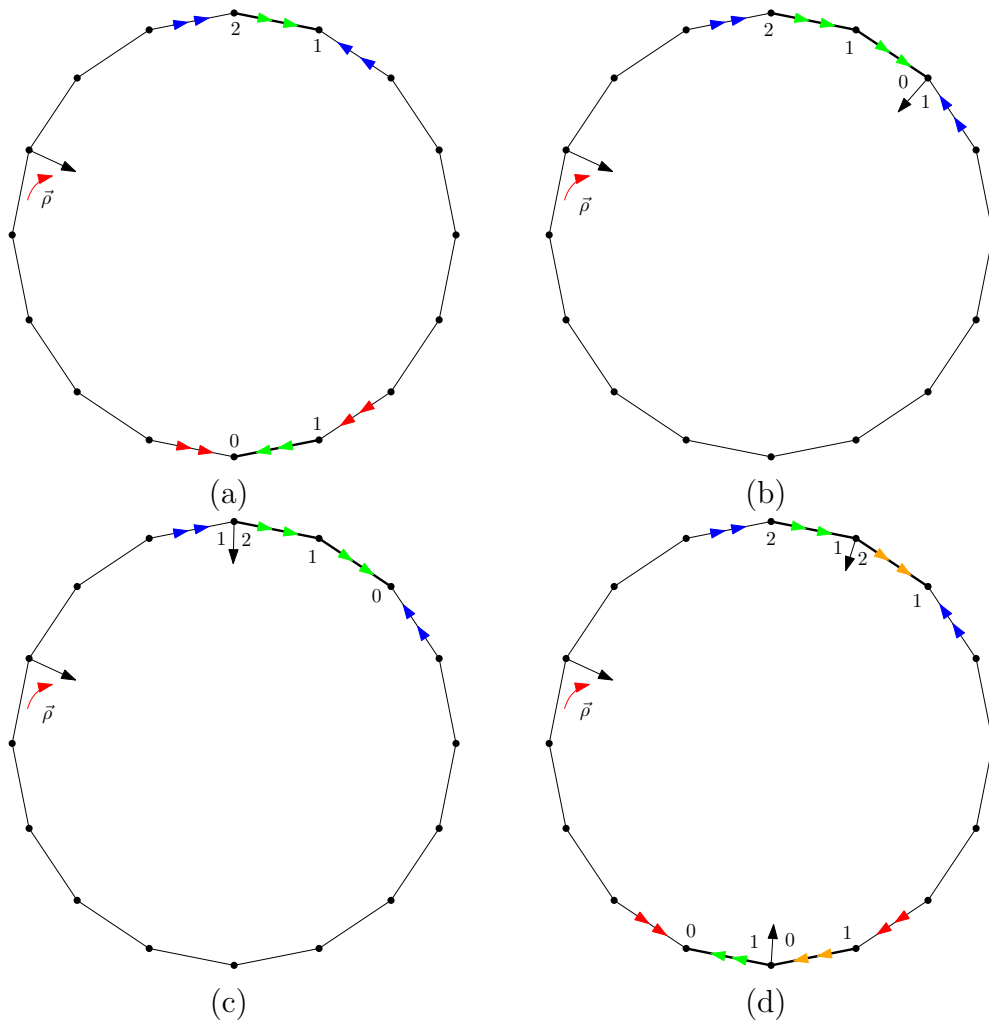


Figure 3.9: Cycles of the offset edges of types I, IIa, IIb, and III in the labeled scheme l are indicated by fat edges on the pictures a, b, c and d, respectively. Colors of the arrows on the edges indicate how the edges are glued together (we glue the edges with the same colors according to their orientation)

cores having a given scheme with no offset cycle is rational (both in the univariate and bivariate setups), which is a stronger property than the general case expressed in [AG00]. We generalize the aforementioned result to non orientable schemes by studying the structure of the offset graph of a scheme in an arbitrary surface. Our result can be interpreted as a combinatorial explanation of the reason why the series C_s is rational in the case of orientable maps, but not in the general case. Figure 3.9 shows three possible offset loops of a scheme. We prove that there are no other such example.

Theorem 3.5.4. *Let $s \in \mathcal{U}_S$ be an unlabeled non virtually-rooted scheme of a surface \mathcal{S} .*

- Any offset cycle of s is of type I, IIa, IIb or III (see Figure 3.9).
- In particular it contains at most two edges, and all of them are forward edges, which implies that an orientable labeled scheme has no offset cycle.
- Additionally, the total length of cycles in the offset graph of any labeled scheme is at most equal to $2g_S$.

Proof. Assume that there exists a simple cycle C in the offset graph. Notice that all the vertices of type 0 have outdegree 0 in the offset graph, therefore all the edges belonging to C connect only vertices of type 1. Let e be the first edge of C visited in the tour of s , and let \vec{c} be the first visited corner adjacent to e and let $v_1 := v_s(\vec{c})$ be the vertex to which \vec{c} is incident. For any $v \in \mathbf{V}_s$ we denote by $\vec{c}_f(v)$ the first visited corner adjacent to v in the tour of s . Since λ_s^r is a decent-labeling then:

$$\lambda_s^r(\vec{c}_f(v)) = \lambda_s^r(\sigma_s^{-1}(\vec{c}_f(v))) + 1 = \begin{cases} \lambda_s^r(\sigma_s(\vec{c}_f(v))) - 1 & \text{if } e(\sigma_s(\vec{c}_f(v))) \text{ is a bud,} \\ \lambda_s^r(\sigma_s(\vec{c}_f(v))) + 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.42)$$

We distinguish two possibilities, illustrated in Figure 3.10:

(a) the corner \vec{c} is adjacent to the halfedge of e of relative type 0 (see Figure 3.10a). Equation (3.42) implies that $\vec{c}_f(v_1)$ can be one of the following corners from the picture Figure 3.10a: \vec{c}_1, \vec{c}_2 or \vec{c}_3 .

- If $\vec{c}_f(v_1) = \vec{c}_1$ or $\vec{c}_f(v_1) = \vec{c}_2$ then $e(\vec{c}_1)$ and $e(\vec{c}_2)$ are visited before e in the tour of s . This means that neither $e(\vec{c}_1)$ nor $e(\vec{c}_2)$ belong to C . But the edge of C offset toward vertex v_1 is offset toward halfedge of relative type 1 thus it might be only $e(\vec{c}_1)$ or $e(\vec{c}_2)$, which gives us a contradiction.
- If $\vec{c}_f(v_1) = \vec{c}_3$ then (3.42) implies that $e(\vec{c}_3)$ is a bud. This means that $e(\sigma_s(\vec{c}_3))$ is visited before e in the tour of s , but this is the only possible edge belonging to C and offset towards v_1 , which is a contradiction with e being the first visited edge of C in the tour of s .

(b) the corner \vec{c} is adjacent to the halfedge of e of relative type 1 (see Figure 3.10b). Let v_2 be the second vertex adjacent to e . Similarly as before, (3.42) implies that $\vec{c}_f(v_2)$ can be one of the following corners from the picture Figure 3.10b: $\vec{c}_0, \vec{c}_1, \vec{c}_2$ or \vec{c}_3 .

- If $\vec{c}_f(v_2) = \vec{c}_1$ then (3.42) implies that $e(\vec{c}_1)$ is a bud. This means that $e(\vec{c}_2)$ is visited before e in the tour of s , but this is the only possible edge belonging to C and offset towards v_2 , which is a contradiction with e being the first visited edge of C in the tour of s .
- If $\vec{c}_f(v_2) = \vec{c}_2$ or $\vec{c}_f(v_1) = \vec{c}_3$ then $e(\vec{c}_2)$ and $e(\vec{c}_3)$ are visited before e in the tour of s . This means that neither $e(\vec{c}_1)$ nor $e(\vec{c}_2)$ belong to C . But the edge of C offset toward vertex v_v is offset toward halfedge of relative type 1 thus it might be only $e(\vec{c}_1)$ or $e(\vec{c}_2)$, which gives us a contradiction.
- If $\vec{c}_f(v_2) = \vec{c}_0$ then (3.42) implies that $e(\vec{c}_0)$ is a bud. This means that $e(\vec{c}_2)$ is another offset edge belonging to the cycle C .

Let i be the length of the cycle C . Repeating above analysis we deduce that there exists a sequence of vertices v_1, \dots, v_i connected by edges $e = e_1, e_2, \dots, e_i$, where e_j is joining v_{j+1} with v_j and offset towards v_j ($v_{i+1} := v_1$ by convention). Note that performing a tour of s starting from \vec{c} we visit an alternating sequence of offset edges and buds. In particular, a series of visited corners $\vec{c}, \theta_s(\vec{c}), \dots, \theta_s^{2i-1}(\vec{c})$ coincide with the sequence $\vec{c}, \theta_s(\vec{c}), \sigma_s\theta_s(\vec{c}), \theta_s\sigma_s\theta_s(\vec{c}), \dots, \theta_s(\sigma_s\theta_s)^{i-1}(\vec{c})$. Notice now that either $\theta_s^{2i-1}(\vec{c}) = \vec{c}_4$ or $\theta_s^{2i-1}(\vec{c}) = \vec{c}_5$. If $i = 1$ then either $\theta_m(\vec{c}) = \vec{c}_4$, or $\theta_m(\vec{c}) = \vec{c}_5$. In the first case we obtain exactly a cycle of type I, and in the other we obtain a cycle of type IIa or IIb. Assume now that $i > 1$.

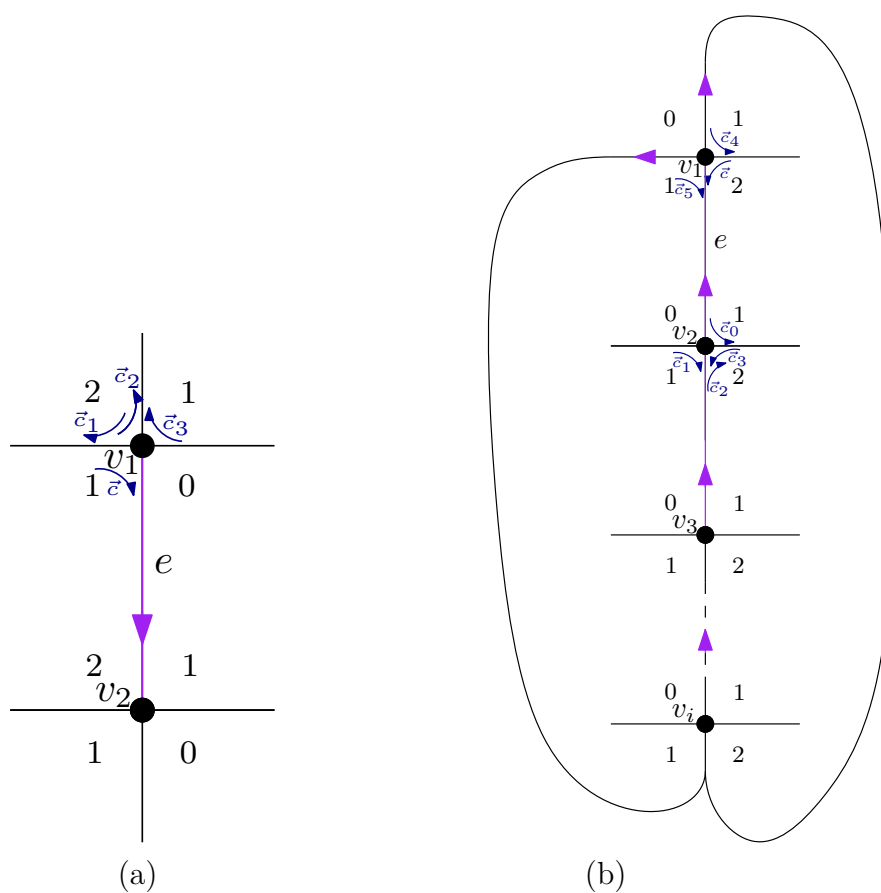


Figure 3.10: Cases a and b of the proof of Theorem 3.5.4.

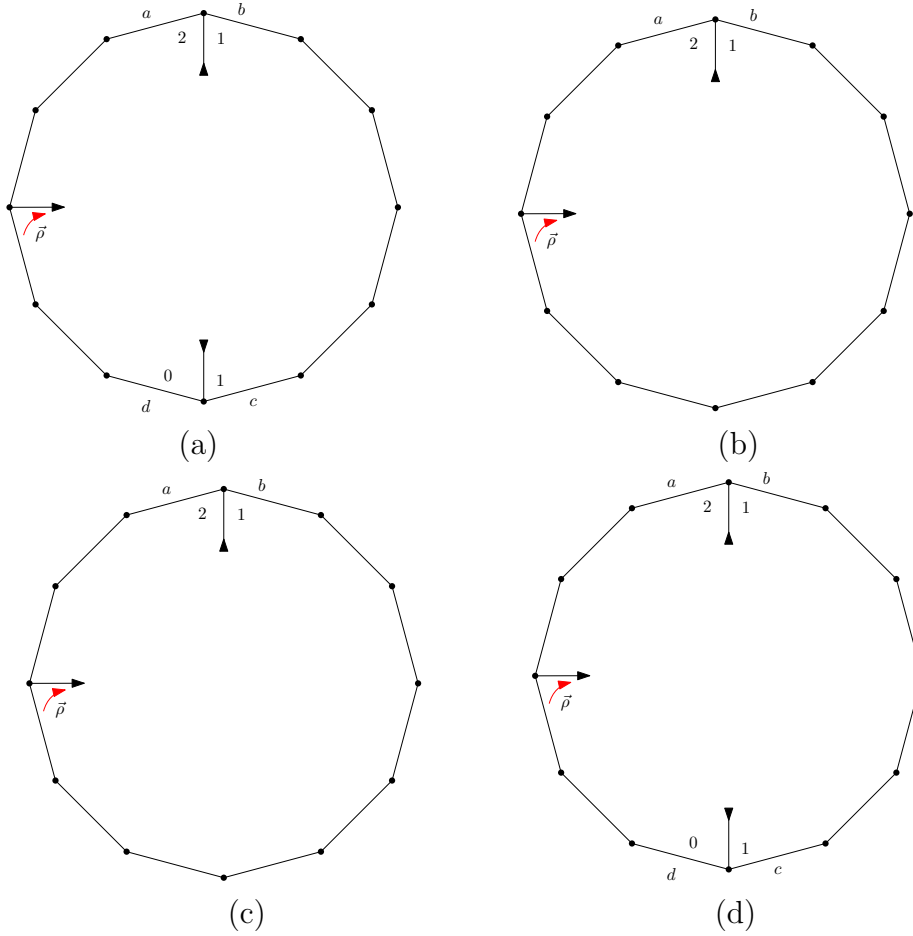


Figure 3.11: The schemes resulting from the transformation described in the end of the proof of Theorem 3.5.4 applied on the 4 types of offset loops represented in Figure 3.9.

- If $\theta_s^{2i-1}(\vec{c}) = \vec{c}_5$ then $e(\theta_s(\vec{c}_5))$ has to be bud. Indeed, it was not visited yet and since λ_s^r is a decent labeling and $\lambda_s^r(\vec{c}_5) + 1 = \lambda_s^r(\sigma_s(\vec{c}_5))$ the claim follows. But this implies that there are two buds attached to v_2 , thus its interior degree is at most 2, which is a contradiction with the assumption that v_2 is a scheme vertex.
- Now assume that $\theta_s^{2i-1}(\vec{c}) = \vec{c}_4$. We notice that for each $j \in [i]$ and for each v_j there is exactly one edge $e(v_j)$ adjacent to it which was not visited yet in the tour of s starting from its root and finishing in \vec{c}_4 . Let $e(v_j)$ be the first edge among $e(v_1), \dots, e(v_i)$ visited in a tour of s . This edge is necessarily visited from a corner (non visited yet) with label 1 (since λ_s^r is a decent labeling). Using the same argument as before we conclude that all edges $e(v_s)$, where $s \neq j$ have to be buds. Indeed, all of them are visited first from a corner with label 0 and since λ_s^r is a decent labeling the claim follows. That means that there exists $k \in [i]$ such that there are two buds attached to v_k unless $i, j = 2$. The existence of such a vertex v_k contradicts the assumption that v_k is a scheme vertex, since its interior degree is at most 2, while the case $i, j = 2$ gives precisely a cycle of type III.

In order to prove that the total length of offset cycles is at most equal to $2g_S$ it is enough to notice that we can transform the scheme s into another unlabeled scheme s' (except that it may have vertices of degree 2) on a surface \mathcal{S}' , in such a way that the difference between the total length of offset cycles of s and s' is at least equal to the difference between the Euler characteristics of \mathcal{S} and \mathcal{S}' .

The mentioned transformation is presented on Figure 3.11. Let us have a closer look at the evolution of parameters. In type I we remove 3 edges and 1 vertex, so that the Euler characteristic increases by 2. On the other hand, the total length of offset cycles decreases by 1 (see Figure 3.11a). In type IIa and IIb we remove 2 edges and 1 vertex, so that the Euler characteristic increases by 1. On the other hand, the total length of offset cycles decreases by 1 (see Figures 3.11b and 3.11c). Finally, in type III we remove 4 edges and 2 vertices, so that the Euler characteristic increases by 2. On the other hand, the total length of offset cycles decreases by 2 (see Figure 3.11d).

By consequence, the total length of offset cycles of s is at most equal to the maximal possible Euler characteristic (which is 2), minus the Euler characteristic of s , which is $2 - 2g_S$. \square

3.6 Enumerative results for general maps

We now use the results from the previous sections to obtain enumerative results. In Section 3.6.1, we prove the rationality in t_\bullet , t_\circ and D of the series C_s° (for any unlabeled scheme s), giving a combinatorial explanation of Theorem 3.1.3. In Section 3.6.2, using a construction from [AL19], we consider the case of schemes with no offset cycles, and prove in Theorem 3.6.4 that the corresponding series is actually rational in t_\bullet and t_\circ only. In Section 3.6.3, we define an operation on offset loops of a scheme and use Theorem 3.6.4 to give a similar rationality result for the case where the scheme has no offset cycle of length 2.

3.6.1 Rationality in D

Recall that Arquès and Giorgetti [AG00] proved that the series of maps on any surface is rational in t_\bullet , t_\circ , and a (see Theorem 3.1.3).

By Equation (3.34), any rational function of t_\bullet , t_\circ , D , D_\bullet , D_\circ , and B , is also a rational function of t_\bullet , t_\circ , and a .

The rest of this section will be dedicated to provide a proof of Theorem 3.6.1:

Theorem 3.6.1. *For any unlabeled scheme s , the series of scheme-rooted cores having unlabeled scheme s is a rational function of t_\bullet , t_\circ , and D .*

Theorem 3.6.1, along with Lemma 3.4.7 and Corollary 3.3.9, allows to deduce the following corollary, that gives a combinatorial interpretation of the rationality expressed in Theorem 3.1.3:

Corollary 3.6.2. *The bivariate series of maps on a surface \mathcal{S} is a rational function in t_\bullet , t_\circ , and B .*

Proof of Theorem 3.6.1. Lemma 3.5.2 ensures for any labeled scheme l , the series $C_l(t_\bullet, t_\circ)$ is a polynomial in t_\bullet , t_\circ , D and B , and is thus rational in t_\bullet , t_\circ , and

B. However, since there is an infinite number of labeled schemes having s as an unlabeled scheme, we cannot directly conclude with Theorem 3.6.1.

Our strategy is to show that the contribution of all labeled schemes associated to a certain surjection can be written as the contribution of a certain canonical labeled scheme associated to this permutation, multiplied by a finite number of factors of the form $\frac{1}{1-P}$, where P is a simple polynomial in t_\bullet , t_\circ , and D , and where each of these factors account for the difference of height between successive vertices.

However, in the bivariate setup, the weight associated to a branch depends on the parity of its height (see Lemma 3.5.2). By consequence, we need to keep track of the parity of these labels, hence leading to the definition of binary surjections.

We call *binary surjection* a pair made of a surjection $p : [1, n] \rightarrow [1, k]$ for $k \in [1, n]$, and a binary sequence $\varepsilon \in \{0, 1\}^{k-1}$. Such a surjection is said to have *size* n and *height* k . The set of binary surjections of size n is denoted \mathcal{BS}_n .

Let s be an unlabeled scheme, and l be its labeled version. We arbitrarily denote the vertices of s (and accordingly, those of l) by: $v_1 \cdots v_{n_v}$, or sometimes just $1 \cdots n_v$ for the sake of concision. The *binary surjection associated to* l is the binary surjection (p, ε) such that:

- $p(i) = p(j) \iff \lambda_l^h(i) = \lambda_l^h(j)$, (we consequently denote $\lambda_l^h(p^{-1}(i))$ the common height of vertices of $p^{-1}(i)$)
- $p(i) < p(j) \iff \lambda_l^h(i) < \lambda_l^h(j)$,
- $\lambda_l^h(p^{-1}(i+1)) - \lambda_l^h(p^{-1}(i)) \equiv \varepsilon_i \pmod{2}$.

Note that this construction is similar to the grouping of schemes by their relative ordering in [Lep19], in which schemes are grouped by a non-binary surjection, which is enough in the univariate setup.

The set of labeled scheme associated to the binary surjection (p, ε) is denoted $\mathcal{L}_{(p, \varepsilon)}$. The *canonical labeled scheme of binary surjection* (p, ε) , denoted $l_{(p, \varepsilon)}^m$ is the labeled scheme l such that $\lambda_l^h(p^{-1}(i+1)) - \lambda_l^h(p^{-1}(i)) = 2 - \varepsilon_i$ for any $i \in [1, k-1]$. In other word, it is the labeled scheme of $\mathcal{L}_{(p, \varepsilon)}$ which minimizes the highest difference of height between two vertices.

There is bijection f between $\mathcal{L}_{(p, \varepsilon)}$ and sequences of non-negative integers of length $k-1$, where k is the height of p : to a sequence $(a_i)_{i \in [1, k-1]}$ we associate the labeled scheme l such that $h_l(p^{-1}(i+1)) - h_l(p^{-1}(i)) = 2(a_i + 1) - \varepsilon_i$ for any $i \in [1, k-1]$. Note that the canonical labeled scheme can be defined as $f(0)$.

Let s be an unlabeled scheme, and p a surjection. The set $\mathcal{E}_{s,p}^{\nearrow}$ (resp. $\mathcal{E}_{s,p}^{\searrow}$, $\mathcal{E}_{s,p}^{\nwarrow}$, $\mathcal{E}_{s,p}^{\swarrow}$) is defined as the set of edges of s corresponding to edges of \mathcal{E}_l^{\nearrow} (resp. \mathcal{E}_l^{\searrow} , \mathcal{E}_l^{\nwarrow} , \mathcal{E}_l^{\swarrow}), for some $l \in \mathcal{L}_p$. We denote $\mathfrak{C}_{s,p}^{i \nearrow}$ (resp. $\mathfrak{C}_{s,p}^{i \searrow}$, $\mathfrak{C}_{s,p}^{i \nwarrow}$, $\mathfrak{C}_{s,p}^{i \swarrow}$) the number of edges of $\mathcal{E}_{s,p}^{\nearrow}$ (resp. $\mathcal{E}_{s,p}^{\searrow}$, $\mathcal{E}_{s,p}^{\nwarrow}$, $\mathcal{E}_{s,p}^{\swarrow}$) that can be written (u, v) , where $\pi(u) \leq i$ and $\pi(v) > i$. We also define $\mathfrak{C}_{s,p}^i := \mathfrak{C}_{s,p}^{i \nearrow} + \mathfrak{C}_{s,p}^{i \searrow} + \mathfrak{C}_{s,p}^{i \nwarrow} + \mathfrak{C}_{s,p}^{i \swarrow}$.

The bijection f , in conjunction with Lemma 3.5.2, leads to the following:

$$\sum_{l \in \mathcal{L}_{(p, \varepsilon)}} C_l^\bullet = C_{l_{(p, \varepsilon)}^m}^\bullet \cdot \prod_{i \in [1, k-1]} \frac{1}{1 - D^{2\mathfrak{C}_{s,p}^i} \cdot (t_\bullet t_\circ)^{(\mathfrak{C}_{s,p}^{i \nearrow} + \mathfrak{C}_{s,p}^{i \searrow} + 2\mathfrak{C}_{s,p}^{i \nwarrow})}}. \quad (3.43)$$

By summing over all possible binary surjection:

$$C_s^\bullet = \sum_{(p, \varepsilon) \in \mathcal{BS}_{n_v}} C_{l_{(p, \varepsilon)}^m}^\bullet \cdot \prod_{i \in [1, k-1]} \frac{1}{1 - D^{2\mathfrak{C}_{s,p}^i} \cdot (t_\bullet t_\circ)^{(\mathfrak{C}_{s,p}^{i \nearrow} + \mathfrak{C}_{s,p}^{i \searrow} + 2\mathfrak{C}_{s,p}^{i \nwarrow})}}. \quad (3.44)$$

The fact that Lemma 3.5.2 (along with Equation (3.34)) ensures the rationality in t_\bullet , t_\circ and D of the series $R_{l_{(p, \varepsilon)}^m}$ allows to conclude the proof. \square

3.6.2 Rationality for schemes with no offset cycle

We now adapt the construction of [AL19], that groups labeled schemes depending on their relative ordering, represented this time by a permutation rather than a surjection. This allows to prove Theorem 3.6.3, which is a stronger result than Theorem 3.6.1, but which can only be applied to some schemes.

The purpose of this section is to extend Theorem 5.1 of [AL19] to the following theorem:

Theorem 3.6.3. *Let s be an unlabeled scheme of genus g with no offset cycle. Then the series $C_s^\bullet(t_\bullet, t_\circ)$ is:*

- \parallel -symmetric in D_\bullet and D_\circ , if g is an integer,
- \parallel -antisymmetric in D_\bullet and D_\circ , if g is not an integer.

Theorem 3.6.3, in addition to Equation (3.34), Lemma 3.5.1, and Theorem 3.3.8, leads to the following result:

Theorem 3.6.4. *Let s be an unlabeled scheme of genus $g \geq 1$ with no offset cycle.*

The series $\frac{R_s^\bullet}{B^{2g}}$ is rational in t_\bullet and t_\circ .

Proof of Theorem 3.6.3. The proof of Theorem 3.6.3 is very similar of that of [AL19, Theorem 5.1], which is developed in [AL19, Section 5]. Since we only need small modifications to be able to prove Theorem 3.6.3, we will simply reuse all notations and definitions given there, and refer the reader to [AL19] for more details. Note that the definition of a consistent labeling of a scheme is only valid if that scheme has no offset cycle.

The series ${}^cS_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k:\pm}$ is redefined as follows:

$${}^cS_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k:\pm} = \sum_{\ell \in {}^c\mathcal{L}_{s,\nu}^{(\pi,\zeta),k:+}} \left(\prod_{e \in E^{\nearrow}(\ell)} \Delta_{h_\ell^{0,k:\pm}(e)}^{h_\ell^{1,k:\pm}(e)}(D_\bullet, D_\circ) \prod_{e \in E^{\searrow}(\ell)} \Delta_{h_\ell^{1,k:\pm}(e)}^{h_\ell^{0,k:\pm}(e)}(D_\circ, D_\bullet) \right. \quad (3.45)$$

$$\cdot \left. \prod_{e \in E^{\nwarrow}(\ell)} \Delta_{h_\ell^{0,k:\pm}(e)}^{h_\ell^{1,k:\pm}(e)}(D, D) \prod_{e \in E^{\swarrow}(\ell)} \Delta_{h_\ell^{1,k:\pm}(e)}^{h_\ell^{0,k:\pm}(e)}(t_\bullet t_\circ D, t_\bullet t_\circ D) \right). \quad (3.46)$$

The need to distinguish the forward and backward edges (because of Lemma 3.5.2), leads to the following refinement of the definition of ${}^cW_{s,\nu,e}^{(\pi,\zeta),k}$:

$${}^cW_{s,\nu,e}^{(\pi,\zeta),k} := \begin{cases} W_{s,\nu,e}^{\pi,\zeta(k),k}(D_{-c}, D_c), & \text{if } e \in E_{s,\nu}^{\pi,k,\nearrow}, \\ W_{s,\nu,e}^{\pi,\zeta(k),k}(D_c, D_{-c}), & \text{if } e \in E_{s,\nu}^{\pi,k,\searrow}, \\ W_{s,\nu,e}^{\pi,\zeta(k),k}(D, D), & \text{if } e \in E_{s,\nu}^{\pi,k,\nwarrow}, \\ W_{s,\nu,e}^{\pi,\zeta(k),k}(t_\bullet t_\circ D, t_\bullet t_\circ D), & \text{if } e \in E_{s,\nu}^{\pi,k,\swarrow}, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.47)$$

Using Lemma 3.5.2, it is then easy to see that [AL19, Lemma 5.16] still holds in this slightly more general setup.

Observe that Equation (3.48), that was first stated in [AL19], still holds in this setup, even for forward edges.

$$\overline{{}^cW_{s,\nu,e}^{(\pi,\zeta),k}} = \frac{((-1)^{(\zeta(k)+1)c}) W_{s,\nu,e}^{\overline{(\pi,\zeta)}, \bar{k}-1}}{D_\bullet D_\circ}. \quad (3.48)$$

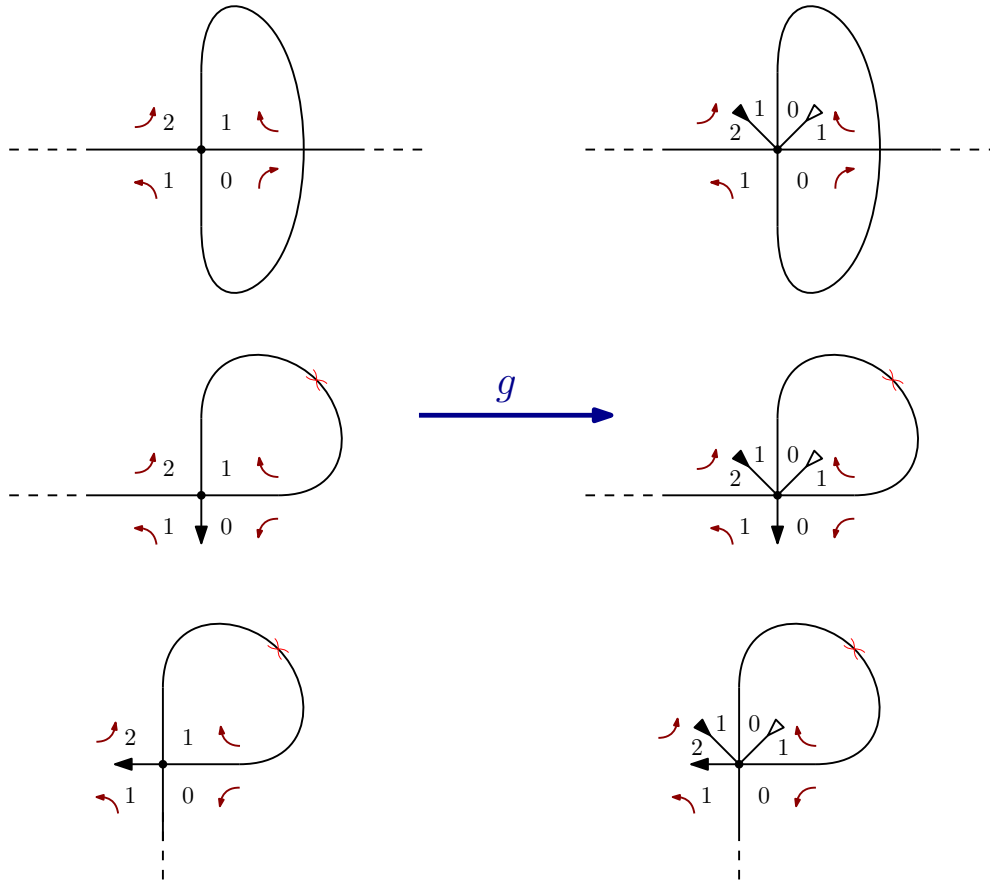


Figure 3.12: The operation g on an offset loop of type I, IIa, and IIb respectively.

By consequence, [AL19, Lemma 5.17] also holds in this setup.

Following the end of the proof of [AL19, Theorem 5.1], we obtain:

$$\overline{R_s^\bullet} = (-1)^{n_e+n_v+1} R_l^\bullet. \quad (3.49)$$

Euler formula and Lemma 3.5.1 allows to conclude the proof of Theorem 3.6.3. \square

3.6.3 Rationality for schemes with offset loops

Theorem 3.6.5. *Let s be an unlabeled scheme of genus $g \geq 1$ whose offset map has k loops, and no oriented cycle of length more than 1.*

The series $\frac{R_s^\bullet}{B^{2g} \cdot D^k}$ is rational in t_\bullet and t_\circ .

Proof. We define a new unlabeled scheme denoted $g(s)$, obtained by applying to each loop of the offset map of s the operation illustrated in Figure 3.12.

First suppose that s has a single offset loop, denoted ℓ . The loop ℓ can be of type I, IIa, or IIb. The operation g consists in applying the operation illustrated on Figure 3.12, that is adding a leaf on each side of the halfedge of ℓ that has type 1, so as to make this halfedge have type 0.

We define $\mathcal{C}_{g(s)}$ to be the family of scheme-rooted cores having $g(s)$ as unlabeled scheme, and whose non-scheme vertices all have degree 4. When computing C_s^\bullet , the loop ℓ always has weight $BDt_\bullet t_\circ$ (by Lemma 3.5.2), whereas when computing $C_{g(s)}^\bullet$,

the modified loop $g(\ell)$ has weight B . Since, apart from the two additional leaves, that have 2 different colors, the rest of s and $g(s)$ are exactly the same, we obtain the following equality:

$$C_s^\bullet = D \cdot C_{g(s)}^\bullet. \quad (3.50)$$

Now, if s has k loops, we apply the same operation on each loops, and obtain:

$$C_s^\bullet = D^k \cdot C_{g(s)}^\bullet. \quad (3.51)$$

Note that the proof of Theorem 3.6.4 does not require s to be 4-valent, but only that its halfedges have only type 0 or 1, and that it has no offset cycle. We hence apply Theorem 3.6.4 to $g(s)$ to conclude the proof. \square

Remark 9. Of course, it is very tempting to believe that a similar trick could be performed on offset cycles of length 2, so as to obtain a universal rationality result for cores having a given scheme. This is still a work in progress.

Part III

Multitriangulations on any surface

Chapter 1

Multitriangulations on any surface

This chapter is extracted from [LP19]. It is a common work with my PhD advisor Vincent Pilaud. The work is still in progress, and we present here the advances we already made on the subject, as well as our strategy to improve these results.

Abstract

This note partially extends the structural properties of k -stars and diagonal flips of k -triangulations on a convex polygon to the case of k -triangulations on any surface with marked points on the boundary. To that extent, we use the universal cover of the surface to transform a graph embedded on a surface into a periodic graph of an infinite polygon. We generalize the work of V. Pilaud and F. Santos [PS09] to k -triangulations of an infinite polygon with some weak additional constraints, and we finally derive properties of k -triangulations on any surface.

Introduction

Triangulations are fundamental tools to understand and manipulate topological spaces. Triangulations of surfaces are particularly interesting as they feature strong enumerative and structural combinatorial properties. On the enumerative side, triangulated maps on surfaces are counted by surprising product formulas. On the structural side, crossing-free collections of arcs between marked points on the boundary of a given surface form a pure and thin simplicial complex, whose facets are triangulations. In particular, triangulations admit a natural flip operation that exchanges an arc a with the other diagonal of the quadrangle formed by the two triangles containing a . These structural properties were used for instance to provide a large and relevant family of examples of cluster algebras whose combinatorics is driven by the triangulations of a surface and the flips between them.

Triangulations can be interpreted as maximal crossing-free collections of arcs connecting a fixed collection of marked points on the boundary of the surface. An interesting line of research arises when considering maximal collections of arcs with “few crossings”. There are various relevant ways to restrict crossings. One can require for instance that the arcs have at most ℓ crossings in total, or that there is no subset of $\ell + 2$ mutually crossing arcs, or that each arc crosses at most ℓ other arcs, etc. All these conditions translate natural restrictions forcing the intersection

graph of the arcs to be a “small graph”. Namely, it corresponds to an intersection graph with at most ℓ edges, with no $(\ell + 2)$ -clique, or with maximal degree ℓ , etc. Note that all these restrictions specialize to classical triangulations when $\ell = 0$. The first restriction (at most ℓ crossings) has been studied in details in [PR14]. In this note, we consider the second restriction (no subset of mutually crossing arcs), which were already considered in the literature in the case of a disk.

A k -triangulation of a convex n -gon is a maximal set of diagonals with no $(k + 1)$ -crossing, *i.e.* no subset of $k + 1$ mutually crossing diagonals. They were introduced in [CP92] and particularly studied in [Nak00, DKM02, Jon05, Jon03, SS12, PS09]. They feature some strong structural properties, which naturally generalize classical properties of the triangulations of a convex polygon (corresponding to the case $k = 1$):

1. All k -triangulations of the n -gon have $k(2n - 2k - 1)$ diagonals [CP92, Nak00, DKM02].
2. Any diagonal of length at least $k + 1$ can be flipped and the graph of flips is regular and connected [Nak00, DKM02].
3. Any k -triangulation decomposes into a complex of k -stars [PS09].
4. The set of k -triangulations of the n -gon is enumerated by a determinant of Catalan numbers [Jon05, Jon03]. It is thus in bijection with families of k mutually non-crossing Dyck paths [SS12].

The objective of this note is to introduce the good notion of k -triangulations on a surface such that properties (1) to (3) above hold (note that, as there will be infinitely many k -triangulations as soon as the surface has at least 1 one handle or at least 2 boundaries, the enumerative point (4) will naturally be lost). For this, we start from a surface \mathcal{S} with boundaries and fix some marked points on its boundaries. We then consider collections of arcs (up to homotopy) joining marked points with no $(k + 1)$ -crossing. The right notion of $(k + 1)$ -crossings requires to consider the universal cover $\bar{\mathcal{S}}$ of the surface \mathcal{S} . Namely, a $(k + 1)$ -crossing in \mathcal{S} is the projection of a set of $k + 1$ mutually crossing arcs in the universal cover $\bar{\mathcal{S}}$. The subtlety here is that there are collections of pairwise crossing arcs of \mathcal{S} which do not admit pairwise crossing representatives on the universal cover $\bar{\mathcal{S}}$. Armed with this solid notion of k -triangulations on \mathcal{S} , we are able to prove analogues of properties (1) and (3) above, and to discuss property (2).

In fact, our approach is to first consider k -triangulations on a disk with infinitely many vertices (see Section 1.1). Under rather weak assumptions that ensure a sort of local finiteness, we show that these infinite k -triangulations decompose into k -stars and admit a flip operation. We then consider k -triangulations on surfaces as quotients of periodic infinite k -triangulations by Fuchsian groups (see Section 1.2). Most structural properties of infinite triangulations are preserved by this quotient. As discussed at the end of this note, the main difficulty remains in the behavior of the periodicity under the flip operation.

1.1 Multitriangulations of infinite polygons

The objective of this section is to study k -triangulations of an infinite polygon. The key property here is the existence of the k -star decomposition established for k -triangulations of a convex n -gon in [PS09]. In fact, many arguments of [PS09] easily adapt to the case of an infinite polygon assuming some sort of local finiteness properties that we present first.

1.1.1 Infinite polygons

We now provide a proper definition of infinite polygon (Definition 1.1.1) and of two local finiteness conditions (Definitions 1.1.2 and 1.1.3) that will be relevant later.

Definition 1.1.1. *A polygon P is a cyclically ordered set, that might be finite or infinite. We write $u \prec v \prec w$ for the cyclic order. The elements of P are called points and pairs of elements of P are called diagonals. For two points $u, w \in P$, let $[u, w] := \{v \in P \mid u \leq v \leq w\}$, and define similarly the intervals $[u, w[$, $]u, w]$ and $]u, w[$ (with open brackets for strict inequalities). Two diagonals (t, u) and (v, w) of P cross if $t \prec v \prec u \prec w$ or $v \prec t \prec w \prec u$.*

Definition 1.1.2. *If u and v are two points of a polygon P such that the interval $]u, v[$ is empty, we say that u is the predecessor of v and that v is the successor of u , and we use the notations $v = u + 1$ and $u = v - 1$. A polygon P is tidy if each point of P has both a predecessor and a successor. In particular, finite polygons are tidy.*

In particular, note that a tidy polygon is *discrete*, meaning that each of its points is isolated. However, the converse is not true. For instance, the subset $\{-1\} \cup \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ of \mathbb{R} is discrete, but not tidy, since -1 has no successor.

Definition 1.1.3. *A set D of diagonals of a polygon P is*

- *E-finite if each diagonal of D is crossed by a finite number of diagonals of D ,*
- *V-finite if each vertex of P is incident to finitely many diagonals of D .*

1.1.2 Infinite multitriangulations

We now define k -triangulations of infinite polygons exactly as those of finite convex polygons.

Definition 1.1.4. *A k -crossing of a polygon P is a set of k pairwise crossing diagonals of P . A k -triangulation of P is an inclusion-maximal set of diagonals of P with no $(k + 1)$ -crossing.*

Definition 1.1.5. *The length of a diagonal (u, v) of a polygon P is the minimum $\ell(u, v)$ of $]u, v[$ and $]u, v[$ (note that this might be infinite). A diagonal (u, v) with $\ell(u, v) > k$ (resp. $\ell(u, v) = k$, resp. $\ell(u, v) < k$) is a k -relevant (resp. k -boundary, resp. k -irrelevant) diagonal.*

Remark 10. Observe that a diagonal contained in a $(k + 1)$ -crossing must be k -relevant. Therefore, any k -triangulation contains all k -irrelevant and k -boundary diagonals by maximality.

Example 1. Figure 1.1 represents an example of a 2-triangulation of an infinite tidy polygon. In all pictures, we only represent diagonals until a certain depth, and we leave it to the reader to complete the picture when needed.

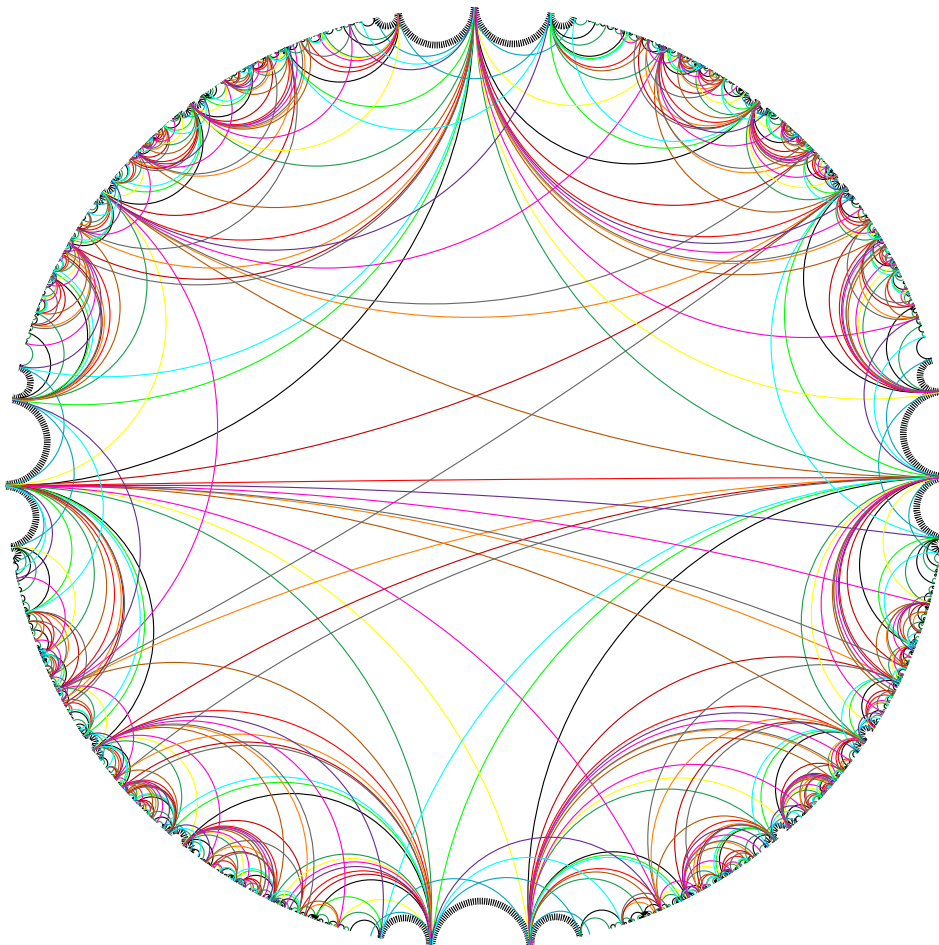


Figure 1.1: A 2-triangulation of an infinite polygon.

As observed in [PS09], many combinatorial properties of k -triangulations are better understood from their decompositions into k -stars, which generalize triangles in triangulations.

Definition 1.1.6. A k -star of a polygon P is a set S of diagonals of P of the form

$$\{(s_i, s_{i+k}) \mid 0 \leq i \leq 2k\}$$

where $s_0 \prec \dots \prec s_{2k}$ (where the indices are understood modulo $2k + 1$).

Definition 1.1.7. An angle of a set D of diagonals of a polygon P is a pair of diagonals $\{(u, v), (v, w)\}$ with $u \prec v \prec w$ such that D contains no diagonal of the form (v, t) with $w \prec t \prec u$. The angle is denoted by $\angle(u, v, w)$ and we say that v is the apex of $\angle(u, v, w)$. An angle is k -relevant if its two diagonals are k -relevant or k -boundary diagonals.

One of the objectives of this paper is to prove the following structural results on infinite k -triangulations, generalizing the result of [PS09].

Theorem 1.1.8. *Let T be a E -finite k -triangulation of a tidy polygon P . Then:*

1. *Each k -relevant angle of T is contained in precisely one k -star of T .*
2. *Each k -relevant (resp. k -boundary, resp. k -irrelevant) diagonal of T is contained in precisely two (resp. one, resp. no) k -stars of T .*
3. *For any k -relevant diagonal e of T , there exists a unique diagonal f not in T such that $T \Delta \{e, f\}$ is another k -triangulation of P (where Δ denotes the symmetric difference). Moreover, the diagonal f only depend on the two k -stars of T containing e .*

Example 2. Figure 1.2 shows the decomposition into 2-stars of the 2-triangulation of Figure 1.1.

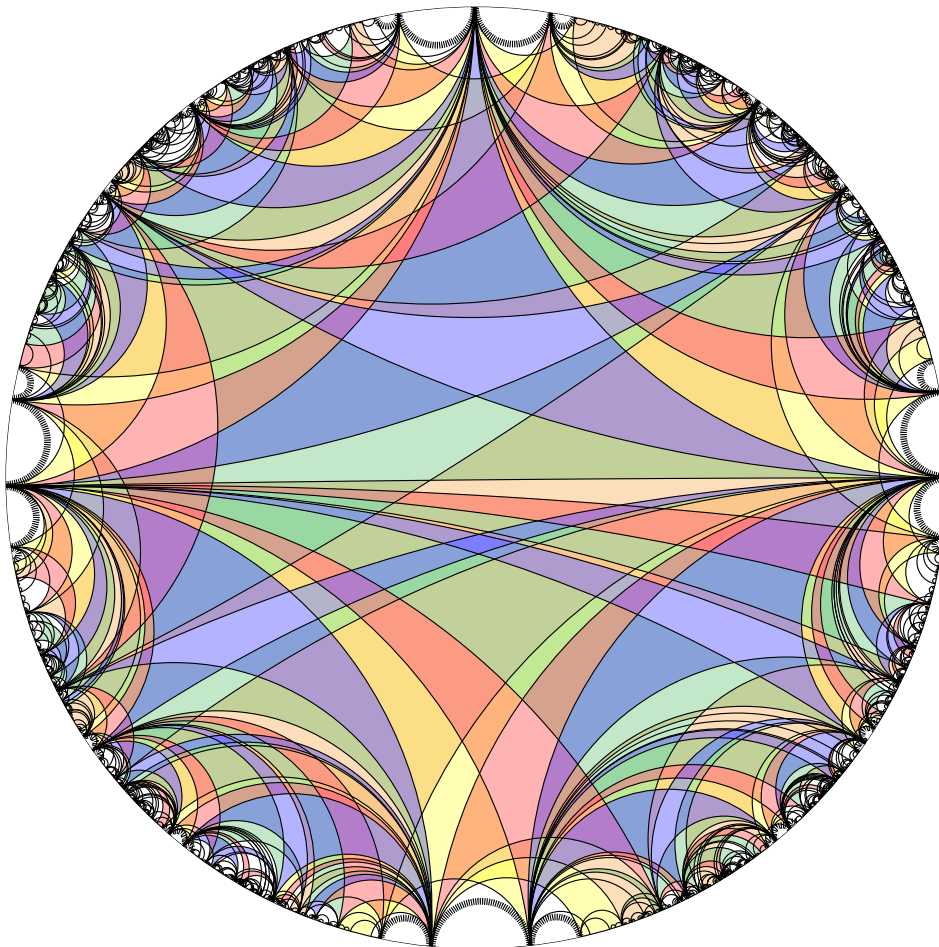


Figure 1.2: The decomposition into 2-stars of the 2-triangulation of Figure 1.1.

1.1.3 Proof of Theorem 1.1.8

The end of this section is devoted to the proof of Theorem 1.1.8. We follow the ideas of the proof of [PS09] in the case of finite convex polygons, but we adapt the arguments to show that the conditions of E -finiteness and tidiness suffice to obtain the same result in the case of infinite polygons.

$(k - 1)$ -crossings crossing an angle

We first study the $(k - 1)$ -crossings that cross a given angle in a k -triangulation.

Definition 1.1.9. A $(k - 1)$ -crossing $A = \{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ crosses an angle $\angle(u, v, w)$ if each diagonal a_i crosses both diagonals (u, v) and (v, w) .

We stick to the convention to label the diagonals of A by $a_i := (a_i^\bullet, a_i^\circ)$ in such a way that $u \prec a_1^\bullet \prec \dots \prec a_{k-1}^\bullet \prec v \prec a_1^\circ \prec \dots \prec a_{k-1}^\circ \prec w$. We use this convention throughout this section without further notice.

Lemma 1.1.10. In a k -triangulation T of a tidy polygon, any k -relevant angle is crossed by a $(k - 1)$ -crossing.

Proof. Any angle $\angle(u, v, w)$ is crossed by the $(k - 1)$ -crossing $\{(v - k + i, v + i) \mid i \in [k - 1]\}$ of k -boundary diagonals, which belongs to the k -triangulation T by Remark 10. \square

Definition 1.1.11. Let $\angle(u, v, w)$ be a k -relevant angle of T . For two diagonals a and b of T that cross $\angle(u, v, w)$, we say that a is v -farther than b if $u \prec a^\bullet \preceq b^\bullet \prec v \prec b^\circ \preceq a^\circ \prec w$. For two $(k - 1)$ -crossings $A = \{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ and $B = \{b_1, \dots, b_{k-1}\}$ that cross $\angle(u, v, w)$, we say that A is v -farther than B if a_i is v -farther than b_i for every $i \in [k - 1]$. We say that A is the v -farthest $(k - 1)$ -crossing if it is v -farther than any other $(k - 1)$ -crossing that crosses $\angle(u, v, w)$.

Lemma 1.1.12. In a k -triangulation, the set of $(k - 1)$ -crossings crossing a given k -relevant angle forms a distributive lattice.

Proof. Consider two $(k - 1)$ -crossings $A = \{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ and $B = \{b_1, \dots, b_{k-1}\}$ that cross the angle (u, v, w) .

There is no i such that a_i crosses b_i . Indeed, suppose $a_i^\bullet \prec b_i^\bullet \prec v \prec a_i^\circ \prec b_i^\circ$. Then $\{(u, v), a_1, \dots, a_i, b_i, \dots, b_{k-1}\}$ forms a $(k + 1)$ -crossing. Similarly, if $b_i^\bullet \prec a_i^\bullet \prec v \prec b_i^\circ \prec a_i^\circ$, then $\{(u, v), b_1, \dots, b_i, a_i, \dots, a_{k-1}\}$ forms a $(k + 1)$ -crossing. Hence A and B are edgewise comparable.

We define the meet (resp. join) of A and B as their edgewise minimum (resp. maximum). With this definition it is easy to see that we obtain a distributive lattice. \square

Lemma 1.1.13. In a E -finite k -triangulation, for any angle $\angle(u, v, w)$ crossed by at least one $(k - 1)$ -crossing, there exists a v -farthest $(k - 1)$ -crossing that crosses $\angle(u, v, w)$.

Proof. By E -finiteness, the angle $\angle(u, v, w)$ is crossed by a finite number of $(k - 1)$ -crossings. Hence the distributive lattice of such $(k - 1)$ -crossings is finite, and has a unique maximum. \square

Combining Lemmas 1.1.10 and 1.1.13, we obtain the following statement.

Corollary 1.1.14. In a E -finite k -triangulation of a tidy polygon, for any angle $\angle(u, v, w)$, there exists a v -farthest $(k - 1)$ -crossing that crosses $\angle(u, v, w)$.

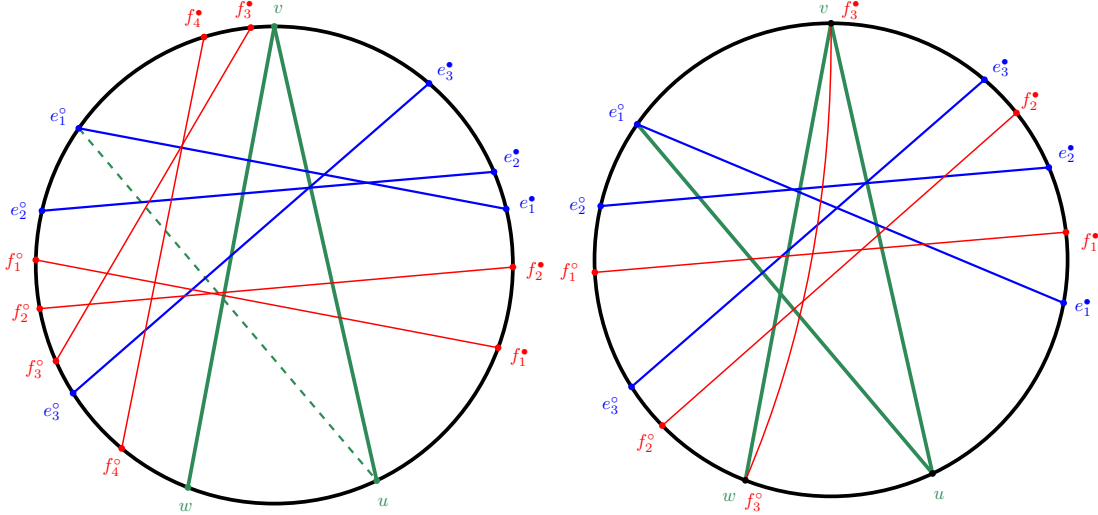


Figure 1.3: Illustrations of the first and second steps of the proof of Proposition 1.1.15. In both case, $k = 4$, and on the left, $\ell = 2$.

Any k -relevant angle belongs to a k -star

We now use the existence of a v -farthest $(k - 1)$ -crossing to show that the angle $\angle(u, v, w)$ belongs to a k -star.

Proposition 1.1.15. *For any angle $\angle(u, v, w)$ of a k -triangulation, if there is a v -farthest $(k - 1)$ -crossing that crosses $\angle(u, v, w)$, then $\angle(u, v, w)$ belongs to a k -star.*

Proof. The proof follows the same lines as that of [PS09, Thm. 4.1]. We repeat the argument here for the convenience of the reader.

Let $E = \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ be the v -farthest $(k - 1)$ -crossing that crosses $\angle(u, v, w)$. We will prove that the diagonals $(u, e_1^\circ), (e_1^\circ, e_2^\circ) \dots (e_{k-2}^\circ, e_{k-1}^\circ), (e_{k-1}^\circ, w)$ are in T such that the points $u, e_1^\bullet, \dots, e_{k-1}^\bullet, v, e_1^\circ, \dots, e_{k-1}^\circ, w$ are the vertices of a k -star of T containing the angle $\angle(u, v, w)$.

To get this result, we use two steps, illustrated in Figure 1.3: first we prove that $\angle(e_1^\bullet, e_1^\circ, u)$ is an angle of T , and then we prove that the diagonals $e_2, \dots, e_{k-1}, (v, w)$ form a $(k - 1)$ -crossing intersecting $\angle(e_1^\bullet, e_1^\circ, u)$ and e_1° -farthest (so that we can reiterate the argument).

First step. Suppose that (u, e_1°) is not in T . Since T is a k -triangulation, there is a k -crossing $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ (with $u \prec f_1^\bullet \prec \dots \prec f_k \prec e_1^\circ \prec f_1^\circ \prec \dots \prec f_k^\circ \prec u$) that prevents the diagonal (u, e_1°) . We will now exhibit a $(k - 1)$ -crossing of the form $\{f_1, \dots, f_\ell, e_{\ell+1}, \dots, e_{k-1}\}$ that will cross $\angle(u, v, w)$ and be v -farther than E , contradicting the maximality of E .

Note first that $f_k^\bullet \in [v, e_1^\circ]$, as otherwise $F \cup \{(u, v)\}$ would form a $(k + 1)$ -crossing. Additionally, $f_k^\circ \in]e_1^\circ, w]$, as otherwise $E \cup \{(v, w), (f_k^\bullet, f_k^\circ)\}$ would form a $(k + 1)$ -crossing. Consequently, we have $f_1^\circ \in]e_1^\circ, w[$ $e_1^\circ \prec f_1^\circ \prec \dots \prec f_{k-1}^\circ \prec w$.

Let $\ell = \max \{j \in [k - 1] \mid f_i^\circ \in]e_i^\circ, w[\text{ for all } i \leq j\}$. Then $f_i^\bullet \in]u, e_i^\bullet]$ for any $i \leq \ell$, as otherwise $\{e_1, \dots, e_i, f_i, \dots, f_k\}$ would form a $(k + 1)$ -crossing. Thus f_i crosses $\angle(u, v, w)$ and is v -farther than e_i for any $i \leq \ell$. Furthermore, we have $f_\ell^\circ \prec f_{\ell+1}^\circ \prec e_{\ell+1}^\circ$ (by maximality of ℓ) and $f_\ell^\bullet \prec e_\ell^\bullet \prec e_{\ell+1}^\bullet$, so that f_ℓ crosses $e_{\ell+1}$. Consequently, we get a $(k - 1)$ -crossing $\{f_1, \dots, f_\ell, e_{\ell+1}, \dots, e_{k-1}\}$ which is v -farther

than $\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$, contradicting the maximality of E . We conclude that (u, e_1°) belongs to T .

Suppose now that $\angle(e_1^\bullet, e_1^\circ, u)$ is not an angle of T . Then there exists $e_0^\bullet \in]u, e_1^\bullet[$ such that $(e_0^\bullet, e_1^\circ) \in T$. But then the $(k-1)$ -crossing $\{(e_0^\bullet, e_1^\circ), e_2, \dots, e_{k-1}\}$ is v -farther than E . This implies that $\angle(e_1^\bullet, e_1^\circ, u)$ is an angle of T .

Second step. Assume now that there exists a $(k-1)$ -crossing $F = \{f_2, \dots, f_k\}$ that crosses $\angle(e_1^\bullet, e_1^\circ, u)$ and is e_1° -farther than the $(k-1)$ -crossing $\{e_2, \dots, e_{k-1}, (v, w)\}$.

Note first that $f_k = (v, w)$. Indeed, since f_k is e_1° -farther than (v, w) , we have $f_k^\bullet \in]e_1^\bullet, v[$ and $f_k^\circ \in [w, u[$. Therefore $f_k^\bullet = v$ (as otherwise $\{(u, v), e_1\} \cup F$ would form a $(k+1)$ -crossing), and $f_k^\circ = w$ (since $\angle(u, v, w)$ is an angle of T).

Since $f_k = (v, w)$, we obtain that $\{e_1, f_2, \dots, f_{k-1}\}$ is a $(k-1)$ -crossing that crosses $\angle(u, v, w)$. For any $i \in [2, k-1]$, the diagonal f_i is e_1° -farther than e_i , and thus also v -farther than e_i . Therefore, $\{e_1, f_2, \dots, f_{k-1}\}$ is v -farther than E , contradicting the maximality of E . \square

Combining Corollary 1.1.14 and Proposition 1.1.15, we obtain the proof of Theorem 1.1.8 (1).

Corollary 1.1.16. *In a E -finite k -triangulation of a tidy polygon, any k -relevant angle belongs to a k -star.*

Any k -relevant diagonal belongs to two k -stars

We now use k -relevant angles to show that any k -relevant (resp. k -boundary, resp. k -irrelevant) diagonal of a k -triangulation T is contained in precisely two (resp. one, resp. no) k -stars of T .

Lemma 1.1.17. *When $k \geq 2$, any E -finite k -triangulation of a tidy polygon is also V -finite.*

Proof. Any k -boundary diagonal e surrounding a given vertex v intersects all diagonals adjacent to v . As the k -triangulation is E -finite, the diagonal e intersects finitely many diagonals, thus v has finite degree. Note that the reverse implication is wrong: there are V -finite k -triangulations that are not E -finite. \square

Lemma 1.1.18. *Any k -relevant (resp. k -boundary) diagonal of a V -finite k -triangulation belongs to four (resp. two) k -relevant angles.*

Proof. Consider a k -relevant diagonal e in a V -finite k -triangulation T . By V -finiteness, both endpoints of e have finite degree. Then the diagonals just before and just after e around the endpoints of e are all either k -relevant or k -boundary diagonals and thus define four k -relevant angles containing e . The proof is similar for a k -boundary diagonal, except only two of the incident angles are k -relevant \square

Combining Lemma 1.1.18 and Corollary 1.1.16, we obtain the proof of Theorem 1.1.8 (2).

Corollary 1.1.19. *Any k -relevant (resp. k -boundary, resp. k -irrelevant) diagonal of a E -finite k -triangulation T of a tidy polygon is contained in precisely two (resp. one, resp. no) k -stars of T .*

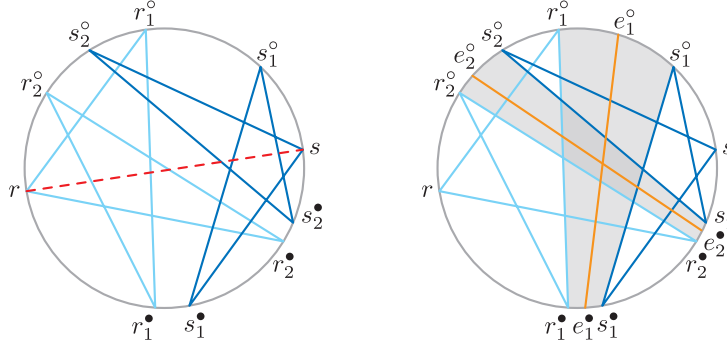


Figure 1.4: The common bisector (r, s) of two 2-stars R and S (left) and a 2-crossing crossing (r, s) . Picture adapted from [PS09, Fig. 4].

Proof. Any k -relevant diagonal e is contained in four k -relevant angles by Lemma 1.1.18, each contained in a k -star of T by Corollary 1.1.16. As the two angles on the same side of e belong to the same k -star of T , we obtain precisely two k -stars of T containing e . The proof is similar for a k -boundary diagonal, except that only one side gives rise to a k -star of T . \square

Mutual position of two k -stars

We now recall from [PS09, Sect. 3] structural properties of a pair of k -stars. As all the following statements deal with only finitely many diagonals, the proofs of [PS09] are still valid in the situation of an infinite polygon.

Definition 1.1.20. A bisector of an angle $\angle(u, v, w)$ is a diagonal (v, t) for some $w \prec t \prec u$. A bisector of a k -star is a bisector of any of its angles.

Theorem 1.1.21 ([PS09, Thm. 3.5]). Any two k -stars whose union is $(k + 1)$ -crossing-free have a unique common bisector.

In the next statements, we consider two k -stars R and S in a $(k + 1)$ -crossing-free collection F of diagonals. We denote by $f = (r, s)$ the unique bisector of R and S , by $r_1 = (r_1^\bullet, r_1^\circ), \dots, r_k = (r_k^\bullet, r_k^\circ)$ the k -crossing of R crossing (r, s) such that $r \prec r_1^\bullet \prec \dots \prec r_k^\bullet \prec s \prec r_1^\circ \prec \dots \prec r_k^\circ \prec r$, and similarly by $s_1 = (s_1^\bullet, s_1^\circ), \dots, s_k = (s_k^\bullet, s_k^\circ)$ the k -crossing of S crossing (r, s) such that $s \prec s_1^\circ \prec \dots \prec s_k^\circ \prec r \prec s_1^\bullet \prec \dots \prec s_k^\bullet \prec s$. Finally consider any k -crossing $E \subseteq F$ crossing the diagonal $f = (r, s)$ and let $E = \{e_1 = (e_1^\bullet, e_1^\circ), \dots, e_k = (e_k^\bullet, e_k^\circ)\}$ such that $r \prec e_1^\bullet \prec \dots \prec e_k^\bullet \prec s \prec e_1^\circ \prec \dots \prec e_k^\circ \prec r$. These notations are illustrated in Figure 1.4.

Lemma 1.1.22 ([PS09, Lems. 3.6 & 3.7]). Consider two k -stars R and S and a k -crossing E whose union is $(k + 1)$ -crossing free, with the notations described above and illustrated in Figure 1.4. Then, for any $i \in [k]$,

$$r \prec r_i^\bullet \preceq e_i^\bullet \preceq s_i^\bullet \prec s \prec s_i^\circ \preceq e_i^\circ \preceq r_i^\circ \prec r.$$

In other words, the diagonals r_i of R and s_i of S are parallel and the diagonal e_i must be in between r_i and s_i .

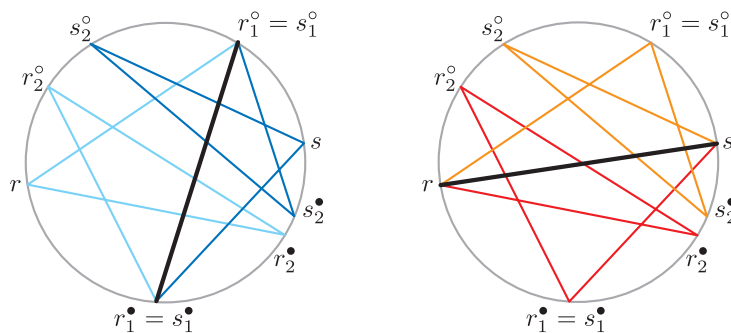


Figure 1.5: Flipping a diagonal common to two k -stars into their common bisector. Picture adapted from [PS09, Fig. 5].

Flipping a k -relevant diagonal

The observations of the previous section enables us to prove the following statement. It is illustrated on Figure 1.5.

Lemma 1.1.23 ([PS09, Lem. 3.8]). *Let R and S be two k -stars of a $(k+1)$ -crossing-free collection F of diagonals. Label the vertices of R by $r \prec r_1^\bullet \prec \dots \prec r_k^\bullet \prec r_1^\circ \prec \dots \prec r_k^\circ$ and the vertices of S by $s \prec s_1^\circ \prec \dots \prec s_k^\circ \prec s_1^\bullet \prec s_k^\bullet$ such that $f = (r, s)$ is the common bisector of R and S . If R and S share a common diagonal e , then*

1. *there exists $i \in [k]$ such that $e = r_i = s_i$,*
2. *$F \triangle \{e, f\}$ is $(k+1)$ -crossing-free (where \triangle denotes the symmetric difference),*
3. *in $F \triangle \{e, f\}$, the vertices $r, r_1^\circ, r_1^\bullet, \dots, r_i^\circ = s_i^\circ, s_{i+1}^\bullet, s_{i+1}^\circ, \dots, s$ form a k -star X while the vertices $s, s_1^\bullet, s_1^\circ, \dots, s_i^\bullet = r_i^\bullet, r_{i+1}^\circ, r_{i+1}^\bullet, \dots, r$ form a k -star Y ,*
4. *X and Y share a common diagonal f and have common bisector e .*

Proof. Again, the proof of [PS09, Lem. 3.8] applies to the infinite case. The main argument is that any k -crossing of E that prevents e being in E contains the diagonal f by Lemma 1.1.22, so that e can be safely added to $E \setminus \{f\}$. \square

We are finally ready to prove Theorem 1.1.8 (3).

Corollary 1.1.24. *For any E -finite k -triangulation T of a tidy polygon P and any k -relevant diagonal e of T , there exists a unique diagonal f not in T such that $T \triangle \{e, f\}$ is another k -triangulation. The diagonal f only depend on the two k -stars of T containing e .*

Proof. By Corollary 1.1.19, the diagonal e is contained in two k -stars R and S of T . By Theorem 1.1.21, the k -stars R and S have a unique common bisector f . By Lemma 1.1.23, the collection of diagonals $T \triangle \{e, f\}$ is $(k+1)$ -crossing-free. Finally, $T \triangle \{e, f\}$ must be maximal: otherwise, it is contained in a k -triangulation T' and $T' \triangle \{e, f\}$ is $(k+1)$ -crossing-free and properly contains T . \square

1.2 Multitriangulations of a general surface

The objective of this section is to provide a consistent definition of multitriangulations of surfaces and to discuss some of their properties. The naive definition (no $(k+1)$ -subset of pairwise crossing arcs on the surface) yields poorly behaved objects, so we have to use the universal cover of the surface.

1.2.1 Surfaces and their universal covers

We start with the equivalents of vertices and diagonals on a surface.

Definition 1.2.1. *Consider a connected surface \mathcal{S} with boundary and a set V of marked points on the boundary. An arc of \mathcal{S} is a curve on \mathcal{S} connecting two points of V and whose interior is disjoint from the boundary of \mathcal{S} . We consider arcs up to homotopy relative to their endpoints in \mathcal{S} and we disallow arcs homotopic to a boundary segment of \mathcal{S} .*

In this section, we will use the representation of surfaces as quotients of the hyperbolic plane by Fuchsian groups. As we only use the combinatorial aspects of this description, we take the liberty to remain quite informal on this representation. Any surface \mathcal{S} can be constructed from a polygon P by glueing some of its edges (the unglued edges of the polygon form the boundary of the surface \mathcal{S}). When the surface has genus $g > 1$ and no boundary, there is a subgroup Γ of isometries of the hyperbolic disk \mathbb{D} so that this polygon P is the fundamental domain of Γ , the surface \mathcal{S} is isomorphic to the quotient \mathbb{D}/Γ , and the disk \mathbb{D} is the universal cover of the surface \mathcal{S} . When the surface has boundaries, we use a similar representation. We embed P in the hyperbolic disk \mathbb{D} and we consider the subgroup Γ of isometries of the hyperbolic disk \mathbb{D} generated by the identifications of the edges of P dictated by the surface \mathcal{S} . The universal cover of the surface \mathcal{S} is then the part $\bar{\mathcal{S}}$ of the hyperbolic disk \mathbb{D} tiled by all images of P by Γ . We denote by $\pi : \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ the projection from the universal cover $\bar{\mathcal{S}}$ down to the surface \mathcal{S} . This representation is illustrated for instance in Figure 1.6.

1.2.2 k -crossings, k -stars and k -triangulations on surfaces

We now define k -crossings, k -stars and k -triangulations on a surface \mathcal{S} by projection down to \mathcal{S} of the same objects in the universal cover $\bar{\mathcal{S}}$.

Definition 1.2.2. *Let \mathcal{S} be a surface, let Γ the corresponding subgroup of isometries of the hyperbolic disk \mathbb{D} , let $\bar{\mathcal{S}}$ be its universal cover, and let $\pi : \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ be the canonical projection.*

1. A k -crossing on \mathcal{S} is the projection $\pi(\bar{a}_1), \dots, \pi(\bar{a}_k)$ of a k -crossing $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$ of $\bar{\mathcal{S}}$.
2. A k -star on \mathcal{S} is the projection $\pi(\bar{S})$ of a k -star \bar{S} of $\bar{\mathcal{S}}$.
3. A k -triangulation of \mathcal{S} is the projection $\pi(\bar{T})$ of a Γ -periodic k -triangulation \bar{T} of $\bar{\mathcal{S}}$.

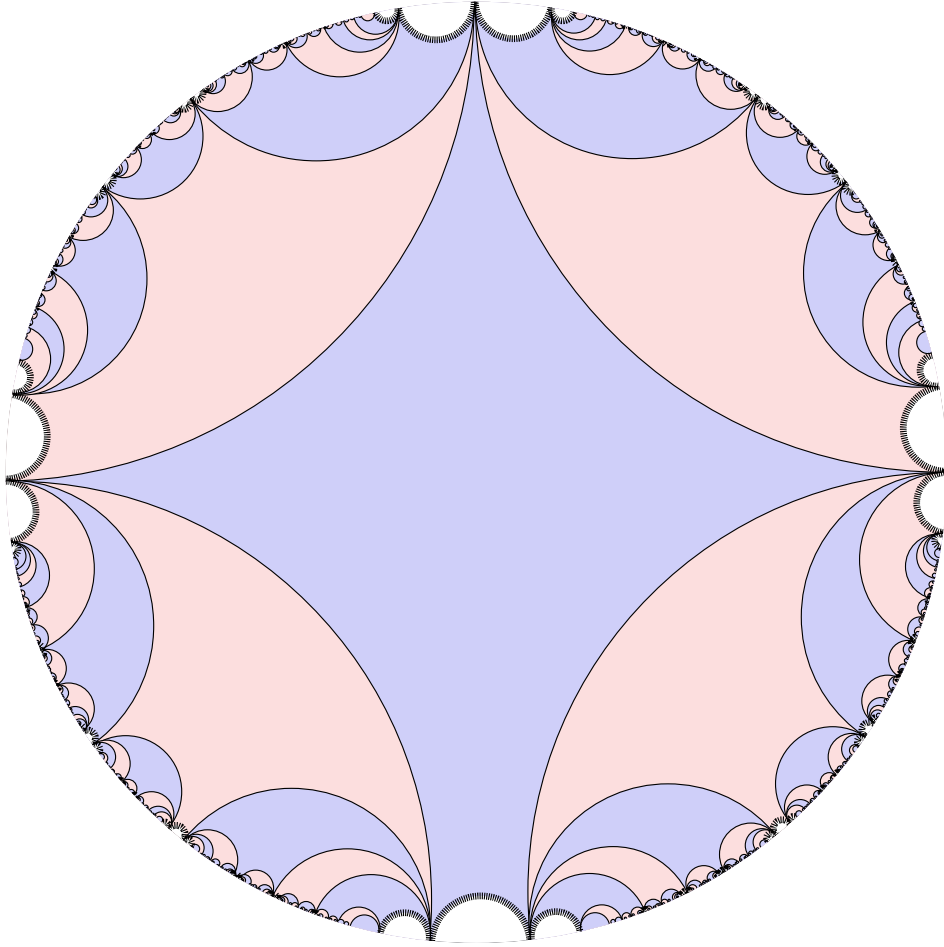


Figure 1.6: The torus with one hole and one boundary, represented as the quotient of its universal cover by a Fuchsian group.

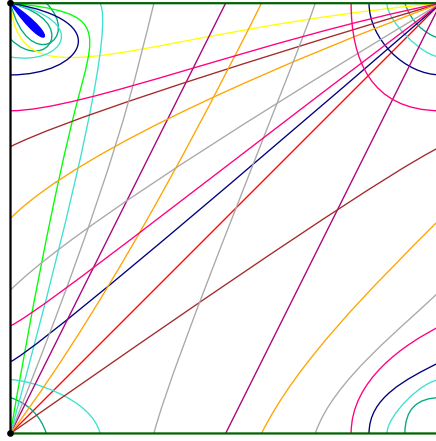


Figure 1.7: A 2-triangulation of a torus with a hole (in blue), whose universal cover is represented in Figure 1.1.

Remark 11. Be careful: a k -crossing on \mathcal{S} is NOT a collection of pairwise crossing arcs of \mathcal{S} . Namely, there are collections of pairwise crossing arcs of \mathcal{S} which do not admit pairwise crossing representatives in $\bar{\mathcal{S}}$. The simplest examples are self-crossing arcs, whose representation may not be self-crossing.

Remark 12. By definition, a k -triangulation of a surface \mathcal{S} is a maximal collection of arcs of \mathcal{S} with no $(k+1)$ -crossing (in the sense of Definition 1.2.2 (ii)). We conjecture that this characterizes k -triangulations of \mathcal{S} . Indeed, note that the fiber of such a maximal $(k+1)$ -crossing free collection T of arcs of \mathcal{S} is always by definition a $(k+1)$ -crossing free collection \bar{T} of diagonals of $\bar{\mathcal{S}}$, but it is not clear to us that it is always maximal in $\bar{\mathcal{S}}$.

Lemma 1.2.3. *If T is a k -triangulation of \mathcal{S} , then its covering k -triangulation \bar{T} of $\bar{\mathcal{S}}$ is an E-finite k -triangulation of a tidy polygon.*

Proof. For any diagonal \bar{a} in \bar{T} , the sequence $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_p$ of arcs crossed by \bar{a} projects down to the sequence $\pi(\bar{a}_1), \dots, \pi(\bar{a}_p)$ crossed by $\pi(\bar{a})$. Thus, \bar{a} crosses only finitely many arcs and \bar{T} is E-finite. The polygon is tidy since each marked point in $\bar{\mathcal{S}}$ has for predecessor (resp. successor) the previous (resp. next) point along the boundary of \mathcal{S} . \square

1.2.3 Structural properties

We now explore structural properties of k -triangulations of a surface. Our approach is again through k -stars, as illustrated in Figure 1.8.

Theorem 1.2.4. *For any k -triangulation T of a surface \mathcal{S} , each k -relevant (resp. k -boundary, resp. k -irrelevant) arc of T is contained in precisely two (resp. one, resp. no) k -stars of T .*

Proof. Let \bar{T} be collection of arcs of $\bar{\mathcal{S}}$ which projects to the k -triangulation T of \mathcal{S} . Since \bar{T} is an E-finite k -triangulation of a tidy polygon by Lemma 1.2.3, we can apply Theorem 1.1.8 and obtain that each k -relevant (resp. k -boundary, resp. k -irrelevant) arc of \bar{T} is contained in precisely two (resp. one, resp. no) k -stars of \bar{T} . The statement thus follows by projection of \bar{T} to T . \square

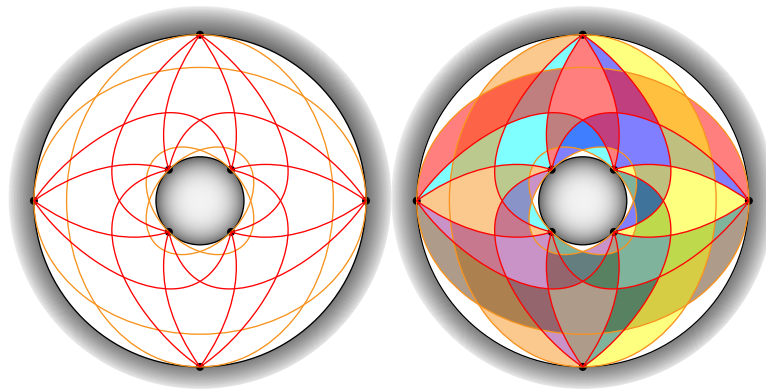


Figure 1.8: A 2-triangulation of a cylinder, where 2-relevant arcs are red while 2-boundary arcs are orange (left) and its decomposition into 2-stars (right).

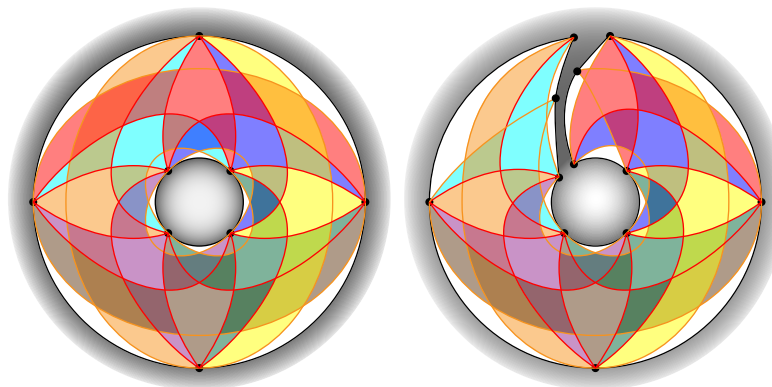


Figure 1.9: Cutting a 2-triangulation of a cylinder along a 2-relevant arc.

Using Theorem 1.2.4, we obtain the number of k -stars and k -relevant arcs in a k -triangulation. We start with the case of surfaces with at least one marked point on each connected component, for which we argue by a cutting argument.

Theorem 1.2.5. *Consider a surface \mathcal{S} of genus g with b boundaries and n marked points, such that there is at least one marked point on each boundary. Then any k -triangulation of \mathcal{S} has precisely $n + 2k(2g + b - 2)$ k -stars and $kn + k(2k + 1)(2g + b - 2)$ k -relevant arcs.*

Proof (sketch). We sketch a proof based on cutting along arcs. Start from a k -triangulation T of a surface \mathcal{S} with at least $2k + 1$ marked points, genus g and b boundaries. If T has no k -relevant arc, then T is the complete graph on $2k + 1$ vertices, has a single k -star, and \mathcal{S} is a disk. Otherwise, pick an arbitrary k -relevant arc a of T . Cut along a , create $k - 1$ new marked points on each side of a , and rearrange the branches of the k -stars that cross a to these new marked points (there is a unique way to do this rearrangement). This operation, illustrated in Figure 1.9, is easier to see on the disk, and can then be extended to surfaces using the universal cover. We obtain a new k -triangulation T' on a new surface \mathcal{S}' (not necessarily connected). Note that

1. the k -triangulations T and T' have the same number of k -stars,
2. the surface \mathcal{S}' has $n' = n + 2k$ marked points (as we have duplicated the endpoints of a and we have created $2k - 2$ new marked points),

3. the genus g' and number of boundaries b' of the surface \mathcal{S}' depend on the choice of a :

- if the endpoints of a belong to the same connected component of \mathcal{S} , then we cut a handle and thus $g' = g - 1$ and $b' = b + 1$,
- if the endpoints of a belong to distinct connected components of \mathcal{S} , then we cut a border and thus $g' = g$ and $b' = b - 1$.

But in both cases, $2g' + b' = 2g + b - 1$.

We conclude that T' has indeed $n + 2k(2g + b - 2) = n' + 2k(2g' + b - 2)$ k -stars.

Once we know the number of k -stars, the number of k -relevant arcs immediately follows by double counting. Indeed, since

- each k -relevant arc belongs to two k -stars while each k -boundary arc belongs to one k -star,
- each k -star contains $2k + 1$ arcs which are all either k -relevant or k -boundary,
- there are precisely n k -boundary arcs,

we obtain that the number s of k -stars and the number r of k -relevant arcs in a k -triangulation are related by $2r + n = (2k + 1)s$ from which we derive that

$$r = ((2k + 1)s - n)/2 = kn + k(2k + 1)(2g + b - 2). \quad \square$$

We can now obtain the number of k -stars and k -relevant arcs for arbitrary surfaces.

Corollary 1.2.6. *Consider a surface \mathcal{S} of genus g with b boundaries and n marked points, such that b° boundaries have no marked points. Then any k -triangulation of \mathcal{S} has $n - b^\circ + 2k(2g + b - 2)$ k -stars and $k(n - b^\circ) + k(2k + 1)(2g + b - 2)$ k -relevant arcs.*

Proof (sketch). Let T be a k -triangulation of \mathcal{S} , and denote by s its number of k -stars and by r its number of k -relevant arcs. Consider a boundary δ of \mathcal{S} with no marked point. By maximality, the k -triangulation T contains a loop ℓ around δ . By Theorem 1.2.5, a cylinder with one marked point on each boundary admits a k -triangulation with two k -stars and $2k$ k -relevant arcs. We can thus add to T a marked point on δ , two k -stars and $2k$ k -relevant arcs to enclose the boundary δ . Repeating this operation at each marked point, we obtain a k -triangulation \tilde{T} of a surface $\tilde{\mathcal{S}}$ where:

- the resulting surface $\tilde{\mathcal{S}}$ has genus $\tilde{g} := g$, $\tilde{b} := b$ boundaries and $\tilde{n} := n + b^\circ$ marked points and there is at least one marked point on each boundary,
- the resulting k -triangulation \tilde{T} has $\tilde{s} := s + 2b^\circ$ k -stars and $\tilde{r} := r + 2kb^\circ$ k -relevant arcs.

We conclude by Theorem 1.2.5. \square

Our last structural property concerns flips in k -triangulations of surfaces, illustrated in Figure 1.10. The remaining of this note discusses the following conjecture.

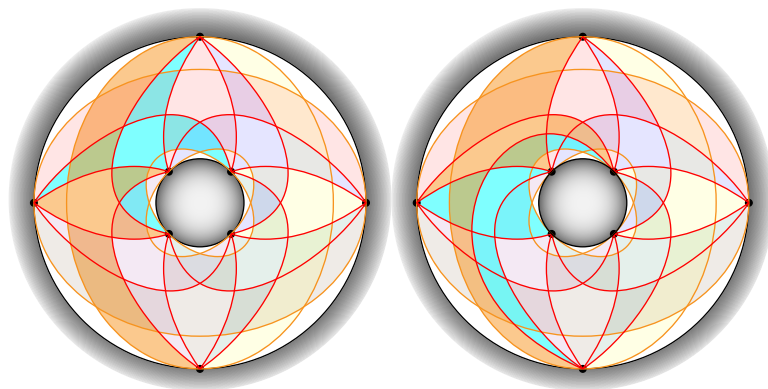


Figure 1.10: A flip of a 2-relevant arc in a 2-triangulation of a cylinder.

Conjecture 1.2.7. *Any k -relevant arc of a k -triangulation on a surface can be flipped.*

To flip a k -relevant arc a of the k -triangulation T of a surface \mathcal{S} , the natural idea is to flip sequentially all copies \bar{a} of the arc a in the k -triangulation \bar{T} of the universal cover $\bar{\mathcal{S}}$. However, this only works if, at any point of this procedure, the flip of any copy \bar{a} in \bar{T} does not modify the flip of the other copies of a in \bar{T} . We say that the flip of a in T is *sequential* when this procedure works, and *non-sequential* otherwise.

Example 3. For instance, all flips in the 2-triangulation of Figure 1.1 are sequential. We will see examples of non-sequential flips in Section 1.3.

Our approach to Conjecture 1.2.7 would be to show that non-sequential flips in k -triangulations of any surface \mathcal{S} just boil down to non-sequential flips of k -triangulations of a half-cylinder \mathcal{C} . For this, consider an arc a of a k -triangulation T of \mathcal{S} , and let S and S' denote the two k -stars of T containing a . We distinguish two cases:

- If S and S' are distinct k -stars of T , then a appears only once in S and in S' . Consider a copy \bar{a} of a in \bar{T} and the copy \bar{S} (resp. \bar{S}') of S (resp. S') in \bar{T} containing \bar{a} . Remember from Section 1.1 that the flip of \bar{a} in \bar{T} only depends on and only modifies the two k -stars \bar{S} and \bar{S}' . Since \bar{a} is not contained in any other copy of S and S' in \bar{T} , the flip of \bar{a} in \bar{T} does not modify the flip of the other copies of a in \bar{T} . Therefore the flip is sequential.
- Assume now that $S = S'$ so that a appears twice in S . Let \bar{a} and \bar{a}' be two copies of a in a copy \bar{S} of S in \bar{T} . Let $\gamma \in \Gamma$ be the isometry of $\bar{\mathcal{S}}$ such that $\gamma(\bar{a}) = \bar{a}'$. We consider the collection \bar{U} of arcs of the k -stars $\gamma^i(\bar{S})$ for $i \in \mathbb{Z}$. Perform all identifications of two consecutive vertices of \bar{U} that do not uncross any pairs of arcs of \bar{U} . These identifications can be performed in any order. The result \bar{V} is a k -triangulation of an infinite polygon whose isometry group is generated by γ . Therefore, \bar{V} is a covering of a k -triangulation V of a cylinder \mathcal{C} .

Conjecture 1.2.8. *The procedure described above leads to a k -triangulation \tilde{T} of a half-cylinder. Moreover, one can totally understand the flips in the k -triangulation T of the surface \mathcal{S} from the flips in the k -triangulation \tilde{T} of the half-cylinder.*

Although this approach is not yet settled, we believe that our presentation motivates to study in details the k -triangulations of the half-cylinder, which is the purpose of the remaining of the paper.

1.3 Multitriangulations of the half-cylinder

This section is devoted to multitriangulations of half-cylinders, defined as follows.

Definition 1.3.1. *A half-cylinder is a cylinder with some marked points on its lower boundary, but no point on its upper boundary.*

As mentioned, the study of multitriangulations of half-cylinders has two relevant purposes:

- they provides examples of non-sequential flips,
- assuming Conjecture 1.2.8, it provides the prototype to understand all non-sequential flips of k -triangulations of surfaces.

1.3.1 Half-cylinder with two marked points

We start with the case of multitriangulations of the half-cylinder with only two points on the lower boundary. This case already provides relevant examples of non-sequential flips that will enable us to settle some conventions of representations (see Figures 1.11 and 1.12).

Consider the half-cylinder \mathcal{C} with two points $\{u, v\}$ on one boundary and none on the other. Its universal cover $\bar{\mathcal{C}}$ is an infinite band, with points u_j and v_j for $j \in \mathbb{Z}$ alternating on one boundary (so that $u_j + 1 = v_j = u_{j+1} - 1$). See Figure 1.11.

For $k \geq 1$ and a word $w := w^1 \dots w^k \in \{u, v\}^k$, consider a set \bar{T}_w of diagonals of $\bar{\mathcal{C}}$ formed by

- the diagonals $\bar{a}_w^i := (w_j^i, w_j^i + k + i)$ for all $i \in [k]$ and $j \in \mathbb{Z}$,
- all k -boundary and k -irrelevant diagonals $(\epsilon_j, \epsilon_j + i)$ for $i \in [k]$, $\epsilon \in \{u, v\}$ and $j \in \mathbb{Z}$.

For instance, we have represented the sets \bar{T}_{uvu} and \bar{T}_{uuu} in Figure 1.11.

Lemma 1.3.2. *The sets*

- $\{(\epsilon_j, \epsilon_j + k + i) \mid \epsilon \in \{u, v\} \text{ and } j \in \mathbb{Z}\}$ for any $i \in [k]$,
- $\{(\epsilon_j, \epsilon_j + k + i) \mid j \in \mathbb{Z}\}$ for any $\epsilon \in \{u, v\}$ and $i \geq k + 1$,

all contain a $(k + 1)$ -crossing.

Proposition 1.3.3. *For any $k \geq 1$ and $w \in \{u, v\}^k$, the set \bar{T}_w is a k -triangulation of $\bar{\mathcal{S}}$.*

Proof. The maximality is immediate from Lemma 1.3.2 or Corollary 1.2.6. To see that \bar{T}_w is $(k + 1)$ -crossing-free, we use the following strategy:

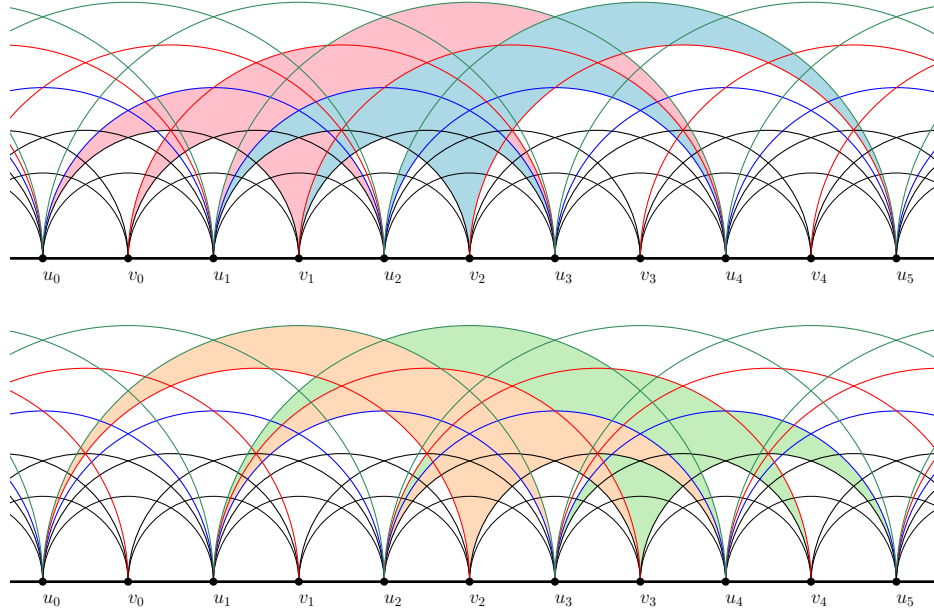


Figure 1.11: Two 3-triangulations \bar{T}_{uvu} (top) and \bar{T}_{uuu} (bottom) of a half-cylinder related by a non-sequential flip. The diagonal $u_i v_{i+2}$ is flipped to the diagonal $v_i u_{i+3}$. These diagonals belong to two consecutive copies of the same 3-star.

- the set of diagonals $\{(\epsilon_j, \epsilon_j + 2k) \mid j \in \mathbb{Z}\}$ has no $(k+1)$ -crossing for any $\epsilon \in \{u, v\}$,
- given any set D of pairwise crossing diagonals in \bar{T}_w , we can construct a new set D' of pairwise crossing diagonals in \bar{T}_w by increasing the length of the smallest diagonal (u, v) of D , provided this length is not $2k$. Indeed, we just need to observe that the vertices $u-1$ and $v-1$ cannot be incident to diagonals of D . \square

Corollary 1.3.4. *The set of k -triangulations of $\bar{\mathcal{C}}$ is $\{\bar{T}_w \mid w \in \{u, v\}^k\}$.*

Proof. Any $(k+1)$ -crossing free set of diagonals of $\bar{\mathcal{C}}$ is a subset of a certain \bar{T}_w by Lemma 1.3.2. \square

Consider now the projection $\pi : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$. We denote by

- a_w^i the arc of \mathcal{C} obtained by projection of any diagonal $(w_j^i, w_j^i + k + 1 + i)$ of $\bar{\mathcal{C}}$ for $j \in \mathbb{Z}$.
- T_w the k -triangulation of \mathcal{C} obtained by projection of the k -triangulation \bar{T}_w of $\bar{\mathcal{C}}$.

Proposition 1.3.5. *For any $w, w' \in \{u, v\}^k$ which only differ at position $i \in [k]$, the k -triangulations T_w and $T_{w'}$ are the only two k -triangulations \mathcal{S} which contain $T_w \setminus \{a_w^i\}$ (which is equal to $T_{w'} \setminus \{a_{w'}^i\}$). In other words, any arc a_w^i in the k -triangulation T_w can be uniquely flipped.*

Proof. By definition of T_w and $T_{w'}$, we have $T_w \setminus \{a_w^i\} = T_{w'} \setminus \{a_{w'}^i\}$ so that the flip is possible. It is unique by Corollary 1.3.4. \square

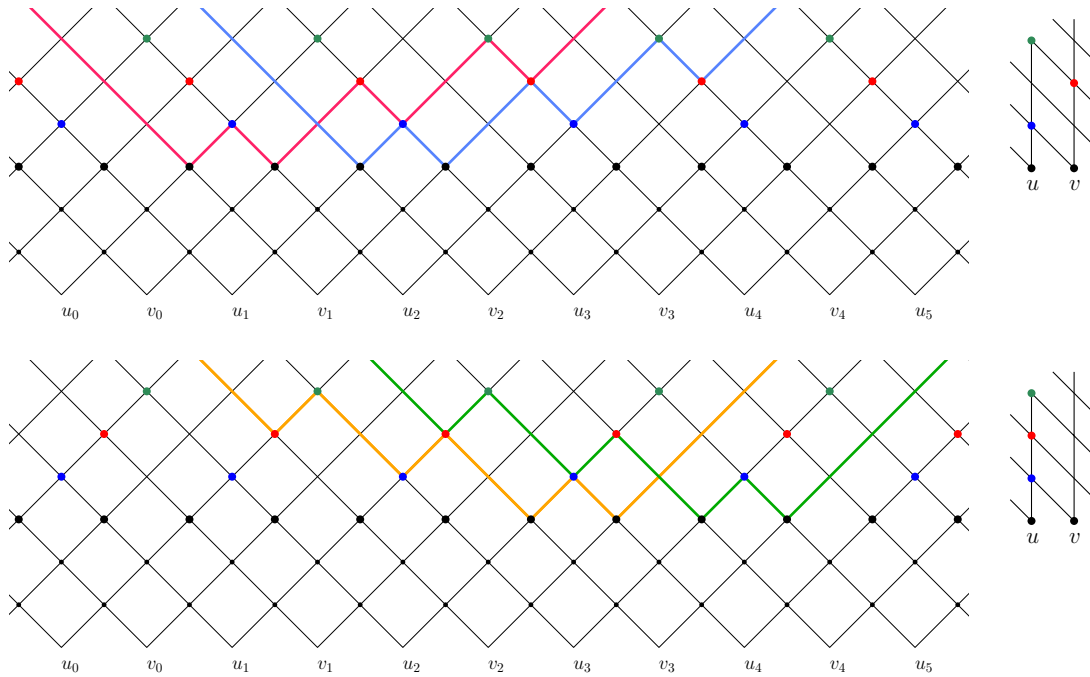


Figure 1.12: The V (left) and H (right) representations of the 3-triangulations of Figure 1.11.

Remark 13. The flip of a_w^1 is sequential (for the first flip, all points below a_w^1 are vertices of the k -star below a_w^1 and we can determine which of these angles see each other; we have not worked out the other flips yet). In contrast, the flip of a_w^i is not sequential for $i \in \{2, \dots, k-1\}$ (since the common bisector is still of length $k+1$).

1.3.2 Half-cylinders with arbitrary many marked points

We now consider an arbitrary half-cylinder \mathcal{C}_n with n points $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ on the lower boundary and no point on the upper boundary. For a point $v_i \in \mathcal{C}_n$, we denote by $(v_i^j)_{j \in \mathbb{Z}}$, its successive copies in the universal cover $\overline{\mathcal{C}_n}$ (which is an infinite band). The objective of this section is to discuss the following conjectural extension of Proposition 1.3.5.

Conjecture 1.3.6. *Any arc of a k -triangulation of the half-cylinder \mathcal{C}_n can be flipped.*

To approach this statement, we need to introduce a convenient representation of collections of arcs on the half-cylinder \mathcal{C}_n , illustrated in Figure 1.12.

Let A be a $(k+1)$ -crossing-free set of k -irrelevant or k -boundary arcs of \mathcal{C}_n containing (at least) the k -boundary arcs of \mathcal{C}_n , and a be a k -relevant arc of A . We denote by l_a , i_a and j_a the length, and the indices of the left and right endpoints of a . Note that $l_a \geq k$ because a is k -relevant, and $l_a \leq kn$ because A is $(k+1)$ -crossing-free. Note also that $i_a + l_a - j_a = 0$ (in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) by definition.

We represent \mathcal{C}_n by a cylindric grid G of width n and height $kn - n + 1$, where each column, indexed by $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, represent a point, and each row, indexed by $[k, kn]$ represent an arc length. We represent each arc a of A by a symbol \bullet at position (i_a, l_a) in G . We associate a directed lattice to the grid G , made of an edge going from any point (i, l) to the point $(i-1, l+1)$, and an edge from any point $(i, l+1)$

to the point (i, l) , for $l < kn$ and $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, as well as an edge going from point (i, kn) to point (i, kn) for any $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. We call it the *H-representation* of A , see Figure 1.12 (right). We naturally call these edges the *upper outgoing*, *upper ingoing*, *lower outgoing*, *lower ingoing* edges of a point. Note that points of the form (i, k) have no lower edges.

A face of A is made of a succession of *top* arcs (that are above the face), and *bottom* arcs (that are below the face). Around a face, their can be two consecutive bottom arcs, but no two consecutive top arcs. An angle between two bottom arcs is called *upper angle*, an angle between a top and a bottom arcs is called *lower angle*. The *counterclockwise tour* of a face f of A is computed by the following procedure. Start from any arc a of f , and perform the following operation until you get back to this original arc a .

1. If a is a top arc, set a to be longest arc starting from v_{i_a} and having length less than l_a . Note that this is well defined because A contains the k -boundary arcs, and a k -boundary arcs cannot be a top arc.
2. Else, if a is a bottom arc, and l_a is the maximum length of an edge ending on point v_{j_a} , then set a to be the longest arc starting on point v_{i_a} .
3. Else, set a to be the shorted arc ending on point v_{j_a} and having length more than l_a .

If this procedure does not terminate, it means that the corresponding face is not finite, but rather infinite and periodic.

This procedure can easily be performed graphically in the grid representation, by following the edges of the lattice. Step 1 corresponds to following lower outgoing edges until meeting a \bullet ; step 3 corresponds to following upper outgoing edges until meeting a \bullet ; and step 2 corresponds to following upper outgoing edges until reaching height kn , and then following lower outgoing edges until meeting a \bullet . In the grid representation, this procedure necessarily ends with a cycle C_f .

We call *drift* of the face f the integer δ_f equal the total length of top arcs of C_f minus the total length of bottom arcs of C_f . Then f is finite if and only if $\delta_f = 0$.

Conjecture 1.3.7. *A collection A of arcs of \mathcal{C}_n is a k -triangulation if and only if it has $n - 1$ faces, which all have drift 0 and length $2k + 1$.*

Tentative proof. For the direct direction, assume that A is a k -triangulation of the half-cylinder \mathcal{C}_n . By Theorems 1.1.8 and 1.2.4 and Corollary 1.2.6, it has $n - 1$ k -stars, all of drift 0 and length $2k + 1$.

Suppose now that A has $n - 1$ faces, all of drift 0 and length $2k + 1$. Counting the number of \bullet , we obtain that A is maximal by Corollary 1.2.6. The missing point is to prove that A has no $(k + 1)$ -crossing. \square

Let T be a k -triangulation of \mathcal{C}_n , let S be a k -star of T , and let a be an arc adjacent to S on both sides. Let C_S be the cycle corresponding to S in the grid representation. Let $C_{S,d}^1$ be the subcycle of C starting from the upper outgoing edge of a , and finishing at the lower ingoing edge of a . Let $C_{S,d}^2$ be the subcycle of C starting from the lower outgoing edge of a , and finishing at the upper ingoing edge of a . The cycle C is made of the succession of $C_{S,d}^1$ and $C_{S,d}^2$.

Conjecture 1.3.8. *The cycles $C_{S,d}^1$ and $C_{S,d}^2$ have exactly 2 intersection points.*

Tentative proof. The number of intersection points of two cycles on a cylinder is necessarily even. By definition, the \bullet corresponding to a is a point of intersection. We thus just need to prove that there cannot be more than 2 intersection points. \square

Proof of Conjecture 1.3.6 under Conjectures 1.3.7 and 1.3.8. Let T be a triangulation of \mathcal{C}_n , and let a be an arc of T . If a is adjacent to two different k -stars, then it can be flipped sequentially as discussed earlier.

If a is adjacent twice to the same k -star, then denote by a' the point of intersection between $C_{S,d}^1$ and $C_{S,d}^2$ which is not a . Denote by $C_{S,d}^{1,1}$ and $C_{S,d}^{1,2}$ the subpaths of $C_{S,d}^1$ going from a to a' , and from a' to a . Denote by $C_{S,d}^{2,1}$ and $C_{S,d}^{2,2}$ the subpaths of $C_{S,d}^2$ going from a to a' , and from a' to a . The cycle C is made of the cyclic concatenation of $C_{S,d}^{1,1}$, $C_{S,d}^{1,2}$, $C_{S,d}^{2,1}$ and $C_{S,d}^{2,2}$.

Now remove a and add in a' . This creates a new face S' , corresponding in the grid representation to a cycle C' made of the cyclic concatenation of $C_{S,d}^{1,1}$, $C_{S,d}^{2,2}$, $C_{S,d}^{2,1}$ and $C_{S,d}^{1,2}$. Since S' is made of the same paths as S , it as well has drift 0 and length $2k + 1$, so that what we obtain is a k -triangulation. \square

Bibliographie

- [ABA17] Louigi Addario-Berry and Marie Albenque, *The scaling limit of random simple triangulations and random simple quadrangulations*, The Annals of Probability **45** (2017), no. 5, 2767–2825.
- [AG99] Didier Arquès and Alain Giorgetti, *Énumération des cartes pointées sur une surface orientable de genre quelconque en fonction des nombres de sommets et de faces*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **77** (1999), no. 1, 24.
- [AG00] ———, *Counting rooted maps on a surface*, Theoretical Computer Science **234** (2000), no. 1-2, 255–272.
- [AL19] Marie Albenque and Mathias Lepoutre, *Blossoming bijection for higher-genus maps, and bivariate rationality*, In preparation (2019), 1–26.
- [Ald94] David Aldous, *Triangulating the circle, at random*, The American Mathematical Monthly **101** (1994), no. 3, 223–233.
- [AP15] Marie Albenque and Dominique Poulalhon, *A generic method for bijections between blossoming trees and planar maps*, Electron. J. Comb. **22** (2015), no. 2, P2–38.
- [Arq85] Didier Arquès, *Une relation fonctionnelle nouvelle sur les cartes planaires pointées*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **39** (1985), no. 1, 27–42.
- [Arq87] Didier Arquès, *Relations fonctionnelles et dénombrement des cartes pointées sur le tore*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **43** (1987), no. 3, 253–274.
- [BC86] Edward A Bender and E Rodney Canfield, *The asymptotic number of rooted maps on a surface*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **43** (1986), no. 2, 244–257.
- [BC91] ———, *The number of rooted maps on an orientable surface*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **53** (1991), no. 2, 293–299.
- [BC11] Olivier Bernardi and Guillaume Chapuy, *A bijection for covered maps, or a shortcut between Harer-Zagier’s and Jackson’s formulas*, J. Comb. Theory, Ser. A **118** (2011), no. 6, 1718–1748.
- [BCF14] Olivier Bernardi, Gwendal Collet, and Eric Fusy, *On the distance-profile of random rooted plane graphs*, 2014.

- [BCR93] Edward A Bender, E Rodney Canfield, and L Bruce Richmond, *The asymptotic number of rooted maps on a surface.: Ii. enumeration by vertices and faces*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **63** (1993), no. 2, 318–329.
- [BDFG02] Jérémie Bouttier, Philippe Di Francesco, and Emmanuel Guitter, *Census of planar maps: from the one-matrix model solution to a combinatorial proof*, Nuclear Physics B **645** (2002), no. 3, 477–499.
- [BDFG04] ———, *Planar maps as labeled mobiles*, the electronic journal of combinatorics **11** (2004), no. 1, 69.
- [BDFG07] ———, *Blocked edges on eulerian maps and mobiles: application to spanning trees, hard particles and the ising model*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **40** (2007), no. 27, 7411.
- [Ber06] Olivier Bernardi, *Bijjective counting of tree-rooted maps and shuffles of parenthesis systems*, Electron. J. Comb. **14** (2006), no. 1 R, 1–36.
- [Bet10] Jérémie Bettinelli, *Scaling limits for random quadrangulations of positive genus*, Electron. J. Probab **15** (2010), no. 52, 1594–1644.
- [Bet12] ———, *The topology of scaling limits of positive genus random quadrangulations*, The Annals of Probability **40** (2012), no. 5, 1897–1944.
- [Bet16] Jérémie Bettinelli, *A bijection for nonorientable general maps*, Canada DMTCs proc. BC, 2016, pp. 227–238.
- [BF12a] Olivier Bernardi and Éric Fusy, *A bijection for triangulations, quadrangulations, pentagulations, etc*, J. Comb. Theory, Ser. A **119** (2012), no. 1, 218–244.
- [BF12b] ———, *Unified bijections for maps with prescribed degrees and girth*, J. Comb. Theory, Ser. A **119** (2012), no. 6, 1351–1387.
- [BF14] Olivier Bernardi and Éric Fusy, *Unified bijections for planar hypermaps with general cycle-length constraints*, arXiv preprint arXiv:1403.5371 (2014), 60.
- [BF18] ———, *Bijections for planar maps with boundaries*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **158** (2018), 176–227.
- [BGR08] Edward A Bender, Zhicheng Gao, and L Bruce Richmond, *The map asymptotics constant t_g* , the electronic journal of combinatorics **15** (2008), no. 1, 51.
- [BL17] Nicolas Bonichon and Benjamin Lévêque, *A bijection for essentially 4-connected toroidal triangulations*, Manuscript (2017).
- [BL19] Thomas Budzinski and Baptiste Louf, *Local limits of uniform triangulations in high genus*, arXiv preprint arXiv:1902.00492 (2019).
- [BM19] Jérémie Bettinelli and Grégory Miermont, *Compact brownian surfaces ii. the general case*, 2019+.

-
- [BMJ06] Mireille Bousquet-Mélou and Arnaud Jehanne, *Polynomial equations with one catalytic variable, algebraic series and map enumeration*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **96** (2006), no. 5, 623–672.
- [BT64] W. G. Brown and W. T. Tutte, *On the enumeration of rooted non-separable planar maps*, Canadian J. Math. **16** (1964), 572–577. MR 177906
- [CC15] Sean R Carrell and Guillaume Chapuy, *Simple recurrence formulas to count maps on orientable surfaces*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **133** (2015), 58–75.
- [CD17] Guillaume Chapuy and Maciej Dołęga, *A bijection for rooted maps on general surfaces*, J. Comb. Theory, Ser. A **145** (2017), no. 3, 252–307.
- [CF16] Guillaume Chapuy and Wenjie Fang, *Generating functions of bipartite maps on orientable surfaces*, The Electronic Journal of Combinatorics **23** (2016), no. 3, 3–31.
- [Cha09a] Guillaume Chapuy, *Asymptotic enumeration of constellations and related families of maps on orientable surfaces*, Comb. Probab. Comput. **18** (2009), no. 4, 477–516.
- [Cha09b] ———, *Combinatoire bijective des cartes de genre supérieur*, Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique X, 2009.
- [CMS09] Guillaume Chapuy, Michel Marcus, and Gilles Schaeffer, *A bijection for rooted maps on orientable surfaces*, SIAM Journal on Discrete Mathematics **23** (2009), no. 3, 1587–1611.
- [CP92] Vasilis Capoyleas and János Pach, *A Turán-type theorem on chords of a convex polygon*, J. Combin. Theory Ser. B **56** (1992), no. 1, 9–15.
- [CS04] Philippe Chassaing and Gilles Schaeffer, *Random planar lattices and integrated superBrownian excursion*, Probab. Theory Relat. Fields **128** (2004), no. 2, 161–212.
- [Cur14] Nicolas Curien, *Dissecting the circle, at random*, ESAIM: Proceedings, vol. 44, EDP Sciences, 2014, pp. 129–139.
- [Cur16] ———, *Planar stochastic hyperbolic triangulations*, Probability Theory and Related Fields **165** (2016), no. 3-4, 509–540.
- [CV81] Robert Cori and Bernard Vauquelin, *Planar maps are well labeled trees*, Canadian Journal of Mathematics **33** (1981), no. 5, 1023–1042.
- [DGL17] Vincent Despré, Daniel Gonçalves, and Benjamin Lévêque, *Encoding toroidal triangulations*, Discret. Comput. Geom. **57** (2017), no. 3, 507–544.
- [DKM02] Andreas W. M. Dress, Jacobus H. Koolen, and Vincent Moulton, *On line arrangements in the hyperbolic plane*, European J. Combin. **23** (2002), no. 5, 549–557.

- [DL19] Maciej Dołęga and Mathias Lepoutre, *Blossoming bijection for bipartite pointed maps and parametric rationality of general maps on any surface*, In preparation **0** (2019), 1–36.
- [EO09] Bertrand Eynard and Nicolas Orantin, *Topological recursion in enumerative geometry and random matrices*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **42** (2009), no. 29, 293001.
- [Eyn11] Bertrand Eynard, *Counting surfaces*, vol. 70, Springer, 2011.
- [Fel04] Stefan Felsner, *Lattice structures from planar graphs*, Electron. J. Comb. **11** (2004), no. 1, 15.
- [FK09] Stefan Felsner and Kolja B Knauer, *Uld-lattices and δ -bonds*, Combinatorics, Probability and Computing **18** (2009), no. 5, 707–724.
- [FL18] Éric Fusy and Benjamin Lévêque, *Orientations and bijections for toroidal maps with prescribed face-degrees and essential girth*, arXiv preprint arXiv:1807.00522 (2018), 66.
- [FPS09] É. Fusy, D. Poulalhon, and G. Schaeffer, *Bijective counting of plane bipolar orientations and Schnyder woods*, European J. Combin. **30** (2009), no. 7, 1646–1658. MR 2548656
- [FS09] Philippe Flajolet and Robert Sedgewick, *Analytic combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [FSP08] Éric Fusy, Gilles Schaeffer, and Dominique Poulalhon, *Dissections, orientations, and trees with applications to optimal mesh encoding and random sampling*, ACM Transactions on Algorithms (TALG) **4** (2008), no. 2, 19.
- [Fus07] Éric Fusy, *Combinatoire des cartes planaires et applications algorithmiques*, Ph.D. thesis, Citeseer, 2007.
- [Gao91] Zhi-Cheng Gao, *The number of rooted triangular maps on a surface*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **52** (1991), no. 2, 236–249.
- [GJ04] Ian P Goulden and David M Jackson, *Combinatorial enumeration*, Courier Corporation, 2004.
- [GJ08] ———, *The kp hierarchy, branched covers, and triangulations*, Advances in Mathematics **219** (2008), no. 3, 932–951.
- [GKL15] Daniel Gonçalves, Kolja Knauer, and Benjamin Lévêque, *On the structure of schnyder woods on orientable surfaces*, arXiv preprint arXiv:1501.05475 (2015), 1–41.
- [Jon03] Jakob Jonsson, *Generalized triangulations of the n -gon*, Unpublished manuscript (2003).
- [Jon05] ———, *Generalized triangulations and diagonal-free subsets of stack polyominoes*, J. Combin. Theory Ser. A **112** (2005), no. 1, 117–142.

- [Kor14] Igor Kortchemski, *Random stable laminations of the disk*, The Annals of Probability **42** (2014), no. 2, 725–759.
- [Lep19] Mathias Lepoutre, *Blossoming bijection for higher-genus maps*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **165** (2019), 187–224.
- [LG07] Jean-François Le Gall, *The topological structure of scaling limits of large planar maps*, Inventiones mathematicae **169** (2007), no. 3, 621–670.
- [LG13] ———, *Uniqueness and universality of the brownian map*, The Annals of Probability **41** (2013), no. 4, 2880–2960.
- [Lot83] M Lothaire, *Combinatorics on words, encyclopedia of mathematics and its applications vol. 17*, 1983.
- [Lou18] Baptiste Louf, *A new family of bijections for planar maps*, arXiv preprint arXiv:1806.02362 (2018), 19.
- [LP19] Mathias Lepoutre and Vincent Pilaud, *Infinite multitriangulations of a disk and multitriangulations of a surface*, In preparation **0** (2019), 1–16.
- [LZ04] S K Lando and A K Zvonkin, *Graphs on surfaces and their applications. Appendix by Don B. Zagier.*, Springer, 2004.
- [Mie09] Grégory Miermont, *Tessellations of random maps of arbitrary genus*, Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure, vol. 42, 2009, pp. 725–781.
- [Mie13] ———, *The brownian map is the scaling limit of uniform random plane quadrangulations*, Acta mathematica **210** (2013), no. 2, 319–401.
- [Mie14] ———, *Aspects of random maps*, Saint-Flour lecture notes (2014).
- [MJJD00] Tetsuji Miwa, Masaki Jinbo, Michio Jimbo, and E Date, *Solitons: Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras*, vol. 135, Cambridge University Press, 2000.
- [MM06] Jean-François Marckert and Abdelkader Mokraddem, *Limit of normalized quadrangulations: the brownian map*, The Annals of Probability **34** (2006), no. 6, 2144–2202.
- [MS01] Michel Marcus and Gilles Schaeffer, *Une bijection simple pour les cartes orientables*, Intern report A01-R-366 || marcus_01a, 2001, Rapport interne.
- [Nak00] Tomoki Nakamigawa, *A generalization of diagonal flips in a convex polygon*, Theoret. Comput. Sci. **235** (2000), no. 2, 271–282.
- [Oko00] Andrei Okounkov, *Toda equations for hurwitz numbers*, arXiv preprint math/0004128 (2000).
- [PR14] Vincent Pilaud and Juanjo Rué, *Analytic combinatorics of chord and hyperchord diagrams with k crossings*, Adv. in Appl. Math. **57** (2014), 60–100.

- [Pro93] James Propp, *Lattice structure for orientations of graphs*, arXiv preprint math/0209005 (1993), 1–50.
- [PS06] Dominique Poulalhon and Gilles Schaeffer, *Optimal coding and sampling of triangulations*, *Algorithmica* **46** (2006), no. 3-4, 505–527.
- [PS09] Vincent Pilaud and Francisco Santos, *Multitriangulations as complexes of star polygons*, *Discrete Comput. Geom.* **41** (2009), no. 2, 284–317.
- [Sch97] Gilles Schaeffer, *Bijjective census and random generation of eulerian planar maps with prescribed vertex degrees*, *the electronic journal of combinatorics* **4** (1997), no. 1, 20.
- [Sch98] ———, *Conjugaison d’arbres et cartes combinatoires aléatoires*, Ph.D. thesis, Université Bordeaux I, 1998.
- [Sch15] ———, *Planar Maps*, *Handb. Enumer. Comb.* (M Bóna, ed.), vol. 87, CRC Press, 2015.
- [SS12] Luis Serrano and Christian Stump, *Maximal fillings of moon polyominoes, simplicial complexes, and Schubert polynomials*, *Electron. J. Combin.* **19** (2012).
- [Sti12] John Stillwell, *Classical topology and combinatorial group theory*, vol. 72, Springer Science & Business Media, 2012.
- [Tut62] William T Tutte, *A census of slicings*, *Canadian Journal of Mathematics* **14** (1962), 708–722.
- [Tut63] ———, *A census of planar maps*, *Canadian Journal of Mathematics* **15** (1963), 249–271.
- [Tut73] ———, *Chromatic sums for rooted planar triangulations: the cases $\lambda=1$ and $\lambda=2$* , *Canadian Journal of Mathematics* **25** (1973), no. 2, 426–447.
- [Tut82] ———, *Map-colourings and differential equations*, *Progress in graph theory* (Waterloo, Ont., 1982) (1982), 477–485.
- [WL72] Timothy RS Walsh and Alfred B Lehman, *Counting rooted maps by genus. i*, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **13** (1972), no. 3, 192–218.
- [Wri77] Edward M Wright, *The number of connected sparsely edged graphs*, *Journal of Graph Theory* **1** (1977), no. 4, 317–330.
- [Wri78] ———, *The number of connected sparsely edged graphs. ii. smooth graphs and blocks*, *Journal of Graph Theory* **2** (1978), no. 4, 299–305.

Titre : Bijections bourgeonnantes, multitriangulations: quid des autres surfaces?

Mots clés : combinatoire bijective, cartes combinatoires, rationalité, multitriangulations

Résumé : Les cartes combinatoires sont des dessins de graphes sur des surfaces (orientable ou non), considérés à déformation près. On propose une méthode bijective de découpage d'une carte, appelée ouverture, qui à une carte associe une autre carte, dessinée sur la même surface, possédant une unique face, et munie de décorations supplémentaires appelées bourgeons. Cette construction généralise l'ouverture décrite pour les cartes planaires [Sch97].

Plusieurs travaux datant des années 90 ont permis de démontrer par des méthodes calculatoires poussées des propriétés concernant la série génératrice des cartes d'une surface donnée. En particulier, dans le cas d'une surface orientable, cette série peut s'écrire comme une fonction rationnelle d'une certaine série d'arbres. Ceci est valable que les cartes soient énumérées simplement par arêtes [BenCan91], ou également par sommets et faces [BenCanRic93]. Un résultat similaire plus faible peut également être exprimé pour les cartes non orientables [AG00]. Ces propriétés de rationalité des séries génératrices de

cartes expriment en fait des propriétés combinatoires structurelles fortes concernant les cartes elles-mêmes, et la recherche d'une interprétation combinatoire de ces propriétés a été un moteur important du développement de la combinatoire des cartes.

L'utilisation de notre algorithme d'ouverture produit une carte qui peut à son tour être décomposée successivement en cartes plus petites munies de décorations additionnelles. Après une analyse approfondie des objets ainsi obtenus et de leur séries génératrices, ceci permet de démontrer combinatoirement les résultats de rationalité évoqués plus haut.

Une k -triangulation d'un polygone est un ensemble maximal de diagonales, sans que $k+1$ diagonales se croisent 2 à 2. On cherche à étudier les k -triangulations d'une surface quelconque, et notamment la structure des k -étoiles qui la composent (en suivant les travaux de [PilSan07]). Notre méthode consiste à se ramener par le recouvrement universel au cas de k -triangulations infinies et périodiques.

Title : Blossoming bijections, multitriangulations: what about other surfaces?

Keywords : bijective combinatorics, combinatorial maps, rationality, multitriangulations

Abstract : A combinatorial map is the embedding of a graph on a surface (orientable or not), considered up to deformation. We describe a bijective method, called opening, that allows to reduce a map into a smaller map on the same surface, with only one face, along with some additional decorations called blossoms. This construction generalizes the opening described in the case of planar maps in [Sch97].

Several papers from the 90's used advanced calculation methods to obtain properties on the generating series of maps on a given surface. In particular, in case the surface is orientable, this series can be written as a rational function of the generating series of some trees. This is valid both in case the maps are enumerated by their number of edges only [BenCan91], by both their number of vertices and faces [BenCanRic93]. A similar weaker result was also obtained in the case of non-orientable surfaces [AG00]. Actually, these rationality properties concerning the

generating series of maps imply strong structural properties concerning the maps themselves, and providing a combinatorial interpretation of these properties has been an important motivation in the development of the bijective combinatorics of maps.

The opening algorithm that we describe produces a map that can be further successively decomposed into smaller maps along with additional decorations. A deep analysis of the maps obtained this way, and their generating series, then allows to recover in a combinatorial way the rationality results described earlier.

A k -triangulation of a polygon is a maximal set of diagonals, without $k+1$ pairwise-crossing diagonals. We want to study k -triangulations of any surface, and in particular the structure of its k -stars (following [PilSan07]). Our method consist in using the universal cover to obtain infinite periodic k -triangulations, that we can more easily study.

