



HAL
open science

Convection compressible : expériences en hypergravité et modélisation anélastique quasi-géostrophique

Rémi Menaut

► **To cite this version:**

Rémi Menaut. Convection compressible : expériences en hypergravité et modélisation anélastique quasi-géostrophique. Sciences de la Terre. Université de Lyon, 2019. Français. NNT : 2019LY-SEN023 . tel-02337874

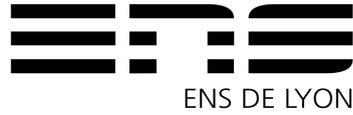
HAL Id: tel-02337874

<https://theses.hal.science/tel-02337874v1>

Submitted on 29 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Numéro National de Thèse : 2019LYSEN023

THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

opérée par

l'École Normale Supérieure de Lyon

École Doctorale N°52

Physique et Astrophysique de Lyon

Spécialité de doctorat : Géophysique

Discipline : Sciences de la Terre et de l'Univers

Soutenue publiquement le 17/07/2019, par :

Rémi MENAUT

Convection compressible : expériences en hypergravité et modélisation anélastique quasi-géostrophique

Devant le jury composé de :

Philippe Cardin	Directeur de recherche	ISTerre, Grenoble	Rapporteur
Andreas Tilgner	Professeur	Université de Göttingen	Rapporteur
Chloé Michaut	Professeure	LGL-TPE, ENS de Lyon	Examinatrice
Joël Sommeria	Directeur de recherche	LEGI, Grenoble	Examineur
Thierry Alboussière	Directeur de recherche	LGL-TPE, ENS de Lyon	Directeur de thèse

Résumé

La convection thermique dans les objets naturels de grande taille est associée à de fortes variations de la pression, hydrostatique au premier ordre. C'est le cas pour l'atmosphère de la Terre (et d'autres planètes), les planètes gazeuses géantes, les étoiles, mais aussi l'intérieur des planètes telluriques. De part l'importance des effets de compressibilité, l'approximation de Boussinesq n'y est pas vérifiée et d'autres modèles, comportant également des approximations, sont utilisés : les modèles anélastiques. Toutefois, peu d'expériences ont été réalisées pour les vérifier.

Cette thèse présente une expérience dont les paramètres ont été optimisés afin d'obtenir des effets de compressibilité importants en laboratoire. Pour ce faire, une gravité apparente forte est obtenue à l'aide d'une centrifugeuse et du xénon gazeux est utilisé, nous permettant d'atteindre un nombre de dissipation significatif. Ces expériences ont permis l'observation en laboratoire d'un gradient adiabatique de 3 K/cm et d'un exposant de 0.3 pour la loi de puissance caractérisant le transfert thermique turbulent entre le nombre de Nusselt et le nombre de Rayleigh super-adiabatique.

L'étude des fluctuations de pression et de température montrant que l'écoulement est quasi-géostrophique, dû à la forte rotation imposée par la centrifugeuse, un modèle anélastique quasi-géostrophique est développé afin de réaliser des simulations numériques bidimensionnelles relatives à l'expérience.

Abstract

In large natural objects, thermal convection is associated with large pressure differences, mainly due to hydrostatic balance. This is true in the atmosphere of the Earth (and other planets), in gas giant planets, in stars, but also in the interior of telluric planets. Boussinesq approximation is not valid owing to large compressibility effects, and other approximate models can be used to model these objects, like the anelastic approximation. However, very few experiments have been performed to assess these models.

In the present PhD thesis, an experiment is shown, with parameters designed to maximize compressibility effects in a laboratory. In this perspective, an enhanced apparent gravity is obtained using a centrifuge, and Xenon gas is used, allowing us to reach a significant dissipation parameter. In our experiments, we have observed an adiabatic gradient of 3 K/cm and the power law between the superadiabatic Rayleigh number and the Nusselt number measuring the turbulent heat transfer is characterized by an exponent 0.3.

Measurements of temperature and pressure fluctuations show that the flow is quasi-geostrophic as a result of the strong rotation rate of the centrifuge. An anelastic, quasi-geostrophic model has then been developed and solved numerically in the same configuration as the experiments.

Remerciements

Normalement, les personnes citées ici connaissent mon amour de l'écriture et des grands discours et ne s'étonneront pas du côté synthétique (mais efficace) de ces remerciements.

Je tiens tout d'abord à remercier Thierry pour m'avoir encadré et soutenu tout le long de ma thèse. Nos longs échanges et digressions autour de la mécanique des fluides resteront un bon souvenir. Je remercie les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ma thèse et d'en avoir fait un retour positif. Je remercie aussi Renaud, Stéphane pour les discussions que nous avons eues et l'aide qu'ils m'ont apportée. Je tiens aussi à remercier Marc Moulin du laboratoire de physique de l'ENS de Lyon pour son travail dans la conception de l'expérience.

Je remercie le laboratoire de Géologie de Lyon pour avoir accueilli, sans discrimination, le physicien en fuite que j'étais durant ces trois ans. Ce voyage en terre inconnue m'aura permis de découvrir de bien jolis mots tels qu'anticlinal et isohypses mais que je n'ai malheureusement pas eu l'occasion d'utiliser dans ce manuscrit.

Je remercie Yoann pour m'avoir aidé à lancer l'expérience, transmettre ses meilleures techniques de soudures et pour nos discussions souvent plus politiques que scientifiques.

Ma thèse ne se serait pas aussi bien passée sans mes co-bureaux. Florian dans un premier temps qui aura su aménager notre bureau dans des conditions optimales et pour nos discussions musicales et dubuissonnesques. Puis dans un second temps, Chloé et Victor sans qui rien n'aurait été pareil. De notre escapade en Louisiane à aujourd'hui, en passant par les gardes de Grisou et Lutèce, les moments passés avec vous me sont chers.

Je tiens également à remercier les autres thésards du labo. Et plus particulièrement la team café du R6 : Sylvain, Lucia, Cédric, Laetitia pour tout les bons moments passés ensemble au labo comme à l'extérieur, les jeudis ... et les autres jours aussi. Mais également, Adrien et son humour, Maxime et Maëlis qui aura donné la touche finale à ma thèse.

Je remercie également ma famille pour m'avoir soutenu tout au long de mon travail et de mes études en général. Enfin, je remercie surtout ma tite tête pour m'avoir soutenu, épaulé, supporté, corrigé, et aimé durant ces trois ans et sans qui tout cela n'aurait pas été possible.

Table des matières

Introduction	9
1 Convection thermique	13
1.1 Introduction générale	14
1.1.1 Équations générales de la convection	14
1.1.2 Fluide newtonien et simplification des équations	15
1.1.3 Convection de Rayleigh-Bénard	16
1.1.4 Critère de stabilité de Schwarzschild	17
1.1.5 Profil adiabatique	18
1.2 Approximation de Boussinesq	20
1.2.1 Approximation et adimensionnement	20
1.2.2 Seuil de stabilité et géométrie de la convection	21
1.2.3 Transfert thermique, efficacité de la convection	21
1.2.4 Dissipation visqueuse	23
1.3 Approximation anélastique	25
1.3.1 Équations	25
1.3.2 Adimensionnement des équations	26
1.3.3 Nombre de Rayleigh super-adiabatique et seuil de convection	27
1.3.4 Nombre de dissipation	27
1.3.5 Approximation anélastique liquide	28
1.3.6 Applications et analyses théoriques des approximations anélastiques	28
1.4 Convection thermique en rotation	29
1.4.1 Force d’inertie d’entraînement et de Coriolis	29
1.4.2 Configuration de la rotation	30
1.4.3 Géostrophie dans l’approximation anélastique	32
2 Dispositif expérimental	35
2.1 Dispositif global	36
2.1.1 Centrifugeuse	36
2.1.2 Cellule expérimentale	36
2.1.3 Capteur de température	39
2.1.4 Capteur de pression	40
2.1.5 Résistance chauffante	41

2.2	Circuit électronique et mesures	41
2.2.1	Contexte	41
2.2.2	Circuit de multiplexage	42
2.2.3	Circuit extérieur	44
2.2.4	Traitement informatique	44
2.3	Xénon	46
2.3.1	Choix du xénon et paramètres expérimentaux	46
2.3.2	Description du xénon	46
2.3.3	Profil adiabatique dans le xénon réel	48
2.4	Simulations thermiques du dispositif	48
2.4.1	Perte thermique	48
2.4.2	Capacité thermique	52
3	Résultats expérimentaux	55
3.1	Expériences réalisées	55
3.2	Observation du gradient adiabatique	58
3.3	Transfert thermique turbulent	61
3.3.1	Nombre de Rayleigh super-adiabatique et nombre de Nusselt dans l'expérience	61
3.3.2	Loi de puissance Rayleigh-Nusselt	63
3.4	Étude des fluctuations	67
3.4.1	Fluctuations de température	67
3.4.2	Fluctuations de pression	69
3.4.3	Ordres de grandeur des fluctuations de température et de pression	72
3.5	Géométrie de l'écoulement et flux thermique convectif	75
3.6	Mise en place de la convection	76
3.7	Conclusions sur l'expérience	78
4	Modèle anélastique quasi-géostrophique	81
4.1	Introduction	81
4.2	Structure des couches limites d'un écoulement en rotation	82
4.2.1	Couche d'Ekman	82
4.2.2	Couches de Stewartson	83
4.3	Approximation quasi-géostrophique anélastique et freinage linéaire d'Ekman	83
4.3.1	Préliminaires	83
4.3.2	Équation sur la quantité de mouvement	84
4.3.3	Équation de conservation de la masse	85
4.3.4	Équation de conservation de l'entropie	86
4.4	Réécriture des équations en terme de vorticité et fonction de courant	87
4.4.1	équation de conservation de la vorticité	88
4.4.2	Fonction courant	89
4.5	Effet bêta compressible	89
4.5.1	Effet bêta topographique et compressible	89

4.5.2	Ondes de Rossby	90
5	Simulation numérique de l'expérience	91
5.1	Contexte	91
5.2	Géométrie	92
5.3	Mise en équations	93
5.3.1	Profil adiabatique adimensionné	93
5.3.2	Équation anélastique liquide quasi-géostrophique	93
5.3.3	Conditions aux limites	93
5.4	Schéma de résolution	94
5.4.1	Algorithme de résolution	94
5.4.2	Formulation faible du problème	95
5.5	Résultats numériques	96
5.5.1	Simulations réalisées	96
5.5.2	Régimes observés	98
5.5.3	Diagramme Rayleigh-Nusselt	105
5.5.4	Comparaison à l'expérience	105
	Conclusions et perspectives	111
	Bibliographie	113

Introduction

La convection thermique est avec la conduction et le rayonnement thermique l'un des trois processus physiques permettant le transfert de chaleur au sein d'un fluide. Elle joue, à ce titre, un rôle important dans de nombreux phénomènes naturels. Dans le cas de la Terre interne, la sismologie a établi l'existence d'une structure interne en couches composées d'un manteau silicaté et d'un noyau ferreux. Le noyau est lui-même divisé en une partie externe de fer liquide et une partie interne de fer solide appelée la graine car située au centre de la planète (figure 1). Chacune de ces couches est en convection thermique. La convection du manteau se manifeste en surface par la tectonique des plaques alors que celle du noyau externe permet la création du champ magnétique terrestre par l'effet dynamo. La convection thermique en est le moteur principal même si d'autres phénomènes comme la convection chimique et le forçage mécanique par la précession entrent en jeu. L'atmosphère terrestre et a fortiori les planètes géantes gazeuses sont aussi de bons exemples de systèmes naturels en convection thermique. Un autre cas notable est celui des étoiles qui, en terme de transfert thermique, possèdent une partie convective et une partie radiative dont la structure dépend de la masse de l'étoile. Les étoiles de faible masse sont entièrement convectives. Les étoiles intermédiaires sont radiatives en leurs centres et convectives sur leurs parties externes. Alors que les étoiles massives ont la configuration inverse : convective au centre et radiative en surface (figure 2). Tous ces exemples ont la particularité d'être de grande taille et possèdent de fortes variations de pression, hydrostatique au premier ordre. Ces variations font que les effets de compressibilité ne sont pas négligeables. On parle alors de convection compressible. Alors que les premières études faites sur la convection thermique s'intéressent au cas incompressible et utilisent l'approximation de Boussinesq, l'étude de la convection compressible nécessite l'utilisation d'une autre approximation : l'approximation anélastique. Cette approximation très utilisée théoriquement et numériquement n'a jamais été étudiée expérimentalement. En effet, la taille réduite des expériences en laboratoire rend difficile l'observation d'effets de compressibilité marqués. Cette thèse présente une expérience dont les paramètres expérimentaux ont spécialement été optimisés dans le but d'obtenir un régime où les effets de compressibilité sont importants. Pour ce faire, une gravité apparente forte est obtenue dans le rotor d'une centrifugeuse et un gaz, en particulier le xénon, est utilisé car plus facilement compressible. A ce titre, cette thèse fait directement suite à celle de Huguet (2014) qui avait réalisé la première version de cette expérience.

Ce manuscrit comporte trois parties. La première, composée du chapitre 1, présente la physique générale de la convection thermique. Les équations la décrivant y sont établies puis sont introduits l'approximation de Boussinesq et les approximations anélastique et anélastique liquide. Elle se conclut sur une première description des effets de la rotation sur la convection. La seconde partie, composée des chapitres 2 et 3, présente l'expérience de convection du xénon en hypergravité réalisée. Les résul-

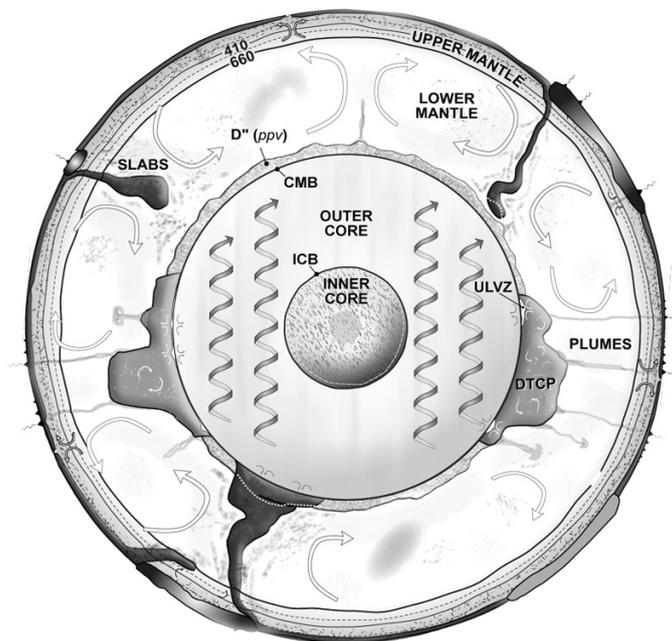


FIGURE 1 – D'après Garnero et al. (2005) : schéma de la structure interne de la Terre où l'on distingue le manteau (mantle), le noyau externe (outer core) et le noyau interne (inner core).

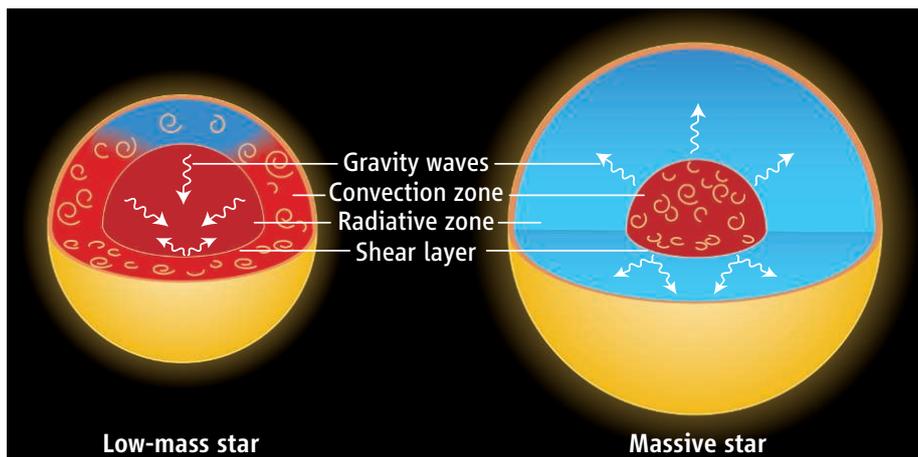


FIGURE 2 – D'après Charbonnel and Talon (2007) : schéma des zones radiatives et convectives dans une étoile en fonction de sa masse. Les zones en rouges sont les zones de rotation rapide et les zones en bleus celles de rotation lente.

tats obtenus, parmi lesquels l'observation d'un gradient adiabatique, la loi de puissance du transfert thermique et l'étude des fluctuations de température et de pression, sont ensuite discutées. La dernière partie, composée des chapitres 4 et 5, revient sur les effets de la rotation, l'effet centrifuge et l'effet Coriolis. À partir de l'hypothèse d'une forte rotation, un modèle anélastique quasi-géostrophique est développé et permet la réalisation de simulations numériques de l'expérience afin de mieux comprendre l'écoulement y prenant place.

1

Convection thermique

Sommaire

1.1	Introduction générale	14
1.1.1	Équations générales de la convection	14
1.1.1.1	Équations mécaniques	14
1.1.1.2	Équations sur l'énergie et l'entropie	15
1.1.2	Fluide newtonien et simplification des équations	15
1.1.2.1	Fluide newtonien	15
1.1.2.2	Chauffage interne et conduction thermique	16
1.1.2.3	Équations retenues	16
1.1.3	Convection de Rayleigh-Bénard	16
1.1.4	Critère de stabilité de Schwarzschild	17
1.1.5	Profil adiabatique	18
1.1.5.1	Définitions	18
1.1.5.2	Observation du gradient adiabatique	18
1.1.5.3	Profil adiabatique d'un gaz parfait en gravité linéaire	19
1.2	Approximation de Boussinesq	20
1.2.1	Approximation et adimensionnement	20
1.2.2	Seuil de stabilité et géométrie de la convection	21
1.2.3	Transfert thermique, efficacité de la convection	21
1.2.4	Dissipation visqueuse	23
1.3	Approximation anélastique	25
1.3.1	Équations	25
1.3.1.1	Équation de conservation de la masse	25
1.3.1.2	Équation sur la quantité de mouvement	25
1.3.1.3	Équation sur l'entropie	26
1.3.2	Adimensionnement des équations	26
1.3.3	Nombre de Rayleigh super-adiabatique et seuil de convection	27
1.3.4	Nombre de dissipation	27
1.3.5	Approximation anélastique liquide	28

1.3.6	Applications et analyses théoriques des approximations anélastiques	28
1.4	Convection thermique en rotation	29
1.4.1	Force d'inertie d'entraînement et de Coriolis	29
1.4.2	Configuration de la rotation	30
1.4.2.1	Configuration polaire	30
1.4.2.2	Configuration équatoriale	30
1.4.3	Géostrophie dans l'approximation anélastique	32

Dans ce chapitre, nous présentons la physique de la convection. Nous commençons par établir les équations générales de la convection pour ensuite nous intéresser à l'approximation de Boussinesq et à l'approximation anélastique. Enfin la dernière partie traite des fluide en rotation et de l'influence de celle-ci sur la convection.

1.1 Introduction générale

1.1.1 Équations générales de la convection

Nous étudions le cas d'un fluide convectant au sein d'un champ de gravité \mathbf{g} sans autre force extérieure. La vitesse, la masse volumique, la température et la pression du fluide sont respectivement notées \mathbf{u} , ρ , T , et p .

1.1.1.1 Équations mécaniques

Les premières équations intervenant naturellement sont l'équation de conservation de la masse et l'équation de Navier-Stokes (conservation de la quantité de mouvement)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}, \quad (1.2)$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ est la dérivée particulaire et $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ le tenseur des contraintes visqueuses.

On peut déduire l'équation d'évolution de l'énergie cinétique massique $e_c = \frac{1}{2} \mathbf{u}^2$ de l'équation de Navier-Stokes en la multipliant scalairement par \mathbf{u} .

$$\rho \frac{De_c}{Dt} = \frac{\rho}{2} \frac{D\mathbf{u}^2}{Dt} = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} + \nabla \cdot (-p\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) + p \nabla \cdot \mathbf{u} - \underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}} : \underline{\boldsymbol{\tau}}. \quad (1.3)$$

On a ici utilisé les identités vectorielles $\mathbf{u} \cdot \nabla p = \nabla \cdot (p\mathbf{u}) - p \nabla \cdot \mathbf{u}$ et $\mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) = \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) - \underline{\mathbf{G}} : \underline{\boldsymbol{\tau}}$ avec $\underline{\mathbf{G}}$ le tenseur des gradients de vitesse défini par $G_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$. Le terme $\underline{\mathbf{G}} : \underline{\boldsymbol{\tau}}$ correspond à l'énergie dissipée par la viscosité dans le fluide. Puisque le tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ est symétrique, seule la partie symétrique de $\underline{\mathbf{G}}$, notée $\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}$ avec

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (1.4)$$

intervient dans ce terme. Ainsi dans la suite, nous écrirons plutôt la dissipation visqueuse sous la forme $\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}} : \underline{\boldsymbol{\tau}}$.

1.1.1.2 Équations sur l'énergie et l'entropie

En introduisant l'énergie interne massique e du fluide, l'écriture locale du bilan de l'énergie massique ($e + e_c$) du fluide est

$$\rho \frac{D(e + e_c)}{Dt} = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} + \nabla \cdot (-p\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) + \sigma_q - \nabla \cdot \Phi_q, \quad (1.5)$$

où σ_q est la puissance volumique des sources de chaleur locales et Φ_q est la densité surfacique de flux de chaleur. Les quatre termes du membre de droite représentent respectivement la puissance des forces volumiques, la puissances des forces de contraintes, la puissance des sources de chaleur locales et le flux de chaleur.

L'équation sur l'énergie interne e s'obtient alors en combinant les équations sur l'énergie totale et l'énergie cinétique (1.3)

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \underline{\boldsymbol{\tau}} + \sigma_q - \nabla \cdot \Phi_q. \quad (1.6)$$

Enfin, on en déduit l'équation sur l'entropie massique s à l'aide de l'identité thermodynamique $de = Tds + p \frac{d\rho}{\rho^2}$ et de l'équation de conservation de la masse (1.1)

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \underline{\boldsymbol{\tau}} + \sigma_q - \nabla \cdot \Phi_q. \quad (1.7)$$

1.1.2 Fluide newtonien et simplification des équations

1.1.2.1 Fluide newtonien

La convection thermique dépend naturellement de la rhéologie du fluide étudié. En particulier en géophysique où les systèmes peuvent être de nature très différentes : hydrogène et hélium gazeux pour une étoile ou une planète gazeuse, eau liquide pour les océans, silicates pour le manteau, fer liquide pour le noyau. Le choix de rhéologie le plus répandu est celui d'une rhéologie newtonienne. Ainsi dans toute la suite, nous étudierons uniquement cette dernière. En introduisant η la viscosité dynamique, le tenseur des contraintes visqueuses prend la forme

$$\tau_{ij} = 2\eta \left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{kk} \right). \quad (1.8)$$

Nous avons, de plus, fait ici l'hypothèse de Stokes en négligeant la viscosité de volume (Stokes, 1880).

La rhéologie newtonienne impose que la viscosité dynamique η soit indépendante des gradients de vitesses. Cependant, elle peut a priori dépendre des autres variables d'état du fluide comme la pression ou la température. Les modèles géophysiques de convection mantellique de Arnould et al. (2018) utilisent par exemple une viscosité variant fortement avec la température. Cela leur permet d'obtenir une dynamique similaire à la tectonique des plaques où une couche rigide se déplace lentement en surface. Pour notre part, nous considérerons seulement le cas d'une viscosité constante et uniforme (nous discuterons de ce choix dans la partie section 1.1.5.3). Ce choix permet d'obtenir des expressions plus facilement manipulables pour les forces de viscosité

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = \eta \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} \right), \quad (1.9)$$

et la dissipation visqueuse

$$\underline{\dot{\epsilon}} : \underline{\tau} = \frac{\eta}{2} \left[(2\dot{\epsilon}_{ij})^2 - \frac{4}{3}\dot{\epsilon}_{kk}^2 \right] = \frac{\eta}{2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{4}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \right]. \quad (1.10)$$

Physiquement, la dissipation visqueuse doit être positive, ce qui n'est pas évident avec cette dernière expression. Toutefois, un réarrangement adéquat des termes permet de lever ce problème en aboutissant à l'expression clairement positive (Landau and Lifchitz, 1989)

$$\underline{\dot{\epsilon}} : \underline{\tau} = \frac{\eta}{2} \left(2\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\dot{\epsilon}_{kk} \right)^2 > 0. \quad (1.11)$$

1.1.2.2 Chauffage interne et conduction thermique

Le terme source de chauffage interne σ_q , présent dans les équations énergétique et entropique, peut représenter plusieurs phénomènes physiques. Nous pouvons par exemple citer le chauffage induit par la radioactivité dans le manteau terrestre (Labrosse et al., 1997) ou le chauffage par effet Joule dans le cas de la magnétohydrodynamique (Anufriev et al., 2005). Toutefois, ces effets n'étant pas le cœur de notre étude, nous allons le supposer nul dans la suite.

On considère la densité surfacique de flux de chaleur uniquement due à la conduction thermique suivant la loi de Fourier $\Phi_q = -k\nabla T$. La conductivité thermique k est supposée, comme la viscosité, uniforme et constante. Ainsi, le terme de flux de chaleur dans les équations énergétique et entropique se réécrit

$$-\nabla \cdot \Phi_q = k\nabla^2 T. \quad (1.12)$$

1.1.2.3 Équations retenues

Avec ces hypothèses, les équations modélisant la convection thermique sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \end{array} \right. \quad (1.13a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \eta \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} \right), \end{array} \right. \quad (1.13b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho T \frac{Ds}{Dt} = \underline{\dot{\epsilon}} : \underline{\tau} + k\nabla^2 T, \end{array} \right. \quad (1.13c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T = T(p, \rho), \end{array} \right. \quad (1.13d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s = s(T, p). \end{array} \right. \quad (1.13e)$$

Pour fermer le système, nous devons y joindre l'équation d'état du fluide (1.13d) et celle donnant l'entropie en fonction des variables d'état (1.13e).

1.1.3 Convection de Rayleigh-Bénard

Dans toute la suite, nous étudierons la convection dans une configuration de type Rayleigh-Bénard où le fluide est compris entre deux plaques horizontales de températures différentes. La gravité est suivant l'axe (Ox) . Elle est uniforme horizontalement mais peut a priori varier verticalement : $\mathbf{g} = g(x)\mathbf{e}_x$. Les plaques sont distantes d'une longueur L . La plaque inférieure est maintenue à la température $T_0 + \frac{\Delta T}{2}$ et la plaque supérieure à la température $T_0 - \frac{\Delta T}{2}$.

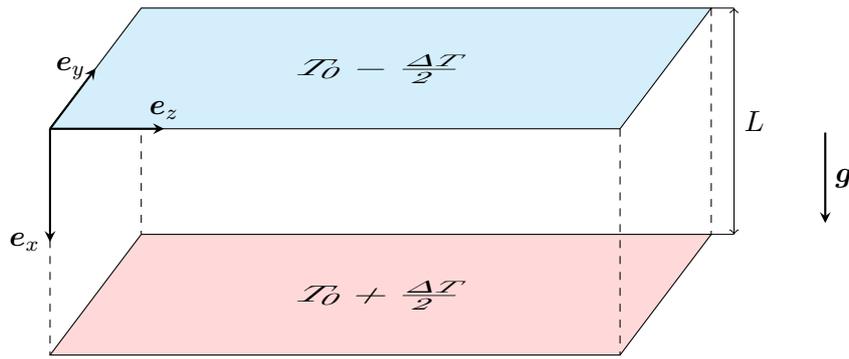
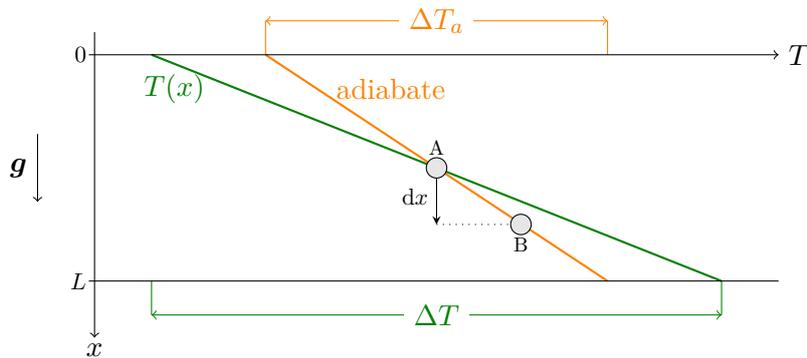


FIGURE 1.1 – Schéma de la configuration Rayleigh-Bénard où le fluide est situé entre deux plaques.

FIGURE 1.2 – Schéma illustrant le critère de stabilité de Schwarzschild dans le cas $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_s < \frac{\partial T}{\partial x}$. La courbe verte est le profil de température dans le fluide à l'équilibre. La courbe orange est l'adiabate. Une particule de fluide initialement en A subit un petit déplacement dx . Elle s'échauffe adiabatiquement, et se retrouve en B. Elle est donc plus froide que le reste du fluide l'entourant.

1.1.4 Critère de stabilité de Schwarzschild

La stabilité du fluide dans la configuration de Rayleigh-Bénard peut être étudiée qualitativement à partir d'un raisonnement simple fait par Schwarzschild (1906). Supposons qu'une particule de fluide initialement à l'équilibre subisse un petit déplacement $dx e_x$ comme représenté sur la figure 1.2. Si ce déplacement est rapide, la particule de fluide subit une transformation adiabatique. Sa température varie d'une quantité $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_s dx$ (courbe orange) alors que la température du fluide l'entourant a varié de $\frac{\partial T}{\partial x} dx$ (courbe verte). Dans le cas où la particule de fluide se rapproche de la plaque inférieure $dx > 0$ (le raisonnement est similaire et aboutit aux mêmes conclusions dans le cas $dx < 0$), si $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_s > \frac{\partial T}{\partial x}$ par rapport au fluide l'entourant, la température de la particule est plus élevée et sa densité plus faible (nous supposons $\alpha > 0$). Elle retournera donc vers les x plus faibles par flottabilité. Le système est donc stable. Inversement, si $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_s < \frac{\partial T}{\partial x}$ (cas de la figure 1.2) la particule a une densité plus faible que le fluide l'entourant et continuera donc de se rapprocher de la plaque inférieure. Le système est instable. Cette étude de stabilité montre que la convection n'est possible que si le gradient de température suivant x est super-adiabatique, *i.e.* supérieur au gradient adiabatique de température $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_s$. Néanmoins, cette condition est nécessaire mais pas suffisante car les effets de viscosité, stabilisant le système, n'ont pas été pris en compte.

1.1.5 Profil adiabatique

1.1.5.1 Définitions

Un profil important lors de l'étude de la convection est le profil adiabatique. En effet, lorsque la convection est assez rigoureuse, on peut considérer que l'advection des particules de fluide est rapide si bien que leur évolution se fait sans échange de chaleur. Elles subissent donc une transformation adiabatique. D'un point de vue macroscopique, cela revient à dire que la convection homogénéise l'entropie. Supposons de plus que le gradient de pression est hydrostatique. En indiquant les quantités liées à ce profil par la lettre a , les équations le définissant sont

$$\nabla s_a = \mathbf{0}, \quad (1.14)$$

$$\nabla p_a = \rho_a \mathbf{g}. \quad (1.15)$$

En utilisant la relation de Gibbs

$$T ds = c_p dT + \frac{\alpha T}{\rho} dp, \quad (1.16)$$

nous en déduisons l'équation sur le gradient adiabatique de température

$$\nabla T_a = \frac{\alpha_a T_a}{c_{p,a}} \mathbf{g} = \alpha_{s,a} \mathbf{g}, \quad (1.17)$$

où on introduit le coefficient d'expansion entropique isobare α_s défini par

$$\alpha_s = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p = \frac{\alpha T}{c_p}. \quad (1.18)$$

Les hypothèses d'un profil isentropique et hydrostatique amènent donc à l'existence d'un gradient de température dans le milieu, comme l'avait suggéré Carnot (1824).

De surcroît, nous verrons par la suite au chapitre 4, qu'il est intéressant d'introduire la variation relative de masse volumique du profil adiabatique

$$\beta_a = \frac{1}{\rho_a} \nabla \rho_a. \quad (1.19)$$

Avec notre choix de gravité de la forme $\mathbf{g} = g(x)\mathbf{e}_x$, il est important de noter que les gradients des grandeurs liées au profil adiabatique sont alignés avec la gravité et donc que toutes ces grandeurs (T_a , p_a , ρ_a , α_a , $c_{p,a}$...) ne dépendent que de x .

1.1.5.2 Observation du gradient adiabatique

Le gradient adiabatique de température a été observé par Humphreys (1909) dans l'atmosphère terrestre où il est d'environ 10 K/km à partir de mesures utilisant des ballons sondes. Dans les expériences en laboratoire, il est la plupart du temps trop faible pour être observé et, à notre connaissance, aucune expérience n'a cherché à l'étudier en tant que tel. Nous pouvons toutefois citer l'expérience de convection Rayleigh-Bénard utilisant de l'hexafluorure de soufre SF_6 proche du point critique de Ashkenazi and Steinberg (1999) dans laquelle le gradient adiabatique de température est pris en compte pour corriger la différence de température mesurée dans l'expérience. Il s'agit d'une petite correction de 90 mK/m (correspondant à une différence de 9,5 mK sur la cellule de 105 mm de long) pouvant être interprétée comme une observation, indirecte, du gradient adiabatique.

1.1.5.3 Profil adiabatique d'un gaz parfait en gravité linéaire

Les expressions des quantités liées au profil adiabatique peuvent être déterminées analytiquement pour un gaz parfait d'équation d'état

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c_p \rho T = \frac{\gamma - 1}{\alpha_s \gamma} \rho T \quad (1.20)$$

où $\gamma = c_p/c_v$ est le rapport des capacités thermiques et pour lequel $\alpha T = 1$ et $\alpha_s = 1/c_p$ est constant. Dans le cas d'une gravité linéaire de la forme $\mathbf{g} = x\Omega^2 \mathbf{e}_x$ (correspondante à celle créée par centrifugation avec une vitesse de rotation Ω uniforme comme étudié par la suite), la résolution de l'équation sur le gradient adiabatique de température (1.17) donne

$$T_a = T_0 + \frac{\alpha_s \Omega^2}{2} (x^2 - x_0^2), \quad (1.21)$$

dont les expressions de pression et masse volumique sont déduites à partir de l'équation d'état (1.20) et de l'hydrostatique (1.15),

$$p_a = p_0 \left(1 + \frac{\alpha_s \Omega^2}{2T_0} (x^2 - x_0^2) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (1.22)$$

$$\rho_a = \rho_0 \left(1 + \frac{\alpha_s \Omega^2}{2T_0} (x^2 - x_0^2) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (1.23)$$

où T_0 , p_0 , ρ_0 , sont la température, la pression et la masse volumique du profil en un point de référence x_0 .

Avec un gaz parfait, la prise du gradient de l'équation d'état (1.20) permet de montrer que la quantité β_a introduite à l'équation (1.19) est proportionnelle à la gravité (quelle qu'elle soit) et inversement proportionnelle à la température adiabatique :

$$\beta_a = \frac{\alpha_s}{(\gamma - 1)T_a} \mathbf{g} \quad (1.24)$$

Dans le cas de la gravité linéaire, en notant $\beta_a = \beta_a \mathbf{e}_x$, nous obtenons

$$\beta_a = \frac{\alpha_s x \Omega^2}{(\gamma - 1)T_0} \left(1 + \frac{\alpha_s \Omega^2}{2T_0} (x^2 - x_0^2) \right)^{-1}. \quad (1.25)$$

Lors de l'établissement des équations générales de la convection à la partie section 1.1.2.1, nous avons fait l'hypothèse que la viscosité dynamique η était constante. L'obtention des expressions du profil adiabatique dans le cas du gaz parfait amène un nouvel éclairage sur cette hypothèse. En effet, en utilisant le modèle théorique du gaz de sphère dur, il est établi que la viscosité d'un gaz parfait dépend de la racine carré de la température $\eta \propto T^{\frac{1}{2}}$ (Chapman et al., 1970). La variation de T_a sur la hauteur de la cellule induit donc une variation de la viscosité. Toutefois, la variation relative $\Delta T_a/T_a$ est souvent assez petite pour que l'erreur induite par la prise d'une viscosité constante soit réduite. Puisque la convection compressible implique intrinsèquement une variation de la densité du fluide, la question est donc plutôt de savoir dans quel cas l'erreur commise est la plus faible : celui d'une viscosité dynamique η ou d'une viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$ constante. À partir des équation (1.21) et (1.23), nous avons $\rho_a \propto T_a^{\frac{1}{\gamma-1}}$ qui implique $\nu = \eta/\rho_a \propto T_a^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma-1}}$. Pour un gaz parfait monoatomique

($\gamma = 5/3$), nous obtenons $\nu \propto T_a^{-1}$ et pour un gaz parfait diatomique ($\gamma = 7/5$) : $\nu \propto T_a^{-2}$. La variation relative de la viscosité cinématique ν avec T_a est donc plus forte que la variation relative de la viscosité dynamique η , ce qui renforce a posteriori notre hypothèse. Un raisonnement en tout point similaire peut aussi être fait avec la conductivité thermique k du fluide, elle aussi dépendante de la racine carré de la température, et la diffusivité thermique $\kappa = k/(c_p\rho)$.

1.2 Approximation de Boussinesq

1.2.1 Approximation et adimensionnement

Les premières analyses théoriques de la convection a été fait indépendamment par Oberbeck (1879) et Boussinesq (1903). Dans son étude, Boussinesq se place dans le cas d'une gravité constante et fait l'hypothèse que la masse volumique du fluide est constante, excepté dans le terme de flottabilité. Il néglige de plus la dissipation visqueuse. Introduisons \tilde{T} les écarts à la température et à la pression moyenne

$$\tilde{T} = T - T_0, \quad \tilde{p} = p - p_0 \quad (1.26)$$

Si l'on considère que la masse volumique dépend essentiellement de la température

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha\tilde{T}), \quad (1.27)$$

les équations de la convection (1.13a) se simplifient en

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \rho_0 \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla\tilde{p} - \rho_0\alpha\tilde{T}\mathbf{g} + \eta\nabla^2\mathbf{u}, \\ \rho_0 c_p \frac{D\tilde{T}}{Dt} = k\nabla^2\tilde{T}. \end{array} \right. \quad (1.28a)$$

$$\rho_0 \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla\tilde{p} - \rho_0\alpha\tilde{T}\mathbf{g} + \eta\nabla^2\mathbf{u}, \quad (1.28b)$$

$$\rho_0 c_p \frac{D\tilde{T}}{Dt} = k\nabla^2\tilde{T}. \quad (1.28c)$$

On peut écrire ces équations sous forme adimensionnelle. On choisit L comme échelle de longueur et le temps diffusif $\rho_0 c_p L^2/k$ comme échelle de temps. L'échelle de vitesse correspondante est alors $k/(\rho_0 c_p L)$. Enfin, on choisit ΔT comme échelle des écarts de température et $k^2/(\rho_0 c_p^2 L^2)$ comme échelle des écarts de pressions. Ces choix aboutissent au système

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \text{Pr}^{-1} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\text{Pr}^{-1} \nabla\tilde{p} - \text{Ra}\tilde{T}\mathbf{e}_x + \nabla^2\mathbf{u}, \\ \frac{D\tilde{T}}{Dt} = \nabla^2\tilde{T}. \end{array} \right. \quad (1.29a)$$

$$\text{Pr}^{-1} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\text{Pr}^{-1} \nabla\tilde{p} - \text{Ra}\tilde{T}\mathbf{e}_x + \nabla^2\mathbf{u}, \quad (1.29b)$$

$$\frac{D\tilde{T}}{Dt} = \nabla^2\tilde{T}. \quad (1.29c)$$

Deux nombres adimensionnés sont introduits ici. Le premier est le nombre de Prandtl

$$\text{Pr} = \frac{\eta c_p}{k}. \quad (1.30)$$

Il s'agit du rapport entre la viscosité cinématique η/ρ_0 et la diffusivité thermique $k/(\rho_0 c_p)$. Un nombre de Prandtl élevé signifie que la diffusion de la quantité de mouvement domine sur la diffusion thermique.

A l'inverse un Prandtl faible signifie que la diffusion thermique domine. Le profil de vitesse est alors peu influencé par les fluctuations de température.

Le second nombre est le nombre de Rayleigh

$$\text{Ra} = \frac{\rho_0^2 c_p \alpha g L^3 \Delta T}{\eta k}, \quad (1.31)$$

qui mesure l'importance du forçage créé par la différence de température imposée ΔT au niveau des plaques.

1.2.2 Seuil de stabilité et géométrie de la convection

L'étude de stabilité de la convection de Rayleigh-Bénard dans l'approximation de Boussinesq a été faite par Rayleigh. Il démontre l'existence d'une valeur critique du nombre de Rayleigh Ra_c au-dessus de laquelle le système devient instable. Cette valeur critique dépend des conditions aux limites. Si l'on considère que le glissement sur les parois inférieure et supérieure est possible, Rayleigh (1916) trouve par l'analyse de stabilité linéaire des équations, une valeur analytique du nombre de Rayleigh critique $\text{Ra}_c = 27\pi^4/4 \simeq 657.5$. En revanche, dans le cas où il n'y a pas de glissement sur les parois supérieure et inférieure, *i.e.* que toutes les composantes de vitesses s'annulent sur celles-ci, le nombre de Rayleigh critique est plus élevé. Low (1929) résout numériquement ce problème et obtient la valeur

$$\text{Ra}_c \simeq 1707.761. \quad (1.32)$$

Pour un nombre de Rayleigh faiblement surcritique, l'écoulement se déstabilise sous forme de structures stables pouvant prendre la forme de rouleaux contrarotatifs (figure 1.3), de carrés ou d'hexagones. Les domaines de stabilité de ces structures dépendent fortement du nombre de Prandtl Pr . Les régimes de stabilités des rouleaux de convection ont été étudiés analytiquement par Busse and Clever (1979). Expérimentalement, Willis et al. (1972) ont montré que le rayon des rouleaux augmente quand le nombre de Rayleigh croît. Ils ont aussi mis en évidence l'existence d'un phénomène d'hystérésis dans le rayon des rouleaux suivant que le nombre de Rayleigh augmente ou diminue. Enfin, lorsque le nombre de Rayleigh augmente et devient fortement super-critique, les structures se déstabilisent et l'écoulement devient de plus en plus turbulent avec la création de panaches comme illustré sur la figure 1.3.

1.2.3 Transfert thermique, efficacité de la convection

Il est intéressant d'étudier l'efficacité du transport de chaleur fait par la convection. Pour ce faire, on introduit un nouveau nombre adimensionnel : le nombre de Nusselt, définit comme le rapport entre le flux total transmis et le flux conductif. Le nombre de Nusselt est une valeur de sortie du système. Il est donc intéressant de chercher sa dépendance en fonction des valeurs d'entrées que sont les nombres de Prandtl et de Rayleigh. Beaucoup d'études théoriques et expérimentales ont été faites pour évaluer cette relation. Grossmann and Lohse (2000) propose un modèle séparant le plan (Ra, Pr) en plusieurs zones chacune ayant une loi de puissance propre.

Expérimentalement, il est plus simple d'agir sur le nombre de Rayleigh que sur le nombre de Prandtl dépendant de propriétés intrinsèques du fluide. C'est pourquoi souvent, seule la dépendance

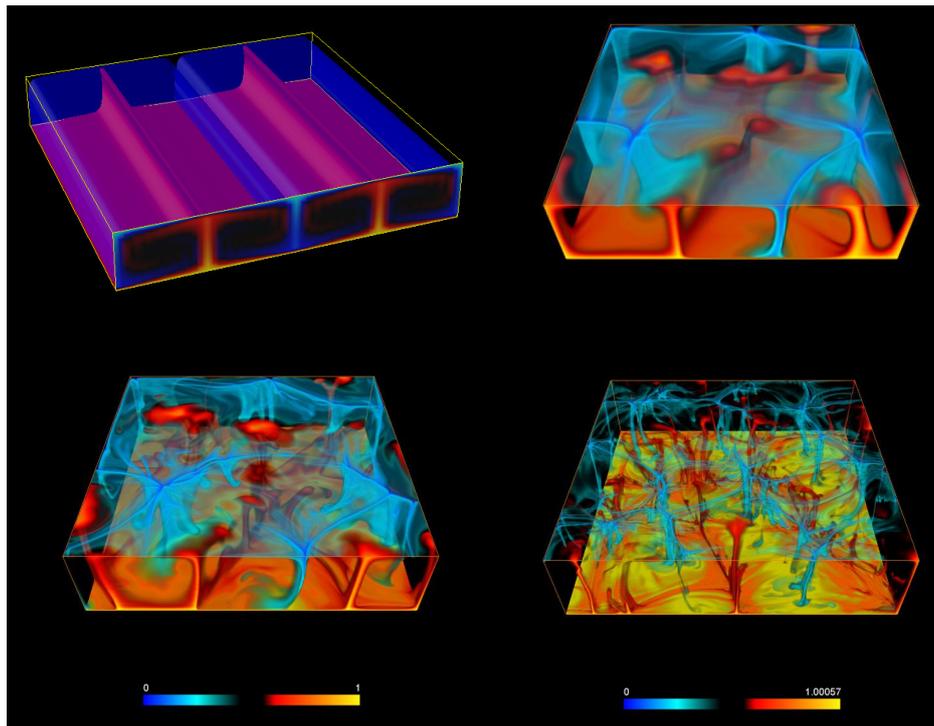


FIGURE 1.3 – D’après Ricard (2010) : Figures de convection pour des nombres de Rayleigh de 10^5 , 10^6 , 10^7 , 10^8 dans l’approximation de Boussinesq issues de simulation numérique réalisée par Fabien Dubuffet (Laboratoire de géologie de Lyon). L’échelle de couleur va de 0 (parois supérieure) à 1 (parois inférieure). L’augmentation du nombre de Rayleigh implique un amincissement de l’épaisseur des couches limites et de la largeur des panaches. La convection est stationnaire uniquement pour le plus faible nombre de Rayleigh (en haut à gauche) pour lequel le ration d’aspect des rouleaux est d’environ $\sqrt{2}$, comme prévu par l’analyse marginale de stabilité. Pour les nombres de Rayleigh supérieurs, les figures de convection dépendent fortement du temps.

du nombre Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh est étudiée. Nous pouvons distinguer 4 régimes principaux dans la relation Rayleigh-Nusselt :

- Pour $Ra < Ra_c$, le régime est purement conductif, et par définition $Nu = 1$.
- Pour $Ra \gtrsim Ra_c$, le régime est faiblement non-linéaire. Nous avons alors $Nu - 1 \propto Ra - Ra_c$ (Rieutord, 2014).
- Pour $Ra \gg Ra_c$, le régime est non-linéaire. Nous avons $Nu \propto Ra^\lambda$ avec un exposant $\lambda \simeq 0.3$.
- Pour $Ra \rightarrow +\infty$, il s'agit du régime ultime de convection où la dissipation atteint sa borne théorique maximale. Cela correspondrait à une loi de puissance $Nu \propto Ra^{1/2}$. Ce régime, prévu théoriquement par Kraichnan (1962), a été observé dans de l'hélium cryogénique (Chavanne et al., 1997) et en présence de chauffage interne radiatif (Lepot et al., 2018).

Dans la suite, nous nous concentrerons sur le régime non-linéaire $Ra \gg Ra_c$. Concernant l'exposant λ de la relation Rayleigh-Nusselt, un modèle simple sur la stabilité de la couche limite thermique permet d'obtenir une valeur théorique de $\lambda = 1/3$: si les couches limites thermiques sont stables, leur épaisseur δ vérifie

$$Ra_c \sim \frac{\rho_{eq}^2 c_p \alpha g \delta^3 \Delta T}{\eta k}, \quad (1.33)$$

permettant d'exprimer δ en fonction du nombre de Rayleigh

$$\delta \sim L \left(\frac{Ra_c}{Ra} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (1.34)$$

Or au niveau de ces couches limites, le flux thermique doit s'y propager par convection. Ainsi, le flux total est proportionnel à $\Delta T/\delta$ alors que le flux sans convection est proportionnel à $\Delta T/L$. Le nombre de Nusselt est alors proportionnel à L/δ , ce qui donne

$$Nu \sim \frac{L}{\delta} \sim \left(\frac{Ra}{Ra_c} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (1.35)$$

Expérimentalement, la valeur trouvée est légèrement plus faible. Pour expliquer cette différence, Castaing et al. (1989) propose un second modèle plus raffiné donnant un exposant $\lambda = \frac{2}{7}$ plus proche des observations.

1.2.4 Dissipation visqueuse

Le terme de dissipation visqueuse dans l'équation thermique est négligé dans l'approximation de Boussinesq. Il est toutefois possible de l'exprimer en fonction du flux convectif. L'équation sur la température peut s'écrire sous forme conservative

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (-\rho_0 c_p T \mathbf{u} + k \nabla T) \quad (1.36)$$

Introduisons pour une quantité A sa moyenne temporelle sur un grand temps \bar{A} et ses moyennes spatiales suivant chaque direction :

$$\langle A \rangle_x = \frac{1}{L} \int_0^L A dx, \quad \langle A \rangle_y = \frac{1}{L_y} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} A dy, \quad \langle A \rangle_z = \frac{1}{L_z} \int_{-L_z/2}^{L_z/2} A dz, \quad (1.37)$$

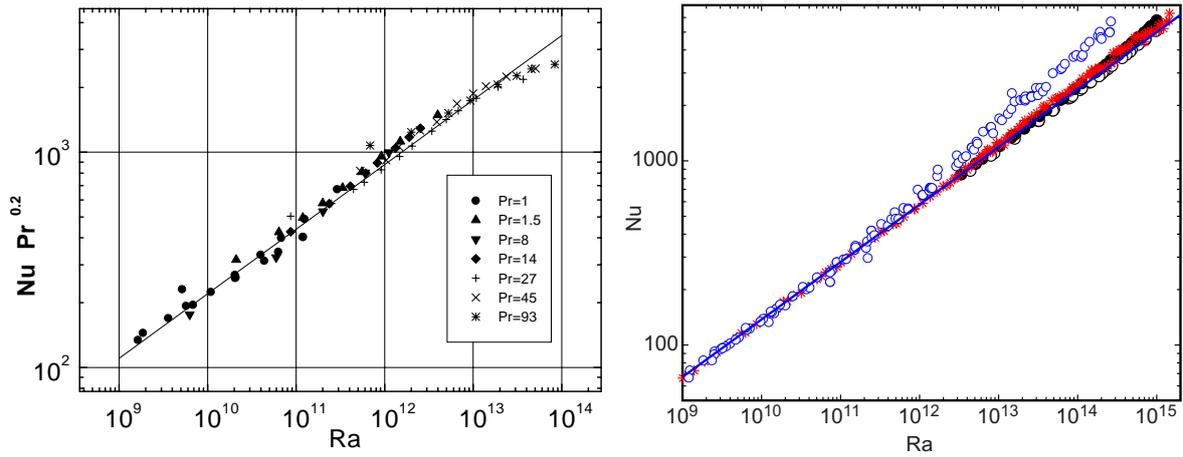


FIGURE 1.4 – (gauche) D’après Ashkenazi and Steinberg (1999) : Diagramme Ra-Nu obtenu par la convection de l’hexafluorure de soufre (SF_6) proche du point critique (ce qui permet de faire varier le nombre de Prandtl) dont la loi $\text{Nu} = 0.22\text{Ra}^{0.3 \pm 0.03}\text{Pr}^{-0.2 \pm 0.04}$ (ligne noire) est extraite. (droite) D’après Ahlers et al. (2012) : Diagramme Ra-Nu obtenu avec du SF_6 (cercles noirs : Ahlers et al. (2012)), et de l’hélium cryogénique (étoiles rouges : Niemela et al. (2000a,b), Niemela and R. Sreenivasan (2006), et cercles bleus : Chavanne et al. (1997, 2001)). La ligne bleue correspond à la loi $\text{Nu} = 0.1044\text{Ra}^{0.312}$.

où L_y et L_z sont les dimensions de la cellule de Rayleigh-Bénard suivant y et z . Afin d’alléger les notations, nous noterons les moyennes multiples par des chevrons multi-indicés : $\langle\langle A \rangle_x \rangle_y = \langle A \rangle_{x,y}$.

En moyennant l’équation (1.36) sur un grand temps, le membre de gauche disparaît. L’intégration sur les dimensions transverses y et z donne en supposant des conditions sur les bords latéraux périodiques ou de non glissement sans transfert thermique :

$$0 = \left\langle \nabla \cdot \left(-\rho_0 c_p \overline{T \mathbf{u}} + k \nabla \overline{T} \right) \right\rangle_{y,z} = \frac{\partial}{\partial x} \left\langle -\rho_0 c_p \overline{T u_x} + k \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} \right\rangle_{y,z} \quad (1.38)$$

Le flux thermique total vertical $\overline{\Phi_{tot}}$ est donc constant suivant x et vaut

$$\overline{\Phi_{tot}} = \left\langle -\rho_0 c_p \overline{T u_x} + k \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} \right\rangle_{y,z}. \quad (1.39)$$

La moyenne suivant x du flux thermique totale s’écrit alors

$$\overline{\Phi_{tot}} = \left\langle \overline{\Phi_{tot}} \right\rangle_x = -\rho_0 c_p \left\langle \overline{T u_x} \right\rangle_{x,y,z} + \frac{k \Delta T}{L}. \quad (1.40)$$

D’autre part, la moyenne sur l’espace et le temps de l’équation de la quantité de mouvement multipliée scalairement par \mathbf{u} donne

$$0 = -\rho_0 \alpha g \left\langle \overline{T u_x} \right\rangle_{x,y,z} + \eta \left\langle \overline{\mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u}} \right\rangle_{x,y,z} \quad (1.41)$$

En notant que pour un fluide incompressible $\eta \left\langle \overline{\mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u}} \right\rangle_{x,y,z} = - \left\langle \overline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \boldsymbol{\tau}} \right\rangle_{x,y,z}$, on en déduit

$$\left\langle \overline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \boldsymbol{\tau}} \right\rangle_{x,y,z} = \frac{\alpha g L}{c_p} \left(\overline{\Phi_{tot}} - \frac{k \Delta T}{L} \right). \quad (1.42)$$

1.3 Approximation anélastique

1.3.1 Équations

L'approximation anélastique proposée par Ogura and Phillips (1961) consiste à développer chaque variable autour du profil adiabatique

$$T = T_a + T', \quad p = p_a + p', \quad \rho = \rho_a + \rho', \quad s = s_a + s'. \quad (1.43)$$

Les amplitudes des fluctuations sont considérées faibles par rapport aux grandeurs adiabatiques. Ainsi, en injectant ces développements dans les équations générales de la convection (1.13a) à (1.13e), nous obtenons à l'ordre le plus faible

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\rho_a \mathbf{u}) = 0, & (1.44a) \\ \rho_a \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p' + \rho' \mathbf{g} + \eta \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} \right), & (1.44b) \\ \rho_a T_a \frac{Ds'}{Dt} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\tau} + k \nabla^2 (T_a + T'). & (1.44c) \end{cases}$$

1.3.1.1 Équation de conservation de la masse

Le changement le plus notable avec les équations complètes est la disparition du terme de dérivé temporelle dans l'équation de conservation de la masse. En effet, en introduisant l'échelle de temps t_{conv} liée à la convection, on a bien

$$\left| \frac{\frac{\partial \rho'}{\partial t}}{\nabla \cdot (\rho_a \mathbf{u})} \right| \sim \frac{\frac{\rho'}{t_{conv}}}{\frac{1}{L} \left(\rho_a \frac{L}{t_{conv}} \right)} \sim \frac{\rho'}{\rho_a} \ll 1. \quad (1.45)$$

Le fait de négliger ce terme retire les ondes acoustiques des solutions du problème. Seules les solutions que l'on pourrait qualifier de *purement convectives* sont gardées.

1.3.1.2 Équation sur la quantité de mouvement

Nous pouvons exprimer les fluctuations de densité en fonction des fluctuations d'entropie et de pression à l'aide du développement

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial s} \right)_p s' + \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial p} \right)_s p' = -\frac{\rho_a \alpha_a T_a}{c_{p,a}} s' + \frac{1}{\rho_a g} \frac{\partial \rho_a}{\partial x} p', \quad (1.46)$$

où les dérivées partielles de ρ_a sont obtenues à partir de l'équation (1.18) et du gradient de pression adiabatique (1.15). En introduisant la quantité $\pi' = \frac{p'}{\rho_a}$, l'équation sur la quantité de mouvement se réécrit

$$\rho_a \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\rho_a \nabla \pi' - \frac{\rho_a \alpha_a T_a}{c_{p,a}} s' \mathbf{g} + \eta \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} \right), \quad (1.47)$$

Grandeur :	T_a	ρ_a	α_a	$c_{p,a}$	g	x, y, z	t	u_x, u_y, u_z	T'	s'	π'
Échelle :	T_0	ρ_0	α_0	$c_{p,0}$	g_0	L	$\frac{\rho_0 c_{p,0} L^2}{k}$	$\frac{k}{\rho_0 c_{p,0} L}$	ΔT_{sa}	$\frac{c_{p,0} \Delta T_{sa}}{T_0}$	$\alpha_0 g_0 \Delta T_{sa} L$

TABLE 1.1 – Échelles utilisées pour l'adimensionnement des équations anélastiques.

1.3.1.3 Équation sur l'entropie

Souvent, on préfère écrire la dérivée particulière de l'équation sur l'entropie sous forme conservative

$$T_a \frac{Ds'}{Dt} = \frac{D(T_a s')}{Dt} - \frac{\alpha_a T_a}{c_{p,a}} s' \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \quad (1.48)$$

en utilisant l'équation du gradient de température adiabatique (1.17). On fait alors apparaître un terme assimilable au travail de la partie entropique de la force de flottabilité.

$$\rho_a \frac{D(T_a s')}{Dt} = \frac{\rho_a \alpha_a T_a}{c_{p,a}} s' \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} + \dot{\epsilon} : \boldsymbol{\tau} + k \nabla^2 (T_a + T'). \quad (1.49)$$

1.3.2 Adimensionnement des équations

Afin d'obtenir les équations de l'approximation anélastique sous leurs formes adimensionnées, nous introduisons dans la table 1.1 les échelles caractéristiques des grandeurs utilisées. Pour définir celles associées au profil adiabatique, il suffit de prendre leurs valeurs en un point donné (en pratique nous la prendrons au niveau de la plaque inférieure). Ces échelles sont indiquées par un indice 0. Pour le temps, l'espace et les vitesses ont repris les échelles diffusives déjà utilisées dans l'approximation de Boussinesq. Enfin, nous introduisons comme échelle caractéristique des fluctuations de température T' la différence de température super adiabatique entre les plaques

$$\Delta T_{sa} = \Delta T - \Delta T_a, \quad (1.50)$$

de laquelle nous dérivons les échelles des fluctuations d'entropie s' et de pression π' .

Les équations adimensionnées sont alors

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\rho_a \mathbf{u}) = 0, & (1.51a) \\ \text{Pr}^{-1} \rho_a \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\text{Ra}_{sa} \rho_a \nabla \pi' - \text{Ra}_{sa} \frac{\rho_a \alpha_a T_a}{c_{p,a}} s' \mathbf{g} + \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}, & (1.51b) \\ \rho_a \frac{D(T_a s')}{Dt} = \mathcal{D} \frac{\rho_a \alpha_a T_a}{c_{p,a}} s' \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} + \mathcal{D} \text{Ra}_{sa}^{-1} \dot{\epsilon} : \boldsymbol{\tau} + \Theta^{-1} \nabla^2 T_a + \nabla^2 T', & (1.51c) \end{cases}$$

où l'on introduit les nombres adimensionnés

$$\text{Pr} = \frac{\eta c_{p,0}}{k}, \quad \text{Ra}_{sa} = \frac{\rho_0^2 c_{p,0} \alpha_0 \Delta T_{sa} g_0 L^3}{k \eta}, \quad \mathcal{D} = \frac{\alpha_0 g_0 L}{c_{p,0}}, \quad \Theta = \frac{\Delta T_{sa}}{T_0}. \quad (1.52)$$

Par rapport à l'approximation de Boussinesq, le nombre de Prandtl Pr reste similaire alors que le nombre de Rayleigh Ra est remplacé par le nombre de Rayleigh super-adiabatique Ra_{sa} . De plus, l'introduction de deux nouveaux nombres adimensionnés est nécessaire : le nombre de dissipation \mathcal{D} , et le nombre Θ qui est le rapport d'amplitude entre les fluctuations de température et la température

du profil adiabatique. Le nombre Θ contrôle l'importance du terme $\nabla^2 T_a$ dans le bilan de fluctuation d'entropie. T_a étant connu, ce terme intervient comme un terme source d'entropie. Ce terme est nul dans le cas d'une gravité constante où le profil de température est linéaire. Mais cela n'est pas le cas pour une gravité quelconque, d'où la nécessité de ce nouveau nombre adimensionné. Notons enfin qu'il est possible de construire d'autre nombre adimensionné pour remplacer Θ comme par exemple $\varepsilon = \Delta T_{sa}/\Delta T_a$ utilisé par Curbelo et al. (2019).

1.3.3 Nombre de Rayleigh super-adiabatique et seuil de convection

Le nombre de Rayleigh super-adiabatique Ra_{sa} est construit de façon analogue au nombre de Rayleigh classique Ra de l'approximation de Boussinesq sauf que la différence de température entre les plaques est remplacée par la différence de température super-adiabatique ΔT_{sa} . Comme pour le cas de l'approximation de Boussinesq, il existe une valeur critique du nombre de Rayleigh super-adiabatique à partir duquel le système devient instable et la convection commence. Un résultat important montré par Jeffreys (1930) dans le cas faiblement compressible (l'approximation anélastique n'ayant pas encore été formalisée à l'époque) est que la valeur critique du nombre de Rayleigh super-adiabatique est la même que celle du nombre de Rayleigh classique dans l'approximation de Boussinesq. Dans le cas de parois avec conditions de non-glissement, le système est donc instable si

$$Ra_{sa} > Ra_c \simeq 1707.761. \quad (1.53)$$

C'est donc bien le nombre de Rayleigh super-adiabatique qui est pertinent d'utiliser dès lors que l'écoulement est compressible. Cela se comprend d'ailleurs de par le fait que le profil adiabatique est le profil neutre en terme de stabilité, comme le démontre le critère de stabilité de Schwarzschild. Il est donc normal que le nombre de Rayleigh approprié soit celui construit à partir de la différence de température super-adiabatique ΔT_{sa} et non la différence de température totale entre les plaques ΔT .

1.3.4 Nombre de dissipation

Le nombre de dissipation est le nouveau nombre adimensionné traduisant le caractère compressible de l'écoulement par rapport à l'approximation de Boussinesq. A notre connaissance, la première utilisation de ce nombre a été faite par Gebhart (1962) qui l'introduit comme un nouveau nombre adimensionné, autre que le nombre de Rayleigh et le nombre de Prandtl, qui traduit l'importance de la dissipation visqueuse. Il était en effet apparu dans l'équation (1.42) comme rapport entre la dissipation visqueuse moyenne et le flux convectif dans l'approximation de Boussinesq. Ainsi, bien qu'absent des équations régissant l'approximation de Boussinesq, le nombre de dissipation y possède déjà un sens physique. Dans l'approximation anélastique, il n'existe pas d'équivalent à l'équation (1.42) mais l'interprétation physique du nombre de dissipation reste la même. Il quantifie l'importance de la dissipation visqueuse $\dot{\epsilon} : \underline{\tau}$ dans l'écoulement. Plus le nombre de dissipation est grand, plus l'énergie est dissipée par la viscosité.

Le nombre de dissipation est aussi directement lié à l'amplitude du gradient adiabatique. En effet, avec les échelles introduites pour l'adimensionnement, le gradient adiabatique ∇T_a est de l'ordre de

$\Delta T_a/L$. L'adimensionnement de l'équation (1.17) donne

$$\mathcal{D} \sim \frac{\Delta T_a}{T_0}. \quad (1.54)$$

Le gradient adiabatique de température sera donc d'autant plus marqué que le nombre de dissipation est grand. A ce titre, le nombre de dissipation peut être lié à la notion d'hauteur d'échelle (scale height) utilisée en astrophysique.

1.3.5 Approximation anélastique liquide

Dans leur étude numérique de la convection compressible, Jarvis and McKenzie (1980) propose une simplification supplémentaire dans le cas d'un fluide de faible coefficient de dilation thermique : l'approximation anélastique liquide. Pour ce faire, ils supposent que les fluctuations d'entropie sont uniquement dues à celles de température. À partir de la relation de Gibbs (1.16) exprimée à l'aide des fluctuations

$$T_a s' = c_{p,a} T' + \alpha_a T_a \pi', \quad (1.55)$$

la comparaison des ordres de grandeur des termes du membre de droite

$$\frac{|\alpha_a T_a \pi'|}{|c_{p,a} T'|} \sim \frac{\alpha_0^2 g_0 L T_0}{c_{p,0}} = (\alpha_0 T_0) \mathcal{D}, \quad (1.56)$$

montre que l'approximation anélastique liquide est valable sous la condition $(\alpha_0 T_0) \mathcal{D} \ll 1$. Le facteur $(\alpha_0 T_0)$ est un nombre adimensionné, caractéristique du fluide utilisé, évaluant sa propension à se dilater thermiquement. Il est de l'ordre de 10^{-4} pour un liquide ce qui justifie que cette approximation se prête bien à l'étude de ceux-ci même pour des nombres de dissipation de l'ordre de l'unité. Pour un gaz, $(\alpha_0 T_0) \sim 1$, l'approximation anélastique liquide n'est donc valable que pour les cas peu compressibles avec un faible nombre de dissipation.

Les équations de l'approximation anélastique liquide s'obtiennent donc en substituant $T_a s'$ par $c_{p,a} T'$ dans les équations de l'approximation anélastique. Nous obtenons alors sous forme adimensionnée

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\rho_a \mathbf{u}) = 0, \quad (1.57a) \\ \text{Pr}^{-1} \rho_a \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\text{Ra}_{\text{sa}} \rho_a \nabla \pi' - \text{Ra}_{\text{sa}} \rho_a \alpha_a T' \mathbf{g} + \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (1.57b) \\ \rho_a c_{p,a} \frac{DT'}{Dt} + \rho_a (\mathbf{u} \cdot \nabla c_{p,a}) T' = \mathcal{D} \rho_a \alpha_a T' \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} + \mathcal{D} \text{Ra}_{\text{sa}}^{-1} \underline{\dot{\epsilon}} : \underline{\boldsymbol{\tau}} + \Theta^{-1} \nabla^2 T_a + \nabla^2 T'. \quad (1.57c) \end{array} \right.$$

1.3.6 Applications et analyses théoriques des approximations anélastiques

L'approximation anélastique a été appliquée à de nombreux systèmes naturels. Tout d'abord en météorologie à l'atmosphère terrestre (Ogura and Phillips, 1961) pour laquelle elle a été créée. En géophysique, elle est utilisée aussi bien pour le manteau (Solheim and Peltier, 1990) que pour le noyau externe (Braginsky and Roberts, 1995, Anufriev et al., 2005). Dans le cas du noyau externe, ces études se placent dans le cadre de la magnétohydrodynamique : la convection du fluide étant le mécanisme moteur de l'effet dynamo permettant la création d'un champ magnétique induit par l'écoulement. En

plus de la convection thermique, ces modèles prennent aussi en compte la convection chimique créée par les inhomogénéités de composition chimique du fluide. Bien que non prise en compte dans ce manuscrit, la convection chimique peut jouer un rôle important dans l'étude des systèmes naturels (O'rourke and Stevenson, 2016, Bouffard, 2017). Enfin, l'approximation anélastique est aussi utilisée en astrophysique pour la modélisation des planètes gazeuses (Duarte et al., 2018) et des étoiles (R. Elliott et al., 2008, R. Lantz and Fan, 2009, Jones et al., 2011).

Des travaux plus théoriques sur l'approximation anélastique ont également été réalisés. Alboussière and Ricard (2013, 2014) et Curbelo et al. (2019) s'intéressent au rôle joué par la dissipation dans ces approximations et aux équilibres énergétiques associés. Verhoeven et al. (2015) compare d'un point de vue plus générale l'approximation anélastique aux équations compressibles complètes. Enfin, Alboussière and Ricard (2017) étudie la stabilité de la configuration de Rayleigh-Bénard et l'influence de l'équation d'état du fluide sur celle-ci.

1.4 Convection thermique en rotation

1.4.1 Force d'inertie d'entraînement et de Coriolis

La plupart des systèmes géophysiques sont en rotation, il est donc important de connaître l'influence de celle-ci sur la convection. Cela se fait en introduisant dans le bilan de quantité de mouvement la force d'inertie d'entraînement F_{ie} et la force d'inertie de Coriolis F_{ic} qui s'écrivent dans le cas d'une rotation constante

$$F_{ie} = \rho \mathbf{g}_\Omega \quad \text{avec} \quad \mathbf{g}_\Omega = -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}), \quad (1.58)$$

$$F_{ic} = -2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}. \quad (1.59)$$

où $\mathbf{r} = (x, y, z)$ est le vecteur position. En pratique, la force d'inertie d'entraînement est ajoutée implicitement au champ de pesanteur : \mathbf{g} correspondant alors à la somme du champ de gravité réel \mathbf{g}_{vraie} et de l'accélération centrifuge \mathbf{g}_Ω . Ainsi, seule la force de Coriolis apparaît formellement comme un nouveau terme. L'introduction de la rotation $\boldsymbol{\Omega}$ comme nouveau paramètre se traduit par un nouveau nombre adimensionné : le nombre d'Ekman

$$E = \frac{\eta}{\rho_0 \Omega L^2}. \quad (1.60)$$

qui est le rapport entre les forces de viscosité et la force de Coriolis. Il mesure l'importance de la rotation : plus le nombre d'Ekman est faible, plus la rotation est importante. L'autre nombre adimensionné très utilisé dans l'étude des fluides en rotation est le nombre de Rossby Ro défini comme le rapport entre le terme d'advection et la force de Coriolis. Avec l'adimensionnement des équations centré autour de la convection thermique choisit au paragraphe section 1.3.2, il est redondant avec le nombre de Prandtl. En effet, en notant $|u| = k/(\rho_0 c_{p,0} L)$ l'échelle de vitesse, nous avons

$$Ro = \frac{|u|}{\Omega L} = Pr^{-1} E. \quad (1.61)$$

Puisque la convection thermique est le phénomène qui nous intéresse de façon privilégié, nous utilisons le couple (Pr, E) plutôt que (Ro, E) dans la suite.

1.4.2 Configuration de la rotation

La direction relative de la gravité \mathbf{g} et du vecteur rotation $\mathbf{\Omega}$ influe sur les régimes de convection observés. Dans le contexte géophysique, trois cas sont particulièrement étudiés. Le premier est le cas d'une gravité radiale en géométrie sphérique. Il est le plus fidèle au cas planétaire. L'angle entre la gravité et le vecteur rotation dépend de la latitude. La réalisation d'un tel champ de gravité n'étant pas accessible expérimentalement, cette configuration est seulement étudiée numériquement (Tilgner and Busse, 1997, Christensen, 2002, Aubert, 2005). Les deux autres cas, que nous nommerons polaire et équatorial, correspondent aux configurations limites vues dans le cas planétaire : le cas équatorial où la gravité est orthogonale à la rotation et le cas polaire où elles sont colinéaires. Dans la suite, nous étudierons essentiellement la configuration équatoriale. Il est toutefois intéressant de présenter quelques résultats associés à la configuration polaire de façon à pouvoir les comparer plus tard au cas équatorial.

1.4.2.1 Configuration polaire

Il s'agit de la configuration la plus étudiée car elle présente des phénomènes physiques riches et est relativement simple à réaliser expérimentalement. En effet, sur ce dernier point, cela correspond à des vitesses de rotation faibles permettant de négliger l'accélération centrifuge. Plusieurs géométries ont été étudiées, les plus fréquentes étant les géométries sphérique, héli-sphérique et cylindrique.

La rotation stabilise globalement l'écoulement. Plus la rotation est forte, plus le nombre de Rayleigh doit être fort pour le déstabiliser. Chandrasekhar (1953) a établi que le nombre de Rayleigh critique dépend du nombre d'Ekman à la puissance $-4/3$: $Ra_c \propto E^{-4/3}$. Un autre phénomène important dans cette configuration est l'existence de deux régimes de convection (King et al., 2009, 2012). Le premier, à faible nombre de Rayleigh, est dominé par la rotation (figure 1.5(a)). L'écoulement est bi-dimensionnelle (géostrophique) et prend la forme de colonne de Taylor alignés avec l'axe de rotation. La loi Ra-Nu observée $Nu \propto Ra^3$ est plus pentue que dans le cas sans rotation. Dans le second régime, à fort nombre de Rayleigh, la convection devient tri-dimensionnelle (figure 1.5(b)) et se rapproche des figures de convections turbulentes observées sans rotation avec une loi Ra-Nu classique $Nu \propto Ra^{2/7}$. Cette transition 2D-3D s'explique par la compétition de la rotation qui tend à rendre l'écoulement géostrophique et la convection qui tend à le rendre turbulent. La position de la transition entre ces deux régimes dépend elle aussi du nombre d'Ekman (1.6). King et al. (2012) propose une dépendance du nombre de Rayleigh de transition Ra_t de la forme $Ra_t \propto E^{-3/2}$.

1.4.2.2 Configuration équatoriale

La configuration équatoriale peut être réalisée expérimentalement sous forte rotation afin que la gravité réelle soit négligeable devant l'accélération centrifuge. Moins d'expériences ont été réalisées dans ce cas. Nous pouvons citer Shew and Lathrop (2005) qui étudie en magnétohydrodynamique la convection de sodium liquide dans une sphère avec et sans application d'un champ magnétique et Sahoo and Sreenivasan (2017) qui étudie l'influence des variations locales de flux de chaleur. Busse (2014), Busse and D. Simitev (2014) a fait l'analyse de stabilité linéaire dans cette configuration pour un écoulement compressible dans un anneau cylindrique en rotation. En considérant un certain nombre

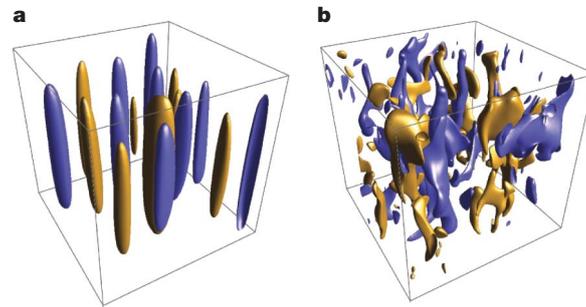


FIGURE 1.5 – D’après King et al. (2009) : Iso-surfaces de la vitesse verticale, issues de simulations numériques. (a) $E = 10^{-4}$, $Ra = 5 \times 10^6$, $Pr = 7$. La vitesse présente de structures aux grandes échelles cohérentes alignées avec l’axe de rotation (colonne de Taylor) typique d’une convection dominé par la rotation. (b) $E = 10^{-4}$, $Ra = 2,1 \times 10^8$, $Pr = 7$. Les structures prédominantes observées sont tridimensionnelles et typiques d’une convection sans rotation.

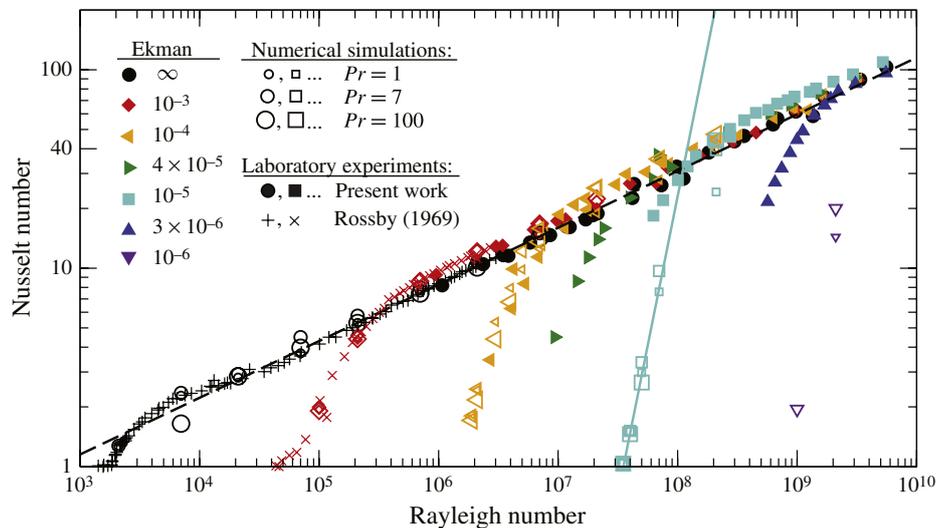


FIGURE 1.6 – D’après King et al. (2012) : Nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh. Les nombres d’Ekman expérimentaux sont approximatifs dû aux changements de viscosité dans le fluide. Les données de Rossby (1969) ont été ajoutées dans le cas sans rotation (\times) et pour $E \simeq 10^{-3}$ ($+$). Les pointillés noirs représentent la loi $Nu = 0.16Ra^{2/7}$ et ligne bleue la loi $Nu \simeq (Ra/Ra_c)^3 \simeq 0.0023Ra^3E^4$ pour $E = 10^{-5}$.

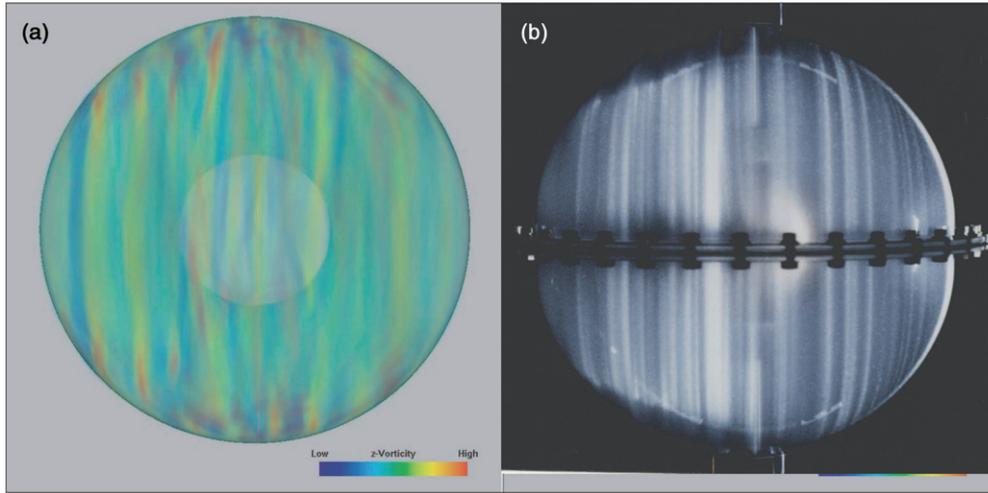


FIGURE 1.7 – (a) D’après Aurnou (2007) : Images de côté de structures convectives dans des modèles de convection du noyau externe avec un axe de rotation vertical. (a) Vorticité axiale d’un modèle numérique de M. Heimpel avec $E = 10^{-4}$, $Ra/Ra_c = 10$, $Pr = 1$, $Pm = 5$ (nombre de Prandtl magnétique) pour des parois isothermes sans glissement. (b) Photographie de l’expérience convection d’eau sous forte rotation de Cardin and Olson (1994) avec $E = 2,5 \times 10^{-6}$, $Ra/Ra_c \sim 50$, $Pr = 7$. Dans les deux figures, les structures de convection sont alignées avec l’axe de rotation.

d’hypothèses simplificatrices parmi lesquelles une gravité et une valeur de $\beta_a = \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial \rho_a}{\partial x}$ constante dans l’anneau, il trouve un nombre de Rayleigh critique de la forme

$$Ra_c = E^{*-4/3} (3 + \pi^2 E^{*2/3} + \dots) \text{ où } E^* = \frac{1 + Pr}{\sqrt{2Pr} |\beta_a|} E, \quad (1.62)$$

La dépendance du nombre de Rayleigh critique en $E^{-4/3}$ est similaire au cas polaire. Par contre, contrairement à celui-ci, la convection ne s’oppose pas à l’établissement de la géostrophie dans la configuration équatoriale puisque $\mathbf{\Omega}$ et \mathbf{g} sont orthogonaux. S’il est naturel de penser que l’écoulement devienne tridimensionnel à très haut Rayleigh, la transition 2D-3D doit se faire à un nombre de Rayleigh plus élevé que dans le cas polaire et la physique inhérente à cette transition doit être très différente.

1.4.3 Géostrophie dans l’approximation anélastique

Une caractéristique des écoulements précédents lorsque la rotation est forte est la présence de structures alignées avec l’axe de rotation. Dans le cas incompressible, cette propriété est justifiée par le théorème de Taylor-Proudman (Proudman and Lamb, 1916) qui assure que la vitesse du fluide ne varie pas suivant la direction de l’axe de rotation : l’écoulement est dit géostrophique. Une généralisation de ce résultat est possible pour un écoulement compressible dans le cadre de l’approximation anélastique. Supposons, par analogie à la démonstration du cas incompressible, que sous forte rotation l’équilibre principal est celui de la force de Coriolis et du gradient de pression. Nous avons dans l’approximation anélastique

$$2\rho_a \mathbf{\Omega} \times \mathbf{u} = -\rho_a \nabla \pi'. \quad (1.63)$$

En simplifiant par ρ_a puis en prenant le rotationnel, nous obtenons

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}. \quad (1.64)$$

Dans le cas de la configuration équatoriale avec une rotation parallèle à l'axe z ($\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$), cela implique par projection dans les directions x et y :

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0, \quad (1.65)$$

Nous trouvons donc que dans ce cas seules les composantes de vitesses orthogonales à l'axe de rotation u_x et u_y sont invariantes suivant la direction de celui-ci. Ce n'est cependant pas le cas de la composante u_z , parallèle à l'axe, puisque $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$ en anélastique. Cette démonstration n'est valable qu'en première approximation : le rôle de la vorticité du fluide $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ ayant par exemple été négligé. Des études plus approfondies de la généralisation du théorème de Taylor-Proudman ont été faites dans le cas d'une géométrie planétaire par Jones and Kuzanyan (2009), Evonuk (2007), Glatzmaier et al. (2009).

2

Dispositif expérimental

Sommaire

2.1	Dispositif global	36
2.1.1	Centrifugeuse	36
2.1.2	Cellule expérimentale	36
2.1.3	Capteur de température	39
2.1.4	Capteur de pression	40
2.1.5	Résistance chauffante	41
2.2	Circuit électronique et mesures	41
2.2.1	Contexte	41
2.2.2	Circuit de multiplexage	42
2.2.2.1	Principe du multiplexage	42
2.2.2.2	Réalisation électronique	44
2.2.3	Circuit extérieur	44
2.2.4	Traitement informatique	44
2.2.4.1	En direct avec Labview	44
2.2.4.2	Post-traitement avec Python	45
2.3	Xénon	46
2.3.1	Choix du xénon et paramètres expérimentaux	46
2.3.2	Description du xénon	46
2.3.3	Profil adiabatique dans le xénon réel	48
2.4	Simulations thermiques du dispositif	48
2.4.1	Perte thermique	48
2.4.1.1	Contexte	48
2.4.1.2	Simulation numérique	51
2.4.2	Capacité thermique	52

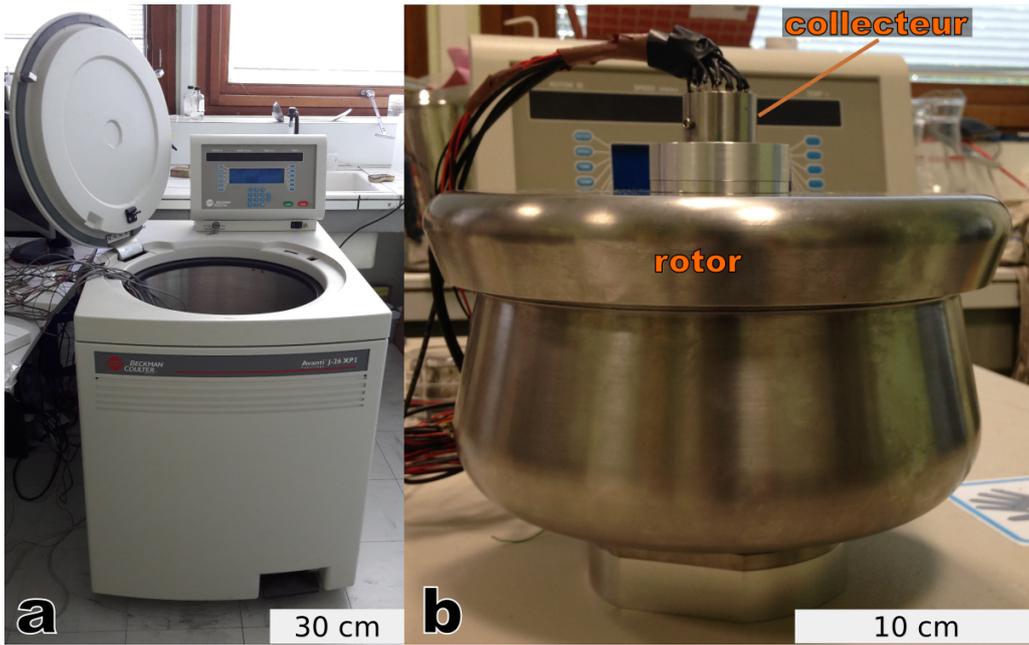


FIGURE 2.1 – (a) Centrifugeuse Beckman-Coulter J-26 XPI. (b) Rotor Beckman-Coulter JCF-Z.

2.1 Dispositif global

2.1.1 Centrifugeuse

Dans le but d'atteindre une forte gravité, nous utilisons une centrifugeuse Beckman-Coulter J-26 XPI (figure 2.1a) peut atteindre une vitesse de rotation de 30 000 rpm. Toutefois le rotor Beckman-Coulter JCF-Z (figure 2.1b) que nous utilisons n'est utilisable que jusqu'à 20 000 rpm. Ce rotor est en titane et a été modifié afin d'accueillir notre cellule expérimentale.

La centrifugeuse ne proposant pas de connectique permettant son contrôle par ordinateur, nous avons fixé au pied du rotor un accéléromètre Analog Device ADXL326 mesurant les vibrations de celui-ci pour avoir une mesure de la vitesse de rotation instantané du rotor. Le spectre des vibrations est fortement dominé par la fréquence de rotation. Le détermination du diagramme temps-fréquence du signal (par le calcul du spectrogramme), nous permet alors en extrayant la fréquence dominante à chaque instant d'obtenir un suivi de la vitesse de rotation (2.2).

2.1.2 Cellule expérimentale

La cavité dans laquelle se situe le gaz est taillée dans un cylindre de polycarbonate. Ce cylindre est maintenu en place à l'aide d'un godet en titane vissé au rotor. Un second ensemble godet-cylindre est fixé symétriquement à l'axe du rotor en guise de contrepoids (figure 2.3a-d). La cavité est un parallélépipède rectangle de longueur $L = 39$ mm et de section $H^2 = 23 \times 23$ mm². Afin de simplifier notre discours, nous utiliserons les nominations suivantes pour différencier chaque paroi de la cavité :

- les parois supérieure \mathcal{T} (top) et inférieure \mathcal{B} (bottom) sont les parois orthogonales à la gravité centrifuge radiale. La paroi inférieure est la plus éloignée de l'axe de rotation et se situe à une

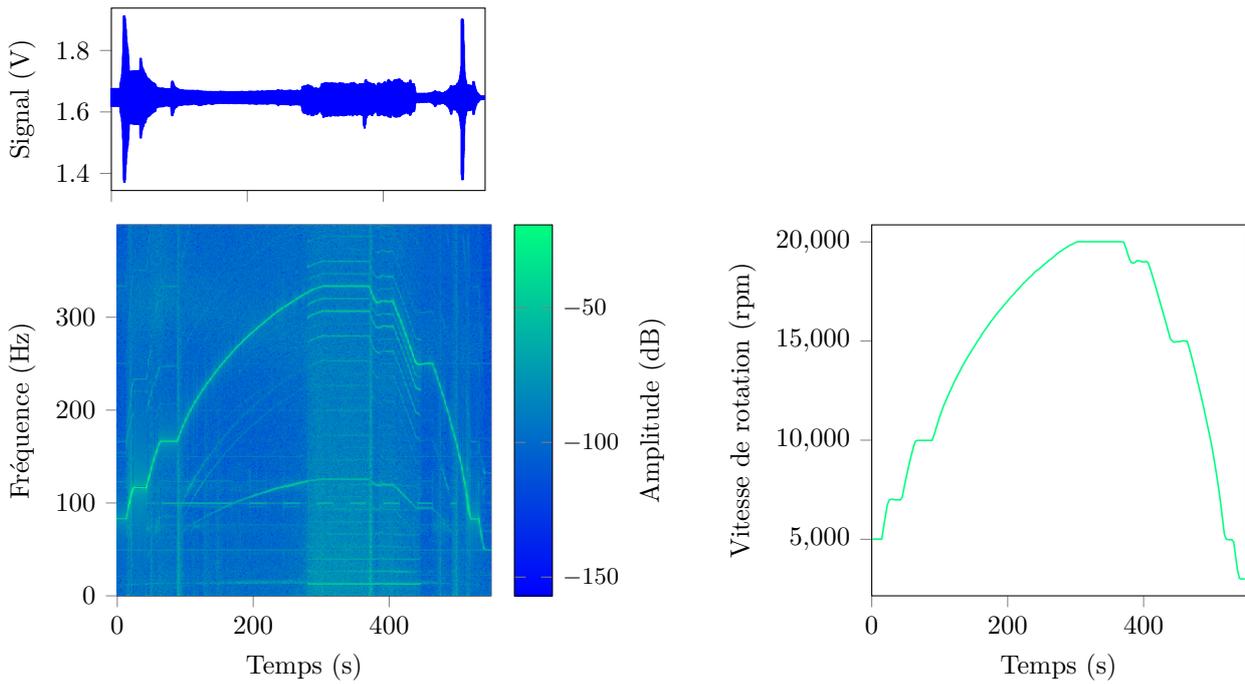


FIGURE 2.2 – (a) Signal électrique en sortie de l'accéléromètre. (b) Diagramme temps-fréquence du signal obtenu en calculant son spectrogramme avec une fenêtre de Hamming sur des segments temporels de 2 s. (c) Vitesse de rotation de la centrifugeuse déduite à partir de la fréquence dominant le signal à chaque temps.

distance $r_{max} = 72$ mm de celui-ci. La paroi supérieure, plus proche de l'axe, en est éloignée d'une distance de $r_{max} - L = 33$ mm,

- les parois d'Ekman \mathcal{E} sont les parois latérales orthogonales à l'axe de rotation. C'est sur ces parois que les couches limites d'Ekman, dues à la rotation, se développent,
- enfin les parois de Stewartson \mathcal{S} sont les parois latérales restantes sur lesquelles se développent les couches limites de Stewartson dues à la rotation.

Pour isoler thermiquement l'intérieur et l'extérieur de la cavité, les parois d'Ekman et de Stewartson sont recouvertes d'une couche d'aérogel (Airloy X103 Class M) d'épaisseur 1 mm (figure 2.3b). Au niveau de la paroi inférieure, le gaz est en contact avec une plaque de duraluminium 2017A (alliage AlCuMg1) carrée de 25 mm de côté et de 2 mm d'épaisseur en dessous de laquelle est placée une résistance chauffante assurant le chauffage du gaz. La résistance chauffante et la plaque de duraluminium sont maintenues en place par une pièce de plastique PEEK en forme de U de 1 mm d'épaisseur. Une couche d'aérogel de 2 mm est de plus placée à l'intérieur du U. Au niveau de la paroi supérieure, la délimitation du volume occupé par le gaz est plus complexe. En effet, la paroi est percée de deux trous circulaires de rayon 6 mm et long de 7,7 mm débouchant sur une cavité située entre la base du cylindre de polycarbonate et le rotor en titane de 5 mm de profondeur. Bien qu'il soit donc compliqué de décrire et modéliser les conditions aux limites imposées au niveau de cette bordure, cette cavité entre le cylindre et le rotor nous est essentielle techniquement pour faire passer les fils électriques en provenance des divers capteurs de la cellule vers l'extérieur du rotor. Les propriétés thermiques de

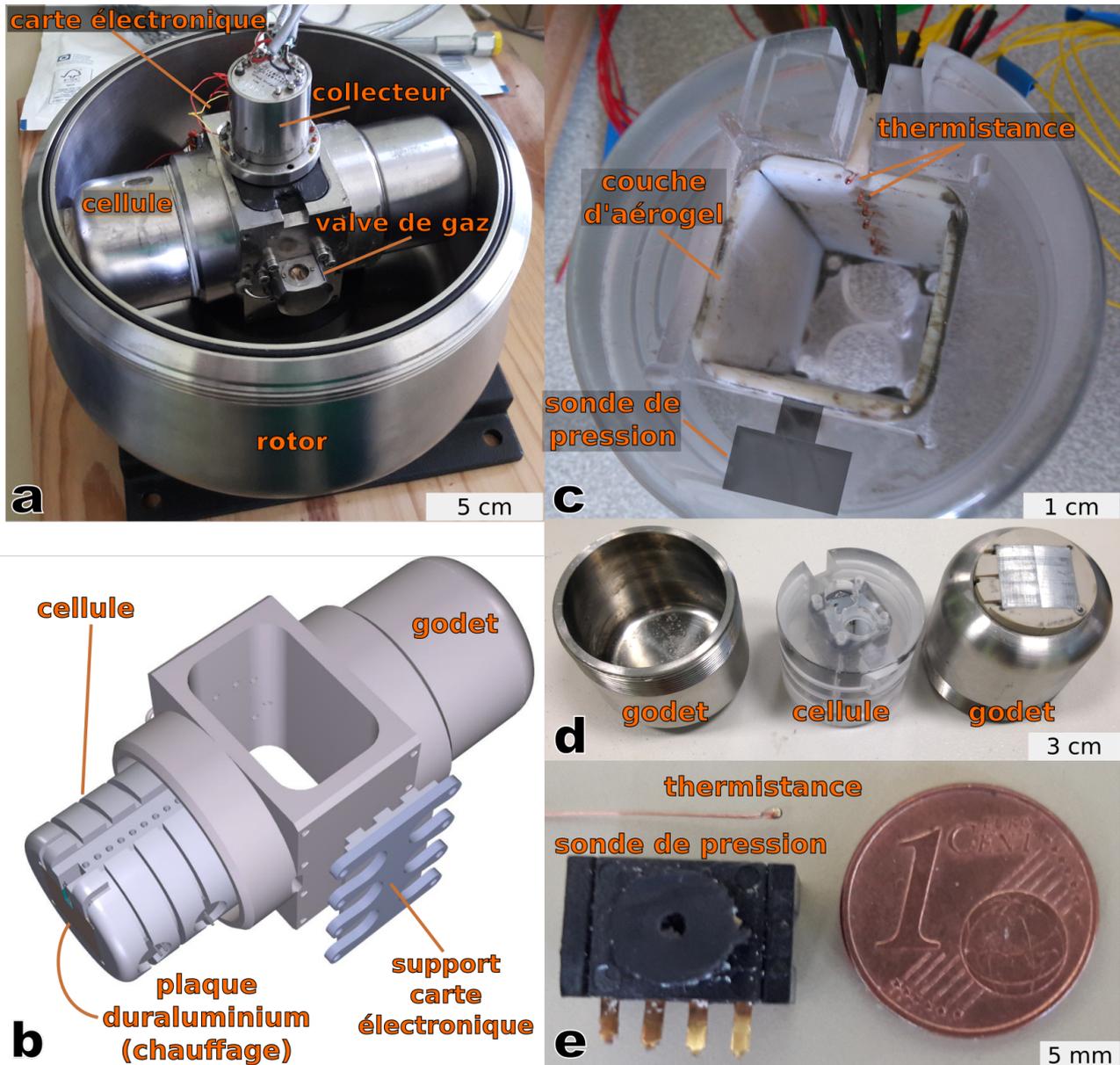


FIGURE 2.3 – (a-b) Photographie et schéma du positionnement de la cellule en polycarbonate dans le rotor de la centrifugeuse. (c) Photographie de la cavité creusée dans le cylindre de polycarbonate. La plaque de duraluminium et la résistance chauffante ont été retirées afin de voir l'intérieur de la cavité. (d) Photographie de la cellule et des godets en titane la maintenant en place. (e) Photographie d'une thermistance Epcos B57540G1 et d'une sonde de pression Honeywell 24PCEFA6G. Les figures (b) et (d) sont adaptées de Huguet (2014).

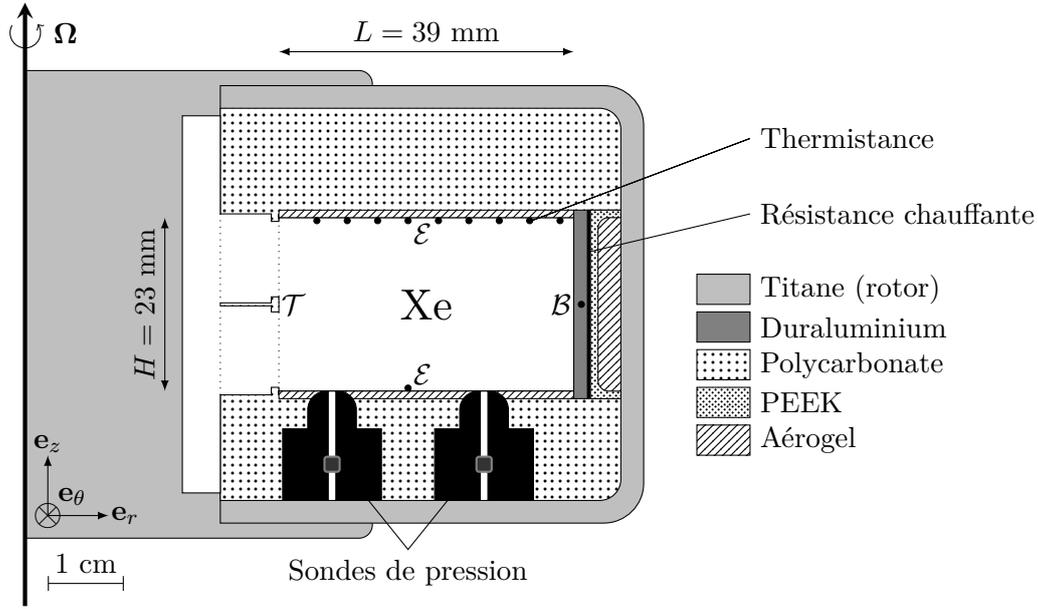


FIGURE 2.4 – Schéma de l'expérience.

Matériaux	Conductivité thermique k_m ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$)	Capacité thermique massique $c_{p,m}$ ($\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$)	Masse volumique ρ_m (kg m^{-3})	Diffusivité thermique $\kappa_m = \frac{k_m}{\rho_m c_{p,m}}$ ($10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
Aérogel	0.029	680 - 730	200	0.199 - 0.213
Polycarbonate	0.19 - 0.22	1200 - 1300	1200	0.122 - 0.153
PEEK	0.25	320	1320	0.592
Duraluminium	134	920	2700	53.9
Titane	21.9	522	4510	9.30

TABLE 2.1 – Propriétés thermiques des matériaux utilisés dans l'expérience.

chacun des matériaux utilisés sont données dans la table 2.1.

2.1.3 Capteur de température

Pour mesurer les températures, nous utilisons des thermistances à coefficient de température négatif (CTN) Epcos B57540G1 (figure 2.3e). Nous avons choisi ce modèle à cause de leur petite taille (leur tête en verre a un diamètre de seulement 0,8 mm) : elles sont légères et résistent donc bien à la centrifugation. Ces thermistances ont une résistance électrique de $R_t = 10 \text{ k}\Omega$ à $T_t = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. La dépendance de leurs résistances en fonction de la température T est donnée par

$$R = R_t \exp \left[-\beta_t \left(\frac{1}{T_t} - \frac{1}{T} \right) \right], \quad (2.1)$$

où $\beta_t = 3492 \text{ K}$ est une constante donnée par le constructeur. La gamme de température étudiée ($0 \text{ }^\circ\text{C} \lesssim T \lesssim 90 \text{ }^\circ\text{C}$) correspond donc à des variations de résistance de $30 \text{ k}\Omega$ à $1 \text{ k}\Omega$.

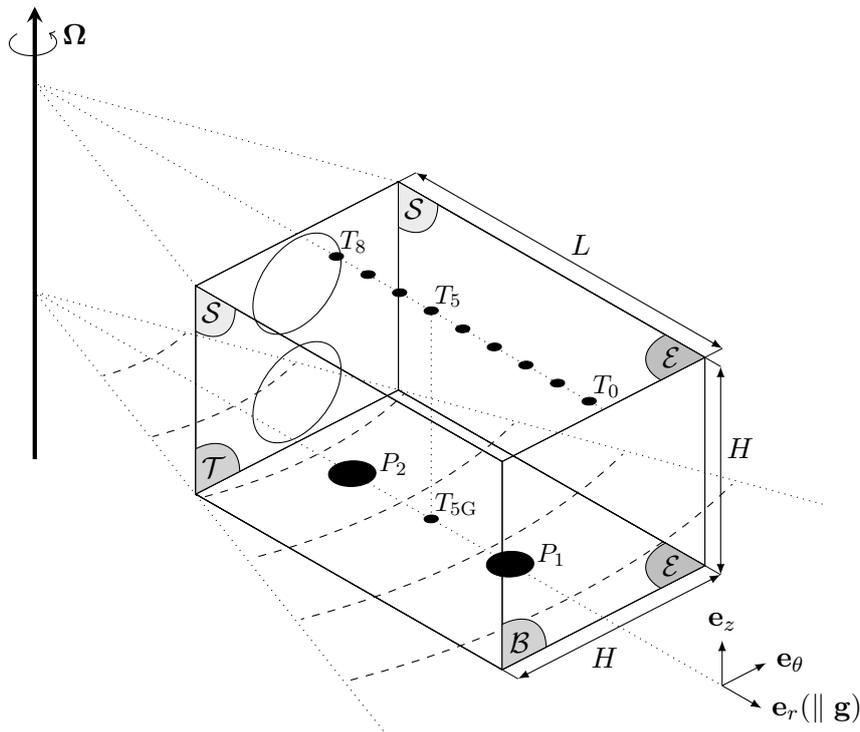


FIGURE 2.5 – Schéma 3D de la cavité principale.

Afin de mesurer la température du gaz au sein de la cavité, neuf thermistances sont alignées au centre d'une des faces d'Ekman. Les thermistances sont espacées de 4 mm les unes des autres et la thermistance T_0 , la plus proche de la paroi inférieure, est située à 1,8 mm de cette dernière. Une dixième thermistance, notée T_{5G} , est placée sur l'autre paroi d'Ekman en face de la thermistance T_5 . Elle nous sera utile plus tard pour étudier la géostrophie de l'écoulement. Enfin, une thermistance T_{hot} est placée dans un trou percé au centre de la plaque de duraluminium et une dernière thermistance T_{ext} est collée sur la partie externe du rotor en titane. Ces deux dernières thermistances nous permettent ainsi de connaître les conditions aux limites chaude et froide de la cellule.

D'un point de vue technique, chaque thermistance est enfilée dans une tige de céramique, elle-même placée et collée dans un des trous du cylindre de polycarbonate conçu à cet effet. La tête de la thermistance dépasse donc de la tige et ressort de quelques millimètres de la paroi d'Ekman. A cause de la forte vitesse de centrifugation, les forces s'exerçant sur la tête de la thermistance sont élevées. Il est donc essentiel de laisser du jeu dans les fils connectant ces thermistances afin de prévenir le détachement de leur tête. Cela s'accompagne malheureusement d'une perte de précision d'environ 1 mm de la position radiale de la thermistance.

2.1.4 Capteur de pression

Les pressions dans la cavité sont mesurées par deux sondes différentielles piézoélectriques Honeywell 24PCEFA6G (figure 2.3e). Elles sont situées sur la paroi d'Ekman de part et d'autre de la thermistance T_{5G} . La première sonde (P_1) est positionnée en face des thermistances T_2 et T_3 alors que la seconde (P_2) est en face des thermistances T_7 et T_8 . Ces sondes différentielles mesurent la différence de pression

entre le gaz à l'intérieur de la cavité et celui présent entre le cylindre de polycarbonate et le godet en titane. Étant donné la finesse de l'espace entre le cylindre et le godet, il est raisonnable de supposer que le gaz y est au repos à la pression p_a du profil adiabatique. Les sondes permettent ainsi une mesure directe de l'écart à la pression adiabatique $\Delta p = p - p_a$ dans la cavité.

Électriquement, les sondes de pression sont fournies déjà montées dans un pont de Wheatstone afin d'assurer une réponse en tension U_p linéaire avec la différence de pression Δp mesurée :

$$\frac{U_p}{U_{alim}} = \sigma_p \Delta p, \quad (2.2)$$

où U_{alim} est la tension d'alimentation de la sonde et $\sigma_p = 1,02 \times 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$ sa sensibilité. Elles peuvent mesurer une différence de pression jusqu'à $\pm 3,4 \text{ kPa}$ et ont un temps de réponse de 1 ms.

2.1.5 Résistance chauffante

La plaque de duraluminium est chauffée par une résistance chauffante OMEGALUX KHLV-101. Elle prend la forme d'un film de kapton (polyamide) d'épaisseur 0,25 mm et de section $25 \times 25 \text{ mm}^2$. La puissance dissipée Φ_T , proportionnelle au carré de la tension U_{rc} appliquée à ses bornes, est donnée par la loi de Joule

$$\Phi_T = \frac{U_{rc}^2}{R_{rc}}, \quad (2.3)$$

avec $R_{rc} = 84 \Omega$. La résistance supporte une tension maximale de 28 V, ce qui correspond à une puissance de chauffage maximale de 9,33 W.

2.2 Circuit électronique et mesures

2.2.1 Contexte

L'espace disponible dans le rotor de la centrifugeuse étant réduit, il n'est pas possible d'y embarquer directement des cartes d'acquisitions enregistrant nos mesures. Nous utilisons le collecteur tournant afin de faire sortir les signaux électriques de mesures de température et de pression. Malheureusement, les collecteurs utilisables avec notre centrifugeuse à de fortes vitesses de rotation sont très limités en nombre de voies. L'ensemble de notre chaîne de mesure a donc été pensée en fonction de ce goulot d'étranglement des signaux. Le collecteur que nous utilisons possède dix voies, il est donc impossible d'obtenir l'ensemble des signaux en provenances de 12 thermistances et 2 sondes de pression. Pour contrer ce problème, nous utilisons une carte de multiplexage, créée pour l'occasion, et se fixant au rotor de la centrifugeuse. L'ensemble des signaux de température peut alors être transmis sur seulement deux voies. Les voies du collecteurs sont réparties de la façon suivante :

- 2 voies servent à l'alimentation de la résistance chauffante,
- 2 voies servent à l'alimentation des sondes de pressions et du circuit de multiplexage des températures,
- 2 voies transmettent le signal de sortie du circuit de multiplexage des températures,

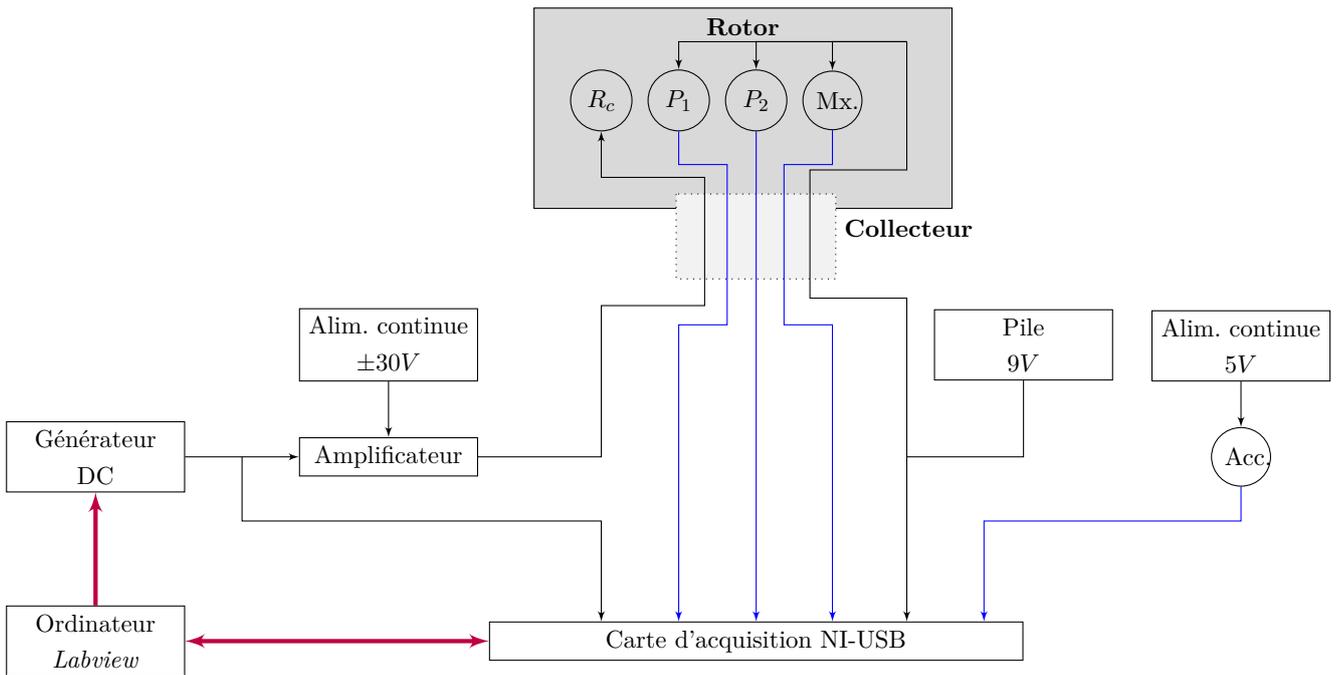


FIGURE 2.6 – Schéma du montage global. *Acc.* désigne l'accéléromètre, *Mx.* la carte de multiplexage, R_c la résistance chauffante. P_1 et P_2 sont les deux sondes de pression.

- 2×2 voies transmettent les signaux de sortie des sondes de pression P_1 et P_2 .

Afin de livrer une description plus complète de la chaîne de mesure, nous allons commencer par détailler le fonctionnement du multiplexage et de la carte électronique associée. Nous décrirons ensuite le montage électrique à l'extérieur de la centrifugeuse.

2.2.2 Circuit de multiplexage

2.2.2.1 Principe du multiplexage

Les thermistances sont branchées entre elles en série. On y ajoute, en tête de la série, une résistance de référence de valeur connue $R_{ref} = (10\,000 \pm 1)\,\Omega$. Les thermistances et la résistance de référence sont traversées par la même intensité. On peut alors relier la résistance de la i^e thermistance R_i en mesurant la tension v_i à ses bornes et la tension v_{ref} aux bornes de la résistance de référence via la formule

$$R_i = R_{ref} \frac{v_i}{v_{ref}}. \quad (2.4)$$

Le multiplexage consiste à renvoyer, sur un unique signal, les tensions v_i de chaque thermistance et v_{ref} tour à tour. Lorsque toutes les tensions ont été renvoyées, le cycle de multiplexage est terminé et un nouveau commence. Si la durée d'un cycle est assez réduite, nous pouvons considérer que les tensions ont peu varié durant celui-ci et nous utilisons dès lors l'équation (2.4) pour remonter aux résistances de chaque thermistance.

La carte de multiplexage repose sur un commutateur 16 canaux différentiels. Le premier canal correspond à la tension v_{ref} et les 12 suivants aux tensions v_i de chaque thermistance. Sur les trois

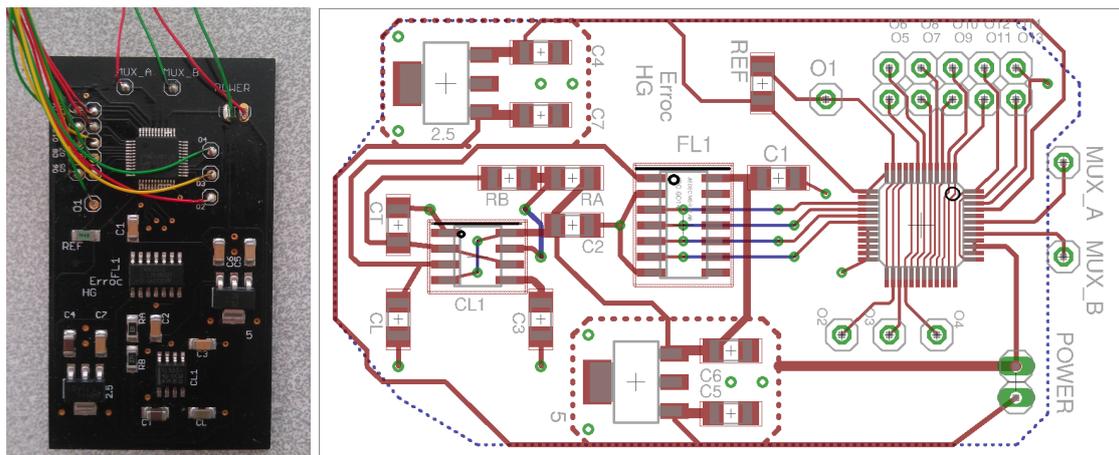


FIGURE 2.7 – (gauche) Photographie de la carte de multiplexage. Sa taille est de 36×65 mm. (droite) Schéma électrique de la carte.

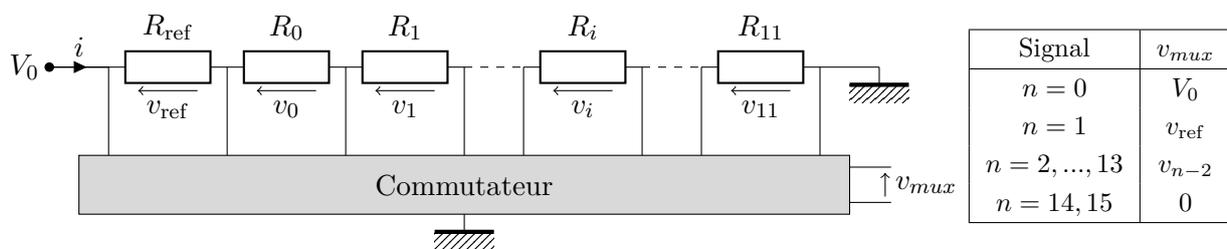


FIGURE 2.8 – Schéma de fonctionnement de la mesure des températures. Les thermistances sont branchées en série. Les entrées du multiplexeur sont reliées aux bornes des thermistances de façon à ce que sa tension de sortie v_s prenne cycliquement les valeurs indiquées dans le tableau.

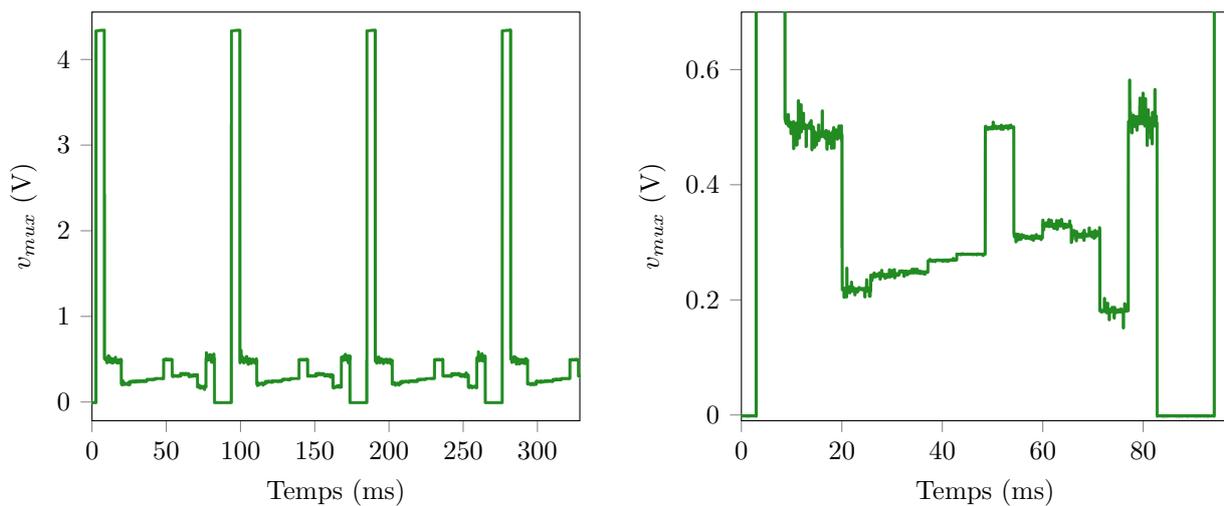


FIGURE 2.9 – (gauche) Signal obtenu en sortie du multiplexeur. Les grands pics servent à repérer le début de chaque cycle lors du démultiplexage. (droite) Zoom sur un cycle où l'on peut voir chaque palier correspondant à l'un des signal multiplexé.

canaux restant, deux sont reliés à la masse. Ils nous permettent de nous assurer de l'intégrité du circuit électronique. Enfin le dernier canal renvoie la tension d'alimentation de la chaîne de thermistances. Cette tension, beaucoup plus élevée que les autres, nous sert de signal de déclenchement (trigger) pour détecter le début d'un nouveau cycle lors du démultiplexage du signal.

2.2.2.2 Réalisation électronique

Le circuit électronique a tout d'abord été développé par Ludovic Huguet (Huguet, 2014), Michael Bergman, Franck Ropars (laboratoire de physique de l'ENS de Lyon) et Patrick La Rizza (ISTerre). La carte électronique a ensuite été dessinée par Yoann Corre et soudée par Christophe Galéa de l'entreprise CDB Électronique. Enfin Yoann Corre et moi-même y avons réalisé, après coup, quelques légères modifications.

La carte électronique est composée d'une horloge liée à un flip-flop contrôlant un commutateur Analog Devices ADG726BSUZ. L'horloge assure une fréquence de multiplexage de 11 Hz. Chaque tension aux bornes d'une thermistance est donc mesurée toutes les 91 ms ($= (11 \text{ Hz})^{-1}$) sur une fenêtre de 5,7 ms. La carte est alimentée en 9 V. Un premier régulateur de tension linéaire de 5 V assure l'alimentation de l'horloge, du flip-flop et du commutateur alors qu'un second de 2,5 V alimente la série de thermistances (c'est aussi cette tension qui sert de signal de déclenchement).

2.2.3 Circuit extérieur

Les sondes de pression et la carte de multiplexage sont alimentées depuis l'extérieur de la centrifugeuse par une batterie de 9 V. Nous utilisons une batterie plutôt qu'une alimentation continue afin de limiter le plus possible l'introduction de bruits parasites dans les signaux mesurés (en particulier le bruit à 50 Hz). L'accéléromètre au pied du rotor de la centrifugeuse est quant à lui alimenté par une alimentation continue annexe de 5 V. Enfin l'alimentation de la résistance chauffante (et donc la gestion du chauffage) est assurée par un générateur de courant continue Agilent E3640A contrôlé depuis un ordinateur via un câble série RS-232. Afin d'atteindre la tension d'alimentation maximale de la résistance chauffante de 28 V, le signal du générateur est amplifié à l'aide d'un montage amplificateur inverseur, de gain 3.9, alimenté en ± 30 V et utilisant un amplificateur opérationnel de puissance Texas Instruments OPA541AP.

Les signaux en provenance des sondes de pression, de la carte de multiplexage et de l'accéléromètre sont enregistrés avec une carte d'acquisition NI-USB 6210. Nous mesurons également la tension issue du générateur alimentant la résistance chauffante et la tension de la batterie U_{alim} pouvant légèrement varier durant une expérience et nécessaire à l'obtention des signaux de pression (équation (2.2)). Dans le but d'obtenir le plus grand nombre de points sur une fenêtre de signal multiplexé, nous avons fait les acquisitions à la plus grande fréquence d'échantillonnage possible : 35 kHz.

2.2.4 Traitement informatique

2.2.4.1 En direct avec Labview

L'acquisition des données et du contrôle du générateur alimentant la résistance chauffante est contrôlée sur ordinateur avec le logiciel Labview. Pour gérer au mieux le démultiplexage des signaux

de températures, nous avons créé un programme Labview permettant à la fois l'enregistrement des données brutes et une visualisation en direct des signaux de pression et température. En effet, il est possible de démultiplexer en direct un signal avec Labview, mais ce démultiplexage est difficile à mettre en place de façon stable avec des signaux bruités (ce qui est notre cas après que le signal ai passé le collecteur tournant) et peu paramétrable. Nous préférons donc enregistrer tous les signaux bruts pour les retravailler ensuite et pouvoir ainsi modifier les traitements appliqués dessus au besoin. Toutefois, il nous est aussi nécessaire durant une expérience d'avoir un suivi de celle-ci pour s'assurer de son bon déroulement et pouvoir, par exemple, l'arrêter en cas d'échauffement trop important pouvant l'endommager. Pour répondre à ces besoins, le programme utilise des mémoires tampons (buffer) qui lui permettent d'effectuer deux tâches parallèlement : d'un côté le stockage en direct des données provenant de la carte d'acquisition dans un buffer et de l'autre le traitement des données du buffer précédant. Le traitement consiste à l'enregistrement des données brutes dans un format binaire permettant d'être réutilisables par la suite, l'affichage des signaux de pression et un démultiplexage grossier des températures avec leurs affichages. Suite à des tests préliminaires, la taille du buffer à été choisie à 250 ms afin de laisser le temps au programme d'effectuer tous les traitements voulus avant de passer au buffer suivant. Le démultiplexage est ici qualifié de grossier car il n'extrait qu'une valeur de température par thermistance par buffer ce qui est suffisant lors du suivie d'une expérience en cours. Ce programme permet aussi de contrôler la résistance chauffante et changer la puissance qui y est dissipée en direct. Notons aussi que, nous avons aussi programmé la possibilité d'utiliser une boucle PID permettant l'asservissement de la température de la plaque de duraluminium en vue d'expériences à température de plaque chaude constante (au lieu d'une puissance dissipée constante). Nous n'avons malheureusement pas eu l'occasion d'en faire usage.

2.2.4.2 Post-traitement avec Python

Une fois l'expérience finie, les données brutes enregistrées sont retraitées avec Python. A cette fin, nous avons créée HyperGpy : une librairie python permettant une gestion simplifiée des données issues de l'expérience. Elle permet par exemple l'extraction automatique des températures, pressions, vitesses de rotations d'une expérience depuis les données brutes tout en ne chargeant et ne conservant en mémoire que les données utiles à l'utilisateur afin de ne pas surcharger la mémoire RAM (certains fichiers d'expériences pèsent plusieurs gigaoctets). En outre, elle permet la gestion et la sauvegarde des traitements intermédiaires faits sur les données (par exemple le calcul des pertes thermiques en fonction du temps).

En ce qui concerne le démultiplexage, la librairie agit de la façon suivante : elle détecte la position de chaque trigger ; l'intervalle entre deux triggers consécutifs est ensuite divisé en 16 parties égales de façon à isoler chaque palier correspond à un signal différent (2.9). Puis, une unique valeur est extraite de chaque palier en prenant la médiane du signal sur celui-ci. Nous avons choisi d'utiliser la médiane à cause du haut niveau de bruit et de la présence d'un nombre non négligeable de points aberrants très différents du reste du signal sur le palier (créés en grande partie par le passage par le collecteur tournant) qui biaise fortement l'estimation par la moyenne. De plus, lors de la prise de la médiane, les 5 premiers et les 5 derniers pourcents du palier sont ignorés pour se préserver du régime transitoire du commutateur lorsque ce dernier passe d'un signal à un autre, et d'un éventuel décalage dans la

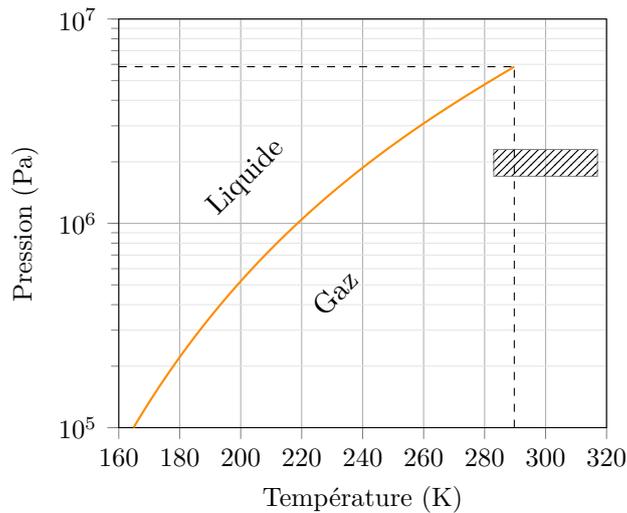


FIGURE 2.10 – Diagramme de phase du xénon (obtenu avec CoolProp). Les coordonnées du point critique sont $T_c = 289,7$ K et $p_c = 5,842$ MPa. La zone hachurée correspond approximativement aux valeurs atteignables dans l'expérience.

détermination des limites des paliers.

2.3 Xénon

2.3.1 Choix du xénon et paramètres expérimentaux

Le fluide retenu pour l'expérience est le xénon gazeux. La compressibilité des gaz étant plus élevée que celle des liquides, il est naturel de les privilégier afin d'accroître ces effets. Parmi les gaz possibles, le xénon a été choisi car il possède l'une des plus faible capacité thermique c_p (le radon ayant été écarté à cause de sa radioactivité), ce qui permet de maximiser d'autant plus le nombre de dissipation. Le xénon est aussi avantageux de par sa masse élevée car l'amplitude des fluctuations de température est proportionnelle à la densité du gaz. La cellule expérimentale est initialement remplie de xénon à une pression de 2 MPa (=20 bar) à température ambiante. La densité du xénon est alors de l'ordre de 120 kg m^{-3}). C'est ici l'un des autres avantages du xénon, sa densité élevée permet d'observer plus facilement les fluctuations de température dont l'amplitude lui est proportionnelle. Bien que la pompe dont nous nous servons permet un remplissage jusqu'à 4 MPa, nous n'avons pas réussi à dépasser une pression de 2 MPa sans que des problèmes d'étanchéité apparaissent.

2.3.2 Description du xénon

Le xénon est un gaz rare monoatomique de masse molaire $M = 131,3 \text{ g mol}^{-1}$. Son diagramme de phase est représenté 2.10. Il reste gazeux dans les conditions de l'expérience ($T \in [280 \text{ K}; 330 \text{ K}]$, $p \in [1,75 \text{ MPa}; 2,25 \text{ MPa}]$). Toutefois, son point critique, de coordonnées $T_c = 289,7$ K et $p_c = 5,842$ MPa est relativement proche ce qui fait qu'on ne peut pas le considérer comme parfait. Par exemple, son facteur de compressibilité $p/(\rho \mathcal{R}_s T)$ à 300 K et 2 MPa est déjà de 0,889 (au lieu de 1 s'il avait été parfait). Puisqu'il n'existe pas d'équation d'état analytique décrivant le xénon dans ces conditions et

		Gaz parfait	Xe réel	
Masse molaire	M	0.1313	0.1313	kg mol^{-1}
Masse volumique	ρ_0	105	118	kg m^{-3}
Capacité thermique massique à volume constant	c_v	95	105	$\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$
Capacité thermique massique à pression constante	c_p	158	204	$\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$
Rapport des capacités ther- miques	$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$	$\frac{5}{3} \simeq 1.66$	1.95	
Coefficient d'expansion ther- mique isobare	α	$3,33 \times 10^{-3}$	$4,73 \times 10^{-3}$	K^{-1}
Produit αT	αT	1	1.42	
Coefficient d'expansion ther- mique entropique	$\alpha_s = \frac{\alpha T}{c_p}$	$6,33 \times 10^{-3}$	$6,94 \times 10^{-3}$	K kg J^{-1}
Conductivité thermique	k	-	$6,54 \times 10^{-3}$	$\text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}$
Viscosité dynamique	η	-	$2,46 \times 10^{-5}$	Pa s
Nombre de Prandtl	$\text{Pr} = \frac{\eta c_p}{k}$	$\frac{2}{3} \simeq 0.66$	0.77	

TABLE 2.2 – Propriétés thermodynamiques du xénon à 300 K et 2 MPa. Excepté pour la conductivité thermique (Vargaftik, 1993) et la viscosité (Hanley et al., 1974), toutes les valeurs ont été évaluées avec la librairie CoolProp (Bell et al., 2014) utilisant l'équation d'état empirique du xénon donnée par Lemmon and Span (2006).

que nous n'avons pas trouvé de table le décrivant avec une résolution suffisante dans notre domaine d'étude, nous avons choisi d'utiliser la librairie C++/Python CoolProp (Bell et al., 2014). Cette librairie permet d'évaluer de nombreux paramètres thermodynamiques aux conditions spécifiées par l'utilisateur pour un grand nombre de fluides. Pour ce faire, elle utilise un développement de l'énergie libre du fluide dont les paramètres sont ajustés à des données expérimentales. Les différentes dérivées de ce développement lui permettent alors l'évaluation de la plupart des grandeurs thermodynamiques du fluide. Dans le cas du xénon, les coefficients du développement de l'énergie libre proviennent de l'équation d'état empirique du xénon donnée par Lemmon and Span (2006). La table 2.2 indique les principales caractéristiques du xénon à 300 K et 2 MPa calculées avec CoolProp, et les compare au cas d'un gaz parfait de même masse molaire.

Sur la figure 2.11, nous avons représenté avec CoolProp les variations de ρ , c_p , α , α_s et χ dans les conditions de l'expérience. Le profil adiabatique étant isentropique, nous y avons ajouté les isentropes le long desquels devrait s'établir le profil adiabatique. Cela permet par exemple de se rendre compte qu'entre le haut et le bas d'une isentrope, le coefficient d'expansion thermique isobare α peut présenter une variation de l'ordre de 10%. A l'inverse, le coefficient d'expansion thermique entropique α_s varie très peu le long des isentropes (ses iso-valeurs étant presque confondues avec les isentropes). De plus sa valeur varie de moins de 5% sur l'ensemble du domaine. Nous considérerons donc que α_s reste constant dans toute la suite. L'intégration du gradient adiabatique de température (1.17) donne alors

un profil de température similaire au cas du gaz parfait. Soit pour une gravité linéaire $\mathbf{g} = r\Omega^2\mathbf{e}_r$ dans la centrifugeuse, un profil théorique attendu

$$T_a = T_a^{max} + \frac{\alpha_s \Omega^2}{2} (r^2 - r_{max}^2), \quad (2.5)$$

où T_a^{max} est la température au niveau de la plaque de duraluminium en $r = r_{max}$.

2.3.3 Profil adiabatique dans le xénon réel

Des simulations du profil adiabatique du xénon réel ont été réalisées à l'aide de la librairie CoolProp. Pour ce faire, nous avons résolu (avec la librairie `scipy.integrate` de Python) les équations du profil adiabatique en pression et température. La gravité étant radiale dans l'expérience, la résolution utilise la variable $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et détermine $T_a(r)$ et $p_a(r)$. A chaque itération, les quantités dérivées ρ_a , α_a , $c_{p,a}$, nécessaires à la résolution, ont été évaluées avec la librairie CoolProp. Lors de la résolution, nous fixons la valeur de la température du profil adiabatique au niveau de la plaque $T_a(r_{max})$ et nous gardons la solution qui conserve la masse sur l'ensemble de la cavité par rapport à la situation d'un remplissage isotherme sans rotation à la température $T_i = 300$ K et la pression $p_i = 2$ MPa. Afin de permettre l'intégration de la masse volumique sur l'ensemble de la cavité, la résolution est aussi faite pour les rayons légèrement supérieurs à r_{max} car les coins de la cavité les plus éloignés de l'axe sont à une distance $\sqrt{r_{max}^2 + (H/2)^2}$ de celui-ci. Les résultats sont représentés sur la figure 2.12 par les trois vitesses de rotation réalisées expérimentalement 5000 rpm, 7000 rpm et 9990 rpm. La résolution a aussi été faite dans le cas d'un gaz parfait de même masse molaire que le xénon. L'erreur principale faite, en considérant le xénon parfait, est sur le profil de masse volumique adiabatique ρ_a qui est de l'ordre de 10%. L'erreur sur le profil de température est plus réduite, elle est de l'ordre de 2 K à la plus forte rotation (9990 rpm).

Ces simulations sont aussi l'occasion de revenir sur l'hypothèse de l'invariance de $\alpha_{s,a}$ dans la cavité. En effet, le profil de température obtenu numériquement et le profil théorique (2.5) avec $\alpha_{s,a} = \alpha_s(300 \text{ K}, 2 \text{ MPa})$ constant sont extrêmement proches. La plus forte différence observée est de 20 mK à 9990 rpm. Sur la figure 2.12, cet écart est plus petit que l'épaisseur du trait. Cela confirme de nouveau la pertinence de cette approximation.

2.4 Simulations thermiques du dispositif

2.4.1 Perte thermique

2.4.1.1 Contexte

L'évaluation des pertes thermiques par conduction dans l'expérience est cruciale. En effet, une partie non négligeable de l'énergie dissipée dans la résistance chauffante est évacuée par conduction dans les parois et ne participe donc pas au chauffage du gaz. Nous décomposons donc la puissance totale dissipée dans la résistance chauffante Φ_T sous la forme

$$\Phi_T = \Phi + \Phi_{perte}, \quad (2.6)$$

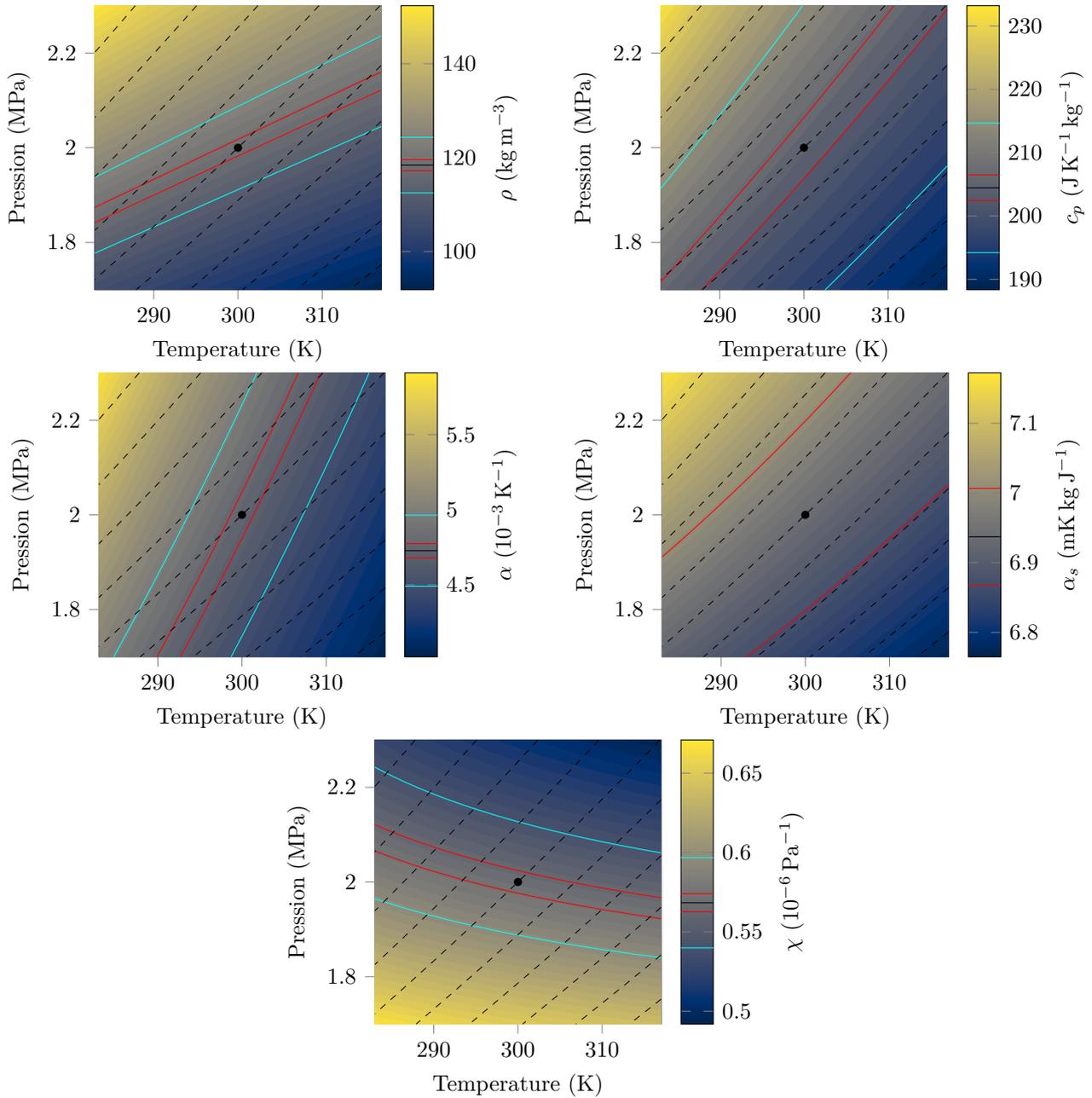


FIGURE 2.11 – Variation de la masse volumique ρ , capacité thermique massique c_p , coefficient d'expansion isobare α , coefficient d'expansion entropique α_s et compressibilité isotherme $\chi = \rho^{-1}(\partial\rho/\partial p)_T$ sur le domaine exploré par l'expérience. Les courbes en pointillés noirs sont les isentropes. Les courbes rouges (resp. cyan) correspondent à une variation de 1% (resp. 5%) de chaque quantité par rapport à sa valeur centrale à 300 K, 2 MPa.

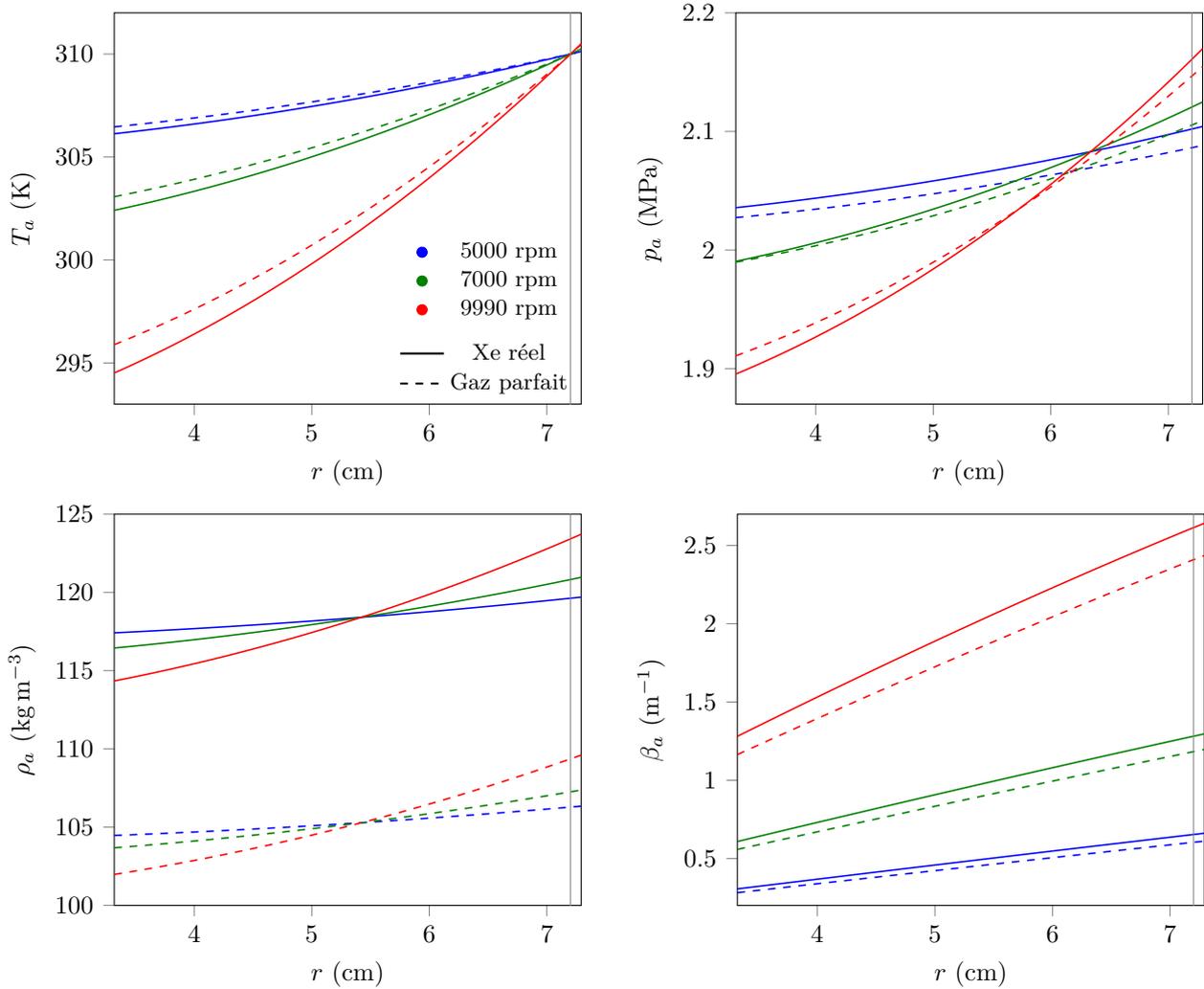


FIGURE 2.12 – Profils adiabatiques de température T_a , de pression p_a , de masse volumique ρ_a et de la quantité $\beta_a = \rho_a^{-1}(d\rho_a/dr)$ en fonction de la distance radiale r dans la cavité pour trois vitesses de rotation Ω différentes obtenus par résolution numérique avec la librairie CoolProp pour le xénon réel et les équations établies au paragraphe section 1.1.5.3 pour le gaz parfait. La masse de xénon est équivalente à celle d'un remplissage homogène à 300 K et 2 MPa. La condition imposée au centre de la plaque inférieure (trait vertical) est $T(r_{max}) = 310$ K.

où Φ est la puissance effective servant au chauffage du gaz et Φ_{perte} la puissance perdue par conduction dans le dispositif. Puisque nous avons accès expérimentalement aux températures de la plaque de duraluminium T_{hot} et du titane entourant le cylindre de polycarbonate T_{ext} , nous pouvons évaluer les pertes thermiques en introduisant la résistance thermique R_{th} du dispositif

$$\Phi_{perte} = \frac{T_{hot} - T_{ext}}{R_{th}}. \quad (2.7)$$

Connaître la résistance thermique permet donc une mesure simple et en temps réel des pertes thermiques. Nous n'avons pas trouvé de protocole fiable permettant une bonne estimation de la valeur de R_{th} . C'est pourquoi, nous avons préféré l'estimer via une simulation numérique de la conduction thermique de notre dispositif.

2.4.1.2 Simulation numérique

La partie du dispositif implémentée dans la simulation (notée \mathcal{V}) correspond au cylindre de polycarbonate, à la pièce de PEEK en forme de U, et aux couches d'aérogel situées aux bords de la cavité et à l'intérieur du U. La méthode pour estimer R_{th} est la suivante : on impose une différence de température ΔT entre la plaque de duraluminium et le godet en titane à l'extérieur. Le gaz n'est pas modélisé dans cette simulation. Toutefois, pour des besoins de définition de conditions aux limites, nous considérons qu'il se trouve à la température moyenne entre l'extérieur et la plaque de duraluminium. On résout ensuite l'équation de la chaleur stationnaire dans \mathcal{V} . On déduit de la solution le flux thermique Φ_{perte} sortant de la plaque de duraluminium au niveau des faces qui ne sont pas en contact avec le gaz. Enfin la résistance thermique est estimée en prenant

$$R_{th} = \frac{\Delta T}{\Phi_{perte}}. \quad (2.8)$$

Nous utilisons le logiciel FreeFem++ (Hecht, 2012) de résolution d'équations différentielles par éléments finis. La géométrie du dispositif étant complexe (cavité cubique dans un cylindre), nous avons choisi de remplacer cette géométrie par son équivalent axisymétrique (cavité cylindrique dans un cylindre ; le rayon de la cavité cylindrique est choisi de façon à conserver la section de la cavité initiale). Numériquement, cela nous permet de passer de la résolution d'un problème 3D à un problème 2D axisymétrique. L'équation de la chaleur axisymétrique à résoudre s'écrit, dans le repère cylindrique (r, θ, z) associé,

$$0 = \nabla \cdot (k_m(r, z) \nabla T) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k_m(r, z) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(r k_m(r, z) \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (2.9)$$

où $k_m(r, z)$ est la conductivité thermique du matériau à la position (r, z) (donnée dans la table 2.1). Puisque FreeFem++ impose l'écriture des équations sous formes faibles, le problème est donc réécrit sous sa formulation faible

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathcal{V}} r k_m(r, z) \left(\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial T^*}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial T^*}{\partial z} \right) = 0, \\ T = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{Ti}, \\ T = \Delta T \quad \text{sur } \Gamma_{dural}, \\ T = \Delta T/2 \quad \text{sur } \Gamma_{gaz}. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.10a) \\ (2.10b) \\ (2.10c) \\ (2.10d) \end{array}$$

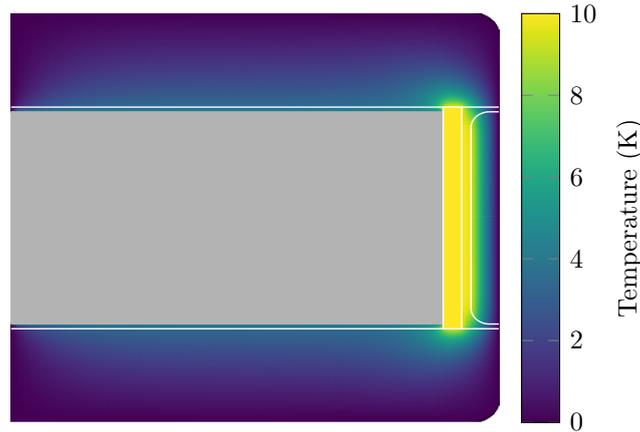


FIGURE 2.13 – Simulation thermique du dispositif. Une différence de 10 K est imposée entre la plaque de duraluminium et l’extérieur. La partie grise correspond au gaz supposé être à la température moyenne entre la plaque de duraluminium et l’extérieur.

où T^* est la fonction test associée à T et Γ_{Ti} , Γ_{dural} , Γ_{gaz} sont les frontières de \mathcal{V} en contact avec le godet en titane, la plaque de duraluminium et le gaz. Enfin, une fois le problème résolu, le flux thermique perdu Φ_{perte} est calculé à partir de l’expression

$$\Phi_{perte} = \int_{\Gamma_{dural}} k_m(r, z) \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (2.11)$$

La figure 2.13 représente le résultat de notre simulation sur un maillage de 123081 points pour une différence de température $\Delta T = 10$ K. La résistance thermique y est évaluée à $R_{th} = 40$ K W⁻¹. Puisque la simulation ne reproduit pas fidèlement la géométrie complexe de l’expérience, la valeur obtenue de résistance thermique doit être relativisée. Au vu de nos mesures, il nous semble raisonnable d’associer une incertitude de 25% à cette valeur. Dans les faits, cela revient à associer une incertitude de 25% à l’estimation des pertes Φ_{perte} donnée par l’équation (2.7).

2.4.2 Capacité thermique

Une autre grandeur qui nous sera utile dans la partie section 3.6 est la capacité thermique du dispositif, en particulier au début d’une expérience lorsque nous commençons à chauffer. Nous réalisons donc une autre simulation numérique, instationnaire, afin de l’évaluer. Nous reprenons la même géométrie que pour la simulation précédente des pertes thermiques. Nous considérons que le dispositif est initialement isotherme à la température $T = 0$. A $t > 0$, le dispositif est chauffé avec un flux Φ_T . La résistance chauffante étant difficilement modélisable au vu de sa finesse, nous considérons plutôt que le chauffage est également réparti dans la plaque de duraluminium. L’équation de la chaleur s’écrit alors

$$\rho_m(r, z) c_{p,m}(r, z) \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k_m(r, z) \nabla T) + \Sigma_Q(r, z), \quad (2.12)$$

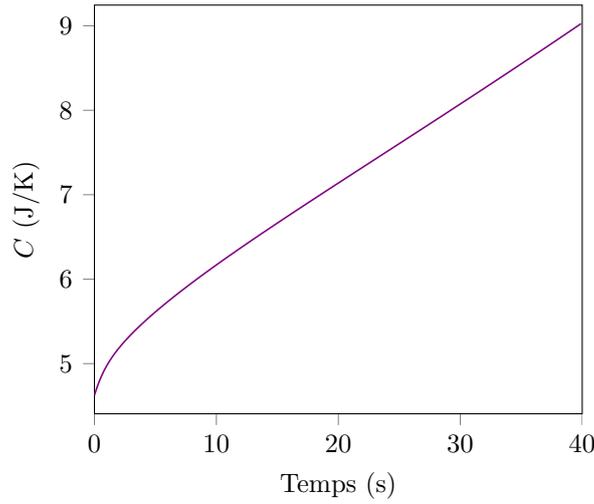


FIGURE 2.14 – Capacité thermique effective du dispositif en fonction du temps estimée à partir de la simulation thermique avec un pas de temps $\delta t = 0,1$ s.

où $\rho_m(r, z)$, $c_{p,m}(r, z)$, $k_m(r, z)$ sont la masse volumique, la capacité thermique et la conductivité thermique du matériaux situé en (r, z) . $\Sigma_Q(r, z)$ est la source de chaleur apportée par le chauffage

$$\Sigma_Q(r, z) = \frac{\Phi_T}{V_{\text{dural}}} \mathbb{1}_{\text{dural}}(r, z) \quad (2.13)$$

où V_{dural} est le volume de la plaque de duraluminium et $\mathbb{1}_{\text{dural}}$ sa fonction indicatrice. Pour la résolution numérique, nous utilisons un schéma d'Euler implicite. Avec un pas de temps δt et e notant T^* la fonction test associée à T , la formulation faible du problème est

$$\left\{ \int_{\mathcal{V}} \left[r \rho_m c_{p,m} \frac{T - T^{n-1}}{\delta t} T^* + r k_m \left(\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial T^*}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial T^*}{\partial z} \right) - r \Sigma_Q T^* \right] = 0, \quad (2.14a) \right.$$

$$T = 0 \text{ sur } \Gamma_{Ti}, \quad (2.14b)$$

où T^{n-1} est la température au pas de temps précédant.

À partir des résultats de la simulation, nous estimons une capacité calorifique effective C du dispositif en regardant sa vitesse d'échauffement via

$$C = \frac{\Phi_T}{\frac{\partial \langle T \rangle_{\text{dural}}}{\partial t}} \quad (2.15)$$

où $\langle T \rangle_{\text{dural}}$ est la température moyenne de la plaque de duraluminium. L'évolution de C en fonction du temps est représentée figure 2.14. De part la linéarité de l'équation de la chaleur (2.12), cette estimation de C est indépendante du flux de chaleur Φ_T . Lorsque l'on commence à chauffer, nous observons que C augmente quasi-linéairement de 5 J/K à 9 J/K sur les 40 premières secondes. Comme pour la résistance thermique, cette évaluation est approximative. Elle est toutefois suffisante pour connaître l'ordre de grandeur de la capacité thermique du dispositif qui est par exemple bien plus grande que la capacité thermique totale du xénon dans la cavité : $\rho_0 c_p L H^2 = 0,6$ J/K.

3

Résultats expérimentaux

Sommaire

3.1	Expériences réalisées	55
3.2	Observation du gradient adiabatique	58
3.3	Transfert thermique turbulent	61
3.3.1	Nombre de Rayleigh super-adiabatique et nombre de Nusselt dans l'expérience	61
3.3.2	Loi de puissance Rayleigh-Nusselt	63
3.4	Étude des fluctuations	67
3.4.1	Fluctuations de température	67
3.4.1.1	Amplitude des fluctuations et spectre de puissance	67
3.4.1.2	Décomposition orthogonale aux valeurs propres	69
3.4.2	Fluctuations de pression	69
3.4.3	Ordres de grandeur des fluctuations de température et de pression	72
3.5	Géométrie de l'écoulement et flux thermique convectif	75
3.6	Mise en place de la convection	76
3.7	Conclusions sur l'expérience	78

Les résultats expérimentaux présentés ici ont fait l'objet d'un article publié dans la revue *Physical Review Fluid* (Menaut et al., 2019). Ce chapitre en est une retranscription en français légèrement réarrangée et agrémentée de compléments.

3.1 Expériences réalisées

Nous avons réalisé des expériences à trois vitesses de rotations différentes 5000 rpm, 7000 rpm et 9990 rpm. Nous n'avons pas pu faire de mesures à des vitesses de rotations plus élevées à cause de dysfonctionnements de la carte de multiplexage (et en particulier de la puce du commutateur) quand elle est soumise à une trop forte rotation. Pour la vitesse de rotation la plus élevée, nous avons choisi de nous placer à 9990 rpm plutôt que 10 000 rpm par praticité : la centrifugeuse impose un vide partiel dans sa cuve à partir de cette valeur, ce qui aurait obligé de veiller à son étanchéité.

Deux campagnes expérimentales ont été faites et ont été arrêtées à chaque fois par la mise hors service de la carte de multiplexage et la nécessité d'en changer. Entre ces deux campagnes, l'ajout d'un

amplificateur en amont de la résistance chauffante a permis d'augmenter la puissance maximale de chauffage possible de 4,76 W à 9,33 W. De plus des tests supplémentaires ont mis à jour un problème d'isolation entre certaines voies du collecteur tournant qui a donc été recâblé pour la seconde campagne. Du point de vue des mesures, le seul impact visible de ce problème d'isolation est la présence d'un offset dans la mesure de pression de la seconde sonde P_2 . Enfin, une troisième campagne a été mise en place. Le circuit de mesure y était entièrement repensé : seules 5 températures étaient mesurées afin de se passer du multiplexage et d'acquérir leurs signaux directement et à plus haute fréquence. Cela aurait dû permettre d'approfondir l'analyse des fluctuations de températures de la partie section 3.4.1 et de la loi de puissance Rayleigh-Nusselt (et en particulier de l'hystérésis associée) de la partie section 3.3. Une défaillance rédhibitoire de la résistance chauffante, dès la première expérience, nous a malheureusement fait arrêter cette campagne sans qu'aucune mesure fiable n'est été réalisée.

Pendant une expérience, la vitesse de rotation est gardée constante et nous changeons, par palier, la puissance dissipée dans la résistance chauffante. Pour chaque valeur de puissance, nous attendons approximativement 3 minutes pour atteindre l'état stationnaire avant de changer sa valeur. De plus, afin de ne pas surchauffer le dispositif (l'aérogel se dégrade au dessus de 80 °C), nous commençons par la puissance la plus forte, puis nous la diminuons petit à petit. Lors des expériences, la forte rotation rend fréquentes les pertes momentanées de signal et la casse des composants. Ainsi sur la quinzaine d'expériences réalisées pendant les deux campagnes, seules six d'entre-elles sont réellement exploitables. Elles sont représentées sur la figure 3.1. Afin de pouvoir différencier les données de chacune de ces expériences par la suite, nous les nommerons A5, A7, A10, B7a, B7b, B10 : la lettre A ou B indique si elles proviennent de la première ou la seconde campagne et le numéro est relatif à la vitesse de rotation. Puisque que le remplacement d'un composant cassé à l'intérieur de la cellule n'est pas aisé, nous avons, à plusieurs reprises, préféré continuer les expériences et nous passer de quelques mesures. Cela explique l'absence de certain signaux sur la figure 3.1. Les puissances de chauffages testées pour chacune des expériences sont listées dans la table 3.1.

	Φ_T (W)	0	0.07	0.15	0.3	0.58	1.2	2.3	3	4.8	5.8	6.9	9.3
A5	5000 rpm	✓					✓	✓		✓			
A7	7000 rpm	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓			
B7a	7000 rpm	✓		✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
B7b	7000 rpm	✓		✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
A10	9990 rpm	✓	✓	✓	✓		✓	✓		✓			
B10	9990 rpm	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

TABLE 3.1 – Expériences réalisées, en terme de vitesse de rotation et de puissance Φ_T dissipée dans la résistance chauffante.

Dans la table 3.2, nous présentons l'accélération maximale dans l'expérience au niveau de la plaque chaude (à une distance $r_{max} = 7,2$ cm de l'axe. À partir de cette valeur, nous déterminons le nombre de dissipation \mathcal{D} défini à l'équation (1.52), et le nombre d'Ekman E défini à l'équation (1.60) et le gradient de température adiabatique maximal $\alpha_{s,0}g_0$, en utilisant la gravité maximale $g_0 = r_{max}\Omega^2$, la hauteur de la cavité $L = 3,9$ cm, et les données sur le xénon de la table 2.2

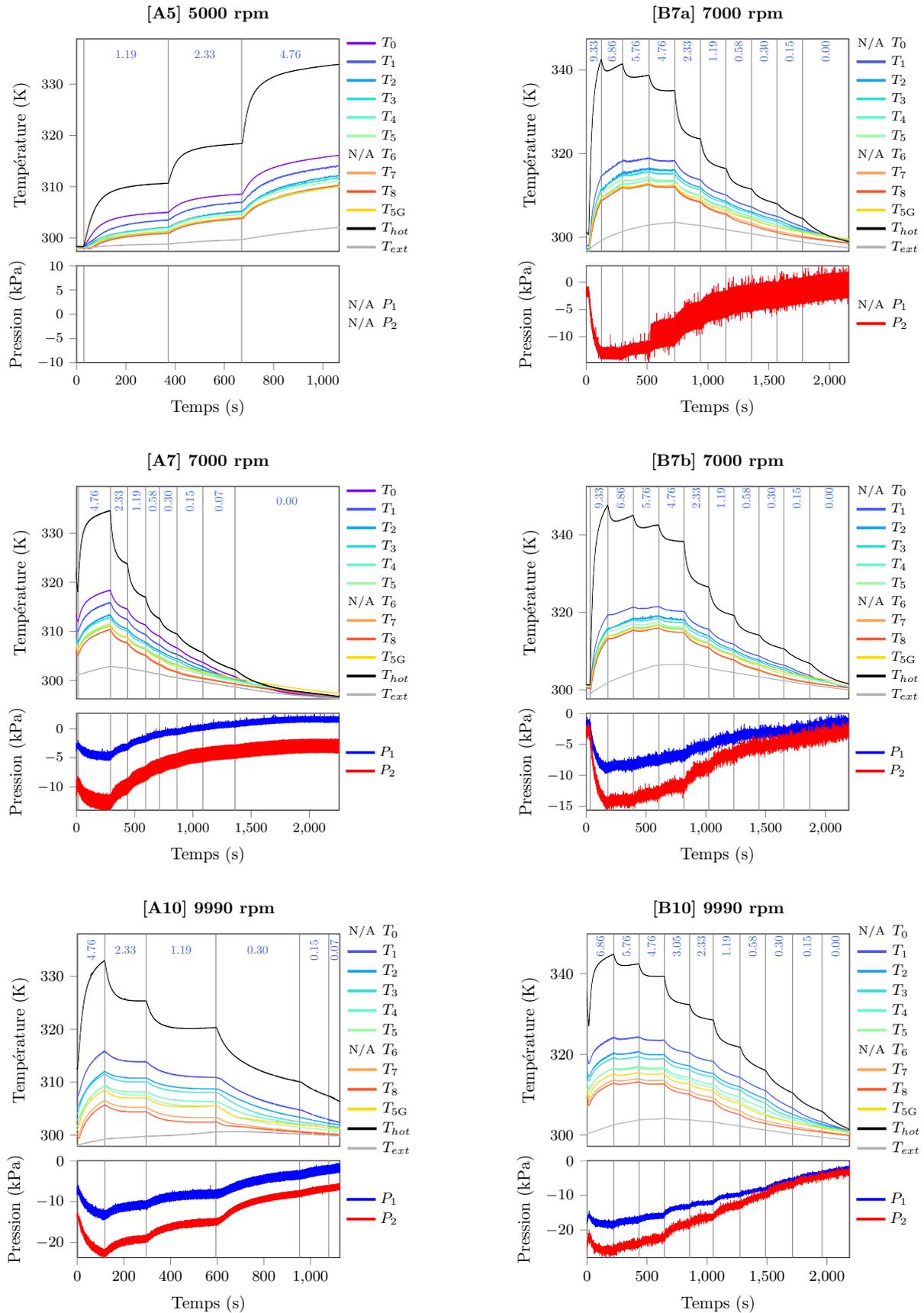


FIGURE 3.1 – Températures et pressions mesurées pendant les six expériences retenues. Les nombres bleus en haut des figures indiquent la puissance de chauffage totale Φ_T dissipée dans la résistance chauffante. Plus une sonde est loin de la plaque de duraluminium où le gaz est chauffé, plus son numéro est élevé.

Vitesse de rotation Ω (rpm)	Gravité apparente maximale $g_0 = r_{max}\Omega^2$ (m s^{-2})	Gradient adiabatique maximal $\alpha_s g_0$ (K m^{-1})	Nombre de dissipation $\mathcal{D} = \frac{\alpha_0 r_{max} \Omega^2 L}{c_{p,0}}$	Nombre d'Ekman $E = \frac{\eta}{\rho_0 \Omega L^2}$
0	9.81	0.068	8.8×10^{-6}	$+\infty$
5000	19700	137	0.018	2.6×10^{-7}
7000	38700	268	0.035	1.9×10^{-7}
9990	78800	547	0.071	1.3×10^{-7}

TABLE 3.2 – Paramètres de l'expérience en fonction de la vitesse de rotation.

3.2 Observation du gradient adiabatique

Lorsque le chauffage est assez fort, le profil de température observé dans la cellule n'est plus isotherme. Il est proche du profil adiabatique théorique du xénon établi au paragraphe section 2.3.3 : en ajustant la température de référence T_a^{max} (non imposée par notre dispositif) dans l'équation (2.5) par moindres carrés sur les températures de T_0 à T_8 (en excluant T_{hot} et T_{ext}) ; nous obtenons un très bon accord entre les courbes théoriques et expérimentales (figure 3.2). Comme attendu, la forme du profil dépend seulement de la gravité (*i.e.* la vitesse de rotation) en dehors des couches limites pour les puissances de chauffage assez élevées. Nous mesurons un gradient adiabatique moyen de 3,5 K/cm à 9990 rpm.

Quand le chauffage est faible, le profil de température redevient isotherme. La transition s'effectue lorsque le chauffage effectif Φ est proche de zéro. Plus précisément, le gradient adiabatique n'est plus observé dès lors que 0 W est compris dans l'intervalle d'incertitude de Φ . Cette incertitude sur l'évaluation du chauffage effectif rend difficile l'estimation précise de la transition de régime. Sur la figure 3.3, nous représentons la différence entre le profil de température observé et le profil théorique (équation (2.5)) à différentes puissances de chauffage pour chaque expérience. Il apparaît qu'il y a un flux de chauffage optimal correspondant à la meilleure régression entre le profil de température et le profil adiabatique. A $\Omega = 9990$ rpm, ce flux optimal vaut $\Phi = 0,7$ W (correspondant à un flux total $\Phi_T = 1,19$ W). Aux flux de chauffage plus faibles, la convection est probablement trop peu intense pour imposer le profil adiabatique (la courbe de flux effectif $\Phi = (70 \pm 20)$ mW est isotherme), alors qu'à plus haut flux, les contributions des fluctuations de la température super-adiabatique deviennent assez larges pour perturber le profil adiabatique. Nous pouvons voir sur la figure 3.1 que la différence de température super-adiabatique ΔT_{sa} devient progressivement plus grande que la différence de température adiabatique ΔT_a sur la cavité lorsque la puissance de chauffage dépasse $\Phi_T = 1,19$ W.

Plutôt que d'utiliser la valeur théorique de α_s , nous avons aussi essayé de déterminer une valeur α_s^{fit} pour ajuster les données de températures expérimentales dans la cellule avec une loi radiale quadratique de la forme

$$T_{fit}(r) = T_{fit}^{max} + \alpha_s^{fit} \frac{\Omega^2}{2} (r^2 - r_{max}^2). \quad (3.1)$$

Les deux paramètres T_{fit}^{max} et α_s^{fit} sont, encore une fois, déterminés par la méthode des moindres carrés. Les valeurs de α_s^{fit} obtenues sont représentées sur la figure 3.4 en fonction du flux de chauff-

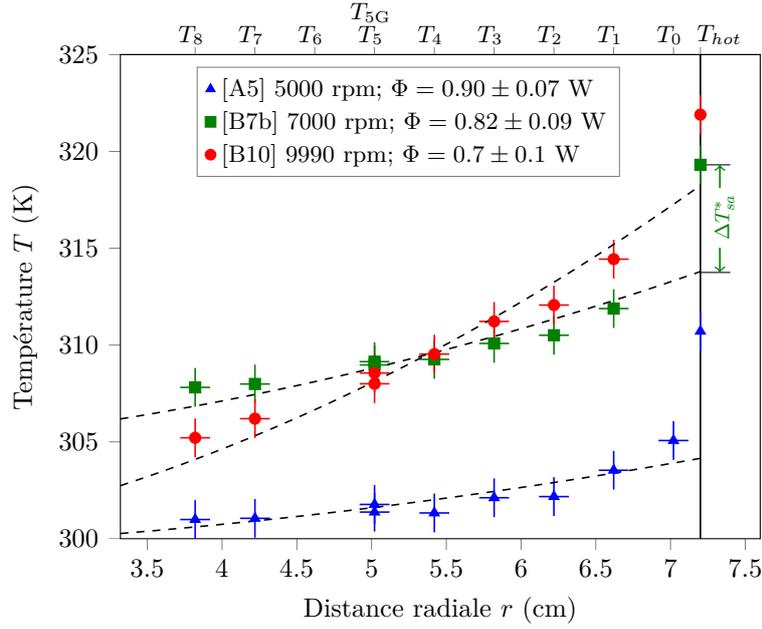


FIGURE 3.2 – Profil de température moyenné sur 30 s pour $\Omega = 5000, 7000, 9990$ rpm pour une puissance totale dissipée $\Phi_T = 1,19$ W. Les lignes en pointillés correspondent aux profils théoriques attendus définis par l'équation (2.5) où T_a^{max} est ajustée par moindres carrés. La ligne noire verticale est la paroi inférieure de la cavité.

fage effectif pour différentes vitesses de rotation. Pour les plus faibles flux (~ 10 mW) le profil de température est quasiment isotherme induisant une valeur de α_s^{fit} tendant vers zéro. En dessous de 100 mW, la valeur de α_s^{fit} reste significativement plus faible que la valeur adiabatique α_s . Au dessus de 100 mW, l'augmentation du chauffage rapproche α_s^{fit} de α_s . Dans la figure 3.5, nous représentons la différence entre le profil de température mesuré et l'expression (3.1) utilisant α_s^{fit} pour les flux de chauffage supérieurs à 200 mW. La figure 3.5 est analogue à la figure 3.3 mais utilise (3.1) à la place du profil adiabatique théorique (2.5). Nous observons dans la figure 3.5, que l'écart à l'ajustement quadratique augmente avec le flux de chauffage.

Le saut de température à travers la couche limite thermique inférieure (lié à la plaque chaude) est estimé de la façon suivante : la courbe quadratique de température obtenue par ajustement des données expérimentales est extrapolée au niveau de la plaque chaude ; nous prenons alors la différence entre température mesurée dans la plaque T_{hot} et cette température extrapolée. Nous notons ΔT_{sa}^* cette différence de température super-adiabatique liée à la couche limite chaude. Elle est donc définie, comme montré sur la figure 3.2, par

$$\Delta T_{sa}^* = T_{hot} - T_a^{max} \quad (3.2)$$

Puisque, les conditions aux limites ne sont pas bien définies pour la plaque supérieure froide à cause de la géométrie de l'expérience, il n'est pas possible de mesurer expérimentalement la différence de température super-adiabatique totale ΔT_{sa} défini au chapitre section 1.3.2 (équation (1.50)). Nous utiliserons donc par la suite ΔT_{sa}^* pouvant être vu comme une mesure indirecte du caractère super-adiabatique de l'expérience. Expérimentalement, nous trouvons ΔT_{sa}^* de l'ordre de 10 K.

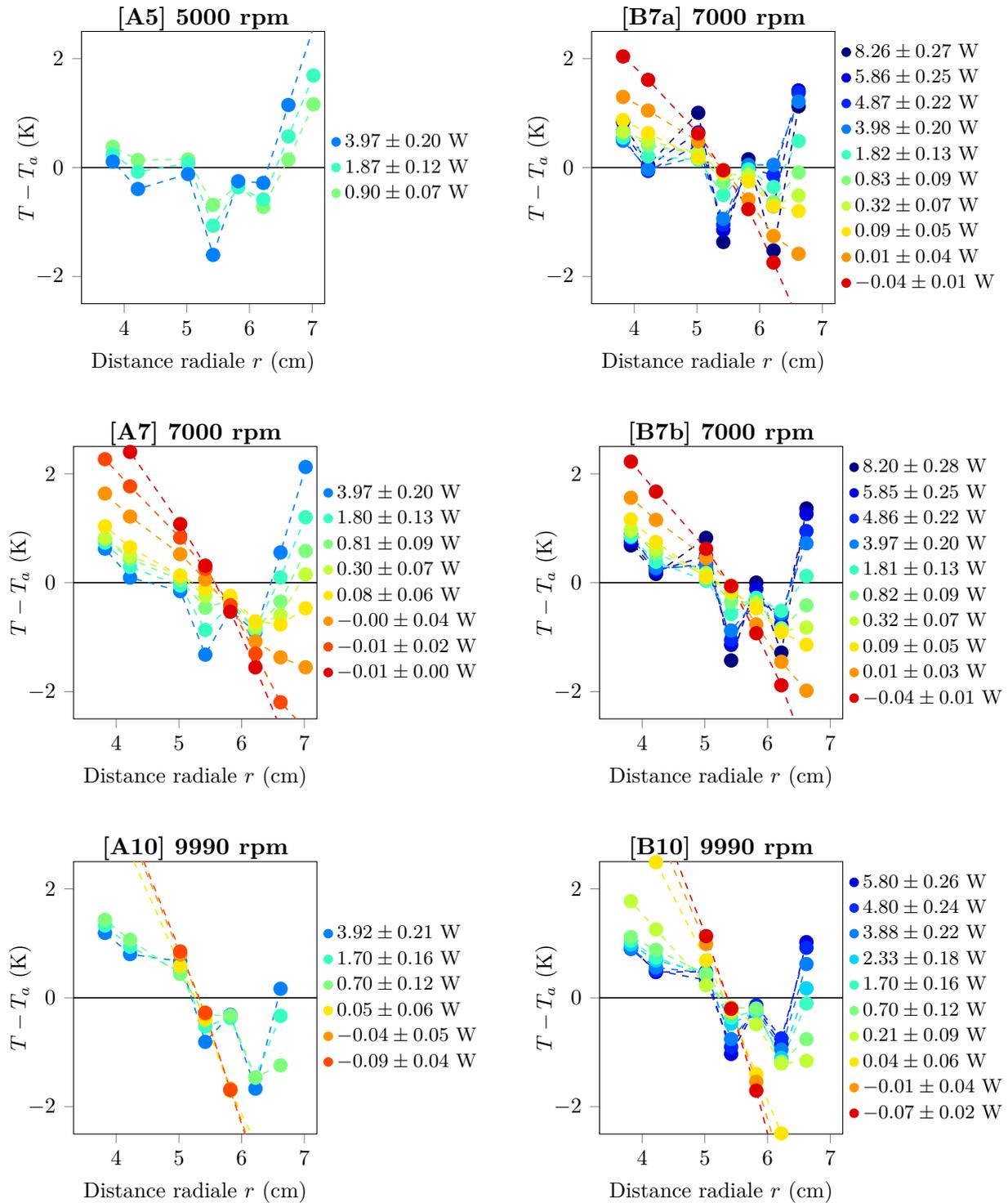


FIGURE 3.3 – Différence entre le profil de température mesuré T moyéné sur 30s et le profil théorique attendu T_a en fonction du flux effectif de chauffage Φ pour chaque expérience.

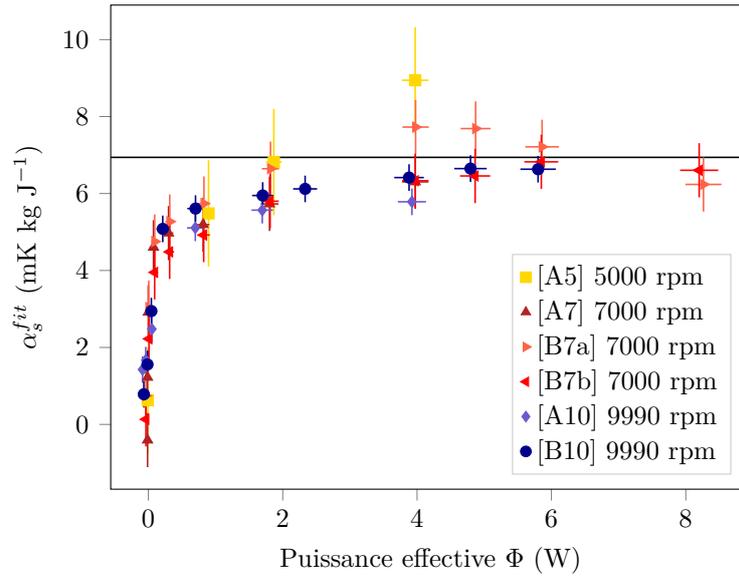


FIGURE 3.4 – Meilleur coefficient α_s^{fit} obtenu lors de l’ajustement à la loi quadratique (3.1) en fonction du flux effectif de chauffage Φ . La ligne horizontale correspond à la valeur du profil adiabatique théorique $\alpha_s^{fit} = \alpha_{s,0} = 6,94 \times 10^{-3} \text{ K kg J}^{-1}$.

3.3 Transfert thermique turbulent

3.3.1 Nombre de Rayleigh super-adiabatique et nombre de Nusselt dans l’expérience

À partir de ΔT_{sa}^* , nous pouvons introduire un nombre de Rayleigh super-adiabatique Ra_{sa}^* et un nombre de Nusselt Nu^* associés à l’expérience. Puisque seule la condition aux limites chaudes est bien établie, il est naturel de construire ces nombres à partir des propriétés de cette couche limite. Nous définissons le nombre de Rayleigh super-adiabatique de l’expérience comme

$$Ra_{sa}^* = \frac{\rho_B^2 c_{p,B}^2 \alpha_{s,B} r_{max} \Omega^2 L^3 \Delta T_{sa}^*}{T_B k \eta}, \quad (3.3)$$

où T_B , ρ_B , $c_{p,B}$ et $\alpha_{s,B}$ sont la température, la masse volumique, la capacité thermique massique, et le coefficient d’expansion entropique isobare, caractéristiques de la couche limite thermique chaude. Ces quantités sont déterminées numériquement par l’algorithme suivant :

- Nous mesurons expérimentalement ΔT_{sa}^* et T_a^{max} par ajustement du profil (2.5).
- Nous résolvons numériquement avec la librairie CoolProp les équations du profil adiabatique (1.15), (1.17) avec comme conditions $T_a(r_{max}) = T_a^{max}$ et la conservation de la masse du xénon sur l’entièreté de la cavité afin de connaître les profils $p_a(r)$ et $\rho_a(r)$ dans la cavité. Nous notons $p_a^{max} = p_a(r_{max})$ et $\rho_a^{max} = \rho_a(r_{max})$.
- La température caractéristique de la couche limite est estimée par $T_B = T_a^{max} + \Delta T_{sa}^*/2$ et, à cause de la finesse de la couche limite, la pression caractéristique est approximée par $p_B = p_a^{max}$.

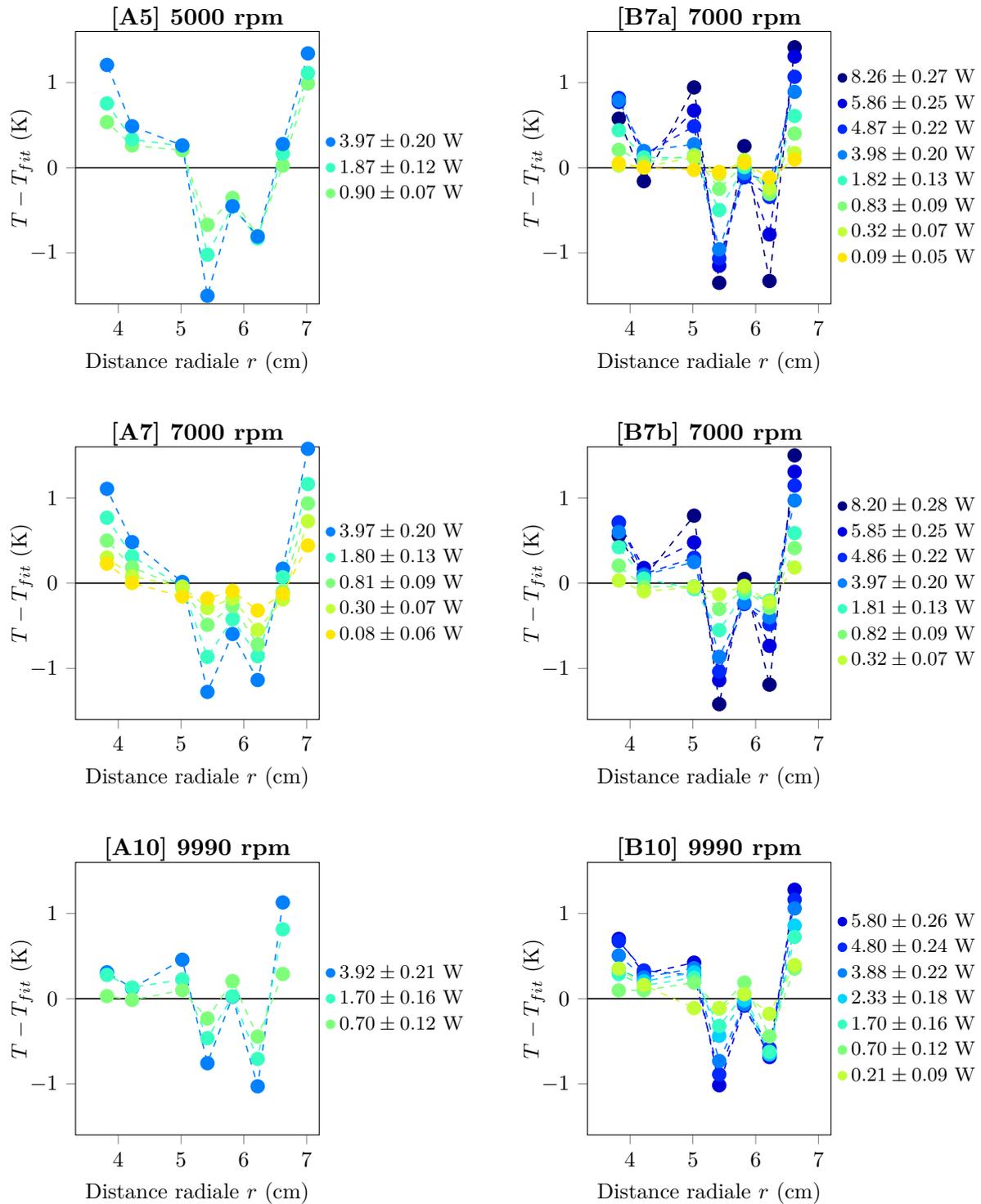


FIGURE 3.5 – Différence entre le profil de température mesuré T moyéné sur 30 s et le profil ajusté T_{fit} en fonction du flux effectif de chauffage Φ pour chaque expérience.

- Les autres quantités ρ_B , $c_{p,B}$ et $\alpha_{s,B}$ sont calculées numériquement à partir de T_B et P_B avec la librairie CoolProp.

La table 3.3 donne les estimations de ces paramètres pour différentes valeurs de Ω , T_a^{max} et ΔT_{sa}^* .

Le nombre de Nusselt de l'expérience est défini par

$$\text{Nu}^* = \frac{\Phi L}{k \Delta T_{sa}^* H^2}, \quad (3.4)$$

où $H^2 = 530 \text{ mm}^2$ est la section de la cavité et Φ le flux effectif transmis au xénon par chauffage. Dans un souci de rigueur, nous aurions pu définir un nombre de Nusselt super-adiabatique en retranchant au flux effectif le flux conduit le long du gradient de température adiabatique $\Phi_a = k |\nabla T_a| H^2 \sim k \alpha_{s,a} r_{max} \Omega^2 H^2 \sim 10^{-3} \text{ W}$. Cette estimation de Φ_a est trois ordres de grandeur plus faible que la valeur typique de Φ ce qui justifie que nous l'ayons négligée.

La figure 3.6 représente l'évolution de Ra_{sa}^* et Nu^* avec le temps durant une expérience. Quand la puissance de chauffage change, le système atteint un nouvel état stationnaire où Ra_{sa}^* et Nu^* ne varient plus. Cela se fait en approximativement 1 min. Nous utiliserons ces valeurs d'état stationnaire pour tracer le nombre de Rayleigh super-adiabatique en fonction du nombre de Nusselt dans la figure 3.7. Dans la figure 3.6, lorsque le flux total vaut $\Phi_T = 0,58 \text{ W}$ ou moins, le flux effectif entrant dans le gaz Φ devient trop faible pour maintenir le profil adiabatique. De ce fait, la détermination de la différence de température super adiabatique ΔT_{sa}^* devient négative et n'a plus de sens physique. Ainsi, pour $\Phi_T \leq 0,58 \text{ W}$, nos définitions du nombre de Rayleigh super-adiabatique Ra_{sa}^* et du nombre de Nusselt Nu^* ne sont plus utilisables car ΔT_{sa}^* n'est pas bien défini et que le flux effectif Φ n'est pas assez bien connu. Néanmoins, nous pouvons constater que ces quantités mal définies sont gouvernées par des processus diffusifs lents de conduction thermique puisque qu'elles n'atteignent pas de valeurs stationnaires au bout de 3 minutes.

3.3.2 Loi de puissance Rayleigh-Nusselt

La figure 3.7 représente le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh super-adiabatique une fois l'état stationnaire atteint. Nos données sont globalement compatibles avec une loi de puissance d'exposant 1/3. Cependant, certains points s'écartent de manière non négligeable de cette loi de puissance. Expérimentalement, nous diminuons petit à petit la puissance de chauffage, et donc le nombre de Rayleigh super-adiabatique Ra_{sa}^* . Parfois pour les faibles Ra_{sa}^* , le transfert thermique semble suivre une autre branche avec une loi de puissance de pente plus forte et des valeurs de nombre de Nusselt plus faibles. Si nous prenons en compte uniquement les points de la branche principale, nous trouvons la loi de puissance

$$\text{Nu}^* = (0.44 \pm 0.02) \text{Ra}_{sa}^{*0.30 \pm 0.04} \quad (3.5)$$

Le fait que certains points ne soient pas sur la branche principale est d'autant plus surprenant qu'en reproduisant l'expérience à une même vitesse de rotation, nous observons parfois la branche classique d'exposant 0.3 (expériences B7a et B10) et d'autres fois la branche plus pentue d'exposant ~ 1 (expériences A7, B7b et A10). De plus la transition entre les deux branches dépend de la rotation : plus la rotation est forte plus la transition se fait à haut nombre de Rayleigh super-adiabatique. Cela

$\Omega = 5000 \text{ rpm}$								
ΔT_{sa}	T_a^{max}	300	305	310	315	320	325	330
	ρ_a^{max}	120	120	120	120	120	120	120
	$p_a^{max} = p_B$	2.02	2.06	2.10	2.14	2.18	2.23	2.27
5	T_B	302.5	307.5	312.5	317.5	322.5	327.5	332.5
	ρ_B	118	118	118	118	118	118	118
	$c_{p,B} (J/K/kg)$	203	202	200	198	197	196	194
	$\alpha_{s,B}$	6.93	6.92	6.90	6.89	6.87	6.86	6.85
10	T_B	305.0	310.0	315.0	320.0	325.0	330.0	335.0
	ρ_B	117	117	117	117	117	117	117
	$c_{p,B}$	202	200	199	197	196	194	193
	$\alpha_{s,B}$	6.92	6.90	6.89	6.88	6.86	6.85	6.84
15	T_B	307.5	312.5	317.5	322.5	327.5	332.5	337.5
	ρ_B	116	116	116	116	116	116	116
	$c_{p,B}$	200	199	197	196	195	193	192
	$\alpha_{s,B}$	6.90	6.89	6.88	6.86	6.85	6.84	6.83
$\Omega = 7000 \text{ rpm}$								
ΔT_{sa}	T_a^{max}	300	305	310	315	320	325	330
	ρ_a^{max}	121	121	121	121	121	121	121
	$p_a^{max} = p_B$	2.04	2.08	2.12	2.16	2.20	2.24	2.29
5	T_B	302.5	307.5	312.5	317.5	322.5	327.5	332.5
	ρ_B	120	119	119	119	119	119	119
	$c_{p,B}$	204	202	200	199	197	196	195
	$\alpha_{s,B}$	6.94	6.92	6.91	6.89	6.88	6.87	6.85
10	T_B	305.0	310.0	315.0	320.0	325.0	330.0	335.0
	ρ_B	118	118	118	118	118	118	118
	$c_{p,B}$	202	201	199	198	196	195	194
	$\alpha_{s,B}$	6.92	6.91	6.89	6.88	6.87	6.85	6.84
15	T_B	307.5	312.5	317.5	322.5	327.5	332.5	337.5
	ρ_B	117	117	117	117	117	117	117
	$c_{p,B}$	201	199	198	196	195	194	193
	$\alpha_{s,B}$	6.91	6.89	6.88	6.87	6.86	6.84	6.83
$\Omega = 9990 \text{ rpm}$								
ΔT_{sa}	T_a^{max}	300	305	310	315	320	325	330
	ρ_a^{max}	124	124	123	123	123	123	123
	$p_a^{max} = p_B$	2.08	2.12	2.16	2.20	2.24	2.29	2.33
5	T_B	302.5	307.5	312.5	317.5	322.5	327.5	332.5
	ρ_B	122	122	122	122	122	122	122
	$c_{p,B}$	205	203	201	200	198	197	195
	$\alpha_{s,B}$	6.95	6.93	6.92	6.91	6.89	6.88	6.86
10	T_B	305.0	310.0	315.0	320.0	325.0	330.0	335.0
	ρ_B	121	121	121	121	121	121	121
	$c_{p,B}$	204	202	200	199	197	196	194
	$\alpha_{s,B}$	6.94	6.92	6.91	6.89	6.88	6.87	6.85
15	T_B	307.5	312.5	317.5	322.5	327.5	332.5	337.5
	ρ_B	119	119	119	119	119	119	119
	$c_{p,B}$	202	200	199	197	196	195	193
	$\alpha_{s,B}$	6.92	6.91	6.89	6.88	6.87	6.85	6.84

TABLE 3.3 – Paramètres calculés dans la couche limite chaude. Les unités des températures, pressions, masses volumiques, capacités thermiques massiques et coefficients d'expansion entropique isobare sont respectivement K, MPa, kg m^{-3} , $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ et mK kg J^{-1} .

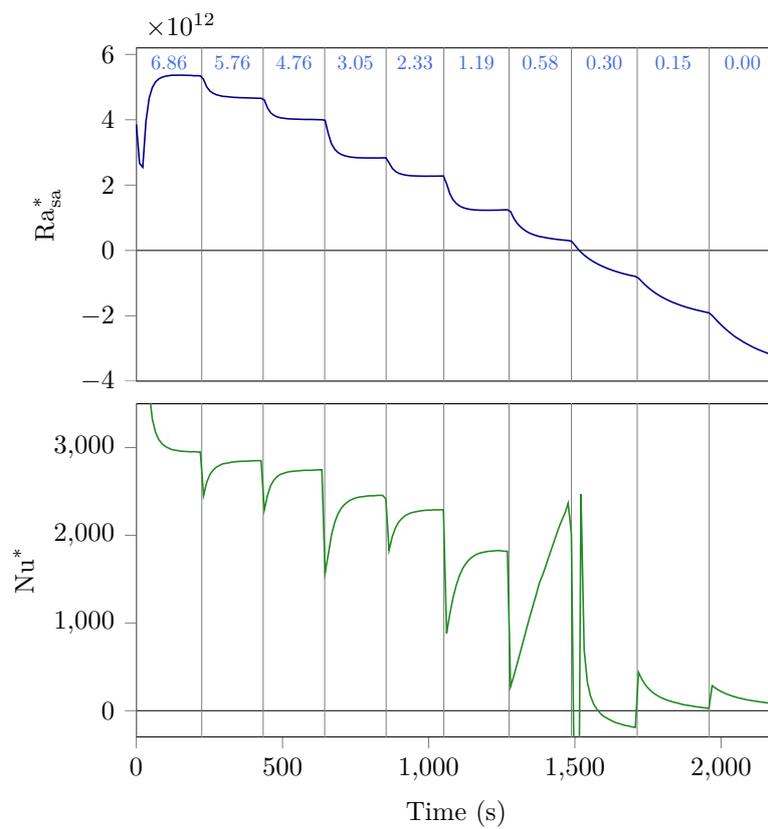


FIGURE 3.6 – Evolution du nombre de Rayleigh super-adiabatique Ra_{sa}^* et du nombre de Nusselt Nu^* dans l'expérience B10 (à 9990 rpm). Les nombres bleus en haut des figures indiquent la puissance de chauffage totale Φ_T dissipée dans la résistance chauffante.

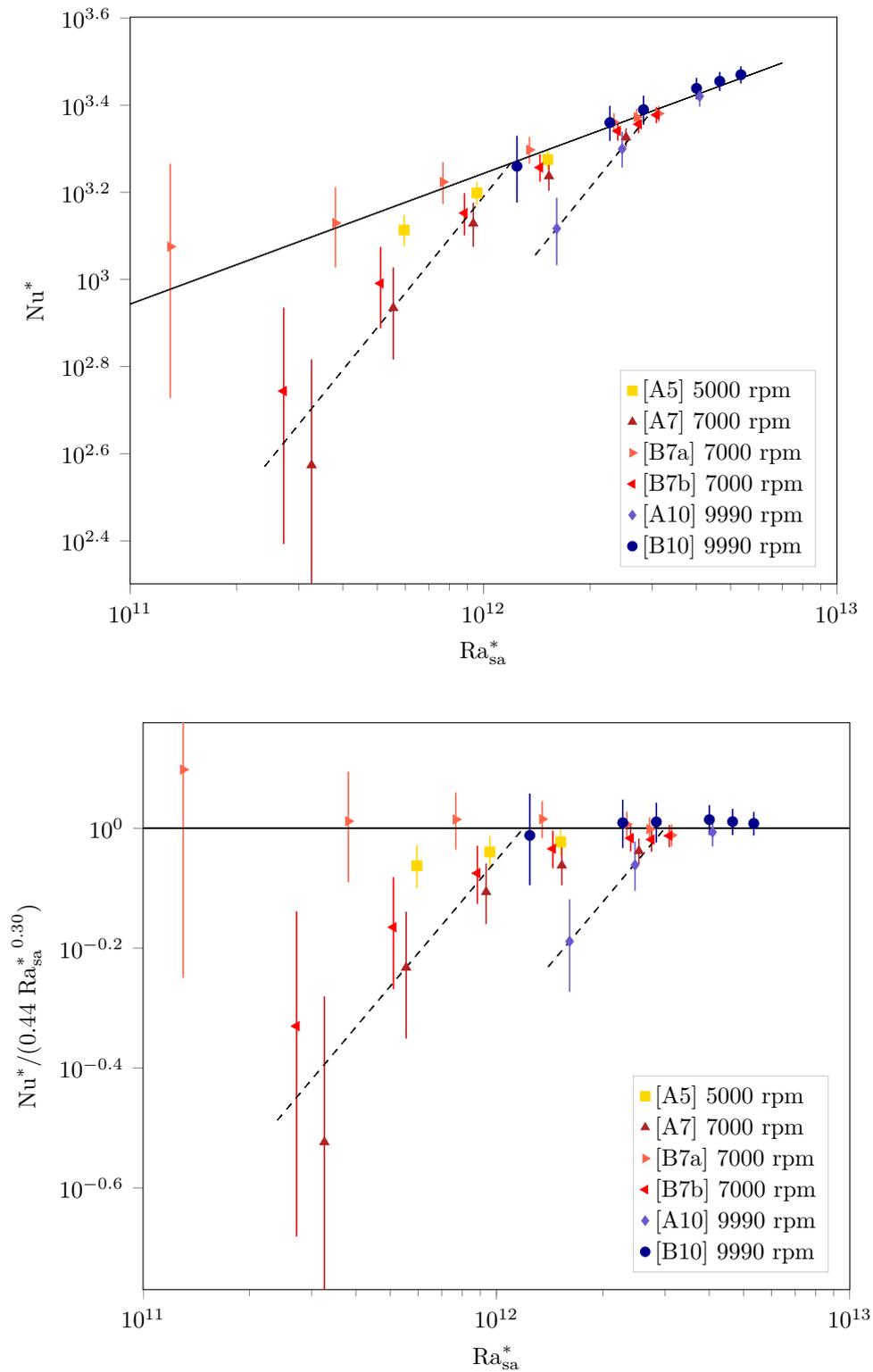


FIGURE 3.7 – (haut) Nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh super-adiabatique. La ligne pleine a une pente de 0.3 et la ligne pointillée une pente de 1. (bas) Même graphique utilisant le facteur de normalisation $0.44Ra_{sa}^{*0.30}$ pour le nombre de Nusselt.

pourrait être la signature d'une hystérésis du système. Guervilly and Cardin (2016) ont montré qu'une hystérésis est possible dans le cas de la convection thermique en rotation dans une sphère dans une approximation quasi-géostrophique. Bien que la géométrie soit différente ici, un phénomène similaire pourrait expliquer ce comportement. Nous verrons au chapitre 5 qu'une autre explication possible de ce phénomène est un changement de la structure globale de l'écoulement dans la cellule.

La rupture de pente dans le diagramme Rayleigh-Nusselt peut aussi rappeler les résultats observés par King et al. (2009, 2012). Mais comme expliqué au paragraphe section 1.4, la configuration de la rotation n'est pas du tout la même : notre configuration est équatoriale alors que celle de King et al. (2012) est polaire. Les phénomènes physiques derrière ces transitions ne sont pas les mêmes. Nos résultats montrent de plus la présence d'une hystérésis, absente des travaux de King et al. (2012).

3.4 Étude des fluctuations

3.4.1 Fluctuations de température

3.4.1.1 Amplitude des fluctuations et spectre de puissance

Les signaux de températures peuvent être vu comme la sommes de trois termes : le profil de température adiabatique T_a , une déviation stationnaire du profil adiabatique T_s et un terme contenant les fluctuations temporelles de température T_f ,

$$T = T_a + T_s + T_f. \quad (3.6)$$

Les amplitudes typiques de ces termes sont, à forte rotation et fort chauffage, de l'ordre de 310 K pour T_a (avec une variation d'une dizaine de degré entre le haut et le bas de la cellule), de l'ordre de 1 K pour T_s et de l'ordre de 0,05 K pour T_f . Le profil de température T_a est donné par l'équation (2.5). T_s peut être vue sur la figure 3.3 où le profil adiabatique a été soustrait au profil de température moyenné dans le temps. Cet écart stationnaire de température T_s est interprété comme la signature de l'écoulement convectif stationnaire.

Nous avons accès aux fluctuations de température T_f en éliminant les variations à long terme des signaux de température au dessous de 0,2 Hz. Toutefois, l'étude des fluctuations de température reste difficile à cause du haut niveau de bruit électronique sur les signaux causés par la carte de multiplexage et le collecteur tournant. Nous représentons sur la figure 3.8 l'écart type des fluctuations de température en fonction de la puissance de chauffage effective. Il apparaît que les fluctuations de températures sont assez grandes pour émerger du bruit, que pour les chauffage fort supérieur à 3 W. L'amplitude des fluctuations augmente avec le chauffage. Leur amplitude typique que nous mesurons est de l'ordre de $\sigma(T_f) \sim 0,05$ K pour le chauffage maximal $\Phi = 5,8$ W. Pour les chauffages plus faibles ($\Phi < 3$ W), le signal est dominé par le bruit électronique présentant un écart-type constant de l'ordre de 0,02 K. Le spectre de puissance des températures est représenté sur la figure 3.9 pour les chauffages fort ($\Phi < 3$ W). Ils sont compatibles avec une loi de puissance de pente $-5/3$.

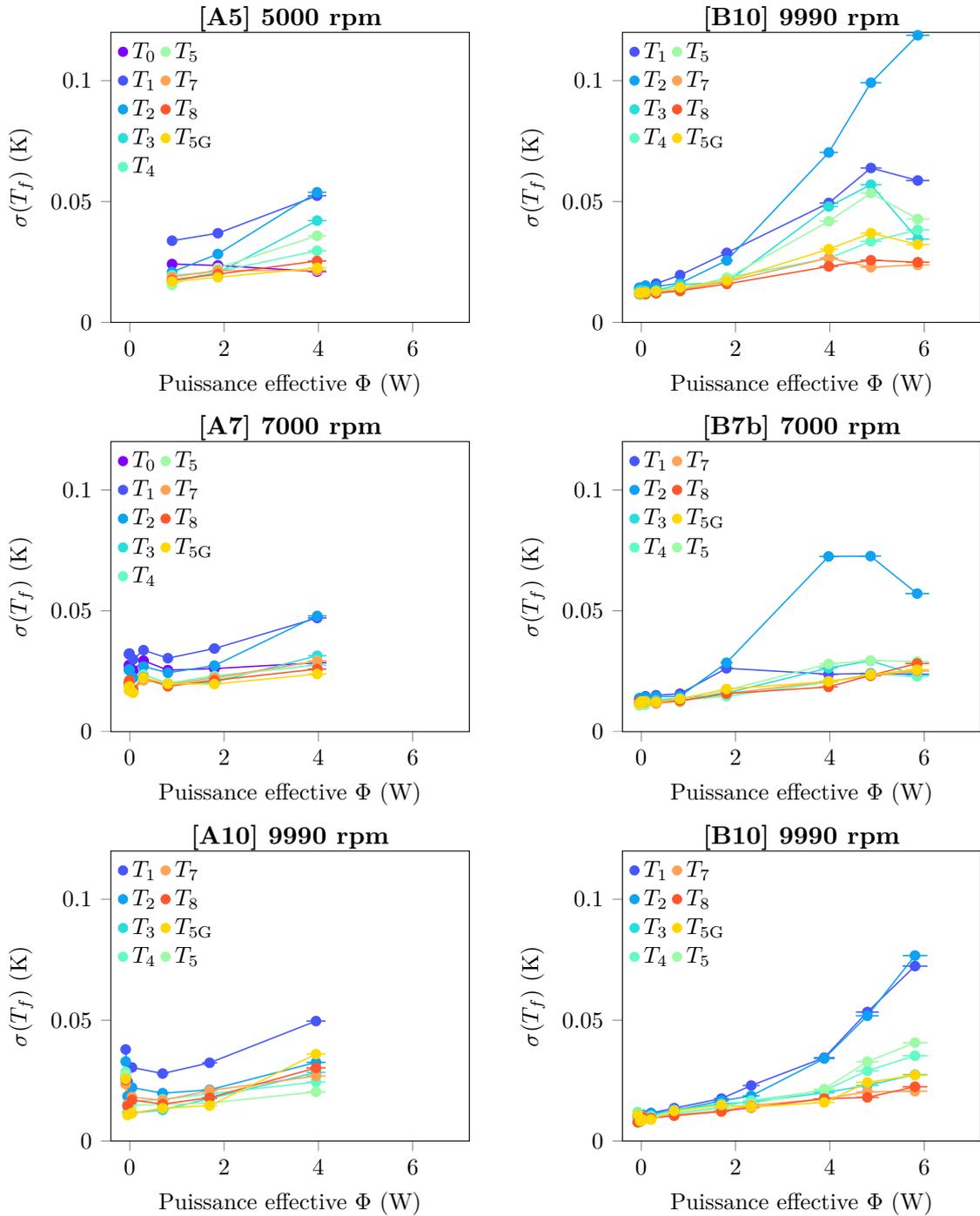


FIGURE 3.8 – Ecart type des fluctuations de température T_f en fonction de la puissance de chauffage effective Φ .

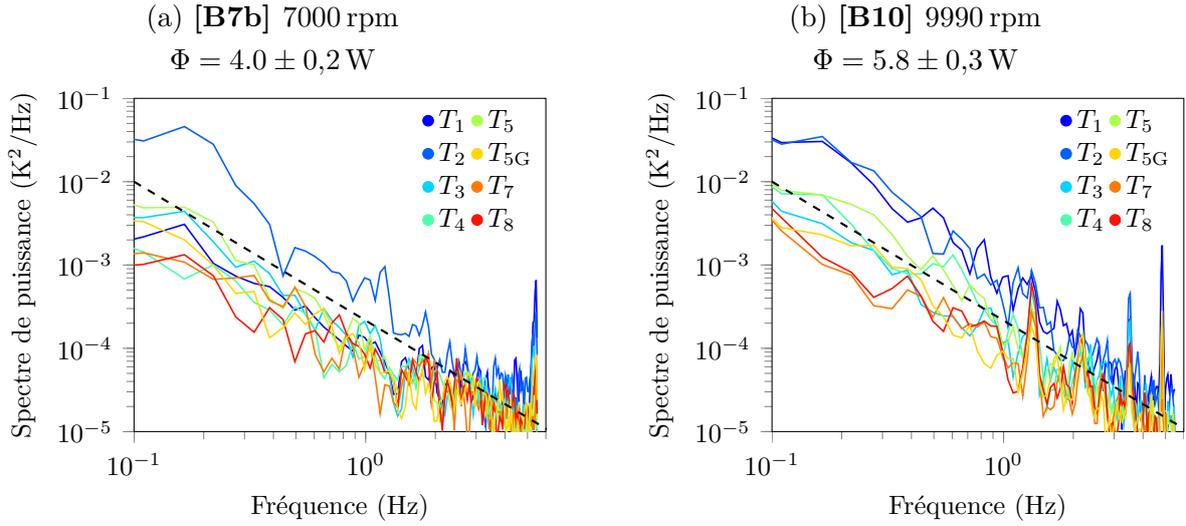


FIGURE 3.9 – Exemples de spectres de puissance des fluctuations de température T_f obtenus à deux rotations et deux puissances de chauffage différentes. Les lignes pointillés noirs correspondent à une pente de $-5/3$.

3.4.1.2 Décomposition orthogonale aux valeurs propres

Afin de mieux comprendre la géométrie de l'écoulement dans la cellule, nous avons calculé la corrélation entre les fluctuations de température en provenance des différentes thermistances. La matrice de corrélation obtenue est présentée sur la figure 3.10. Les thermistances peuvent être séparées en deux groupes distincts. Les trois thermistances les plus proches de la plaque chauffante sont corrélées entre-elles. Il en est de même pour les thermistances plus éloignées. Par contre, ces deux groupes sont anti-corrélés l'un avec l'autre. Cela indique l'existence d'une structure aux grandes échelles dans la cellule. Cela est confirmé par une décomposition orthogonale aux valeurs propres (appelée proper orthogonal decomposition en anglais et aussi connue en statistique sous le nom d'analyse en composantes principales) sur les signaux permettant d'obtenir les modes principaux de température dans la cellule (figure 3.10). Le premier mode qui représente à lui seul près de la moitié de l'énergie du signal présente le même profil que décrit précédemment : les trois premières thermistances évoluent ensemble et sont en opposition de phase avec les autres.

En outre, la corrélation entre les signaux des deux thermistances se faisant face sur les parois d'Ekman opposées T_5 et T_{5G} permet de tester le caractère géostrophique de l'écoulement. La corrélation (normalisée) entre ces deux signaux a toujours une valeur élevée (> 0.5) pour tous les flux testés. Une telle corrélation nous amène à croire que l'écoulement est bien géostrophique dans la cellule.

3.4.2 Fluctuations de pression

Par analogie à l'étude des températures, la pression totale p peut être divisée en trois termes quand l'état statistiquement stationnaire est atteint

$$p = p_a + p_s + p_f, \quad (3.7)$$

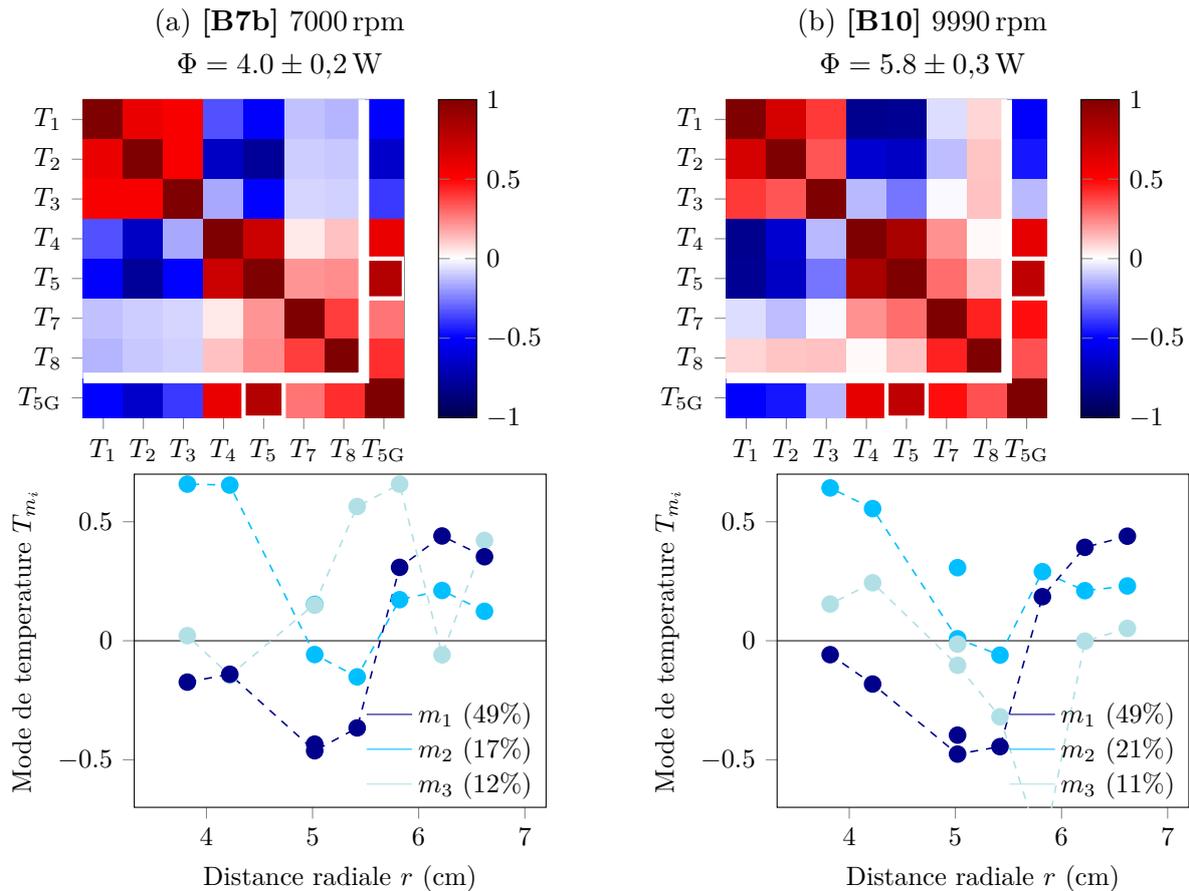


FIGURE 3.10 – Exemples de matrices de corrélations obtenues à deux rotations et deux puissances de chauffage différentes. En dessous des matrices, les trois premiers modes obtenus par la décomposition orthogonale aux valeurs propres sont tracés. Le nombre entre parenthèse indique la fraction d'énergie (norme \mathcal{L}^2) associée au mode.

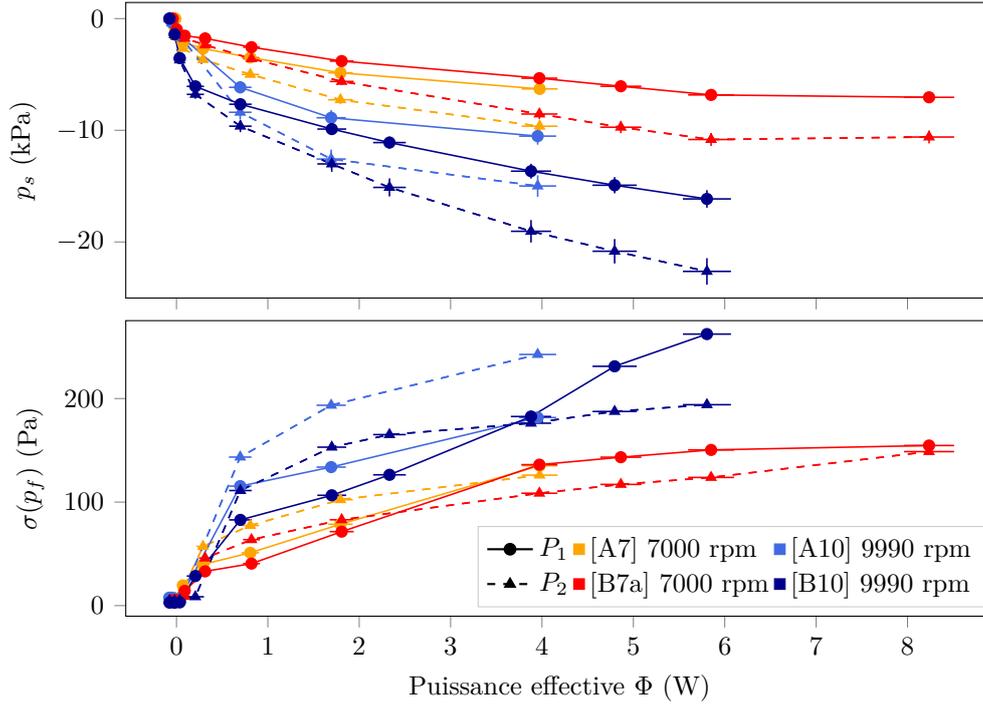


FIGURE 3.11 – Pression stationnaire p_s et écart-type des fluctuations de pression p_f en fonction de la puissance de chauffage effective Φ .

où p_a est la pression du profil adiabatique telle que définit par l'équation (1.15), p_s est la partie stationnaire de la pression causée par l'écoulement stationnaire aux grandes échelles et p_f correspond aux fluctuations temporelles de pression. Les sondes de pressions différentielles nous donnent une mesure de la pression dynamique $p' = p - p_a = p_s + p_f$. Pour séparer les contributions de p_s et p_f dans notre analyse, nous considérons que les fluctuations p_f correspondent à la partie du signal au dessus de 1 Hz. La partie en-dessous de 1 Hz varie en effet très peu une fois l'état stationnaire atteint ce qui correspond bien à p_s . L'amplitude de p_s est d'ailleurs visible sur la figure 3.1 où l'on voit bien que le signal de pression possède une composante stationnaire dépendante de la puissance de chauffage (mais aussi de la rotation). Les trois termes présents dans cette décomposition de la pression sont d'amplitudes très différentes : p_a est de l'ordre de 2 MPa, p_s est de l'ordre de 10 kPa et p_f est de l'ordre de 100 Pa (figure 3.11).

Nous pouvons estimer un ordre de grandeur de la vitesse u dans la cellule à partir de la pression stationnaire p_s . Si l'on suppose que l'équilibre géostrophique dans le fluide est respecté, le gradient de pression $-\nabla p_s$ doit équilibrer la force d'inertie de Coriolis $-2\rho_a\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$. Avec comme distance de variation typique la longueur L , nous trouvons comme estimation de la vitesse :

$$u \sim \frac{p_s}{2\rho_0\Omega L} \sim 1 \text{ m s}^{-1}. \quad (3.8)$$

Cette estimation amène à un nombre de Rossby de $\text{Ro} = u/(\Omega L) \sim 10^{-2}$ qui est cohérent avec l'hypothèse initiale de l'équilibre géostrophique. Inversement, si l'on considère un équilibre entre le gradient de pression et le terme d'advection 3D $\rho_a(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, nous obtenons l'estimation

$$u \sim \sqrt{\frac{p_s}{2\rho_0}} \sim 10 \text{ m s}^{-1}, \quad (3.9)$$

conduisant à un nombre de Rossby de 0,1 qui semble trop petit pour clairement justifier un équilibre 3D. Si nous ajoutons à cela l'étude menée sur les corrélations des thermistances T_5 et T_{5G} , l'hypothèse d'un écoulement géostrophique est renforcée et l'estimation de vitesse donnée par l'équation (3.8) semble la plus probable.

Pour évaluer correctement les fluctuations de pression, nous appliquons un filtre passe-bande sur les signaux de pression afin de ne garder que la partie du signal comprise entre 1 Hz et la fréquence de rotation $\Omega/2\pi$ de l'expérience. En effet, à haute fréquence, le signal est dominé par des pics correspondant aux harmoniques de la fréquence de rotation et au bruit électronique alors que le signal hydrodynamique est déjà au même niveau que le bruit comme nous le verrons plus tard (figure 3.13). L'amplitude des fluctuations dépend fortement de la puissance de chauffage. Leur amplitude tend vers zéro quand la convection s'arrête à cause d'un chauffage insuffisant. Comme pour la température, l'amplitude des fluctuations est estimée en prenant l'écart-type du signal filtré (figure 3.11). De plus, les signaux de pression étant de meilleure qualité que ceux de températures (grâce à l'absence de multiplexage et une plus grande fréquence d'échantillonnage), nous avons calculé les densités de probabilité (probability density function) des fluctuations de pression pour chaque puissance de chauffage testée. Elles sont représentées sur la figure 3.12 où nous pouvons voir que la densité de probabilité des signaux issus de la sonde 1 sont approximativement gaussiens, alors que ceux de la sonde 2 présentent une asymétrie marquée avec le pied du côté positif de la distribution plus étalée.

Les spectres de puissance de p_f sont représentés sur la figure 3.13. Les spectres sont dominés par des pics très localisés correspondant à la fréquence de rotation et ses harmoniques. Il y a de plus d'autres pics très localisés autour de 200 Hz probablement causés par le circuit électronique et non pertinents dans l'étude de l'écoulement. Si nous regardons l'allure générale des spectres, il en existe de deux types. Pour les puissances de chauffage faibles, le spectre présente une valeur constante correspondant au bruit électronique de l'acquisition. Ces spectres sont caractéristiques des sondes de pression piézoélectriques utilisées étant donné que des spectres similaires ont été obtenus avec ces mêmes sondes au repos en dehors de la cellule. Pour les puissances de chauffage plus élevées, les spectres se décomposent en trois parties. La première, en dessous de 13 Hz, est approximativement constante. La seconde, entre 13 Hz et 20-40 Hz, décroît avec une pente (en coordonnées logarithmiques) proche de $-7/3$ qui est la loi de puissance attendue pour les fluctuations de pression en turbulence homogène (Batchelor, 1953). La dernière partie, au dessus de 40 Hz, est constant au niveau du bruit. Le seuil entre ces deux types de spectre est le même que celui évalué dans la partie section 3.2 avec les profils de température adiabatique. Quand le chauffage est trop faible, il n'y a pas de convection et nous mesurons la réponse spectrale des capteurs de pression. Alors qu'à plus haut flux, la convection est établie et le spectre que nous mesurons est bien celui de l'écoulement convectif.

3.4.3 Ordres de grandeur des fluctuations de température et de pression

Ayant obtenu les écarts de température $T_s \sim 1$ K et de pression $p_s \sim 10$ kPa à leurs valeurs dans le profil adiabatique, nous pouvons désormais évaluer leurs contributions à l'écart d'entropie s' . À partir de l'équation de Gibbs (1.16), la contribution de la pression aux variations d'entropie s'écrit $(\alpha/\rho)dp$

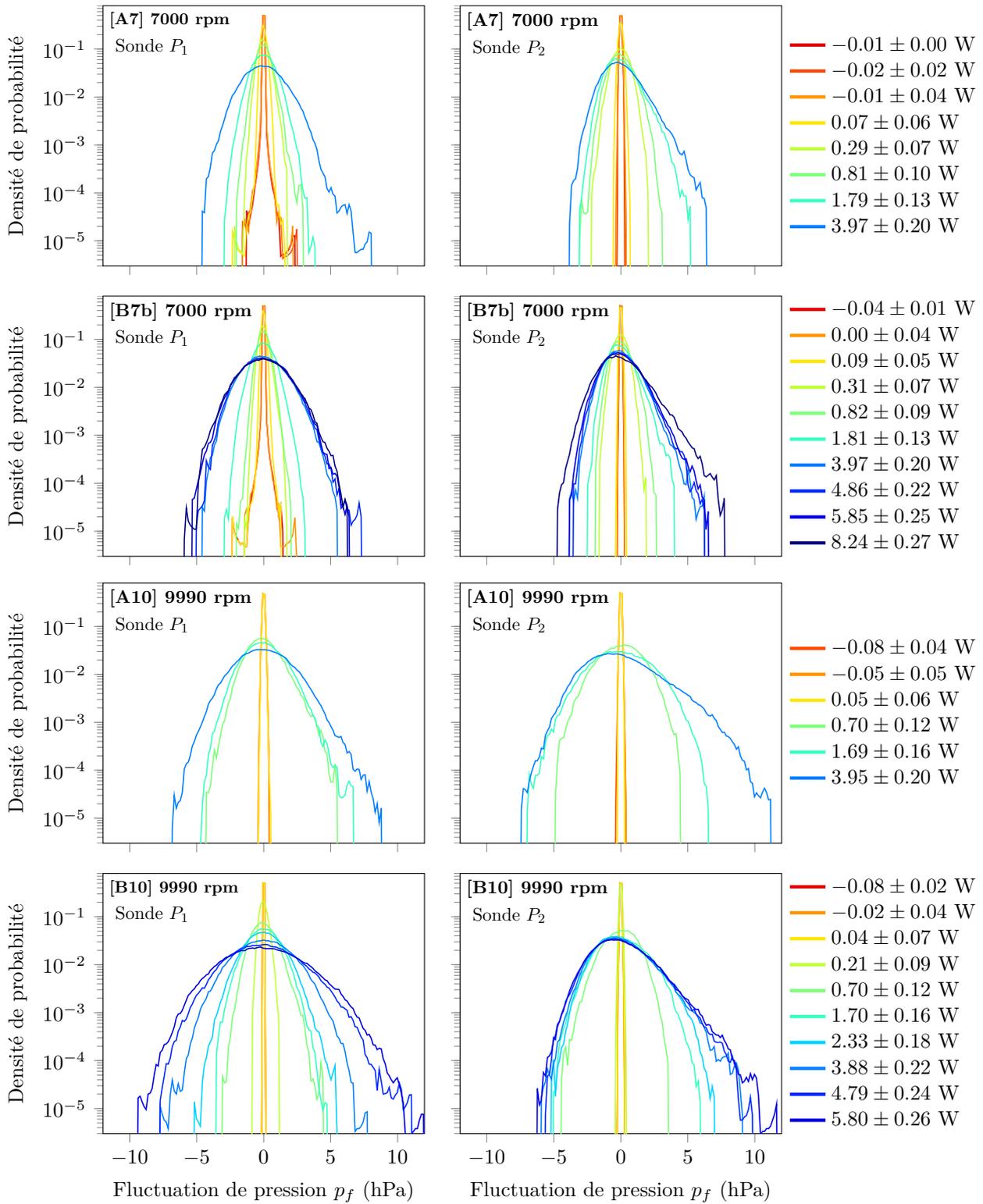


FIGURE 3.12 – Densités de probabilité des fluctuations de pression p_f pour les deux sondes de pression dans les expériences A7, B7b, A10, B10 pour différentes puissances de chauffage.

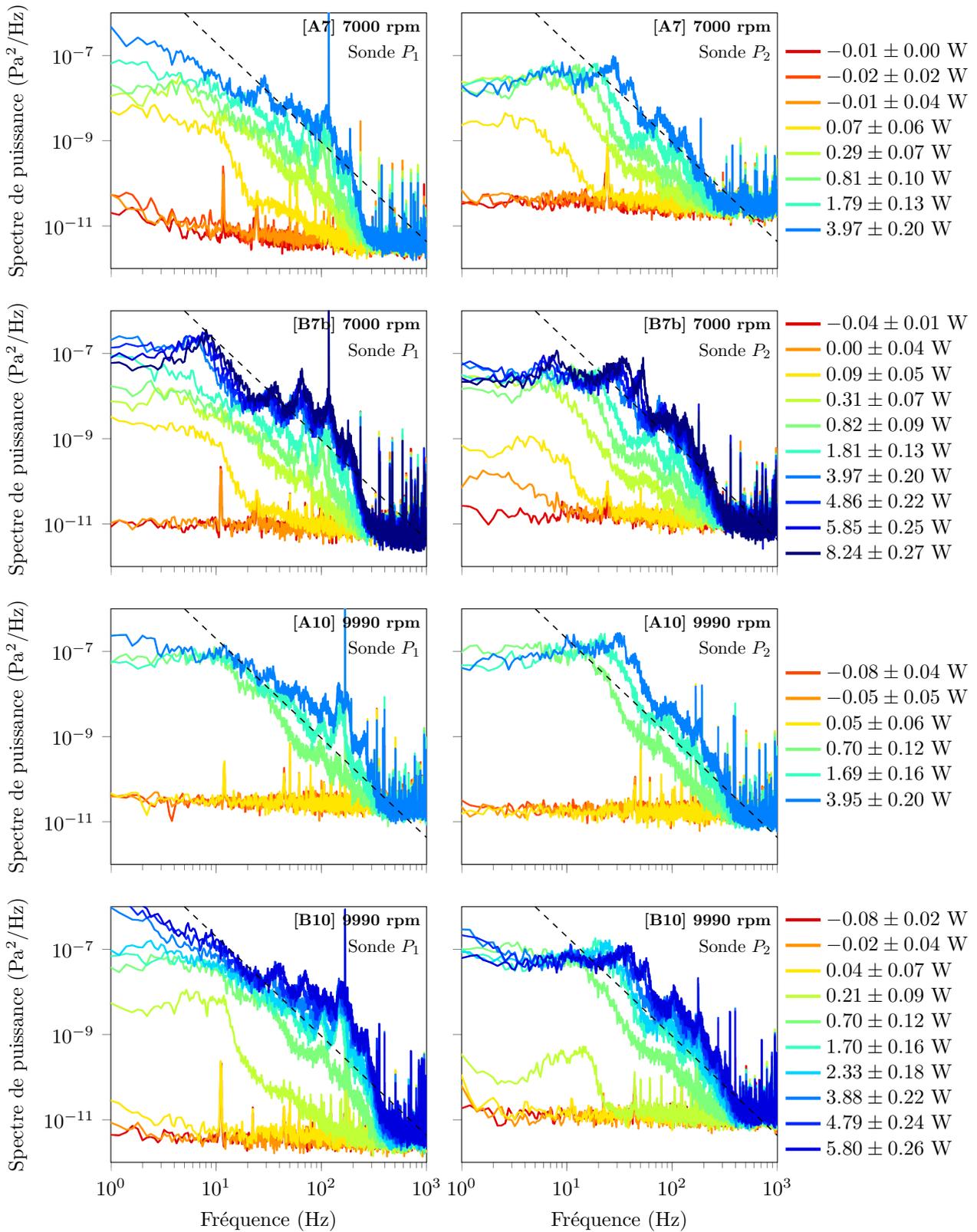


FIGURE 3.13 – Spectres de puissance des fluctuations de pression p_f pour les deux sondes de pression dans les expériences A7, B7b, A10, B10 pour différentes puissances de chauffage. Le pic à 117 Hz (resp. 167 Hz) correspond à la fréquence de rotation $\Omega/2\pi$ des expériences A7 et B7b (resp. A10 et B10). Le pic à 11 Hz correspond à la fréquence de multiplexage de la carte électronique.

alors que la contribution de température est $(c_p/T)dT$). Le rapport entre s'estime donc comme

$$\frac{\alpha T p_s}{\rho c_p T_s} \sim \frac{\alpha_{s,0} p_s}{\rho_0 T_s} \sim 0,6. \quad (3.10)$$

Anufriev et al. (2005) donne une estimation de $(\alpha T)\mathcal{D} = 0,06$ pour le même rapport (voir leur équation (2.17)). Ce rapport est crucial pour déterminer si l'approximation anélastique liquide est utilisable, c'est à dire quand les écarts d'entropie sont exprimés en fonction des écarts de température uniquement. Nos données expérimentales montrent que les écarts de pressions sont sous-estimés par Anufriev et al. (2005). Ils supposent un équilibre entre la force de flottabilité et le gradient de pression pour estimer l'écart en pression à partir de l'écart en température (leur équation (2.17)a) :

$$p_s \sim \rho_0 \alpha g L T_s. \quad (3.11)$$

Cette équilibre ne s'accorde pas avec nos données : pour $T_s \sim 1$ K, il conduit à $p_s \sim 1$ kPa alors que la valeur mesurée est d'un ordre de grandeur supérieur $p_s \sim 10$ kPa (figure 3.11).

L'équilibre de l'équation (3.11) peut aussi être testé en considérant les fluctuations de température T_f et de pression p_f à la place des écarts au profil adiabatique T_s, p_s . A 9990 rpm et pour les grandes puissances de chauffage, l'amplitude des fluctuations de température est de l'ordre de $\sigma(T_f) \sim 0,05$ K, ce qui conduit par l'équation (3.11) à des fluctuations de pression de l'ordre de 50 Pa. Expérimentalement nous mesurons $\sigma(p_f) \sim 100$ Pa qui est globalement du même ordre de grandeur et ne diffère que d'un facteur 2. Donc contrairement aux écarts stationnaires T_s, p_s , les fluctuations T_f, p_f semblent être en accord avec un équilibre entre le gradient des fluctuations de pression et la force de flottabilité du aux fluctuations de température.

3.5 Géométrie de l'écoulement et flux thermique convectif

A l'aide des résultats précédents, nous pouvons essayer de caractériser la structure de l'écoulement convectif quasi-géostrophique dans l'expérience. Les signaux de pression indiquent que la partie stationnaire de l'écoulement convectif est beaucoup plus vigoureuse, d'un facteur 100, que ses fluctuations. Il est aussi possible de se faire une idée de l'amplitude des écarts au profil adiabatique des températures en regardant les figures 3.3 et 3.5. Comme nous l'avons déjà souligné, le profil de température est très proche du profil adiabatique quand le flux thermique de chauffage dépasse légèrement les pertes thermiques. L'augmentation du flux thermique de chauffage augmente l'écart de température au profil adiabatique. L'écart est de l'ordre de 1 K au flux thermique de chauffage maximum (de l'ordre de 5 W). Nous pensons que l'écart au profil adiabatique est lié à la partie stationnaire de l'écoulement convectif : cela est en accord avec l'estimation du flux convectif

$$\Phi \sim \rho_0 c_{p,0} H^2 u \delta T. \quad (3.12)$$

Pour la vitesse de rotation la plus forte (9990 rpm) et le chauffage le plus grand (~ 5 W), nous avons estimé $u \sim 1$ m s⁻¹ et $\delta T \sim T_s \sim 1$ K. Avec une section $H^2 = 530$ mm², une masse volumique $\rho_0 \sim 100$ kg m⁻³ et une capacité thermique massique $c_{p,0} = 204$ J K⁻¹ kg⁻¹, l'estimation (3.12) donne $\Phi \sim 13$ W qui est bien du même ordre de grandeur que le flux imposé. En ce qui concerne les

fluctuations, les fluctuations de température de l'ordre de 0,05 K et celles de vitesse (100 fois plus petites que celles de l'écoulement stationnaire) ne peuvent en aucun cas générer un flux convectif proche de celui imposé. De surcroît, ces conclusions sur la présence d'un écoulement stationnaire aux grandes échelles sont en accord avec l'analyse des fluctuations par décomposition orthogonales aux valeurs propres de la partie 3.10.

L'allure globale de l'écoulement convectif dans la cellule est donc celle d'un écoulement turbulent bidimensionnel dans lequel la cascade inverse d'énergie donne naissance à un écoulement stationnaire aux grandes échelles dominant les fluctuations aux petites échelles. Ce processus est connu comme la condensation des petites échelles de vorticité vers un écoulement grande échelle stable. IL est observé dans le cas d'écoulements bidimensionnels dus à la rotation (Hossain, 1994), la stratification ou l'effet d'un champs magnétique sur un fluide conducteur (Paret and Tabeling, 1997, Sommeria, 1986).

  partir de la structure globale de l'écoulement maintenant connue, il est intéressant de rediscuter certains des résultats précédents. Les spectres de puissance des fluctuations de température de la figure 3.9, le signal au-dessus de 2 ou 3 Hz est dominé par le bruit électronique. Avec une vitesse de l'écoulement de l'ordre de 1 m s^{-1} et une cavité de 39 mm, nous nous attendons à une fréquence de rotation des grands vortex de l'ordre de 20 Hz. Les spectres de température sont donc tracés pour des fréquences basses qui sont probablement représentatives de l'évolution à long terme de l'écoulement principal aux grandes échelles et ne nous fournissent pas d'information sur les petites échelles de la turbulence. Inversement, les spectres des fluctuations de pression de la figure 3.13 nous permettent de déterminer la fréquence des structures grandes échelles, correspondant à la rupture de pentes entre la partie plate du spectre à basses fréquences et la partie décroissante à plus haute fréquence. Cette partie décroissante possède probablement des informations sur les petites échelles turbulentes de l'écoulement. La nature basses fréquences des fluctuations de température est aussi probablement la raison pour laquelle l'analyse par décomposition orthogonale aux valeurs propres (figure 3.10) rend compte de modes grandes échelles qui correspondent aux modes d'évolution lente des structures grandes échelles.

3.6 Mise en place de la convection

Nous pouvons étudier l'établissement de la convection dans la cellule expérimentale au début d'une expérience à partir des signaux de température et de pression. L' tat initial de l'expérience, lorsque la rotation est constante mais le chauffage éteint, est une configuration isotherme stable car fortement stratifiée entropiquement. Lorsque nous commençons à chauffer par le bas, nous observons les signaux de température augmenter l'un après l'autre (figure 3.14). Cela indique le développement d'une région convective depuis le bas de la cellule. La propagation du front de convection s'observe aussi dans les signaux de pression par l'observation d'une croissance des fluctuations de pression. Cette situation est un cas de convection pénétrante où une région convective se développe en érodant une région initialement stable. Ce phénomène a été étudié expérimentalement (Catalano et al., 2012, Dore et al., 2009) et numériquement (Harfash and Alshara, 2015, Hu et al., 2015).

La propagation du front de convection peut être expliquée par un modèle simple. Considérons que toute l'expérience (xénon et parois) sont initialement à la température constante T_i , que la paroi inférieure, où commence la convection, est   $r = r_{max}$ et qu'à partir de $t = 0$, nous commençons à

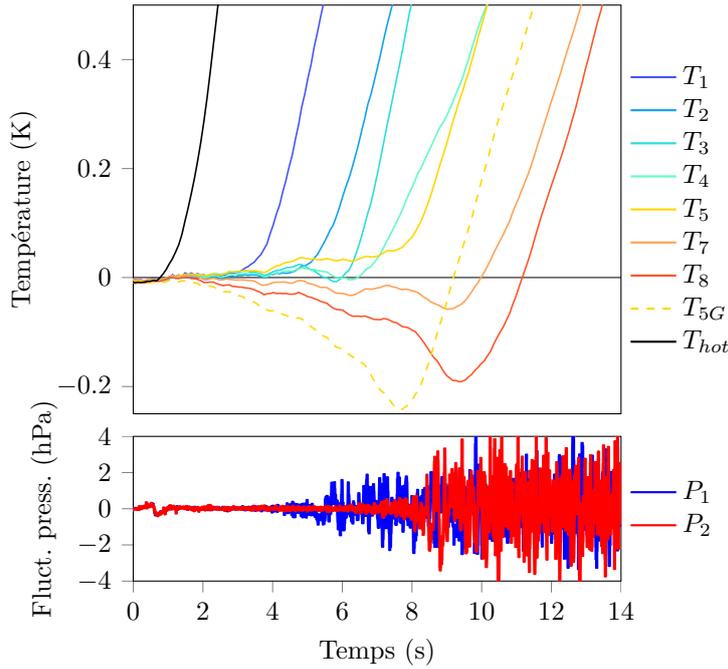


FIGURE 3.14 – Signaux de température et fluctuations de pression en fonction du temps au début du chauffage.

chauffer en imposant un flux thermique constant Φ_T . notons $r_c(t)$ la position du front de convection pour $t > 0$. Lors de la mise en place de la convection r_c varie de r_{max} à r_{min} . Nous considérons qu'à un temps t donné, le profil de température doit suivre le profil adiabatique de température (équation (2.5)) dans la zone convective mais garde la valeur T_i en dehors. Il s'exprime alors sous la forme

$$T(r, t) = \begin{cases} T_i + \frac{\alpha_s \Omega^2}{2} (r^2 - r_c(t)^2) & \text{pour } r \geq r_c(t), \\ T_i & \text{pour } r < r_c(t), \end{cases} \quad (3.13)$$

comme représenté sur la figure 3.15.

Puisque la capacité thermique totale du xénon est négligeable devant celle des parois (comme vu au paragraphe section 2.4), la majorité de l'énergie fournie par le chauffage en début d'expérience chauffe ces dernières. Une modélisation simple de l'énergie interne des parois consiste à la prendre proportionnelle à la température de la plaque chauffante $T(r_{max}, t)$. La constante de proportionnalité associée C peut être vue comme une capacité thermique effective des parois. Avec ces hypothèses, le bilan énergétique s'écrit

$$\Phi_T t = C(T(r_{max}, t) - T_i), \quad (3.14)$$

dont l'inversion permet d'obtenir la position du front convectif

$$r_c(t) = r_{max} \sqrt{1 - \frac{2\Phi_T t}{C\alpha_s \Omega^2 r_{max}^2}}. \quad (3.15)$$

En ajustant par moindres carrés la valeur de C dans l'équation (3.15), nous obtenons un très bon accord avec nos données expérimentales où nous voyons une accélération du front de convection. Les valeurs de C ainsi trouvées varient entre 9 J/K et 14 J/K. Elles dépendent de la vitesse de rotation Ω

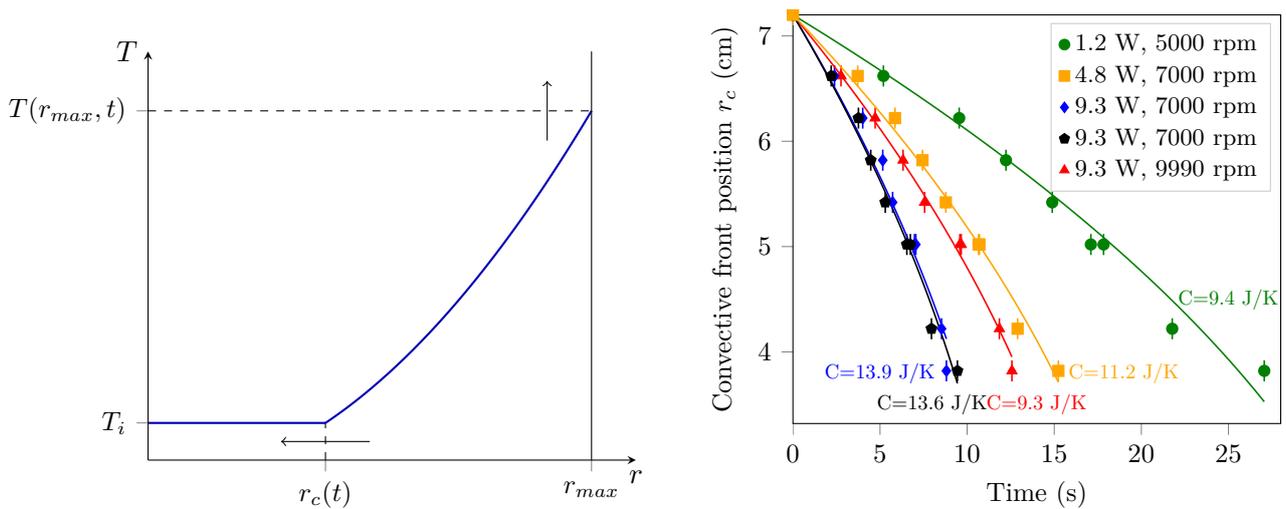


FIGURE 3.15 – (gauche) Schéma de l'évolution du profil de température (3.13) dans notre modèle. (droite) Position du front convectif r_c en fonction du temps. Les lignes pleines sont les évolutions théoriques (3.15) données par notre modèle en ajustant la valeur de C .

et du flux de chauffage Φ_T . Dans les mêmes conditions, nous retrouvons bien des valeurs similaires. Malgré la simplicité de ce modèle qui ignore la convection et les effets de rotation, ces valeurs sont bien du même ordre de grandeur que la capacité thermique du dispositif entier évalué dans la partie section 2.4.

Sur les courbes expérimentales de température, nous observons un léger refroidissement de quelques dixièmes de Kelvin juste avant que le front de convection atteigne la thermistance et que le signal augmente fortement. Ce phénomène devient de plus en plus important au fur et à mesure que le front de convection progresse. Il s'agit d'un effet lié à la compressibilité qui ne pouvait pas être envisagé dans l'approximation de Boussinesq. Nous observons temporairement une température plus basse que la température initiale uniforme : c'est la manifestation d'une convection pénétrante compressible. Une particule de fluide initialement au repos est refroidie adiabatiquement quand elle est soudainement entraînée dans la convection une fois le front convectif l'ayant atteint.

3.7 Conclusions sur l'expérience

Avec cette expérience, nous montrons qu'il est possible d'étudier la convection compressible en laboratoire. Un gradient adiabatique non négligeable (d'environ 3,5 K) a été mesuré. La relation entre le nombre de Rayleigh super-adiabatique et le nombre de Nusselt suit une loi de puissance d'exposant 0.3. Une décompression adiabatique est observée durant le transitoire de chauffage depuis un état isotherme. Toutefois, les valeurs des nombres de dissipation atteints sont restées modestes, autour de 0.07. Cela signifie que les effets compressibles sont modérés et que l'expérience s'est déroulée dans ce que nous pourrions appeler un *régime de Jeffreys* (Jeffreys, 1930). C'est à dire un régime dans lequel le critère de stabilité de la convection établi par Rayleigh est encore applicable, à condition d'utiliser la différence de température super-adiabatique au lieu de la différence de température totale imposée. Les résultats de Jeffreys sont en effet encore valables pour un nombre de dissipation aussi

petit que 0.07 (Alboussière and Ricard, 2017). Loin du seuil de stabilité, les résultats numériques issus de la littérature suggèrent aussi que les résultats compressibles sont très proches de ceux obtenus dans l'approximation de Boussinesq (Tilgner, 2011, Verhoeven et al., 2015, Curbelo et al., 2019). Notre expérience ouvre néanmoins la voie vers de nouvelles méthodes et des nouveaux progrès dans l'étude expérimentale de la convection compressible. Il serait intéressant d'améliorer notre dispositif actuel de façon à atteindre la vitesse de rotation maximale du rotor de 20 000 rpm. Cela permettrait d'obtenir une gravité quatre fois plus grande menant à des nombres de dissipation de l'ordre de 0.28. Il est aussi concevable, via l'utilisation d'une centrifugeuse plus rapide, d'atteindre des nombres de dissipation de l'ordre de 1 ou plus ou de réaliser des expériences de convection compressible avec d'autres fluides.

Pendant nos expériences, nous avons réussi à mesurer des températures dans un environnement hostile sous forte gravité. Nous avons utilisé des thermistances de petites tailles pour deux raisons. La première est que les petites thermistances ont une meilleure résistance relative aux efforts et résistent donc mieux sous forte gravité. La seconde est que nous voulions une mesure des fluctuations de température rapide dans un gaz de faible capacité thermique. Il est donc préférable d'utiliser des sondes avec un faible temps de diffusion thermique et une faible capacité thermique. Parallèlement, nous avons aussi réussi à utiliser des sondes de pression différentielle pour mesurer des variations de l'ordre de 100 Pa dans un milieu sous haute pression (2 MPa) et sous forte gravité. Les signaux de température sont traités par une carte électronique fabriquée pour l'occasion. Elle permet un multiplexage des signaux et fonctionne convenablement jusqu'à des vitesses de rotation de 9990 rpm. Elle nous a néanmoins empêché d'obtenir des résultats à plus forte rotation à cause de la défaillance d'un des composants électroniques. Il est effectivement difficile de prévoir à quel point les composants électronique supportent une forte gravité à partir de leurs spécifications. La méthode utilisée est de privilégier les petits composants et de les tester nous même.

Puisque les expériences se font sous forte gravité et avec un fluide de faible viscosité, elles atteignent des nombres de Rayleigh super-adiabatiques élevés et de faibles nombres d'Ekman. Dans les faits, la force de Coriolis est si importante qu'elle impose une dynamique quasi-géostrophique à toutes nos expériences. A cause de cela, il est difficile de séparer les rôles induits par la compressibilité de ceux induits par la rotation. Par exemple, les résultats expérimentaux ne permettent pas de conclure si l'hystérésis observée dans le diagramme Rayleigh-Nusselt de la figure 3.7 est due à la géostrophie, à la compressibilité ou aux deux à la fois. Concernant la valeur du nombre de Rayleigh super-adiabatique, on pourrait penser que, pour le rendre aussi petit que l'on souhaite, il suffit de baisser le flux thermique de chauffage imposé (et donc la différence de température super-adiabatique associée). Mais, la présence de pertes thermiques non négligeables dans le dispositif, malgré l'utilisation d'un très bon isolant (aérogel), contrevient à cela. Cela impose une valeur minimale au flux de chauffage qui peut effectivement être étudié. Dans notre cas, cela donne une borne inférieure de 5×10^{11} aux nombres de Rayleigh super-adiabatiques. Corollairement, cela rend impossible une étude du seuil de stabilité de la convection dans l'expérience. Busse (2014) montre qu'il serait possible d'étudier plusieurs aspects de la convection compressible à partir du caractère oscillant ou stable du premier mode instable de convection mais, au vu de nos résultats, l'observation de ce mode semble très difficile.

Le faible nombre de capteur rend difficile la reconstruction de l'écoulement dans la cellule. L'analyse des fluctuations de pression et de température nous a donné des informations globales sur celui-ci.

Mais, certains phénomènes observés restent inexpliqués, comme par exemple l'hystérésis. Pour palier ce problème, nous avons réalisé une simulation numérique de l'expérience afin de pouvoir visualiser et mieux comprendre les écoulements pouvant se développer dans la cellule. D'autres parts, cela nous permet de tester des régimes non atteignables par l'expérience et de voir quels effets sont liés à la rotation et quels autres sont liés à la compressibilité. Les prochains chapitres sont consacrés à cette simulation avec le développement d'un modèle anélastique quasi-géostrophique pour décrire l'expérience, son implémentation et les résultats obtenus.

4

Modèle anélastique quasi-géostrophique

Sommaire

4.1	Introduction	81
4.2	Structure des couches limites d'un écoulement en rotation	82
4.2.1	Couche d'Ekman	82
4.2.2	Couches de Stewartson	83
4.3	Approximation quasi-géostrophique anélastique et freinage linéaire d'Ekman	83
4.3.1	Préliminaires	83
4.3.1.1	Décomposition	83
4.3.1.2	Moyenne suivant z	84
4.3.1.3	Moyenne du terme d'advection	84
4.3.2	Équation sur la quantité de mouvement	84
4.3.3	Équation de conservation de la masse	85
4.3.4	Équation de conservation de l'entropie	86
4.4	Réécriture des équations en terme de vortacité et fonction de courant	87
4.4.1	Équation de conservation de la vortacité	88
4.4.1.1	Équation sur la vortacité	88
4.4.1.2	Dissipation visqueuse et vortacité	88
4.4.2	Fonction courant	89
4.5	Effet bêta compressible	89
4.5.1	Effet bêta topographique et compressible	89
4.5.2	Ondes de Rossby	90

4.1 Introduction

Nous avons déjà établie dans le paragraphe section 1.4.3 qu'à forte rotation (*i.e.* faible nombre d'Ekman E), l'écoulement est indépendant de la direction de l'axe de rotation z . Des couches limites d'Ekman et de Stewartson se développent alors sur les bords afin d'assurer la condition de non glissement sur ceux-ci. Il est donc intéressant de se ramener à des équations bidimensionnelles pour

modéliser l'écoulement. Du point de vue numérique, cela s'avère très utile car il est toujours plus simple de résoudre un problème bidimensionnel que tridimensionnel. De plus, cela permet de s'affranchir de la résolution des couches d'Ekman dont la très faible épaisseur demande une finesse de maillage élevée. Nous développons dans ce chapitre un modèle anélastique quasi-géostrophique. Les modèles quasi-géostrophiques sont fréquemment utilisés dans l'étude des fluides en rotation. Ils permettent de définir une base de fonctions quasi-géostrophiques sur laquelle nous pouvons projeter les solutions de l'écoulement. La plupart de ces modèles étant incompressibles (Labbé et al., 2015, Vidal and Schaeffer, 2015), la particularité de notre travail dans ce chapitre est d'en développer un, anélastique, adapté à la géométrie de notre expérience (*i.e.* en configuration équatoriale et avec la hauteur de la cellule suivant l'axe de rotation constante). Ceci afin de pouvoir réaliser des simulations numériques de l'expérience au prochain chapitre.

4.2 Structure des couches limites d'un écoulement en rotation

4.2.1 Couche d'Ekman

Les couches d'Ekman se développent sur les parois non parallèles à l'axe de rotation. Avec l'hypothèse d'un écoulement incompressible, les vitesses u_x et u_y au niveau d'une paroi en $z = 0$ s'écrivent (Greenspan, 1968)

$$\begin{cases} u_x = U[1 - e^{-z/\delta_E} \cos(z/\delta_E)], & (4.1a) \\ u_y = Ue^{-z/\delta_E} \sin(z/\delta_E), & (4.1b) \end{cases}$$

où $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_x$ est le champ de vitesse loin de la paroi et $\delta_E = \sqrt{\eta/(\rho\Omega)}$ est l'épaisseur de la couche d'Ekman. Le champ de vitesse réduit exponentiellement en s'approchant du bord tout en tournant sur lui-même en formant une spirale dite d'Ekman. Cette spirale est représentée sur la figure 4.1 en vue de dessus ainsi qu'en trois dimensions dans le cas de l'expérience où le fluide est contenu entre deux parois.

Bien que notre problème soit compressible, nous faisons l'approximation que ces résultats incompressibles restent vrais. En effet, la masse volumique ρ_a , ne dépendant que de x , est uniforme suivant la direction de l'axe de rotation z . De plus, l'échelle de variation de ρ_a ($\sim L$) est très grande devant celle de la couche limite. En terme d'adimensionnement, il est classique de dire que la couche d'Ekman est *en* $E^{1/2}$. Toutefois, vu notre choix de travailler à viscosité dynamique η constante, l'épaisseur de la couche d'Ekman dépend de ρ_a et donc de x . En utilisant le nombre d'Ekman E défini à l'équation (1.60), l'épaisseur de la couche d'Ekman adimensionnée s'écrit

$$\frac{\delta_E}{L} = E^{1/2} \rho_a^{-1/2}. \quad (4.2)$$

\mathcal{H} est le rapport d'aspect entre la hauteur de la cellule L suivant x et sa largeur H suivant z . Il apparaît ici à cause de nos choix d'adimensionnement fait au paragraphe section 1.3.2. En effet dans l'étude des couches d'Ekman, la dimension spatiale pertinente est celle suivant l'axe de rotation H or pour étudier les effets convectifs, nous avons préféré choisir comme dimension caractéristique la hauteur de la cellule L .

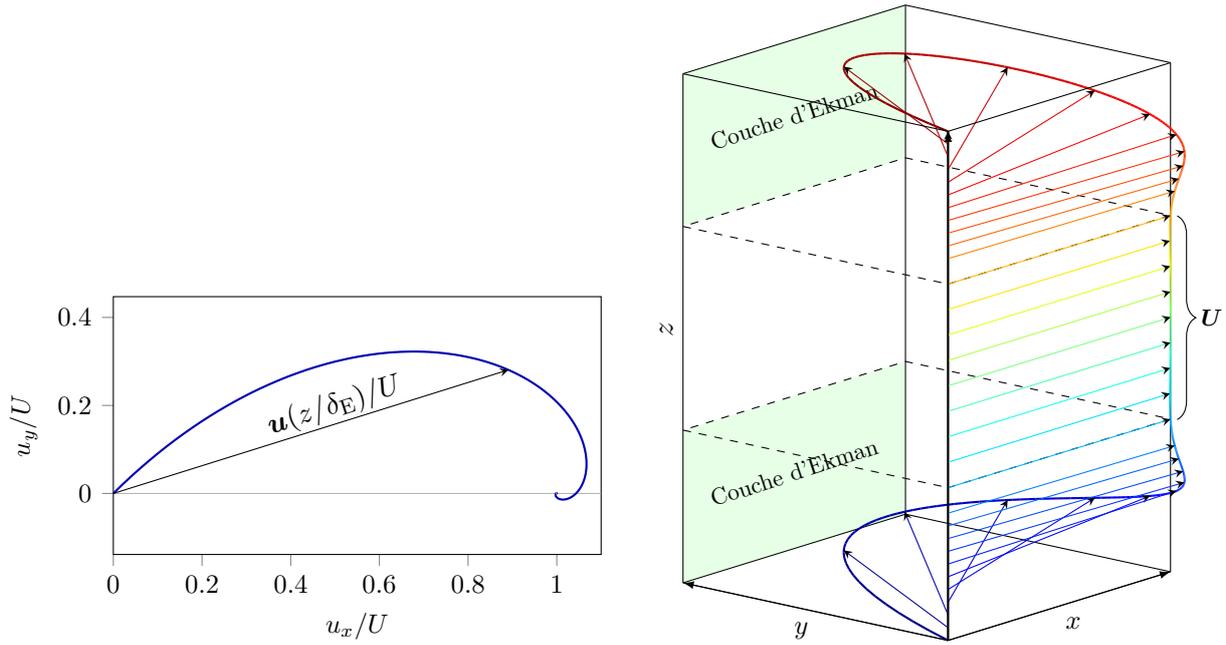


FIGURE 4.1 – (a) Spirale d'Ekman représentant l'évolution du vecteur vitesse en fonction de l'éloignement z de la paroi. (b) Vu 3D de la variation du vecteur vitesse en fonction de z dans le cas d'un fluide contenu entre deux parois. Les échelles ont été dilatées afin de mieux visualiser la structure des spirales. En dehors des couches d'Ekman, la vitesse du fluide \mathbf{U} est uniforme.

4.2.2 Couches de Stewartson

Les couches de Stewartson sont les couches se développant sur les parois latérales. Comme précédemment, elles ont essentiellement été étudiées dans le cas incompressible (Stewartson, 1957, 1966) mais nous généralisons ces résultats à notre étude car l'échelle de variation de ρ_a reste grande devant celle des couches limites. Il y a deux couches limites de Stewartson l'une dans l'autre. La plus petite correspond à la partie de l'écoulement proche de la paroi dans laquelle la quasi-géostrophie n'est pas respectée. Elle est d'épaisseur adimensionnée $E^{1/3}\rho_a^{-1/3}$. La seconde, plus grande, correspond à la zone où l'écoulement est déjà quasi-géostrophique mais les effets de viscosité sont encore importants. Son épaisseur est $E^{1/4}\rho_a^{-1/4}$.

4.3 Approximation quasi-géostrophique anélastique et freinage linéaire d'Ekman

4.3.1 Préliminaires

4.3.1.1 Décomposition

La rotation étant suivant la direction e_z , nous décomposons le champ de vitesse \mathbf{u} en une partie perpendiculaire à l'axe de rotation \mathbf{u}_\perp et une partie suivant celle-ci $u_z e_z$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\perp + u_z \mathbf{e}_z, \quad (4.3)$$

et nous décomposons les opérateurs différentiels de façons similaires

$$\nabla = \nabla_{\perp} + \mathbf{e}_z \partial_z \quad (4.4)$$

$$\nabla^2 = \nabla_{\perp}^2 + \partial_{zz} \quad (4.5)$$

4.3.1.2 Moyenne suivant z

Afin d'obtenir des équations quasi-géostrophiques, nous allons intégrer les équation tridimensionnelles suivant z . Pour ce faire, nous utiliserons l'opérateur $\langle \cdot \rangle_z$, introduit à l'équation (1.37), qui fait la moyenne spatiale suivant z . Il s'écrit sous forme adimensionnée

$$\langle \cdot \rangle_z = \mathcal{H} \int_0^{1/\mathcal{H}} \cdot dz. \quad (4.6)$$

Une propriété importante de cet opérateur est qu'il commute avec les opérateurs ∂_t , ∇_{\perp} ainsi qu'avec toutes les quantités associées au profil adiabatique (ρ_a , T_a , ...) qui sont indépendantes de z .

4.3.1.3 Moyenne du terme d'advection

Lors de l'établissement des équations quasi-géostrophiques, nous aurons besoin de prendre la moyenne du terme d'advection. En plus de la vitesse, considérons un champ A , nous pouvons les écrire sous la forme

$$A(t, x, y, z) = \langle A \rangle_z(t, x, y) + A'(t, x, y, z), \quad \mathbf{u}(t, x, y, z) = \langle \mathbf{u} \rangle_z(t, x, y) + \mathbf{u}'(t, x, y, z). \quad (4.7)$$

La moyenne du terme d'advection pour un champ A s'écrit alors

$$\langle (\mathbf{u} \cdot \nabla) A \rangle_z = \langle (\mathbf{u}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) A \rangle_z + \left\langle u_z \frac{\partial A}{\partial z} \right\rangle_z \quad (4.8)$$

$$= \langle \langle \mathbf{u}_{\perp} \rangle_z \cdot \nabla_{\perp} \rangle_z \langle A \rangle_z + \langle (\mathbf{u}'_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) A' \rangle_z + \left\langle u_z \frac{\partial A}{\partial z} \right\rangle_z. \quad (4.9)$$

Les principales contributions des deux derniers termes proviennent des couches d'Ekman d'épaisseur faible. Ils sont donc négligeables devant le premier terme. Nous utiliserons donc dans la suite la simplification

$$\langle (\mathbf{u} \cdot \nabla) A \rangle_z \simeq \langle \langle \mathbf{u}_{\perp} \rangle_z \cdot \nabla_{\perp} \rangle_z \langle A \rangle_z. \quad (4.10)$$

4.3.2 Équation sur la quantité de mouvement

En appliquant la décomposition sur l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans l'approximation anélastique (1.51b), nous obtenons dans la direction de \mathbf{u}_{\perp}

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_{\perp}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\perp} \right) &= -2\text{E}^{-1} \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_{\perp} - \text{Ra}_{\text{sa}} \nabla_{\perp} \pi' - \text{Ra}_{\text{sa}} \frac{\alpha_a T_a}{c_{p,a}} s' \mathbf{g} \\ &+ \frac{1}{\rho_a} \left[\nabla_{\perp}^2 \mathbf{u}_{\perp} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{\perp}}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp} + \frac{1}{3} \nabla_{\perp} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

En utilisant (4.10), la moyenne suivant z de cette équation est

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z}{\partial t} + (\langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z \cdot \nabla_\perp) \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z \right) &= -2\text{E}^{-1} \mathbf{e}_z \times \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z - \text{Ra}_{\text{sa}} \nabla_\perp \langle \pi' \rangle_z \\ -\text{Ra}_{\text{sa}} \frac{\alpha_a T_a}{c_{p,a}} \langle s' \rangle_z \mathbf{g}_\perp + \frac{1}{\rho_a} \left[\nabla_\perp^2 \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z + \frac{1}{3} \nabla_\perp \nabla_\perp \cdot \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z \right] &+ \frac{1}{\rho_a} \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{u}_\perp}{\partial z^2} \right\rangle_z + \frac{1}{3} \nabla_\perp \left\langle \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\rangle_z \end{aligned} \quad (4.12)$$

Seuls les deux derniers termes demandent une attention particulière. Le dernier terme est rendu nul par la condition de non glissement aux parois

$$\left\langle \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\rangle_z = \mathcal{H} \int_0^{1/\mathcal{H}} \frac{\partial u_z}{\partial z} dz = \mathcal{H} \left[u_z \left(z = \frac{1}{\mathcal{H}} \right) - u_z(z=0) \right] = 0. \quad (4.13)$$

L'autre terme fait, par une intégration similaire, intervenir les dérivées de u_z au niveau des parois

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{u}_\perp}{\partial z^2} \right\rangle_z = \mathcal{H} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_\perp}{\partial z} \left(z = \frac{1}{\mathcal{H}} \right) - \frac{\partial \mathbf{u}_\perp}{\partial z} (z=0) \right]. \quad (4.14)$$

Grâce à la théorie de la couche d'Ekman, nous pouvons exprimer analytiquement les dérivées des vitesses aux niveaux des parois à partir de (4.1a) avec la vitesse $\langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z$ jouant le rôle de la vitesse à l'infini loin des parois

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\perp}{\partial z} \left(z = \frac{1}{\mathcal{H}} \right) = -\frac{\partial \mathbf{u}_\perp}{\partial z} (z=0) = -\text{E}^{-1/2} \rho_a^{1/2} (\langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z + \mathbf{e}_z \times \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z), \quad (4.15)$$

d'où l'on déduit

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{u}_\perp}{\partial z^2} \right\rangle_z = -2\mathcal{H}\text{E}^{-1/2} \rho_a^{1/2} (\langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z + \mathbf{e}_z \times \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z). \quad (4.16)$$

Finalement, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z}{\partial t} + (\langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z \cdot \nabla_\perp) \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z \right) &= -2(\text{E}^{-1} + \mathcal{H}\text{E}^{-1/2} \rho_a^{-1/2}) \mathbf{e}_z \times \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z \\ -\text{Ra}_{\text{sa}} \nabla_\perp \langle \pi' \rangle_z - \text{Ra}_{\text{sa}} \frac{\alpha_a T_a}{c_{p,a}} \langle s' \rangle_z \mathbf{g}_\perp + \frac{1}{\rho_a} \left[\nabla_\perp^2 \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z + \frac{1}{3} \nabla_\perp \nabla_\perp \cdot \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z \right] &- 2\mathcal{H}\text{E}^{-1/2} \rho_a^{-1/2} \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Les deux termes en plus par rapport à l'équation tridimensionnelle, ajoutés par l'équation (4.16) sont des termes de freinages de l'écoulement et constituent ce qui s'appelle le freinage linéaire d'Ekman. Ils retranscrivent l'action des couches d'Ekman qui freinent par viscosité le mouvement des colonnes de fluide. Ce développement n'étant valable théoriquement qu'à faible E , le terme $-2\mathcal{H}\text{E}^{-1/2} \rho_a^{1/2} \mathbf{e}_z \times \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z$ est souvent négligé devant la force de Coriolis en E^{-1} .

4.3.3 Équation de conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse (1.51a) se décompose en

$$\nabla_\perp \cdot (\rho_a \mathbf{u}_\perp) + \rho_a \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (4.18)$$

dont l'intégration donne, à l'aide de la nullité de $\left\langle \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\rangle_z$ (équation (4.13)),

$$\nabla_\perp \cdot (\rho_a \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z) = 0. \quad (4.19)$$

À partir de l'équation (4.18), nous pouvons estimer l'ordre de grandeur relatif entre la vitesse \mathbf{u}_\perp et u_z . Puisque les variations suivant z ont essentiellement lieu au niveau des couches limites, $\partial/\partial z$ est de l'ordre de l'inverse de l'épaisseur de celle-ci δ_E^{-1} alors que ∇_\perp est de l'ordre de L^{-1} . A l'aide de (4.2), nous obtenons alors

$$|u_z| \sim \frac{\delta_E}{L} |u_\perp| = \mathcal{H} \text{Ra}_E^{-1/2} \rho_a^{1/2} \ll 1. \quad (4.20)$$

4.3.4 Équation de conservation de l'entropie

En appliquant la décomposition sur l'équation de conservation de l'entropie dans l'approximation anélastique (1.51c), nous obtenons

$$\rho_a T_a \left(\frac{\partial s'}{\partial t} + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp) s' \right) = \mathcal{D} \text{Ra}_{\text{sa}}^{-1} \underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}} : \boldsymbol{\tau} + \nabla_\perp^2 T + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (4.21)$$

dont la moyenne verticale s'écrit

$$\rho_a T_a \left(\frac{\partial \langle s' \rangle_z}{\partial t} + (\langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z \cdot \nabla_\perp) \langle s' \rangle_z \right) = \mathcal{D} \text{Ra}_{\text{sa}}^{-1} \langle \underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}} : \boldsymbol{\tau} \rangle_z + \nabla_\perp^2 \langle T \rangle_z + \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\rangle_z \quad (4.22)$$

Le dernier terme s'annule en considérant un flux thermique nul aux niveaux des parois

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\rangle_z = \mathcal{H} \left[\frac{\partial T}{\partial z} \left(z = \frac{1}{\mathcal{H}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} (z = 0) \right] = 0. \quad (4.23)$$

L'étude du terme $\langle \underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}} : \boldsymbol{\tau} \rangle_z$ demande un soin particulier. Pour ce faire, nous devons revenir à l'expression de la dissipation visqueuse en fonction des dérivées de la vitesse. Introduisons les notations (adimensionnées) suivantes

$$\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}} : \boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{4}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \right], \quad (4.24)$$

$$(\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}} : \boldsymbol{\tau})_\perp = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{4}{3} (\nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp)^2 \right], \quad (4.25)$$

$$(\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}} : \boldsymbol{\tau})_{\langle \perp \rangle_z} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle_z}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle_z}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{4}{3} (\nabla_\perp \cdot \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z)^2 \right], \quad (4.26)$$

où $\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}} : \boldsymbol{\tau}$ est la dissipation visqueuse tridimensionnelle classique. $(\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}} : \boldsymbol{\tau})_\perp$ est la dissipation visqueuse où seules les termes liés aux composantes x et y , perpendiculaires à la rotation, ont été gardés. Elle dépend de x , y et z . Il s'agit de la dissipation visqueuse qu'aurait un écoulement purement bidimensionnel de vitesse \mathbf{u}_\perp . Enfin $(\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}} : \boldsymbol{\tau})_{\langle \perp \rangle_z}$ est la dissipation visqueuse bidimensionnelle calculée à partir des vitesses moyennées horizontalement. Elle ne dépend que de x et y . Il s'agit de la dissipation visqueuse qu'aurait un écoulement purement bidimensionnel de vitesse $\langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z$. Nous pouvons nous convaincre que cette dernière quantité est la moyenne selon z de la précédente

$$\langle (\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}} : \boldsymbol{\tau})_\perp \rangle_z \simeq (\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}} : \boldsymbol{\tau})_{\langle \perp \rangle_z}, \quad (4.27)$$

en utilisant la commutation des dérivées suivant x et y avec $\langle \cdot \rangle_z$ et le fait que, par un raisonnement similaire à l'obtention de (4.10), $\langle u_i u_j \rangle_z \simeq \langle u_i \rangle_z \langle u_j \rangle_z$.

Les dissipations visqueuses tridimensionnelle $\dot{\underline{\epsilon}} : \underline{\tau}$ et $(\dot{\underline{\epsilon}} : \underline{\tau})_\perp$ sont liées par

$$\dot{\underline{\epsilon}} : \underline{\tau} = (\dot{\underline{\epsilon}} : \underline{\tau})_\perp + \frac{1}{2} \left[2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 - \frac{8}{3} \nabla_\perp \cdot \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{4}{3} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (4.28)$$

A l'intérieur du crochet, les deux dérivées dominantes toutes les autres sont $\partial u_x / \partial z$ et $\partial u_y / \partial z$. En effet, avec (4.2) et (4.20), nous avons

$$\frac{|\partial u_z / \partial x|}{|\partial u_x / \partial z|} \sim \frac{|\partial u_z / \partial y|}{|\partial u_y / \partial z|} \sim \frac{|u_z|}{|u_\perp|} \frac{\delta_E}{L} \sim \mathcal{H}^2 \text{E}^{-1} \rho_a \ll 1. \quad (4.29)$$

$$\frac{(\partial u_z / \partial z)^2}{(\partial u_x / \partial z)^2} \sim \left(\frac{|u_z|}{|u_\perp|} \right)^2 \sim \mathcal{H}^2 \text{E}^{-1} \rho_a \ll 1, \quad \frac{|(\nabla_\perp \cdot \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z) \partial u_z / \partial z|}{(\partial u_x / \partial z)^2} \sim \frac{\delta_E}{L} \frac{|u_z|}{|u_\perp|} \sim \mathcal{H}^2 \text{E}^{-1} \rho_a \ll 1. \quad (4.30)$$

Nous obtenons donc

$$\dot{\underline{\epsilon}} : \underline{\tau} = (\dot{\underline{\epsilon}} : \underline{\tau})_\perp + \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\perp}{\partial z} \right)^2 \quad (4.31)$$

dont la moyenne suivant z est, à l'aide de (4.27) pour simplifier $\langle (\dot{\underline{\epsilon}} : \underline{\tau})_\perp \rangle_z$,

$$\langle \dot{\underline{\epsilon}} : \underline{\tau} \rangle_z = (\dot{\underline{\epsilon}} : \underline{\tau})_{\langle \perp \rangle_z} + \left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\perp}{\partial z} \right)^2 \right\rangle_z \quad (4.32)$$

Avec la condition de non glissement et l'équation (4.16), l'intégration par partie du dernier terme donne

$$\left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\perp}{\partial z} \right)^2 \right\rangle_z = - \left\langle \mathbf{u}_\perp \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}_\perp}{\partial z^2} \right\rangle_z \simeq - \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z \cdot \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{u}_\perp}{\partial z^2} \right\rangle_z = 2\mathcal{H} \text{E}^{-1/2} \rho_a^{1/2} \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z^2. \quad (4.33)$$

Finalement, le bilan d'entropie quasi-géostrophique s'écrit

$$\rho_a T_a \left(\frac{\partial \langle s' \rangle_z}{\partial t} + \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z \cdot \nabla_\perp \langle s' \rangle_z \right) = \mathcal{D} \text{Ra}_{\text{sa}}^{-1} (\dot{\underline{\epsilon}} : \underline{\tau})_{\langle \perp \rangle_z} + 2\mathcal{D} \text{Ra}_{\text{sa}}^{-1} \mathcal{H} \text{E}^{-1/2} \rho_a^{1/2} \langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z^2 + \nabla_\perp^2 \langle T \rangle_z. \quad (4.34)$$

Le terme en $\langle \mathbf{u}_\perp \rangle_z^2$ apparaissant en plus par rapport à l'équation tridimensionnelle correspond au travail du freinage d'Ekman. L'énergie dissipée par frottement dans les couches d'Ekman est réintroduit dans le bilan d'entropie via ce terme sous forme d'une source locale de chaleur dans le bilan d'entropie.

4.4 Réécriture des équations en terme de vorticité et fonction de courant

Nous avons donc vu que l'écoulement moyen peut être modélisé par un écoulement bidimensionnel auquel s'applique un freinage d'Ekman. Afin de simplifier les équations et d'utiliser des champs scalaires, il est usuel de récrire ce genre d'équation en terme de vorticité et de fonction courant.

Les notations introduites pour la démonstration des équations quasi-géostrophiques étant lourdes, nous n'écrivons plus les moyennes suivant z et les indices \perp et nous sous-entendons le caractère bidimensionnel de toutes les quantités et opérateurs intervenants.

4.4.1 Équation de conservation de la vorticité

4.4.1.1 Équation sur la vorticité

Introduisons la vorticité du fluide

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad (4.35)$$

et plus particulièrement sa composante ζ suivant \mathbf{e}_z

$$\zeta = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (4.36)$$

L'équation la gouvernant s'obtient en prenant le rotationnel de (4.17),

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{-1} \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} - [(\text{Pr}^{-1}\boldsymbol{\omega} + 2\text{E}^{-1}\mathbf{e}_z) \cdot \nabla] \mathbf{u} = & -(\text{Pr}^{-1}\boldsymbol{\omega} + 2\text{E}^{-1}\mathbf{e}_z) \nabla \cdot \mathbf{u} - \text{Ra}_{\text{sa}} \nabla \left(\frac{\alpha_a T_a}{c_{p,a}} s' \right) \times \mathbf{g} \\ & + \frac{1}{\rho_a} \left[\nabla^2 \boldsymbol{\omega} - \beta_a \times \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \right] - 2\mathcal{H}\text{E}^{-1/2} \rho_a^{-1/2} \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \beta_a \times \mathbf{u} \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

où $\beta_a = \rho_a^{-1} \nabla \rho_a$ est défini au paragraphe section 1.1.5.3. Puisque \mathbf{g} et les quantités liées au profil adiabatique ne dépendent que de x , la projection suivant \mathbf{e}_z de l'équation précédente donne

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{-1} \frac{D\zeta}{Dt} = & (\text{Pr}^{-1}\zeta + 2\text{E}^{-1}) \beta_a u_x + \text{Ra}_{\text{sa}} \frac{\alpha_a T_a g}{c_{p,a}} \frac{\partial s'}{\partial y} \\ & + \frac{1}{\rho_a} \left[\nabla^2 \zeta - \beta_a \left(\nabla^2 u_y - \frac{1}{3} \beta_a \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] - 2\mathcal{H}\text{E}^{-1/2} \rho_a^{-1/2} \left(\zeta - \frac{1}{2} \beta_a u_y \right), \end{aligned} \quad (4.38)$$

où nous avons utilisé la conservation de la masse (4.19) sous la forme $\nabla \cdot \mathbf{u} = -\beta_a u_x$.

4.4.1.2 Dissipation visqueuse et vorticité

Un résultat souvent utilisé en turbulence 2D incompressible est que la dissipation visqueuse totale est égale à l'intégrale sur l'espace de la vorticité au carré. Il est intéressant de généraliser ce résultat dans le cas compressible. En réordonnant les termes de l'expression de la dissipation visqueuse bidimensionnelle donnée dans l'équation (4.26), nous pouvons faire apparaître la vorticité ζ

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \boldsymbol{\tau} = \zeta^2 + \frac{4}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + 4 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right). \quad (4.39)$$

L'intégration de cette expression sur l'espace (à deux dimensions), en faisant l'hypothèse de non-glissement sur les bords, fait disparaître le dernier terme et aboutit à

$$\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \boldsymbol{\tau} \rangle_{x,y} = \left\langle \zeta^2 + \frac{4}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \right\rangle_{x,y}, \quad (4.40)$$

où $\langle \rangle_{x,y}$ est la moyenne spatiale suivant les directions x et y . Par rapport au cas incompressible, il s'ajoute donc un terme lié à la divergence de la vitesse dans l'expression de la dissipation visqueuse totale.

4.4.2 Fonction courant

La conservation de la masse (4.19), nous assure l'existence d'une fonction courant ψ telle que

$$\rho_a \mathbf{u} = \nabla \psi \times \mathbf{e}_z. \quad (4.41)$$

Nous pouvons remarquer qu'elle est liée à la vorticité par

$$\zeta = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_a} \nabla \psi \right). \quad (4.42)$$

En injectant l'expression de ψ dans les équations (4.38) et (4.34), les équations quasi-géostrophiques se r  crivent en terme de (ψ, ζ, s')

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{-1} \frac{D\zeta}{Dt} &= (\text{Pr}^{-1} \zeta + 2\text{E}^{-1}) \frac{\beta_a}{\rho_a} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \text{Ra}_{\text{sa}} \frac{\alpha_a T_a g}{c_{p,a}} \frac{\partial s'}{\partial y} \\ &+ \frac{1}{\rho_a} \left[\nabla^2 \zeta - \beta_a \left(-\nabla^2 \left(\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{1}{3} \frac{\beta_a}{\rho_a} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right] - 2\mathcal{H}\text{E}^{-1/2} \rho_a^{-1/2} \left(\zeta + \frac{1}{2} \frac{\beta_a}{\rho_a} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\rho_a T_a \frac{Ds'}{Dt} = \mathcal{D}\text{Ra}_{\text{sa}}^{-1} \underline{\dot{\epsilon}} : \underline{\tau} + 2\mathcal{D}\text{Ra}_{\text{sa}}^{-1} \mathcal{H}\text{E}^{-1/2} \rho_a^{-3/2} (\nabla \psi)^2 + \nabla^2 T \quad (4.44)$$

4.5 Effet bêta compressible

4.5.1 Effet bêta topographique et compressible

Dans le cas des écoulements incompressibles, un phénomène bien connu est celui de l'effet bêta. Il s'agit d'une génération locale de vorticité due à un changement de hauteur du système. Pour un écoulement géostrophique, les colonnes de fluide se déplacent en suivant les lignes de hauteur constante qu'on appelle contours géostrophiques. La géostrophie n'est possible que s'il existe des contours géostrophiques fermés. S'il n'existe pas de tels contours fermés, l'écoulement est remplacé par la somme d'un nombre infini d'ondes inertielles basses fréquences appelées ondes de Rossby (Greenspan, 1968). C'est ce phénomène qui intervient dans l'effet bêta car la présence d'une variation de hauteur (dans la direction de la rotation) fait qu'il n'existe plus de contour géostrophique fermé.

Avec un écoulement compressible, un phénomène similaire peut être observé à cause de la stratification en densité sans que la hauteur n'ait à changer. Cela peut se comprendre en terme de conservation du moment cinétique des colonnes de fluide : une colonne de fluide qui se déplace vers une zone de plus grande masse-volumique verra sa vitesse de rotation propre diminuée. La présence d'un gradient de densité induit donc des modifications locales de la vorticité du fluide de façon similaire à l'effet bêta incompressible. Verhoeven and Stellmach (2014) distingue donc deux effets bêta : l'*effet bêta topographique* d   à un changement de hauteur du système similaire aux écoulements incompressibles et l'*effet bêta compressible* d   à la stratification en masse volumique, exclusif aux écoulements compressibles.

Le modèle anélastique quasi-géostrophique développé précédemment permet de se convaincre, d'un point de vue plus formel, de l'équivalence entre ces deux types d'effet bêta. Dans le modèle incompressible quasi-géostrophique développé par Greenspan (1968), l'équation de conservation de la masse moyenn  e dans la direction de rotation z s'écrit (  quation 5.3.1 p.235) $\nabla_{\perp} \cdot (h \langle \mathbf{u}_{\perp} \rangle_z) = 0$ où h est

la hauteur (locale) du système suivant z . Cette équation est de la même forme que l'équation (4.19) : la masse volumique ρ_a remplaçant la hauteur h . Puisque les contours géostrophiques topographiques sont les lignes d'égale hauteur h , les contours géostrophiques compressibles sont les isodensités. Par exemple, en reprenant la géométrie de l'expérience, les contours géostrophiques compressibles sont les cercles centrés sur l'axe de rotation et coupés par les parois latérales. Donc, bien que la hauteur suivant z soit constante, il y a un effet bêta compressible dans la cellule qui génère des ondes de Rossby.

4.5.2 Ondes de Rossby

La relation des ondes de Rossby issue de l'effet bêta compressible est obtenue à partir de l'équation sur la vorticité (4.43). Pour ce faire, considérons que la dynamique est dominée par la rotation. Nous négligeons les termes dissipatifs de viscosité et de freinage d'Ekman. Le terme non linéaire de la force de Coriolis devient négligeable en se plaçant dans le cas $\beta_a L \ll 1$ (Verhoeven and Stellmach, 2014). Cela revient à étudier les échelles de taille plus petite que la taille caractéristique de variation de la densité β_a^{-1} . L'équation (4.43) s'écrit

$$\text{Pr}^{-1} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 2\text{E}^{-1} \frac{\beta_a}{\rho_a} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.45)$$

Cherchons les solutions sous forme d'onde plane de pulsation ϖ et de vecteur d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$:

$$\psi = \psi_0 e^{i(\varpi t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (4.46)$$

La relation (4.42), permet d'expliciter la vorticité ζ en fonction de ψ et \mathbf{k}

$$\zeta = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_a} \nabla \psi \right) = -\frac{1}{\rho_a} \nabla^2 \psi + \frac{\beta_a}{\rho_a} \frac{\partial \psi}{\partial x} \simeq -\frac{1}{\rho_a} \nabla^2 \psi = \mathbf{k}^2 \frac{\psi}{\rho_a}, \quad (4.47)$$

où le terme $\frac{\beta_a}{\rho_a} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ est négligé devant $\nabla^2 \psi / \rho_a$ dans l'approximation $\beta_a L \ll 1$. En injectant les expressions (4.46) et (4.47) dans (4.45), nous obtenons la relation de dispersion des ondes de Rossby

$$\varpi = -2\text{PrE}^{-1} \beta_a \frac{k_y}{k_x^2 + k_y^2} \quad (4.48)$$

Nous retrouvons ici la même relation de dispersion que dans le cas des ondes de Rossby liées à l'effet bêta topographique (Greenspan, 1968). Aux facteurs adimensionnels près, la variation relative de masse volumique β_a dans l'effet bêta compressible joue le même rôle que la variation relative de hauteur (correspondant à la pente locale) dans l'effet bêta topographique. Notons par ailleurs que puisque dans notre modèle $\beta_a > 0$, nous avons nécessairement $k_y < 0$. Les ondes de Rossby sont donc rétrogrades : elles se propagent dans le sens opposé à la rotation.

5

Simulation numérique de l'expérience

Sommaire

5.1	Contexte	91
5.2	Géométrie	92
5.3	Mise en équations	93
5.3.1	Profil adiabatique adimensionné	93
5.3.2	Équation anélastique liquide quasi-géostrophique	93
5.3.3	Conditions aux limites	93
5.4	Schéma de résolution	94
5.4.1	Algorithme de résolution	94
5.4.2	Formulation faible du problème	95
5.5	Résultats numériques	96
5.5.1	Simulations réalisées	96
5.5.2	Régimes observés	98
5.5.3	Diagramme Rayleigh-Nusselt	105
5.5.4	Comparaison à l'expérience	105

5.1 Contexte

Afin de mieux comprendre la dynamique à l'intérieur de la cellule expérimentale, nous avons réalisé des simulations numériques en deux dimensions de l'expérience utilisant la modélisation anélastique quasi-géostrophique développée. Afin de simplifier la résolution numérique, nous faisons deux choix nous éloignant de l'expérience. Le premier est de prendre comme fluide un gaz parfait. Cela nous permet d'utiliser des expressions analytiques pour les quantités liées au profil adiabatique. La seconde est de se restreindre à l'approximation anélastique liquide. Par rapport à l'approximation anélastique, cela nous permet une gestion plus simple des fluctuations de pression π' qui n'interviennent alors que sous la forme d'un gradient. L'utilisation conjointe d'un gaz parfait et de l'approximation anélastique liquide peut paraître paradoxale mais, comme vu au paragraphe section 1.3.5, la condition d'application de l'approximation anélastique liquide $\alpha_0 T_0 \mathcal{D} \ll 1$ peut-être réalisée pour un gaz pour les faibles nombre de dissipation. Enfin, nous utilisons pour les calculs numériques le logiciel de résolution par éléments

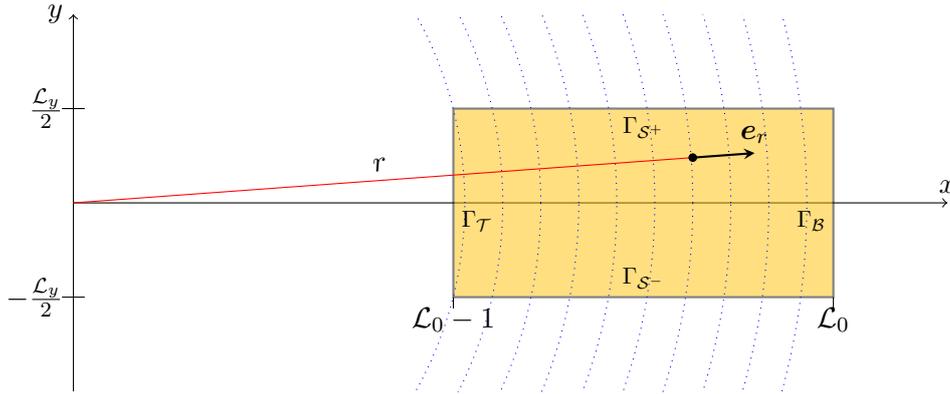


FIGURE 5.1 – Schéma du domaine 2D sur lequel se fait la résolution $x \in [\mathcal{L}_0 - 1, \mathcal{L}_0]$, $y \in [-\mathcal{L}_y/2, \mathcal{L}_y/2]$. La gravité est suivant \mathbf{e}_r . r est la distance radiale d'un point au centre du repère. Les parois du domaine sont notées Γ_B , Γ_T , Γ_{S^+} et Γ_{S^-} .

finis FreeFem++ (déjà utilisé pour les simulations thermiques du dispositif au section 2.4). L'intérêt de ce logiciel est la possibilité de résoudre le problème dans une enceinte fermée et de pouvoir imposer des conditions de non-glissement de la vitesse sur tous les bords (les autres logiciels envisagés utilisent des méthodes pseudo-spectrales imposant l'utilisation de condition périodique suivant une direction).

5.2 Géométrie

Puisque la cellule de l'expérience est rectangulaire (en 2D), il est naturel d'utiliser les coordonnées cartésiennes (x, y) alignées avec les parois dans les simulations comme présentées sur la figure 5.1. Afin de respecter les choix d'adimensionnements fait depuis le début, la longueur de la cuve entre les plaques chaude et froide est prise égale à 1. La dimension latérale adimensionnée de la cuve est \mathcal{L}_y . Enfin, afin de rendre compte de la position de la cuve par rapport à l'axe de rotation, nous introduisons

$$\mathcal{L}_0 = \frac{r_{max}}{L}. \quad (5.1)$$

La gravité due à la rotation dans la cellule est alors radiale

$$\mathbf{g} = r\Omega^2 \mathbf{e}_r \quad \text{où } r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5.2)$$

Il est important de noter qu'il s'agit d'un changement de paradigme dans le système de coordonnées. Dans les paragraphes précédents, \mathbf{e}_x était choisi de façon à être dans la direction de la gravité. Ce choix était pertinent dans la description en terme de vorticité et fonction courant car il permet une écriture simplifiée du rotationnel et des dérivées. Avec ce nouveau choix de coordonnées, les équations de bases, n'utilisant pas directement de dérivées suivant x et y , sont encore valables. Par contre, les équations dérivées utilisant la fonction de courant ψ (4.43) et (4.44) ne peuvent pas être utilisées sous leurs anciennes formes ($\partial/\partial x$ et $\partial/\partial y$ devenant respectivement les dérivées radiales et orthoradiales dans le nouveau système).

5.3 Mise en équations

5.3.1 Profil adiabatique adimensionné

Les expressions liées au profil adiabatique pour un gaz parfait dans le cas d'une gravité centrifuge ont été établies au paragraphe section 1.1.5.3. Elles s'écrivent ici sous forme adimensionnée

$$T_a(r) = \frac{1}{\alpha_a(r)} = 1 + \frac{\mathcal{D}}{2\mathcal{L}_0}(r^2 - \mathcal{L}_0^2), \quad (5.3)$$

$$\rho_a(r) = \left(1 + \frac{\mathcal{D}}{2\mathcal{L}_0}(r^2 - \mathcal{L}_0^2)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (5.4)$$

$$\beta_a(r) = \frac{1}{\rho_a} \frac{d\rho_a}{dr} = \frac{\mathcal{D}}{(\gamma-1)\mathcal{L}_0} r \left(1 + \frac{\mathcal{D}}{2\mathcal{L}_0}(r^2 - \mathcal{L}_0^2)\right)^{-1}. \quad (5.5)$$

5.3.2 Équation anélastique liquide quasi-géostrophique

Comme expliqué précédemment, nous nous restreignons au cas de l'approximation anélastique liquide dont les équations quasi-géostrophiques se déduisent des équations anélastiques quasi-géostrophiques (4.19), (4.17) et (4.34) par l'approximation $T_a s' = c_{p,a} T'$ avec $c_{p,a}$ constant car le gaz est parfait

$$\nabla \cdot (\rho_a \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{u} + \beta_a u_r = 0, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{-1} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -2(\text{E}^{-1} + \mathcal{H}\text{E}^{-1/2} \rho_a^{-1/2}) \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} \\ -\text{Ra}_{\text{sa}} \nabla \pi' - \text{Ra}_{\text{sa}} \alpha_a T' r \mathbf{e}_r + \frac{1}{\rho_a} \left[\nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{3} \nabla (\beta_a u_r) \right] &- 2\mathcal{H}\text{E}^{-1/2} \rho_a^{-1/2} \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\rho_a \frac{DT'}{Dt} = \mathcal{D} \rho_a \alpha_a T' r u_r + \mathcal{D} \text{Ra}_{\text{sa}}^{-1} \dot{\underline{\epsilon}} : \underline{\boldsymbol{\tau}} + 2\mathcal{D} \text{Ra}_{\text{sa}}^{-1} \mathcal{H}\text{E}^{-1/2} \rho_a^{1/2} \mathbf{u}^2 + \frac{2\mathcal{D}}{\Theta \mathcal{L}_0} + \nabla^2 T', \quad (5.8)$$

avec u_r la vitesse radiale

$$u_r = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{x}{r} u_x + \frac{y}{r} u_y, \quad (5.9)$$

et où le terme $\Theta^{-1} \nabla^2 T_a$ est directement évalué à partir de (5.3) :

$$\frac{1}{\Theta} \nabla^2 T_a = \frac{1}{\Theta} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_a}{dr} \right) = \frac{2\mathcal{D}}{\Theta \mathcal{L}_0}. \quad (5.10)$$

5.3.3 Conditions aux limites

La condition de non-glissement aux parois implique la nullité de \mathbf{u} sur les bords,

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{B}}, \Gamma_{\mathcal{T}}, \Gamma_{\mathcal{S}^+}, \Gamma_{\mathcal{S}^-}. \quad (5.11)$$

Les conditions aux limites sur les fluctuations de pression π' n'ont pas besoin d'être connues explicitement car celles-ci n'interviennent que sous forme de gradient. En ce qui concerne les fluctuations de température, les conditions aux limites doivent prendre en compte le profil de température adiabatique. L'absence de transfert thermique au niveau des parois latérales $\Gamma_{\mathcal{S}^+}$ et $\Gamma_{\mathcal{S}^-}$ s'écrit

$$0 = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T_a}{\partial y} + \Theta \frac{\partial T'}{\partial y}. \quad (5.12)$$

Le terme $\partial T_a / \partial y$ peut s'exprimer analytiquement avec l'équation (5.3). La condition sur les fluctuations de température est donc

$$\frac{\partial T'}{\partial y} = -\frac{\mathcal{D}}{\Theta \mathcal{L}_0} y \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{S}^+} \text{ et } \Gamma_{\mathcal{S}^-} \quad (\text{i.e. } y = \pm \mathcal{L}_y / 2). \quad (5.13)$$

En ce qui concerne les conditions sur les parois $\Gamma_{\mathcal{B}}$ et $\Gamma_{\mathcal{T}}$ deux types de conditions sont possibles : y imposer une température constante ou un flux thermique constant. Ces valeurs imposées n'ont pas nécessairement besoin d'être uniformes sur la paroi. Le premier correspond au forçage usuel utilisé dans la configuration de Rayleigh-Bénard où c'est la différence de température entre ces deux parois qui est le moteur de la convection. Le second est plus proche de l'expérience réalisée où nous dissipons une puissance constante dans la résistance chauffante. Nous avons opté pour la condition de température fixée plus simple à implémenter. Une condition de type flux thermique fixé a en effet le désavantage de ne pas contraindre de valeur de température T' en un point : une dérive des valeurs de température est alors possible. De surcroît, même si elle ne reproduit pas exactement les conditions expérimentale, prendre la condition de température fixée est raisonnable car la grande conductivité thermique de la plaque de duraluminium à la paroi inférieure \mathcal{B} y homogénéise la valeur de température. Le profil de température adiabatique n'est pas homogène sur ces parois, nous définissons donc les conditions de température en prenant comme référence ses valeurs au centre des parois

$$T(x, y) = T_a(x, y) + \Theta T'(x, y) = T_a(x, y = 0) + \frac{1}{2} \Theta \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{B}} \quad (\text{i.e. } x = \mathcal{L}_0), \quad (5.14a)$$

$$T(x, y) = T_a(x, y) + \Theta T'(x, y) = T_a(x, y = 0) - \frac{1}{2} \Theta \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{T}} \quad (\text{i.e. } x = \mathcal{L}_0 - 1). \quad (5.14b)$$

En explicitant l'expression de T_a avec l'équation (5.3), nous obtenons les conditions

$$T' = \frac{1}{2} - \frac{\mathcal{D}}{2\mathcal{L}_0\Theta} y^2 \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{B}} \quad (\text{i.e. } x = \mathcal{L}_0), \quad (5.15a)$$

$$T' = -\frac{1}{2} - \frac{\mathcal{D}}{2\mathcal{L}_0\Theta} y^2 \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{T}} \quad (\text{i.e. } x = \mathcal{L}_0 - 1). \quad (5.15b)$$

5.4 Schéma de résolution

5.4.1 Algorithme de résolution

Lors de la résolution numérique, nous partons d'un état initial sans vitesse avec un gradient de fluctuations de pression linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^0 = \mathbf{0}, \\ \pi^0 = 0, \end{array} \right. \quad (5.16a) \quad (5.16b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T^0 = x - \mathcal{L}_0 + \frac{1}{2}. \end{array} \right. \quad (5.16c)$$

Le problème est résolu de la façon suivante au n^{e} pas de temps :

1. les champs (u_x^n, u_y^n, π'^n) sont déterminés par la résolution conjointe des équations de conservation de la masse (5.6) et de conservation de la quantité de mouvement (5.7). La température utilisée dans le terme de flottabilité est celle obtenue au pas de temps précédent T^{n-1} .

2. le terme de dissipation visqueuse $(\dot{\underline{\epsilon}} : \underline{\boldsymbol{\tau}})^n$ et la vitesse radiale u_r^n sont calculés à partir de u_x^n, u_y^n avec les équations (4.26) et (5.9).
3. le champ de température T^n est déterminé par la résolution de l'équation thermique (5.8) en utilisant les quantités $u_x^n, u_y^n, u_r^n, (\dot{\underline{\epsilon}} : \underline{\boldsymbol{\tau}})^n$ calculées aux étapes précédentes.

Lors de la résolution des équations, les dérivées particulières $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \frac{DT}{Dt}$ sont traitées à l'aide de la routine `convect` de FreeFem++. Cette routine approxime la dérivée particulière en utilisant la méthode des caractéristiques :

$$\left(\frac{DA}{Dt}\right)^n \simeq \frac{1}{\delta t}(A^n - A^{n-1} \circ \mathbf{R}^{n-1}) \quad \text{où } A^n \circ \mathbf{R}^n = A^n(\mathbf{r} - \mathbf{u}^n(\mathbf{r})\delta t) \quad (5.17)$$

où δt est le pas de temps et \mathbf{r} le vecteur position. Les équations sont résolues implicitement aux étapes 1 et 3.

5.4.2 Formulation faible du problème

Les équations doivent être saisies sous forme faible dans FreeFem++. En introduisant les fonctions tests \mathbf{u}^*, π^* et T^* associées à \mathbf{u}, π' et T' , la formulation de l'étape 1 s'obtient en multipliant (5.7) par \mathbf{u}^* et (5.6) par π^* puis en intégrant sur l'espace \mathcal{V} avec la condition aux limites de vitesse (5.18b),

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathcal{V}} \left[\text{Pr}^{-1} \rho_a \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \mathbf{u}^* \right. \\ + 2\rho_a (\mathbf{E}^{-1} + \mathcal{H}\mathbf{E}^{-1/2} \rho_a^{-1/2}) (u_x u_y^* - u_y u_x^*) \\ \quad \left. + \text{Ra}_{\text{sa}} \rho_a \nabla \pi' \cdot \mathbf{u}^* + \text{Ra}_{\text{sa}} \rho_a \alpha_a T' r u_r^* \right. \\ + \nabla u_x \cdot \nabla u_x^* + \nabla u_y \cdot \nabla u_y^* - \frac{1}{3} \beta_a u_r \nabla \cdot \mathbf{u}^* \\ \quad \left. + 2\mathcal{H}\mathbf{E}^{-1/2} \rho_a^{1/2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* \right. \\ \quad \left. + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \pi^* + \beta_a u_r \pi^* + \varepsilon \pi' \pi^* \right] = 0, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{B}}, \Gamma_{\mathcal{T}}, \Gamma_{\mathcal{S}^+}, \Gamma_{\mathcal{S}^-}, \end{array} \right. \quad (5.18a)$$

où $u_r^* = (x/r)u_x^* + (y/r)u_y^*$, et où les deux termes liés à la force de viscosité sont reformulés par les intégrations par parties,

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla^2 \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}^* = \int_{\mathcal{V}} [(\nabla^2 \mathbf{u}_x) \mathbf{u}_x^* + (\nabla^2 \mathbf{u}_y) \mathbf{u}_y^*] = - \int_{\mathcal{V}} [\nabla u_x \cdot \nabla u_x^* + \nabla u_y \cdot \nabla u_y^*], \quad (5.19)$$

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla(\beta_a u_r) \cdot \mathbf{u}^* = - \int_{\mathcal{V}} \beta_a u_r \nabla \cdot \mathbf{u}^*. \quad (5.20)$$

utilisant la nullité de la vitesse aux bords (5.18b). Le terme $\varepsilon \pi' \pi^*$ avec $\varepsilon \ll 1$ est ajouté afin de stabiliser les solutions obtenues en désingularisant la matrice de résolution. En pratique, nous prenons $\varepsilon = 10^{-6}$.

La formulation simple de l'étape 3 s'obtient en multipliant l'équation thermique (5.8) par T^* puis en intégrant sur l'espace \mathcal{V} avec les conditions aux limites de température (5.13), (5.15a), (5.15b),

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathcal{V}} \left[\rho_a \frac{DT'}{Dt} T^* - \mathcal{D} \rho_a \alpha_a r u_r T' T^* - \mathcal{D} \text{Ra}_{\text{sa}}^{-1} \underline{\dot{\epsilon}} : \underline{\tau} T^* \right. \\ \quad \left. - \frac{2\mathcal{D}}{\Theta \mathcal{L}_0} T^* + \nabla T' \cdot \nabla T^* \right. \\ \quad \left. - 2\mathcal{D} \text{Ra}_{\text{sa}}^{-1} \mathcal{H} E^{-1/2} \rho_a^{1/2} \mathbf{u}^2 T^* \right] \\ \quad + \int_{\Gamma_{S^+}} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{L}_0 \Theta} y T^* - \int_{\Gamma_{S^-}} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{L}_0 \Theta} y T^* = 0, \\ \quad T' = \frac{1}{2} - \frac{\mathcal{D}}{2\mathcal{L}_0 \Theta} y^2, \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{B}}, \\ \quad T' = -\frac{1}{2} - \frac{\mathcal{D}}{2\mathcal{L}_0 \Theta} y^2, \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{T}}, \end{array} \right. \quad (5.21a)$$

$$T' = \frac{1}{2} - \frac{\mathcal{D}}{2\mathcal{L}_0 \Theta} y^2, \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{B}}, \quad (5.21b)$$

$$T' = -\frac{1}{2} - \frac{\mathcal{D}}{2\mathcal{L}_0 \Theta} y^2, \quad \text{sur } \Gamma_{\mathcal{T}}, \quad (5.21c)$$

où le terme de diffusion thermique est reformulé par l'intégration par partie

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla^2 T') T^* = - \int_{\mathcal{V}} \nabla T' \cdot \nabla T^* + \int_{\partial \mathcal{V}} \frac{\partial T'}{\partial n} T^*, \quad (5.22a)$$

$$= - \int_{\mathcal{V}} \nabla T' \cdot \nabla T^* - \int_{\Gamma_{S^+}} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{L}_0 \Theta} y T^* + \int_{\Gamma_{S^-}} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{L}_0 \Theta} y T^* \quad (5.22b)$$

5.5 Résultats numériques

5.5.1 Simulations réalisées

Les simulations numériques ont été réalisées sur la grille de la figure 5.2 comportant 14033 triangles et 7433 nœuds. Le maillage de la grille est plus fin proche des bords afin de mieux résoudre les couches limites. Les rapports d'aspects sont choisis pour être relativement proches de la géométrie de l'expérience :

$$\mathcal{L}_0 = 2 \left(\simeq \frac{r_{\text{max}}}{L} \right), \quad \mathcal{L}_y = \frac{1}{2} \left(\simeq \frac{H}{L} \right), \quad \mathcal{H}^{-1} = \frac{1}{2} \left(\simeq \frac{H}{L} \right). \quad (5.23)$$

Une fois la géométrie fixée, les simulations numériques dépendent a priori de six paramètres adimensionnés : \mathcal{D} , E , Ra_{sa} , Θ , Pr et γ . Se restreindre au cas du gaz parfait monoatomique revient à fixer les valeurs du nombre de Prandtl Pr et du rapport des capacités calorifiques γ ,

$$\text{Pr} = \frac{2}{3}, \quad \gamma = \frac{5}{3}. \quad (5.24)$$

Le nombre Θ mesure le rapport entre les amplitudes des fluctuations T' de température et l'amplitude de la température du profil adiabatique T_a . Les mesures expérimentales montrent que $\Theta \sim 1/300$ (avec $T' \sim 1 \text{ K}$ et $T_a \sim 300 \text{ K}$). Toutefois, plus la valeur de ce paramètre est petite, plus les couches limites des parois Γ_{S^+} et Γ_{S^-} doivent être résolues finement car le gradient de température imposé aux parois augmente (équation (5.13)). Or un maillage plus fin augmente rapidement le temps de résolution à chaque pas de temps. Nous avons donc fait le choix de se restreindre à une valeur de

$$\Theta = 0.1, \quad (5.25)$$

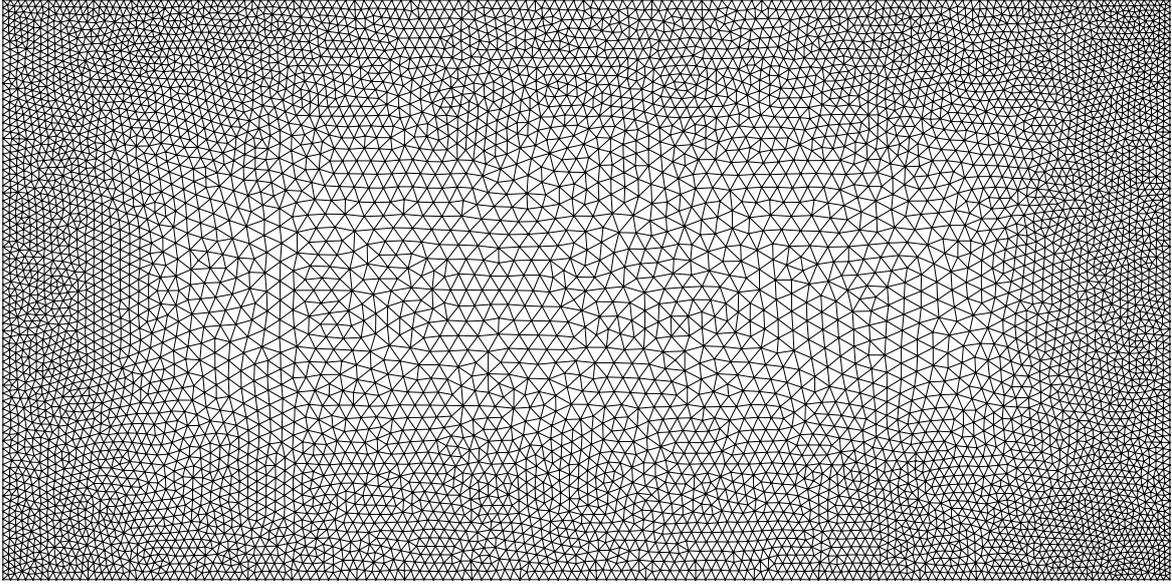


FIGURE 5.2 – Maillage utilisé lors de la résolution composé de 7433 nœuds et 14033 triangles.

garantissant un écart convenable entre l'amplitude des fluctuations de température et du profil adiabatique tout en gardant un temps de résolution raisonnable.

Nous nous sommes focalisé sur l'influence des nombres de dissipation \mathcal{D} , nombre d'Ekman E et nombre de Rayleigh super-adiabatique Ra_{sa} sur la convection. Trois valeurs de nombre de dissipation ont été utilisées : 0 , 10^{-3} et 10^{-1} . Le cas $\mathcal{D} = 0$ correspond à l'approximation de Boussinesq : il n'y a pas d'effet de compressibilité et on a un profil adiabatique uniforme $T_a = \alpha_a = \rho_a = 1$ et $\beta_a = 0$. D'autre part, le cas de plus fort nombre de dissipation $\mathcal{D} = 10^{-1}$ est physiquement discutable pour un gaz parfait dans l'approximation anélastique liquide car la condition $(\alpha T)\mathcal{D} \ll 1$ est peu vérifiée. Nous l'avons toutefois gardé car il permet de mieux voir ce qui se passe avec des effets de compressibilité forts. Pour le nombre d'Ekman, quatre valeurs ont été utilisées : $+\infty$, 1 , 10^{-1} , 10^{-2} . Le cas $E = +\infty$ correspond au cas sans rotation. Enfin pour le nombre de Rayleigh super-adiabatique, 40 valeurs comprises entre 10^2 et $1,468 \times 10^8$ ont été utilisées. Elles sont explicitées dans la table 5.1. Enfin, toutes ces simulations ont été faites avec un pas de temps $\delta t = 1 \times 10^{-4}$ sur 1500 itérations.

En plus des champs de vitesses, de température et de pression, les flux thermiques de chaque face sont évalués à chaque pas de temps

$$\Phi_{\Gamma_B} = \int_{\Gamma_B} \left(\frac{\partial T_a}{\partial x} + \Theta \frac{\partial T'}{\partial x} \right), \quad \Phi_{\Gamma_T} = \int_{\Gamma_B} \left(\frac{\partial T_a}{\partial x} + \Theta \frac{\partial T'}{\partial x} \right), \quad (5.26)$$

$$\Phi_{\Gamma_{S+}} = \int_{\Gamma_B} \left(\frac{\partial T_a}{\partial y} + \Theta \frac{\partial T'}{\partial y} \right), \quad \Phi_{\Gamma_{S-}} = \int_{\Gamma_B} \left(\frac{\partial T_a}{\partial y} + \Theta \frac{\partial T'}{\partial y} \right). \quad (5.27)$$

Ces flux nous permettent d'exclure les simulations non-physiques. La conditions de non transfert thermique sur les parois latérales (5.13) impose $\Phi_{\Gamma_{S+}} = \Phi_{\Gamma_{S-}} = 0$ et la conservation de l'énergie sur la cellule imposent $\bar{\Phi}_{\Gamma_B} = \bar{\Phi}_{\Gamma_T}$ (la notation \bar{A} est la moyenne temporelle de A dans l'état statistiquement stationnaire). En pratique, ces égalités ne pouvant être strictes à cause des erreurs numériques, nous avons gardé les simulations où $\bar{\Phi}_{\Gamma_B}$ et $\bar{\Phi}_{\Gamma_T}$ diffèrent de moins de 10% et où $|\Phi_{\Gamma_{S+}}|, |\Phi_{\Gamma_{S-}}| < 0.01 |\bar{\Phi}_{\Gamma_B}|$.

\mathcal{D}				
0 (Boussinesq)		10^{-3}		10^{-1}
E				
$+\infty$ (sans rotation)		1	10^{-1}	10^{-2}
Ra_{sa}				
1×10^2	1×10^3	1×10^4	$2,154 \times 10^4$	$2,610 \times 10^4$
$3,162 \times 10^4$	$3,831 \times 10^4$	$4,642 \times 10^4$	$5,623 \times 10^4$	$6,813 \times 10^4$
$8,254 \times 10^4$	$8,813 \times 10^4$	1×10^5	$1,212 \times 10^5$	$1,468 \times 10^5$
$1,778 \times 10^5$	$2,154 \times 10^5$	$2,610 \times 10^5$	$3,162 \times 10^5$	$3,831 \times 10^5$
$4,642 \times 10^5$	$5,623 \times 10^5$	$6,813 \times 10^5$	$8,254 \times 10^5$	$8,813 \times 10^5$
1×10^6	$1,212 \times 10^6$	$1,468 \times 10^6$	$2,154 \times 10^6$	$3,162 \times 10^6$
$4,642 \times 10^6$	$6,813 \times 10^6$	1×10^7	$1,468 \times 10^7$	$2,154 \times 10^7$
$3,162 \times 10^7$	$4,642 \times 10^7$	$6,813 \times 10^7$	1×10^8	$1,468 \times 10^8$

TABLE 5.1 – Nombre de dissipation \mathcal{D} , nombre d'Ekman E et nombre de Rayleigh super-adiabatique Ra_{sa} utilisés dans les simulations numériques.

5.5.2 Régimes observés

Trois types de régimes différents sont observés dans les simulations : un régime quasi-diffusif, des régimes à un, deux ou trois rouleaux et enfin un régime chaotique dont la structure évolue fortement au cours du temps.

Le régime quasi-diffusif (figure 5.3) se caractérise par un profil de température très proche du profil diffusif où la température totale $T = T_a + \Theta T'$ évolue linéairement entre les deux plaques. Le fluide n'est toutefois pas au repos et un écoulement lent stationnaire existe. Il est composé de deux longs rouleaux : le fluide remonte au centre de la cellule et redescend sur les bords. Cet écoulement se justifie par le fait que la gravité est radiale (suivant \mathbf{e}_r dans la cellule alors que le gradient de température diffusif est suivant \mathbf{e}_x). La force de flottabilité exerce donc un couple sur le fluide l'empêchant de rester au repos.

Le régime à un rouleau (figure 5.4) présente un écoulement dominé par un rouleau de la taille de la cellule. Cette configuration est très stable et varie très peu au cours du temps. Des petits rouleaux de recirculation de taille bien inférieure existent parfois dans les coins. Le régime à deux rouleaux (figure 5.5) présente deux rouleaux contrarotatifs dans la cellule. Contrairement au cas à un rouleau très stable, l'écoulement n'y est pas stationnaire. Il est fréquent d'y observer une oscillation entre les tailles respectives des deux rouleaux. Cette oscillation globale du régime est bien visible sur les flux thermiques Φ_{Γ_B} et Φ_{Γ_T} (figure 5.5). Le régime à trois rouleaux (figure 5.6) n'a été observé que dans deux simulations. Comme celui à deux rouleaux, l'écoulement n'y est pas stationnaire et la géométrie des rouleaux évolue au cours du temps.

Enfin lorsque le nombre de Rayleigh super-adiabatique augmente, l'écoulement est de plus en plus instable et aucune structure stationnaire ne se forme, c'est le régime chaotique (figure 5.7). Ce régime

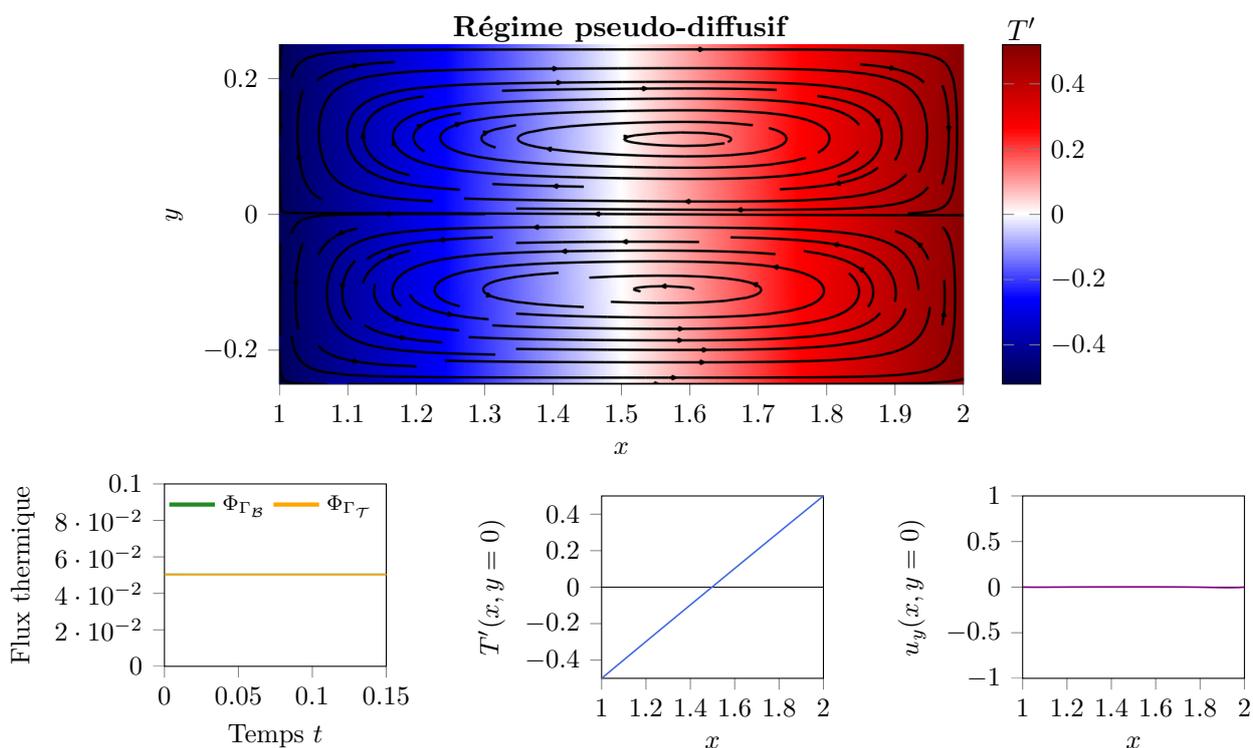


FIGURE 5.3 – Exemple de résultats obtenus avec un régime quasi-diffusif en fin de simulation (à $t = 0.15$). Cette simulation est réalisée avec $\mathcal{D} = 10^{-3}$, $E = 1$ et $\text{Ra}_{\text{sa}} = 10^4$. (haut) Champ de température T' et lignes de courant de l'écoulement (lignes noires) dans la cellule. (gauche) Evolutions des flux aux parois durant la simulation. (milieu) Profil de température $T'(x, y = 0)$ au centre de la cellule. (droite) Profil de vitesse $u_y(x, y = 0)$ au centre de la cellule.

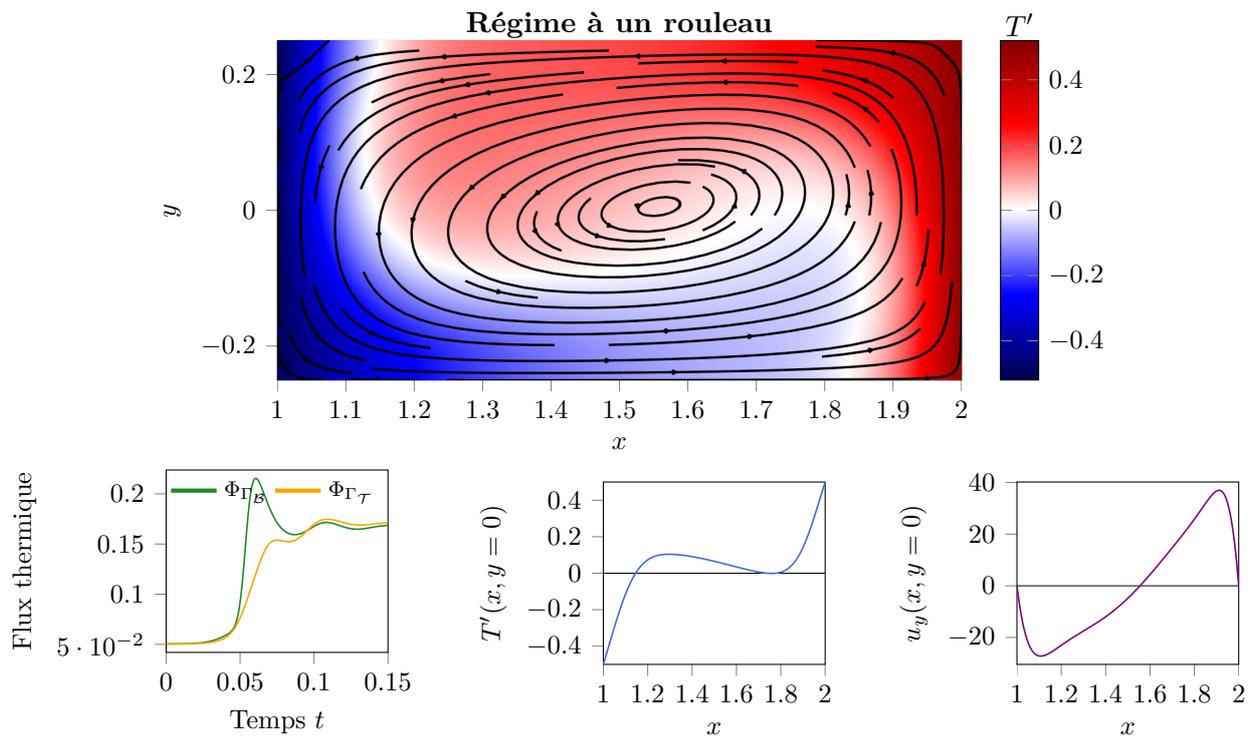


FIGURE 5.4 – Exemple de résultats obtenus avec un régime à un rouleau en fin de simulation (à $t = 0.15$). Cette simulation est réalisée avec $\mathcal{D} = 10^{-3}$, $E = 10^2$ et $\text{Ra}_{\text{sa}} = 6,813 \times 10^4$. (haut) Champ de température T' et lignes de courant de l'écoulement dans (lignes noires) la cellule. (gauche) Evolutions des flux aux parois durant la simulation. (milieu) Profil de température $T'(x, y = 0)$ au centre de la cellule. (droite) Profil de vitesse $u_y(x, y = 0)$ au centre de la cellule.

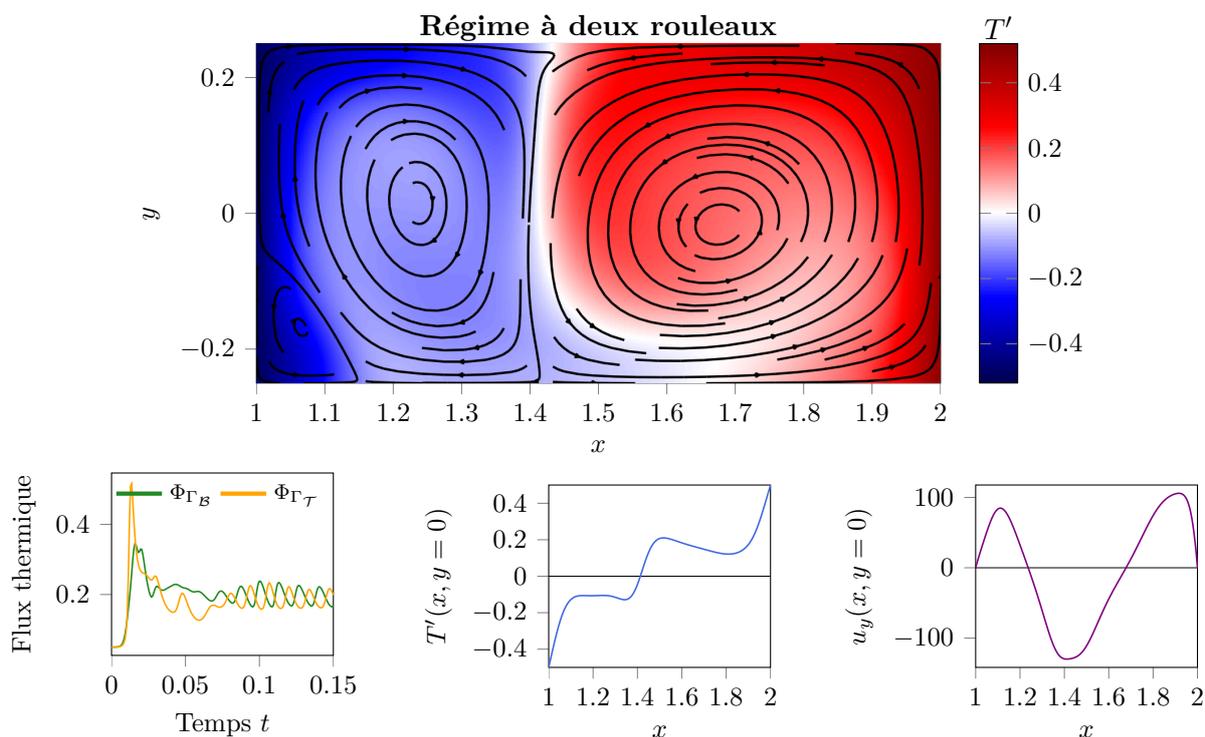


FIGURE 5.5 – Exemple de résultats obtenus avec un régime à deux rouleaux en fin de simulation (à $t = 0.15$). Cette simulation est réalisée avec $\mathcal{D} = 0$, $E = 10^2$ et $Ra_{sa} = 4,642 \times 10^5$. (haut) Champ de température T' et lignes de courant de l'écoulement dans (lignes noires) la cellule. (gauche) Evolutions des flux aux parois durant la simulation. (milieu) Profil de température $T'(x, y = 0)$ au centre de la cellule. (droite) Profil de vitesse $u_y(x, y = 0)$ au centre de la cellule.

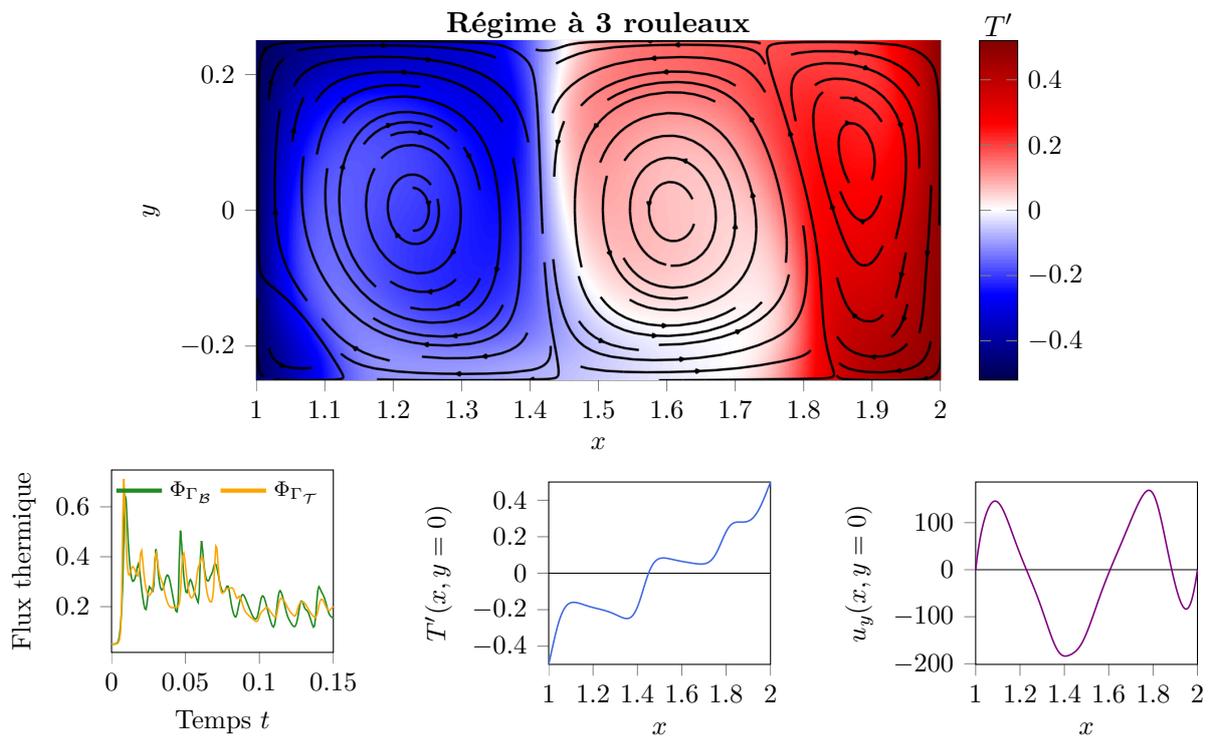


FIGURE 5.6 – Exemple de résultats obtenus avec un régime à trois rouleaux en fin de simulation (à $t = 0.15$). Cette simulation est réalisée avec $\mathcal{D} = 0$, $E = 10^2$ et $Ra_{sa} = 10^6$. (haut) Champ de température T' et lignes de courant de l'écoulement (lignes noires) dans la cellule. (gauche) Evolutions des flux aux parois durant la simulation. (milieu) Profil de température $T'(x, y = 0)$ au centre de la cellule. (droite) Profil de vitesse $u_y(x, y = 0)$ au centre de la cellule.

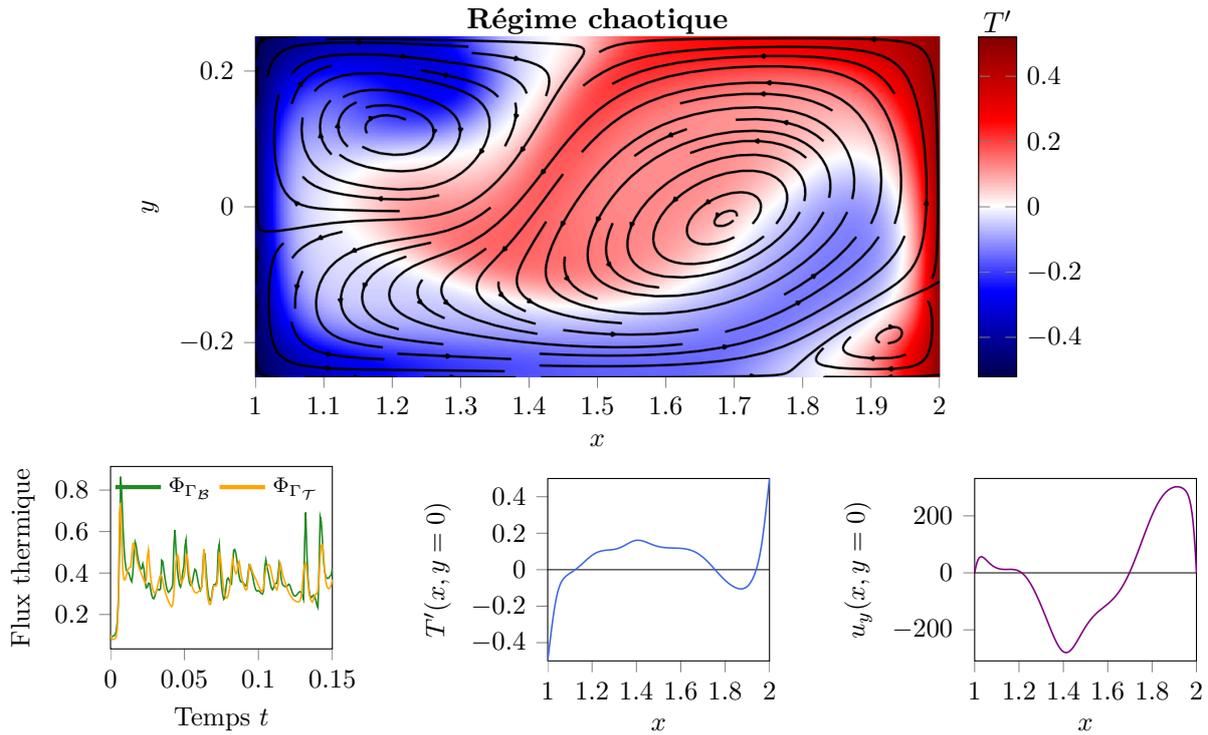
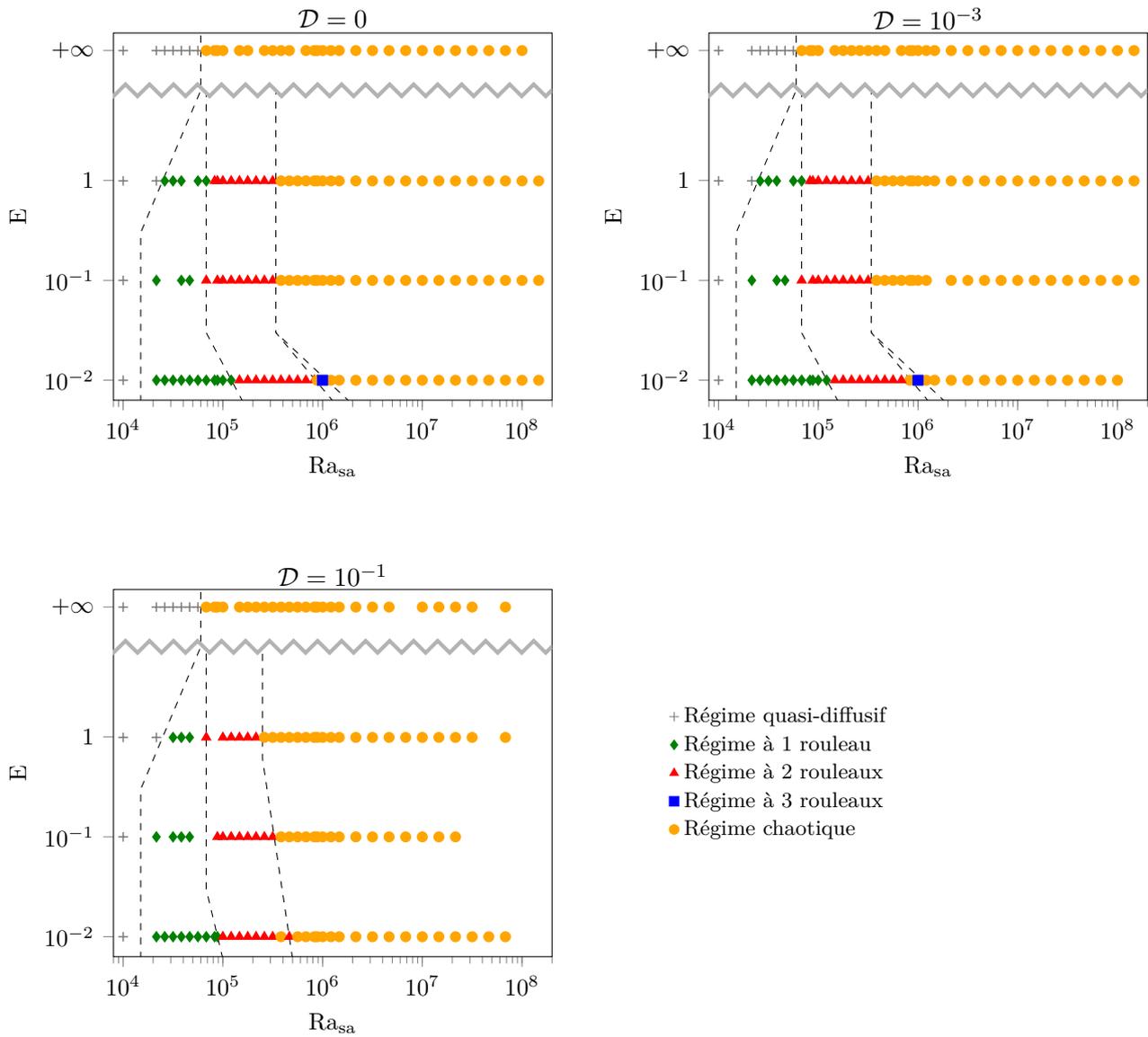


FIGURE 5.7 – Exemple de résultats obtenus avec un régime chaotique en fin de simulation (à $t = 0.15$). Cette simulation est réalisée avec $\mathcal{D} = 10^{-1}$, $E = 1$ et $\text{Ra}_{\text{sa}} = 1,468 \times 10^6$. (haut) Champ de température T' et lignes de courant de l'écoulement (lignes noires) dans la cellule. (gauche) Evolutions des flux aux parois durant la simulation. (milieu) Profil de température $T'(x, y = 0)$ au centre de la cellule. (droite) Profil de vitesse $u_y(x, y = 0)$ au centre de la cellule.

est caractérisé par une forte évolution au cours du temps.

La figure 5.8 représente les diagrammes de régimes dans le plan $(\text{Ra}_{\text{sa}}, E)$ pour les trois nombres de dissipation testés. Sur le domaine étudié, le nombre de dissipation a une influence minimale sur les régimes observés. A nombre d'Ekman fixé, le système passe successivement du régime quasi-diffusif, au régime à un rouleau, puis à deux rouleaux et enfin au régime chaotique quand le nombre de Rayleigh super-adiabatique augmente. La rotation favorise les régimes de rouleaux. En effet, les plages de nombre de Rayleigh super-adiabatique où l'on trouve les régimes à un ou deux rouleaux s'élargissent avec la diminution du nombre d'Ekman. D'autre part, la transition entre le régime quasi-diffusif et le régime à un rouleau se fait à un nombre de Rayleigh super-adiabatique de plus en plus faible quand le nombre d'Ekman diminue. Ce résultat peut paraître surprenant par rapport à la prédiction de Busse (2014) d'un nombre de Rayleigh critique augmentant quand le nombre d'Ekman diminue ($\text{Ra}_c \propto E^{-4/3}$, équation (1.62)) dans la configuration équatoriale. La différence entre ces deux cas vient du fait que Busse étudie la transition dans un système où un régime purement diffusif (où le fluide est au repos) est possible. Dans notre cas, le fluide n'est pas au repos dans le régime quasi-diffusif et la transition observée peut être vue comme la déstabilisation de l'écoulement du régime quasi-diffusif qui est d'autant plus forte que le nombre d'Ekman est petit.

FIGURE 5.8 – Diagramme des régimes obtenus en fonction de \mathcal{D} , E et Ra_{sa} .

5.5.3 Diagramme Rayleigh-Nusselt

Le nombre de Nusselt d'une simulation est estimé par

$$\text{Nu} = \frac{\frac{1}{2}(\overline{\Phi}_{\Gamma_B} + \overline{\Phi}_{\Gamma_T})}{\Theta \mathcal{L}_y}. \quad (5.28)$$

La figure 5.9 montre les nombres de Nusselt obtenus en fonction des nombres de Rayleigh super-adiabatiques pour différents nombres d'Ekman. Le nombre de Nusselt est constant dans le régime pseudo-diffusif puis croît quand le nombre de Rayleigh super-adiabatique augmente. Aux nombres de Rayleigh super-adiabatiques les plus forts, les résultats tendent à retrouver une pente de 1/3. Les résultats des simulations $\mathcal{D} = 0$ et $\mathcal{D} = 10^{-3}$ sont très proches dans la majorité des cas. Un phénomène intéressant est visible sur le diagramme à $E = 10^{-2}$. La transition entre le régime à un rouleau et celui à deux rouleaux s'accompagne d'une chute du nombre de Nusselt. Cela traduit une baisse du flux thermique traversant la cellule. Cette baisse de flux s'interprète physiquement par la création de l'interface entre les deux rouleaux à travers laquelle le transfert thermique se fait par diffusion. Cette nouvelle zone où le transfert thermique est diffusif amoindrit le flux thermique total. Le même phénomène se reproduit lors du passage du régime à deux rouleaux au régime à trois rouleaux pour les simulations à $\mathcal{D} = 0$ et $\mathcal{D} = 10^{-3}$.

5.5.4 Comparaison à l'expérience

L'espace des paramètres parcouru dans les simulations est très éloigné de celui des expériences où $\text{Ra}_{\text{sa}} \sim 10^{12}$, $E \sim 10^{-7}$ et $\mathcal{D} \sim 0,07$. Elles peuvent cependant nous aider à mieux comprendre la dynamique de l'écoulement dans l'expérience. Un premier point est le fait que plus le nombre d'Ekman diminue, plus les régimes avec des rouleaux existent sur un large domaine de nombre de Rayleigh super-adiabatique. Il est donc raisonnable de penser que les larges structures dans l'écoulement que nous observons dans l'expérience correspondent à un régime de rouleaux. Le deuxième point est lié au phénomène de chute du nombre de Nusselt lors d'un changement de nombre de rouleau dans la cellule. Au niveau de ces transitions, nous pouvons remarquer que deux valeurs différentes de nombre de Rayleigh super-adiabatique peuvent amener au même nombre de Nusselt suivant qu'ils se situent avant ou après la transition. Cela pourrait expliquer le phénomène d'hystérésis observé dans l'expérience. En effet imaginons que les deux branches observées correspondent à deux régimes de rouleaux, un à N rouleaux et l'autre à $N - 1$ rouleaux. Puisque les expériences se font en diminuant petit à petit le nombre de Rayleigh super-adiabatique, la différence entre les deux branches pourrait s'expliquer par le fait que dans un cas le système subit la transition de régime de N à $N - 1$ rouleaux et que dans l'autre cas il ne se déstabilise pas et persiste dans la même configuration. Si l'on fait l'hypothèse de ce scénario, la question est maintenant de savoir entre quels régimes de rouleaux la transition a lieu. La décomposition orthogonale aux valeurs propres des fluctuations de température dans l'expérience faite dans la partie section 3.4.1.2 distingue deux groupes de thermistances anti-corrélés entres eux. Cela peut correspondre au cas à un rouleau, l'anticorrélation venant du fait que l'écoulement traverse la ligne de thermistance en sens opposé. Mais ce cas est incompatible avec l'hypothèse du changement de régime pour expliquer les deux branches. L'autre possibilité est de considérer que nous voyons un cas à deux rouleaux dans la décomposition orthogonale aux valeurs propres. L'anticorrélation viendrait

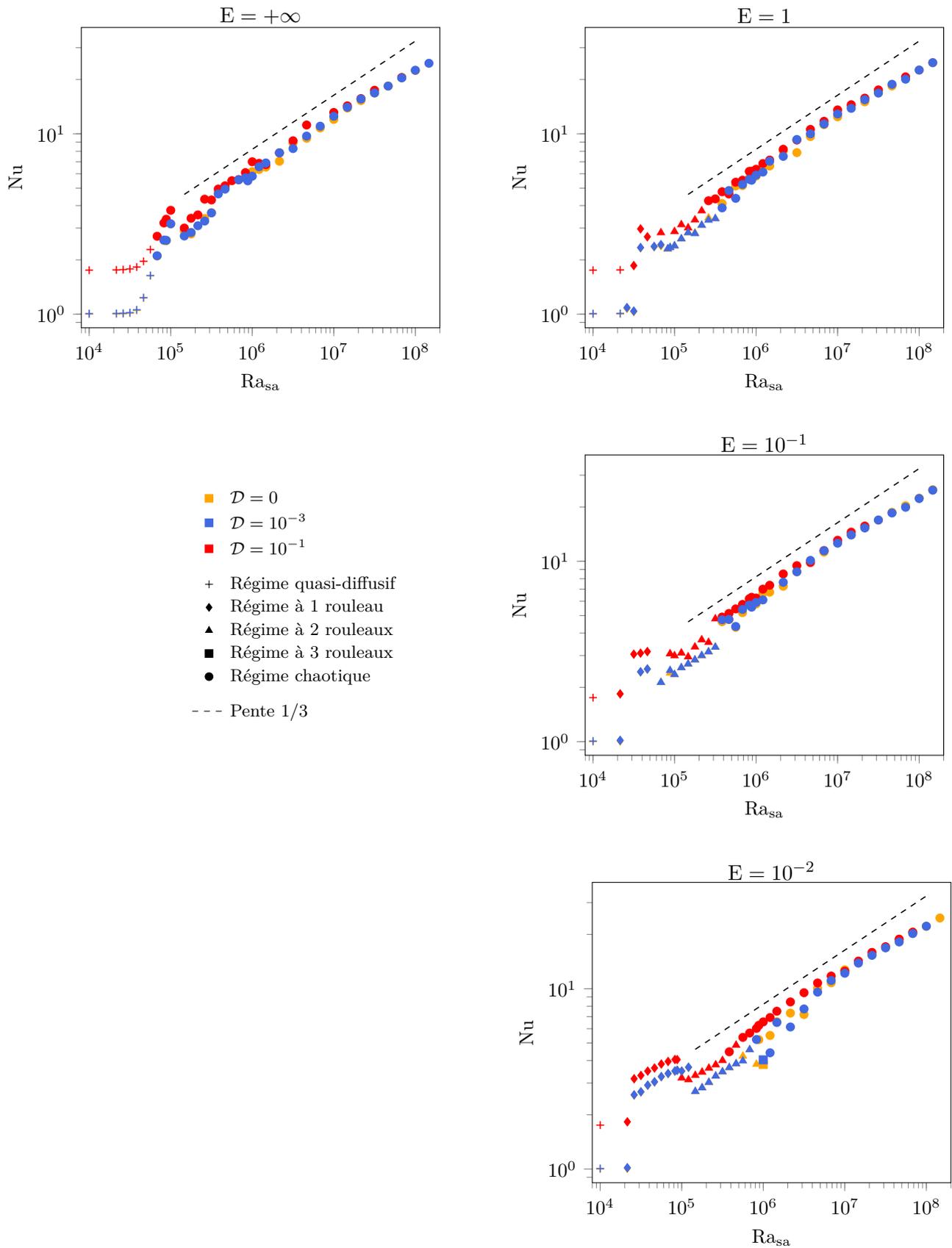


FIGURE 5.9 – Diagrammes Ra_{sa} -Nu obtenus en fonction de E et \mathcal{D} . Les points avec $\mathcal{D} = 0$ et $\mathcal{D} = 10^{-3}$ sont souvent superposés ce qui les rend difficiles à distinguer.

alors du fait que chaque groupe de thermistance correspond à un rouleau différent. Dans ce cas, à bas nombre de Rayleigh super-adiabatique, l'une des branches serait liée au régime à un rouleau et la seconde au régime à deux rouleaux. Notons tout de même que cette discussion reste spéculative. Dans les faits, il serait bien de pouvoir comparer les décompositions orthogonales aux valeurs propres des deux branches. Cela n'est malheureusement pas possible car les fluctuations de températures sont trop faibles pour émerger du bruit sur la gamme de nombre de Rayleigh où se phénomène se produit. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'une troisième campagne d'expérience conçue pour obtenir de meilleures mesures de température avait été commencée.

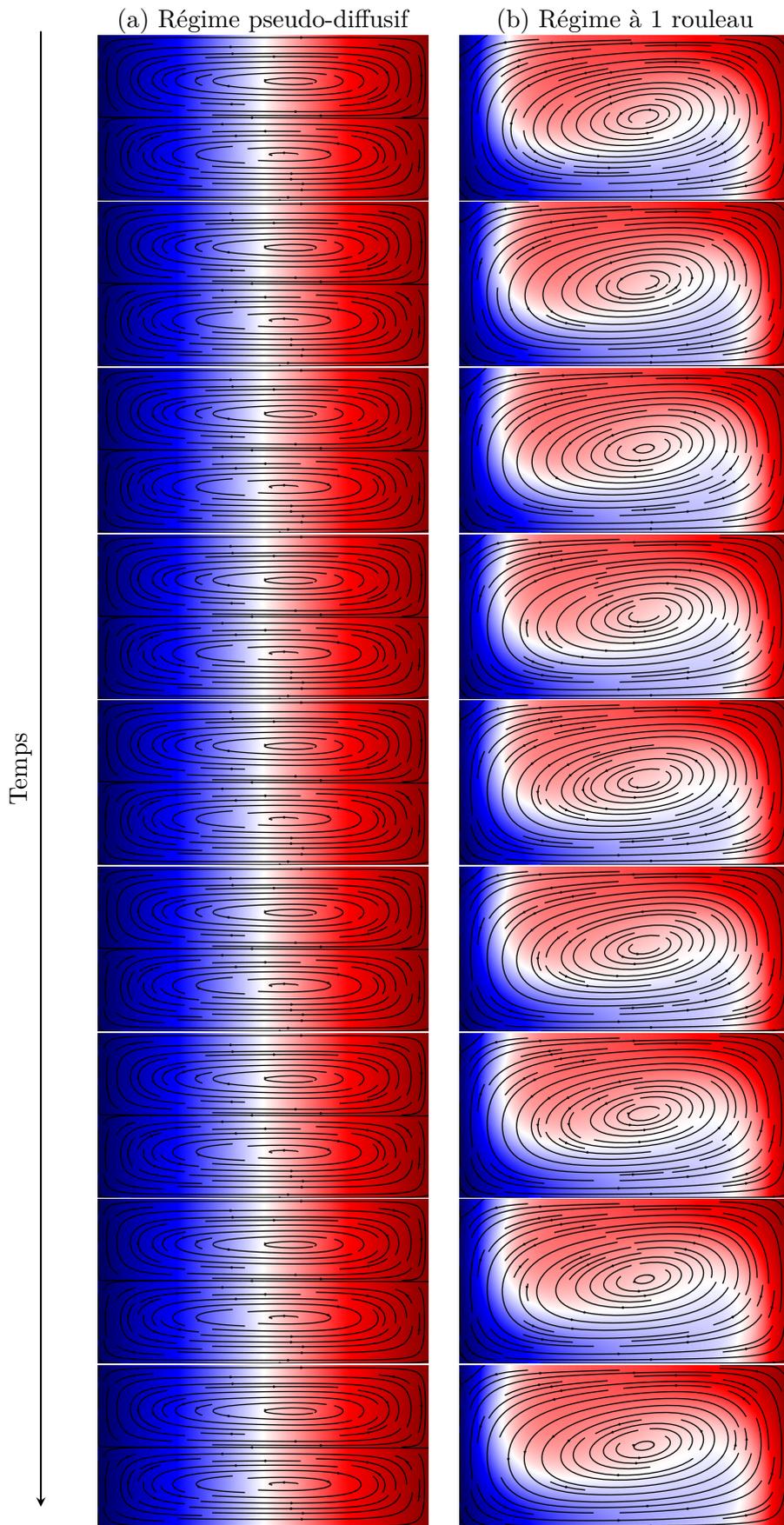


FIGURE 5.10 – Evolution des champs de température et de vitesses entre $t = 0.1$ et $t = 0.14$. Le pas de temps entre deux images est de 0.005 (50 itérations). (a) Cas d'un régime pseudo-diffusif ($\mathcal{D} = 10^{-3}$, $E = 1$, $Ra_{sa} = 10^4$). (b) Cas d'un régime à un rouleau ($\mathcal{D} = 10^{-3}$, $E = 10^{-2}$, $Ra_{sa} = 6,813 \times 10^4$).

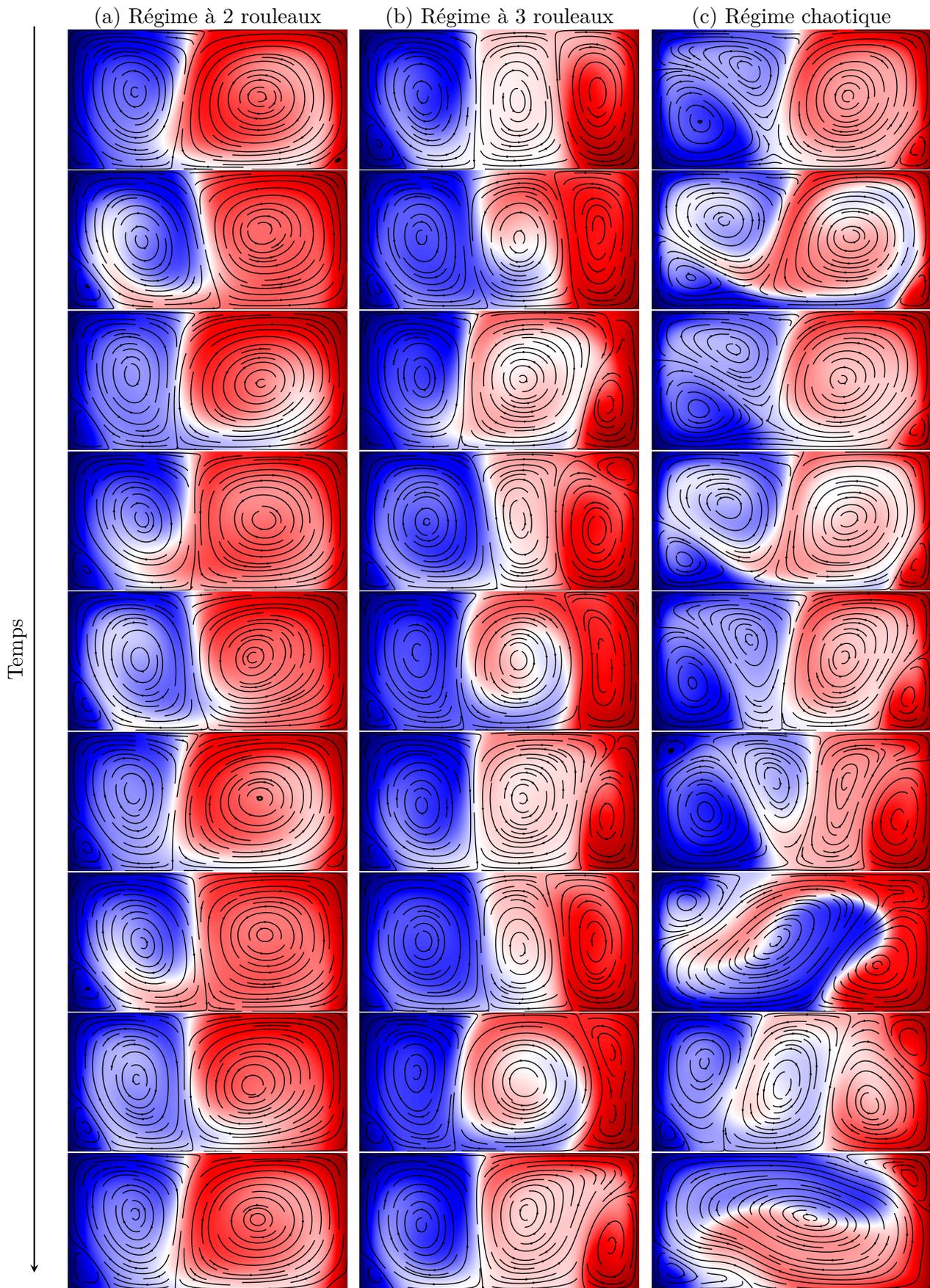


FIGURE 5.11 – Evolution des champs de température et de vitesse entre $t = 0.1$ et $t = 0.14$. Le pas de temps entre deux images est de 0.005 (50 itérations). (a) Cas d'un régime à deux rouleaux ($\mathcal{D} = 0$, $E = 10^{-2}$, $Ra_{sa} = 4,642 \times 10^5$). (b) Cas d'un régime à trois rouleaux ($\mathcal{D} = 0$, $E = 10^{-2}$, $Ra_{sa} = 10^6$). (c) Cas d'un régime chaotique ($\mathcal{D} = 10^{-1}$, $E = 1$, $Ra_{sa} = 1,468 \times 10^6$).

Conclusions et perspectives

L'expérience réalisée montre qu'il est possible de faire des expériences de convection dans un régime compressible en laboratoire. Nous avons mené des expériences jusqu'à atteindre un nombre de dissipation de 0,07. Un gradient adiabatique de température allant jusqu'à 3,5 K/cm est observé et nous trouvons un exposant de 0,3 dans la loi Rayleigh-Nusselt mesurant l'efficacité du transfert thermique. L'étude des écarts au profil adiabatique et des fluctuations de pression et de température montre que l'écoulement dans la cellule est géostrophique et possède une structure aux grandes échelles. L'utilisation d'une centrifugeuse pour augmenter la gravité, et maximiser les effets de compressibilité, fait qu'il est difficile de distinguer les effets purement compressibles des effets dus à la rotation. C'est pourquoi, afin de mieux comprendre les rôles respectifs de ces deux effets, des simulations numériques de l'expérience ont été réalisées à partir du développement d'un modèle anélastique quasi-géostrophique. L'influence de la rotation sur l'écoulement est importante dans les simulations. Même si les simulations se situent à des nombres d'Ekman bien plus grands et des nombres de Rayleigh super-adiabatiques bien plus petits que ceux de l'expérience, elles montrent qu'un écoulement avec des structures de grande échelle est probable dans l'expérience.

Nous avons été limités en vitesse de rotation par la carte électronique qui dysfonctionne au delà de 10 000 rpm. En corrigeant ce problème, de nouvelles expériences à des vitesses de rotation plus élevées permettraient d'atteindre des nombres de dissipation encore plus élevés. Des expériences à 20 000 rpm, qui est la vitesse maximale supportée par le rotor utilisé actuellement, donneraient des nombres de dissipation quatre fois plus grands. Un autre axe d'amélioration de l'expérience serait d'augmenter la pression du xénon dans la cellule. En effet, plus la densité du gaz est élevée dans la cellule, plus l'amplitude des fluctuations de température est grande. Des fluctuations plus marquées permettraient de mieux comprendre l'écoulement dans la cellule. Enfin, nous pourrions augmenter le nombre de capteurs dans la cellule. A cause du collecteur tournant, cela peut se faire soit en multiplexant plus de signaux, soit en utilisant des technologies sans fil (ondes radio, wi-fi...) pour transmettre les données à l'extérieur du rotor. En ce qui concerne les simulations numériques de l'expérience, le modèle anélastique liquide fonctionne correctement. Les travaux futurs consistent surtout à prendre le temps d'explorer plus en détail le diagramme des régimes et faire des simulations avec un pas de temps plus faible et un maillage plus fin afin d'atteindre des régime à plus haut nombre de Rayleigh super-adiabatique et à plus faible nombre d'Ekman. D'autre part, réaliser des simulations avec le modèle anélastique quasi-géostrophique (et non anélastique liquide) permettrait de se rapprocher encore plus de l'expérience réelle.

Au delà des considérations purement techniques de faisabilité, deux limites existent avec le design actuel de l'expérience. La première vient de l'utilisation de la centrifugeuse pour changer la valeur

de la gravité. Cela a pour conséquence de rendre dépendant le nombre de dissipation de la vitesse de rotation. Le nombre de dissipation et le nombre d'Ekman sont liés ($\mathcal{D} \propto E^{-2}$). Il n'est donc pas possible de faire varier l'un de ses deux paramètres avec l'autre fixé dans le but d'étudier les variations d'effets purement compressibles ou uniquement liés à la rotation. Une piste pour contrer cette difficulté serait de réaliser des expériences avec d'autre gaz. Nous pourrions alors avoir des expériences à même nombre d'Ekman mais des nombres de dissipation différents. Toutefois, le xénon ayant été choisi pour maximiser le nombre de dissipation, ces nouvelles expériences ne peuvent se faire qu'avec des nombres de dissipation plus petits. Une autre piste serait de faire des expériences proches du point critique où le coefficient de dilatation α , et donc \mathcal{D} , divergent. La seconde limite de l'expérience vient de sa géométrie. La proximité de la cellule avec l'axe de rotation fait que la courbure du champ de gravité est non négligeable. Il ne s'agit donc pas d'une configuration de Rayleigh-Bénard stricte. Il n'existe pas de régime purement diffusif et les analyses de stabilité classiques ne s'appliquent pas à cette géométrie très particulière. De plus la présence des parois latérales et la taille réduite de la cellule rendent difficile l'observation des ondes internes et des ondes de Rossby. C'est pourquoi, il serait intéressant de tester d'autres géométries. Par exemple, une géométrie annulaire permettrait de s'affranchir des recirculations et effets liés aux parois latérales, d'autoriser l'existence d'un régime purement diffusif et de permettre le développement de vents zonaux. De plus, cette géométrie est classique, il existe donc plus de travaux théoriques, numériques et expérimentaux par rapport auxquels il serait possible de confronter les résultats de l'expérience.

Bibliographie

- Ahlers, G., He, X., Funfschilling, D., and Bodenschatz, E. (2012). Heat transport by turbulent rayleigh–bénard convection for $\text{Pr} \simeq 0.8$ and $3 \times 10^{12} \lesssim \text{Ra} \lesssim 10^{15}$: aspect ratio $\gamma = 0.50$. *New Journal of Physics*, 14(10) :103012.
- Alboussière, T. and Ricard, Y. (2013). Reflections on dissipation associated with thermal convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 725 :R1.
- Alboussière, T. and Ricard, Y. (2014). Reflections on dissipation associated with thermal convection – Corrigendum. *Journal of Fluid Mechanics*, 751 :749–751.
- Alboussière, T. and Ricard, Y. (2017). Rayleigh–bénard stability and the validity of quasi-boussinesq or quasi-anelastic liquid approximations. *Journal of Fluid Mechanics*, 817 :264–305.
- Anufriev, A., Jones, C., and Soward, A. (2005). The Boussinesq and anelastic liquid approximations for convection in the Earth’s core. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 12(3) :163–190.
- Arnould, M., Coltice, N., Flament, N., Seigneur, V., and Müller, R. D. (2018). On the scales of dynamic topography in whole-mantle convection models. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 19(9) :3140–3163.
- Ashkenazi, S. and Steinberg, V. (1999). High rayleigh number turbulent convection in a gas near the gas-liquid critical point. *Physical Review Letters*, 83 :3641–3644.
- Aubert, J. (2005). Steady zonal flows in spherical shell dynamos. *Journal of Fluid Mechanics*, 542 :53–67.
- Aurnou, J. M. (2007). Planetary core dynamics and convective heat transfer scaling. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 101(5-6) :327–345.
- Batchelor, G. (1953). *The Theory of Homogeneous Turbulence*. Cambridge Science Classics. Cambridge University Press.
- Bell, I. H., Wronski, J., Quoilin, S., and Lemort, V. (2014). Pure and pseudo-pure fluid thermophysical property evaluation and the open-source thermophysical property library coolprop. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 53(6) :2498–2508.
- Bouffard, M. (2017). *Double-diffusive thermochemical convection in the liquid layers of planetary interiors : a first numerical exploration with a particle-in-cell method*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon.

- Boussinesq, J. (1903). *Théorie analytique de la chaleur, tome 2*. Gauthier-Villars.
- Braginsky, S. I. and Roberts, P. H. (1995). Equations governing convection in earth's core and the geodynamo. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 79(1-4) :1–97.
- Busse, F. (2014). Centrifugally driven compressible convection. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 47 :35 – 38.
- Busse, F. and D. Simitev, R. (2014). Quasi-geostrophic approximation of anelastic convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 751.
- Busse, F. H. and Clever, R. M. (1979). Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate prandtl number. *Journal of Fluid Mechanics*, 91(2) :319–335.
- Cardin, P. and Olson, P. (1994). Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell : consequences for flow in the outer core. *Physics of The Earth and Planetary Interiors*, 82 :235–259.
- Carnot, S. (1824). *Réflexions sur la puissance motrice du feu*.
- Castaing, B., Gunaratne, G., Heslot, F., Kadanoff, L., Libchaber, A., Thomae, S., Z Wu, X., Zaleski, S., and Zanetti, G. (1989). Scaling of hard thermal turbulence in rayleigh-bénard convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 204 :1–30.
- Catalano, F., Moroni, M., Dore, V., and Cenedese, A. (2012). An alternative scaling for unsteady penetrative free convection. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 117(D18).
- Chandrasekhar, S. (1953). The instability of a layer of fluid heated below and subject to coriolis forces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 217(1130) :306–327.
- Chapman, S., Burnett, D., and Cowling, T. G. T. G. (1970). *The mathematical theory of non-uniform gases*. Cambridge : Cambridge University Press, 3rd ed / prepared in co-operation with d. burnett edition.
- Charbonnel, C. and Talon, S. (2007). Mixing a stellar cocktail. *Science*, 318(5852) :922–923.
- Chavanne, X., Chillà, F., Castaing, B., Hébral, B., Chabaud, B., and Chaussy, J. (1997). Observation of the ultimate regime in rayleigh-bénard convection. *Physical Review Letters*, 79 :3648–3651.
- Chavanne, X., Chillà, F., Chabaud, B., Castaing, B., and Hébral, B. (2001). Turbulent rayleigh-bénard convection in gaseous and liquid he. *Physics of Fluids*, 13(5) :1300–1320.
- Christensen, U. R. (2002). Zonal flow driven by strongly supercritical convection in rotating spherical shells. *Journal of Fluid Mechanics*, 470 :115–133.
- Curbelo, J., Duarte, L., Alboussière, T., Dubuffet, F., Labrosse, S., and Ricard, Y. (2019). Numerical solutions of compressible convection with an infinite prandtl number : comparison of the anelastic and anelastic liquid models with the exact equations. *Journal of Fluid Mechanics*. submitted.

- Dore, V., Moroni, M., Le Menach, M., and Cenedese, A. (2009). Investigation of penetrative convection in stratified fluids through 3d-ptv. *Experiments in Fluids*, 47(4) :811.
- Duarte, L. D., Wicht, J., and Gastine, T. (2018). Physical conditions for jupiter-like dynamo models. *Icarus*, 299 :206 – 221.
- Evonuk, M. (2007). The role of density stratification in generating zonal flow structures in a rotating fluid. *The Astrophysical Journal*, 673.
- Garnero, E., Kennett, B., and Loper, D. E. (2005). Studies of the earth's deep interior-eighth symposium. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 153(1-3) :1–2.
- Gebhart, B. (1962). Effects of viscous dissipation in natural convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 14(2) :225–232.
- Glatzmaier, G. A., Evonuk, M., and Rogers, T. M. (2009). Differential rotation in giant planets maintained by density-stratified turbulent convection. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 103(1) :31–51.
- Greenspan, H. P. (1968). *The theory of rotating fluids*. CUP Archive.
- Grossmann, S. and Lohse, D. (2000). Scaling in thermal convection : A unifying view. *Journal of Fluid Mechanics - J FLUID MECH*, 407 :27–56.
- Guervilly, C. and Cardin, P. (2016). Subcritical convection of liquid metals in a rotating sphere using a quasi-geostrophic model. *Journal of Fluid Mechanics*, 808 :61–89.
- Hanley, H. J. M., McCarty, R. D., and Haynes, W. M. (1974). The viscosity and thermal conductivity coefficients for dense gaseous and liquid argon, krypton, xenon, nitrogen, and oxygen. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 3(4) :979–1017.
- Harfash, A. J. and Alshara, A. K. (2015). Three-dimensional simulation for problem of penetrative convection near the maximum density. *Journal of Hydrodynamics*, 27(2) :292–303.
- Hecht, F. (2012). New development in freefem++. *J. Numer. Math.*, 20(3-4) :251–265.
- Hossain, M. (1994). Reduction in the dimensionality of turbulence due to a strong rotation. *Physics of Fluids*, 6(3) :1077–1080.
- Hu, Y.-P., Li, Y.-R., and Wu, C.-M. (2015). Rayleigh-bénard convection of cold water near its density maximum in a cubical cavity. *Physics of Fluids*, 27(3) :034102.
- Huguet, L. (2014). *Cristallisation et convection sous hyper-gravité*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon.
- Humphreys, W. J. (1909). Vertical Temperature-Gradients of the Atmosphere, Especially in the Region of Upper Inversion. *Astrophysical Journal*, 29 :14.

- Jarvis, G. T. and McKenzie, D. P. (1980). Convection in a compressible fluid with infinite Prandtl number. *Journal of Fluid Mechanics*, 96 :515–583.
- Jeffreys, H. (1930). The Instability of a Compressible Fluid heated below. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 26 :170.
- Jones, C., Boronski, P., Brun, A., Glatzmaier, G., Gastine, T., Miesch, M., and Wicht, J. (2011). Anelastic convection-driven dynamo benchmarks. *Icarus*, 216(1) :120 – 135.
- Jones, C. A. and Kuzanyan, K. M. (2009). Compressible convection in the deep atmospheres of giant planets. *Icarus*, 204(1) :227 – 238.
- King, E., Stellmach, S., Noir, J., Hansen, U., and Aurnou, J. (2009). Boundary layer control of rotating convection systems. *Nature*, 457 :301–4.
- King, E. M., Stellmach, S., and Aurnou, J. M. (2012). Heat transfer by rapidly rotating rayleigh–bénard convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 691 :568–582.
- Kraichnan, R. H. (1962). Turbulent thermal convection at arbitrary prandtl number. *The Physics of Fluids*, 5(11) :1374–1389.
- Labbé, F., Jault, D., and Gillet, N. (2015). On magnetostrophic inertia-less waves in quasi-geostrophic models of planetary cores. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 109(6) :587–610.
- Labrosse, S., Poirier, J.-P., and Mouël, J.-L. L. (1997). On cooling of the earth’s core. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 99(1) :1 – 17.
- Landau, L. and Lifchitz, E. (1989). *Mécanique des fluides*. Physique Théorique. Mir.
- Lemmon, E. W. and Span, R. (2006). Short fundamental equations of state for 20 industrial fluids. *Journal of Chemical & Engineering Data*, 51(3) :785–850.
- Lepot, S., Aumaître, S., and Gallet, B. (2018). Radiative heating achieves the ultimate regime of thermal convection. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(36) :8937–8941.
- Low, A. R. (1929). On the criterion for stability of a layer of viscous fluid heated from below. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 125(796) :180–195.
- Menaut, R., Corre, Y., Huguet, L., Le Reun, T., Alboussière, T., Bergman, M., Deguen, R., Labrosse, S., and Moulin, M. (2019). Experimental study of convection in the compressible regime. *Phys. Rev. Fluids*, 4 :033502.
- Niemela, J. and Sreenivasan, K. (2006). The use of cryogenic helium for classical turbulence : Promises and hurdles. *Journal of Low Temperature Physics*, 143 :163–212.
- Niemela, J., Skrbek, L., Sreenivasan, K., and Donnelly, R. (2000a). Erratum : Turbulent convection at very high rayleigh numbers. *Nature*, 406(6794) :439.

- Niemela, J., Skrbek, L., Sreenivasan, K., and Donnelly, R. (2000b). Turbulent convection at very high rayleigh numbers. *Nature*, 404(6780) :837.
- Oberbeck, A. (1879). Ueber die wärmeleitung der flüssigkeiten bei berücksichtigung der strömungen infolge von temperaturdifferenzen. *Annalen der Physik*, 243(6) :271–292.
- Ogura, Y. and Phillips, N. (1961). Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere. *J. Atm. Sci.*, 19 :173–179.
- O’rourke, J. G. and Stevenson, D. J. (2016). Powering earth’s dynamo with magnesium precipitation from the core. *Nature*, 529(7586) :387.
- Paret, J. and Tabeling, P. (1997). Experimental observation of the two-dimensional inverse energy cascade. *Physical Review Letters*, 79 :4162–4165.
- Proudman, J. and Lamb, H. (1916). On the motion of solids in a liquid possessing vorticity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 92(642) :408–424.
- R. Elliott, J., Miesch, M., and J. Toomre, a. (2008). Turbulent solar convection and its coupling with rotation : The effect of prandtl number and thermal boundary conditions on the resulting differential rotation. *The Astrophysical Journal*, 533 :546.
- R. Lantz, S. and Fan, Y. (2009). Anelastic magnetohydrodynamic equations for modeling solar and stellar convection zones. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 121 :247.
- Rayleigh, J. (1916). On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *Phil. Mag. S.*, 32(192) :529–546.
- Ricard, Y. (2010). Physics of mantle convection. In *Treatise on Geophysics, Volume 7 : Mantle Dynamics*. Elsevier Science.
- Rieutord, M. (2014). *Une Introduction a la Dynamique des Fluides*. De Boeck.
- Rosby, H. T. (1969). A study of Bénard convection with and without rotation. *Journal of Fluid Mechanics*, 36(2) :309–335.
- Sahoo, S. and Sreenivasan, B. (2017). On the effect of laterally varying boundary heat flux on rapidly rotating spherical shell convection. *Physics of Fluids*, 29 :086602.
- Schwarzschild, K. (1906). Über das Gleichgewicht des Sonnenatmosphäre. *Nachr. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Gött. Math. Phys. Klasse*, 1 :41–53.
- Shew, W. L. and Lathrop, D. P. (2005). Liquid sodium model of geophysical core convection. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 153(1) :136 – 149. Studies of the Earth’s Deep Interior.
- Solheim, L. P. and Peltier, W. R. (1990). Heat transfer and the onset of chaos in a spherical, axisymmetric, anelastic model of whole mantle convection. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 53(4) :205–255.

- Sommeria, J. (1986). Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box. *Journal of Fluid Mechanics*, 170 :139–168.
- Stewartson, K. (1957). On almost rigid rotations. *Journal of Fluid Mechanics*, 3(1) :17–26.
- Stewartson, K. (1966). On almost rigid rotations. part 2. *Journal of Fluid Mechanics*, 26(1) :131–144.
- Stokes, G. G. (1880). On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8.
- Tilgner, A. (2011). Convection in an ideal gas at high rayleigh numbers. *Phys. Rev. E*, 84 :026323.
- Tilgner, A. and Busse, F. H. (1997). Finite-amplitude convection in rotating spherical fluid shells. *Journal of Fluid Mechanics*, 332 :359–376.
- Vargaftik, N. (1993). *Handbook of Thermal Conductivity of Liquids and Gases*. Taylor & Francis.
- Verhoeven, J. and Stellmach, S. (2014). The compressional beta effect : A source of zonal winds in planets? *Icarus*, 237 :143 – 158.
- Verhoeven, J., Wiesehofer, T., and Stellmach, S. (2015). Anelastic versus fully compressible turbulent rayleigh–bénard convection. *The Astrophysical Journal*, 805(1) :62.
- Vidal, J. and Schaeffer, N. (2015). Quasi-geostrophic modes in the earth’s fluid core with an outer stably stratified layer. *Geophysical Journal International*, 202.
- Willis, G. E., Deardorff, J. W., and Somerville, R. C. J. (1972). Roll-diameter dependence in rayleigh convection and its effect upon the heat flux. *Journal of Fluid Mechanics*, 54(2) :351–367.