



**HAL**  
open science

# Déploiement optimal d'un réseau de capteurs sous des contraintes de couverture et de connectivité

Sylvain Marie

► **To cite this version:**

Sylvain Marie. Déploiement optimal d'un réseau de capteurs sous des contraintes de couverture et de connectivité. Mathématique discrète [cs.DM]. Conservatoire national des arts et métiers - CNAM, 2019. Français. NNT : 2019CNAM1248 . tel-02376136

**HAL Id: tel-02376136**

**<https://theses.hal.science/tel-02376136v1>**

Submitted on 22 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale Informatique, Télécommunications et Électronique (Paris)

Centre d'Études et de Recherche en Informatique et Communications

## THÈSE DE DOCTORAT

*présentée par* : Sylvain MARIE

*soutenue le* : 18 octobre 2019

*pour obtenir le grade de* : Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers

*Spécialité* : Informatique

### Déploiement optimal d'un réseau de capteurs sous des contraintes de couverture et de connectivité

#### THÈSE dirigée par

Mme ELLOUMI Sourour  
M. HUDRY Olivier

*Professeur, ENSTA Paris, Université Paris Saclay*  
*Professeur, Télécom Paris*

#### et encadrée par

Mme PLATEAU Agnès  
M. ROVEDAKIS Stéphane

*Maître de Conférences, CNAM*  
*Maître de Conférences, CNAM*

#### RAPPORTEURS

Mme GABREL Virginie  
M. LOBSTEIN Antoine

*Maître de Conférences HDR, Université Paris-Dauphine*  
*Chargé de Recherche, HDR, CNRS*

#### PRÉSIDENT

M. DIDI BIHA Mohamed

*Professeur, Université de Caen UNICAEN*

#### EXAMINATEURS

Mme CHU Feng  
M. DIDI BIHA Mohamed

*Professeur, Université d'Évry*  
*Professeur, Université de Caen UNICAEN*



# Abstract

Wireless sensor networks are wireless networks of components with low memory and processing capacities, whose purpose is to collect environment data and to transmit them towards a terminal device. There are many ways to model these networks, but we chose to restrict our study to the cases where the area of concern comprises a set of discrete targets. Under certain conditions, such as hostile environments, the cost of sensors may be substantial. Therefore, it is of high interest to place a minimal number of sensors. For that reason, we chose to focus on the minimization of the number of sensors under target coverage and sensor connectivity constraints.

After a description of the characteristics of a wireless sensor network, we present the hypotheses we considered in our model. They can be stated as follows : the targets and sensors are fixed, the sensors are omnidirectional, and all the targets must be covered. Moreover, the sensors are homogeneous and their transmission range is at least as high as their sensing range. Finally, there is no obstacle in the area. We then propose an original representation of a wireless sensor network as a set of two graphs. This model allows us to describe the distinct sensor number minimization problems, with various hypotheses on coverage and connectivity, for instance we can consider multiple or simple coverage of the targets. We also detail the complexity results known to date for these problems.

To position our study among other works in the domain, we present a general state of the art on wireless sensor networks. We restricted this state of the art to problems whose hypotheses are close to the ones we chose for our model. In particular, we selected articles that focus on the coverage of discrete targets, in order to illustrate the most commonly used resolution techniques.

We then propose two original formulations in Mixed Integer Programming for the Minimum Coverage Connected Set problem, in order to improve the results of recent works. Based on the literature on the Traveling Salesman problem, these formulations are the simple flow formulation and the MTZ (Miller-Tucker-Zemlin) formulation. We compare them to the one proposed in a recent article. We tested our formulations on graphs with randomly generated targets and on square grid graphs, and we obtain far better results than those obtained in recent works. Our MTZ formulation comes out as the most interesting of all.

Another contribution of this thesis is the theoretic study of the Minimum Coverage Connected Set under the following hypotheses : the set of targets to be covered has the layout of a square grid graph, and the sensors have a transmission range and a sensing range both equal to the distance between two neighboring targets in the grid. First, we propose a heuristic that returns a feasible solution for any grid size. Second, we conjecture about the optimality of that solution when at least one side of the grid has a size which is not a multiple of 3. We conjecture that this result also gives an optimal solution in all the other cases.

We conclude our work by proposing future directions on the study of the Minimum Coverage Connected Set problem in square grid graphs for different values of transmission and sensing ranges.

**Keywords :** Wireless sensor networks, Minimum connected dominating set, Mathematical programming, Minimum connected coverage set.

# Résumé

Les réseaux de capteurs sont des réseaux sans fil de composants à faibles coût et capacités de calcul dont le but est de collecter les données environnantes et de les transmettre vers un dispositif terminal. Il existe un grand nombre de façons de modéliser ces réseaux, mais nous avons fait le choix de restreindre notre étude au cas où la zone à surveiller est représentée sous la forme discrétisée de nœuds cibles. Sous certaines conditions, comme des environnements hostiles, le coût des capteurs peut être non négligeable. De ce fait, on a intérêt à en déployer le moins possible. Pour cette raison, nous avons choisi de considérer la minimisation du nombre de capteurs sous des contraintes de couverture et de connectivité des capteurs entre eux.

Après la description des caractéristiques d'un réseau de capteurs et des hypothèses à prendre en compte, nous présentons celles que nous avons conservées, à savoir : les cibles à couvrir et les capteurs sont fixes, les capteurs sont omnidirectionnels et possèdent un voisinage de cibles discrétisées qui doivent toutes être couvertes. En outre, les capteurs sont homogènes, leur rayon de communication est au moins aussi grand que leur rayon de captation et le terrain ne présente pas d'obstacle. Nous proposons ensuite une représentation à notre connaissance originale d'un réseau de capteurs comme un ensemble de deux graphes. Cette modélisation nous permet de décrire l'ensemble des problèmes de minimisation du nombre de capteurs, suivant différentes hypothèses de couverture, qui peut-être multiple ou simple, et de connexité. Nous en détaillons également l'ensemble des résultats de complexité connus à ce jour.

Afin de positionner plus généralement notre étude, nous présentons un état de l'art général sur les réseaux de capteurs. Nous nous sommes restreints aux problèmes dont les hypothèses sont proches de celles que nous avons choisies, notamment aux travaux qui

s'intéressent à la couverture de cibles discrétisées, ce, afin d'illustrer les techniques de résolution les plus fréquemment employées.

Nous proposons par la suite deux formulations originales à l'aide de la programmation mathématique en variables mixtes pour le problème de couverture connexe minimale, dans le but d'améliorer les résultats de travaux récents. Inspirées de la littérature sur le problème du voyageur de commerce, ces formulations sont la formulation par flot simple et la formulation MTZ (Miller-Tucker-Zemlin). Nous les comparons à celles proposées par des articles récents. Testées sur des graphes dont les cibles sont soit engendrées aléatoirement, soit forment une grille à motif carré, nos deux formulations donnent des résultats significativement meilleurs que ceux obtenus dans les travaux auxquels nous nous comparons. La formulation MTZ apparaît comme la plus intéressante.

Un autre résultat de la thèse constitue l'étude théorique du problème de couverture connexe minimale sous les hypothèses suivantes : l'ensemble des cibles à couvrir constitue une grille à motif carré, on considère une couverture simple des cibles par des capteurs dont les rayons de captation et de communication sont égaux à la distance séparant deux cibles voisines de la grille. Dans un premier temps nous proposons une heuristique qui fournit une solution réalisable pour n'importe quelle taille de grille. Dans un second temps nous conjecturons l'optimalité de la solution retournée par l'heuristique dans tous les cas et nous appuyons cette conjecture en donnant des éléments de preuve plus particulièrement lorsqu'au moins un des côtés de la grille n'est pas multiple de 3.

Nous concluons notre étude en proposant des pistes de recherches futures sur l'étude des problèmes de couverture connexe dans les grilles à motif carré pour des valeurs de rayons de captation et de communication différents.

**Mots clés :** Réseaux de capteurs sans fil, Dominant connexe minimum, Couverture connexe minimum, Programmation mathématique.

# Acknowledgements

Je tiens tout particulièrement à remercier mes directeur·ices et encadrant·es pour m'avoir soutenu et donné l'opportunité d'aller jusqu'au bout de cette thèse.

Merci Olivier pour tes conseils et remarques toujours avisées, merci Sourour pour tes nombreuses contributions et tes contre-exemples qui m'ont donné du fil à retordre dans l'élaboration des preuves théoriques, merci Agnès et Stéphane pour votre bienveillance et votre soutien sans faille, j'en avais vraiment besoin.

Je remercie Virginie Gabrel et Antoine Lobstein d'avoir accepté de rapporter ma thèse, et je remercie également Feng Chu et Mohamed Didi Biha d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Finalement, je remercie Tof du fond du cœur pour sa patience, son aide, ses conseils et son soutien, sans lui ces travaux n'auraient jamais vu le jour. 一つの目で明日を見て、一つの目で昨日を見つめてる...

Salutations aux ami·es et camarades de lutte, puissions-nous un jour connaître le bonheur de vivre dans une société meilleure.



## ACKNOWLEDGEMENTS

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>17</b>
<b>1 Fonctionnement des réseaux de capteurs et définitions</b>	<b>23</b>
1.1 Généralités sur les réseaux de capteurs . . . . .	23
1.1.1 Principe d'un réseau de capteurs . . . . .	23
1.1.2 Différents types de couverture du terrain . . . . .	26
1.1.3 Gestion d'un réseau de capteurs et tolérance aux pannes . . . . .	29
1.2 Problèmes étudiés dans cette thèse . . . . .	33
1.2.1 Notions et formalisme de base . . . . .	33
1.2.2 Placement des capteurs sur une grille . . . . .	34
1.2.3 Le problème de la couverture connexe minimum et ses variantes . . . . .	36
1.3 Conclusion . . . . .	41
<b>2 État de l'Art et taxinomie des réseaux de capteurs en programmation mathématique</b>	<b>43</b>
2.1 Généralités . . . . .	43
2.1.1 Types de problèmes . . . . .	43
2.1.2 Classification des objectifs . . . . .	44
2.1.3 Les décisions relatives au modèle . . . . .	45
2.1.4 Types de contraintes . . . . .	46

TABLE DES MATIÈRES

---

2.1.5	Techniques de résolution . . . . .	47
2.2	Problèmes liés à la consommation énergétique . . . . .	47
2.2.1	Minimisation de la consommation énergétique totale . . . . .	47
2.2.2	Maximisation de la durée de vie du réseau . . . . .	55
2.3	Dominant connexe minimum (MCDS) et couverture connexe minimum (MCCS) . . . . .	67
2.3.1	Résultats de complexité pour les problèmes de minimisation de capteurs	67
2.3.2	Modélisation des problèmes de minimisation de capteurs . . . . .	69
2.4	Conclusion . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Formulations mathématiques pour le problème de couverture connexe minimum</b>	<b>77</b>
3.1	Proposition d'une définition d'un réseau de capteurs en théorie des graphes	78
3.2	Modèle de Rebai <i>et al.</i> (MIP1) . . . . .	79
3.3	Modèles de flot . . . . .	81
3.3.1	Modèle original de flot simple (MIP2) . . . . .	81
3.3.2	Parallèle avec un modèle de flot de la littérature . . . . .	85
3.4	Formulations fondées sur le modèle de Miller-Tucker-Zemlin . . . . .	87
3.4.1	Modèle original MTZ (MIP3) . . . . .	87
3.4.2	Parallèle avec un modèle MTZ de la littérature . . . . .	90
3.5	Résultats expérimentaux . . . . .	92
3.5.1	Résultats pour le problème <i>MCCS</i> . . . . .	92
3.5.2	Résultats pour le problème <i>MCKCS</i> avec $k \in \{2, 3\}$ . . . . .	99
3.6	Synthèse des résultats . . . . .	102
<b>4</b>	<b>Résultats théoriques sur les problèmes <i>MCDS</i> et <i>MCCS</i> dans les grilles</b>	<b>105</b>
4.1	Notations et définitions . . . . .	106

## TABLE DES MATIÈRES

---

4.2	Une nouvelle heuristique (HCDS) pour la construction d'un dominant connexe	112
4.2.1	Propriétés d'une solution pour le problème MCDS	112
4.2.2	Présentation de l'heuristique	117
4.2.3	Comparaison avec la littérature	119
4.3	Résultats théoriques sur la structure d'un <i>CDS</i> optimal	120
4.3.1	Un <i>CDS</i> peut toujours être construit sur $L_{1,2}$ en n'utilisant que des bâtons ou des segments de $L_2$	123
4.3.2	Conjecture : tout <i>CDS</i> peut être transformé de sorte à ce qu'il ne contienne pas deux sommets consécutifs sur $L_3$	131
4.3.3	Conjecture : tout <i>CDS</i> tel que $m \neq 0 \pmod{3}$ peut être transformé de sorte à n'avoir qu'un seul sommet sur $L_3$	146
4.3.4	Calcul de bornes inférieures dans l'optique d'une preuve de polynomialité.	160
4.4	Liens entre couverture et connexité dans la couverture connexe minimum	163
4.5	Conclusion	165
	<b>Conclusion</b>	<b>167</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>171</b>
	<b>Index</b>	<b>179</b>

## TABLE DES MATIÈRES

---

# Liste des tableaux

1.1	Nombre de sommets du voisinage en fonction du rayon $R$ . . . . .	36
2.1	Comparatif des principaux articles étudiés . . . . .	75
3.1	Nombre de variables et de contraintes pour chaque formulation . . . . .	93
3.2	Relaxation continue et écart pour les trois formulations sur des grilles . . .	94
3.3	Résultats du <i>branch and bound</i> pour les trois formulations sur des grilles . .	95
3.4	Synthèse des résultats numériques pour MIP1, MIP2 et MIP3 . . . . .	96
3.5	Comparaison de $ A^{com} $ entre grilles de cibles et cibles engendrées aléatoire- ment pour $R_{capt} = R_{com} = 1$ . . . . .	98
3.6	Synthèse des résultats numériques pour les cibles engendrées aléatoirement	98
3.7	Valeurs maximales de $k$ en fonction de $R_{capt}$ . . . . .	100
3.8	Résultats numériques pour la $k$ -couverture connexe minimum obtenus avec MIP2 (modèle de flot) dans les grilles de cibles . . . . .	101
3.9	Résultats numériques pour la $k$ -couverture connexe minimum obtenus avec MIP3 (modèle MTZ) dans les grilles de cibles . . . . .	101
3.10	Résultats numériques pour la 2-couverture connexe minimum obtenus avec les modèles MIP2 et MIP3 sur des cibles engendrées aléatoirement . . . . .	102
3.11	Résultats numériques pour la 3-couverture connexe minimum pour des graphes à 150 nœuds . . . . .	103

## LISTE DES TABLEAUX

---

4.1	Comparaison des performances de notre heuristique avec les résultats de [Li and Toulouse 2010] . . . . .	120
4.2	Taille du dominant connexe construit par notre heuristique suivant les valeurs de $n$ et $m$ . . . . .	121

# Table des figures

1	Schéma d'un capteur . . . . .	19
2	Terrain à couvrir . . . . .	20
3	Solution réalisable associée . . . . .	20
1.1	Photo d'un capteur de type MICA2 . . . . .	24
1.2	Caractéristiques de différents capteurs servant à l'agriculture issues de [Ojha, Misra, and Raghuwanshi 2015] . . . . .	25
1.3	Schéma d'un capteur . . . . .	26
1.4	Grille carrée à 4 lignes et 4 colonnes . . . . .	35
1.5	Évolution du voisinage de captation lorsque le rayon $R$ croît de 1 à 6 . . . . .	36
2.1	Déplacement et communication des capteurs pour l'optimisation de la consommation énergétique associée au planning de communication, avec autorisation de multi-saut . . . . .	50
2.2	Alternance de deux couvertures disjointes de capteurs actifs avec deux puits, avec $R_{capt} = 2$ et $R_{com} = 3$ . . . . .	58
2.3	Couverture des cibles par les capteurs avec angle de captation fixe et rotatif	65
2.4	Graphe $G_d^{com}$ pour une grille $4 \times 4$ avec $R_{com} = 1$ . . . . .	71
2.5	Chemins de connexion directe et indirecte avec $R_{com} = 1$ . . . . .	72
3.1	Couverture de cibles lorsque $R_{capt} = 2$ et communication entre capteurs lorsque $R_{com} = 3$ dans le cas où le plan est discrétisé sous forme de grille. . . . .	79



TABLE DES FIGURES

---

3.2	Solution du MCCS par la modélisation par flot pour $R_{capt} = R_{com} = 1$ . . .	82
3.3	Solution du MCCS par la modélisation MTZ pour $R_{capt} = R_{com} = 1$ . . . . .	88
3.4	$n=50$ cibles engendrées dans un carré de côté $s = 4$ . . . . .	98
3.5	Voisinage de couverture d'une cible dans le coin de la grille pour $R_{capt} = 2$ .	100
4.1	Illustration de bâtons et de segments appartenant à un dominant connexe .	108
4.2	Solution optimale du <i>MCDS</i> pour $G(1, m)$ , $G(2, m)$ et $G(3, m)$ . . . . .	111
4.3	Dominant connexe $D$ d'une grille $G(3q, m)$ ( $q = 3, m = 13$ ) . . . . .	113
4.4	Dominant connexe $D$ d'une grille $G(m, 3q)$ ( $m = 10, q = 4$ ) . . . . .	114
4.5	Dominant connexe $D$ d'une grille $G(3q + 2, 3k + 2)$ ( $q = 3, k = 4$ ) . . . . .	114
4.6	Dominant connexe $D$ d'une grille $G(3q + 1, 3k + 1)$ ( $q = 3, k = 4$ ) . . . . .	115
4.7	Transformations de sous-ensemble connexe $A_{i,j}$ en un segment de $L_2$ , asso- ciées à la Proposition-5 . . . . .	125
4.8	Transformations d'un sous-ensemble $A_{i,j}$ en une alternance de segment de $L_2$ et de bâtons, $A'$ , associées à la Proposition-6 . . . . .	127
4.9	Transformation valide d'un carré de sommets consécutifs . . . . .	132
4.10	Transformation valide associée à la Proposition-11 . . . . .	133
4.11	Exemple de transformation valide d'un <i>CDSR</i> contenant un segment sur $L_3$	136
4.12	Cas avec extrémités bâton / bâton . . . . .	138
4.13	Cas avec alternance de bâtons et de segments unitaires sur $L_{1,2}$ . . . . .	140
4.14	Cas avec connexion par $L_2$ . . . . .	143
4.15	Une solution présentant une couverture non connexe dans une grille $7 \times 7$ avec $R_{capt} = 1$ and $R_{com} = 2$ . . . . .	164

# Introduction

Les réseaux de capteurs sont des réseaux sans fil constitués de dispositifs autonomes à faible coût. Ces réseaux sont déployés dans différentes applications, telles que le relevé de secousses sismiques [Werner-Allen, Lorincz, Ruiz, Marcillo, Johnson, Lees, and Welsh 2006a] ou de mouvements marins [Vasilescu, Kotay, Rus, Dunbabin, and Corke 2005], la détection d'incendies [Bhattacharjee, Roy, Ghosh, Misra, and Obaidat 2012], les smart grids [Fadel, Gungor, Nassef, Akkari, Malik, Almasri, and Akyildiz 2015], ou encore les transports intelligents [Franceschinis, Gioanola, Messere, Tomasi, Spirito, and Civera 2009].

Ainsi, en 2005, un réseau de 16 capteurs a été déployé sur le volcan équatorien Reventador, et a permis de relever près de 230 secousses sismiques sur une période de 19 jours [Werner-Allen, Lorincz, Johnson, Lees, and Welsh 2006b]. Plus récemment, en 2010, un réseau de 9 capteurs sous-marins alimentés par des panneaux solaires a été déployé dans la baie Moreton, en Australie, pour étudier l'évolution de la luminosité et de la température de l'eau afin d'en déduire des informations sur l'état de santé de la barrière de corail [Alippi, Camplani, Galperti, and Roveri 2011]. Un ensemble de projets ayant fait l'objet d'un déploiement sur le terrain de réseaux de capteurs pour des applications diverses peut être consulté dans [Rawat, Singh, Chaouchi, and Bonnin 2014].

En raison de cette multiplicité d'applications, les hypothèses prises en considération sur les réseaux de capteurs peuvent être très vastes. Néanmoins, tous ces réseaux connaissent de fortes contraintes de ressources, qu'il s'agisse de la puissance de calcul, de la mémoire, de la consommation énergétique, de la communication entre capteurs et du coût des capteurs eux-mêmes. En particulier, dans l'objectif de faciliter le déploiement de tels réseaux, les capteurs communiquent sans support filaire et sont alimentés par une batterie. Par conséquent, la contrainte énergétique est centrale pour assurer le déploiement de réseaux de capteurs

fonctionnels.

La finalité d'un réseau de capteurs est de réaliser des relevés de l'environnement à l'aide de capteurs physiques, et de faire remonter les informations qu'il a récoltées à intervalles réguliers. Pour ce faire, l'information est généralement routée de capteur à capteur jusqu'à un nœud particulier appelé le puits, qui se chargera de transmettre les informations vers un serveur capable de traiter les données collectées. Ainsi lorsque l'on déploie un réseau de capteurs, il convient d'une part de s'assurer que l'ensemble de la zone à surveiller est bien couverte par les capteurs et, d'autre part, de s'assurer que chacun des capteurs déployés est bien à même de transmettre l'information qu'il récolte jusqu'au puits.

Il existe une grande variété de standards définissant les communications entre capteurs, qui couvrent l'étendue des besoins en fonction des différentes applications des réseaux de capteurs [Rawat, Singh, Chaouchi, and Bonnin 2014]. Ainsi, le standard IEEE 802.15.4 se focalise sur le contexte des WPAN (Wireless Personal Area Networks) où les échanges de données ont lieu à faible débit, et définit les couches basses réseau sur lesquelles s'appuient des technologies telles que Zigbee et 6LoWPAN, utilisées notamment dans l'Internet des Objets.

Les capteurs possèdent plusieurs types de caractéristiques, variant en fonction du modèle et des applications considérées. Par exemple, les capteurs peuvent avoir des rayons variables pour capter les données du terrain ou pour communiquer avec leur environnement, certains peuvent être mobiles, couvrir seulement un certain angle du terrain, avoir la possibilité de se mettre en veille, etc. Ces caractéristiques influent nécessairement sur l'objectif que l'on se pose, soit en termes de consommation énergétique, soit en termes de minimisation de coût ou du nombre de capteurs à déployer. Par ailleurs, comme mentionné précédemment, les capteurs sont des dispositifs autonomes communiquant sans fil, à faible capacité de traitement, de communication et de stockage. Cela peut impliquer diverses contraintes lors du routage de l'information, dont nous verrons en quoi elles peuvent affecter les problèmes que l'on se pose en termes d'optimisation.

Dans le cadre de notre étude, nous nous sommes concentrés sur des capteurs qui possèdent les caractéristiques suivantes : chaque capteur est immobile et est capable de capter à l'intérieur d'une certaine zone que l'on considérera comme parfaitement circulaire

suivant un rayon donné fixe. On supposera également que la surface qu'un capteur peut couvrir est omnidirectionnelle; cette couverture du terrain pour un capteur forme donc un disque dont le capteur est le centre. Le choix de ces hypothèses a été notamment guidé par le fait que les problèmes qui reposent dessus n'ont pas encore été totalement traités d'un point de vue théorique.

Pour assurer la couverture du terrain, il faut ainsi prendre en compte le rayon de captation pour le relevé des données. En outre, pour assurer la communication entre capteurs, on doit cette fois-ci considérer le rayon de communication de chaque capteur, comme illustré sur la *Figure 1*. Ainsi, la captation dans le réseau est assurée si et seulement si chaque cible ou zone à surveiller se trouve dans le rayon de captation d'au moins un capteur. De même, la communication dans le réseau est assurée si chaque capteur communique avec le puits directement ou par un certain nombre de capteurs intermédiaires. Dans notre étude, nous supposerons toujours que le rayon de captation (noté  $R_{capt}$  pour la suite) est inférieur ou égal au rayon de communication (noté  $R_{com}$  par la suite).

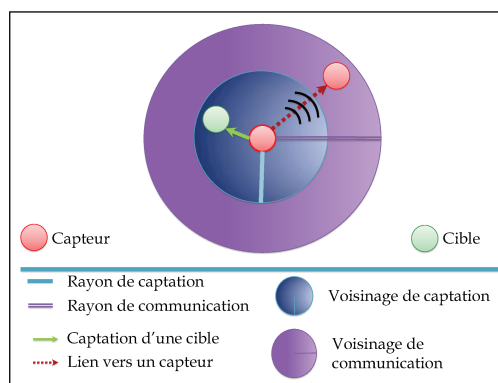


FIGURE 1 – Schéma d'un capteur

Pour permettre la couverture d'un terrain donné, nous considérons une discrétisation de ce terrain en un certain nombre de cibles. On supposera également que les capteurs ne peuvent être placés que sur ces cibles. L'ensemble de notre étude repose sur cette représentation du terrain. Les *Figures 2* et *3* illustrent respectivement une telle représentation, qui comporte plusieurs cibles et un puits, et une solution réalisable du placement de capteurs sur ce terrain pour assurer la couverture de l'ensemble des cibles ainsi que le routage vers le puits.

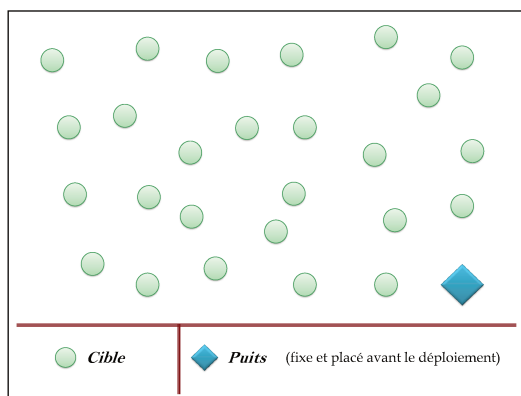


FIGURE 2 – Terrain à couvrir

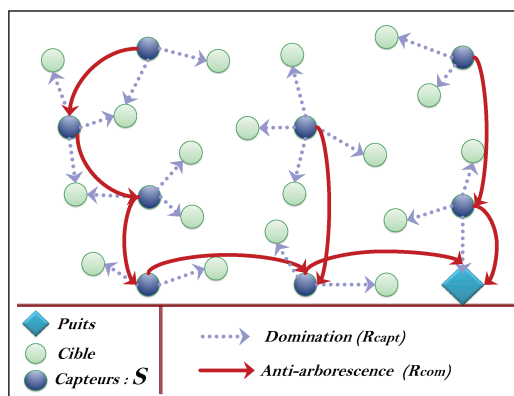


FIGURE 3 – Solution réalisable associée

Quel que soit leur objectif, les problèmes d'optimisation rencontrés dans les réseaux de capteurs se concentrent généralement sur un ou plusieurs problèmes parmi les quatre suivants :

- Placement des capteurs : l'objectif consiste à optimiser le placement des capteurs de manière à couvrir l'ensemble des cibles du terrain, en prenant en compte les besoins éventuels en termes de redondance de couverture, et tout en assurant la capacité des capteurs à communiquer entre eux.
- Ordonnancement de l'état d'activité des capteurs : les capteurs peuvent être mis en veille afin d'économiser leur batterie s'ils ne sont pas indispensables au fonctionnement du réseau. L'objectif ici consiste à optimiser l'ordonnancement des phases d'activité et de mise en veille des capteurs.
- Routage : les données recueillies par les capteurs doivent être routées jusqu'au puits. On doit donc choisir l'ensemble des liens de la topologie de communication en fonction d'un ou plusieurs critères (qualité des liens, débit, etc.) pour acheminer les données jusqu'au puits.
- Localisation du ou des puits : la consommation énergétique des capteurs situés près du puits étant plus élevée du fait d'un plus grand flux de données à acheminer, l'objectif ici est de trouver la localisation optimale du ou des puits afin de ralentir l'épuisement des batteries de certains capteurs.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés principalement à la minimi-

sation du nombre de capteurs à déployer sur le terrain, ainsi que leur placement. Ce, d'une part parce que les problèmes qui y sont associés se modélisent par des problèmes de théorie des graphes et s'étudient plus aisément, d'autre part parce qu'elle comporte un certain nombre de problèmes dont la complexité n'a pas été établie. En outre, la minimisation du nombre de capteurs à placer est un critère important pour le coût du déploiement ainsi que pour minimiser les interférences dans la communication entre capteurs.

En outre, dans des contextes bien particuliers comme ceux de la sismologie ou de la géothermie [Wan, Tan, and Yuen 2011], les capteurs ont un coût qui peut être assez élevé. Ainsi, l'un des enjeux cruciaux du déploiement d'un réseau de capteurs consiste à faire en sorte que son coût soit le moins élevé possible. Étant donné que nous considérons que tous les nœuds capteurs sont homogènes (possèdent les mêmes caractéristiques), la minimisation du coût du déploiement du réseau revient à minimiser le nombre total de capteurs utilisés.

En tenant compte du fait que les capteurs doivent pouvoir être en mesure de communiquer entre eux afin de transmettre les données relevées jusqu'au puits, ce problème se modélise, en théorie des graphes, par le problème du *dominant connexe minimum*, et plus largement par le problème de *couverture connexe minimum*. Le problème du *dominant connexe minimum* dans un graphe  $G = (X, A)$ , consiste à trouver un ensemble minimum de sommets  $S \subseteq X$  tel que  $S$  engendre un sous-graphe connexe de  $G$  et tel que tout sommet  $x \in X \setminus S$  est voisin d'un sommet de  $S$  dans  $G$ . On donnera des définitions exhaustives aux problèmes de *dominant connexe minimum* et de *couverture connexe minimum* appliqués aux réseaux de capteurs dans la suite du document, notamment au Chapitre 3.

Ainsi, les problèmes relatifs à la minimisation des capteurs que l'on se propose d'étudier trouvent de nombreuses applications dans les réseaux de capteurs sans fil, notamment des problèmes de routage [Das and Bharghavan 1997]. Une solution des problèmes envisagés donnera donc un placement optimal qui minimise le nombre de capteurs pour couvrir un terrain donné tout en permettant de router les informations captées vers un puits.

La suite du manuscrit s'organisera de la façon suivante. Dans le premier chapitre, on explicitera le fonctionnement usuel d'un réseau de capteurs et on en donnera des notions de base pour expliciter les différents problèmes rencontrés dans la thèse. Dans le

deuxième chapitre, un état de l'art sera présenté sur les problèmes d'optimisation les plus fréquemment rencontrés dans les réseaux de capteurs lorsqu'on considère une discrétisation du terrain à couvrir. Cet état de l'art sera axé majoritairement sur des problèmes de consommation énergétique car ce sont les problèmes que l'on rencontre le plus fréquemment et les techniques de modélisation et de résolution sont voisines de celles utilisées pour les problèmes de minimisation de capteurs qui sont au cœur de cette thèse. Dans le troisième chapitre, de nouveaux modèles en programmation mathématique pour notre problème de minimisation du nombre de capteurs seront proposés, qui donnent des résultats comparables ou meilleurs à ce qui se fait dans la littérature actuelle. Finalement, le quatrième chapitre est dédié aux grilles à motif carré. Dans ce contexte, nous exhibons une nouvelle heuristique qui construit un dominant connexe, nous comparons la borne supérieure déduite pour le dominant connexe minimum avec des résultats de la littérature. Puis, nous détaillerons des résultats théoriques qui nous conduisent à conjecturer que l'heuristique que nous proposons détermine toujours un dominant connexe minimum.

# Chapitre 1

## Fonctionnement des réseaux de capteurs et définitions

Dans ce chapitre, nous nous attacherons dans un premier temps à présenter les caractéristiques générales des réseaux de capteurs, que ce soit dans leur fonctionnement interne ou dans la façon dont ils sont déployés et dont ils s'organisent pour parer aux pannes liées à l'épuisement des batteries. Dans un second temps, nous détaillerons les problèmes en théorie des graphes que l'on retrouve dans le contexte des réseaux de capteurs, ainsi que les liens entre ces problèmes. Cela donne ainsi une base de définitions pour l'ensemble des problèmes qui seront étudiés ou mentionnés dans le reste du manuscrit.

### 1.1 Généralités sur les réseaux de capteurs

#### 1.1.1 Principe d'un réseau de capteurs

Un capteur est un dispositif communicant à faible coût, qui possède des capacités mémoires et computationnelles limitées. Un capteur est principalement caractérisé par un rayon de captation que l'on notera  $R_{capt}$  permettant d'acquérir une mesure physique, ainsi qu'un rayon de communication noté  $R_{com}$  définissant la distance maximale pour transmettre une information à un autre nœud capteur. Ces deux rayons déterminent respectivement un voisinage de captation (zone située autour du nœud capteur pour relever une mesure physique) et un voisinage de communication (ensemble des nœuds capteurs capables de recevoir une information transmise). La captation et la communication sont



## CHAPITRE 1. FONCTIONNEMENT DES RÉSEAUX DE CAPTEURS ET DÉFINITIONS

---

généralement réalisées par deux modules distincts, mais étant donné qu'un capteur ne possède généralement qu'un processeur de faible capacité computationnelle, on ne peut pas à proprement parler de parallélisme dans le traitement des données de captation et de communication, sauf architecture sur puces dédiées, qui sont plus rares [Narayanan, Sarath, and Veetil Vineeth 2016]; la photo 1.1 extraite du même article donne par exemple un aperçu de ce qu'est un capteur.



FIGURE 1.1 – Photo d'un capteur de type MICA2

La grande majorité des réseaux de capteurs sans fil sont composés de nœuds capteurs à bas coût ayant un prix compris entre 5 et 20 dollars et des capacités computationnelles très limitées, de l'ordre de 6 à 400 MHz. Le tableau 1.2 issu de l'article [Ojha, Misra, and Raghuwanshi 2015] présente les caractéristiques associées à plusieurs nœuds capteurs fréquemment utilisés dans le cadre de déploiement de réseaux de capteurs, comme dans le cas de l'agriculture intelligente.

En termes de communication, un nœud capteur peut communiquer selon une des formes standard les plus usitées de communication sans fil comme la 3G/4G/5G, wifi ou Zigbee, l'environnement dans lequel il est déployé (terrestre, souterrain, maritime, etc.) étant déterminant. Au niveau de la captation des données, celle-ci se fait, soit lorsqu'un événement particulier se déclenche, soit lorsqu'un serveur distant indique au capteur qu'il doit relever les données, soit à certains intervalles de temps fixés, sachant que certains

## CHAPITRE 1. FONCTIONNEMENT DES RÉSEAUX DE CAPTEURS ET DÉFINITIONS

Feature	MICA2	MICAz	TelosB	IRIS	LOTUS	Imote2	SunSPOT
Processor	ATmega128L	ATmega128L	TIMSP430	ATmega128L	Cortex M3 LPC 17xx	Marvell/XScalePXA271	ARM 920T
Programming							Java
Clock speed (MHz)	7.373	7.373	6.717	7.373	10–100	13–416	180
Bus width (bits)	8	8	16	8	32	32	32
System memory (kB)	4	4	10	4	64	256	512
Flash memory (kB)	Program:128 Serial:512	Program:128 Serial:512	Program:48 Serial:1024	Program:128 Serial:512	Program:512 Serial: 64 × 1024	Program: programmable Serial: 32 × 1024	Program:4096 –
Operating frequency band (MHz)	868/915	2400	2400	2400	2400	2400	2400
Transceiver chip	CC1000	CC2420	CC2420	Atmel RF230	Atmel RF231	CC2420	802.15.4
Number of channels	4/50	Programmable	Programmable	Programmable	–	In steps of 5 MHz	–
Data rate (kbps)	38.4 (Baud)	250	250	250	250	250	250
I/O connectivity	UART, I2C, SPI, DIO	UART, I2C, SPI, DIO	UART, I2C, SPI, DIO	UART, I2C, SPI, DIO	3xUART, SPI, I2C, I2S, GPIO, ADC	UART 3x, I2C, GPIO, SPI2x, DIO, JTAG	DIO, I2C, GPIO

FIGURE 1.2 – Caractéristiques de différents capteurs servant à l’agriculture issues de [Ojha, Misra, and Raghuvanshi 2015]

capteurs, généralement plus coûteux, proposent des combinaisons hybrides de ces types de relevé [Alsbou’i, Hammoudeh, Bandar, and Nisbet 2011].

La finalité d’un réseau de capteurs est de réaliser des relevés de l’environnement à l’aide de capteurs physiques et de faire remonter les informations récoltées à intervalles réguliers. Pour ce faire, l’information est généralement routée de capteur à capteur jusqu’à un nœud particulier que l’on nommera puits dans nos travaux, mais qui peut aussi s’appeler passerelle. La transmission et le traitement des informations collectées vers un serveur ne rentre pas dans le cadre de notre étude. On trouve néanmoins deux exemples détaillés de traitements des données dans [Ojha, Misra, and Raghuvanshi 2015] dans le cadre de l’agriculture intelligente. Dans cet article, les auteurs décrivent notamment le déploiement d’un réseau de capteurs dans ce contexte, afin de relever l’humidité des sols par chaque nœud capteur et actionner si nécessaire une pompe à eau pour l’arrosage des sols. Chaque capteur peut être configuré par l’application intégrée dans chaque nœud ou à distance par un utilisateur qui contrôlera les capteurs via le puits.

Ainsi, lorsque l’on déploie un réseau de capteurs, il convient d’une part de s’assurer que l’ensemble de la zone est bien couverte par les capteurs et, d’autre part, il faut également s’assurer que chacun des capteurs déployés est bien à même de transmettre l’information qu’il récolte jusqu’au puits, sinon les données qu’il collecte ne seront jamais traitées. On

peut aussi vouloir considérer le fait que l'information circule également du puits vers les capteurs, rendant le réseau nécessairement fortement connexe, mais cette contrainte n'est pas toujours nécessaire car, comme on l'a vu, les capteurs sont capables de s'auto-organiser sans supervision externe qui serait relayée par le puits. En outre, cette contrainte peut rendre les problèmes liés au réseau plus difficiles à résoudre.

Pour assurer la couverture du terrain, il faut prendre en compte le rayon de captation  $R_{capt}$  des capteurs qui détermine quelle surface du terrain un capteur peut couvrir, cette surface étant généralement circulaire. On dira ainsi qu'un sommet est *couvert* par un capteur s'il se trouve à une distance du capteur inférieure ou égale à son rayon de captation  $R_{capt}$ . En outre, pour assurer la communication entre capteurs, on doit cette fois-ci considérer le rayon de communication  $R_{com}$  de chaque capteur. Ce rayon de communication délimite là encore une surface circulaire à l'intérieur de laquelle peuvent se trouver d'autres capteurs vers lesquels le capteur origine est capable de transmettre son information. La Figure 1.3 illustre le fonctionnement d'un capteur, ainsi que les notions de rayon de captation et de rayon de communication.

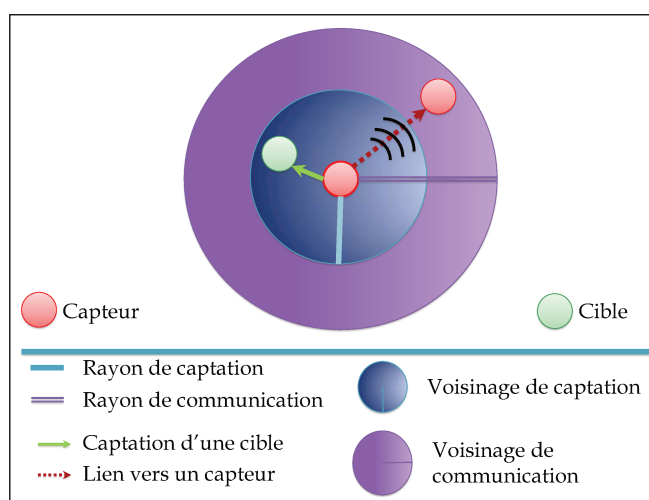


FIGURE 1.3 – Schéma d'un capteur

### 1.1.2 Différents types de couverture du terrain

Si l'on considère la couverture du terrain, celle-ci peut être envisagée de trois manières différentes :

1. Le terrain que l'on souhaite surveiller est représenté comme une surface ou un volume et les capteurs doivent être capables de capter une zone géométrique spécifique, généralement un disque, une sphère ou un secteur. Les capteurs eux-mêmes peuvent être placés sur l'ensemble du terrain ou sur des zones spécifiques. C'est notamment l'approche de [Wang, Xing, Zhang, Lu, Pless, and Gill 2003]. Ce type de couverture du terrain repose donc essentiellement sur des propriétés géométriques et trigonométriques de la configuration du réseau.
2. Pour éviter ces problèmes géométriques souvent lourds à traiter, une autre approche de représentation d'un réseau de capteurs consiste à étudier la discrétisation de la surface à couvrir en considérant un placement régulier de nœuds cibles selon des motifs géométriques tels que des triangles, des carrés ou des hexagones réguliers. En revanche, ceux-ci ne constituent pas des emplacements valides pour les capteurs, qui seront placés sur une autre topologie indépendante du placement des cibles. Lorsque l'on s'intéresse au problème de la communication entre capteurs, on cherche alors le plus petit ensemble de capteurs capables de couvrir l'ensemble des liens de communication avec les autres capteurs [Safar and Habib 2007]. D'après les auteurs, cette couverture repose sur des problèmes liés à la recherche d'un ensemble transversal en théorie des graphes.
3. On peut également considérer à nouveau la discrétisation du terrain à couvrir qui sera représenté par un ensemble de nœuds cibles. La différence avec le modèle précédent réside dans le fait que les nœuds constituent également les emplacements sur lesquels on pourra placer les capteurs. Par ailleurs, il est usuel de considérer que l'espacement entre deux nœuds quelconques correspond au moins au rayon de captation minimum des capteurs. (Une variante adaptative consiste à ne considérer pour cibles que les points sur lesquels les capteurs ont déjà été déployés, ce qui fonctionne pour les réseaux très denses pour lesquels la couverture du terrain est implicitement assurée.)  
*Ce type de couverture est une modélisation du terrain très utilisée dont on explicitera davantage les enjeux dans la section suivante.*

Dans les chapitres suivants, et sauf mention contraire, on ne considérera plus que la troisième forme de modélisation pour représenter la couverture du terrain par les capteurs.

### 1.1.2.1 Types de nœuds composant un réseau de capteurs

Lorsque l'on se place dans le cas de la deuxième ou de la troisième modélisation du terrain, les entités qui composent un réseau de capteurs peuvent être de quatre natures différentes :

1. Les *nœuds cibles* qui représentent les cibles du terrain dont la couverture doit être assurée.
2. Les *capteurs classiques* dont l'unique fonction est de récolter des données puis de les transmettre.
3. Les *capteurs relais*, qui collectent et transmettent leurs données mais sont également responsables du routage des données en provenance d'autres capteurs vers le ou les *nœuds puits*. Les capteurs relais sont généralement plus coûteux mais ont des capacités énergétiques moins limitées.
4. Les *nœuds puits*, généralement incapables de capter des données mais vers lesquels l'ensemble du trafic doit être acheminé. Un réseau de capteurs peut avoir un seul ou plusieurs puits en fonction des besoins. Ces nœuds seront ensuite responsables de l'envoi des données collectées vers un serveur central, cette partie sortant du cadre de notre étude.

### 1.1.2.2 Déploiement d'un réseau de capteurs et routage des données

Bien que de nature fondamentalement dynamique, un réseau de capteurs peut être considéré avec les contextes suivants :

- Un *contexte statique* : tous les nœuds du réseau sont fixes, les rayons de transmission et de communication des capteurs pouvant être adaptables.
- Un *contexte mobile* : l'ensemble ou une partie des nœuds du réseau peut se déplacer sur le terrain. Ce contexte est bien adapté aux pannes importantes et étendues géographiquement.

En outre, le réseau lui-même peut être déployé de deux façons, soit de manière *déterministe*, soit de manière *aléatoire*. Le déploiement déterministe consiste à placer les

différents capteurs du réseau à des emplacements précis de manière à garantir un certain nombre de propriétés du réseau telles que la connectivité multiple, avec un nombre restreint de capteurs. À l'inverse, le déploiement *aléatoire* consiste à placer un grand nombre de capteurs sur un terrain sans connaissance préalable de leur position, ce qui est fait par exemple lorsque les capteurs sont répandus sur une zone depuis un avion. Ce type de déploiement permet d'assurer une grande redondance dans la couverture du terrain. Toutefois, cette solution est éminemment plus coûteuse qu'un déploiement déterministe en raison du très grand nombre de capteurs déployés, qui fournit une redondance de couverture souvent bien supérieure aux besoins. Une analyse des différentes stratégies de déploiement des capteurs, déterministes et aléatoires, est proposée dans [Aznoli and Navimipour 2017].

Enfin, les capteurs du réseau communiquent entre eux par des liaisons sans fil et sont capables de s'auto-organiser (pour la communication, la mise en veille, etc.) par l'intermédiaire d'algorithmes de localisation centralisés ou distribués. Typiquement, un *algorithme centralisé* sera envisagé lorsque le réseau se fonde sur une résolution d'un certain problème, par exemple pour le déploiement en amont, dont la solution est calculée par un serveur situé en dehors du réseau et qui permettra de gérer celui-ci par des messages destinés à l'ensemble des capteurs. Les algorithmes publiés dans [Doherty, Pister, and Ghaoui 2001] et [Cheng, Narahari, Simha, Cheng, and Liu 2003] sont des exemples majeurs d'algorithmes centralisés. À l'inverse, les *algorithmes distribués* seront utilisés dans le cadre d'heuristiques locales où les capteurs seront à même de s'organiser grâce à une connaissance partielle de leur voisinage, ce qui permet d'alléger considérablement le réseau en termes de transit d'information. Parmi les algorithmes distribués, on peut citer Approximate Point in Triangulation (APIT) [Niculescu and Nath 2001] et Distance Vector Hop (DV-HOP) [He, Huang, Blum, Stankovic, and Abdelzaher 2003].

### 1.1.3 Gestion d'un réseau de capteurs et tolérance aux pannes

Du fait de la fragilité et des limitations des capteurs, les défis principaux de ce type de réseau reposent majoritairement sur la résistance aux pannes, qu'elles soient accidentelles, c'est-à-dire dues à une défaillance matérielles par exemple, ou que ces pannes soient déterminées par la capacité énergétique restreinte des capteurs, fixée par l'épuisement de

leur batterie.

La notion de pannes dans les réseaux de capteurs est également liée à la notion de durée de vie d'un réseau, que l'on peut ainsi définir de manières différentes dans la littérature. Les définitions les plus courantes, telles que répertoriées dans [Dietrich and Dressler 2009], correspondent au premier instant où :

- un capteur a épuisé sa batterie ;
- la couverture des cibles n'est plus assurée avec une assez bonne qualité (notamment dans le cas où une redondance dans la couverture des cibles est requise) ;
- la connexité n'est plus suffisamment assurée (définition adaptée davantage aux réseaux *ad hoc* qu'aux réseaux de capteurs, où la connexité des capteurs avec le puits est indispensable).

Ainsi l'article [Younis, Senturk, Akkaya, Lee, and Senel 2014] dresse un bilan des techniques utilisées à ce jour pour anticiper et traiter les pannes en fonction de leur type. Ces techniques peuvent être listées suivant les mécanismes qu'elles mettent en œuvre :

- Mécanisme de découverte des nœuds défaillants dans le cas d'un déploiement *aléatoire*, pour la mise à jour de la topologie du réseau.
- *Cycle de mise en veille* des capteurs, afin de *maximiser la durée de vie* du réseau. On procède généralement par alternance d'ensemble de capteurs, sachant que chaque ensemble doit assurer une certaine qualité de couverture et/ou de redondance du terrain. Une bonne pratique pour diminuer la consommation énergétique des capteurs revient donc à alterner l'activité de ces couvertures connexes et non nécessairement disjointes par les sommets.
- Routage de la collecte des données via les *capteurs relais* qui s'effectue souvent par une agrégation des nœuds relais en un réseau cœur constituant une structure de communication connectée de capteurs, qui assure la couverture du terrain. La couverture peut même être enrichie en une couverture multiple dont l'avantage principal est que lorsqu'un capteur de la structure cœur tombe en panne, il est remplacé par un des capteurs redondants.

- Contrôle de la puissance d'émission du capteur, qui permet de limiter les interférences, mais permet également de gérer la connectivité du réseau par l'attribution de rayons de communication non uniformes.
- Contrôle du mouvement des capteurs et/ou des puits qui augmente la durée de vie du réseau mais également son coût.

Comme on peut le constater, ces mécanismes sont dépendants des choix effectués sur le réseau de capteurs, suivant que l'on est dans un contexte statique ou mobile, suivant les portées des rayons des capteurs, etc. De manière générale, ces différentes techniques utilisées plus ou moins conjointement permettent une meilleure tolérance aux pannes, d'une part en limitant la consommation énergétique des capteurs et d'autre part en ayant des capteurs redondants de sorte à limiter le caractère critique d'un faible nombre de capteurs.

Typiquement, les auteurs de [Younis, Senturk, Akkaya, Lee, and Senel 2014] classent les pannes du réseau selon trois catégories distinctes :

1. La perte d'un capteur à la fois, qui est problématique quand cela entraîne une perte de connectivité.
2. La perte simultanée de capteurs connectés, qui est la panne la plus difficile à résoudre.
3. La perte simultanée de capteurs indépendants. Cette panne revient à la première en termes de résolution mais elle peut poser des problèmes de synchronisation.

Face à ces pannes, [Younis, Senturk, Akkaya, Lee, and Senel 2014] distingue deux modèles de récupération : d'une part l'approche *proactive*, d'autre part l'approche *réactive*. Comme on le verra dans la sous-section suivante, la première est efficace pour les pannes isolées ou les pannes simultanées de quelques nœuds éloignés les uns des autres, tandis que la seconde est adaptée à la perte simultanée de capteurs à plus grande échelle, ce, quel que soit leur emplacement.

### 1.1.3.1 Approches proactives et réactives

Comme son nom l'indique, l'approche *proactive* consiste ainsi à parer aux pannes avant qu'elles ne surviennent en garantissant assez de redondance au niveau de la couverture du



terrain et/ou de la connectivité des capteurs entre eux de sorte que, lorsque quelques capteurs tombent en panne, le réseau reste fonctionnel. Les **approches proactives** reposent toutes sur la redondance de certains nœuds, que ce soit en considérant la couverture multiple de la zone de captation ou la communication robuste inter-nœuds. Ainsi, la couverture d'une zone sera garantie par la redondance d'un certain nombre de nœuds capables d'assurer la captation de la même zone géographique. Ce problème sera modélisé par un problème de couverture multiple des nœuds cibles.

L'article [Yang, Dai, Cardei, Wu, and Patterson 2006] propose ainsi une heuristique locale, pour trouver une couverture multiple qui assure la connectivité des capteurs avec le puits.

Cette approche reste néanmoins inefficace pour pallier la panne simultanée d'un groupe de capteurs connexes ou de pannes simultanées à grande échelle car elle repose sur un état initial de la topologie du réseau devenu obsolète. Seules les approches réactives pourront donc y remédier.

Ainsi, les techniques **d'approches réactives** quant à elles reposent essentiellement sur des capteurs mobiles qui viennent récupérer les pertes de connexion ou de couverture du réseau. Ces techniques peuvent également être utilisées par des capteurs immobiles mais dont les rayons de captation et de communication sont ajustables. Dans tous les cas, ce sont des méthodes adaptatives qui reposent sur une connaissance à un instant donné de l'état du réseau. Ainsi, ces méthodes permettent la réaction des capteurs à des événements imprévisibles entraînant la panne simultanée d'un grand nombre de capteurs. La réaction possible des capteurs peut consister à se déplacer à un endroit où une perte de connectivité ou de captation est apparue, ou encore à étendre des rayons de captation pour pallier des pertes massives de couverture.

Ces techniques de résolution n'ont pas fait l'objet de notre étude car elles s'appuient généralement sur un contexte de capteurs mobiles, contexte qui n'est pas celui que nous avons choisi pour notre champ d'étude.

## 1.2 Problèmes étudiés dans cette thèse

Dans la suite de ce manuscrit, et sauf mention contraire, nous nous plaçons dans le cadre d'une couverture discrétisée du terrain où les emplacements des cibles sont également les seuls emplacements possibles pour les capteurs. Par ailleurs, les capteurs sont homogènes et possèdent donc les mêmes rayons de captation et les mêmes rayons de communication. On fait également l'hypothèse que  $R_{com} \geq R_{capt}$ . Finalement, les capteurs et le puits seront tous considérés comme statiques.

### 1.2.1 Notions et formalisme de base

Avant d'entamer la partie sur l'état de l'art, il nous faut rappeler et poser des définitions de théorie des graphes [Berge 1983] abondamment utilisées dans la suite du manuscrit.

#### Graphes connexes et $k$ -connexes

Soit un graphe non orienté  $G = (X, A)$ . Soit  $k$  un entier strictement positif.

Le graphe  $G$  est *connexe* s'il existe une chaîne entre tout sommet  $u \in X$  et tout sommet  $v \in X$ .

Le graphe  $G$  est  $k$ -connexe s'il reste connexe après suppression de tout ensemble d'au plus  $k - 1$  sommets.

#### Ensemble dominant et $k$ -dominant

Un ensemble  $C \subset X$  est un dominant de  $G$  si  $\forall u \in X \setminus C, \exists u' \in C / \{u, u'\} \in A$ . C'est-à-dire,  $C$  est un dominant de  $G$  si tout sommet de  $X \setminus C$  possède un voisin dans  $C$ .

Un ensemble  $C \subset X$  est un  $k$ -dominant de  $G$  si  $\forall u \in X \setminus C$ , on a  $|\{u' \in C : \{u, u'\} \in A\}| \geq k$ .

#### Différentes définitions pour les problèmes de couvertures

Les deux définitions qui suivent sont spécifiques au contexte des réseaux de capteurs. En effet, la notion de *couverture* utilisée dans ce contexte ne recoupe pas la notion usuelle

de théorie des graphes de couverture des sommets par les arêtes, ou des arêtes par les sommets, mais définit la couverture de sommets par d'autres sommets. Ceci correspond à la couverture de cibles par des capteurs. Cette notion est la même que celle de la domination lorsque chaque sommet doit être couvert une unique fois, mais elle diffère lorsqu'on parle de  $k$ -couverture ou de  $k$ -dominant. Par ailleurs, les deux rayons  $R_{com}$  et  $R_{capt}$ , lorsqu'ils diffèrent, induisent une structure de graphe différente de celle que l'on retrouve dans le problème classique du dominant connexe minimum.

Ainsi, il existe dans  $G$  une  $k$ -couverture  $C$  si  $C$  est tel que  $\forall u \in X$ , alors  $|\{u' \in C : u' = u \text{ ou } \{u, u'\} \in A\}| \geq k$ . Autrement dit,  $C$  est une  $k$ -couverture de  $G$  si  $C$  est un sous-ensemble de  $X$  tel que chaque sommet de  $X$  est couvert par au moins  $k$  sommets de  $C$ .

On peut ainsi noter que, pour  $k = 1$ , un ensemble dominant est une couverture et réciproquement. Mais, pour  $k > 1$ , un ensemble  $k$ -dominant  $D$  couvre  $k$  fois les sommets qui ne sont pas dans  $D$ , tandis qu'une  $k$ -couverture  $C$  couvre  $k$  fois *tous* les sommets de  $X$ .

Enfin, spécifiquement aux réseaux de capteurs, la notion de *couverture connexe* fait intervenir deux ensembles de voisinages différents, l'un suivant  $R_{com}$ , l'autre suivant  $R_{capt}$ . Ainsi, la connexité des capteurs entre eux sera établie en fonction de  $R_{com}$ , tandis que la couverture des cibles par les capteurs sera déterminée en fonction de  $R_{capt}$ . Dans les articles traitant de la couverture connexe, celle-ci n'est pas à notre connaissance définie de façon formelle, aussi nous proposons une formalisation de ce problème dans le Chapitre 3.

En pratique, dans un réseau de capteurs, une couverture connexe sera donc un ensemble de capteurs qui couvrent la totalité des cibles d'un terrain (pour chaque cible, il existe au moins un capteur à distance inférieure ou égale à  $R_{capt}$ ) et tel que le graphe dont les sommets sont les capteurs et les arêtes les paires de capteurs à distance inférieure ou égale à  $R_{com}$  est connexe. On définit de manière analogue une  $k$ -couverture connexe.

### 1.2.2 Placement des capteurs sur une grille

Dans la majorité des travaux et des problèmes sur lesquels nous nous sommes penchés, l'hypothèse a été faite que les cibles du terrain sont déployées sur une grille à motif carré, que par abus de langage nous appellerons *grille carrée*. Dans ce contexte, le réseau de

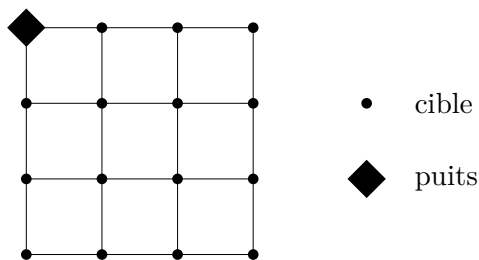


FIGURE 1.4 – Grille carrée à 4 lignes et 4 colonnes

capteurs est déployé sur une grille plane et  $X$  représente les sommets d'une telle grille carrée à distance unitaire. Les rayons  $R_{com}$  et  $R_{capt}$  seront des multiples de cette distance unitaire, c'est-à-dire des entiers. Par ailleurs, ces grilles sont composées de  $n$  lignes et  $m$  colonnes de sorte que  $|X| = nm$ . La Figure 1.4 montre un exemple d'une telle grille (avec  $n = m = 4$ ). De manière générale, nous avons choisi de nous intéresser aux problèmes de réseaux de capteurs dans les grilles carrées car elles représentent une structure de graphes particuliers pour lesquels la complexité du problème de la couverture connexe minimum reste ouverte. Toutefois, ces grilles sont des graphes proches de graphes 4-réguliers, pour lesquels certains problèmes de minimisation de sommets, qui se ramènent au problème Maximum Leaf Spanning Tree (détaillé plus tard), sont NP-difficiles [Garey and Johnson 1979]. En outre, jusqu'à maintenant, les grilles n'ont pas fait l'objet de beaucoup de travaux spécifiques, comme cela a été relevé dans [Reich 2016].

Toujours relativement aux grilles, on peut faire une observation concernant le voisinage de captation (resp. de communication) d'un capteur, voisinage composé des nœuds de la grille situés à une distance inférieure ou égale à  $R_{capt}$  (resp.  $R_{com}$ ). Plus ce rayon  $R_{capt}$  (resp.  $R_{com}$ ) augmente, plus le voisinage tend à ressembler à un disque, comme illustré par la Figure 1.5. Ainsi, pour une valeur assez grande de  $R_{capt}$  (resp.  $R_{com}$ ), le voisinage de captation (resp. de communication) d'un capteur se rapproche du disque de rayon  $R_{capt}$  (resp.  $R_{com}$ ) avec le capteur en son centre. Pour plus de détails, voir le Chapitre 3, Section 3.4.

En se référant à la Figure 1.5, on peut compléter le tableau suivant qui liste le nombre de sommets du voisinage d'un capteur en fonction de la valeur du rayon  $R$ , sachant qu'on

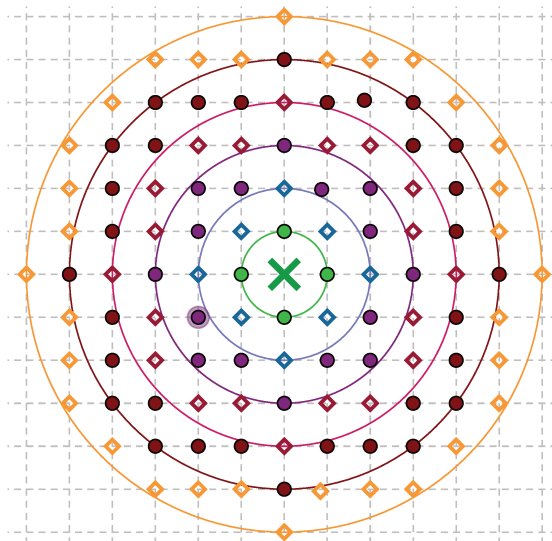


FIGURE 1.5 – Évolution du voisinage de captation lorsque le rayon  $R$  croît de 1 à 6

inclut le sommet où se trouve le capteur dans le voisinage.

$R$	Nombre de sommets du voisinage
1	5
2	13
3	29
4	49
5	81
6	113

TABLE 1.1 – Nombre de sommets du voisinage en fonction du rayon  $R$

### 1.2.3 Le problème de la couverture connexe minimum et ses variantes

Lorsque l'on cherche à minimiser le nombre de capteurs à déployer, les contraintes induites par le déploiement d'un réseau de capteurs que sont la couverture globale ou partielle du terrain et la connexité impliquent un placement approprié des capteurs et correspondent à la solution de problèmes d'optimisation particuliers en théorie des graphes. Il est à noter que les graphes peuvent être orientés ou non en fonction du contexte considéré. Contrairement à d'autres types de réseaux, la fonction première d'un réseau de capteurs est

d'une part de couvrir les cibles desquelles seront extraites des données à récolter, d'autre part de collecter l'ensemble de l'information engendrée par la couverture du terrain. Ces contraintes fortes ont nécessairement des conséquences sur la structure générale du graphe constitué par les capteurs, ce, quels que soient les objectifs d'optimisation que l'on se pose sur le réseau (minimisation du nombre de capteurs, économie d'énergie, longévité du réseau).

Ainsi, de manière générale, lorsque l'on parle de *couverture* (ou de *domination*) dans un graphe, on s'intéresse à la captation du terrain, et lorsque l'on parle de *connectivité* des sommets du graphe, on considère la communication entre capteurs.

Dans un premier temps, lorsque l'on s'intéresse à la contrainte de captation des cibles par un nombre minimal de capteurs, le problème que l'on se pose correspond en théorie des graphes au problème classique du dominant minimum, en anglais *Minimum Dominating Set (MDS)*. Dans les graphes généraux, ce problème a été prouvé comme étant NP-difficile [Garey and Johnson 1979]; il en est de même pour les problèmes listés ci-après, toujours dans le cas des graphes généraux.

Formellement, le problème du dominant minimum se définit ainsi. Étant donné un graphe non orienté  $G = (X, A)$  et un entier positif  $d$ , le problème de décision du dominant minimum ( $D$ -MDS) consiste à savoir s'il existe un ensemble  $D \subset X$  contenant au plus  $d$  sommets et tel que  $\forall u \in X \setminus D, \exists v \in D$  vérifiant  $\{u, v\} \in A$ . Dans le problème d'optimisation associé MDS, on cherche à minimiser le cardinal  $|D|$  d'un ensemble dominant  $D$ ; ce cardinal minimum correspond au *nombre de domination (dominating number)* du problème [Bermudo, Hernández-Gómez, and Sigarreta 2018].

Afin d'assurer une tolérance aux pannes, certaines applications nécessitent une couverture multiple des nœuds cibles. Cette couverture multiple peut être assurée par la résolution du problème du  $k$ -dominant minimum, ou bien par le problème de la  $k$ -couverture minimum, où cette fois, l'entier positif  $k$  définit le degré de couverture de l'ensemble ou d'une partie des cibles. Dans la section précédente on a vu en quoi un ensemble  $k$ -dominant et une  $k$ -couverture diffèrent. De la même manière, il nous faut bien distinguer les deux problèmes.

On note  $N[v]$ , le voisinage fermé d'un sommet  $v \in X$  :  $N[v] = \{u \in X : \{u, v\} \in A\} \cup \{v\}$ . Ainsi, le voisinage fermé d'un sommet  $v$  est constitué de l'ensemble des voisins de  $v$  et de  $v$  lui-même (par opposition au voisinage ouvert  $N(v)$  de  $v$  qui ne contient pas  $v$ ). De plus, étant donné  $deg(v)$  le degré d'un sommet  $v$  et un ensemble  $D \subset X$ , on note  $deg_D(v)$  le nombre de sommets du voisinage de  $v$  restreint aux sommets appartenant à  $D$ , c'est-à-dire  $deg_D(v) = |N(v) \cap D|$ .

On peut définir le problème d'optimisation du *k-dominant minimum* ainsi : un *k-dominant* est un ensemble de sommets  $D \subset X$  tel que  $\forall v \in X \setminus D, deg_D(v) \geq k$ ; un *k-dominant minimum* est un *k-dominant*  $D$  de cardinalité minimale.

Par ailleurs, comme vu précédemment, on peut voir le problème de la *k-couverture minimum* de la façon suivante : une *k-couverture* est un ensemble de sommets  $D \subset X$  tel que  $\forall v \in X, |N[v] \cap D| \geq k$ ; une *k-couverture minimum* est une *k-couverture* de cardinalité minimale. Notons à nouveau que lorsque  $k = 1$ , le problème de (1-)couverture minimum est équivalent à celui du (1-)dominant minimum.

En réalité, dans la littérature en théorie des graphes, ce que l'on nomme ici comme *k-couverture minimum* correspond exactement au *k-tuple dominant minimum*, comme précisé dans [Bermudo, Hernández-Gómez, and Sigarreta 2018]. Toutefois, dans la littérature sur les réseaux de capteurs, il est plus usuel de parler de couverture, d'autant qu'elle s'articule généralement avec la connexité des capteurs entre eux et la prise en compte simultanée de la captation ( $R_{capt}$ ) et de la communication ( $R_{com}$ ).

Ainsi, si l'on prend de plus en compte la contrainte de connexité des capteurs par rapport au problème de la domination, il s'agit alors d'un problème plus contraignant que le *MDS*, et qui est largement étudié dans la littérature sur les réseaux de capteurs : le *dominant connexe minimum* ou *MCDS*. Étant donné un graphe  $G = (X, A)$  et un entier positif  $k$ , le problème de décision du dominant connexe minimum (*D-MCDS*) consiste à savoir s'il existe un ensemble  $D \subset X$  contenant au plus  $k$  sommets tels que les sommets de  $D$  forment un sous-graphe connexe et tels que chaque sommet de  $X$  soit dominé par au moins un sommet de  $D$  dans  $G$ . Le problème d'optimisation associé (*MCDS*) consiste à

minimiser le cardinal d'un ensemble dominant connexe pour  $G$ . Par rapport au problème  $MDS$ , ce problème ajoute une contrainte globale de connexité sur l'ensemble dominant. Ce problème  $MCDS$  est fréquemment utilisé dans les réseaux de capteurs afin d'établir et de maintenir un squelette virtuel pour le routage des messages dans le réseau [Das and Bharghavan 1997].

En outre, il est à noter que ce problème  $MCDS$  est lié au problème d'arbre couvrant avec un nombre maximum de feuilles ( $MLST$ ). Le problème  $MLST$  consiste à trouver un arbre couvrant de  $G$  avec un nombre maximum de feuilles parmi tous les arbres couvrants de  $G$ . Or, la somme des cardinaux des solutions optimales respectives de  $MLST$  et  $MCDS$  est égale à  $|X|$ , ils sont donc complémentaires, la solution à l'un des problèmes donnant automatiquement la solution de l'autre.

Enfin, le problème  $MCDS$  est un cas particulier du problème de couverture connexe minimum  $MCCS$ , lorsque  $R_{capt} = R_{com} = 1$ . En réseaux de capteurs, le problème  $MCCS$  repose sur deux rayons de captation et de communication éventuellement différents qui peuvent alors déterminer des ensembles de voisinages différents, comme on le verra dans le Chapitre 3. Ainsi, il existe de nombreuses applications pour lesquelles ces deux rayons sont différents, notamment lorsque  $R_{com} > R_{capt}$ . Par exemple, dans le contexte de l'agriculture de précision, les capteurs d'humidité ont une faible portée de captation, de 3 ou 4 mètres au plus [Roveti 2001], tandis que leur rayon de communication peut atteindre 100 mètres. Le problème de décision associé ( $D-MCCS$ ) se formule de la façon suivante : étant donné un graphe  $G = (X, A)$  et un entier positif  $d$ ,  $D-MCCS$  consiste à savoir s'il existe un ensemble  $C \subset X$  contenant au plus  $d$  sommets tels que les sommets de  $C$  forment un sous-graphe connexe déterminé par  $R_{com}$  et tels que chaque sommet de  $X$  soit dominé par au moins un sommet de  $C$  suivant  $R_{capt}$ .

On peut également expliciter la généralisation du  $MCCS$  par l'ajout d'une contrainte de  $k$ -couverture, qui correspond au problème de  $k$ -couverture connexe minimum  $MCkCS$ , dont le problème  $MCCS$  est donc un cas particulier qui correspond à  $k = 1$ .

On peut formuler le problème  $MCkCS$  de la façon suivante : soit un réseau de capteurs dans lequel on considère deux ensembles de voisinages associés aux deux rayons  $R_{com}$  et



$R_{capt}$  et soit  $k$  un entier positif; une solution du problème  $MCKCS$  est un ensemble  $D \subset X$  satisfaisant les propriétés suivantes :

(i)  $D$  est une  $k$ -couverture de  $G$  telle que chaque sommet de  $X$  est adjacent à au moins  $k$  sommets de  $D$  suivant  $R_{capt}$ .

(ii)  $D$  constitue un sous-graphe connexe de  $G$  suivant  $R_{com}$ .

Une couverture connexe  $D$  est minimum pour le problème  $MCKCS$  si et seulement si pour chaque  $k$ -couverture connexe  $D'$  on a  $|D| \leq |D'|$ . Ce problème étant une généralisation de  $MCCS$ , il est donc au moins aussi difficile.

Par ailleurs, on peut mentionner le problème de la  $m$ -couverture  $k$ -connexe minimum ou  $MmCKCS$  (ou sa variante  $MkCmDS$ , le problème de l'ensemble du  $m$ -dominant  $k$ -connexe minimum) dont  $MCKCS$  est à nouveau un cas particulier. En effet, la communication et la transmission robuste des données dans le cadre d'une approche *proactive* d'anticipation des pannes du réseau sont généralement modélisées par un arbre (dont chaque nœud peut être dupliqué un certain nombre de fois) ou, de façon plus générale, par une  $m$ -couverture  $k$ -connexe (ou un ensemble  $m$ -dominant et  $k$ -connexe, suivant les différences que l'on a vues précédemment entre couverture et dominant). Cette topologie de  $MmCKCS$  est intéressante à plusieurs titres étant donné qu'elle permet une bonne tolérance aux pannes ainsi qu'une flexibilité certaine du routage par la redondance des capteurs placés. Évidemment, c'est une structure lourde et un problème très contraint qui requiert un déploiement très dense des capteurs.

Finalement, on mentionnera le problème  $p$ -médian qui n'est pas lié aux différents problèmes de couverture mais dont la résolution peut faire partie d'un problème ou d'un sous-problème dans les réseaux de capteurs, lié à la localisation du (ou des) puits. Le but est de trouver l'emplacement idéal du (ou des) puits de sorte que l'information circulant jusqu'à ce(s) dernier(s) soit la moins coûteuse possible en termes d'énergie, ce coût étant fonction de la distance à parcourir. Le problème  $p$ -médian ( $pMP$ ) qui correspond à cet objectif de placement de puits s'énonce ainsi en théorie des graphes : soit  $G = (X, A)$  un graphe non orienté et soit  $c(i, j)$  la fonction de coût associée à l'arête de communication  $\{i, j\} \in A$ . Le problème du  $p$ -médian consiste en la sélection de  $p$  sommets (puits) de sorte

que la somme totale de l'affectation des sommets non sélectionnés aux puits soit minimale.

Ce problème est connu pour être NP-difficile même lorsque la fonction de coût est fonction de la distance comme décrit dans [Garey and Johnson 1979].

### 1.3 Conclusion

Pour conclure, on a exposé tout au long de ce chapitre une partie de la richesse et de la diversité des réseaux de capteurs. Étant donné leur pluralité et leur versatilité, nous avons dû faire des choix de modèles et d'approches, notamment celui de ne se concentrer que sur les réseaux de capteurs dont les éléments à capter sont présentés sous forme de cibles discrétisées. Suivant cette optique, nous avons également introduit les problèmes en théorie des graphes que l'on retrouve fréquemment dans la littérature sur les réseaux de capteurs. Ainsi, dans le chapitre suivant, nous présenterons l'état de l'art dans des réseaux de capteurs discrétisés suivant différents objectifs énergétiques puis, en fin de Chapitre 2, nous listerons les résultats de complexité connus à ce jour pour les problèmes que nous venons de détailler.

## CHAPITRE 1. FONCTIONNEMENT DES RÉSEAUX DE CAPTEURS ET DÉFINITIONS

---

## Chapitre 2

# État de l'Art et taxinomie des réseaux de capteurs en programmation mathématique

Pour traiter l'optimisation dans les réseaux de capteurs, les problématiques considérées par la littérature sont très diverses et dépendent de quatre facteurs principaux : les sous-problèmes implicites constitutifs du problème principal que l'on se pose, les objectifs que l'on souhaite se fixer, le contexte dans lequel le réseau évolue et les contraintes qui y sont liées, et enfin le choix de la modélisation et les techniques de résolution qui en découlent. Dans ce chapitre, nous présentons donc les problèmes rencontrés suivant les objectifs fixés, ainsi que les sous-problèmes auxquels ils choisissent de répondre. Avant de rentrer dans le détail des articles, il convient d'explicitier dans un premier temps la classification des problèmes et les différents contextes rencontrés.

### 2.1 Généralités

#### 2.1.1 Types de problèmes

Considérons un objectif général dans les réseaux de capteurs, par exemple : assurer un placement de capteurs et de puits de sorte qu'une certaine surface soit couverte le plus longtemps possible. L'article [Guney, Aras, Altinel, and Ersoy 2010] montre qu'on a en fait affaire à une composition de sous-problématiques de réseaux de capteurs. D'après [Guney, Aras, Altinel, and Ersoy 2010], on peut distinguer trois sous-problématiques générales de

réseau auxquelles on en ajoutera une quatrième qui sera mentionnée dans cet état de l'art :

1. **Placement** des capteurs. Cette problématique considère le placement des capteurs de sorte à assurer un certain degré de couverture du terrain par les capteurs. Par exemple, dans le cas discret, cela revient à assurer la  $k$ -couverture dans un graphe.
2. **Ordonnancement** des phases de veille et d'activité d'ensembles de capteurs. Ce type d'ordonnancement diffère des problèmes d'ordonnancement classiques et est généralement facile à résoudre car il se modélise sous la forme d'un programme linéaire. Il représente l'alternance des cycles d'activité sous des contraintes de capacité énergétique.
3. **Routage** des données se basant sur la conservation du flot en ayant pour objectif l'acheminement des données vers les puits. Une vue synthétique de la diversité des approches de routage des données et des travaux sur ce problème est fournie dans [Sarkar and Murugan 2016]. On peut aussi considérer l'aspect routage en dehors d'une approche protocolaire, mais comme étant le fait d'assurer la connexité entre tous les capteurs du réseau. Beaucoup de papiers décrits dans notre état de l'art se concentrent sur cette problématique.
4. **Localisation** optimale du ou des puits, qui revient généralement à un problème de localisation classique des équipements, avec des formulations de type  $p$ -median.

La combinaison d'une partie ou de l'ensemble de ces problématiques rendra la formulation mathématique associée plus ou moins difficile à résoudre en fonction des contraintes ajoutées pour les satisfaire. Les quatre problématiques sont donc rarement formulées dans le même modèle mathématique. Dans ce contexte, on peut noter que la problématique seule de placement optimal de capteurs pour la minimisation de la consommation énergétique est *NP-difficile* dans les graphes généraux [Cheng, Narahari, Simha, Cheng, and Liu 2003].

### 2.1.2 Classification des objectifs

Les objectifs explicites rencontrés dans les différentes modélisations en PLNE sont en nombre assez limité, et l'on trouvera ci-dessous en italique ceux qui sont effectivement considérés dans cette thèse, les autres ayant seulement été mentionnés ou étudiés de manière complémentaire dans quelques articles. Ainsi, on peut vouloir :

- Maximiser le nombre de données transmises.
- Minimiser le coût total de déploiement et d'usage du réseau.
- Minimiser la formation de goulots d'étranglement, notamment au niveau des capteurs voisins d'un puits, plus susceptibles de router les flots d'information des autres capteurs.
- *Minimiser la consommation totale d'énergie.*
- *Maximiser la durée de vie du réseau.*
- *Minimiser le nombre de capteurs placés.*

L'objectif de minimisation énergétique est un objectif qui dans certains cas peut être vu comme un objectif alternatif, quoique moins fin, à la maximisation de la durée de vie du réseau.

En effet, la durée de vie du réseau comprend plusieurs acceptions différentes. On considère généralement qu'elle correspond à l'instant à partir duquel un capteur du réseau tombe en panne en premier, raison pour laquelle la minimisation de la consommation énergétique est dans ce cadre un objectif proche de la maximisation de la durée de vie du réseau. Toutefois, comme nous l'avons détaillé dans le Chapitre 1 Sous-section 1.1.3, il existe des définitions alternatives que l'on retrouve dans la littérature : il peut s'agir par exemple de l'instant à partir duquel le réseau n'est plus connexe, ou encore de l'instant à partir duquel un certain pourcentage des cibles n'est plus couvert par les capteurs.

### **2.1.3 Les décisions relatives au modèle**

En fonction de l'objectif fixé, il existe de nombreuses façons de modéliser le problème relativement à des décisions que l'on souhaite prendre en compte ou non. Ainsi, on peut considérer :

- le placement des capteurs et éventuellement des puits afin d'assurer certains objectifs de couverture par exemple ;
- l'ordonnancement des périodes de veille et d'activité des capteurs une fois le réseau déployé ;

- le mouvement des capteurs et/ou des puits (dans un contexte mobile) ;
- la puissance (portée) du signal, c'est-à-dire la variation des valeurs de  $R_{capt}$  ou de  $R_{com}$  soit pour déterminer le déploiement du réseau, soit pour limiter la consommation énergétique une fois le réseau déployé ;
- l'angle restreint de couverture et/ou d'émission ;
- le flot à router entre deux nœuds du réseau (taille et nombre de messages).

#### 2.1.4 Types de contraintes

Une fois établis l'objectif et les décisions que l'on souhaite prendre sur le réseau, il convient de définir un contexte bien particulier qui déterminera la structure du réseau que l'on veut obtenir ainsi que les contraintes que l'on a décidé de respecter. Ainsi, on peut vouloir :

- conserver une couverture efficace du terrain ;
- maintenir la  $k$ -connectivité du réseau ;
- équilibrer la charge entre les nœuds et la charge sur le réseau ;
- respecter l'énergie maximale contenue dans chaque capteur sachant que les opérations nécessitant une consommation énergétique sont les suivantes (le taux d'énergie dépensée correspond alors à un paramètre mesurable) :
  - \* la captation et la compression des données ;
  - \* la transmission des données ;
  - \* la réception des données ;
  - \* le déplacement vers un autre emplacement ;
  - \* l'inactivité en dehors des périodes de veille ;
  - \* l'inactivité en veille ;
- respecter la bande passante associée à chaque capteur (contrainte en émission et/ou en réception) ;
- respecter le coût maximal de déploiement des capteurs ;

- respecter les différenciations selon le type de capteurs déployés (distance d'émission ou de captation maximale, nombre de paquets captés ou envoyés, fonction relais ou non, etc.);
- respecter la conservation du flot associé au routage;
- autoriser ou limiter le multi-sauts pour le routage;
- prendre en compte les obstacles.

Les problèmes que nous avons rencontrés dans la littérature prennent plus ou moins en compte cette liste de contraintes, dont le grand nombre s'explique par l'*hétérogénéité* des capteurs, c'est-à-dire qu'ils présentent des caractéristiques différentes à tous les niveaux envisageables.

### 2.1.5 Techniques de résolution

Les techniques employées pour résoudre de manière exacte ou approchée les problèmes mathématiques rencontrés dans la littérature reposent majoritairement sur la décomposition de Dantzig-Wolf et sa résolution via la génération de colonnes, mais aussi sur la relaxation lagrangienne, ou encore sur des heuristiques ou métaheuristiques (algorithmes génétiques) pour élaguer l'arborescence de recherche engendrée par les méthodes de séparation - évaluation.

Nous présentons à présent un ensemble de travaux qui s'intéressent à des problématiques d'optimisation dans les réseaux de capteurs proches de celui étudié au cours de cette thèse. Ces articles peuvent être classés en trois catégories, selon l'objectif recherché : minimisation de la consommation énergétique totale du réseau, maximisation de la durée de vie du réseau, minimisation du nombre de capteurs.

## 2.2 Problèmes liés à la consommation énergétique

### 2.2.1 Minimisation de la consommation énergétique totale

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, les objectifs dans les modélisations des réseaux de capteurs sont essentiellement centrés sur des préoccupations d'ordre énergétique dans le but de maximiser la durée de vie du réseau. Pour autant, le fait de minimiser



la consommation énergétique de l'un ou de l'ensemble des capteurs peut avoir du sens dans certains contextes et a l'avantage de supprimer la dimension temporelle.

### 2.2.1.1 Problème de placement, ordonnancement et routage

L'article [Kadayif, Kandemir, Vijaykrishnan, and Irwin 2005] se concentre sur un réseau de capteurs homogènes *mobiles* placés sur une grille à motif carré. À chaque capteur est associé un coût de déplacement et un coût de communication, dépendant tous deux de la distance. Dans ce réseau, étant donné un ensemble prédéterminé de couples de capteurs (source, destination), l'objectif est de minimiser la consommation énergétique nécessaire pour assurer la communication entre ces capteurs. Pour réduire les coûts de consommations énergétiques ou pour permettre la communication entre les capteurs, il est possible de déplacer l'ensemble des capteurs et en particulier les sources et destinations. Finalement, pour minimiser la consommation énergétique globale du réseau, on détermine une stratégie optimale de déplacement et de communication de l'ensemble des capteurs dans le but de minimiser cette consommation énergétique. On peut préciser que le poids donné à l'énergie dépensée pour la communication ou pour les déplacements est un paramètre fixé à l'avance. Il s'agit d'un article qui considère *la mobilité* des capteurs et la communication entre capteurs, sans s'intéresser à la captation, ni donc à la couverture.

Dans le contexte de cet article, on considère un placement initial des capteurs sur la grille. Un planning de communication donné fournit une liste de couples de capteurs (source, destination) devant communiquer entre eux, chacun de ces couples étant numéroté, ce qui correspond à la notion d'*affectation*. Les capacités de batterie, les coûts énergétiques associés à la communication entre capteurs et au déplacement sont des données du problème, ces coûts étant fonction de la distance. Tous les capteurs peuvent être déplacés depuis leur position de départ vers un emplacement libre. Par ailleurs, la communication entre une source et une destination données peut être multi-sauts (c'est-à-dire qu'un message peut être transmis via un ou plusieurs capteurs avant d'atteindre le capteur puits).

La fonction objectif, qui correspond à la consommation énergétique que l'on cherche à minimiser, s'exprime sous la forme  $T = \alpha M + \beta C$ , où  $M$  représente la consommation énergétique due à la mobilité des capteurs,  $C$  représente la consommation énergétique

associée à la communication entre les capteurs des différentes affectations, et  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes vérifiant  $\alpha + \beta = 1$  et qui permettent de donner plus ou moins d'importance à l'un des deux types de consommation énergétique.

La Figure 2.1 illustre un scénario correspondant à l'approche proposée, avec ici quatre affectations entre des couples de capteurs  $(s_k, d_k)$ , pour des valeurs fixées de  $\alpha$  et  $\beta$ . Sur l'exemple, certains capteurs (source ou destination) de la grille se déplacent afin de réduire les distances, et donc les coûts de communication, entre les capteurs impliqués dans les différentes affectations. Les nœuds cibles correspondent ici à des emplacements disponibles pour le déplacement des capteurs, mais ne désignent pas des cibles à couvrir. Sur l'exemple, c'est le capteur destination des affectations 3 et 4 qui s'est déplacé pour recevoir les messages qui lui sont destinés. Il reçoit un message directement du capteur source de l'affectation 3 et il reçoit le message du capteur source de l'affectation 4, via un capteur intermédiaire. Pour d'autres valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ , la stratégie de déplacement de capteurs obtenue serait bien évidemment différente. [Kadayif, Kandemir, Vijaykrishnan, and Irwin 2005] proposent également la possibilité d'empêcher le mouvement des capteurs mais, pour ce faire, ils ajoutent une contrainte à leur modèle déjà lourd au lieu de le simplifier. Ceci s'explique par le fait que le programme mathématique est utilisé par un logiciel paramétrable en fonction des besoins utilisateurs ; l'immobilité des capteurs est donc modélisée comme une option correspondant à un sous-ensemble de contraintes à ajouter.

Les résultats obtenus montrent que, comme on peut s'y attendre, le nombre de mouvements de capteurs dans la grille est fortement dépendant de la valeur des paramètres associés aux coûts énergétiques. Néanmoins, cette modélisation ne prend pas en compte les cas où les capteurs ne seraient pas homogènes par exemple en termes de batterie. En outre, elle ne prend que très partiellement en compte les problématiques liées à la captation, et ne précise pas en quoi elles pourraient influencer les résultats, ce qui manque de réalisme. Toutefois, l'article propose plusieurs pistes de modélisation en PLNE traduisant différentes options que l'utilisateur de leur logiciel peut choisir, comme la possibilité d'intégrer des obstacles, le fait de pouvoir faire du routage multi-saut ou non, le fait de fixer certains capteurs à l'avance, le fait de limiter le mouvement des capteurs ou encore calculer un tout autre objectif comme le coût de déploiement des capteurs.

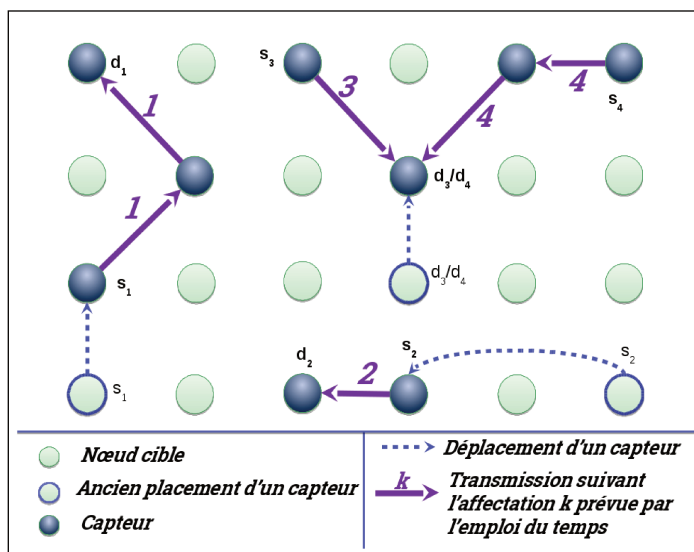


FIGURE 2.1 – Déplacement et communication des capteurs pour l’optimisation de la consommation énergétique associée au planning de communication, avec autorisation de multi-saut

### 2.2.1.2 Ordonnancement et routage

Les auteurs de [Aneja, Chandrasekaran, Li, and Nair \[2010\]](#) proposent également une modélisation d’un réseau de capteurs homogènes qui a pour objectif de minimiser la somme des puissances de communication assignées aux capteurs. Ils considèrent également des rayons de communication variables et ajoutent une contrainte de forte connexité sur l’ensemble des capteurs déployés. Le problème que l’article se propose de résoudre consiste à déterminer la puissance minimale de communication affectée à chaque capteur sachant que les capteurs doivent former un ensemble fortement connexe. Il s’agit donc d’un problème déterminant une topologie de réseau qui doit être optimale en termes de déploiement au coût énergétique le plus bas.

Le programme mathématique proposé dans l’article est donné dans la formulation “graphe partiel de communication”. On considère un graphe orienté  $G = (X, A)$  avec  $|X| = n$ , constitué de capteurs déjà placés; l’objectif du problème consiste à minimiser la somme des puissances  $\varepsilon_i$  attribuées à chaque capteur  $i$  sous des contraintes de forte connexité. Les variables de décision  $u_{ij}$  correspondent au fait de savoir si un arc  $(i, j)$  est retenu ou non dans le graphe partiel, fortement connexe, que l’on cherche à construire. Les

arcs  $(i, j)$  du graphe sont par ailleurs pondérés par des valeurs positives  $\Psi_{ij}$  qui représentent la puissance nécessaire à un capteur  $i$  pour transmettre vers le nœud  $j$ . La contrainte (2.1) assure le fait que la puissance  $\varepsilon_i$  choisie pour chaque capteur  $i \in X$  permet bien de couvrir l'arc le plus long qui sera retenu. La contrainte (2.2) traduit la forte connexité du graphe que l'on cherche à construire en considérant qu'un graphe est fortement connexe si et seulement si tous les sous-ensembles propres  $X'$  de  $X$  sont tels qu'il existe au moins un arc qui sort de  $X'$  vers  $\overline{X'}$ , ce qui correspond donc à  $2^n - 2$  contraintes.

**Formulation “graphe partiel de communication”**

$$\min \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$

avec

$$\varepsilon_i \geq \Psi_{ij} u_{ij} \quad \forall i \in X, \quad \forall j \in X \quad (2.1)$$

$$\sum_{(i,j) \in (X', \overline{X'})} u_{ij} \geq 1 \quad \forall X' \subset X, \quad X' \neq X, \quad X' \neq \emptyset \quad (2.2)$$

$$u_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in X, \quad \forall j \in X \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_i \geq 0 \quad \forall i \in X \quad (2.4)$$

Pour renforcer ce modèle étendu, les auteurs proposent d'ajouter des coupes, basées sur deux observations. Tout d'abord, la forte connexité du graphe implique que chaque sommet possède au moins un arc entrant et un arc sortant. En outre, une solution valide force les arcs de poids inférieurs à la puissance de transmission choisie à être tous retenus. Ce deuxième modèle, ainsi renforcé, améliore les résultats obtenus.

Une troisième modélisation étendue considère une formulation équivalente qui permet de se passer des contraintes (2.1) en intégrant dans la fonction objectif la différence de puissance pour chaque arc sortant d'un nœud donné. Finalement, à partir de cette modélisation, une procédure de lifting est appliquée aux contraintes de connexité pour aboutir à une formulation beaucoup plus rapide à résoudre que les deux autres formulations.

Afin de parvenir à une résolution exacte du problème malgré le nombre exponentiel de contraintes, un algorithme de Branch & Cut est mis en œuvre en utilisant une procédure de

séparation des contraintes de coupes. Pour cela, les auteurs partent d'une solution initiale correspondant à une arborescence couvrante (dont les arcs sont orientés dans les deux sens), puis résolvent le problème à chaque nœud de l'arbre sans inclure de façon exhaustive les contraintes de forte connexité, mais en ajoutant des coupes correspondant à la connexité au fur et à mesure de la descente dans l'arbre et de la fixation des variables. Cette génération de contraintes est utilisée pour la résolution des deux premiers modèles.

Les expériences réalisées montrent que la troisième formulation est la plus efficace et permet de trouver une solution optimale en une dizaine de minutes pour des graphes à 150 nœuds engendrés aléatoirement.

### 2.2.1.3 Localisation de puits multiples

Les auteurs de [Güney, Aras, Altinel, and Ersoy 2010] réduisent eux aussi le problème de la maximisation de la durée de vie du réseau à un problème d'optimisation de consommation énergétique. Pour cela, les auteurs mettent en avant le fait que ce sont les capteurs relais les plus proches des puits qui sont généralement les premiers à tomber en panne dans un contexte statique car ce sont les points de passage qui sont nécessairement les plus sollicités. Une façon efficace de remédier à cet effet "goulot d'étranglement" consiste à placer plusieurs puits afin d'homogénéiser la charge du réseau, ou bien à considérer un contexte dynamique, c'est-à-dire un puits mobile. L'article opte pour la première de ces solutions et étudie les avantages d'un placement multiple de puits, afin d'augmenter le nombre de capteurs voisins d'un puits, critiques pour la durée de vie du réseau. Toutefois, multiplier les puits a également pour effet d'augmenter significativement le coût total de déploiement du réseau, un nœud puits ayant un coût financier bien plus important que celui d'un capteur.

Les auteurs proposent ainsi d'étudier la *localisation* optimale de plusieurs puits statiques, dont le nombre est fixé à un certain entier  $\Pi$ , dans le cadre de la minimisation de la consommation énergétique d'une part et du coût financier d'autre part. Ils considèrent un réseau de capteurs hétérogènes, capables de traiter plusieurs types de flots différents. Les capteurs sont placés en amont, en certains points d'une grille à motif carré, et plusieurs capteurs peuvent être placés en un même point. Les critères de coût reposent respectivement sur le coût énergétique de transmission du flot et sur le coût économique associé au placement

des puits pour l'un et l'autre des problèmes.

Pour chacun de ces deux objectifs de minimisation d'énergie ou de coût, l'article propose trois modélisations différentes.

La première modélisation, appelée "puits multiples" et donnée ci-dessous, ne fait pas de différenciation de flot en fonction du capteur duquel il est originaire. L'ensemble des points de la grille est noté  $\mathcal{N}$ , et l'ensemble des points sur lesquels au moins un capteur a été placé est noté  $\mathcal{I} \subset \mathcal{N}$ . L'ensemble des capteurs placés en un point  $i \in \mathcal{I}$  est noté  $\mathcal{S}_i$ , avec  $S_i = |\mathcal{S}_i|$ ;  $S_i$  représente donc le nombre de capteurs placés en un nœud  $i$ . Le nombre total de capteurs placés est noté  $S$ . Les variables  $f_{ijkl}$  représentent la valeur du flot entre un capteur  $k$  placé en  $i$  et un capteur  $l$  placé en  $j$ ;  $z_j$  est une variable booléenne qui vaut 1 si un puits est placé sur le nœud  $j$ ;  $w_{ijk}$  est une variable positive représentant la valeur du flot terminal issu du capteur  $k$  placé en  $i$  vers le puits  $j$ ;  $\Pi$  est le nombre total de puits que l'on peut placer; finalement  $E_{ijk}$  représente l'énergie utilisée pour la transmission d'une unité de données depuis le capteur  $k$  placé en  $i$  vers le capteur  $j$ .

L'objectif consiste à minimiser la somme totale des énergies consommées par les capteurs lors du routage de l'information. Le problème est également soumis à une contrainte d'équilibre des flots (2.5), en respectant le placement des capteurs (2.6) et d'un nombre fixé de puits (2.7).

**Formulation “puits multiples”**

$$\min \left( \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{k \in \mathcal{S}_i} \sum_{\substack{j \in \mathcal{I} \\ j \neq i}} \sum_{l \in \mathcal{S}_j} E_{ijk} f_{ijkl} + \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{k \in \mathcal{S}_i} \sum_{j \in \mathcal{I}} E_{ijk} w_{ijk} \right)$$

avec

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{I} \\ j \neq i}} \sum_{l \in \mathcal{S}_j} \sum_{k \in \mathcal{S}_i} f_{jilk} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{I} \\ j \neq i}} \sum_{l \in \mathcal{S}_j} w_{jil} + S_i = \sum_{\substack{j \in \mathcal{I} \\ j \neq i}} \sum_{l \in \mathcal{S}_j} \sum_{k \in \mathcal{S}_i} f_{ijkl} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \sum_{k \in \mathcal{S}_i} w_{ijk} \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (2.5)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{k \in \mathcal{S}_i} w_{ijk} \leq S z_j \quad \forall j \in \mathcal{N} \quad (2.6)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} z_j = \Pi \quad (2.7)$$

$$f_{ijkl} \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}, \forall j \in \mathcal{N}, \forall k \in \mathcal{S}_i, \forall l \in \mathcal{S}_j \quad (2.8)$$

$$z_j \in \{0, 1\}, \quad w_{ijk} \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \forall j \in \mathcal{N}, \forall k \in \mathcal{S}_i \quad (2.9)$$

La deuxième modélisation conserve le même objectif mais associe à chaque capteur un flot propre à router, le routage du flot s'effectuant donc selon son origine, sachant qu'il peut y avoir plusieurs types de capteurs en un même nœud.

La troisième formulation, finalement, consiste en une formulation “ $p$ -médian” du problème, sachant qu'on ne se soucie pas du chemin emprunté par un flot pour arriver à un puits destination. Ainsi, l'objectif consiste cette fois à minimiser le coût de transport (en termes énergétiques) de l'ensemble des flots circulant depuis chaque capteur vers chaque puits. En d'autres termes, il s'agit d'un problème d'affectation de capteur à puits, le paramètre d'affectation  $A_{ijk}$  correspondant à la valeur de la consommation énergétique minimale requise pour router l'information envoyée par le capteur  $k$  placé en  $i$  vers le puits  $j$ . Afin que l'objectif ne soit pas modifié, les arêtes sont pondérées par l'énergie de transmission nécessaire pour que les deux sommets puissent communiquer entre eux. Comme précédemment,  $z_j$  est une variable booléenne qui vaut 1 si un puits est placé sur le nœud  $j$  et 0 sinon. Dans ce cadre, on introduit la variable  $r_{ijk}$  qui vaut 1 si le capteur  $k$  placé en  $i$  envoie ses données au puits  $j$ , et 0 sinon.

**Formulation “ $p$ -médian”**

$$\min \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{k \in \mathcal{S}_i} \sum_{j \in \mathcal{N}} A_{ijk} r_{ijk}$$

avec

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} r_{ijk} = 1 \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \forall k \in \mathcal{S}_i \quad (2.10)$$

$$r_{ijk} \leq z_j \quad \forall i \in \mathcal{I}, \forall j \in \mathcal{N} \quad \forall k \in \mathcal{S}_i \quad (2.11)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} z_j = \Pi \quad (2.12)$$

$$r_{ijk}, z_j \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \forall j \in \mathcal{N} \quad \forall k \in \mathcal{S}_i \quad (2.13)$$

De ces trois variantes, c’est cette dernière, celle du  $p$ -médian, qui a finalement été retenue par les auteurs car elle est efficace en termes de temps de calcul et son polyèdre des contraintes est le plus restreint, ce qui garantit une meilleure borne pour la relaxation continue. La relaxation lagrangienne, la méthode de réduction matricielle ainsi que l’heuristique d’Erlenkotter [Erlenkotter 1978] sont également utilisées comme méthodes de résolution, mais elles offrent globalement de moins bons résultats.

## 2.2.2 Maximisation de la durée de vie du réseau

Bien que la minimisation de la consommation énergétique du réseau ait un sens dans certains cas, elle n’est qu’une approche partielle pour traiter la question de la maximisation de la durée de vie du réseau, souvent plus critique, notamment dans le cas de capteurs hétérogènes. En effet, en contexte hétérogène, il n’est plus possible de raisonner sur la consommation énergétique d’un seul capteur, puisque les capteurs ont des ressources énergétiques différentes.

Comme on l’a vu dans le Chapitre 1, Sous-section 1.1.3, la notion de durée de vie d’un réseau de capteurs est définie de plusieurs manières dans la littérature. Cette section présente ainsi quatre articles qui abordent plus directement cette question de durée de vie.



### 2.2.2.1 Problème de placement, localisation, ordonnancement et routage

Centré sur l'objectif de maximisation de la durée de vie, l'article [Turkogullari, Aras, Altinel, and Ersoy 2010] (par une équipe proche de [Guney, Aras, Altinel, and Ersoy 2010]) propose une formulation incluant quatre sous-problèmes (*Placement*, *Localisation*, *Ordonnancement*, *Routage*) fréquemment rencontrés dans les réseaux de capteurs, mais très rarement traités ensemble.

En effet, ces sous-problèmes sont généralement considérés de façon indépendante dans la littérature avec des objectifs ne répondant pas nécessairement à des critères énergétiques. Les auteurs se proposent donc d'étudier une solution globale maximisant la durée de vie d'un réseau possédant plusieurs puits statiques, qui devront être localisés. La solution proposée est approchée et est obtenue par des heuristiques, le problème général étant trop complexe à résoudre avec les formulations proposées.

L'intérêt principal de l'article consiste à montrer que la prise en compte globale de ces quatre sous-problèmes affecte considérablement la durée de vie du réseau, car ils sont étroitement liés. En effet, la durée de vie du réseau n'est généralement considérée que lors de *l'ordonnancement* et du *routage* indépendamment de la localisation du puits et du placement des capteurs qui sont supposés avoir préalablement été effectués. Cette prise en compte globale faisant dépendre les quatre composantes des problématiques en réseau de capteurs est donc ambitieuse et à notre connaissance rarement effectuée.

Les capteurs sont hétérogènes en termes de portée de captation et de transmission, de consommation énergétique, ainsi que de coût unitaire. L'article considère que l'espace des cibles à couvrir est discrétisé en une grille de points. Le temps est d'abord discrétisé, étant donné qu'il sert d'indice au modèle initial. Par ailleurs, le modèle intègre plusieurs contraintes classiques telles qu'une limite de budget de déploiement, une limite de batterie par capteur et la conservation des flots. Enfin, une contrainte de qualité de couverture stipule que tout point de la grille doit être couvert par un nombre suffisant de capteurs.

Le nombre de capteurs en un emplacement n'est pas limité, mais à l'optimum il est montré qu'il existe une solution équivalente avec au plus un capteur par nœud de la grille. Il n'existe pas non plus de contrainte de connexité, mais celle-ci est rendue implicite par

le respect des contraintes de conservation du flot et le bon acheminement des données envoyées par toute source vers un certain puits.

Le problème formulé est celui de la maximisation de la durée de vie du réseau, entendue d'après la définition du maintien d'une qualité de couverture minimale sur chacune des cibles. Il est d'abord modélisé sous la forme d'un PLNE. Ce modèle revient à la modélisation d'un problème de couverture sous contraintes mais, du fait de la discrétisation du temps et du nombre important de variables, ce modèle donne un programme assez lourd et long à résoudre de manière exacte par un solveur, même pour des instances de taille modérée. Les auteurs adoptent alors une heuristique pour résoudre le problème, avec pour objectif de trouver des ensembles disjoints de capteurs satisfaisant chacun la couverture des nœuds cibles et le routage vers les puits. Pour cela, les auteurs divisent la zone géographique à couvrir en un nombre de zones rectangulaires de taille égale correspondant au nombre de puits, puis placent les puits au milieu de ces zones, de sorte que leur distance moyenne aux capteurs soit minimale. L'heuristique revient alors à résoudre un programme linéaire dont l'objectif est de maximiser la durée de vie de capteurs préalablement placés, sous des contraintes de flots.

La Figure 2.2 illustre ainsi l'alternance d'activation de deux couvertures disjointes, routant l'information des capteurs vers deux puits situés au milieu de deux zones de même taille.

De fait, la méthode proposée par cet article peut s'apparenter à une heuristique reposant sur la génération de colonnes, où une colonne est associée à une couverture valide et dont la résolution du problème auxiliaire (non continu) se fait ici de manière approchée par heuristique, alors que le problème maître, linéaire, se résout de façon exacte.

### **2.2.2.2 Ordonnancement et routage**

L'article présenté dans cette section, ainsi que les articles décrits dans les sections 2.2.2.3 et 2.2.2.4, reposent sur la décomposition de Dantzig-Wolfe. Ils utilisent un modèle étendu avec un nombre exponentiel de variables, réduit en un problème maître restreint et son problème auxiliaire afin d'être résolu par génération de colonnes. La structure du problème maître restreint est commune à l'ensemble des trois articles et possède l'avantage d'être

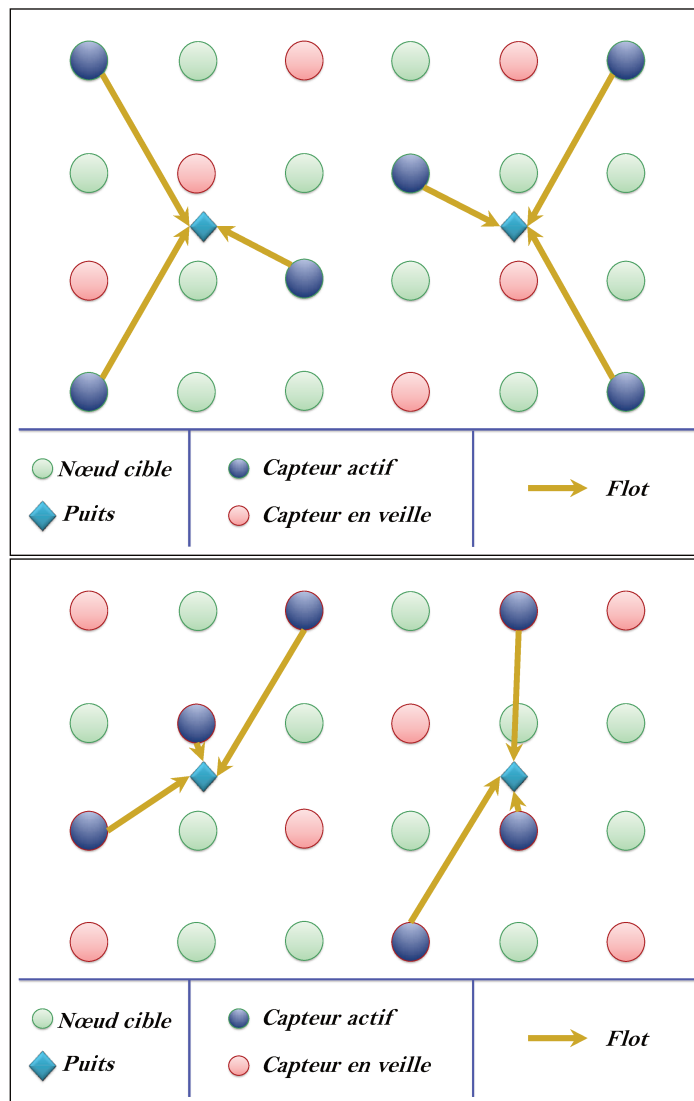


FIGURE 2.2 – Alternance de deux couvertures disjointes de capteurs actifs avec deux puits, avec  $R_{capt} = 2$  et  $R_{com} = 3$

un programme linéaire. Sa résolution par la génération de colonnes est donc exacte et calculable en un temps raisonnable.

Ce problème a pour objectif de maximiser la durée de chacune des couvertures sélectionnées par le problème auxiliaire, sachant qu'en tout  $C$  couvertures ont été sélectionnées. L'unique contrainte dans le problème maître assure le respect de la limitation de batterie de chaque capteur. Sa formalisation est donnée ci-dessous, où  $t_c$  est une variable positive représentant la durée pendant laquelle la couverture  $c$  est active,  $P_{ic}$  représente la consom-

mation énergétique du capteur  $i$  dans la couverture  $c$ ,  $B_i$  la quantité de batterie disponible pour le capteur  $i$  et  $n$  correspond au nombre total de capteurs placés.

**Problème maître pour la maximisation de la durée de vie du réseau**

$$\max \sum_{c=1}^C t_c$$

avec

$$\sum_{c=1}^C P_{ic} t_c \leq B_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.14)$$

$$t_c \geq 0 \quad \forall c \in \{1, \dots, C\} \quad (2.15)$$

La seule variation entre les différents problèmes maîtres rencontrés réside dans le paramètre de consommation énergétique ( $P_{ic}$ ) qui dépend des actions que le capteur est habilité à effectuer en fonction de la modélisation. Ce paramètre est calculé par les problèmes auxiliaires dans le schéma de génération de colonnes à laquelle il correspond. Les couvertures ainsi produites par le problème auxiliaire seront alternées pendant un court laps de temps (non défini par le problème) jusqu'à épuisement de la première batterie à tomber en panne. Les capteurs ne participant pas à une couverture seront mis en veille lorsque cette couverture est activée.

Dans [Alfieri, Bianco, Brandimarte, and Chiasserini 2007], Alfieri et al. se restreignent au problème d'*ordonnancement* et de *routage*, contrairement à l'article précédent [Turkogullari, Aras, Altinel, and Ersoy 2010]. Le placement des capteurs est donc déjà connu à l'avance. La définition retenue pour la durée de vie du réseau est la même que dans [Turkogullari, Aras, Altinel, and Ersoy 2010]. [Alfieri, Bianco, Brandimarte, and Chiasserini 2007] fournit également une solution exacte au problème considéré et constitue l'article qui fait largement référence en matière de modèle étendu et résolution via la génération de colonnes dans la littérature sur les réseaux de capteurs. Ainsi, dans [Alfieri, Bianco, Brandimarte, and Chiasserini 2007], une colonne correspondra à une couverture valide du réseau dont on mesure la durée de vie au premier capteur qui tombe en panne. Il se veut en fait être une généralisation du problème de *Set Packing* décrit par Garey & Johnson [Garey and

Johnson 1979], mais dont les ensembles sont non nécessairement disjoints. Une approche exacte, centralisée, et une approche heuristique, distribuée, sont détaillées dans l'article mais cette seconde approche reste assez rudimentaire.

Dans la modélisation réalisée, le réseau est assez dense pour garantir un niveau de couverture satisfaisant et les capteurs sont déjà placés. La durée de vie du réseau est prolongée via la méthode d'alternance des couvertures de capteurs à l'état actif. Comme le réseau est homogène, la durée de vie d'une couverture donnée revient à minimiser la consommation énergétique du capteur consommant le plus sans devoir considérer la dimension du temps. Les auteurs proposent ainsi d'abord un modèle compact qui se concentre sur une couverture donnée et ne s'exprime qu'en termes de puissance énergétique dépensée. Un modèle étendu prenant en compte la dimension du temps est ensuite proposé, permettant ainsi de maximiser la durée de vie du réseau.

Les contraintes associées au problème compact sont de facture classique et prennent en compte la conservation du flot et la validité de la couverture. La validité de celle-ci est toutefois un peu particulière, étant donné que chaque cible du réseau n'a pas nécessairement à être couverte : dans ce modèle, une couverture valide est une couverture qui garantit un certain taux de couverture  $\Theta$ .

L'intérêt principal de l'article réside dans la décomposition de Dantzig-Wolfe du problème avec un problème maître facile à résoudre et un problème auxiliaire difficile. Le problème maître a été explicité ci-dessus. Le problème auxiliaire, quant à lui, garde les contraintes de couverture et de transmission du modèle compact en minimisant les coûts réduits (associés aux variables duales  $\lambda_j$  issues du problème maître). Le problème auxiliaire peut donc se modéliser comme suit :

**Problème auxiliaire engendrant une couverture de réseau**

$$\max \left( 1 - \sum_{j=1}^N \lambda_j \left[ \sum_{i \in C_j} E^c D_i y_{ij} + \sum_{k \in R_j} (E_{jk}^t f_{jk} + E^r f_{kj}) \right] + \sum_{j \in R_H} \lambda_j E_{jH}^t w_j \right)$$

avec

$$\sum_{i \in C_j} D_i y_{ij} + \sum_{k \in R_j} f_{kj} = \sum_{k \in R_j} f_{jk} + w_j \quad \forall j \in \{1, \dots, N\} \quad (2.16)$$

$$\sum_{j \in S_i} y_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (2.17)$$

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j \in S_i} y_{ij} \geq \Theta.M \quad (2.18)$$

$$w_j = 0 \quad \forall j \notin R_H \quad (2.19)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad w_j \geq 0, \quad f_{jk} \geq 0 \quad (2.20)$$

Pour tout nœud  $i \in \{1, \dots, M\}$ ,  $S_i$  désigne l'ensemble des capteurs couvrant  $i$ . Pour tout capteur  $j \in \{1, \dots, N\}$ ,  $C_j$  désigne l'ensemble des nœuds présents dans le rayon de captation de  $j$  et  $R_j$  l'ensemble des capteurs présents dans son rayon de communication.  $H$  désigne le puits.  $D_i$  représente la valeur du flot issu du nœud  $i$  lorsqu'il est couvert,  $E^c$  est l'énergie consommée par un capteur pour la captation d'une unité de flot,  $E^r$  est l'énergie consommée pour la réception d'une unité de flot, et  $E_{jk}^t$  est l'énergie consommée pour transmettre une unité de flot entre le nœud  $j$  et le nœud  $k$ . La variable positive  $w_j$  représente la valeur du flot terminal issu du capteur  $j$ ,  $f_{jk}$  est une variable représentant la valeur du flot entre le nœud  $j$  et le nœud  $k$ , et  $y_{ij}$  est une variable booléenne qui vaut 1 si le capteur  $j$  couvre le nœud  $i$ . La contrainte (2.16) est une contrainte de conservation de flot classique. Les contraintes (2.17) et (2.18) forcent chaque couverture à couvrir un certain pourcentage  $\Theta$  du terrain. Enfin, la contrainte (2.19) force les flots vers le puits à être nuls si le capteur n'est pas dans le voisinage de celui-ci.

Les couvertures obtenues sont non nécessairement disjointes, sauf celles qui seront utilisées à l'initialisation. En outre, afin d'éviter une convergence trop lente de l'algorithme de génération de colonnes, on le stoppe lorsque la durée de vie n'est plus augmentée significativement.

### 2.2.2.3 Routage avec puits mobile

Tout comme dans [Guney, Aras, Altinel, and Ersoy 2010], les auteurs de l'article [Behdani, Yun, Smith, and Xia 2012] considèrent que la durée de vie d'un réseau est intimement liée aux problèmes de goulot d'étranglement qui fait que certains capteurs sont bien plus sollicités que d'autres. Ainsi, [Behdani, Yun, Smith, and Xia 2012] propose de contrecarrer l'effet goulot d'étranglement dans le voisinage d'un puits en rendant le puits mobile afin d'homogénéiser la charge du routage sur tout le réseau. Concrètement, le problème va consister en l'ordonnancement des déplacements du puits et la détermination de la durée de ses temps d'arrêt à travers le réseau, sachant que le temps de déplacement d'un nœud du réseau à l'autre sera considéré comme négligeable. Suivant le même type d'approche que [Alfieri, Bianco, Brandimarte, and Chiasserini 2007], l'article [Behdani, Yun, Smith, and Xia 2012] repose sur une décomposition de Dantzig-Wolfe d'un modèle compact, mais le but de cette décomposition est un peu différent puisque le modèle compact dont est issue la décomposition est initialement exprimable en un programme linéaire donc facile à résoudre.

Les auteurs considèrent ici que le puits est unique, que les capteurs ne seront pas mis en veille et que les capteurs sont hétérogènes en termes de batterie. Ici, la définition retenue pour la durée de vie du réseau est celle de l'instant où le premier capteur a épuisé sa batterie. Deux modèles sont proposés, le second reposant sur les mêmes critères que le premier mais avec prise en compte de délais d'envoi. Dans ce dernier contexte de prise en compte des délais d'envoi, les capteurs stockent l'information à envoyer jusqu'à une certaine limite de données et l'envoient vers le puits lorsque celui-ci est dans un voisinage jugé optimal pour la durée de vie du réseau. Enfin, pour simplifier le problème, le puits ne peut se déplacer qu'en des points prédéterminés. Les deux modèles considérés par l'article ont pour objectif la maximisation de la somme des temps que le puits passe en une certaine location.

La décomposition obtenue se ramène à celle, bien connue, décrite dans [Alfieri, Bianco, Brandimarte, and Chiasserini 2007] où le problème maître correspond à celui présenté dans la Section 2.2.2.2 mais où, fait notable, chaque colonne est indexée par l'emplacement du

puits auquel elle correspond. Un problème auxiliaire consiste quant à lui, à maximiser les coûts réduits associés aux variables duales, sous de simples contraintes de conservation du flot. Ici, la colonne ne correspond pas à une couverture mais à un simple flot. L'alternance des colonnes engendrées ne se fait donc plus en fonction de couvertures de la grille mais en fonction de l'emplacement du puits et du routage du flot afférent.

Le premier problème auxiliaire considéré par l'article prend en compte tous les emplacements du puits. Il sera ensuite découpé en autant de sous-problèmes qu'il y a d'emplacements de puits possibles, ce qui permet d'engendrer plus de colonnes à la fois. Le problème auxiliaire considéré est donc le suivant, pour chaque emplacement du puits à une localisation différente  $l$ , et en utilisant les mêmes notations que dans le problème auxiliaire décrit dans la Section 2.2.2.2. Cette fois, on considère  $f_{ij}^l$  comme étant la quantité de flot circulant entre le nœud  $i$  et le nœud  $j$ , lorsque le puits est situé à l'emplacement  $l$ .

#### Problème auxiliaire selon l'emplacement du puits

$$\max \left( 1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i \left[ \sum_{j \in R_i} E_{ij}^t f_{ij}^l + \sum_{j: i \in R_j} E^r f_{ji}^l \right] \right)$$

avec

$$D_i + \sum_{j: i \in R_j} f_{ji}^l = \sum_{j \in R_i} f_{ij}^l \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.21)$$

$$f_{ij}^l \geq 0 \quad (2.22)$$

L'objectif consiste à maximiser les coûts réduits associés aux flots, sous des contraintes de conservation du flot.

Chaque sous-problème auxiliaire est facile à résoudre et est équivalent à un problème de flot de coût minimal (si on considère le problème en minimisant le deuxième terme des coûts réduits) avec capacité infinie sur les arcs, ce qui est équivalent à trouver le plus court chemin d'un capteur vers l'emplacement où se trouve le puits.

La prise en compte des délais de transmission change notablement la structure générale du problème, mais permet là aussi la décomposition de Dantzig-Wolfe en sous-problèmes,



d'autant plus que le programme mathématique considéré est un programme dynamique. La principale différence dans cette modélisation, relativement à la précédente, est la prise en compte du fait qu'un capteur peut conserver des données avant transmission, mais doit les avoir transmises au moins une fois pendant le temps mis par le puits pour effectuer une tournée de l'ensemble des capteurs.

L'objectif de ce nouveau problème consistera à maximiser le nombre de tournées (dont le temps est fixé, cette fois) avant qu'un premier capteur ne tombe en panne. À nouveau, à la génération de colonnes correspond un problème de flot minimal quand le puits est en un certain emplacement. Il y a donc autant de graphes à considérer qu'il y a d'emplacements et, par une fusion de ces graphes, le problème se ramène à trouver un plus court chemin dont les poids des arêtes sont positifs, ce qui permet d'appliquer l'algorithme de plus court chemin de Dijkstra.

Au vu des résultats obtenus, la résolution exacte par génération de colonnes du problème considéré est plus intéressante dans le cas sans prise en compte du buffer (le plus court chemin y est plus simple), mais dans tous les cas, cette manière de procéder rivalise avec les meilleures techniques utilisées par les solveurs (comme les points intérieurs) et démontre ainsi son intérêt pour un contexte distribué, généralement réputé comme étant plus lent.

### **2.2.2.4 Capteurs directionnels et couverture du réseau**

Reprenant le même procédé de génération de colonnes que [Alfieri, Bianco, Brandimarte, and Chiasserini 2007], l'article proposé par Singh et Rossi [Singh and Rossi 2013] considère le contexte peu étudié de capteurs directionnels, c'est-à-dire, ayant un champ de captation (mais pas de transmission) limité selon les directions considérées, toujours dans le contexte de la maximisation de la durée de vie du réseau. La définition retenue pour la durée de vie du réseau est celle du maintien de la couverture de chaque cible par au moins un capteur. La décomposition de Dantzig-Wolfe est également combinée à une métaheuristique de type algorithme génétique. Ce procédé est plus efficace, en temps de calcul, pour la génération des colonnes de coûts réduits strictement positifs que la résolution exacte du PLNE auxiliaire, qui est effectuée dès lors que la métaheuristique n'engendre plus de nouvelles colonnes.

L'originalité de la démarche de [Singh and Rossi 2013](#) réside dans le fait que le problème est résolu de façon exacte grâce à cette approche nommée *matheuristique*.

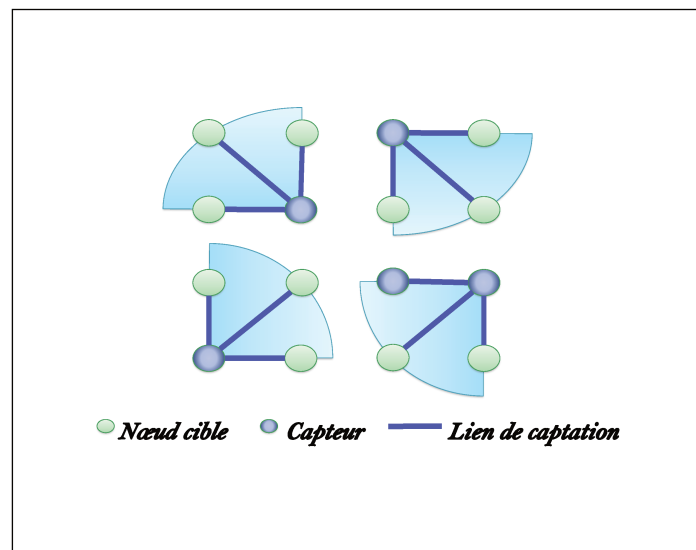


FIGURE 2.3 – Couverture des cibles par les capteurs avec angle de captation fixe et rotatif

La Figure [2.3](#) illustre une couverture des cibles par des capteurs à champ de captation restreint et pivotable. Il est en effet supposé que les capteurs peuvent changer leur direction de captation, nommée *direction de travail*.

Le but du problème revient à ordonnancer l'activité des capteurs suivant des couvertures non disjointes de manière à maximiser la durée de vie du réseau, en s'assurant que chaque cible soit couverte par au moins un capteur actif. La modélisation est très classique et ne prend pas en compte la transmission des données. Le problème ainsi modélisé est *difficile* puisqu'il existe un nombre exponentiel de variables associées à autant de couvertures possibles (le nombre de couvertures d'un graphe étant exponentiel en fonction de la taille du graphe).

Afin de simplifier la résolution du problème, l'article procède par génération de colonnes, sachant qu'à chaque colonne correspond une couverture valide du terrain. Le problème initial va donc être décomposé en deux sous-problèmes : le problème maître restreint à un sous-ensemble de couvertures (ou colonnes) et le problème auxiliaire qui permet d'engendrer des couvertures améliorantes. Le problème maître va correspondre à l'ordonnancement d'un nombre raisonnable de couvertures de manière à maximiser la durée de vie du réseau.

Ces couvertures sont engendrées par le problème auxiliaire qui assure qu'elles sont valides.

Ainsi, l'objectif du problème auxiliaire consiste comme d'habitude à maximiser les coûts réduits, sachant que la consommation énergétique n'est pas prise en compte dans ce modèle, contrairement à [Alfieri, Bianco, Brandimarte, and Chiasserini 2007] ou [Behdani, Yun, Smith, and Xia 2012]. La couverture engendrée n'a pas à satisfaire d'équation de balance des flots mais doit satisfaire le fait qu'une seule direction de travail doit être sélectionnée et que l'ensemble des cibles de la grille sont couvertes.

C'est le problème auxiliaire qui est critique en termes de résolution étant donné qu'il s'agit d'un PLNE. Il est donc résolu par un algorithme génétique tant que ce dernier permettra de produire des couvertures de coût réduit strictement positif. Le problème sera ensuite résolu de façon exacte pour prouver l'optimalité de la solution ou pour trouver une colonne améliorante.

Les résultats numériques présentés pour cette approche sont intéressants car, sans que le problème devienne *facile*, la modélisation permet de traiter des tailles importantes de réseau (plusieurs centaines de capteurs) tout en obtenant la garantie d'optimalité.

Citons enfin deux autres articles de Rossi *et al.* [Rossi, Singh, and Sevaux 2013] et [Rossi, Singh, and Sevaux 2012] qui reprennent les travaux de l'article précédent [Singh and Rossi 2013] mais en considérant d'autres variables ajustables : l'ajustement des angles de captation d'une part et la portée du rayon de captation d'autre part.

Globalement, pour tous les articles de cette équipe, les résultats sont très mauvais si on se limite au modèle compact. Les articles ont donc recours à une décomposition de Dantzig-Wolfe en génération de colonnes avec appel à un algorithme génétique pour accélérer la recherche des couvertures attractives. Cette méthode, réduisant l'espace de recherche des colonnes, donne des résultats à la fois exacts et satisfaisants en termes de temps de calcul.

## 2.3 Dominant connexe minimum (MCDS) et couverture connexe minimum (MCCS)

Si la minimisation de la consommation énergétique ou alternativement la maximisation de la durée de vie du réseau restent les objectifs principaux dans l'optimisation des réseaux de capteurs, comme on l'a vu, l'objectif de minimisation du nombre de capteurs déployés dans le contexte d'un réseau de capteurs discrétisé recouvre également un pan important de l'état de l'art sur le sujet.

Dans cette section, on reprendra les principaux problèmes de minimisation du nombre de capteurs décrits en fin de Chapitre 1, Section 1.2.3. Tout d'abord, cette section de notre état de l'art fera le bilan sur les résultats de complexité connus à ce jour pour l'ensemble des problèmes précédemment détaillés, puis on se concentrera sur l'étude des différentes formulations mathématiques proposées dans le cas où  $R_{com} = R_{capt}$ , c'est-à-dire dans le cas des problèmes *MCDS* et *MLST*. Finalement, on terminera par un tour d'horizon de quelques modèles proposés pour les problèmes *MDS* et *MCCS* dans les cas  $R_{com} \neq R_{capt}$ .

### 2.3.1 Résultats de complexité pour les problèmes de minimisation de capteurs

Comme on l'a vu, la contrainte seule de couverture du terrain en ayant pour objectif de minimiser le nombre de capteurs peut être modélisée par le problème classique du *dominant minimum*, *MDS*. Ce problème a été prouvé NP-difficile dans les graphes généraux [Garey and Johnson 1979]. Toutefois, les auteurs de [Gonçalves, Pinlou, Rao, and Thomassé 2011] ont prouvé que dans une grille à motif carré, ce problème devient polynomial.

Si l'on s'intéresse maintenant aux problèmes de dominant ou de couverture connexe minimum (*MCDS* ou *MCCS*), *MCDS* a été prouvé NP-difficile dans les graphes généraux [Garey and Johnson 1979]. Or, comme *MCDS* est un cas particulier de *MCCS* quand  $R_{capt} = R_{com}$ , on en déduit que *MCCS* est également NP-difficile dans les graphes généraux.

Par ailleurs, on a vu que ces deux problèmes trouvent de nombreuses applications dans

les réseaux de capteurs sans fil, notamment des problèmes de routage [Das and Bharghavan 1997]. Ainsi, une solution des problèmes *MCDS* ou *MCCS* donne un placement optimal qui minimise le nombre de capteurs pour couvrir un ensemble de cibles tout en permettant de router les informations captées vers un puits. En outre, dans le contexte de graphes particuliers, les grilles à motif carré sont particulièrement adaptées à la modélisation d'applications dans les réseaux [Peis, Skutella, and Wiese 2010], ce qui justifie que nos travaux s'y concentrent particulièrement, d'autant que la complexité des problèmes *MCDS* ou *MCCS* reste encore ouverte dans ce type de graphes.

Pour le problème *MLST*, dont on rappelle que les solutions sont complémentaires de celles de *MCDS*, plusieurs travaux ont été effectués en termes de complexité. Notamment, il a été prouvé récemment que le problème *MLST* est *APX*-difficile pour les graphes cubiques (i.e. les graphes 3-réguliers) [Bonsma 2012] et *APX*-difficile pour tous les graphes  $k$ -réguliers, pour tout  $k \geq 5$ , avec  $k$  impair [Reich 2016]. En outre, Guha et Khuller [Guha and Khuller 1998] ont montré que dans les graphes généraux, l'existence d'un algorithme résolvant le problème *MCDS* avec un rapport d'approximation  $\alpha$  implique l'existence d'un algorithme pour le problème *MLST* avec un rapport d'approximation  $2\alpha$ .

En ce qui concerne le problème *MCCS*, on rappelle qu'il diffère dans les réseaux de capteurs du problème *MCDS* en ce qu'il prend en compte le fait qu'il y ait différentes valeurs pour les deux rayons  $R_{com}$  et  $R_{capt}$ . Les auteurs de [Rebai, Le Berre, Snoussi, Hnaïen, and Khoukhi 2015] suggèrent que la complexité de la résolution de ces problèmes de dominant connexe minimum pourrait dépendre des liens entre  $R_{com}$  et  $R_{capt}$  dans les grilles à motif carré. En effet, les résultats qu'ils obtiennent par la programmation mathématique changent de façon notable en fonction des valeurs de  $R_{com}$  et  $R_{capt}$ , et notamment du rapport  $\frac{R_{capt}}{R_{com}}$ . À notre connaissance, la complexité de ce problème reste encore ouverte dans les grilles à motif carré, ce, pour n'importe quelle valeur de  $R_{com}$  et de  $R_{capt}$ .

Pour conclure ce tour d'horizon des résultats de complexité connus à ce jour, on peut mentionner les travaux de [Wu and Li 2008] sur le problème du *MmDkCS*. Étant donné que *MmDkCS* est une généralisation de *MCDS* (identique à *M1D1CS*), on en déduit

que  $MmDkCS$  est également *NP-difficile*. Généralement, étant donné que ce problème est très contraint, les articles ne vont pas plus loin que la 2-connexité, voire la 3-connexité, mais [Wu and Li 2008] proposent un algorithme distribué reposant sur le voisinage qui peut être appliqué pour n'importe quelle valeur de  $k$ . La construction d'une telle topologie est basée sur  $m$  ensembles stables maximaux et disjoints que l'on rend séparément connexes un à un.

Rappelons enfin la taxinomie effectuée en début de chapitre, classifiant les problèmes rencontrés par les articles en fonction des sous-problématiques qu'ils traitent ou non, à savoir : le placement des capteurs pour la couverture, le routage de l'information jusqu'au puits, la localisation du ou des puits, et l'ordonnement des phases d'activité. Il est à noter que l'ensemble des problèmes de minimisation de capteurs étudiés prennent en compte le placement des capteurs, et seul *MDS* n'intègre pas le routage. La localisation des puits et l'ordonnement des capteurs ne font donc pas partie de ces différents problèmes de minimisation.

### 2.3.2 Modélisation des problèmes de minimisation de capteurs

Nous nous intéressons maintenant aux différentes modélisations explorées pour les problèmes de minimisation des capteurs. Dans [Lucena, Maculan, and Simonetti 2010], Lucena *et al.* proposent des formulations étendues du problème MLST basées sur une formulation sommet-arête ainsi que sur une investigation polyédrique précédemment proposée par Fujie dans [Fujie 2003], [Fujie 2004] et Gonçalves *et al.* [Gonçalves, Pinlou, Rao, and Thomassé 2011]. Ces deux travaux précédents n'avaient en effet pas exhibé de résultats expérimentaux de leur formulation tandis que le travail de [Lucena, Maculan, and Simonetti 2010] montre des comparaisons détaillées de différents algorithmes liés à ces formulations. Gendron *et al.* [Gendron, Lucena, da Cunha, and Simonetti 2014] ont ensuite enrichi cette étude en présentant un algorithme de Branch & Cut et une décomposition de Benders tous les deux basés sur la même formulation. Ils ont à ce jour obtenu les meilleurs résultats puisqu'ils ont réussi à résoudre de façon exacte des problèmes à 200 sommets pour des graphes de faible densité.

Les auteurs de [Reis, Lee, and Usberti 2015] ont proposé une formulation reposant sur

les flots pour le problème MLST. Cette formulation présente l'avantage d'être très simple et donne en outre des résultats très similaires à ceux exhibés par Lucena et al. [Lucena, Maculan, and Simonetti 2010].

Fan et Watson [Fan and Watson 2012] concentrent leur étude sur différentes formulations en variables mixtes du MCDS. Ils étudient ainsi une formulation appelée MTZ (voir chapitre suivant), les contraintes de Martin et une formulation par flots. Ils ont réussi à résoudre des graphes à faible densité comprenant jusqu'à 300 sommets. Étant donné que les formulations que nous exposons dans le chapitre 3.3 sont très proches des leurs, nous les exposerons conjointement afin de mieux exhiber leurs différences.

Pour le problème du *MDS* sur une grille à motif carré, les auteurs de [Fata, Smith, and Sundaram 2013] proposent plusieurs algorithmes et formules pour des solutions réalisables. Pour le cas  $R_{capt} = 1$ , ils proposent un algorithme distribué permettant de construire une solution optimale telle que prouvée par [Gonçalves, Pinlou, Rao, and Thomassé 2011]. Dans le cas  $R_{capt} > 1$ , ils proposent des heuristiques fournissant une borne supérieure au problème *MDS* sur une grille, ces heuristiques étant inspirées par celle proposée pour  $R_{capt} = 1$ . Leur construction reprend le principe de la preuve de [Gonçalves, Pinlou, Rao, and Thomassé 2011] qui stipule que, dans une solution optimale, certains emplacements ne seront jamais choisis, ce qui impose une structure particulière aux solutions optimales. Ces travaux possèdent l'intérêt de fournir des solutions réalisables au problème du *MDS* dans les grilles à motif carré, ce qui en terme de réseaux de capteurs est intéressant dans le cas où  $R_{com}$  est suffisamment grand par rapport à  $R_{capt}$  pour que la captation des cibles implique nécessairement la connexité des capteurs entre eux. On prouvera en toute fin de Chapitre 4 les relations entre  $R_{capt}$  et  $R_{com}$  pour lesquelles cette condition est réalisée dans les grilles à motif carré.

Finalement, les auteurs de [Rebai, Le Berre, Snoussi, Hnaien, and Khoukhi 2015] proposent quant à eux une formulation inspirée par des contraintes de chemin et limitent leur étude au problème *MCCS* dans les grilles à motif carré, étant donné que les grilles sont particulièrement adaptées à la modélisation d'applications dans les réseaux [Peis, Skutella, and Wiese 2010].

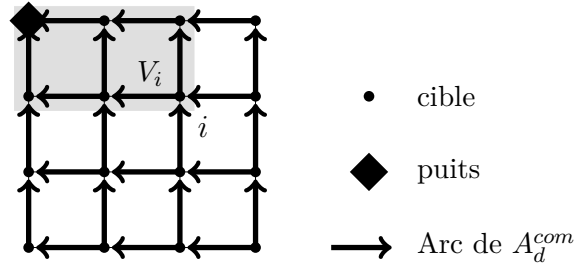


FIGURE 2.4 – Graphe  $G_d^{com}$  pour une grille  $4 \times 4$  avec  $R_{com} = 1$ .

Le modèle proposé par [Rebai, Le Berre, Snoussi, Hnaien, and Khoukhi 2015] repose sur la distinction entre deux types de chemin pouvant relier un capteur au puits : les chemins de connexion directe ou indirecte. En anticipant la définition formelle que l'on donne d'un réseau de capteurs dans le chapitre suivant, on considère un graphe non orienté  $G = (X, A)$  défini à partir de la distance  $d(i, j)$  entre deux sommets  $i$  et  $j$  d'une grille :  $X$  correspond aux sommets de la grille et  $A$  contient les arêtes  $\{i, j\}$  pour tous les sommets  $i$  et  $j$  pour lesquels on a  $d(i, j) \leq R_{com}$ . Soit  $G' = (X, A')$  la version orientée de  $G$ . Pour chaque nœud  $i$  de la grille, on considère le plus petit rectangle de la grille qui contient à la fois le nœud  $i$  et le puits  $t$ . Soit  $V_i$  l'ensemble des nœuds compris dans ce rectangle. On note  $G_d^{com} = (X, A_d)$ , le graphe partiel de  $G'$  où pour tout  $j \in X \setminus \{t\}$ , seuls les arcs  $(j, j')$  avec  $j' \in V_j$  sont retenus. La Figure 2.4 propose un exemple de  $G_d^{com}$  pour une grille  $4 \times 4$  avec  $R_{com} = 1$ . Un chemin allant d'un nœud quelconque  $i$  jusqu'au puits est défini comme un *chemin de connexion directe* s'il n'utilise que des arcs appartenant à  $A_d$ . Sinon, si le chemin inclut au moins un arc qui n'appartient pas à  $A_d$ , c'est un *chemin de connexion indirecte*. Des exemples de chemin de connexion directe et indirecte sont illustrés par la Figure 2.5. Rebai *et al.* [Rebai, Le Berre, Snoussi, Hnaien, and Khoukhi 2015] affirment par ailleurs que, dans une solution optimale pour une grille carrée à  $n$  lignes et  $n$  colonnes, la longueur (en nombre d'arcs) d'un chemin de connexion indirecte, avant de rejoindre un chemin de connexion directe, peut être borné supérieurement par  $P = \lceil \frac{2(n-1)}{R_{com}} \rceil$ . Lorsque  $R_{com} = 1$ ,  $P$  peut être vu comme la distance de Manhattan maximale dans  $A$ .

Le modèle proposé dans [Rebai, Le Berre, Snoussi, Hnaien, and Khoukhi 2015] est donné dans la formulation MIP1. Pour  $i \in X$ , la variable binaire  $z_i$  vaut 1 si un capteur est



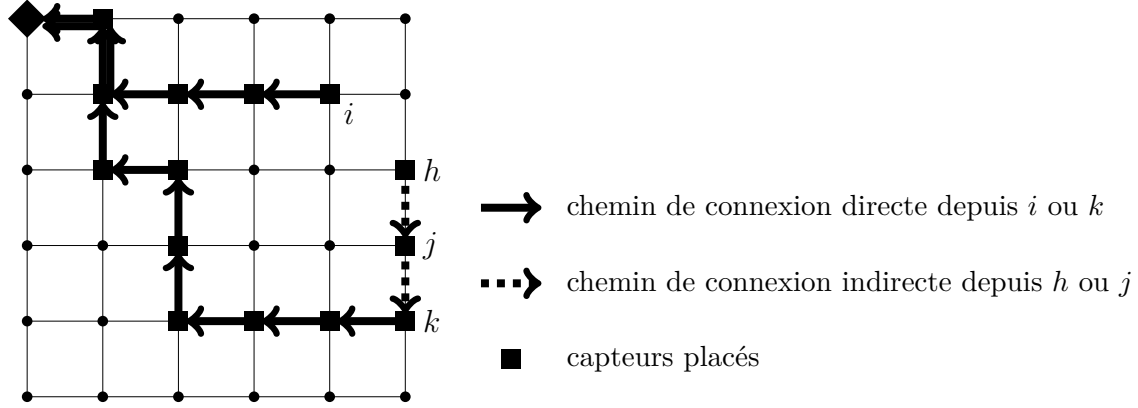


FIGURE 2.5 – Chemins de connexion directe et indirecte avec  $R_{com} = 1$ .

placé sur le nœud  $i$  et s'il existe un chemin de connexion directe dans  $G_d^{com}$  depuis ce nœud jusqu'au puits, et vaut 0 sinon. De même, pour  $i \in X$  et pour  $p \in \{0, \dots, P\}$ , on définit la variable binaire  $z_i^p$ , qui vaut 1 si un capteur placé en  $i$  est à une distance  $p$ , en nombre de capteurs intermédiaires, d'un chemin de connexion directe vers le puits, et vaut 0 sinon. On peut remarquer que la notation  $z_i^0 = 1$  signifie qu'il existe un arc  $(i, j) \in A^{com}$  avec  $z_j = 1$ . Sur l'exemple de la Figure 2.5, on a ainsi  $z_i = z_k = 1$ ,  $z_j^0 = 1$  et  $z_h^1 = 1$ .

### Formulation MIP1

$$\min \sum_{i \in X} \left( z_i + \sum_{p=0}^P z_i^p \right)$$

avec

$$\sum_{i:(i,j) \in A^{capt}} \left( z_i + \sum_{p=0}^P z_i^p \right) \geq 1 \quad j \in X \quad (2.23)$$

$$\sum_{(j,i) \in A_d} z_i \geq z_j \quad j \in X : (j,t) \notin A' \quad (2.24)$$

$$\sum_{i:(j,i) \in A'} z_i \geq z_j^0 \quad j \in X \setminus \{t\} \quad (2.25)$$

$$\sum_{i:(j,i) \in A'} z_i^{p-1} \geq z_j^p \quad j \in X \setminus \{t\}, p \in \{1, \dots, P\} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} z_i^p &= 0 & i : (i,t) \in A', p \in \{1, \dots, P\} & \quad (2.27) \\ z_i \in \{0, 1\}, z_i^p &\in \{0, 1\} & i \in X, p \in \{1, \dots, P\} & \end{aligned}$$

La fonction objectif mesure le nombre total de capteurs placés sur la grille. En effet, l'expression  $\left(z_i + \sum_{p=0}^P z_i^p\right)$  vaut 1 lorsqu'un capteur est placé sur le nœud  $i$  et 0 sinon.

Les contraintes (2.23) représentent les contraintes de couverture. Elles signifient que chaque nœud de la grille doit se trouver dans le voisinage d'au moins un capteur.

Les contraintes (2.24) servent à vérifier qu'un capteur placé sur le nœud  $j$  est bien relié au puits par un chemin de connexion directe s'il existe un nœud  $i$ , successeur de  $j$  dans  $G_d$ , lui-même relié au puits par un chemin de connexion directe.

De même, les contraintes (2.25) sont liées à la liaison entre chemins de connexion directe et indirecte. Un capteur placé sur un nœud  $j$  est relié au puits par un chemin de connexion indirecte de distance 0 s'il existe dans son voisinage de communication un nœud  $i$  lui-même relié au puits par un chemin de connexion directe.

Les contraintes (2.26) définissent la relation de récurrence des chemins de connexion indirecte. Un capteur, placé sur un certain nœud  $j$ , est situé à une distance de  $p$  nœuds d'un chemin de connexion directe s'il existe dans son voisinage de communication un capteur situé à une distance de  $p - 1$  nœuds d'un chemin de connexion directe.

Finalement, les contraintes (2.27) s'assurent que, si un capteur est placé en un nœud  $i$  tel que le puits est situé dans son voisinage de communication, alors ce capteur est connecté directement au puits  $t$  par un arc  $(i, t)$ .

Dans des travaux plus récents [Rebai, Afsar, and Snoussi 2016], Rebai *et al.* considèrent un autre problème proche de celui qu'ils avaient étudié, à savoir le problème de couverture dans les grilles critiques, qui a été déterminé comme étant NP-difficile [Ke, Liu, and Tsai 2011]. Ainsi, on parle de grilles critiques quand seulement une partie restreinte de la grille doit être couverte, et non toute la grille, cette partie est dénommée *cellules critiques*. Afin de résoudre ce problème, les auteurs proposent deux programmes mathématiques en variables mixtes, qui sont capables de trouver des solutions optimales pour des grilles à motif carré allant jusqu'à 15 lignes par 15 colonnes. Dans ces travaux, [Rebai, Afsar, and Snoussi 2016] abandonnent la formulation par chemins directs et indirects pour se concentrer sur une formulation par flots.

## 2.4 Conclusion

Pour conclure, nous allons dresser un tableau comparatif des différents articles principaux sur lequel repose notre état de l'art. Dans un premier temps, on rappelle que l'ensemble des articles étudiés ont opté pour une discrétisation du terrain, ce qui laisse de larges pans de la recherche sur les réseaux de capteurs et montre la multiplicité des hypothèses que l'on peut faire dans ce domaine.

La première partie de notre étude s'est centrée sur des objectifs ayant rapport à la consommation énergétique ou la maximisation de la durée de vie du réseau. Si nous n'avons pas poussé davantage les investigations sur cette thématique dans le reste de la thèse, nous ne pouvions pas ne pas la mentionner tant la littérature sur les réseaux de capteurs d'un point de vue discrétisé se concentre sur cette approche. En outre, les modèles proposés par les articles se focalisant sur cet objectif d'optimisation comportent des contraintes comme celles de flots ou de connexités, qui restent valables pour les autres approches.

Le tableau comparatif 2.1 est divisé comme suit :

1. Les principaux articles que nous avons étudiés dans cet état de l'art se situent dans la première colonne.
2. La deuxième colonne détaille quelles sous-problématiques font partie du problème général considéré, à savoir : placement des capteurs pour la captation, localisation du ou des puits, routage de l'information et ordonnancement des phases d'activité des capteurs.
3. La troisième colonne détaille si les capteurs utilisés sont hétérogènes (non identiques entre eux) ou non.
4. La quatrième colonne rend compte de la mobilité de certains éléments du réseau, comme les puits, les capteurs ou l'angle de captation de ceux-ci.
5. La cinquième colonne détaille si l'article considère le rayon de communication ( $R_{com}$ ) et/ou le rayon de captation ( $R_{capt}$ ) des capteurs ainsi que le rapport entre les deux, s'il existe.
6. La sixième colonne donne la complexité du problème étudié par l'article lorsqu'elle

CHAPITRE 2. ÉTAT DE L'ART ET TAXINOMIE DES RÉSEAUX DE CAPTEURS  
EN PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE

Articles	Problématiques	Hétérogénéité	Mobilité	Rayons	Difficulté	Instance
[Kadayif, Kandemir, Vijaykrishnan, and Irwin 2005]	Placement Ordonnancement Routage	non	capteurs	$R_{com}$ variable	non définie	36 nœuds
[Aneja, Chandrasekaran, Li, and Nair 2010]	Routage	non	non	$R_{com}$ modulable	GSMET NP-difficile	150 nœuds
[Guney, Aras, Altinel, and Ersoy 2010]	Localisation Routage	oui	non	$R_{com}$ modulable	$p$ -médiann NP-difficile dans les graphes généraux	2500 nœuds
[Turkogullari, Aras, Altinel, and Ersoy 2010]	Placement Ordonnancement Routage Localisation	oui	non	$R_{com} \neq R_{capt}$ et $R_{com} = R_{capt}$	NP-difficile	heuristique
[Alfieri, Bianco, Brandimarte, and Chiasserini 2007]	Ordonnancement Routage	oui	non	$R_{com} \neq R_{capt}$	NP-difficile	100 nœuds
[Behdani, Yun, Smith, and Xia 2012]	Routage Localisation	oui	puits	$R_{com} \neq R_{capt}$ et $R_{com} = R_{capt}$	ouvert	120 nœuds
[Singh and Rossi 2013]	Couverture	oui	direction	$R_{capt}$ fixé	NP-difficile	480 nœuds
[Gendron, Lucena, da Cunha, and Simonetti 2014]	Placement Routage	non	non	$R_{com} = R_{capt}$	MLST NP-difficile dans les graphes généraux	200 nœuds
[Fan and Watson 2012]	Placement Routage	non	non	$R_{com} = R_{capt}$	MCDS NP-difficile dans les graphes généraux	300 nœuds
[Gonçalves, Pinlou, Rao, and Thomassé 2011]	Placement	non	non	$R_{capt}$ fixé	MDS polynomial dans les grilles carrées	non pertinent
[Rebai, Le Berre, Snoussi, Hnaien, and Khoukhi 2015]	Placement Routage	non	non	$R_{com} \neq R_{capt}$ et $R_{com} = R_{capt}$	MCCS NP-difficile dans les graphes généraux	200 nœuds

TABLE 2.1 – Comparatif des principaux articles étudiés

est connue et donnée par les auteurs de l'article.

7. La septième colonne donne la taille de l'instance maximale résolue de façon optimale par la meilleure formulation de l'article, lorsqu'elle existe.

En outre, il est à noter que les articles sont présentés dans l'ordre d'apparition au cours de ce chapitre et suivant l'ordre des objectifs suivants : minimisation de la consommation énergétique, maximisation de la durée de vie du réseau et minimisation du nombre de capteurs.

Si on en croit la taille des instances maximales résolues, la difficulté de résolution des problèmes posés dans les articles et tels qu'ils ont été modélisés semble dépendre du nombre de sous-problématiques que le problème ambitionne de traiter. On note ainsi le cas particulier du problème de placement de capteurs sous contrainte de couverture, équivalent au problème *MDS* qui est *facile* à résoudre dans les grilles pour  $R_{capt} = 1$ . Par ailleurs, comme les travaux sur la durée de vie du réseau sont très foisonnants dans la littérature, nous avons décidé de pousser notre étude en nous intéressant aux problèmes de minimisation de capteurs : *MCDS* et sa généralisation *MCCS* dans les grilles à motif carré en reprenant les travaux de [Fan and Watson 2012] et de [Rebai, Le Berre, Snoussi, Hnaïen, and Khoukhi 2015]. Ainsi, dans le Chapitre 3, Section 3.3, nous allons proposer plusieurs formulations pour le problème *MCCS* rivalisant avec les modèles existants. Puis, dans le Chapitre 4, influencés par les travaux de [Gonçalves, Pinlou, Rao, and Thomassé 2011] nous analyserons la complexité du problème *MCDS* dans les grilles à motif carré pour  $R_{com} = R_{capt} = 1$  et nous prouverons l'existence de solutions optimales comprenant des motifs particuliers aux extrémités de la grille.

## Chapitre 3

# Formulations mathématiques pour le problème de couverture connexe minimum

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de couverture connexe minimum par la programmation mathématique. Pour cela, nous proposons deux formulations mathématiques, inspirées de la littérature.

Dans un premier temps, nous proposons une formulation en théorie des graphes de ce qu'est un réseau de capteurs et nous l'inscrivons dans les problèmes de minimisation des capteurs vus jusqu'à maintenant. Cette formulation est originale et présente l'avantage de rendre plus compréhensible les problèmes de minimisation comprenant des valeurs différentes pour  $R_{com}$  et  $R_{capt}$ .

Dans un second temps, nous rappelons brièvement le principe du modèle de [Rebai, Le Berre, Snoussi, Hnaïen, and Khoukhi 2015], dont nous nous servons comme élément de comparaison afin d'étudier les performances de nos formulations. Nous présentons ensuite nos deux modèles originaux qui reposent respectivement sur un modèle de flot simple, et un modèle de Miller-Tucker-Zemlin, dit modèle MTZ, qui a été initialement appliqué au problème du voyageur de commerce et que nous avons adapté au problème de la couverture connexe minimum. Ces modèles ont également été étudiés dans la littérature par [Fan and Watson 2012] pour le problème du dominant connexe minimum et nous exhiberons les différences entre nos deux approches.

Enfin, nous présentons un comparatif des performances entre les trois formulations issu d'expériences réalisées sur deux types d'instances relativement aux placements des cibles à couvrir : des grilles de cibles et des cibles engendrées aléatoirement. Nous montrons à travers ce comparatif que nos deux formulations ont de meilleures performances que celle de Rebai et al. dédiée aux grilles, et sont comparables à celles de Fan et Watson. Nous verrons finalement que les performances de nos modèles dépendent fortement des instances traitées.

Nous rappelons avant tout la définition du problème de la couverture connexe minimum (*MCCS*) appliquée aux réseaux de capteurs : étant donné un ensemble de cibles disposées sur un terrain, on cherche à déterminer le plus petit ensemble de capteurs à disposer sur les emplacements des cibles de manière à couvrir l'ensemble des cibles et à assurer l'existence d'un chemin depuis chaque capteur vers le puits.

### 3.1 Proposition d'une définition d'un réseau de capteurs en théorie des graphes

Nous rappelons que nous nous plaçons dans le cas discrétisé, qui correspond au troisième type de modélisation du terrain, décrite dans la sous-section 1.1.2 du Chapitre 1.

Un réseau de capteurs  $\mathcal{R}$  peut être défini comme deux graphes orientés  $\mathcal{R} = (\mathcal{G}_{capt}, \mathcal{G}_{com})$  tels que  $\mathcal{G}_{capt} = (X, A^{capt})$  est un graphe de captation et  $\mathcal{G}_{com} = (X, A^{com}, t)$ , un graphe de communication :  $X$  est l'ensemble des sommets (nœuds cibles) ;  $A^{capt}$  est l'ensemble des arcs reliant deux sommets de  $X$  si la distance séparant le sommet d'origine du sommet destination est inférieure ou égale à  $R_{capt}$  ;  $A^{com}$  est l'ensemble des arcs entre deux sommets de  $X$  si la distance séparant le sommet d'origine du sommet destination est inférieure ou égale à  $R_{com}$ . Finalement, on considère un sommet  $t$  qui est un sommet particulier de  $X$ , que nous supposons unique, et qui représente le puits du réseau.

Dans le problème de couverture connexe minimum, qui fait l'objet de l'étude de ce chapitre, on cherche à déterminer un ensemble  $\mathcal{S} \subset X$  de cardinalité minimale, tel que  $\mathcal{S}$  soit un ensemble dominant dans  $\mathcal{G}_{capt}$  et tel qu'il existe un chemin de chaque sommet de  $\mathcal{S}$  vers  $t$  dans  $\mathcal{G}_{com}$ . La couverture connexe minimum consiste donc à minimiser la taille de  $\mathcal{S}$ .

La Figure 3.1 illustre un exemple de placement de capteurs avec à gauche un ensemble dominant dans  $\mathcal{G}_{capt}$  avec  $R_{capt} = 2$  et à droite les chemins retenus de chaque sommet de  $S$  vers le puits dans  $\mathcal{G}_{com}$  avec  $R_{com} = 3$ .

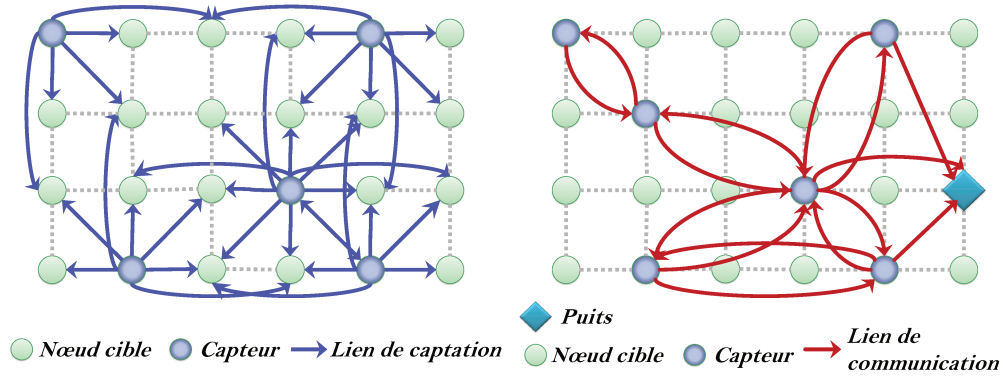


FIGURE 3.1 – Couverture de cibles lorsque  $R_{capt} = 2$  et communication entre capteurs lorsque  $R_{com} = 3$  dans le cas où le plan est discrétisé sous forme de grille.

### 3.2 Modèle de Rebai *et al.* (MIP1)

On rappelle que le modèle de [\[Rebai, Le Berre, Snoussi, Hnaïen, and Khoukhi 2015\]](#) vu dans le chapitre précédent, est basé sur la prise en compte de chemins de connexion directe et indirecte. Ce modèle est détaillé en toute fin du Chapitre 2, Sous-section [2.3.2](#) mais, pour faciliter la comparaison avec les autres modèles de ce chapitre, on en redonne la formulation ci-après (formulation MIP1), qui intègre notre définition formelle d'un réseau de capteurs.

Pour ce modèle, le nombre de variables et le nombre de contraintes sont bornés supérieurement par  $O(|X|^2)$ . Rappelons que  $X$  est l'ensemble des sommets de la grille et posons  $|X| = nm$ ,  $n$  étant le nombre de lignes de la grille et  $m$  le nombre de colonnes.

Nombre de variables :

- Il y a  $|X|$  variables de type  $z_i$ .
- Il y a au plus  $|X|^2$  de type  $z_i^p$ , car  $P$ , la distance de Manhattan maximale d'une grille quelconque de longueur  $m$  et de hauteur  $n$ , est majorée par  $m + n$ . Or,  $|X| = mn$  et



$mn \geq m + n$  pour  $m > 1$  et  $n > 1$ , ce qui par hypothèse est le cas. Le nombre de variables  $z_i^p$  est donc majoré par  $mn(m + n) \leq (mn)^2$ .

Nombre de contraintes :

- Il y a  $|X|$  contraintes de type (3.1).
- Il y a au plus  $|X| - 1$  contraintes de type (3.2).
- Il y a  $|X| - 1$  contraintes de type (3.3).
- Il y a  $(nm - 1)(n + m)$  contraintes de type (3.4), ce qui, comme on l'a vu, est en  $O(|X|^2)$ .
- Soit  $k = \delta_t^-$ , le degré intérieur du puits :  $k \leq |X|$ ; il y a  $k(n + m)$  contraintes de type (3.5), ce qui, comme on l'a vu, est en  $O(|X|^2)$ .

Il y a donc au total  $O(|X|^2)$  contraintes.

### Formulation MIP1

$$\min \sum_{i \in X} \left( z_i + \sum_{p=0}^P z_i^p \right)$$

avec

$$\sum_{i:(j,i) \in A^{capt}} \left( z_i + \sum_{p=0}^P z_i^p \right) \geq 1 \quad j \in X \quad (3.1)$$

$$\sum_{(j,i) \in A_d^{com}} z_i \geq z_j \quad j \in X : (j,t) \notin A^{com} \quad (3.2)$$

$$\sum_{i:(j,i) \in A^{com}} z_i \geq z_j^0 \quad j \in X \setminus \{t\} \quad (3.3)$$

$$\sum_{i:(j,i) \in A^{com}} z_i^{p-1} \geq z_j^p \quad j \in X \setminus \{t\}, p \in \{1, \dots, P\} \quad (3.4)$$

$$z_i^p = 0 \quad i : (i,t) \in A^{com}, p \in \{1, \dots, P\} \quad (3.5)$$

$$z_i \in \{0, 1\}, z_i^p \in \{0, 1\} \quad i \in X, p \in \{1, \dots, P\}$$

Dans les sections suivantes, nous présentons deux modèles qui peuvent être utilisés pour des graphes généraux et non nécessairement des grilles. Il nous faut tout d'abord rappeler qu'une solution au problème *MCCS* dans les réseaux de capteurs peut être représentée par

un sous-ensemble  $D$  de  $X$ , l'ensemble  $D$  correspondant aux nœuds sur lesquels les capteurs sont placés. Chaque capteur de  $D$  communique avec le puits grâce à un chemin dont les arcs appartiennent à  $A^{com}$  et dont les sommets sont aussi dans  $D$ . En outre, chaque nœud  $i$  de  $X \setminus \{t\}$  est couvert par un capteur qui est soit situé en  $i$ , soit situé sur un des voisins de  $i$  dans  $G^{capt}$ . Cette solution  $D$  peut par ailleurs être représentée sous la forme d'une arborescence, elle-même prolongée par une arborescence  $D'$  couvrante de la grille enracinée en  $t$ . Dans cette arborescence  $D'$ , un nœud sans capteur est connecté à un capteur par un arc de  $A^{capt}$  et ce capteur est lui-même relié au puits  $t$  par un chemin de capteurs reliés entre eux par des arcs de  $A^{com}$ . De ce fait, les feuilles de cette arborescence couvrante sont nécessairement des cibles. Par ailleurs, on a fait l'hypothèse que le puits  $t$  était toujours une cible, racine de l'anti-arborescence couvrante sur laquelle on se base pour construire nos deux modèles.

### 3.3 Modèles de flot

#### 3.3.1 Modèle original de flot simple (MIP2)

Le modèle de flot simple ( $FS$ ) que nous décrivons ici est inspiré d'un modèle introduit pour la première fois par Gavish [Gavish 1982] afin de résoudre le problème de l'arbre orienté couvrant minimum et a été récemment utilisé par Reis *et al.* pour le problème  $MLST$  [Reis, Lee, and Usberti 2015]. Par ailleurs, pour le problème  $MCDS$ , [Fan and Watson 2012] ont recours aux modèles de flot simple et de multiflots, et nous expliciterons leurs formulations après avoir exhibé la nôtre.

La formulation par flot simple repose sur l'idée que chaque nœud de  $X$  doit envoyer une unité de flot vers le puits  $t$ . Le flot est transporté par des arcs de  $A^{capt}$  et de  $A^{com}$ . Un nœud sur lequel aucun capteur n'est placé enverra une unité de flot à travers un arc de  $A^{capt}$ . Un nœud sur lequel un capteur est placé recevra des flots entrants venant d'arcs de  $A^{com}$  et de  $A^{capt}$  et renverra le tout par un unique arc sortant de  $A^{com}$ . Ce n'est donc pas à proprement parler un modèle de multi-flot, puisque le flot de captation est transformé en flot de communication au passage d'un capteur.

Par ailleurs, comme ce modèle se base sur le principe d'une anti-arborescence couvrante,

on pourra relâcher les contraintes d'intégrité sur les variables de flot, puisqu'il n'existe qu'un unique arc sortant en chaque nœud, donc nécessairement de flux entier, par respect des contraintes de conservation de flots.

Pour ce modèle, décrit dans la formulation MIP2, nous avons besoin de définir les variables suivantes :

- $x_i$ , pour  $i \in X$ , qui vaut 1 si un capteur est placé sur le nœud  $i$  et 0 sinon ;
- $f_{ij}^{com}$ , pour  $(i, j) \in A^{com}$ , qui correspond à la valeur du flot circulant sur l'arc  $(i, j)$ , du nœud  $i$  vers le nœud  $j$ , si un capteur situé en  $i$  communique avec un capteur situé en  $j$  ; les variables  $f_{ij}^{com}$  sont des nombres réels positifs ou nuls, bornés supérieurement par le nombre de nœuds dans  $X \setminus \{t\}$ , soit  $|X| - 1$  ;
- $f_{ij}^{capt}$ , pour  $(i, j) \in A^{capt}$ , qui correspond à la valeur du flot circulant du nœud  $i$  vers le nœud  $j$ , si aucun capteur n'est placé en  $i$  et si le flot sortant de  $i$  est envoyé vers le capteur situé en  $j$  ; ce flot vaut 0 sinon ; d'après cette définition, on a  $0 \leq f_{ij}^{capt} \leq 1$ .

Par ailleurs, il nous faut également définir les notations suivantes :  $M$  est un nombre suffisamment grand, que l'on fixera à  $|X| - 1$  dans nos expériences ; enfin,  $\delta_i^-$  représente le degré entrant de  $i$  dans  $A^{com}$ .

Cette formulation MIP2 (flot) est illustrée par la figure 3.2 qui représente la structure d'une solution.

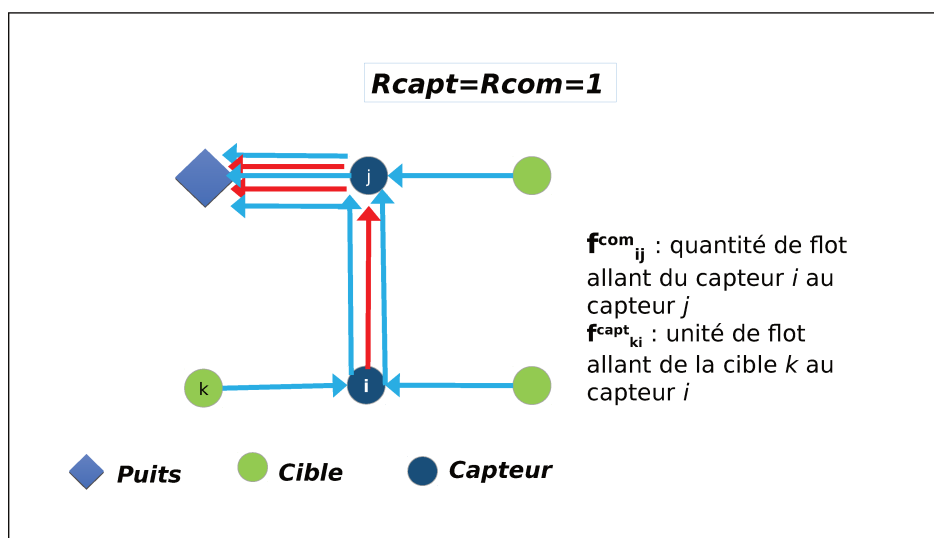


FIGURE 3.2 – Solution du MCCS par la modélisation par flot pour  $R_{capt} = R_{com} = 1$

**Formulation MIP2**

$$\min \sum_{i \in X} x_i$$

avec

$$\sum_{i \in X: (i,t) \in A^{com}} x_i \geq 1 \quad (3.6)$$

$$x_i + \sum_{j \in X: (i,j) \in A^{capt}} x_j \geq 1, \quad i \in X \setminus \{t\} \quad (3.7)$$

$$\sum_{j \in X: (j,t) \in A^{com}} f_{jt}^{com} = |X| - 1 \quad (3.8)$$

$$x_i + \sum_{j \in X: (i,j) \in A^{capt}} f_{ij}^{capt} = 1, \quad i \in X \setminus \{t\} \quad (3.9)$$

$$\sum_{j \in X: (j,i) \in A^{com}} f_{ji}^{com} + \sum_{j \in X: (j,i) \in A^{capt}} f_{ji}^{capt} + x_i = \sum_{j \in X: (i,j) \in A^{com}} f_{ij}^{com}, \quad i \in X \setminus \{t\} \quad (3.10)$$

$$\sum_{j \in X: (i,j) \in A^{com}} f_{ij}^{com} \leq Mx_i, \quad i \in X \setminus \{t\} \quad (3.11)$$

$$\sum_{j \in X: (j,i) \in A^{capt}} f_{ji}^{capt} \leq (\delta_i^- - 1)x_i, \quad i \in X \setminus \{t\} \quad (3.12)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in X$$

$$0 \leq f_{ij}^{com} \leq |X| - 1, \quad f_{ij}^{com} \in \mathbb{R}, \quad (i, j) \in A^{com}$$

$$0 \leq f_{ij}^{capt} \leq 1, \quad f_{ij}^{capt} \in \mathbb{R}, \quad (i, j) \in A^{capt}$$

La contrainte (3.6) assure qu'au moins un capteur situé dans le voisinage de communication du puits communique avec ce dernier. Cela permet de donner un point de départ à l'anti-arborescence.

La couverture des cibles est satisfaite par les contraintes (3.7).

La contrainte (3.8) exprime le fait que le flot de communication entrant au niveau du puits correspond à l'agrégation des flots envoyés par chaque nœud de  $X \setminus \{t\}$ .

Les contraintes (3.9) assurent que si un capteur est placé sur un nœud  $i$  ( $x_i = 1$ ), alors le flot de captation sortant de  $i$  dans  $A^{capt}$  vaut 0. Mais, si aucun capteur n'est placé en  $i$  ( $x_i = 0$ ), alors le nœud  $i$  envoie une unité de flot via un unique arc sortant de  $A^{capt}$ .

Les contraintes (3.10) assurent la connectivité globale de la solution à l'aide de la

conservation des flots. Si un capteur est placé sur le nœud  $i$ , alors le flot de communication sortant est égal au flot entrant, qu'il soit de communication ou de captation, augmenté de un, l'unité de flot émise par la cible sur laquelle se situe le capteur.

Les contraintes (3.11) assurent que si aucun capteur n'est placé en  $i$ , alors le flot de communication sortant en ce nœud vaut 0.

Finalement, les contraintes (3.12) vérifient que si aucun capteur n'est placé en  $i$ , alors le flot de captation entrant en ce nœud vaut 0. À l'inverse, si un capteur est placé sur le nœud  $i$ , alors son flot de captation entrant est égal au nombre de nœuds voisins de  $i$  sur lesquels il n'y a pas de capteurs et qui utilisent  $i$  pour la captation, ce nombre étant borné par  $(\delta_i^- - 1)$ . En effet, lorsque  $R_{capt} = R_{com}$ , un capteur situé sur un certain nœud  $i$  ne peut pas posséder de flot entrant égal à  $\delta_i$  car, les voisinages de communication et de captation étant identiques, il est nécessaire de conserver un arc sortant pour assurer la connexité du capteur situé en  $i$ . Lorsque  $R_{com} > R_{capt}$ , cette borne est large mais reste valide étant donné que le voisinage de  $R_{capt}$  est inclus dans celui de  $R_{com}$ . En fait, la combinaison des contraintes (3.11) et (3.10) assure déjà le fait qu'un nœud ne possédant pas de capteurs ne contient aucun flot entrant ; cette contrainte (3.12) constitue donc une inégalité valide.

Le nombre de variables de cette formulation est majoré par  $O(|A^{com}|)$  (puisqu'on se situe dans l'hypothèse  $R_{capt} \leq R_{com}$ ) et le nombre de contraintes couplantes par  $O(|X|)$ .

Nombre de variables :

- Il y a  $|X|$  variables de type  $x_i$
- Il y a  $|A^{com}|$  variables de type  $f_{ij}^{com}$ .
- Il y a  $|A^{capt}|$  variables de type  $f_{ij}^{capt}$ .

Comme on a  $|X| - 1 \leq |A^{capt}| + |A^{com}|$  (couverture + connexité) et  $|A^{capt}| \leq |A^{com}|$  (car on a  $R_{capt} \leq R_{com}$ ), on obtient que le nombre de variables est bien borné par  $O(|A^{com}|)$  ;  $|A^{com}|$  est plus ou moins grand en fonction de la valeur de  $R_{com}$ , mais est borné par  $|X|^2$  dans le cas où  $R_{com}$  est suffisamment grand pour que  $\mathcal{G}_{com}$  soit par exemple un graphe complet.

En ce qui concerne le nombre de contraintes couplantes, il y a respectivement  $|X| - 1$

contraintes de type (3.7), (3.9), (3.10), (3.11) et (3.12). Le tout est donc bien en  $O(|X|)$ .

### 3.3.2 Parallèle avec un modèle de flot de la littérature

Dans leur article, [Fan and Watson 2012] proposent deux modèles de flot (simples et multiples) pour le problème du dominant connexe minimum.

#### 3.3.2.1 Flot simple

Leur modèle a été initialement conçu dans le cas  $R_{capt} = R_{com}$ . Nous proposons de l'adapter au cas  $R_{capt} \neq R_{com}$  dans le modèle présenté dans la suite. On le détaillera donc suivant notre proposition de formulation d'un réseau de capteurs avec les deux graphes  $\mathcal{G}_{capt} = (X, A^{capt})$  et  $\mathcal{G}_{com} = (X, A^{com})$ . Par ailleurs, [Fan and Watson 2012] considèrent une arborescence dans laquelle circule un flot de chaque sommet du dominant vers une racine à déterminer, contrairement à nous qui considérons une anti-arborescence *couvrante* de tous les sommets vers une racine fixée par avance.

Soient les variables :

- $x_i$ , qui vaut 1 si  $x_i$  appartient au dominant connexe et 0 sinon ;
- $f_{i,j}$ , qui représente la quantité de flot circulant entre deux sommets  $i$  et  $j$  du dominant permettant de garantir la connexité du dominant ;
- $r_i$ , qui vaut 1 si un sommet du dominant est la racine de l'arborescence, 0 sinon.

Les contraintes (3.13) de ce modèle assurent la couverture de tous les sommets du graphe.

La contrainte (3.14) garantit l'existence et l'unicité d'une racine dans l'arborescence construite.

Les contraintes (3.15) signifient que le nœud sur lequel se trouve la racine est nécessairement un sommet du dominant connexe.

L'ensemble de contraintes (3.16) et (3.17) obligent le parcours du flot à n'être possible qu'entre paires de capteurs. Par ailleurs, la borne sur les variables de flot est plus fine car elle dépend du nombre de capteurs positionnés.

Les contraintes (3.18) imposent le fait qu'aucun flot ne peut arriver en la racine.

Finalement, l'ensemble des contraintes (3.19) correspondent à l'équation de balance des flots et implique que seul un sommet sur lequel est placé un capteur enverra une unité de flot.

**Formulation flot simple de Fan et Watson**

$$\min \sum_{i \in X} x_i$$

avec

$$\sum_{j:(i,j) \in A^{capt}} x_j \geq 1 \quad i \in X \quad (3.13)$$

$$\sum_{i \in X} r_i = 1 \quad (3.14)$$

$$r_i \leq x_i \quad i \in X \quad (3.15)$$

$$f_{i,j} \leq x_i \sum_{k \in X} x_k \quad (i, j) \in A^{com} \quad (3.16)$$

$$f_{i,j} \leq x_j \sum_{k \in X} x_k \quad (i, j) \in A^{com} \quad (3.17)$$

$$\sum_{j:(i,j) \in A^{com}} f_{j,i} \leq |X|(1 - r_i) \quad i \in X \quad (3.18)$$

$$\sum_{j:(j,i) \in A^{com}} f_{j,i} - \sum_{j:(i,j) \in A^{com}} f_{i,j} = x_i - r_i \sum_{k \in X} x_k \quad i \in X \quad (3.19)$$

$$(x_i, r_i) \in \{0, 1\}^2 \quad i \in X$$

$$0 \leq f_{i,j} \leq |X| - 1, \quad f_{i,j} \in \mathbb{R} \quad (i, j) \in A^{com}$$

On note que ce modèle est quadratique de fait des contraintes (3.19), (3.16) et (3.17). Ces contraintes permettent également de borner le flot total correspondant à la communication du dominant plus finement que pour notre modèle. Toutefois, la linéarisation de ces contraintes alourdit ce modèle et les résultats offerts par celui-ci sont bien moins bons que notre propre modèle de flot. Ainsi, on a repris la linéarisation proposée par [Fan and Watson 2012] en posant  $w_{i,j} = x_i x_j$  et on a fixé  $r_i = t$  pour simplifier le modèle. La borne LP est nettement moins bonne que notre modèle : par exemple, pour une grille  $7 \times 7$ , la borne obtenue par l'adaptation du modèle de Fan et Watson à notre problème vaut 12 et le modèle est résolu en 1913 secondes, tandis que la borne obtenue par notre modèle vaut 14 et le modèle est résolu en 25 secondes.

### 3.3.2.2 Multiflots

Fan et Watson proposent également un modèle fondé sur les multiflots, où cette fois-ci une unité de flot exactement doit circuler entre chaque sommet du dominant et la racine dont l'emplacement reste là encore à déterminer. Cette approche multiflot leur donne de meilleurs résultats que le flot simple. Dans notre cas au contraire, le multiflot donnait des résultats bien inférieurs à notre flot simple, raison pour laquelle nous ne l'avons pas ajouté à notre batterie de tests. Dans tous les cas, c'est leur modèle MTZ, que nous expliciterons dans la section suivante, qui leur a fourni les résultats les plus performants ; c'est donc prioritairement avec lui que nous avons fait des tests de comparaison.

## 3.4 Formulations fondées sur le modèle de Miller-Tucker-Zemlin

Dans cette section, nous modifions la manière de considérer les contraintes de connectivité. Le modèle que nous allons présenter est largement inspiré des formulations de Miller, Tucker et Zemlin (MTZ) pour les arbres couvrants et d'autres applications des graphes. Les contraintes MTZ ont été utilisées pour la première fois afin de résoudre le problème du voyageur de commerce [Miller, Tucker, and Zemlin 1960].

### 3.4.1 Modèle original MTZ (MIP3)

Pour notre modèle, décrit dans la formulation MIP3, nous définissons les variables suivantes :

- $x_i$ , pour  $i \in X$ , même variable de décision que dans le modèle précédent ;
- $y_{ij}^{com}$ , pour  $(i, j) \in A^{com}$ , est également une variable binaire, qui vaut 1 si et seulement si un lien de communication entre  $i$  et  $j$  est utilisé à partir d'un capteur placé sur le nœud  $i$  vers un capteur placé sur le nœud  $j$  ;
- $y_{ij}^{capt}$ , pour  $(i, j) \in A^{capt}$ , est une variable binaire qui vaut 1 si et seulement si un nœud  $i$  sans capteur est couvert par un capteur placé sur un nœud  $j$  par l'arc  $(i, j)$  ; avec ces définitions des variables  $y_{ij}^{com}$  et  $y_{ij}^{capt}$ , l'ensemble des arcs associés aux variables à 1 doit former une arborescence couvrante de  $X$ , enracinée en  $t$  ;



- $L_i$ , pour  $i \in X$ , compte le nombre de capteurs dans le chemin de capteurs allant de  $i$  jusqu'au puits si un capteur est placé sur le nœud  $i$ ; si  $L_t = 0$ , alors  $L_i$  pour  $i \neq t$  est un entier strictement positif qui dépend du nombre de capteurs séparant  $i$  du puits; en fait, la contrainte d'intégrité de cette variable peut être relâchée du fait de la structure en arborescence et  $L_i$  sera défini comme un nombre réel positif.

Cette formulation MIP3 (MTZ) est illustrée par la figure 3.3 qui représente la structure d'une solution.

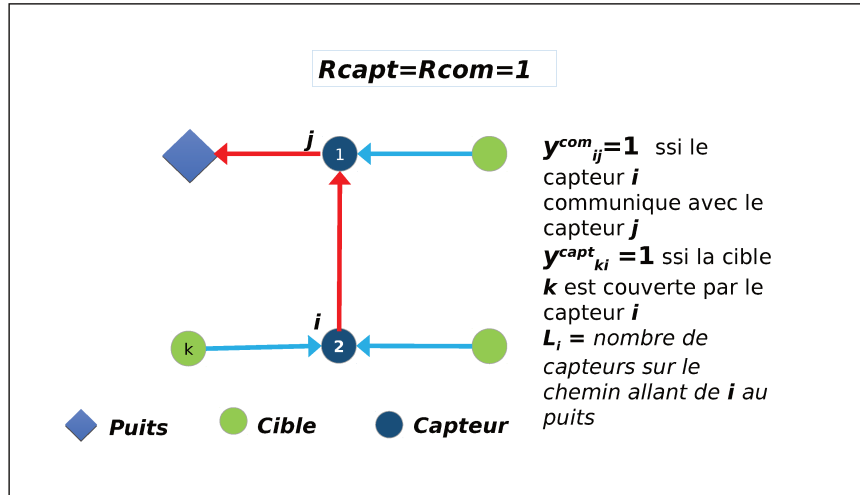


FIGURE 3.3 – Solution du MCCS par la modélisation MTZ pour  $R_{capt} = R_{com} = 1$

Les contraintes (3.20) expriment le fait que le nombre d'arcs de communication sortants d'un nœud  $i$  qui n'est pas le puits vaut 1 s'il y a un capteur placé en  $i$  et 0 sinon.

Les contraintes (3.21) décrivent le fait que le nombre d'arcs de captation sortants en un nœud  $i$  qui n'est pas le puits vaut 0 si un capteur est placé en  $i$  et 1 sinon. On peut observer que les contraintes (3.21) et (3.9), ainsi que les variables  $y_{ij}^{capt}$  et  $f_{ij}^{capt}$ , sont en fait équivalentes.

Les contraintes (3.22) assurent qu'un nœud  $i$  qui n'est pas le puits possède des arcs entrants si et seulement si un capteur est placé en  $i$ , et que le nombre d'arcs entrants est limité par le degré de communication entrant de  $i$  moins un.

Les contraintes (3.24) correspondent aux contraintes originelles de Miller-Tucker-Zemlin et garantissent que chaque sommet sur lequel se situe un capteur possède un numéro

supérieur à celui du capteur avec lequel il communique. Cette contrainte permet de casser les cycles et d'assurer ainsi qu'il existe bien un chemin de chaque capteur vers le puits, initialisé à 0. Par ailleurs, les sommets sur lesquels il n'y a pas de capteur possèdent un numéro négatif. En effet, un chemin ne peut pas être plus long que  $|X| - 1$ .

### Formulation MIP3

$$\min \sum_{i \in X} x_i$$

avec

contraintes (3.6), (3.7)

$$\sum_{j \in X: (i,j) \in A^{com}} y_{ij}^{com} = x_i \quad i \in X \setminus \{t\} \quad (3.20)$$

$$x_i + \sum_{j \in X: (i,j) \in A^{capt}} y_{ij}^{capt} = 1 \quad i \in X \setminus \{t\} \quad (3.21)$$

$$\sum_{(j,i) \in A^{capt}} y_{ji}^{capt} + \sum_{(j,i) \in A^{com}} y_{ji}^{com} \leq (\delta_i^- - 1)x_i \quad i \in X \setminus \{t\} \quad (3.22)$$

$$L_t = 0 \quad (3.23)$$

$$L_i \geq L_j + 1 - (|X| - 1)(1 - y_{ij}^{com}) \quad (i, j) \in A^{com} \quad (3.24)$$

$$L_i \geq 0 \quad i \in X$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad i \in X$$

$$y_{ij}^{com} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A^{com}$$

$$y_{ij}^{capt} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A^{capt}$$

Les nombres de variables et de contraintes sont tous les deux bornés par  $O(|A^{com}|)$ .

Nombre de variables :

- il y a  $|X|$  variables de type  $x_i$  ;
- il y a  $|A^{com}|$  variables de type  $y_{ij}^{com}$  ;
- il y a  $|A^{capt}|$  variables de type  $y_{ij}^{capt}$ .

Comme  $|A^{com}| \geq |A^{capt}|$  car  $R_{com} \geq R_{capt}$ , le nombre de variables est bien en  $O(|A^{com}|)$ .

Nombre de contraintes :

- on rappelle qu'il y a  $|X|$  contraintes de type (3.6) et (3.7) ;

- il y a  $|X| - 1$  contraintes pour chacun des types (3.20), (3.21) et (3.22) ;
- il y a  $|A^{com}|$  contraintes de type (3.24).

Le nombre de contraintes est donc bien en  $O(|A^{com}|)$ .

### 3.4.2 Parallèle avec un modèle MTZ de la littérature

Comme [Fan and Watson 2012] ne considèrent que le problème *CDS*, nous avons adapté leur modèle MTZ au problème *MCCS*. Dans leur modèle, ils considèrent tout d'abord un graphe non orienté  $G = (X, E)$  dont ils orientent chaque arrête dans les deux sens pour obtenir un graphe orienté  $G^o = (X, A)$  tel que si  $\{i, j\} \in E$ , alors  $\{(i, j), (j, i)\} \subset A$ . Par ailleurs, soit  $n$  le nombre de sommets de  $G$  ; Fan et Watson insèrent deux sommets fictifs  $n + 1$  et  $n + 2$  reliés par l'arc  $(n + 1, n + 2)$  et tels qu'il existe un arc  $(n + 1, i)$  et un arc  $(n + 2, i)$  pour tous les sommets  $i$  de  $G$ . Comme on le verra, dans leur modèle,  $n + 1$  servira à rendre compte de la captation des données, tandis que  $n + 2$  pointera vers la racine des sommets du dominant et servira en fait de racine fictive. Cette façon de procéder a été introduite pour la première fois par [Quintao, da Cunha, Mateus, and Lucena 2010] en 2010. Après transformation le graphe obtenu est un graphe  $G' = (X', A')$  tel que  $X' = X \cup \{n + 1, n + 2\}$  et  $A' = A \cup \{(n + 1, i), (n + 2, i) \text{ pour } i \in X\} \cup \{(n + 1, n + 2)\}$ . Pour l'adaptation au problème *MCCS*, on considérera un graphe  $\mathcal{G}'_{com} = (X', A'_{com})$ , fondé sur  $\mathcal{G}_{com}$  et défini de façon analogue.

Variables du modèle MTZ de Fan et Watson :

- $x_i$ , pour  $i \in X$  (et non  $X'$ ), même variable de décision que dans les modèles précédents ;
- $y_{i,j}$ , variable binaire qui vaut 1 si l'arc  $(i, j)$  est retenu dans l'arborescence couvrante et 0 sinon ;
- $L_i$  : comme pour notre modèle (*MIP3*), cette variable dénombre les sommets sur le chemin de  $i$  à  $n + 2$ , pour  $i \in X$ .

Les contraintes (3.25) correspondent à la domination des sommets de  $G$ .

La contrainte (3.26) correspond à l'initialisation de la racine de l'arborescence, placée au nœud fictif  $n + 2$ .

**Formulation MTZ de Fan et Watson**

$$\min \sum_{i \in X} x_i$$

avec

$$\sum_{j: (i,j) \in A^{capt}} x_j \geq 1 \quad i \in X \quad (3.25)$$

$$\sum_{i \in X} y_{n+2,i} = 1 \quad (3.26)$$

$$\sum_{i: (i,j) \in A^{com}} y_{i,j} = 1 \quad j \in X \quad (3.27)$$

$$y_{n+1,i} + y_{i,j} \leq 1 \quad (i,j) \in A^{com} \quad (3.28)$$

$$(n+1)y_{i,j} + L_i - L_j + (n-1)y_{j,i} \leq n \quad (i,j) \in A^{com} \quad (3.29)$$

$$(n+1)y_{i,j} + L_i - L_j \leq n \quad (i,j) \in A'_{com} \setminus A^{com} \quad (3.30)$$

$$y_{n+1,n+2} = 1 \quad (3.31)$$

$$L_{n+1} = 0 \quad (3.32)$$

$$x_i = 1 - y_{n+1,i} \quad (3.33)$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad i \in X$$

$$0 \leq L_i \leq n+1, \quad L_i \in \mathbb{R} \quad i \in X'$$

$$y_{i,j} \in \{0, 1\} \quad (i,j) \in A'_{com}$$

Les contraintes (3.27) représentent les contraintes d'arborescence : chaque sommet ne possède qu'un unique arc entrant.

L'ensemble de contraintes (3.28) et des contraintes (3.33) sont à mettre en lien avec la captation des données. Si un arc de  $n+1$  vers un sommet  $i$  est sélectionné, alors il ne peut y avoir d'arc sortant de  $i$  et inversement. En outre, si  $i$  est un sommet du dominant, alors il ne peut pas y avoir d'arc sélectionné entre  $n+1$  et  $i$ . En d'autres termes, un sommet qui n'est pas dans le dominant sera toujours successeur de  $n+1$  et ne sera jamais prédécesseur d'un autre sommet. Le sommet  $n+1$  sert donc de sommet fictif représentant la captation des sommets qui ne sont pas dans le dominant.

Les contraintes (3.29) et (3.30) correspondent, d'une part, aux contraintes MTZ originales et, d'autre part, à des inégalités valides proposées pour la première fois par [Desrochers and Laporte 1991].

La contrainte (3.31) force l'arc  $(n + 1, n + 2)$  à être utilisé. Étant donné que les arcs de type  $(n + 1, i)$  servent à modéliser la captation des données, le sommet  $n + 2$  sert en fait de racine secondaire fictive pour les sommets du dominant connexe.

Finalement, la contrainte (3.32) initialise le calcul des variables de type  $L_i$  en attribuant la valeur nulle à la variable  $L_{n+1}$  associée au sommet fictif  $n + 1$ .

L'ajout de sommets fictifs, par rapport à notre approche de décomposition du rôle de captation et de communication, alourdit en fait le modèle MTZ. En outre, le modèle de [Fan and Watson 2012] propose une moins bonne borne à la racine pour  $R_{capt} = R_{com} = 1$  et n'est pas applicable initialement pour des valeurs différentes de  $R_{capt}$  et  $R_{com}$ . Toutefois, étant donné que notre modèle fixe la racine de notre anti-arborescence, nous avons adapté le modèle de Fan *et al.* de sorte qu'il n'y ait qu'un arc sortant de  $n + 2$  vers la racine fixée en 0. Cela améliore leur modèle qui, bien qu'il donne une moins bonne borne que la nôtre pour  $R_{capt} = R_{com} = 1$  (nos bornes sont environ de 16% meilleures), offre des résultats comparables en termes de performances et de bornes pour le reste des instances.

## 3.5 Résultats expérimentaux

Le but de nos expériences numériques est de comparer les trois formulations MIP1, MIP2 et MIP3 sur deux types d'instances : les grilles à motif carré et des graphes engendrés aléatoirement. Nous avons modélisé nos formulations en utilisant le modelleur de programmation mathématique AMPL [Fourer, Gay, and Kernighan 1990] et nous avons résolu ces programmes mathématiques en utilisant le solveur de `Cplex12.6.2` (IBM-ILOG 2014) avec les paramètres par défaut, ce, en imposant une limite de temps de une heure. Toutes nos instances ont été testées sur un ordinateur Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2680 v3 2,50GHz avec 48 CPU et 64 GB de RAM.

### 3.5.1 Résultats pour le problème *MCCS*

#### 3.5.1.1 Grilles de cibles

On considère ici uniquement les instances de type grilles à motif carré composées de  $n$  lignes et de  $n$  colonnes, notées  $G_n$ , en faisant varier respectivement les valeurs de  $R_{com}$  et

### CHAPITRE 3. FORMULATIONS MATHÉMATIQUES POUR LE PROBLÈME DE COUVERTURE CONNEXE MINIMUM

---

de  $R_{capt}$ . Le nœud  $t$  est toujours placé dans le coin supérieur gauche de la grille.

Nous avons effectué des expériences numériques sur différentes instances de  $G_n$  pour  $n = 6$  à  $n = 15$ ,  $R_{capt}$  variant de 1 à 3 et avec  $R_{capt} \leq R_{com} \leq R_{capt} + 1$ . Le Tableau 3.1 détaille le nombre de variables de décision et de contraintes pour chaque formulation MIP1, MIP2 et MIP3, telles que décrites précédemment. Ainsi, le nombre de variables de MIP2 et MIP3 dépend de  $|A^{com}|$ . En d'autres termes, il dépend de la valeur de  $R_{com}$ . On peut également observer que le nombre de contraintes de MIP3 dépend aussi de  $|A^{com}|$ . De plus, le degré sortant d'un nœud  $x$  de  $\mathcal{G}_{com}$ , noté  $\delta_x^+$ , est borné supérieurement par  $(2R_{com} + 1)^2$ , qui correspond au nombre de nœuds contenus dans le carré de côté  $2R_{com}$  dans lequel est inscrit le cercle de rayon  $R_{com}$ . En effet, le voisinage dans  $\mathcal{G}_{com}$  d'un nœud  $x$  est composé des nœuds compris à l'intérieur du cercle de centre  $x$  et de rayon  $R_{com}$ , comme illustré sur la figure 1.5. Ainsi,  $|A^{com}|$  est borné par  $O(|X| \times (R_{com})^2)$ , voir le Chapitre 1.

Nombre de	MIP1	MIP2	MIP3
Variables	$O( X ^2)$	$O( X (R_{com})^2)$	$O( X (R_{com})^2)$
Contraintes	$O( X ^2)$	$O( X )$	$O( X (R_{com})^2)$

TABLE 3.1 – Nombre de variables et de contraintes pour chaque formulation

Nos résultats sont détaillés dans le Tableau 3.2 ainsi que dans le Tableau 3.3 où la première colonne donne les caractéristiques des instances selon le format  $n\_R_{capt}\_R_{com}$ . Les meilleurs résultats pour chaque famille d'instances apparaissent en gras.

Dans le Tableau 3.2, les colonnes donnent, pour chaque formulation MIP1, MIP2 et MIP3 :

1. la valeur optimale de la relaxation continue de la formulation, notée *borne*, arrondie à l'entier supérieur ;
2. l'écart initial, que l'on note  $gap_i$ , entre la valeur, notée  $bkn$ , de la meilleure solution connue donnée par une des trois formulations, et la *borne* ; cet écart est donné sous forme de pourcentage ; plus précisément, il s'agit de  $\frac{bkn - borne}{bkn} \times 100$ .

Pour les instances avec  $R_{capt} = R_{com} = 1$ , on peut observer que la formulation MIP3 donne toujours la meilleure borne par la relaxation continue. Ainsi, l'écart moyen pour ces 10 instances vaut 37,2% pour MIP1, 26,5% pour MIP2 et 8,6% pour MIP3. Pour  $R_{capt} = 1$  et  $R_{com} = 2$ , MIP1, MIP2 et MIP3 donnent des bornes similaires avec un écart moyen

CHAPITRE 3. FORMULATIONS MATHÉMATIQUES POUR LE PROBLÈME DE COUVERTURE CONNEXE MINIMUM

Instance	MIP1		MIP2		MIP3	
	borne	gap <sub>i</sub>	borne	gap <sub>i</sub>	borne	gap <sub>i</sub>
6_1_1	9	35,7	11	21,4	13	<b>7,1</b>
7_1_1	12	40	14	30	18	<b>10</b>
8_1_1	15	26,9	18	15,3	23	<b>11,5</b>
9_1_1	19	25	22	21,4	28	<b>7,1</b>
10_1_1	23	41,0	27	30,7	35	<b>10,2</b>
11_1_1	27	42,5	33	31,5	42	<b>10,6</b>
12_1_1	32	38,4	39	26,7	49	<b>5,7</b>
13_1_1	37	42,1	45	30,4	58	<b>9,3</b>
14_1_1	43	41,8	51	31,0	67	<b>9,4</b>
15_1_1	49	38,7	59	26,3	76	<b>5</b>
6_1_2	9	18,1	9	18,1	9	18,1
7_1_2	12	20	12	20	12	20
8_1_2	15	21,0	15	21,0	15	21,0
9_1_2	19	20,8	19	20,8	19	20,8
10_1_2	23	20,6	23	20,6	23	20,6
11_1_2	27	25	27	25	27	25
12_1_2	32	25,5	32	25,5	32	25,5
13_1_2	37	24,4	37	24,4	37	24,4
14_1_2	43	24,5	43	24,5	43	24,5
15_1_2	49	25,7	49	25,7	49	25,7
6_2_2	4	42,8	5	<b>28,5</b>	4	42,8
7_2_2	6	25	6	25	6	25
8_2_2	7	36,3	7	36,3	8	<b>27,2</b>
9_2_2	9	30,7	9	30,7	9	30,7
10_2_2	10	41,1	11	<b>35,2</b>	11	<b>35,2</b>
11_2_2	12	33,3	13	<b>27,7</b>	13	<b>27,7</b>
12_2_2	14	39,1	15	<b>34,7</b>	15	<b>34,7</b>
13_2_2	16	38,4	17	34,6	18	<b>30,7</b>
14_2_2	19	38,7	19	38,7	20	<b>35,4</b>
15_2_2	21	40	22	40	23	<b>34,2</b>
6_2_3	4	0	4	0	4	0
7_2_3	6	0	6	0	6	0
8_2_3	7	12,5	7	12,5	7	12,5
9_2_3	9	0	9	0	9	0
10_2_3	10	16,9	11	<b>16,6</b>	10	16,9
11_2_3	12	15,4	12	15,4	12	15,4
12_2_3	14	12,5	14	12,5	14	12,5
13_2_3	16	15,7	17	<b>15,0</b>	16	15,7
14_2_3	19	15,9	19	15,9	19	15,9
15_2_3	21	17,4	22	<b>15,5</b>	21	17,4
6_3_3	3	0	3	0	3	0
7_3_3	4	0	4	0	4	0
8_3_3	4	0	4	0	4	0
9_3_3	4	20	4	20	4	20
10_3_3	5	28,5	5	28,5	5	28,5
11_3_3	6	14,3	6	14,3	7	<b>0</b>
12_3_3	8	20	8	20	8	20
13_3_3	9	25	9	25	9	25
14_3_3	9	30,7	9	30,7	9	30,7
15_3_3	10	37,5	10	37,5	10	37,5
6_3_4	3	0	3	0	3	0
7_3_4	4	0	4	0	4	0
8_3_4	4	0	4	0	4	0
9_3_4	4	0	4	0	4	0
10_3_4	5	16,6	5	16,6	5	16,6
11_3_4	6	14,2	6	14,2	6	14,2
12_3_4	8	0	8	0	8	0
13_3_4	9	0	9	0	9	0
14_3_4	9	10	9	10	9	10
15_3_4	10	16,6	10	16,6	10	16,6

TABLE 3.2 – Relaxation continue et écart pour les trois formulations sur des grilles

CHAPITRE 3. FORMULATIONS MATHÉMATIQUES POUR LE PROBLÈME DE COUVERTURE CONNEXE MINIMUM

Instance	MIP1		MIP2		MIP3	
	CPU / $gap_f$	nb nœuds	CPU / $gap_f$	nb nœuds	CPU / $gap_f$	nb nœuds
6_1_1	7,2s	8969	0,96s	1914	<b>0,95s</b>	3005
7_1_1	839s	2M	25,5s	405K	<b>5,8s</b>	29K
8_1_1	25,8%	4M	7,5%	26M	<b>72,2s</b>	389K
9_1_1	29%	1M	1921s	1M	<b>14,8s</b>	32K
10_1_1	39%	283K	15,4%	853K	<b>5,3%</b>	3M
11_1_1	38%	513K	18,3%	948K	<b>7,3%</b>	1M
12_1_1	38%	160K	16,1%	543K	<b>3444s</b>	1M
13_1_1	42%	44K	24,2%	563K	<b>7,8%</b>	1M
14_1_1	42%	36K	23,8%	404K	<b>8,6%</b>	867K
15_1_1	40%	17K	24,6%	353K	<b>5,7%</b>	634K
6_1_2	30s	121K	1,8s	309	<b>0,7s</b>	0
7_1_2	11,5%	10M	<b>5,9s</b>	13K	9,0s	23K
8_1_2	14,8%	5M	<b>44,2s</b>	205K	46,4s	105K
9_1_2	18,2%	3M	6,6%	3M	<b>1911s</b>	2M
10_1_2	22,4%	2M	10,3%	2M	<b>8,7%</b>	2M
11_1_2	26,8%	932K	<b>5,3%</b>	1M	14,2%	2M
12_1_2	31,6%	22K	<b>5,2%</b>	1M	17%	1M
13_1_2	36,9%	7729	18,7%	1M	<b>16,1%</b>	1M
14_1_2	42,4%	1432	20,5%	1M	<b>18,3%</b>	1M
15_1_2	48,5%	238	22,5%	1M	<b>20,2%</b>	981K
6_2_2	3,7s	9522	2,6s	1366	<b>1,7s</b>	2561
7_2_2	15,3s	21K	<b>5,3s</b>	2602	6,9s	14K
8_2_2	704s	1M	80,7s	112K	<b>31,6s</b>	762K
9_2_2	15,3%	9M	381,2s	257K	<b>195,7s</b>	335K
10_2_2	32,6%	2M	18,4%	4M	<b>16,2%</b>	2M
11_2_2	29,5%	1341K	<b>14,4%</b>	580K	15,3%	1M
12_2_2	39%	952K	25,3%	473K	<b>22,3%</b>	323K
13_2_2	38,5%	406K	29,2%	332K	<b>28,8%</b>	758K
14_2_2	42,8%	155K	31,3%	273K	<b>28%</b>	638K
15_2_2	44%	67K	<b>32,4%</b>	133K	33%	466K
6_2_3	<b>0,1s</b>	0	0,13s	0	0,86s	42
7_2_3	3,2s	560	<b>0,3s</b>	0	1,9s	290
8_2_3	8,5s	2879	3,2s	25	<b>1,7s</b>	0
9_2_3	11,6s	2670	9,5s	185	<b>5,5s</b>	1082
10_2_3	1909s	265K	<b>25,4s</b>	1128	479,4s	20K
11_2_3	13%	690K	<b>53,3s</b>	4808	241,6s	111K
12_2_3	9,4%	384K	<b>795,9s</b>	127K	801,9s	277K
13_2_3	18,4%	1095K	10%	401K	<b>3533s</b>	781K
14_2_3	20,7%	108K	<b>8,6%</b>	309K	13,1%	569K
15_2_3	31%	8153	<b>15,1%</b>	203K	18,1%	650K
6_3_3	<b>0,03s</b>	0	0,5s	0	1,17s	48
7_3_3	<b>0,18s</b>	0	1,12s	0	2,73s	454
8_3_3	0,57s	0	<b>1,04s</b>	0	1,82s	0
9_3_3	3,4s	173	<b>1,7s</b>	7	8,1s	10K
10_3_3	47s	31K	37s	1008	<b>12,1s</b>	1838
11_3_3	174s	52K	<b>168s</b>	13K	292,5s	19570K
12_3_3	20%	1655K	<b>559s</b>	46K	1733s	480K
13_3_3	29,4%	486K	19,2%	301K	<b>15%</b>	630K
14_3_3	30,8%	185K	<b>18,5%</b>	212K	21%	823K
15_3_3	31,2%	396K	23,7%	156K	<b>21%</b>	440K
6_3_4	0,24s	0	<b>0,16s</b>	0	0,56s	0
7_3_4	0,89s	94	<b>0,27s</b>	0	0,91s	0
8_3_4	1,8s	17	0,8s	0	<b>0,4s</b>	0
9_3_4	<b>0,27s</b>	0	0,75s	0	0,30s	0
10_3_4	<b>5,8s</b>	78	10s	0	7,3s	26K
11_3_4	1233s	277K	7,6s	0	<b>6,3s</b>	2794
12_3_4	27,2s	1548	<b>21s</b>	14	73,6s	34K
13_3_4	216s	42K	<b>1,6s</b>	0	44,4s	13K
14_3_4	1204s	5666	510s	20K	<b>332s</b>	123K
15_3_4	23,5%	351K	<b>440s</b>	15K	14,5%	244k

TABLE 3.3 – Résultats du *branch and bound* pour les trois formulations sur des grilles



CHAPITRE 3. FORMULATIONS MATHÉMATIQUES POUR LE PROBLÈME DE COUVERTURE CONNEXE MINIMUM

---

	MIP1				MIP2 (flot)				MIP3 (MTZ)			
	$gap_i$	$gap_f$	CPU	$\#opt$	$gap_i$	$gap_f$	CPU	$\#opt$	$gap_i$	$gap_f$	CPU	$\#opt$
G_1_1	37,2	40,2	423,1s	2/10	26,5	21,3	13,23s	3/10	8,6	6,9	3,4s	5/10
G_1_2	22,6	34,8	30s	1/10	22,6	13,7	1,8s	3/10	22,6	15,7	0,7s	4/10
G_2_2	36,5	37,7	241s	3/10	33,1	29,5	29,5s	4/10	32,4	23,9	13,4s	4/10
G_2_3	10,6	25,8	386,5s	5/10	10,3	11,8	7,7s	7/10	10,6	15,6	97,8s	8/10
G_3_3	17,6	30,1	37,5s	6/10	17,6	18,8	34,9s	7/10	16,2	18,0	53s	7/10
G_3_4	5,7	-	298,8s	9/10	5,7	-	61,3s	10/10	5,7	-	51,7s	9/10
moyenne	21,7	33,73	236,1s		19,3	18,1	24,7s		16	16,0	36,7s	

TABLE 3.4 – Synthèse des résultats numériques pour MIP1, MIP2 et MIP3

de 22,6%. À nouveau, pour  $R_{capt} = R_{com} = 2$ , MIP3 donne globalement de meilleures bornes. Toutefois, pour les instances restantes avec  $(R_{capt}, R_{com}) \in \{(2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$ , la différence entre les trois bornes n'est pas assez significative tandis que l'on peut observer que les écarts deviennent plus serrés.

Dans le Tableau 3.3, nous exhibons les résultats de la phase de *branch and bound* pour les trois formulations. Pour chaque formulation MIP1, MIP2 et MIP3, nous détaillons :

1. le temps CPU (en secondes) nécessaire à toute la phase de *branch and bound* lorsqu'elle s'arrête avant d'atteindre le temps limite d'une heure ou, le cas échéant, l'écart final noté  $gap_f$  lorsque l'heure de calcul a été dépassée, cet écart étant renvoyé par CPLEX ;
2. le nombre de nœuds de l'arborescence de recherche engendrés.

Là encore, nous pouvons observer des différences de comportement entre les modèles qui dépendent de  $R_{capt}$  et de  $R_{com}$ , mais l'observation la plus frappante correspond au fait que, dans le temps limite de 60 minutes, on peut résoudre 26 instances sur 60 avec la formulation MIP1, 34 avec MIP2 et 36 avec MIP3. Si on s'intéresse plus particulièrement aux instances avec  $R_{capt} = R_{com} = 1$ , on peut observer que MIP3, soit résout les instances plus rapidement, soit résout des instances que ni MIP1 ni MIP2 ne peuvent résoudre dans le temps imparti, soit atteint la limite de temps avec un meilleur écart final. Concernant les autres paires de valeurs  $(R_{capt}, R_{com})$ , les performances de MIP2 et MIP3 sont assez similaires. Nous pouvons donc conclure que les performances de MIP1 sont surpassées soit par MIP2 soit par MIP3 pour 55 instances.

Le Tableau 3.4 résume enfin nos résultats numériques. Il présente les écarts moyens, initiaux et finals (en pourcentage) pour chaque couple  $(R_{capt}, R_{com})$ . L'écart moyen,  $gap_f$ , est calculé à partir du sous-ensemble d'instances non résolues par les deux formulations. En

outre, le temps CPU moyen (en secondes) pour la phase de *branch and bound* est seulement calculé pour les instances résolues par les trois formulations. Si l'on s'intéresse à MIP2 et MIP3, le Tableau 3.4 montre que MIP3 surpasse légèrement MIP2 sur 2 critères : MIP3 résout de façon optimale trois instances de plus et donne globalement de meilleurs écarts moyens, initiaux et finals. Cependant, si le temps CPU moyen pour toute la phase de *branch and bound* n'est calculé cette fois que pour les instances résolues par MIP2 et MIP3, alors ce temps est divisé par 1,6 en faveur de MIP2.

Dans ce qui suit, on ne prend pas en compte le modèle MIP1 puisqu'il est uniquement applicable aux grilles.

### 3.5.1.2 Cibles engendrées aléatoirement

On s'intéresse ici aux performances de nos deux modèles pour des placements de cibles engendrées aléatoirement. Nos instances sont engendrées de la manière suivante. Nous définissons une zone carrée de côté  $s$  dans le plan euclidien, l'origine du plan étant placée dans le coin inférieur gauche du carré. Nous engendrons ensuite dans ce carré  $n$  cibles aléatoirement avec une distribution uniforme. Étant donnés  $s$  et  $n$ , nous engendrons les graphes de captation et de communication avec  $R_{capt}$  variant de 1 à 3 et  $R_{capt} \leq R_{com} \leq R_{capt} + 1$ . Nous répétons la génération jusqu'à ce que les graphes deviennent connexes. Pour chaque couple  $(s, n)$ , nous engendrons aléatoirement cinq graphes d'emplacement de cibles. Le puits  $t$  est toujours situé à l'origine du plan euclidien.

Une illustration de la génération de 50 cibles dans un carré de côté 4 est présentée sur la Figure 3.4. Sur cet exemple, une solution optimale de placement de capteurs est représentée par 12 losanges.

Le Tableau 3.5 compare le nombre moyen d'arcs de nos instances aléatoires pour  $R_{capt} = R_{com} = 1$  à celui des grilles et montre la densité élevée de nos instances.

Nos résultats sont détaillés dans le Tableau 3.6, où la première colonne *Instances* donne les caractéristiques de l'instance suivant le format  $n\_s\_R_{capt}\_R_{com}$ . La colonne *CPU* liste le temps CPU moyen pour les instances résolues à l'optimum en moins d'une heure. Les meilleurs résultats apparaissent en gras.

### CHAPITRE 3. FORMULATIONS MATHÉMATIQUES POUR LE PROBLÈME DE COUVERTURE CONNEXE MINIMUM

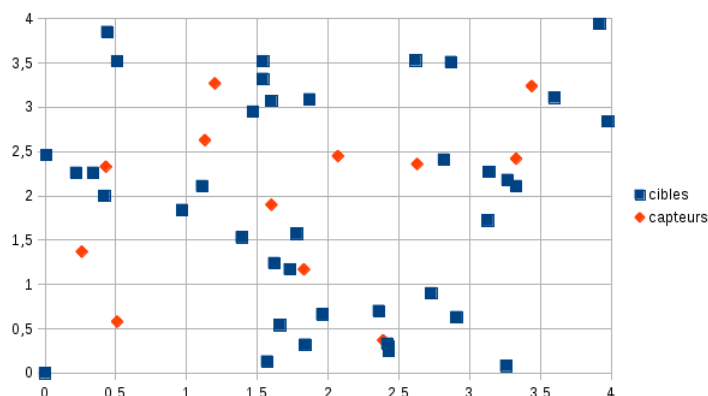


FIGURE 3.4 –  $n=50$  cibles engendrées dans un carré de côté  $s = 4$

Grilles		Graphes aléatoires	
$n$	$ A^{com} $	$n$	$ A^{com} $
49	84	51	370,6
81	144	81	671,6
100	180	101	747,8
121	220	121	778,0
144	264	151	1259,4

TABLE 3.5 – Comparaison de  $|A^{com}|$  entre grilles de cibles et cibles engendrées aléatoirement pour  $R_{capt} = R_{com} = 1$

<i>Instances</i>	Modèle de flot MIP2				Modèle MTZ MIP3			
	$gap_i\%$	$gap_f\%$	CPU	$\#résolues$	$gap_i\%$	$gap_f\%$	CPU	$\#résolues$
G_50_4_1_1	<b>28,8</b>	-	<b>1,01s</b>	5/5	36,4	-	17,4s	5/5
G_50_4_1_2	0,0	-	<b>0,04s</b>	5/5	0,0	-	0,76s	5/5
G_80_5_1_1	<b>33,3</b>	-	<b>13,1s</b>	5/5	37,9	-	747,6s	5/5
G_80_5_1_2	0,00	-	<b>0,17s</b>	5/5	0,00	-	1,43s	5/5
G_100_6_1_1	<b>32,9</b>	-	<b>42,7s</b>	<b>5/5</b>	37,1	11,05	1999,9s	1/5
G_100_6_1_2	0,00	-	<b>0,23s</b>	5/5	0,00	-	1,95s	5/5
G_120_7_1_1	<b>40,8</b>	<b>8,3</b>	<b>258,1s</b>	<b>4/5</b>	41,3	19,9	3600s	0/5
G_120_7_1_2	0,0	-	<b>0,27s</b>	5/5	0,0	-	3,0s	5/5
G_120_7_2_2	<b>21,1</b>	-	<b>63,5s</b>	5/5	28,3	-	341,0s	5/5
G_120_7_2_3	8,6	-	<b>3,00s</b>	5/5	8,6	-	5,2s	5/5
G_150_7_1_1	<b>35,6</b>	<b>7,9</b>	<b>866,4s</b>	<b>2/5</b>	39,9	20,4	3600s	0/5
G_150_7_1_2	0,0	-	<b>0,24s</b>	5/5	0,0	-	2,7s	5/5
G_150_7_2_2	<b>21,9</b>	-	<b>134,1s</b>	<b>5/5</b>	26,7	17,6	203,6s	3/5
G_150_7_2_3	<b>2,9</b>	-	<b>2,4s</b>	5/5	5,7	-	7,3s	5/5

TABLE 3.6 – Synthèse des résultats numériques pour les cibles engendrées aléatoirement

Pour l'ensemble des instances, MIP2 (modèle de flot) a de meilleures performances que MIP3 (modèle MTZ) sur tous les critères. Sur les 70 instances testées, 66 (resp. 54) sont résolues à l'optimum en moins d'une heure par MIP2 (resp. MIP3). La résolution MIP pour les instances résolues par les deux modèles nécessite seulement 12,6 secondes en moyenne pour MIP2, contre 121,1 secondes pour MIP3. Ainsi, MIP2 est dix fois plus rapide que MIP3. Cela peut être en partie expliqué par le fait que l'écart initial moyen  $gap_i$  fourni par MIP2 est meilleur que pour MIP3 : 16% contre 19%.

Enfin, l'écart final moyen  $gap_f$  renvoyé par CPLEX, calculé pour les instances non résolues en une heure par les deux modèles, est 2,6 fois plus grand pour MIP3 que pour MIP2 (21,5% contre 8,1%). La densité importante des graphes aléatoires peut aussi expliquer la supériorité de MIP2 sur MIP3, puisque le nombre de contraintes de MIP3 dépend de  $|A^{com}|$ .

### 3.5.2 Résultats pour le problème $MCKCS$ avec $k \in \{2, 3\}$

Dans cette sous-section, nous nous sommes penchés sur une généralisation du problème  $MCCS$  : le problème de la  $k$ -couverture connexe minimum (ou  $k$ -tuple dominant connexe minimum), soit *Minimum Connected  $k$ -Coverage Set* ( $MCKCS$ ), où l'on considère un entier positif  $k$  qui définit le degré de couverture de chaque cible. Pour une définition exhaustive du problème, se référer au Chapitre 2, Sous-section 1.2.3.

Afin de satisfaire les contraintes de  $k$ -couverture, nos deux modèles MIP2 et MIP3, dédiés au problème  $MCCS$ , peuvent être aisément modifiés en remplaçant la contrainte de 1-couverture

$$x_i + \sum_{j \in X: (i,j) \in A^{capt}} x_j \geq 1 \quad \forall i \in X \setminus \{t\}$$

par la contrainte de  $k$ -couverture

$$x_i + \sum_{j \in X: (i,j) \in A^{capt}} x_j \geq k \quad \forall i \in X \setminus \{t\}.$$

#### 3.5.2.1 Grilles de cibles

Pour des grilles à motif carré et pour un rayon de captation  $R_{capt}$  donné, il existe  $k_{max}$  tel que, pour tout  $k > k_{max}$ , le problème  $MCKCS$  n'admet pas de solution. Par exemple, si

$R_{capt} = 1$ , une cible située dans un coin de la grille possède un voisinage de captation de cardinalité 3. Ainsi, cette cible ne peut pas être couverte plus de trois fois. Nous pouvons donc conclure que  $k_{max}$  vaut 3 pour  $R_{capt} = 1$ . La Figure 3.5 illustre le cas  $k_{max} = 6$  pour  $R_{capt} = 2$ . Le Tableau 3.7 liste les différentes valeurs de  $k_{max}$  pour  $R_{capt}$  variant de 1 à 4.

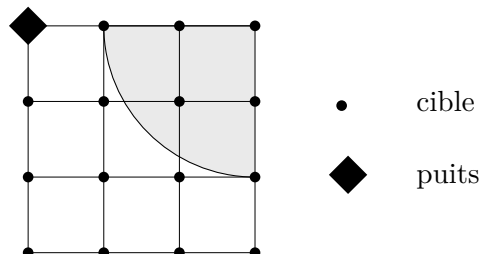


FIGURE 3.5 – Voisinage de couverture d’une cible dans le coin de la grille pour  $R_{capt} = 2$

$R_{capt}$	$k_{max}$
1	3
2	6
3	11
4	17

TABLE 3.7 – Valeurs maximales de  $k$  en fonction de  $R_{capt}$

Les résultats numériques pour les grilles sont présentés dans le Tableau 3.8 pour MIP2 et dans le Tableau 3.9 pour MIP3. Dans les deux tableaux, les meilleurs résultats apparaissent en gras. Les valeurs affichées pour chaque couple  $(R_{capt}, R_{com})$  dans ces deux tableaux sont des moyennes sur dix instances de grilles. MIP2 (qui s’appuie sur une modélisation de flot simple) résout trois instances de plus que MIP3 (fondé sur des contraintes MTZ) pour  $k = 2$  et deux instances de plus pour  $k = 3$ . Pour les deux modèles, on peut observer deux types de comportement. Premièrement, pour  $k = 2$ , les instances avec  $R_{capt} = R_{com}$  sont plus difficiles à résoudre. En effet, les écarts initiaux sont plus importants : de l’ordre de 15,3% (resp. 14,1%) en moyenne pour MIP2 (resp. MIP3), alors que pour les instances avec  $R_{com} = R_{capt} + 1$ , l’écart moyen n’est plus que de 4,5%. Deuxièmement, le problème MCKCS est plus facile à résoudre lorsque  $k$  est plus élevé. En effet, pour  $k = 3$ , MIP2 (resp. MIP3) résout 59 (resp. 57) instances sur les 60 dans le temps imparti de une heure. Ces observations peuvent être expliquées par le fait que moins de capteurs supplémentaires sont nécessaires pour assurer la connexité du réseau lorsque  $k$  et  $R_{com}$  augmentent.

CHAPITRE 3. FORMULATIONS MATHÉMATIQUES POUR LE PROBLÈME DE COUVERTURE CONNEXE MINIMUM

<i>Instance</i>	2-couverture				3-couverture			
	<i>gap<sub>i</sub></i> %	<i>gap<sub>f</sub></i> %	CPU	<i>#résolu</i>	<i>gap<sub>i</sub></i> %	<i>gap<sub>f</sub></i> %	CPU	<i>#résolu</i>
G_1_1	18,1	12,7	1034s	3/10	3,5	-	<b>21s</b>	<b>10/10</b>
G_1_2	4,9	-	<b>280s</b>	<b>10/10</b>	3,3	-	<b>22s</b>	10/10
G_2_2	18,5	11,4	212s	<b>5/10</b>	3,5	2,4	<b>140s</b>	<b>9/10</b>
G_2_3	3,7	-	<b>15s</b>	10/10	2,5	-	<b>44s</b>	10/10
G_3_3	9,4	-	568s	<b>10/10</b>	3,7	-	<b>16s</b>	10/10
G_3_4	5,4	-	<b>8s</b>	10/10	2,9	-	<b>3s</b>	10/10

TABLE 3.8 – Résultats numériques pour la  $k$ -couverture connexe minimum obtenus avec MIP2 (modèle de flot) dans les grilles de cibles

<i>Instance</i>	2-couverture				3-couverture			
	<i>gap<sub>i</sub></i> %	<i>gap<sub>f</sub></i> %	CPU	<i>#résolu</i>	<i>gap<sub>i</sub></i> %	<i>gap<sub>f</sub></i> %	CPU	<i>#résolu</i>
G_1_1	15,6	14,2	<b>169s</b>	3/10	3,5	1,0	144s	9/10
G_1_2	4,8	1,53	449s	9/10	3,3	-	59s	10/10
G_2_2	16,5	11,4	46s	4/10	4,0	4,6	411s	8/10
G_2_3	3,6	-	266s	10/10	2,5	-	211s	10/10
G_3_3	10,2	11,3	422s	9/10	3,9	-	96s	10/10
G_3_4	5,4	-	12s	10/10	2,9	-	11s	10/10

TABLE 3.9 – Résultats numériques pour la  $k$ -couverture connexe minimum obtenus avec MIP3 (modèle MTZ) dans les grilles de cibles

### 3.5.2.2 Graphes engendrés aléatoirement

Les résultats numériques pour les réseaux de capteurs induits par des cibles engendrées aléatoirement sont présentés dans le Tableau 3.10 pour le problème de la 2-couverture connexe minimum. Le Tableau 3.11 synthétise les résultats obtenus pour l'ensemble d'instances de graphes avec 150 nœuds. Les meilleurs résultats sont en gras.

L'observation est la même que pour les instances de grilles carrées. En effet, pour  $k = 2$ , les instances avec  $R_{capt} = R_{com}$  sont plus difficiles à résoudre. Les écarts initiaux sont plus élevés : 8% (resp. 10,5%) en moyenne pour MIP2 (resp. MIP3), alors que pour les instances avec  $R_{capt} < R_{com}$ , l'écart moyen est réduit à 0% pour les deux. Le problème  $MCkCS$  est plus facile à résoudre lorsque  $k$  est grand. De plus, MIP2 a de meilleures performances que MIP3 lorsque l'on prend en compte une couverture multiple des cibles. La supériorité de MIP2 est particulièrement flagrante pour les graphes aléatoires, comme pour le problème  $MCCS$ . Ainsi, pour le problème  $MC2CS$ , MIP2 résout les 70 instances à l'optimum en moins d'une heure et la résolution MIP nécessite seulement 26,8 secondes en moyenne.

<i>Instances</i>	MIP2 (modèle de flot)				MIP3 (modèle MTZ)			
	<i>gap<sub>i</sub></i> %	<i>gap<sub>f</sub></i> %	CPU	<i>#résolues</i>	<i>gap<sub>i</sub></i> %	<i>gap<sub>f</sub></i> %	CPU	<i>#résolues</i>
G_50_1_1	8,3	-	<b>0,31s</b>	5/5	12,9	-	64,6s	5/5
G_50_1_2	0,0	-	<b>0,05s</b>	5/5	0,0	-	0,72s	5/5
G_80_1_1	7,5	-	<b>1,6s</b>	5/5	11,7	-	410,4s	5/5
G_80_1_2	0,00	-	<b>0,15s</b>	5/5	0,00	-	1,9s	5/5
G_100_1_1	11,9	-	<b>3,5s</b>	5/5	12,5	5,5	341,7s	4/5
G_100_1_2	0,00	-	<b>0,19s</b>	5/5	0,00	-	1,6s	5/5
G_120_1_1	15,3	-	<b>344,9s</b>	5/5	17,8	7,2	3600s	0/5
G_120_1_2	0,0	-	<b>0,18s</b>	5/5	0,0	-	1,9s	5/5
G_120_2_2	3,1	-	<b>2,3s</b>	5/5	4,7	-	19,4s	5/5
G_120_2_3	0,0	-	<b>0,30s</b>	5/5	0,0	-	3,5s	5/5
G_150_1_1	9,6	-	<b>19,2s</b>	5/5	11,9	6,5	3600s	0/5
G_150_1_2	0,0	-	<b>0,24s</b>	5/5	0,0	-	3,5s	5/5
G_150_2_2	1,7	-	<b>1,9s</b>	5/5	1,7	-	18,2s	5/5
G_150_2_3	0,0	-	<b>0,33s</b>	5/5	0,0	-	6,4s	5/5

TABLE 3.10 – Résultats numériques pour la 2-couverture connexe minimum obtenus avec les modèles MIP2 et MIP3 sur des cibles engendrées aléatoirement

MIP3 résout 11 instances de moins que MIP2 et prend 78 fois plus de temps pour résoudre le même groupe d’instances.

Pour  $k = 3$ , le Tableau 3.11 se concentre sur les instances de graphes avec 150 nœuds. Les mêmes observations peuvent être faites que pour les autres instances de graphes aléatoires, c’est-à-dire que MIP2 est plus performant que MIP3 sur tous les critères : écarts initiaux, CPU et nombre d’instances résolues. Ainsi, pour les instances avec  $R_{capt} < R_{com}$ , l’écart initial moyen est réduit à 0,005% (resp. 0,01%) pour MIP2 (resp. MIP3), le temps CPU de résolution est divisé par 12 pour MIP2 et MIP2 résout trois instances de plus.

### 3.6 Synthèse des résultats

En ce qui concerne le problème *MCCS*, pour toutes les instances de type grilles, au moins l’un des deux modèles MIP2 ou MIP3 fournit une meilleure borne à la racine de la phase *branch and bound* que la formulation MIP1 de Rebai *et al.* Par ailleurs, les deux formulations MIP2 et MIP3 ont de meilleures performances que MIP1, avec une proportion plus élevée d’instances résolues, un temps CPU moins important ainsi qu’un plus petit nombre de nœuds explorés dans la recherche arborescente. MIP3 (qui repose sur

CHAPITRE 3. FORMULATIONS MATHÉMATIQUES POUR LE PROBLÈME DE COUVERTURE CONNEXE MINIMUM

<i>Instance</i>	MIP2 (modèle de flot)				MIP3 (modèle MTZ)			
	<i>gap<sub>i</sub></i> %	Bd	CPU	<i>nœuds</i>	<i>gap<sub>i</sub></i> %	Bd	CPU ou <i>gap<sub>f</sub></i> %	<i>nœuds</i>
G_1_1_1	0,00	54	<b>0,5s</b>	0	0,00	54	6,9s	25K
G_1_1_2	0,02	62	<b>0,5s</b>	0	0,02	62	965,7s	4M
G_1_1_3	0,02	60	<b>4,2s</b>	0	0,02	60	3,2%	3M
G_1_1_4	0,00	59	<b>0,3s</b>	0	0,02	58	1,7%	20M
G_1_1_5	0,02	64	<b>1,1s</b>	159	0,02	64	1,5%	20M
G_1_2_1	0,0	54	<b>0,38s</b>	0	0,0	54	1,8s	0
G_1_2_2	0,0	62	<b>0,15s</b>	0	0,0	62	1,5s	0
G_1_2_3	0,0	60	<b>0,2s</b>	0	0,0	60	1,5s	0
G_1_2_4	0,0	58	<b>0,14s</b>	0	0,0	58	1,9s	0
G_1_2_5	0,0	64	<b>0,16s</b>	0	0,0	64	1,0s	0
G_2_2_1	0,0	18	<b>0,44s</b>	0	0,0	18	20,6s	20K
G_2_2_2	0,0	19	<b>0,33s</b>	0	0,0	19	6,4s	2K
G_2_2_3	0,0	17	<b>1,1s</b>	0	0,0	17	5,9s	7K
G_2_2_4	0,0	19	<b>0,38s</b>	0	0,0	19	20,5s	10K
G_2_2_5	0,0	18	<b>0,32s</b>	0	0,0	18	6,4s	5K
G_2_3_1	0,0	18	<b>0,36s</b>	0	0,0	18	5,9s	162
G_2_3_2	0,0	19	<b>0,61s</b>	0	0,0	19	5,6s	655
G_2_3_3	0,0	17	<b>0,29s</b>	0	0,0	17	4,3s	155
G_2_3_4	0,0	19	<b>0,58s</b>	0	0,0	19	7,8s	1K
G_2_3_5	0,0	18	<b>0,47s</b>	0	0,0	18	9,6s	3K

TABLE 3.11 – Résultats numériques pour la 3-couverture connexe minimum pour des graphes à 150 nœuds

les contraintes MTZ) fournit les meilleurs résultats en moyenne pour les grilles.

En revanche, pour les réseaux de capteurs aléatoires, MIP2 a de bien meilleures performances que MIP3 sur tous les critères. Cette observation peut être en partie expliquée par la plus grande densité des instances de graphes aléatoires qui augmente significativement le nombre de contraintes de MIP3.

Nos expériences confirment la difficulté de résolution du problème *MCCS* avec les formulations mathématiques classiques en programmes linéaires mixtes inspirés par la littérature sur le problème du voyageur de commerce. La difficulté est particulièrement visible pour de petites valeurs de  $R_{capt}$  et  $R_{com}$ . La qualité de la borne de la relaxation continue et donc l'efficacité de nos deux modèles sont sensibles aux valeurs de  $R_{capt}$  et  $R_{com}$ . Ceci reste valable pour le problème *MC<sup>k</sup>CS*. Toutefois, MIP2 donne de meilleures performances que MIP3 lorsque l'on prend en compte la couverture multiple de cibles.



## Conclusion

Finalement, même s'ils n'ont pas fait l'objet d'une étude plus poussée, on note que l'injection de coupes obtenues par les lemmes du chapitre suivant donne de très bons résultats dans les performances de nos modèles pour le *MDS*. Cela pourrait faire l'objet de futurs travaux améliorant les tailles des instances résolues de façon exacte, qui pour l'instant restent un peu en deçà des tailles habituelles de réseaux de capteurs, qui comme on le rappelle, peuvent comprendre plusieurs centaines de nœuds.

## Chapitre 4

# Résultats théoriques sur les problèmes *MCDS* et *MCCS* dans les grilles

Ce chapitre vise à présenter les résultats théoriques obtenus pour les problèmes du dominant connexe minimum (*MCDS*) et de la couverture connexe minimum (*MCCS*) dans les grilles. Le problème *MCDS* correspond à la minimisation du nombre de capteurs sur un terrain modélisé par une grille à motif carré dans le cas particulier  $R_{capt} = R_{com} = 1$ , alors que dans le problème *MCCS*,  $R_{com}$  et  $R_{capt}$  sont de valeurs quelconques, avec toutefois  $R_{com} \geq R_{capt} \geq 1$ . Comme toujours, le placement des capteurs doit permettre de couvrir l'ensemble des cibles de cette grille tout en assurant la possibilité de router les données jusqu'au puits.

Dans tout ce chapitre, on considère  $G(n, m)$  une grille rectangulaire à motif carré de  $n$  lignes et  $m$  colonnes, avec par convention  $m \geq n$ , où les sommets sont situés à l'intersection des lignes et des colonnes. Le problème *MCDS* consiste donc à trouver un sous-ensemble de sommets  $D^*$  de  $G(n, m)$  de cardinal minimum tel que le sous-graphe induit par  $D^*$  soit connexe dans  $G(n, m)$  et tel que  $D^*$  soit un ensemble dominant de  $G(n, m)$ . Dans le contexte des réseaux de capteurs,  $D^*$  correspond alors à l'ensemble des capteurs à disposer sur le terrain.

Nous conjecturons que ce problème est polynomial, quelles que soient les valeurs de  $n$  et  $m$ .

L'article de [Li and Toulouse 2010] a déjà démontré ce résultat dans le cas des grilles  $G(n, m)$  avec  $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ , avec  $m \geq n$ .

Ainsi, après avoir donné quelques notions relatives au problème dont nous nous servirons par la suite, nous allons expliciter brièvement les résultats de la littérature avant de proposer une heuristique dont nous conjecturons qu'elle détermine toujours une solution optimale. Nous poursuivons par des éléments de preuve associés à cette conjecture, puis nous proposons une borne inférieure.

## 4.1 Notations et définitions

Nous rappelons ici la définition d'une grille, déjà donnée dans le Chapitre 1, Sous-section 1.2.2. Nous notons  $G(n, m) = (X, E)$  une grille de  $n$  lignes et  $m$  colonnes, avec  $|X| = nm$  et  $|E| = n(m - 1) + m(n - 1) = 2nm - n - m$ .

**Définition 1.** Soient  $n$  et  $m$  deux entiers strictement positifs avec  $n \leq m$ . Une grille  $G(n, m) = (X, E)$  est un graphe non orienté avec  $X = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$  et  $E = \{(i, j), (i, j + 1)\} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{(i, j), (i + 1, j)\} \mid 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m\}$ .

En notant  $P_n$  et  $P_m$  les chaînes respectivement à  $n$  et  $m$  sommets, on peut également représenter  $G(n, m)$  comme le produit cartésien de  $P_n$  et  $P_m$ . En notant  $\square$  le produit cartésien de deux graphes, on a alors  $G(n, m) = P_n \square P_m$ .

Par convention, les lignes sont numérotées de 1 à  $n$  du haut vers le bas et les colonnes sont numérotées de 1 à  $m$  de la gauche vers la droite. Le sommet à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  sera noté  $(i, j)$ . Les trois lignes (resp. colonnes) extrêmes d'une grille sont les lignes (resp. colonnes) 1, 2 et 3 ou les lignes  $n - 2, n - 1, n$  (resp. colonnes  $m - 2, m - 1, m$ ). Par symétrie, et sauf si le contraire est indiqué, les trois lignes (resp. colonnes) extrêmes désigneront les lignes (resp. colonnes) 1, 2 et 3. Dans le reste du document, nous désignerons par  $L_i$  l'ensemble des sommets de la ligne numéro  $i$  et par  $C_j$  l'ensemble des sommets de la colonne  $j$ . De la même manière, nous noterons  $L_{i,j} = \bigcup_{k=i}^j L_k$  l'ensemble des sommets des lignes de  $L_i$  à  $L_j$  et  $C_{i,j} = \bigcup_{k=i}^j C_k$  l'ensemble des sommets des colonnes de  $C_i$

à  $C_j$ . Finalement, on dénotera une sous-grille  $L_{i,i'}C_{j,j'} = L_{i,i'} \cap C_{j,j'}$ , ce qui correspond à l'ensemble des sommets allant de  $L_i$  à  $L_{i'}$  et de  $C_j$  à  $C_{j'}$ .

Soit une grille  $G(n, m) = (X, E)$ . Nous notons  $D^*$  l'ensemble des sommets du dominant connexe d'une solution optimale. De la même manière, nous notons  $D$  l'ensemble des sommets du dominant connexe (*CDS*) d'une solution quelconque.

**Définition 2** (Sous-ensemble connexe). *Soit  $G(n, m)$  une grille et soit  $D$  un CDS de  $G(n, m)$ . Un sous-ensemble connexe  $\gamma$  de  $D$  est un sous-ensemble de sommets de  $D$  qui induisent un sous-graphe connexe de  $G(n, m)$ .*

On se servira de cette notion pour désigner des sous-ensembles connexes d'un certain dominant  $D$ . En particulier, on va s'intéresser à des sous-ensembles connexes maximaux pour l'inclusion.

**Définition 3** (Sous-ensemble connexe maximal relativement à  $L_{x,x'}$ ). *Soit  $A_{x,x'} = D \cap L_{x,x'}$  la restriction de  $D$  sur une sous-grille  $L_{x,x'}$  de  $G(n, m)$ ;  $A_{x,x'}$  engendre un sous-graphe de  $G(n, m)$  constitué de  $P$  composantes connexes  $A^1, \dots, A^P$  avec  $A_{x,x'} = \bigcup_{p=1}^P A^p$ . Chaque sous-ensemble de sommets  $A^p$  de  $A_{x,x'}$  est donc un sous-ensemble connexe maximal pour l'inclusion. On considère par ailleurs, pour  $p \in \{1, \dots, P\}$ , les indices  $i$  et  $j$ ,  $i \leq j$ , des colonnes sur lesquelles sont situés les sommets extrêmes de  $A^p$  :*

$$i = \min_{1 \leq y \leq m} \{y : C_y \cap A^p \neq \emptyset\}$$

$$j = \max_{1 \leq y \leq m} \{y : C_y \cap A^p \neq \emptyset\}.$$

Dans la suite du mémoire, on notera tout sous-ensemble connexe maximal  $A_{i,j}$  et on précisera à quel ensemble de lignes  $L_{x,x'}$  de  $G(n, m)$  il appartient.

**Définition 4** (Segment). *Soit  $G(n, m)$  une grille et soit  $D$  un CDS de  $G(n, m)$ . On appelle segment un ensemble de  $k$  sommet(s) consécutif(s) de  $D$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ , sur une certaine ligne  $L_x$  (resp. une certaine colonne  $C_y$ ). On parle de segment maximal lorsqu'il n'existe pas de sommets de  $D$  de part et d'autre du segment sur  $L_x$  (resp. sur  $C_y$ ). Lorsqu'un segment est constitué d'un seul sommet, ce segment sera dit unitaire.*

**Remarques :**

- Un CDS est constitué d'un ensemble de segments.
- Une ligne dont tous les sommets sont dans  $D$  est un segment maximal.

Un segment qui s'étend, sur la ligne  $L_x$ , de la colonne  $C_y$  à la colonne  $C_{y'}$  sera noté  $L_x^{y,y'}$ . De même, un segment qui s'étend, sur la colonne  $C_y$ , de la ligne  $L_x$  à la ligne  $L_{x'}$  sera noté  $C_y^{x,x'}$ . On trouvera une illustration de différents segments sur la Figure 4.1.

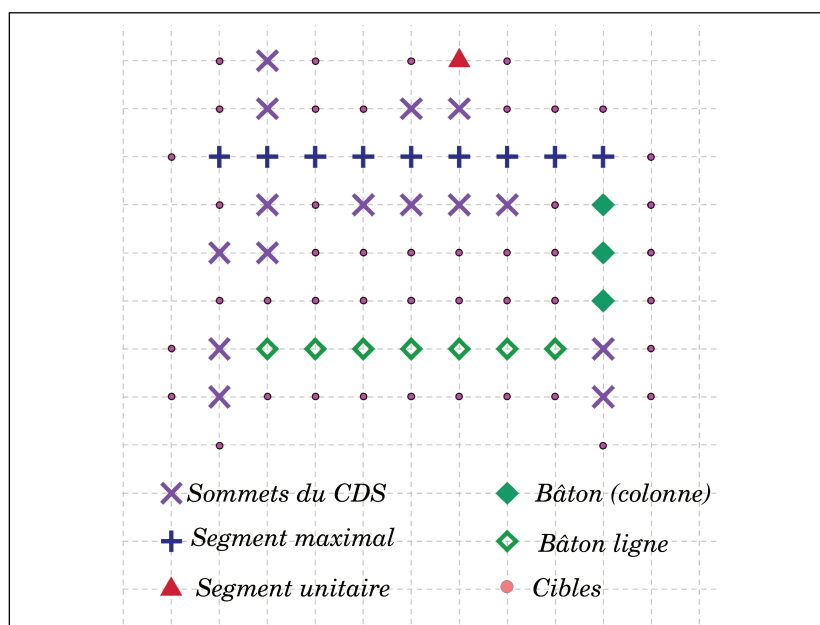


FIGURE 4.1 – Illustration de bâtons et de segments appartenant à un dominant connexe

**Définition 5** (bâton). *On appelle bâton un segment d'au moins deux sommets consécutifs d'un CDS  $D$  sur une certaine colonne  $C_y$  (respectivement  $L_x$ ), sans aucun sommet voisin dans  $D$  sur les colonnes adjacentes (resp. sur les lignes adjacentes). Un bâton correspondant à des sommets consécutifs sur une colonne (resp. une ligne) est un bâton colonne (resp. bâton ligne).*

Ainsi, un bâton colonne sur  $C_y$  s'étend du sommet  $(x, y)$  au sommet  $(x', y)$ , pour  $x \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $x < x' \leq n$ . En outre, il n'existe pas de sommets de  $D$  sur  $C_{y-1}$  et  $C_{y+1}$ , lorsque ces colonnes existent, entre  $L_x$  et  $L_{x'}$ . On notera un tel bâton  $B_y^{x,x'}$ . On remarque qu'un bâton est bien un segment particulier.

De la même manière, un bâton ligne sur  $L_x$  s'étend du sommet  $(x, y)$  au sommet  $(x, y')$  pour  $y \in \{1, \dots, m-1\}$ ,  $y < y' \leq m$ . En outre, il n'existe pas de sommets de  $D$  sur  $L_{x-1}$  et  $L_{x+1}$ , lorsque ces lignes existent, entre  $C_y$  et  $C_{y'}$ . On notera un tel bâton  $BL_x^{y,y'}$ . On trouvera une illustration de différents segments sur la Figure 4.1.

**Par convention, lorsque l'on parle de bâton sans autre précision, il s'agira d'un bâton colonne.**

**Définition 6** (Distance de Manhattan). *Soit  $G(n, m) = (X, E)$  une grille et soient  $s_1 = (x_1, y_1)$  et  $s_2 = (x_2, y_2)$  deux sommets. La distance de Manhattan entre  $s_1$  et  $s_2$  vaut  $d(s_1, s_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ .*

**Définition 7** (Distance d'un sommet à un ensemble de sommets). *Soient  $G(n, m) = (X, E)$  une grille,  $s \in X$  un sommet et  $\gamma \subset X$  un ensemble de sommets. La distance de  $s$  à  $\gamma$  est égale à  $d(s, \gamma) = \min_{s' \in \gamma} d(s, s')$ .*

**Définition 8** (Distance entre deux ensembles de sommets). *Soient  $G(n, m) = (X, E)$  une grille,  $\gamma \subset X$  et  $\gamma' \subset X$  deux ensembles de sommets. La distance entre  $\gamma$  et  $\gamma'$  est égale à  $d(\gamma, \gamma') = \min_{s \in \gamma, s' \in \gamma'} d(s, s')$ .*

**Définition 9** (Voisinage). *Soit  $s$  un sommet de coordonnées  $(x, y)$ . On appelle voisinage (fermé) de  $s$  l'ensemble  $N(s) = \{(x, y), (x-1, y), (x+1, y), (x, y-1), (x, y+1)\} \cap G(n, m)$ . Autrement dit,  $N(s)$  est constitué de  $s$  et de l'ensemble des sommets de la grille adjacents à  $s$ . Si  $\gamma$  est un ensemble de sommets, le voisinage de  $\gamma$  sera défini comme  $N(\gamma) = \bigcup_{s \in \gamma} N(s)$ .*

**Définition 10** (Transformation valide). *Soit  $D$  un dominant connexe de  $G(n, m)$  et  $\gamma \subset D$ . Une transformation valide de  $\gamma$  en un ensemble de sommets  $\gamma'$  vérifie les trois propriétés suivantes :*

- $|\gamma'| \leq |\gamma|$
- $N(\gamma) \subseteq N(\gamma')$
- L'ensemble  $D' = (D \setminus \gamma) \cup \gamma'$  induit un sous-graphe connexe de  $G(n, m)$  et donc forme un dominant connexe de  $G(n, m)$ .

On notera alors  $\gamma' \stackrel{D}{\preceq} \gamma$  ou, par abus de notation,  $\gamma' \preceq \gamma$  lorsqu'il n'existe pas d'ambiguïté sur le dominant connexe  $D$  considéré.

Dans la suite du mémoire, on choisira généralement  $\gamma$  de sorte qu'il constitue un sous-ensemble de sommets maximal compris entre deux lignes  $L_x$  et  $L_{x'}$ . Ce, afin de faire des disjonctions de cas sur les différentes structures possibles de  $\gamma$ .

**Proposition 1.** *Soit  $D$  un dominant connexe de  $G(n, m)$  et  $\gamma \subset D$ . Si  $\gamma'$  est un ensemble obtenu par transformation valide de  $\gamma$ , alors  $D' = (D \setminus \gamma) \cup \gamma'$  est un dominant connexe de  $G(n, m)$  avec  $|D'| \leq |D|$ .*

*Démonstration.* Puisque  $N(\gamma) \subseteq N(\gamma')$ ,  $D'$  est nécessairement un ensemble dominant de la grille  $G(n, m)$ . Par ailleurs, puisque  $D'$  est connexe par hypothèse, il s'agit bien d'un dominant connexe de  $G(n, m)$ . Enfin, puisque  $|\gamma'| \leq |\gamma|$ , nous obtenons directement  $|D'| \leq |D|$ .  $\square$

**Proposition 2.** *L'opérateur  $\stackrel{D}{\preceq}$  est transitif.*

*Démonstration.* Soient  $D$  un dominant connexe de  $G(n, m)$  et  $\gamma \subset D$ . Soient  $\gamma'$  et  $\gamma''$  avec  $\gamma' \stackrel{D}{\preceq} \gamma$  et  $\gamma'' \stackrel{D'}{\preceq} \gamma'$ . On a trivialement  $|\gamma''| \leq |\gamma'| \leq |\gamma|$ , et  $N(\gamma) \subseteq N(\gamma') \subseteq N(\gamma'')$ . Enfin, puisque  $D' = (D \setminus \gamma) \cup \gamma'$  est connexe et  $D'' = (D' \setminus \gamma') \cup \gamma''$  est connexe, on obtient que  $((D \setminus \gamma) \cup \gamma') \setminus \gamma' \cup \gamma'' = (D \setminus \gamma) \cup \gamma''$  est connexe. On obtient donc  $\gamma'' \stackrel{D}{\preceq} \gamma$ .  $\square$

L'essentiel des raisonnements présentés dans ce chapitre reposent sur la notion de *transformation valide*. En effet, afin de réduire l'ensemble des cas à considérer, l'objectif sera le plus souvent de s'intéresser à des sous-ensembles maximaux particuliers du dominant connexe et de montrer qu'ils peuvent se réduire à d'autres sous-ensembles au moins aussi avantageux (en termes de nombres de sommets et de couverture, tout en préservant la connexité), mais de formes moins diverses et clairement identifiables. De plus, comme la notion de transformation valide est transitive, il est possible de raisonner par transformations successives.

Dans la suite de ce chapitre, par souci d'alléger la présentation, un dominant connexe  $D$  sera toujours un dominant connexe d'une grille  $G(n, m)$ , sauf mention contraire.

### Présentation des résultats obtenus par [Li and Toulouse 2010](#)

Dans un premier temps nous allons brièvement expliciter les résultats obtenus par [Li and Toulouse 2010](#).

Le problème MLST dont on a donné une définition au Chapitre 1, Sous-section [1.2.3](#) a été étudié dans les grilles  $n \times m$  par Li et Toulouse [Li and Toulouse 2010](#). Les auteurs y donnent la valeur du nombre maximum de feuilles en fonction de  $m$  pour les cas  $n \leq 4$  et  $n = 6$ . Ils donnent également des bornes supérieures et des solutions réalisables pour MLST pour plusieurs autres cas. Comme le montrent Li et Toulouse, pour  $n \leq 3$ , il existe une solution optimale qui est triviale et prend la forme d'une ligne de sommets (voir la Figure [4.2](#)). Dans le cas de  $G(1, m)$ , il s'agit de l'ensemble  $L_1$  sauf les sommets extrêmes  $(1, 1)$  et  $(1, m)$ , à l'exception du cas  $m \leq 2$  où l'ensemble optimal est réduit à un de ces deux sommets extrêmes. Pour  $G(2, m)$ , un dominant connexe optimal (*MCDS*) est l'ensemble  $L_1$  ou  $L_2$ . Pour  $G(3, m)$ , un *MCDS* est l'ensemble  $L_2$ .

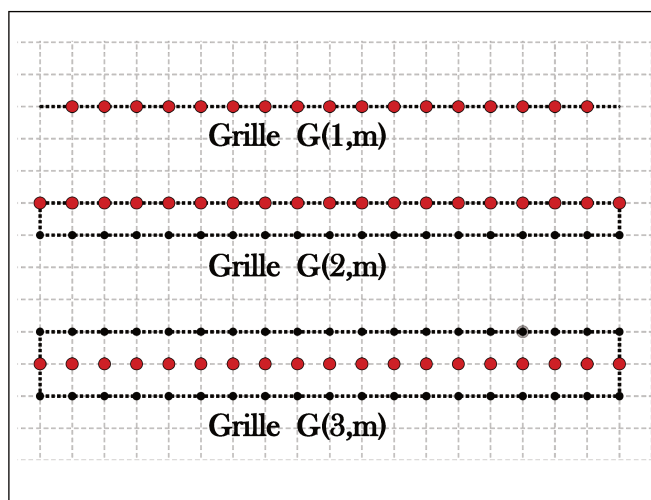


FIGURE 4.2 – Solution optimale du *MCDS* pour  $G(1, m)$ ,  $G(2, m)$  et  $G(3, m)$

Ainsi, en notant  $D^*(n, m)$  le cardinal d'un *MCDS* pour la grille  $G(n, m)$ , on a pour  $m \geq 3$  :

$$D^*(1, m) = m - 2$$

$$D^*(2, m) = m$$

$$D^*(3, m) = m$$



En outre, Li et Toulouse exhibent un ensemble optimal pour les cas  $n = 4$  et  $n = 6$  en fournissant la preuve de l'optimalité. Ils démontrent le résultat pour  $n = 6$  en raisonnant sur les degrés des sommets de l'arbre couvrant. Pour  $n = 4$ , ils font une disjonction de cas sur le nombre maximal possible de feuilles qu'un arbre couvrant peut comprendre, cette limite étant atteinte par l'heuristique qu'ils exhibent par ailleurs pour ce cas. Ainsi ils obtiennent pour  $m \geq 4$  :

$$\begin{aligned} D^*(4, m) &= 2m - \lfloor m/3 \rfloor \\ D^*(6, m) &= 2m + 2. \end{aligned}$$

## 4.2 Une nouvelle heuristique (HCDS) pour la construction d'un dominant connexe

Dans cette section, nous proposons une heuristique, nommée HCDS, permettant de trouver une solution réalisable pour le problème du dominant connexe minimum appliqué à une grille  $G(n, m)$ , pour tout  $n$  et tout  $m$ . On notera  $D^*(n, m)$  le cardinal d'un dominant connexe optimal d'une grille  $G(n, m)$ .

### 4.2.1 Propriétés d'une solution pour le problème MCDS

**Propriété 1.** *Pour toute paire d'entiers positifs  $n$  et  $m$ ,  $D^*(n, m) = D^*(m, n)$  car trivialement les grilles  $G(n, m)$  et  $G(m, n)$  sont identiques à une rotation près.*

**Lemme 1.** *Soient  $k$ ,  $q$  et  $m$  trois entiers positifs vérifiant  $m \geq 4$ ,  $m \neq 0 \pmod{3}$ ,  $k > 1$  et  $q > 1$  ; alors :*

- $D^*(3q, 3k) \leq 3kq + \min(q, k)$
- $D^*(3q, m) = D^*(m, 3q) \leq qm + q$ .

*Démonstration.* Dans le cas d'une grille  $G(3q, 3k)$  avec  $q \leq k$  ou dans le cas  $G(3q, m)$  avec  $m \neq 0 \pmod{3}$ , nous construisons un ensemble dominant connexe comme suit. Comme illustré dans la Figure 4.3, nous considérons un ensemble de sommets  $D$  constitué de  $C_2$  et de tous les bâtons lignes  $BL_{3t+2}^{3,m}$  pour  $0 \leq t \leq q - 1$ . Chacun des bâtons lignes sélectionnés est connecté à  $C_2$ . L'ensemble considéré est donc connexe. Par ailleurs, chaque bâton  $BL_{3t+2}^{3,m}$



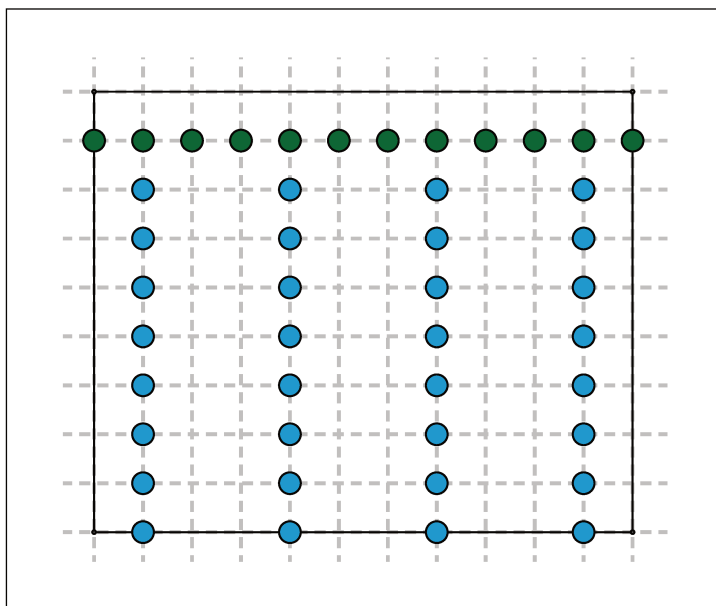


FIGURE 4.4 – Dominant connexe  $D$  d'une grille  $G(m, 3q)$  ( $m = 10, q = 4$ )

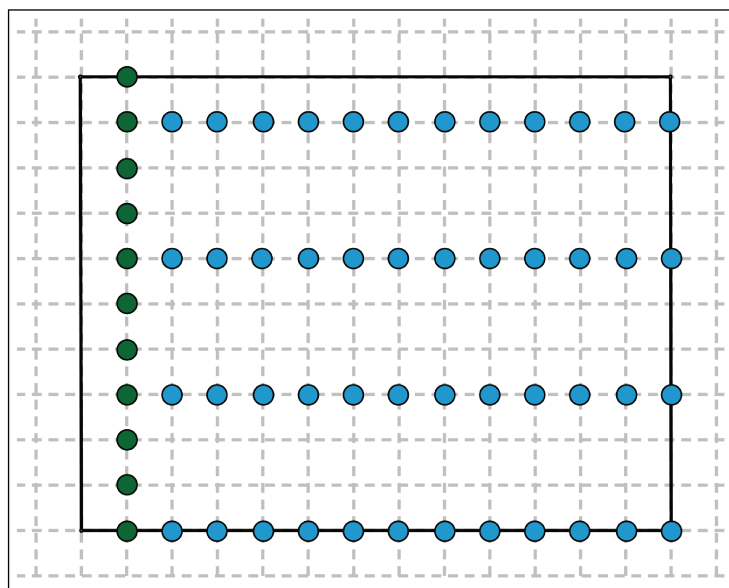


FIGURE 4.5 – Dominant connexe  $D$  d'une grille  $G(3q + 2, 3k + 2)$  ( $q = 3, k = 4$ )

*Démonstration.* En suivant la même démarche que dans le Lemme [1](#), nous construisons pour  $G(3q + 1, 3k + 1)$  l'ensemble  $D$  constitué, dans un premier temps, de  $C_2$  et de tous les bâtons lignes  $BL_{3t+2}^{3,m}$ , pour  $0 \leq t \leq q - 1$ . Nous y ajoutons l'ensemble  $H = \{B_{3r}^{3q,3q+1}$  pour  $2 \leq r \leq k\} \cup (3q, 4)$ , quasi exclusivement composé de bâtons de deux sommets (voir la Figure [4.6](#)). L'ensemble  $D$  ainsi obtenu est connexe, l'ensemble  $H$

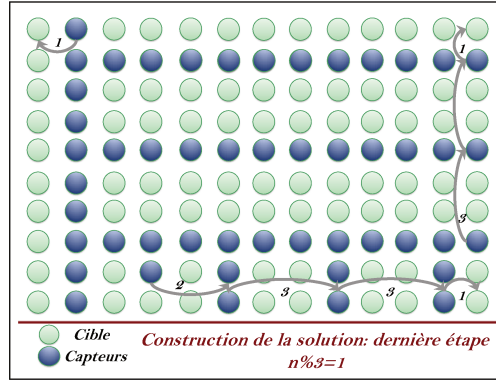


FIGURE 4.6 – Dominant connexe  $D$  d'une grille  $G(3q + 1, 3k + 1)$  ( $q = 3, k = 4$ )

étant connecté au segment ligne  $L_{3q-1}^{3,m}$ . En raisonnant de la même manière que dans le Lemme [1](#), on montre que  $D$  permet de couvrir tous les sommets de la grille de  $L_1$  à  $L_{3q}$ . Par ailleurs, l'ensemble  $H$  permet de couvrir tous les sommets  $(3q + 1, s)$  pour  $s \geq 4$ . Enfin,  $(3q + 1, 2)$  sur  $C_2 \subset D$  permet de couvrir les trois premiers sommets de  $L_{3q+1}$ . Nous obtenons ainsi un ensemble dominant connexe pour la grille qui contient  $3q + 1 + q(3k - 1) + 2(k - 1) + 1 = 3kq + 2q + 2k$  sommets.

Pour une grille  $G(3q + 1, 3k + 2)$ , nous construisons un ensemble  $D$  comme pour le cas précédent mais avec  $H = \{B_{3r-1}^{3q, 3q+1}$  pour  $2 \leq r \leq k + 1\}$ . On montre de la même manière que l'ensemble  $D$  obtenu est un dominant connexe de la grille, qui contient  $3q + 1 + 3kq + 2k$  sommets.  $\square$

Par la Propriété [1](#), on peut vérifier facilement que tous les types de grilles sont bien traités par ces trois lemmes. Pour synthétiser les résultats de ces lemmes, on constate qu'il existe deux constructions possibles pour  $G(n, m)$ , similaires à une rotation près. L'une est constituée d'une colonne  $C_2$  et de bâtons lignes de type  $BL_{3t+2}^{3,m}$  (on l'appellera construction par lignes) tandis que l'autre est constituée d'une ligne  $L_2$  et de bâtons colonnes de type  $B_{3t+2}^{3,n}$  (on l'appellera construction par colonnes). Comme nous allons le voir, en fonction des valeurs de  $n$  et de  $m$ , ces deux constructions ne sont pas équivalentes en termes de nombre de sommets dans la solution. De manière plus générale, ces constructions peuvent être décrites de la manière suivante :

- La construction par ligne consiste à sélectionner une colonne de sommets, puis à

sélectionner des bâtons lignes successifs qui y sont rattachés. Puis, dans les cas des grilles  $G(3q + 1, 3k + 1)$  ou  $G(3q + 1, 3k + 2)$ , à rajouter un certain ensemble  $H$  décrit précédemment.

- La construction par colonnes consiste à sélectionner une ligne de sommets, puis à sélectionner des bâtons successifs qui y sont rattachés.

Comme mentionné précédemment, en fonction de  $n$  et de  $m$ , il peut être plus intéressant de choisir une construction plutôt que l'autre, et cela se prouve théoriquement. Par exemple, si on considère le cas  $n = 3q + 1$  et  $m = 3k$  avec  $(q, k) \in \mathcal{N}^2$ , comme dans le cas de la grille  $G(10, 12)$ , alors la construction par colonnes est meilleure que celle par lignes. Soient  $D_L(G)$  la solution associée à la construction par lignes et  $D_C(G)$  la solution associée à celle par colonnes :

$$\begin{aligned}
 D_L(G) &= 3q + 1 + q(3k - 2) + 2\frac{(3k - 3)}{3} \\
 &= 3qk + q + 1 + 2(k - 1) \\
 &= 3qk + 2k + q - 1 \\
 D_C(G) &= 3k + k(3q + 1 - 2) \\
 &= 3k - k + 3qk \\
 &= 3qk + 2k
 \end{aligned}$$

Dans ce cas on aura toujours  $D_C(G) \leq D_L(G)$  pour  $q \geq 1$ , c'est-à-dire  $n \geq 4$ , ce qui par hypothèse est toujours vrai. Notons que pour  $q = 1$ ,  $D_L(G)$  et  $D_C(G)$  sont égaux.

Par un raisonnement similaire, il est ainsi possible de démontrer pourquoi le Lemme-1 est en fait décomposé en deux parties associées à ces deux constructions. Ainsi quand  $n \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $m \equiv 0 \pmod{3}$  et  $n < m$ , ou quand  $n \equiv 0 \pmod{3}$  et  $m \not\equiv 0 \pmod{3}$ , c'est la construction par lignes qui est la meilleure. À l'inverse, quand  $n \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $m \equiv 0 \pmod{3}$  et  $m > n$ , ou quand  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$  et  $m \equiv 0 \pmod{3}$  c'est la construction par colonnes qui est la meilleure, et quand  $n = m$  les deux sont équivalentes. Dans les autres cas, les constructions par lignes et par colonnes sont équivalentes. Un comparatif est récapitulé dans le tableau 4.1 de la section suivante.

## 4.2.2 Présentation de l'heuristique

Sur la base de ces résultats, nous présentons à présent une heuristique qui permet d'obtenir les bornes supérieures données dans la section précédente, quelle que soit la configuration de la grille.

Nous rappelons que nous considérons que le coin supérieur gauche de la grille correspond au sommet de coordonnées  $(1, 1)$ . Les deux constructions possibles par lignes ou par colonnes sont choisies par notre heuristique en fonction des valeurs respectives de  $m$  et de  $n$ , et dans les cas où les deux constructions sont équivalentes nous avons fait le choix de suivre une construction par lignes.

Dans ce qui suit, nous décrivons l'heuristique dans le cas d'une construction par lignes. Le cas de la construction par colonnes est très similaire. Il suffit d'invertir la sélection des lignes et des colonnes.

Dans un premier temps, notre heuristique sélectionne l'ensemble des sommets de  $C_2$ , puis dans le cas où  $n = 3q$  ou  $n = 3q+2$ , tous les bâtons sommets  $BL_{3t+2}^{3,m}$ , pour  $0 \leq t \leq q-1$  ou  $0 \leq t \leq q$  respectivement. Dans le cas où  $n = 3q + 1$ , on sélectionne tous les sommets des bâtons lignes  $BL_{3t+2}^{3,n}$ , pour  $0 \leq t < q - 1$  et le segment  $L_{3q-1}^{3,n}$ .

Nous sélectionnons ainsi une ligne sur trois jusqu'à arriver à l'extrémité de la grille dans le cas où  $n \equiv 0 \pmod{3}$  ou  $n \equiv 2 \pmod{3}$ .

Dans le cas où  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , la dernière ligne de sommets n'est pas couverte à l'exception des trois premiers. Il faut donc, à partir de la dernière ligne sélectionnée, sélectionner les deux sommets situés sur  $L_{n-1}$  et  $L_n$  toutes les trois colonnes à partir de  $C_{m-1}$  jusqu'à  $C_2$ .

Notons que lorsque  $m \equiv 1 \pmod{3}$ , ce ne sont pas deux sommets mais un seul qu'il suffit de sélectionner sur la  $C_4$ .

Cet algorithme a une complexité en temps en  $O(nm)$ . Le tableau 4.2 synthétise les

## CHAPITRE 4. RÉSULTATS THÉORIQUES SUR LES PROBLÈMES *MCDS* ET *MCCS* DANS LES GRILLES

---

résultats obtenus par cette heuristique, en présentant le nombre de nœuds sélectionnés dans le dominant connexe en fonction des valeurs de  $n$  et de  $m$ .

```
Creation grille G(n,m);
D <- null;

//Construction par lignes
Si (m != 0 mod 3 || n == 0 mod 3)
  Pour i allant de 1 a n
    //construction de la deuxieme colonne
    D <- (i,2);
    /*Construction des batons lignes de capteurs
    * toutes les 3 lignes a partir de la ligne 2
    */
    Si i mod 3 == 1 alors
      Pour j allant de 3 a m :
        D <- (i,j);
      fin Pour
    fin Si
  fin Pour

/*Rajout de mini colonnes pour capter
* la derniere ligne de cibles dans
* le cas ou n = 1 mod 3
*/
Si n == 1 mod 3 alors
  Pour j allant de m-1 a 5 :
    Si m-j == 2 mod 3 alors
      D <- (n-1,j);
      D <- (n,j);
    fin Si
  fin Pour
  Si m == 1 mod 3 alors
    D <- (n-1, 3);
  fin Si
  Sinon Si m == 2 mod 3 alors
    D <- (n-1,3);
    D <- (n,3);
  fin Sinon//Pas besoin de traiter le cas m = 0 mod 3
fin Si

//Construction par colonnes
Sinon //(m = 0 mod 3 & n != 0 mod 3)
  Pour i allant de 1 a n :
    //construction de la deuxieme ligne
    D <- (2,i);
    /*Construction des colonnes de capteurs
    * toutes les 3 lignes a partir de la ligne 2
    */
  fin Pour
fin Si
```

```
Si i == 1 mod 3 alors
  Pour j allant de 3 a m :
    D <- (j, i);
  fin Pour
fin Si
fin Pour
fin Sinon
fin
```

### 4.2.3 Comparaison avec la littérature

Le tableau 4.1 présente la comparaison des bornes supérieures obtenues avec notre heuristique avec les bornes proposées par [Li and Toulouse 2010], qui sont les meilleures à notre connaissance.

La première colonne liste les différentes tailles d'instances, la deuxième colonne correspond aux solutions trouvées par Li et Toulouse, la troisième colonne aux solutions trouvées par notre heuristique, la quatrième colonne aux gains apportés par notre heuristique en nombre de sommets, la cinquième colonne précise s'il y a une preuve d'optimalité de la formule, et la sixième colonne détaille la construction la plus intéressante, par lignes ou par colonnes, que devra choisir l'heuristique.

Ces résultats montrent que nous obtenons grâce à notre heuristique une solution optimale dans les cas où la polynomialité du problème a été prouvée. Pour les cas où elle n'a pas été prouvée, et en dehors du cas  $(5, m)$ , notre solution améliore celle de Li et Toulouse d'environ  $\frac{n}{3}$  capteurs dans le pire des cas et d'environ  $\frac{5n}{3}$  capteurs dans le meilleur des cas.

Après comparaison avec les solutions exactes exhibées par les modèles en programmation linéaire en variables mixtes, nous conjecturons que notre algorithme retourne toujours l'optimum. Comme cet algorithme possède une complexité en  $O(nm)$ , cela suffirait à prouver que le problème du dominant connexe minimal est polynomial dans les grilles. Nous le conjecturons dans la suite du mémoire.



CHAPITRE 4. RÉSULTATS THÉORIQUES SUR LES PROBLÈMES *MCDS* ET *MCCS* DANS LES GRILLES

---

Taille de la grille	Valeur de la solution de Li et Toulouse	Valeur de la solution de l'heuristique	Gain	Preuve d'optimalité	Orientation
$(1, m)$	$m - 2$	$m - 2$	–	X	
$(2, m)$ et $(3, m)$	$m$	$m$	–	X	
$(4, m)$	$2m - \lceil \frac{m}{3} \rceil$	$2m - \lceil \frac{m}{3} \rceil$	–	X	L ou C
$(5, m)$ ( $m = 0$ ) mod 3	$\leq 2m$	$\leq 2m$	–		C
$(5, m)$ ( $m \neq 0$ ) mod 3	$\leq 2m + 1$	$\leq 2m + 1$	–		L ou C
$(6, m)$	$2m + 2$	$2m + 2$	–	X	L
$(3q, m)$ , $m \geq 3q$    $m \neq 0$ mod 3	$\leq qm + 2q - 2$	$\leq qm + q$	$q - 2$		L
$(n, 3k)$ , $n \geq 3k$    $n \neq 0$ mod 3	$\leq kn + 2k - 2$	$\leq kn + k$	$k - 2$		C
$(3q + 1, 3k + 1)$	$\leq 3qk + 5q + 2k - 2$	$\leq 3qk + 2q + 2k$	$3q - 2$		L ou C
$(3q + 1, 3k + 2)$	$\leq 3qk + 8q + 2k - 1$	$\leq 3qk + 3q + 2k + 1$	$5q - 2$		L ou C
$(3q + 2, 3k + 1)$	$\leq 3qk + 8k + 2q - 1$	$\leq 3qk + 3k + 2q + 1$	$5k - 2$		L ou C
$(3q + 2, 3k + 2)$	$\leq 3qk + 8q + 3k$	$\leq 3qk + 3q + 3k + 2$	$5q - 2$		L ou C

TABLE 4.1 – Comparaison des performances de notre heuristique avec les résultats de [Li and Toulouse 2010]

### 4.3 Résultats théoriques sur la structure d'un *CDS* optimal

Dans cette section on cherche à trouver une borne inférieure pour le problème du dominant connexe minimum lorsque  $R_{capt} = R_{com} = 1$ . Afin de prouver que cette borne est valide, nous allons articuler notre conjecture en plusieurs étapes dont nous donnons

$n \bmod 3 \backslash m \bmod 3$	0	1	2
0	$\frac{mn}{3} + \min(\frac{n}{3}, \frac{m}{3})$	$\frac{mn}{3} + \frac{n}{3}$	$\frac{mn}{3} + \frac{n}{3}$
1	$\frac{mn}{3} + \frac{m}{3}$	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor (m+1) + \lfloor \frac{2}{3} m \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor (m+1) + \lfloor \frac{2}{3} m \rfloor + 1$
2	$\frac{mn}{3} + \frac{m}{3}$	$\lfloor \frac{m}{3} \rfloor (n+1) + \lfloor \frac{2}{3} n \rfloor + 1$	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor (m+1) + m$

TABLE 4.2 – Taille du dominant connexe construit par notre heuristique suivant les valeurs de  $n$  et  $m$

ici le fil conducteur. En préambule, on rappelle un résultat important de l'article de Li et Toulouse [Li and Toulouse 2010] sur le problème de l'arbre couvrant avec un nombre maximum de feuilles ou *MLST* qu'on a défini dans le Chapitre-1, Sous-section-1.2.3 et qui consiste à trouver un arbre couvrant de  $G$  avec un nombre maximum de feuilles parmi tous les arbres couvrants existant de  $G$ .

**Théorème 1** ([Li and Toulouse 2010]). *Soit  $T$  un arbre couvrant de  $G(n, m)$ ,  $n \geq 2$  et  $m \geq 3$ . Supposons qu'il existe une colonne  $C_j$  non extrême qui contient  $n - 1$  feuilles de  $T$ . Alors le sous-graphe induit de  $T$  restreint aux colonnes  $C_{1, j-1}$  et le sous-graphe induit par  $T$  restreint aux colonnes  $C_{j+1, m}$  sont connexes.*

La conséquence de ce théorème est que s'il existe un *MLST* avec une colonne ou une ligne remplie de feuilles sauf pour un sommet, alors le *MLST* de la grille est composé de deux arbres couvrants avec un nombre maximal de feuilles optimaux pour les deux sous-grilles de part et d'autres de cette colonne ou de cette ligne.

Comme vu dans le Chapitre 1 nous rappelons que la solution du *MLST* est le complémentaire de la solution du *MCDS*. Ainsi, on peut directement appliquer ce résultat au problème *MCDS*. Dans ce cas, si un *MCDS* contient un seul sommet sur une colonne ou une ligne, alors ce *MCDS* est composé de deux dominants connexes minimaux pour les sous-grilles situées de part et d'autres de cette colonne (ou de cette ligne).

Nous nous appuyerons sur ce théorème pour prouver notre résultat.

Notre conjecture s'articule ainsi de la façon suivante :

1. Dans un premier temps, nous prouvons que tout dominant connexe, *a fortiori* minimal, peut toujours être transformé de sorte qu'il ne comporte sur  $L_{1,2}$  que des segments de  $L_2$  et de bâtons  $B_k^{1,2}$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Par ailleurs, si ce dominant une fois transformé ne comporte pas de paires de sommets consécutifs sur  $L_3$  et qu'il contient au moins un segment maximal sur  $L_2$  ou deux bâtons séparés par une colonne vide, alors on peut le transformer en un *CDS* comprenant tout  $L_2$ .
2. Ensuite, en annexe du présent chapitre, Section-4.3.2, nous conjecturons que tout dominant connexe peut être transformé de sorte que  $L_3$  ne contienne pas de paire de sommets consécutifs.
3. En nous appuyant sur ce résultat, nous conjecturons ensuite que dans le cas où  $m \not\equiv 0 \pmod{3}$ , tout dominant connexe, *a fortiori* minimal, peut être transformé de sorte à ne contenir qu'un seul sommet de  $L_3$ . On pourra ensuite appliquer le Théorème 1.
4. Dans le cas où  $m \equiv 0 \pmod{3}$ , et si l'on fait l'hypothèse que la conjecture est valide, alors on peut calculer une borne inférieure pour le cardinal d'un *MCDS* qui correspond à la même valeur que celle retournée par notre heuristique.

Dans toute cette section, sauf indication contraire,  $x$ ,  $y$ ,  $i$  et  $j$  désignent des entiers de  $\{1, \dots, n\}$  ou de  $\{1, \dots, m\}$ , selon les cas.

**Proposition 3.** *Soit  $D$  un *CDS* d'une grille tel que  $(x, y) \in D$  et  $(x - 1, y) \notin D$ . Alors il existe au moins un sommet  $s' \in D$  tel que  $s'$  a pour coordonnées, lorsqu'elles existent,  $(x - 2, y)$ ,  $(x - 3, y)$ ,  $(x - 2, y + 1)$  ou  $(x - 2, y - 1)$ . Le même résultat peut être énoncé pour les trois autres voisins de  $(x, y)$ .*

*Démonstration.* Puisque  $D$  couvre l'ensemble des sommets de la grille, le sommet  $(x - 2, y)$  en particulier doit être couvert. En énumérant le voisinage de ce sommet, on aboutit au résultat énoncé. □

**Corollaire 1.** *Soit  $D$  un *CDS*. Si on considère une restriction de  $D$  composée d'un sous-ensemble connexe  $A \subset D$ , alors il existe une restriction de  $D$  composée d'un sous-ensemble connexe  $A' \neq A$  tel que  $d(A, A') \leq 3$ .*

*Démonstration.* Par hypothèse,  $A$  ne couvre pas l'ensemble de la grille. Par conséquent, il existe au moins un sommet  $s'$  non couvert par  $A$  tel que  $d(s', A) \leq 2$ . D'après la Proposition 3, il existe  $s \in D$  tel que  $d(s, s') \leq 1$ . De plus, d'après ce qui précède,  $s \notin A$ . Ainsi, il existe un sous-ensemble connexe  $A'$  de  $D$  tel que  $s \in A'$ , avec par conséquent  $d(A, A') \leq 3$ .  $\square$

Intuitivement, deux sous-ensembles connexes "voisins" ne peuvent pas être aussi éloignés que l'on veut du fait des contraintes de couverture.

On s'intéresse désormais à la forme des sous-ensembles connexes maximaux issus de la restriction d'un dominant connexe  $D$  à  $L_{x,x'}C_{i,j}$ , avec  $1 \leq i \leq j \leq m$ . Comme énoncé dans la Section-4.1, on note  $A_{i,j}$  un tel sous-ensemble connexe. On notera par ailleurs  $\bar{D} = D \setminus A_{i,j}$ . On suppose donc que  $A_{i,j}$  est maximal pour l'inclusion, ce qui signifie que les extrémités de  $A_{i,j}$  se situent donc respectivement sur les colonnes  $C_i$  et  $C_j$ ,  $i \leq j$ . Cela implique également que  $A_{i,j}$  ne peut pas être inclus dans un autre sous-ensemble connexe de  $D$  sur  $L_{x,x'}$  qui soit plus grand que  $A_{i,j}$ . Observons par ailleurs que  $A_{i,j}$  contient au moins  $j - i + 1$  sommets.

### 4.3.1 Un *CDS* peut toujours être construit sur $L_{1,2}$ en n'utilisant que des bâtons ou des segments de $L_2$

**Proposition 4.** *Soit  $A_{i,j}$  un sous ensemble connexe maximal de  $L_{1,2}$  contenant  $j - i + 1$  sommets, alors  $A_{i,j}$  est le segment maximal  $L_2^{i,j}$ .*

*Démonstration.* Comme on a fait la supposition que  $A_{i,j}$  est un sous-ensemble connexe, et qu'il est nécessaire que tous les sommets de  $L_1$  soient couverts entre  $C_i$  et  $C_j$ , il existe au moins un sommet sur chaque colonne entre  $C_i$  et  $C_j$ , soit  $j - i + 1$  sommets. Cela est le cas lorsque  $A_{i,j}$  est composé uniquement de sommets de  $L_2$ . En effet,  $A_{i,j}$  ne peut être composé uniquement de sommets de  $L_1$ , car sinon il serait isolé du reste de la grille et ne serait pas un sous-ensemble connexe d'un *CDS*. Pour la même raison, si  $A_{i,j}$  contient au moins 1 sommet sur  $L_1$ , alors il contient un nombre de sommets strictement supérieur à  $j - i + 1$ , d'où le résultat.  $\square$

Dans les propositions qui suivent, on introduit  $ext_1$  et  $ext_2$  les indices des deux colonnes

extrêmes de  $A_{i,j}$ . On a donc  $ext_1, ext_2 \in \{i, j\}$ , avec  $ext_1 \neq ext_2$ . Ainsi, si  $ext_1 = i$ , alors  $ext_2 = j$ , et réciproquement.

**Proposition 5.** *Soit  $D$  un CDS quelconque, avec  $A_{i,j} \subset D$ , un sous-ensemble maximal de  $L_{1,2}$ . Si  $A_{i,j}$  :*

1. *est tel que  $|A_{i,j}| \geq j - i + 3$ , ou*
2. *est tel que  $|A_{i,j}| = j - i + 2$  et ne contient pas à la fois  $(1, ext_1)$  et  $(1, ext_2)$ ,*

*alors il existe une transformation valide de  $A_{i,j}$  vers un ensemble  $A'$  qui est un segment de  $L_2$ .*

*Démonstration.* On fait une disjonction de cas sur les différentes extrémités possibles de  $A_{i,j}$  et on exhibe dans chaque cas une transformation valide de  $A_{i,j}$  en un segment de  $L_2$ . Chaque transformation est valide quelle que soit la configuration de  $A_{i,j}$  sur la sous-grille  $L_{1,2}C_{i+1,j-1}$ , et ceci est représenté sur les figures par "...". Chacun de ces cas est représenté sur la Figure-4.7. Dans chacun des cas, la connexité de  $A_{i,j}$  avec  $\bar{D}$  se fait par au moins un sommet sur  $L_2$  situé entre  $C_i$  et  $C_j$ , lequel restera présent dans  $A'$  et assurera donc à nouveau la connexité avec  $\bar{D}$ .

1. Quelle que soit la forme de ses extrémités  $A_{i,j}$  couvre au maximum toutes les cibles dans la sous-grille  $L_{1,2}C_{i-1,j+1}$ . Si l'on suppose que  $A_{i,j}$  contient au moins  $j - i + 3$  sommets, alors le segment  $L_2^{i-1,j+1}$ , qui contient exactement  $j - i + 3$  sommets, permet de couvrir au moins l'ensemble de la sous-grille  $L_{1,2}C_{i-1,j+1}$  avec le nombre minimum de sommets de  $A_{i,j}$ . En posant  $A' = L_2^{i-1,j+1}$ , on a alors  $A' \preceq A_{i,j}$ .
2. Dans le cas où  $|A_{i,j}| = j - i + 2$ , on fait une disjonction de cas sur ses extrémités :
  - (a) Les deux extrémités sont de la forme :  $(2, ext_1), (2, ext_2) \in A_{i,j}$  et  $(1, ext_1), (1, ext_2) \notin A_{i,j}$ . Ainsi, en définissant  $A'$  le segment  $L_2^{i,j}$ , donc avec exactement  $j - i + 1$  sommets, on assure une couverture des mêmes cibles avec au plus autant de sommets, d'où  $A' \preceq A_{i,j}$ .
  - (b) Les deux extrémités sont de la forme :  $(1, ext_1), (2, ext_2) \in A_{i,j}$  et  $(2, ext_1), (1, ext_2) \notin A_{i,j}$ . Sans perte de généralité, en prenant par exemple  $i = ext_1$  et  $j = ext_2$ , les sommets couverts par  $A_{i,j}$  correspondent à la sous-grille  $L_{1,2}C_{i,j}$  ainsi que les

sommets  $(1, i - 1)$  et  $(2, j + 1)$ . Le segment  $L_2^{i-1, j}$  couvre les mêmes cibles en exactement  $j - i + 2$  sommets. En posant  $A' = L_2^{i-1, j}$ , on a alors  $A' \preceq A_{i, j}$ .

- (c) Les deux extrémités sont telles que  $(1, ext_1), (2, ext_1), (2, ext_2) \in A_{i, j}$  et  $(1, ext_2) \notin A_{i, j}$ . Sans perte de généralité, on pose  $i = ext_1$ . Dans ce cas  $A_{i, j}$  couvre  $L_{1, 2}C_{i-1, j}$  ainsi que  $(2, j + 1)$ . Le segment  $L_2^{i-1, j}$  couvre autant de cibles que  $A_{i, j}$  en exactement  $j - i + 2$  sommets. En posant  $A' = L_2^{i-1, j}$ , on a alors  $A' \preceq A_{i, j}$ .

On observe également que dans les deux sous-cas étudiés  $A_{i, j}$  couvre au plus les  $j - i + 1$  sommets de  $L_3$  compris entre  $C_i$  et  $C_j$ , ce qui est également le cas de  $A'$ .

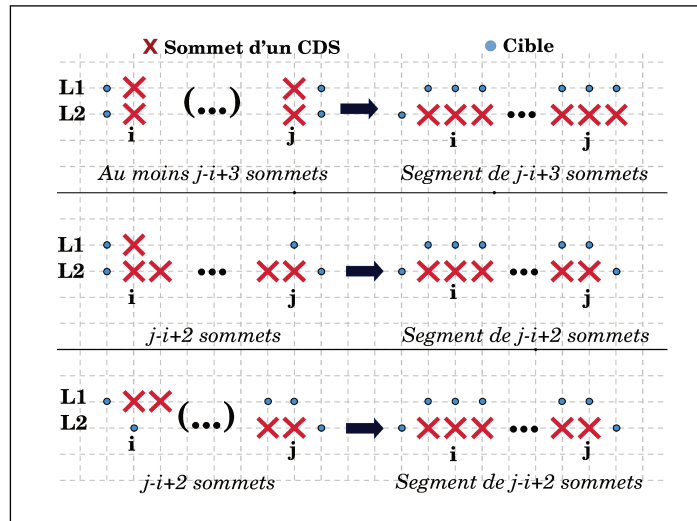


FIGURE 4.7 – Transformations de sous-ensemble connexe  $A_{i, j}$  en un segment de  $L_2$ , associées à la Proposition 5

□

**Proposition 6.** Soit  $D$  un CDS quelconque, avec  $A_{i, j} \subset D$ , un sous ensemble maximal de  $L_{1, 2}$ . Si  $A_{i, j}$  est tel que  $|A_{i, j}| = j - i + 2$  et  $A_{i, j}$  contient  $(1, ext_1)$  et  $(1, ext_2)$ ,

alors il existe une transformation valide de  $A_{i, j}$  vers un ensemble  $A'$ , non connexe, composé de bâtons sur  $L_{1, 2}$  et de segments sur  $L_2$  séparés par exactement une colonne vide.

*Démonstration.* On a deux cas à considérer, illustrés sur la Figure 4.8 :

1. Lorsque les extrémités de  $A_{i, j}$  sont telles que  $(2, ext_1), (2, ext_2) \notin A_{i, j}$ , il existe un seul cas pour lequel  $A_{i, j}$  contient exactement  $j - i + 2$  sommets, c'est celui exhibé en

haut de la Figure 4.8. Les autres cas contiennent au moins  $j - i + 3$  sommets et ce cas est traité par la Proposition 5. Dans le cas où  $A_{i,j}$  contient  $j - i + 2$  sommets,  $A_{i,j}$  est constitué du segment  $L_1^{i,j}$  et d'un unique sommet sur  $L_2$  en une certaine colonne  $C_k$  qui connecte  $A_{i,j}$  à  $\bar{D}$ . Considérons  $A'$  un ensemble composé du bâton  $B_k^{1,2}$  ainsi que des deux segments  $L_2^{i-1,k-2}$  et  $L_2^{k+2,j+1}$ .

- Nombre de sommets :  $|A'| = j - i + 2 = |A_{i,j}|$ .
- Couverture :  $A_{i,j}$  couvre la sous-grille  $L_{1,2}C_{i,j}$ , ainsi que les sommets  $(1, i - 1)$  et  $(1, j + 1)$ .  $A'$  couvre la sous-grille  $L_{1,2}C_{i-1,j+1}$  ainsi que les sommets  $(2, i - 2)$  et  $(2, j + 2)$ . On a donc  $N(A_{i,j}) \subset N(A')$ .
- Connexité :  $B_k^{1,2}$  est connecté à  $\bar{D}$  puisqu'il contient le sommet  $(2, k)$ , qui assurerait cette connexité dans  $A_{i,j}$ . On va raisonner ensuite sur l'un des deux segments de  $L_2$ , le raisonnement restant valable pour l'autre segment. Considérons le segment  $L_2^{i-1,k-2}$ .  $A_{i,j}$  étant maximal pour l'inclusion,  $(1, i - 1) \notin A_{i,j}$ , de plus, par hypothèse,  $(2, i) \notin A_{i,j}$ . Ainsi,  $A_{i,j}$  ne peut pas couvrir le sommet  $(2, i - 1)$ . Il en résulte que par la Proposition-3,  $(2, i - 1)$ ,  $(2, i - 2)$  ou  $(3, i - 1)$  appartiennent à  $\bar{D}$ . Or,  $(2, i - 1) \in A'$ , on en déduit donc que  $A'$  est relié à  $\bar{D}$  via les sommets  $(2, i - 2)$  ou  $(3, i - 1)$ . Ainsi  $A'$  est composé de trois sous-ensembles connexes qui sont tous reliés à  $\bar{D}$ . On a alors  $A' \preceq A_{i,j}$ .

2. Lorsque les extrémités de  $A_{i,j}$  sont telles que  $(1, ext_1), (2, ext_1), (1, ext_2) \in A_{i,j}$  et  $(2, ext_2) \notin A_{i,j}$ , le raisonnement est le même que pour le cas précédent. Il existe une unique configuration pour laquelle  $A_{i,j}$  est composé de  $j - i + 2$  sommets, c'est celle qui correspond à celle exhibée sur la partie inférieure de la Figure 4.8.  $A_{i,j}$  est composé du segment  $L_1^{i,j}$  et du sommet  $(2, ext_1)$ . C'est ce sommet qui relie  $A_{i,j}$  à  $\bar{D}$  par  $(3, ext_1)$ . Sans perte de généralité, on peut poser  $i = ext_1$ . Considérons  $A'$  un ensemble composé du segment  $L_2^{i+2,j+1}$  ainsi que du bâton  $B_i^{1,2}$ .

- Nombre de sommets :  $|A'| = j - i + 2 = |A_{i,j}|$ .
- Couverture :  $A_{i,j}$  couvre les sommets de la sous-grille  $L_{i,2}C_{i-1,j}$ , ainsi que le sommet  $(1, j + 1)$ .  $A'$  couvre les sommets de la sous-grille  $L_{1,2}C_{i-1,j+1}$  ainsi que le sommet  $(2, j + 2)$ . On a donc  $N(A_{i,j}) \subset N(A')$ .

- Connexité : le sommet  $(2, j + 1)$  n'est couvert par aucun sommet de  $A_{i,j}$ . Par la Proposition-3, il est donc couvert par d'autres sommets de  $\bar{D}$ , soit  $(2, j + 2)$  soit  $(3, j + 1)$  (ou a fortiori par lui-même). Comme  $(2, j + 1)$  appartient à  $A'$ , le segment  $L_2^{i+2, j+1}$  de  $A'$  est relié à  $\bar{D}$  par  $(2, j + 2)$  ou  $(3, j + 1)$ , qui comme on l'a démontré appartiennent nécessairement à  $\bar{D}$ . Par ailleurs le bâton  $B_i^{1,2}$  est par hypothèse relié à  $\bar{D}$  par l'intermédiaire de  $(3, i)$ . On a donc à nouveau  $A' \preceq A_{i,j}$ .

□

**Corollaire 2.** *Pour tout dominant connexe  $D$ , il existe  $D'$  dominant connexe, avec  $|D'| \leq |D|$  tel que la restriction de  $D'$  à  $L_{1,2}$  ne contient que des bâtons sur  $L_{1,2}$  et des segments maximaux sur  $L_2$ .*

*Démonstration.* D'après les Propositions 4, 5 et 6, n'importe quel sous-ensemble connexe maximal  $A_{i,j}$  sur  $L_{1,2}$  peut être transformé en un ensemble de segments et/ou de bâtons. On

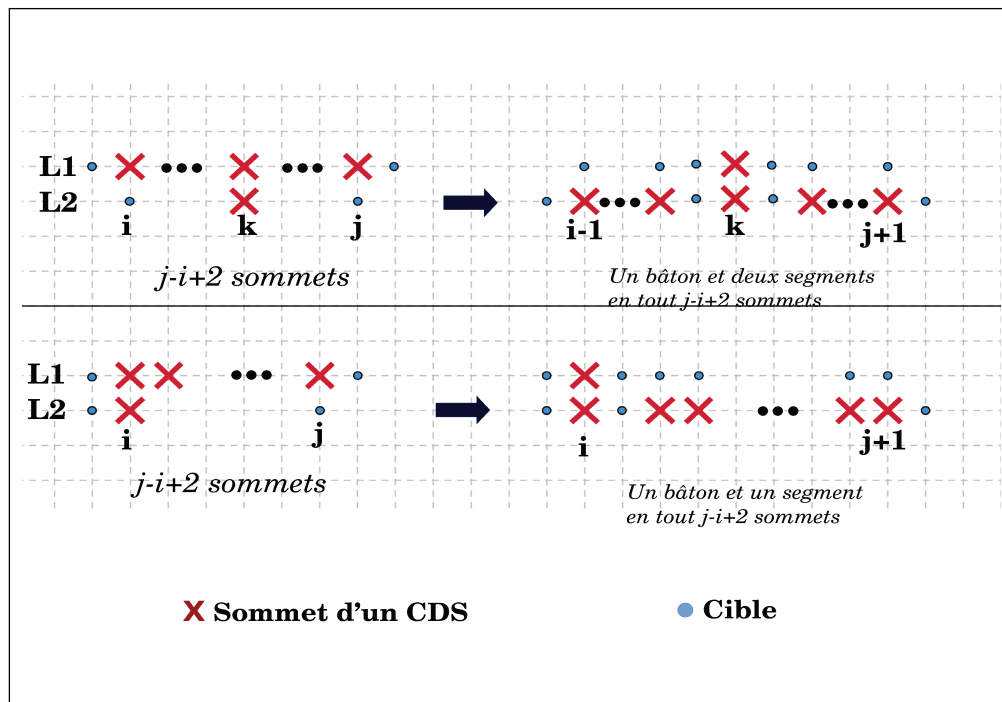


FIGURE 4.8 – Transformations d'un sous-ensemble  $A_{i,j}$  en une alternance de segment de  $L_2$  et de bâtons,  $A'$ , associées à la Proposition-6



peut appliquer ces transformations pour chaque sous-ensemble  $A_{i,j}$  de  $L_{1,2}$ . Ainsi on pourra aboutir à des sous-ensembles maximaux qui ne sont ni des bâtons ni des segments, soit la concaténation d'un segment et d'un bâton. Aussi, il faudra appliquer les transformations autant de fois que nécessaire en utilisant la transitivité des transformations valides. Le résultat s'obtient alors en utilisant la Proposition 1.

□

Remarque : lorsque  $A_{i,j}$  contient une alternance de segments et de bâtons, alors ceux ci sont toujours séparés par exactement une colonne vide. En effet, s'il existe dans  $A_{i,j}$  un segment séparé par deux colonnes vides d'un bâton, alors il existe une cible qui n'est pas couverte par  $A_{i,j}$ .

**Définition 11** (*CDSR*). *On appelle CDSR (CDS restreint) un dominant connexe ne contenant que des bâtons et des segments maximaux de  $L_2$  sur  $L_{1,2}$ .*

**Proposition 7.** *Pour toute grille  $G(n, m)$ , il existe au moins un dominant connexe optimal qui est un CDSR.*

*Démonstration.* D'après ce qui précède, tout *CDS* peut être transformé en un *CDSR* qui possède au plus autant de sommets. En particulier, tout *CDS* optimal quelconque peut être transformé en un *CDSR* optimal. □

Ainsi, pour traiter le problème du *MCDS*, il suffira de se restreindre à l'étude des *CDSR* uniquement. C'est ce que nous faisons dans la suite de ce chapitre.

**Proposition 8.** *Pour tout dominant connexe  $D$ , on a  $L_2^{1,2} \preceq B_1^{1,2}$ . De même,  $L_2^{m-1,m} \preceq B_m^{1,2}$ .*

*Démonstration.* On considère que  $B_1^{1,2} \in D$ , le cas du bâton  $B_m^{1,2}$  se traitant de manière symétrique. Le sommet  $(2, 1)$  permet d'assurer la connexité avec  $\overline{D}$ . Le sommet  $(1, 1)$  a pour unique fonction de couvrir le sommet  $(1, 2)$ , puisqu'il est lui-même déjà couvert par le sommet  $(2, 1)$ . Le segment  $L_2^{1,2}$  couvre les mêmes sommets, plus des sommets supplémentaires :  $(2, 2)$ ,  $(2, 3)$  et  $(3, 2)$ . En outre, le sommet  $(2, 1)$ , qui assurait la connexité

dans le bâton, est toujours présent dans le segment, ce qui assure la connexité avec  $\overline{D}$ . On a donc bien  $L_2^{1,2} \preceq B_1^{1,2}$ .  $\square$

**Corollaire 3.** *Soit  $G(n, m)$  une grille telle que  $m \bmod 3 \neq 0$ , soit  $D$  un CDSR de  $G(n, m)$  et  $A$  sa restriction à  $L_{1,2}$ . Si  $A$  est composée uniquement de bâtons séparés par deux colonnes vides, alors il existe un ensemble  $A' \neq A$  tel que  $A' \preceq A$   $A'$  est un CDSR et tel que  $A'$  comprend au moins un segment sur  $L_2$ .*

*Démonstration.* Nous raisonnons à partir de  $C_1$ . Lorsque l'on cherche à construire des bâtons sur  $L_{1,2}$  placés toutes les trois colonnes, on peut choisir de commencer à placer le premier bâton sur  $C_1$  ou sur  $C_2$ . Il n'est pas possible de commencer à construire la répétition de bâton à partir de  $C_3$ , car sinon  $(1, 1)$  n'est pas couvert, y compris par  $\overline{D}$ . Or, d'après la Proposition 8,  $L_2^{1,2} \preceq B_1^{1,2}$ . Il reste donc à étudier le cas où la répétition de bâtons débute à partir de  $C_2$ . On distingue alors deux cas :

1. Cas où  $m = 1 \bmod 3$ . Si on commence à placer un bâton de  $L_{1,2}$  en  $C_2$  et que l'on place ensuite un bâton toutes les trois colonnes, alors il y a nécessairement un bâton placé en  $C_{m-2}$ . Il est alors impossible que  $A$  soit constitué de bâtons disposés toutes les trois colonnes. Il faudra dans ce cas au moins lui ajouter le sommet  $(2, m)$ , ce qui correspond à un segment unitaire.
2. Cas où  $m = 2 \bmod 3$ . Avec le même raisonnement, la répétition de bâtons sur  $L_{1,2}$  toutes les trois colonnes en commençant par  $C_2$  aboutit au placement d'un bâton sur  $C_m$ . D'après la Proposition 8,  $L_2^{m-1,m} \preceq B_m^{1,2}$ , d'où le résultat.

Dans les deux cas on obtient bien un *CDSR*, après transformation car  $A'$  ne contient bien exclusivement que des bâtons de  $L_{1,2}$  et un segment de  $L_2$ .  $\square$

Ainsi, dans le cas où  $m \bmod 3 \neq 0$ , on peut toujours se ramener à un *CDSR* dont la restriction à  $L_{1,2}$  contient soit au moins un segment, soit au moins deux bâtons séparés par une colonne vide.

Comme on restreint notre étude aux *CDSR*, d'après le Corollaire 2 et le Corollaire 3, suivant la valeur de  $m$  les *CDSR* peuvent être composés de la façon suivante :

1. Lorsque  $m = 0 \pmod 3$ , un *CDSR* peut être composé de tout  $L_2$ , ou d'une alternance de bâtons et de segments, ou encore uniquement de bâtons séparés par deux colonnes ou une colonne.
2. Lorsque  $m \neq 0 \pmod 3$ , un *CDSR* peut être composé de tout  $L_2$  ou d'une alternance de bâtons et de segments, ou encore de bâtons dont au moins deux sont séparés par une seule colonne.

Dans ce qui suit, on va prouver que tous les cas précités, à part celui des bâtons séparés par deux colonnes, peuvent se ramener à un segment de  $L_2$ .

**Proposition 9.** *Soit  $D$  un CDSR de  $G(n, m)$  avec  $m$  quelconque. On suppose que  $D$  contient au moins un segment maximal de  $L_2$  qui n'est pas  $L_2$  et aucune paire de sommets consécutifs sur  $L_3$ . Alors, il existe  $D'$  CDSR tel que  $|D'| \leq |D|$  et tel que  $D'$  contient tout  $L_2$ .*

*Démonstration.* Considérons le cas des segments puis des bâtons qui peuvent exister sur  $L_{1,2}$ .

Les segments restent inchangés. Comme ils sont par définition des *CDSRs* maximaux pour l'inclusion, chacun d'entre eux possède nécessairement au moins un sommet sur  $L_3$  qui le relie à  $\overline{D}$ .

On a fait par ailleurs l'hypothèse qu'il n'existe pas de sommets consécutifs sur  $L_3$ . Ceci est notamment vrai pour les sommets de  $L_3$  qui prolongent les bâtons de  $L_{1,2}$ . Comme ces sommets ne sont adjacents à aucun autre sommet de  $L_3$ , il existe nécessairement un sommet sur  $L_4$  dans le prolongement de ces bâtons. Ces sommets de  $L_3$  ne sont donc pas nécessaires à la couverture des sommets de  $L_4$ . On peut alors transformer les bâtons en des segments horizontaux, de la façon suivante.

Soit un certain  $k \in \{1, \dots, n\}$ , tel qu'il existe le bâton  $B_k^{1,3}$ . Par hypothèse, il n'y a pas de sommets sur  $L_{1,3}C_{k-1}$ , ni sur  $L_{1,3}C_{k+1}$ , lorsque  $C_{k-1}$  et  $C_{k+1}$  existent. On va déplacer le sommet  $(1, k)$  vers  $(2, k - 1)$  et le sommet  $(3, k)$  vers  $(2, k + 1)$ . Trois cas sont à envisager :

1. Le sous-ensemble connexe le plus proche du bâton  $B_k^{1,3}$  sur  $L_{1,2}$  est un segment de  $L_2$ . Comme mentionné précédemment, pour des raisons de couverture ce segment est

nécessairement séparé du bâton par une unique colonne vide. Sans perte de généralité, supposons qu'il s'agisse du segment dont une extrémité se situe en  $(2, k + 2)$ . Dans ce cas, le segment  $L_2^{k-1, k+1}$  qui a été créé à partir du bâton lui est relié par  $(2, k + 1)$ . La transformation opérée consiste donc ici en une prolongation d'un segment de  $L_2$ .

2. Le sous-ensemble connexe le plus proche du bâton initial est un bâton séparé par une colonne vide. Sans perte de généralité, supposons que ce bâton se situe en  $C_{k+2}$ , il est relié à  $\bar{D}$  par le sommet  $(3, k + 2)$ . Le segment  $L_2^{k-1, k+1}$  que nous avons créé lui est donc également connexe, via le sommet  $(2, k + 2)$ . On déplace alors le sommet  $(1, k + 2)$  vers le sommet  $(2, k + 3)$ . On a ainsi transformé deux bâtons séparés par une colonne en le segment  $L_2^{k-1, k+3}$ , dont la connexité à  $\bar{D}$  est assurée par  $(3, k + 2)$ .
3. Le sous-ensemble connexe le plus proche est un bâton séparé par deux colonnes vides. Sans perte de généralité on pose que ce bâton est situé en  $C_{k+3}$ . On transforme ce bâton de la même manière, pour obtenir le segment  $L_2^{k-1, k+3}$ . Pour le moment, ce segment est déconnecté de  $\bar{D}$ , mais il suffit de réitérer l'opération de bâton en bâton jusqu'à ce que le sous-ensemble connexe le plus proche soit un segment ou un bâton séparé par une seule colonne, ce qui par hypothèse est nécessairement le cas.

Après avoir transformé les bâtons de proche en proche pour former de nouveaux segments de  $L_2$  et prolonger les segments existants, on aboutit à une transformation valide de la restriction de  $D$  à  $L_{1,3}$  vers un ensemble qui comprend tout  $L_2$ .  $\square$

### 4.3.2 Conjecture : tout *CDS* peut être transformé de sorte à ce qu'il ne contienne pas deux sommets consécutifs sur $L_3$

*A partir de maintenant, les différents résultats obtenus font partie d'une conjecture.*

**Proposition 10.** *Soit  $D$  un CDSR tel que pour  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ ,  $j \in \{1, \dots, m - 1\}$ , il existe un sous-ensemble connexe  $S_{ij} = \{(i, j), (i + 1, j), (i, j + 1), (i + 1, j + 1)\} \subset D$ . Il existe alors un CDSR  $D'$  tel que  $|D'| \leq |D|$  et tel que  $S_{ij} \not\subset D'$ .*

*Démonstration.* Considérons un carré  $\{(i, j), (i + 1, j), (i, j + 1), (i + 1, j + 1)\}$  de sommets consécutifs dans un CDSR  $D$ . Il existe toujours au moins un sommet, par exemple  $(i, j + 2)$ ,

qui connecte ce carré à  $\overline{D}$ . En déplaçant le sommet  $(i + 1, j + 1)$  en  $(i + 2, j)$ , on crée trivialement une transformation valide vers une configuration en "équerre", telle qu'illustrée sur la Figure 4.9, qui permet de couvrir un sommet supplémentaire de la grille avec autant de sommets.

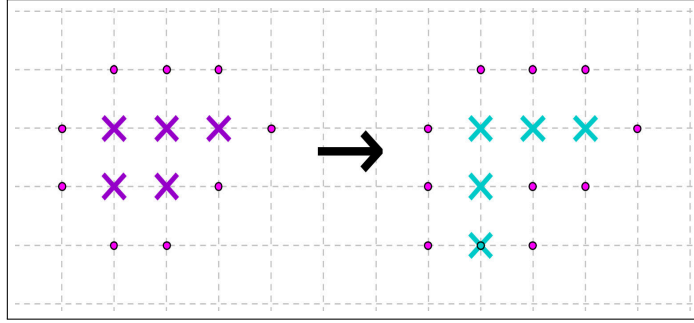


FIGURE 4.9 – Transformation valide d'un carré de sommets consécutifs

□

**Lemme 4.** Soit  $D$  un CDSR qui contient le segment maximal  $L_3^{i,j}$ , avec  $(i < j)$ . Soit  $A_{i,j}$  la restriction de  $D$  à  $L_{1,3}C_{i,j}$ . Il existe une transformation valide de  $A_{i,j}$  vers un ensemble  $A'$  qui ne contient que des bâtons sur  $L_{1,2}$  ou bien une alternance de bâtons de  $L_{1,2}$  et de segment unitaire de  $L_2$ .

*Démonstration.* D'après le Corollaire 2, il n'existe pas de sommets consécutifs sur  $L_1$  dans  $D$ . Par ailleurs, s'il existe des sommets consécutifs sur  $L_2$  entre  $C_i$  et  $C_j$ , cela signifie qu'il existe des carrés de sommets consécutifs sur  $L_{2,3}C_{i,j}$ . D'après la Proposition 10, il existe une transformation valide de ces carrés, et dans le cas présent un segment  $L_2^{k-1,k}$  pourra être transformé en un bâton  $B_{k-1}^{1,2}$ .

A l'issue de ces transformations, comme il n'y a ni sommets consécutifs sur  $L_1$  ni sur  $L_2$ , on obtient alors un ensemble  $A'$  sur  $L_{1,2}$  tel que  $A' \preceq A_{i,j}$  et tel que  $A'$  ne comprend que des bâtons ou des segments unitaires. Comme  $A'$  ne comprend que des segments (unitaires) de  $L_2$  et des bâtons de  $L_{1,2}$ , il s'agit bien d'un CDSR. □

Dans les propositions suivantes et *sauf mention contraire*, on considère qu'il y a un unique sommet sur  $L_4$  sur  $C_{i,j}$ .

**Proposition 11.** *Quel que soit  $m$ , soit un CDSR  $D$  composé de  $j - i + 1$  sommets consécutifs sur  $L_3C_{i,j}$ , maximums pour l'inclusion, tel que  $j - i + 1 = 1 \pmod 3$  et tel que  $L_{1,2}$  soit constitué uniquement de bâtons disposés toutes les trois colonnes à partir de  $C_i$ . Soit un unique sommet  $(4, p) \in D$  sur  $L_4C_{i,j}$ , si  $B_p^{1,2} \subset D$ , alors il existe un CDSR  $D'$  tel que  $|D'| \leq |D|$  et tel que la restriction de  $D'$  à  $L_{1,5}$  est uniquement composée de bâtons sur  $L_{1,5}$  disposés toutes les trois colonnes à partir de  $C_i$ .*

*Démonstration.* Nous nous plaçons dans le cas où la connexité de  $L_3$  avec  $\bar{D}$  se fait par un sommet de  $L_3$  se situant dans le prolongement d'un bâton de  $L_{1,2}$ , comme illustré sur la Figure 4.10. Comme  $j - i + 1 = 1 \pmod 3$ , il existe un entier  $h$  tel que  $j - i + 1 = 3h + 1$ . On note  $A_{i,j}$  la restriction de  $D$  à  $L_{1,5}C_{i,j}$ . Par hypothèse,  $(4, p)$  est le seul sommet de  $A_{i,j}$  sur  $L_4$ , ce qui implique que  $(5, p) \in A_{i,j}$ .

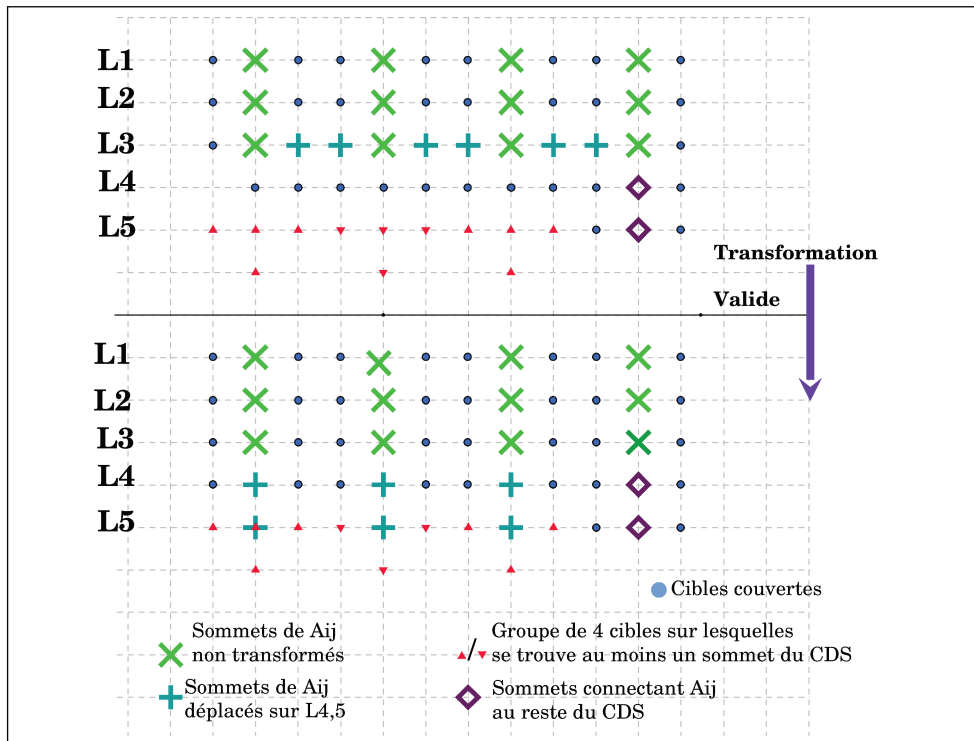


FIGURE 4.10 – Transformation valide associée à la Proposition 11

Nous réalisons la transformation suivante : on construit un ensemble  $A' = \bigcup_{k=0}^h B_{i+3k}^{1,5} \cup (D \cap L_5)$  composé uniquement de bâtons sur  $L_{1,5}$  toutes les trois colonnes, disposés de la même manière que les bâtons de  $D$  sur  $L_{1,2}$ , ainsi que des sommets de  $L_5$  de  $D$ , laissés

inchangés. Montrons qu'il s'agit d'une transformation valide.

1. Nombre de sommets : Soit  $s = |L_5 \cap A_{i,j}|$  le nombre de sommets de  $A_{i,j}$  sur  $L_5$ . Puisque  $(5, p) \in D$ , on a  $s \geq 1$ . Le nombre de sommets de  $A_{i,j}$  se décompose de la façon suivante :  $3h + 3$  sommets constituent les bâtons sur  $L_{1,2}$  prolongés par des sommets de  $L_3$  et  $2h$  sommets constituent le reste des sommets de  $L_3$  pour un total de  $5h + 3$  sommets, auxquels nous ajoutons  $(4, p)$  et les sommets de  $L_5$ , pour un total de  $5h + 4 + s$  sommets. Or  $|A'| \leq 5h + 5 + (s - 1)$  puisque  $A'$  contient  $h + 1$  bâtons de 5 sommets ainsi que les sommets de  $L_5$  auxquels il faut retirer les sommets de  $L_5$  déjà comptabilisés dans les bâtons, dont au moins  $(5, p)$ . On a ainsi  $|A'| \leq |A|$ .
2. Connexité : Pour toute colonne  $C_k$  où un bâton a été construit, avec  $i \leq k \leq j$ , si  $D$  ne contient ni  $(4, k)$  ni  $(5, k)$ , alors d'après la Proposition-3, il existe nécessairement un sommet de  $\overline{D}$  connexe à  $(5, k)$ . Ce sommet assure donc la connexité du bâton construit en  $C_k$  avec  $\overline{D}$ . S'il y a un sommet de  $D$  en  $(5, k)$ , la connexité avec  $\overline{D}$  est *a fortiori* assurée.
3. Couverture :  $A'$  couvre tous les sommets de  $L_{1,5}C_{i-1,j+1}$ , d'où  $N(A_{i,j}) \subset N(A')$ .

On a donc bien  $A' \preceq A_{i,j}$ , d'où le résultat.  $\square$

**Lemme 5.** *On pose  $j - i + 1 = 3h + r$ , avec  $h \in \{1, \dots, \lfloor \frac{m}{3} \rfloor\}$  et  $r \in \{0, 1, 2\}$ . Le nombre de sommets nécessaires pour couvrir  $j - i + 1$  sommets d'une ligne  $L_x$  en étant connexe à une ligne  $L_{x-2}$  (ou  $L_{x+2}$ ), et en se servant uniquement de bâtons de deux sommets de type  $B_k^{x-1,x}$  et éventuellement de segments unitaires aux extrémités, est au plus égal à :*

1.  $2h + 1$  si  $j - i + 1 = 3h$
2.  $2h + 2$  si  $j - i + 1 = 3h + 1$
3.  $2h + 2$  si  $j - i + 1 = 3h + 2$

*Démonstration.* 1. Si  $r = 0$ , en fonction de la colonne ( $C_i$  ou  $C_{i+1}$ ) où on commence la succession de bâtons, on a besoin dans le meilleur des cas de  $2h$  sommets lorsque l'on commence par un bâton  $B_{i+1}^{x-1,x}$  et dans le pire des cas de  $2h + 1$  sommets lorsqu'on commence par un bâton en  $B_i^{x-1,x}$ . Dans ce deuxième cas, on peut se limiter à un seul sommet sur  $C_j$  en  $(x - 1, j)$  situé à une colonne vide du bâton sur  $B_{j-2}^{x-1,x}$  afin de couvrir le sommet  $(x, j)$ .

2. Si  $r = 1$ , par le même raisonnement, on a besoin de au mieux  $2h + 1$  sommets si on commence par un bâton  $B_{i+1}^{x-1,x}$  et au pire  $2h + 2$  sommets si on commence par un bâton  $B_i^{x-1,x}$ .
3. Si  $r = 2$ , par le même raisonnement, on a besoin de  $2h + 2$  sommets si on commence par un bâton  $B_{i+1}^{x-1,x}$  ou un bâton  $B_i^{x-1,x}$  et  $2h + 1$  sommets si on commence par un segment unitaire  $L_i^{x-1}$ .

□

**Proposition 12.** *Quel que soit  $m$  et quelle que soit la valeur de  $j - i + 1$ , soit un CDSR  $D$  composé de  $j - i + 1$  sommets consécutifs sur  $L_3C_{i,j}$  qui ne vérifie pas les conditions de la Proposition 11, alors il existe un CDSR  $D'$  tel que  $|D'| \leq |D|$  et tel que la restriction de  $D'$  à  $L_{1,3}$  est un segment sur  $L_2$  contenant au moins les sommets  $(2, i)$  et  $(2, j)$ , et sans sommets consécutifs sur  $L_3$ .*

*Démonstration.* On applique une transformation décrite ci-après suivant une disjonction de cas en fonction des extrémités de  $A_{i,j}$  et en se servant de la Proposition 3, de son corollaire ainsi que du Lemme-5. Les sous-cas à traiter étant nombreux, et le mode de transformation étant sensiblement le même, seuls les premiers sous-cas seront détaillés. Dans un premier temps, nous allons décrire l'idée générale de la transformation. Soit  $A_{i,j}$  une restriction d'un CDSR  $D$  à  $L_{1,3}C_{i,j}$  possédant  $j - i + 1$  sommets consécutifs sur  $L_3C_{i,j}$ , maximal pour l'inclusion sur  $L_3$ . D'après la Proposition-10, on peut supposer qu'il n'existe pas de sommets consécutifs sur  $L_4$  entre  $C_i$  et  $C_j$ , ainsi, il existe donc  $i \leq p \leq j$  tel que  $C_p^{4,5} \subset D$ , afin d'assurer la connexité de  $A_{i,j}$  avec  $\bar{D}$ . Dans un premier temps, afin de simplifier la présentation des raisonnements, nous supposerons que cet indice  $p$  est unique. Autrement dit, nous supposerons qu'il existe une unique colonne assurant le raccord entre  $A_{i,j}$  et  $\bar{D}$ . Le principe consiste à transformer  $A_{i,j}$  en un ensemble  $A'$  tel que  $A'$  contient un segment de  $L_2$ , des sommets non consécutifs sur  $L_3$  sur les colonnes où il existe des sommets sur  $L_4$  afin de ne pas perdre la connexité avec  $\bar{D}$ , ainsi que des bâtons de deux sommets, placés toutes les trois colonnes sur  $L_{3,4}$ , en prenant pour référence  $C_p^{4,5}$ , afin de compenser la perte de couverture sur  $L_4$ . La Figure 4.11 illustre une telle transformation.

1. Nombre de sommets : on construit  $A'$  tel que  $|A'| = |A_{i,j}|$ .



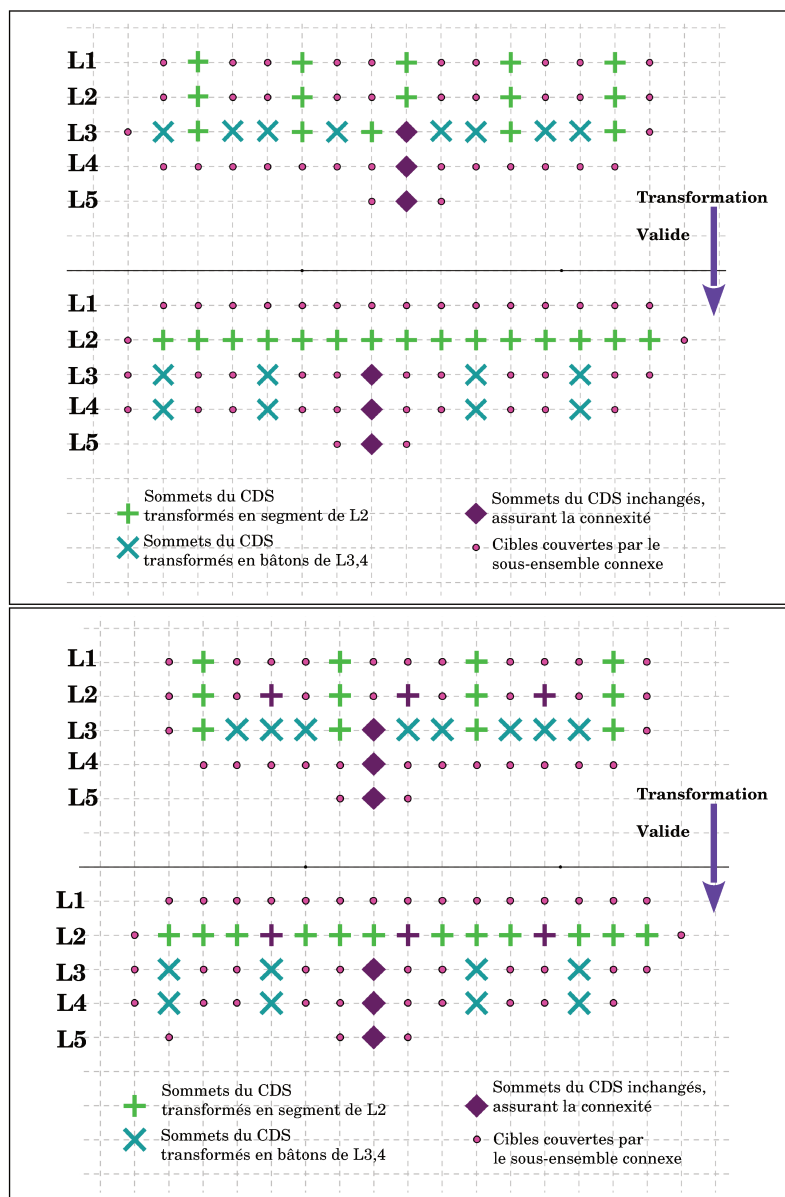


FIGURE 4.11 – Exemple de transformation valide d'un *CDSR* contenant un segment sur  $L_3$

2. Connexité : le nouvel ensemble ne perd pas la connexité par  $L_4$  car on conserve les sommets de  $L_3$  qui y sont reliés. En outre, les bâtons de  $L_{3,4}$  sont bien reliés au nouvel ensemble formé par le segment de  $L_2$ . Le tout est donc bien relié à  $\bar{D}$  par  $B_p^{3,5}$ .
3. Couverture : dans un premier temps, nous allons étudier combien de sommets sont nécessaires dans  $A'$  pour constituer les bâtons sur  $L_{3,4}$  afin de garantir la couverture des sommets sur  $L_4$  entre  $C_i$  et  $C_j$ . On doit également prendre en compte le fait

que les bâtons de  $L_{3,4}$  construits dans  $A'$  et répartis toutes les trois colonnes, sont dépendants de la connexion de  $A_{i,j}$  avec  $\overline{D}$ , qui a lieu sur une colonne  $C_p$ , supposée unique ici. Comme précédemment indiqué, les bâtons qui s'étendent sur les lignes  $L_3$  et  $L_4$  seront placés de part et d'autre de cette colonne  $C_p$  en suivant toujours un espacement de deux colonnes vides. Ils ne sont donc pas nécessairement répartis de manière optimale sur  $L_{3,4}C_{i,j}$ . Nous réaliserons donc une disjonction de cas sur la longueur de  $A_{i,j}$  qui correspond à celle du Lemme-5. Il nous reste maintenant à étudier les différents motifs possibles pour  $A_{i,j}$  et voir s'il est possible de les transformer en  $A'$ .

(a) Premier ensemble de cas. On considère que  $L_{1,2}$  est constituée d'une succession de bâtons, espacés de deux colonnes vides, sans aucun segment unitaire. Les bâtons de  $L_{1,2}$  sont utilisés pour former le segment de  $L_2$ , suivant la démarche présentée dans la Proposition 9. En fonction des extrémités en  $C_i$  et en  $C_j$  de  $A_{i,j}$ , le segment sur  $L_2$  de  $A'$  commencera en  $(2, i)$  ou en  $(2, i - 1)$  et se terminera en  $(2, j)$  ou en  $(2, j + 1)$ .

i. On considère les extrémités de  $A_{i,j}$  telles qu'il existe un bâton sur  $L_{1,2}$  en  $C_i$  et en  $C_j$ , comme illustré sur la Figure 4.12. Puisque l'on a supposé que nous avons un bâton sur  $L_{1,2}$  disposé toutes les trois colonnes, nous avons ici  $j - i + 1 = 3h + 1$ . En considérant tous ces bâtons ainsi que leur prolongement sur  $L_3$ , nous avons  $3(h + 1)$  sommets. On va utiliser ces  $3h + 3$  sommets pour former le segment  $L_2^{i-1, j+1}$ . Il reste  $2h$  sommets sur  $L_3$  qui ne sont pas utilisés pour former le segment de  $L_2$ . Puisque nous ne sommes pas dans les conditions de la Propositions 11, un de ces sommets au moins est utilisé pour la connexité avec  $\overline{D}$ . On dispose donc de  $2h - 1$  sommets pour constituer des bâtons sur  $L_{3,4}$  qui garantissent la couverture de tous les sommets que couvrait  $A_{i,j}$ , en plus de ces sommets on possède le bâton  $B_p^{3,4}$  qui est déjà placé soit en tout  $2h + 1$  sommets. D'après le Lemme-5 et l'emplacement de  $B_p^{3,4}$ , ce nombre de sommets est suffisant pour assurer la couverture de  $L_4$  par  $A'$ .

ii. On considère les extrémités de  $A_{i,j}$  telles qu'il existe un bâton sur  $L_{1,2}$  en  $C_i$

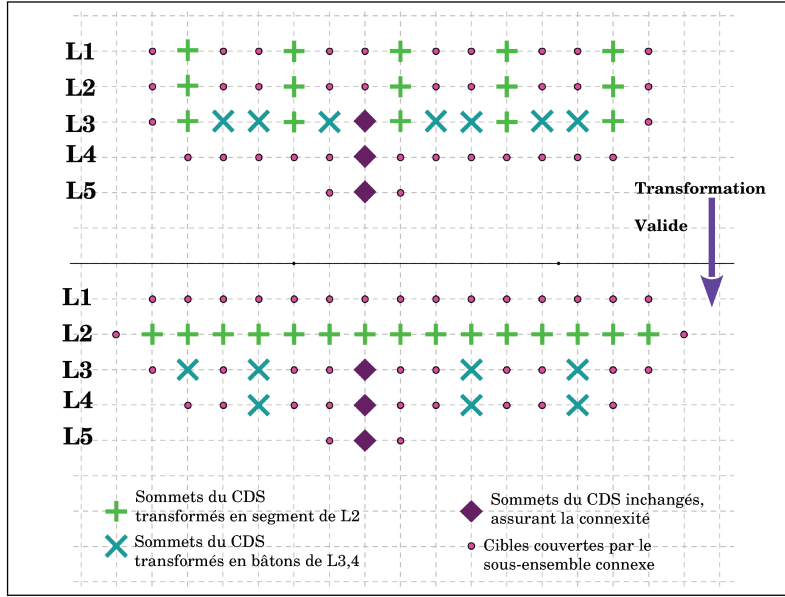


FIGURE 4.12 – Cas avec extrémités bâton / bâton

et un segment unitaire sur  $L_2$  en  $C_j$ . De façon équivalente, on peut considérer un segment unitaire en  $C_i$  et un bâton en  $C_j$ . Ici  $j - i + 1 = 3h$ .  $A_{i,j}$  possède ici  $3h$  sommets constituant les bâtons sur  $L_{1,2}$  ainsi que leur prolongement sur  $L_3$ . On va utiliser ces  $3h$  sommets pour constituer le segment  $L_2^{i-1,j-1}$  qui est prolongé par le sommet  $(2, j)$  qui constitue le sommet unitaire initial de  $A_{i,j}$ . Il reste  $2h$  sommets qui n'ont pas été utilisés dans le segment de  $A'$ . De ces  $2h$  sommets, on doit en garder un pour assurer la connexion avec  $\bar{D}$  via  $B_p^{3,4}$ , déjà fixé. On a donc  $2h + 1$  sommets pour constituer des bâtons sur  $L_{3,4}$ . D'après le Lemme 5, on a donc suffisamment de sommets pour assurer la couverture des cibles précédemment couvertes par  $A_{i,j}$  sur  $L_4$ .

- iii. On considère les extrémités de  $A_{i,j}$  telles qu'il existe un bâton sur  $L_{1,2}$  en  $C_i$  et une colonne vide en  $C_j$ , précédée donc par un bâton en  $C_{j-1}$ . De façon équivalente, on peut considérer une colonne vide en  $C_i$  et un bâton en  $C_j$ . Ici  $j - i + 1 = 3h + 2$ .  $A_{i,j}$  possède ici  $3(h + 1)$  sommets constituant les bâtons sur  $L_{1,2}$  ainsi que leur prolongement sur  $L_3$ . On va utiliser ces  $3h + 3$  sommets pour constituer le segment  $L_2^{i-1,j}$ . Il reste  $2h + 1$  sommets qui n'ont pas été utilisés dans le segment de  $A'$ . De ces  $2h + 1$  sommets, on doit

considérer également le bâton  $B_p^{3,4}$  gardé pour assurer la connexion avec  $\overline{D}$ . On possède donc en tout  $2h + 2$  sommets pour constituer des bâtons sur  $L_{3,4}$ . D'après le Lemme-5, on a donc suffisamment de sommets pour assurer la couverture des cibles de  $L_4$  précédemment couvertes par  $A_{i,j}$ .

- iv. On considère les extrémités de  $A_{i,j}$  telles qu'il existe un segment unitaire de  $L_2$  en  $C_i$  et une colonne vide de  $L_{1,2}$  en  $C_j$ , précédée donc par un bâton en  $C_{j-1}$ . De façon équivalente, on peut considérer une colonne vide en  $C_i$  et un segment unitaire de  $L_2$  en  $C_j$ . Ici  $j - i + 1 = 3h + 1$ .  $A_{i,j}$  possède ici  $3h$  sommets constituant les bâtons sur  $L_{1,2}$  ainsi que leur prolongement sur  $L_3$ . On va utiliser ces  $3h$  sommets pour constituer le segment  $L_2^{i+1,j}$ . Le segment unitaire  $(2, i)$  prolonge ce segment car ce sommet est conservé tel quel. Il reste  $2h + 1$  sommets qui n'ont pas été utilisés dans le segment de  $A'$  sur  $L_2$ . En plus de ces  $2h + 1$  sommets, on doit conserver le bâton  $B_p^{3,4}$  pour assurer la connexion avec  $\overline{D}$ . On possède donc reste donc  $2h + 2$  sommets pour constituer des bâtons sur  $L_{3,4}$ . D'après le Lemme-5, on a donc suffisamment de sommets pour assurer la couverture des cibles de  $L_4$  précédemment couvertes par  $A_{i,j}$ .
- v. On considère les extrémités de  $A_{i,j}$  telles qu'il existe une colonne vide sur  $L_{1,2}$  en  $C_i$  suivie d'un bâton en  $C_{i+1}$  et une colonne vide en  $C_j$ , précédée donc par un bâton en  $C_{j-1}$ . Ici  $j - i + 1 = 3h$ .  $A_{i,j}$  possède ici  $3h$  sommets constituant les bâtons sur  $L_{1,2}$  ainsi que leur prolongement sur  $L_3$ . On va utiliser ces  $3h$  sommets pour constituer le segment  $L_2^{i,j}$ . Il reste  $2h$  sommets qui n'ont pas été utilisés dans le segment de  $A'$ . En plus de ces  $2h$  sommets, on doit conserver  $B_p^{3,4}$  pour assurer la connexion avec  $\overline{D}$ . On possède donc  $2h + 1$  sommets pour constituer des bâtons sur  $L_{3,4}$ . D'après le Lemme-5, on a donc suffisamment de sommets pour assurer la couverture des cibles de  $L_4$  précédemment couvertes par  $A_{i,j}$ .
- vi. On considère les extrémités de  $A_{i,j}$  telles qu'il existe un segment unitaire  $L_2$  en  $C_i$  et un segment unitaire en  $C_j$ . Ici  $j - i + 1 = 3h + 2$ .  $A_{i,j}$  possède  $3h$  sommets constituant les bâtons sur  $L_{1,2}$  ainsi que leur prolongement sur  $L_3$ .

On utilise ces  $3h$  sommets pour constituer le segment  $L_2^{i+1,j-1}$ , prolongé par les segments unitaires  $(2, i)$  et  $(2, j)$  qui restent inchangés. Il reste  $2(h + 1)$  sommets qui n'ont pas été utilisés dans le segment de  $A'$ . De ces  $2h + 2$  sommets, on doit considérer le bâton  $B_p^{3,4}$  qui assure la connexion avec  $\bar{D}$ . On possède donc  $2h + 3$  sommets pour constituer des bâtons sur  $L_{3,4}$ . D'après le Lemme 5, on a donc suffisamment de sommets pour assurer la couverture des cibles de  $L_4$  précédemment couvertes par  $A_{i,j}$ .

- (b) Deuxième ensemble de cas. On considère maintenant une alternance de bâtons et de segments unitaires sur  $L_{1,2}$ . Cette alternance est illustrée sur la Figure 4.13. Nous nous plaçons ici dans le cas où les extrémités de  $A_{i,j}$  sont constituées de

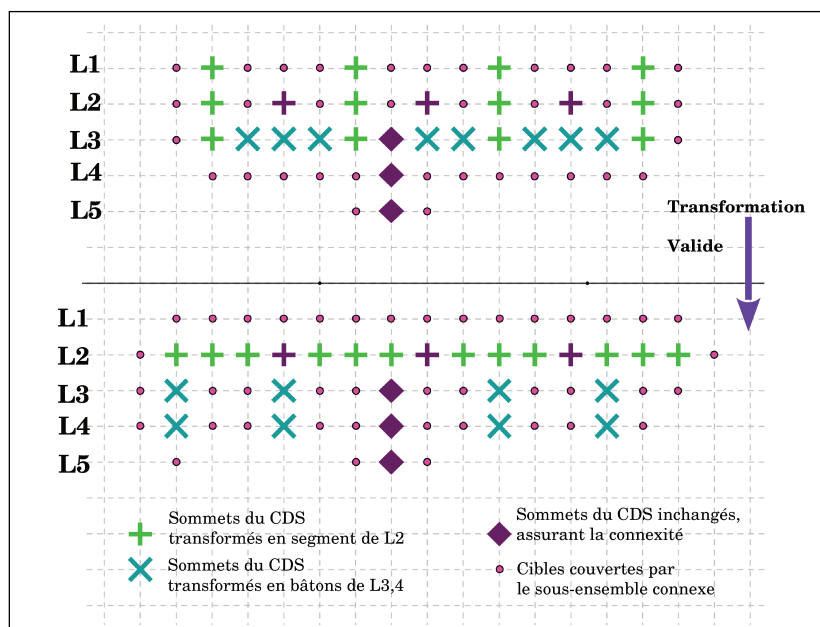


FIGURE 4.13 – Cas avec alternance de bâtons et de segments unitaires sur  $L_{1,2}$

bâtons en  $C_i$  et en  $C_j$ , car nous verrons que les autres formes d'extrémités sont moins contraignantes. On va découper  $A_{i,j}$  de façon à pouvoir dénombrer le nombre de sommets que l'on peut récupérer pour assurer la couverture de  $L_4$  et la connectivité par  $L_3$ , quel que soit la forme de  $A_{i,j}$ . Un segment unitaire de  $L_2$  est nécessairement entouré de deux bâtons de  $L_{1,2}$ , et séparé d'eux par une colonne vide. On peut donc considérer les deux motifs suivants :

- un motif qui pour un certain  $k$ , est compris dans la sous-grille  $L_{1,3}C_{k,k+2}$  et

qui est composé d'un bâton  $B_k^{1,2}$  ainsi que des sommets  $(3, k)$ ,  $(3, k + 1)$  et  $(3, k + 2)$ . On appellera ce motif  $Q_1$ , qui est réparti sur trois colonnes.

- un motif qui pour un certain  $k$  est compris dans la sous-grille  $L_{1,3}C_{k,k+3}$  et qui est composé d'un bâton  $B_k^{1,2}$ , d'un segment unitaire  $(2, k + 2)$  ainsi que des sommets  $(3, k)$ ,  $(3, k + 1)$ ,  $(3, k + 2)$  et  $(3, k + 3)$ . On appellera ce motif  $Q_2$ , qui est réparti sur quatre colonnes.

L'alternance de ces deux motifs donne ainsi toutes les combinaisons possibles pour  $A_{i,j}$ , aux extrémités près.  $A_{i,j}$  va donc se composer de  $q_1$  motifs  $Q_1$ , de  $q_2$  motifs  $Q_2$  ainsi que d'une extrémité terminale en  $C_j$  composé d'un bâton  $B_j^{1,2}$  et de  $(3, j)$ . On a donc trois cas possibles à envisager en fonction de la valeur de  $q_2$ . En effet,  $Q_1$  étant réparti sur trois colonnes, le nombre de fois où il est répété n'aura pas d'influence sur le reste de la division par 3 du nombre de colonnes de  $A_{i,j}$ .

- i. Premier cas :  $q_2 = 3q'_2$ . Dans ce cas,  $A_{i,j}$  s'étend sur  $3q_1 + 12q'_2 + 1$  colonnes. On a donc  $j - i + 1 = 3h + 1$  avec  $h = q_1 + 4q'_2$ . Les sommets qui servent à former un segment sur  $L_2$  pour  $A'$  sont au nombre de 3 pour un motif  $Q_1$  (les trois sommets correspondant au bâton) et de 4 pour un motif  $Q_2$  (les trois sommets du bâton ainsi que le segment unitaire). On en déduit donc que les sommets qui servent à assurer la couverture par des bâtons sur  $L_{3,4}$  sont au nombre de 2 pour un motif  $Q_1$  et 3 pour un motif  $Q_2$ . On dispose donc de  $2q_1 + 3 * 3q'_2$  sommets pour assurer cette couverture auxquels on rajoute un sommet de  $B_p^{3,4}$  qui assure la connexité avec  $\bar{D}$ . Ainsi on a  $2q_1 + 9q'_2 + 1 > 2q_1 + 8q'_2 + 1 = 2h + 1$  et par ailleurs  $2q_1 + 9q'_2 + 1 \geq 2h + 2$  pour  $q'_2 \geq 1$ . D'après le Lemme-5, on a besoin d'au plus  $2h + 2$  sommets pour assurer la couverture ce qui est bien le cas. En effet, par hypothèse on a  $q_2 \geq 1$ , sinon on se retrouve dans le sous-ensemble de cas précédent.
- ii. Deuxième cas  $q_2 = 3q'_2 + 1$ . Dans ce cas  $A_{i,j}$  s'étend sur  $3q_1 + 12q'_2 + 4 + 1$  colonnes. On a donc  $j - i + 1 = 3h + 2$  avec  $h = q_1 + 4q'_2 + 1$ . Dans cette configuration, on dispose de  $2q_1 + 3(3q'_2 + 1) + 1 = 2q_1 + 9q'_2 + 4$  sommets pour former les bâtons de  $L_{3,4}$ . Or  $2q_1 + 9q'_2 + 4 > 2q_1 + 8q'_2 + 4 = 2h + 2$ ,

d'après le Lemme-5 on possède donc suffisamment de sommets pour garantir que les cibles couvertes par  $A'$  correspondent au moins à celles couvertes par  $A_{i,j}$ .

- iii. Troisième et dernier cas  $q_2 = 3q'_2 + 2$ . En ce cas,  $A_{i,j}$  s'étend sur  $3q_1 + 12q'_2 + 8 + 1$  colonnes. On peut donc poser  $j - i + 1 = 3h$  avec  $h = q_1 + 4q'_2 + 3$ . Pour constituer les bâtons de  $L_{3,4}$  on dispose de 2 sommets par motif  $Q_1$  et de 3 sommets par motif  $Q_2$  plus un sommet via le bâton qui assure la connexité soit ici en tout  $2q_1 + 3(3q'_2 + 2) + 1 = 2q_1 + 9q'_2 + 7$  sommets. On a vu dans le Lemme-5 qu'on a besoin d'au plus  $2h + 1$  sommets pour assurer la couverture de  $L_4$  via des bâtons sur  $L_{3,4}$ , or  $2q_1 + 9q'_2 + 7 \geq 2q_1 + 8q'_2 + 6 + 1 = 2h + 3$ . On a donc encore assez de sommets pour assurer la couverture de  $L_4$  via des bâtons de  $L_{3,4}$ .

Précisons qu'il est inutile de considérer les autres types d'extrémité étant donné que l'extrémité de type bâton est la plus contraignante : elle occupe une colonne de sommets sur  $L_{1,2}$  et un sommet de  $L_3$  qui sera déplacé sur  $L_2$  et que l'on ne peut donc pas utiliser pour assurer la couverture de  $L_4$ . Les autres extrémités possèdent toujours au moins un sommet sur  $L_3$  que l'on peut utiliser pour la couverture de  $L_4$ . Ainsi, si la couverture est assurée dans le cas d'extrémités de  $A_{i,j}$  de type bâton, elle le sera *a fortiori* dans le cas des autres extrémités.

□

Toujours dans le cas où  $A_{i,j}$  ne comprend qu'un point de connexité avec  $\bar{D}$ , il nous reste à envisager le cas où ce point se fait via  $L_2$ , c'est à dire lorsqu'il existe un segment sur  $L_2$  connexe en  $i$  ou en  $j$  au segment  $L_3^{i,j}$  et qui relie  $A_{i,j}$  à  $\bar{D}$ . Cette configuration est illustrée par la Figure-4.14.

**Proposition 13.** *Lorsque  $A_{i,j}$  est un sous-ensemble maximal sur  $L_{1,3}$  composé d'un segment maximal sur  $L_3$  entre  $C_i$  et  $C_j$  et d'un segment maximal  $L_2^{j,j'}$  (resp.  $L_2^{i,i'}$ ), alors la transformation proposée dans la Proposition-12 est toujours valide, quelle que soit la configuration de  $A_{i,j}$*

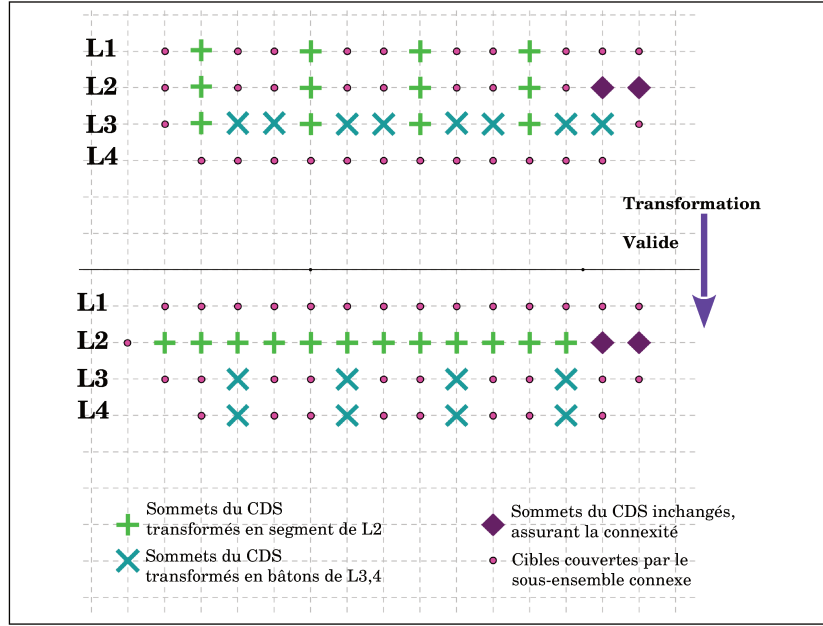


FIGURE 4.14 – Cas avec connexion par  $L_2$

*Démonstration.* Soit  $C_1$  une des configurations quelconques présentées dans la Proposition-[12](#). Les différences entre  $C_1$  et  $A_{i,j}$  sont les suivantes :

- $A_{i,j}$  ne comprend pas de segment sur  $L_p^{3,5}$  le reliant à  $\bar{D}$ , et  $A'$  sera directement relié à  $\bar{D}$  via le segment créé sur  $L_2$ . S'il existe un sommet sur  $(2, j)$  démarrant un segment maximal  $L_2^{j,j'}$ , alors pour des raisons de couverture il existe nécessairement un bâton  $B_{j-2}^{1,2}$  et son prolongement en  $(3, j-2)$  qui, une fois transformé dans  $A'$ , sera directement connexe à  $(2, j)$ .
- De ce fait, dans les sommets que l'on récupère pour former les bâtons sur  $L_{3,4}$ , on possède un sommet de moins que dans  $C_1$  (celui qui servait à la connexion via  $L_4$ ). En revanche, dans cette nouvelle transformation  $A'$ , on est libre de placer les bâtons comme on le souhaite, i.e. de façon optimale. Or, d'après le Lemme-[5](#), le placement optimal nécessite un sommet en moins par rapport au placement dans le pire des cas. On a donc assez de sommets pour assurer la couverture des sommets de  $L_4$  dans ce cas.

□

**Proposition 14.** Lorsque  $A_{i,j}$  est relié à  $\bar{D}$  par plus d'un point de connexité, et ou qu'il



existe des sommets disjoints sur  $L_4$  entre  $C_i$  et  $C_j$  les résultats de la Proposition-12 sont toujours valables.

*Démonstration.* Chaque point de connexité sur une colonne  $C_k$  implique l'existence dans  $D$  des sommets  $(4, k)$  et  $(5, k)$ . Par rapport aux transformations décrites ci-dessus, cela implique de laisser tels quels ces deux sommets, ainsi que  $(3, k)$ , qui ne pourra pas être déplacé pour des raisons de connexité. Autrement dit, chaque point de connexité supplémentaire fournit un bâton déjà placé sur  $L_{3,4}$  mais empêche de déplacer le sommet de  $L_3$  correspondant.

Nous partons d'une configuration  $\mathcal{C}_\infty$  où les bâtons sur  $L_{3,4}$  ont été placés autour d'une colonne  $C_p$ , tel que décrit dans la Proposition-12, c'est-à-dire toutes les trois colonnes, sauf éventuellement aux extrémités où un unique sommet sur  $L_3$  sera placé à un intervalle d'une colonne vide du bâton voisin. Observons la configuration  $\mathcal{C}_\epsilon$  induite par l'existence d'un autre point de connexité en  $C_{p'}$ , en prenant arbitrairement  $p' > p$ . On s'intéresse alors à la nouvelle disposition des bâtons sur  $C_k$ ,  $p \leq k \leq j$ , c'est à dire à droite de  $C_p$ . D'après la Proposition 10, on peut toujours se ramener à  $p' \geq p + 2$ .

Si  $p' = p + 2$ , on construit les bâton sur  $L_{3,4}$  à partir de  $C_{p'}$  et non de  $C_p$ . Autrement dit, on décale tous les bâton de  $\mathcal{C}_\infty$  de deux colonnes vers la droite, sauf à l'extrémité  $C_j$ , où trois cas se présentent : si l'on avait dans  $\mathcal{C}_\infty$  un bâton  $B_1$  sur  $C_{j-1}$  et un bâton  $B_2$  sur  $C_{j-4}$ , on aura dans  $\mathcal{C}_\epsilon$  le bâton  $B_2$  déplacé sur  $C_{j-2}$  et un sommet en  $(3, j)$ , le bâton  $B_1$  étant supprimé. Si l'on avait dans  $\mathcal{C}_\infty$  un bâton  $B_1$  sur  $C_j$  et un bâton  $B_2$  sur  $C_{j-3}$ , on aura dans  $\mathcal{C}_\epsilon$  le bâton  $B_2$  sur  $C_{j-1}$ , le bâton  $B_1$  étant supprimé. Enfin, si l'on avait dans  $\mathcal{C}_\infty$  un bâton  $B_1$  sur  $C_{j-2}$  et un sommet  $x$  en  $(3, j)$ , on aura dans  $\mathcal{C}_\epsilon$  le bâton  $B_1$  en  $C_j$ , le sommet  $x$  étant supprimé. Dans tous les cas, on peut donc couvrir l'ensemble des colonnes de  $C_{p-1}$  à  $C_j$  avec toujours au moins un sommet de moins dans  $\mathcal{C}_\epsilon$  que dans  $\mathcal{C}_\infty$ , qui correspond au sommet  $(3, p')$  que l'on ne peut pas déplacer dans  $\mathcal{C}_\epsilon$ . Puisque rien ne change pour  $k < p$ , on conserve bien la couverture intégrale de  $L_4$  sur  $C_{i,j}$ .

Si  $p' = p + 3$ , le même raisonnement amène à la conclusion que la couverture de  $L_4$  dans  $\mathcal{C}_\epsilon$  demande toujours deux sommets de moins que dans  $\mathcal{C}_\infty$ , le résultat est donc vrai *a fortiori*.

Si  $p' = p + 4$ , il faut d'abord placer le sommet  $(3, p + 2)$  pour assurer la couverture de

$(4, p+2)$ . Une fois cela fait, le même raisonnement que précédemment amène à la conclusion que la couverture de  $L_4 \setminus \{(4, p+2)\}$  dans  $\mathcal{C}_\epsilon$ , demande toujours au moins deux sommets de moins que dans  $\mathcal{C}_\infty$ . qui correspondent au sommet  $(3, p+2)$  qui doit être obligatoirement placé, et au sommet  $(3, p')$  que l'on ne peut pas déplacer dans  $\mathcal{C}_\epsilon$ .

Enfin, si  $p' > p+4$ , on se ramène à l'un des trois cas précédents par ajout de bâtons toutes les trois colonnes entre  $C_p$  et  $C_{p'}$ .

Dans tous les cas, nous disposons donc de suffisamment de sommets de  $L_3$  pour couvrir tout  $L_4$  dans la configuration  $\mathcal{C}_\epsilon$ . On en déduit donc que quel que soit le nombre de points de connexion existant dans  $D$  sur  $L_4$ , il y aura toujours suffisamment de sommets pour réaliser la transformation valide décrite dans la Proposition-12.  $\square$

**Corollaire 4.** *Tout sous-ensemble maximal  $A_{i,j}$  de  $L_{1,3}$  qui possède des sommets consécutifs sur  $L_3$  peut être transformé en un sous-ensemble de sommets  $A'$  tel que  $A' \preceq A_{i,j}$  et tel que  $A'$  est composé ou bien d'un segment de  $L_2$  et de bâtons de type  $B_k^{3,4}$  pour  $i \leq k \leq j$ , ou bien uniquement de bâtons de type  $B_k^{1,5}$  pour  $i \leq k \leq j$ .*

*Démonstration.* L'étude de l'exhaustivité des configurations des sous-ensembles valides de  $L_{1,3}$  comprenant des sommets consécutifs sur  $L_3$  par les Propositions-12, 11, 13 et 14 nous assure ce résultat.  $\square$

**Théorème 2.** *Lorsque  $m \neq 0 \pmod 3$ , tout bâton de  $L_{1,2}$  peut être transformé en un segment de  $L_2$ .*

*Démonstration.* On a vu par la Proposition-9 que c'est le cas lorsque le bâton est prolongé par un sommet de  $L_3$  isolé. Le résultat du corollaire-4 nous permet désormais d'affirmer que c'est également le cas lorsque le bâton est prolongé par un sommet de  $L_3$  adjacent dans  $D$  d'au moins un autre sommet de  $L_3$ , et on garantit une transformation qui ne perd pas la couverture de  $L_4$ .  $\square$

Nous venons donc de démontrer que tout *CDSR* peut se transformer de sorte qu'il n'existe pas de sommets consécutifs sur  $L_3$ . En outre, le résultat du Théorème-2 a pour conséquence directe le fait qu'on peut maintenant "coucher" tous les bâtons de  $L_{1,2}$  si et

seulement si ils ne sont pas tous séparés par deux colonnes vides. On a donc le résultat intermédiaire suivant :

1. Lorsque  $m = 0 \pmod 3$ , alors on peut ramener tout *CDSR*, *a fortiori* optimal, en un *CDSR* composé uniquement de  $L_2$  sur  $L_{1,2}$  et de sommets isolés sur  $L_3$  ou bien en un *CDSR* composé uniquement de bâtons sur  $L_{1,3}$  toujours séparés par deux colonnes vides.
2. Lorsque  $m \neq 0 \pmod 3$ , alors on peut ramener tout *CDSR*, *a fortiori* optimal, en un *CDSR* composé uniquement de  $L_2$  sur  $L_{1,2}$  et de sommets isolés sur  $L_3$ .

### 4.3.3 Conjecture : tout *CDS* tel que $m \neq 0 \pmod 3$ peut être transformé de sorte à n'avoir qu'un seul sommet sur $L_3$

On va maintenant chercher à prouver que, lorsque  $m \neq 0 \pmod 3$ , lorsqu'un *CDSR* est composé d'un segment de  $L_2$ , alors il peut se ramener à un *CDSR* qui possède un seul sommet sur  $L_3$ . Pour ce faire, on va étudier les différents sous-ensembles connexes possibles compris sur  $L_{3,5}$ . Ils sont de sept types possibles, soit  $k \in \{1, \dots, m\}$  :

1. Les bâtons  $B_k^{3,5}$
2. Les bâtons  $B_k^{4,5}$
3. Les bâtons  $B_k^{3,4}$
4. Le segment unitaire  $L_k^3$
5. Les sous-ensemble connexes maximaux possédant un ou plusieurs sommets en  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$
6. Les sous-ensemble connexes maximaux possédant un ou plusieurs sommets en  $L_4$  et en  $L_5$
7. Finalement, les sous-ensemble connexes maximaux possédant un ou plusieurs sommets en  $L_3$  et en  $L_4$

Trivialement, on ne s'intéressera pas aux sous-ensemble maximaux ne possédant que des sommets sur  $L_5$ , puisque c'est ce genre d'ensemble que l'on cherche à obtenir.

Dans un premier temps on va s'intéresser à la famille de sous-ensembles maximaux qui ne possèdent pas de sommets sur  $L_3$ .

**Lemme 6.** *Lorsque qu'un CDSR  $D$  contient tout  $L_2$ , alors tous les sous-ensembles connexes de  $L_{3,5}$  qui ne possèdent pas de sommets sur  $L_3$  peuvent se voir appliquer les mêmes transformations que les sous-ensemble connexes de  $L_{1,2}$ , avec une correspondance entre  $L_1$  et  $L_4$ , d'une part, et  $L_2$  et  $L_5$  d'autre part.*

*Démonstration.* Comme  $L_3$  est intégralement couverte par  $L_2$ , alors tout sous-ensemble connexe démarrant en  $L_4$  n'a pas à garantir la couverture de  $L_3$ . En outre, comme ils ne sont pas raccrochés à  $L_2$  via  $L_3$ , ils sont indépendants de la partie haute de  $D$  et sont donc uniquement reliés à  $D$  par le bas. Ils ont donc exactement les mêmes propriétés que des sous-ensembles connexes de  $L_{1,2}$  et à ce titre pourront subir les mêmes transformations.  $\square$

On va s'intéresser maintenant au cas où  $L_{3,5}$  est uniquement composé de bâtons de type  $B_k^{3,5}$  ou  $B_k^{4,5}$ .

**Lemme 7.** *Soit un CDSR  $D$  composé de  $L_2$  et soit  $k$  un entier tel que  $1 \leq k \leq m$ . Si  $m \not\equiv 0 \pmod{3}$  et  $D$  contient uniquement des bâtons de type  $B_k^{3,5}$  ou  $B_k^{4,5}$  sur  $L_{3,5}$ , ou bien si  $m \equiv 0 \pmod{3}$  et n'est composé que de bâtons de type  $B_k^{3,5}$  ou  $B_k^{4,5}$  dont deux au moins sont séparés par une seule colonne vide, ou encore si  $m \equiv 0 \pmod{3}$  et  $D$  est composé uniquement de bâtons de type  $B_k^{3,5}$  ou  $B_k^{4,5}$  et d'au moins un segment maximal sur  $L_5$ , alors on peut transformer  $D$  en  $D'$  de sorte que  $D'$  contienne un segment de  $L_5$  et un unique sommet sur  $L_3$  et sur  $L_4$ .*

*Démonstration.* En fonction de la ligne sur laquelle les bâtons démarrent, on va appliquer deux transformations différentes :

- Soit  $k \in \{1, \dots, m\}$  et  $B_k^{3,5}$  un bâton, on va déplacer le sommet  $(3, k)$  en  $(5, k - 1)$  et le sommet  $(4, k)$  en  $(5, k + 1)$ , afin de former un segment  $L_5^{k-1, k+1}$ . De cette manière, s'il existe un sommet  $(6, k)$ , la connexité avec  $\overline{D}$  sera conservée.
- Soit  $k \in \{1, \dots, m\}$  et  $B_k^{4,5}$  un bâton, on va déplacer le sommet  $(6, k)$  en  $(5, k - 1)$  et le sommet  $(4, k)$  en  $(5, k + 1)$ , afin de former un segment  $L_5^{k-1, k+1}$ . Pour les mêmes arguments que ceux avancés lors de la section précédente, on peut transformer le bâton en segment, que le sommet sur  $L_6$  soit isolé ou non. S'il n'est pas isolé, on

peut se servir du résultat du Corollaire-4 pour garantir qu'il n'y a pas de perte de couverture.

Vérifions que cette transformation est bien valide :

- Nombre de sommets : la transformation consiste en un déplacement de sommets. En cas de redondance, certains pourront même être supprimés.
- Couverture : la transformation conserve bien la couverture de  $L_{4,6}$  et ne perd pas de couverture en  $L_7$  comme vu dans le Corollaire-4.
- Connexité : dans les deux cas, il y a perte de connexité respectivement par  $L_3$  pour  $B_k^{3,5}$  et par  $L_6$  pour  $B_k^{4,5}$ , néanmoins la transformation des bâtons en segments garantit qu'ils seront bien connectés les uns aux autres, étant donné que d'après le Corollaire-1, deux bâtons ne peuvent pas être séparés de plus de deux colonnes vides. On doit néanmoins s'assurer que la connexité de l'ensemble du *CDS* ainsi formé est bien assurée.

1. Si  $m = 3h + 1$ . Il y a au moins  $h + 1$  bâtons sur  $L_{3,5}$ , soit  $3h + 3$  sommets que l'on peut déplacer. On a besoin de  $3h + 1$  sommets pour constituer tout  $L_5$ , il reste donc deux sommets qu'on peut placer arbitrairement pour former un bâton  $B_k^{3,4}$   $k \in \{1, \dots, m\}$  en  $L_3$  et en  $L_4$ .
2. Si  $m = 3h + 2$ . Il y a au moins  $h + 1$  bâtons sur  $L_{3,5}$ , soit  $3h + 3$  sommets. On a besoin de  $3h + 2$  sommets pour constituer tout  $L_5$ , il manque donc un sommet pour réaliser la connexité entre  $L_2$  et  $L_5$ . Néanmoins, les bâtons extrêmes ne peuvent pas être tous les deux à la fois sur  $C_1$  et sur  $C_m$ , sauf à ce qu'il y ait au moins  $h + 2$  bâtons, auquel cas on a suffisamment de sommets pour assurer la connexité avec  $L_2$ . Sans perte de généralité on va donc poser que le dernier bâton se situe en  $C_{m-1}$ . On a alors deux cas possibles.

- (a) Premier cas :  $(3, m - 1) \in D$ . En ce cas, on va conserver le bâton  $B_{m-1}^{3,5}$  tel quel. La transformation des autres bâtons nous amène à récupérer un sommet en surplus appartenant à l'autre bâton extrême placé en  $C_1$  ou s'il est placé en  $C_2$ , alors il existe nécessairement deux bâtons de  $L_{3,5}$  séparés par une unique colonne. On place ce sommet en surplus en  $(5, m - 2)$  afin de connecter  $B_{m-1}^{3,5}$  avec le reste du segment de  $B_5$  formé par la transformation

des bâtons. Le nouveau *CDSR* ainsi formé comporte donc  $L_2$ ,  $(3, m - 1)$ ,  $(4, m - 1)$  ainsi que tout  $L_5$  sauf le sommet  $(5, m)$ , le tout formant bien un *CDSR*.

- (b) Deuxième cas :  $(3, m - 1) \notin D$ . En ce cas, on considère le bâton  $B_{m-1}^{4,5}$  qu'on va aussi conserver tel quel. On place le sommet qu'on récupère sur l'autre bâton extrême en  $(5, m - 2)$  afin de connecter  $B_{m-1}^{4,5}$  avec le reste du segment formé sur  $B_5$ . Notons qu'à l'origine, il existe au moins un chemin reliant par le bas de la grille un bâton  $B_k^{3,5}$  pour un certain  $k \in \{1, ..m - 3\}$  avec  $B_{m-1}^{4-5}$ , sinon  $D$  ne serait pas connexe. Dans  $D'$ ,  $B_k^{3,5}$  est devenu un segment  $L_5^{k-1, k+1}$  et le chemin reliant ce segment à  $B_{m-1}^{4,5}$  a été conservé car il passe par le sommet  $(6, k) \in D$  qui n'a pas été modifié. Or l'ajout du sommet  $(5, m - 2)$  fait qu'il existe également un nouveau chemin reliant  $B_{m-1}^{4-5}$  avec  $L_5^{k-1, k+1}$  et qui passe par  $L_5$ . On a donc affaire à un circuit, ce qui implique une redondance non nécessaire. Le sommet  $(6, k)$  servant uniquement à la connexité, on peut le déplacer en  $(3, k - 1)$  pour assurer la connexité globale de  $D'$ . Comme précédemment, on obtient un *CDSR*  $D'$  qui comporte donc  $L_2$ ,  $(3, m - 1)$ ,  $(4, m - 1)$  ainsi que tout  $L_5$  sauf le sommet  $(5, m)$ .

3. Si  $m = 3h$  et que  $D$  comporte uniquement des bâtons dont deux sont séparés au moins par une colonne vide ou si  $D$  comporte des bâtons et un segment maximal sur  $L_5$ , on a dans le premier cas nécessairement  $h + 1$  bâtons, soit  $3h + 3$  sommets que l'on peut utiliser pour la transformation. Étant donné qu'on a besoin de  $3h$  sommets pour assurer la couverture de  $L_{4,6}$ , on a suffisamment de sommets pour placer un bâton  $B_k^{3,5}$  et assurer la connexité globale de  $D'$ . Le deuxième cas, revient au même que celui exposé dans le cas  $m = 3h + 2$ . Le principe est le même : on ne transforme pas un des bâtons extrêmes, et quel que soit la configuration de ce bâton, il est possible de le relier au segment de  $L_5$  de  $D'$  tout en assurant la connexité avec  $L_2$ .

□

On va maintenant considérer les autres types de sous-ensemble connexe sur  $L_{3,5}$ . Il est à noter que certaines transformations de ces sous-ensembles garantiront la couverture et

le nombre de sommets sans pour autant assurer la connexité globale du nouvel ensemble dominant formé à l'issue de la transformation. On notera toutefois que lorsque la connexité est perdue, on crée un cycle dans le sous-graphe induit par les sommets de  $D'$  sur  $L_{5,n}$ . Cette connexité globale sera "réparée" lorsque l'on abaissera tous les sous-ensembles connexes de  $L_{3,5}$  sur  $L_5$ , suivant le même procédé que dans le cas où  $L_{3,5}$  est exclusivement constitué de bâtons.

**Lemme 8.** *Soit  $D$  un CDSR comportant tout  $L_2$ . Tout sous-ensemble connexe maximal  $A_{i,j}$  de  $L_{3,5}$  tel que  $A_{i,j} \subset D$ ,  $A_{i,j}$  n'est pas un bâton, et tel que  $\exists(3,k) \in A_{i,j}$  peut être transformé de sorte à former un segment  $A'$  sur  $L_5$  connecté à  $\overline{D}$ . Le nouvel ensemble de sommet formé  $D'$ , est soit un CDSR, soit un sous-ensemble de sommets induisant un graphe formé de deux composantes connexes dont une composante comporte un cycle.*

*Démonstration.* De façon générale la transformation consiste à abaisser tous les sommets de  $L_4$  sur  $L_5$  et à déplacer le sommet sur  $L_3$  vers  $(5, i - 1)$  et le sommet initial de  $L_5$  vers  $(5, j + 1)$ , de manière à conserver la couverture de  $(4, i - 1)$  et  $(4, j + 1)$ , une fois que les sommets de  $L_4$  ont été abaissés. On doit également s'assurer qu'il n'y a pas de perte de connexité par cette opération et que le nouveau sous-ensemble connexe  $A'$  se raccorde bien à un autre sous-ensemble connexe relié à  $\overline{D}$ . Par ailleurs, la connexion à  $\overline{D}$  par  $L_6$ , lorsqu'elle existe, est nécessairement conservée. On va faire une disjonction de cas sur les différentes extrémités possibles de  $A_{i,j}$ , l'étude d'une extrémité étant généralement suffisante.

1.  $A_{i,j}$  est constitué de  $C_i^{3,5}$  et comprend également au moins un sommet de type  $(5, k)$  ou  $(3, k)$ , pour  $k \in \{i + 1, \dots, j\}$ . En ce cas on abaisse  $(3, i)$  en  $(5, i - 1)$  et on déplace  $(5, i)$  en  $(5, j + 1)$ . Reste le sommet  $(5, k)$  ou  $(3, k)$  que l'on peut utiliser pour raccorder  $A'$  avec le reste de  $\overline{D}$ . En effet, comme  $A_{i,j}$  est par hypothèse maximal pour l'inclusion, le sommet  $(5, i - 1)$  n'appartenait pas à  $D$ . Par utilisation du Corollaire-1, le sommet  $(5, i - 2)$  est donc nécessairement couvert par un sommet de  $\overline{D}$ . Si on place le sommet  $(5, k)$  ou  $(3, k)$  en  $(5, i - 2)$ , on a donc la garantie que  $A'$  est bien relié à  $\overline{D}$ .
2.  $A_{i,j}$  est constitué des sommets  $(4, i)$ ,  $(5, i)$ , éventuellement  $(3, i)$ .  $(5, i)$  est le seul sommet de  $A_{i,j}$  sur  $L_5$  et il n'existe qu'un seul sommet de  $A_{i,j}$  sur  $L_3$ . En ce cas, il

faut s'intéresser à ce qui se passe en  $C_j$ . Il ne peut pas y avoir une extrémité du même type, car l'hypothèse de l'unicité de  $(5, i)$  sur  $L_5$  ne serait pas respectée, c'est donc une autre extrémité et on se référera au paragraphe ci-après ou ci-dessus approprié.

3.  $A_{i,j}$  est tel que  $(3, i), (4, i) \in D$ ,  $(5, i) \notin D$ . En ce cas, le sommet  $(5, i - 1)$  n'est pas couvert par  $A_{i,j}$  car comme  $A_{i,j}$  est maximal pour l'inclusion,  $(4, i - 1)$  et  $(5, i)$  n'appartiennent pas à  $D$  par hypothèse.  $(5, i - 1)$  ne peut donc être couvert que par lui-même ou par les sommets  $(5, i - 2)$  ou  $(6, i - 1)$ . Le fait que  $A'$  comprend le sommet  $(5, i - 1)$  garantit donc sa connexité avec  $\overline{D}$ .
4.  $A_{i,j}$  est tel que  $(4, i) \in D$ ,  $(3, i), (5, i) \notin D$ . Par hypothèse, il existe  $k_1, k_2 \in \{i+1, \dots, j\}$  tels que  $(3, k_1), (5, k_2) \in A_{i,j}$ . Comme expliqué dans le paragraphe précédent,  $(5, i - 1)$  n'est pas couvert dans  $A_{i,j}$ , comme il appartient à  $A'$ , il est nécessairement relié à un sommet de  $\overline{D}$ .
5.  $A_{i,j}$  est tel que  $(3, i) \in D$  et  $(4, i), (5, i) \notin D$ , ou bien  $(5, i) \in D$  et  $(3, i), (4, i) \notin D$ . En ce cas, il existe soit au moins deux sommets sur  $L_3$ , soit au moins deux sommets sur  $L_5$ . Ainsi, après transformation de  $A_{i,j}$  en  $A'$ , il existe au moins un sommet en surplus que l'on peut utiliser pour connecter  $A'$  à  $\overline{D}$  en considérant toujours le fait que  $(5, i - 2)$  est nécessairement connecté à  $\overline{D}$ .

Dans tous les cas, tous les sommets de  $L_4$  initialement couverts par  $A_{i,j}$  sont bien couverts par  $A'$ . Par ailleurs, il est possible que le sommet  $v$  de  $\overline{D}$  qui est connexe à  $A'$  était initialement relié à  $L_2$  par  $A_{i,j}$ , en ce cas  $D'$  n'est pas un *CDSR* et le sous-graphe engendré par  $D'$  contient deux composantes connexes, dont une qui possède un cycle : il désormais deux chemins allant de  $v$  à  $(5, i)$ , par exemple. Dans le cas contraire, alors  $D'$  est un *CDSR* et le tout constitue une transformation valide en terme de nombre de sommets, de couverture et de connexité.  $\square$

On va maintenant s'intéresser aux sous-ensembles connexes qui démarrent en  $L_3$  mais ne possèdent pas de sommets sur  $L_5$ . D'après la Proposition-10, il ne peut y avoir de sommets consécutifs sur  $L_3$ , car  $D$  est désormais constitué de sommets consécutifs sur  $L_2$ . Ces sous-ensembles connexes, toujours maximaux pour l'inclusion seront donc constitués d'aucun, d'un ou de plusieurs sommets consécutifs sur  $L_4$  et d'au moins un ou de plusieurs



sommets non consécutifs sur  $L_3$ . Toujours dans l'objectif de ramener tous les sommets sur  $L_5$  de sorte à ce qu'il n'y ait plus qu'un seul sommet sur  $L_3$ , on va considérer séparément ces sous-ensembles.

Comme précédemment, on va devoir considérer deux types de transformation. Une qui constitue une transformation valide d'un *CDS*  $D$  vers un *CDS*  $D'$ , l'autre qui garantit la couverture et le nombre de sommets sans pour autant assurer la connexité de la transformation globale mais en créant un cycle.

**Proposition 15.** *Soit  $D$  un CDSR constitué de  $L_2$  et soit  $A_i$  un sous-ensemble connexe de  $D$  sur  $L_{3,5}$  uniquement constitué d'un segment unitaire en  $(3, i)$ , alors il existe une transformation valide de  $D$  en un CDSR  $D'$  qui contient  $(5, i)$  mais pas  $(3, i)$ .*

*Démonstration.* Soit  $(3, i)$  le sommet de  $A_i$ , il ne couvre que le sommet  $(4, i)$ , les autres sommets étant déjà couverts par le segment de  $L_2$ . Le sommet  $(5, i)$  est nécessairement couvert par  $\bar{D}$ . Ainsi, si on déplace  $(3, i)$  en  $(5, i)$ , on conserve le nombre de sommets de  $D$ , et on assure la connexité et la couverture requise, car  $(4, i)$  reste couvert et  $(5, i)$  est connexe à  $\bar{D}$ .  $\square$

**Proposition 16.** *Soit  $D$  un CDSR constitué de  $L_2$  et soit  $A_{i,j}$  un sous-ensemble connexe maximum de  $L_{3,5}$  constitué d'au moins deux sommets non consécutifs sur  $L_3$  et de  $j - i + 1$  sommets consécutifs sur  $L_4$ , alors il existe une transformation valide de  $D$  en un CDSR  $D'$  tel que  $D' = (D \setminus A_{i,j}) \cup A'$  avec  $A' = L_5^{i-1, j+1}$ .*

*Démonstration.* On vérifie que la transformation est valide.

1. Nombre de sommets :  $A'$  contient  $i - j + 3$  sommets, ce qui est le nombre minimal de sommets pour  $A_{i,j}$ .
2. Couverture : les sommets de  $L_3$  étant déjà intégralement couverts par les sommets de  $L_2$ ,  $A_{i,j}$  couvre donc au mieux de manière unique tous les sommets appartenant à la sous-grille  $L_{4,5}Ci, j$ , ainsi que les sommets  $(4, i - 1)$  et  $(4, j + 1)$ . Ces sommets sont bien couverts par  $A'$ .
3. Connexité : le sommet  $(5, i - 1)$  n'est pas couvert par  $A_{i,j}$ . Il doit donc être nécessairement couvert par un sommet de  $\bar{D}$ . Comme  $(5, i - 1) \in A'$ , alors  $A'$  est donc

nécessairement relié à  $\overline{D}$  et il n'y a pas de perte de connexité.

□

**Proposition 17.** *Soit  $D$  un CDSR constitué de  $L_2$  et soit  $A_{i,j}$  un sous-ensemble connexe maximum pour l'inclusion de  $L_{3,5}$ , constitué d'un seul sommet de  $L_3$  et de  $j - i + 1$  sommets consécutifs sur  $L_4$ , alors il existe une transformation valide de  $D$  en un CDSR  $D'$  tel que  $D' = (D \setminus A_{i,j}) \cup A'$ ,  $A'$  étant constitué de un ou trois sous-ensembles connexes, en fonction de la colonne où se situe le sommet de  $L_3$ .*

*Démonstration.* 1. Premier cas :  $(3, i) \in A_{i,j}$  ou  $(3, j) \in A_{i,j}$ . Dans ce cas  $A_{i,j}$  est nécessairement composé de sommets sur  $L_4$  allant de  $(4, i)$  à  $(4, j)$ . Sans perte de généralité on va considérer que  $(3, i) \in A_{i,j}$ , le même type de raisonnement restant valable pour  $(3, j) \in A_{i,j}$ . On peut construire  $A'$  de la façon suivante. On conserve les sommets  $(3, i)$  et  $(4, i)$  dans  $A'$  et on déplace les sommets allant de  $(4, i + 1)$  à  $(4, j)$  vers un segment  $L_5^{i+2, j+1}$ . Montrons que cette transformation est valide.

- (a) Nombre de sommets.  $A'$  contient le même nombre de sommets que  $A_{i,j}$ .
- (b) Couverture.  $L_3$  étant déjà couvert par les sommets de  $L_2 \setminus A_{i,j}$  couvre au plus la sous-grille  $L_{4,5}C_{i-1, j}$  ainsi que le sommet  $(4, j + 1)$ .  $A'$  couvre la sous-grille  $L_{4,5}C_{i-1, j+1}$  ainsi que le sommet  $(5, j + 2)$ . On a bien  $N(A_{i,j}) \subset N(A')$ .
- (c) Connexité. Le bâton  $B_i^{4,5}$  reste connecté à  $\overline{D}$  par  $(2, i)$ . Le sommet  $(5, j + 2)$  n'étant pas couvert par  $A_{i,j}$ , il est donc couvert par un sommet de  $\overline{D}$ , nécessairement connexe à  $A'$ .

2. Deuxième cas :  $\exists k \neq j$  et  $k \neq i$  tel que  $(3, k) \in A_{i,j}$ . On va considérer la transformation suivante. On conserve les sommets  $(3, k)$  et  $(4, k)$  dans  $A'$ . On déplace les sommets allant de  $(4, i)$  à  $(4, k - 1)$  vers un segment  $L_5^{i-1, k-2}$  dans  $A'$  et on déplace les sommets allant de  $(4, k + 1)$  à  $(4, j)$  vers un segment  $L_5^{k+2, j+1}$  dans  $A'$ .

- (a) Nombre de sommets.  $A_{i,j}$  et  $A'$  possèdent chacun  $j - i + 2$  sommets.
- (b) Couverture.  $A_{i,j}$  couvre au plus la sous-grille  $L_{4,5}C_{i,j}$  ainsi que les sommets  $(4, i - 1)$  et  $(4, j + 1)$ .  $A'$  couvre au moins la sous-grille  $L_{4,5}C_{i-1, j+1}$ . On a donc bien  $N(A_{i,j}) \subset N(A')$ .

Cette transformation ne constitue pas à elle seule un déplacement de tous les sommets de  $L_{3,4}$  vers  $L_5$ . On va donc voir dans un deuxième temps comment transformer les sous-ensembles connexes de  $L_{3,4}$  de la forme  $B_k^{4,5} \forall k \in \{1, \dots, m\}$ .  $\square$

Pour le cas d'un bâton de type  $B_i^{3,4}$  sur  $L_{3,5} \forall i \in \{1, \dots, m\}$  on peut faire les observations suivantes :

- Il couvre de façon unique les sommets  $(4, i - 1)$ ,  $(4, i)$  et  $(4, i + 1)$ , lorsqu'ils existent.
- Par utilisation de la Proposition-3, alors les sommets suivants appartiennent nécessairement à  $\bar{D}$  :
  1.  $(5, i - 2)$  et/ou  $(5, i - 1)$  et/ou  $(6, i - 1)$ .
  2.  $(5, i + 2)$  et/ou  $(5, i + 1)$  et/ou  $(6, i + 1)$ .
- Trivialement,  $B_i^{3,4}$  ne peut pas connecter  $L_2$  au reste de  $\bar{D}$ .

**Lemme 9.** *Soit  $D$  un CDSR constitué de  $L_2$  et d'un sous-ensemble maximal  $A_i$  de  $L_{3,5}$  tel que  $A_i = B_i^{3,4}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ . Si  $(5, i - 1) \in \bar{D}$  ou  $(5, i + 1) \in \bar{D}$  ou  $(6, i) \in \bar{D}$ , alors il existe  $D'$ , CDSR transformation valide de  $D$  tel que  $(3, i), (4, i) \notin D'$ .*

*Démonstration.* 1. Si  $(5, i - 1) \in \bar{D}$  ou  $(5, i + 1) \in \bar{D}$ . Sans perte de généralité, considérons  $(5, i + 1) \in \bar{D}$ , en ce cas on peut déplacer  $(3, i)$  vers  $(5, i - 1)$  et  $(4, i)$  vers  $(5, i)$ . Trivialement  $D'$  possède autant de sommet que  $D$ . Par ailleurs on a  $L_5^{i-1, i+1} \in D'$  qui assure la couverture de  $(4, i - 1)$ ,  $(4, i)$  et  $(4, i + 1)$ . Finalement comme  $(5, i + 1) \in \bar{D}$ , alors  $D'$  est bien connexe.

2. Si  $(6, i) \in \bar{D}$ . Dans un premier temps on va déplacer le sommet  $(3, i)$  vers le sommet  $(5, i)$ , on obtient un segment  $C_i^{4,6}$ , qu'on va pouvoir transformer en  $L_5^{i-1, i+1}$  dans un deuxième temps comme déjà vu précédemment dans le Lemme-7.  $D'$  comprend bien au plus autant de sommet que  $D$ . En outre les sommets  $(4, i - 1)$ ,  $(4, i)$  et  $(4, i + 1)$  sont bien couverts. Finalement, si  $(6, i)$  était connexe à un autre sommet de  $L_6$ , alors on peut appliquer le corollaire-4 pour s'assurer qu'on ne perd pas de connexion en  $(7, i)$ . Ainsi par application de la Proposition-3, la connexité globale de  $D'$  est bien assurée.

$\square$

Dans les propositions suivantes on va procéder à une disjonction de cas exhaustive sur les sous-ensembles maximaux qui se situent à côté d'un bâton de type  $B_i^{3,4}$ . Sans perte de généralité on s'intéressera au sous-ensemble maximal de  $L_{3,5}$  commençant directement en  $C_{i+1}$ ,  $C_{i+2}$  ou  $C_{i+3}$ . Pour alléger la démonstration, on ne considérera que les sous-ensembles maximaux de type segments de  $L_5$  ou bâtons. On considère que tous les autres types de sous-ensemble ont déjà été transformés en segment de  $L_5$ , puisqu'ils peuvent être transformés sans considération de la forme des sous-ensembles maximaux qui les suivent ou les précèdent. On notera toutefois qu'il y a pu y avoir une perte de connexité globale préalable, mais cela n'entrave pas la transformation des bâtons de type  $B_k^{3,4}$ ,  $\forall k \in \{1, \dots, m\}$ .

**Proposition 18.** *Soit  $D$  un CDSR constitué de  $L_2$  et d'un sous-ensemble maximal  $A_i$  de  $L_{3,5}$  tel que  $A_i = B_i^{3,4}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ . Si  $D$  est constitué d'un bâton  $B_{i+2}^{3,5}$  ou  $B_{i+2}^{4,5}$ , alors il existe  $D'$  dominant, tel que  $(3, i), (4, i) \notin D'$  et  $D'$  est soit moins un dominant, soit un CDSR.*

*Démonstration.* On déplace  $B_{i+2}^{3,5}$  ou  $B_{i+2}^{4,5}$  sur  $L_5^{i+1, i+3}$ . Comme  $(5, i+1) \in D'$ , alors d'après le Lemme-9, on peut abaisser  $B_i^{3,4}$  sur  $L_5^{i-1, i}$ . Le segment formé  $L_5^{i-1, i+3}$  est bien relié au reste de  $D'$  via  $(5, i-2)$  ou  $(6, i-1)$  dont au moins l'un des deux appartient à  $\overline{D}$ . Le segment  $L_5^{i-1, i+3}$  couvre tous les sommets  $L_4^{i-1, i+3}$  couverts initialement par  $D$ . En outre on a bien  $|D'| \leq |D|$ . Finalement, si  $B_{i+2}^{4,5} \in D$ , alors  $D'$  est un CDSR car ni  $B_{i+2}^{4,5}$ , ni  $B_i^{3,4}$ , ne connectaient  $L_2$  à  $\overline{D}$ . En revanche si  $B_{i+2}^{3,5} \in D$ , comme déjà vu on peut perdre la connexité de  $L_2$  avec le reste de  $D'$ , cette perte de connexité pourra être réparée lorsqu'on fera une transformation globale de  $L_{3,5}$ .  $\square$

**Proposition 19.** *Soit  $D$  un CDSR constitué de  $L_2$  et d'un sous-ensemble maximal  $A_i$  de  $L_{3,5}$  tel que  $A_i = B_i^{3,4}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ . Si  $D$  est constitué d'un bâton  $B_{i+3}^{3,5}$  ou  $B_{i+3}^{4,5}$ , alors il existe  $D'$  dominant, tel que  $(3, i), (4, i) \notin D'$  et  $D'$  est soit un dominant soit un CDSR.*

*Démonstration.* On déplace  $B_{i+3}^{3,5}$  ou  $B_{i+3}^{4,5}$  sur  $L_5^{i+2, i+4}$ . on va devoir faire une disjonction de cas en fonction de quel sommet de  $\overline{D}$  couvre le sommet  $(5, i+1)$ .

1. Si  $(5, i+1) \in D$ . Il suffit d'appliquer le Lemme-9.

2. Si  $(5, i + 2) \in D$ . Comme on peut déplacer un des sommets de  $B_{i+3}^{3,5}$  ou  $B_{i+3}^{4,5}$  vers  $(5, i + 2)$ , alors il reste un sommet en surplus que l'on peut déplacer où on le souhaite. On va choisir de le placer en  $(5, i + 1)$ . A nouveau, on peut appliquer le Lemme-9.
3. Si  $(6, i + 1) \in D$ . On doit encore faire une disjonction de cas suivant le voisinage de  $(6, i + 1)$  et par quel sommet il est relié à  $\bar{D}$ . Trivialement il n'est pas nécessaire de traiter les cas où  $(5, i + 1) \in D$  et  $(5, i + 2) \in D$ .
  - (a)  $(7, i + 1)$  relie  $(6, i + 1)$  à  $\bar{D}$ . En ce cas si on déplace  $(6, i + 1)$  sur  $(5, i + 1)$ , on ne perd pas de couverture, notamment en  $(7, i + 1)$  et on peut appliquer le résultat du Lemme-9.
  - (b)  $(6, i)$  relie  $(6, i + 1)$  à  $\bar{D}$ . En ce cas, on peut appliquer le résultat du Lemme-9.
  - (c)  $(6, i + 2)$  relie  $(6, i + 1)$  à  $\bar{D}$ . En ce cas, on se retrouve avec des sommets consécutifs sur  $L_6$ , et de la même façon que les transformations qui ont été faites pour aboutir au Corollaire-4, on peut remonter les sommets consécutifs de  $L_6$  sur  $L_5$ . En ce cas, on a  $(5, i + 1) \in D'$  et on peut appliquer le Lemme-9.

Dans tous les cas la couverture des sommets de  $L_4C_{i-1, i+4}$  est bien conservée. Par ailleurs, on a bien  $|D'| \leq |D|$ . Finalement, le segment formé sur  $L_5(i - 1, i + 4)$  est relié à  $\bar{D}$  par  $(5, i - 2)$  ou  $(6, i - 1)$ . Comme dans la Proposition-18, si  $B_{i+3}^{4,5} \in D$ , alors  $D'$  est un *CDSR*, mais si  $B_{i+3}^{3,5} \in D$ , alors il est possible que pour le moment  $L_2$  soit déconnecté d'une partie du reste de  $D'$ .  $\square$

**Proposition 20.** *Soit  $D$  un CDSR constitué de  $L_2$  et d'un sous-ensemble maximal  $A_i$  de  $L_{3,5}$  tel que  $A_i = B_i^{3,4}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ . Si  $D$  est constitué d'un segment maximal sur  $L_{3,5}$ ,  $L_5^{i+2, j}$   $\forall i + 2 \leq j \leq m$ . Alors il existe  $D'$  CDSR, tel que  $(3, i), (4, i) \notin D'$  et  $D'$  est au plus aussi grand que  $D$ .*

*Démonstration.* Dans un premier temps on déplace  $B_i^{3,4}$  vers  $L_5^{i-1, i}$ . Pour assurer la couverture de  $(4, i + 1)$ , on a besoin de déplacer un sommet sur  $(5, i + 1)$ , afin de former un segment  $L_5^{i-1, j}$ . On doit faire une disjonction de cas sur le sommet de  $L_7$  qui relie  $L_5^{i+2, j}$  au reste de  $\bar{D}$ .

1. Si  $L_5^{i+2, j}$  est relié à  $\bar{D}$  par un sommet  $(6, k)$  tel que  $i + 2 < k < j$ , alors on peut déplacer  $(6, k)$  sur  $(5, i + 1)$  et appliquer le Lemme-9. Par la Proposition-10, il ne

peut y avoir de sommets consécutifs sur  $L_6C_{i+2,j}$ , à ce titre il existe nécessairement un sommet sur  $(7, k)$  qui assurera la couverture perdue en  $(6, k)$ . Par ailleurs comme par hypothèse, il n'y a pas de sommets sur  $L_{3,4}C_{i+2,j}$ , alors le sommet  $(7, k)$  est bien relié à  $\bar{D}$ .

2. Si  $L_5^{i+2,j}$  est relié à  $\bar{D}$  par le sommet  $(6, i+2)$ , alors  $\exists(7, i+2) \in \bar{D}$ . En ce cas, on peut déplacer  $(6, i+2)$  en  $(5, i+1)$  sans perte de couverture et appliquer le Lemme-9.
3. Si  $L_5^{i+2,j}$  est relié à  $\bar{D}$  par le sommet  $(6, j)$ , alors on doit considérer le sous ensemble connexe situé juste après  $C_j$ . Notons que ce cas de figure est celui qu'il faut considérer lorsque  $i+2 = j$  et que  $L_5^{i+2}$  est donc un segment unitaire. Le sous-ensemble connexe qui suit  $L_5^{i+2,j}$  ne peut s'agir d'un segment de  $L_5$ , sinon il prolongerait  $L_5^{i+2,j}$  pour ne pas perdre de couverture en  $(4, j+3)$ . Il s'agit donc d'un bâton.

(a)  $\exists B_{j+2}^{3,5} \in \bar{D}$ . Ou  $\exists B_{j+2}^{4,5} \in \bar{D}$ . Dans les deux cas on va appliquer la transformation usuelle rattachée à ce type de bâton, que l'on transforme en  $L_5^{j+1,j+3}$ . Cette transformation consiste à prolonger le segment  $L_5^{i+2,j}$  en un segment  $L_5^{i+2,j+3}$  au moins raccordé à  $\bar{D}$  par  $(6, j)$ . On rappelle que la transformation d'un bâton de type  $B_{j+2}^{3,5}$  peut aboutir à la formation d'un cycle.

(b)  $\exists B_{j+2}^{3,4} \in \bar{D}$ . En ce cas, on va déplacer  $B_{j+2}^{3,4}$  vers  $L_5^{j+2,j+3}$ , et on pourra déplacer  $(6, j)$  en  $(5, j+1)$  et appliquer le Lemme-9. Le nouvel sous-ensemble connexe ainsi formé est relié à  $\bar{D}$  par  $(5, j+4)$  ou  $(6, j+3)$ . On se retrouve donc dans un des cas étudiés précédemment. Or, comme vu dans un Lemme précédent, les bâtons extrêmes de type  $B_k^{3,4}$  pour  $k = m-1$  ou  $k = m$ , se transforment immédiatement en segment.

Dans les trois cas on se ramène donc à un segment  $L_5^{i+2,j'}$  dont le raccordement à  $\bar{D}$  se fait sur un certain sommet  $(6, k')$  avec  $i+2 \leq k' \leq j'$ . Et on pourra déplacer  $(6, k')$  en  $(5, i+1)$  puis appliquer le Lemme-9.

□

**Proposition 21.** *Soit  $D$  un CDSR constitué de  $L_2$  et d'un sous-ensemble maximal  $A_i$  de  $L_{3,5}$  tel que  $A_i = B_i^{3,4}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ . Si  $D$  est constitué d'un sous-ensemble maximal de*

CHAPITRE 4. RÉSULTATS THÉORIQUES SUR LES PROBLÈMES *MCDS* ET *MCCS* DANS LES GRILLES

---

$L_{3,5}$  qui soit un bâton  $B_{i+2}^{3,4}$ , alors il existe  $D'$  CDSR, tel que  $(3, i), (4, i) \notin D'$  et  $D'$  est au plus aussi grand que  $D$ .

*Démonstration.* Les deux bâtons  $B_i^{3,4}$  et  $B_{i+3}^{3,4}$  ne peuvent pas être transformés directement. On va devoir considérer le sous-ensemble connexe qui suit directement  $B_{i+3}^{3,4}$ . S'il s'agit d'un des sous-ensembles connexes vus précédemment, on arrivera à former un segment  $L_5^{i+2,j}$  pour  $i+4 \leq j \leq m$ . Sinon, on peut avoir une succession de bâtons de type  $B_k^{3,4}$ , jusqu'à aboutir à l'extrémité de la grille. Auquel cas, soit  $B_{m-1}^{3,4} \in D$ , soit  $B_m^{3,4} \in D$ . Dans le premier cas, vu que  $(5, m)$  n'est pas couvert, alors  $\exists(6, m) \in D$  ou  $\exists(5, m) \in D$ , ce dernier cas étant trivial. Si  $(6, m) \in D$ , on peut remonter  $(6, m)$  en  $(5, m)$  étant donné qu'on est en fin de grille et appliquer la transformation du Lemme-9.  $B_m^{3,4} \in D$ . On peut directement transformer  $B_m^{3,4}$  en  $L_5^{m-1,m}$ . Dans tous les cas on applique les transformations successivement pour aboutir à chaque fois à un bâton suivi d'un segment de  $L_5$ , cas qui a déjà été traité dans la Proposition-20.  $\square$

**Théorème 3.** Soit  $D$  un CDSR constitué de  $L_2$  et d'au moins un sous-ensemble maximal  $A_i$  de  $L_{3,5}$  tel que  $A_i = B_i^{3,4}, \forall i \in \{1, \dots, m\}$ , ou bien constitué d'au moins un sous-ensemble connexe maximal de  $L_{3,5}$  qui n'est pas un bâton, alors il existe  $D'$ , CDSR au moins aussi grand que  $D$  comportant un seul sommet sur  $L_3$ .

*Démonstration.* L'ensemble des transformations étudiées dans les Propositions précédentes aboutissent aux mêmes cas de figure : soit la transformation d'un sous-ensemble  $A_{i,j}$  de  $L_{3,5}$  qui n'est pas un bâton de type  $B_k^{3,5}$  ou  $B_k^{4,5}$  aboutit à une transformation valide, soit on aboutit à un ensemble dominant  $D'$  déconnecté, dont une des composantes connexes induites par ces sommets est constituée d'un cycle. Dans tous les cas, on peut abaisser les différents sous-ensembles maximaux de  $L_{3,5}$  sur  $L_5$  sauf un qui possède nécessairement un sommet sur  $L_3, L_4$  et  $L_5$ . On va considérer un certain sous-ensemble  $A_{i,j}$  qui correspond à ces critères et tel que  $C_i$  est le plus petit possible. On a deux cas de figures à considérer :

- $A_{i,j}$  est un bâton  $B_i^{3,5}$ . D'après les propositions précédentes, la transformation des autres sous-ensembles maximaux de  $L_{3,5}$  nous donne un segment de  $L_5 L_5^{i+1,m}$ , si  $i = 1$  ou  $i = 2$ , ou alors deux segments de  $L_5 L_5^{i+1,m}$  et  $L_5^{1,i-1}$ . Par ailleurs, cette

transformation aboutit à un sous-ensemble de sommet  $D'$  qui est un *CDSR*, ou qui est un dominant dont le sous-graphe induit comprend deux ou trois composantes connexes, dont celles qui contiennent les segments de  $L_5$  sont constituées d'un cycle. Dans le premier cas on a bien abouti à un *CDSR* ne comprenant qu'un sommet sur  $L_3$ . Dans le second cas, étant donné que par la Proposition-10, il ne peut y avoir de sommets consécutifs sur  $L_6$ , alors on déplace les sommets de  $L_6$  constitutif des cycles, vers  $(5, i + 1)$  (et si besoin vers  $(5, i - 1)$ ), afin de rétablir la connexité perdue.

- Si  $A_{i,j}$  est un sous-ensemble connexe quelconque. On va d'abord transformer  $A_{i,j}$  de la façon suivante, sachant qu'il comporte au moins  $j - i + 3$  sommets. On forme un bâton  $B_k^{3,5}$  pour  $i \leq k \leq j$ , tel que  $(5, k) \in D$ . On par ailleurs, on déplace le reste des sommets  $(j - i)$ , de sorte à former deux segments :  $L_5^{i-1, k-2}$  et  $L_5^{k+2, j+1}$ , nécessairement connectés aux autres segments déjà constitués, d'après la Proposition-3. On se retrouve ainsi dans le même cas que celui étudié précédemment.

□

Au final, à la suite de transformations valides successives dont on a prouvé qu'elles étaient transitives par la Proposition-2, on a prouvé qu'à partir d'un *CDS* quelconque (a fortiori minimal) on peut aboutir à un *CDSR*. Lorsque  $m \neq 0 \pmod{3}$  ou lorsque  $m = 0 \pmod{3}$  et qu'il existe au moins un segment sur  $L_2$ , alors ce *CDSR* est constitué de tout le segment  $L_2$  et d'aucun sommet sur  $L_1$ . Ce *CDSR* peut ensuite être transformé de sorte à n'avoir aucun sommet consécutif sur  $L_3$ , et finalement, si ce *CDSR* ne comprend pas que des bâtons de type  $B_k^{3,4}$  et  $B_k^{4,5}$  séparés par exactement deux colonnes, alors on peut le transformer de sorte à n'avoir qu'un seul sommet sur  $L_3$ . Ainsi, avec le Théorème-3 et le Lemme-7, on aboutit au résultat suivant.

**Théorème 4.** *Soit  $D$  un *CDSR* comprenant tout  $L_2$ , si  $m \neq 0 \pmod{3}$  ou si  $m = 0 \pmod{3}$  et ne comprend pas que des bâtons sur  $L_{3,5}$  séparés par deux colonnes, alors il existe  $D'$  tel que  $D' \preceq D$  et  $D'$  ne comprend qu'un seul sommet sur  $L_3$ .*



#### 4.3.4 Calcul de bornes inférieures dans l'optique d'une preuve de polynomialité.

Si on admet que le résultat obtenu à l'issue de notre conjecture située en section-4.3.2, est vraie, alors cela nous permet d'aboutir au résultat général suivant :

1. Lorsque  $m \not\equiv 0 \pmod{3}$  alors il existe un *MCDS* qui ne comprend qu'un sommet sur  $L_3$ .
2. Lorsque  $m \equiv 0 \pmod{3}$ , alors il existe un *MCDS* qui soit ne comprend qu'un sommet sur  $L_3$ , soit ne comprend que des bâtons sur  $L_{1,3}$ , soit comprend le segment  $L_2$  et des sommets isolés sur  $L_3$  espacés toutes les deux colonnes. Cette dernière configuration ne nous permettant pas de conclure en ce cas.

Par ailleurs, le théorème-4 nous permet directement d'appliquer le résultat de [Li and Toulouse 2010] explicité en tout début du présent chapitre. En effet, s'il existe un unique sommet sur  $L_3$  dans un *CDS*  $D$ , alors celui-ci est nécessairement composé d'un sous-ensemble connexe sur la sous-grille  $L_{1,2}$  et d'un sous-ensemble connexe sur la sous-grille  $L_{4,n}$ , ces deux sous-ensemble connexes étant au mieux minimums. A ce titre, on peut désormais calculer des bornes inférieures pour les grilles pour lesquelles cela est possible.

Ainsi, comme vu en début de chapitre  $D^*(2, m) = m$  et  $D^*(2, n) = n$  on va donc pouvoir établir les relations suivantes, pour une grille  $G(n, m)$  telle que  $n, m \not\equiv 0 \pmod{3}$  et  $n, m \geq 4$ , alors :

$$D^*(n, m) \geq m + 1 + D^*(n - 3, m)$$

$$D^*(n, m) \geq n + 1 + D^*(n, m - 3)$$

Par ailleurs, pour une grille telle que  $n \equiv 0 \pmod{3}$  et  $m \not\equiv 0 \pmod{3}$ , on obtient la borne inférieure suivante :

$$D^*(n, m) \geq m + 1 + D^*(n - 3, m)$$

On peut appliquer une récursivité à ces relations afin d'obtenir des bornes inférieures exactes. On va différencier les cas en fonction des valeurs de  $m$  et de  $n$ .

1.  $n, m \equiv 2 \pmod{3}$ . En ce cas soit  $n = 3q + 2$  et  $m = 3k + 2$ . On peut considérer qu'une grille  $G(n, m)$  est une grille  $G(5, 5)$ , à laquelle on a rajouté  $(q - 1)$  fois trois lignes de 5 colonnes pour obtenir une grille  $G(3q + 2, 5)$ , puis à laquelle on a rajouté  $(k - 1)$  fois trois colonnes de  $(3q + 2)$  lignes. Ces rajouts de 3 lignes et de trois longueurs successives étant constitué d'une part de  $5 + 1$  sommets, puis de  $3q + 2 + 1$  sommets. Sachant que  $D^*(5, 5) = 11$ , tel que calculé par nos programmes mathématiques. On a donc :

$$\begin{aligned} D^*(3q + 2, 3k + 2) &\geq (3q + 3)(k - 1) + D^*(3q + 2, 5) \\ D^*(3q + 2, 3k + 2) &\geq (3q + 3)(k - 1) + 6(q - 1) + D^*(5, 5) \\ D^*(3q + 2, 3k + 2) &\geq 3qk - 3q + 3k - 3 + 6q - 6 + 11 \\ D^*(3q + 2, 3k + 2) &\geq 3qk + 3q + 3k + 2 \end{aligned}$$

2. Soit  $n = 3q + 2$  et  $m = 3k + 1$  (respectivement  $n = 3q + 1$  et  $m = 3k + 2$ ). De la même façon qu'explicité dans le paragraphe précédent, on obtient le calcul de bornes suivant, en démarrant cette fois-ci par une grille  $G(5, 4)$  dont l'optimal vaut  $D^*(5, 4) = 9$  :

$$\begin{aligned} D^*(3q + 2, 3k + 1) &\geq (3q + 3)(k - 1) + D^*(3q + 2, 4) \\ D^*(3q + 2, 3k + 1) &\geq (3q + 3)(k - 1) + 5(q - 1) + D^*(5, 4) \\ D^*(3q + 2, 3k + 1) &\geq 3qk - 3q + 3k - 3 + 5q - 5 + 9 \\ D^*(3q + 2, 3k + 1) &\geq 3qk + 2q + 3k + 1 \end{aligned}$$

3. Si  $n = 3q + 1$  et  $m = 3k + 1$ . Cette fois-ci on prend pour point de départ une grille  $G(4, 4)$  dont on sait que l'optimal vaut  $D^*(4, 4) = 7$ . On obtient ainsi les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} D^*(3q + 1, 3k + 1) &\geq (3q + 2)(k - 1) + D^*(3q + 1, 4) \\ D^*(3q + 1, 3k + 1) &\geq 3qk - 3q + 2k - 2 + 5(q - 1) + D^*(4, 4) \\ D^*(3q + 1, 3k + 1) &\geq 3qk - 3q + 2k - 2 + 5q - 5 + 7 \\ D^*(3q + 1, 3k + 1) &\geq 3qk + 2q + 2k \end{aligned}$$

4. Si  $n \equiv 0 \pmod{3}$  et  $m \not\equiv 0 \pmod{3}$  (ou réciproquement  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$  et  $m \equiv 0 \pmod{3}$ ). On pose  $n = 3q$  et  $m = 3k + \alpha$  avec  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Par le théorème de [Li and Toulouse 2010], on connaît la valeur optimale d'une grille  $G(6, m)$  pour  $m \not\equiv 0 \pmod{3}$ .  $D^*(6, m) = 2m + 2 = 6k + 2\alpha + 2$ . Pour obtenir une borne de  $D^*(n, m)$ , il suffit de considérer qu'une grille  $G(n, m)$  s'obtient par  $q - 2$  rajouts successifs de 3 lignes de  $m$  colonnes. On obtient donc l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
 D^*(3q, 3k + \alpha) &\geq (q - 2)(3k + \alpha + 1) + D^*(6, m) \\
 D^*(3q, 3k + \alpha) &\geq 3kq + q(\alpha + 1) - 6k - 2\alpha - 2 + 6k + 2\alpha + 2 \\
 D^*(3q, 3k + \alpha) &\geq 3kq + q(\alpha + 1) \\
 D^*(3q, 3k + \alpha) &\geq q(3k + \alpha + 1) \\
 D^*(3q, 3k + \alpha) &\geq qm + q
 \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned}
 D^*(3q, 3k + 1) &\geq qm + q \\
 D^*(3q, 3k + 2) &\geq qm + q
 \end{aligned}$$

Si l'on se réfère au Tableau-4.1 des bornes supérieures fournies par notre heuristique, on se rend compte qu'elles sont égales aux bornes inférieures fournies par notre démonstration sur les propriétés d'une solution optimale.

On peut en déduire le théorème suivant.

**Théorème 5.** *Soit  $G(n, m)$  une grille telle que  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$  ou  $m \not\equiv 0 \pmod{3}$  et  $n, m \geq 4$ , alors le nombre de sommet d'un MCDS,  $|D^*(n, m)|$  est obtenu immédiatement par une simple formule, tandis que la construction d'une solution  $D^*(n, m)$  optimale se fait en un temps polynomial.*

*Démonstration.* On déduit logiquement ce résultat du fait que les bornes supérieures et inférieures exhibées dans ce chapitre coïncident. Par ailleurs, comme on l'a vu dans la

section sur l'heuristique, celle-ci construit une solution en un temps polynomial si tant est qu'on considère que la taille des données de notre grille se code comme un graphe classique, c'est à dire de façon matricielle.  $\square$

#### 4.4 Liens entre couverture et connexité dans la couverture connexe minimum

Cette partie est dédiée à la recherche d'une condition suffisante sur les valeurs respectives de  $R_{com}$  et  $R_{capt}$ ,  $R_{com} \geq R_{capt}$ , de sorte qu'un dominant de  $G_{capt}$  induise un sous-graphe connexe dans  $G_{com}$  quand les cibles sont déployées suivant un motif régulier. On parle de motif  $d$ -régulier lorsque chaque cible est à une distance euclidienne  $d \leq R_{capt}$  de toutes les autres cibles dans son voisinage de captation.

Pour la couverture d'une surface non discrétisée et sans restriction sur les valeurs de  $R_{com}$  et  $R_{capt}$  Wang et al. [Wang, Xing, Zhang, Lu, Pless, and Gill 2003] ont prouvé que lorsque le rayon de communication  $R_{com}$  est au moins deux fois plus grand que le rayon de captation  $R_{capt}$ , la connectivité est automatiquement assurée lorsque la couverture totale de la surface est atteinte. Ce résultat n'est applicable que dans le cas continu d'une surface à couvrir et il ne peut pas être généralisé dans le cas de la discrétisation des cibles à couvrir. En effet, on prouvera dans les Propositions 22 et 23 qu'il est nécessaire d'avoir un rayon de communication strictement supérieur à deux fois le rayon de captation si l'on souhaite que la couverture des cibles assure la connectivité des capteurs placés.

**Proposition 22.** *Dans un réseau de capteurs  $\mathcal{R} = (G_{capt}, G_{com})$ , tel que les cibles sont déployées suivant une grille à motifs carrés, si  $R_{com} \geq 2R_{capt}$ , alors un ensemble dominant de  $G_{capt}$  n'induit pas nécessairement un sous-graphe connexe dans  $G_{com}$ .*

*Démonstration.* On se propose de construire un ensemble dominant pour  $G_{capt}$  qui n'induit pas de sous-graphe connexe dans  $G_{com}$  lorsque  $R_{com} = 2R_{capt}$ .

La figure 4.15 montre un exemple de placement de 13 capteurs qui constituent un ensemble dominant dans une grille  $7 \times 7$  lorsque  $R_{capt} = 1$ . Lorsque  $R_{com} = 2 * R_{capt} = 2$ , ce sous-ensemble de capteurs induit un sous-graphe de  $G_{com}$  composé de 8 ensembles connexes au lieu d'un seul. Ce sous-graphe de  $G_{com}$  est illustré dans la figure 4.15 par les liens de

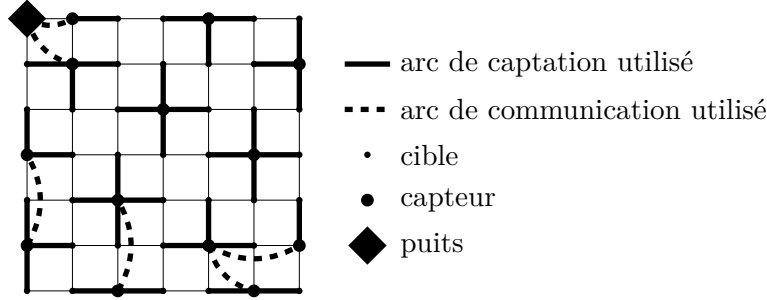


FIGURE 4.15 – Une solution présentant une couverture non connexe dans une grille 7x7 avec  $R_{capt} = 1$  and  $R_{com} = 2$ .

communication entre chaque paire de capteurs qui apparaissent en gras. On prouve ainsi que le résultat de [Wang, Xing, Zhang, Lu, Pless, and Gill 2003] n'est pas applicable au cas discret.

□

Dans la suite de cette section, on se propose d'étendre le résultat de Wang et al. au cas d'une couverture discrétisée des cibles lorsque les rayons sont des entiers et lorsque chaque paire de cibles adjacentes de  $G_{capt}$  est constituée de cibles séparées d'une distance  $d$ .

**Proposition 23.** *Dans un réseau de capteurs  $\mathcal{R} = (G_{capt}, G_{com})$  où les cibles sont déployées selon un motif  $d$ -régulier, si  $R_{com} \geq 2R_{capt} + d$ , alors un ensemble dominant de  $G_{capt}$  entraîne automatiquement un sous-graphe connexe dans  $G_{com}$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $R_{com} = 2R_{capt} + d$ . Considérons un réseau de capteurs  $\mathcal{R} = (G_{capt}, G_{com})$  ainsi qu'un ensemble dominant  $S$  de  $G_{capt}$ . En raisonnant par l'absurde, on suppose que le sous-graphe induit par  $S$  n'est pas connexe dans  $G_{com}$ . Ainsi, il existe au moins une paire de cibles adjacentes dans  $G_{capt}$  que l'on notera respectivement  $a$  et  $b$  (avec ainsi  $d(a, b) = d$ ) qui ne sont pas couvertes par la même composante connexe.

Soit  $x$  (resp.  $y$ ), un capteur qui couvre la cible  $a$  (resp.  $b$ ) et qui appartient à une composante connexe nommée  $C_a$  (resp.  $C_b$ ).

Comme  $x$  et  $y$  couvrent respectivement les cibles  $a$  et  $b$ , on a les inégalités suivantes :  $d(x, a) \leq R_{capt}$  et  $d(y, b) \leq R_{capt}$ . Or, d'après les inégalités triangulaires respectées par les distances euclidiennes,  $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y)$ . Ainsi,  $d(x, y) \leq 2R_{capt} + d$ , ce qui signifie que  $C_a$  et  $C_b$  sont connectées. Cela entre en contradiction avec l'hypothèse de départ.  $\square$

Des propositions 22 et 23, nous pouvons déduire le résultat suivant.

**Corollaire 5.** *Dans un réseau de capteurs  $\mathcal{R} = (G_{capt}, G_{com})$  tel que les cibles sont déployées suivant un motif  $d$ -régulier, si  $R_{com} \geq R_{capt} + d$  alors chaque solution du problème de  $k$ -couverture est également une solution du problème de  $k$ -couverture connexe.*

*Démonstration.* Chaque solution du problème de  $k$ -couverture dans  $G_{capt}$  est également une solution pour le problème de la 1-couverture. On peut donc appliquer la Proposition 23 pour conclure que chaque solution induit un sous-graphe connexe de  $G_{com}$ .  $\square$

Ainsi pour les grilles, la couverture implique la connexité quand  $R_{com} \geq 2R_{capt} + 1$ .

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre a fait principalement l'objet de l'étude du problème *MCDS* dans les grilles à motif carré pour  $R_{capt} = R_{com} = 1$ . Dans ce contexte, nous avons tout d'abord présenté une heuristique *HCDS* renvoyant toujours une solution réalisable pour n'importe quelle taille de grille  $G(n, m)$ , cette solution étant meilleure que ce qui a été trouvé actuellement dans la littérature.

Dans un second temps, nous nous sommes concentrés sur l'étude de la structure d'une solution optimale aux bords de la grille. Ceci nous a permis de prouver qu'une solution optimale pouvait toujours se construire à l'aide de segments et de bâtons sur les deux premières lignes de la grille. Puis, nous avons conjecturé qu'une solution optimale pouvait toujours se construire de sorte qu'il n'y ait qu'un seul sommet sur la troisième ligne lorsque  $m \neq 0 \pmod{3}$ . Cette conjecture nous a permis de trouver une borne inférieure pour un *MCDS* dans ce cas, borne inférieure qui correspond à celle retournée par notre heuristique.

Nous inférons par ailleurs que celle-ci renvoie toujours une solution optimale, quelle que soit la taille de la grille, ceci étant confirmé par les résultats expérimentaux pour des tailles de grille allant jusqu'à 144, cf Chapitre-3.

Finalement, nous avons obtenu un résultat pour le *MCCS* dans les grilles à motif carré, qui nous permet de déterminer pour n'importe quelle valeur de  $R_{capt}$ , quelle devrait être la valeur de  $R_{com}$  pour que la couverture du terrain entraîne la connexité des capteurs entre eux.

Ces divers résultats pourront servir de base à des recherches complémentaires : on peut s'en inspirer pour engendrer des coupes dans les programmes mathématiques, on peut également chercher à trouver de nouvelles heuristiques pour de nouvelles valeurs de  $R_{capt}$  et  $R_{com}$ .

# Conclusion

A l'issue de notre état de l'art sur les problèmes de couverture et de connexité dans les réseaux de capteurs, nous avons exhibé les liens existant entre les différents problèmes dérivés de celui de la couverture connexe minimum. Nous avons également proposé une modélisation originale, en théorie des graphes, d'un réseau de capteurs, en introduisant un graphe de captation et un graphe de communication. Ceci nous permet de traiter de façon plus formelle les problèmes de graphe décrits dans la littérature.

Par ailleurs, nous avons proposé deux nouvelles formulations mathématiques en variables mixtes dont la résolution par le solveur Cplex donne des résultats bien meilleurs ou équivalents que ceux proposés par deux articles récents de la littérature dont nous avons adapté les formulations. Nos formulations sont en effet applicables quels que soient les graphes et les hypothèses que l'on fait sur les rayons de communication, de captation, et le degré de couverture que l'on souhaite imposer. Par ailleurs nous arrivons à résoudre des instances allant d'une centaine de nœuds pour les instances les plus difficiles sur les grilles jusqu'à plus de deux cents nœuds pour les instances les plus faciles à résoudre pour le solveur. Comme nous l'avons vu dans le Chapitre-1, cela correspond à des tailles réelles de réseaux de capteurs.

D'autre part, dans le cas du problème *MCDS* dans les grilles à motif carré, pour  $R_{capt} = R_{com} = 1$ , nous avons exhibé une heuristique renvoyant une solution réalisable pour toutes les valeurs de  $n$  et de  $m$ , ce, en un temps polynomial en fonction de la taille de la grille. Après une étude exhaustive de la structure d'une solution au bord de la grille nous avons détaillé une ébauche de preuve nous permettant de conjecturer que la solution retournée par l'heuristique est optimale dans la majorité des cas, c'est-à-dire lorsque  $m \neq 0 \pmod{3}$  ou  $n \neq 0 \pmod{3}$ . En réalité, nous conjecturons que l'heuristique renvoie toujours une



## CONCLUSION

---

solution optimale, des résultats expérimentaux viennent confirmer cette hypothèse pour des tailles de grille allant jusqu'à 144 nœuds.

Aussi, il peut être intéressant d'utiliser notre étude sur les bords de la grille afin de trouver des coupes pour les formulations mathématiques, permettant de résoudre de façon exacte de plus grandes instances. Ainsi, à défaut de pouvoir prouver la polynomialité du *MCDS* dans les grilles à motif carré quand  $R_{capt} = R_{com} = 1$ , on peut ainsi d'ores et déjà se servir des résultats intermédiaires prouvés afin d'injecter des coupes dans les modèles mathématiques étudiés. On peut également casser les symétries et fixer certaines variables dans les coins de la grille. Dans le contexte du *MCCS* où  $R_{capt} \neq R_{com}$ , on notera que la forme des solutions optimales retournées par les solveurs, comme les solutions pour le problème *MCDS* lorsque  $R_{com} = R_{capt} = 1$ , semblent suivre un motif régulier qui peut donner de bonnes bases pour des heuristiques. De plus, étant donné la contrainte imposée par les bords de la grille aux sommets d'un *MCDS*, on peut supposer qu'il en va de même pour ceux d'un *MCCS*. Il est donc envisageable qu'au moins pour certaines valeurs de  $R_{com}$  et de  $R_{capt}$ , le problème *MCCS* dans les grilles à motifs carré soit également polynomial.

D'autres perspectives à plus ou moins court terme sont envisageables notamment dans l'étude de réseaux de capteurs ayant des structures différentes des grilles à motif carré. Ainsi on considérera l'ajout de la prise en compte d'obstacles et de trous dans les grilles, ce qui est assez simple à modéliser puisqu'il s'agit juste de changer le voisinage initial. On peut vouloir également considérer un réseau de capteurs hétérogènes avec des coûts de déploiement différents et des valeurs de  $R_{com}$  et  $R_{capt}$  différentes selon les capteurs. On peut également s'intéresser à des capteurs dont les portées de captation et de communication sont cette fois-ci variables au lieu d'être fixes, à des cibles placées sur des structures de grille triangulaires ou hexagonales, ou encore à des coûts différents relativement au placement de capteurs à certaines positions.

Finalement, l'étude des problèmes de minimisation de la consommation énergétique décrite dans le Chapitre-2 et plus particulièrement de ceux considérant la maximisation de la durée de vie du réseau dans le cadre de capteurs homogènes, repose sur des techniques de mise en veille des capteurs et plus précisément sur une formulation étendue qui intègre l'alternance de couvertures connexes valides. De façon intuitive, ces couvertures doivent

## CONCLUSION

---

comporter un nombre de capteurs limité pour ne pas user leur batterie inutilement. Ainsi, ces couvertures pourraient être engendrées par notre heuristique. En effet, celle-ci pourrait être adaptée pour engendrer plusieurs couvertures connexes valides que nous conjecturons comme étant minimales en termes de nombre de capteurs mais également en termes de consommation énergétique globale consommée par la couverture.

Finalement, une solution optimale du problème de maximisation de la durée de vie du réseau ne se contente pas d'être une simple alternance de *MCDS* étant donné que la couverture des bords de la grille entraîne le fait que certains sommets sont plus sélectionnés que d'autres dans l'ensemble des *MCDS* possibles. C'est, par exemple, trivialement le cas lorsque  $R_{com} = R_{capt} = 1$  : la couverture du sommet  $(1, 1)$  par les sommets  $(2, 1)$  ou  $(1, 2)$ , force l'un de ces deux sommets à faire toujours partie d'un *CDS* quelconque, quelles que soient les valeurs de  $m$  et de  $n$ . Cette considération nous amène par ailleurs à formuler une borne supérieure pour le problème de maximisation de la durée de vie d'un réseau de capteurs homogènes dans les grilles à motif carré : cette durée de vie est au plus aussi grande que l'alternance des sommets dans le voisinage de captation d'un des bords de la grille.

Pour conclure, il reste encore beaucoup de travaux à mener tant en termes d'étude de complexité que de formulation mathématique pour les réseaux de capteurs, ne serait-ce que dans le cas où les cibles ont été discrétisées sous forme de grille à motif carré.

## CONCLUSION

---

# Bibliographie

- A. Alfieri, A. Bianco, P. Brandimarte, and C. F. Chiasserini. Maximizing system lifetime in wireless sensor networks. *European Journal of Operational Research*, 181(1) :390 – 402, 2007. 59, 62, 64, 66, 75
- C. Alippi, R. Camplani, C. Galperti, and M. Roveri. A robust, adaptive, solar-powered wsn framework for aquatic environmental monitoring. *IEEE Sensors Journal*, 11(1) : 45–55, Jan 2011. 17
- Tariq Alsbou'i, Mohammad Hammoudeh, Zuhair Bandar, and Andy Nisbet. An overview and classification of approaches to information extraction in wireless sensor networks. In *SENSORCOMM '11 : Proceedings of the 2011 Fifth International Conference on Sensor Technologies and Applications, Nice/Saint Laurent du Var, France*, pages 255–260, 08 2011. 25
- Y. P. Aneja, R. Chandrasekaran, X. Li, and K. P. K. Nair. A branch-and-cut algorithm for the strong minimum energy topology in wireless sensor networks. *European Journal of Operational Research*, 204(3) :604 – 612, 2010. 50, 75
- Fariba Aznoli and Nima Jafari Navimipour. Deployment strategies in the wireless sensor networks : Systematic literature review, classification, and current trends. *Wireless Personal Communications*, 95(2) :819–846, Jul 2017. 29
- Behnam Behdani, Young Sang Yun, J. Cole Smith, and Ye Xia. Decomposition algorithms for maximizing the lifetime of wireless sensor networks with mobile sinks. *Computers and Operations Research*, 39(5) :1054 – 1061, 2012. 62, 66, 75
- Claude Berge. *Graphes*. Gauthiers-Villars, Paris, France, 1983. 33

- Sergio Bermudo, Juan C. Hernández-Gómez, and José M. Sigarreta. On the total  $k$ -domination in graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 38(1) : 301–317, 2018. URL <https://content.sciendo.com/view/journals/dmgt/38/1/article-p301.xml>. 37, 38
- Sudipta Bhattacharjee, Primit Roy, Soumalya Ghosh, Sudip Misra, and Mohammad S. Obaidat. Wireless sensor network-based fire detection, alarming, monitoring and prevention system for bord-and-pillar coal mines. *Journal of Systems and Software*, 85(3) :571 – 581, 2012. 17
- Paul Bonsma. Max-leaves spanning tree is APX-hard for cubic graphs. *Journal of Discrete Algorithms*, 12 :14–23, 2012. 68
- Xiuzhen Cheng, B. Narahari, R. Simha, M. X. Cheng, and D. Liu. Strong minimum energy topology in wireless sensor networks : NP-completeness and heuristics. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2(3) :248–256, 2003. 29, 44
- B. Das and V. Bharghavan. Routing in ad-hoc networks using minimum connected dominating sets. In *Communications, ICC '97 Montreal, Towards the Knowledge Millennium*, volume 1, pages 376–380. IEEE, 1997. 21, 39, 68
- Martin Desrochers and Gilbert Laporte. Improvements and extensions to the miller-tucker-zemlin subtour elimination constraints. *Operations Research Letters*, 10(1) :27–36, 1991. ISSN 0167-6377. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167637791900832>. 91
- Isabel Dietrich and Falko Dressler. On the lifetime of wireless sensor networks. *ACM Trans. Sen. Netw.*, 5(1) :1–39, February 2009. ISSN 1550-4859. 30
- L. Doherty, K. S. J. Pister, and L. El Ghaoui. Convex position estimation in wireless sensor networks. In *Proceedings IEEE INFOCOM 2001. Conference on Computer Communications. Twentieth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Society (Cat. No.01CH37213)*, volume 3, pages 1655–1663, 2001. 29
- Donald Erlenkotter. A dual-based procedure for uncapacitated facility location. *Operations Research*, 26(6) :992–1009, 1978. ISSN 0030364X, 15265463. 55

- Etimad Fadel, V.C. Gungor, Laila Nassef, Nadine Akkari, M.G. Abbas Malik, Suleiman Almasri, and Ian F. Akyildiz. A survey on wireless sensor networks for smart grid. *Computer Communications*, 71 :22 – 33, 2015. 17
- Neng Fan and Jean-Paul Watson. Solving the connected dominating set problem and power dominating set problem by integer programming. In *Combinatorial Optimization and Applications : 6th International Conference (COCO A)*, volume 7402 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 371–383. Springer, 2012. doi : 10.1007/978-3-642-31770-5\_33. 70, 75, 76, 77, 81, 85, 86, 90, 92
- E. Fata, S. L. Smith, and S. Sundaram. Distributed dominating sets on grids. In *2013 American Control Conference*, pages 211–216, 2013. 70
- Robert Fourer, David M. Gay, and Brian W. Kernighan. A modeling language for mathematical programming. *Management Science*, 36(5) :519–554, 1990. doi : 10.1287/mnsc.36.5.519. 92
- M. Franceschinis, L. Gioanola, M. Messere, R. Tomasi, M. A. Spirito, and P. Civera. Wireless sensor networks for intelligent transportation systems. In *VTC Spring 2009 - IEEE 69th Vehicular Technology Conference*, pages 1–5, April 2009. 17
- Tetsuya Fujie. An exact algorithm for the maximum leaf spanning tree problem. *Comput. Oper. Res.*, 30(13) :1931–1944, 2003. 69
- Tetsuya Fujie. The maximum-leaf spanning tree problem : Formulations and facets. *Networks*, 43(4) :212–223, 2004. 69
- Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, USA, 1979. 35, 37, 41, 59, 67
- Bezalel Gavish. Topological design of centralized computer networks—formulations and algorithms. *Networks*, 12(4) :355–377, 1982. 81
- Bernard Gendron, Abilio Lucena, Alexandre Salles da Cunha, and Luidi Simonetti. Benders

- decomposition, branch-and-cut, and hybrid algorithms for the minimum connected dominating set problem. *INFORMS Journal on Computing*, 26(4) :645–657, 2014. 69, 75
- Daniel Gonçalves, Alexandre Pinlou, Michaël Rao, and Stéphan Thomassé. The domination number of grids. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 25(3) :1443–1453, 2011. 67, 69, 70, 75, 76
- Sudipto Guha and Samir Khuller. Approximation algorithms for connected dominating sets. *Algorithmica*, 20(4) :374–387, 1998. 68
- Evren Guney, Necati Aras, I. Kuban Altinel, and Cem Ersoy. Efficient integer programming formulations for optimum sink location and routing in heterogeneous wireless sensor networks. *Computer Networks*, 54(11) :1805–1822, 2010. 43, 52, 56, 62, 75
- Tian He, Chengdu Huang, Brian M. Blum, John A. Stankovic, and Tarek Abdelzaher. Range-free localization schemes for large scale sensor networks. In *Proceedings of the 9th Annual International Conference on Mobile Computing and Networking*, MobiCom '03, pages 81–95. ACM, 2003. ISBN 1-58113-753-2. 29
- I. Kadayif, M. Kandemir, N. Vijaykrishnan, and M. J. Irwin. An integer linear programming-based tool for wireless sensor networks. *J. Parallel Distrib. Comput.*, 65(3) :247–260, 2005. 48, 49, 75
- Wei-Chieh Ke, Bing-Hong Liu, and Ming-Jer Tsai. The critical-square-grid coverage problem in wireless sensor networks is np-complete. *Computer Networks*, 55(9) :2209–2220, 2011. doi : 10.1016/j.comnet.2011.03.004. URL <https://doi.org/10.1016/j.comnet.2011.03.004>. 73
- P.C. Li and M. Toulouse. Maximum leaf spanning trees for grid graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 73 :181–193, 2010. 14, 106, 111, 119, 120, 121, 160, 162
- Abilio Lucena, Nelson Maculan, and Luidi Simonetti. Reformulations and solution algorithms for the maximum leaf spanning tree problem. *Computational Management Science*, 7(3) :289–311, 2010. 69, 70

## BIBLIOGRAPHIE

---

- C. E. Miller, A. W. Tucker, and R. A. Zemlin. Integer programming formulation of traveling salesman problems. *J. ACM*, 7(4) :326–329, 1960. 87
- Ram Prasad Narayanan, Thazath Veedu Sarath, and Vellora Veetil Vineeth. Survey on motes used in wireless sensor networks : Performance and parametric analysis. *Wireless Sensor Network*, 8 :67–76, 04 2016. 24
- D. Niculescu and B. Nath. Ad hoc positioning system (aps). In *GLOBECOM'01. IEEE Global Telecommunications Conference (Cat. No.01CH37270)*, volume 5, pages 2926–2931, 2001. 29
- Tamoghna Ojha, Sudip Misra, and Narendra Singh Raghuwanshi. Wireless sensor networks for agriculture : The state-of-the-art in practice and future challenges. *Computers and Electronics in Agriculture*, 118 :66 – 84, 2015. ISSN 0168-1699. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168169915002379>. 15, 24, 25
- Britta Peis, Martin Skutella, and Andreas Wiese. *Packet Routing on the Grid*, pages 120–130. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010. 68, 70
- Frederico P. Quintao, Alexandre Salles da Cunha, Geraldo R. Mateus, and Abilio Lucena. The k-cardinality tree problem : Reformulations and lagrangian relaxation. *Discrete Appl. Math.*, 158(12) :1305–1314, June 2010. ISSN 0166-218X. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2009.01.017>. 90
- Priyanka Rawat, Kamal Deep Singh, Hakima Chaouchi, and Jean Marie Bonnin. Wireless sensor networks : a survey on recent developments and potential synergies. *The Journal of Supercomputing*, 68(1) :1–48, Apr 2014. 17, 18
- Maher Rebai, Matthieu Le Berre, Hichem Snoussi, Faicel Hnaïen, and Lyes Khoukhi. Sensor deployment optimization methods to achieve both coverage and connectivity in wireless sensor networks. *Comput. Oper. Res.*, 59 :11–21, 2015. 68, 70, 71, 75, 76, 77, 79
- Maher Rebai, Hasan Murat Afsar, and Hichem Snoussi. Exact methods for sensor deployment problem with connectivity constraint in wireless sensor networks. *International Journal of Sensor Networks (IJSNET)*, 21(3) :157–168, 2016. doi :



10.1504/IJSNET.2016.078324. URL <https://doi.org/10.1504/IJSNET.2016.078324>.  
73

Alexander Reich. Complexity of the maximum leaf spanning tree problem on planar and regular graphs. *Theoretical Computer Science*, 626(C) :134–143, 2016. 35, 68

M.F. Reis, O. Lee, and F.L. Usberti. Flow-based formulation for the maximum leaf spanning tree problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 50 :205 – 210, 2015. 69, 81

André Rossi, Alok Singh, and Marc Sevaux. An exact approach for maximizing the lifetime of sensor networks with adjustable sensing ranges. *Computers and Operations Research*, 39(12) :3166 – 3176, 2012. 66

André Rossi, Alok Singh, and Marc Sevaux. Lifetime maximization in wireless directional sensor network. *European Journal of Operational Research*, 231(1) :229 – 241, 2013. 66

Denes K. Roveti. Choosing a humidity sensor : a review of three technologies, 2001. URL <http://www.sensorsmag.com/sensors/humidity-moisture/choosing-a-humidity-sensor-a-review-three-technologies-840>. 39

Maytham Safar and Sami Habib. Hard constrained vertex-cover communication algorithm for wsn. In Tei-Wei Kuo, Edwin Sha, Minyi Guo, Laurence T. Yang, and Zili Shao, editors, *Embedded and Ubiquitous Computing*, pages 635–649. Springer Berlin Heidelberg, 2007. 27

Amit Sarkar and T. Senthil Murugan. Routing protocols for wireless sensor networks : What the literature says? *Alexandria Engineering Journal*, 55(4) :3173 – 3183, 2016. 44

Alok Singh and André Rossi. A genetic algorithm based exact approach for lifetime maximization of directional sensor networks. *Ad Hoc Networks*, 11(3) :1006–1021, 2013. 64, 65, 66, 75

Y. B. Turkogullari, N. Aras, I. K. Altinel, and C. Ersoy. An efficient heuristic for placement, scheduling and routing in wireless sensor networks. *Ad Hoc Networks*, 8(6) :654 – 667, 2010. 56, 59, 75

- I. Vasilescu, K. Kotay, D. Rus, M. Dunbabin, and P. Corke. Data collection, storage, and retrieval with an underwater sensor network. In *Proceedings of the 3rd International Conference on Embedded Networked Sensor Systems*, SenSys '05, pages 154–165. ACM, 2005. ISBN 1-59593-054-X. 17
- Z. G. Wan, Y. K. Tan, and C. Yuen. Review on energy harvesting and energy management for sustainable wireless sensor networks. In *2011 IEEE 13th International Conference on Communication Technology*, pages 362–367, 2011. 21
- Xiaorui Wang, Guoliang Xing, Yuang Zhang, Chenyang Lu, Robert Pless, and Christopher Gill. Integrated coverage and connectivity configuration in wireless sensor networks. In *Proceedings of the 1st International Conference on Embedded Networked Sensor Systems*, SenSys'03, pages 28–39. ACM, 2003. 27, 163, 164
- G. Werner-Allen, K. Lorincz, M. Ruiz, O. Marcillo, J. Johnson, J. Lees, and M. Welsh. Deploying a wireless sensor network on an active volcano. *IEEE Internet Computing*, 10(2) :18–25, 2006a. 17
- Geoff Werner-Allen, Konrad Lorincz, Jeff Johnson, Jonathan Lees, and Matt Welsh. Fidelity and yield in a volcano monitoring sensor network. In *Proceedings of the 7th Symposium on Operating Systems Design and Implementation*, OSDI '06, pages 381–396, 2006b. 17
- Yiwei Wu and Yingshu Li. Construction algorithms for k-connected m-dominating sets in wireless sensor networks. In *Proceedings of the 9th ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing*, MobiHoc '08, pages 83–90. ACM, 2008. 68, 69
- Shuhui Yang, Fei Dai, Mihaela Cardei, Jie Wu, and Floyd Patterson. On connected multiple point coverage in wireless sensor networks. *International Journal of Wireless Information Networks*, 13(4) :289–301, 2006. 32
- Mohamed Younis, Izzet F. Senturk, Kemal Akkaya, Sookyoung Lee, and Fatih Senel. Survey topology management techniques for tolerating node failures in wireless sensor networks : A survey. *Computer Networks*, 58 :254–283, January 2014. 30, 31

## BIBLIOGRAPHIE

---





Sylvain MARIE

Déploiement optimal d'un réseau de capteurs sous des contraintes de couverture et de connectivité

le cnam

**Abstract :**

The objective of this thesis on wireless sensor networks is to study the deployment of a minimal number of sensors to cover specific targets instead of continuous areas. After a presentation of the characteristics of wireless sensor networks, and after justifying the interest of an optimal sensor deployment, we propose a graph-theory based model for wireless sensor networks. We then present a state of the art describing various mathematical programming models and resolution techniques regarding a number of optimization problems in such networks. We formulate several Mixed Integer Linear programs to solve the optimal sensor deployment problem under constraints related to the coverage of all targets and connectivity between sensors. Finally, we conceive a new heuristic for sensor placement when targets are placed in a square grid graph, and we conjecture that this heuristic returns an optimal solution in all cases.

**Keywords :**

Wireless sensor networks, Minimum connected dominating set, Mathematical programming, Minimum connected coverage set.

**Résumé :**

L'objet de cette thèse sur les réseaux de capteurs est l'étude du déploiement minimal de capteurs lorsque ceux-ci doivent couvrir un ensemble discret de cibles plutôt que des superficies. Après la présentation des caractéristiques d'un réseau de capteurs, et l'intérêt d'un déploiement minimal, nous en proposons une modélisation en théorie des graphes. Nous présentons ensuite un état de l'art décrivant certaines techniques de résolution par la programmation mathématique de diverses problématiques dans ce type de réseau. Nous utilisons plusieurs programmes linéaires en variables mixtes afin de résoudre le problème du déploiement minimal des capteurs sous des contraintes de couverture de toutes les cibles et de connectivité des capteurs entre eux. Finalement nous concevons une nouvelle heuristique de calcul de placement de capteurs lorsque les cibles sont placées sur une grille à motif carré et nous conjecturons que cette heuristique retourne une solution optimale dans tous les cas.

**Mots clés :**

Réseaux de capteurs, Dominant connexe minimum, Programmation mathématique, Couverture connexe minimum.