



**HAL**  
open science

# Plongements grossièrement Lipschitz et presque Lipschitz dans les espaces de Banach

François Netillard

► **To cite this version:**

François Netillard. Plongements grossièrement Lipschitz et presque Lipschitz dans les espaces de Banach. Analyse fonctionnelle [math.FA]. Université Bourgogne Franche-Comté, 2019. Français. NNT : 2019UBFCD020 . tel-02378971

**HAL Id: tel-02378971**

**<https://theses.hal.science/tel-02378971>**

Submitted on 25 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École Doctorale Carnot-Pasteur

---

# Thèse de Doctorat

*préparée à l'Université de Franche-Comté*

*présentée par*

**François NETILLARD**

*Pour obtenir le grade de*

Docteur de Mathématiques de l'Université  
Bourgogne Franche-Comté

---

## Plongements grossièrement Lipschitz et presque Lipschitz dans les espaces de Banach

---

Soutenance à Besançon (LMB) le 22 Octobre 2019 devant le jury composé de :

Aris DANIILDIS	Professeur, Université du Chili	Rapporteur
Gilles GODEFROY	Directeur de Recherches émérite au C.N.R.S, IMJ-PRG	Président
Gilles LANCIEN	Professeur, Université Bourgogne Franche-Comté	Directeur de thèse
Pascal LEFÈVRE	Professeur, Université d'Artois	Rapporteur
Hermann PFITZNER	Maître de conférences, Université d'Orléans	Examineur
Antonin PROCHÁZKA	Maître de conférences, Université Bourgogne Franche-Comté	Examineur



*"Le monde se divise en deux catégories, ceux qui ont un pistolet chargé et ceux qui creusent. Toi, tu creuses."*  
Sergio Leone (Le Bon, la Brute et le Truand)

# Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Gilles Lancien pour son soutien et sa disponibilité durant ces cinq années de thèse. Il a toujours été bienveillant et à l'écoute pour m'aider à chaque instant où j'avais besoin d'un coup de pouce. Je n'aurais jamais pu mener ce travail à bien, tout en encadrant des étudiants de CPGE, sans ses encouragements, sa gentillesse et son optimisme contagieux. C'est le directeur de thèse dont tout étudiant rêve !

Ensuite, je souhaite remercier Gilles Godefroy, Pascal Lefèvre, Hermann Pfitzner et Antonin Procházka d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Un merci tout particulier à Aris Daniildis et Pascal Lefèvre pour avoir pris le temps de relire attentivement mon travail en tant que rapporteurs.

Durant cette thèse, Alexandre Nou m'a souvent encouragé, conseillé et a accepté parfois de relire une partie de mes travaux. C'est un ami précieux qui a toujours su être présent pour partager son expérience et ses connaissances. Je n'oublie pas, non plus, son épouse, Pauline qui, elle aussi, a été présente pour me motiver.

J'ai eu la chance, par ailleurs, de rencontrer, durant ces années, Colin qui, avec sa bonne humeur et surtout sa gentillesse à mon égard, a su rendre mes passages à Besançon encore plus sympathiques. Il m'a impressionné par son aptitude et sa passion pour la recherche. J'associe Tony à ces rencontres marquantes qui ont embelli ces années de thèse. Avec Gilles, ils formaient un trio "magique".

Avec mes nombreux passages au Laboratoire de Mathématiques de Besançon, je ne peux pas oublier Emilie Dupré et Odile Henry qui ont écouté avec sollicitude toutes mes aventures de doctorant qui avait besoin d'oreilles attentives lorsque je venais à la bibliothèque du laboratoire. Elles m'ont toujours accueilli avec le sourire et m'ont souvent bien conseillé dans mes choix bibliographiques.

Merci au Laboratoire de Mathématiques de Besançon de m'avoir accueilli et soutenu, en particulier à l'équipe d'analyse fonctionnelle.

Je voudrais aussi remercier Aude et Charlotte qui ont été là durant les deux premières années et m'ont écouté et encouragé très régulièrement. J'ai une pensée également pour Yoël que je n'ai pas eu la chance de bien connaître mais avec qui, j'en suis convaincu, j'aurais pris plaisir à travailler.

Merci aux amis de toujours : Mathias, Mustapha, Philippe, Serge, Sylvain et Vincent.

Merci à mes collègues des CPGE des Lycées Lavoisier de Mulhouse et Tillion de Montbéliard.

Un immense merci à toute ma famille proche et moins proche pour tous leurs encouragements et leur aide logistique.

Enfin, merci à mes "quinconces", à savoir mes deux enfants, Maëlyse et Aloïs, et mon épouse Célia pour avoir toujours été là pour moi et pour leur soutien au quotidien.

Pour conclure, j'ai une pensée pour ma grand-mère qui a communiqué sa joie de vivre et son amour d'autrui à toute notre famille et autour d'elle, et pour mon grand-père, Georges Reeb, qui est un exemple mathématique pour moi.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1. Résumé de la thèse . . . . .	3
2. Abstract . . . . .	7
3. Notations . . . . .	11
<b>1 Préliminaires</b>	<b>15</b>
1.1 Espaces $\ell_p$ et $L_p$ . . . . .	15
1.1.1 Les espaces de suites $\ell_p$ . . . . .	15
1.1.2 Les espaces de fonctions $L_p$ . . . . .	15
1.2 Espace de Tsirelson . . . . .	16
1.3 Notions de géométrie des espaces de Banach . . . . .	17
1.3.1 Base d'un espace de Banach de dimension infinie . . . . .	17
1.3.2 Décomposition de Schauder fini-dimensionnelle d'un espace de Banach	20
1.3.3 Propriété d'approximation bornée . . . . .	20
1.3.4 Lemme et théorème de Mazur . . . . .	21
1.3.5 Espaces de Banach avec une norme asymptotiquement uniformé-	
ment convexe ou lisse . . . . .	22
1.3.6 Indice de Szlenk . . . . .	28
1.4 Notions métriques . . . . .	29
<b>2 Espaces <math>\ell_p</math>, <math>J_p</math> et plongements grossièrement Lipschitz</b>	<b>31</b>
2.1 Milieux approchés, lemme de Kalton-Randrianarivony et Graphes de Ham-	
ming . . . . .	31
2.2 Plongements grossièrement Lipschitz et espaces de James . . . . .	33
2.2.1 Espaces $J_p$ et $J_p^{**}$ . . . . .	33
2.2.2 Plongements grossièrement Lipschitz entre espaces de James . . . . .	37
2.3 Plongements grossièrement Lipschitz et espaces duaux des espaces de James	43
<b>3 Structure asymptotique uniforme et plongements grossièrement Lip-</b>	<b>47</b>
<b>schitz</b>	
3.1 Milieux approchés dans un espace q-asymptotiquement uniformément lisse	49
3.2 Milieux approchés dans un espace p-asymptotiquement uniformément convexe	
médiann . . . . .	50
3.3 Applications . . . . .	53

---

<b>4</b>	<b>Plongements presque Lipschitz et bilipschitz</b>	<b>57</b>
4.1	Rappels . . . . .	58
4.1.1	Plongement bilipschitz et espace métrique localement fini . . . . .	58
4.1.2	Plongements presque Lipschitz d'espaces métriques propres . . . . .	59
4.2	Représentabilité crûment finie et plongement presque Lipschitz . . . . .	61
4.3	Bases étroites avec constantes et espaces localement minimaux . . . . .	66

# Introduction

## Résumé de la thèse

Le thème central de cette thèse est l'étude de plongements d'espaces métriques dans des espaces de Banach.

Il existe plusieurs types de plongements.

Ces applications peuvent avoir différentes natures : les plongements uniformes, les plongements grossiers, les plongements Lipschitziens, les plongements fortement uniformes... Leur fonction commune, pour expliquer cela vaguement, est de ne pas trop déformer la structure métrique.

Des progrès conséquents, dans différentes directions, ont été faits ces dernières années à ce sujet, en particulier depuis l'année 2000 et la publication du livre de référence de Y. Benyamini et J. Lindenstrauss [7].

Nous nous sommes principalement intéressés aux plongements grossièrement Lipschitz et aux plongements presque Lipschitz.

Parlons d'abord des plongements grossièrement Lipschitz. Pour deux espaces métriques  $(M, d)$  et  $(N, \delta)$ , et une application  $f : M \rightarrow N$ , on dira que  $f$  est un plongement grossièrement Lipschitz de  $M$  dans  $N$  si il existe  $\theta, A, B > 0$  tels que

$$\forall x, y \in M, d(x, y) \geq \theta \Rightarrow Ad(x, y) \leq \delta(f(x), f(y)) \leq Bd(x, y).$$

Et, dans ce cas, on dit que  $M$  se plonge grossièrement Lipschitz dans  $N$ .

En gros, un plongement grossièrement Lipschitz est une application qui est bi-Lipschitz pour des distances suffisamment grandes, en notant qu'on dit que  $f : M \rightarrow N$  est un plongement bi-Lipschitz si il existe  $C < \infty$  et  $r > 0$  tels que

$$\forall x, y \in M, rd(x, y) \leq \delta(f(x), f(y)) \leq rCd(x, y).$$

Nos références pour l'utilisation de plongement grossièrement Lipschitz sont [34] et [19]. Ces articles s'intéressaient à la stabilité de la structure asymptotique uniforme entre des espaces de Banach avec des plongements grossièrement Lipschitz, plus précisément au lien entre les espaces "trop asymptotiquement lisses" et les espaces "trop asymptotiquement convexes".

Il a été mis en avant alors le fait que  $\ell_q$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $\ell_p$  pour  $q \neq p$ .

L'idée principale dans le cadre de notre travail, qui s'inspire des articles cités, est d'utiliser les milieux approchés dans le but de montrer que des espaces de Banach "trop asymptotiquement lisses" ne se plongent pas grossièrement Lipschitz dans des espaces de Banach "trop convexes", et d'utiliser les graphes de Hamming pour montrer que des espaces de



Banach "trop asymptotiquement convexes" ne se plongent pas grossièrement Lipschitz dans des espaces de Banach "trop asymptotiquement lisses".

Parlons maintenant de la notion de plongeabilité presque Lipschitz.

Pour deux espaces métriques  $(M, d)$  et  $(N, \delta)$ , et  $f$  une application de  $M$  dans  $N$ , on pose

$$\rho_f(t) = \inf\{\delta(f(x), f(y)) : d(x, y) \geq t\} \text{ (module de compression de } f\text{),}$$

et

$$\omega_f(t) = \sup\{\delta(f(x), f(y)) : d(x, y) \leq t\} \text{ (module d'expansion de } f\text{).}$$

Pour  $\Phi = \{\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1) \text{ continue, telle que } \varphi(0) = 0, \text{ et } \varphi(t) > 0 \ \forall t > 0\}$ , on dit que  $M$  se plonge *presque Lipschitz* dans  $N$  si il existe une constante d'homogénéisation  $r \in (0, \infty)$ , une constante  $D \in [1, \infty)$ , et une famille d'applications  $(f_\varphi)_{\varphi \in \Phi}$  de  $M$  dans  $N$  telles que, pour tout  $t \in (0, \infty)$ ,

$$\omega_{f_\varphi}(t) \leq Drt$$

et

$$\rho_{f_\varphi}(t) \geq rt\varphi(t).$$

En d'autres termes,  $M$  se plonge presque Lipschitz dans  $N$  si il existe une constante d'homogénéisation  $r \in (0, \infty)$  et une constante  $D \in [1, \infty)$  telles que, pour toute fonction continue  $\varphi \in \Phi$ , il existe une application  $f_\varphi : M \rightarrow N$  vérifiant :

$$\forall x, y \in M, \varphi(d(x, y))rd(x, y) \leq \delta(f_\varphi(x), f_\varphi(y)) \leq Drd(x, y).$$

La notion de plongeabilité presque Lipschitz a été définie dans [6]. C'est d'ailleurs dans cet article de F. Baudier et G. Lancien que nous avons repris la définition de plongement presque Lipschitz donnée ci-dessus. On peut trouver déjà l'idée de plongement presque Lipschitz dans la proposition 7.18 de [7].

Dans le cadre de notre travail, nous donnerons la définition d'un plongement quasi-Lipschitz<sup>1</sup> qui diffère légèrement de la définition que nous venons de citer dans [6] d'un plongement presque Lipschitz.

## 1. Préliminaires

Dans ce chapitre, nous donnons simplement des outils utiles (définitions et propriétés) à la compréhension de ce travail de thèse, concernant la géométrie des espaces de Banach et certaines notions métriques.

## 2. Espaces $\ell_p$ , $J_p$ et plongements grossièrement Lipschitz

La première étude (chapitre 2) concerne les plongements grossièrement Lipschitz entre les espaces de James  $J_p$ , pour  $p \in (1, \infty)$ . Il est connu que  $\ell_q$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $\ell_p$  pour  $1 \leq q \neq p < \infty$ . On peut se référer à [34] ou [37] pour la preuve de ce résultat.

On a essayé d'adapter les méthodes utilisées alors au cas des espaces de James.

Le problème est intéressant car il nous confronte à deux obstructions importantes : la non réflexivité des espaces de James (et donc le défaut de compacité faible) et le fait que les normes naturelles de ces espaces n'ont pas les propriétés de lissité ou de convexité

---

1. voir le chapitre 4

asymptotique.

On obtient que, pour  $1 < p \neq q < \infty$ ,  $J_q$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $J_p$ .

Pour cela, on applique, dans un premier temps, pour  $1 < p < q < \infty$ , la méthode classique des milieux approchés. L'utilisation des milieux approchés dans l'étude de la géométrie non linéaire est due à P. Enflo dans un papier non publié et a, depuis, été utilisée à de nombreuses reprises. Citons, par exemple, [8], [20], [30], et bien sûr [34] et [37].

Ne pouvant conclure avec les normes d'origine, nous avons tout d'abord construit des normes équivalentes ad'hoc sur ces espaces, qui satisfont à une inégalité essentielle dans le bidual pour la preuve.

Dans un second temps, pour  $1 < q < p < \infty$ , l'idée est d'utiliser les graphes de Hamming, utilisés par N.J. Kalton et N.L. Randrianarivony dans [34]. En utilisant la compacité préfaible, on obtient une inégalité concernant la distance entre deux images, relativement à notre nouvelle norme, pour une application lipschitzienne entre un graphe métrique et  $J_p^{**}$ , et le cardinal du graphe à la puissance  $\frac{1}{p}$ . Cette inégalité est essentielle pour justifier ensuite que  $J_q$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $J_p$ .

Nous avons également obtenu, dans le cas où  $1 < q < p < \infty$ , une majoration de l'exposant de compression<sup>2</sup> de  $J_q$  dans  $J_p$ ,  $\alpha_{J_p}(J_q)$ , par  $\frac{q}{p}$ .

La question naturelle qui s'est posée ensuite à nous a été de savoir si le résultat obtenu pour les espaces de James, à savoir que  $J_p$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $J_q$  lorsque  $1 < p \neq q < \infty$ , était vrai aussi en ce qui concerne les deux des espaces de James.

La propriété centrale qui nous a aidé à conclure que ce qu'on a obtenu pour les espaces de James reste valable pour leurs deux, est le fait que, pour  $p > 1$ ,  $J_p^*$  admet une norme équivalente qui est préfaiblement  $p'$ -asymptotiquement uniformément convexe<sup>2</sup> (notée  $p'$ -AUC\*). Il s'agit d'une adaptation d'une propriété due à G. Lancien, faite dans le cas où  $p = 2$ , dans [40].

Ensuite, on justifie que  $J_p^*$  admet une norme équivalente  $p'$ -asymptotiquement uniformément lisse<sup>2</sup> (notée  $p'$ -AUS), où  $p'$  est le conjugué de  $p$ , puis on montre que l'exposant de compression de  $J_q^*$  dans  $J_p^*$ ,  $\alpha_{J_p^*}(J_q^*)$ , dans le cas où  $1 < p < q < \infty$ , est inférieur ou égal à  $\frac{q'}{p'}$  (où  $p'$  et  $q'$  sont respectivement les conjugués de  $p$  et  $q$ ).

Cela permet d'établir, dans le cas où  $1 < p < q < \infty$ , que  $J_q^*$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $J_p^*$ .

### 3. Structure asymptotique uniforme et plongement grossièrement Lipschitz

Suite au travail effectué dans le chapitre 2, on a essayé d'établir des résultats plus généraux, ce qui nous a permis, entre autres, d'établir, dans le cas où  $1 < p < q < \infty$ , que  $J_p^*$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $J_q^*$ .

L'objectif de ce chapitre est d'établir un résultat sur la non-plongeabilité des espaces de Banach asymptotiquement uniformément lisses dans les espaces de Banach asymptotiquement uniformément convexes<sup>2</sup>, et plus précisément sur la non-plongeabilité des espaces de Banach  $q$ -asymptotiquement uniformément lisses (notés  $q$ -AUS) dans les espaces de Banach  $p$ -asymptotiquement uniformément convexes médians<sup>2</sup> (notés  $p$ -AMUC) que ceux qui ont été établis auparavant concernant les espaces de James.

On justifie, en particulier, le théorème suivant :

---

2. voir la définition au chapitre 1

**Théorème.** *Soient  $1 \leq p < q < \infty$ .*

*Si  $Y$  est  $q$ -AUS et  $X$  est  $p$ -AMUC, alors  $Y$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $X$ .*

L'outil principal utilisé est "le principe des milieux approchés".

Des articles récents ont motivé ce travail, en particulier l'article [32], dû à N.J. Kalton, puisque notre théorème central (théorème 3.0.1) pour ce chapitre peut être vu comme une conséquence d'un résultat de cet article. Nous donnerons quelques détails et commentaires concernant ce lien dans ce chapitre 3. Cependant, dans notre travail, nous nous sommes davantage intéressés à un autre article, [13], qui nous permet de donner une démonstration élémentaire du théorème donné ci-dessus.

L'idée de cette démonstration est la suivante :

On montre d'abord que l'ensemble des milieux approchés dans un espace asymptotiquement uniformément lisse contient une boule de dimension infinie de "gros" diamètre. Ensuite, on montre que l'ensemble des milieux approchés dans un espace asymptotiquement uniformément convexe médian est inclus dans une perturbation compacte d'une boule de "petit" diamètre.

La proposition associée à cette deuxième partie de la preuve est étroitement liée à l'article [13], rédigé par S.J. Dilworth, D. Kutzarova, N.L. Randrianarivony, J.P. Revalski et N.V. Zhivkov. En effet, son énoncé est implicitement inclus dans le théorème 2.1 de cet article et dans sa preuve. Toutefois, elle n'est pas énoncée sous la forme que nous donnerons, et son application aux plongements non linéaires ne semble pas figurer dans la littérature.

Ensuite, nous donnons des applications de notre théorème et, en particulier, à l'aide d'un théorème de renormage, nous en déduisons le résultat suivant sur les indices de Szlenk, que nous définirons dans la dernière partie du chapitre d'introduction :

*Pour  $1 \leq p < q < \infty$ , et  $q'$  l'exposant conjugué de  $q$ , si  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  est un espace de Banach tel qu'il existe  $C_1 > 0$  vérifiant*

$$\forall \varepsilon > 0, \text{Sz}(Y, \varepsilon) \leq \frac{C_1}{\varepsilon^{q'}},$$

*et si  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  est un espace de Banach tel qu'il existe  $C_2 > 0$  vérifiant*

$$\forall \varepsilon > 0, \text{Sz}(Z, \varepsilon) \leq \frac{C_2}{\varepsilon^p},$$

*alors  $Y$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $Z^*$ .*

Toujours à propos des indices de Szlenk, vous trouverez des détails sur cette notion dans [18], par exemple.

#### 4. Plongements presque Lipschitz et bilipschitz

F. Baudier et G. Lancien, dans l'article [6], ont introduit la notion de plongement presque Lipschitz dans le but de montrer que, pour  $p \in [1, \infty]$ , tout sous-espace propre<sup>3</sup> de  $L_p$  se plonge presque Lipschitz dans un espace de Banach  $X$  si et seulement si  $X$  contient uniformément les  $\ell_p^n$ .

---

3. voir la définition à la fin du chapitre d'introduction

Par ailleurs, un article de M.I. Ostrovskii, [47], dans lequel celui-ci a prouvé qu'un espace métrique localement fini  $A$ , dont les sous-ensembles finis admettent des plongements uniformément bilipschitz dans un espace de Banach  $X$ , admet un plongement bilipschitz dans  $X$ , a aussi attiré notre attention.

En confrontant ces deux articles, on s'est demandé si, pour deux espaces de Banach  $X$  et  $Y$  tels que  $X$  est finiment crûment représentable dans  $Y$ , et  $K$  un sous-ensemble propre de  $X$ ,  $K$  se plonge presque Lipschitz dans  $Y$ .

Cette question est pour l'instant non résolue. On a obtenu toutefois le résultat plus faible suivant, pour une plongeabilité quasi-Lipschitz, dont la définition diffère légèrement de la définition donnée dans [6] de la plongeabilité presque Lipschitz :

*Pour deux espaces de Banach  $X$  et  $Y$ , si, pour  $C > 1$ ,  $X$  est  $C$ -finiment crûment représentable<sup>4</sup> dans tout sous-espace vectoriel  $Z$  de codimension finie de  $Y$ , alors tout sous-espace propre  $M$  de  $X$  se plonge quasi-Lipschitz dans  $Y$ .*

Pour justifier cette dernière propriété, nous nous inspirons du travail de F. Baudier et G. Lancien cité précédemment.

On précise que, dans un premier temps, nous donnons les définitions nécessaires à la compréhension des propriétés citées dans [6] et [47], ainsi que les autres propriétés de ces articles qui ont permis d'établir ces résultats.

Pour terminer ce chapitre, nous donnons quelques définitions et propriétés issus de [16] en lien avec la notion de représentabilité crûment finie. En particulier, à partir de la définition d'espace localement minimal<sup>4</sup>, on a établi le corollaire suivant du théorème central de ce chapitre :

*Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach tels que  $X$  est localement minimal et  $Y$  est finiment crûment représentable dans  $X$ .*

*Soit  $M$  un sous-espace propre de  $Y$ .*

*Alors  $M$  se plonge quasi-Lipschitz dans  $X$ .*

## Abstract

The central theme of this thesis is the study of embeddings of metric spaces into Banach spaces.

There are various kinds of embeddings.

These maps can be of very different nature : uniform or coarse embeddings, Lipschitz embeddings, strong uniform embeddings... Vaguely speaking, their common feature is that they do not distort too much the metric structure.

There has been a lot of progress in the last few years in various directions of this field and in particular since 2000 and the publication of the authoritative book by Y. Benyamini and J.Lindenstrauss [7].

We are particularly interested in the coarse Lipschitz embeddings and the almost Lipschitz embeddings.

First, let us introduce the notion of coarse Lipschitz embedding. For two metric spaces  $(M, d)$  and  $(N, \delta)$ , and a map  $f : M \rightarrow N$ , we say that  $f$  is a coarse Lipschitz embedding

---

4. voir la définition dans le chapitre 4

from  $M$  into  $N$  whenever there exist  $\theta, A, B > 0$  such that

$$\forall x, y \in M, d(x, y) \geq \theta \Rightarrow Ad(x, y) \leq \delta(f(x), f(y)) \leq Bd(x, y).$$

In this case, we say that  $M$  *coarse Lipschitz embeds* into  $N$ .

Roughly speaking, a coarse Lipschitz embedding is a map which is bi-Lipschitz for large enough distances. Let us remind that  $f : M \rightarrow N$  is a bi-Lipschitz embedding whenever there exist  $C < \infty$  and  $r > 0$  such that

$$\forall x, y \in M, rd(x, y) \leq \delta(f(x), f(y)) \leq rCd(x, y).$$

Our references for the use of coarse Lipschitz embedding are [34] et [19]. These articles mention that  $\ell_q$  does not coarse Lipschitz embed into  $\ell_p$  for  $q \neq p$ . In fact, the main topic of these articles was to study the stability of the uniform asymptotic structure under coarse Lipschitz embeddings between some Banach spaces.

The main idea in our work, which is inspired by [34] and [19], is to use the approximate midpoints to show that some Banach spaces which are "too asymptotically smooth" do not coarse Lipschitz embed into some Banach spaces which are "too asymptotically convex", and to use the Hamming graphs to show that some Banach spaces which are "too asymptotically convex" do not coarse Lipschitz embed into some Banach spaces which are "too asymptotically smooth".

Let us now define the notion of almost Lipschitz embeddability.

For two metric spaces  $(M, d)$  and  $(N, \delta)$ , we define, for a map  $f$  from  $M$  into  $N$ ,

$$\rho_f(t) = \inf\{\delta(f(x), f(y)) : d(x, y) \geq t\} \text{ (compression modulus of } f),$$

and

$$\omega_f(t) = \sup\{\delta(f(x), f(y)) : d(x, y) \leq t\} \text{ (expansion modulus of } f).$$

We denote

$$\Phi = \{\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1) \text{ continuous, such that } \varphi(0) = 0, \text{ and } \varphi(t) > 0 \ \forall t > 0\}.$$

We say that  $M$  is *almost Lipschitzly embeddable* into  $N$  if there exist a scaling factor  $r \in (0, \infty)$ , a constant  $D \in [1, \infty)$ , and a family  $(f_\varphi)_{\varphi \in \Phi}$  of maps from  $M$  into  $N$  such that for all  $t \in (0, \infty)$ ,

$$\omega_{f_\varphi}(t) \leq Drt,$$

and

$$\rho_{f_\varphi}(t) \geq rt\varphi(t).$$

In other words,  $M$  is almost Lipschitz embeddable into  $N$  if there exist a scaling factor  $r \in (0, \infty)$  and a constant  $D \in [1, \infty)$  such that for any continuous function  $\varphi \in \Phi$ , there exists a map  $f_\varphi : M \rightarrow N$  such that :

$$\forall x, y \in M, \varphi(d(x, y))rd(x, y) \leq \delta(f_\varphi(x), f_\varphi(y)) \leq Drd(x, y).$$

This notion of almost Lipschitz embeddability is taken from the paper [6]. We can already find an approach to the almost Lipschitz embeddability in [7] (Proposition 7.18).

For our work, we will give the definition of a quasi-Lipschitz embedding<sup>5</sup> which is slightly different from the definition of an almost Lipschitz embedding.

## 1. Preliminaries

In this section, we give some useful tools (definitions and properties) to understand this thesis work. It deals with the geometry of Banach spaces and some metric notions.

## 2. $\ell_p$ spaces, $J_p$ spaces and coarse Lipschitz embeddings

The first study (section 2) focuses on the coarse Lipschitz embeddings between James spaces,  $J_p$ , for  $p \in (1, \infty)$ . It is well known that  $\ell_q$  does not coarse Lipschitz embed into  $\ell_p$  for  $1 \leq q \neq p < \infty$ . We can refer to [34] or [37] for the proof of this result. We try to adapt the methods used in these articles to the James spaces case.

It is an interesting problem because it confronts us with two main obstructions : the nonreflexivity of James spaces (and therefore the lack of weak compactness) and the fact that the usual norms of these spaces do not have the asymptotic smoothness or convexity properties.

We obtain that, for  $1 < p \neq q < \infty$ ,  $J_q$  does not coarse Lipschitz embed into  $J_p$ .

First, we prove that, for  $1 < p < q < \infty$ ,  $J_q$  does not coarse Lipschitz embed into  $J_p$ . To prove this, we apply the classical method of the approximate midpoints principle. The use of metric midpoints in the study of nonlinear geometry is due to P. Enflo in an unpublished paper and has since been widely used for example, in [8], [20], [30], and of course in [34] and [37].

To allow us to conclude, we construct equivalent norms on these spaces. With these norms, we obtain an inequality in the bidual which is essential for the proof.

Secondly, we prove that, for  $1 < q < p < \infty$ ,  $J_q$  does not coarse Lipschitz embed into  $J_p$ . The main idea is to use the graphs which were introduced by Kalton and Randrianarivony in [34]. Using the weak\* compactness, we obtain an inequality related to our new norm for the distance between two images under a Lipschitz function between a metric graph and  $J_p^{**}$ , and to the cardinality of the used graph with a power type  $\frac{1}{p}$ . This inequality is essential to justify that  $J_q$  does not coarse Lipschitz embed into  $J_p$ .

We also obtain, in the case where  $1 < q < p < \infty$ , that the compression exponent<sup>6</sup> of  $J_q$  in  $J_p$ ,  $\alpha_{J_p}(J_q)$ , is lower or equal to  $\frac{q}{p}$ .

Another natural question is to know whether we have similar results for the dual spaces of James spaces. The central property is the fact that, for  $p > 1$ ,  $J_p^*$  admits an equivalent norm with a dual norm which is weak\*  $p'$ -asymptotically uniformly convex<sup>6</sup> (in short weak\*  $p'$ -AUC or  $p'$ -AUC\*), where  $p'$  is the conjugate exponent of  $p$ . We adapt a proof due to G. Lancien (see [40]) in the case where  $p = 2$ .

Then, we justify that  $J_p^*$  admits an equivalent norm which is  $p'$ -asymptotically uniformly smooth<sup>6</sup> (in short  $p'$ -AUS), where  $p'$  is the conjugate exponent of  $p$ , and we show that the compression exponent of  $J_q^*$  in  $J_p^*$ ,  $\alpha_{J_p^*}(J_q^*)$ , in the case where  $1 < p < q < \infty$ , is lower than or equal to  $\frac{q'}{p'}$  (where  $p'$  et  $q'$  are respectively the conjugate exponent of  $p$  and  $q$ ).

It allows us to establish, for  $1 < p < q < \infty$ , that  $J_q^*$  does not coarse Lipschitz embed into  $J_p^*$ .

---

5. see section 4

6. see section 1 for the definition

### 3. Uniform asymptotic structure and coarse Lipschitz embedding

Further to the work done in section 2, a natural question is to know if we have a more general result, and we have seen, among other things, that, for  $1 < p < q < \infty$ ,  $J_p^*$  does not coarse Lipschitz embed into  $J_q^*$ .

The goal of this chapter is to establish a result about the coarse Lipschitz embeddability of a Banach space which has a  $q$ -asymptotically uniformly smooth norm into a Banach space which has a  $p$ -asymptotically uniformly convex norm<sup>6</sup> (in short  $p$ -AUC norm). More precisely, we establish a result about the coarse Lipschitz embeddability of a Banach space which has a  $q$ -AUS norm into a Banach space which has a  $p$ -asymptotically midpoint uniformly convex norm<sup>6</sup> (in short  $p$ -AMUC norm).

We obtain the following theorem :

**Theorem.** *Let  $1 \leq p < q < \infty$ .*

*If  $Y$  is  $q$ -AUS and  $X$  is  $p$ -AMUC, then  $Y$  does not coarse Lipschitz embed into  $X$ .*

The main tool used for the proof is "the approximate midpoints principle".

Some recent articles caught our attention. Particularly, we were interested by two articles.

First, we can speak about the article [32], due to N.J. Kalton, because our main theorem (theorem 3.0.1) for this section can be seen as a consequence of a theorem of [32]. We will give some details and comments about this link in the third section. However, in our work, we were more interested in an other article, [13], which allows us to give an elementary proof of the above theorem.

The idea of the proof is as follows :

First, we show that the approximate midpoints set in an asymptotically uniformly smooth Banach space contains an infinite-dimensional ball with a "large" diameter.

Secondly, we show that the approximate midpoints set in an asymptotically midpoint uniformly convex Banach space is included in a compact perturbation of a ball with a "small" diameter.

The proposition associated to this second part of the proof is closely linked to the article [13], written by S.J. Dilworth, D. Kutzarova, N.L. Randrianarivony, J.P. Revalski and N.V. Zhivkov. In fact, the statement of this proposition is implicitly included in the theorem 2.1 of [13] and in its proof. However, it is not stated in the form of our Proposition, and the link between this property and the nonlinear embeddings does not seem to appear in the literature.

Afterwards, we give some applications of our theorem. Particularly, with the help of a renorming theorem, we deduce the following result about the Szlenk index (the definition for the Szlenk index is given in the notation after the abstract) :

*For  $1 \leq p < q < \infty$  and  $q'$  the conjugate exponent of  $q$ , if  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  is a Banach space such that*

$$\exists C_1 > 0, \forall \varepsilon > 0, \text{Sz}(Y, \varepsilon) \leq \frac{C_1}{\varepsilon^{q'}},$$

*and if  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  is a Banach space such that*

$$\exists C_2 > 0, \forall \varepsilon > 0, \text{Sz}(Z, \varepsilon) \leq \frac{C_2}{\varepsilon^p},$$

then  $Y$  does not coarse Lipschitz embed into  $Z^*$ .

The reader can find more information about the Szlenk index in [18], for instance.

#### 4. Almost Lipschitz and bilipschitz embeddings

F. Baudier and G. Lancien, in [6], introduced the concept of almost Lipschitz embeddability in order to show that, for  $p \in [1, \infty]$ , every proper subset<sup>7</sup> of  $L_p$  is almost Lipschitzly embeddable into a Banach space  $X$  if and only if  $X$  contains uniformly the  $\ell_p^n$ 's.

Moreover, an article written by M.I. Ostrovskii, [47], caught our attention. In this paper, he proved that a locally finite metric space  $A$  whose finite subsets admit uniformly bilipschitz embeddings into a Banach space  $X$ , admits a bilipschitz embedding into  $X$ .

Indeed, comparing these two works, we are tempted to speculate that, if  $X$  and  $Y$  are Banach spaces with  $X$  crudely finitely representable in  $Y$ , then any compact subset  $K$  of  $X$  almost Lipschitz embeds into  $Y$ .

Although we could not solve this question, we obtained a weaker result and a weaker assumption on  $X$  and  $Y$ , after defining the quasi-Lipschitz embeddability, which is slightly different to the the almost Lipschitz embeddability (see [6]) :

*For two Banach spaces  $X$  and  $Y$ , if  $X$  is crudely finitely representable<sup>8</sup> with constant  $C$  (where  $C > 1$ ) in any subspace  $Z$  of  $Y$  of finite codimension, then every proper subset  $M$  of  $X$  quasi-Lipschitz embeds into  $Y$ .*

The proof of this last result was inspired by the work of F. Baudier and G. Lancien in [6].

In this last section, we start by the definitions which are essential to understand the mentioned properties, as well as the other properties included in the original proofs in [6] and [47].

To conclude this section, we give some definitions and properties from [16] linked to the crudely finitely representability notion. In particular, with the definition of a locally minimal space<sup>8</sup>, we obtain a corollary, which is the following :

*Let  $X$  be a locally a minimal Banach space, and  $Y$  be a Banach space which is crudely finitely representable in  $X$ .*

*Let  $M$  be a proper subspace of  $Y$ . Then  $M$  quasi-Lipschitz embeds into  $X$ .*

## Notations (et quelques définitions basiques)

Nous allons donner quelques notations qui seront librement utilisées à travers ce travail de thèse. Pour la plupart, ce sont des notations standard.

- On notera  $|S|$  le cardinal d'un ensemble fini  $S$ .
- Soient  $M$  et  $N$  deux ensembles et  $f : M \rightarrow N$  une application. Si  $M'$  est un sous-ensemble de  $M$ , on note  $f|_{M'}$  la restriction de  $f$  à  $M'$ .

### Pour les espaces de Banach

7. see the introduction section for the definition

8. see the last section for the definition



Sauf mention contraire, un sous-espace vectoriel d'un espace de Banach sera un sous-espace fermé.

On considérera uniquement des espaces de Banach réels. Pour  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach, on notera :

- $B_X$  (respectivement  $S_X$ ) la boule unité fermée (respectivement la sphère unité) de  $X$ .
- $\mathcal{L}(X, Y)$  l'espace de Banach des opérateurs linéaires continus  $T : X \rightarrow Y$  muni de sa norme usuelle :

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|_Y.$$

- $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$  désigne le dual topologique de  $X$ .
- $\sigma(X, Y)$  est la topologie sur  $X$  de la convergence ponctuelle d'éléments de  $Y \subseteq X^*$ . En particulier, on notera parfois  $w^* = \sigma(X^*, X)$  la topologie préfaible sur  $X^*$  et  $w = \sigma(X, X^*)$  la topologie faible sur  $X$ .
- Soit  $Z$  un sous-espace de  $Y$ . On notera  $Z \in \text{cof}(Y)$  lorsque  $Z$  est de codimension finie dans  $Y$ .
- Soit  $X$  un espace de Banach et  $K$  un sous-ensemble compact pour la topologie préfaible de  $X^*$ . Pour  $\epsilon > 0$ , soit  $\mathcal{V}$  l'ensemble de tous les sous-ensembles préfaiblement ouverts  $V$  de  $K$  tels que le diamètre (pour la norme de  $X^*$ ) de  $V$  est plus petit que  $\epsilon$ , et

$$s_\epsilon K = K \setminus \bigcup \{V : V \in \mathcal{V}\}.$$

En remarque,  $s_\epsilon^\alpha B_{X^*}$  est définie de façon inductive pour tout ordinal  $\alpha$  par

$$s_\epsilon^{\alpha+1} B_{X^*} = s_\epsilon(s_\epsilon^\alpha B_{X^*})$$

et

$$s_\epsilon^\alpha B_{X^*} = \bigcap_{\beta < \alpha} s_\epsilon^\beta B_{X^*} \text{ si } \alpha \text{ est un ordinal limite.}$$

On définit  $S_z(X, \epsilon)$  comme étant le plus ordinal  $\alpha$  tel que  $s_\epsilon^\alpha B_{X^*} = \emptyset$  si un tel ordinal existe, sinon on pose  $S_z(X, \epsilon) = \infty$ , par convention.

On notera alors  $S_z(X)$  l'indice de Szlenk de  $X$ , défini par

$$S_z(X) = \sup_{\epsilon > 0} S_z(X, \epsilon).$$

Pour un exposé détaillé sur l'indice de Szlenk, on peut se référer à [38].

À noter, l'indice de Szlenk a été introduit par W. Szlenk dans [52] pour montrer qu'il n'existe pas d'espace réflexif universel pour la classe des espaces réflexifs séparables.

### Pour les espaces métriques

Soient  $(M, d_M)$  et  $(N, d_N)$  deux espaces métriques, et  $S \subset M$ . S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera  $d$  au lieu de  $d_M$  ou  $d_N$ .

- $B(x, r) \subset M$  désigne la boule fermée de  $M$  centrée en  $x \in M$  de rayon  $r \geq 0$ .
- $\text{diam}(S)$  désigne le diamètre de  $S$  :

$$\text{diam}(S) = \sup\{d(x, y) : x \neq y \in S\}.$$

- Une application  $L : M \rightarrow N$  est dite lipschitzienne si il existe  $C \geq 0$  telle que, pour tout  $x, y \in M$ ,  $d_N(L(x), L(y)) \leq C d_M(x, y)$ . Pour une telle fonction, on note  $\text{Lip}(L)$  sa meilleure constante de Lipschitz.

- 
- Espace métrique propre : un espace métrique est dit propre si chaque boule  $B(x, r)$  est compacte.
  - Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces normés isomorphes. La distance de Banach-Mazur entre  $X$  et  $Y$  est définie par

$$d(X, Y) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| : T \text{ est un isomorphisme de } X \text{ dans } Y\}.$$

Cette distance est, en général, notée  $d_{BM}$ .

- Soit  $f : M \rightarrow N$  une application.

Si  $(M, d_M)$  est non bornée, on définit

$$\forall s > 0, \quad Lip_s(f) = \sup \left\{ \frac{d_N(f(x), f(y))}{d_M(x, y)}, d_M(x, y) \geq s \right\} \quad \text{et} \quad Lip_\infty(f) = \inf_{s>0} Lip_s(f).$$



# Chapitre 1

## Préliminaires

Ce chapitre a pour objectif de fixer certaines notations, autres que celles apparaissant dans l'introduction, et de donner les définitions et outils fondamentaux pour la lecture des futurs chapitres.

Les espaces de Banach seront toujours supposés réels.

### 1.1 Espaces $\ell_p$ et $L_p$

#### 1.1.1 Les espaces de suites $\ell_p$

À toute suite de réels  $x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , lorsque  $1 \leq p < \infty$ , on associe la quantité finie ou infinie  $\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ .

L'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p < \infty\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  qui, muni de la norme  $\|\cdot\|_p$ , est un espace de Banach, noté  $\ell_p$ .

De même, si  $\|x\|_{\infty} = \sup_n |x_n|$ , l'espace de Banach  $\ell_{\infty}$  est le sous-espace vectoriel  $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_{\infty} < \infty\}$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$ .

On note  $c_0$  le sous-espace de  $\ell_{\infty}$  des suites qui convergent vers 0.

Lorsqu'on se limite aux suites finies de taille  $n$ , les espaces de dimension finie correspondant seront notés respectivement  $\ell_p^n$  et  $\ell_{\infty}^n$ .

On note  $c_{00}$  le sous-espace vectoriel de  $c_0$  des suites à support fini, c'est-à-dire les suites ayant un nombre fini de coordonnées non nulles.

#### 1.1.2 Les espaces de fonctions $L_p$

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{F}$ -mesurable.

On pose :

$$\text{si } 1 \leq p < \infty \quad \|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\text{et si } p = \infty \quad \|f\|_{\infty} = \inf\{m > 0 : \mu(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [-m, m])) = 0\}.$$

Pour  $1 \leq p \leq \infty$ , l'espace  $L_p(\Omega, \mu)$  est l'ensemble des classes d'équivalence, modulo l'égalité presque partout, des fonction  $\mathcal{F}$ -mesurables telles que  $\|f\|_p < \infty$ . Dans le cas particulier où  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F}$  est la tribu de Lebesgue et  $\mu$  la mesure de Lebesgue.  $L_p(\Omega, \mu)$

sera alors simplement noté  $L_p([0, 1])$  ou  $L_p$ .

On retrouve les espaces  $\ell_p$  lorsque l'on munit  $\Omega = \mathbb{N}$  de la tribu grossière et de la mesure de comptage.

## 1.2 Espace de Tsirelson

A la fin du chapitre 4, nous citerons à deux reprises l'espace de Tsirelson comme exemple d'espace vérifiant une propriété ou correspondant à une définition donnée. Puisque sa définition est associée à l'espace  $c_{00}$ , il nous a semblé naturel d'en parler à la suite du paragraphe sur les espaces  $\ell_p$ . Il s'agit, pour l'espace de Tsirelson original, du premier exemple d'espace de Banach qui ne contient pas de copie isomorphe de  $\ell_p$  ou  $c_0$ . Nous rappelons ici une construction de cet espace, qui a été conçu par B.S. Tsirelson [53]. On parle habituellement de nos jours du dual de l'espace que nous décrirons, noté  $T^*$ , pour désigner l'espace de Tsirelson original. L'espace que nous allons étudier ci-dessous a été décrit par T. Figiel et W.B. Johnson dans [17] et a été noté alors pour la première fois  $T$ . Des notations et terminologies pratiques sont introduites ici. Précisons, avant de commencer notre description, que la construction originale de B.S. Tsirelson de  $T^*$  est de type géométrique, tandis que la construction de T. Figiel et W.B. Johnson de  $T$  est plus analytique.

Pour  $E, F \in [\mathbb{N}^*]^{<\omega} = \{A \subset \mathbb{N}^* : A \text{ fini}\}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on écrit  $E < F$  si  $\max(E) < \min(F)$ , et  $n \leq E$  ou  $n < E$  si on a respectivement  $n \leq \min(E)$  ou  $n < \min(E)$ .

Ici, on pose  $\max(\emptyset) = 0$  et  $\min(\emptyset) = \infty$ .

On dit qu'une suite  $(E_j)_{j=1}^n \subset [\mathbb{N}^*]^{<\omega}$  est admissible si  $n \leq E_1 < E_2 < \dots < E_n$ .

Pour  $x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j \in c_0$ , on note  $\text{supp}(x) = \{j \in \mathbb{N}^* : \xi_j \neq 0\}$  le support de  $x$ , et pour

$E \in [\mathbb{N}^*]^{<\omega}$ , on note  $E(x) = \sum_{j \in E} \xi_j e_j$ .

On appelle une suite finie  $(x_j)_{j=1}^n$  d'éléments de  $c_{00}$  une suite bloc si  $\text{supp}(x_{j-1}) < \text{supp}(x_j)$  pour  $2 \leq j \leq n$ .

On définit par induction, pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , une norme  $\|\cdot\|_k$  sur  $c_{00}$  :

Pour  $x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j \in c_{00}$ , on pose  $\|x\|_0 = \max_{j \in \mathbb{N}^*} |\xi_j|$ , et si on suppose que  $\|\cdot\|_{k-1}$  a été définie

pour une valeur  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose alors :

$$\|x\|_k = \max \left( \|x\|_{k-1}, \frac{1}{2} \max \left\{ \sum_{j=1}^n \|E_j(x)\|_{k-1} : (E_j)_{j=1}^n \text{ est admissible} \right\} \right).$$

Enfin, on pose, pour  $x \in c_{00}$  :

$$\|x\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x\|_k = \max_{k \in \mathbb{N}^*} \|x\|_k.$$

$\|\cdot\|$  est alors une norme sur  $c_{00}$ , et  $T$  est défini comme étant le complété de  $c_{00}$  relativement à  $\|\cdot\|$ .

Comme observé dans [17], nous précisons que  $\|\cdot\|$  satisfait l'équation suivante, pour tout

$x \in T$  :

$$\|x\| = \max \left( \|x\|_0, \frac{1}{2} \sup \left\{ \sum_{j=1}^n \|E_j(x)\| : (E_j)_{j=1}^n \text{ est admissible} \right\} \right).$$

On rappelle, pour terminer cette description de l'espace de Tsirelson, que l'espace original de Tsirelson est le dual de  $T$ , noté  $T^*$ .

## 1.3 Notions de géométrie des espaces de Banach

### 1.3.1 Base d'un espace de Banach de dimension infinie

Donnons tout d'abord quelques définitions, propositions et théorèmes (voir [1], par exemple) relatifs à la notion de base d'un espace de Banach de dimension infinie.

**Définition 1.3.1.** Une suite d'éléments  $(e_n)_{n=1}^\infty$  dans un espace de Banach  $X$  de dimension infinie est appelée *base de Schauder* de  $X$  si, pour tout  $x \in X$ , il existe une unique suite de scalaires  $(a_n)_{n=1}^\infty$  telle que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{n=1}^N a_n e_n \right\| = 0$ .

On note alors  $x = \sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ .

**Remarque 1.3.2.** Dans ce cas, on note  $e_n^*(x) = a_n$ .

**Définition 1.3.3.** Les fonctionnelles  $(e_n^*)_{n=1}^\infty$  sont appelées les *fonctionnelles biorthogonales* relatives à  $(e_n)_{n=1}^\infty$  ou *fonctions coordonnées* associées à  $(e_n)_{n=1}^\infty$ .

**Définition 1.3.4.** Si  $(e_n)_{n=1}^\infty$  est une base de Schauder de  $X$  et  $x = \sum_{n=1}^\infty e_n^*(x) e_n \in X$ , le

*support* de  $x$  est le sous-ensemble d'entiers  $n$  tels que  $e_n^*(x) \neq 0$ . on le notera  $\text{supp}(x)$ . Si  $|\text{supp}(x)| < \infty$ , on dit que  $x$  est à *support fini*.

**Remarque 1.3.5.** Le nom *Schauder* est donné en référence à J. Schauder qui a introduit ce concept en 1927 dans [51].

**Définition 1.3.6.** Une suite  $(e_n)$  dans un espace de Banach est appelée *une suite basique* si  $(e_n)$  est une base de Schauder de  $\overline{\text{Vect}\{e_i\}} = [e_i]$ .

**Proposition 1.3.7.** Soit  $(e_i)$  une suite de vecteurs non nuls d'un espace de Banach  $X$ . La suite  $(e_i)$  est une suite basique si et seulement si il existe  $K > 0$  tel que, pour tous  $n < m$ , et pour tous les scalaires  $a_1, \dots, a_m$ , on a

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^m a_i e_i \right\|.$$

**Définition 1.3.8.** Soit  $(e_n)_{n=1}^\infty$  une base de Schauder d'un espace de Banach  $X$  et  $(P_n)_{n=1}^\infty$  les projections naturelles associées.

Rappelons que  $\sup_n \|P_n\| < \infty$ .

Le nombre  $K = \sup_n \|P_n\|$  est appelé la *constante de base*. Dans le cas optimal où  $K = 1$ , la base  $(e_n)_{n=1}^\infty$  est dite *monotone*.

**Définition 1.3.9.** Soit  $(e_n)_{n=1}^\infty$  une base de Schauder d'un espace de Banach  $X$ . Supposons que  $(p_n)_{n=1}^\infty$  est une suite d'entiers strictement croissante avec  $p_0 = 0$  et  $(a_n)_{n=1}^\infty$  une suite de scalaires.

Alors une suite de vecteurs non nuls  $(u_n)_{n=1}^\infty$  de  $X$  de la forme  $u_n = \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j e_j$  est appelée une *suite bloc-base* de  $(e_n)_{n=1}^\infty$ .

**Définition 1.3.10.** Deux bases (ou suites basiques)  $(x_n)_{n=1}^\infty$  et  $(y_n)_{n=1}^\infty$ , respectivement dans les espaces de Banach  $X$  et  $Y$ , sont *équivalentes* si, lorsqu'on prend une suite de scalaires  $(a_n)_{n=1}^\infty$ , alors  $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$  converge si et seulement si  $\sum_{n=1}^\infty a_n y_n$  converge.

On a alors le théorème suivant dont on donne la preuve :

**Théorème 1.3.11.** Deux bases (ou suites basiques)  $(x_n)_{n=1}^\infty$  et  $(y_n)_{n=1}^\infty$  sont équivalentes si et seulement si il existe un isomorphisme  $T : [x_n] \rightarrow [y_n]$  tel que  $Tx_n = y_n$  pour chaque  $n$ .

*Démonstration.* Soient  $X = [x_n]$  et  $Y = [y_n]$ .

Il est évident que  $(x_n)_{n=1}^\infty$  et  $(y_n)_{n=1}^\infty$  sont équivalentes si il existe un isomorphisme  $T$  de  $X$  dans  $Y$  tel que  $Tx_n = y_n$  pour chaque  $n$ .

Supposons maintenant que  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont équivalentes.

On définit  $T : X \rightarrow Y$  par  $T \left( \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \right) = \sum_{n=1}^\infty a_n y_n$ .

$T$  est à la fois injective et surjective.

Pour justifier que  $T$  est continue, on utilise le théorème du graphe fermé.

Supposons que  $(u_j)_{j=1}^\infty$  est une suite telle que  $u_j \rightarrow u$  dans  $X$ , et  $Tu_j \rightarrow v$  dans  $Y$ .

On écrit  $u_j = \sum_{n=1}^\infty x_n^*(u_j) x_n$  et  $u = \sum_{n=1}^\infty x_n^*(u) x_n$ .

Il s'ensuit, à l'aide de la continuité des fonctionnelles biorthogonales associées respectivement à  $(x_n)_{n=1}^\infty$  et  $(y_n)_{n=1}^\infty$ , que  $x_n^*(u_j) \rightarrow x_n^*(u)$  et  $y_n^*(Tu_j) = x_n^*(u_j) \rightarrow y_n^*(v)$  pour tout  $n$ . Par unicité de la limite,  $x_n^*(u) = y_n^*(v)$  pour tout  $n$ . Donc  $Tu = v$ , et ainsi  $T$  est continue.  $\square$

**Corollaire 1.3.12.** Soient  $(x_n)_{n=1}^\infty$  et  $(y_n)_{n=1}^\infty$  deux bases respectivement des espaces de Banach  $X$  et  $Y$ .

Alors  $(x_n)_{n=1}^\infty$  et  $(y_n)_{n=1}^\infty$  sont équivalentes si et seulement si il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toutes suites de scalaires  $(a_i)_{i=1}^\infty$ , avec un nombre fini de scalaires non nuls, on a

$$C^{-1} \left\| \sum_{i=1}^\infty a_i y_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^\infty a_i x_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^\infty a_i y_i \right\|.$$

Les définitions et la proposition qui suivent sont utiles pour comprendre le théorème de B.M. Braga, issu de [9], cité dans l'introduction du chapitre 3.

Nous donnons maintenant la définition d'une base inconditionnelle, ainsi qu'une propriété relative à cette notion.

On rappelle auparavant qu'une série  $\sum x_n$  converge inconditionnellement lorsque  $\sum \epsilon_n x_n$  converge pour tous les choix de signes  $\epsilon_n = \pm 1$ .

**Définition 1.3.13.** Une base de Schauder  $(e_n)_{n=1}^\infty$  d'un espace de Banach  $X$  est dite *inconditionnelle* si, pour tout  $x \in X$ , son développement  $x = \sum a_n e_n$  converge inconditionnellement.

Une suite  $(e_n)_{n=1}^\infty$  d'un espace de Banach  $X$  est appelée une suite basique inconditionnelle si c'est une base inconditionnelle de  $\overline{\text{Vect}\{e_n\}}$ .

**Remarque 1.3.14.** Il est simple de vérifier que la base canonique  $(e_n)_{n=1}^\infty$  de  $c_0$  ou  $\ell_p$ ,  $p \in [1, \infty)$ , est une base inconditionnelle.

**Proposition 1.3.15.** Soit  $(e_n)_{n=1}^\infty$  une suite d'un espace de Banach  $X$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i)  $(e_n)_{n=1}^\infty$  est une suite basique inconditionnelle.

(ii) Il existe une constante  $K$  telle que, pour tous scalaires  $a_1, \dots, a_m$  et signes  $\epsilon_n$ , on a

$$\left\| \sum_{n=1}^m \epsilon_n a_n e_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^m a_n e_n \right\|.$$

(iii) Il existe une constante  $L$  telle que, pour tous scalaires  $a_1, \dots, a_m$  et tout sous-ensemble  $\sigma$  de  $\{1, \dots, m\}$ , on a

$$\left\| \sum_{n \in \sigma} a_n e_n \right\| \leq L \left\| \sum_{n=1}^m a_n e_n \right\|.$$

**Remarque 1.3.16.**  $L \leq K$ .

À partir de la proposition 1.3.15, on obtient la définition suivante :

**Définition 1.3.17.** La meilleure constante possible dans la condition (ii) de la proposition précédente est appelée la *constante de base inconditionnelle* de  $(e_n)_{n=1}^\infty$ .

Une question naturelle est de savoir si tout espace de Banach contient une suite basique inconditionnelle. Ce problème de longue date a obtenu une réponse négative par l'intermédiaire de W.T. Gowers et B. Maurey dans [22].

On donne enfin la définition suivante, associée à un espace de Banach ayant une base 1-inconditionnelle :

**Définition 1.3.18.** Soient  $X$  un espace de Banach avec une base 1-inconditionnelle et  $p \in (1, \infty)$ .

On dit que la base  $(e_n)_{n=1}^\infty$  satisfait une *estimation  $\ell_p$  supérieure de constante  $C$*  (respectivement une *estimation  $\ell_p$  inférieure de constante  $C$* ) si

$$\|x_1 + \dots + x_k\|^p \leq C^p \sum_{n=1}^k \|x_n\|^p \quad \left( \text{resp. } C^p \|x_1 + \dots + x_k\|^p \geq \sum_{n=1}^k \|x_n\|^p \right),$$

pour tous  $x_1, \dots, x_k \in X$  dont les supports sont disjoints.



### 1.3.2 Décomposition de Schauder fini-dimensionnelle d'un espace de Banach

La définition ci-dessous peut être trouvée dans [15], par exemple.

**Définition 1.3.19.** Une suite  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  de sous-espaces de dimension finie d'un espace de Banach  $X$  est appelée une *décomposition de Schauder fini-dimensionnelle*, notée FDD, de  $X$  si tout  $x \in X$  a une unique représentation de la forme  $x = \sum_{n=1}^\infty x_n$  avec  $x_n \in X_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On a défini précédemment, entre autres, les notions de base monotone et de base contractante. Nous avons des définitions similaires concernant les notions de FDD monotone et de FDD contractante :

**Définition 1.3.20.** Soit  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  une FDD d'un espace de Banach  $X$ .

On définit les *projections*  $P_n$  sur  $X$  par  $P_n \left( \sum_{i=1}^\infty x_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i$ .

**Proposition 1.3.21.** Soit  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  une FDD d'un espace de Banach  $X$ . Alors  $\sup_n \|P_n\| < \infty$ .

**Définition 1.3.22.** Soit  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  une FDD d'un espace de Banach  $X$ .

On pose  $K = \sup_n \|P_n\|$ .

Dans le cas où  $K = 1$ , la FDD  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  est dite *monotone*.

### 1.3.3 Propriété d'approximation bornée

Nous nous intéressons aussi à la propriété d'approximation bornée dont nous parlerons brièvement dans le dernier chapitre. Nous en donnons la définition et une propriété dans un contexte général. Pour une vue d'ensemble des propriétés d'approximation, nous invitons le lecteur à consulter [10].

**Définition 1.3.23.** Un espace de Banach  $X$  a

- la **propriété d'approximation** (AP) si pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout sous-ensemble compact  $K$  de  $X$ , il existe un opérateur linéaire de rang fini  $T : X \rightarrow X$  tel que  $\|Tx - x\| \leq \varepsilon$ , pour tout  $x \in K$ .
- la  **$\lambda$ -propriété d'approximation bornée** ( $\lambda$ -BAP) avec  $\lambda \in [1, \infty)$  si, de plus, pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout compact  $K$ , l'opérateur  $T$  peut être choisi de norme inférieure à  $\lambda$ .
- la **propriété d'approximation bornée** (BAP) s'il existe  $\lambda$  tel que  $X$  a la  $\lambda$ -BAP.
- la **propriété d'approximation métrique** (MAP) s'il a la 1-BAP.

**Remarque 1.3.24.** Dans la définition de la BAP, les ensembles compacts  $K$  peuvent être remplacés par des ensembles finis.

Ceci n'est pas vrai pour la définition de AP.

**Proposition 1.3.25.** Si  $X$  est un espace de Banach, alors chaque affirmation implique la suivante :

- L'espace  $X$  a une base de Schauder.

- L'espace  $X$  a une FDD.
- L'espace  $X$  a la BAP.
- L'espace  $X$  a la AP.

Toutes les réciproques sont fausses.

### 1.3.4 Lemme et théorème de Mazur

Parmi les « outils » qui seront utilisés dans le dernier chapitre, nous rencontrons aussi le lemme de Mazur qui joue un rôle essentiel pour obtenir notre dernière propriété. C'est pourquoi nous le rappelons ci-dessous.

Voici une figure (copiée de [15]) pour accompagner la preuve qui suivra.

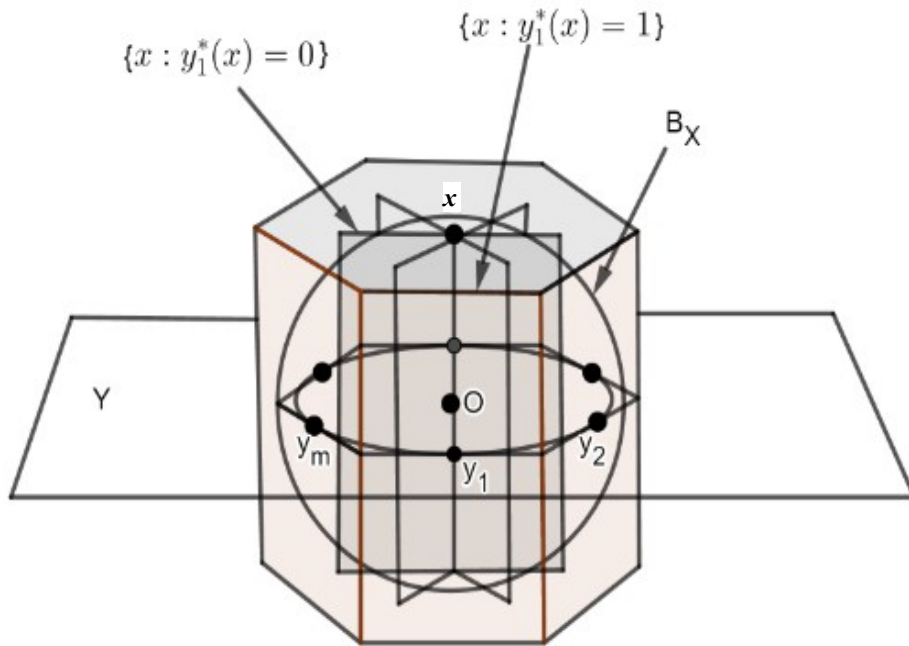


Fig. Preuve du Lemme de Mazur

**Lemme 1.3.26** (Lemme de Mazur). Soit  $X$  un espace de Banach de dimension infinie et  $Y$  un sous-espace vectoriel de  $X$  de dimension finie.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe  $F$  sous-espace vectoriel de  $X$  tel que  $\dim(X/F) < \infty$ , et

$$\forall y \in Y \quad \forall z \in F \quad \|y\| \leq (1 + \varepsilon)\|y + z\|.$$

Ainsi,  $Y + F = Y \oplus F$  et  $p : Y \oplus F \rightarrow Y$ , projection sur  $Y$  de noyau  $F$  est telle que  $\|p\| \leq 1 + \varepsilon$ .

*Démonstration.* Pour suivre cette démonstration, vous pouvez vous aider de la figure précédente.

Soient  $\delta > 0$ , et  $(y_i)_{i=1}^m$  un  $\delta$ -réseau de  $\mathcal{S}_Y$ .

Pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ , d'après le théorème de Hahn-Banach, on trouve  $y_i^* \in \mathcal{S}_{X^*}$  telle que  $y_i^*(y_i) = 1$ .

On pose alors

$$F = \bigcap_{i=1}^m \text{Ker}(y_i^*).$$

Ainsi, pour  $x \in F$ ,  $y_i^*(x) = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, m$ .

Et  $\dim(X/F) < \infty$ .

Soient  $y \in \mathcal{S}_Y$  et  $z \in F$ .

Alors il existe  $i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $\|y - y_i\| \leq \delta$ , et

$$\|y + z\| \geq \|y_i + z\| - \delta \geq y_i^*(y_i + z) - \delta \geq 1 - \delta \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} \|y\|$$

pour  $\delta$  suffisamment petit.

On conclut par homogénéité de la norme.  $\square$

**Corollaire 1.3.27** (Théorème de Mazur). *Tout espace de Banach de dimension infinie possède une suite basique.*

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ .

Alors il existe  $(\varepsilon_k)_{k=1}^\infty$  telle que, pour tout  $k$ ,  $\varepsilon_k > 0$ , et

$$\prod_{k=1}^\infty (1 + \varepsilon_k) \leq 1 + \varepsilon.$$

On construit par récurrence, grâce au lemme précédent, une suite  $(e_n)_{n=1}^\infty$  de  $\mathcal{S}_X$  telle que, pour tout  $n \geq 1$ , pour tous les scalaires  $a_1, \dots, a_{n+1}$ ,

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\| \leq (1 + \varepsilon_n) \left\| \sum_{k=1}^{n+1} a_k e_k \right\|.$$

Ainsi, pour tout  $n > m$ , pour tous les scalaires  $a_1, \dots, a_n$ ,

$$\left\| \sum_{k=1}^m a_k e_k \right\| \leq (1 + \varepsilon_m) \cdots (1 + \varepsilon_{n-1}) \left\| \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\| \leq (1 + \varepsilon) \left\| \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|.$$

$\square$

### 1.3.5 Espaces de Banach avec une norme asymptotiquement uniformément convexe ou lisse

Nous allons maintenant donner les définitions liées à la structure asymptotique uniforme d'un espace de Banach, nécessaires à la compréhension du troisième chapitre et d'une partie du second chapitre.

Considérons un espace de Banach réel  $(X, \|\cdot\|)$ . En suivant les définitions dues à V. Milman [44] et les notations de [31] et [41], pour  $t \in [0, \infty)$ ,  $x \in S_X$  et  $Y$  un sous-espace vectoriel fermé de  $X$ , on définit respectivement les modules de lissité asymptotique uniforme et de convexité asymptotique uniforme,  $\bar{\rho}_X(t)$  et  $\bar{\delta}_X(t)$  :

$$\bar{\rho}_X(t, x, Y) = \sup_{y \in S_Y} (\|x + ty\| - 1) \quad \text{et} \quad \bar{\delta}_X(t, x, Y) = \inf_{y \in S_Y} (\|x + ty\| - 1).$$

Alors

$$\bar{\rho}_X(t, x) = \inf_{Y \in \text{cof}(X)} \bar{\rho}_X(t, x, Y) \quad \text{et} \quad \bar{\delta}_X(t, x) = \sup_{Y \in \text{cof}(X)} \bar{\delta}_X(t, x, Y).$$

et

$$\bar{\rho}_X(t) = \sup_{x \in S_X} \bar{\rho}_X(t, x) \quad \text{et} \quad \bar{\delta}_X(t) = \inf_{x \in S_X} \bar{\delta}_X(t, x).$$

La norme  $\|\cdot\|$  est dite *asymptotiquement uniformément lisse* (notée AUS) si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\bar{\rho}_X(t)}{t} = 0.$$

Elle est dite *asymptotiquement uniformément convexe* (notée AUC) si

$$\forall t > 0 \quad \bar{\delta}_X(t) > 0.$$

Soient  $p \in (1, \infty)$  et  $q \in [1, \infty)$ .

On dit que la norme de  $X$  est  $p$ -AUS si il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $t \in [0, \infty)$ ,  $\bar{\rho}_X(t) \leq ct^p$ .

On dit que la norme de  $X$  est  $q$ -AUC si il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\bar{\delta}_X(t) \geq ct^q$ .

De façon similaire, il y a dans  $X^*$  un module de convexité asymptotique uniforme préfaible défini par

$$\bar{\delta}_X^*(t) = \inf_{x^* \in S_{X^*}} \sup_E \inf_{y^* \in S_E} (\|x^* + ty^*\| - 1),$$

où  $E$  parcourt tous les sous-espaces préfaiblement fermés de  $X^*$  de codimension finie.

La norme de  $X^*$  est dite *préfaiblement asymptotiquement uniformément convexe* (notée AUC\*) si  $\bar{\delta}_X^*(t) > 0$  pour tout  $t \in (0, \infty)$ .

Et si il existe  $c > 0$  et  $q \in [1, \infty)$  tels que, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\bar{\delta}_X^*(t) \geq ct^q$ , on dit que la norme de  $X^*$  est  $q$ -AUC\*. En remarque pour la suite,  $q$  est appelé le module de puissance de cette norme.

Rappelons ensuite le résultat de dualité classique suivant concernant ces modules (voir par exemple, dans [12], le Corollaire 2.3 pour les détails) :

**Proposition 1.3.28.** *Soit  $X$  un espace de Banach.*

*Alors  $\|\cdot\|_X$  est AUS si et seulement si  $\|\cdot\|_{X^*}$  est AUC\*.*

*Si  $p, q \in (1, \infty)$  sont des exposants conjugués (c'est-à-dire que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ), alors  $\|\cdot\|_X$  est  $p$ -AUS si et seulement si  $\|\cdot\|_{X^*}$  est  $q$ -AUC\*.*

Nous allons maintenant établir le lien entre une norme AUC\* et la propriété de *Kadec-Klee uniforme préfaible* :

**Définition 1.3.29.** (voir [40])

Pour un espace de Banach  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $X$  a la propriété de *Kadec-Klee uniforme* (notée UKK) si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in B_X$ , si pour tout voisinage faible  $V$  de  $x$ ,  $\text{diam}(V \cap B_X) \geq \varepsilon$ , alors  $\|x\| \leq 1 - \delta$ .

De façon analogue, sur  $X^*$ , on définit la propriété de *Kadec-Klee uniforme préfaible*, notée UKK\* :

**Définition 1.3.30.** Pour un espace de Banach  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $X^*$  a la propriété de *Kadec-Klee uniforme pour la topologie préfaible*  $\sigma(X^*, X)$  (notée UKK\*) si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\Delta > 0$  tel que pour tout  $x^* \in B_{X^*}$ , si pour tout voisinage préfaible  $V$  de  $x^*$ ,  $\text{diam}(V \cap B_{X^*}) \geq \varepsilon$ , alors  $\|x^*\| \leq 1 - \Delta$ .

Ces deux définitions, qu'on retrouve dans [40] et [39] étendent les définitions originales introduites par R. Huff [25].

On notera, pour la compréhension de la dernière partie du second chapitre, que la convexité asymptotique uniforme préfaible pour un espace de Banach dual coïncide avec la propriété UKK\*. Nous allons le détailler :

**Notations 1.3.31.** Soit  $\varepsilon > 0$ .

- On note  $\Delta_X(\varepsilon)$  le supremum de l'ensemble des  $\Delta \geq 0$  tels que, pour tout  $x^* \in B_{X^*}$ , si, pour tout voisinage préfaible,  $V$ , de  $x^*$ ,  $\text{diam}(V \cap B_{X^*}) \geq \varepsilon$ , alors  $\|x^*\| \leq 1 - \Delta$ .
- On note  $D_X(\varepsilon)$  le supremum de l'ensemble des  $\Delta' \geq 0$  tels que, pour tout  $x^* \in S_{X^*}$ , il existe un voisinage préfaible,  $V$ , de  $x^*$  tel que, si  $y^* \in V$  et  $\|y^* - x^*\| \geq \varepsilon$ , alors  $\|y^*\| \geq 1 + \Delta'$ .

**Proposition 1.3.32.** Soit  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Alors

$$\Delta_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq D_X(\varepsilon) \leq 2\Delta_X(3\varepsilon).$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

- Montrons tout d'abord que  $D_X(\varepsilon) \geq \Delta_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ .

On peut supposer que  $\Delta_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$ .

Soit  $0 < \Delta < \Delta_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ .

On raisonne par l'absurde en supposant que  $D_X(\varepsilon) < \Delta$ .

Donc il existe  $x^* \in S_{X^*}$  tel que, pour tout voisinage  $\sigma(X^*, X)$ ,  $V$ , de  $x^*$ , il existe  $y^* \in V$  vérifiant  $\|y^* - x^*\| \geq \varepsilon$  et  $\|y^*\| < 1 + \Delta$ .

On pose  $u^* = \frac{x^*}{1+\Delta}$ . Alors  $\|u^*\| = \frac{1}{1+\Delta}$ .

Soit  $W$  un voisinage préfaible quelconque de  $u^*$ .

Alors  $V = (1 + \Delta)W$  est un voisinage  $\sigma(X^*, X)$  de  $x^*$ .

Et donc, d'après notre hypothèse de départ, il existe  $y^* \in V$  vérifiant

$$\|y^* - x^*\| \geq \varepsilon \text{ et } \|y^*\| < 1 + \Delta.$$

On pose maintenant  $v^* = \frac{y^*}{1+\Delta}$ .

Ainsi,  $v^* \in W \cap B_{X^*}$ .

De plus :

$$\|u^* - v^*\| = \frac{1}{1+\Delta} \|x^* - y^*\| \geq \frac{\varepsilon}{1+\Delta} \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

car  $\Delta < 1$ , du fait que  $\Delta_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq 1$ .

On en déduit donc que  $\text{diam}(W \cap B_{X^*}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Puis,

$$\|u^*\| \leq 1 - \Delta,$$

sachant que  $\Delta < \Delta_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ .

Or,

$$\|u^*\| = \frac{1}{1+\Delta}, \text{ et } \frac{1}{1+\Delta} > 1 - \Delta,$$

puisque  $(1 - \Delta)(1 + \Delta) = 1 - \Delta^2 < 1$ , sachant que  $\Delta > 0$ .

Donc l'hypothèse de départ est fautive.

Nous avons donc montré que

$$\forall \Delta < \Delta_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad D_X(\varepsilon) \geq \Delta,$$

c'est-à-dire

$$D_X(\varepsilon) \geq \Delta_X \left( \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

• Montrons maintenant que  $D_X(\varepsilon) \leq 2\Delta_X(3\varepsilon)$ .

On peut supposer que  $D_X(\varepsilon) > 0$ .

Soit  $0 < D < D_X(\varepsilon)$ .

Raisonnons par l'absurde en supposant que  $D > 2\Delta_X(3\varepsilon)$ .

Donc il existe  $x^* \in B_{X^*}$  avec  $\|x^*\| > 1 - \frac{D}{2}$  tel que, pour tout voisinage préfaible,  $V$ , de  $x^*$ ,

$$\text{diam}(V \cap B_{X^*}) \geq 3\varepsilon.$$

On pose  $u^* = \frac{x^*}{\|x^*\|} \in S_{X^*}$ .

Soit  $V$  un voisinage préfaible de  $u^*$  tel que, si  $z^* \in V$  et  $\|z^* - u^*\| \geq \varepsilon$ , alors  $\|z^*\| \geq 1 + D$ .

$V$  existe car  $D < D_X(\varepsilon)$ .

$W = \|x^*\|V$  est un voisinage préfaible de  $x^*$ .

Donc

$$\text{diam}(W \cap B_{X^*}) \geq 3\varepsilon,$$

puis

$$\text{diam} \left( V \cap \frac{1}{\|x^*\|} B_{X^*} \right) \geq \frac{3\varepsilon}{\|x^*\|}.$$

Ainsi, il existe  $z^* \in V \cap \frac{1}{\|x^*\|} B_{X^*}$  tel que

$$\|z^* - u^*\| \geq \frac{\varepsilon}{\|x^*\|} \geq \varepsilon.$$

Et on en déduit donc que  $\|z^*\| \geq 1 + D$ .

Par ailleurs, on a  $\|z^*\| \cdot \|x^*\| \leq 1$ .

Donc

$$\|z^*\| \leq \frac{1}{1 - \frac{D}{2}}.$$

On en déduit :

$$\frac{1}{1 - \frac{D}{2}} \geq 1 + D.$$

Puis :

$$D - D^2 \leq 0,$$

ce qui est impossible pour  $D < 1$ , ce qui est le cas, sachant que  $\varepsilon < 1$  et ainsi  $D_X(\varepsilon) \leq 1$ , du fait que  $D_X(\varepsilon) \leq \varepsilon$ , ce qui se justifie par simple inégalité triangulaire. On en déduit donc que  $D_X(\varepsilon) \leq 2\Delta_X(3\varepsilon)$ .  $\square$

**Proposition 1.3.33.** *Soit  $\varepsilon > 0$ .*

*Alors  $D_X(\varepsilon) = \bar{\delta}_X^*(\varepsilon)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ .

• Montrons tout d'abord que  $\bar{\delta}_X^*(\varepsilon) \geq D_X(\varepsilon)$ .

On peut supposer que  $D_X(\varepsilon) > 0$ .

Soit  $0 < \Delta' < D_X(\varepsilon)$ .

Alors, pour  $x^* \in S_{X^*}$ , il existe un voisinage préfaible,  $V$ , de  $x^*$  tel que, si  $y^* \in V$  et

$\|y^* - x^*\| \geq \varepsilon$ , alors  $\|y^*\| \geq 1 + \Delta'$ .

On peut supposer qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_1, \dots, x_k$  dans  $X$ , et  $\eta > 0$  tels que

$$V = \bigcap_{i=1}^k \{y^* \in X^*, |(y^* - x^*)(x_i)| < \eta\}.$$

On pose alors

$$E = \bigcap_{i=1}^k \{y^* \in X^*, y^*(x_i) = 0\}.$$

$E$  est un sous-espace vectoriel préfaiblement fermé de codimension finie de  $X^*$ .

Soit  $u^* \in E$  tel que  $\|u^*\| \geq \varepsilon$ .

Alors  $x^* + u^* \in V$ , et donc  $\|x^* + u^*\| \geq 1 + \Delta'$ .

On en déduit ainsi que

$$\Delta' \leq \bar{\delta}_X^*(\varepsilon),$$

puis

$$D_X(\varepsilon) \leq \bar{\delta}_X^*(\varepsilon).$$

• Montrons maintenant que  $\bar{\delta}_X^*(\varepsilon) \leq D_X(\varepsilon)$ .

On va montrer en fait que, pour  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $\bar{\delta}_X^*(\lambda\varepsilon) \leq D_X(\varepsilon)$ .

Ainsi, par continuité de  $\varepsilon \mapsto \bar{\delta}_X^*(\varepsilon)$ , on obtiendra le résultat souhaité.

On peut supposer que  $\bar{\delta}_X^*(\lambda\varepsilon) > 0$ . Soit donc  $\lambda \in (0, 1)$ , et  $\delta < \bar{\delta}_X^*(\lambda\varepsilon)$ .

On pose  $\delta < \delta' < \bar{\delta}_X^*(\lambda\varepsilon)$ .

Soit  $x^* \in S_{X^*}$ . Il existe

$$Y = \bigcap_{i=1}^k \{y^* \in X^*, y^*(x_i) = 0\},$$

avec  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_k \in X$ , tel que, pour tout  $v^* \in Y$ , si  $\|v^*\| \geq \lambda\varepsilon$ , alors

$$\|x^* + v^*\| \geq 1 + \delta'.$$

Fixons  $\eta > 0$ , puis  $\eta' > 0$ .

On pose

$$V = \bigcap_{i=1}^k \{y^* \in X^*, |y^*(x_i)| < \eta'\}.$$

Soit  $u^* \in V$  tel que  $\|u^*\| \geq \varepsilon$ .

Pour  $F = \text{Vect}\{x_j, 1 \leq j \leq k\}$ , on a  $F^\perp = Y$ .

On a  $d(u^*, Y) < \eta$ , si  $\eta'$  est choisi suffisamment petit, sachant que

$$d(u^*, Y) = \|u^*\|_{X^*/F^\perp} = \|u^*\|_{F^*}.$$

Dans ce cas :

$$\exists v^* \in Y, \|u^* - v^*\| \leq \eta.$$

D'où :

$$\|v^*\| \geq \lambda\varepsilon,$$

si  $\eta$  est choisi suffisamment petit.

Donc

$$\|x^* + v^*\| \geq 1 + \delta'.$$

Puis

$$\|x^* + u^*\| \geq 1 + \delta,$$

à nouveau si  $\eta$  est choisi suffisamment petit.

On peut alors conclure que  $\bar{\delta}_X^*(\lambda\varepsilon) \leq D_X(\varepsilon)$ .

□

**Corollaire 1.3.34.** *Soit  $X$  un espace de Banach.*

*$X^*$  a la propriété  $UKK^*$  si et seulement si  $\|\cdot\|_{X^*}$  est  $AUC^*$ .*

**Définition 1.3.35.** Soit  $X$  un espace de Banach.

Si il existe  $C > 0$  et  $q \in [1, \infty)$  tels que, pour tout  $\varepsilon \in [0, 1]$ ,  $\Delta_X(\varepsilon) \geq C\varepsilon^q$ , on dit que la norme de  $X^*$  est  $q$ - $UKK^*$ .

**Corollaire 1.3.36.** *Soit  $X$  un espace de Banach, et  $q \in [1, \infty)$ .*

*$\|\cdot\|_{X^*}$  est  $q$ - $AUC^*$  si et seulement si  $\|\cdot\|_{X^*}$  est  $q$ - $UKK^*$ .*

Dans l'introduction du chapitre 3, nous évoquons brièvement la propriété  $p$ -co-Banach-Saks pour un espace de Banach. Nous donnons donc sa définition, ainsi que celle de la propriété  $p$ -Banach-Saks.

Pour justifier l'apparition de cette définition dans ce sous-paragraphe, la propriété qui suit évoquera un lien entre ces notions et celles d'espaces de Banach  $p$ -AUC ou  $p$ -AUS.

**Définition 1.3.37.** Soit  $p \in (1, \infty)$ .

On dit qu'un espace de Banach a la *propriété  $p$ -Banach-Saks* (respectivement  *$p$ -co-Banach-Saks*) si, pour toute suite  $(x_n)_{n=1}^\infty$  de  $X$  convergeant faiblement vers 0 telle que  $\inf_j \|x_j\| > 0$ ,

il existe une sous-suite  $(x_{n_j})_{j=1}^\infty$  et  $c > 0$  tels que

$$\|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| \leq ck^{\frac{1}{p}} \quad (\text{resp. } \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| \geq ck^{\frac{1}{p}})$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tous  $k \leq n_1 < \cdots < n_k$ .

La proposition donnée ci-dessous est une combinaison des propositions 1.2, 1.3 et 1.6 de [14], en notant que la proposition 1.6 mentionne uniquement la propriété  $p$ -Banach-Saks, mais qu'une modification simple de la preuve nous donnera le résultat pour la propriété  $p$ -co-Banach-Saks.

**Proposition 1.3.38.** *Soient  $p \in (1, \infty)$  et un espace de Banach  $X$ .*

*Si  $X$  est  $p$ -asymptotiquement uniformément lisse (respectivement  $p$ -asymptotiquement uniformément convexe), alors  $X$  a la propriété  $p$ -Banach-Saks (respectivement la propriété  $p$ -co-Banach-Saks).*

Toujours dans le chapitre 3, nous allons faire intervenir la notion de norme asymptotiquement uniformément médian (notée AMUC). Cette notion a été introduite dans [13], et a été motivée par la notion de convexité uniforme locale médian (MLUC), introduite dans le travail de thèse de K.W. Anderson [2].



Commençons par définir, dans un espace de Banach réel  $(X, \|\cdot\|)$ , et donner la notation du module de convexité asymptotique uniforme médian, pour  $t \in [0, \infty)$  :

$$\tilde{\delta}_X(t) = \inf_{x \in S_X} \sup_{Y \in \text{cof}(X)} \inf_{y \in S_Y} \max\{\|x + ty\|, \|x - ty\|\} - 1.$$

On dit alors que la norme  $\|\cdot\|$  est asymptotiquement uniformément uniformément convexe médian (notée AMUC) si

$$\forall t > 0 \quad \tilde{\delta}_X(t) > 0.$$

Soit maintenant  $q \in [1, \infty)$ .

On dit que la norme de  $X$  est  $q$ -AMUC si il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\tilde{\delta}_X(t) \geq ct^q$ .

On a la propriété suivante :

**Proposition 1.3.39.** *On a*

$$\forall t \geq 0, \quad \tilde{\delta}_X(t) \geq \bar{\delta}_X(t).$$

*Démonstration.* La preuve est immédiate en reprenant les définitions des modules  $\tilde{\delta}_X(t)$  et  $\bar{\delta}_X(t)$ , puisque, pour tout  $t \in [0, \infty)$  et tous  $x, y \in X$ , on a

$$\max\{\|x + ty\|, \|x - ty\|\} - 1 \geq \|x + ty\| - 1.$$

□

En particulier, on a les deux propriétés suivantes qui sont des corollaires de la proposition 1.3.39 :

**Corollaire 1.3.40.** *Si un espace de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  a une norme AUC, alors cette norme est AMUC.*

**Corollaire 1.3.41.** *Soit  $q \in [1, \infty)$ .*

*Si un espace de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  a une norme  $q$ -AUC, alors cette norme est  $q$ -AMUC.*

### 1.3.6 Indice de Szlenk

La définition et les notations associées à l'indice de Szlenk ont été données à la fin du chapitre d'introduction.

Nous donnons maintenant des définitions et propriétés relatives à cet indice, utiles pour suivre les dernières démonstrations du troisième chapitre.

Nous commençons par une propriété due à W. Szlenk (voir [52]), qu'on peut retrouver dans [24], avec sa démonstration (lemme 2.39 de ce livre).

Pour bien comprendre cette propriété, nous rappelons auparavant la définition suivante d'un espace de Asplund.

**Définition 1.3.42.** Un espace de Banach  $X$  est appelé *espace de Asplund* si toute fonction continue convexe  $f$  sur chaque sous-ensemble convexe ouvert  $U$  de  $X$ , à images dans  $\mathbb{R}$ , est Fréchet-différentiable en tout point  $x$  d'un sous-ensemble  $G_\delta$  (c'est-à-dire que ce sous-ensemble est une intersection dénombrable d'ensembles ouverts) dense de  $U$ .

**Remarque 1.3.43.** On a la caractérisation suivante : Un espace de Banach est un espace de Asplund si tout sous-espace séparable a un dual séparable.

**Proposition 1.3.44.** *Soit  $X$  un espace de Asplund, et  $Y$  un espace de Banach isomorphe à un sous-espace de  $X$ . Alors  $Sz(Y) \leq Sz(X)$ .*

Dans [36], H. Knaust, E. Odell et Schlumprecht ont obtenu le théorème suivant, qui contient des informations sur les espaces de Banach séparables admettant une norme équivalente AUS.

**Théorème 1.3.45.** *Soit  $X$  un espace de Banach séparable. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $X$  admet une norme équivalente AUS.
- (ii)  $Sz(X) \leq \omega$  ( $\omega$  désigne le premier ordinal infini).
- (iii) Il existe  $q \in [1, \infty)$  tel que  $X$  admet une norme équivalente, dont la norme duale est  $q$ -AUC\*.
- (iv) Il existe  $C > 0$  et  $p \in [1, \infty)$  tels que :  $\forall \varepsilon > 0, Sz(X, \varepsilon) \leq C\varepsilon^{-p}$ .
- (v) Il existe  $p \in (1, \infty)$  tel que  $X$  admet une norme équivalente  $p$ -AUS.

Le cas non séparable a été prouvé par M. Raja dans [50].

**Définition 1.3.46.** Soit  $X$  un espace de Banach séparable avec  $Sz(X) \leq \omega$ . On définit la puissance de Szlenk de  $X$  par

$$p_X = \inf\{q \geq 1, \sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon^q Sz(X, \varepsilon) < \infty\}.$$

Nous pouvons maintenant donner le théorème 4.8 de [18] qui interviendra dans le chapitre 3. C'est une version optimale de l'implication (iv)  $\Rightarrow$  (iii) du théorème précédent.

**Théorème 1.3.47.** *Supposons que  $X$  est un espace de Banach séparable avec  $Sz(X) \leq \omega$ . Soit  $p_X$  la puissance de Szlenk de  $X$ . Alors pour tout  $q > p_X$ , il y a une norme 2-équivalente  $|\cdot|$  sur  $X$  et une constante  $c > 0$  telles que si  $0 < \tau \leq 1$  et  $x^*, x_n^* \in X^*$  vérifient  $|x^*| = 1$ ,  $|x_n^*| = \tau$  et  $w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^* = 0$ , alors*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |x^* + x_n^*| \geq 1 + c\tau^q.$$

## 1.4 Notions métriques

Afin de comparer la géométrie de deux espaces de Banach, ou tout simplement de deux espaces métriques, nous sommes souvent confrontés à des applications non linéaires. Nous en avons déjà touché un mot rapide en introduction, mais sans donner les définitions qui suivent.

Nous citons ici les plus "classiques", sachant qu'elles sont à l'origine des deux applications que nous rencontrerons essentiellement dans ce travail de thèse, à savoir les plongements grossièrement Lipschitz et les plongements presque Lipschitz, dont la définition a été donnée dans l'introduction de ce travail de thèse.

**Définition 1.4.1.** ([37]) Soient  $(M, d)$  et  $(N, \delta)$  deux espaces métriques et  $f : M \rightarrow N$  une application.

L'application  $f : M \rightarrow N$  est un *plongement lipschitzien* si

$$\exists A, B > 0 \quad \forall x, y \in M \quad Ad(x, y) \leq \delta(f(x), f(y)) \leq Bd(x, y).$$

**Définition 1.4.2.** (voir, par exemple, [4] et [48]) Soient  $(M, d)$  et  $(N, \delta)$  deux espaces métriques et  $f : M \rightarrow N$  une application. Pour  $t \geq 0$ , on rappelle les deux notations suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_f(t) &= \text{Inf}\{\delta(f(x), f(y)) : x, y \in M, d(x, y) \geq t\} \\ \omega_f(t) &= \text{Sup}\{\delta(f(x), f(y)) : x, y \in M, d(x, y) \leq t\} \end{aligned}$$

1.  $f$  est un *plongement grossier* si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_f(t) = \infty$  et  $\omega_f(t) < \infty$  pour tout  $t \geq 0$ .
2.  $f$  est un *plongement uniforme* si  $\lim_{t \rightarrow 0} \omega_f(t) = 0$  et  $\rho_f(t) > 0$  pour tout  $t > 0$ .
3.  $f$  est un *plongement fortement uniforme* si  $f$  est simultanément un plongement uniforme et grossier.

**Remarque 1.4.3.** On a les implications triviales suivantes :

$f$  plongement lipschitzien  $\implies f$  plongement uniforme

$\Downarrow$

$f$  plongement grossier.

Pour une discussion détaillée concernant les applications non linéaires citées, on peut consulter [33].

Dans le but de mettre en place une fine échelle de graduation pour les plongements grossiers, E. Guentner et J. Kaminker ont introduit dans [23] la notion suivante.

**Définition 1.4.4.** [41] Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach. L'*exposant de compression* de  $X$  dans  $Y$ , noté  $\alpha_Y(X)$  est le supremum de tous les  $\alpha \in (0, 1]$  tels qu'il existe une constante  $C > 0$  et une application  $f : X \rightarrow Y$  vérifiant

$$\forall x, x' \in X \quad C^{-1}\|x - x'\|^\alpha - C \leq \|f(x) - f(x')\| \leq C\|x - x'\| + C.$$

# Chapitre 2

## Espaces $\ell_p$ , $J_p$ et plongements grossièrement Lipschitz

En 2008, N.J. Kalton et N.L. Randrianarivony [34] ont prouvé que, si  $r \notin \{p_1, \dots, p_n\}$  où  $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_n < \infty$ , alors  $\ell_r$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $\ell_{p_1} \oplus \dots \oplus \ell_{p_n}$ , et en particulier, si  $p \neq q$ , avec  $p, q \in [1, \infty)$ , alors  $\ell_p$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $\ell_q$ . C'est ce résultat et les preuves qui lui sont associées qui ont inspiré et motivé le travail effectué sur les espaces de James dans ce chapitre.

On rappelle, avant de détailler ce travail, la définition suivante d'un plongement grossièrement Lipschitz :

**Définition 2.0.1.** Soient  $(M, d)$  et  $(N, \delta)$  deux espaces métriques et  $f : M \rightarrow N$ . L'application  $f$  est appelée *plongement grossièrement Lipschitz* si il existe  $\theta, A, B > 0$  tels que

$$\forall x, y \in M, \quad d(x, y) \geq \theta \Rightarrow Ad(x, y) \leq \delta(f(x), f(y)) \leq Bd(x, y).$$

Dans ce cas, on dit que  $M$  se plonge grossièrement Lipschitz dans  $N$ .

### 2.1 Milieux approchés, lemme de Kalton-Randrianarivony et Graphes de Hamming

N.J. Kalton and N.L. Randrianarivony, dans le travail cité auparavant, ont fait intervenir les définitions et propriétés suivantes relatives aux notions de milieux approchés et de graphes. Nous en aurons besoin pour les preuves intervenant dans la seconde partie de ce chapitre, et aussi dans le troisième chapitre.

**Définition 2.1.1.** Étant donné un espace métrique  $X$ , deux points  $x, y \in X$ , et  $\delta > 0$ , l'ensemble des milieux approchés entre  $x$  et  $y$  avec une erreur  $\delta$  est l'ensemble :

$$Mid(x, y, \delta) = \left\{ z \in X : \max\{d(x, z), d(y, z)\} \leq (1 + \delta) \frac{d(x, y)}{2} \right\}$$

La version donnée de la proposition suivante sur les milieux approchés a été formulée dans [34] (voir aussi le lemme 10.11 de [7]).

Pour aider à la compréhension de quelques démonstrations qui interviendront dans ce chapitre et dans le suivant, et surtout pour le rôle prépondérant de cette proposition dans ce travail de thèse, nous en donnerons une démonstration, issue de [37].

**Proposition 2.1.2.** *Soient  $X$  et  $M$  deux espaces normés.*

*Soit  $f : X \rightarrow M$  une application grossièrement Lipschitz.*

*Si  $Lip_\infty(f) > 0$ , alors pour tous  $t, \varepsilon > 0$  et tout  $0 < \delta < 1$ , il existe  $x, y \in X$  avec  $\|x - y\| > t$  et*

$$f(\text{Mid}(x, y, \delta)) \subset \text{Mid}(f(x), f(y), (1 + \varepsilon)\delta).$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon' > 0$ . Il existe  $s > t$  tel que  $Lip_s(f) \leq (1 + \varepsilon')Lip_\infty(f)$ . Alors on peut trouver  $x, y \in X$  tels que

$$\|x - y\| \geq \frac{2s}{1 - \delta} \quad \text{et} \quad \|f(x) - f(y)\| \geq \frac{1}{1 + \varepsilon'} Lip_\infty(f) \|x - y\| \geq \frac{1}{(1 + \varepsilon')^2} Lip_s(f) \|x - y\|.$$

Soit alors  $u \in \text{Mid}(x, y, \delta)$ . On a  $\|y - u\| \geq \frac{1 - \delta}{2} \|x - y\| \geq s$ . Donc

$$\|f(y) - f(u)\| \leq Lip_s(f) \|y - u\| \leq Lip_s(f) \frac{1 + \delta}{2} \|x - y\| \leq (1 + \varepsilon')^2 \frac{1 + \delta}{2} \|f(x) - f(y)\|.$$

De même, on trouve

$$\|f(x) - f(u)\| \leq (1 + \varepsilon')^2 \frac{1 + \delta}{2} \|f(x) - f(y)\|.$$

Enfin, un choix de  $\varepsilon'$  suffisamment petit permet de conclure cette preuve.  $\square$

En se plaçant dans  $\ell_p$ , à la suite de cette proposition, il apparaît naturel d'étudier l'ensemble des milieux approchés, ce qui est fait dans le lemme suivant qu'on peut trouver dans [34].

**Lemme 2.1.3.** *Soit  $1 \leq p < \infty$ .*

*On note  $(e_i)_{i=1}^\infty$  la base canonique de  $\ell_p$  et pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $E_N = \overline{\text{Vect}}\{e_i, i > N\}$ .*

*Soient  $x, y \in \ell_p$ ,  $\delta \in (0, 1)$ ,  $u = \frac{x+y}{2}$  et  $v = \frac{x-y}{2}$ . Alors*

*(i) Il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que*

$$u + \delta^{\frac{1}{p}} \|v\| B_{E_N} \subset \text{Mid}(x, y, \delta).$$

*(ii) Il existe un sous-ensemble compact  $K$  de  $\ell_p$  tel que*

$$\text{Mid}(x, y, \delta) \subset K + 2\delta^{\frac{1}{p}} \|v\| B_{\ell_p}.$$

Rappelons maintenant la définition des graphes métriques, introduite dans [34]. Cette notion sera cruciale dans nos démonstrations.

**Notation 2.1.4.** Soient  $\mathbb{M}$  un sous-ensemble infini de  $\mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . On note

$$G_k(\mathbb{M}) = \{\bar{n} = (n_1, \dots, n_k), n_i \in \mathbb{M} \quad n_1 < \dots < n_k\}.$$

Alors on équipe  $G_k(\mathbb{M})$  de la distance de Hamming  $d_H(\bar{n}, \bar{m}) = |\{j, n_j \neq m_j\}|$ .

Rappelons aussi le théorème de Ramsey et un de ses corollaires immédiat (voir [21]).

**Théorème 2.1.5.** *Soient  $k, r \in \mathbb{N}^*$  et  $f : G_k(\mathbb{N}^*) \rightarrow \{1, \dots, r\}$  une application. Alors il existe un sous-ensemble infini  $\mathbb{M}$  de  $\mathbb{N}^*$  et  $i \in \{1, \dots, r\}$  tels que, pour tout  $\bar{n} \in G_k(\mathbb{M})$ ,  $f(\bar{n}) = i$ .*

**Corollaire 2.1.6.** *Soient  $(K, d)$  un espace métrique compact,  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $f : G_k(\mathbb{N}^*) \rightarrow K$ . Alors, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un sous-ensemble infini  $\mathbb{M}$  de  $\mathbb{N}^*$  tel que pour tous  $\bar{n}, \bar{m} \in G_k(\mathbb{M})$ ,  $d(f(\bar{n}), f(\bar{m})) < \epsilon$ .*

L'utilisation des milieux approchés va nous permettre de montrer que, si  $1 < p < q < \infty$ , alors  $J_q$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $J_p$ . Nous verrons plus tard (chapitre 3) que les milieux approchés interviennent pour justifier, de façon plus générale, que certains espaces de Banach "trop asymptotiquement lisses" ne se plongent pas grossièrement Lipschitz dans d'autres espaces de Banach "trop asymptotiquement convexes".

Quant aux graphes de Hamming, ils vont nous permettre de montrer que, si  $1 < q < p < \infty$ , alors  $J_q$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $J_p$ .

Nous verrons au chapitre 3 une généralisation de ces résultats.

## 2.2 Plongements grossièrement Lipschitz et espaces de James

Cette partie reprend l'article [46] publié en 2018 dans le Bulletin de la Société Mathématique de Belgique (BBMS).

### 2.2.1 Espaces $J_p$ et $J_p^{**}$

R.C. James a introduit dans [26] un espace non réflexif défini par :

$$J = \left\{ x : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ vérifiant } x(n) \rightarrow 0 \text{ et } \|x\|_J = \sup_{p_1 < \dots < p_n} \left( \sum_{i=1}^{n-1} |x(p_{i+1}) - x(p_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

On utilisera les espaces suivants (où  $1 < p < \infty$ ), qui sont inspirés de  $J$  (on les qualifiera d'espaces de James) :

$$J_p = \left\{ x : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ vérifiant } x(n) \rightarrow 0 \text{ et } \|x\|_{J_p} = \sup_{p_1 < \dots < p_n} \left( \sum_{i=1}^{n-1} |x(p_{i+1}) - x(p_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

Comme dans le cas de  $J$ , la codimension de  $J_p$  dans  $J_p^{**}$  est 1.

Dans ce contexte, nous précisons que  $J_p^{**}$  peut être vu ainsi :

$$J_p^{**} = \left\{ x : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ vérifiant } \sup_{p_1 < \dots < p_n} \left( \sum_{i=1}^{n-1} |x(p_{i+1}) - x(p_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

Tous ces espaces ont été étudiés dans [49].

**Notation 2.2.1.** Soit  $e_n$  défini par  $e_n(k) = \delta_{n,k}$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ . La suite  $(e_n)_{n=1}^\infty$  est une base de Schauder de  $J_p$  (où  $p > 1$ ).

De plus, la suite des fonctions coordonnées  $(e_n^*)_{n=1}^\infty$  associée à  $(e_n)_{n=1}^\infty$  est une base de Schauder de  $J_p^*$ .

Pour  $x \in J_p$ , on rappelle que  $\text{supp}(x) = \{n \in \mathbb{N}^*, e_n^*(x) \neq 0\}$  (support de  $x$ ).

Lorsque  $u$  et  $v$  dans  $J_p$  ont des supports disjoints consécutifs relativement à  $(e_n)_{n=1}^\infty$ , on notera  $u \prec v$ .

De même, lorsque  $u^*$  et  $v^*$  dans  $J_p^*$  ont des supports disjoints consécutifs relativement à  $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ , on notera  $u^* \prec v^*$ .

On démarre avec la construction d'une norme équivalente ad'hoc sur  $J_p$ . On suit la construction donnée dans [40] pour  $J_2$ .

**Lemme 2.2.2.** *Soient  $x_1, \dots, x_n$  dans  $J_p$  tels que leurs supports sont consécutifs et finis relativement à la base  $(e_n)_{n=1}^\infty$ . Alors*

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|_{J_p}^p \leq (2^p + 1) \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{J_p}^p.$$

*Démonstration.* On peut trouver des intervalles disjoints de  $\mathbb{N}^*$ ,  $[s_i, s'_i]$ , avec  $1 \leq i \leq n$  et  $s'_i < s_{i+1}$ , tels que :

$\forall 1 \leq i \leq n$ ,  $\text{supp}(x_i) \subset [s_i, s'_i]$  (Par commodité, on fixe  $s_1 = 0$  et on note  $s_{n+1} = \infty$ ).

Soit maintenant  $q_1 < \dots < q_k$  une suite arbitraire de  $\mathbb{N}^*$ . On doit montrer que

$$\sum_{j=1}^{k-1} |y(q_j) - y(q_{j+1})|^p \leq (2^p + 1) \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{J_p}^p,$$

où  $y = \sum_{i=1}^n x_i$ .

Il existe une suite strictement croissante  $(i_m)_{m=1}^l$  de  $\{1, \dots, n\}$  et une suite strictement croissante  $(j_m)_{m=1}^l$  de  $\{1, \dots, k\}$  avec  $j_1 = 1$  telles que,

pour tout  $1 \leq m \leq l-1$ ,  $\{q_{j_m}, \dots, q_{j_{m+1}-1}\} \subset [s_{i_m}, s_{i_{m+1}})$ . Donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k-1} |y(q_j) - y(q_{j+1})|^p &= \sum_{j=1}^{j_2-2} |y(q_j) - y(q_{j+1})|^p + |y(q_{j_2-1}) - y(q_{j_2})|^p + \sum_{j=j_2}^{j_3-2} |y(q_j) - y(q_{j+1})|^p \\ &\quad + \dots + |y(q_{j_{l-1}-1}) - y(q_{j_{l-1}})|^p + \sum_{j=j_{l-1}}^{j_l-2} |y(q_j) - y(q_{j+1})|^p. \end{aligned}$$

On a

$$\forall 1 \leq m \leq l-1, \sum_{j=j_m}^{j_{m+1}-2} |y(q_j) - y(q_{j+1})|^p \leq \|x_{i_m}\|_{J_p}^p.$$

Et pour tout  $2 \leq m \leq l-1$ ,

$$|y(q_{j_{m-1}-1}) - y(q_{j_m})|^p \leq 2^{p-1} |y(q_{j_{m-1}-1})|^p + 2^{p-1} |y(q_{j_m})|^p \leq 2^{p-1} \|x_{i_{m-1}}\|_{J_p}^p + 2^{p-1} \|x_{i_m}\|_{J_p}^p.$$

Ainsi

$$\sum_{j=1}^{k-1} |y(q_j) - y(q_{j+1})|^p \leq (2^{p-1} + 1) \|x_{i_1}\|_{J_p}^p + (2^p + 1) \|x_{i_2}\|_{J_p}^p + \dots + (2^p + 1) \|x_{i_{l-1}}\|_{J_p}^p + (2^{p-1} + 1) \|x_{i_l}\|_{J_p}^p.$$

Cela conclut la preuve de notre lemme.  $\square$

On définit maintenant une nouvelle norme sur  $J_p^*$  comme suit. Soit  $q$  l'exposant conjugué de  $p$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , avec  $p \in (1, \infty)$ . Pour  $x^* \in J_p^*$ , on pose

$$|x^*|_{J_p^*} = \sup \left\{ \left( \sum_{i=1}^n \|x_i^*\|_{J_p^*}^q \right)^{\frac{1}{q}} : x^* = x_1^* + \dots + x_n^* \text{ et } x_1^* \prec \dots \prec x_n^* \right\},$$

où  $\|\cdot\|_{J_p^*}$  est la norme duale de  $\|\cdot\|_{J_p}$ . Notons que  $x_n^*$  n'est pas nécessairement à support fini.

On peut maintenant établir la proposition suivante :

**Proposition 2.2.3.** *La norme  $|\cdot|_{J_p^*}$  est la norme duale d'une norme équivalente sur  $J_p$  (que nous noterons  $|\cdot|_{J_p}$ ).*

*De plus,  $|\cdot|_{J_p^*}$  satisfait la propriété suivante :*

*pour tous  $x^*, y^*$  dans  $J_p^*$  tels que  $x^* \prec y^*$ , nous avons*

$$|x^* + y^*|_{J_p^*}^q \geq |x^*|_{J_p^*}^q + |y^*|_{J_p^*}^q.$$

*Démonstration.* Pour montrer que  $|\cdot|_{J_p^*}$  est une norme, on détaillera seulement la preuve de l'inégalité triangulaire.

Soit  $(x^*, y^*) \in (J_p^*)^2$  que nous pouvons supposer à supports finis.

Soit maintenant  $u_1^* \prec u_2^* \prec \dots \prec u_n^*$  dans  $J_p^*$  tels que

$$x^* + y^* = u_1^* + \dots + u_n^*$$

.

On écrit, pour  $i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$ ,  $u_i^* = x_i^* + y_i^*$ , où  $x^* = \sum_{i=1}^n x_i^*$  et  $y^* = \sum_{i=1}^n y_i^*$ .

Grâce à l'inégalité triangulaire pour  $\|\cdot\|_{J_p^*}$ , on obtient :

$$\left( \sum_{i=1}^n \|u_i^*\|_{J_p^*}^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left( \sum_{i=1}^n (\|x_i^*\|_{J_p^*} + \|y_i^*\|_{J_p^*})^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

On déduit alors de l'inégalité de Minkowski que

$$\left( \sum_{i=1}^n \|u_i^*\|_{J_p^*}^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left( \sum_{i=1}^n \|x_i^*\|_{J_p^*}^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \sum_{i=1}^n \|y_i^*\|_{J_p^*}^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq |x^*|_{J_p^*} + |y^*|_{J_p^*}.$$

On a ainsi montré que l'inégalité triangulaire est vérifiée pour  $|\cdot|_{J_p^*}$ .

Ensuite, on montre que, pour  $x_1^*, \dots, x_n^*$  dans  $J_p^*$  satisfaisant  $x_1^* \prec \dots \prec x_n^*$  relativement à la base  $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ , on a :

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i^* \right\|_{J_p^*}^q \geq \frac{1}{2^q (2^p + 1)^{q-1}} \sum_{i=1}^n \|x_i^*\|_{J_p^*}^q. \quad (2.1)$$

Soit alors  $x_1^* \prec \dots \prec x_n^*$ , avec, pour  $i \in [1, n-1] \cap \mathbb{N}$ ,  $\text{supp}(x_i^*) \subseteq [r_i, s_i]$ , où  $s_i < r_{i+1}$  pour  $i \in [1, n-2]$ , et  $\text{supp}(x_n^*) \subseteq [r_n, \infty)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ .

$$\exists y_i \in J_p, \begin{cases} x_i^*(y_i) \geq \|x_i^*\|_{J_p^*}^q - \varepsilon \\ \|y_i\|_{J_p} \leq \|x_i^*\|_{J_p^*}^{q-1} \end{cases}$$



Pour  $r \in \mathbb{N}^*$ , notons  $P_r$  la projection sur l'espace vectoriel engendré par  $\{e_i, 1 \leq i \leq r\}$  de noyau  $\overline{\text{Vect}}\{e_i, i > r\}$ .

Comme  $(e_i)_{i=1}^\infty$  est une base monotone,  $\|P_{s_i} - P_{r_{i-1}}\| \leq 2$  et, pour  $x_i = (P_{s_i} - P_{r_{i-1}})(y_i)$ , on a  $x_i^*(x_i) = x_i^*(y_i)$ . Ainsi :

$$\exists x_i \in J_p, \begin{cases} x_i^*(x_i) \geq \|x_i^*\|_{J_p^*}^q - \varepsilon \\ \|x_i\|_{J_p} \leq 2\|x_i^*\|_{J_p^*}^{q-1} \\ \text{supp}(x_i) \subseteq [r_i, s_i] \end{cases}$$

Grâce au lemme 2.2.2 :  $\|\sum_{i=1}^n x_i\|_{J_p}^p \leq (2^p + 1) \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{J_p}^p$ .

Comme  $\|\cdot\|_{J_p^*}$  est la norme duale de  $\|\cdot\|_{J_p}$ , on a

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i^* \right\|_{J_p^*} \geq \left( \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i) \right) \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{J_p} \right)^{-1} \left( \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|_{J_p} \right)^{-1}$$

et donc

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i^* \right\|_{J_p^*} \geq \left( \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i) \right) \left( \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|_{J_p} \right)^{-1} \geq \left( \sum_{i=1}^n \|x_i^*\|_{J_p^*}^q - n\varepsilon \right) \left( (2^p + 1)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{J_p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{-1}.$$

De plus,  $\left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{J_p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2 \left( \sum_{i=1}^n \|x_i^*\|_{J_p^*}^{p(q-1)} \right)^{\frac{1}{p}} = 2 \left( \sum_{i=1}^n \|x_i^*\|_{J_p^*}^q \right)^{\frac{1}{p}}$ .

On fait tendre  $\varepsilon$  vers 0, et on obtient :

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i^* \right\|_{J_p^*} \geq \frac{1}{2(2^p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left( \sum_{i=1}^n \|x_i^*\|_{J_p^*}^q \right)^{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{2(2^p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left( \sum_{i=1}^n \|x_i^*\|_{J_p^*}^q \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ainsi, on a établi l'inégalité (2.1).

Il s'ensuit aisément que

$$\|x^*\|_{J_p^*} \leq |x^*|_{J_p^*} \leq 2(2^p + 1)^{1 - \frac{1}{q}} \|x^*\|_{J_p^*} = 2(2^p + 1)^{\frac{1}{p}} \|x^*\|_{J_p^*}.$$

De plus,  $|\cdot|_{J_p^*}$  est la norme duale d'une norme équivalente sur  $J_p$ . En effet, il est clair que  $|\cdot|_{J_p^*}$  est  $\sigma(J_p^*, J_p)$  semi-continue inférieurement.

Finalement, on déduit de la définition de  $|\cdot|_{J_p^*}$  que, pour tous  $x^*, y^*$  dans  $J_p^*$  tels que  $x^* \prec y^*$ , on a

$$|x^* + y^*|_{J_p^*}^q \geq |x^*|_{J_p^*}^q + |y^*|_{J_p^*}^q.$$

□

**Corollaire 2.2.4.** *La norme duale  $|\cdot|_{J_p^{**}}$  de  $|\cdot|_{J_p^*}$  satisfait la propriété suivante.*

*Pour  $x \in J_p$  à support fini et  $y \in J_p^{**}$  (pas nécessairement à support fini) tels que  $x \prec y$ , on a*

$$|x + y|_{J_p^{**}}^p \leq |x|_{J_p^{**}}^p + |y|_{J_p^{**}}^p.$$

*Démonstration.* Soient  $x \in J_p$  dont le support est fini et  $y \in J_p^{**}$  tels que  $x \prec y$ , avec  $\text{supp}(x) \subset [m, n]$ ,  $\text{supp}(y) \subset [m', \infty)$  et  $n < m'$ . Soit  $\varepsilon > 0$ .

Il existe  $z^* \in J_p^*$  tel que

$$|z^*|_{J_p^*} = |x + y|_{J_p^{**}}^{p-1} \quad \text{et} \quad z^*(x + y) \geq |x + y|_{J_p^{**}}^p - \varepsilon.$$

De plus, on peut écrire  $z^* = x^* + y^*$ , avec  $x^* \prec y^*$ ,  $z^*(x) = x^*(x)$  et  $z^*(y) = y^*(y)$ .

On en déduit que  $|x + y|_{J_p^{**}}^p \leq x^*(x) + y^*(y) + \varepsilon$ . Grâce à l'inégalité de Hölder et la Proposition 2.2.3, on trouve

$$|x + y|_{J_p^{**}}^p \leq (|x^*|_{J_p^*}^q + |y^*|_{J_p^*}^q)^{\frac{1}{q}} (|x|_{J_p^{**}}^p + |y|_{J_p^{**}}^p)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon \leq (|x^* + y^*|_{J_p^*}) (|x|_{J_p^{**}}^p + |y|_{J_p^{**}}^p)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon.$$

Puisque  $|z^*|_{J_p^*} = |x + y|_{J_p^{**}}^{p-1}$ , on en déduit

$$|x + y|_{J_p^{**}}^p \leq (|x + y|_{J_p^{**}}^{p-1}) (|x|_{J_p^{**}}^p + |y|_{J_p^{**}}^p)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon.$$

On conclut notre preuve en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0. □

## 2.2.2 Plongements grossièrement Lipschitz entre espaces de James

Notre premier lemme donne une description des milieux approchés dans  $J_p$  qui est analogue à la situation de  $\ell_p$  (voir [34] ou [37]). Cependant, nous devons utiliser la norme originale, mais aussi la nouvelle norme sur  $J_p$ .

**Lemme 2.2.5.** *Soit  $1 < p < \infty$ . On note  $E_N$  l'espace vectoriel fermé engendré par  $\{e_i, i > N\}$ . Soient maintenant  $x, y \in J_p$ ,  $\delta \in (0, 1)$ ,  $u = \frac{x + y}{2}$  et  $v = \frac{x - y}{2}$ . Alors*

(i) *Il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que :*

$$u + \delta^{\frac{1}{p}} |v|_{J_p} B_{(E_N, |\cdot|_{J_p})} \subset \text{Mid}_{|\cdot|_{J_p}}(x, y, \delta).$$

(ii) *Il y a un sous-ensemble compact  $K$  de  $J_p$  tel que :*

$$\text{Mid}_{\|\cdot\|_{J_p}}(x, y, \delta) \subset K + 2\delta^{\frac{1}{p}} \|v\|_{J_p} B_{(J_p, \|\cdot\|_{J_p})}.$$

*Démonstration.* Soit  $\lambda > 0$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $|v - v_N|_{J_p} \leq \lambda |v|_{J_p}$ , où  $v_N = \sum_{i=1}^N v(i)e_i$ .

(i) Soit maintenant  $z \in E_N$  vérifiant  $|z|_{J_p}^p \leq \delta |v|_{J_p}^p$ . Alors

$$|x - (u + z)|_{J_p}^p = |v - z|_{J_p}^p = |v - v_N + v_N - z|_{J_p}^p$$

On déduit du corollaire 2.2.4 que :

$$|x - (u + z)|_{J_p}^p \leq |v - v_N - z|_{J_p}^p + |v_N|_{J_p}^p \leq (|v - v_N|_{J_p} + |z|_{J_p})^p + |v_N|_{J_p}^p$$

Donc, grâce à la dernière inégalité et à l'inégalité triangulaire pour  $|\cdot|_{J_p}$ , on obtient :

$$|x - (u + z)|_{J_p}^p \leq ((\lambda + \delta^{1/p})^p + (\lambda + 1)^p) |v|_{J_p}^p \leq (1 + \delta)^p |v|_{J_p}^p,$$

si  $\lambda$  a été choisi initialement suffisamment petit.

On argumente de façon similaire pour montrer que  $|y - (u + z)|_{J_p} = |v + z|_{J_p} \leq (1 + \delta)|v|_{J_p}$  et on en déduit que  $u + z \in \text{Mid}(x, y, \delta)$ .

(ii) On fixe  $\nu > 0$  et on choisit  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\|v_N\|_{J_p}^p \geq (1 - \nu^p)\|v\|_{J_p}^p$ . On suppose maintenant que  $u + z \in \text{Mid}_{\|\cdot\|_{J_p}}(x, y, \delta)$  et on écrit  $z = z' + z''$  où  $z' \in F_N = \text{Vect}\{e_i, i \leq N\}$  et  $z'' \in E_N$ .

Comme  $\|v - z\|_{J_p}$ ,  $\|v + z\|_{J_p} \leq (1 + \delta)\|v\|_{J_p}$ , on obtient, par convexité de la norme, que

$$\|z'\|_{J_p} \leq \|z\|_{J_p} \leq (1 + \delta)\|v\|_{J_p}.$$

Donc,  $u + z'$  appartient à l'ensemble compact  $K = u + (1 + \delta)\|v\|_{J_p} B_{(F_N, \|\cdot\|_{J_p})}$ .

De plus, pour tout  $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , avec  $m > n$  :

$$\begin{aligned} \max\{|v(n) - v(m)|^p, |z(n) - z(m)|^p\} &\leq \frac{1}{2}(|(v(n) - z(n)) - (v(m) - z(m))|^p \\ &\quad + |(v(n) + z(n)) - (v(m) + z(m))|^p). \end{aligned}$$

Donc

$$(1 - \nu^p)\|v\|_{J_p}^p + \|z''\|_{J_p}^p \leq \|v_N\|_{J_p}^p + \|z''\|_{J_p}^p \leq \frac{1}{2}(\|v - z\|_{J_p}^p + \|v + z\|_{J_p}^p) \leq (1 + \delta)^p \|v\|_{J_p}^p.$$

Alors, si  $\nu$  est choisi suffisamment petit, on obtient

$$\|z''\|_{J_p}^p \leq [(1 + \delta)^p - (1 - \nu^p)]\|v\|_{J_p}^p \leq 2^p \delta \|v\|_{J_p}^p.$$

□

**Proposition 2.2.6.** *Soient  $1 < p < q < \infty$  et  $f : (J_q, |\cdot|_{J_q}) \rightarrow (J_p, \|\cdot\|_{J_p})$  un plongement grossièrement Lipschitz. Alors, pour tout  $\tau > 0$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $u \in J_q$ ,  $\theta > \tau$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $K$  un sous-ensemble compact de  $J_p$  tels que*

$$f(u + \theta B_{(E_N, |\cdot|_{J_q})}) \subset K + \varepsilon \theta B_{(J_p, \|\cdot\|_{J_p})}.$$

*Démonstration.* Si  $\text{Lip}_\infty(f) = 0$ , la conclusion est immédiate.

On suppose donc que  $\text{Lip}_\infty(f) > 0$ .

On choisit  $\delta > 0$  petit (on détaillera ce choix plus tard), puis on choisit  $s$  suffisamment grand tel que  $\text{Lip}_s(f) \leq 2\text{Lip}_\infty(f)$ .

Alors, par la proposition 2.1.2,

$$\exists x, y \in J_q, |x - y|_{J_q} \geq s \text{ et } f(\text{Mid}_{|\cdot|_{J_q}}(x, y, \delta)) \subset \text{Mid}_{\|\cdot\|_{J_p}}(f(x), f(y), 2\delta).$$

Notons  $u = \frac{x + y}{2}$ ,  $v = \frac{x - y}{2}$  et  $\theta = \delta^{\frac{1}{q}}|v|_{J_q}$ . Par le lemme 2.2.5, il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u + \theta B_{(E_N, |\cdot|_{J_q})} \subset \text{Mid}_{|\cdot|_{J_q}}(x, y, \delta)$  et il existe un sous-ensemble compact  $K$  de  $J_p$  vérifiant  $\text{Mid}_{\|\cdot\|_{J_p}}(f(x), f(y), 2\delta) \subset K + (2\delta)^{\frac{1}{p}}\|f(x) - f(y)\|_{J_p} B_{(J_p, \|\cdot\|_{J_p})}$ . Mais :

$$\begin{aligned} (2\delta)^{\frac{1}{p}}\|f(x) - f(y)\|_{J_p} &\leq 2\text{Lip}_\infty(f)(2\delta)^{\frac{1}{p}}|x - y|_{J_q} \\ &\leq 4\text{Lip}_\infty(f)2^{\frac{1}{p}}\delta^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}\theta \leq \varepsilon\theta, \end{aligned}$$

si  $\delta$  a été choisi suffisamment petit initialement.

Alors un choix approprié d'un  $s$  grand nous assure que  $\theta \geq \frac{1}{2}\delta^{\frac{1}{q}}s > \tau$ . Cela conclut notre démonstration. □

**Corollaire 2.2.7.** *Soit  $1 < p < q < \infty$ .*

*Alors  $J_q$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $J_p$ .*

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un plongement grossièrement Lipschitz  $f : (J_q, |\cdot|_{J_q}) \rightarrow (J_p, \|\cdot\|_{J_p})$ .

Avec les notations de la proposition précédente, on peut trouver une suite  $(u_n)_{n=1}^\infty$  de  $u + \theta B_{(E_N, |\cdot|_{J_q})}$ , telle que  $|u_n - u_m|_{J_q} \geq \theta$  pour  $n \neq m$ . Alors  $f(u_n) = k_n + \varepsilon \theta v_n$ , avec  $k_n \in K$  et  $v_n \in B_{(J_p, \|\cdot\|_{J_p})}$ . Comme  $K$  est compact, par extraction de sous-suite, on peut supposer que  $\|f(u_n) - f(u_m)\|_{J_p} \leq 3\varepsilon\theta$ .

Comme  $\varepsilon$  peut être choisi arbitrairement petit et  $\theta$  arbitrairement grand, on obtient une contradiction.  $\square$

Dans le but de traiter la plongeabilité grossièrement Lipschitz dans l'autre sens, on utilisera les graphes de Hamming et des ensembles spéciaux de paires d'éléments de ces graphes que nous introduisons maintenant.

**Définition 2.2.8.** Soient  $\bar{n}, \bar{m} \in G_k(\mathbb{M})$  (où  $\mathbb{M}$  est un sous-ensemble infini de  $\mathbb{N}^*$ ).

On dit que  $(\bar{n}, \bar{m}) \in I_k(\mathbb{M})$  si  $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \dots < n_k < m_k$ .

**Proposition 2.2.9.** *Soient  $\varepsilon > 0$  et  $f : G_k(\mathbb{N}^*) \rightarrow (J_p^{**}, |\cdot|_{J_p^{**}})$  une application lipschitzienne.*

*Alors, pour tout sous-ensemble infini  $\mathbb{M}$  de  $\mathbb{N}^*$ , il existe  $(\bar{n}, \bar{m}) \in I_k(\mathbb{M})$  tel que*

$$|f(\bar{n}) - f(\bar{m})|_{J_p^{**}} \leq 2Lip(f)k^{\frac{1}{p}} + \varepsilon.$$

*Démonstration.* On montre cela par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}^*$ .

La proposition est clairement vraie pour  $k = 1$ .

Supposons maintenant qu'elle est vraie pour  $k \geq 1$ .

Soient  $f : G_k(\mathbb{M}) \rightarrow J_p^{**}$  une application lipschitzienne et  $\varepsilon > 0$ .

Par un procédé d'extraction diagonale et grâce à la compacité préfaible, on peut trouver un sous-ensemble infini  $\mathbb{M}_1$  de  $\mathbb{M}$  tel que

$$\forall \bar{n} \in G_{k-1}(\mathbb{M}_1), \quad w^* - \lim_{n_k \in \mathbb{M}_1} f(\bar{n}, n_k) = g(\bar{n}) \in J_p^{**}. \quad (2.2)$$

Alors  $Lip(g) \leq Lip(f)$ , par semi-continuité inférieure préfaible de  $|\cdot|_{J_p^{**}}$ .

On rappelle que la codimension de  $J_p$  dans  $J_p^{**}$  est 1.

Ainsi, on peut noter  $g(\bar{n}) = v(\bar{n}) + c_{\bar{n}}\mathbb{I}$  (où  $v(\bar{n}) \in J_p$ ,  $c_{\bar{n}} \in \mathbb{R}$  et  $\mathbb{I}$  est la suite constante  $(1, 1, 1, \dots)$ ).

Soit  $\eta > 0$  (suffisamment petit : on le détaillera plus tard).

Par le théorème de Ramsey, il existe un sous-ensemble infini  $\mathbb{M}_2$  de  $\mathbb{M}_1$  tel que

$$\forall \bar{n}, \bar{m} \in G_{k-1}(\mathbb{M}_2), \quad |c_{\bar{n}} - c_{\bar{m}}| = |(v(\bar{n}) - v(\bar{m})) - (g(\bar{n}) - g(\bar{m}))|_{J_p^{**}} < \eta. \quad (2.3)$$

Pour  $\bar{n}, \bar{m} \in G_{k-1}(\mathbb{M}_2)$  et  $t, l \in \mathbb{M}_2$ , on pose

$$u_{\bar{n}, \bar{m}, t, l} = f(\bar{n}, t) - g(\bar{n}) + g(\bar{m}) - f(\bar{m}, l).$$

En utilisant (2.2), on a

$$\forall \bar{n} \in G_{k-1}(\mathbb{M}_2), \quad w^* - \lim_{n_k \in \mathbb{M}_2} (f(\bar{n}, n_k) - g(\bar{n})) = 0.$$

Alors, avec le corollaire 2.2.4, on déduit qu'il existe  $l_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tous  $t, l \in \mathbb{M}_2 \cap [l_0, +\infty)$  :

$$|g(\bar{n}) - g(\bar{m}) + u_{\bar{n}, \bar{m}, t, l}|_{J_p^{**}}^p \leq |v(\bar{n}) + c_{\bar{n}}\mathbb{I} - v(\bar{m}) - c_{\bar{m}}\mathbb{I}|_{J_p^{**}}^p + |u_{\bar{n}, \bar{m}, t, l}|_{J_p^{**}}^p + \eta.$$

Notons que  $f(\bar{n}, t) - f(\bar{m}, l) = g(\bar{n}) - g(\bar{m}) + u_{\bar{n}, \bar{m}, t, l}$ .

Alors il suit de (2.3) et de l'inégalité triangulaire, que pour tous  $t, l \in \mathbb{M}_2 \cap [l_0, +\infty)$  :

$$|f(\bar{n}, t) - f(\bar{m}, l)|_{J_p^{**}}^p \leq |u_{\bar{n}, \bar{m}, t, l}|_{J_p^{**}}^p + (|v(\bar{n}) - v(\bar{m})|_{J_p} + \eta)^p + \eta.$$

De plus :  $f(\bar{n}, t) - g(\bar{n}) = w^* - \lim_i (f(\bar{n}, t) - f(\bar{n}, i))$ .

Donc, par semi-continuité inférieure préfaible de  $|\cdot|_{J_p^{**}}$  :

$$|f(\bar{n}, t) - g(\bar{n})|_{J_p^{**}} \leq Lip(f).$$

De même :  $|f(\bar{m}, l) - g(\bar{m})|_{J_p^{**}} \leq Lip(f)$ .

Et on déduit l'inégalité suivante :  $|u_{\bar{n}, \bar{m}, t, l}|_{J_p^{**}}^p \leq 2^p Lip(f)^p$ .

Par ailleurs, avec notre hypothèse de départ, on a :

$$\exists (\bar{n}, \bar{m}) \in I_{k-1}(\mathbb{M}_2), |g(\bar{n}) - g(\bar{m})|_{J_p^{**}} \leq 2Lip(f)(k-1)^{\frac{1}{p}} + \eta.$$

Alors, pour  $t, l \in \mathbb{M}_2 \cap [l_0, +\infty)$  tels que  $m_{k-1} < t < l$ , on a  $((\bar{n}, t), (\bar{m}, l)) \in I_k(\mathbb{M}_2)$ , et

$$|f(\bar{n}, t) - f(\bar{m}, l)|_{J_p^{**}}^p \leq 2^p Lip(f)^p + (2Lip(f)(k-1)^{\frac{1}{p}} + 2\eta)^p + \eta.$$

Ainsi :

$$|f(\bar{n}, t) - f(\bar{m}, l)|_{J_p^{**}}^p \leq 2^p Lip(f)^p k + \varphi(\eta), \text{ avec } \varphi(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0.$$

Puis, si  $\eta$  est choisi suffisamment petit :

$$|f(\bar{n}, t) - f(\bar{m}, l)|_{J_p^{**}} \leq 2Lip(f)k^{\frac{1}{p}} + \varepsilon.$$

Cela termine notre démonstration par récurrence. □

On rappelle la définition donnée dans le chapitre 1 suivante :

**Définition 2.2.10.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach. L'exposant de compression de  $X$  dans  $Y$ , noté  $\alpha_Y(X)$  est le supremum de tous les  $\alpha \in (0, 1]$  tels qu'il existe une constante  $C > 0$  et une application  $f : X \rightarrow Y$  vérifiant

$$\forall x, x' \in X, C^{-1}\|x - x'\|^\alpha - C \leq \|f(x) - f(x')\| \leq C\|x - x'\| + C.$$

Un corollaire de la proposition 2.2.9 est le théorème suivant, dont la preuve apparaîtra par la suite, qui est le théorème central de ce paragraphe :

**Théorème 2.2.11.** Soit  $1 < q < p < \infty$ . Alors

$$\alpha_{J_p}(J_q) \leq \frac{q}{p}.$$

Nous pouvons alors donner un corollaire immédiat de ce théorème. Il s'agit du résultat souhaité dans ce paragraphe.

**Corollaire 2.2.12.** *Soit  $1 < q < p < \infty$ .*

*Alors  $J_q$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $J_p$ .*

Voici maintenant la preuve du théorème :

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe  $\alpha > \frac{q}{p}$  tel qu'on ait  $C > 0$  et  $g : J_q \rightarrow J_p$  vérifiant :

$$\forall x, y \in J_q, C^{-1} \|x - y\|_{J_q}^\alpha - C \leq |g(x) - g(y)|_{J_p} \leq C \|x - y\|_{J_q} + C.$$

Posons, pour tout  $v \in J_q$ ,  $f(v) = Cg(v)$ .

Alors

$$\forall x, y \in J_q, \|x - y\|_{J_q}^\alpha - C^2 \leq |f(x) - f(y)|_{J_p} \leq C^2 \|x - y\|_{J_q} + C^2. \quad (2.4)$$

On note à nouveau  $(e_n)_{n=1}^\infty$  la base canonique de  $J_q$ .

Considérons l'application  $\varphi : (G_k(\mathbb{N}^*), d_H) \rightarrow (J_q, \|\cdot\|_{J_q})$  définie par  $\varphi(\bar{n}) = e_{n_1} + \dots + e_{n_k}$ .

Notons que pour tous  $\bar{n}, \bar{m} \in G_k(\mathbb{N}^*)$ ,

$$\|(e_{n_1} + \dots + e_{n_k}) - (e_{m_1} + \dots + e_{m_k})\|_{J_q} \leq \sum_{n_i \neq m_i} \|e_{n_i} - e_{m_i}\|_{J_q} \leq 2d_H(\bar{n}, \bar{m}).$$

Ainsi,  $Lip(\varphi) \leq 2$ .

Puis, comme  $d_H(\bar{n}, \bar{m}) \geq 1$  lorsque  $\bar{n} \neq \bar{m}$ , on a  $Lip(f \circ \varphi) \leq 4C^2$ .

Il suit alors de la proposition 2.2.9 qu'il existe  $(\bar{n}, \bar{m}) \in I_k(\mathbb{N}^*)$  tel que :

$$|(f \circ \varphi)(\bar{n}) - (f \circ \varphi)(\bar{m})|_{J_p} \leq 9C^2 k^{\frac{1}{p}}.$$

Par ailleurs, comme  $(\bar{n}, \bar{m}) \in I_k(\mathbb{N}^*)$ , on a

$$\|\varphi(\bar{n}) - \varphi(\bar{m})\|_{J_q}^\alpha \geq (2k^{\frac{1}{q}})^\alpha = 2^\alpha k^{\frac{\alpha}{q}}, \quad \text{pour } k \geq 2.$$

Cela est en contradiction avec (2.4), pour  $k$  suffisamment grand.

On peut ainsi conclure que  $\alpha_{J_p}(J_q) \leq \frac{q}{p}$ . □

Une étude similaire a été donnée par F. Baudier [3] pour les espaces  $\ell_p$  et par B.M. Braga [9] pour les espaces de Tsirelson  $p$ -convexifiés.

On conclut enfin ce paragraphe avec un résultat combinant le principe des milieux approchés et l'utilisation des graphes de Hamming.

**Corollaire 2.2.13.** *Soient  $1 < p < q < \infty$ , et  $r > 1$  tels que  $r \notin \{p, q\}$ .*

*Alors  $J_r$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $J_p \oplus J_q$ .*

*Démonstration.* Quand  $r > q$ , l'argument est basé sur une technique des points milieux comme dans la preuve du corollaire 2.2.7.

Si  $r < p$ , on imite la preuve du théorème 2.2.11.

Ainsi, on suppose que  $1 < p < r < q < \infty$  et  $f : J_r \rightarrow J_p \oplus_\infty J_q$  est une application telle qu'il existe  $C \geq 1$  avec

$$\forall x, y \in J_r, |x - y|_{J_r} \geq 1 \Rightarrow |x - y|_{J_r} \leq \|f(x) - f(y)\| \leq C|x - y|_{J_r}. \quad (2.5)$$

On suit la preuve de [34] et on écrit  $f = (g, h)$ . On note encore  $(e_n)_{n=1}^\infty$  la base canonique de  $J_r$ . On fixe  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\varepsilon > 0$ . On rappelle que

$$\exists \gamma > 0, \forall x \in J_r, \gamma\|x\|_{J_r} \leq |x|_{J_r} \leq \|x\|_{J_r}.$$

On démarre en appliquant la technique des points milieux à l'application grossièrement Lipschitz  $g$  et déduit de la proposition 2.2.6 qu'il existe  $\theta > \gamma^{-1}(2k)^{\frac{1}{r}}$ ,  $u \in J_r$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $K$  un sous-ensemble compact de  $J_p$  tels que :

$$g(u + \theta B_{(E_N, |\cdot|_{J_r})}) \subset K + \varepsilon \theta B_{(J_p, \|\cdot\|_{J_p})}. \quad (2.6)$$

Soient  $\mathbb{M} = \{n \in \mathbb{N}^*, n > N\}$  et  $\varphi : G_k(\mathbb{M}) \rightarrow J_r$  définie comme suit

$$\forall \bar{n} = (n_1, \dots, n_k) \in G_k(\mathbb{M}), \varphi(\bar{n}) = u + \theta(2k)^{-\frac{1}{r}}(e_{n_1} + \dots + e_{n_k}).$$

Alors  $\varphi(\bar{n}) \in u + \theta B_{(E_N, |\cdot|_{J_r})}$  pour tout  $\bar{n} \in G_k(\mathbb{M})$ .

Et, de (2.6) on déduit que  $(g \circ \varphi)(G_k(\mathbb{M})) \subset K + \varepsilon \theta B_{(J_p, \|\cdot\|_{J_p})}$ . Ainsi, par le théorème de Ramsey, il y a un sous-ensemble infini  $\mathbb{M}'$  de  $\mathbb{M}$  tel que

$$\text{diam}_{\|\cdot\|_{J_p}}(g \circ \varphi)(G_k(\mathbb{M}')) \leq 3\varepsilon\theta. \quad (2.7)$$

Comme pour  $\bar{n} \neq \bar{m}$ , on a

$$|\varphi(\bar{n}) - \varphi(\bar{m})|_{J_r} \geq \gamma\|\varphi(\bar{n}) - \varphi(\bar{m})\|_{J_r} \geq \gamma\theta(2k)^{-\frac{1}{r}} > 1,$$

Il suit de (2.5) que

$$\forall \bar{n}, \bar{m} \in G_k(\mathbb{M}), \|h \circ \varphi(\bar{n}) - h \circ \varphi(\bar{m})\|_{J_q} \leq C|\varphi(\bar{n}) - \varphi(\bar{m})|_{J_r} \leq C\|\varphi(\bar{n}) - \varphi(\bar{m})\|_{J_r}.$$

On rappelle que pour tous  $\bar{n}, \bar{m} \in G_k(\mathbb{N}^*)$ ,

$$\|(e_{n_1} + \dots + e_{n_k}) - (e_{m_1} + \dots + e_{m_k})\|_{J_q} \leq \sum_{n_i \neq m_i} \|e_{n_i} - e_{m_i}\|_{J_q} \leq 2d_H(\bar{n}, \bar{m}).$$

Comme de plus  $|\cdot|_{J_q} \leq \|\cdot\|_{J_q}$ ,  $Lip(h \circ \varphi) \leq 2C\theta(2k)^{-\frac{1}{r}}$ , lorsque  $h \circ \varphi$  est considérée comme application de  $G_k(\mathbb{M}')$  dans  $(J_q, |\cdot|_{J_q})$ . On peut alors appliquer la proposition 2.2.9 pour obtenir :

$$\exists (\bar{n}, \bar{m}) \in I_k(\mathbb{M}'), |h \circ \varphi(\bar{n}) - h \circ \varphi(\bar{m})|_{J_q} \leq 5C\theta(2k)^{-\frac{1}{r}}k^{\frac{1}{q}}.$$

Puis, si  $k$  a été choisi suffisamment grand, on a :

$$\exists (\bar{n}, \bar{m}) \in I_k(\mathbb{M}'), |h \circ \varphi(\bar{n}) - h \circ \varphi(\bar{m})|_{J_q} \leq \varepsilon\theta.$$

Celà, combiné avec (2.7) implique que

$$\exists (\bar{n}, \bar{m}) \in I_k(\mathbb{M}'), \|f \circ \varphi(\bar{n}) - f \circ \varphi(\bar{m})\| \leq 3\varepsilon\theta.$$

Mais,

$$\forall (\bar{n}, \bar{m}) \in I_k(\mathbb{M}'), |\varphi(\bar{n}) - \varphi(\bar{m})|_{J_r} \geq \gamma\|\varphi(\bar{n}) - \varphi(\bar{m})\|_{J_r} \geq \gamma\theta.$$

Si  $\varepsilon$  a été choisi initialement tel que  $\varepsilon < \frac{\gamma}{3}$ , ça entraîne une contradiction avec (2.5), ce qui conclut notre démonstration.  $\square$

**Remarque.** Ce résultat peut être facilement étendu comme suit.

Supposons que  $r \in (1, \infty) \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  où  $1 < p_1 < p_2 < \dots < p_n < \infty$ , alors  $J_r$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $J_{p_1} \oplus \dots \oplus J_{p_n}$ .

## 2.3 Plongements grossièrement Lipschitz et espaces duaux des espaces de James

Après avoir rappelé qu'un espace de Banach est dit *quasi-réflexif* lorsque l'image de cet espace par le plongement canonique dans son bidual est de codimension finie dans ce bidual, on donne maintenant le théorème suivant, concernant les exposants de compression, qui est dû à G. Lancien et M. Raja (corollaire 3.6 de [41]). Nous précisons que ce théorème est postérieur au théorème 2.2.11.

**Théorème 2.3.1.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach et  $1 < q < p < \infty$ . On suppose que  $X$  est  $q$ -AUC et  $Y$  est  $p$ -AUS et quasi-réflexif. Alors*

$$\alpha_Y(X) \leq \frac{q}{p}.$$

Appliquons ce résultat aux duaux des espaces de James, afin de montrer qu'on a un résultat similaire à celui obtenu pour les espaces de James concernant les plongements grossièrement Lipschitz.

Auparavant, nous donnons la propriété suivante :

**Proposition 2.3.2.** *Soit  $1 < p < \infty$ .*

*$J_p^*$  admet une norme équivalente qui a une norme duale  $p$ -AUC\*.*

*Démonstration.* On peut adapter la preuve donnée par G. Lancien dans le cas où  $p = 2$  (voir [40]) pour  $p > 1$ .

On considère le sous-espace suivant de  $J_p^*$  :  $H = \left\{ x^* \in J_p^* : \sum_{n=1}^{\infty} x^*(e_n) = 0 \right\}$ .

$H^*$  est isométrique à  $J_p$ .

En effet, si on note  $x_0^{**}$  un élément de  $J_p^{**}$  défini par  $x_0^{**}(n) = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors  $H^\perp = \mathbb{R}x_0^{**}$ . Ainsi  $H^*$  est isométrique à  $J_p^{**}/\mathbb{R}x_0^{**}$ .

Il est facile de vérifier que l'application  $i : J_p^{**}/\mathbb{R}x_0^{**} \rightarrow J_p$  définie par

$$i(x^{**} + \mathbb{R}x_0^{**}) = \left( x^{**}(n) - \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{**}(k) \right)_{n=1}^{\infty}$$

est une isométrie inversible.

Par ailleurs, si on identifie ainsi  $J_p$  et  $H^*$ , la topologie préfaible induite par  $H$  sur  $J_p$  est décrite par la convergence suivante :

$$x_n \xrightarrow{\sigma(J_p, H)} x \iff \forall i \neq j, (x_n(i) - x_n(j)) \longrightarrow (x(i) - x(j)).$$

Maintenant, nous allons montrer que  $\|\cdot\|_{H^*}$  est préfaiblement UKK, autrement dit que  $\|\cdot\|_{J_p}$  est  $\sigma(J_p, H)$ -UKK.

Supposons que  $x \in B_{J_p}$  et  $\|x\|_{J_p}^p > 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^p$ .

Alors il existe  $p_1 < \dots < p_n$  dans  $\mathbb{N}^*$  tels que :  $\sum_{i=1}^{n-1} |x(p_{i+1}) - x(p_i)|^p > 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^p$ .

Soit  $V = \{y \in B_{J_p} : \forall i, j \in \{1, \dots, p_n\}, i \neq j, |(y(i) - y(j)) - (x(i) - x(j))| < \delta\}$  où  $\delta > 0$  est choisi suffisamment petit afin que :



$$\text{i) } \forall y \in V, \sum_{i=1}^{n-1} |y(p_{i+1}) - y(p_i)|^p > 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^p.$$

$$\text{ii) } \forall y \in V, \forall 1 \leq q_1 < \dots < q_k \leq p_n, \sum_{i=1}^{k-1} |(y-x)(q_{i+1}) - (y-x)(q_i)|^p < \gamma, \text{ où } \gamma > 0 \text{ sera}$$

détaillé par la suite.

$V$  est un voisinage  $\sigma(J_p, H)$  de  $x$  dans  $B_{J_p}$ .

Pour une suite arbitraire d'entiers  $q_1 < \dots < q_l$ , nous devons estimer

$$\sum_{i=1}^{l-1} |(y-x)(q_{i+1}) - (y-x)(q_i)|^p.$$

On peut supposer qu'il existe  $k < l$  tel que  $q_k \leq p_n < q_{k+1}$ .

Alors, pour tout  $y \in V$  :

a)

$$\sum_{i=1}^{k-1} |(y-x)(q_{i+1}) - (y-x)(q_i)|^p < \gamma.$$

Pour  $p > 1$ , et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , d'après l'inégalité de Hölder :

$$(|a| + |b|)^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p).$$

b) On en déduit

$$|(y-x)(q_k) - (y-x)(q_{k+1})|^p \leq 2^{p-1}\gamma + (2^{p-1})^2 |y(p_n) - y(q_{k+1})|^p + (2^{p-1})^2 |x(p_n) - x(q_{k+1})|^p.$$

c) Ainsi que

$$\sum_{i=k+1}^{l-1} |(y-x)(q_{i+1}) - (y-x)(q_i)|^p \leq 2^{p-1} \sum_{i=k+1}^{l-1} (|y(q_{i+1}) - y(q_i)|^p + |x(q_{i+1}) - x(q_i)|^p).$$

En combinant a) b) c) et i), on déduit, si  $\gamma$  est choisi suffisamment petit, que :

$$\forall y \in V, \|y - x\|_{J_p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On le justifie :

Soit  $y \in V$  et  $q_1 < \dots < q_l$ . Avec les notations précédentes, grâce à a), b) et c), on trouve :

$$\sum_{i=1}^{l-1} |(y-x)(q_{i+1}) - (y-x)(q_i)|^p < \gamma + 2^{p-1}\gamma + (2^{p-1})^2 (|y(p_n) - y(q_{k+1})|^p + |x(p_n) - x(q_{k+1})|^p) + 2^{p-1} \sum_{i=k+1}^{l-1} (|y(q_{i+1}) - y(q_i)|^p + |x(q_{i+1}) - x(q_i)|^p)$$

Alors, on déduit de i) :

$$\sum_{i=1}^{l-1} |(y-x)(q_{i+1}) - (y-x)(q_i)|^p < \gamma + 2^{p-1}\gamma + 2(2^{p-1})^2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^p + 2(2^{p-1}) \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^p.$$

Et, pour  $\gamma$  suffisamment petit :

$$\sum_{i=1}^{l-1} |(y-x)(q_{i+1}) - (y-x)(q_i)|^p < \gamma(1 + 2^{p-1}) + 2(2^{p-1})^2 \left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Donc  $\text{diam}(V \cap B_{J_p}) \leq \varepsilon$ , ce qui prouve que  $\|\cdot\|_{J_p}$  est  $\sigma(J_p, H)$ -UKK, et donc  $\text{AUC}^*$ , et même  $p$ - $\text{AUC}^*$  d'après le corollaire 1.3.36.

Pour conclure, on utilisera l'existence d'un isomorphisme  $T$  de  $H$  dans  $J_p^*$ . En fait,  $S$ , l'opérateur de décalage à droite relativement à la base  $(e_n^*)$ , est une isométrie de  $J_p^*$  dans  $S(J_p^*)$ . Par ailleurs,  $S(H)$  est un sous-espace de codimension 1 de  $H$ . Et  $H$  est isomorphe à  $S(H)$ .

On déduit que  $H$  est isomorphe à  $H \times \mathbb{R}$  et donc  $H$  est isomorphe à  $J_p^*$ , car  $H$  est un sous-espace de codimension 1 de  $J_p^*$ .

Alors, on pose, pour tout  $x^* \in J_p^*$ ,  $|x^*| = \|T^{-1}x^*\|_H$ .

$|\cdot|$  est une norme équivalente de  $J_p^*$ , avec une norme duale donnée par  $|x^{**}|_* = \|T^*x^{**}\|_{H^*}$ . Comme  $T^*$  est  $\sigma(J_p^{**}, J_p^*) - \sigma(H^*, H)$  continue, et  $\|\cdot\|_{H^*}$  est  $\sigma(H^*, H)$ -AUC,  $|\cdot|_*$  est  $\sigma(J_p^{**}, J_p)$ -AUC.  $\square$

**Corollaire 2.3.3.** *Soit  $1 < p < \infty$ .*

*$J_p^*$  admet une norme équivalente qui est  $p'$ -AUS (où  $p'$  est l'exposant conjugué de  $p$ ).*

**Corollaire 2.3.4.** *Si  $1 < p < q < \infty$ , alors  $\alpha_{J_p^*}(J_q^*) \leq \frac{q'}{p'}$  (où  $p'$  et  $q'$  sont respectivement les exposants conjugués de  $p$  et  $q$ ).*

*Démonstration.*  $J_q^*$  a une norme duale  $q'$ -AUC\*, donc  $q'$ -AUC : cela se déduit de la proposition 2.2.3.

Le corollaire précédent nous permet de dire que  $J_p^*$  a une norme  $p'$ -AUS.

Rappelons que  $J_p^*$  est quasi-réflexif.

Pour conclure cette démonstration, on applique le théorème 2.3.1.  $\square$

**Corollaire 2.3.5.** *Soit  $1 < p < q < \infty$ .*

*Alors  $J_q^*$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $J_p^*$ .*

**Remarque 2.3.6.** Nous verrons, à l'aide des résultats obtenus dans le chapitre 3 que, pour  $1 < p < q < \infty$ ,  $J_p^*$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $J_q^*$ .



# Chapitre 3

## Structure asymptotique uniforme et plongements grossièrement Lipschitz

L'objectif de ce chapitre est d'établir un résultat plus général sur la non-plongeabilité des espaces de Banach asymptotiquement uniformément lisses dans les espaces de Banach asymptotiquement uniformément convexes, et plus précisément sur la non-plongeabilité des espaces de Banach  $q$ -asymptotiquement uniformément lisses ( $q$ -AUS) dans les espaces de Banach  $p$ -asymptotiquement uniformément convexes médians ( $p$ -AMUC) que ceux qui ont été établis auparavant concernant les espaces de James. L'outil principal utilisé est "le principe des milieux approchés".

Ces résultats ont été obtenus après ceux qui apparaissent dans le chapitre 2 et la parution de l'article [46]. Certains résultats du chapitre 2 peuvent donc être vus comme des conséquences du théorème 3.0.1 suivant que nous allons prouver, ce qui est le cas du corollaire 2.2.7.

**Théorème 3.0.1.** *Soient  $1 \leq p < q < \infty$ .*

*Si  $Y$  est  $q$ -AUS et  $X$  est  $p$ -AMUC, alors  $Y$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $X$ .*

Des articles récents ont aussi motivé ce travail :

Tout d'abord, en 2010, F. Baudier, N.J. Kalton et G. Lancien avait établi dans l'article [5] la stabilité, sous des plongements grossièrement Lipschitz, de la classe des espaces de Banach réflexifs séparables qui ont une norme équivalente asymptotiquement uniformément convexe et qui ont une norme équivalente asymptotiquement uniformément lisse.

Par ailleurs, on notera que B.M. Braga, en 2017, dans l'article [9], a prouvé le résultat qui suit.

Pour  $1 \leq q_1 < p < q_2$ , si on a les hypothèses (a) et (b) suivantes :

(a).  $X$  est un espace de Banach  $p$ -asymptotiquement uniformément lisse, avec la propriété  $p$ -co-Banach-Saks, ne contenant pas  $\ell_1$ .

(b).  $Y_1$  est un espace de Banach avec une base 1-inconditionnelle satisfaisant une estimation inférieure  $\ell_{q_1}$  de contante 1, et  $Y_2$  est un espace de Banach réflexif  $q_2$ -asymptotiquement uniformément lisse.

Alors  $X$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $Y_1 \oplus Y_2$ .

Il avait donc établi un théorème concernant la non plongeabilité d'un espace de Banach dans un autre espace de Banach avec des conditions de structure asymptotique uniforme.

Intéressons-nous maintenant aux deux articles centraux qui ont amené à ce travail et qui permettent d'obtenir notre théorème.

En 2013, l'article [32], dû à N.J. Kalton, a permis d'obtenir une réelle percée concernant la stabilité de la convexité asymptotique uniforme par l'intermédiaire de son théorème 7.4. Celui-ci, pour  $p \in [1, \infty)$ , sous une hypothèse de plongeabilité grossièrement Lipschitz d'un espace de Banach  $X$  dans un espace de Banach  $Y$   $p$ -AUC, établit qu'il existe  $C > 0$  tel que, pour toute base  $(e_n)_{n=1}^\infty$  d'un modèle étalé  $S$  associé à une suite normalisée  $(x_n)_{n=1}^\infty$  dans  $X$  convergeant faiblement vers 0, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \left\| \sum_{n=1}^k e_n \right\|_S \geq Ck^{\frac{1}{p}}.$$

On peut souligner que le théorème central 3.0.1 de ce chapitre peut être vu comme une conséquence de ce résultat de Kalton.

Nous ne détaillerons pas la théorie des modèles étalés. Nous indiquons seulement ici ce qui permet de déduire le théorème 3.0.1 du théorème de N.J. Kalton.

Supposons que  $X$  est  $q$ -AUS pour un certain  $q > p$ . Il est alors facile de voir qu'il existe une constante  $\gamma > 0$  telle que, pour toute suite normalisée  $(x_n)_{n=1}^\infty$  convergeant faiblement vers 0 et toute base  $(e_n)_{n=1}^\infty$  d'un modèle étalé  $S$  associé à  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \left\| \sum_{n=1}^k e_n \right\|_S \leq \gamma k^{\frac{1}{q}}.$$

Cela permet de conclure la preuve du théorème 3.0.1.

En remarque, le théorème 7.4 de [32] est énoncé pour des espaces asymptotiquement uniformément convexes, mais sa preuve s'étend au cas des espaces asymptotiquement uniformément convexes médians, sans effort.

Le lecteur intéressé notera également que certains arguments de la preuve du théorème 7.4 de [32] sont un peu elliptiques. En particulier, le caractère inconditionnel d'une base d'un modèle étalé associé à une suite normalisée convergeant faiblement vers 0 est implicitement utilisé. Cela ne remet pas en cause la validité du résultat.

Par ailleurs, la preuve du théorème de N.J. Kalton repose sur une utilisation particulièrement sophistiquée du principe des milieux approchés, ce qui n'est pas le cas de la démonstration élémentaire que nous proposons ici.

L'idée de cette démonstration est simple. L'ensemble des milieux approchés dans un espace asymptotiquement uniformément lisse contient une boule de dimension infinie de "gros" diamètre (lemme 3.1.2), alors que l'ensemble des milieux approchés dans un espace asymptotiquement uniformément convexe médian est inclus dans une perturbation compacte d'une boule de "petit" diamètre (proposition 3.2.3).

La proposition 3.2.3 nous amène à parler du second article central pour notre travail, [13], rédigé par S.J. Dilworth, D. Kutzarova, N.L. Randrianarivony, J.P. Revalski et N.V. Zhivkov, puisque son énoncé est implicitement inclus dans le théorème 2.1 de cet article et dans sa preuve. Toutefois, elle n'est pas énoncée sous la forme que nous donnerons, et son application aux plongements non linéaires ne semble pas figurer dans la littérature.

### 3.1 Milieux approchés dans un espace $q$ -asymptotiquement uniformément lisse

Commençons par énoncer les deux lemmes suivants, qui permettent d'aboutir à l'inclusion d'une boule de dimension infinie dans l'ensemble des milieux approchés dans un espace  $q$ -AUS, où  $q > 1$  :

**Lemme 3.1.1.** *Soit  $1 < q < \infty$ .*

*Soit  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  un espace de Banach  $q$ -AUS. Alors, il existe  $\gamma > 0$  tel que, pour tout  $y \in S_Y$ , pour tout  $t \in (0, 1)$ , il existe  $F \in \text{cof}(Y)$ , avec :*

$$\forall f \in F, (\|f\|_Y \leq t \Rightarrow \|y + f\|_Y \leq 1 + \gamma t^q).$$

*Démonstration.* Comme  $Y$  est  $q$ -AUS, il existe  $\gamma > 0$  tel que, pour  $y \in S_Y$  et  $t \in (0, 1)$ , il existe  $F \in \text{cof}(Y)$  vérifiant :

$$\forall f \in F, (\|f\|_Y = t \Rightarrow \|y + f\|_Y \leq 1 + \gamma t^q). \quad (\star)$$

On raisonne par l'absurde en supposant que, pour  $f \in F$  :

$$\|f\|_Y < t \quad \text{et} \quad \|y + f\|_Y > 1 + \gamma t^q.$$

On pose  $f = \lambda f'$  avec  $\|f'\|_Y = t$  (on peut alors remarquer que  $\lambda \in (0, 1)$ ).

Ainsi  $y + f = (1 - \lambda)y + \lambda(y + f')$ .

Avec la convexité de la norme  $\|\cdot\|_Y$ , on obtient :

$$\|y + f\|_Y \leq (1 - \lambda)\|y\|_Y + \lambda\|y + f'\|_Y.$$

D'où :

$$\|y + f'\|_Y > \frac{\gamma}{\lambda} t^q + 1 > \gamma t^q + 1.$$

Cela est en contradiction avec  $(\star)$ . □

**Lemme 3.1.2.** *Soit  $1 < q < \infty$ .*

*Soit  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  un espace de Banach  $q$ -AUS. Alors, il existe  $\gamma > 0$  tel que, pour tous  $x, y \in Y$ , il existe  $F \in \text{cof}(Y)$ , avec, pour tout  $\delta \in (0, 1)$  :*

$$u + \delta^{\frac{1}{q}} \|v\|_Y B_F \subset \text{Mid}_{\|\cdot\|_Y}(x, y, \gamma \delta),$$

$$\text{où } v = \frac{x - y}{2} \text{ et } u = \frac{x + y}{2}.$$

*Démonstration.* En appliquant le lemme 3.1.1, il existe  $\gamma > 0$  tel que, pour tout  $\mu \in S_Y$ , pour tout  $t \in (0, 1)$ , il existe  $F \in \text{cof}(Y)$  vérifiant :

$$\forall f \in F, (\|f\|_Y \leq t \Rightarrow \|\mu + f\|_Y \leq 1 + \gamma t^q).$$

Soient  $x, y \in Y$  et  $\delta \in (0, 1)$ .

On suppose que  $x \neq y$ .

On pose  $v = \frac{x-y}{2}$ .  
Ainsi, pour  $t = \delta^{\frac{1}{q}}$ ,

$$\exists F \in \text{cof}(Y) \quad \forall f \in F \quad \left[ \|f\|_Y \leq t \Rightarrow \left\| \frac{v}{\|v\|_Y} + f \right\|_Y \leq 1 + \gamma t^q \right].$$

Soit  $z \in \delta^{\frac{1}{q}} \|v\|_Y B_F$ . Alors  $\|z\|_Y \leq t \|v\|_Y$ .

Ainsi, on a  $\frac{\|z\|_Y}{\|v\|_Y} \leq t$ .

On en déduit que

$$\left\| \frac{v}{\|v\|_Y} + \frac{z}{\|v\|_Y} \right\|_Y \leq 1 + \gamma \delta,$$

et donc

$$\|v + z\|_Y \leq (1 + \gamma \delta) \|v\|_Y.$$

De même, on trouve

$$\|v - z\|_Y \leq (1 + \gamma \delta) \|v\|_Y.$$

□

## 3.2 Milieux approchés dans un espace $p$ -asymptotiquement uniformément convexe médian

On donne tout d'abord un lemme similaire au lemme 3.1.1 pour un espace  $p$ -AUC, avec  $p \in [1, \infty)$ .

**Lemme 3.2.1.** *Soit  $1 \leq p < \infty$ .*

*Soit  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace de Banach  $p$ -AUC. Alors il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $x \in S_X$ , pour tout  $t \in (0, 1)$ , il existe  $E \in \text{cof}(X)$ , avec :*

$$\forall e \in E, (\|e\|_X \geq t \Rightarrow \|x + e\|_X \geq 1 + Ct^p).$$

*Démonstration.* Comme  $X$  est  $p$ -AUC, il existe  $C > 0$  tel que, pour  $x \in S_X$  et  $t \in (0, 1)$ , il existe  $E \in \text{cof}(X)$  vérifiant :

$$\forall e \in E, (\|e\|_X = t \Rightarrow \|x + e\|_X \geq 1 + Ct^p). \quad (\star)$$

On raisonne par l'absurde en supposant que, pour  $e \in E$  :

$$\|e\|_X > t \quad \text{et} \quad \|x + e\|_X < 1 + Ct^p.$$

On pose  $e' = \lambda e$  avec  $\|e'\|_X = t$  (on peut alors remarquer que  $\lambda \in (0, 1)$ ).

Ainsi  $x + e' = (1 - \lambda)x + \lambda(x + e)$ .

Avec la convexité de la norme  $\|\cdot\|_X$ , on obtient :

$$\|x + e'\|_X \leq (1 - \lambda)\|x\|_X + \lambda\|x + e\|_X.$$

D'où :  $\|x + e'\|_X < 1 + Ct^p$ . Cela est en contradiction avec  $(\star)$ . □

**Remarque 3.2.2.** De la même manière, pour  $1 \leq p < \infty$ , et  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace de Banach  $p$ -AMUC, il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $x \in S_X$ , pour tout  $t \in (0, 1)$ , il existe  $E \in \text{cof}(X)$ , avec :

$$\forall e \in E, (\|e\|_X \geq t \Rightarrow \text{Max}\{\|x + e\|_X, \|x - e\|_X\} \geq 1 + Ct^p).$$

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant :

**Proposition 3.2.3.** *Soit  $p \in [1, \infty)$ .*

*Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach  $p$ -AMUC.*

*Alors, il existe  $C \in (0, 1)$  et il existe  $M > 0$  tels que, pour tous  $x, y \in X$  et pour tout  $\delta \in (0, C)$ , il existe un sous-ensemble compact  $K$  de  $X$  tel que*

$$\text{Mid}(x, y, \delta) \subset K + M\delta^{\frac{1}{p}}\|v\|B_X.$$

Ceci est une généralisation d'une estimation obtenue par N.J. Kalton et N.L. Randrianarivony dans [34] pour les espaces de la forme  $\left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n\right)_{\ell_p}$ , où les espaces  $F_n$  sont de dimension finie. Il en existe une version légèrement plus générale due à B.M. Braga dans [9] (Lemme 5.2).

Cependant, il est surtout important de souligner que cette proposition doit être attribuée à S.J. Dilworth, D. Kutzarova, N.L. Randrianarivony, J.P. Revalski et N.V. Zhivkov, dans [13]. On rappelle, comme cela a été signalé dans l'introduction que son énoncé est en effet implicitement inclus dans le théorème 2.1 de cet article et dans sa preuve, sans toutefois être énoncé exactement sous cette forme.

Comme son application aux plongements non linéaires ne semble pas figurer ailleurs, nous en détaillons la preuve.

Quitte à effectuer une translation et une homothétie, il suffit de montrer le lemme suivant, dont la preuve apparaîtra à la fin de ce paragraphe :

**Lemme 3.2.4.** *Soit  $p \in [1, \infty)$ .*

*Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach  $p$ -AMUC.*

*Alors, il existe  $C > 0$  et il existe  $M > 0$  tels que, pour tout  $x \in S_X$  et pour tout  $\delta \in (0, C)$ , il existe un sous-ensemble compact  $K'$  de  $X$  tel que*

$$\text{Mid}(x, -x, \delta) \subset K' + M\delta^{\frac{1}{p}}\|v\|B_X.$$

Pour prouver ce lemme, nous aurons besoin du très joli lemme suivant, dû à W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss et G. Schechtman (Lemme 2.13 de [31]), dont nous incluons la preuve.

**Lemme 3.2.5.** *Soit  $(Z, \|\cdot\|)$  un espace de Banach, et  $Z_0 \in \text{cof}(Z)$ .*

*Alors il existe un sous-espace  $E$  de  $Z$  de dimension finie tel que*

$$B_E + 2B_{Z_0} \supset \frac{1}{2}B_Z.$$

*Démonstration.* Soit  $\{y_i\}_{i \in I}$  un  $\frac{1}{8}$ -réseau fini de  $B_{Z/Z_0}$  avec  $\|y_i\| < 1$  pour tout  $i$ . À chaque  $y_i$ , on associe  $z_i \in B_Z$  tel que  $Qz_i = y_i$  où  $Q : Z \rightarrow Z/Z_0$  est l'application



quotient.

On pose  $E = \text{Vect}\{z_i, i \in I\}$ .

Si  $z \in B_Z$ , on considère  $i \in I$  tel que  $\|y_i - Qz\| < \frac{1}{4}$ .

Alors  $Q(z_i - z) = y_i - Qz \in Z/Z_0$ , et il existe  $z_0 \in Z_0$  tel que  $\|z_i - z - z_0\| < \frac{1}{4}$ .

On a

$$\|z_0\| \leq \|z\| + \|z_i\| + \frac{1}{4} \leq \frac{9}{4}.$$

Donc

$$B_Z \subset B_E + \frac{9}{4}B_{Z_0} + \frac{1}{4}B_Z.$$

Par itération, on obtient, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$B_Z \subseteq \left( \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k \right) \left( B_E + \frac{9}{4}B_{Z_0} \right) + \left(\frac{1}{4}\right)^n B_Z.$$

Par conséquent :

$$B_Z \subseteq \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \left( B_E + \frac{9}{4}B_{Z_0} \right),$$

ce qui permet de conclure. □

Nous pouvons maintenant établir la preuve du lemme 3.2.4 :

*Démonstration.* Puisque  $(X, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach  $p$ -AMUC, on a

$$\exists C > 0 \quad \forall t \in [0, 1] \quad \tilde{\delta}_X(t) \geq 2Ct^p.$$

Soient  $\delta \in (0, C)$  et  $x \in S_X$ .

On pose  $t = \left(\frac{\delta}{C}\right)^{\frac{1}{p}} \in [0, 1]$ .

Comme  $\tilde{\delta}_X(t) \geq 2\delta$  :

$$\exists Y \in \text{cof}(X) \quad \forall y \in S_Y \quad \left( \left\| x + \left(\frac{\delta}{C}\right)^{\frac{1}{p}} y \right\| > 1 + \delta \text{ ou } \left\| x - \left(\frac{\delta}{C}\right)^{\frac{1}{p}} y \right\| > 1 + \delta \right).$$

Puis, par convexité (voir la remarque 3.2.2, et la preuve du lemme 3.2.1 qui la précède), on obtient :

$$\forall z \in Y \quad \|z\| \geq \left(\frac{\delta}{C}\right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow (\|x + z\| > 1 + \delta \text{ ou } \|x - z\| > 1 + \delta).$$

Donc

$$\text{Mid}(x, -x, \delta) \cap Y \subset \left(\frac{\delta}{C}\right)^{\frac{1}{p}} B_Y. \quad (**)$$

On peut noter que

$$\delta B_X \subset \text{Mid}(x, -x, \delta) \subset (1 + \delta)B_X,$$

la dernière inclusion étant obtenue par convexité de la norme.

Par ailleurs,  $\Gamma = \text{Mid}(x, -x, \delta)$  est convexe, fermé et symétrique. C'est donc la boule unité d'une norme équivalente  $|\cdot|$  sur  $X$ .

On applique le lemme 3.2.5 pour  $Z = X$ , muni de la norme  $|\cdot|$ , et  $Z_0 = Y$ , et on en déduit qu'il existe un sous-espace  $E$  de  $X$  de dimension finie tel que

$$\frac{1}{2}\Gamma \subset B_{(E,|\cdot|)} + 2(\Gamma \cap Y).$$

Ainsi :

$$\Gamma \subset 2B_{(E,|\cdot|)} + 4(\Gamma \cap Y).$$

On applique  $(\star\star)$ , et on obtient :

$$Mid(x, -x, \delta) \subset K' + 4\left(\frac{\delta}{C}\right)^{\frac{1}{p}} B_Y,$$

où  $K' = 2B_{(E,|\cdot|)}$  est un sous-ensemble compact de  $X$ . □

**Remarque 3.2.6.** Ainsi, sous l'hypothèse que  $(X, \|\cdot\|)$  est  $p$ -AMUC, avec  $p \in [1, \infty)$ , on a comme conséquence immédiate qu'il existe  $C \in (0, 1)$  et  $M > 0$  tels que, pour tous  $x, y \in X$  et pour tout  $\delta \in (0, 1)$ , il existe un sous-ensemble compact  $K'$  de  $X$ , avec

$$Mid(x, y, \delta) \subset K' + B(u, M\delta^{\frac{1}{p}}\|v\|) = K + M\delta^{\frac{1}{p}}\|v\|B_X,$$

où  $u = \frac{x+y}{2}$ ,  $v = \frac{x-y}{2}$ , et  $K = u + K'$ .

### 3.3 Applications

On va d'abord établir le lemme suivant à l'aide de la proposition 3.2.3 et du lemme 3.1.2 qui permettra d'obtenir ensuite le théorème 3.0.1.

**Lemme 3.3.1.** Soit  $1 \leq p < q < \infty$ .

Soient  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace de Banach  $p$ -AMUC, et  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  un espace de Banach  $q$ -AUS et une application grossièrement Lipschitz  $f : (Y, \|\cdot\|_Y) \rightarrow (X, \|\cdot\|_X)$ .

Alors, pour tout  $\tau > 0$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $u \in Y$ , il existe  $F \in \text{cof}(Y)$ ,  $\theta > \tau$ , et  $K$  un sous-ensemble compact de  $X$  tels que

$$f(u + \theta B_{(F, \|\cdot\|_Y)}) \subset K + \varepsilon \theta B_{(X, \|\cdot\|_X)}.$$

*Démonstration.* Si  $Lip_\infty(f) = 0$ , la conclusion est claire.

On suppose donc que  $Lip_\infty(f) > 0$ .

Soient  $\tau > 0$  et  $\varepsilon > 0$ .

On choisit un petit  $\delta > 0$  (qui sera détaillé plus tard).

Puis on choisit  $s$  suffisamment grand pour que  $Lip_s(f) \leq 2Lip_\infty(f)$  et  $\frac{1}{2}\delta^{\frac{1}{q}}s > \tau$ .

Par la proposition 2.1.2, on a :

$$\exists x, y \in Y, \|x - y\|_Y \geq s \text{ et } f(Mid_{\|\cdot\|_Y}(x, y, \gamma\delta)) \subset Mid_{\|\cdot\|_X}(f(x), f(y), 2\gamma\delta).$$

On pose  $u = \frac{x+y}{2}$ ,  $v = \frac{x-y}{2}$  et  $\theta = \delta^{\frac{1}{q}}\|v\|_Y$ .

Ainsi  $\theta > \tau$ . Alors, par le lemme 3.1.2, il existe  $\gamma > 0$ , il existe  $F \in \text{cof}(Y)$ , dépendant de  $x, y$ , tels que

$$u + \theta B_{(F, \|\cdot\|_Y)} \subset Mid_{\|\cdot\|_Y}(x, y, \gamma\delta).$$

Finalement, par la proposition 3.2.3, il existe un sous-ensemble compact  $K$  de  $X$ ,  $C > 0$  et  $M > 0$  tels que, pour  $2\gamma\delta < C$  :

$$Mid_{\|\cdot\|_X}(f(x), f(y), 2\gamma\delta) \subset K + \frac{M}{2}(2\gamma\delta)^{\frac{1}{p}}\|f(x) - f(y)\|_X B_{(X, \|\cdot\|_X)}.$$

Mais :

$$\frac{M}{2}(2\gamma\delta)^{\frac{1}{p}}\|f(x) - f(y)\|_X \leq M(2\gamma\delta)^{\frac{1}{p}}\|x - y\|_Y Lip_\infty(f) \leq 2MLip_\infty(f)(2\gamma)^{\frac{1}{p}}\delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\theta \leq \varepsilon\theta,$$

si  $\delta$  a été choisi suffisamment petit.  $\square$

Nous pouvons maintenant donner la preuve du théorème 3.0.1 :

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un plongement grossièrement Lipschitz  $f : (Y, \|\cdot\|_Y) \rightarrow (X, \|\cdot\|_X)$ .

Avec les notations du lemme précédent, on peut trouver une suite  $(u_n)_{n=1}^\infty$  de  $u + \theta B_{(F, \|\cdot\|_Y)}$  telle que  $\|u_n - u_m\|_Y \geq \theta$  pour  $n \neq m$ .

Alors  $f(u_n) = k_n + \varepsilon\theta v_n$ , avec  $k_n \in K$  et  $v_n \in B_{(X, \|\cdot\|_X)}$ .

Comme  $K$  est compact, par extraction d'une sous-suite, on peut supposer que

$$\|f(u_n) - f(u_m)\|_X \leq 3\varepsilon\theta.$$

Comme  $\varepsilon$  est choisi arbitrairement petit et  $\theta$  arbitrairement grand, cela entraîne une contradiction.  $\square$

Le corollaire qui suit complète l'étude faite dans le chapitre 2 sur les plongements grossièrement Lipschitz entre les duaux des espaces de James.

**Corollaire 3.3.2.** *Soit  $1 < p < q < \infty$ .*

*Alors  $J_p^*$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $J_q^*$ .*

*Démonstration.* Soit  $p'$  tel que  $p$  et  $p'$  sont des exposants conjugués.

Soit  $q'$  tel que  $q$  et  $q'$  sont des exposants conjugués.

$J_p^*$ , après renormage, est un espace de Banach  $p'$ -AUS, d'après le corollaire 2.3.3.

Par ailleurs, après renormage de  $J_q$ , on peut obtenir une norme de  $J_q^*$ , duale de la nouvelle norme sur  $J_q$ , qui est  $q'$ -AUC\*, d'après la proposition 2.2.3.

Il est clair qu'un espace  $Z$  vérifiant que  $\|\cdot\|_{Z^*}$  est  $q'$ -AUC\* est tel que  $X = Z^*$  est  $q'$ -AUC. Donc  $J_q^*$  est un espace de Banach  $q'$ -AUC.

Pour conclure cette démonstration, on applique le théorème 3.0.1.  $\square$

Du théorème 3.0.1, on déduit aussi, dans le cas séparable, un résultat sur les indices de Szlenk à partir du théorème de renormage 1.3.47 :

**Corollaire 3.3.3.** *Soit  $1 \leq p < q < \infty$ .*

*Soit  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  et  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  deux espaces de Banach, avec  $Z$  séparable.*

*On note  $X = Z^*$ .*

*Si il existe  $C_1 > 0$  tel que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $Sz(Y, \varepsilon) \leq \frac{C_1}{\varepsilon^{q'}}$  (où  $q'$  est l'exposant conjugué de  $q$ ), et il existe  $C_2 > 0$  tel que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $Sz(Z, \varepsilon) \leq \frac{C_2}{\varepsilon^p}$ , alors  $Y$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $X$ .*

*Démonstration.* Avec le théorème 1.3.47 et la proposition 1.3.28, on peut affirmer que : Si il existe  $C_1 > 0$  tel que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $Sz(Y, \varepsilon) \leq \frac{C_1}{\varepsilon^{q'}}$ , alors, pour tout  $r < q$ ,  $Y$  admet une norme équivalente  $r$ -AUS.

Si il existe  $C_2 > 0$  tel que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $Sz(Z, \varepsilon) \leq \frac{C_2}{\varepsilon^p}$ , alors, pour tout  $s > p$ ,  $Z$  admet une norme équivalente dont la norme duale est  $s$ -AUC\*.

Puisqu'il est clair qu'un espace  $Z$  vérifiant que  $\|\cdot\|_{Z^*}$  est  $s$ -AUC\* est tel que  $X = Z^*$  est  $s$ -AUC, on peut alors conclure, d'après le théorème 3.0.1, que  $Y$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $X$ .  $\square$

**Remarque 3.3.4.** Sous les hypothèses du corollaire 3.3.3,  $Z^*$  est séparable, et donc on peut supposer que  $Y$  est aussi séparable. On peut maintenant étendre ce résultat.

On obtient, à l'aide du corollaire 3.3.3, un énoncé général sans supposer la séparabilité :

**Corollaire 3.3.5.** Soit  $1 \leq p < q < \infty$ .

Soit  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  un espace de Banach tel qu'il existe  $C_1 > 0$ , avec, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $Sz(Y, \varepsilon) \leq \frac{C_1}{\varepsilon^{q'}}$  (où  $q'$  est l'exposant conjugué de  $q$ ). Soit  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  un espace de Banach

tel qu'il existe  $C_2 > 0$ , avec, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $Sz(Z, \varepsilon) \leq \frac{C_2}{\varepsilon^p}$ .

On note  $X = Z^*$ .

Alors  $Y$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $X$ .

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde. On suppose qu'il existe un plongement grossièrement Lipschitz  $f$  de  $Y$  dans  $X$ .

Il existe  $Y_0$  sous-espace vectoriel séparable de  $Y$ , avec  $\dim(Y_0) = \infty$ .

Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $Sz(Y_0, \varepsilon) \leq \frac{C_1}{\varepsilon^{q'}}$ .

On note  $\overline{\text{Vect}}(f(Y_0)) = E \subset Z^*$ . Alors  $E$  est séparable.

Et il existe une suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de  $S_Z$  telle que :

$$\forall z^* \in E, \|z^*\|_{Z^*} = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \langle z^*, z_n \rangle.$$

L'espace séparable  $F = \overline{\text{Vect}}((z_n)_{n \in \mathbb{N}})$  est inclus dans  $Z$  et vérifie donc, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $Sz(F, \varepsilon) \leq \frac{C_2}{\varepsilon^p}$  d'après la proposition 1.3.44.

On déduit alors du corollaire 3.3.3 que  $Y_0$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $F^*$ .

De plus, sachant que, pour tout  $z^* \in E$ ,  $\|z^*\|_{Z^*} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \langle z^*, z_n \rangle$ , l'application de  $E$  dans  $F^*$

qui à  $z^*$  associe  $z^*|_F$  est une isométrie.

Et donc  $Y_0$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $f(Y_0) = E$ .

Cela contredit l'hypothèse de départ.  $\square$



# Chapitre 4

## Plongements presque Lipschitz et bilipschitz

Dans ce chapitre :

- Tout d'abord, nous rappellerons dans le premier paragraphe les grandes lignes de travaux de M.I. Ostrovskii ([47]), et de F. Baudier et G. Lancien ([6]), qui ont inspiré notre recherche.
- Ensuite, dans le second paragraphe, nous justifierons, entre autres, en nous inspirant de la preuve du théorème 2.7 de [6], la propriété principale de ce chapitre (théorème 4.2.3). Celle-ci concerne la plongeabilité quasi-Lipschitz (que nous aurons alors défini) d'un sous-espace propre d'un espace de Banach  $X$  dans un autre espace de Banach  $Y$ , sous la condition qu'il existe  $C > 1$  tel que, pour tout  $Z \in \text{cof}(Y)$ ,  $X$  est  $C$ -finiment crûment représentable dans  $Z$ .

Commençons, avant tout, à donner les définitions relatives au concept de représentabilité finie.

Ce concept a été étudié par R.C. James ([27] et [28]).

**Définition 4.0.1.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach de dimension infinie.

On dit que  $X$  est *finiment crûment représentable* dans  $Y$  (avec la constante  $K$ ) si il existe  $K > 1$  telle que, pour tout sous-espace  $E$  de dimension finie de  $X$ , il y a un isomorphisme linéaire de  $E$  dans  $T(E) \subset Y$  vérifiant  $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < K$ .

**Définition 4.0.2.** On dit que  $X$  est *finiment représentable* dans  $Y$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $X$  est finiment crûment représentable dans  $Y$  avec la constante  $K = 1 + \varepsilon$ .

**Définition 4.0.3.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach de dimension infinie.

On dit que  $X$  est *uniformément finiment crûment représentable* dans  $Y$  si il existe une constante  $C > 1$  telle que, pour tout  $Z \in \text{cof}(Y)$ ,  $X$  est  $C$ -finiment crûment représentable dans  $Z$ .

- Pour finir ce chapitre, nous donnerons, dans un troisième paragraphe, des résultats issus d'un article de V. Ferenczi et C. Rosendal ([16]) liés à la notion de représentabilité crûment finie, ainsi qu'un corollaire du théorème 4.2.3.

## 4.1 Rappels

### 4.1.1 Plongement bilipschitz et espace métrique localement fini

Voici les définitions nécessaires à la compréhension d'un théorème de M.I. Ostrovskii, établi en 2011, qui est donné à la fin de ce sous-paragraphe :

**Définition 4.1.1.** Un espace métrique  $(A, d_A)$  est dit *localement fini* si pour tout  $u \in A$  et tout  $r > 0$  l'ensemble  $\{a \in A : d_A(u, a) \leq r\}$  est fini.

Les deux définitions suivantes ont déjà été brièvement évoquées dans l'introduction de cette thèse.

**Définition 4.1.2.** Soit  $C \in (0, \infty)$ . Une application  $f : (A, d_A) \rightarrow (Y, d_Y)$  entre deux espaces métriques est dite *C-bilipschitz* si il existe  $r > 0$  tel que

$$\forall u, v \in A, rd_A(u, v) \leq d_Y(f(u), f(v)) \leq rCd_A(u, v). \quad (1)$$

À partir de cette dernière définition, on peut définir un plongement bilipschitz, ainsi qu'une suite de plongements dite uniformément bilipschitz :

**Définition 4.1.3.** Un plongement bilipschitz  $f$  est un plongement qui est *C-bilipschitz* pour une valeur  $C$  finie.

Dans ce cas, la plus petite constante  $C$  pour laquelle il existe  $r > 0$  tel que (1) est satisfait est appelée la *distortion* de  $f$ .

**Définition 4.1.4.** Une suite de plongements est appelée *uniformément bilipschitz* si ces plongements ont des distortions uniformément bornées.

Voici maintenant le théorème auquel on s'est intéressé dans l'article [47] (qu'on retrouve également dans [48]) :

**Théorème 4.1.5.** *Soit  $A$  un espace métrique localement fini tel que ses sous-ensembles finis admettent des plongements uniformément bilipschitz dans un espace de Banach  $X$ . Alors  $A$  admet un plongement bilipschitz dans  $X$ .*

Cela entraîne l'énoncé du théorème suivant :

**Théorème 4.1.6.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach tels que  $X$  est finiment crûment représentable dans  $Y$ .*

*Soit  $A \subset X$  tel que  $A$  est localement fini.*

*Alors  $A$  admet un plongement bilipschitz dans  $Y$ .*

À partir de ce théorème, et plus précisément de sa démonstration, on peut raisonnablement conjecturer qu'un sous-ensemble compact d'un espace de Banach  $X$  se plonge presque Lipschitz dans un autre espace de Banach  $Y$ , lorsque  $X$  est finiment crûment représentable dans  $Y$ .

Une version plus faible a été obtenue en s'aidant de ce qui suit.

## 4.1.2 Plongements presque Lipschitz d'espaces métriques propres

En 2015, F. Baudier et G. Lancien ont rédigé un article [6] dans lequel ils ont introduit la notion de plongement presque Lipschitz et où ils ont prouvé, entre autres, que, pour  $p \in [1, +\infty]$  et  $Y$  un espace de Banach contenant uniformément les  $\ell_p^n$  (vous trouverez la définition par la suite), avec  $M$  un sous-espace propre de  $L_p$ ,  $M$  se plonge presque Lipschitz dans  $Y$  (voir le théorème 4.1.14 et le corollaire 4.1.17).

Il s'agit là du second théorème qui a inspiré notre recherche, qui sera développée dans le second paragraphe de ce chapitre.

Voici les grandes lignes des outils intervenant dans leur démonstration du théorème évoqué.

Nous avons besoin du lemme suivant qui figure dans [6].

**Lemme 4.1.7.** *Pour toute fonction continue  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1)$  telle que  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(t) > 0$  pour tout  $t > 0$ , il existe une fonction continue surjective croissante  $\mu : (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0)$  vérifiant  $\varphi(t) \leq 2^{\mu(t)}$  pour tout  $t > 0$ .*

Ensuite, ils ont rappelé le théorème 4.1.11 (voir [29], [35] et [45] pour la preuve), puis prouvé le corollaire 4.1.12.

Mais avant que nous donnions ces propriétés, rappelons tout d'abord les trois définitions basiques suivantes nécessaires à leur compréhension :

**Définition 4.1.8.** Soit  $X$  un espace de Banach,  $p \in [1, 2]$ ,  $q \in [2, \infty]$  et  $(\varepsilon_i)_{i=1}^\infty$  une suite de variables de Rademacher indépendantes sur un espace probabilisé  $\Omega$ .

On dit que  $X$  est de type  $p$  si il existe  $T \in (0, \infty)$  tel que pour tout  $x_1, \dots, x_n \in X$

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L_2(\Omega, X)} \leq T \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

et  $X$  est de cotype  $q$  si il existe  $C \in (0, \infty)$  tel que pour tout  $x_1, \dots, x_n \in X$

$$\left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L_2(\Omega, X)}.$$

**Définition 4.1.9.** Soit  $\lambda \in [1, \infty)$  et  $p \in [1, \infty]$ .

On dit qu'un espace de Banach contient  $\lambda$ -uniformément les  $\ell_p^n$  si il existe une suite de sous-espaces  $(E_n)_{n=1}^\infty$  de  $X$  telle que  $E_n$  est linéairement isomorphe à  $\ell_p^n$  avec  $d_{BM}(E_n, \ell_p^n) \leq \lambda$ , où  $d_{BM}$  est la distance de Banach-Mazur entre des espaces de Banach.

**Définition 4.1.10.** Soit  $p \in [1, \infty]$ .

On dit que  $X$  contient les  $\ell_p^n$  uniformément si il contient  $\lambda$ -uniformément les  $\ell_p^n$  pour une valeur  $\lambda \in [1, \infty)$ .

Le théorème suivant fait la liaison entre ces notions, et a été prouvé dans les travaux de R.C. James [29], J.L. Krivine [35], B. Maurey et G. Pisier [45].

**Théorème 4.1.11.** *Soit  $X$  un espace de Banach de dimension infinie. Si on note*

$$p(X) = \sup\{p : X \text{ est de type } p\} \text{ et } q(X) = \inf\{q : X \text{ est de cotype } q\},$$



alors  $X$  contient les  $\ell_p^n(X)$  et les  $\ell_q^n(X)$  uniformément.

De plus, si  $X$  contient les  $\ell_r^n$  uniformément, alors  $r \in [p(X), q(X)]$  et  $X$  contient les  $\ell_r^n$   $\lambda$ -uniformément, pour tout  $\lambda > 1$ .

**Corollaire 4.1.12.** Soient  $Y$  un espace de Banach de dimension infinie et  $Z$  un sous-espace de  $Y$  de codimension finie.

Supposons que  $Y$  contient les  $\ell_p^n$  uniformément, alors  $Z$  contient les  $\ell_p^n$   $\lambda$ -uniformément, pour tout  $\lambda > 1$ .

Puis, toujours dans [6], F. Baudier et G. Lancien se sont aidés de la technique standard de Mazur (voir le premier chapitre) pour prouver, à l'aide d'un principe de récurrence, le lemme suivant :

**Lemme 4.1.13.** Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $(d_j)_{j=0}^\infty$  une suite de  $\mathbb{N}^*$ , et  $Y$  un espace de Banach contenant uniformément les  $\ell_p^n$ .

Alors il existe une suite  $(H_j)_{j=0}^\infty$  de sous-espaces de  $Y$  telle que pour tout  $j \geq 0$ ,  $d_{BM}(H_j, \ell_p^{d_j}) \leq 1 + \varepsilon$ , et aussi telle que  $(H_j)_{j=0}^\infty$  est une décomposition de Schauder de dimension finie (FDD) de l'espace vectoriel fermé  $Z$  qu'elle engendre avec  $\|P_j\| \leq 1 + \gamma$ , où  $P_j$  est la projection de  $Z$  sur  $H_0 \oplus \cdots \oplus H_j$  de noyau  $\overline{\text{Vect}} \left( \bigcup_{i=j+1}^\infty H_i \right)$ .

Enfin, ils ont pu alors établir leur résultat principal :

**Théorème 4.1.14.** Soit  $p \in [1, +\infty]$  et  $Y$  un espace de Banach contenant uniformément les  $\ell_p^n$ . Soit  $M$  un sous-espace propre de  $L_p$ .

Pour tout  $r < \frac{1}{16}$  et  $\mu : (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0)$  une fonction continue surjective croissante, il existe une application  $f : M \rightarrow Y$  telle que pour tout  $x, y \in M$ ,

$$2^{\mu(\|x-y\|_p)r} \|x - y\|_p \leq \|f(x) - f(y)\|_Y \leq 9\|x - y\|_p.$$

Pour rappeler l'un des outils intervenant dans la preuve du théorème 4.1.14 et donc du corollaire suivant, nous donnons la définition d'un espace  $\mathcal{L}_p$  et une propriété relative à cette notion concernant les espaces  $L_p$ . cela interviendra, par ailleurs, dans la justification de la remarque 4.2.7.

**Définition 4.1.15.** (issue de [42])

Soit  $1 \leq p \leq \infty$  et  $\lambda \geq 1$ .

Un espace de Banach  $X$  est dit  $\mathcal{L}_{\lambda,p}$  si, pour tout sous-espace de dimension finie  $B$  de  $X$ , il existe un sous-espace  $C$  de  $X$  contenant  $B$ , avec  $d_{BM}(C, \ell_p^n) \leq \lambda$  où  $n = \dim(C) < \infty$ .

Un espace de Banach est dit  $\mathcal{L}_p$  si c'est un espace  $\mathcal{L}_{\lambda,p}$  pour une valeur  $\lambda < \infty$ .

**Proposition 4.1.16.** (voir [43], chapitre 5)

Soit  $\varepsilon > 0$

$L_p$  est un espace  $\mathcal{L}_{(1+\varepsilon),p}$ .

Le corollaire ci-dessous est une conséquence simple du théorème 4.1.11 et du lemme 4.1.7, et bien sûr du théorème 4.1.14 (sachant donc que  $L_p$  est un espace  $\mathcal{L}_p$ ) :

**Corollaire 4.1.17.** Soit  $p \in [1, +\infty]$ ,  $M$  un sous-espace propre de  $L_p$  et  $Y$  un espace de Banach contenant uniformément les  $\ell_p^n$ .

Alors  $M$  se plonge presque Lipschitz dans  $Y$ .

## 4.2 Représentabilité crûment finie et plongement presque Lipschitz

Nous aurons besoin du lemme suivant pour établir la propriété principale de ce paragraphe.

**Lemme 4.2.1.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach. On suppose qu'il existe  $C > 1$  tel que, pour tout  $Z \in \text{cof}(Y)$ ,  $X$  est  $C$ -finiment crûment représentable dans  $Z$ .*

*Soit  $\gamma > 0$ ,  $(F_j)_{j=1}^\infty$  une famille de sous-espaces de dimension finie de  $X$ .*

*Alors il existe une famille  $(H_j)_{j=1}^\infty$  de sous-espaces de  $Y$  de dimension finie telle que, pour tout  $j$ ,  $d_{\text{BM}}(H_j, F_j) \leq C$  et  $(H_j)_{j=1}^\infty$  est une FDD de  $Z = \overline{\text{Vect}(\bigcup_{j=1}^\infty H_j)} \subseteq Y$  avec  $\|P_j\| \leq 1 + \gamma$  où  $P_j$  est la projection de  $Z$  sur  $H_1 \oplus \cdots \oplus H_j$  de noyau  $\overline{\text{Vect}(\bigcup_{i=j+1}^\infty H_i)}$ .*

*Démonstration.* Soit une suite  $(\gamma_j)_{j=1}^\infty$  avec  $\gamma_j > 0$  et  $\prod_{j=1}^\infty (1 + \gamma_j) \leq 1 + \gamma$ .

On utilise un raisonnement par récurrence sur  $j \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $X$  est  $C$ -finiment crûment représentable dans  $Y$ , il existe  $H_1$  sous-espace de  $Y$  de dimension finie tel que  $d_{\text{BM}}(H_1, F_1) \leq C$ .

D'après le lemme de Mazur, il existe  $Z_1$  sous-espace de  $Y$  tel que  $\dim(Y/Z_1) < \infty$ ,  $H_1 + Z_1 = H_1 \oplus Z_1$  et  $P_1 : H_1 \oplus Z_1 \rightarrow H_1$  projection de noyau  $Z_1$  telle que  $\|P_1\| \leq 1 + \gamma_1$ . Supposons alors que, pour  $j \in \mathbb{N}^*$  fixé quelconque, il existe  $H_1, \dots, H_j$  telles que

$$d_{\text{BM}}(H_i, F_i) \leq C \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, j\},$$

$$H_1 + \cdots + H_j = H_1 \oplus \cdots \oplus H_j$$

et

$$(H_1 + \cdots + H_j) + Z_j = (H_1 + \cdots + H_j) \oplus Z_j,$$

avec  $P_j : (H_1 + \cdots + H_j) \oplus Z_j \rightarrow H_1 + \cdots + H_j$  projection de noyau  $Z_j$  telle que

$$\|P_j\| \leq \prod_{i=1}^j (1 + \gamma_i).$$

En appliquant le lemme de Mazur, il existe  $Z_{j+1}$  sous-espace de  $Z_j$  tel que

$$\dim(Y/Z_{j+1}) < \infty,$$

et

$$\forall y \in H_1 + \cdots + H_j, \forall z \in Z_{j+1}, \|y\| \leq (1 + \gamma_{j+1})\|y + z\|.$$

Comme  $X$  est  $C$ -finiment crûment représentable dans  $Z_j$ , il existe  $H_{j+1}$  sous-espace de  $Z_{j+1}$  de dimension finie tel que  $d_{\text{BM}}(H_{j+1}, F_{j+1}) \leq C$ .

Il est alors immédiat de conclure que la suite  $(H_j)_{j=1}^\infty$  satisfait la propriété désirée.  $\square$

La définition qui suit diffère légèrement de la définition d'un plongement presque Lipschitz donnée [6]. On parlera alors de plongement quasi-Lipschitz.

**Définition 4.2.2** (Plongement quasi-Lipschitz). Soient  $(M, d)$  et  $(N, \delta)$  deux espaces métriques.

On dit que  $M$  se plonge *quasi-Lipschitz* dans  $N$  si il existe une constante  $D \in [1, \infty)$ , une constante  $r \in (0, \infty)$  d'homogénéisation et une constante  $E \in [0, \infty)$  telles que, pour toute fonction continue  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$  satisfaisant  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(t) > 0$  pour tout  $t > 0$ , il existe une application  $f_\varphi : M \rightarrow N$  telle que, pour tout  $x, y \in M$ ,

$$r\varphi(d(x, y))d(x, y) \leq \delta(f_\varphi(x), f_\varphi(y)) \leq rDd(x, y) + E.$$

**Théorème 4.2.3.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach.

On suppose qu'il existe  $C > 1$  tel que, pour tout  $Z \in \text{cof}(Y)$ ,  $X$  est  $C$ -finiment crûment représentable dans  $Z$ .

Soit  $M$  un sous-espace propre de  $X$ . Alors  $M$  se plonge quasi-Lipschitz dans  $Y$ .

*Démonstration.* On adapte la preuve du théorème 2.7 de [6] à cette proposition.

On pose  $B_k = \{x \in M, \|x\| \leq 2^{k+1}\}$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ .

Donc,  $M$  étant un sous-espace propre de  $X$ ,  $B_k$  est un compact de  $X$ .

Soit  $G_{k,n}$  un  $\varepsilon_n$ -réseau de  $B_k$  contenant 0 (on précisera  $\varepsilon_n$  par la suite), où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $\varphi_{k,n}$  une application de  $B_k$  dans  $G_{k,n}$  telle que

$$\forall x \in B_k, \|x - \varphi_{k,n}(x)\| = d(x, G_{k,n}).$$

Ainsi :

$$\forall x, y \in B_k, \|x - y\| - \varepsilon_n \leq \|\varphi_{k,n}(x) - \varphi_{k,n}(y)\| \leq \|x - y\| + \varepsilon_n.$$

D'après le lemme précédent, on peut construire une famille de sous-espaces  $(H_j)_{j=1}^\infty$  de dimension finie de  $Y$  et des isomorphismes linéaires  $R_{k,j} : \text{Vect}(G_{k,j}) \rightarrow H_j$  tels que  $\|R_{k,j}\| \leq 1$  et  $\|R_{k,j}^{-1}\| \leq C$ , avec  $(H_j)_{j=1}^\infty$  FDD de  $Z = \overline{\text{Vect}(\bigcup_{j=1}^\infty H_j)}$ .

Soit  $\gamma > 0$ . On précisera plus tard le choix de  $\gamma$ .

On note  $P_n$  la projection de  $Z$  sur  $H_1 \oplus \dots \oplus H_n$ .

À l'aide du lemme précédent, on peut supposer que  $\|P_n\| \leq 1 + \gamma$  pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1.

On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_{k,n} = R_{k,n} \circ \varphi_{k,n}$ .

Alors :

$$\forall x, y \in B_k, \frac{1}{C}(\|x - y\| - 2\varepsilon_n) \leq \|f_{k,n}(x) - f_{k,n}(y)\| \leq \|x - y\| + 2\varepsilon_n.$$

On définit :

$$f_k : B_k \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} H_n$$

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_k^n(x)$$

Soit  $\mu : (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0)$  une fonction continue surjective croissante, et  $\sigma : (-\infty, 0) \rightarrow (0, +\infty)$  la fonction définie par  $\sigma(y) = \inf\{x \in (0, +\infty) : \mu(x) \geq y\}$ , avec la convention  $\inf \emptyset = \infty$ .

On pose  $\varepsilon_n = \min\left(\frac{\sigma(-n)}{\eta}, 1\right)$  où  $\eta > 2$  sera déterminé ultérieurement. Alors :

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (f_{k,n}(x) - f_{k,n}(y)) \right\| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \right) \|x - y\| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \varepsilon_n \leq \|x - y\| + 2.$$

On définit :

$$f : M \rightarrow Y$$

$$x \mapsto \lambda_x f_k(x) + (1 - \lambda_x) f_{k+1}(x), \text{ si } 2^k \leq \|x\| \leq 2^{k+1} \text{ où } k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{avec } \lambda_x = \frac{2^{k+1} - \|x\|}{2^k}.$$

Le reste de la preuve va être divisé en deux parties.

### Partie 1. Majoration

Soient  $x, y \in M$ . On suppose que  $\|x\| \leq \|y\|$ . On notera que  $f(0) = 0$ .

Cas 1. Si  $\|x\| \leq \frac{1}{2}\|y\|$ , alors

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leq \|f(x) - f(0)\| + \|f(y) - f(0)\| \\ &\leq \|x\| + \|y\| + 4 \\ &\leq \frac{3}{2}\|y\| + 4 \\ &\leq 3(\|y\| - \|x\|) + 4 \\ &\leq 3\|x - y\| + 4. \end{aligned}$$

Cas 2. Si  $\frac{1}{2}\|y\| < \|x\| \leq \|y\|$ . On considère deux sous-cas.

Cas 2.a.  $2^k \leq \|x\| \leq \|y\| < 2^{k+1}$ , où  $k \in \mathbb{Z}$ .

Alors, pour  $\lambda_x = \frac{2^{k+1} - \|x\|}{2^k}$  et  $\lambda_y = \frac{2^{k+1} - \|y\|}{2^k}$ , on a

$$|\lambda_x - \lambda_y| = \frac{\|y\| - \|x\|}{2^k} \leq \frac{\|x - y\|}{2^k}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|\lambda_x f_k(x) - \lambda_y f_k(y) + (1 - \lambda_x) f_{k+1}(x) - (1 - \lambda_y) f_{k+1}(y)\| \\ &\leq \lambda_x \|f_k(x) - f_k(y)\| + (1 - \lambda_x) \|f_{k+1}(x) - f_{k+1}(y)\| + 2|\lambda_x - \lambda_y|(\|y\| + 2) \\ &\leq \|x - y\| + 2 + (2^{k+2} + 2^2) \frac{\|x - y\|}{2^k} \\ &\leq 5\|x - y\| + 2 + \frac{2^2}{2^k} \times 2^{k+2} = 5\|x - y\| + 18. \end{aligned}$$

Cas 2.b.  $2^k \leq \|x\| < 2^{k+1} \leq \|y\| < 2^{k+2}$ , pour  $k \in \mathbb{Z}$ .

Soit alors  $\lambda_x = \frac{2^{k+1} - \|x\|}{2^k}$  et  $\lambda_y = \frac{2^{k+2} - \|y\|}{2^{k+1}}$ .

On a  $\lambda_x \leq \frac{\|x - y\|}{2^k}$ , et ainsi  $\lambda_x \|x\| \leq 2\|x - y\|$ .

De façon similaire :  $1 - \lambda_y = \frac{\|y\| - 2^{k+1}}{2^{k+1}} \leq \frac{\|x - y\|}{2^{k+1}}$ , et  $(1 - \lambda_y)\|y\| \leq 2\|x - y\|$ .

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(y)\| &= \|\lambda_x f_k(x) + (1 - \lambda_x) f_{k+1}(x) - \lambda_y f_{k+1}(y) - (1 - \lambda_y) f_{k+2}(y)\| \\
&\leq \lambda_x (\|f_k(x)\| + \|f_{k+1}(x)\|) + (1 - \lambda_y) (\|f_{k+1}(y)\| + \|f_{k+2}(y)\|) \\
&\quad + \|f_{k+1}(x) - f_{k+1}(y)\| \\
&\leq \lambda_x (2\|x\| + 4) + (1 - \lambda_y) (2\|y\| + 4) + \|x - y\| + 2 \\
&\leq 4\|x - y\| + 4 + 4\|x - y\| + 4 + \|x - y\| + 2 = 9\|x - y\| + 10.
\end{aligned}$$

## Partie 2. Minoration

Soient  $x, y \in M$ .

On suppose que  $\|x\| \leq \|y\|$ .

On pose, pour  $k \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Q_{k,n} = R_{k,n}^{-1} \circ \Pi_n$ , où  $\Pi_1 = P_1$ , et  $\Pi_n = P_n - P_{n-1}$  lorsque  $n$  est supérieur ou égal à 2.

Pour la suite, on suppose également que  $2^k \leq \|x\| < 2^{k+1}$  et  $2^l \leq \|y\| < 2^{l+1}$ , où  $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ .

• Supposons dans un premier temps que  $\|x - y\| < \sigma(-1)$ .

Soit alors  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\sigma(-(n+1)) \leq \|x - y\| < \sigma(-n),$$

autrement dit

$$-(n+1) \leq \mu(\|x - y\|) < -n.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
Q_{k,n+1}(f(x)) &= 2^{-(n+1)} \lambda_x \varphi_{k,n+1}(x), \\
Q_{k+1,n+1}(f(x)) &= 2^{-(n+1)} (1 - \lambda_x) \varphi_{k+1,n+1}(x), \\
Q_{l,n+1}(f(y)) &= 2^{-(n+1)} \lambda_y \varphi_{l,n+1}(y), \\
Q_{l+1,n+1}(f(y)) &= 2^{-(n+1)} (1 - \lambda_y) \varphi_{l+1,n+1}(y), \\
\text{et } Q_{r,n+1}(f(x)) &= Q_{s,n+1}(f(y)) = 0 \text{ pour } r \notin \{k, k+1\}, s \notin \{l, l+1\}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
(Q_{r_1,n+1} + \cdots + Q_{r_s,n+1})(f(x) - f(y)) &= 2^{-(n+1)} [\lambda_x \varphi_{k,n+1}(x) + (1 - \lambda_x) \varphi_{k+1,n+1}(x) \\
&\quad - \lambda_y \varphi_{l,n+1}(y) - (1 - \lambda_y) \varphi_{l+1,n+1}(y)]
\end{aligned}$$

avec  $s \in \{2, 3, 4\}$  et  $r_1, \dots, r_s \in \{k, k+1, l, l+1\}$ .

On va maintenant s'aider de l'inégalité suivante :

$$\max_{r \in \{k, k+1, l, l+1\}} \|\varphi_{r,n+1}(x) - x\| \leq \frac{\sigma(-(n+1))}{\eta}.$$

Cela nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
\|(Q_{r_1,n+1} + \cdots + Q_{r_s,n+1})(f(x) - f(y))\| &\geq 2^{-(n+1)} \left( \|x - y\| - \frac{2\sigma(-(n+1))}{\eta} \right) \\
&\geq 2^{-(n+1)} \frac{\eta - 2}{\eta} \|x - y\|.
\end{aligned}$$

Comme  $\|Q_{r_1, n+1} + \cdots + Q_{r_s, n+1}\| \leq 8C(1 + \gamma)$ , on en déduit

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \frac{2^{-(n+1)}(\eta - 2)\|x - y\|}{8\eta C(1 + \gamma)} \geq \frac{2^{\mu(\|x-y\|)}(\eta - 2)\|x - y\|}{16\eta C(1 + \gamma)}.$$

• Supposons maintenant que  $\|x - y\| \geq \sigma(-1)$  ou, de façon équivalente, que  $-1 \leq \mu(\|x - y\|)$ .

Alors, en utilisant les applications  $Q_{k,1}, Q_{k+1,1}, Q_{l,1}$  et  $Q_{l+1,1}$  à la place de  $Q_{k,n+1}, Q_{k+1,n+1}, Q_{l,n+1}$ , et  $Q_{l+1,n+1}$ , on obtient que

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \frac{(\eta - 2)\|x - y\|}{16\eta C(1 + \gamma)}.$$

Comme  $\mu \leq 0$ , il s'ensuit que

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \frac{2^{\mu(\|x-y\|)}(\eta - 2)\|x - y\|}{16\eta C(1 + \gamma)}.$$

Comme  $\gamma$  peut être choisi aussi petit et  $\eta$  aussi grand qu'on le souhaite, cela permet de conclure notre preuve.  $\square$

**Remarque 4.2.4.** Si l'espace de Banach  $X$  a, de plus, la BAP, on obtient le même résultat en évitant de passer par des réseaux pour un plongement presque Lipschitz. En effet, il existe alors  $\lambda \in [1, \infty)$ , et un opérateur de rang fini  $T_k^n : B_k \rightarrow B_k$  tel que

$$\forall x, y \in B_k, \|x - y\| - 2\varepsilon_n \leq \|T_k^n(x) - T_k^n(y)\| \leq \lambda\|x - y\|.$$

Pour le reste de la preuve, on raisonne de façon similaire à la preuve du théorème 4.2.3, en sachant que  $\text{Vect}(T_k^n(B_k))$  est de dimension finie et qu'on pourra donc appliquer à nouveau le lemme 4.2.1.

**Remarque 4.2.5.** Dans le corollaire 4.3 (premier point) de l'article [6], F. Baudier et G. Lancien ont prouvé que, dans le cas où  $X$  est un espace de Banach séparable, il existe un sous-ensemble compact de  $X$  tel que, lorsque  $K$  se plonge presque Lipschitz dans un espace de Banach  $Y$ ,  $X$  est finiment crûment représentable dans  $Y$ . Cela reste vrai lorsque  $K$  se plonge quasi-Lipschitz dans un espace de Banach  $Y$ .

**Corollaire 4.2.6.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach.*

*Si  $X$  est uniformément finiment crûment représentable dans  $Y$ , alors pour tout  $Z \in \text{cof}(Y)$ , pour tout sous-espace propre  $M$  de  $X$ ,  $M$  se plonge quasi-Lipschitz dans  $Z$ .*

**Remarque 4.2.7.** Le corollaire 4.1.17 est un cas particulier de ce dernier résultat. En effet, les assertions suivantes sont équivalentes, pour un espace de Banach  $X$  de dimension infinie et  $p \in [1, \infty]$  :

- (i)  $X$  contient uniformément les  $\ell_p^n$ .
- (ii)  $L_p$  est finiment représentable dans  $X$ .
- (iii)  $L_p$  est uniformément finiment crûment représentable dans  $X$ .

*Démonstration.* (ii)  $\Rightarrow$  (i). Cette implication est immédiate car  $\ell_p^n$  se plonge isométriquement dans  $L_p$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii). On suppose que  $X$  contient uniformément les  $\ell_p^n$ .

Soit  $F \subset L_p$  de dimension finie.

Soit  $\varepsilon > 0$ .

$L_p$  est un espace  $\mathcal{L}_{(1+\varepsilon),p}$  (voir la proposition 4.1.16). Donc il existe un sous-espace  $G$  de  $L_p$  de dimension finie tel que  $F \subseteq G$  et un isomorphisme linéaire  $T$  de  $G$  sur  $\ell_p^{\dim(G)}$  vérifiant  $\|T\| \leq 1$  et  $\|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$ .

Donc  $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$ .

Par ailleurs, comme  $X$  contient uniformément les  $\ell_p^n$ ,  $X$  admet un sous-espace linéairement isomorphe à  $\ell_p^{\dim(G)}$ , ce qui permet de conclure.

(i)  $\Leftrightarrow$  (iii). D'après le théorème 4.1.11,  $X$  contient les  $\ell_p^n$  uniformément si et seulement si, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $X$  contient les  $\ell_p^n (1 + \varepsilon)$ -uniformément.

On déduit alors du corollaire 4.1.12 que  $X$  contient les  $\ell_p^n$  uniformément si et seulement si, pour tout  $Z \in \text{cof}(X)$ ,  $Z$  contient les  $\ell_p^n$  uniformément.

Enfin, du fait qu'on ait l'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (ii), on en conclut que  $X$  contient les  $\ell_p^n$  uniformément si et seulement si, pour tout  $Z \in \text{cof}(X)$ ,  $L_p$  est finiment représentable dans  $Z$ .  $\square$

### 4.3 Bases étroites avec constantes et espaces localement minimaux

Nous terminons ce chapitre en donnant des propriétés établies dans le chapitre 4 de l'article [16] de V. Ferenczi et C. Rosendal, ainsi que les définitions associées. Nous avons choisi d'en parler car cela est en lien avec la notion de représentabilité crûment finie et, de plus, à partir d'une des définitions données, on obtient un corollaire du théorème 4.2.3 concernant les plongements quasi-Lipschitz.

On donne tout d'abord la proposition suivante, qui est la Proposition 4.1 de [16], pour laquelle nous précisons que  $[y_n]_{n \in I_k} \sqsubseteq_K [e_n]_{n \notin I_k}$  (respectivement  $Y \sqsubseteq_K [e_n]_{n \notin I_k}$ ) signifie qu'il y a un plongement linéaire  $T : [y_n]_{n \in I_k} \rightarrow [e_n]_{n \notin I_k}$  (respectivement  $T : Y \rightarrow [e_n]_{n \notin I_k}$ ) tel que  $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq K$  :

**Proposition 4.3.1.** *Soit  $E$  un espace de Banach de dimension infinie avec une base  $(e_n)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Pour chaque suite bloc-base  $(y_n)$  de  $(e_n)$ , il y a des intervalles  $I_0 < I_1 < I_2 < \dots$  tels que pour tout  $K$ ,*

$$[y_n]_{n \in I_k} \not\sqsubseteq_K [e_n]_{n \notin I_k}.$$

(2) *Pour chaque espace  $Y$ , il y a des intervalles  $I_0 < I_1 < I_2 < \dots$  tel que, pour tout  $K$ ,*

$$Y \not\sqsubseteq_K [e_n]_{n \notin I_k}.$$

(3) *Aucun espace ne se plonge uniformément dans les sous-espaces à l'extrémité, i.e les espaces  $\overline{\text{Vect}}\{e_n, n > N\}$  où  $N \in \mathbb{N}^*$ .*

(4) *Il n'y a pas de constante  $K$  et de sous-espace de dimension infinie de  $E$  qui est  $K$ -finiment crûment représentable dans chaque sous-espace à l'extrémité de  $E$ .*

**Définition 4.3.2.** Une base qui satisfait une des quatre assertions, ainsi que l'espace qu'elle engendre, est dite *étroit(e) avec constantes*.

**Remarque 4.3.3.** En particulier, si  $(e_n)$  est étroite avec constantes, alors  $E$  n'est pas uniformément finiment crûment représentable dans  $E$ , alors que  $E$  est évidemment finiment crûment représentable dans  $E$ .

**Définition 4.3.4.** Une base  $(e_n)$  est dite fortement asymptotiquement  $\ell_p$  [11], où  $1 \leq p \leq \infty$ , si il existe une constante  $C$  et une fonction  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  telle que pour tout  $n$ , pour toute famille de  $n$  vecteurs unitaires à supports disjoints dans  $[e_k \mid k \geq f(n)]$  est  $C$ -équivalente à la base canonique de  $\ell_p^n$ .

Voici maintenant la Proposition 4.2 de [16] :

**Proposition 4.3.5.** Soit  $E$  un espace de Banach avec une base  $(e_n)$  fortement asymptotiquement  $\ell_p$ , pour  $1 \leq p < \infty$ , et ne contenant pas une copie de  $\ell_p$ . Alors  $(e_n)$  est étroite avec constantes.

**Remarque 4.3.6.** En particulier, l'espace de Tsirelson est étroit avec constantes.

**Définition 4.3.7.** Un espace de Banach  $X$  est dit *localement minimal* si il existe une constante  $K > 1$  telle que  $X$  est  $K$ -finiment crûment représentable dans chacun de ses sous-espaces de dimension infinie.

**Exemple 4.3.8.**  $c_0$ ,  $\ell_p$  pour  $1 \leq p < \infty$ , et l'espace de Tsirelson  $T^*$  sont de tels espaces.

Avec cette dernière définition, un corollaire immédiat du théorème 4.2.3 est le suivant :

**Corollaire 4.3.9.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach tels que  $X$  est localement minimal, et  $Y$  est finiment crûment représentable dans  $X$ .

Soit  $M$  un sous-espace propre de  $Y$ .

Alors  $M$  se plonge quasi-Lipschitz dans  $X$ .

On termine ce paragraphe par un dernier théorème de dichotomie issu de [16] (théorème 4.4 de cet article) :

**Théorème 4.3.10.** Soit  $E$  un espace de Banach de dimension infinie avec une base  $(e_n)$ . Alors il existe une suite bloc-base  $(x_n)$  de  $(e_n)$  telle que

- (1) soit  $(x_n)$  est étroite avec constantes,
- (2) soit  $[x_n]$  est localement minimal.





# Bibliographie

- [1] F. Albiac, N.J. Kalton, Topics in Banach Space Theory, *Graduate Texts in Mathematics*, Springer New-York, (2006). [17](#)
- [2] K.W. Anderson, Midpoint local uniform convexity, and other geometric properties of Banach spaces, *Ph.D. Dissertation*, University of Illinois, Urbana, Illinois, (1960). [27](#)
- [3] F. Baudier, Quantitative nonlinear embeddings into Lebesgue sequence spaces, *J. Topol. Anal.*, **08**, (2016), 117–150. [41](#)
- [4] F. Baudier, Plongements des espaces métriques dans les espaces de Banach, *Thèse de doctorat*, Université de Franche-Comté, (2010). [30](#)
- [5] F. Baudier, N.J. Kalton, G. Lancien, A new metric invariant for Banach spaces, *Studia Math.*, **199**(1), (2010), 73–94. [47](#)
- [6] F. Baudier, G. Lancien, Tight embeddability of proper and stable metric spaces, *Anal. Geom. Metr. Spaces*, **3**, (2015), 140–156. [4](#), [6](#), [7](#), [8](#), [11](#), [57](#), [59](#), [60](#), [61](#), [62](#), [65](#)
- [7] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, Geometry nonlinear functional analysis, *A.M.S Colloquium publications*, vol 48, American Mathematical Society, Providence, RI, (2000). [3](#), [4](#), [7](#), [8](#), [31](#)
- [8] J. Bourgain, Remarks on the extension of Lipschitz maps defined on discrete sets and uniform homeomorphisms, Geometrical aspects of functional analysis (1985/86), *Lecture Notes in Math.*, 1267, Springer Berlin, (1987), 157–167. [5](#), [9](#)
- [9] B.M. Braga, Asymptotic structure and coarse Lipschitz geometry of Banach spaces, *Studia Mathematica*, **237**, (2017), 71–97. [18](#), [41](#), [47](#), [51](#)
- [10] P.G. Casazza, Approximation Properties, Handbook of the geometry of Banach spaces, **vol. 1**, (2001), 271–316. [20](#)
- [11] S. Dilworth, V. Ferenczi, D. Kutzarova and E. Odell, On strongly asymptotically  $\ell_p$  spaces and minimality, *J. London Math. Soc. (2)*, **75**, (2007), 409–416. [67](#)
- [12] S. Dilworth, D. Kutzarova, G. Lancien and L. Randrianarivony, Equivalent norms with the property  $\beta$  of Rolewicz, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, **111** (2017), no. 1, 101–113. [23](#)
- [13] S.J. Dilworth, D. Kutzarova, N.L. Randrianarivony, J.P. Revalski and N.V. Zhivkov, Lenses and asymptotic midpoint uniform convexity, *J. Math. Anal. Appl.*, **436**, (2016), no 2, 810–821. [6](#), [10](#), [27](#), [48](#), [51](#)
- [14] V. Dimant, R. Gonzalo and J.A. Jaramillo, Asymptotic structure,  $\ell_p$ -estimates of sequences, and compactness of multilinear mappings, *J. Math. Appl.*, **350**, (2009), 680–693. [27](#)

- 
- [15] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos and V. Zizler, Banach Space Theory : The Basis for Linear and Nonlinear Analysis, *Canadian Mathematical Society*, Springer New-York, (2011). [20](#), [21](#)
- [16] V. Ferenczi and C. Rosenthal, Banach spaces without minimal subspaces, *J. Funct. Anal.*, **257** (1), (2009), 149–193. [7](#), [11](#), [57](#), [66](#), [67](#)
- [17] T. Figiel and W.B. Johnson, A uniformly convex Banach space which contains no  $\ell_p$ , *Compositio Math.*, **29**, (1974), 179–190. [16](#)
- [18] G. Godefroy, N.J. Kalton, G. Lancien, Szlenk indices and uniform homeomorphisms, *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (10), (2001), 3895–3918. [6](#), [11](#), [29](#)
- [19] G. Godefroy, G. Lancien, V. Zizler, The non-linear geometry of Banach spaces after Nigel Kalton, *Rocky Mountain J. of Math.*, **44**, (2014), 2747–2762. [3](#), [8](#)
- [20] E. Gorelik, The uniform nonequivalence of  $L_p$  and  $l_p$ , *Israel J. Math.*, **87**, (1994), 1–8. [5](#), [9](#)
- [21] W.T. Gowers, Ramsey methods in Banach spaces, *Handbook of the geometry of Banach spaces*, **2**, North-Holland, Amsterdam, (2003), 1071–1097. [32](#)
- [22] W.T. Gowers and B. Maurey, The unconditional basic sequence problem, *J. Amer. Math. Soc.*, **6**, (1993), 851–874. [19](#)
- [23] E. Guentner and J. Kaminker, Exactness and uniform embeddability of discrete groups, *J. London Math. Soc. (2)*, **70**, (2004), no. 3, 703–718. [30](#)
- [24] P. Hájek, V. Montesinos, J. Vanderwerff and V. Zizler, Biorthogonal systems in Banach spaces, *CMS Books in Mathematics (Springer-Verlag)*, (2007). [28](#)
- [25] R. Huff, Banach spaces which are nearly uniformly convex, *Rocky Mountain J. Math.*, **10** (4), (1980), 743–749. [24](#)
- [26] R.C. James, Bases and reflexivity of Banach spaces, *Ann. of Math. (2)*, **52**, (1950), 518–527. [33](#)
- [27] R.C. James, Superreflexive Banach spaces, *Canadian J. Math.*, **24**, (1972), 896–904. [57](#)
- [28] R.C. James, Superreflexive spaces with bases, *Pacific J. Math.*, **41–42**, (1972), 409–419. [57](#)
- [29] R.C. James, Uniformly non-square Banach spaces, *Ann. of Math. (2)*, **80**, (1964), 542–550. [59](#)
- [30] W.B. Johnson, J. Lindenstrauss and G. Schechtman, Banach spaces determined by their uniform structures, *Geom. Funct. Anal.*, **6**, (1996), 430–470. [5](#), [9](#)
- [31] W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss and G. Schechtman, Almost Fréchet differentiability of Lipschitz mappings between infinite-dimensional Banach spaces, *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, **84** (3), (2002), 711–746. [22](#), [51](#)
- [32] N.J. Kalton, Uniform homeomorphisms of Banach spaces and asymptotic structure, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **365**, (2013), 1051–1079. [6](#), [10](#), [48](#)
- [33] N.J. Kalton, The nonlinear geometry of Banach spaces, *Rev. Mat. Complut.*, **21**, (2008), 7–60. [30](#)
- [34] N.J. Kalton, N.L. Randrianarivony, The coarse Lipschitz geometry of  $\ell_p \oplus \ell_q$ , *Math. Ann.*, **341**, (2008), 223–237. [3](#), [4](#), [5](#), [8](#), [9](#), [31](#), [32](#), [37](#), [42](#), [51](#)
-

- 
- [35] J.L. Krivine, Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés, *Ann. of Math. (2)*, **104**, (1976), 1–29. [59](#)
- [36] H. Knaust, E. Odell, T. Schlumprecht, On asymptotic structure, the Szlenk index and UKK properties in Banach spaces, *Positivity* **3**, (1999), 173–199. [29](#)
- [37] G. Lancien, A short course on non linear geometry of Banach spaces, *Topics in Functional and Harmonic Analysis, Theta Series in Advanced Mathematics*, (2012), 77–102. [4](#), [5](#), [9](#), [30](#), [31](#), [37](#)
- [38] G. Lancien, A survey on the Szlenk index and some of its applications, *RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis Nat. Ser. A Mat.*, **100**, (2006), 209–235. [12](#)
- [39] G. Lancien, On uniformly convex and uniformly Kadec-Klee renormings, *Serdica Math. J.*, **21 (1)**, (1995), 1–18. [24](#)
- [40] G. Lancien, Réflexivité et normes duales possédant la propriété uniforme de Kadec-Klee, *Publ. Math. de la Fac. des sciences de Besançon, Fascicule 14*, (1993-94), 69–74. [5](#), [9](#), [23](#), [24](#), [34](#), [43](#)
- [41] G. Lancien and M. Raja, Asymptotic and Coarse Lipschitz structures of quasi-reflexive Banach spaces, *Houston J. of Math.*, **44**, (2018), no. 3, 927–940. [22](#), [30](#), [43](#)
- [42] J. Lindenstrauss, The geometric theory of the classical Banach spaces, *Actes Congrès intern. Math.*, (1970), Gauthier-Villars, Paris, **Tome 2**, 365–372. [60](#)
- [43] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach Spaces, *volume 338 of Lecture Notes Math. Springer-Verlag*, (1973). [60](#)
- [44] V.D. Milman, Geometric theory of Banach spaces. II. Geometry of the unit ball (Russian), *Uspehi Mat. Nauk*, **26**, (1971), 73–149. English translation : *Russian Math. Surveys* **26**, (1971), 79–163. [22](#)
- [45] B. Maurey and G. Pisier, Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach, *Studia Math*, **58**, (1976), 45–90. [59](#)
- [46] F. Netillard, Coarse Lipschitz embeddings of James spaces, *Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin*, **25 (1)**, (2018), 71–84. [33](#), [47](#)
- [47] M.I. Ostrovskii, Embeddability of locally finite metrix spaces into Banach spaces is finitely determined, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **140**, (2012), 2721–2730. [7](#), [11](#), [57](#), [58](#)
- [48] M.I. Ostrovskii, Metric embeddings : bilipschitz and coarse embeddings into Banach spaces, *De Gruyter Studies in Mathematics*, **49**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, (2013). [30](#), [58](#)
- [49] G. Pisier, The dual  $J^*$  of the James Space has cotype 2 and the Gordon-Lewis property, *Proc. Cambridge Phil.*, **103**, (1988), 323–331. [33](#)
- [50] M.Raja, On weak\* uniformly Kadec-Klee renormings, *Bull. London Math. Soc.*, **42 (2)**, (2010), 221–228. [29](#)
- [51] J. Schauder, Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalraumen, *Math. Zeit*, **26**, (1927), 47–65. [17](#)
- [52] W. Szlenk, The non existence of a separable reflexive space universal for all reflexive Banach spaces, *Studia Math*, **30**, (1968), 53–61. [12](#), [28](#)
- [53] B.S. Tsirel'son, It is impossible to imbed  $\ell_p$  and  $c_0$  into an arbitrary Banach space, *Funkcional. Anal. i Priložen.*, **8**, (1974), 57–60 (Russian). [16](#)
-

**Titre :** Plongements grossièrement Lipschitz et presque Lipschitz dans les espaces de Banach

**Mots clés :** plongement - presque Lipschitz - asymptotique- espaces de Banach - Lipschitz - grossièrement Lipschitz

**Résumé :** Le thème central de cette thèse est l'étude de plongements d'espaces métriques dans des espaces de Banach. La première étude concerne les plongements grossièrement Lipschitz entre les espaces de James  $J_p$  pour  $p > 1$  et  $p$  fini. On obtient que, pour  $p \neq q$ ,  $J_q$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $J_p$ . Nous avons également obtenu, dans le cas où  $q < p$ , une majoration de l'exposant de compression de  $J_q$  dans  $J_p$  par  $\frac{q}{p}$ . La question naturelle qui se pose ensuite est de savoir si le résultat obtenu pour les espaces de James est vrai aussi en ce qui concerne leurs duaux. Nous obtenons que, pour  $p \neq q$ ,  $J_p^*$  ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans  $J_q^*$ . Suite à ce travail, on établit des résultats plus généraux sur la non-plongeabilité des espaces de Banach  $q$ -AUS dans les espaces de Banach  $p$ -AMUC pour  $p < q$ . On en déduit aussi, à l'aide d'un théorème de renormage, un résultat sur les indices de Szlenk. Par ailleurs, on obtient un résultat sur la plongeabilité quasi-Lipschitz dont la définition diffère légèrement de la plongeabilité presque Lipschitz : Pour deux espaces de Banach  $X$  et  $Y$ , si, pour  $C > 1$ ,  $X$  est  $C$ -finiment crûment représentable dans tout sous-espace vectoriel de codimension finie de  $Y$ , alors tout sous-espace propre  $M$  de  $X$  se plonge quasi-Lipschitz dans  $Y$ . Pour conclure, on obtient le corollaire suivant : Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach tels que  $X$  est localement minimal et  $Y$  est finiment crûment représentable dans  $X$ . Alors, pour  $M$  sous-espace propre de  $Y$ ,  $M$  se plonge quasi-Lipschitz dans  $X$ .

**Title :** Coarse Lipschitz embeddings and almost Lipschitz embeddings into Banach spaces

**Keywords :** embedding - almost Lipschitz - asymptotic- Banach spaces - Lipschitz - coarse Lipschitz

**Abstract :** The central theme of this thesis is the study of embeddings of metric spaces into Banach spaces. The first study focuses on the coarse Lipschitz embeddings between James Spaces  $J_p$  for  $p > 1$  and  $p$  finite. We obtain that, for  $p \neq q$ ,  $J_q$  does not coarse Lipschitz embed into  $J_p$ . We also obtain, in the case where  $q < p$ , that the compression exponent of  $J_q$  in  $J_p$  is lower or equal to  $\frac{q}{p}$ . Another natural question is to know whether we have similar results for the dual spaces of James spaces. We obtain that, for  $p \neq q$ ,  $J_p^*$  does not coarse Lipschitz embed into  $J_q^*$ . Further to this work, we establish a more general result about the coarse Lipschitz embeddability of a Banach space which has a  $q$ -AUS norm into a Banach space which has a  $p$ -AMUC norm for  $p < q$ . With the help of a renorming theorem, we deduce also a result about the Szlenk index. Moreover, after defining the quasi-Lipschitz embeddability, which is slightly different to the almost Lipschitz embeddability, we obtain the following result : For two Banach spaces  $X$ , if  $X$  is crudely finitely representable with constant  $C$  (where  $C > 1$ ) in any subspace of  $Y$  of finite codimension, then every proper subset  $M$  of  $X$  quasi-Lipschitz embeds into  $Y$ . To conclude, we obtain the following corollary : Let  $X$  be a locally minimal Banach space, and  $Y$  be a Banach space which is crudely finitely representable in  $X$ . Then, for  $M$  a proper subspace of  $Y$ ,  $M$  quasi-Lipschitz embeds into  $X$ .