HAL
open science

# Positivité des images directes, extension d'Ohsawa-Takegoshi et applications

Junyan Cao

▶ To cite this version:

Junyan Cao. Positivité des images directes, extension d'Ohsawa-Takegoshi et applications. Géométrie algébrique [math.AG]. Sorbonne University UPMC, 2019. tel-02343266

HAL Id: tel-02343266
https://theses.hal.science/tel-02343266v1

Submitted on 2 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sorbonne Université

# Positivité des images directes, extension d'Ohsawa-Takegoshi et applications

Junyan Cao

Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches

*Soutenue le 25 octobre 2019 à IMJ-PRG devant un jury composé de*

Sébastien Boucksom (Ecole Polytechnique)
Jean-Pierre Demailly (Université Grenoble Alpes)
Elisha Falbel (Sorbonne Université)
Andreas Höring (Université de Nice Sophia Antipolis)
Xiaonan Ma (Université Paris Diderot)
Thomas Peternell (Universität Bayreuth)
Claire Voisin (Collège de France)

*au vu des rapports de*

Thomas Peternell (Universität Bayreuth)
Shigeharu Takayama (University of Tokyo)
Claire Voisin (Collège de France)

# Positivité des images directes, extension d'Ohsawa-Takegoshi et applications

Junyan CAO

2 novembre 2019

# Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier chaleureusement Claire Voisin, Thomas Peternell et Shigeharu Takayama pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce mémoire. Leurs travaux et cours ont eu une influence importante sur mes recherches.

C'est un plaisir et un grand honneur que Sébastien Boucksom, Jean-Pierre Demailly, Elisha Falbel, Andreas Höring et Xiaonan Ma aient accepté de faire partie de mon jury d'habilitation. En particulier, je voudrais exprimer ma gratitude envers Jean-Pierre Demailly pour sa générosité, son énorme savoir mathématique et pour m'avoir appris le métier de chercheur. Merci à Sébastien Boucksom, qui est toujours présent pour discuter, répondre à mes questions et proposer des idées ingénieuses. Je voudrais remercier également Andreas Höring : j'ai profité largement de ses connaissances mathématiques tout au long de nos collaborations. Merci à Xiaonan Ma, qui m'a toujours donné de bons conseils. Merci également à Elisha Falbel, qui m'a apporté toujours son soutien amical depuis mon arrivée à Jussieu.

Je dois aussi un grand merci à Mihai Păun, qui a exercé depuis toujours une profonde influence sur moi. Il est pour moi comme un grand frère amical et très enthousiaste pour les mathématiques complexes. Une partie de ce mémoire contient les résultats de nos travaux en commun. Je remercie également à mes collaborateurs Frédéric Campana, Henri Guenancia et Shin-ichi Matsumura pour les discussions enrichissantes que nous avons eues ensembles.

J'adresse ensuite tous mes remerciements aux mathématiciens et camarades avec qui j'ai eu la chance d'échanger des idées pendant ces années. Je remercie en particulier Olivier Biquard, Benoît Claudon, Ya Deng, Tien-Cuong Dinh, Simone Diverio, Olivier Debarre, Stéphane Druel, Paul Gauduchon, Vincent Guedj, Hsueh-Yung Lin, Marco Maculan, Christophe Margerin, Christophe Mourougane, Nessim Sibony, Hajime Tsuji, Jian Xiao, dont les contributions ont été indispensables.

Je voudrais remercier également tous les autres amis avec qui j'ai partagé mon enthousiasme pour les mathématiques au cours de ces années, Daniele Angella, Lionel Darondeau, Thibault Delcroix, Yanbo Fang, Lie Fu, Chen Jiang, Zhi Jiang, Jie Liu, Hoang-Chinh Lu, Steven Lu, Philipp Naumann, Wenhao Ou, Xiaokui Yang, Junyi Xie, Songyan Xie, Yi-jun Yao, Xiaojun Wu et bien d'autres. Un grand merci à mes amis de longue date Shu Shen et à Shilin Yu avec lesquels j'ai echangé des nombreuses idées inspirantes.

Je remercie vivement tous mes collègues de l'IMJ et notamment ceux avec lesquels je partage le couloir ACG-TGA "quotidien" : Gilles Courtois, Alix Deruelle, Eleonora Di Nezza, Pascal Dingoyan, Elisha Falbel, Gerard Freixas Montplet, Marco Maculan, Julien Marché, Vincent Michel, Vincent Minerbe, Frédéric Naud, Bram Petri, Eliane Salem, Andres Sambarino, Maxime Wolff et bien d'autres. Tous m'ont aidé à un moment ou un autre. Je tiens à remercier tout le personnel administratif et surtout Gaëlle Callouard pour son efficacité.

Enfin, j'exprime toute ma gratitude à mes parents pour leur soutien constant, et un grand merci à Weiwei qui m'accompagne tout le temps.

# Table des matières


**1 Positivité des images directes et applications** **11**

1.1 Introduction . . . 11

1.2 Positivité des faisceaux cohérents . . . 12

1.2.1 Deux notions de positivité . . . 12

1.2.2 Comparaison des deux notions de positivité . . . 13

1.2.3 Autour des théorèmes de positivité de l'image directe . . . 15

1.3 Conjecture d'Iitaka . . . 17

1.4 Sous-harmonicité des images directes et conjecture de Pereira-Touzet . . . 22

1.4.1 Sous-harmonicité des images directes . . . 22

1.4.2 Une application . . . 22

1.5 Quelques remarques sur la conjecture d'Iitaka . . . 25

1.5.1 Formule de Fujino-Mori, le cas $\kappa(F) \geq 1$ . . . 25

1.5.2 Le cas $\kappa(F) = 0$ : . . . 26

1.5.3 La conjecture $C^+_{m,n}$ . . . 26

**2 Variétés projectives à fibré anticanonique nef** **27**

2.1 Introduction . . . 27

2.2 Surjectivité de l'application d'Albanese et la méthode de Zhang . . . 29

2.3 Structure des morphismes à fibré anticanonique relatif nef et un théorème de décomposition 31

2.4 Quelques remarques . . . 32

2.4.1 Le théorème de décomposition dans le cas kählérien . . . 32

2.4.2 La structure des feuilletages holomorphes à fibré anticanonique nef . . . 33

**3 Théorème d'Ohsawa-Takegoshi et applications** **35**

3.1 Introduction . . . 35

3.2 Un théorème d'extension pour les sous-variété singulières . . . 36

3.2.1 Motivation et théorème principal . . . 36

3.2.2 Un exemple d'Ohsawa . . . 39

3.3 Extension optimale et positivité des images directes . . . 39

3.4 Une application au MMP kählérien . . . 41

# Introduction

Le but de ce mémoire est de présenter les travaux effectués depuis la soutenance de notre thèse de doctorat en septembre 2013. Les résultats que nous avons obtenus s'articulent autour de la classification des variétés complexes.

Le premier chapitre porte sur des travaux réalisés en collaboration avec Frédéric Campana et Mihai Păun [CP17, Cao18, CCP19]. Une partie de ces travaux concernent la conjecture d'Iitaka $C_{m,n}$ en géométrie birationnelle. Dans [CP17] nous avons traité la cas où la base est une variété abélienne et dans [Cao18] nous avons résolu complètement $C_{m,2}$, i.e. la cas où la base est une surface. L'article [CCP19] contient des résultats au sujet de la sous-harmonicité des images directes des fibrés relatifs adjoints. Comme corollaire de ceci nous obtenons un critère d'algébricité pour les feuilletages holomorphes dont la première classe de Chern est nulle. Nos résultats répondent partiellement à une question soulevée par Pereira-Touzet.

Le deuxième chapitre concerne des travaux réalisés en collaboration avec Frédéric Campana, Andreas Höring et Shin-ichi Matsumura [Cao16, CH19, CCM19]. On s'intéresse à la structure des variétés à fibré anticanonique numériquement effectif. Nous démontrons que pour cette classe de variétés l'application d'Albanese est localement triviale, ce qui confirme une conjecture de Demailly-Peternell-Schneider, cf. [Cao16]. Les méthodes que nous avons développées dans cet article servent à démontrer un théorème de structure pour les variétés dont le fibré anticanonique est nef, cf. [CH19]. Ce résultat a été généralisé au cas des pairs klt dans [CCM19].

Enfin, le dernier chapitre de ce mémoire contient une synthèse des travaux réalisés en collaboration avec Jean-Pierre Demailly, Anreas Höring et Shin-ichi Matsumura [CDM17, Cao17, CH15]. Le thème central ici c'est l'extension des sections holomorphes définies sur des sous-variétés de l'espace ambiant. Plus précisément, cela concerne le théorème d'Ohsawa-Takegoshi, un outil analytique puissant, indispensable dans la solution de beaucoup de problèmes en géométrie complexe. Dans [CDM17], on obtient une version de ce résultat lorsque la sous-variété susmentionnée est singulière. La motivation principale de ce travail est la conjecture d'abondance. Dans [Cao17], on obtient un théorème d'extension *optimale* dans le contexte kählérien (ce terme en italique fait référence à la norme de l'extension). Comme conséquence, on obtient la version kählérienne des résultats sur la positivité des images directes des fibrés canonique relatifs. Nous espérons que ces énoncés seront utiles dans la poursuite des recherches autour du MMP kählérien. On se réfère à [CH15] pour quelques pas dans cette direction.

## Liste des travaux

### Articles présentés, regroupés par chapitre :

• *Positivité des images directes et applications :*

– 1. Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over Abelian varieties, avec Mihai Păun. Invent. Math. 207 (2017), no. 1, pp 345–387
– 2. Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over surfaces. Algebr. Geom. 5 (2018), no. 6, 728–741.
– 3. Subharmonicity of direct images and applications, avec Frédéric Campana et Mihai Păun. Préprint arxiv.org/abs/1906.11317.

• *Variétés projectives à fibré anticanonique nef :*

– 4. Albanese maps of projective manifolds with nef anticanonical bundles. A paraître dans Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure.
– 5. A decomposition theorem for projective manifolds with nef anticanonical bundle, avec Andreas Höring. J. Algebraic Geom. 28 (2019), 567-597.
– 6. Projective klt pairs with nef anti-canonical divisor, avec Frédéric Campana et Shin-ichi Matsumura. https ://arxiv.org/abs/1910.06471

• *Théorème d'Ohsawa-Takegoshi et des applications :*

– 7.A general extension theorem for cohomology classes on non reduced analytic spaces, avec Jean-Pierre Demailly et Shin-ichi Matsumura. Sci. China Math. 60 (2017), no. 6, 949–962.
– 8. Ohsawa-Takegoshi extension theorem for compact Kähler manifolds and applications. Complex and Symplectic Geometry, Springer INdAM Series 21, (2017), 19-38
– 9. Rational curves on compact Kähler manifolds, avec Andreas Höring. A paraître dans Journal of Differential Geometry.

**Articles non-présentés :** (les articles $13-16$ sont effectuées pendant la thèse)

– 10. Variation of singular Kähler-Einstein metrics : Kodaira dimension zero, avec Henri Guenancia, Mihai Păun. arXiv :1908.08087
– 11. Variation of singular Kähler-Einstein metrics : positive Kodaira dimension, avec Henri Guenancia, Mihai Păun. Préprint arXiv.1710.01825
– 12. Additivity of the approximation functional of currents induced by Bergman kernels. C. R. Acad. Sci. Paris, 353 (2015), no.2, pp 117-119
– 13. On the approximation of Kähler manifolds by algebraic varieties. Math. Annal. 363 (2015), no. 1, pp 393-422
– 14. Numerical dimension and a Kawamata-Viehweg-Nadel type vanishing theorem on compact Kähler manifolds. Compos. Math. 150 (2014), n.11, pp 1869-1902
– 15. Manifolds with nef anticanonical bundle, avec Andreas Höring. J. Reine Angew. Math. 724 (2017), 203–244.
– 16. A remark on compact Kähler manifolds with nef anticanonical bundles and applicaions. Préprint arXiv.

# Chapitre 1

# Positivité des images directes et applications

Dans cette partie nous allons présenter des travaux réalisés en collaboration avec Frédéric Campana et Mihai Păun, cf. [CP17, Cao18, CCP19].

## 1.1 Introduction

Un problème central en géométrie complexe est la classification des variétés selon les propriétés de certains invariants qu'on leur associe. Un objet intrinsèquement attaché à toute variété complexe non-singulière $X$ est son fibré canonique $K_X$, défini comme le déterminant de son fibré cotangent. Les propriétés de positivité de $K_X$ jouent un rôle fondamental dans les programmes de classification en géométrie algébrique cf. [Uen75], [KM98], etc. Nous allons considérer la version relative de ce contexte, i.e. un espace fibré[1] $\pi : X \to Y$ où $X$ et $Y$ sont des variétés kählériennes. Remarquons que c'est un cadre qui aparaît très naturellement en géométrie complexe. En effet, on voudrait étudier une variété $X$ via certains morphismes naturels qui lui sont associés comme par exemple la fibration d'Iitaka, l'application d'Albanese, l'espace de déformation (ou de modules) de $X$, etc.

L'analogue naturel du fibré canonique d'une variété pour un espace fibré $\pi$ est le fibré canonique relatif, noté $K_{X/Y} := K_X - \pi^\star(K_Y)$. Par analogie avec le cas absolu, l'étude de ses propriétés géométriques est une question centrale. Une des idées importantes dans ce contexte est d'analyser la manière dont les systèmes linéaires pluricanoniques fibre à fibre varient. En d'autre termes, on s'intéresse aux faisceaux image directe $\pi_\star(mK_{X/Y})$, où $m$ est un entier positif. Nous allons citer par la suite quelques résultats afin de dégager les directions de recherche dans ce domaine.

Lorsque $m = 1$ et la base $\dim Y = 1$, Fujita [Fuj78] démontre que $\pi_\star(K_{X/Y})$ est un fibré vectoriel semipositif (i.e., $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\pi_\star(K_{X/Y}))}(1)$ est nef) en évaluant le comportement de la métrique de Hodge près du lieu singulier de $\pi$. Zucker [Zuc82] et Kawamata [Kaw81] ont généralisé ce résultat au cas où la base de dimension est arbitraire. Leurs arguments reposent sur des résultats concernant les variations de structure de Hodge. Suite à ces travaux, Viehweg [Vie83] a montré que $\pi_\star(mK_{X/Y})$ est faiblement positif pour tout $m \geq 1$. On renvoie également à [Kol87] pour une preuve sur la positivité de $\pi_\star(mK_{X/Y})$. Ceci est une propriété algébrique qui concerne l'existence des sections des puissances symétriques de $\pi_\star(mK_{X/Y})$ multipliées avec un fibré ample. L'argument de Viehweg est algébrique : en développant les propriétés des changements de base et des revêtements cycliques, il a construit un autre espace fibré $\pi_1 : X' \to Y'$ et la positivité de $\pi_\star(K_{X'/Y'})$ implique la positivité de $\pi_\star(mK_{X/Y})$. On renvoie à [Vie95, KM98] pour des conséquences importantes en géométrie complexe.

Des résultats plus récents établissent la contrepartie analytique des résultats cités auparavant. Signalons au passage que les méthodes analytiques ont permis de résoudre des questions importantes en géométrie algébrique cf. [Dem10]. Dans cet esprit, Berndtsson, Păun et Takayama [Ber06, BP08, PT18]

1. On dit que $\pi$ est un espace fibré s'il est surjectif, propre, et à fibres connexes.

ont récemment construit des métriques sur les images directes $\pi_\star(mK_{X/Y})$ dont les propriétés de courbure impliquent les résultats de Viehweg. Ceci peut être interprété comme l'analogue de l'existence d'un courant positif fermé dans la classe de Chern d'un fibré pseudo-effectif (cf. la section 1.2.1).

Notre but principal dans ce chapitre est de présenter des résultats qui convergent vers des conjectures importantes en géométrie algébrique, que nous avons obtenus en utilisant les propriétés métriques de $\pi_\star(mK_{X/Y})$ évoquées ci-dessus. Un point commun aux résultats que nous allons discuter ici est que les méthodes analytiques semblent indispensables pour les démontrer, dans le sens que pour le moment on ne dispose pas d'arguments purement algébriques.

Pour commencer, on va rappeler deux notions de positivité : celle algébrique introduite par Viehweg, et la version métrique développée en partant des articles de Berndtsson-Păun. Puis on énonce un certain nombre de résultats concernant la positivité des images directes $\pi_\star(mK_{X/Y})$ qui jouent un rôle crucial dans ce mémoire. Ensuite nous allons présenter deux applications de ces outils. L'une concerne la conjecture d'Iitaka, qui est la motivation initiale de l'étude de la positivité de $\pi_\star(mK_{X/Y})$, et l'autre est centrée sur la conjecture de Pereira-Loray-Touzet.

## 1.2 Positivité des faisceaux cohérents

### 1.2.1 Deux notions de positivité

Pour commencer, on rappelle la notion de pseudo-effectivité (*psef* en abrégé) pour un fibré en droites.

**Définition 1.1.** *Soit $X$ une variété projective et $L$ un fibré en droites holomorphe sur $X$. On dit que $L$ est psef si $\alpha L + A$ est $\mathbb{Q}$-effectif pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, où $A$ est un fibré ample fixé. Cela revient à dire qu'il existe un $\beta \in \mathbb{N}^\star$ tel que $H^0(X, \beta(\alpha L + A)) \neq 0$.*

On peut démontrer[Dem10], $L$ est psef si et seulement s'il existe une métrique (éventuellement singulière) $h_L$ telle que

$$i\Theta_{h_L}(L) \geq 0$$

au sens des courants sur $X$. Son résultat peut être vu comme une généralisation du théorème de plongement de Kodaira. En utlisant cette caractérisation analytique, on peut généraliser la notion de "psef" au cas où $X$ est une variété complexe compacte, pas forcément algébrique.

L'analogue de 1.1 pour les faisceaux cohérents a été introduit par Viehweg dans [Vie83].

**Définition 1.2.** *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur une variété projective $X$, et soit $A$ un fibré en droite ample sur $X$. On dit que $\mathscr{F}$ est faiblement positif au sens de Viehweg, si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^\star$, il existe un $\beta \in \mathbb{N}^\star$ tel que la restriction*

$$H^0(X, (\mathrm{Sym}^{\alpha\beta}(\mathscr{F}))^{\star\star} \otimes A^\beta) \to ((\mathrm{Sym}^{\alpha\beta}(\mathscr{F}))^{\star\star} \otimes A^\beta)_x$$

*est surjective au point générique $x \in X$.*

Cette notion apparaît naturellement dans les travaux de Viehweg sur la conjecture d'Iitaka. On va discuter ceci plus en détail dans la section suivante.

Nous allons rappeler maintenant la version quantitative de la notion 1.2, en suivant [BP08]. Afin d'énoncer cette notion, on introduit d'abord une notion de métrique singulière pour les faisceaux cohérents.

**Définition 1.3.** *[BP08, Rau15] Soit $E \to X$ un fibré vectoriel. Une métrique hermitienne singulière $h$ sur $E$ est la donnée une forme quadratique $|\cdot|^2_{h,x} : E_x \to [0, +\infty]$ telle que :*

(1) *Il existe un ensemble $\Lambda \subset X$ de mesure de Lebesgue nulle tel que $|\cdot|^2_{h,x}$ est une forme quadratique définie positive sur $E_x$ si $x \in X \setminus \Lambda$.*

(2) *Pour toute section locale $s$ de $E$, la fonction $x \to |s(x)|_h$ est mesurable.*

*Si $\mathscr{E}$ est un faisceau cohérent sans torsion, on définit une métrique singulière sur $\mathscr{E}$ via la restriction $E := \mathscr{E}|_{X_0}$ où $X_0$ est le lieu où $\mathscr{E}$ est localement libre.*

Si $h$ est une métrique hermitienne non-singulière, alors le tenseur de courbure $i\Theta_h(E)$ est une $(1,1)$-forme à valeurs dans $\mathrm{End}(E)$. Dans ce contexte on a la notion de positivité au sens de Griffiths classique.

Considérons un fibré en droites $L$ muni d'une métrique singulière dont les poids sont psh. Alors la forme de courbure devient un courant dont les coefficients sont des mesures. Nous allons voir maintenant qu'on peut définir l'analogue de "poids psh" pour un fibré vectoriel muni d'une métrique singulière. Par contre, des exemples simples montrent qu'en général le courant de courbure n'aura pas des coefficients mesures. Ceci marque une différence importante par rapport au cas des fibrés en droites.

L'énoncé suivant indique une manière de formuler la notion de positivité au sens de Griffiths pour une métrique singulière.

**Proposition 1.1.** *Soit $h$ une métrique hermitienne lisse sur un fibré vectoriel holomorphe $E$. Alors la courbure $i\Theta_h(E)$ est semipositive au sens de Griffiths, si et seulement si la fonction $x \to \log|\xi(x)|_{h^\star}$ est psh, pour toute section holomorphe locale $\xi$ du fibré duale $E^\star$.*

Cette caractérisation inspire la notion de semi-positivité suivante.

**Définition 1.4.** *[BP08] Soient $\mathscr{E}$ un faisceau cohérent sans torsion sur une variété complexe lisse $X$ (pas forcément compacte), et $h$ une métrique hermitienne singulière sur $\mathscr{E}$. On dit que $(\mathscr{E}, h)$ est semi-positif au sens de Griffiths si la fonction $x \to \log|\xi(x)|_{h^\star}$ est psh, pour toute section holomorphe locale $\xi$ du fibré $\mathscr{E}^\star$. On le note $(\mathscr{E}, h) \succeq 0$.*

Il est important de noter que l'analogue du théorème d'extension de Riemann reste vrai dans le contexte des fonctions psh. En effet, d'après Hartogs, une fonction psh définie à l'extérieur d'une sous-variété $Z$ de $X$ et uniformément bornée supérieurement près de $Z$ admet un prolongement canonique sur $X$. Qui plus est, la fonction qui résulte reste dans la même classe (psh). En particulier, si on peut construire une métrique $h$ sur $\mathscr{E}|_{X\setminus Z}$ telle que $(\mathscr{E}, h) \succeq 0$ sur $X \setminus Z$ et le poids de $h$ [2] est uniformément borné supérieurement près de $Z$, $h$ s'étend canoniquement sur $\mathscr{E}|_X$ et on a encore $(\mathscr{E}, h) \succeq 0$ sur $X$. C'est un point clé dans la version "quantitative" du théorème de positivité [BP08, PT18] qu'on va expliquer dans la section suivante.

On remarque que, à cause de la singularité de $h$, la condition $(E, h) \succeq 0$ ne suffit pas pour définir la courbure $i\Theta_h(E)$ [Rau15, Thm 1.5]. Malgré ceci, on peut démontrer que $h$ induit une métrique $\det h$ sur $\det E$ dont la courbure est un courant positif fermé :

**Proposition 1.2.** *[Rau15] Si $(E, h) \succeq 0$, alors $h$ induit une métrique $\det h$ sur $\det E$, et*

$$i\Theta_{\det h}(\det E) \geq 0$$

*au sens des courants.*

### 1.2.2 Comparaison des deux notions de positivité

Soit $E$ un faisceau cohérent sur une variété projective. On a déjà mentionné que si $\mathrm{rang} E = 1$, alors les définitions 1.2 et 1.4 sont équivalentes. Dans le cas où $\mathrm{rang} E \geq 2$ on sait que l'existence d'une métrique singulière $h$ telle que $(E, h) \succeq 0$ implique la positivité au sens de Viehweg de $E$, cf. [Pau15, Thm 2.21]. La proposition ci-dessous montre que la réciproque n'est pas vraie.

**Proposition 1.3.** *Soit $X$ une variété projective, et $E$ un fibré vectoriel numériquement plat, c'est-à-dire que $c_1(E) = 0$ et $E$ est nef (i.e., $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ nef sur $\mathbb{P}(E)$). Alors on a*

2. Plus précisément, si $\mathrm{codim}_X Z = 1$, on demande que près d'un point générique de $Z$, les fonctions $-\log|e_i|_h^2$ sont bornées supérieurement près ce point, où $\{e_1, \cdots, e_r\}$ est une base de $\mathscr{E}$ près de ce point générique. Si $\mathrm{codim}_X Z \geq 2$, on n'a pas besoin de cette hypothèse.

*(i) $E$ est positif au sens de Viehweg.*

*(ii) S'il existe une métrique $h$ telle que $(E,h) \succeq 0$, alors $(E,h)$ est hermitien plat. C'est-à-dire que $h$ est lisse et $i\Theta_h(E) \equiv 0$.*

Cette proposition révèle un des avantages de la notion 1.4 par rapport à son analogue algébrique. Considérons par exemple le cas d'une fibration $p : X \to Y$ entre deux variétés projectives telle que l'image directe $p_\star(mK_{X/Y})$ est unipotente, c'est-à-dire une extension successive des fibrés triviaux. On va démontrer dans la section 1.2.3 que $p_\star(mK_{X/Y})$ possède une métrique canonique $h$ telle que $(p_\star(mK_{X/Y}), h) \succeq 0$. Proposition 1.3 implique alors que $p_\star(mK_{X/Y})$ est triviale. En particulier cela permet de construire des sections globales de $H^0(X, mK_{X/Y})$, ce qui est crucial pour la conjecture d'Iitaka. On renvoie à la section suivante pour une présentation détaillée.

On explique brièvement l'idée de la preuve de la proposition 1.3. La partie $(i)$ vient du fait que $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ est nef et relativement ample. $(ii)$ est déduit de la propriété suivante, démontrée dans [CP17, Cor 2.8].

**Théorème 1.4.** *[CP17, Cor 2.8] Soit $X$ une variété complexe et $E$ un fibré vectoriel sur $X$ muni d'une métrique $h$. Si $(E,h) \succeq 0$ et $i\Theta_{\det h}(\det E) = 0$, alors $(E,h)$ est hermitien plat.*

La preuve de ce théorème est un peu technique puisque la courbure de $(E,h)$ n'est pas bien définie en général. On se contente d'expliquer la preuve pour le cas $h$ est lisse et on renvoie à [CP17, Cor 2.8] pour le cas général. Si $h$ est non-singulière, alors la courbure $i\Theta_h(E) \geq 0$ est semi-positive au sens de Griffiths par 1.1. Comme

$$\operatorname{Tr} i\Theta_h(E) = i\Theta_{\det h}(\det E) = 0,$$

on a $i\Theta_h(E) \equiv 0$. Donc $(E,h)$ est hermitien plat.

On peut démontrer maintenant la proposition 1.3.

*Preuve de la proposition 1.3.* Comme $E$ est numériquement plat, $E$ est nef, i.e., $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ est nef. En combinant avec le fait que $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ est relativement ample, il est facile à vérifier que $E$ est positif au sens de Viehweg cf. par exemple [Pau15]. On obtient alors $(i)$.

Pour $(ii)$, d'après la proposition 1.2,

$$i\Theta_{\det h}(\det E) \geq 0 \qquad \text{sur } X$$

au sens des courants. Comme $c_1(E) = 0$, on a alors

$$i\Theta_{\det h}(\det E) \equiv 0$$

En utilisant le théorème 1.4, $(E,h)$ est hermitien plat. □

Finalement, on introduit une nouvelle notion de positivité, qui est plus proche de la positivité de Viehweg que celle de Berndtsson-Păun. Cette notion sera très utile dans la chapitre 2.

**Définition 1.5.** *Soit $X$ une variété projective et $\mathscr{F}$ un faisceau réflexif sur $X$. On dit que $\mathscr{F}$ est presque positif, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une métrique singulière $h_\epsilon$ sur $\mathscr{F}$ telle que*

$$(\mathscr{F}, h_\epsilon) \succeq -\epsilon\,\omega_X \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{F}} \qquad \text{sur } X. \tag{1.1}$$

*Rappelons que (1.1) signifie que pour tout section locale de $s \in H^0(U, \mathscr{F}^\star)$, on a*

$$i\partial\overline{\partial} \log |s|^2_{h^\star_\epsilon} \geq -\epsilon\,\omega_X \qquad \text{sur } U$$

*au sens des courants.*

**Question 1.5.** *Par un argument similaire à [Pau15, Thm 2.21] on peut démontrer que si $\mathscr{F}$ est presque positif au sens de Définition 1.5, alors $\mathscr{F}$ est positif au sens de Viehweg cf. Définition 1.2. Il est donc très intéressant de savoir si les deux notions de positivité coïncident.*

Le résultat suivant généralise le théorème 1.4. Il a été établi dans [CH19, Cor 2.12] au cas où $\dim X = 2$. Le cas d'une variété de dimension arbitraire a été obtenu très récemment dans [CCM19, Prop 2.7].

**Théorème 1.6.** *[CH19, CCM19] Soit $X$ une variété projective lisse et $\mathscr{F}$ un faisceau réflexif sur $X$. Si $c_1(\mathscr{F}) = 0$ et si $\mathscr{F}$ est presque positif au sens de la définition 1.5, alors $\mathscr{F}$ est numériquement plat sur $X$, c'est-à-dire que $\mathscr{F}$ est localement libre sur $X$, $\mathscr{F}$ nef et $c_1(\mathscr{F}) = 0$.*

La preuve est assez technique. L'idée principale est qu'en utilisant la condition $c_1(\mathscr{F}) = 0$ et (1.1), on peux contrôler le nombre de Lelong de $h_\epsilon$, cf. [CH19, Lemme 2.7,Prop 2.9]. En combinant ceci avec un argument d'approximation des courants [Dem92], on peut construire une suite de métriques non-singulières $\widetilde{h}_\epsilon$ sur $\mathscr{F}$ telles que $i\Theta_{\widetilde{h}_\epsilon}(\mathscr{F}) \geq -\epsilon\,\omega_X \otimes \mathrm{Id}$. Alors $\mathscr{F}$ est numériquement plat d'après un résultat de [DPS94]. On renvoie à [CH19, CCM19] pour des détails.

### 1.2.3 Autour des théorèmes de positivité de l'image directe

Soit $\pi : X \to Y$ une fibration[3] entre deux variétés projectives lisses. On discute maintenant des résultats sur la positivité $\pi_\star(mK_{X/Y})$ et on renvoie à [Mor87, Hor10, Pau15, HPS18] pour des présentations plus amples.

(i) *La positivité de $\pi_\star(K_{X/Y})$.* On définit $Y_0 \subset Y$ le lieu lisse de la fibration. D'après la théorie de Hodge classique, il existe une métrique $L^2$ lisse $h$ sur $\pi_\star(K_{X/Y})|_{Y_0}$ telle que $i\Theta_h(\pi_\star(K_{X/Y})) \geq 0$ sur $Y_0$. En évaluant directement le comportement de la métrique $h$ après de $Y \setminus Y_0$, Fujita [Fuj78] démontre que $\pi_\star(K_{X/Y})$ est nef (i.e. $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\pi_\star(K_{X/Y}))}(1)$ est nef) si la base $Y$ est de dimension 1. Zucker [Zuc82] et Kawamata [Kaw81] ont généralisé ce résultat au cas où la base est dimension arbitraire. Pour accomplir ceci, ils remplacent le calcul direct de Fujita par des résultats concernant la variation des structures de Hodge près du lieu singulier de $\pi$.

(ii) *La positivité de $\pi_\star(mK_{X/Y})$ pour $m \geq 2$.* En exploitant –entre autres– les propriétés des changement de base et surtout ceux des revêtement cycliques, Viehweg parvient a généraliser les travaux de [Fuj78, Zuc82, Kaw81]. Il démontre que $\pi_\star(mK_{X/Y})$ est faiblement positive pour tout $m \geq 1$ [Vie83]. Ce résultat profond a de nombreuses conséquences en géométrie complexe. En particulier, nous allons voir dans la section suivante que ce type de résultats permet d'obtenir des confirmations partielles de la conjecture d'Iitaka[4].

On présente maintenant une version "quantitative" de la positivité de $\pi_\star(mK_{X/Y})$, démontrée dans [BP08, PT18] :

**Théorème 1.7.** *[BP08, PT18] Il existe une métrique canonique $h$ sur $\pi_\star(mK_{X/Y})$ telle que*

$$(\pi_\star(mK_{X/Y}), h) \succeq 0$$

*au sens de Définition 1.4.*

La métrique $h$ est canonique dans le sens que elle ne dépend pas d'un revêtement cyclique et ni d'un changement de base. Comme on a vu dans la section 1.2.2, en utilisant cette version de la positivité, on a un peu plus de chance de construire des sections de $H^0(X, mK_{X/Y})$. Ce théorème est aussi utile dans l'étude des problèmes concernant l'espace de modules des variétés dont le fibré canonique est semi-positif. Une des raisons pour cela est que dans cette approche on n'a pas besoin de prendre des revêtements cycliques. Effectivement, la technique des revêtements cycliques est très utile,

3. On dit que $\pi$ est une fibration si $\pi$ est surjective et les fibres sont connexes.
4. C'est la motivation initiale de [Vie83].

mais ce procédé augmente le lieu singulière de la fibration. Ceci est une source de difficultés techniques importantes.

La preuve du théorème 1.7 repose sur un résultat profond de Berndtsson [Ber09] : Supposons que la fibration $\pi$ est une submersion et $h_L$ est non-singulière. Soit $L$ un fibré en droites sur $X$ muni d'une métrique $h_L$ telle que $i\Theta_{h_L}(L) \geq 0$. On a une métrique $L^2$ sur $\pi_\star(K_{X/Y} + L)$ définie comme suit

$$|s|_h^2 := \int_{X_y} |s|_{h_L}^2 \qquad \text{où } s \in H^0(X_y, \mathscr{O}_{X_y}(K_{X/Y} + L)).$$

Alors [Ber09] démontre que $i\Theta_h(\pi_\star(K_{X/Y} + L))$ est semi-positif au sens de Nakano (ce qui implique la positivité au sens de Griffiths).

La première étape de la preuve du théorème 1.7 est de généraliser [Ber09] au cadre où $\pi$ est une fibration et $h_L$ est peut-être singulière. On explique brièvement la preuve sous l'hypothèse que $h_L$ soit lisse. Soit $Y_0$ le lieu lisse de la fibration. D'après [Ber09], il existe une métrique $h$ sur $\pi_\star(K_{X/Y} + L)|_{Y_0}$ telle que $i\Theta_h(\pi_\star(K_{X/Y} + L)) \geq 0$. L'observation cruciale est qu'en utilisant le théorème d'extension de Ohsawa-Takegoshi, on peut montrer que le poids de $h$ est uniformément borné supérieur près de $Y \setminus Y_0$. D'après le résultat de Hartogs, comme rappelé après la définition 1.4, $h$ admet un prolongement à $Y$ et $(\pi_\star(K_{X/Y} + L), h) \succeq 0$ sur $Y$. Il est important de remarquer que dans les approches de [Fuj78, Kaw81, Zuc82], le comportement de $(\pi_\star(K_{X/Y}), h)$ près de $Y \setminus Y_0$ est contrôlé par la variation de la métrique de Hodge. Mais l'approche de [BP08] pour $(\pi_\star(K_{X/Y} + L), h)$ utilise Ohsawa-Takegoshi seulement.

Dans la deuxième étape le point est de montrer qu'il existe une métrique de type $m$-noyau de Bergman relatif $h_B$ sur $mK_{X/Y}$ telle que $i\Theta_{h_B}(mK_{X/Y}) \geq 0$ au sens des courants. On se contente ici de rappeler la construction de la métrique et on renvoie à [BP08] pour la preuve. Soit $x \in X$ un point sur une fibre lisse. On définit une norme sur $-(mK_{X/Y} + L)_x$ comme suit

$$\|\xi\|^2 := \sup \frac{|\xi(s(x))|^2}{(\int_{X_{p(x)}} |s|_{h_L}^{\frac{2}{m}})^m}, \tag{1.2}$$

où le "sup" porte sur les sections $s \in H^0(X_{p(x)}, mK_{X/Y} + L)$. Alors la métrique $h_B$ est définie par dualité. [BP08] démontre que $\Theta_{h_B}(mK_{X/Y} + L) \geq 0$ et le poids de $h_B$ est uniformément borné supérieur en utilisant le théorème d'extension de Ohsawa-Takegoshi. En particulier, $h_B$ admet un prolongement canonique sur $X$ et $\Theta_{h_B}(mK_{X/Y} + L) \geq 0$ sur $X$ au sens des courants.

Le théorème 1.7 est une conséquence immédiate de ce résultat. Si $m > 1$, on définit $L := (m - 1)K_{X/Y}$ muni de la métrique $h := \frac{m-1}{m} h_B$. Alors

$$i\Theta_h(L) \geq 0.$$

D'après l'étape 1, $\pi_\star(K_{X/Y} + L) = \pi_\star(mK_{X/Y})$ admet une métrique $h$ telle que $(\pi_\star(mK_{X/Y}), h) \succeq 0$.

On remarque qu'il est également important d'étudier le comportement de la métrique $h$ près du lieu singulier de la fibration $\pi$. En fait, si la base est de dimension 1 et la fibration est semistable, [Tak16] démontre que le poids de $h$ est contrôlé par une fonction de type $\log(-\log|t|)$. Au cas de $\dim Y \geq 1$, il est conjecturé qu'il existe un morphisme génériquement fini $Y' \to Y$ telle que $(\pi')_\star(mK_{X'/Y'})$ est nef et localement libre, où $X'$ est une désingularisation de la composante principale de $X \times_Y Y'$. On renvoie à [Tak16, Fuj16] pour des résultats dans cette direction.

Finalement, on énonce une version générale du théorème 1.7, en autorisant un fibré adjoint. Cette version sera utile dans les chapitres suivants.

**Théorème 1.8.** *[BP08, PT18] Soit $\pi : X \to Y$ une fibration entre deux variétés projectives lisses, et soit $L$ un fibré en droites sur $X$ muni d'une métrique $h_L$ telle que $i\Theta_{h_L}(L) \geq 0$ au sens des courants.*

*Soit $m \in \mathbb{N}$. S'il existe une section non nulle $s \in H^0(X_y, mK_{X_y}+L)$ pour un point générique $y \in Y$ et*

$$\int_{X_y} |s|_{h_L}^{\frac{2}{m}} < +\infty,$$

*alors $mK_{X/Y}+L$ est psef sur $X$, et avec une métrique de type $m$-noyau de Bergman relatif $h_B$ telle que $i\Theta_{h_B}(mK_{X/Y}+L) \geq 0$ au sens des courants.*

*De plus, $\pi_\star\left(\mathscr{O}_X(mK_{X/Y}+L)\otimes \mathscr{I}_{h_L,m}\right)$ admet une métrique $h$ telle que*

$$\left(\pi_\star\left(\mathscr{O}_X(mK_{X/Y}+L)\otimes \mathscr{I}_{h_L,m}\right), h\right) \succeq 0.$$

*Ici $\mathscr{I}_{h_L,m}$ est le faisceau constitué des germes de sections holomorphes $f \in \mathscr{O}_X(mK_{X/Y}+L)_x$ telles que $\int_V |f|_{h_L}^{\frac{2}{m}}$ converge dans un voisinage $V$ de $x$ assez petit.*

*En particulier, si $\mathscr{I}_{h_L,m}$ est trivial sur la fibre générique (par exemple $L = m\Delta$ pour un diviseur klt $\Delta$), alors il existe une métrique $h$ sur $\pi_\star\left(mK_{X/Y}+L\right)$ telle que $\left(\pi_\star\left(mK_{X/Y}+L\right), h\right) \succeq 0$.*

**Remarque 1.9.** *Comme $|f|_{h_L}^{\frac{2}{m}}$ est une forme volume, son intégrale $\int_V |f|_{h_L}^{\frac{2}{m}}$ est bien définie. On peut montrer que $\mathscr{I}_{h_L,m}$ est cohérent. Si $m = 1$, c'est montré dans [Nad89, Dem10]. Si $m \geq 2$, c'est une conséquence de la conjecture "d'ouverture" pour les faisceaux d'idéaux multiplicateurs démontrée dans [GZ15] (cf. [Cao17]).*

Dans les deux sections suivantes, on va présenter quelques applications du théorème 1.7. La section 1.2 concerne la conjecture d'Iitaka pour les fibrations dont la base est une variété abélienne. C'est un travail en collaboration avec Mihai Păun [CP17]. Dans [Cao18] nous obtenons une confirmation de la conjecture d'Iitaka dans le cas où la base est de dimension 2. Dans la section 1.3, on va expliquer un travail très récent avec Frédéric Campana et Mihai Păun, où l'on confirme partiellement une conjecture de Loray-Pereira sur l'algébricité des feuilletages holomorphes dont la première classe de Chern est nulle.

## 1.3 Conjecture d'Iitaka

Un objectif central en géométrie complexe est de classifier les variétés projectives modulo modifications birationnelles. Soit $X$ une variété projective lisse de dimension 1. D'après le théorème d'uniformisation, il y a trois cas possibles : $X$ est la droite projective, un tore, ou une surface de Riemann de genre $\geq 2$.

Comme d'habitude, le cas des variétés de dimension supérieure est beaucoup plus compliquée. Une notion importante que se dégage dans ce contexte est la dimension de Kodaira d'un fibré en droites. Il s'agit un invariant qui mesure la croissance asymptotique de la dimension de l'espace de sections des puissances du fibre. C'est un invariant birationnel, d'où son importance.

**Définition 1.6.** *Soit $X$ une variété kählérienne compacte. On définit la dimension de Kodaira $\kappa(X)$ le plus grand nombre $d \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\overline{\lim}_{m\to+\infty} \frac{h^0(X, mK_X)}{m^d} > 0 \qquad \textit{si } K_X \textit{ est } \mathbb{Q}\textit{-effectif.}$$

*Si $K_X$ n'est pas $\mathbb{Q}$-effectif, on pose $\kappa(X) := -\infty$.*

On peut vérifier facilement que $\kappa(X) = \kappa(Y)$ si $X$ et $Y$ sont birationnellement équivalentes. Aussi, on a $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, 1, 2, \cdots, \dim X\}$. Un problème central en géométrie birationnelle est la conjecture de Iitaka $C_{n,m}, C^+_{n,m}$, qui prédit que

**Conjecture 1.10.** *Soit $\pi : X \to Y$ une fibration, où $X$ et $Y$ sont des variétés projectives de dimension respectives $n$, $m$.*

$$C_{n,m} : \qquad \kappa(X) \geq \kappa(Y) + \kappa(F)$$

*et*

$$C^+_{n,m} : \qquad \kappa(X) \geq \max\{\kappa(Y), \mathrm{var}(\pi)\} + \kappa(F)$$

*si $\kappa(Y) \geq 0$. Ici $F$ désigne la fibre générique de $\pi$ et $\mathrm{var}(\varphi)$ est la variation birationnelle de $\pi$.*

**Remarque 1.11.** *On précise un peu la définition de $\mathrm{var}(\varphi)$ (cf. [Kol87, Thm 2.11]) : c'est le plus petit nombre $k \in \mathbb{N}$ tel qu'il existent une fibration $q : V \to U$ avec $\dim U = k$, une variété $R$, un morphisme génériquement fini surjectif $R \to Y$ et un morphisme surjectif $R \to U$ telles que $X \times_Y R$ et $V \times_U R$ soient birationnellement équivalentes sur $R$. On a le diagramme, où $X \times_Y R \dashrightarrow V \times_U R$ est un morphisme birationnel sur $R$ :*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d] & X \times_Y R \arrow[l] \arrow[r, dashed] \arrow[d] & V \times_U R \arrow[d] \arrow[r] & V \arrow[d] \\
Y & R \arrow[l] \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & R \arrow[r] & U
\end{tikzcd}$$

Voici quelques résultats remarquables autour de cette conjecture :

(1) Kawamata [Kaw82] démontre la conjecture $C_{n,1}$.

(2) Viehweg [Vie83] démontre la conjecture sous l'hypothèse que $Y$ est de type général, i.e. $\kappa(Y) = \dim Y$.

(3) Kollár [Kol87] démontre la conjecture si la fibre $F$ est de type général. Kovács et Patakfalvi [KP17] ont généralisé la preuve de Kollár au cas où la fibre est de log type général.

(4) Kawamata [Kaw85] démontre la conjecture $C^+_{n,m}$ si la fibre générique admet un bon modèle minimal.

Tous ces résultats sur la conjecture d'Iitaka reposent sur la positivité de l'image directe du fibré pluricanonique relatif : $\pi_\star(mK_{X/Y})$. L'idée principale est d'utiliser l'application naturelle

$$H^0(Y, \pi_\star(mK_{X/Y})) \times H^0(Y, mK_Y) \to H^0(X, mK_X). \tag{1.3}$$

Si on peut prouver que $H^0(Y, \pi_\star(mK_{X/Y}))$ admet suffisamment de sections globales, alors on peut construire des sections globales dans $H^0(X, mK_X)$ par (1.3).

Par exemple, d'après la section précédente, E. Viehweg démontre la positivité faible de $\pi_\star(mK_{X/Y})$. Ceci implique que $H^0(Y, \pi_\star(mK_{X/Y}) \otimes A_Y)$ contient suffisamment de sections globales, où $A_Y$ est un fibré très ample sur $Y$. La condition $K_Y$ gros équivaut à dire que $H^0(Y, mK_Y - A_Y)$ est non-nul pour $m \gg 1$. En utilisant l'application

$$H^0(Y, \pi_\star(mK_{X/Y}) \otimes A_Y) \times H^0(Y, mK_Y - A_Y) \to H^0(X, mK_X),$$

on obtient des sections dans $H^0(X, mK_X)$. Ceci implique $C_{m,n}$ sous l'hypothèse que $Y$ est de type général [Vie83].

Il nous semble important de mentionner une conjecture plus forte que $C^+_{m,n}$. Elle prédit un lien un peu plus précis entre $\mathrm{var}(\pi)$ et la positivité de $\pi_\star(mK_{X/Y})$.

**Conjecture 1.12.** *Soit $\pi : X \to Y$ une fibration, où $X$ et $Y$ sont des variétés projectives de dimension respectives $n$, $m$, et on suppose que $\kappa(F) \geq 0$. Si $\mathrm{var}(\pi) = \dim Y$, alors $\det \pi_\star(mK_{X/Y})$ est gros.*

[Kaw85] démontre cette conjecture sous l'hypothèse que la fibre générique admet un bon modèle minimal ("good minimal model"). On rappelle brièvement pourquoi la conjecture 1.12 implique $C^+_{m,n}$ (cf. [Vie83]). En fait, pour prouver $C^+_{m,n}$, il suffit de montrer que $\pi_\star(mK_{X/Y})$ est gros si $\mathrm{var}(\pi) = \dim Y$ : c'est une conséquence de la Remarque 1.11 combinée avec la formule de changement de base pour $\pi_\star(mK_{X/Y})$. Mais le théorème ci-dessous (qui est intéressant en soi) montre que $\det \pi_\star(mK_{X/Y})$ gros entraîne la même propriété pour $\pi_\star(mK_{X/Y})$ :

**Théorème 1.13.** *[Vie95, Tsu10] Soient $\pi : X \to Y$ une fibration entre deux variétés projectives et $\Delta$ un $\mathbb{Q}$-diviseur klt sur $X$. On suppose que $\pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta) \neq 0$ pour certain $m \in \mathbb{N}^\star$. Alors modulo un diviseur $\pi$-exceptionnel,*

$$K_{X/Y} + \Delta - \epsilon\, \pi^\star \det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)$$

*est $\mathbb{Q}$-psef pour un certain $\epsilon > 0$.*

*En particulier, si $\det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)$ est gros pour un certain $m \in \mathbb{N}$, alors il existe un $\mathbb{Q}$-fibré ample $A_Y$ sur $Y$ tel que $K_{X/Y} + \Delta - \pi^\star A_Y$ est psef. Dans ce cas, $\pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)$ est gros et on a*

$$\kappa(K_X + \Delta) \geq \kappa(K_F + \Delta) + \dim Y,$$

*si $\kappa(Y) \geq 0$.*

**Remarque 1.14.** *D'après le théorème 1.8, on sait que $mK_{X/Y} + L$ et $\det p_\star(mK_{X/Y} + L)$ sont psef. Le théorème 1.13 signifie que $mK_{X/Y} + L$ est plus "positif" que $p^\star \det p_\star(mK_{X/Y} + L)$. Ce théorème est démontré d'abord par Viehweg dans le cas où $\Delta$ est nul, et généralisé par Tsuji [Tsu10] en autorisant un fibré adjoint. On renvoie également à [CP17] pour une preuve complète en suivant l'argument de [Tsu10].*

*Idée de la preuve du théorème 1.13.* On présente ici l'idée de la preuve sous l'hypothèse que $\pi$ est lisse et $L = \mathscr{O}_X$. Pour une preuve complète on renvoie à [Vie95, CP17], ainsi qu'aux références dans ces articles.

Il y a un morphisme naturel

$$\det \pi_\star(mK_{X/Y}) \to \bigotimes^r \pi_\star(mK_{X/Y}) \qquad \text{on } Y, \tag{1.4}$$

où $r = \operatorname{rang} \pi_\star(mK_{X/Y})$. On considère le produit fibré

$$X^r := X \times_Y X \times_Y \cdots \times_Y X, \tag{1.5}$$

et soit $\pi^r : X^r \to Y$ l'application naturelle. On définit $\mathrm{pr}_i : X^r \to X$ la projection vers la $i$-ème composante. On a alors

$$K_{X^r/Y} = \bigotimes_{i=1}^r \mathrm{pr}_i^\star(K_{X/Y}) \qquad \text{sur } X^r, \tag{1.6}$$

et (1.4) induit une section non nulle

$$s \in H^0(X^r, mK_{X^r/Y} - f^{r\star} \det f_\star(mK_{X/Y})). \tag{1.7}$$

On pose $L := mK_{X^r/Y} - f^{r\star} \det f_\star(mK_{X/Y})$ et $h_L = e^{-\log|s|^2}$ la métrique singulière définie par $s$. Soit $m_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{m_1}\operatorname{Div}(s)$ est klt. On applique le théorème 1.8 à

$$\left(\pi^r : X^r \to Y, m_1 K_{X^r/Y} + L, h_L\right).$$

Alors $m_1 K_{X^r/Y} + L$ est muni d'une métrique $h_B$ telle que $\Theta_{h_B}(m_1 K_{X^r/Y} + L) \geq 0$.

Soit $j : X \hookrightarrow X^r$ le plongement diagonal. D'après la construction de la métrique $h_B$, on peut vérifier que la restriction $j^\star h_B$ est bien définie sur $X$. Donc on a $j^\star \Theta_{h_B} \geq 0$. Notons que

$$j^\star(m_1 K_{X^r/Y} + L) = (m_1 + m) r K_{X/Y} - \det f_\star(mK_{X/Y}),$$

donc $j^\star \Theta_{h_B} \geq 0$ implique que $(m_1 + m) r K_{X/Y} - \det f_\star(mK_{X/Y})$ est psef. Le théorème est prouvé. □

On présente maintenant les résultats dans les travaux [CP17, Cao18] où l'on a confirmé la conjecture $C_{m,n}$ sous l'hypothèse que $Y$ est une variété abélienne ou de dimension $\leq 2$. Le théorème principal qu'on veut discuter dans cette section est le suivant.

**Théorème 1.15.** *[CP17] Soient $\pi : X \to Y$ une fibration, où $X$ est une variété projective lisse et $Y$ est une variété abélienne. Soit $\Delta$ est un diviseur klt sur $X$. Alors*

$$\kappa(K_X + \Delta) \geq \kappa(K_F + \Delta|_F) + \kappa(Y), \tag{1.8}$$

*où $F$ est la fibre générique.*

*Proof.* On esquisse les étapes principales de la preuve.

Étape 1 : On peut supposer que $Y$ est un tore simple, i.e., il n'y a pas de sous-tore strict dans $Y$. En fait, si ce n'est pas le cas, d'après le théorème d'irréductibilité de Poincaré on a $Y = T_1 \times T_2$, quitte à faire un revêtement étale fini de $Y$, où les $T_i$ sont des sous-tores de $Y$. On peut vérifier que (1.8) est invariant par rapport aux revêtements étales. Donc le théorème est démontré par récurrence sur la dimension de $Y$.

Étape 2 : Soit $m \in \mathbb{N}$ suffisamment divisible. D'après le théorème 1.8, il existe une métrique (singulière) $h$ sur $\pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)$ telle que $(\pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta), h) \succeq 0$, et $h$ induit une métrique $\det h$ sur $\det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)$ telle que

$$\Theta_{\det h}(\det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)) \geq 0 \qquad \text{sur } Y \tag{1.9}$$

au sens des courants. En particulier, $\det \pi_\star(mK_{X/Y}+m\Delta)$ est psef. Comme $Y$ est simple, il y a deux cas possibles : $\det \pi_\star(mK_{X/Y}+m\Delta)$ est ample ou $c_1(\det \pi_\star(mK_{X/Y}+m\Delta)) = 0$. Si $\det \pi_\star(mK_{X/Y}+m\Delta)$ est ample, on a alors (1.8) en utilisant le théorème 1.13.

Étape 3 : Il reste à considérer le cas $c_1(\det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)) = 0$. C'est dans cette étape qu'on a besoin de la positivité au sens de Griffiths de $\pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)$ qu'on a discutée dans la section précédente. En fait, comme $c_1(\det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)) = 0$, en combinant avec (1.9), on en déduit que

$$i\Theta_{\det h}(\det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)) \equiv 0 \qquad \text{sur } X.$$

En utilisant le théorème 1.4, on conclut que $(\pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta), h)$ est hermitien plat et il correspond à une représentation unitaire

$$\pi_1(Y) \to U(r),$$

où $r = \mathrm{rang}\pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)$. Comme $\pi_1(Y)$ est commutatif, la représentation est scindée, et on a alors la décomposition

$$\pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta) = \oplus_i L_i,$$

où $L_i$ sont les fibrés en droites avec $c_1(L_i) = 0$. En particulier, $H^0(X, mK_X + m\Delta - L_i) \neq 0$. En appliquant un résultat de [CKP12] [5], on obtient alors

$$\kappa(K_X + \Delta) \geq \min\{\kappa(K_F + \Delta_F), 1\}. \tag{1.10}$$

Par un argument bien-connu de Kawamata [6], l'inégalité (1.10) implique le théorème. □

**Remarque 1.16.** *Dans l'important travail récent [HPS18] les auteurs simplifient et généralisent notre résultat au cas où $Y$ est une variété de dimension d'Albanese maximale. Mais l'existence de la métrique positive sur $\pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)$ et le théorème de platitude 1.4 restent cruciaux dans leur arguments.*

Ce résultat nous permet d'étudier les variétés de la dimension de Kodaira 0, une classe importante en géométrie birationnelle. Plus concrètement, on a :

**Corollaire 1.17** ([CP17])**.** *Soit $X$ une variété projective à singularités klt et $\kappa(X) = 0$. Alors la dimension de Kodaira de la fibre générique de l'application d'Albanese de $X$ est également zéro.*

5. La preuve repose sur un résultat fondamental de [Sim93].
6. Il étudie la fibration d'Iitaka de $|K_X + \Delta|$ si $\kappa(K_X + \Delta) \geq 1$.

*Proof.* Soit $\pi : X \to \mathrm{Alb}(X)$ l'application d'Albanese. D'après [Kaw81], $\pi$ est une fibration, i.e., $\pi$ est surjective et à fibres connexes. On peut alors appliquer le théorème 1.15, et on obtient

$$\kappa(X) \geq \kappa(F). \tag{1.11}$$

Comme $K_X$ est $\mathbb{Q}$-effectif, $K_F = (K_X)|_F$ est $\mathbb{Q}$-effectif. Donc $\kappa(F) \geq 0$. En combinant avec (1.11) et l'hypothèse $\kappa(X) = 0$, on sait que $\kappa(F) = 0$. □

Une analyse de la preuve du théorème 1.15 montre que l'hypothèse que $Y$ est un tore est utilisée afin d'avoir la dichotomie concernant $\det p_\star(mK_{X/Y})$ et aussi pour avoir scindage de la représentation unitaire du groupe fondamental de $Y$. D'après un théorème de K. Zuo ce dernier résultat est encore vrai si $\kappa(Y) = 0$. En utilisant ceci et la fibration d'Iitaka de $Y$, on peut démontrer la conjecture $C_{m,n}$ dans le cas suivant :

**Théorème 1.18.** *[CP17, Thm 5.6] Soient $\pi : X \to Y$ une fibration entre deux variétés projectives et $\Delta$ un diviseur klt sur $X$. On suppose que $c_1(p_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)) = 0$ pour certain $m \geq 2$. Alors*

$$\kappa(K_X + \Delta) \geq \kappa(K_F + \Delta_F) + \kappa(Y). \tag{1.12}$$

Inspiré par ce résultat, on pose la question suivante, qui est probablement moins difficile que $C_{m,n}$ :

**Question 1.19.** *Soient $\pi : X \to Y$ une fibration entre deux variétés projectives et $\Delta$ un diviseur klt sur $X$. Soit $m \geq 2$ un nombre entier. Si $\kappa(Y) \geq 0$, on a*

$$\kappa(K_X + \Delta) \geq \kappa(K_F + \Delta_F) + \kappa(Y, \det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)). \tag{1.13}$$

Une approche possible pour cette question sera d'étudier la fibration d'Iitaka associée à $\det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)$ et de généraliser le théorème 1.18 au cas où $\det p_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)$ est effectif. On remarque qu'une réponse positive de la question 1.19 implique probablement la version klt de $C^+_{m,n}$ (sous l'hypothèse que la fibre $(F, \Delta_F)$ admet un bon modèle minimal), ce qui est un problème ouvert pour le moment.

Plus récemment, en combinant les propriétés de positivité de $\pi_\star(mK_{X/Y})$ avec un résultat de Campana sur la géométrie des surfaces Calabi-Yau orbifolds, on a obtenu la confirmation de la conjecture $C_{n,m}$ pour $m = 2$.

**Théorème 1.20** ([Cao18])**.** *Soit $\pi : X \to Y$ une fibration d'une variété projective lisse vers une variété projective de dimension 2. Soit $\Delta$ un diviseur klt sur $X$. Alors*

$$\kappa(K_X + \Delta) \geq \kappa(K_F + \Delta|_F) + \kappa(Y), \tag{1.14}$$

*où $F$ est la fibre générique.*

*Proof.* On explique ici les étapes principales de la démonstration. Comme $\dim Y = 2$, on peut supposer que $K_Y$ soit semi-ample, en utilisant le MMP en dimension 2. Il y a deux cas à considérer.

Si $\kappa(Y) \geq 1$, on peut montrer facilement (1.14) en utilisant l'application d'Iitaka de $|K_Y|$ et $C_{m,1}$ (démontré dans [Kaw82]).

Si $\kappa(Y) = 0$, d'après la classification des surfaces, $Y$ est un tore ou une surface K3, modulo un revêtement étale fini. Si $Y$ est un tore, (1.14) est démontré par le théorème 1.15. Donc pour démontrer (1.14), il suffit de considérer le cas ou $Y$ est une surface $K3$.

Dans ce cas on considère $\pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)$ pour $m \in \mathbb{N}^\star$ suffisamment divisible. D'après l'argument précédent, $\det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)$ est psef. Comme le fibré canonique de la surface $Y$ est trivial, la conjecture d'abondance montre que la dimension numérique de $\det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)$ coïncide avec sa dimension de Kodaira et donc $\det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)$ est $\mathbb{Q}$-effectif.

Si $\kappa(\det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)) \geq 1$, $|\det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)|$ induit une fibration d'Iitaka $Y \to Z$, et on peut démontrer (1.14) en utilisant des arguments standards.

Si $\kappa(\det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)) = 0$, grâce au fait que $Y$ est $K3$, on a (cf. [Cao18, Prop 2.4])

$$\mathrm{nd}(\det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)) = \kappa(\det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)) = 0,$$

où nd est la dimension numérique. Alors $i\Theta_{\det h}\left(\det \pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta)\right) = \sum_i a_i[C_i]$, où $[C_i]$ sont les courbes exceptionnelles sur $Y$. En utilisant le théorème 1.4 on déduit que $(\pi_\star(mK_{X/Y} + m\Delta), h)$ est hermitien plat sur $Y \setminus (\cup C_i)$. A ce moment on a besoin d'utiliser un autre ingrédient important : le théorème d'uniformisation des variétés kählériennes compacts orbifoldes à première classe de Chern nulle cf. [Cam04]. En particulier, ce résultat montre que le groupe fondamental de $Y \setminus (\cup C_i)$ est presque-abélien. On peut alors démontrer (1.14) par des arguments utilisés dans la preuve du théorème 1.15. □

## 1.4 Sous-harmonicité des images directes et conjecture de Pereira-Touzet

### 1.4.1 Sous-harmonicité des images directes

En géométrie complexe il est important de disposer de critères qui permettent de décider si le degré d'un fibré par rapport à une polarisation $H$ est positif. Ceci est vrai (pour toute polarisation) si le fibré en question est positif au sens de la Définition 1.2 ou 1.4. Nous allons voir maintenant que ceci est vérifié dans d'autres contextes.

Par exemple, soit $(X, H)$ une variété projective polarisée, i.e. $H$ un fibré ample. Miyaoka démontre que si $K_X$ est psef, alors $\Omega^1_X$ est $H$-semi-positive, c'est-à-dire que si on considère la filtration semistable de $\Omega^1_X$ par rapport à $H$ :

$$0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \cdots \to \mathscr{F}_m = \Omega^1_X,$$

alors $c_1(\mathscr{F}_{i+1}/\mathscr{F}_i) \cdot H^{n-1} \geq 0$.

Dans un travail en commun avec Frédéric Campana et Mihai Păun [CCP19], on démontre un théorème général qui implique la positivité du degré de $p_\star(K_{X/Y} + L)$ par rapport a une polarisation $H$ dans le cas où $L$ a des propriétés de positivité beaucoup plus faibles que la pseudo-effectivité. On présente maintenant l'énoncé exact de notre résultat, ainsi qu'une application, cf. 1.25.

**Théorème 1.21.** *[CCP19] Soit $p : X \to Y$ une application holomorphe surjective propre entre deux variétés kählériennes avec $\dim X = m + n$ et $\dim Y = n$. On suppose que $p$ est localement projective. Soit $(L, h_L)$ un fibré en droites sur $X$ muni d'une métrique (éventuellement singulière) $h_L$ telle que*

$$\Theta_{h_L}(L) \geq -Cp^\star\omega_Y, \qquad \Theta_{h_L}(L) \wedge p^\star\omega_Y^{n-1} \geq 0 \qquad \text{au sens des courants,} \tag{1.15}$$

*où $\omega_Y$ est une métrique hermitienne sur $y$, et $C > 0$ est une constante. Alors*

$$\Theta_{\det h_{X/Y}}\left(\det(p_\star(K_{X/Y} + L))\right) \wedge \omega_Y^{n-1} \geq 0. \tag{1.16}$$

La preuve du théorème repose sur les travaux [Ber06, BP08]. En utilisant l'argument d'approximation [BP08], on peut se ramener au cas où $p$ est un produit direct et la fibre est Stein (non compacte). Dans ce cas, si la base $Y$ est de dimension 1, (1.16) est démontré dans [Ber06]. On généralise l'argument de [Ber06] au cas où $Y$ est de dimension quelconque, et ceci implique le théorème. On renvoie à [CCP19] pour une preuve détaillée.

### 1.4.2 Une application

Le théorème 1.21 nous permet d'étudier la classification des feuilletages holomorphes. Soient $X$ une variété kählérienne compacte lisse et $\mathscr{F} \subset T_X$ un feuilletage holomorphe[7]. Par analogie avec le cas $\mathscr{F} = T_X$, la géométrie du feuilletage devrait être gouvernée par le signe de $c_1(\mathscr{F})$.

7. C'est-à-dire que $\mathscr{F}$ est un sous-faisceau saturé satble par le crochet [ , ].

On regarde d'abord le cas où $c_1(\mathscr{F}) > 0$. Un résultat fondamental dans cette direction est l'algébricité des feuilles de $\mathscr{F}$. Plus précisément, on considère la filtration semistable de $\mathscr{F}$ par rapport à une polarisation ample $H$ :

$$0 \to \mathscr{F}_1 \to \cdots \to \mathscr{F}_k = \mathscr{F}.$$

Si $c_1(\mathscr{F}_k/\mathscr{F}_{k-1}) \cdot H^{\dim X-1} > 0$, alors le théorème du type Bogomolov-McQuillan (cf.[BM01, Bos01, KST07]) montre que les feuilles de $\mathscr{F}$ sont algébrique et les clôtures d'adhérence sont rationnellement connexes. Plus récemment, [CP19] généralise ce résultat au cas où la polarisation est définie par une classe mobile [8] :

**Théorème 1.22.** *[CP19] Soit $X$ une variété projective lisse, et $\mathscr{F} \subset T_X$ est une feuilletage. Soit $\alpha$ une classe mobile ; on considère la filtration semistable de $\mathscr{F}$ par rapport à $\alpha$ :*

$$0 \to \mathscr{F}_1 \to \cdots \mathscr{F}_k = \mathscr{F}.$$

*Si $c_1(\mathscr{F}_k/\mathscr{F}_{k-1}) \cdot \alpha > 0$, alors les feuilles de $\mathscr{F}$ sont algébriques et les clôtures d'adhérence sont rationnellement connexes.*

**Remarque 1.23.** *Il est important de noter que [Dru18], [CP19] implique le critère d'algébricité suivant, qui est un peu plus facile à vérifier :*

*Soit $X$ une variété projective lisse, et $\mathscr{F} \subset T_X$ un feuilletage. Si $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(1)$ [9] n'est pas psef, alors les feuilles de $\mathscr{F}$ sont algébriques.*

On regarde ensuit le cas où le signe est zéro, c'est-à-dire que $c_1(\mathscr{F}) = 0$. Dans cette direction, Pereira et Touzet [PeTou13] ont conjecturé que

**Conjecture 1.24** ([PeTou13])**.** *Soit $X$ une variété kählérienne compacte lisse avec fibré canonique $K_X$ psef. Soit $\mathscr{F} \subset T_X$ un feuilletage holomorphe avec $c_1(\mathscr{F}) = 0$. Si $c_2(\mathscr{F}) \neq 0$ et si $\mathscr{F}$ est stable par rapport à une métrique de Kähler $\omega_X$, alors les feuilles de $\mathscr{F}$ sont algébriques.*

Citons quelques résultats qui confirment partiellement cette conjecture.

1. Soit $X$ une variété kählérienne lisse compacte avec $c_1(X) = 0$, et soit $\mathscr{F} \subset T_X$ un feuilletage holomorphe stable avec $c_1(\mathscr{F}) = 0$. La décomposition de Beauville implique les feuilles de $\mathscr{F}$ sont compactes de type Calabi-Yau ou hyperkähler si $c_2(\mathscr{F}) \neq 0$, et les feuilles sont dans la partie du tore si $c_2(\mathscr{F}) = 0$.
2. Plus récemment, la décomposition de Beauville a été généralisée au cas où $X$ est projective avec singularités klt $c_1(X) = 0$ cf. [GKP16, GGK19, Dru18, HP19] et des références dans ces articles autour ce résultat. On remarque qu'une étape importante dans la preuve est de vérifier cette conjecture pour les variétés projectives à singularités klt avec $c_1(X) = 0$.
3. [Dru17b] confirme cette conjecture si $X$ est projective et $\operatorname{rang}\mathscr{F} \leq 3$.
4. [HP19] confirme cette conjecture si $X$ est projective et $\operatorname{Sym}^k\mathscr{F}$ est stable pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On remarque que le théorème 1.22 est crucial dans la preuve de [Dru18, HP19]. En fait, d'après le critère (1.23), il suffit de démontrer que $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(1)$ est non-psef. Si on suppose par contradiction que $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(1)$ est psef, [Dru18, HP19] étudie le lieu base restreint $\mathbb{B}_-(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(1))$ [10]. En utilisant la condition de stabilité de $\operatorname{Sym}^k\mathscr{F}$, [HP19] peut contrôle bien $\mathbb{B}_-(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(1))$. L'argument repose sur un calcul de l'intersection de $\mathbb{B}_-(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(1))$ avec des courbes dans $\mathbb{P}(\mathscr{F})$. Ceci implique que $\mathscr{F}$ est hermitien plat. Notons au passage que l'algébricité de $X$ est cruciale dans leur preuve afin de contrôler $\mathbb{B}_-(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(1))$.

8. Rappelons qu'une courbe est dite mobile s'il existe une modification $\mu : X' \to X$ et des diviseurs très amples $H'_1, \cdots, H'_{n-1}$ sur $X'$ tels que $C = \mu_\star(H'_1 \cap \cdots \cap H'_{n-1})$. On dit que $\alpha \in N_1(X, \mathbb{R})$ est une classe mobile si c'est dans le cône convexe fermé engendré par les classes de courbes mobiles. Equivalentement, si $X$ est projective, d'après [BDPP13], $\alpha \cdot D \geq 0$ pour tout diviseur effectif $D$.

9. Ici, $\mathbb{P}(\mathscr{F})_x$ corresponde aux droites dans $\mathscr{F}_x$

10. Soit $D$ un diviseur Cartier. $\mathbb{B}_-(D) := \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}(\cap_{m\in\mathbb{N}} \operatorname{BS}(m(D + \frac{1}{n}A)))$, où $\operatorname{BS}(m(D + \frac{1}{n}A))$ est le lieu base de $m(D + \frac{1}{n}A)$.

Dans [CCP19], l'idée principale est que la non pseudo-effectivité de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(1)$ peut être déduite par un argument de positivité des images directes. En utilisant la version du théorème 1.21, on peut confirmer partiellement la conjecture dans le cas kählérien. Le théorème principal est :

**Théorème 1.25.** *[CCP19] Soit $(X, \omega_X)$ une variété kählérienne compacte lisse et $\mathscr{F}$ un faisceau réflexif telle que*

*(i)* $c_1(\mathscr{F}) = 0$.

*(ii) Le faisceau $\widehat{\mathrm{Sym}}^k \mathscr{F}^\star$ est $\omega_X$-stable pour certain $k \geq r+1$, où $r$ est le rang de $\mathscr{F}$.*

*Alors $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(1)$ est non-psef, ou $\mathscr{F}$ est hermitien plat. Si $X$ est projective, on a le même conclusion si on remplace* (ii) *par $\widehat{\mathrm{Sym}}^k \mathscr{F}^\star$ est $\omega_X$-stable pour certain $k \geq r$.*

Notons qu'en utilisant les arguments donnés dans la preuve du théorème 1.25, on peut [CCP19, Cor 5.2] donner une nouvelle preuve de la conjecture de Pereira-Touzet sous l'hypothèse $\mathrm{rang}\mathscr{F} \leq 2$. Mais l'application principale du théorème 1.25 est le resultat suivant.

**Corollaire 1.26.** *Soit $(X, \omega_X)$ une variété projective lisse, et $\mathscr{F} \subset T_X$ un feuilletage holomorphe tel que*

*(i)* $c_1(\mathscr{F}) = 0$ *et* $c_2(\mathscr{F}) \neq 0$.

*(ii) $\widehat{\mathrm{Sym}}^k \mathscr{F}^\star$ est $\omega_X$-stable pour certain $k \geq r$, où $r$ est le rang de $\mathscr{F}$.*

*Alors les feuilles de $\mathscr{F}$ sont algébriques.*

*Preuve du corollaire.* D'après le théorème 1.25, le fibré $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(1)$ n'est pas psef. Mais la non-pseudo-effectivité de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(1)$ implique l'algébricité des feuilles de $\mathscr{F}$ par [CP19, Dru18]. On obtient alors le corollaire. □

On esquisse la preuve du théorème 1.25.

*Proof.* Pour bien dégager les idées de la preuve, on traite ici le cas kählérien mais on suppose que $\mathscr{F}$ est localement libre sur $X$. Le cas général nécessite quelques arguments de plus.

Si $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(1)$ est psef, il existe par définition une métrique singulière $h = e^{-\varphi}$ on $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(1)$ telle que la courbure $\Theta := i\Theta_h(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(1))$ soit semi-positive. On va démontrer que $\mathscr{F}^\star$ est hermitien plat.

Soit $p : \mathbb{P}(\mathscr{F}) \to X$ la projection naturelle. La stabilité du fibré $\mathrm{Sym}^k \mathscr{F}^\star$ par rapport à $\omega$ implique que le faisceau multiplicateur

$$\mathscr{I}(e^{-(k+1-\epsilon)\varphi}|_{\mathbb{P}(\mathscr{F})_x}) \qquad \text{est trivial pour tout } \epsilon > 0, \tag{1.17}$$

où $x \in X$ est un point générique, et $\mathbb{P}(\mathscr{F})_x$ est la fibre au-dessus de $x$.

Il se trouve que (1.17) est une conséquence du théorème 1.21, et on va démontrer ceci après avoir fini la preuve. Comme $r \leq k+1$, d'après (1.17), on a

$$p_\star \left(K_{\mathbb{P}(\mathscr{F})/X} \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(r+1) \otimes \mathscr{I}(e^{-(r+1)\varphi})\right)_x = p_\star \left(K_{\mathbb{P}(\mathscr{F})/X} \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(r+1)\right)_x = \mathscr{F}_x^\star \tag{1.18}$$

au point générique $x \in X$. En utilisant la métrique $e^{-(r+1)\varphi}$ sur $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(r+1)$ et le théorème 1.8, on peut fabriquer une métrique $h_1$ sur $p_\star \left(K_{\mathbb{P}(\mathscr{F})/X} \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(r+1)\right) = \mathscr{F}^\star$ telle que $(\mathscr{F}^\star, h_1) \succeq 0$. En combinant ceci avec $c_1(\mathscr{F}^\star) = 0$, on déduit que $\mathscr{F}^\star$ est hermitien plat par le théorème 1.6. □

Il reste à montrer (1.17), qui est une conséquence du théorème 1.21.

*Preuve.* Supposons par contradiction que $\mathscr{I}((k+1-\delta_0)h|_{\mathbb{P}(E^\star)_x})$ est non-trivial sur une fibre générique $\mathbb{P}(E)_x$ pour certain $\delta_0 > 0$. On peut montrer par les estimées $L^2$ que

$$\mathscr{G} := p_\star \left(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathscr{F})}(K_{\mathbb{P}(\mathscr{F})/X} + \mathscr{O}(r+k)) \otimes \mathscr{I}((k+1-\delta_0)h)\right) \tag{1.19}$$

est un sous-faisceau *propre* de $\mathrm{Sym}^k\mathscr{F}^\star \otimes \det \mathscr{F}^\star$.

On démontre maintenant que la pente de $\mathscr{G}$ est positive par le théorème 1.21 : comme $\mathscr{F}$ est stable, il admet une métrique d'Hermite-Einstein sur $\mathscr{F}$ et cette métrique induit une métrique $h_{FS}$ sur $\mathscr{O}(1)$. On définit une métrique $h := h_{FS}^{\otimes(r-1+\delta_0)} \otimes h^{\otimes(k+1-\delta_0)}$ sur $\mathscr{O}(r+k)$. D'après la condition Hermite-Einstein, on peut vérifier facilement que

$$\Theta_h(\mathscr{O}(r+k)) \wedge \pi^\star\omega_X^{n-1} \geq 0 \tag{1.20}$$

En utilisant le théorème 1.21, on a alors $\int_X c_1(\mathscr{G}) \wedge \pi^\star\omega_X^{n-1} \geq 0$. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse de stabilité de $\mathrm{Sym}^k\mathscr{F}^\star$. □

## 1.5 Quelques remarques sur la conjecture d'Iitaka

Dans cette section, on va discuter brièvement des approches qu'on envisage pour traiter les conjectures $C_{m,n}$ et $C_{m,n}^+$.

### 1.5.1 Formule de Fujino-Mori, le cas $\kappa(F) \geq 1$

Soit $p : X \to Y$ une fibration entre deux variétés projectives ; on suppose que $\kappa(F) \geq 1$. On prend un $m \in \mathbb{N}^\star$ suffisamment divisible. En utilisant Fujino-Mori [FM00, Thm 4.5], la fibration d'Iitaka relative de $p$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "p"'] & & X' \arrow[dl, "f"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

(quitte à passer à un modèle birationnel). Il existe un $\mathbb{Q}$-diviseur klt $\Delta$ et un $\mathbb{Q}$-fibré en droite nef $L$ sur $X'$ tels que $K_{X'/Y} + \Delta + L$ est $f$-gros et

$$p_\star(mK_{X/Y}) = f_\star(m_1(K_{X'/Y} + \Delta + L)) \tag{1.21}$$

pour un certain $m_1 \in \mathbb{N}$. Ici $L$ est la partie modulaire de $j_\star(mK_{X/X'})$ [11]. D'après [PT18], $L$ est muni d'une métrique $h_L$ telle que $i\Theta_{h_L}(L) \geq 0$ et les nombres de Lelong s'annulent sur $X'$.

D'après [KP17], on peut définir $\mathrm{var}(f, \Delta)$, la dimension de la variation birationnelle de la paire $(f, \Delta)$, une notion qui généralise $\mathrm{var}(f)$.

Si $\mathrm{var}(f, \Delta) = \dim Y$, on devrait pouvoir montrer que $f_\star(m_1(K_{X'/Y} + \Delta + L))$ est gros. D'après (1.21), $p_\star(mK_{X/Y})$ est gros et on a alors

$$\kappa(X) \geq \kappa(F) + \dim Y.$$

Si $\mathrm{var}(f, \Delta) < \dim Y$ alors après un revêtement génériquement fini $Y$ admet une fibration $g : Y \to Z$ où la variété projective $Z$ est de dimension $\dim Z = \mathrm{var}(f, \Delta)$. On peut vérifier probablement que :

*(i) :* $(f, \Delta)$ est localement triviale (birationnellement) sur la fibre générique de $g$.

*(ii) :* $K_{X'/Y} + \Delta + L$ est strictement positive le long des directions horizontales de $g$, c'est-à-dire que $K_{X'/Y} + \Delta + L - (f \circ g)^\star A_Z$ est psef pour un certain $\mathbb{Q}$-fibré ample $A_Z$ sur $Z$.

Considérons un point générique $z \in Z$ et $T \subset X'$ une sous-variété telle que $f|_T : T \to Y_z$ est surjective et génériquement finie. Si on peut démontrer que

$$\kappa(T, m_1(\Delta + L)) \geq 0, \tag{1.22}$$

alors on est en bonne position pour construire des éléments non nuls de $H^0(X', m_1(K_{X'/Y} + \Delta + L))$. Pour ceci on compte utiliser la trivialité de $(i)$ et la positivité stricte $(ii)$ ainsi qu'une version du théorème d'extension d'Ohsawa-Takegoshi. En combinant avec (1.21), ceci implique alors le $C_{m,n}$.

11. C'est donc de rang 1 puisque $j$ est la fibration d'Iitaka relative.

En conclusion, pour montrer $C_{m,n}$, le point crucial est de montrer (1.22). Il est important de noter que la fibre générique de $j$ est de dimension Kodaira 0. Donc si on peut démontrer $C_{m,n}$ dans le cas où $\kappa(F) = 0$, alors (1.22) s'en suit.

### 1.5.2 Le cas $\kappa(F) = 0$ :

D'après la discussion précédente, le cas le plus difficile de $C_{m,n}$ est celui où $\kappa(F) = 0$. Après un revêtement cyclique, on peut supposer que $h^0(F, K_F) = 1$. Alors $p_\star(K_{X/Y})$ est muni d'une métrique de Hodge $h$. Soit $Y_0$ le lieu lisse de la fibration $p$. Alors $h$ est lisse sur $Y_0$, et d'après la théorie de Hodge, $i\Theta_h(p_\star(K_{X/Y})) \geq 0$ sur $Y_0$. Donc le noyau $\operatorname{Ker} i\Theta_h(p_\star(K_{X/Y}))$ induit un feuilletage $\mathscr{F}$ sur $Y_1$, où $Y_1$ est un ouvert de Zariski de $Y_0$. A priori, le noyau d'une $(1,1)$-forme semipositive est lisse, mais pas forcément holomorphe. Mais on peut démontrer dans ce cas que $\mathscr{F}$ est holomorphe.

Si on peut montrer de plus que $\mathscr{F}$ est algébrique, comme $i\Theta_h(p_\star(K_{X/Y}))$ est strictement positive le long des directions normales de $\mathscr{F}$, on peut probablement démontrer $C_{m,n}$ par Ohsawa-Takegoshi. Donc la question principale est de montrer que les feuilles de $\mathscr{F}$ sont algébriques.

Pour étudier les feuilles de $\operatorname{Ker} i\Theta_h(p_\star(K_{X/Y}))$, on peut considérer l'application des périodes

$$\rho : Y_0 \to D/\Gamma.$$

Il est connu que les fibres de $\rho$ sont algébriques et contenues dans les feuilles de $\mathscr{F}$. Mais il semble difficile de démontrer que la fibre générique de $\rho$ coïncide avec la feuille générique de $\mathscr{F}$ sans supposer la conjecture de l'abondance pour $F$ (c'est vrai si $F$ admet un bon modèle minimal). C'est donc une question très intéressante de caractériser les feuilles de $\mathscr{F}$ algébriquement.

Une dernière remarque sur $C_{m,n}$ est que d'après [BC18], si $\rho$ est génériquement injective, alors $Y_0$ est de log type général. En utilisant Ohsawa-Takegoshi, il est possible de montrer une version de $C_{n,m}$ en remplaçant $\kappa(X)$ par $\kappa(K_X + p^\star(Y \setminus Y_0))$. Malheureusement, on ne contrôle pas bien le bord $Y \setminus Y_0$. C'est une obstruction principale dans cette approche.

### 1.5.3 La conjecture $C^+_{m,n}$

$C^+_{m,n}$ est démontré par Kawamata [Kaw85] sous l'hypothèse que la fibre générale $F$ admet un bon modèle minimal. Sans cette hypothèse d'abondance, la conjecture est totalement ouverte même pour le cas où la base est de dimension 1.

Il est tentant d'étudier $C^+_{m,n}$ en utilisant la variation des métriques de Kähler-Einstein, une approche qu'on développe dans un travail en commun avec Henri Guenancia et Mihai Păun [CGP17]. On a étudié la positivité de $p_\star(mK_{X/Y})$ en utilisant les métriques de Kähler-Einstein, qui nous donnent des liens un peu plus précis entre la positivité de $p_\star(mK_{X/Y})$ et la variation birationnelle de la fibration. Mais pour le moment les techniques dont on dispose nécessitent l'hypothèse d'abondance pour la fibre générique (ceci intervient dans la preuve du fait que la métrique de Kähler-Einstein est limite des métriques de Bergman itérées).

# Chapitre 2

# Variétés projectives à fibré anticanonique nef

Dans cette partie on présente des travaux réalisés en collaboration avec Frédéric Campana, Andreas Höring et Shin-ichi Matsumura. Ils font l'objet des publications [Cao16, CH19, CCM19].

## 2.1 Introduction

L'étude des variétés satisfaisant certaines propriétés de courbure est un problème central en géométrie différentielle, le principe directeur étant qu'une variété est d'autant plus spéciale que sa courbure est positive. Dans ce registre, on voudrait mentionner les travaux célèbres de Siu et Yau, qui montrent que les seules variétés dont la courbure bisectionnelle est positive sont les espaces projectifs. A la suite de ces travaux, Mok a obtenu une classification des variétés kähleriennes compactes à courbure bisectionnelle holomorphe semi-positive. L'étape suivante dans le développement du sujet à été l'étude des variétés kähleriennes compactes à fibré tangent nef (une notion naturelle en géométrie algébrique), poursuivie par Campana, Demailly, Peternell et Schneider, cf. [CP91, DPS94]. Ils aboutissent à l'énoncé suivant.

**Théorème 2.1.** *[DPS94] Soit $X$ une variété kählérienne compacte telle que $T_X$ est nef, c'est-à-dire que $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(1)$ nef. Alors après un revêtement étale fini, l'application d'Albanese est localement triviale et sa fibre est Fano. De plus le revêtement universel $\widetilde{X}$ admet une décomposition*

$$\widetilde{X} = \mathbb{C}^n \times Y,$$

*où $Y$ est une variété (de type) de Fano.*

Ce théorème montre que la classe des variétés dont le fibré tangent $T_X$ est nef se décompose essentiellement en deux parties : tores et variétés de Fano. Dans [CP91] les auteurs ont conjecturé que la partie "Fano" est homogène.

On s'intéresse ici à une classe de variétés encore plus générale, à savoir les variétés dont le fibré anticanonique $-K_X := \det T_X$ est nef[1]. Par exemple, les variétés de type Calabi-Yau, hyperkähler apartiennent à cette classe, sans que leur tangent soit nef. Un autre exemple est l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en 9 points génériques. On obtient une variété rationnellement connexe $X$ dont le fibré anticanonique est nef et la dimension numérique $\mathrm{nd}(-K_X)$ est égale à 1 cf. [DPS96].

Il y a une caractérisation en terme de géométrie différentielle de cette classe. En utilisant l'équation de Monge-Ampère, la condition $-K_X$ nef revient à dire que pour toute classe kählérienne $\{\omega\}$ fixée, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une métrique kählérienne lisse $\omega_\epsilon \in \{\omega\}$ telle que $\mathrm{Ric}(\omega_\epsilon) \geq -\epsilon\,\omega_\epsilon$.

Il est important de remarquer que la condition $-K_X$ nef n'implique pas que $-K_X$ soit semi-ample, comme l'exemple de Serre suivant le montre.

1. Notons que $T_X$ nef implique $-K_X$ nef

**Exemple 2.1.** *[DPS94] Soient $T$ une courbe elliptique et $V$ l'extension non-triviale de*

$$0 \to \mathscr{O}_T \to V \to \mathscr{O}_T \to 0.$$

*Alors $-K_{\mathbb{P}(V)}$ est nef, mais pas semi-positif, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de métrique lisse $h$ sur $-K_{\mathbb{P}(V)}$ telle que $i\Theta_h(-K_{\mathbb{P}(V)}) \geq 0$.*

Concernant la structure des variétés dont le fibré anticanonique est nef on a la conjecture suivante, proposée par Demailly-Peternell-Schneider :

**Conjecture 2.2** ([DPS93])**.** *Soit $X$ une variété kählérienne compacte avec $-K_X$ nef. Alors l'application d'Albanese $p$ est localement triviale, c'est-à-dire que pour tout petit ouvert $U \subset X$, $p^{-1}(U) \simeq U \times F$, où $F$ est la fibre générique de $p$. De plus, le revêtement universel $\widetilde{X}$ admet une décomposition*

$$\widetilde{X} = \mathbb{C}^n \times \prod_i Y_i \times Z,$$

*où les facteurs $Y_i$ sont des variétés de type Calabi-Yau ou hyperkähler irréductible, et $Z$ est une variété rationnellement connexe.*

Citons maintenant quelques résultats remarquables dans cette direction.

1. Dans [DPS96, CDP14] cette conjecture a été démontrée sous l'hypothèse que $-K_X$ est semipositif. Cela revient à dire qu'il existe une métrique lisse $h$ telle que $i\Theta_h(-K_X) \geq 0$. En utilisant l'équation de Monge-Ampère, la condition $-K_X$ semipositif revient à dire qu'il existe une métrique kählérienne lisse $\omega_X$ telle que $\mathrm{Ric}(\omega_X) \geq 0$. La preuve de [DPS96, CDP14] repose sur le théorème de décomposition de de Rham de $(X, \omega_X)$ et le principle d'holonomie généralisé.
2. Lorsque $X$ est projective avec $-K_X$ nef, [Zha96, Deb01, Zha05] démontrent que l'application d'Albanese est surjective. Sous les mêmes hypothèses, [LTZZ10] démontre que l'application d'Albanese est semistable. Un outil important dans leur preuve est la positivité des images directes (i.e. les résultats Viehweg qu'on a discutés au chapitre 1).
3. Dans un travail plus récent, [Pau17] démontre la surjectivité d'application d'Albanese pour les variétés kählériennes compactes, dont la preuve repose sur une version transcendante de la positivité des images directes cf. section 2.4.
4. [PS98, BP04] confirme la conjecture pour les variétés projectives de dimension $\leq 3$. Dans un travail en commun avec Höring [CH17] [2], on a confirmé la conjecture pour les variétés kählériennes compactes de dimension $\leq 3$.

Dans les travaux [Cao16, CH19] nous obtenons une confirmation de la conjecture 2.2 pour les variétés projectives :

**Théorème 2.3.** *[Cao16, CH19] La conjecture 2.2 est vraie si $X$ est projective.*

Dans un travail récent en collaboration avec F. Campana et S.-I. Matsumura, on a généralisé notre résultat [CH19] dans le cas des paires klt, et on renvoie à [CCM19] pour des détails.

Le but de ce chapitre est d'expliquer nos arguments pour la preuve de la conjecture 2.2. Dans la section 2.2, on rappelle l'idée de Zhang pour démontrer la surjectivité de l'application d'Albanese [Zha05]. Puis on discute certains résutats obtenus par cette méthode. Dans la section 2.3 on montre qu'une fibration $p : X \to Y$ est localement triviale dès que $-K_{X/Y}$ est nef : c'est une étape décisive vers la conjecture 2.2. Ceci implique que l'application d'Albanese est localement triviale, cf. 2.3. Pour finir, dans la section 2.4 on évoque quelques pistes qu'on envisage pour traiter la version kählérienne de ces résultats.

2. C'est un travail effectué pendant la thèse.

## 2.2 Surjectivité de l'application d'Albanese et la méthode de Zhang

On rappelle ici l'argument de Zhang [Zha05] pour montrer la surjectivité de l'application d'Albanese. Cet argument simple et élégant se trouve à l'origine de beaucoup de résultats sur ce sujet.

**Théorème 2.4.** *[Zha05] Soit $X$ une variété projective lisse avec $-K_X$ nef. Alors l'application d'Albanese $p : X \to \mathrm{Alb}(X)$ est surjective.*

La preuve repose sur la positivité des images directes. On définit $Y := p(X)$ l'image de $p$ et on suppose pour simplifier que $Y$ est lisse. On fixe un fibré ample $A_X$ sur $X$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$-mp^\star K_Y + A_X = mK_{X/Y} + (-mK_X + A_X).$$

Comme $-K_X$ nef, $-mK_X + A_X$ est ample. En prenant $L = -mK_X + A_X$ dans le théorème 1.8, on obtient que $-mp^\star K_Y + A_X$ est psef. Donc $-p^\star K_Y + \frac{1}{m}A_X$ est psef. Lorsque $m \to +\infty$, on déduit que $-K_Y$ est psef. Comme $Y$ est une sous-variété de $\mathrm{Alb}(X)$, ceci implique que $Y = \mathrm{Alb}(X)$. Donc $p$ est surjective.

La preuve de ce théorème dépend de l'existence du fibré ample $A_X$. Pour montrer la surjectivité de l'application d'Albanese dans le cas Kähler, [Pau17] a obtenu une version "transcendante" de la positivité de l'image direct en remplaçant $A_X$ par une classe de kähler. On renvoie à la section 2.4 pour une discussion plus détaillée.

Le résultat suivant, toujours dû à Zhang [Zha05], est crucial dans la démonstration du théorème de décomposition 2.3.

**Théorème 2.5.** *[Zha05] Soit $X$ une variété projective avec $-K_X$ nef. Soit $p : X \dashrightarrow Y$ la fibration rationnellement connexe maximale (MRC en abrégé) et $Y$ est projective lisse. Alors $Y$ est birationnellement équivalente à une variété de type Calabi-Yau, c'est-à-dire que*

$$\kappa(Y) = \mathrm{nd}(Y) = 0,$$

*où $\kappa$ est la dimension Kodaira et* nd *est la dimension numérique. De plus, soit $\Gamma \to X$ une désingularisation de $p$ :*

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & X \arrow[dl, dashed, "p"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

*et soit $s \in H^0(Y, mK_Y)$ une section non-nulle pour un $m \in \mathbb{N}$. Alors $\varphi^\star \mathrm{Div}(s)$ est $\pi$-contractile.*

*Idée de la preuve.* Comme $p$ est MRC, $Y$ n'est pas uniréglée. D'après [BDPP13], $K_Y$ est psef. D'autre part, en utilisant le même argument du théorème 2.4, $-\varphi^\star K_Y$ est psef modulo un diviseur contenu dans le lieu $p$- exceptionnel. En appliquant la décomposition de Zariski divisorielle à $K_Y$ [Bou04], on obtient que $\kappa(Y) = \mathrm{nd}(Y) = 0$ et $\varphi^\star \mathrm{Div}(s)$ est $\pi$-exceptionnel. □

Il est important de se demander si on peut généraliser ce résultat dans le contexte kählérien, voir la section 2.4 pour quelques réflexions dans ce sens.

Le point clé dans la preuve de ces deux résultats est la positivité de $mK_{X/Y} + L$, i.e. le théorème 1.8. En utilisant la positivité de $p_\star(mK_{X/Y} + L)$, on présente maintenant quelques résultats qui peuvent paraître surprenants à première vue.

**Lemme 2.6.** *[Cao16] Soit $p : X \to Y$ une fibration entre deux variétés projectives avec $-K_{X/Y}$ nef. Soit $L$ un fibré en droites psef sur $X$, et on suppose que $L$ est $p$-gros. Alors $p_\star(L)$ est presque positif au sens de la définition 1.5. En particulier,* $\det p_\star(L)$ *est psef.*

*Esquisse de la preuve.* Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $p_\star(L) = p_\star(mK_{X/Y} - mK_{X/Y} + L)$. L'idée est que, comme $-mK_{X/Y}$ est nef, si on prend $m \gg 1$, on peut diminuer la singularité de $\frac{1}{m}L$ et on obtient alors la positivité de $p_\star(mK_{X/Y} - mK_{X/Y} + L)$ d'après le théorème 1.8.

Plus précisément, il existe une métrique singulière $h_L$ sur $L$ telle que $i\Theta_{h_L}(L) \geq 0$ car $L$ est psef. En utilisant le fait que $-K_{X/Y}$ est nef et que $L$ est $p$-gros, pour tout $\epsilon > 0$ petit, on peut construire une métrique $h_\epsilon$ sur $-mK_{X/Y} + L$, telle que

$$i\Theta_{h_{\epsilon,1}}(-mK_{X/Y} + L) \geq -\epsilon\, p^\star \omega_Y,$$

et $h_\epsilon \sim h_L$, c'est-à-dire que les singularités de $h_\epsilon$ coïncident avec celles de $h_L$. En particulier $\mathscr{I}_{h_\epsilon,m}$ est trivial pour $m \gg 1$. En appliquant le théorème 1.8, il existe une métrique $\widetilde{h}_\epsilon$ sur $p_\star(mK_{X/Y} - mK_{X/Y} + L)$ telle que

$$(p_\star(mK_{X/Y} - mK_{X/Y} + L), \widetilde{h}_\epsilon) \succeq -\epsilon\, \omega_Y \otimes \mathrm{Id}\,.$$

Donc $p_\star(L) = p_\star(mK_{X/Y} - mK_{X/Y} + L)$ est presque positive. □

**Remarque 2.7.** *L'argument utilisé dans la preuve de ce lemme peut être utilisé afin d'obtenir une version un peu plus générale : si $L$ un fibré en droite $p$-gros tel qu'il existe une métrique $h_L$ qui vérifie l'inégalité*

$$i\Theta_{h_L}(L) \geq p^\star\theta,$$

*pour une $(1,1)$-forme fermé $\theta$, alors $\det p_\star(L) - r\theta$ est psef, où $r = \mathrm{rang} p_\star(L)$.*

Rappelons que d'après le théorème 1.13, $mK_{X/Y} + L$ est plus grand que $\epsilon\, p^\star \det p_\star(mK_{X/Y} + L)$ pour un certain $\epsilon > 0$. En combinant avec l'argument de Zhang, on peut déterminer la constante optimale $\epsilon$ dans le cas $-K_{X/Y}$ nef :

**Lemme 2.8.** *[Cao16] Soit $p : X \to Y$ une fibration entre deux variétés projectives telle que $-K_{X/Y}$ soit nef. Soit $L$ un fibré psef et $p$-gros sur $X$. Alors le $\mathbb{Q}$-fibré $L - \frac{1}{r}p^\star \det p_\star(L)$ est psef, où $r = \mathrm{rang} p_\star(L)$.*

*Esquisse de la preuve.* On explique ici brièvement l'idée de la preuve, et on renvoie à [Cao16] pour une preuve complète.

On utilise encore une fois la décomposition $L = mK_{X/Y} - mK_{X/Y} + L$. D'après le théorème 1.13, il existe un $\epsilon_m > 0$ telle que

$$L - \epsilon_m\, p^\star \det p_\star(L) = mK_{X/Y} - mK_{X/Y} + L - \epsilon_m\, p^\star \det p_\star(mK_{X/Y} - mK_{X/Y} + L)$$

est psef. Comme on a vu dans le théorème 1.13, la constante $\epsilon_m$ est liée à $m_1$, i.e. une constante pour que $\frac{1}{m_1}\mathrm{Div}(s_m)$ est klt, où $s_m$ est une section sur $X^r$ [3] liée au morphisme

$$\det p_\star(mK_{X/Y} - mK_{X/Y} + L) \to \otimes^r \det p_\star(mK_{X/Y} - mK_{X/Y} + L).$$

L'observation cruciale est que la section $s_m$ ne dépend pas de $m$ dans les hypothèses du lemme. En particulier, $m_1$ ne dépend pas de $m$. En utilisant cette observation et l'argument du théorème 1.13, on peut démontrer alors que

$$\lim_{m \to +\infty} \epsilon_m = \frac{1}{r}. \tag{2.1}$$

On renvoie à [Cao16] pour une preuve détaillée de (2.1). En prenant $m \to \infty$, (2.1) et le fait $L - \epsilon_m\, p^\star \det p_\star(L)$ psef impliquent le lemme. □

On va voir que dans la section suivante que l'hypothèse $-K_{X/Y}$ nef implique en fait que $p$ est localement triviale ; dans cette perspective, les deux lemmes précédents deviennent moins mystérieuses.

3. D'après [LTZZ10], $p$ est plat et les fibres sont réduites. Donc $X^r$ est lisse en codimension 1.

## 2.3 Structure des morphismes à fibré anticanonique relatif nef et un théorème de décomposition

On explique ici l'idée de la preuve du théorème suivant, qui implique que l'application d'Albanese est localement triviale.

**Théorème 2.9.** *[Cao16, CH19] Soit $p : X \to Y$ une fibration entre deux variétés projectives lisses avec $-K_{X/Y}$ nef. Alors $p$ est localement triviale. De plus, on a la décomposition*

$$\widetilde{X} \simeq \widetilde{Y} \times F, \tag{2.2}$$

*où $\widetilde{Y} \to Y$ le revêtement universel de $Y$, $\widetilde{X} := X \times_Y \widetilde{Y}$ et $F$ la fibre générique de $p$.*

*En particulier, si $-K_X$ est nef, alors son application d'Albanese est localement triviale.*

**Remarque 2.10.** *D'après la preuve, on peut montrer que $p$ induit un morphisme $\pi_1(Y) \to \mathrm{Aut}(F)$, et (2.2) vient de cette représentation.*

La preuve de ce résultat est inspiré par la preuve du théorème 2.1 [DPS94]. En fait, si $T_X$ est nef, [DPS94] démontrent d'abord que la fibre générique de l'application d'Albanese $p : X \to \mathrm{Alb}(X)$ est une variété de Fano. Toujours dans loc. cit. on démontre que $p_\star(-mK_{X/Y})$ est numériquement plat pour tout $m \in \mathbb{N}$ [4]. Le fait que $p_\star(-mK_{X/Y})$ soit plat combiné avec l'amplitude relative de $-K_{X/Y}$ montre que $p$ est localement triviale, puisqu'on a suffisamment de sections $p_\star(-mK_{X/Y})_y$ afin de définir la fibre $X_y$ lorsque $m \gg 1$.

Dans le cadre du théorème 2.9, nous montrons également que $\pi_\star(-mK_{X/Y})$ est numériquement plat. Notons cependant une différence par rapport au cas précédent : le fibré anticanonique $-K_F = (-K_{X/Y})|_F$ de la fibre générique $F$ est nef, mais pas forcément ample. Donc le système $\oplus_{m=0}^{\infty} p_\star(-mK_{X/Y})_y$ ne suffit pas à caractériser la fibre $X_y$. La nouvelle idée clé dans la démonstration est de fabriquer un fibré en droites $L$ tel que $L$ est relativement ample et $p_\star(mL)$ est numériquement plat pour tout $m \in \mathbb{N}$. Si on peut construire ce type de fibré, par le même argument au [DPS94, CH17][Cao16, prop 2.8], $p$ est localement triviale. On explique maintenant la construction de ce fibré, dont la preuve repose sur les deux lemmes dans la section précédente.

*Preuve du théorème 2.9.* On fixe un fibré ample $A$ sur $X$ et on pose

$$L := A - \frac{1}{r} p^\star \det p_\star(A),$$

qui est un $\mathbb{Q}$-fibré en droite. Donc $L$ est relativement ample, mais pas positif sur $X$ en général. Mais d'après le lemme 2.8 et 2.6, $L$ est psef et $p_\star(mL)$ est presque positive pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$.

On vérifie que $c_1(p_\star(mL)) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Comme $p_\star(mL)$ est presque positive, $\det p_\star(mL)$ est psef. On prend $\theta_m \geq 0$ un $(1,1)$-courant positif dans la classe de $c_1(p_\star(mL))$. Ensuite le lemme 2.8 montre que $mL - \frac{1}{r_m} \det p_\star(mL)$ est psef, où $r_m = \mathrm{rang} p_\star(mL)$. Il existe donc une métrique $h$ sur $L$ telle que

$$i\Theta_h(L) \geq \frac{1}{mr_m} p^\star \theta_m.$$

En appliquant le lemme 2.6 et la remarque 2.7, on sait que

$$\det p_\star(L) - \frac{r}{mr_m} p^\star \theta_m$$

est psef. Mais d'après la construction $c_1(p_\star(L)) = 0$. Donc $\theta_m = 0$ et $c_1(\det p_\star(mL)) = 0$. On en déduit que $p_\star(mL)$ est numériquement plat d'après le théorème 1.6. Comme $L$ est relativement ample, le fait que $p_\star(mL)$ soit plat implique le théorème 2.9 cf. [Cao16, Prop 2.8]. □

4. On dit qu'un fibré vectoriel $E$ est numériquement plat si $E$ est nef et $c_1(E) = 0$. D'après [DPS94, Sim92], un fibré numériquement plat est un système local.

Dans la reste de cette section, on explique la preuve de la théorème décomposition 2.3 et on renvoie à [CCM19] pour une généralisation au cas des paires klt.

*Esquisse la preuve du théorème 2.3.* On note d'abord que, pour démontrer le théorème 2.3, il suffit de traiter le cas $\pi_1(X) = 1$. En fait, si $X$ n'est pas simplement connexe, on considère l'application d'Albanese $p : X \to \mathrm{Alb}(X)$. Après un revêtement étale fini, [Pau97] a démontré que la fibre générique $F$ est simplement connexe. D'après le théorème 2.9, on a

$$\widetilde{X} = F \times \mathbb{C}^n,$$

et il suffit d'étudier la structure de $F$, qui est simplement connexe avec $-K_F$ nef. L'avantage de cette simplification est que, si $X$ est simplement connexe, alors les fibrés numériquement plats sur $X$ sont les fibrés triviaux, ce qui simplifie l'argument.

Puis, le théorème 2.5 de Zhang indique que l'application $\varphi : \Gamma \to Y$ n'est pas très loin du cadre de la section 2 : il existe une diviseur $\pi$-exceptionnel $E$, tell que $-K_{\Gamma/Y} + E$ soit nef. En combinant avec l'hypothèse que $\pi_1(X) = 1$, on peut obtenir une version birationnelle du théorème 2.9 : $\Gamma$ est birationnelle au produit direct $Y \times F$ où $F$ est la fibre générique de $\varphi$. En analysant le lieu exceptionnel de ce morphisme birationnel, on peut obtenir une décomposition du fibré tangent de $X$ en dehors d'une sous-variété de codimension au moins 2 :

$$(V_1 \oplus V_2) = T_{X_0} \tag{2.3}$$

où $V_1$ correspond à $T_{Y\times F/Y}$, $V_2$ correspond à $T_{Y_0\times F/F}$ et $\mathrm{codim}_X(X \setminus X_0) \geq 2$.

Notons que $V_1$ et $V_2$ sont des feuilletages algébriques ; de plus, la feuille générique de $V_1$ coïncide avec la fibre générique de $\varphi$. Comme $\mathrm{codim}_X(X \setminus X_0) \geq 2$, (2.3) admet un prolongement à $X$ et on a un isomorphisme

$$V_1 \oplus V_2 \simeq T_X.$$

En particulier $V_1$ et $V_2$ sont localement libres. En utilisant [Hor07, Cor.2.11], il existe une fibration lisse $X \to Y$ telle que $T_{X/Y} = V_1$. Comme $T_X = V_1 \oplus V_2$, le théorème classique de Ehresmann implique le revêtement universel de $X$ est un produit. Comme $\pi_1(X) = 1$, alors $X = F \times Y$ et le théorème est démontré. □

Ce résultat montre que l'étude des variétés à fibré anticanonique nef est réduite à celles qui sont rationnellement connexes. Il n'y a pas beaucoup de résultats sur ce sujet pour le moment, mais voit en revanche ci-dessous quelques questions fondamentales. On revoie à [BP04] pour des résultats dans le cas $\dim X = 3$.

**Question 2.11.** *Si la dimension est fixée, est-ce qu'il y a un nombre fini des variétés lisses rationnellement connexes à fibré anticanonique nef à déformation près ? C'est vrai pour les variétés lisses de (type de) Fano, dont la preuve repose sur l'amplitude du fibré anticanonique.*

*Une autre question est de demander si le fibré anticanonique est $\mathbb{Q}$-effectif.*

## 2.4 Quelques remarques

### 2.4.1 Le théorème de décomposition dans le cas kählérien

On discute ici deux approches pour l'étude de la conjecture 2.2 dans le cas kählérien.

Soit $X$ une variété kählérienne compacte avec $-K_X$ nef. [Pau17] a démontré la surjectivité de l'application d'Albanese via cette version "transcendante" du théorème 1.8 :

**Théorème 2.12.** *[Pau17] Soit $p : X \to Y$ une fibration entre deux variétés kählériennes et $\beta \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ une classe transcendante semipositive. Si la classe $(c_1(K_{X/Y}) + \{\beta\})|_{X_y}$ est kählérienne sur la fibre générique $X_y$, alors $c_1(K_{X/Y}) + \{\beta\}$ est psef sur $X$.*

En utilisant ce théorème, [Pau17] démontre la surjectivité de l'application d'Albanese dans le cas Kähler comme suit. Soit $p : X \to \mathrm{Alb}(X)$ l'application d'Albanese et soit $Y$ l'image de $p$. On fixe $\omega_X$ une classe Kähler. Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$-p^\star K_Y + \epsilon\,\omega_X = K_{X/Y} - K_X + \epsilon\,\omega_X.$$

Comme $-K_X + \epsilon\,\omega_X$ est Kähler, d'après le théorème 2.12, $-p^\star K_Y + \epsilon\,\omega_X$ est psef. En faisant $\epsilon \to 0$, $-K_Y$ est psef. Comme $Y$ est une sous-variété de $\mathrm{Alb}(X)$, ceci implique que $Y = \mathrm{Alb}(X)$. Donc $p$ est surjective.

Il serait donc très intéressant de généraliser le théorème 2.9 au cas kählérien en combinant [Pau17] avec l'argument dans la preuve du théorème 2.9. Notons que dans la preuve du théorème 2.9, on a construit un fibré psef $L$ qui est $p$-ample et $p_\star(mL)$ est numériquement plat pour tout $m$. En utilisant la connexion plate sur $p_\star(mL)$, on peut identifier les fibres de $p$. Donc $p$ est localement triviale. Dans le cas non projectif, une approche possible est de construire une classe psef $\alpha$ qui est relativement Kähler et est plate dans la direction horizontale dans un certain sens. Puis, en suivant l'argument de [Gue16, CGP17], il est probablement possible de démontrer le fait que $p$ est triviale en utilisant le feuilletage induit par $\mathrm{Ker}\,\alpha$. Une généralisation du théorème 2.12 au cas $\beta$ psef est probablement nécessaire dans cette approche, cf. [Gue16] pour des résultats dans cette direction.

Une autre approche serait d'étudier la fibration MRC de $X$. Soit $X \dashrightarrow Y$ une fibration MRC. Comme dans le cas projectif, on sait que $Y$ est non uniréglée par Graber-Harris-Starr cf. [CH15, Remark 6.10]. La difficulté principale est de démontrer que cette propriété de $Y$ implique la pseudo-effectivité de $K_Y$. Si $Y$ est projective, c'est une conséquence de [BDPP13]. Dans le cas kähler, ceci est connu seulement pour $\dim Y \leq 3$.

Si on peut montrer que $K_Y$ est psef, il est fort probable qu'un puisse démontrer la conjecture 2.2 par l'argument suivant. En utilisant le théorème 2.12, on peut montrer que $-K_Y$ est psef modulo un lieu exceptionnel. En combinant avec le fait que $K_Y$ est psef, on obtient que

$$\kappa(Y) = \mathrm{nd}(Y) = 0.$$

Maintenant la situation est très similaire au cas projectif : $-K_{X/Y}$ est nef modulo un lieu exceptionnel. D'ailleurs, la fibration MRC est localement projective. On a alors une bonne chance de montrer la trivialité de la fibration en utilisant l'argument dans la section 2.3.

### 2.4.2 La structure des feuilletages holomorphes à fibré anticanonique nef

Soit $X$ une variété projective et $\mathscr{F}$ un feuilletage holomorphe sur $X$. Une question naturelle est d'étudier la structure de $\mathscr{F}$ si $c_1(T_{\mathscr{F}})$ est nef. Ceci peut considérer comme une généralisation naturelle du théorème 2.9. En fait, pour une fibration $p : X \to Y$, le fibré tangent relatif $T_{X/Y}$ définit un feuilletage naturel $\mathscr{F}$ et

$$c_1(T_{\mathscr{F}}) = c_1(T_{X/Y}) + \sum_i (a_i - 1)[E_i],$$

où $E_i$ correspondent aux diviseurs non-réduits de la fibration et $a_i$ est le multiplicité. Si $-K_{X/Y}$ est nef, [LTZZ10] montre que $p$ est plat et les fibres de $p$ sont réduites. Donc $c_1(T_{\mathscr{F}}) = c_1(T_{X/Y})$ est nef.

On renvoie aux articles [Dru17, Dru19] pour des résultats sur la structure des feuilletages à fibré anticanonique nef. En particulier, si $c_1(T_{\mathscr{F}})$ est semipositive, [Dru19] démontre qu'il existe un morphisme lisse $\varphi : X \to Y$ et un feuilletage $\mathscr{E}$ sur $Y$ tels que $\mathscr{F} = \varphi^\star\mathscr{E}$ et $K_{\mathscr{E}} = 0$. Dans cette perspective, il sera très intéressant de savoir si son résultat reste vrai si $c_1(T_{\mathscr{F}})$ est nef.

# Chapitre 3

# Théorème d'Ohsawa-Takegoshi et applications

Cette partie contient des travaux réalisés en collaboration avec Jean-Pierre Demailly, Andreas Höring et Shin-Ichi Matsumura. Ils font l'objet des publications [Cao17, CDM17, CH15].

## 3.1 Introduction

On présente dans ce chapitre un autre outil analytique puissant, indispensable dans la solution de beaucoup de problèmes en géométrie complexe : le théorème d'extension d'Ohsawa-Takegoshi.

L'origine du sujet est le théorème suivant :

**Théorème 3.1** (Extension d'Ohsawa-Takegoshi)**.** *[OT87, Ohs88] Soit $\Omega$ un domaine pseudoconvexe borné dans $\mathbb{C}^n$ et $\varphi$ une fonction psh sur $\Omega$. Soit $H$ un sous-espace affine de $\mathbb{C}^n$ ; on note $\Omega_1 = \Omega \cap H$. Alors pour toute fonction holomorphes $f$ sur $\Omega_1$, il existe une fonction holomorphe $F$ sur $\Omega$ telle que $F|_{\Omega_1} = f$, et*

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-\varphi} \leq C(\Omega, H) \cdot \int_{\Omega_1} |f|^2 e^{-\varphi},$$

*où la constante $C(\Omega, H)$ ne dépend que du domaine $\Omega$ et du sous-espace $H$.*

Ce résultat a été généralisé par beaucoup d'auteurs dans des contextes différents [Man93, Dem00, Siu04, Ber06, Che11, Blo13, GZ15, BL16]. La version qui nous intéresse ici est la suivante.

**Théorème 3.2.** *[Man93] Soit $X$ une variété projective lisse, et $Y \subset X$ une hypersurface lisse. Soit $L$ un fibré en droites sur $X$ muni d'une métrique $h_L$. Soit $h_Y$ une métrique lisse sur le fibré $\mathscr{O}_X(Y)$. On suppose que*

$$\Theta_{h_L}(L) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \Theta_{h_L}(L) \geq \delta \Theta_{h_Y}(Y) \tag{3.1}$$

*pour une certaine constante $\delta > 0$. Considérons une section tautologique $s_Y \in H^0(X, \mathscr{O}_X(Y))$ [1] telle que $|s_Y|^2_{h_Y} \leq e^{-\frac{1}{\delta}}$. Etant donnée une section holomrphe $u \in H^0(Y, K_X + Y + L)$, il existe $U \in H^0(X, K_X + Y + L)$ telle que $U|_Y = u \wedge ds_Y$ et*

$$\int_X |U|^2_{h_Y, h_L} \leq C_\delta \int_Y |u|^2_{h_L}, \tag{3.2}$$

*où $C_\delta$ est une constante explicite, qui dépend de $\delta$ seulement.*

*En particulier, si la restriction $\mathscr{I}(h_L) \to \mathscr{I}(h_L|_Y)$ est bien définie* [2]*, alors la restriction*

$$H^0(X, \mathscr{O}_X(K_X + Y + L) \otimes \mathscr{I}(h_L)) \to H^0(Y, \mathscr{O}_Y(K_X + Y + L) \otimes \mathscr{I}(h_L)) \tag{3.3}$$

1. C'est-à-dire que $\mathrm{Div}(s_Y) = Y$.

2. D'après l'extension d'Ohsawa-Takegoshi théorème 3.1 on a $\mathscr{I}(h_L|_Y) \subset \mathscr{I}(h_L)|_Y$. L'hypothèse $\mathscr{I}(h_L) \to \mathscr{I}(h_L|_Y)$ implique alors que $\mathscr{I}(h_L)|_Y = \mathscr{I}(h_L|_Y)$.

*est surjective.*

Il est important de noter qu'il n'est pas necessaire de supposer que le courant de courbure est supérieur à une métrique kählérienne dans l'énoncé précédent. La condition $\Theta_{h_L}(L) \geq \delta\Theta_{h_Y}$ signifie que $L$ est plus positif que le fibré normal de $Y$. On a déjà vu dans les chapitres précédents qu'on s'intéresse à des variétés dont les représentants positifs de la classe de Chern du fibré canonique ou anticanonique sont singuliers. Les conditions de courbure (3.1) sont très flexibles, et nous permettent d'étudier ce type de variétés. Un autre intérêt du théorème 3.2 réside dans le fait que $C_\delta$ ne dépend pas de la métrique du fibré $h_L$. Ceci est crucial pour applications en géométrie complexe.

Citons quelques résultats notables dont la preuve utilise le théorème d'Ohsawa-Takegoshi de manière essentielle.

1. Siu [Siu04] a utilisé le théorème 3.2 afin de montrer la conjecture de l'invariance des plurigenres dans le cas projectif : soit $p : X \to \Delta$ une famille des variétés projectives lisses au-dessus d'un disque $\Delta$ dans $\mathbb{C}$, alors les plurigenres $h^0(X_t, mK_{X_t})$ des fibres sont indépendants par rapport à $t \in \Delta$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Ce résultat est généralisé et énormément simplifié dans [Pau07]. Un point crucial dans la preuve est le fait que $C_\delta$ dans (3.2) est uniforme.
2. La méthode de [Siu04, Pau07] a des conséquences importantes en géométrie birationnelle cf. par exemple [BCHM10, DHP13].
3. Le théorème d'extension d'Ohsawa-Takegoshi établit un lien entre les noyaux de Bergman des sous-variétés et ceux de la variété ambiante grâce à la propriété extrémale des noyaux de Bergman. En fait, si on regarde seulement le cas où la sous-variété est un point $x \in X$, le théorème 3.1 est déjà une étape essentielle dans la preuve du théorème de régularisation des courants cf. [Dem92].
4. Dans la preuve de la positivité de l'image directe (Théorème 1.8 [BP08, PT18]), le théorème 3.2 est cruciale pour montrer que le poids de la métrique canonique de type noyau de Bergman est borné supérieurement.
5. En utilisant le théorème 3.1, Zhou et Guan [GZ15a] démontrent que $\mathscr{I}(\varphi) = \mathscr{I}((1+\epsilon)\varphi)$ pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, où $\varphi$ est une fonction psh. C'est une propriété fondamentale des fonctions psh.

Le but de ce chapitre est de présenter quelques développements récents autour du théorème d'Ohsawa-Takegoshi ainsi que ses applications en géométrie complexe. Dans la section 3.2 nous allons discuter une généralisation du théorème d'Ohsawa-Takegoshi dans le contexte où la sous-variété $Y$ est singulière. La motivation principale de ce travail est la conjecture d'abondance. Dans la section 3.3, on va montrer l'equivalence entre le théorème d'Ohsawa-Takegoshi et les résultats de positivité pour les images directes. Ensuite on généralise ces résultats dans le contexte kählérien en autorisant des singularités dans la métrique de $L$. En particulier, nous obtenons un théorème de positivité pour les fibrés canoniques relatifs des espaces fibrés kählériens. Dans la section 3.4, nous allons présenter des résultats concernant le programme des modèles minimaux en version kählérienne.

## 3.2 Un théorème d'extension pour les sous-variété singulières

### 3.2.1 Motivation et théorème principal

La motivation principale de la généralisation du théorème 3.2 qu'on traite dans cette section est la conjecture d'abondance, dont voici l'énoncé.

**Conjecture 3.3** (Conjecture d'abondance)**.** *Soit* $(X, \Delta)$ *une paire klt. Si* $K_X + \Delta$ *est psef, alors* $(X, \Delta)$ *admet un bon modèle minimal, i.e., après une opération birationnelle,* $K_X + \Delta$ *est semiample.*

Afin de se rendre compte des implications qu'aurait cette conjecture, on considère la fibration d'Iitaka $\rho : X \dashrightarrow \operatorname{Proj}\left(\oplus_{m\geq 0} H^0(X, mK_X)\right)$. L'image de cette application est une variété de log-type général, et pour ces variétés beaucoup de questions de géométrie birationnelle ont déjà été résolues. Si

la conjecture d'abondance se confirme, cela implique que la fibre générique de $\rho$ est birationnellement équivalente à une variété de type Calabi-Yau (dans le sens $c_1 = 0$). Autrement dit, les variétés projectives à canonique psef sont "construites" à partir des deux modèles : Calabi-Yau et log type général. La conjecture d'abondance est démontrée pour $\dim X \leq 3$, mais complètement ouverte en dimension supérieure. Un angle d'attaque pour ce problème serait de résoudre les deux questions suivantes.

**Conjecture 3.4.** *Soit $(X, \Delta)$ une paire klt. Si $K_X + \Delta$ est psef, alors $\kappa(K_X + \Delta) \geq 0$.*

**Conjecture 3.5** (Conjecture d'extension DLT)**.** *Soient $X$ une variété projective, $S = \sum S_i$ un diviseur SNC et $B$ un diviseur klt sur $X$ tels que le support de $S + B$ est SNC. On suppose que $K_X + S + B$ est nef et $K_X + S + B$ est $\mathbb{Q}$-équivalent à un diviseur effectif $D$ qui vérifie*

$$S \subset \mathrm{Supp}(D) \subset \mathrm{Supp}(S + B). \tag{3.4}$$

*Alors*

$$H^0(X, m(K_X + S + B)) \to H^0(S, m(K_X + S + B))$$

*est surjective pour tout $m \geq 0$ suffisamment divisible.*

Dans l'article [DHP13] on montre entre autres que les conjectures 3.4 et 3.5 impliquent la conjecture d'abondance. L'enoncé 3.4 a été vérifié dans le cas où $\dim X \leq 3$, mais la preuve (qui repose sur le théorème de Riemann-Roch et l'annulation de Kawamata-Viehweg) est beaucoup trop spécifique pour donner des indications sur ce qu'il faut faire en dimension supérieure.

Concernant la conjecture 3.5, le résultat le plus général dont on dispose actuellement est le suivant.

**Théorème 3.6.** *[DHP13] La conjecture 3.5 est vraie si $S$ est non-singulière.*

Dans la preuve du théorème 3.6, une observation cruciale est que la condition (3.4) est similaire à la condition de courbure (3.1) dans l'extension d'Oshawa-Takegoshi. L'outil principal dans la preuve est une version du théorème d'Ohsawa-Takegoshi et la méthode dans la preuve de l'invariance des plurigenres, cf. [Siu04, Pau07]. Les estimées $L^2$ dans le théorème 3.2 expliquent la raison pourquoi on doit supposer que $S$ est non-singulière dans 3.6. On espère qu'une généralisation adéquate du théorème 3.2 dans le cas ou $Y$ est SNC va résoudre la conjecture 3.5.

Dans cette direction, Demailly obtient un théorème qui permet l'extension des sections holomorphes définies sur des sous-espaces de $X$ dont les singularités sont arbitraires, mais qui malheureusement ne précise pas la norme $L^2$ de l'extension cf. [Dem15].

Le résultat principal de [Dem15] a été généralisé dans [CDM17] sous une hypothèse de courbure optimale, comme suit.

**Théorème 3.7** ([CDM17])**.** *Soient $X$ une variété kählérienne holomorphiquement convexe, $\psi$ une fonction quasi-psh sur $X$ à singularités analytiques, et $F$ un fibré en droites munie d'une métrique $h$. S'il existe une fonction continue positive $\delta > 0$ sur $X$ telle que*

$$i\Theta_h(F) + (1 + \alpha\delta) dd^c\psi \geq 0 \qquad \textit{pour tout } \alpha \in [0, 1].$$

*Alors la restriction*

$$H^0(X, \mathscr{O}_X(K_X + F) \otimes \mathscr{I}(h_L)) \to H^0(X, \mathscr{O}_X(K_X + F) \otimes \mathscr{I}(h_L)/\mathscr{I}(h_L e^{-\psi}))$$

*est surjective.*

Afin de comprendre le lien avec le théorème 3.2, on note d'abord que le théorème 3.7 implique l'énoncé suivant.

**Corollaire 3.8.** *[CDM17] Soient $X$ une variété kählérienne compacte, $Y \subset X$ un diviseur SNC, et $L$ un fibré en droites sur $X$. On fixe une métrique lisse $h_Y$ sur $\mathscr{O}_X(Y)$. S'il existe une métrique $h_L$ sur $L$ telle que*

$$\Theta_{h_L}(L) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \Theta_{h_L} \geq \delta \Theta_{h_Y}(Y) \tag{3.5}$$

*pour une certaine constante $\delta > 0$, alors la restriction*

$$H^0(X, \mathscr{O}_X(K_X + Y + L) \otimes \mathscr{I}(h)) \to H^0(X, \mathscr{O}_X(K_X + Y + L) \otimes \mathscr{I}(h)/\mathscr{I}(he^{-\log|s_Y|^2})). \tag{3.6}$$

*est surjective.*

*Proof.* On définit $\psi = \log |s_Y|^2_{h_Y}$, $F = Y + L$ et $h_F = h_Y \cdot h_L$ dans le théorème 3.7. La relation (3.5) implique

$$\Theta_{h_F}(F) + i\partial\overline{\partial}\psi = i\Theta_{h_L} + [Y] \geq 0,$$

et

$$\Theta_{h_F}(F) + (1+\delta)i\partial\overline{\partial}\psi = i\Theta_{h_L} + (1+\delta)[s_Y] - \delta i\Theta_{h_Y}(Y) \geq 0.$$

Donc $i\Theta_h(F) + (1+\alpha\delta)dd^c\psi \geq 0$ pour tout $\alpha \in [0,1]$. On obtient alors le corollaire en utilisant le théorème 3.7. □

On remarque que si $Y$ est lisse et $h_L$ est non-singulière dans le corollaire 3.8, alors on a

$$H^0(X, \mathscr{O}_X(K_X + Y + L) \otimes \mathscr{O}_X/\mathscr{I}(e^{-\log|s_Y|^2})) = H^0(Y, \mathscr{O}_Y(K_X + Y + L)),$$

et on retrouve (3.3) dans le théorème 3.2. Mais compte tenu de la méthode de démonstration que nous employons, il semble impossible d'obtenir une estimée de la norme $L^2$ de l'extension analogue à (3.2).

On esquisse la preuve du corollaire 3.8 sous l'hypothèse que $h_L$ est lisse. La preuve du théorème 3.7 s'obtient en utilisant la même idée, combinée avec un procédé de régularisation standard.

*Proof.* Considérons une section $f \in H^0(Y, (K_X + Y + L)|_Y)$. En utilisant une partition de l'unité, on peut déterminer une extension $C^\infty$ de $f$ : $\widetilde{f} \in C^\infty(X, K_X + Y + L)$ telle que $(\overline{\partial}\widetilde{f})|_Y \equiv 0$.

Soit $\theta$ une fonction plateau telle que $\theta \equiv 1$ près de 0 et $\theta(x) \equiv 0$ si $|x| > 1$. On pose $\theta_\epsilon := \theta(\frac{|s_Y|}{\epsilon})$. Soit $t > 0$ une constante qui dépend de $\epsilon$ et qu'on va préciser par la suite. D'après l'estimée $L^2$ standard d'Ohsawa-Takegoshi [Dem10], on peut résoudre

$$\overline{\partial}(\theta_\epsilon \widetilde{f}) = \overline{\partial} u_{\epsilon,t} + v_{\epsilon,t} \tag{3.7}$$

telle que

$$\int_X \frac{|u_{\epsilon,t}|^2_{h_L}}{|s_Y|^2 \log^2|s_Y|} + \frac{1}{t}\int_X \frac{|v_{\epsilon,t}|^2_{h_L}}{|s_Y|^2} \leq \int_X \frac{\langle (R + t\,\mathrm{Id})^{-1}(\overline{\partial}(\theta_\epsilon \widetilde{f})), \overline{\partial}(\theta_\epsilon \widetilde{f})\rangle_{h_L}}{|s_Y|^2}, \tag{3.8}$$

où $R$ est un opérateur d'ordre zéro induit par la forme de courbure de $h_L$. Si $(s_Y = 0)$ est lisse, le membre de droite de (3.8) est borné par $C \cdot \int_Y |f|^2_h$ où $C$ est une constante uniforme. En prenant $\epsilon \to 0$ puis $t \to 0$, on a $v_{\epsilon,t} \to 0$. Donc $\theta_\epsilon \widetilde{f} - u_{\epsilon,t}$ converge vers une section $F \in H^0(X, K_X + Y + L)$ qui étend $f$, et (3.8) implique que $F$ vérifie l'estimée $L^2$ dans le théorème 3.2.

Mais dans le cas $Y = \sum Y_i$ SNC on observe que le membre de droite de (3.8) converge vers $\int_Y \frac{|f|^2_{h_L}}{|d(\prod_i s_i)|^2}$ où $s_i$ est la section canonique de $Y_i$. Cette intégrale diverge si $f$ ne s'annule pas sur le lieu singulier de $Y$ (les intersections de ses composantes).

Afin de traiter ce problème, on choisit $t = \epsilon^{1+a}$ pour un certain $a > 0$. On peut démontrer que

$$\lim_{\epsilon \to 0} t \cdot \int_X \frac{\langle (R + t\,\mathrm{Id})^{-1}(\overline{\partial}(\theta_\epsilon \widetilde{f})), \overline{\partial}(\theta_\epsilon \widetilde{f})\rangle_h}{|s_Y|^2} = 0.$$

En particulier (3.8) implique que $v_{\epsilon,t} \to 0$. En combinant avec (3.7) avec un argument cohomologique, on peut montrer que (3.6) est surjective. □

Ce procédé montre bien que le terme d'erreur $v_{\epsilon,\delta}$ tend vers zéro, mais en même temps on voit qu'on perd le contrôle de la norme $L^2$ de $u_{\epsilon,t}$. On ne peut donc pas obtenir l'estimée $L^2$ dans le théorème 3.7.

### 3.2.2 Un exemple d'Ohsawa

Comme nous avons indiqué dans la section précédente, l'inconvénient principal du théorème 3.7 est l'absence d'estimée pour la norme de l'extension. Or la norme de l'extension est un point crucial dans la preuve du théorème 3.6 et également dans l'invariance des plurigenres. Afin d'attaquer 3.5, une approche serait d'obtenir une version effective du théorème 3.7.

L'exemple d'Ohsawa ci-dessous montre qu'il n'est même pas clair à quoi devraient ressembler les estimées $L^2$.

**Exemple 3.1.** *Soit $\Omega$ un voisinage de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$. On pose $Y_1 := \{z_1 = 0\}$ et $Y_2 := \{z_2 = 0\}$. Soient $\varphi_L := \log |z_1 - z_2|^2$ une fonction psh sur $\Omega$ et $f$ une fonction holomorphe sur $Y = Y_1 \cup Y_2$ telle que $f|_{Y_1} = 0$ et $f|_{Y_2} = z_1$. Alors il n'existe pas de constante $C$ et de fonction holomorphe $F$ sur $\Omega$ telles que $F|_Y = f$ et*

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-\varphi_L} \leq C \int_{\Omega \cap Y} |f|^2 e^{-\varphi_L}. \tag{3.9}$$

**Remarque 3.9.** *On peut facilement construire une version globale de cet exemple en plongeant $\Omega$ dans $\mathbb{P}^2$ et tensorisant avec un fibré suffisamment ample.*

*Proof.* S'il existe une telle fonction $F$, d'après (3.9), on a

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-\varphi_L} < +\infty.$$

En particulier, $F = (z_1 - z_2) \cdot g$ pour une certaine fonction holomorphe $g$ sur $\Omega$. Comme $F|_Y = f$, on a $g(0, z_2) \equiv 0$ et $g(z_1, 0) \equiv 1$. On obtient une contradiction. □

## 3.3 Extension optimale et positivité des images directes

Dans la suite nous avons deux objectifs. D'abord on veut expliquer les connexions entre la version optimale du théorème d'Ohsawa-Takegoshi et la positivité des images directes. Ensuite on présente une version optimale kählérienne du théorème d'Ohsawa-Takegoshi et ses conséquences en suivant [Cao17].

Soit $p : X \to \Delta_R$ une famille projective au-dessus du disque $\Delta_R$ de rayon $R$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que $X_0 := p^{-1}(0)$ est non singulière. Soit $(L, h)$ un fibré en droites muni d'une métrique $h$ telle que $i\Theta_h(L) \geq 0$. D'après le théorème 3.2, pour tout $u \in H^0(X_0, K_{X_0} + L)$, il existe $U \in H^0(X, K_X + L)$ telle que $U|_{X_0} = u \wedge dp$ et

$$\int_X |U|_h^2 \leq C(R) \int_{X_0} |U|_h^2,$$

où la constante $C(R)$ dépend seulement du rayon $R$.

Dans les travaux [Blo13, GZ15a], les auteurs ont démontré qu'on peut prendre $C(R) = \pi R^2$ : c'est un résultat remarquable.

**Théorème 3.10.** *[Blo13, GZ15a][Extension d'Ohsawa-Takegoshi optimale] Dans le contexte ci-dessus, on peut trouver $U \in H^0(X, K_X + L)$ telle que $U|_{X_0} = u \wedge dp$ et*

$$\int_X |U|_h^2 \leq \pi R^2 \int_{X_0} |u|_h^2,$$

L'exemple suivant montre que cette constante est optimale [3]. On prend $X = \Delta_R$ et $L$ le fibré trivial. D'après l'inégalité de la moyenne, on a toujours

$$\int_{\Delta_R} |F|^2 \geq \pi R^2 \cdot |F|^2(0)$$

3. Si on regarde exclusivement la preuve du théorème précédent, il n'est pas claire du tout qu'on peux pas améliorer la "constant optimale"...

pour toutes les fonctions holomorphes $F$.

Les arguments de [Blo13, GZ15a] reposent sur une version améliorée de ceux dus à Ohsawa-Takegoshi, en choisissant certains paramètres qui interviennent dans la preuve de manière optimale. On renvoie à [Blo13, GZ15a] pour la preuve complète et des applications en analyse complexe (la conjecture de Suita).

Nous allons expliquer dans la suite les liens entre le théorème d'Ohsawa-Takegoshi optimal 3.10 et la positivité des images directes 1.8.

On prend $x \in X_0$ et $e$ une base locale de $K_{X/Y}+L$ près de $x$. Rappelons que le poids de la métrique du type de Bergman est défini par

$$\varphi(z) := \sup\left(\log|\frac{u(z)}{e}|^2\right), \tag{3.10}$$

où le "sup" est pour tout $u \in H^0(X_{p(z)}, K_{X/Y}+L)$ telle que $\int_{X_{p(z)}}|u|_h^2 = 1$. On doit montrer que $\varphi(z)$ est psh.

D'après la construction, il existe $u_0 \in H^0(X_0, K_{X_0}+L)$ telle que $\varphi(x) = \log|\frac{u_0(x)}{e}|^2$ et $\int_{X_0}|u_0|_h^2 = 1$. Soit $\Delta_r$ le disque de rayon $r$ centré en 0 et $C_r$ une courbe dans $X$ passant par $x$ telle que $p(C_r) = \Delta_r$. En appliquant le théorème 3.10 à la fibration $p^{-1}(\Delta_r) \to \Delta_r$, il existe une $U \in H^0(p^{-1}(\Delta_r), K_X+L)$ qui étend $u$ et $\frac{1}{\pi r^2}\int_{p^{-1}(\Delta_r)}|U|_h^2 \leq \int_{X_0}|u_0|_h^2 = 1$. D'après la définition de $\varphi(z)$, on a

$$\frac{1}{\pi r^2}\int_{C_r}\varphi(z)dp\wedge d\overline{p} \geq \frac{1}{\pi r^2}\int_{C_r}\log\frac{|\frac{U(z)}{e}|^2}{\int_{X_{p(z)}}|\frac{U}{dp}|_h^2}dp\wedge d\overline{p}$$

$$\geq \frac{1}{\pi r^2}\int_{C_r}\log|\frac{U(z)}{e}|^2 dp\wedge d\overline{p} - \log\left(\frac{1}{\pi r^2}\int_{p^{-1}(\Delta_r)}|U|_h^2\right).$$

Le deuxième terme du membre de droite est de plus inférieur à $\log\int_{X_0}|u_0|_h^2 = 0$, d'après le choix "optimal" de $U$. En combinant ceci avec l'inégalité de Jensen pour le premier terme, on obtient

$$\frac{1}{\pi r^2}\int_{C_r}\varphi(z)dp\wedge d\overline{p} \geq \varphi(x).$$

Note que le constant $r \in ]0, R[$ est arbitraire. Donc $\varphi$ vérifie l'inégalité de la moyenne au point $x$. Comme $x$ est arbitraire, on déduit que $\varphi$ est psh.

**Remarque 3.11.** *On remarque qu'un argument d'itération (cf. [BP08]) combiné avec la preuve précédente montrent la positivité de $mK_{X/Y}+L$ et $p_*(mK_{X/Y}+L)$ pour $m \in \mathbb{N}^\star$ [GZ15a].*

Réciproquement, dans un article remarquable de Berndtsson-Lempert [BL16], les auteurs montrent que la positivité des images directes implique l'extension optimale i.e. le théorème 3.10. On renvoie à [BL16], [Pau16] pour une présentation détaillée.

En conclusion, la version optimale de l'extension d'Ohsawa-Takegoshi est en un sens équivalente à la positivité des images directes. Dans [Cao17], on a généralisé le théorème d'extension optimale dans le contexte kählérien, en autorisant des métriques singulières. Comme corollaire on obtient des résultats de positivité du fibré $mK_{X/Y}+L$ dans un contexte kählérien (voir également à [ZZ18] pour une approche différente). Nos résultats principaux sont les suivants.

**Théorème 3.12.** *[Cao17, ZZ18] Soit $p : X \to \Delta_R$ une fibration propre d'une variété kählérienne $X$ vers le disque $\Delta_R \subset \mathbb{C}$ centré en 0 et de rayon $R$. Soit $(L, h)$ un fibré en droites, muni d'une métrique (éventuellement singulière) $h$ telle que $i\Theta_h(L) \geq 0$. On suppose que $X_0 := p^{-1}(0)$ est non-singulière. Alors pour toute section $u \in H^0(X_0, K_{X_0}\otimes L)$ il existe une section $U \in H^0(X, K_X\otimes L)$ sur $X$ telle que*

$$U|_{X_0} = u\wedge dp, \qquad \text{et} \qquad \int_X |F|_h^2 \leq \pi R^2\int_{X_0}|f|_h^2.$$

**Corollaire 3.13.** *[Cao17] Soit $p : X \to Y$ une fibration propre, où $X$ est une variété kählérienne. Soit $(L, h_L)$ un fibré en droites sur $X$ tel que $i\Theta_{h_L}(L) \geq 0$. Supposons qu'il existe un point générique $z \in Y$ et une section $u \in H^0(X_z, mK_{X_z} + L)$ tels que*

$$\int_{X_z} |u|_{h_L}^{\frac{2}{m}} < +\infty.$$

*Alors le fibré $mK_{X/Y} + L$ admet une métrique $h$ dont le courant de courbure est positif, autrement dit, $mK_{X/Y} + L$ est psef.*

La preuve du théorème 3.12 repose sur deux ingrédients importants : une version d'Ohsawa-Takegoshi pour les variétés kählériennes démontrée par Yi [Yi12] et le théorème d'extension optimale de Guan-Zhou [GZ15a]. On renvoie à [Cao17] pour une preuve détaillée. Il est important de noter que dans le cas projectif cf. théorème 1.8, $h$ coïncide avec la métrique du type de Bergman sur les fibres lisses où la restriction de $h_L$ est bien définie. Mais dans le cas Kähler non projectif, on ne sait pas montrer ceci. En fait, cette question est équivalente à l'invariance des plurigenres dans le contexte kählérien, qui est une conjecture ouverte pour le moment. On espère que le corollaire 3.13 pourrait être utile afin d'établir l'invariance des plurigenres pour les familles kählériennes.

Pour des applications récentes de nos résultats on renvoie a [DWZZ18, Wan19].

## 3.4 Une application au MMP kählérien

Le dernier sujet qu'on voudrait traiter dans ce mémoire fais l'objet du travail en commun avec A. Höring. Cela concerne l'existence des courbes rationnelles sur les variétés kählériennes, cf. [CH15].

Rappelons d'abord un peu l'histoire du programme des modèles minimaux (MMP en abrégé). Au cours des dernières années, cette théorie a enregistré des très beaux progrès, notamment grâce aux travaux de [BCHM10].

Il est donc naturel d'essayer d'élaborer des techniques et des résultats similaires dans le contexte des variétés kählériennes compactes : un tel programme a été lancé par Peternell il y a une vingtaine d'années. Suite aux travaux récents de Campana, Höring et Peternell [CHP16, HP15, HP16] le MMP pour les variétés kählériennes de dimension 3 à été complété récemment. En s'appuyant sur ces résultats, Lin [Lin17] a confirmé la conjecture de Kodaira en dimension trois. Autrement dit il a montré que toute variété kählérienne compacte de dimension 3 peut être approximée par des variétés projectives. Notons que la conjecture de Kodaira n'est pas vraie si $\dim X \geq 4$ [Voi04].

Dès la dimension $\geq 4$, la difficulté principale dans le MMP kählérien est l'existence des courbes rationnelles dans le cas où le fibré canonique $K_X$ est non nef. Les questions à résoudre sont les suivantes.

**Conjecture 3.14.** *Soit $X$ une variété kählérienne compacte telle que $K_X$ est psef mais pas nef. Alors il existe une courbe rationnelle $C \subset X$ telle que $K_X \cdot C < 0$.*

**Conjecture 3.15.** *Soit $X$ une variété kählérienne compacte. Alors $K_X$ n'est pas psef si et seulement si $X$ est uniréglée.*

Les deux conjectures sont connues si $X$ est projective. Mais la seule preuve connue actuellement utilise des arguments en caractéristique $p > 0$. Il sera donc intéressant à plus d'un titre de résoudre ces questions. Un résultat important dans cette direction a été obtenu par Brunella :

**Théorème 3.16.** *[Bru98] Soit $X$ une variété kählérienne compacte et soit $\mathscr{F} \to T_X$ un feuilletage de rang 1. Si $c_1(\mathscr{F}^\star)$ n'est pas psef, alors les feuilles de $\mathscr{F}$ sont des courbes rationnelles. En particulier $X$ est uniréglée.*

Comme conséquence, [Bru98] confirme la conjecture 3.15 pour $\dim X = 3$ comme suit. Si $X$ n'est pas projective, on a $H^0(X, \Omega_X^2) \neq 0$. Une section non-nulle induite un morphisme non trivial $K_X^{-1} \to T_X$ puisque $\dim X = 3$. On obtient alors un feuilletage dans $T_X$ dont le dual est non-psef. Alors le théorème

3.16 montre que $X$ est uniréglée. Dans [HP15] on obtient aussi une preuve de la conjecture 3.14 pour $\dim X \leq 3$.

En développant des arguments dans [HP15, HP16] nous avons obtenu l'énoncé suivant

**Théorème 3.17.** *[CH15] Soit $X$ une variété kählérienne compacte de dimension $n$. On suppose que la conjecture 3.15 est vraie pour les variétés de dimension $\leq n-1$. Si $K_X$ est psef mais pas nef, alors il existe une courbe rationnelle $C \subset X$ telle que $K_X \cdot C < 0$.*

Comme la conjecture 3.15 a été résolue pour $\dim X \leq 3$, on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 3.18.** *[CH15] Soit $X$ une variété kählérienne compacte de dimension $\leq 4$. Si le fibre canonique $K_X$ est psef mais pas nef, alors il existe une courbe rationnelle $f : \mathbb{P}^1 \to X$ telle que $K_X \cdot f(\mathbb{P}^1) < 0$.*

On pense que ce résultat sera utile pour établir le programme des modèles minimaux pour les variétés kählériennes de dimension 4.

Toujours dans le contexte kählérien on a le critère suivant.

**Théorème 3.19.** *[CT15] Soit $X$ une variété kählérienne compacte, et soit $\alpha$ une $(1,1)$-classe réelle dans $X$. On suppose que $\alpha$ est une classe nef, non-Kähler et que $\int_X \alpha^n > 0$. Alors*

$$E_{nK}(\alpha) = Null(\alpha).$$

*Ici $Null(\alpha)$ est l'union des sous-variétés $V$ telle que $\int_V \alpha^{\dim V} = 0$ et $\dim V > 0$, et le lieu non Kähler $E_{nK}(\alpha) := \cap_T E_+(T)$ pour tout courant Kähler $T$ dans la classe de $\alpha$, où $E_+(T) := \cup_{c>0} E_c(T)$.*

*En particulier, si $\alpha$ n'est pas dans la classe de Kähler, il existe une sous-variété $V$ de $X$ telle que $\int_V \alpha^{\dim V} = 0$.*

Ce théorème peut être considéré comme généralisation du critère de Demailly-Păun sur la caractérisation du cône Kähler.

*Esquisse la preuve du théorème 3.17.* On explique l'idée de la preuve pour trouver une courbe rationnelle et on renvoie à [CH15] pour la démonstration de l'inégalité $K_X \cdot C < 0$.

Comme $K_X$ est psef mais pas nef, il existe une classe de Kähler $\omega$ telle que $\alpha := K_X + \omega$ est nef, gros mais pas Kähler. D'après le théorème 3.19, on peut trouver une sous-variété $V \subset X$ telle que $\int_V \alpha^p = 0$, où $p = \dim V$. On pose $k$ la dimension numérique de $\alpha|_V$. Donc $k < p$ et on a

$$\int_V c_1(K_X) \wedge \alpha^k \wedge \omega^{p-k-1} = -\int_V \omega \wedge \alpha^k \wedge \omega^{p-k-1} < 0.$$

On suppose pour simplifier que $V$ est lisse ; en fait, on peux [CH15, Lemme 6.1]la choisir telle qu'elle soit un centre log-canonique du paire $(X, c\alpha)$ pour certain $c > 0$. Dans [CH15, Thm 1.5] nous obtenons une version transcendante de la formule de sous-adjunction de Kawamata. Ceci montre que

$$\int_V c_1(K_V) \wedge \alpha^k \wedge \omega^{p-k-1} \leq \int_V c_1(K_X) \wedge \alpha^k \wedge \omega^{p-k-1} < 0.$$

En particulier, le fibré canonique $K_V$ est non-psef. Alors la conjecture 3.15 montre que $V$ est uniréglée, d'où l'existence des courbes rationnelles dans $V \subset X$. □

# Bibliographie


[BS94] Bando, Shigetoshi ; Siu, Yum-Tong : *Stable sheaves and Einstein-Hermitian metrics,* Geometry and analysis on complex manifolds, 39–50, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994.

[BP04] Bauer, Thomas ; Peternell, Thomas : *Nef reduction and anticanonical bundles,* Asian J. Math. vol 8, (2004) no.2, 315–352

[Ber05] Berndtsson, Bo : *Integral formulas and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem* Sci. China Ser. A, 48 suppl., 61-73, 2005

[Ber06] Berndtsson, Bo : *Subharmonicity properties of the Bergman kernel and some other functions associated to pseudoconvex domains* Annales de l'Institut Fourier, Tome 56, no 6 (2006), p. 1633–1662.

[Ber09] Berndtsson, Bo : *Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations*, Annals of mathematics, 169 (2009), 531-560.

[BP08] Berndtsson, Bo ; Păun, Mihai : *Bergman kernels and the pseudoeffectivity of relative canonical bundles,* Duke Math vol 145 (2008) no.2, 341–378

[BL16] Berndtsson, Bo ; Lempert, László : *A proof of the Ohsawa–Takegoshi theorem with sharp estimates* J. Math. Soc. Japan Volume 68, Number 4 (2016), 1461-1472.

[BCHM10] Birkar, Caucher ; Cascini, Paolo ; Hacon, Christopher D. ; McKernan, James *Existence of minimal models for varieties of log general type.* J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), no. 2, 405–468.

[Blo13] Błocki, Zbigniew : *Suita conjecture and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem*, Invent. Math. 193 (1) : 149–158, 2013

[BM01] Bogomolov, Fedor ; McQuillan, Michael : *Rational curves on foliated varieties.* IHES preprint IHES/M/01/07. Février 2001.

[Bos01] Bost, Jean-Benoît : *Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields.* Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 93 (2001), 161–221

[Bou04] Boucksom, Sébastien : *Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds.* Ann. Sci. ENS (4) 37, no. 1, 45-76 (2004)

[BDPP13] Boucksom, Sébastien ; Demailly, Jean-Pierre ; Păun, Mihai ; Peternell, Thomas : *The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension*, J. Alg. Geometry 22 (2013), 201-248

[Bru98] Brunella, Macro : *Uniformisation of foliations by curves.* Holomorphic dynamical systems, 105–163, Lecture Notes in Math., 1998, Springer, Berlin, 2010.

[Bru10] Brunella, Macro : *On Kahler surfaces with semipositive Ricci curvature,* Riv. Mat. Univ. Parma, 1 (2010), 441–450.

[BC18] Brunebarbe, Yohan ; Cadorel, Benoit : *Hyperbolicity of varieties supporting a variation of Hodge structure* International Mathematics Research Notices, 2018

[Cam04] Campana, Frédéric : *Orbifolds, special varieties and classification theory,* Ann. Inst. Fourier 54 (2004), 499–665.

[CP91] Campana, Frédéric ; Peternell, Thomas : *Projective manifolds whose tangent bundles are numerically effective,* Math. Ann. vol 289 (1991) no 1. pp. 169–187

[CP11] Campana, Frédéric ; Peternell, Thomas ; Toma, Matei : *Geometric stability of the cotangent bundle and the universal cover of a projective manifold* Bull. Soc. Math. France 2011.

[CKP12] Campana, Frédéric ; Koziarz, Vincent ; Păun, Mihai : *Numerical character of the effectivity of adjoint line bundles* Annales de l'Institut Fourier, Tome 62, 2012, p. 107-119.

[CHP16] Campana, Frédéric ; Höring, Andreas ; Peternell, Thomas *Abundance for Kähler threefolds.* Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 49 (2016), no. 4, 971–1025

[CDP14] Campana, Frédéric ; Demailly, Jean-Pierre ; Peternell, Thomas : *Rationally connected manifolds and semipositivity of the Ricci curvature,* Recent Advances in Algebraic Geometry, London Mathematical Society Lecture Note Series No. 417, ed. by Ch. Hacon, M. Mustata and M. Popa (2014), 71–91,

[CP19] Campana, Frédéric ; Păun, Mihai : *Foliations with positive slopes and birational stability of orbifold cotangent bundles* Publications mathematiques de l'IHES, June 2019, Volume 129, Issue 1, pp 1–49

[CCP19] Campana, Frédéric ; Cao, Junyan ; Păun, Mihai ; *Subharmonicity of direct images and applications* https ://arxiv.org/abs/1906.11317

[CCM19] Campana, Frédéric ; Cao, Junyan ; Matsumura, Shin-Ichi. : *Projective klt pairs with nef anticanonical divisor*, https ://arxiv.org/abs/1910.06471

[Cao16] Cao, Junyan : *Albanese maps of projective manifolds with nef anticanonical bundles* https ://arxiv.org/abs/1612.05921, to appear in Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

[Cao17] Cao, Junyan : *Ohsawa-Takegoshi extension theorem for compact Kähler manifolds and applications* Complex and Symplectic Geometry, Springer INdAM Series 21, (2017), 19-38

[Cao18] Cao, Junyan : *Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over surfaces* Algebr. Geom. 5 (2018), no. 6, 728–741.

[CH15] Cao, Junyan, Höring, Andreas :*Rational curves on compact Kähler manifolds* to appear in Journal of Differential Geometry

[CH17] Cao, Junyan ; Höring, Andreas : *Manifolds with nef anticanonical bundle.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 724, 203-244 (2017)

[CP17] Cao, Junyan ; Păun, Mihai : *Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over Abelian varieties,* Invent. Math. 207 (2017), no. 1, pp 345–387

[CDM17] Cao, Junyan ; Demailly, Jean-Pierre ; Matsumura, Shin-ichi : *A general extension theorem for cohomology classes on non reduced analytic spaces* Sci. China Math. 60 (2017), no. 6, 949–962

[CGP17] Cao, Junyan ; Geunancia, Henri ; Păun, Mihai : *Variation of singular Kähler-Einstein metrics : positive Kodaira dimension* https ://arxiv.org/abs/1710.01825

[CGP19] Cao, Junyan ; Geunancia, Henri ; Păun, Mihai : *Variation of singular Kähler-Einstein metrics : Kodaira dimension zero* https ://arxiv.org/abs/1908.08087

[CH19] Cao, Junyan, Höring, Andreas : *A decomposition theorem for projective manifolds with nef anticanonical bundle*, J. Algebraic Geom. 28 (2019), 567-597

[Che11] Chen, Bo-Yong : *A simple proof of the Ohsawa-Takegoshi extension theorem*, ArXiv e-prints 1105.2430

[CT15] Collins, Tristan C. ; Tosatti, Valentino : *Kähler currents and null loci* Inventiones mathematicae December 2015, Volume 202, Issue 3, pp 1167–1198

[Deb01] Debarre, Olivier : *Higher-dimensional algebraic geometry.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001. xiv+233 pp. ISBN : 0-387-95227-6

[Dem1] Demailly, Jean-Pierre : *Complex analytic and differential geometry* https ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/documents.html

[Dem92] Demailly, Jean-Pierre : *Regularization of closed positive currents and Intersection Theory,* J. Alg. Geom. 1 (1992) 361-409

[Dem00] Demailly, Jean-Pierre : *Multiplier ideal sheaves and analytic methods in algebraic geometry*, School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry (Trieste, 2000), ICTP Lect. Notes 6, 1–148

[DPS93] Demailly, Jean-Pierre ; Peternell, Thomas ;Schneider, Michael : *Kähler manifolds with numerically effective Ricci class,* Compositio Math. 89 (1993) 217–240

[DPS94] Demailly, Jean-Pierre ; Peternell, Thomas ; Schneider, Michael : *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles,* J. Algebraic Geom. vol 3, (1994) number 2, pp. 295–345.

[DPS96] Demailly, Jean-Pierre ; Peternell, Thomas ; Schneider, Michael : *Compact Kähler manifolds with hermitian semipositive anticanonical bundle,* Compositio Math. 101 (1996) 217–224

[Dem10] Demailly,Jean-Pierre : *Analytic methods in algebraic geometry* Higher Education Press, Surveys of Modern Mathematics, Vol. 1, 2010.

[DHP13] Demailly, Jean-Pierre ; Hacon, Christopher D. ; Păun, Mihai : *Extension theorems, non-vanishing and the existence of good minimal models.* Acta Math. 210 (2013), no. 2, 203–259.

[Dem15] Demailly, Jean-Pierre : *Extension of holomorphic functions defined on non reduced analytic subvarieties,* Advanced Lectures in Mathematics Volume 35.1, the legacy of Bernhard Riemann after one hundred and fifty years, 2015.

[DWZZ18] Deng, Fusheng ; Wang, Zhiwei ; Zhang, Liyou ; Zhou, Xiangyu : *Linear invariants of complex manifolds and their plurisubharmonic variations* arXiv :1809.10371

[Dru17] Druel, Stéphane : *On foliations with nef anti-canonical bundle* Trans. Amer. Math. Soc. 369, 11 (2017), p. 7765-7787.

[Dru17b] Druel, Stéphane : *Some remarks on regular foliations with numerically trivial canonical class* EPIGA 1 (2017), Article Nr. 4.

[Dru18] Druel, Stéphane : *A decomposition theorem for singular spaces with trivial canonical class of dimension at most five.* Invent. Math. 211 (2018).

[Dru19] Druel, Stéphane : *On foliations with semi-positive anti-canonical bundle* Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, March 2019, Volume 50, Issue 1, pp 315–32

[FM00] Fujino, Osamu ; Mori, Shigefumi : *A Canonical Bundle Formula* J. Differential Geom. Volume 56, Number 1 (2000), 167-188.

[Fuj78] Fujita, Takao :*On Kähler fiber spaces over curves,* J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 779–794

[Fuj16] Fujino, Osamu : *Direct images of relative pluricanonical bundles* Algebraic Geometry 3 (1) 2016, 50-62

[GZ15a] Guan, Qi'an ; Zhou, Xiangyu : *A solution of $L^2$ extension problem with optimal estimate and applications* Annals. math, 181 (3), 2015, 1139-1208

[GZ15] Guan, Qi'an ; Zhou, Xiangyu : *A proof of Demailly's strong openness conjecture* Annals. math.182 (2), 2015, 605-616

[GKP16] Greb, Daniel ; Kebekus, Stefan ; Peternell, Thomas : *Etale fundamental groups of Kawamata log terminal spaces, flat sheaves, and quotients of abelian varieties.* Duke Math. J., 165(10) :1965–2004, 2016.

[GGK19] Greb, Daniel ; Guenancia, Henri ; Kebekus, Stefan : *Klt varieties with trivial canonical class. holonomy, differential forms, and fundamental groups.* Geometry and Topology 23 (2019) 2051–2124

[Gue16] Guenancia, Henri : *Families of conic Kähler-Einstein metrics* arXiv :1605.04348, to appear in Math. Annalen

[HPS18] Hacon, Christopher ; Popa, Mihnea ; Schnell, Christian : *Algebraic fiber spaces over abelian varieties : Around a recent theorem by Cao and Paun* Local and Global Methods in Algebraic Geometry, Contemporary Mathematics, 2018 ; Volume 712.

[Hor07] Höring, Andreas : *Uniruled manifolds with split tangent bundle.* Mathematische Zeitschrift 256 (2007) : 465–479

[Hor10] Höring, Andreas : *Positivity of direct image sheaves- A geometric point of view,* L'Enseignement Mathématique 56, No. 1 (2010) : 87–142.

[HP15] Höring, Andreas ; Peternell, Thomas : *Mori fibre spaces for Kähler threefolds.* J. Math. Sci. Univ. Tokyo 22 (2015), no. 1, 219–246.

[HP16] Höring, Andreas ; Peternell, Thomas : *Minimal models for Kähler threefolds.* Invent. Math. 203 (2016), no. 1, 217–264.

[HP19] Höring, Andreas ; Peternell, Thomas : *Algebraic integrability of foliations with numerically trivial canonical bundle.* Invent. Math. 216 (2019).

[Kaw81] Kawamata, Yujiro : *Characterization of Abelian varieties,* Compos. Math. 43 (2) (1981).

[Kaw82] Kawamata, Yujiro : *Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over curves* Invent. Math. 66, 57–71 (1982).

[Kaw85] Kawamata, Yujiro : *Minimal models and the Kodaira dimension of algebraic fiber spaces* J. Reine Angew. Math. 363 (1985), 1–46

[KST07] Kebekus, Stefan ; Sola-Conde, Luis ; Toma, Matei *Rationally connected foliations after Bogomolov and McQuillan.* Journal Algebraic Geometry16 (2007), 65-81.

[Kol87] Kollár, János : *Subadditivity of the Kodaira dimension : fibers of general type.* In : Algebraic Geometry, Sendai, 1985. Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, pp. 361–398. North-Holland, Amsterdam (1987).

[KM98] Kollár, János ; Mori, Shigefumi : *Birational geometry of algebraic varieties.* (English summary) With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti. Cambridge Tracts in Mathematics, 134. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. viii+254 pp.

[KP17] Kovács, Sándor ; Patakfalvi, Zsolt : *Projectivity of the moduli space of stable log-varieties and subadditvity of log-Kodaira dimension,* J. Amer. Math. Soc. 30 (2017), 959-1021

[Lin17] Lin, Hsueh-Yung :*Algebraic approximations of compact Kähler threefolds* arXiv :1710.01083

[LPT13] Loray, Frank ; Pereira, Jorge Vitorio ; Touzet, Frédéric : *Singular foliations with trivial canonical class.* Invent. Math. 213 (2018), no. 3.

[LTZZ10] Lu, Steven ; Tu, Yuping ; Zhang, Qi ; Zheng, Quan : *On semistability of Albanese maps,* Manuscripta Math., 131 (2010) no. 3-4, pp. 531–535.

[Man93] Manivel, Laurent : *Un théorème de prolongement $L^2$ de sections holomorphes d'un fibré hermitien* Math. Z., 212 (1), 1993, 107–122

[Mor87] Mori, Shigefumi : *Classification of Higher-dimensional varieties* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume 46 (1987)

[Nad89] Nadel, Alan Michael :*Multiplier ideal sheaves and Kahler-Einstein metrics of positive scalar curvature* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A 86 (1989) and Annals of Math. 132 (1990), 549–596

[OT87] Ohsawa, Takeo ; Takegoshi, Kensho : *On the extension of $L^2$ holomorphic functions*, Math. Z. 195 (2), 1987, 197–204

[Ohs88] Ohsawa, Takeo : *On the extension of $L^2$ holomorphic functions. II*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 24 (2), 1988, 265–275

[Pau97] Păun, Mihai : *Sur le groupe fondamental des variétés kählériennes compactes à classe de Ricci numériquement effective,* C.R. Acad Sci. Paris., t.324 (1997) Série I, p. 1249–1254

[Pau07] Păun, Mihai :*Siu's invariance of plurigenera : a one-tower proof.* J. Differential Geom. 76 (2007), no. 3, 485–493.

[Pau15] Păun, Mihai :*Singular Hermitian metrics and positivity of direct images of pluricanonical bundles* Algebraic Geometry : Salt Lake City 2015, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Volume : 97.1 (2018), 519–553

[Pau16] Păun, Mihai :*Positivité des images directes et applications* Séminaire BOURBAKI Novembre 2016

[Pau17] Păun, Mihai *Relative adjoint transcendental classes and Albanese map of compact Kähler manifolds with nef Ricci curvature.* Higher dimensional algebraic geometry—in honour of Professor Yujiro Kawamata's sixtieth birthday, 335–356, Adv. Stud. Pure Math., 74, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2017.

[PT18] Păun, Mihai ; Takayama, Shigeharu : *Positivity of twisted relative pluricanonical bundles and their direct images,* J. Algebraic Geom. 27 (2018), 211-272.

[PeTou13] Pereira, Jorge Vitorio ; Touzet, Frédéric : *Foliations with vanishing Chern classes.* Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 44 (2013).

[PS98] Peternell, Thomas ; Serrano, Fernando : *Threefolds with nef anticanonical bundles,* Collect. Math., 49(2-3) :465–517, 1998. Dedicated to the memory of Fernando Serrano

[Rau15] Raufi, Hossein : *Singular hermitian metrics on holomorphic vector bundles,* Arkiv för Matematik, October 2015, Volume 53, Issue 2, pp 359-382.

[Sim92] Simpson, Carlos : *Higgs bundles and local systems,* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., (75) :5—95, 1992.

[Sim93] Simpson, Carlos : *Subspaces of moduli spaces of rank one local systems.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 26 (1993), no. 3, 361–401

[Siu04] Siu, Yum-Tong : *Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type.* Complex Geometry : Collection of Papers Dedicated to Hans Grauert, 2002, 223–277

[Tak16] Takayama, Shigeharu : *Singularities of Narasimhan-Simha type metrics on direct images of relative pluricanonical bundles* Annales de l'institut Fourier, Tome 66, no 2 (2016), p. 753-783

[Tsu10] Tsuji, Hajime : *Global generation of the direct images of relative pluricanonical systems* arXiv :1012.0884, (2010).

[Ued83] Ueda, Tetsuo :*On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle,* J. Math. Kyoto Univ., 22 (1983), 583–607.

[Uen75] Ueno, Kenji : *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces.* Notes written in collaboration with P. Cherenack. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. xix+278 pp.

[Vie83] Viehweg, Eckart :*Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension for certain fibre spaces.* Proc. Algebraic Varieties and Analytic Varieties, Tokyo 1981. Adv. Studies in Math. 1, Kinokunya-North-Holland Publ. 1983, 329–353.

[Vie95] Viehweg, Eckart : *Quasi-projective moduli for polarized manifolds,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 30. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Voi04] Voisin, Claire :*On the homotopy types of compact Kähler and complex projective manifolds.* Invent. Math., 157 :329– 343, 2004.

[Wan19] Wang, Juanyong : *On the Iitaka Conjecture $C_{m,n}$ for Kähler Fibre Spaces* arXiv :1907.06705

[Yi12] Yi, Li : *An Ohsawa-Takegoshi theorem on compact Kähler manifolds* Science China Mathematics 57 (1), 2014, 9–30

[Zha96] Zhang, Qi : *On projective manifolds with nef anticanonical bundles,* J. Reine Angew. Math. 57–60 (1996)

[Zha05] Zhang, Qi : *On projective varieties with nef anticanonical divisors,* Math. Ann. 332, 697–703 (2005)

[ZZ18] Zhou, Xiangyu ; Zhu, Langfeng : *An optimal L2 extension theorem on weakly pseudoconvex kähler manifolds.* J. Differential Geom, Volume 110, Number 1 (2018), 135-186.

[Zuc82] Zucker, Steven : *Remarks on a theorem of Fujita,* J. Math. Soc. Japan 34 (1982), 47–54