



HAL
open science

Polytopes moments des compactifications sphériques d'un groupe : application au programme des modèles minimaux

Paul Bartholmey

► **To cite this version:**

Paul Bartholmey. Polytopes moments des compactifications sphériques d'un groupe : application au programme des modèles minimaux. Mathématiques générales [math.GM]. Université Montpellier, 2019. Français. NNT : 2019MONT033 . tel-02380215

HAL Id: tel-02380215

<https://theses.hal.science/tel-02380215>

Submitted on 26 Nov 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR
DE L'UNIVERSITE DE MONTPELLIER**

En Mathématiques et Modélisation

École doctorale I2S - Information, Structures, Systèmes

Unité de recherche UMR n°5149 - IMAG - Institut Montpellierain Alexander Grothendieck

**Polytopes moments des compactifications sphériques d'un groupe :
application au programme des modèles minimaux**

Présentée par Paul Bartholmey

Le 15 Juillet 2019

**Sous la direction de Cédric Bonnafé
et Boris Pasquier**

Devant le jury composé de

Cédric BONNAFÉ, Directeur de recherche, Université de Montpellier

Stéphanie CUPIT-FOUTOU, Associate professor, Ruhr-Universität Bochum

Andreas HÖRING, Professeur des universités, Université de Nice Sophia Antipolis

Boris PASQUIER, Professeur des universités, Université de Poitiers

Ronan TERPEREAU, Maître de conférences, Université de Bourgogne

Directeur

Présidente du jury

Rapporteur

Co-Directeur

Examineur



**UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER**

Table des matières

1	Introduction	1
2	Rappels variétés sphériques	9
2.1	Notations	9
2.2	Variétés sphériques	10
2.3	Diviseurs et polytopes moments	16
2.3.1	Définitions et exemples	16
2.3.2	Classification	19
2.4	Courbes	21
2.4.1	Rappels généraux	21
2.4.2	Courbes des variétés sphériques	21
2.4.3	Contractions associées à une face du cône des courbes	23
2.5	Compactifications sphériques d'un groupe algébrique connexe réductif .	24
3	Polytopes moments des \mathbb{G}/G-plongements	27
3.1	Faces admissibles	27
3.2	Description des polytopes moments	31
3.3	Morphismes et polytopes moments	37
3.4	Description des courbes via les polytopes moments	39
4	Familles de polytopes à un paramètre	43
4.1	Une première famille	43

4.2	Une seconde famille	44
5	Application au programme des modèles minimaux	47
5.1	Description des courbes contractées	48
5.2	La fibration	50
5.3	Résultats et conjectures	53
5.4	Exemples	56
5.4.1	$G = SL_3$	56
5.4.2	$G = SL_4$	58
6	Annexes : Programmation en SageMath	67
6.1	Notations générales	67
6.2	Fonctions générales	68
6.3	Fonctions sur les diviseurs	71
6.4	Fonctions sur les polytopes	74
6.5	Fonctions pour la description du MMP	76

I

Introduction

En géométrie algébrique, le programme des modèles minimaux, appelé aussi théorie de Mori et abrégé en MMP, tient une place importante dans la classification birationnelle des variétés algébriques. Le but est de montrer que pour toute variété algébrique complexe, projective et normale X on a :

- Si $\mathcal{K}(X) \geq 0$ alors il existe une variété Y birationnelle à X telle que K_Y est nef. Une telle variété est appelée un modèle minimal.
- Si $\mathcal{K}(X) = -\infty$ alors il existe une variété Y birationnelle à X admettant une fibration de Fano, c'est à dire un morphisme $Y \rightarrow Z$ dont l'anticanonique $-K_F$ d'une fibre générale F est ample.

où K_X est le fibré en droites canonique de la variété X , et $\mathcal{K}(X)$ la dimension de Kodaira de la variété X .

Un diviseur de Cartier D est dit nef si $D \cdot C \geq 0$, $\forall C \in NE(X)$ (voir les rappels généraux section 2.4.1 pour plus de détails sur les notations).

Dans les années 1900, l'école italienne de géométrie algébrique a montré que toute surface projective lisse admettait soit un modèle minimal (unique dans ce cas), soit une fibration de Mori. L'ingrédient principal est le théorème de contraction de Castelnuovo [12, Theorem V.5.7, page 414], et l'idée générale est de contracter toutes les -1 -courbes (ie les courbes d'auto-intersection -1) de la surface.

La question en dimension supérieure est plus délicate. Un des premiers résultats importants est le théorème du cône de Mori, décrivant la structure du cône $NE(X)$ des courbes effectives d'une variété X [7, Lecture 11]. Notamment à partir d'une variété \mathbb{Q} -factorielle X on peut construire une variété X_1 obtenue en contractant un rayon extrémal du cône $NE(X)_{K_X < 0} := NE(X) \cap \{C \mid K_X \cdot C < 0\}$. Ainsi la variété X_1 est plus "proche" d'être un modèle minimal que X . Cependant en contractant ces rayons extrémaux, il se peut que la variété X_1 ne soit plus \mathbb{Q} -factorielle. L'idée est de remplacer

X_1 par une variété \mathbb{Q} -factorielle X'_1 avec

$$\begin{array}{ccc} X & & X'_1 \\ & \searrow \Phi_R & \swarrow \Phi_{R'} \\ & X_1 & \end{array}$$

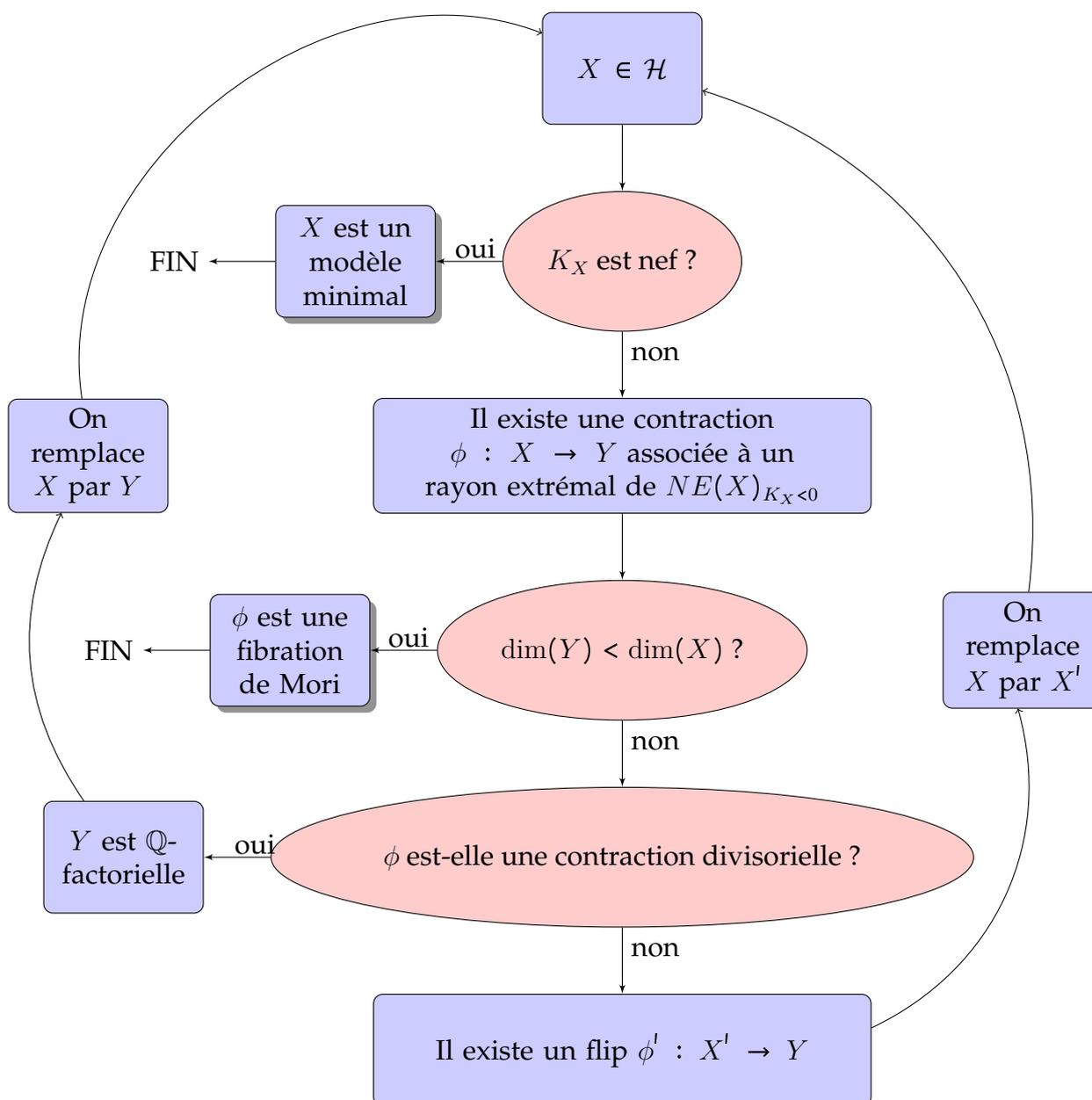
où Φ_R est la contraction attachée à un rayon extrémal de $NE(X)_{K_X < 0}$ et $\Phi_{R'}$ est la contraction attachée à un rayon extrémal de $NE(X'_1)_{K_{X'_1} > 0}$. Ainsi en remplaçant X_1 par X'_1 on a ajouté des courbes sur lesquelles le diviseur canonique est positif. Un tel schéma est appelé un flip.

L'existence de tel flip n'a été démontrée que récemment en 2010 par Birkar, Cascini, Hacon et McKernan [1]. Les auteurs montrent aussi la finitude de l'algorithme, c'est à dire un nombre fini de flips, si on choisit convenablement les rayons extrémaux.

Le programme pour les variétés \mathbb{Q} -factorielles, obtenu en réitérant la construction exposée ci-dessus, est résumé avec le schéma suivant. Pour plus de détails on pourra se référer au livre de Kenji Matsuki : *Introduction to the Mori Program* [19].

Dans cette thèse on se propose d'étudier ce programme pour une famille de variétés de manière explicite et programmable. Soit G un groupe algébrique réductif connexe. Une G -variété, c'est à dire une variété algébrique munie d'une action algébrique de G est dite sphérique si elle est normale et possède une orbite ouverte dense sous l'action d'un sous-groupe de Borel. On donne quelques exemples de familles fondamentales de variétés sphériques :

- Les variétés toriques lorsque le groupe G est un tore algébrique. Ce sont les variétés sphériques les plus simples. La combinatoire des variétés toriques est comprise depuis longtemps : on classifie les variétés toriques avec des cônes et éventails dans le réseau des caractères et des co-caractères. Via cette classification on connaît également leur géométrie : on connaît les variétés toriques lisses, projectives, factorielles, etc. Pour plus de détails voir [20] et [11].
- Les variétés de drapeaux généralisées, par exemple si G est simple et P est un sous-groupe parabolique de G alors l'espace homogène G/P est une variété de drapeaux. De la même façon que pour la famille précédente, les variétés de drapeaux généralisées sont classifiées grâce à de la combinatoire (les systèmes de racines) et la géométrie de ces variétés est également bien comprise. On peut se référer à [6] pour de plus amples informations.
- Les variétés horosphériques qui sont des variétés algébriques normales dans lesquelles un groupe algébrique réductif opère avec une orbite ouverte fibrée en tores sur une variété de drapeaux. En particulier les variétés toriques et les variétés de drapeaux généralisées sont des variétés horosphériques. On peut par exemple citer la classifications des variétés horosphériques de Fano par Pasquier [21].
- Les variétés magnifiques, qui ont été centrale dans l'établissement de la classification des variétés sphériques dont on parlera dans le paragraphe suivant. Une introduction aux variétés magnifiques est donnée dans l'article [23].

FIGURE 1.1 – Le MMP pour les variétés \mathbb{Q} -factorielles

- Les compactifications sphériques de groupes, c'est à cette famille que l'on va s'intéresser dans cette thèse. Si le groupe G est un tore alors ces compactifications sphériques sont exactement les G -variétés toriques. En particulier on regardera les $G \times G$ -plongements sphériques dont l'espace homogène est $G \times G/G$ où G est vu comme la diagonale de $G \times G$.
- Les variétés symétriques. Un espace homogène G/H est dit symétrique si le sous groupe H est fixé par une involution de G . On peut par exemple citer une classification de certaines variétés symétriques de Fano par Ruzzi [24]. Les compactifications sphériques de groupes que l'on considérera sont des cas particuliers de variétés symétriques.

- Les variétés horosymétriques qui sont des variétés normales dans lesquelles un groupe algébrique réductif opère avec une orbite ouverte fibrée en variétés symétriques sur une variété de drapeaux. Elles ont été récemment introduites par Delcroix [10].

La classification des variétés sphériques complexes s'opère en deux étapes. La première est plus ancienne et s'occupe de classifier les plongements d'un espace homogène sphérique donné. Si X est une G -variété sphérique alors elle possède une G -orbite ouverte qui est isomorphe à un espace homogène G/H , et dans ce cas cet espace homogène est aussi sphérique. On dit alors que X est un plongement sphérique de G/H . La théorie de Luna-Vust permet de classifier les plongements sphériques d'un espace homogène G/H [14] : à un espace homogène sphérique G/H on associe un sous-réseau Ξ des caractères de (G, B, T) qui correspond à l'ensemble des poids de G apparaissant dans la G -représentation $\mathbb{C}(G/H)$. On peut alors classifier les G -variétés sphériques dont l'espace homogène est G/H via des éventails coloriés, c'est à dire une collection de cônes coloriés dans l'espace $\Xi_{\mathbb{Q}}^{\vee}$. En particulier deux telles variétés sont isomorphes si et seulement si leurs éventails respectifs sont égaux et on peut également reconstruire une G -variété sphérique dont l'espace homogène est G/H uniquement à partir d'un éventail colorié.

La seconde étape est plus récente, elle a été initiée et conjecturée par Luna en 2001 [18]. Le but est de classifier les sous-groupes H d'un groupe réductif connexe G tel que l'espace homogène G/H soit sphérique. À un groupe réductif connexe G il introduit des données combinatoires, appelées données sphériques homogènes, sous la forme de quintuplets. Pour une G -variété sphérique, il y a une façon naturelle d'associer un tel quintuplet. Luna prouve que si G est un groupe semi-simple de type A , et sous une hypothèse du groupe adjoint de G , alors il y a une bijection entre les espaces homogènes sphériques G/H et les données sphériques homogènes de G . Pour démontrer cette classification il se ramène au cas des variétés magnifiques. L'auteur conjecture ensuite que cette classification reste vraie en n'importe quel type. La partie unicité de cette conjecture est montrée par Losev en 2009 [17]. La partie existence a été parachevée par Bravi et Pezzini d'un côté et par Cupit-Foutou d'autre part, par deux méthodes différentes. Pour un historique plus complet de cette classification on pourra consulter [8] et [3].

Dans le cas des G -variétés sphériques projectives une alternative à classification est considérée par Pasquier dans le cas des variétés horosphériques [22]. L'idée est d'associer à un couple (X, \mathcal{L}) , où X est une G -variété sphérique projective X et \mathcal{L} un fibré ample G -linéarisé en droites sur X , un polytope, appelé polytope moment de \mathcal{L} . Ces polytopes avaient déjà été décrits par Brion [4]. Plus récemment Cupit-Foutou, Pezzini et Van Steirteghem [9] terminent cette classification dans le cas général. En particulier ils donnent des conditions pour qu'un polytope de $\Xi_{\mathbb{Q}}$ soit un polytope moment. On redémontrera par une autre méthode cette classification dans le cas des compactifications sphériques de G lorsque ce dernier est un groupe simple. En particulier Ξ s'identifie

au réseau $\mathcal{X}(T)$, et si on note

$$A = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_s \\ \alpha_1^\vee \\ \vdots \\ \alpha_n^\vee \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où A et B sont respectivement des matrices de taille $(s+n) \times \dim(T)$ et $(s+n) \times 1$ avec $\{\alpha_i^\vee\}_{1 \leq i \leq n}$ l'ensemble des coracines simples, ν_i des éléments de la chambre négative écrits en lignes dans une base fixée de $\mathcal{X}(T)_\mathbb{Q}$ et b_i des rationnels. On a alors le théorème

Théorème (A). *Si $Q = \{w \in \mathcal{X}(T)_\mathbb{Q} \mid Aw \leq B\}$ est un polytope de dimension maximale, alors il existe une compactification sphérique projective X de G et un diviseur ample D de X tels que Q est le polytope moment de D .*

Et réciproquement tout polytope moment s'écrit sous cette forme.

Un point important de ce dictionnaire est le point suivant. Si (X, \mathcal{L}) est une G -variété sphérique projective polarisée et Q son polytope moment, alors on a une inclusion

$$\{G\text{-orbites fermées de } X\} \leftrightarrow \{\text{sommets de } Q\}.$$

Si X est torique ou horosphérique c'est alors une bijection. Cependant dans le cas plus global des variétés sphériques, ce n'est en général pas surjectif. Un sommet dans l'image de cette application sera dit admissible. Il n'est en général pas simple de déterminer si un sommet d'un polytope moment est admissible. On donnera des conditions nécessaires et suffisantes sur l'admissibilité d'un sommet, toujours dans le cas des compactifications sphériques de G .

Un des avantages des polytopes moments par rapport aux éventails est que l'on voit plus facilement les courbes sur la variété. Ainsi si on a un morphisme $\phi : X \rightarrow Y$ entre deux G -variétés sphériques projectives de même espace homogène, alors on peut traduire ce morphisme en une application entre des polytopes moments de X et Y et ainsi regarder les courbes contractées par ϕ .

Dans son article de 1993 [4], Brion montre que le programme des modèles minimaux, tel qu'exposé ci dessus, fonctionne. En particulier, les variétés sphériques sont toutes rationnelles, et ont donc comme dimension de Kodaira $-\infty$ et le programme se termine toujours par un fibration de Mori. Le but de cette thèse est de traduire ce programme des modèles minimaux et d'exprimer comment il se comporte en utilisant les polytopes moments. Un des avantages de cette traduction sur les polytopes moments est que les polytopes sont des objets plus facilement manipulables par informatique et plus visuels. En effet les polytopes sont des objets classiques, tandis que les éventails sont beaucoup moins fréquents dans la littérature mathématique. C'est également plus manipulable puisqu'on donne en fin de thèse un programme informatique qui nous renvoie les polytopes moments des variétés apparaissant dans le programme des modèles minimaux.

Ce travail a déjà été fait dans les cas des variétés horosphériques par Pasquier en 2013

[22]. On utilisera la même trame que son article. On se limitera aux cas des compactifications sphériques d'un groupe algébrique connexe et réductif. On donne le schéma du MMP via les polytopes dans la figure suivante. On crée une famille de polytopes $\{Q^l\}_{l \in [0, +\infty[}$ avec

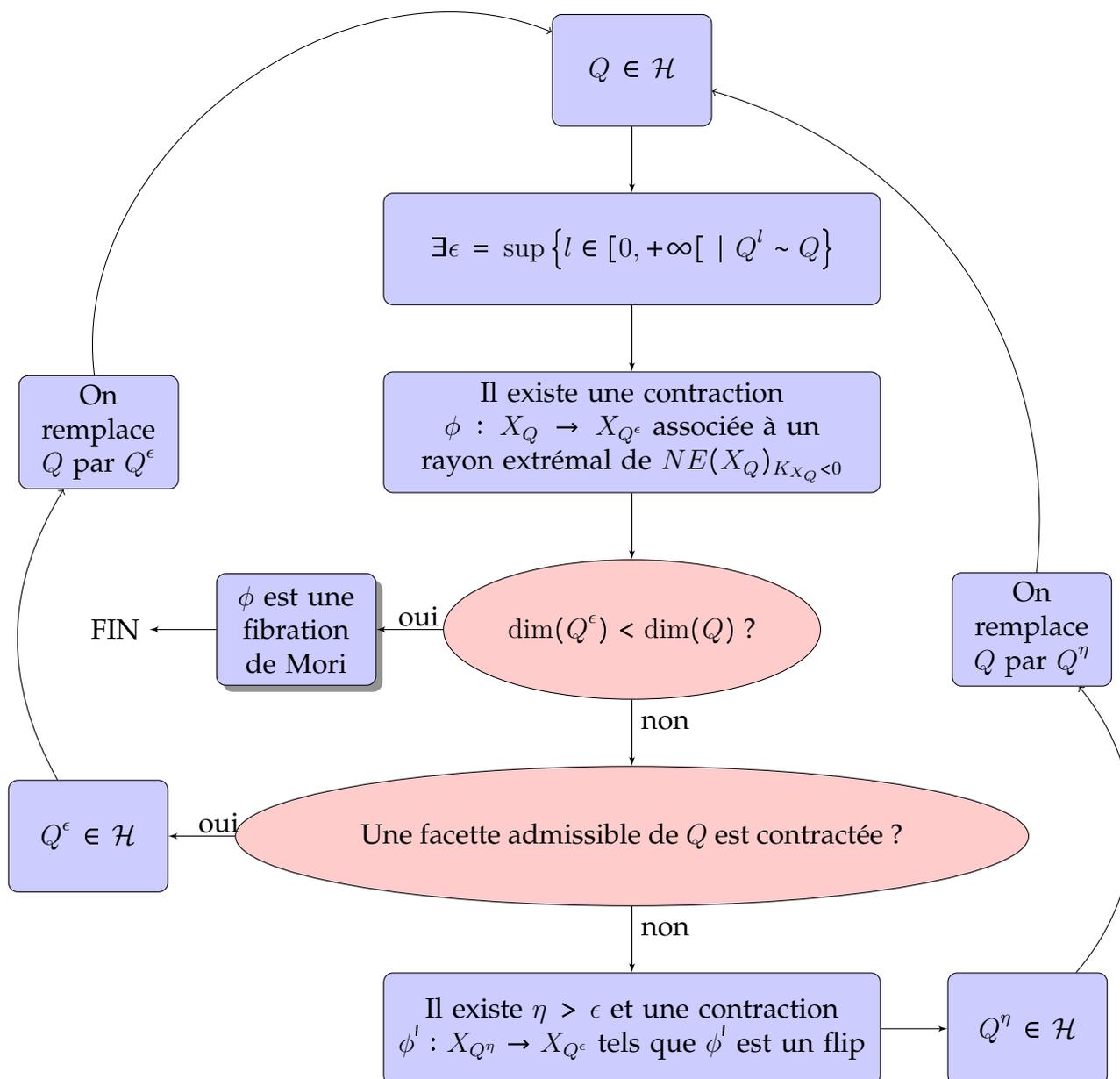
$$Q^l = \{\xi \in \Xi_{\mathbb{Q}} \mid A\xi \geq B + lC\}$$

où A est une matrice de taille $n \times \dim(\Xi)$, B et C des matrices colonnes $n \times 1$ telles que $Q := Q^0$ est un polytope moment d'un G -plongement sphérique noté X_{Q^0} . On note \mathcal{H} l'ensemble des polytopes moments de tels plongements, et on dit que deux polytopes P_1 et P_2 de $\Xi_{\mathbb{Q}}$ sont équivalents, noté $P_1 \sim P_2$ s'ils définissent le même plongement. En fin de cette thèse on démontrera le théorème suivant :

Théorème (B). *Soit X un \mathbb{G}/G -plongement projectif \mathbb{Q} -factoriel, et D un diviseur ample de X . Alors il existe des rationnels $0 < \epsilon_1 < \dots < \epsilon_n$ tels que la sous-famille $\{Q, Q^{\epsilon_1}, \dots, Q^{\epsilon_n}\}$ de la famille à 1 paramètre ci-dessus décrit le programme des modèles minimaux (en le sens de la figure ci-dessous).*

On fait aussi la conjecture que la famille des compactifications sphériques de groupes est fermée pour ce programme des modèles minimaux, plus précisément :

Conjecture. *Soit X un \mathbb{G}/G -plongement projectif \mathbb{Q} -factoriel et D un diviseur ample de X . Alors les polytopes apparaissant dans le théorème ci-dessus sont des polytopes moments de \mathbb{G}'/G' -plongements.*

FIGURE 1.2 – Le MMP pour les \mathbb{G}/G -plongements via les polytopes moments

On détaille un peu plus le plan suivi dans cette thèse. Dans le premier chapitre on rappelle les définitions et propriétés générales des variétés sphériques. En particulier on donnera la construction d'un polytope associé à un diviseur ample. Une section sera dédiée aux courbes dans les variétés sphériques. Puis pour terminer ce chapitre on donnera la définition des compactifications sphériques d'un groupe algébrique linéaire connexe et réductif.

Le chapitre 2 est entièrement dédié aux polytopes moments de telles compactifications projectives. En particulier on définira la notion d'admissibilité pour les faces d'un polytope, et on donnera des conditions pour qu'une face soit admissible ou non. Dans la section suivante on énoncera plus rigoureusement le théorème (A) et on en donnera deux preuves : une générale utilisant la classification de Cupit-Foutou, Pezzini et Van Steirteghem [9] et une seconde différente lorsque le groupe G est semi-simple.

Cette dernière est similaire à la preuve de Cupit-Foutou, Pezzini et Van Steirteghem dans [9, Part 7] mais obtenue indépendamment. On traduira ensuite les morphismes entre compactifications sphériques projectives d'un même groupe G en termes de polytopes moments. Enfin on terminera ce chapitre par décrire le cône des cycles effectifs (appelé aussi cône de Mori) d'une compactification projective via un de ses polytopes moments.

Le chapitre 3 est un résumé de la construction de deux familles de polytopes à un paramètre introduites par Pasquier [22]. On crée une relation d'équivalence pour une certaine famille de polytopes de \mathbb{Q}^n indexée par un paramètre et trouve la forme des classes d'équivalence.

Le quatrième et dernier chapitre est consacré au théorème (B). En particulier on regarde les classes d'équivalence d'une famille de polytopes moments et on montre que les représentants vérifient ce théorème : pour chaque étape on décrit les contractions associées et on montre que cela se termine par une fibration de Mori. On illustre ensuite ce théorème par des exemples avec les groupes SL_3 et SL_4 .

En annexe est mis le code calculant à partir d'un \mathbb{G}/G -plongement, où G est simple, et d'un diviseur ample les polytopes du théorème (B). Les différentes fonctions écrites seront commentées afin d'expliquer comment cela s'articule.

II

Rappels variétés sphériques

2.1 Notations

On notera G un groupe algébrique linéaire réductif et connexe sur \mathbb{C} . On choisira un sous groupe de Borel B et un tore maximal T tels que $T \subset B \subset G$. On note S l'ensemble des racines simples du triplet (G, B, T) , voir [2] pour les notations classiques, et S^\vee l'ensemble des coracines simples. L'ensemble $\mathcal{X}(T)$ sera le réseau des caractères de T . Dans l'espace vectoriel $\mathcal{X}(T)_\mathbb{Q} := \mathcal{X}(T) \otimes \mathbb{Q}$, on a un produit scalaire invariant par le groupe de Weyl, noté (\cdot, \cdot) . On a alors un produit de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre $\mathcal{X}(T)_\mathbb{Q}$ et son dual algébrique $\mathcal{X}(T)_\mathbb{Q}^\vee$ via la forme de Killing :

$$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}.$$

C'est une forme bilinéaire qui n'est pas forcément symétrique. On appelle matrice de Cartan la matrice associée à cette forme bilinéaire. Ces résultats sont compatibles avec la structure de \mathbb{Z} -module, c'est à dire si α et β sont dans le réseau $\mathcal{X}(T)$ alors les nombres (α, β) et $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ sont entiers.

La chambre dominante $\mathcal{X}(T)_\mathbb{Q}^+$ est le cône convexe des caractères positifs sur toutes les coracines. Autrement dit $\mathcal{X}(T)_\mathbb{Q}^+ = \bigcap_{\alpha^\vee \in S^\vee} \{\chi \in \mathcal{X}(T)_\mathbb{Q} \mid \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \geq 0\}$.

Un mur de la chambre dominante est l'intersection de $\mathcal{X}(T)_\mathbb{Q}^+$ avec un hyperplan $\{\langle \cdot, \alpha^\vee \rangle = 0\}$ pour α une racine simple. De la même manière on appellera chambre négative l'ensemble

$$\bigcap_{\alpha \in S} \{\lambda \in \mathcal{X}(T)_\mathbb{Q}^\vee \mid \langle \alpha, \lambda \rangle \leq 0\}.$$

C'est un cône convexe de $\mathcal{X}(T)_\mathbb{Q}^\vee$.

Si Ω est un sous ensemble de $\mathcal{X}(T)_\mathbb{Q}$, on notera :

$$\Omega^\perp := \{\chi \in \mathcal{X}(T)_\mathbb{Q} \mid (\chi, \lambda) = 0 \forall \lambda \in \Omega\}$$

l'orthogonal de Ω via le produit scalaire.

Si λ est un poids dominant de G , on notera $V(\lambda)$ le G -module irréductible de plus haut poids λ . Dans cet espace vectoriel, il y a une unique droite stable sous l'action de B . Le sous groupe de Borel y agit par multiplication via le caractère λ , c'est à dire pour tout x élément de cette droite, pour tout $b \in B$, $b \cdot x = \lambda(b)x$. On dit que les éléments de la droite sont semi-stables sous l'action de B .

Comme G est réductif, alors tout G -module de dimension finie (plus généralement tout G -module rationnel) se décompose en somme directe de modules irréductibles comme ci-dessus. On dit que la représentation est sans multiplicité si chaque $V(\lambda)$ n'apparaît au plus qu'une fois.

Si R est un sous ensemble de S , on notera ρ_R la demi somme des racines positives du sous-système de racines engendré par R . Pour α une racine simple on note s_α l'élément du groupe de Weyl du triplet (G, B, T) qui est la symétrie associée à α . Pour un élément σ combinaison linéaire de racines simples, on note $\text{supp}(\sigma)$ le sous-ensemble des racines simples apparaissant dans σ . On dit que le type de $\text{supp}(\sigma)$ est le type du système de racines engendré par $\text{supp}(\sigma)$.

Si C est une partie non vide d'un espace euclidien E , on note

$$C^\vee = \{x \in E^* \mid \forall v \in C, \langle v, x \rangle \geq 0\}.$$

Si C est un cône de E , alors on appelle C^\vee son cône dual.

Soit C un cône convexe d'un espace euclidien E . On dit que C est saillant s'il ne contient aucune droite et polyédral s'il est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de demi-droites. Si de plus les directions de ces demi-droites sont linéairement indépendantes alors on dit que le cône C est simplicial. L'intérieur relatif de C , noté $\text{intrel}(C)$ est l'intérieur du cône C vu dans l'espace vectoriel engendré par C .

Dans toute la suite, une variété signifiera une variété algébrique sur \mathbb{C} . Si G est un groupe algébrique, une G -variété X est une variété munie d'une action algébrique

$$\rho : G \times X \rightarrow X,$$

c'est à dire l'application ρ est à la fois une action de groupes et un morphisme de variétés.

Les deux prochaines sections sont tirées des notes de Michel Brion [5].

2.2 Variétés sphériques

Définition 2.1. Une G -variété irréductible est dite sphérique si elle est normale et le sous groupe de Borel B a une orbite ouverte dans X .

Une G -variété sphérique ne possède également qu'un nombre fini de B -orbites. La G -orbite ouverte est isomorphe à un espace homogène G/H , qui est lui même sphérique en tant que G -variété.

Définition 2.2. Soient X une G -variété et $q : \mathcal{L} \rightarrow X$ un fibré en droites sur X . Une G -linéarisation de \mathcal{L} est une action de G dans l'espace total de \mathcal{L} , telle que q est G -équivariante et que G opère linéairement dans les fibres de \mathcal{L} .

Pour tout fibré en droites \mathcal{L} sur une G -variété normale X , il existe un entier positif n tel que le fibré $\mathcal{L}^{\otimes n}$ admet une G -linéarisation. Si de plus l'algèbre $\mathbb{C}[G]$ est factorielle, alors on peut prendre $n = 1$ [15, Proposition 2.4, page 67].

Proposition 2.1. Soit X une G -variété normale, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est sphérique.
2. Toute G -variété birationnelle à X est composée d'un nombre fini de G -orbites.
3. Pour tout fibré en droites G -linéarisé \mathcal{L} , le G -module $H^0(X, \mathcal{L})$ des sections globales est sans multiplicité.

Le corps des fonctions $\mathbb{C}(X)$ d'une G -variété sphérique X est muni d'une action de G , et elle est sans multiplicité. En effet si χ est un caractère de B , f et g deux fonctions de $\mathbb{C}(X)$ telles que B agit sur f et g via le caractère χ alors $\frac{f}{g}$ est aussi une fonction rationnelle et $\forall b \in B$, $b \cdot \frac{f}{g} = \frac{b \cdot f}{b \cdot g} = \frac{\chi(b)f}{\chi(b)g} = \frac{f}{g}$. Donc B fixe $\frac{f}{g}$. Comme B a une orbite ouverte dans X , on en déduit que $\frac{f}{g}$ est une constante.

Définition 2.3. Soit G/H un espace homogène. Un plongement de G/H est un couple (X, x) où X est une G -variété et $x \in X$ tel que $G \cdot x$ est ouverte dans X et $\text{Stab}_G(x) = H$. Deux plongements (X, x) et (X', x') d'un espace homogène G/H sont isomorphes s'il existe un isomorphisme G -équivariant de X dans X' qui envoie x sur x' .

On remarque que si (X, x) est un plongement d'un espace homogène G/H , alors la variété X est sphérique si et seulement si G/H est sphérique.

Soit G/H un espace homogène sphérique. On note $\mathcal{X}(G/H)$ le réseau des poids χ de B tel qu'il existe $f_\chi \in \mathbb{C}(G/H)$ non nulle sur laquelle B agit via le poids χ , c'est à dire $\forall b \in B$, $b \cdot f_\chi = \chi(b)f_\chi$. Cette fonction f_χ est unique, à un scalaire près. On pose $\mathcal{X}(G/H)^\vee := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{X}(G/H), \mathbb{Z})$. On notera $\mathcal{X}(G/H)_{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{X}(G/H)_{\mathbb{Q}}^\vee$ les \mathbb{Q} -espaces vectoriels $\mathcal{X}(G/H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $\mathcal{X}(G/H)^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Définition 2.4. Soit G/H un espace homogène sphérique.

1. Les couleurs de G/H sont les diviseurs premiers B -stable de G/H . L'ensemble des couleurs sera noté $\mathcal{D}(G/H)$.
2. Une valuation ν de G/H est une application

$$\nu : \mathbb{C}(G/H)^* \rightarrow \mathbb{Q}$$

vérifiant les conditions suivantes :

- (a) $\nu(f_1 + f_2) \geq \min(\nu(f_1), \nu(f_2))$ dès que f_1, f_2 et $f_1 + f_2$ sont dans $\mathbb{C}(G/H)^*$.
- (b) $\nu(f_1 f_2) = \nu(f_1) + \nu(f_2)$ pour f_1 et f_2 dans $\mathbb{C}(G/H)^*$
- (c) $\nu|_{\mathbb{C}^*} = 0$

L'ensemble des valuations G -invariantes de $\mathbb{C}(G/H)^*$ est un cône noté $\mathcal{V}(G/H)$, appelé le cône des valuations de G/H . S'il n'y a pas d'ambiguïté on le notera simplement \mathcal{V} . On a une application injective $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X}(G/H)_{\mathbb{Q}}^{\vee}$ définie par $\rho(\nu)(\chi) = \nu(f_{\chi})$, $\forall \nu \in \mathcal{V}$, $\forall \chi \in \mathcal{X}(G/H)$.

3. Toute couleur D de l'espace homogène sphérique G/H définit une valuation B -invariante de $\mathbb{C}(G/H)^*$ et un point de $\mathcal{X}(\mathbb{C}(G/H))_{\mathbb{Q}}^{\vee}$ (via le même procédé que l'application ρ) que l'on note $\rho(D)$. De plus, $\rho(D)$ est entier : il est dans le réseau $\mathcal{X}(G/H)^{\vee}$.

Remarquons que deux couleurs d'un espace homogène G/H peuvent avoir la même image dans $\mathcal{X}(G/H)^{\vee}$.

Le rang du réseau $\mathcal{X}(G/H)$ est appelé le rang de G/H .

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible on abrégera $\mathcal{D}(G/H)$ par \mathcal{D} .

Définition 2.5. L'ensemble $\Sigma(G/H)$ des racines sphériques est l'ensemble minimal des éléments primitifs de $\mathcal{X}(G/H)$ tel que

$$\mathcal{V}(G/H) = \{\rho \in \mathcal{X}(G/H)_{\mathbb{Q}}^{\vee} \mid \langle \rho, \sigma \rangle \geq 0, \forall \sigma \in \Sigma(G/H)\}.$$

En particulier $\mathcal{V}(G/H) = -\Sigma(G/H)^{\vee}$. Si on fixe G , on note Σ_G l'union des ensembles des racines sphériques de toutes les G -variétés sphériques. C'est un ensemble fini, et de plus tout $\sigma \in \Sigma_G$ s'écrit comme somme positive de racines simples. Ces racines simples ainsi que leur support sont classifiés, voir par exemple [9, Section 3.2, Table 1].

On va maintenant introduire les éventails colorés qui nous permettront de classier les plongements d'un espace homogène sphérique.

Définition 2.6. Soit G/H un espace homogène sphérique.

1. Un cône coloré est un couple $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ où $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}(G/H)_{\mathbb{Q}}^{\vee}$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ vérifient les conditions suivantes :

C1: \mathcal{C} est un cône convexe engendré par $\rho(\mathcal{F})$ et par un nombre fini d'éléments de \mathcal{V} .

C2: L'intérieur relatif de \mathcal{C} rencontre \mathcal{V} .

Les couleurs sont les éléments de \mathcal{F} . Un cône coloré est saillant s'il vérifie :

SC: \mathcal{C} est saillant et $\rho(\mathcal{F})$ ne contient pas l'origine.

2. Une face d'un cône coloré $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ est un couple $(\mathcal{C}^l, \mathcal{F}^l)$, où \mathcal{C}^l est une face du cône \mathcal{C} , l'intérieur relatif de \mathcal{C}^l rencontre \mathcal{V} et $\mathcal{F}^l = \mathcal{F} \cap \rho^{-1}(\mathcal{C}^l)$.

3. Un éventail colorié est un ensemble fini \mathbb{F} de cônes coloriés vérifiant les conditions suivantes

F1: Toute face d'un cône colorié de \mathbb{F} appartient à \mathbb{F} .

F2: Pour tout $\nu \in \mathcal{V}$ il existe au plus un cône colorié $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathbb{F}$ tel que ν est dans l'intérieur relatif de \mathcal{C} .

Un éventail colorié est saillant s'il est formé de cônes coloriés saillants. Cela revient à dire que $(\{0\}, \emptyset) \in \mathbb{F}$.

Soit (X, x) un plongement d'un espace homogène sphérique G/H ne possédant qu'une unique G -orbite fermée, notons la Y . On dit que (X, x) est un plongement simple. On note \mathcal{V}_X l'ensemble des diviseurs premiers de X qui sont stables par G . En identifiant un tel diviseur à la valuation normalisée de $\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(G/H)$ qui lui est associée, on considère \mathcal{V}_X comme un sous ensemble fini de \mathcal{V} .

De même, on note \mathcal{D}_X l'ensemble des diviseurs premiers de G/H qui sont stables par B et dont l'adhérence dans X contient l'orbite fermée Y .

À ce plongement sphérique (X, x) on associe le cône colorié $(\mathcal{C}_X, \mathcal{D}_X)$ où \mathcal{C}_X est le cône engendré par $\rho(\mathcal{V}_X)$ et $\rho(\mathcal{D}_X)$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.2 (Classification des plongements simples). *Soit G/H un espace homogène sphérique. Alors l'application $(X, x) \mapsto (\mathcal{C}_X, \mathcal{D}_X)$ définit une bijection des classes d'isomorphisme des plongements simples de (G/H) sur les cônes coloriés saillants.*

Prenons maintenant un plongement sphérique (X, x) d'un espace homogène G/H . Soit Y une G -orbite de X et on pose $X_{Y,G} := \{w \in X \mid Y \subset \overline{G \cdot w}\}$. Alors $(X_{Y,G}, x)$ est un plongement simple de G/H et on peut lui associer son cône colorié $(\mathcal{C}_{X,Y}, \mathcal{D}_{X,Y})$ correspondant.

On pose

$$\mathbb{F}(X) := \{(\mathcal{C}_{X,Y}, \mathcal{D}_{X,Y}) \mid Y \text{ une } G\text{-orbite dans } X\}$$

L'ensemble $\mathbb{F}(X)$ est un éventail colorié et on a le théorème :

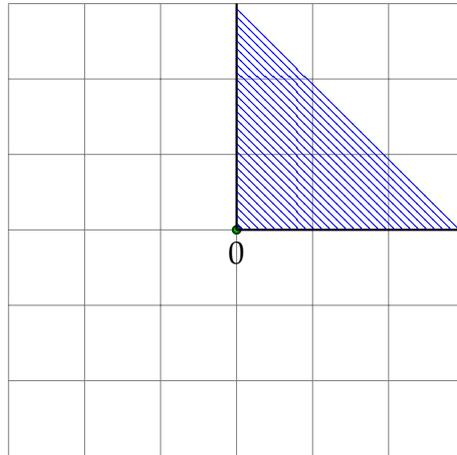
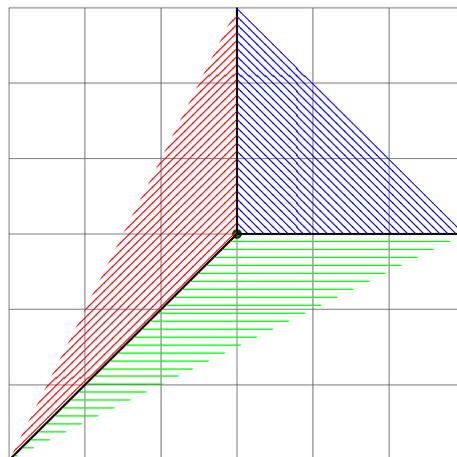
Théorème 2.3 (Classification des plongements). *Soit G/H un espace homogène sphérique. Alors l'application $(X, x) \mapsto \mathbb{F}(X)$ est une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme des plongements sur l'ensemble des éventails coloriés saillants.*

Exemple 2.4. 1. *Ces deux théorèmes généralisent la classification des variétés toriques par les éventails. Prenons $G = (\mathbb{C}^*)^2$ et $H = \{1\}$, on a $\mathcal{V} = \mathcal{X}(G/H)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Z}^2$. Il n'y a pas de couleurs, et alors dans ce cas tout cône polyédral de $\mathcal{X}(G/H)_{\mathbb{Q}}$ est un cône colorié.*

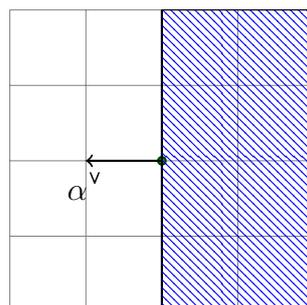
La figure 2.1 correspond à l'éventail, formé d'un unique cône maximal, de la variété torique \mathbb{C}^2 . C'est bien un plongement simple : l'unique G -orbite fermée est l'origine.

La figure 2.2 correspond quant à elle à l'éventail de la variété torique \mathbb{P}^2 , formé de trois cônes maximaux. Il y a trois G -orbites fermées : ce sont les points $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$ et $[0 : 0 : 1]$.

On prendra garde au fait que les cônes maximaux d'un éventail ne sont pas forcément de dimension maximale. En effet G lui-même en temps que variété est une variété torique, et son éventail est le cône ne contenant que l'origine.

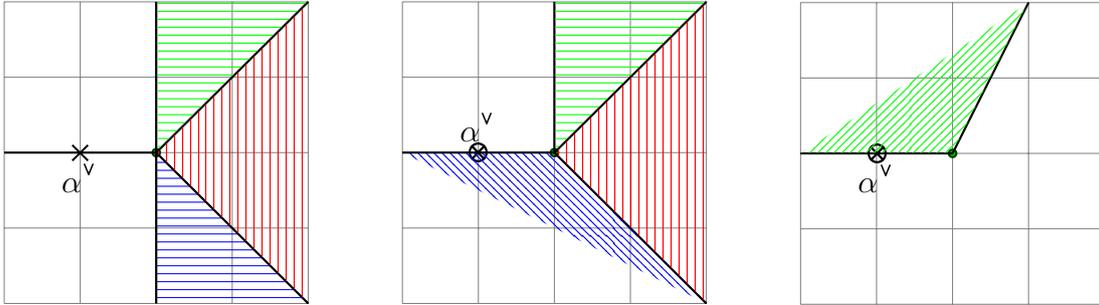
FIGURE 2.1 – Éventail de \mathbb{C}^2 FIGURE 2.2 – Éventail de \mathbb{P}^2 

2. On pose maintenant $G = SL_2 \times \mathbb{C}^* \times SL_2 \times \mathbb{C}^*$ et $H = SL_2 \times \mathbb{C}^*$ plongé diagonalement dans G . L'espace homogène G/H est sphérique, et son réseau s'identifie à \mathbb{Z}^2 (voir la proposition 2.21). Il n'y a qu'une couleur, dont l'image est la co-racine α^\vee et le cône des valuations est le demi plan où α est négative : $\mathcal{V} = \{x \in \mathcal{X}(G/H)_{\mathbb{Q}}^{\vee} \mid \langle \alpha, x \rangle \leq 0\}$. On

FIGURE 2.3 – Cône des valuations de G/H 

donne trois éventails différents dans la figure 2.4. La couleur est noté par le symbole \times , et si elle est coloriée (c'est à dire si elle est dans un cône colorié) alors on la note par \otimes . Une couleur n'est pas forcément coloriée.

FIGURE 2.4 – Trois éventails coloriés pour G/H



Intéressons nous maintenant aux morphismes entre plongements sphériques. Soit H' un sous-groupe de G contenant H . Le quotient $G \rightarrow G/H'$ se factorise par

$$\varphi : G/H \rightarrow G/H'.$$

On a donc un morphisme injectif

$$\varphi^* : \mathcal{X}(G/H') \rightarrow \mathcal{X}(G/H)$$

ainsi qu'un morphisme surjectif

$$\varphi_* : \mathcal{X}(G/H)^\vee \rightarrow \mathcal{X}(G/H')^\vee.$$

L'application φ_* envoie $\mathcal{V}(G/H)$ sur $\mathcal{V}(G/H')$.

On note \mathcal{D}_φ l'ensemble des $D \in \mathcal{D}(G/H)$ tels que $\varphi(D) = G/H'$. Alors $\varphi(D) \in \mathcal{D}(G/H')$ pour tout $D \in \mathcal{D}(G/H) \setminus \mathcal{D}_\varphi$.

Définition 2.7. On garde les notations précédentes.

1. Soient $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ et $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ des cônes coloriés pour G/H et G/H' respectivement. Alors $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ domine $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ si $\varphi_*(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$ et $\varphi_*(\mathcal{F} \setminus \mathcal{D}_\varphi) \subset \mathcal{F}'$.
2. Soient \mathbb{F} et \mathbb{F}' des éventails coloriés pour G/H et G/H' respectivement. Alors \mathbb{F} domine \mathbb{F}' si tout élément de \mathbb{F} domine un élément de \mathbb{F}' .
3. Le support d'un éventail colorié \mathbb{F} est l'ensemble $\text{Supp } \mathbb{F} := \mathcal{V} \cap \bigcup_{(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathbb{F}} \mathcal{C}$

Remarque 2.5. Une variété sphérique X est complète si et seulement si le support de son éventail est égal au cône des valuations.

On a alors les caractérisations sur les morphismes entre plongements d'espaces homogènes sphériques :

Théorème 2.6. Soit (X, x) et (X', x') deux plongements d'espaces homogènes sphériques G/H et G/H' respectivement. Alors le morphisme $\varphi : G/H \rightarrow G/H'$ s'étend en un morphisme $\varphi : X \rightarrow X'$ si et seulement si $\mathbb{F}(X)$ domine $\mathbb{F}(X')$.

De plus le morphisme $\varphi : X \rightarrow X'$ est propre si et seulement $\text{Supp } \mathbb{F}(X) = \varphi_*^{-1}(\text{Supp } \mathbb{F}(X'))$

2.3 Diviseurs et polytopes moments

2.3.1 Définitions et exemples

On se fixe un espace homogène sphérique G/H et un plongement (X, x) de G/H . Alors tout diviseur de Weil de X est linéairement équivalent à une combinaison à coefficients entiers

$$\sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} n_\nu X_\nu + \sum_{D \in \mathcal{D}} n_D D.$$

On note \mathcal{D}_X l'ensemble des couleurs $D \in \mathcal{D}$ telles qu'il existe une G -orbite Y dans X avec $D \in \mathcal{D}_{X,Y}$.

Proposition 2.7. Soit $\delta = \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} n_\nu X_\nu + \sum_{D \in \mathcal{D}} n_D D$, alors le diviseur δ est de Cartier si et seulement si pour toute G -orbite Y dans X , il existe $\chi_{\delta,Y} \in \mathcal{X}(G/H)$ tel que $\langle \nu, \chi_{\delta,Y} \rangle = n_\nu$, $\forall \nu \in \mathcal{V}_{X,Y}$, et $\langle \rho(\nu_D), \chi_{\delta,Y} \rangle = n_D$, $\forall D \in \mathcal{D}_{X,Y}$.

Avec les notations de la proposition ci-dessus on considère $\chi_{\delta,Y}$ comme une forme linéaire sur $\mathcal{X}(G/H)_{\mathbb{Q}}^\vee$, et on note $l_{\delta,Y}$ sa restriction au cône $\mathcal{C}_{X,Y}$. On note l_δ la fonction linéaire par morceaux associée au diviseur δ via $l_{\delta,Z}|_{\mathcal{C}_{X,Y}} = l_{\delta,Y}$ dès que Z est une G -orbite contenue dans l'adhérence de Y .

On dit que l_δ est convexe si $l_{\delta,Y} \geq l_{\delta,Z}|_Y$ pour toute G -orbite Y et toute G -orbite fermée Z , ie $l_\delta \geq l_{\delta,Z}$ sur $\mathcal{C}_{X,Z}$. Si de plus $l_\delta > l_{\delta,Z}$ sur $\mathcal{C}_X \setminus \mathcal{C}_{X,Z}$ alors on dit que l_δ est strictement convexe.

Théorème 2.8. Soit (X, x) un plongement complet de l'espace homogène G/H et δ un diviseur de Cartier B -stable sur X comme ci-dessus. Alors δ est engendré par ses sections globales (respectivement ample) si et seulement si les deux conditions suivantes sont respectées.

1. La fonction l_δ est convexe (respectivement strictement convexe).
2. Pour toute G -orbite Z et pour toute couleur $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{X,Z}$, $\langle \rho(\nu_D), l_{\delta,Z} \rangle \leq n_D$ (respectivement $< n_D$).

On voudrait étudier le diviseur canonique d'une variété sphérique. Pour cela on a besoin de classier les couleurs.

Pour $\alpha \in S$ on note $P_\alpha \subset G$ le sous-groupe parabolique minimal contenant B associé à la racine α et on définit

$$\mathcal{D}(\alpha) = \{D \in \mathcal{D} \mid P_\alpha \cdot D \neq D\}$$

Comme les couleurs ne sont pas stables sous l'action de G , pour toute couleur il existe au minimum une racine simple α tel que la couleur n'est pas stable sous l'action de P_α , d'où $\mathcal{D} = \bigcup_{\alpha \in S} \mathcal{D}(\alpha)$.

On note $S^p := \{\alpha \in S \mid \mathcal{D}(\alpha) = \emptyset\}$.

Définition 2.8. Soit D une couleur, avec α une racine simple telle que $D \in \mathcal{D}(\alpha)$. On dit que D est de type a si $\alpha \in \Sigma(G/H)$, de type $2a$ si $\alpha \in \frac{1}{2}\Sigma(G/H)$, et de type b sinon.

Le type de la couleur ne dépend pas du choix de la racine simple α telle que $D \in \mathcal{D}(\alpha)$. De plus $|\mathcal{D}(\alpha)| \leq 2$ avec égalité si et seulement si $\alpha \in \Sigma(G/H)$.

Théorème 2.9. Soit X une variété sphérique d'espace homogène G/H . Comme X est normale elle admet un diviseur canonique noté K_X . On peut calculer explicitement les coefficients de K_X :

$$K_X = - \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} X_\nu - \sum_{D \in \mathcal{D}} a_D D$$

avec :

$$a_D = \frac{1}{2} \langle 2\rho_S - 2\rho_{Sp}, \alpha^\vee \rangle = 1 \text{ pour } D \text{ de type } a \text{ ou } 2a,$$

$$a_D = \langle 2\rho_S - 2\rho_{Sp}, \alpha^\vee \rangle \geq 2 \text{ pour } D \text{ de type } b,$$

pour une certaine racine α telle que $D \in \mathcal{D}(\alpha)$.

Soit $\delta = \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} n_\nu X_\nu + \sum_{D \in \mathcal{D}} n_D D$ un diviseur ample d'un plongement sphérique (X, x) d'un espace homogène G/H . On peut lui associer un polytope \widetilde{Q}_δ de $\mathcal{X}(G/H)_\mathbb{Q}$ via

$$\widetilde{Q}_\delta := \{ \chi \in \mathcal{X}(G/H)_\mathbb{Q} \mid \langle \chi, \nu \rangle \geq -n_\nu \text{ et } \langle \chi, \rho(D) \rangle \geq -n_D, \forall \nu \in \mathcal{V}_X, \forall D \in \mathcal{D} \}$$

Définition 2.9. Avec les notations ci-dessus, le polytope moment du diviseur ample δ , noté Q_δ est

$$Q_\delta := \widetilde{Q}_\delta + \pi_\delta,$$

où π_δ est le poids de la section canonique du diviseur δ .

Définition 2.10. Soit Q un polytope de $\mathcal{X}(G/H)_\mathbb{Q}$. On dit que Q est un G/H -polytope s'il existe un plongement sphérique X de G/H et un diviseur \mathbb{Q} -Cartier ample δ tel que Q soit le polytope moment de δ .

Une des difficultés est de savoir quels polytopes sont des G/H -polytopes.

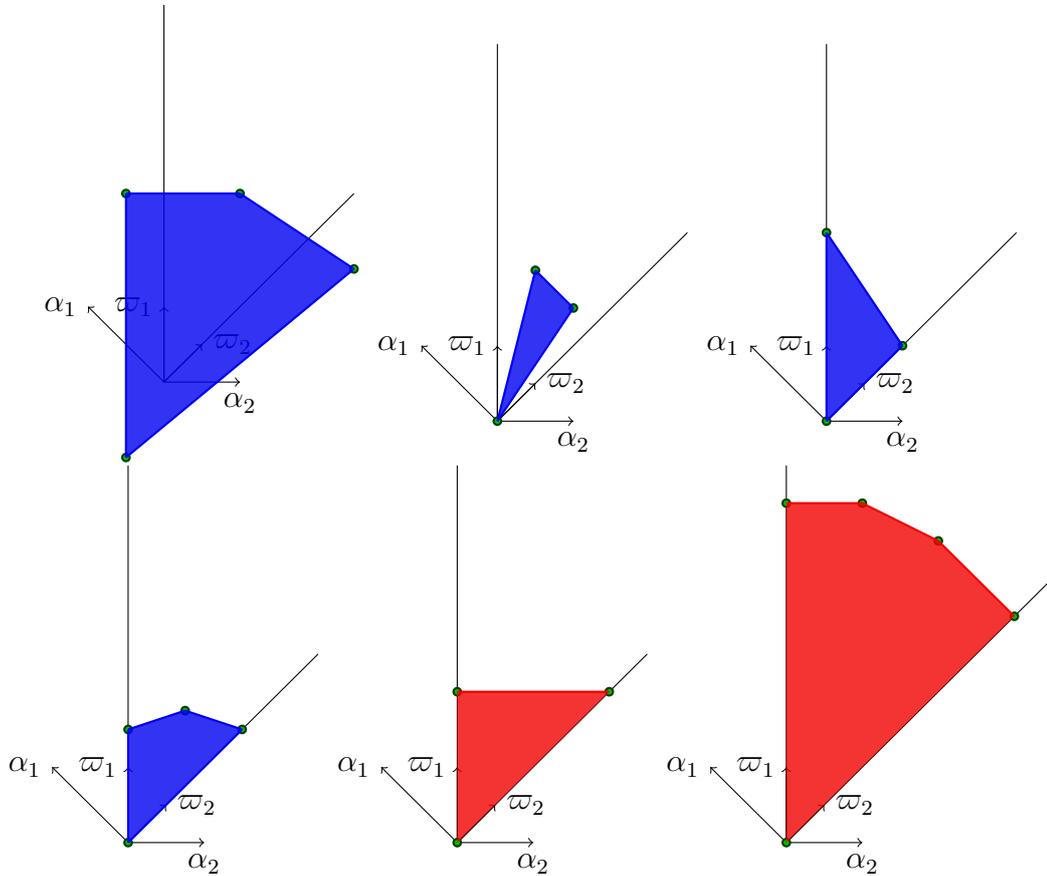
Exemple 2.10. 1. Dans le cas $G = B = T$ et $H = \{1\}$ des variétés toriques, tout polytope de dimension maximale de $\mathcal{X}(G/H)_\mathbb{Q} = \mathcal{X}(T)_\mathbb{Q}$ est un T -polytope.

2. Soient $G = SO_5 \times SO_5$ et $H = SO_5$ plongé dans G diagonalement. Alors le réseau $\mathcal{X}(G/H)$ s'identifie à $\mathcal{X}(T)$ où T est un tore maximal de G (voir Proposition 2.21). Alors un polytope $P \subset \mathcal{X}(T)_\mathbb{Q}$ est un G/H -polytope si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes :

- (a) le polytope P est contenu dans la chambre dominante;
- (b) il existe une boule ouverte \mathcal{B} centrée en 0 telle que $\mathcal{B} \cap \mathcal{X}(T)_\mathbb{Q}^+ \subset P$;
- (c) des deux points précédents on en déduit qu'il y a un unique sommet s_α non nul de P sur le mur $(\alpha^\vee)^\perp$. De même il existe un unique sommet s_β non nul de P sur le mur $(\beta^\vee)^\perp$. Alors pour tout élément $x \in P$ on a

$$\langle x - s_\beta, \alpha^\vee \rangle \leq 0 \text{ et } \langle x - s_\alpha, \beta^\vee \rangle \leq 0.$$

Par exemple parmi les polytopes de $\mathcal{X}(T)$ suivants, les bleus ne sont pas des G/H -polytopes tandis que les rouges en sont.



A partir du polytope Q_D on peut retrouver l'éventail \mathbb{F}_X du plongement (X, x) via la proposition suivante.

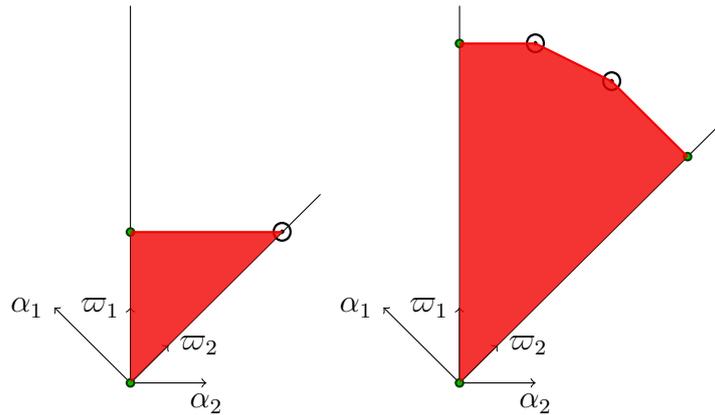
Proposition 2.11. *L'éventail \mathbb{F}_X est l'ensemble des cônes de la forme $\text{Cône}(Q_D - x_F)^\vee$, avec F une face de Q_D et x_F un point intérieur à F , dont l'intérieur relatif rencontre le cône des valuations.*

De plus les points entiers du polytope moment Q_D se retrouvent dans l'espace des sections globales de D :

$$\Gamma(X, D) = \bigoplus_{\chi \in Q_D \cap \mathcal{X}(G/H)} V_\chi.$$

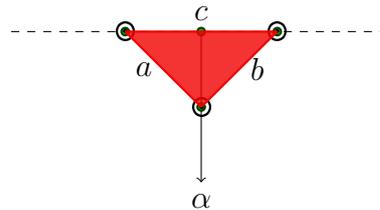
Définition 2.11. On dit qu'une face F du polytope moment Q_D est admissible si elle correspond à un cône de l'éventail \mathbb{F}_X via la proposition précédente.

Exemple 2.12. On reprend les G/H -polytopes de l'Exemple 2.10. Les points admissibles sont entourés, de la forme \odot . Dans toute la suite, on notera de la même façon les points admissibles.

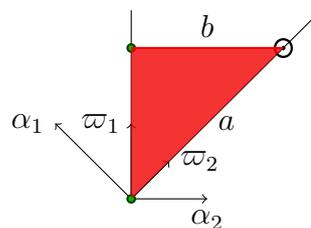


Remarquons que les relations entre points et arêtes admissibles ne sont pas claires. Par exemple :

- En prenant $G = GL_2 \times GL_2$ et $H = GL_2$ plongé diagonalement dans G on peut obtenir le polytope suivant. Les arêtes a et b sont admissibles mais c ne l'est pas. On observe alors qu'une arête définie par deux sommets admissibles n'est pas forcément elle-même admissible.



- On reprend un polytope de l'exemple 2.10, où l'arête b est admissible tandis que l'arête a ne l'est pas. Ainsi on voit qu'une arête définie par deux sommets dont seulement l'un est admissible peut être ou non admissible.



2.3.2 Classification

Cette partie est une retranscription de la classification des G -variétés sphériques polarisées dûe à [9] de façon purement combinatoire. Cependant il est nécessaire d'introduire les objets et de poser quelques définitions avant d'énoncer le Théorème 2.13 qui est le résultat important.

Dans toute la suite on se fixe un triplet (Σ, Ξ, Q) où :

- $\Sigma \subset \Sigma_G$ (voir la Définition 2.5);
- Ξ est un sous-réseau de $\mathcal{X}(T)$;
- $Q \subset \mathcal{X}(T)_{\mathbb{Q}}^+$ est un polytope convexe tel que $Q - w$ est de dimension maximale dans $\Xi_{\mathbb{Q}}$, pour un $w \in Q$.

Définition 2.12. Soient $A \subset S$ et $\sigma \in \Sigma_G$ une racine sphérique. On dit que le couple (A, σ) vérifie l'axiome de Luna si on a :

- $\{\alpha \in \text{supp}(\sigma) \mid \alpha \perp \sigma \text{ et } \sigma - \alpha \text{ n'est pas une racine}\} \subset A \subset \{\alpha \in S \mid \alpha \perp \sigma\}$ si $\text{supp}(\sigma)$ est de type F_4 ;
- $\{\alpha \in \text{supp}(\sigma) \mid \alpha \perp \sigma\} \subset A \subset \{\alpha \in S \mid \alpha \perp \sigma\}$ si $\text{supp}(\sigma)$ est de type B_n ou C_n ;

ou n'importe laquelle des deux conditions ci-dessus si $\text{supp}(\sigma)$ n'est pas de type F_4 , B_n ou C_n (et dans ce cas les conditions sont équivalentes).

Définition 2.13. Un élément $\sigma \in \Sigma$ est dit compatible pour Ξ s'il satisfait les propriétés suivantes :

1. l'élément σ est un élément primitif de Ξ ;
2. le couple $(\Xi^{\perp} \cap S, \sigma)$ satisfait l'axiome de Luna;
3. si $\sigma = \alpha + \beta$ ou $\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ pour α et β des racines simples avec $\alpha \perp \beta$ alors $\langle \alpha^{\vee}, \lambda \rangle = \langle \beta^{\vee}, \lambda \rangle$ pour tout $\lambda \in \Xi$;
4. si $\sigma = 2\alpha$ pour $\alpha \in S$ alors $\langle \alpha^{\vee}, \lambda \rangle \in 2\mathbb{Z}$ pour tout $\lambda \in \Xi$.

Définition 2.14. L'ensemble Σ est dit \mathbb{Q} -compatible pour le couple (Ξ, Q) si pour tout $\sigma \in \Sigma$ on a :

1. σ est compatible pour Ξ ;
2. le couple $(S \cap Q^{\perp}, \sigma)$ satisfait l'axiome de Luna;
3. Si $\sigma \notin S$ et une facette F de Q satisfait $\langle \rho_F, \sigma \rangle > 0$ alors il existe $\alpha \in S \setminus Q^{\perp}$ telle que $\langle \alpha^{\vee}, F \rangle = 0$;
4. Si $\sigma \in S$ alors il existe une facette F de Q telle que
 - (a) $\langle \rho_F, \sigma \rangle = 1$;
 - (b) Si F' est une facette de Q telle que $\langle \rho_{F'}, \sigma \rangle > 0$, alors $H_{F'} = H_F$ ou $H_{F'} = s_{\sigma}(H_F)$.

Si $\alpha \in S$ est \mathbb{Q} -compatible pour le couple (Ξ, Q) alors on note $\mathbf{A}(\alpha)$ un ensemble abstrait de deux éléments D_{α}^+ et D_{α}^- et on définit l'application $\rho : \mathbf{A}(\alpha) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Xi, Q)$ par $\rho(D_{\alpha}^+) = \rho_F$ et $\rho(D_{\alpha}^-) = \alpha^{\vee}|_{\Xi} - \rho_F$, où F est une facette de Q comme dans le point 4. de la définition précédente.

Définition 2.15. L'ensemble Σ est dit \mathbb{Q} -admissible pour le couple (Ξ, Q) s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. Σ est \mathbb{Q} -compatible pour le couple (Ξ, Q) ;
2. $\forall \alpha \in \Sigma \cap S, \forall D \in \mathbf{A}(\alpha), \forall \sigma \in \Sigma \setminus \{\alpha\}$ on a $\langle \rho(D), \sigma \rangle \leq 1$ avec égalité si et seulement si $\sigma \in S$ et s'il existe $D' \in \mathbf{A}(\sigma)$ avec $\rho(D') = \rho(D)$.

Théorème 2.13. [9] Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. L'ensemble Σ est \mathbb{Q} -admissible pour le couple (Ξ, Q) .
2. Il existe une G -variété sphérique polarisée X telle que $\mathcal{X}(X) = \Xi, \Sigma(X) = \Sigma$ et nQ est un polytope moment de X (pour un certain n entier).

2.4 Courbes

2.4.1 Rappels généraux

Soit X une variété normale, on note $Div(X)$ (respectivement $Z_1(X)$) le groupe abélien formé des diviseurs de Cartier (respectivement des cycles de dimension 1) de X . Pour tout cycle irréductible $C \in Z_1(X)$ et tout $D \in Div(X)$, on note $(D \cdot C)$ le degré de D sur C . On a ainsi une forme bilinéaire sur $Div(X) \times Z_1(X)$.

On note $N^1(X)$ le quotient de $Div(X)$ par l'orthogonal de $Z_1(X)$ et on l'appelle le groupe des classes d'équivalence numérique des diviseurs de Cartier.

De même, on note $N_1(X)$ le quotient de $Z_1(X)$ par l'orthogonal de $Div(X)$ et on l'appelle le groupe des classes d'équivalence numérique des 1-cycles.

Les groupes abéliens $N_1(X)$ et $N^1(X)$ sont en dualité. Lorsque X est complète, ces groupes sont libres de rang fini.

On note $NE(X)$ le cône convexe engendré par les classes des 1-cycles effectifs dans l'espace vectoriel $N_1(X)_{\mathbb{Q}} := N_1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $\overline{NE(X)}$ sa fermeture topologique. $\overline{NE(X)}$ est appelé le cône des courbes de X , ou cône de Mori de X . Pour tout morphisme propre $f : X \rightarrow Y$, on note $NE(f)$ le sous-cône de $NE(X)$ engendré par les classes des 1-cycles effectifs contractés par f . Si Y est projective alors $NE(f)$ est une face du cône $NE(X)$.

2.4.2 Courbes des variétés sphériques

Dans le cas général où X est une variété projective lisse sur \mathbb{C} , le théorème du cône de Mori décrit la partie de $\overline{NE(X)}$ où la classe du canonique est négatif :

Théorème 2.14 (Théorème du cône de Mori). [16, Theorem 1.24, page 22] Soit X une variété projective lisse.

- Il existe une famille dénombrable de courbes $(C_i)_{i \in I}$ telle que $(K_X \cdot C_i) < 0$ pour tout $i \in I$ et

$$\overline{NE(X)} = \overline{NE(X)}_{K_X \geq 0} + \sum_{i \in I} \mathbb{R}_+[C_i].$$

- Les rayons $\mathbb{R}_+[C_i]$ sont extrémaux et peuvent être contractés.

Dans le cas où X est une G -variété sphérique complète on a des résultats beaucoup plus forts. Les cônes $NE(X)$ et $\overline{NE(X)}$ sont égaux puisqu'ils sont polyédraux et engendrés par des classes de courbes rationnelles. De plus tous les rayons extrémaux peuvent être contractés. On rappelle ces résultats dans cette section. Tous ces résultats sont dûs à Brion [4].

Définition 2.16. Soit μ un mur de \mathbb{F}_X , c'est à dire il existe deux cônes maximaux μ_+ et μ_- de \mathbb{F}_X tels que $\mu = \mu_+ \cap \mu_-$. On choisit le vecteur primitif χ_μ de $\mathcal{X}(G/H)$ nul sur μ et positif sur μ_+ . Pour tout diviseur de Cartier δ de X , la différence $l_\delta|_{\mu_+} - l_\delta|_{\mu_-}$ est nulle donc est un multiple de χ_μ . On définit ainsi une forme linéaire C_μ sur $N^1(X)$ par:

$$\delta \cdot C_\mu = (l_\delta|_{\mu_+} - l_\delta|_{\mu_-}) / \chi_\mu.$$

Soient Y une orbite fermée et $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{X,Y}$. On définit une forme linéaire $C_{D,Y}$ sur $N^1(X)$ telle que pour tout $\delta = \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} n_\nu X_\nu + \sum_{D \in \mathcal{D}} n_D D$ diviseur de Cartier de X , on ait :

$$\delta \cdot C_{D,Y} = n_D - \langle l_{\delta,Y}, \rho(D) \rangle.$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.15. [4, page 384]

- L'espace $N_1(X)_\mathbb{Q}$ est engendré par les classes des C_μ et $C_{D,Y}$ pour μ un mur de l'éventail, Y une orbite fermée et $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{X,Y}$.*
- Le cône $NE(X)$ est engendré par les classes C_μ et $C_{D,Y}$.*
- Dans le quotient $\overline{N_1(X)}$ de $N_1(X)$ par le sous-groupe engendré par les C_μ , l'image $\overline{C_{D,Y}}$ ne dépend pas de l'orbite fermée Y telle que $D \notin \mathcal{D}_{X,Y}$. De plus $\overline{C_{D,Y}}$ est nulle pour tout $D \in \mathcal{D}_X$.*
- La famille $(\overline{C_{D,Y}})_{D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X}$ est une base de $\overline{N_1(X)}_\mathbb{Q}$ et elle engendre l'image de $NE(X)$.*

On peut trouver une courbe qui est un représentant "agréable" de la classe C_μ :

Proposition 2.16. Soient X une G -variété sphérique projective, Y et Z deux orbites fermées, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une courbe $C_{Y,Z}$ stable par le sous groupe de Borel B , telle que B a deux points fixes dans la normalisée $\widetilde{C_{Y,Z}}$, rencontrant Y et Z .
2. Les cônes $C_{X,Y} \cap \mathcal{V}$ et $C_{X,Z} \cap \mathcal{V}$ sont de part et d'autre d'un mur μ .

Alors la courbe $C_{Y,Z}$ est unique, isomorphe à \mathbb{P}^1 et sa classe dans $N_1(X)$ est C_μ .

Proposition 2.17. *Dans une G -variété sphérique projective, tout courbe irréductible et stable par B est isomorphe à \mathbb{P}^1 .*

2.4.3 Contractions associées à une face du cône des courbes

Le but de cette section est de définir les contractions associées à une face du cône $NE(X)$ qui seront des outils pour la géométrie birationnelle. On commence avec un lemme, puis le théorème introduisant les contractions.

Lemme 2.18. *Soient X et X' deux G -variétés sphériques, avec un G -morphisme propre $f : X \rightarrow X'$. Soit δ un diviseur de Cartier de X .*

- (i) Si $\delta \geq 0$ sur $NE(f)$ alors δ est engendré par sections relativement à f .
- (ii) Si $\delta > 0$ sur $NE(f) \setminus \{0\}$ alors δ est ample relativement à f .

Théorème 2.19. [4, page 382] *Soit X une G -variété sphérique projective. Soit F une face du cône $NE(X)$. Alors les assertions suivantes sont vraies.*

1. Il existe une unique G -variété sphérique X_F et un unique G -morphisme $cont_F : X \rightarrow X_F$ tels que $(cont_F)_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{X_F}$ et que $F = NE(cont_F)$.
2. La face F engendre le noyau de $(cont_F)_* : N_1(X)_\mathbb{Q} \rightarrow N_1(X_F)_\mathbb{Q}$. De plus, le groupe $N^1(X_F)_\mathbb{Q}$ s'identifie à l'orthogonal de F dans $N^1(X)_\mathbb{Q}$.
3. Tout G -morphisme $f : X \rightarrow X'$, tel que X' est projective et que $F \subset NE(f)$, se factorise par $cont_F$.

On appelle $cont_F$ la contraction de la face F . Tout morphisme propre et à fibres connexes entre des G -variétés sphériques projectives est une composée de contractions d'arêtes. On remarque aussi que toute contraction d'une arête du cône $NE(X)$ ne peut s'écrire comme composée non triviale de deux G -morphisms à fibres connexes.

On maîtrise mieux les contractions associées aux couleurs : soit R une arête de $NE(X)$ ne contenant aucun C_μ . Soit $\mathbb{F}_{X'}$ l'éventail colorié de la variété X' associée à la contraction $cont_R$. Soient Y une orbite fermée de X , et une couleur $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{X,Y}$ telles que $C_{D,Y}$ engendre R .

Proposition 2.20. 1. Les cônes coloriés maximaux de $\mathbb{F}_{X'}$ sont

- ▷ (cône($\mathcal{C}_{X,Y}, \rho(D)$), $\mathcal{D}_{X,Y} \cup \{D\}$);
- ▷ les (cône($\mathcal{C}_{X,Z}, \rho(D)$), $\mathcal{D}_{X,Z} \cup \{D\}$) où Z est une orbite fermée telle que $\rho(D)$ soit dans l'espace vectoriel engendré par une face commune à $\mathcal{C}_{X,Y}$ et à $\mathcal{C}_{X,Z}$;
- ▷ les ($\mathcal{C}_{X,Z}, \mathcal{D}_{X,Z}$) sinon.

2. L'application cont_R est birationnelle si et seulement si $-\rho(D) \notin \mathcal{C}_{X,Y}$.
3. On suppose que $-\rho(D) \notin \mathcal{C}_{X,Y}$, et que pour tout mur μ de $\mathcal{C}_{X,Y} \cap \mathcal{V}$ le point $\rho(D)$ n'est pas dans l'hyperplan engendré par μ . Alors l'ensemble exceptionnel A de cont_R est contenu dans X_Y et de plus $\text{cont}_R(A)$ est une orbite de G .

2.5 Compactifications sphériques d'un groupe algébrique connexe réductif

Dans cette section on va s'intéresser aux compactifications sphériques d'un groupe algébrique connexe et réductif.

Soient G un groupe algébrique connexe réductif, T un tore maximal de G , B un sous groupe de Borel de G contenant T et B^- le sous groupe de Borel de G tel que $B \cap B^- = T$, c'est à dire B^- est le conjugué de B par l'élément ω_0 de plus grande longueur du groupe de Weyl de G . On note

$$\mathbb{G} := G \times G, \quad \mathbb{T} := T \times T, \quad \text{et } \mathbb{B} := B \times B^-.$$

Remarquons que \mathbb{G} est aussi un groupe algébrique connexe réductif et que \mathbb{B} et \mathbb{T} sont respectivement un sous groupe de Borel et un tore maximal du groupe \mathbb{G} .

Dans toute la suite on appellera \mathbb{G}/G -plongement tout plongement sphérique de l'espace homogène \mathbb{G}/G où G est plongé dans $G \times G$ diagonalement.

Rappelons que dans le cas général, pour une G -variété sphérique X , $\mathbb{C}(X)$ n'est pas un G -module rationnel mais pour tout poids $\lambda \in \mathcal{X}(T)$, l'espace vectoriel $\mathbb{C}(X)_\lambda^{(B)} := \{f \in \mathbb{C}(X) \mid \forall b \in B, b \cdot f = \lambda(b)f\}$ est au plus de dimension 1.

Proposition 2.21. *Le sous-réseau $\mathcal{X}(\mathbb{G}/G) \subset \mathcal{X}(\mathbb{T})$ est formé des poids de la forme $(\lambda, -\lambda)$ où $\lambda \in \mathcal{X}(T)$.*

Démonstration. Voir [5, Exemple 3, page 33]. □

Remarque 2.22. *Pour simplifier on identifiera $\mathcal{X}(\mathbb{G}/G)$ avec le réseau $\mathcal{X}(T)$ des caractères du tore T . On fera cependant attention lorsqu'on utilisera le produit de dualité : pour tous couples $(\lambda_1, -\lambda_1), (\lambda_2, -\lambda_2) \in \mathcal{X}(\mathbb{G}/G)$ on a $\langle (\lambda_1, -\lambda_1), (\lambda_2, -\lambda_2) \rangle = 2\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ où le second crochet est le produit de dualité de $\mathcal{X}(T)$.*

Proposition 2.23. *Le cône des valuations \mathcal{V} s'identifie à la chambre négative de Weyl dans $\mathcal{X}(T)_\mathbb{Q}^\vee$.*

Démonstration. Voir [5, Exemple, page 42]. □

Corollaire 2.1. *L'ensemble $\Sigma(\mathbb{G}/G)$ des racines sphériques de \mathbb{G}/G est l'ensemble*

$$\{(\alpha, -\alpha) \mid \alpha \in S\}.$$

Et le support d'une racine sphérique $\sigma \in \Sigma(\mathbb{G}/G)$ est donc de type $A_1 \times A_1$.

Proposition 2.24. *L'image des couleurs de \mathbb{G}/G dans $\mathcal{X}(T)_{\mathbb{Q}}^{\vee}$ sont les coracines simples α^{\vee} .*

Démonstration. On utilise la décomposition de Bruhat :

$$\mathbb{G}/G \simeq G = \bigsqcup_{w \in W} BwB^{-}.$$

Les fermés irréductibles de codimension 1 \mathbb{B} -stable sont exactement les clôtures des $Bs_{\alpha}B^{-}$, avec α une racine simple et s_{α} la réflexion par rapport à l'hyperplan associé à la racine α . On pose

$$D_{\alpha} = \overline{Bs_{\alpha}B^{-}}$$

Chaque D_{α} a une équation dans $\mathbb{C}[G \times G]$, vecteur propre de \mathbb{B} de poids $(\varpi_{\alpha}, -\varpi_{\alpha})$, avec ϖ_{α} le poids fondamental associé à α . On en déduit que l'image de D_{α} dans $\mathcal{X}(T)_{\mathbb{Q}}^{\vee}$ est la coracine α^{\vee} [5, Exemple 2, page 32]. □

Dans le cas de l'espace homogène sphérique \mathbb{G}/G , l'ensemble des images des couleurs et l'ensemble des racines sphériques sont égaux. C'est un cas particulier des variétés sphériques et ce n'est généralement pas le cas !

III

Polytopes moments des \mathbb{G}/G -plongements

Dans cette partie, toutes les variétés considérées seront des \mathbb{G}/G -plongements projectifs.

On note $\{\alpha_i\}_{i \in I_0}$ l'ensemble des racines simples du triplet (G, B, T) . On appelle M le réseau $\mathcal{X}(\mathbb{G}/G)$ et $N = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ son dual. On note $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes \mathbb{Q}$ et $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes \mathbb{Q}$ les \mathbb{Q} -espaces vectoriels associés aux réseaux M et N .

On rappelle que si X est une variété sphérique et $D = \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} n_{\nu} X_{\nu} + \sum_{\alpha \in S} n_{\alpha} D_{\alpha}$ un \mathbb{Q} -diviseur de Cartier, stable sous l'action du Borel et ample de X , on note

$$\widetilde{Q}_D := \{\chi \in M_{\mathbb{Q}} \mid \langle \chi, \nu \rangle \geq -n_{\nu} \text{ et } \langle \chi, \rho(D) \rangle \geq -n_D \quad \forall \nu \in \mathcal{V}_X, \forall D \in \mathcal{D}\}$$

Le polytope moment Q_D de D est alors donné par

$$Q_D = \widetilde{Q}_D + \pi_D,$$

où π_D est le poids de la section canonique du diviseur D . Si aucune confusion n'est possible, on notera Q pour le polytope moment.

3.1 Faces admissibles

Revenons maintenant avec un \mathbb{G}/G -plongement projectif, D un \mathbb{Q} -diviseur de Cartier, stable sous l'action de \mathbb{B} , ample et Q_D le polytope moment associé à D .

Remarque 3.1. *Tous les sommets de Q_D qui ne sont pas sur un mur de la chambre dominante sont admissibles.*

Proposition 3.2. Soit x un sommet, différent de 0, de Q_D . On écrit

$$x = \bigcap_{i=1}^l F_i \cap \bigcap_{j \in J} F_{\alpha_j^\vee},$$

avec F_i une facette de direction orthogonale à un $\nu_i \in \mathcal{V}_X$, $J \subset I_0$, $F_{\alpha_j^\vee}$ une facette correspondant à l'intersection avec le mur $(\alpha_j^\vee)^\perp$ et l et k maximaux.

Le cône dual du cône convexe engendré par $Q_D - x$ est le cône convexe engendré par les $(\nu_i)_{1 \leq i \leq l}$ et les $(\alpha_j^\vee)_{j \in J}$.

Démonstration. Le polytope Q étant convexe, on a :

$$\text{Cône}(Q - x)^\vee = \{y \in N_{\mathbb{Q}} \mid \langle s - x, y \rangle \geq 0 \text{ pour tout sommet } s \text{ de } Q\}.$$

Soient $j \in J$ et s un sommet de Q_D . Comme x et α_j^\vee sont orthogonaux, on a $\langle s - x, \alpha_j^\vee \rangle = \langle s, \alpha_j^\vee \rangle \geq 0$ car s est dans la chambre dominante.

Soient $i \in \{1, \dots, l\}$ et s un sommet de Q_D . Comme $x \in F_i$ on a $\langle x, \nu_i \rangle = -n_{\nu_i} + \langle \pi_D, \nu_i \rangle$ et $\langle s, \nu_i \rangle \geq -n_{\nu_i} + \langle \pi_D, \nu_i \rangle$ car $s \in Q_D$ où π_D est le poids de la section canonique du diviseur D . D'où $\langle s - x, \nu_i \rangle \geq 0$.

Finalement on a $\text{Cône}(\{\nu_i\}_{1 \leq i \leq l}, \{\alpha_j^\vee\}_{j \in J}) \subset \text{Cône}(Q_D - x)^\vee$.

Pour la réciproque on montre que le cône dual de $\text{Cône}(\{\nu_i\}_{1 \leq i \leq l}, \{\alpha_j^\vee\}_{j \in J})$ est contenu dans le cône engendré par $Q_D - x$. Décrivons tout d'abord un peu plus ce cône dual :

$$\text{Cône}(\{\nu_i\}_{1 \leq i \leq l}, \{\alpha_j^\vee\}_{j \in J})^\vee = \{\omega \in M_{\mathbb{Q}} \mid \langle \omega, \nu_i \rangle \geq 0 \text{ et } \langle \omega, \alpha_j^\vee \rangle \geq 0\}.$$

Soit $\omega \in \text{Cône}(\{\nu_i\}_{1 \leq i \leq l}, \{\alpha_j^\vee\}_{j \in J})^\vee$. Alors $\omega \in \text{Cône}(Q_D - x)$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \lambda \omega + x \in Q_D$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \begin{cases} \forall \nu \in \mathcal{V}_X, \langle \lambda \omega + x, \nu \rangle \geq -n_\nu + \langle \pi_D, \nu \rangle \\ \forall \alpha \in S, \langle \lambda \omega + x, \alpha^\vee \rangle \geq -n_\alpha + \langle \pi_D, \alpha^\vee \rangle \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \begin{cases} \forall \nu \in \mathcal{V}_X \setminus \{\nu_1, \dots, \nu_l\}, \lambda \langle \omega, \nu \rangle \geq -n_\nu + \langle \pi_D, \nu \rangle - \langle x, \nu \rangle & (1) \\ \forall i \in \{1, \dots, l\}, \lambda \langle \omega, \nu_i \rangle \geq 0 & (2) \\ \forall j \in I_0 \setminus J, \lambda \langle \omega, \alpha_j^\vee \rangle \geq -n_{\alpha_j} + \langle \pi_D, \alpha_j^\vee \rangle - \langle x, \alpha_j^\vee \rangle & (3) \\ \forall j \in J, \lambda \langle \omega, \alpha_j^\vee \rangle \geq 0 & (4) \end{cases}$$

Comme $\omega \in \{v \in M_{\mathbb{Q}} \mid \langle v, \nu_i \rangle \geq 0 \text{ et } \langle v, \alpha_j^\vee \rangle \geq 0\}$ les inégalités 2) et 4) sont respectées. Pour l'inégalité (1), soit $\nu \in \mathcal{V}_X$ différent des ν_1, \dots, ν_l , alors $\langle x, \nu \rangle = \langle \tilde{x} + \pi_D, \nu \rangle = \langle \tilde{x}, \nu \rangle + \langle \pi_D, \nu \rangle$, où $\tilde{x} := x - \pi_D$ est le sommet de Q_D correspondant au sommet x . Ainsi $\langle \tilde{x}, \nu \rangle > -n_\nu$ et donc finalement on obtient que $-n_\nu + \langle \pi_D, \nu \rangle - \langle x, \nu \rangle$ est strictement négatif.

En procédant de la même façon pour l'inégalité (3) on montre que pour $j \in I_0 \setminus J$, $-n_{\alpha_j} + \langle \pi_D, \alpha_j^\vee \rangle - \langle x, \alpha_j^\vee \rangle$ est strictement négatif.

Il suffit donc de prendre λ suffisamment petit, et les inégalités sont vérifiées. \square

Soit x un sommet non nul de Q_D comme dans la proposition précédente. On vient de montrer que le cône dual du cône convexe engendré par $Q_D - x$ est le cône convexe

engendré par les $(\nu_i)_{1 \leq i \leq l}$ et les $(\alpha_j^\vee)_{j \in J}$. On réordonne les α_j^\vee . On considère les partitions $J_1 \cup \dots \cup J_r$ de J respectant

$$\forall (t, t') \in \{1, \dots, r\}, \forall (j, j') \in J_t \times J_{t'}, j \neq j' \Rightarrow (\alpha_j^\vee, \alpha_{j'}^\vee) = 0 \quad (\text{A})$$

et on prend la partition avec r maximal pour cette propriété.

Remarque 3.3. Cette partition maximale revient exactement à déterminer les parties irréductibles du système de racines engendré par la famille $(\alpha_j)_{j \in J}$.

Sous ce réarrangement on a la proposition suivante

Proposition 3.4. Il y a équivalence entre :

1. le sommet x n'est pas admissible;
2. $\exists t \in \{1, \dots, r\}, \forall j \in J_t, \forall i \in \{1, \dots, l\}, (\nu_i, \alpha_j^\vee) = 0$.

Lemme 3.5. Soit M une matrice réelle carrée inversible indécomposable telle que :

- $m_{i,i} = 2$;
- $m_{i,j} \leq 0$ si $i \neq j$;
- $m_{i,j} = 0 \Rightarrow m_{j,i} = 0$.

Alors M^{-1} est composée de nombres strictement positifs et $\det(M_{i,i}) \neq 0$ où $M_{i,i}$ est la matrice M à laquelle on a retiré la i -ième ligne et la i -ième colonne.

Démonstration. On utilise le [13, Theorem 4.3, page 42] :

$$Mv \geq 0 \Rightarrow v > 0 \text{ ou } v = 0.$$

Supposons que M^{-1} ait un élément négatif ou nul sur sa i -ième colonne, alors en posant $v = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ avec l'unique 1 à la i -ième place on a $M^{-1}v$ non strictement positif et non nul et pourtant $MM^{-1}v = v \geq 0$. Donc M^{-1} est strictement positive.

De plus, $\det(M_{i,i})$ est le coefficient de $\frac{1}{\det M} M^{-1}$ en (i, i) . \square

Remarque 3.6. La matrice de Cartan d'un système de racines vérifie les trois hypothèses du lemme 3.5. De plus, si le système est irréductible alors sa matrice de Cartan est indécomposable.

Démonstration de la proposition 3.4. Notons \mathcal{C} le cône engendré par les $(\nu_i)_{1 \leq i \leq l}$ et les $(\alpha_j^\vee)_{j \in J}$. Le sommet x est admissible si et seulement si l'intérieur relatif de \mathcal{C} rencontre le cône des valuations. Un élément v de l'intérieur du cône \mathcal{C} s'écrit

$$v = \sum_{i=1}^l b_i \nu_i + \sum_{j \in J} c_j \alpha_j^\vee \text{ avec } b_i, c_j > 0.$$

De plus, on sait que $v \in \mathcal{V}$ si et seulement si $\forall \alpha \in S, \langle v, \alpha \rangle \leq 0$.

Notons M la matrice de Cartan du groupe G . Le système d'inéquations s'écrit alors

$$D + MC \leq 0,$$

avec $D = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^l b_i \langle \nu_i, \alpha_1^\vee \rangle \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^l b_i \langle \nu_i, \alpha_n^\vee \rangle \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ le vecteur des coefficients des α^\vee dans v (c'est à dire si $j \notin J$, $c_j = 0$).

Remarquons que D est négatif, et donc le but est de contrôler MC . Les termes positifs dans MC apparaissent uniquement sur des lignes $j \in J$, c'est à dire les lignes j telles que $\alpha_j^\vee \in \mathcal{C}$. En effet, pour α et β deux racines simples $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ est strictement positif si et seulement si $\alpha = \beta$. On peut donc se ramener à ces équations et le système devient donc

$$\tilde{D} + \tilde{M}\tilde{C} \leq 0,$$

avec \tilde{D} , \tilde{C} et \tilde{M} les matrices D , C et M desquelles on a gardé uniquement les lignes (et colonnes pour M) $j \in J$.

Supposons qu'il existe $t \in \{1, \dots, r\}$ tel que

$$\forall j \in J_t, \langle \nu_1, \alpha_j^\vee \rangle = \langle \nu_2, \alpha_j^\vee \rangle = \dots = \langle \nu_l, \alpha_j^\vee \rangle = 0$$

Alors en particulier pour vérifier les inéquations il faut vérifier les lignes $j \in J_t$. Le système pour ces lignes est de la forme $\tilde{M}\tilde{C} \leq 0$, où comme précédemment les matrices \tilde{M} et \tilde{C} ne sont composées que des lignes (et colonnes pour \tilde{M}) de \tilde{M} et \tilde{C} . Remarquons que \tilde{M} vérifie encore les conditions du lemme 1. En effet la matrice \tilde{M} est juste la matrice de Cartan associée au sous-système de racines engendré par les racines simples $(\alpha_j^\vee)_{j \in J_t}$, et par (A) ce système est irréductible et donc \tilde{M} est indécomposable. Mais cela implique que $(\tilde{M})^{-1}\tilde{M}\tilde{C} = \tilde{C} \leq 0$ car $(\tilde{M})^{-1}$ est strictement positive. Donc la seule solution est $\tilde{C} = 0$ ce qu'on ne veut pas.

Pour la réciproque supposons que $\forall 1 \leq t \leq r, \exists j \in J_t, \exists i \in \{1, \dots, l\}$ tels que $\langle \nu_i, \alpha_j^\vee \rangle \neq 0$. Similairement, il suffit de montrer que pour chaque bloc on peut trouver une solution au système. On se restreint donc à un bloc de racines.

On pose $\tilde{C} = -(\tilde{M})^{-1}\tilde{D}$. Comme les coefficients de $(\tilde{M})^{-1}$ sont strictement positifs et que $-\tilde{D}$ est positif non nul par l'hypothèse faite alors $\tilde{C} \geq 0$ non nul et il vérifie $\tilde{D} + \tilde{M}\tilde{C} = 0$ □

Exemple 3.7. On pose $G = Spin_{10}$ qui est de type D_5 . Sa matrice de Cartan est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le cône des valuations est engendré par les éléments suivants :

$$\nu_1 = -\alpha_1^\vee - \alpha_2^\vee - \alpha_3^\vee - \frac{1}{2}\alpha_4^\vee - \frac{1}{2}\alpha_5^\vee,$$

$$\nu_2 = -\alpha_1^\vee - 2\alpha_2^\vee - 2\alpha_3^\vee - \alpha_4^\vee - \alpha_5^\vee,$$

$$\nu_3 = -\alpha_1^\vee - 2\alpha_2^\vee - 3\alpha_3^\vee - \frac{3}{2}\alpha_4^\vee - \frac{3}{2}\alpha_5^\vee,$$

$$\nu_4 = -\frac{1}{2}\alpha_1^\vee - \alpha_2^\vee - \frac{3}{2}\alpha_3^\vee - \frac{5}{4}\alpha_4^\vee - \frac{3}{2}\alpha_5^\vee,$$

$$\nu_5 = -\frac{1}{2}\alpha_1^\vee - \alpha_2^\vee - \frac{3}{2}\alpha_3^\vee - \frac{3}{4}\alpha_4^\vee - \frac{5}{2}\alpha_5^\vee.$$

Supposons que Q_D possède deux sommets x et y s'écrivant

$$x = F_{\nu_1} \cap F_{\nu_2} \cap F_{\alpha_1^\vee} \cap F_{\alpha_3^\vee} \cap F_{\alpha_5^\vee} \quad \text{et} \quad y = F_{\nu_1} \cap F_{\nu_4} \cap F_{\alpha_1^\vee} \cap F_{\alpha_3^\vee} \cap F_{\alpha_5^\vee}.$$

Pour x le réarrangement des racines est $\{\alpha_1^\vee\}$ et $\{\alpha_3^\vee, \alpha_5^\vee\}$. Alors le sommet x n'est pas admissible car ν_1 et ν_2 sont tout deux orthogonaux aux coracines α_3^\vee et α_5^\vee .

De même le réarrangement des racines pour y est $\{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee\}$ et $\{\alpha_4^\vee\}$. Alors le sommet y est admissible car $\langle \nu_4, \alpha_2^\vee \rangle \neq 0$ et $\langle \nu_1, \alpha_4^\vee \rangle \neq 0$.

3.2 Description des polytopes moments

On définit une relation d'équivalence sur les polytopes de $M_{\mathbb{Q}}$:

Définition 3.1. Soient Q et Q' deux polytopes de $M_{\mathbb{Q}}$. On pose

$$Q = \bigcap_{i \in I} H_i^+ \quad \text{et} \quad Q' = \bigcap_{j \in J} H_j^+,$$

avec I et J minimaux, H_i^+ des demi-espaces et H_i les hyperplans correspondant à ces demi-espaces. On note également \mathcal{H}_i les directions des hyperplans H_i .

Alors Q et Q' sont équivalents si les deux conditions suivantes sont respectées :

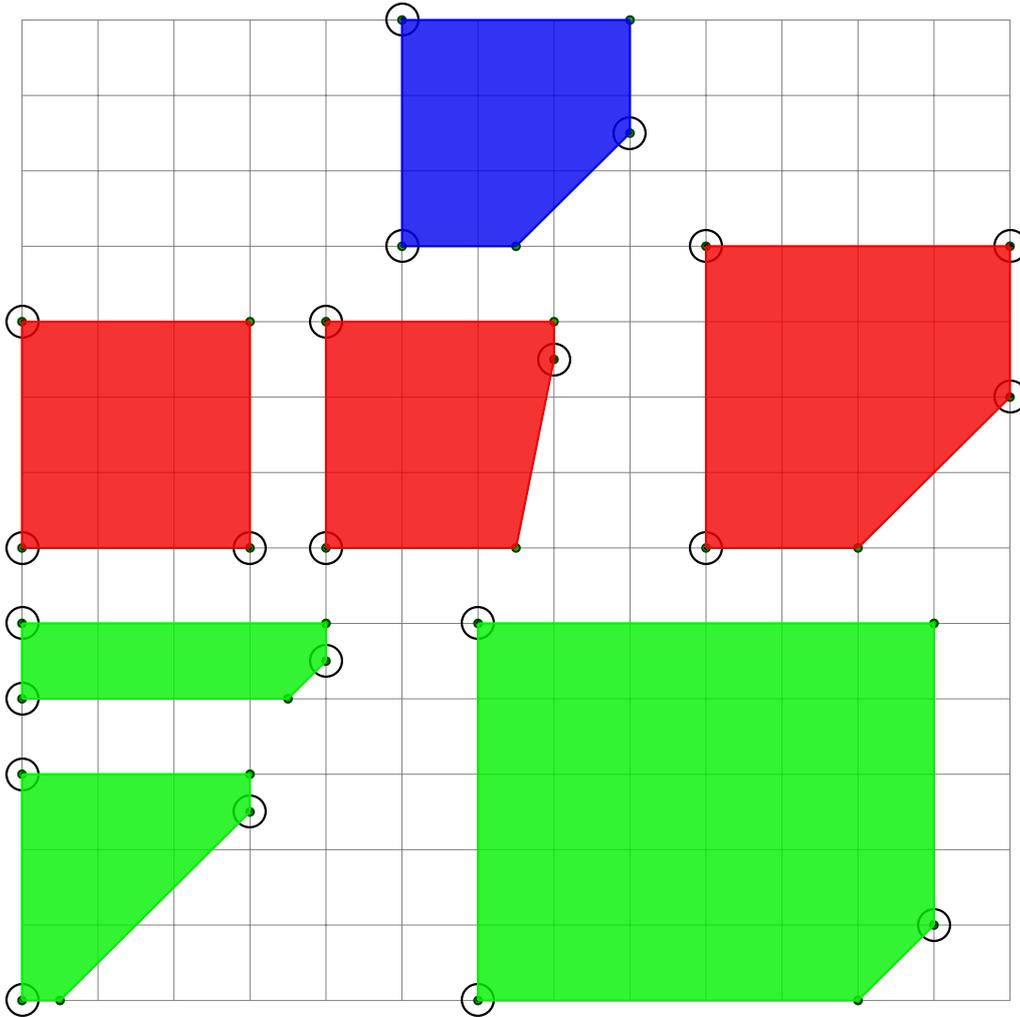
1. Il existe une application $\varphi : I \rightarrow J$ telle que
 - (a) φ est bijective,
 - (b) le demi-espace H_i^+ est un translaté de $H_{\varphi(i)}^+$.

En particulier pour tout $i \in I$ on a $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{\varphi(i)}$.

2. Soit $I' \subset I$, une face $Q \cap \bigcap_{i' \in I'} H_{i'}$ est admissible de dimension d si et seulement si $Q' \cap \bigcap_{i' \in I'} H_{\varphi(i')}$ est également une face admissible de dimension d .

Dit autrement si Q est défini par n hyperplans, alors Q' est défini par n hyperplans et chacun d'entre eux est parallèle à un hyperplan définissant Q . De plus, les faces admissibles de chaque polytope doivent se correspondre.

Exemple 3.8. Dans la figure suivante, on regarde des polytopes de \mathbb{R}^2 . Par simplicité, on ne regardera que l'admissibilité des sommets. Les trois polytopes rouges ne sont pas équivalents au polytope bleu. En effet pour les deux premiers il n'existe pas de bijection entre les demiplans et pour le troisième les points admissibles ne correspondent pas. Les trois polytopes verts sont en revanche équivalents au bleu. On remarque que deux polytopes équivalents peuvent avoir des tailles très différentes.



Proposition 3.9. Soient Q et Q' deux polytopes moments de M_Q , alors

$$Q \sim Q' \Leftrightarrow Q \text{ et } Q' \text{ définissent le même } \mathbb{G}/G\text{-plongement.}$$

Démonstration. On garde les notations de la définition 3.1, et notons $X_Q, X_{Q'}, \mathbb{F}_Q$ et $\mathbb{F}_{Q'}$ les \mathbb{G}/G -plongements et éventails associés aux polytopes Q et Q' . On rappelle la Proposition 2.11 :

$$\mathbb{F}_Q = \{\text{Cône}(Q - x_F)^\vee \mid F \text{ est une face admissible de } Q\},$$

où x_F est un élément de l'intérieur relatif de F .

Supposons que les polytopes Q et Q' sont équivalents. Soit $F = Q \cap_{i \in I'} H_i^+$ une face admissible, alors $F' = Q' \cap_{i \in I'} H_{\varphi(i)}^+$ est également une face admissible. Si on note \mathcal{H}_i^+ le demi-espace H_i^+ translaté en zéro (en d'autres termes, \mathcal{H}_i^+ est le demi-espace d'hyperplan \mathcal{H}_i et de "même coté" que H_i^+) alors on a

$$\text{Cône}(Q - x_F) = \bigcap_{i \in I'} \mathcal{H}_i^+.$$

Mais comme $Q \sim Q'$ on a $\mathcal{H}_i^+ = \mathcal{H}_{\varphi(i)}^+$ pour tout $i \in I$ donc en particulier $\text{Cône}(Q - x_F) = \text{Cône}(Q' - x_{F'})$ et finalement on a égalité entre les éventails.

Pour la réciproque, supposons que les \mathbb{G}/G -plongements X_Q et $X_{Q'}$ sont isomorphes. On note $Q = \bigcap_{i \in I} H_i^+ = \{x \in M_{\mathbb{Q}} \mid Ax \geq B\}$ et de la même façon $Q' = \bigcap_{i \in J} H_J^+ = \{x \in M_{\mathbb{Q}} \mid A'x \geq B'\}$. Les matrices A et A' sont composées des coracines simples et les valuations associées aux diviseurs des variétés X_Q et $X_{Q'}$. Quitte à permuter les lignes de A' on peut supposer que $A = A'$. On pose l le nombre de lignes de A et $\varphi_I : I \rightarrow \{1, \dots, l\}$, $\varphi_J : J \rightarrow \{1, \dots, l\}$ les bijections telles que

$$F_i := Q \cap H_i = \{X \in M_{\mathbb{Q}} \mid A_{\varphi_I(i)}X = B_{\varphi_I(i)} \text{ et } AX \geq B\},$$

et

$$F'_j := Q \cap H'_j = \{X \in M_{\mathbb{Q}} \mid A'_{\varphi_J(j)}X = B'_{\varphi_J(j)} \text{ et } A'X \geq B'\},$$

pour tout $i \in I$ et $j \in J$.

On pose $\varphi = \varphi_J^{-1} \circ \varphi_I$ qui est une bijection entre I et J . Alors pour tout i dans I le demi-espace H_i^+ est un translaté de $H_{\varphi(i)}^+$ et donc $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{\varphi(i)}$.

Le point 2) découle directement du fait que les éventails \mathbb{F}_Q et $\mathbb{F}_{Q'}$ sont égaux et que la dimension de la face $Q \cap \bigcap_{i \in I'} H_i$ est la codimension du cône associé à cette face. \square

On souhaite caractériser tous les polytopes moments possibles. Soit

$$Q = \{\omega \in M_{\mathbb{Q}} \mid A\omega \geq B\}$$

un polytope de dimension maximale avec $A \in M_{d, \dim(M_{\mathbb{Q}})}(\mathbb{Q})$ et B une matrice colonne rationnelle de d lignes. On suppose A minimale, c'est à dire que $\forall i \leq d$, $F_i = \{\omega \in M_{\mathbb{Q}} \mid A_i\omega = B_i\} \cap \{\omega \in M_{\mathbb{Q}} \mid A_j\omega > B_j \forall j \neq i\}$ est une facette de Q et que de plus pour chaque i , A_i corresponde à un vecteur primitif de N .

Il est alors nécessaire que les coracines α^{\vee} apparaissent dans A . De plus, les autres lignes doivent correspondre à des éléments du cône des valuations. On écrit alors

$$A = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \\ \alpha_1^{\vee} \\ \vdots \\ \alpha_l^{\vee} \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.10. Si $Q_D = \{\omega \in M_{\mathbb{Q}} \mid A\omega \geq B\} + \pi_D$ est le polytope moment d'un \mathbb{Q} -diviseur $D = \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} n_{\nu} X_{\nu} + \sum_{\alpha \in S} n_{\alpha} D_{\alpha}$ de Cartier et ample, alors l'intersection de Q_D avec chaque mur de la chambre dominante est une facette du polytope. En effet, $\pi_D = \sum n_{\nu} \pi_{X_{\nu}} + \sum n_{\alpha} \varpi_{\alpha}$ et pour toute coracine simple α^{\vee} et tout \mathbb{G} -diviseur X_{ν} on a $\langle \alpha^{\vee}, \pi_{X_{\nu}} \rangle = 0$ car le caractère $\pi_{X_{\nu}}$ est défini sur G .

Ainsi

$$Q_D = \{\omega \in M_{\mathbb{Q}} \mid A\omega \geq \tilde{B}\}$$

où

$$\tilde{B} = B + \begin{pmatrix} \langle \nu_1, \pi_D \rangle \\ \vdots \\ \langle \nu_n, \pi_D \rangle \\ \langle \alpha_1^{\vee}, \pi_D \rangle \\ \vdots \\ \langle \alpha_l^{\vee}, \pi_D \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_{\nu_1} + \langle \nu_1, \pi_D \rangle \\ \vdots \\ -n_{\nu_n} + \langle \nu_n, \pi_D \rangle \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On vient de montrer qu'on peut toujours se ramener à un diviseur dont les coefficients des couleurs sont nuls. Et dans le cas où G est semi-simple, alors pour un tel diviseur le polytope pseudo-moment \tilde{Q}_D et le polytope moment Q_D sont les mêmes, c'est à dire on peut choisir un diviseur dont le poids de la section canonique est nul.

De plus comme on a supposé A minimale, alors $Q_D \cap (\alpha^{\vee})^{\perp}$ est une facette du polytope.

Théorème 3.11. Soit $Q = \{\omega \in M_{\mathbb{Q}} \mid A\omega \geq B\}$ avec A et B comme ci dessus. Si Q est de dimension $\dim(M_{\mathbb{Q}})$ alors il existe un \mathbb{G}/G -plongement projectif X et un \mathbb{Q} -diviseur de Cartier D sur X , ample et stable sous l'action du sous-groupe de Borel tel que $Q = Q_D$.

On va montrer cette proposition avec le Théorème 2.13.

On rappelle que les racines sphériques dans notre cas forment l'ensemble $\Sigma = \{(\alpha, -\alpha) \mid \alpha \in S\}$. Pour les preuves suivantes, on ne fait pas l'identification $M = \mathcal{X}(T)$ mais on travaille avec le sous-réseau $M = \{(\lambda, -\lambda) \mid \lambda \text{ est un poids de } G\}$ de $\mathcal{X}(\mathbb{T})$.

Lemme 3.12. Tous les $\sigma \in \Sigma$ sont compatibles pour le réseau M .

Démonstration. Notons $\sigma = (\alpha, -\alpha)$ et vérifions les quatre points.

1. La racine sphérique $(\alpha, -\alpha)$ est bien un élément primitif de M .
2. L'ensemble $M^{\perp} := \{(\lambda, \lambda') \in \mathcal{X}(\mathbb{T})_{\mathbb{Q}} \mid ((\lambda, \lambda'), m) = 0, \forall m \in M\}$ ne rencontre pas S . En effet soit $(\beta, 0)$ ou $(0, -\beta)$ une racine simple, alors il existe $(m, -m) \in M$ tel que $(\beta, m) \neq 0$. Ainsi $M^{\perp} \cap S = \emptyset$. Comme $\text{supp}(\sigma) = \{(\alpha, 0), (0, -\alpha)\}$ est de type $A_1 \times A_1$, il suffit de montrer que $\{\beta \in \text{supp}(\sigma) \mid \beta \perp \sigma\} = \emptyset$ pour montrer que le couple $(M^{\perp} \cap S, \sigma)$ vérifie l'axiome de Luna. Mais cette égalité est triviale.
3. La seule décomposition de σ est $\sigma = (\alpha, 0) + (0, -\alpha)$. Soit $(m, -m) \in M$, alors $\langle (\alpha^{\vee}, 0), (m, -m) \rangle = \langle \alpha^{\vee}, m \rangle = \langle (0, -\alpha^{\vee}), (m, -m) \rangle$, où le membre du milieu est le produit de dualité de $\mathcal{X}(T)$.

4. L'élément σ n'est pas le double d'une racine simple, donc ce point est automatiquement vérifié. □

Lemme 3.13. *L'ensemble Σ est \mathbb{Q} -compatible pour le couple (M, Q) .*

Démonstration. Soit $\sigma = (\alpha, -\alpha) \in \Sigma$. On vérifie les quatre points.

1. D'après le Lemme 3.12 σ est compatible pour le réseau M .
2. Comme Q est de dimension maximale dans M , on a l'égalité $Q^\perp = M^\perp$. Ainsi la démonstration que le couple $(Q^\perp \cap S, \sigma)$ satisfait l'axiome de Luna est exactement la même que dans le Lemme 3.12.
3. La racine sphérique σ n'est pas une racine simple. Soit F une facette de Q vérifiant $\langle \rho_F, \sigma \rangle > 0$. Le vecteur ρ_F est soit un élément du cône des valuations, soit l'image d'une couleur. Mais comme $\mathcal{V} = -\Sigma^\vee$, ρ_F est forcément l'image d'une couleur, donc $\rho_F = (\beta^\vee, -\beta^\vee)$ pour une certaine racine simple β . L'inégalité $\langle \rho_F, \sigma \rangle > 0$ nous dit que $\rho_F = (\alpha^\vee, -\alpha^\vee)$.
Ainsi $F = Q \cap \{x \in M_{\mathbb{Q}} \mid \langle \rho_F, x \rangle = 0\}$. Donc en particulier, on a $\langle (\alpha^\vee, 0), F \rangle = 0$ et $(\alpha, 0) \in S \setminus Q^\perp$.
4. La racine sphérique σ n'est jamais une racine simple, donc le point 4 est vérifié. □

Lemme 3.14. *L'ensemble Σ est \mathbb{Q} -admissible pour le couple (M, Q) .*

Démonstration. Les deux points sont vérifiés grâce au Lemme 3.13 et au fait que $\Sigma \cap S$ est vide. □

Démonstration du Théorème 3.11. Le résultat est immédiat avec le Théorème 2.13 et le Lemme 3.14. □

Démonstration du Théorème 3.11 dans le cas où G est semi-simple. Si le groupe G est semi-simple, on donne une preuve plus "constructible".

Q est de dimension maximale et comme $\nu_i \in \mathcal{V}$ alors on a forcément $b_1, \dots, b_n \leq 0$.

On va construire un éventail \mathbb{F} dont les cônes maximaux seront les $\text{Cône}(Q - s_I)^\vee$ rencontrant l'intérieur de \mathcal{V} avec $I \subset I_0 = \{1, \dots, n + l\}$ tel que $s_I = F_I := \bigcap_{i \in I} F_i$ est un sommet de Q .

Remarquons déjà que pour deux sommets s_I et $s_{I'}$ différents, l'intersection $\text{Cône}(Q - s_I)^\vee \cap \text{Cône}(Q - s_{I'})^\vee$ est une face commune des deux cônes. On a l'égalité

$$\begin{aligned} \text{Cône}(Q - s_I)^\vee &= \{x \in \mathcal{X}(T)_{\mathbb{Q}}^\vee \mid \forall s_J \text{ sommet de } Q, \langle s_J - s_I, x \rangle \geq 0\} \\ &= \bigcap_J M_{J,I}^+ \end{aligned}$$

où J est un sous-ensemble de I_0 tels que s_J est un sommet du polytope Q et avec $M_{J,I}^+ = \{x \in \mathcal{X}(T)_{\mathbb{Q}}^{\vee} \mid \langle s_J - s_I, x \rangle \geq 0\}$ le demi-espace d'hyperplan l'orthogonal à $s_J - s_I$.

On a alors

$$\begin{aligned} \text{Cône}(Q - s_I)^{\vee} \cap \text{Cône}(Q - s_{I'})^{\vee} &= \bigcap (M_{J,I}^+ \cap M_{J,I'}^+) \\ &= \bigcap_{\substack{J \\ J \neq I \\ J \neq I'}}^{s_J} (M_{J,I}^+ \cap M_{J,I'}^+) \cap M_{I',I}^+ \cap M_{I,I'}^+ \\ &= \bigcap_{\substack{J \\ J \neq I \\ J \neq I'}} (M_{J,I}^+ \cap M_{J,I'}^+) \cap M_{I',I}^+. \end{aligned}$$

Ce dernier est inclu dans la face du $\text{Cône}(Q - s_I)^{\vee}$ définie par l'hyperplan $M_{I',I}$.

Réciproquement, soit $w \in \text{Cône}(Q - s_I)^{\vee} \cap M_{I',I}^+ = \bigcap_J M_{J,I}^+ \cap M_{I',I}^+$. Montrons que w est dans l'intersection des deux cônes. Soit $J \subset I_0$ définissant un sommet s_J de Q . Alors

$$\langle s_J - s_{I'}, w \rangle = \langle s_J - s_{I'}, w \rangle + \langle s_{I'} - s_I, w \rangle = \langle s_J - s_I, w \rangle \geq 0,$$

d'où $w \in M_{J,I'}^+$ et donc w est bien dans l'intersection des deux cônes.

Il reste maintenant à montrer que l'éventail recouvre tout le cône des valuations. Soit $\nu \in \mathcal{V}$. Pour tout $I \subset I_0$ définissant un sommet s_I de Q on pose S_I comme étant l'ensemble des sommets s_J de Q tels que $\langle s_J - s_I, \nu \rangle < 0$. Supposons que pour tout sommet s_I de Q on a $S_I \neq \emptyset$, c'est à dire ν n'appartient à aucun cône maximal. Alors on construit une chaîne en itérant le procédé suivant à partir d'un sommet s_{I_1} . Puisque S_{I_1} est non vide donc on peut trouver $s_{I_2} \in S_{I_1}$. On remplace ensuite S_{I_1} par S_{I_2} . On définit ainsi une chaîne

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow \dots$$

Le nombre de sommets de Q est fini donc la chaîne n'a d'autre choix que de boucler, par exemple

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_m \rightarrow I_1$$

avec $m > 2$ car si il y a au moins deux sommets de Q et si $s_{I_2} \in S_{I_1}$ alors $s_{I_1} \notin S_{I_2}$.

On calcule alors

$$\begin{aligned} \langle s_{I_1} - s_{I_m}, \nu \rangle &= \langle (s_{I_1} - s_{I_2}) + (s_{I_2} - s_{I_3}) + \dots + (s_{I_{m-1}} - s_{I_m}), \nu \rangle \\ &= \langle s_{I_1} - s_{I_2}, \nu \rangle + \langle s_{I_2} - s_{I_3}, \nu \rangle + \dots + \langle s_{I_{m-1}} - s_{I_m}, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Tous les termes de la dernière somme sont strictement positifs, donc $\langle s_{I_1} - s_{I_m}, \nu \rangle > 0$ ce qui est une contradiction avec $s_{I_1} \in S_{I_m}$.

On vient de montrer qu'il existe un cône maximal contenant ν . Il ne reste plus qu'à montrer que l'intérieur relatif d'un de ces cônes rencontre le cône des valuations. Si ν est à l'intérieur relatif de \mathcal{V} il n'y a rien à faire. On va donc supposer que ν est sur un bord de \mathcal{V} . On peut construire une suite de points

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ telle que } \forall i \in \mathbb{N}, x_i \text{ est dans l'intérieur relatif de } \mathcal{V} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \nu.$$

Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer qu'à partir d'un certain rang tous les x_n sont dans un même cône maximal rencontrant l'intérieur relatif du cône des valuations puisque x_n est dans l'intérieur relatif de \mathcal{V} . De plus, ce cône maximal est fermé donc ν appartient également à ce cône.

On vient de construire un éventail \mathbb{F} , et on a donc une variété sphérique. Remarquons que la variété à exactement n diviseurs premiers G -stable, notés X_1, \dots, X_n dont les valuations correspondent respectivement à ν_1, \dots, ν_n .

On pose $\delta = \sum_{i=1}^n -b_i X_i$. Si δ est un diviseur ample (ou \mathbb{Q} -ample) alors on aura bien que Q est le polytope moment associé à δ . Montrons donc que δ est \mathbb{Q} -ample. Soit s_I un sommet de Q admissible. Alors $\text{Cône}(Q - s_I)$ est un cône maximal de l'éventail \mathbb{F} correspondant à une orbite fermée Z_I . Sur ce cône on définit la fonction linéaire $l_{\delta, Z_I} := s_I$. Remarquons que pour tout $\nu_i \in \mathcal{V}_{X, Z_I}$, ν_i est une arête du cône maximal et en particulier $l_{\delta, Z_I}(\nu_i) = \langle s_I, \nu_i \rangle = -b_i$. De même pour tout $\alpha_j^\vee \in \mathcal{D}_{X, Z_I}$, $l_{\delta, Z_I}(\alpha_j^\vee) = \langle s_I, \alpha_j^\vee \rangle = 0$. On pose l_δ la fonction linéaire par morceaux définie sur le support de \mathbb{F} via $l_\delta|_{\text{Cône}(Q - s_I)} = l_{\delta, Z_I}$. La fonction linéaire par morceaux l_δ est bien définie. De plus, elle est associée au diviseur δ , est strictement convexe et cela montre que δ est bien un diviseur \mathbb{Q} -ample. \square

On rappelle que $N_{\mathbb{Q}}$ est le réseau dual de $M_{\mathbb{Q}}$.

Remarque 3.15. Remarquons que pour tout $v \in N_{\mathbb{Q}}$ il existe une face F de Q et x_F dans l'intérieur relatif de F tels que $v \in \text{Cône}(Q - x_F)^\vee$.

3.3 Morphismes et polytopes moments

On veut traduire le théorème 2.6 en termes de polytopes moments.

Corollaire 3.1. Soient X et X' deux \mathbb{G}/G -plongements. On note Q et Q' deux polytopes moments des variétés X et X' . Alors il existe un morphisme dominant de X vers X' si et seulement si pour tout sommet admissible s de Q' , il existe un sommet admissible s' de Q tel que $\text{Cône}(Q' - s') \subset \text{Cône}(Q - s)$.

Démonstration. Il existe un morphisme de X vers X' si et seulement si pour tout cône colorié $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ de l'éventail de X , il existe un cône colorié $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ de X' tel que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ (Théorème 2.6).

On peut se restreindre aux cônes maximaux. En termes de polytopes, un cône maximal $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ de l'éventail correspond à un sommet admissible s et le cône est alors $\text{Cône}(Q - s)^\vee$. Ainsi si un morphisme existe, on a bien que pour tout sommet admissible $s \in Q$, il existe un sommet admissible $s' \in Q'$ tel que $\text{Cône}(Q - s)^\vee \subset \text{Cône}(Q' - s')^\vee$. Pour la réciproque, il suffit de montrer que pour tous cônes coloriés $(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1)$ et $(\mathcal{C}_2, \mathcal{F}_2)$ de $N_{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\alpha^\vee \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2$. On a $\alpha^\vee \in \mathcal{C}_1$ et

$$\mathcal{C}_2 = \text{Cône}(\nu_1, \dots, \nu_n, \alpha_{i_1}^\vee, \dots, \alpha_{i_k}^\vee) \text{ avec } \alpha^\vee \neq \alpha_{i_j}^\vee \ \forall j \in \{1, \dots, k\}.$$

Si la coracine α^\vee est dans le cône \mathcal{C}_2 alors on peut écrire

$$\alpha^\vee = \sum_{j=1}^n \lambda_{\nu_j} \nu_j + \sum_{j=1}^k \lambda_{\alpha_{i_j}} \alpha_{i_j}^\vee, \text{ avec } \lambda_\bullet \geq 0,$$

et ainsi $\langle \varpi_\alpha, \alpha^\vee \rangle = \underbrace{\sum_{j=1}^n \lambda_{\nu_j} \langle \varpi_\alpha, \nu_j \rangle}_{\leq 0} + \underbrace{\sum_{j=1}^k \lambda_{\alpha_{i_j}} \langle \varpi_\alpha, \alpha_{i_j}^\vee \rangle}_{=0} \leq 0$, ce qui est impossible.

Ainsi $\alpha^\vee \notin \mathcal{C}_2$, mais cela est absurde car on a supposé que $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$. \square

Fait. Soit P un polytope de \mathbb{Q}^n . Alors pour tout demi-espace affine H^+ délimité par un hyperplan H de \mathbb{Q}^n , il existe une unique face F de P et un unique vecteur $v \in \mathbb{Q}^n$ tel que F est défini par $v + H$, c'est à dire que $F = P \cap (v + H)$ et $P \subset v + H^+$.

Soit P' un second polytope de \mathbb{Q}^n . On suppose P et P' tout deux de dimension n . À une facette F de P est associé un unique demi-espace H_F^+ délimité par un hyperplan affine H_F tel que $F = P \cap H_F$ et $P \subset H_F^+$. En appliquant le fait précédent, il existe donc un unique $v_F \in \mathbb{Q}^n$ tel que $P' \cap H_F$ soit une face de P' et $P' \subset H_F^+ + v_F$. On note cette face $\psi(F)$. La face $\psi(F)$ est éventuellement vide.

Corollaire 3.2. Avec les mêmes notations que ci-dessus, il existe un morphisme dominant de X vers X' si et seulement si pour tout ensemble de facettes \mathcal{G} de Q , $\bigcap_{F \in \mathcal{G}} F$ est admissible implique que $\bigcap_{F \in \mathcal{G}} \psi(F)$ est admissible.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = \bigcap_{F \in \mathcal{G}} F$ une face de Q et $\mathcal{F}' = \bigcap_{F \in \mathcal{G}} \psi(F)$ la face de Q' correspondante (éventuellement vide). Pour une face F de Q , on note \mathcal{C}_F le cône associé à la face (voir la remarque 3.15), de même pour les faces du polytope Q' . Rappelons que F est admissible si et seulement si \mathcal{C}_F est un cône dont l'intérieur relatif rencontre \mathcal{V} .

Supposons que l'ensemble $\{\mathcal{C}_{\mathcal{F}''} \mid \mathcal{F}'' \text{ une face de } Q' \text{ telle que } \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{F}''}\}$ est non vide. On montre alors que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}'}$ est le minimum de cet ensemble.

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{F}'} &\iff \forall F \in \mathcal{G}, \mathcal{C}_F \subset \mathcal{C}_{\mathcal{F}'} \\ &\iff \forall F \in \mathcal{G}, \mathcal{C}_F^\vee \supset \mathcal{C}_{\mathcal{F}'}^\vee. \end{aligned}$$

Soit H_F^+ le demi-espace délimité par l'hyperplan H_F tel que $F = Q \cap H_F$ et $Q \subset H_F^+$. Il existe alors un unique $v_F \in M_{\mathbb{Q}}$ tel que $\psi(F) = Q' \cap (H_F + v_F)$ et $Q' \subset H_F^+ + v_F$. En particulier $\mathcal{C}_F^\vee = H_F^+ - x_F$ avec x_F un point de l'intérieur relatif de F , et $\mathcal{C}_{\psi(F)}^\vee \subset H_F^+ - x_F$. Ainsi $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^\vee \subset \mathcal{C}_{\psi(F)}^\vee$ pour toute facette $F \in \mathcal{G}$ et donc le cône associé à la face \mathcal{F}' contient bien le cône associé à la face \mathcal{F} .

Il reste à montrer que tout cône $\mathcal{C}_{\mathcal{F}''}$ contenant le cône $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ contient aussi le cône $\mathcal{C}_{\mathcal{F}'}$. On montre que $\forall F \in \mathcal{G}$, \mathcal{F}'' est une face de $\psi(F)$. Soit $F \in \mathcal{G}$. En notant

$$Q = \{X \mid AX \geq B\} \quad \text{et} \quad Q' = \{X \mid A'X \geq B'\},$$

on a

$$F = \{X \mid AX \geq B\} \cap \{X \mid A_{i_0}X = B_{i_0}\},$$

et donc

$$\psi(F) = \{X \mid A_{i_0}X = c_{i_0}\} \cap \{X \mid A^l X \geq B^l\} \quad \text{et} \quad Q^l \subset \{X \mid A_i X \geq c_i\},$$

avec $c_i = \min\{A_i X \mid X \in Q^l\}$.

Pour simplifier les notations, on suppose que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}} = \text{C\^one}(A_1, \dots, A_k)$ et que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}''} = \text{C\^one}(A'_1, \dots, A'_{k''})$. L'inclusion $\mathcal{C}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{F}''}$ implique que $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $A_i = \sum_{j=1}^{k''} \lambda_{i,j} A'_j$

avec $\lambda_{i,j} \geq 0$.

Soit $X \in \mathcal{F}''$, c'est à dire $A'_J X = B'_J$ et $A^l X \geq B^l$ avec $J = \{1, \dots, k''\}$. On veut montrer que $A_{i_0} X = c_{i_0}$. Mais on sait que

$$A_{i_0} X = \sum_{j=1}^{k''} \lambda_{i_0,j} A'_j X = \sum_{j=1}^{k''} \lambda_{i_0,j} B'_j \geq c_{i_0}.$$

De plus, on a $c_{i_0} = \min\{A_{i_0} X \mid X \in Q^l\} = \min\{\sum_{j=1}^{k''} \lambda_{i_0,j} A'_j X \mid X \in Q^l\} \geq \sum_{j=1}^{k''} \lambda_{i_0,j} B'_j$. D'où

$c_{i_0} = \sum_{j=1}^{k''} \lambda_{i_0,j} B'_j$ et finalement $X \in \psi(F)$, en d'autres termes \mathcal{F} est une face de $\psi(F)$.

S'il existe un morphisme dominant de X vers X^l et que la face \mathcal{F} est admissible alors l'ensemble $\{\mathcal{C}_{\mathcal{F}''} \mid \mathcal{F}'' \text{ une face de } Q^l \text{ telle que } \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{F}''}\}$ est non vide et $\mathcal{C}_{\mathcal{F}^l}$ est le c\^one minimal de cet ensemble. Montrons que la face \mathcal{F}^l est admissible. On a deux cas :

- $\dim(\mathcal{C}_{\mathcal{F}^l}) = \dim(\mathcal{C}_{\mathcal{F}})$ alors on a l'inclusion $\text{intrel}(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) \subset \text{intrel}(\mathcal{C}_{\mathcal{F}^l})$ et donc le c\^one des valuations rencontre bien l'int\^erieur relatif du c\^one $\mathcal{C}_{\mathcal{F}^l}$, d'où \mathcal{F}^l est une face admissible de Q^l .
- $\dim(\mathcal{C}_{\mathcal{F}^l}) > \dim(\mathcal{C}_{\mathcal{F}})$ et $\text{intrel}(\mathcal{C}_{\mathcal{F}^l}) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{F}} = \emptyset$, alors $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ est inclu dans une face du c\^one $\mathcal{C}_{\mathcal{F}^l}$, ce qui est impossible par minimalit\^e de ce dernier. Donc l'int\^erieur relatif de $\mathcal{C}_{\mathcal{F}^l}$ rencontre bien \mathcal{V}

Pour la r\^eciproque, le travail fait pr\^ec\^edemment dans cette preuve montre que l'\^eventail de X domine celui de X^l et donc qu'il existe bien un morphisme dominant de X vers X^l . \square

3.4 Description des courbes via les polytopes moments

On peut \^egalement traduire la d\^efinition 2.16 en termes de polytopes :

Proposition 3.16. *En gardant les notations de 2.16 :*

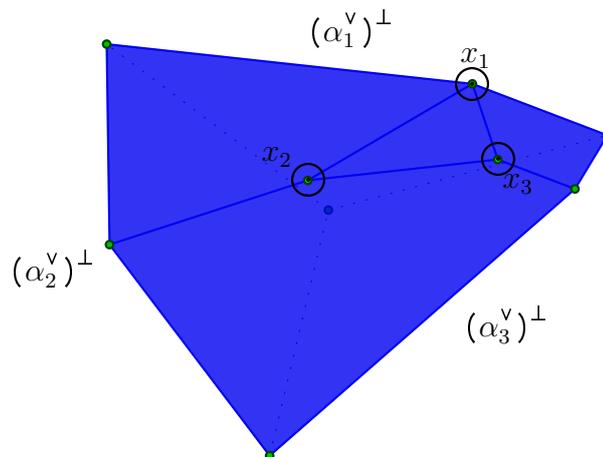
1. En notant l_μ l'arête de Q_δ correspondante au mur μ on a que $C_\mu \cdot \delta$ est la longueur intégrale de l'arête l_μ . En d'autres termes $C_\mu \cdot \delta$ la longueur de l_μ divisée par la longueur de l'élément primitif dans la direction de l_μ .
2. En notant s_Y le sommet de Q_δ associé à l'orbite Y on a $C_{D_{\alpha,Y}} \cdot \delta = \langle s_Y, \alpha^\vee \rangle$.

Démonstration. Le premier point résulte uniquement du dictionnaire entre polytopes moments et éventails.

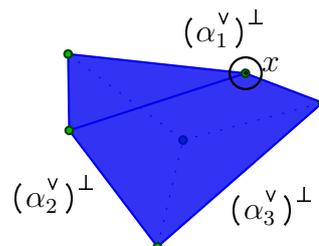
Pour le second point $\langle s_Y, \alpha^\vee \rangle = \langle \pi_\delta + \widetilde{s}_Y, \alpha^\vee \rangle = \langle \pi_\delta, \alpha^\vee \rangle + \langle \widetilde{s}_Y, \alpha^\vee \rangle$. De plus $l_{\delta,Y} = -\widetilde{s}_Y$ et $n_{D_\alpha} = \langle \pi_\delta, \alpha^\vee \rangle$ d'où le résultat. \square

Dans la suite, si μ est un mur de l'éventail colorié et l l'arête correspondante à ce mur, on notera C_l ou C_μ la courbe correspondante. Similairement, si x est un sommet admissible n'étant pas sur le mur α on notera $C_{\alpha,x}$ la courbe $C_{D_{\alpha^\vee,Y}}$, où Y est l'orbite fermée correspondant au sommet x .

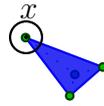
Exemple 3.17. 1. Les exemples suivants sont des polytopes moments de compactifications de $G = SL_3$. On note $(\alpha^\vee)^\perp$ le mur associé à la racine simple α .



Ici on a 3 courbes liées aux arêtes : $C_{[x_1,x_2]}$, $C_{[x_2,x_3]}$ et $C_{[x_1,x_3]}$ ainsi que 8 courbes liées aux couleurs : C_{α_2,x_1} , C_{α_3,x_1} , C_{α_1,x_2} , C_{α_2,x_2} , C_{α_3,x_2} , C_{α_1,x_3} , C_{α_2,x_3} et C_{α_3,x_3} .

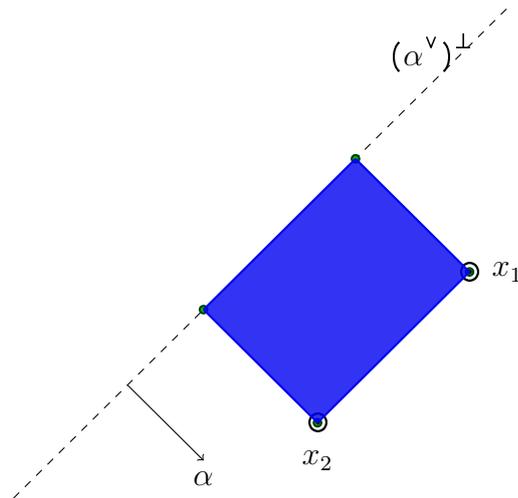


Ici on a seulement deux courbes, liées aux couleurs : $C_{\alpha_2,x}$ et $C_{\alpha_3,x}$.

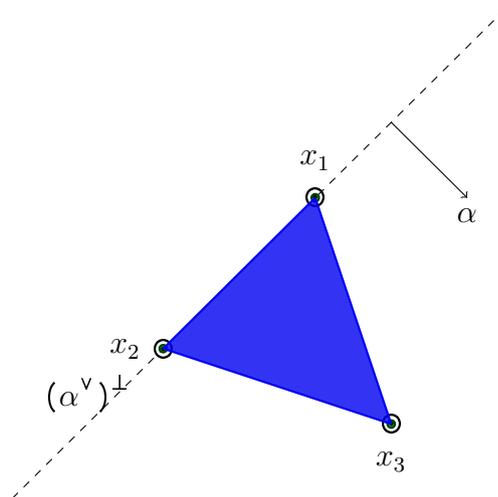


Il n'y a qu'une seule courbe : $C_{\alpha_3, x}$.

2. On regarde maintenant des polytopes moments de compactifications de GL_2 .



Ici on a 3 courbes : $C_{[x_1, x_2]}$, C_{α, x_1} et C_{α, x_2} .



Il y a une courbe liée à la couleur : C_{α, x_3} , et seulement deux courbes liées aux arêtes : $C_{[x_2, x_3]}$ et $C_{[x_1, x_3]}$. En effet, l'arête $[x_1, x_2]$ n'est pas admissible.

IV

Familles de polytopes à un paramètre

Toute cette partie est un résumé de la construction de [22].

4.1 Une première famille

Soient n et m deux entiers positifs. Soient trois matrices A, B et C respectivement dans $M_{m \times n}(\mathbb{Q}), M_{m \times 1}(\mathbb{Q})$ et $M_{m \times 1}(\mathbb{Q})$. On définit une famille de polyèdres indexée par un paramètre rationnel ϵ via:

$$P^\epsilon := \{x \in \mathbb{Q}^n \mid Ax \geq B + \epsilon C\}.$$

On suppose dans toute la suite qu'il existe $x \in \mathbb{Q}^n$ non nul satisfaisant $Ax \geq 0$, ce qui implique que tous les P^ϵ sont des polytopes (éventuellement vides).

Soit $I_0 := \{1, \dots, m\}$. Pour $I \subset I_0$ et pour toute matrice M on note M_I la matrice formée des lignes $i \in I$ de M .

Soit $\epsilon \in \mathbb{Q}$, on note \mathcal{H}_i^ϵ l'hyperplan affine $\{x \in \mathbb{Q}^n \mid A_i x = B_i + \epsilon C_i\}$. Pour tout $I \subset I_0$ on note F_I^ϵ la face de P^ϵ définie par

$$F_I^\epsilon := \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i^\epsilon \right) \cap P^\epsilon.$$

Pour toute face F^ϵ de P^ϵ il existe un unique sous ensemble maximal $I \subset I_0$ tel que $F^\epsilon = F_I^\epsilon$.

Soit $I \subset I_0$. On définit Ω_{I, I_0}^0 comme l'ensemble des $\epsilon \in \mathbb{Q}$ tels que F_I^ϵ n'est pas vide et Ω_{I, I_0}^1 comme l'ensemble des $\epsilon \in \mathbb{Q}$ tels que, si $I' \subset I_0$ satisfait $F_{I'}^\epsilon = F_I^\epsilon$ alors $I' \subset I$.

On note K_0 le sous ensemble de I_0 contenant tous les indices i tels que $A_i = 0$. On se fixe un sous ensemble K tel que $K_0 \subset K \subset I_0$ et on définit $\Omega_{K,I_0}^{max} := \Omega_{\emptyset,I_0}^1 \cap \left(\bigcap_{i \in I_0 \setminus K} \Omega_{i,I_0}^1 \right)$. Remarquons que $\epsilon \in \Omega_{K,I_0}^{max}$ si F_i^ϵ est une facette pour $i \in I_0 \setminus K$ et $\dim P^\epsilon = n$.

Définition 4.1. Soit ϵ et η tous deux dans Ω_{K,I_0}^{max} . On dit que les polytopes P^ϵ et P^η sont équivalents si pour tout $I \subset I_0$ on est dans un des trois cas suivants :

1. ϵ et η appartiennent à Ω_{I,I_0}^1 .
2. ϵ et η appartiennent à $\mathbb{Q} \setminus \Omega_{I,I_0}^0$.
3. ϵ et η appartiennent à $\Omega_{I,I_0}^0 \setminus \Omega_{I,I_0}^1$.

Théorème 4.1. Avec les notations précédents, on a le résultat suivant.

1. Si Ω_{K,I_0}^{max} n'est pas vide, alors il existe un entier k et $\alpha_0 < \dots < \alpha_k$ dans $\mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$, tels que les classes d'équivalences de la famille $(P^\epsilon)_{\epsilon \in \Omega_{K,I_0}^{max}}$ correspondent aux intervalles ouverts $] \alpha_i, \alpha_{i+1} [$ pour $0 \leq i \leq k-1$ et les singletons $\{\alpha_i\}$ pour tout $1 \leq i \leq k-1$. En particulier, $\Omega_{K,I_0}^{max} =] \alpha_0, \alpha_k [$.
2. Supposons que $\alpha_k \in \mathbb{Q}$.

Si $\alpha_k \in \Omega_{\emptyset,I_0}^1$, il existe $I_1 \subset I_0$ contenant K tel que $P^{\alpha_k} = P_{I_1}^{\alpha_k} := \{x \in \mathbb{Q}^n \mid A_{I_1}x \geq B_{I_1} + \alpha_k C_{I_1}\}$ et $\alpha_k \in \Omega_{K,I_1}^{max}$ défini pour la famille $(P_{I_1}^\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{Q}}$.

Si $\alpha_k \notin \Omega_{\emptyset,I_0}^1$, il existe des sous ensemble J_1 et I_1 de I_0 tels que $J_1 \cap I_1 = \emptyset$, $P^{\alpha_k} = P_{I_1,J_1}^{\alpha_k} := \{x \in \bigcap_{j \in J_1} \mathcal{H}_j^{\alpha_k} \mid A_{I_1}x \geq B_{I_1} + \alpha_k C_{I_1}\}$ et α_k est dans $\Omega_{I_1 \cap K, I_1}^{max}$ défini pour la famille $(P_{I_1,J_1}^\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{Q}}$.

Si $\alpha_0 \in \mathbb{Q}$ on a le même type de résultat.

4.2 Une seconde famille

On veut appliquer le théorème précédent à une famille de polytopes $(\widetilde{Q}^\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+}$ construite à partir de la famille $(P^\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{Q}}$.

Définition 4.2. On reprend les notations du Théorème 4.1. Soit $K \subset I_0$ contenant K_0 . Supposons que $0 \in \Omega_{K,I_0}^{max}$. Pour tout $\epsilon \in \mathbb{Q}^+ \cap \Omega_{K,I_0}^{max}$ on pose $\widetilde{Q}^\epsilon := P^\epsilon$. Supposons que Ω_{K,I_0}^{max} ait une borne supérieure ϵ_1 .

Si $\epsilon_1 \in \Omega_{\emptyset,I_0}^{max}$ alors soit I_1 comme dans le Théorème 4.1. On définit alors $\widetilde{Q}^\epsilon := P_{I_1}^\epsilon$ pour tout $\epsilon \in [\epsilon_1, +\infty[\cap \Omega_{K,I_1}^{max}$.

Si $\epsilon_1 \notin \Omega_{\emptyset,I_0}^{max}$ on stoppe la construction et on pose $\widetilde{Q}^\epsilon := \emptyset$ pour tout $\epsilon < \epsilon_1$.

En itérant la construction, on obtient une famille $(\widetilde{Q}^\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+}$ de polytopes.

On dit que \widetilde{Q}^ϵ est équivalent à \widetilde{Q}^η dans la famille $(\widetilde{Q}^\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+}$ s'ils sont définis dans la même étape de construction ci-dessus, c'est à dire ils correspondent à P_I^ϵ et P_I^η , pour ϵ et η tous deux dans $\Omega_{K,I}^{max}$ pour un certain $I \subset I_0$, et si P_I^ϵ et P_I^η sont équivalents au sens de la définition 4.1.

Corollaire 4.1. *Supposons que \widetilde{Q}^0 et \widetilde{Q}^ϵ sont équivalents pour un certain $\epsilon > 0$. Alors il existe des entiers non nuls k, j_0, \dots, j_k , des nombres rationnels $\alpha_{i,j}$ pour $i \in \{0, \dots, k\}$ et $j \in \{0, \dots, j_i\}$ et $\alpha_{k,j_k+1} \in \mathbb{Q}_+^* \cup \{+\infty\}$ ordonnés de la façon suivante, avec la convention $\alpha_{i,j_i+1} = \alpha_{i+1,0}$ pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$:*

1. $\alpha_{0,0} = 0$;
2. pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, et pour tout $j < j_i$ dans $\{0, \dots, j_i + 1\}$ on a $\alpha_{i,j} < \alpha_{i,j+1}$.

Et tels que les classes d'équivalences de la famille $(\widetilde{Q}^\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+}$ sont données par les intervalles :

1. $[\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1}[$, avec $i \in \{0, \dots, k\}$.
2. $]\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1}[$, avec $i \in \{0, \dots, k\}$ et $j \in \{0, \dots, j_i + 1\}$.
3. $\{\alpha_{i,j}\}$ avec $i \in \{0, \dots, k\}$ et $j \in \{0, \dots, j_i + 1\}$.
4. si $\alpha_{k,j_k+1} \neq +\infty$, $\{\alpha_{k,j_k+1}\}$ et $]\alpha_{k,j_k+1}, +\infty[$.

V

Application au programme des modèles minimaux

Soit X un \mathbb{G}/G -plongement projectif. On suppose que X est \mathbb{Q} -factoriel. On note $\mathcal{V}_X = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$ les valuations associées aux diviseurs G -stables. Soit D un \mathbb{Q} -diviseur ample sur X ,

$$D = \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} b_\nu X_\nu + \sum_{\alpha \in S} b_\alpha D_\alpha.$$

Le diviseur anticanonique s'écrit

$$-K_X = \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} X_\nu + \sum_{\alpha \in S} a_\alpha D_\alpha,$$

avec $a_\alpha = \langle 2\rho_S, (\alpha, 0) \rangle = 2$ où $2\rho_S$ est la somme des racines positives de \mathbb{G} .

On pose alors $A = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \\ \alpha_1^\vee \\ \vdots \\ \alpha_l^\vee \end{pmatrix}$, $\tilde{B} = \begin{pmatrix} -b_{\nu_1} \\ \vdots \\ -b_{\nu_n} \\ -b_{\alpha_1} \\ \vdots \\ -b_{\alpha_l} \end{pmatrix}$ et $\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}$ des matrices de taille $(n+l) \times l$,

$(n+l) \times 1$ et $(n+l) \times 1$.

Pour tout $\epsilon \geq 0$, on pose :

$$\tilde{Q}^\epsilon := \{x \in M_{\mathbb{Q}} \mid Ax \geq \tilde{B} + \epsilon \tilde{C}\}.$$

Pour ϵ suffisamment petit le diviseur $D + \epsilon K_X$ est \mathbb{Q} -ample et son polytope moment est $Q^\epsilon := \tilde{Q}^\epsilon + \pi^\epsilon$, où π^ϵ est le poids de la section canonique du diviseur $D + \epsilon K_X$.

On peut écrire Q^ϵ comme :

$$Q^\epsilon = \{x \in M_{\mathbb{Q}} \mid Ax \geq B + \epsilon C\},$$

avec B et C des matrices colonnes de tailles $(n+l) \times 1$.

On a ainsi une famille $(Q^\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+}$ de polytopes de $M_{\mathbb{Q}}$ à un paramètre. En appliquant le

Corollaire 4.1 on obtient des classes d'équivalences (pour l'équivalence de la Définition 4.2) de polytopes de la famille $(Q^\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+}$. Par le Théorème 3.11 il existe des \mathbb{G}/G -plongements :

1. $X_{i,j}$ pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, $j \in \{0, \dots, j_i\}$, respectivement associés aux polytopes moments Q^ϵ pour $\epsilon \in]\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1}[$;
2. $Y_{i,j}$ pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, j_i\}$, respectivement associés aux polytopes moments $Q^{\alpha_{i,j}}$.

De plus pour ϵ suffisamment grand, $\tilde{B} + \epsilon\tilde{C} > 0$ et donc Q^ϵ est le polytope vide, puisque les ν_i et les co-racines sont de sens opposés. On note ϵ_0 le plus petit rationnel positif tel que $\dim Q^{\epsilon_0} < \dim Q$. Ce n'est plus un polytope moment d'une compactification sphérique de G , et pour tout $\epsilon < \epsilon_0$, Q^ϵ en est un polytope moment.

On a également des morphismes \mathbb{G} -équivariants et dominants :

1. $\phi_{i,j} : X_{i,j-1} \longrightarrow Y_{i,j}$ pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$ et $j \in \{1, \dots, j_i\}$
2. $\phi_{i,j}^+ : X_{i,j} \longrightarrow Y_{i,j}$ pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$ et $j \in \{1, \dots, j_i\}$
3. $\phi_i : X_{i,j_i} \longrightarrow X_{i+1,0}$ pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$

Le but est d'énoncer, d'expliquer et de prouver le Théorème (B) de l'introduction. C'est le travail des trois prochaines sections. Dans la première on s'occupe des morphismes $\phi_{i,j}$, $\phi_{i,j}^+$ et ϕ_i ci-dessus et des courbes qu'ils contractent. Dans la seconde on ne regarde que les deux derniers polytopes, et on montre qu'il y a une fibration de Mori. Et enfin dans la troisième on énonce le théorème et sa preuve. On donne ensuite une proposition et une question, sous forme de conjecture, découlant directement de cette proposition.

5.1 Description des courbes contractées

Commençons par remarquer qu'une courbe C_μ d'une variété sphérique X est contractée par un morphisme $\phi : X \longrightarrow X'$ si les deux orbites fermées correspondant aux cônes μ_+ et μ_- se sont contractées. On considère μ comme l'arête liant les sommets correspondant à μ_+ et μ_- . Au niveau des polytopes moments il faut que l'arête μ se contracte en un sommet du polytope moment de X' .

De la même façon, soient s un sommet admissible de Q et α une racine simple alors la courbe $C_{\alpha,s}$ existe si et seulement si $\langle s, \alpha^\vee \rangle \neq 0$. Ainsi la courbe $C_{\alpha,s}$ est contractée par ϕ si et seulement si l'image du sommet s par l'application ψ (voir la section 3.3) est sur le mur $(\alpha^\vee)^\perp$ dans le polytope moment de X' .

On peut maintenant regarder les courbes contractées par les morphismes de la section précédente :

Proposition 5.1. 1. Pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$ et $j \in \{1, \dots, j_i\}$, les courbes C contractées par le morphisme $\phi_{i,j}$ satisfont $K_{X_{i,j-1}} \cdot C < 0$. Pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, les courbes C contractées par le morphisme ϕ_i vérifient $K_{X_{i,j_i}} \cdot C < 0$. Les courbes C contractées par le morphisme ϕ vérifient $K_{X_{k,j_k}} \cdot C < 0$.

2. Pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$ et $j \in \{1, \dots, j_i\}$, les courbes C contractées par le morphisme $\phi_{i,j}^+$ satisfont $K_{X_{k,j_k}} \cdot C > 0$.
3. Pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, le morphisme ϕ_i contracte au moins un diviseur \mathbb{G} -stable de X_{i,j_i} .

Démonstration. 1. Soient $i \in \{0, \dots, k\}$ et $j \in \{1, \dots, j_i\}$. Soit $]a, b[$ ou $[a, b[$ l'intervalle correspondant à la classe d'équivalence de la famille de polytope $(Q^\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+}$.

Il existe $I \subset \{1, \dots, n+l\}$ tel que pour tout $\epsilon \in]a, b[$ on a $\widetilde{Q}^\epsilon = P_I^\epsilon$

Soient $I_1, I_2 \subset I$ tels que $F_{I_1}^\epsilon$ et $F_{I_2}^\epsilon$ sont deux sommets admissibles de Q^ϵ et il existe $J \subset I$ avec F_J^ϵ une arête liant les deux sommets. Alors la courbe associée à l'arête F_J^ϵ , qu'on note C_J , est contractée si et seulement si F_J^b est un sommet (forcément admissible) de Q^b .

Notons D le diviseur ample \mathbb{Q} -Cartier associé aux polytopes Q^a et \widetilde{Q}^a et X la variété définie par Q^a .

Soient $c \in]a, b[$ et D^c le \mathbb{Q} -diviseur ample de Cartier associé aux polytopes Q^c et \widetilde{Q}^c , alors pour tout $\epsilon \in [c, b[$ le \mathbb{Q} -diviseur ample de Cartier défini par le couple de polytopes $(Q^\epsilon, \widetilde{Q}^\epsilon)$ est $D^c + (\epsilon - c)K_{X_{i,j-1}}$. Mais $(D^c + (\epsilon - c)K_{X_{i,j-1}}) \cdot C_\mu$ est la longueur intégrale de l'arête μ dans Q^ϵ . Ainsi par continuité, C_μ est contractée par $\phi_{i,j}$ si et seulement si $(D^c + (b - c)K_{X_{i,j-1}}) \cdot C_\mu = 0$. Donc si C_μ est contractée par $\phi_{i,j}$ alors $K_{X_{i,j-1}} \cdot C_\mu = \frac{1}{c-b}D^c \cdot C_\mu < 0$.

On montre de la même façon que si la courbe $C_{\alpha,s}$ est contractée par le morphisme $\phi_{i,j}$ alors on a $K_{X_{i,j-1}} \cdot C_{\alpha,s} = \frac{1}{c-b}D^c \cdot C_{\alpha,s} < 0$

2. La démonstration est la même que dans le cas ci-dessus. Il faut juste changer le coefficient $\frac{1}{c-b}$ par $\frac{1}{c-a}$, d'où la positivité.
3. Soient $\phi_i : X_{i,j_i} \rightarrow X_{i+1,0}$ le morphisme, $]a, b[$ (ou $[a, b[$) et $[b, c[$ les intervalles correspondant aux deux classes successives d'équivalences des polytopes $(Q^\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+}$. Soit $I \subset I_0$ tel que pour tout $\epsilon \in]a, b[$, $\widetilde{Q}^\epsilon = P_I^\epsilon$. On a $b \notin \Omega_{K,I}^{max}$ par hypothèse et il existe $I' \subsetneq I$ contenant K tel que pour tout $\epsilon \in [b, c[$ on a $\widetilde{Q}^\epsilon = P_{I'}^\epsilon$. Alors $\forall \epsilon \in]a, b[$, $\forall i \in I \setminus I'$, F_i^ϵ est une facette de Q^ϵ correspondant à un diviseur \mathbb{G} -stable mais F_i^b n'est pas une facette de Q^b . Ce dernier diviseur est donc contracté par le morphisme ϕ_i .

□

Remarque 5.2. On prendra garde au fait que les contractions trouvées ne sont pas forcément liées à des rayons extrémaux. Cependant si le diviseur D de départ est général on peut espérer que ce sont bien des contractions de rayons extrémaux, voir la Conjecture 5.7

5.2 La fibration

On va se concentrer sur la dernière étape : on rappelle que Q^{ϵ_0} est le premier polytope baissant de dimension. On a le théorème suivant.

Théorème 5.3. *Soient X un \mathbb{G}/G -plongement projectif et \mathbb{Q} -factoriel, D un \mathbb{Q} -diviseur et ample de X , $-K_X$ un diviseur anticanonique tels qu'il existe $\epsilon_0 > 0$, $\dim(Q^{\epsilon_0}) < \dim(Q_D)$ et $\forall \epsilon \in [0, \epsilon_0[$, $D + \epsilon K_X$ est ample.*

Alors il existe une \mathbb{G} -variété sphérique projective Y et un morphisme \mathbb{G} -équivariant $\varphi : X \rightarrow Y$ tels que Q^{ϵ_0} est un polytope moment de Y . De plus, le morphisme φ ne contracte que des courbes négatives sur le diviseur canonique.

Démonstration. On note les diviseurs

$$D = \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} b_\nu X_\nu + \sum_{\alpha \in S} b_\alpha D_\alpha, \quad -K_X = \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} X_\nu + \sum_{\alpha \in S} a_\alpha D_\alpha,$$

et

$$Q^\epsilon = \{x \in \mathcal{X}(T)_\mathbb{Q} \mid Ax \geq B + \epsilon C\}.$$

ETAPE 1 : Q^{ϵ_0} est de dimension strictement plus petite que Q_D . Montrons que

$$(Q^{\epsilon_0} - \omega)^\perp = \text{Cône}(A_i \mid A_i x = 0, \forall x \in (Q^{\epsilon_0} - \omega)),$$

où A_i est la i -ième ligne de A et ω un élément de Q^{ϵ_0} .

On choisit un sommet ω du polytope Q^{ϵ_0} et on a alors $(Q^{\epsilon_0} - \omega)^\perp = \text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - \omega)^\perp$. De plus on a $\text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - \omega) = \{x \in \mathcal{X}(\mathbb{G}/G)_\mathbb{Q} \mid A_I x \geq 0\}$, avec I un sous-ensemble des lignes de A . Mais $\text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - \omega)$ est un cône saillant. En effet, soit x un élément de ce cône tel que son opposé $-x$ appartient également à $\text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - \omega)$. Quitte à multiplier x par un rationnel suffisamment petit, on peut supposer que $\pm x \in Q^{\epsilon_0} - \omega$. Ainsi $\omega \in [\frac{-x+\omega}{2}, \frac{x+\omega}{2}] \subset Q^{\epsilon_0}$ et donc $x = 0$ car ω est un sommet du polytope Q^{ϵ_0} . Ainsi

$$\text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - \omega)^\vee = \text{Cône}(A_i \mid i \in I).$$

Mais le cône $\text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - \omega)^\perp$ est la partie linéaire de $\text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - \omega)^\vee$. Soit $l = \sum_{i \in I} \lambda_i A_i \in$

$\text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - \omega)^\vee$. Soit $x \in \text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - \omega)$, on a alors $l(x) = 0$ si et seulement si pour tout $i \in I$, $\lambda_i A_i x = 0$. Et donc l est orthogonale à $\text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - \omega)$ si et seulement si l est dans le cône engendré par les A_i , avec $i \in I$ telles que $A_i x = 0$ pour tout $x \in \text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - \omega)$. D'où l'égalité.

ETAPE 2 : En notant $\mathcal{C} = (Q^{\epsilon_0} - \omega)^\perp$ et $\mathcal{F} = \{D_\alpha \mid \mathbb{Q}_+ \alpha^\vee \text{ est un rayon de } \mathcal{C}\}$ alors $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ est un sous-espace colorié de $\mathcal{X}(\mathbb{G}/G)_\mathbb{Q}^\vee$. D'après [5, Théorème 3, page 38] il existe un unique sous-groupe H de \mathbb{G} contenant la diagonale Δ_G tel que

1. H/Δ_G est connexe ;

2. $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) = (\mathcal{C}_\varphi, \mathcal{D}_\varphi)$, où on note $\varphi : \mathbb{G}/G \rightarrow \mathbb{G}/H$ l'application canonique, \mathcal{C}_φ le noyau de $\varphi_* : \mathcal{X}(\mathbb{G}/G)_\mathbb{Q}^\vee \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{G}/H)_\mathbb{Q}^\vee$ et \mathcal{D}_φ l'ensemble des $D \in \mathcal{D}(\mathbb{G}/G)$ telles que $\varphi(D) = \mathbb{G}/H$.

De plus $\mathcal{V}(\mathbb{G}/H) = \varphi_* \mathcal{V}(\mathbb{G}/G)$ et $\mathcal{D}(\mathbb{G}/H) = \mathcal{D}(\mathbb{G}/G) \setminus \mathcal{D}_\varphi$.

ETAPE 3 : On pose

$$\overline{\mathbb{F}} = \{ \mathcal{C}_F := \text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - x_F)^\vee \mid \text{intrel}(\mathcal{C}_F) \cap \mathcal{V}(\mathbb{G}/H) \neq \emptyset \}$$

où x_F est un élément dans l'intérieur de F . Le but de cette étape est de montrer que $\overline{\mathbb{F}}$ est éventail colorié, saillant et complet de $\mathcal{X}(\mathbb{G}/H)_\mathbb{Q}^\vee$. On suit les notations de la Définition 2.6.

Dans la démonstration du Théorème 3.11 dans le cas où G est semi-simple, on a montré que l'ensemble des cônes associés à un polytope de dimension maximale ne s'intersectent que sur des faces communes. Donc $\overline{\mathbb{F}}$ respecte la condition **F2**. De plus, on a aussi montré que si F et F^l sont deux faces d'un polytope de dimension maximale s'intersectant alors $\mathcal{C}_F \cap \mathcal{C}_{F^l} = \mathcal{C}_{F \cap F^l}$. Donc toute face d'un cône définie par le polytope est encore un cône défini avec une face d'un polytope. En se restreignant aux cônes coloriés, on a bien qu'une face d'un cône de $\overline{\mathbb{F}}$ est encore dans $\overline{\mathbb{F}}$. Ainsi l'ensemble de cônes $\overline{\mathbb{F}}$ vérifie la condition **F1**.

La condition **C2** est évidemment vérifiée par $\overline{\mathbb{F}}$. Il ne reste plus qu'à montrer la condition **C1**. Pour cela on remarque que

$$\begin{aligned} Q_0^\epsilon - \omega &= \{ x \in M_\mathbb{Q} \mid \forall i, \langle x, A_i \rangle \geq B_i + \epsilon_0 C_i - \langle \omega, A_i \rangle \} \\ &= \{ x \in \mathcal{X}(\mathbb{G}/H)_\mathbb{Q} \mid \forall i, \langle x, \varphi_*(A_i) \rangle \geq B_i + \epsilon_0 C_i - \langle \omega, A_i \rangle \}. \end{aligned}$$

En effet $Q_0^\epsilon - \omega \subset \mathcal{X}(\mathbb{G}/H)_\mathbb{Q}$ et pour tout élément $x \in \mathcal{X}(\mathbb{G}/H)_\mathbb{Q}$ on a $\langle x, A_i \rangle = \langle x, \varphi_*(A_i) \rangle$.

Ainsi tout cône de $\overline{\mathbb{F}}$ est engendré, en nombre fini, par des éléments de la forme $\varphi_*(A_i)$ avec $A_i \in \mathcal{V}(\mathbb{G}/G) \cup \rho(\mathcal{D}(\mathbb{G}/G))$. Donc $\varphi_*(A_i) \in \varphi_* \mathcal{V}(\mathbb{G}/G) \cup \varphi_* \rho(\mathcal{D}(\mathbb{G}/G)) = \mathcal{V}(\mathbb{G}/H) \cup \rho(\mathcal{D}(\mathbb{G}/H))$, d'où $\overline{\mathbb{F}}$ vérifie bien **C1**.

Ainsi $\overline{\mathbb{F}}$ est bien un éventail colorié de $\mathcal{X}(\mathbb{G}/G)_\mathbb{Q}^\vee$. Il est saillant puisque le cône $(\{0\}, \emptyset)$ en est un cône colorié.

ETAPE 4 : On note Y la \mathbb{G} -variété sphérique associée à l'éventail $\overline{\mathbb{F}}$. On veut montrer que $\varphi : \mathbb{G}/G \rightarrow \mathbb{G}/H$ s'étend en un morphisme \mathbb{G} -équivariant $\varphi : X \rightarrow Y$. Pour cela on montre que l'éventail $\mathbb{F}(X)$ domine $\overline{\mathbb{F}}$, et on conclut par le théorème 2.6.

Soit $(\mathcal{C}', \mathcal{F}^l) = \varphi_*(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \varphi_* \mathbb{F}(X)$, et trouvons une face F^l de Q^{ϵ_0} telle que

$$\mathcal{C}' \subset \text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - y_{F^l})^\vee,$$

où y_{F^l} est dans l'intérieur relatif de F^l .

Pour tout $\epsilon \in [0, \epsilon_0[$, Q^ϵ est polytope moment de la variété X , donc il existe F^{ϵ} une face de Q^ϵ telle que

$$\text{Cône}(Q^\epsilon - x_{F^\epsilon})^\vee = \mathcal{C}.$$

Pour tous ces ϵ , il existe \mathcal{I} un sous ensemble des lignes de la matrice A tel que les éléments $\omega \in F^\epsilon$ sont exactement ceux respectant $A_i\omega = B_i + \epsilon C_i$ pour $i \in \mathcal{I}$ et $A_j\omega > B_j + \epsilon C_j$ pour $j \notin \mathcal{I}$. De plus, l'ensemble \mathcal{I} est commun à tous les ϵ .

On pose $F^l = Q^{\epsilon_0} \cap \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \{\omega \mid A_i\omega = B_i + \epsilon C_i\}$. C'est une face du polytope Q^{ϵ_0} . On se fixe

un élément y_{F^l} dans l'intérieur relatif de F^l . Alors il existe une famille $(x_{F^\epsilon})_{\epsilon \in [0, \epsilon_0[}$, avec $x_{F^\epsilon} \in \text{intrel}(F^\epsilon)$ telle que $\lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} x_{F^\epsilon} = y_{F^l}$.

On rappelle que

$$\text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - y_{F^l})^\vee = \{l \in \mathcal{X}(\mathbb{G}/H)_{\mathbb{Q}}^\vee \mid \forall q \in Q^{\epsilon_0}, \langle q - y_{F^l}, l \rangle \geq 0\}.$$

Soit $l \in \mathcal{C} = \text{Cône}(Q^\epsilon - y_{F^l})^\vee$, c'est à dire $\forall q^\epsilon \in Q^\epsilon, \langle q^\epsilon - x_{F^\epsilon}, l \rangle \geq 0$. On prend un $q \in Q^{\epsilon_0}$, alors il existe une suite $(q^\epsilon)_{\epsilon \in [0, \epsilon_0[}$, avec $q^\epsilon \in Q^\epsilon$, telle que $\lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} q^\epsilon = q$. Donc on a

$$\langle q^\epsilon - x_{F^\epsilon}, l \rangle \geq 0 \quad \forall \epsilon \in [0, \epsilon_0[,$$

et donc en passant à la limite on obtient $\langle q - y_{F^l}, l \rangle \geq 0$ et donc $\langle q - y_{F^l}, \varphi_*(l) \rangle \geq 0$. On vient de montrer que

$$\varphi_* \text{Cône}(Q^\epsilon - x_{F^\epsilon})^\vee \subset \text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - y_{F^l})^\vee,$$

d'où

$$\mathcal{C}^l \subset \text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - y_{F^l})^\vee.$$

Il reste à montrer que le $\text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - y_{F^l})^\vee$ est colorié, c'est à dire que son intérieur relatif rencontre le cône des valuations. Pour cela revenons quelques lignes au dessus, quand on définit la face F^l . On choisit maintenant la face F^l minimale telle que

$$\varphi_*(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^l \subset \text{Cône}(Q^{\epsilon_0} - y_{F^l})^\vee.$$

Comme \mathcal{C} est un cône colorié on a $\text{intrel}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{V}(\mathbb{G}/G) \neq \emptyset$ et donc $\varphi_*(\text{intrel}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{V}(\mathbb{G}/G)) \neq \emptyset$, d'où $\varphi_*(\text{intrel}(\mathcal{C})) \cap \varphi_*(\mathcal{V}(\mathbb{G}/G)) \neq \emptyset$ et finalement $\text{intrel}(\varphi_*(\mathcal{C})) \cap \mathcal{V}(\mathbb{G}/H) \neq \emptyset$, et donc \mathcal{C}^l est bien un cône colorié.

De plus l'éventail $\overline{\mathbb{F}}$ est complet puisque $\mathbb{F}(X)$ l'est.

En résumé, on a trouvé :

1. un sous-groupe H de \mathbb{G} tel que H/Δ_G est connexe;
2. une \mathbb{G} -variété sphérique Y d'espace homogène \mathbb{G}/H , de polytope moment Q^{ϵ_0} ;
3. un morphisme \mathbb{G} -équivariant $\varphi : X \rightarrow Y$.

ETAPE 5 : On procède de la même façon que dans la preuve de la Proposition 5.1 et on montre que les courbes contractées sont négatives sur le canonique. \square

5.3 Résultats et conjectures

On rappelle les notations du début de ce chapitre : en partant d'un \mathbb{G}/G -plongement sphérique X , qui est projectif et \mathbb{Q} -factoriel, d'un \mathbb{Q} -diviseur de Cartier et ample, on trouve des \mathbb{G}/G -plongements projectifs :

1. $X_{i,j}$ pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, $j \in \{0, \dots, j_i\}$, respectivement associés aux polytopes moments Q^ϵ pour $\epsilon \in]\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1}[$;
2. $Y_{i,j}$ pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, j_i\}$, respectivement associés aux polytopes moments $Q^{\alpha_{i,j}}$.

ainsi que des morphismes \mathbb{G} -équivariants et dominants :

1. $\phi_{i,j} : X_{i,j-1} \longrightarrow Y_{i,j}$ pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$ et $j \in \{1, \dots, j_i\}$,
2. $\phi_{i,j}^+ : X_{i,j} \longrightarrow Y_{i,j}$ pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$ et $j \in \{1, \dots, j_i\}$,
3. $\phi_i : X_{i,j_i} \longrightarrow X_{i+1,0}$ pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

En appliquant le théorème 5.3, on également l'existence d'un morphisme \mathbb{G} -équivariant $\phi : X_{k,j_k} \rightarrow Y$ où Y est une \mathbb{G} -variété sphérique.

Théorème 5.4. *Les variétés et morphismes ci-dessus forment exactement le programme des modèles minimaux de la variété X . En particulier :*

- i) *Les morphismes $\phi_{i,j}$ et ϕ_i sont des contractions K_X -négatives.*
- ii) *Les flips sont exactement les $\phi_{i,j}^+ : X_{i,j} \longrightarrow Y_{i,j}$.*
- iii) *Le morphisme $\phi : X_{k,j_k} \longrightarrow Y$ ne contracte que des courbes qui sont négatives sur le diviseur canonique.*

Démonstration. Les deux premiers points découlent directement de la proposition 5.1. Le troisième est une conséquence immédiate du théorème 5.3. \square

Proposition 5.5. *Soit Y la \mathbb{G} -variété sphérique obtenue dans le théorème 5.3.*

1. *Si G est un groupe simple alors la variété Y est un point, ainsi le morphisme φ obtenu est simplement la contraction entière de la variété sur un point. Donc le dernier G -plongement est de Fano.*
2. *Soit $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ un produit de groupes simples. Alors l'espace homogène de la variété Y est isomorphe au groupe $\prod_{i \in I} G_i$ pour un certain $I \not\subseteq \{1, \dots, n\}$.*

3. Soit $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n \times T$ un produit de groupes simples par un tore. Alors l'espace homogène de la variété Y est isomorphe au groupe $\prod_{i \in I} G_i \times T^I \not\subseteq G$ pour un certain $I \subset \{1, \dots, n\}$ et T^I un sous-tore de T .

Démonstration. 1. Comme le polytope Q^{ϵ_0} baisse de dimension alors son orthogonal est un espace colorié. On le note

$$W = \text{Cône}(\nu_1, \dots, \nu_k, \alpha_1^\vee, \dots, \alpha_l^\vee).$$

Supposons qu'il existe β^\vee une coracine simple n'appartenant pas à W . Alors en particulier, on a

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, k, (\nu_i, \beta^\vee) &\leq 0; \\ \forall j = 1, \dots, l, (\alpha_j^\vee, \beta^\vee) &\leq 0. \end{aligned}$$

Et donc pour tout $w \in W$ on a l'inégalité $(w, \beta^\vee) \leq 0$. Comme W est un sous-espace vectoriel, on a obligatoirement

$$\forall w \in W, (w, \beta^\vee) = 0.$$

De plus le système de racines étant irréductible, et quitte à changer β^\vee , il existe $j_0 \in \{1, \dots, l\}$ tel que $(\alpha_{j_0}^\vee, \beta^\vee) < 0$ et $\alpha_{j_0}^\vee \in W$. C'est une contradiction. Donc l'espace colorié W contient toutes les coracines simples et ainsi W est l'espace tout entier. Donc le polytope Q^{ϵ_0} est un point.

2. On a

$$\mathcal{X}(\mathbb{G}/\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}^\vee = \mathcal{X}(\mathbb{G}_1/\mathbb{G}_1)_{\mathbb{Q}}^\vee \oplus \cdots \oplus \mathcal{X}(\mathbb{G}_n/\mathbb{G}_n)_{\mathbb{Q}}^\vee.$$

On note S_i les racines simples du groupe G_i . Soit W un espace colorié de $\mathcal{X}(\mathbb{G}/\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}^\vee$. On choisit une coracine simple $\beta^\vee \in S_i^\vee$. En particulier on a

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{V}(\mathbb{G}/\mathbb{G}), (\nu, \beta^\vee) &\leq 0 \\ \forall \alpha^\vee \neq \beta^\vee, (\alpha^\vee, \beta^\vee) &\leq 0. \end{aligned}$$

Si $\beta^\vee \notin W$ alors $\forall w \in W, (w, \beta^\vee) \leq 0$. Il vient :

$$W \subset (\beta^\vee)^\perp.$$

Mais comme le système de racines du groupe G_i est irréductible, pour toute coracine $\alpha^\vee \in S_i^\vee$, $W \subset (\alpha^\vee)^\perp$ et donc

$$W \subset (\mathcal{X}(\mathbb{G}_i/\mathbb{G}_i)_{\mathbb{Q}}^\vee)^\perp = \bigoplus_{j \neq i} \mathcal{X}(\mathbb{G}_j/\mathbb{G}_j)_{\mathbb{Q}}^\vee.$$

Si $\beta^\vee \in W$ alors par ce qu'on vient de montrer, toutes les coracines de S_i^\vee sont dans W , et donc

$$\mathcal{X}(\mathbb{G}_i/\mathbb{G}_i)_{\mathbb{Q}}^\vee \subset W.$$

Finalement en notant I le sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$ formé des indices i tel que $S_i^\vee \subset W$ on obtient

$$W = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{X}(\mathbb{G}_i/\mathbb{G}_i)_{\mathbb{Q}}^\vee.$$

Comme dans la preuve du théorème 5.3 on obtient donc que l'espace $\mathcal{X}(\mathbb{G}/H)_{\mathbb{Q}}^{\vee}$ est la projection orthogonale de $\mathcal{X}(\mathbb{G}/G)_{\mathbb{Q}}^{\vee}$ parallèlement à W , d'où

$$\mathcal{X}(\mathbb{G}/H)_{\mathbb{Q}}^{\vee} = \bigoplus_{i \notin I} \mathcal{X}(\mathbb{G}_i/G_i)_{\mathbb{Q}}^{\vee}.$$

Par le théorème d'unicité de Losev [17] on a alors les isomorphismes d'espaces homogènes

$$\mathbb{G}/H \simeq \prod_{i \notin I} \mathbb{G}_i/G_i \simeq \prod_{i \notin I} G_i.$$

3. De la même façon on obtient

$$\mathcal{X}(\mathbb{G}/G)_{\mathbb{Q}}^{\vee} = \mathcal{X}(\mathbb{G}_1/G_1)_{\mathbb{Q}}^{\vee} \oplus \cdots \oplus \mathcal{X}(\mathbb{G}_n/G_n)_{\mathbb{Q}}^{\vee} \oplus \mathcal{X}(\mathbb{T}/T)_{\mathbb{Q}}^{\vee}$$

et on note S_i les racines simples associées aux groupes G_i .

Soit $\beta^{\vee} \in S_i^{\vee}$. On a montré dans le point 2 que si $\beta^{\vee} \notin W$ alors $W \subset (\mathcal{X}(\mathbb{G}/G)_{\mathbb{Q}}^{\vee})^{\perp}$. De même si $\beta^{\vee} \in W$ alors $\mathcal{X}(\mathbb{G}_i/G_i)_{\mathbb{Q}}^{\vee} \in W$. Posons alors $I \subset \{1, \dots, n\}$ maximal tel que $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{X}(\mathbb{G}_i/G_i)_{\mathbb{Q}}^{\vee} \subset W$. On a alors la décomposition

$$W = \left(W \cap \bigoplus_{i \in I} \mathcal{X}(\mathbb{G}_i/G_i)_{\mathbb{Q}}^{\vee} \right) \oplus (W \cap \mathcal{X}(\mathbb{T}/T)_{\mathbb{Q}}^{\vee}).$$

Mais l'intersection $W \cap \mathcal{X}(\mathbb{T}/T)_{\mathbb{Q}}^{\vee}$ est un espace colorié de $\mathcal{X}(\mathbb{T}/T)_{\mathbb{Q}}^{\vee}$ puisque le cône de valuation est l'espace tout entier.

En particulier la projection orthogonale de $\mathcal{X}(\mathbb{T}/T)_{\mathbb{Q}}^{\vee}$ parallèlement à $W \cap \mathcal{X}(\mathbb{T}/T)_{\mathbb{Q}}^{\vee}$ correspond encore à un espace $\mathcal{X}(T^l)_{\mathbb{Q}}^{\vee}$, où T^l est un sous-tore de T de dimension $\dim T - \dim (W \cap \mathcal{X}(\mathbb{T}/T)_{\mathbb{Q}}^{\vee})$. On conclut de la même façon que le deuxième point et on a donc les isomorphismes d'espaces homogènes

$$\mathbb{G}/H \simeq \prod_{i \notin I} \mathbb{G}_i/G_i \times T^l \simeq \prod_{i \notin I} G_i \times T^l.$$

□

Un groupe réductif G se décompose comme un produit

$$G = R(G).(G, G),$$

où $R(G)$ est le radical de G , et (G, G) le groupe dérivé de G voir par exemple [26, Corollary 8.1.6]. En particulier, le radical est un tore et le groupe dérivé est semisimple. De plus si on note $\tilde{G} = R(G) \times (G, G)$ alors le morphisme $\tilde{G} \rightarrow G$ est une isogénie, c'est à dire son noyau est fini et contenu dans le centre de \tilde{G} . Le Corollaire 5.5 montre que pour les \tilde{G} -plongements sphériques, les variétés associées apparaissant dans le programme des modèles minimaux, tel que décrit dans cette thèse, sont encore des plongements sphériques d'un groupe. On peut donc énoncer la conjecture suivante :

Conjecture 5.6. *Soit G un groupe réductif connexe, et X un \mathbb{G}/G -plongement projectif et \mathbb{Q} -factoriel. Alors toutes les variétés apparaissant dans le programme des modèles minimaux exposé dans cette thèse sont des plongements sphériques d'un groupe réductif.*

Comme dans la Remarque 5.2, on prendra garde au fait que cette contraction n'est pas forcément liée à un rayon extrémal. Mais on peut énoncer la conjecture suivante :

Conjecture 5.7. *Si le diviseur D de départ est général, alors toutes les contractions sont liées à des rayons extrémaux. En particulier, il faut prendre D en dehors de certains hyperplans de $N_1(X)_{\mathbb{Q}}$.*

Remarque 5.8. *Dans son article *An approach of the Minimal Model Program for horospherical varieties via moment polytopes* [22], Pasquier décrit le programme des modèles minimaux sur les variétés horosphériques via les polytopes moments. Il ne se restreint pas aux variétés \mathbb{Q} -factorielles et projectives : il applique sa méthode pour toute variété horosphérique projective dont le diviseur canonique est \mathbb{Q} -Cartier (on dit qu'elle est \mathbb{Q} -Gorenstein).*

On pourrait appliquer la même stratégie dans cette thèse : travailler avec des \mathbb{G}/G -plongement projectifs et \mathbb{Q} -Gorenstein. Cependant la nature des morphismes obtenus est plus compliquée comme le montre Pasquier dans [22, Exemple 11, page 40]. On peut avoir une contraction ϕ et un flip ϕ^+ qui n'est pas une contraction extrémale.

On a donc préféré rester dans le cadre plus naturel des \mathbb{G}/G -plongements projectifs et \mathbb{Q} -factoriels.

5.4 Exemples

5.4.1 $G = SL_3$

On pose $G = SL_3$. Alors

$$\mathbb{C}(\mathbb{G}/G) = \mathbb{C}(SL_3) = \mathbb{C}(X_{11}, \dots, X_{33}) / (\det = 1).$$

Le réseau $\mathcal{X}(\mathbb{G}/G)$ est engendré par les poids dominants $(\varpi_1, -\varpi_1)$ et $(\varpi_2, -\varpi_2)$ dont les fonctions correspondantes sont $X_{33}X_{22} - X_{23}X_{32}$ et X_{33} . Les racines simples sont $S = \{(\alpha_1, 0), (\alpha_2, 0), (0, -\alpha_1), (0, -\alpha_2)\}$ et $\Sigma = \{(\alpha_1, -\alpha_1), (\alpha_2, -\alpha_2)\}$.

On a deux couleurs :

$$\{X_{33} = 0\} \text{ et } \{X_{33}X_{22} - X_{23}X_{32} = 0\},$$

dont les cocaractères associés sont respectivement $(\alpha_2^\vee, -\alpha_2^\vee)$ et $(\alpha_1^\vee, -\alpha_1^\vee)$. On les notera donc naturellement D_{α_2} et D_{α_1} . On a $\mathcal{D}(\alpha_1, 0) = \mathcal{D}(0, -\alpha_1) = \{D_{\alpha_1}\}$ et $\mathcal{D}(\alpha_2, 0) = \mathcal{D}(0, -\alpha_2) = \{D_{\alpha_2}\}$, d'où $S^P = \emptyset$. Toutes les couleurs sont de type b . On en déduit les coefficients d'un diviseur canonique K_X :

$$K_X = - \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} X_\nu - 2D_{\alpha_1} - 2D_{\alpha_2}.$$

Le réseau $\mathcal{X}(\mathbb{G}/G)$ s'identifie naturellement au réseau des caractères de SL_3 , et le cône de valuation \mathcal{V} est la chambre négative.

Exemple 5.9. *Soit X le \mathbb{G}/G -plongement défini par*

$$\mathcal{V}_X = \left\{ \nu_1 = -5\alpha_1^\vee - 8\alpha_2^\vee, \nu_2 = -6\alpha_1^\vee - 7\alpha_2^\vee, \nu_3 = -7\alpha_1^\vee - 6\alpha_2^\vee, \nu_4 = -8\alpha_1^\vee - 5\alpha_2^\vee \right\},$$

dont les cônes maximaux sont

$$\text{Cône}(\nu_1, \alpha_1^\vee), \text{Cône}(\nu_1, \nu_2), \text{Cône}(\nu_2, \nu_3), \text{Cône}(\nu_3, \nu_4), \text{Cône}(\nu_4, \alpha_2^\vee).$$

Soit

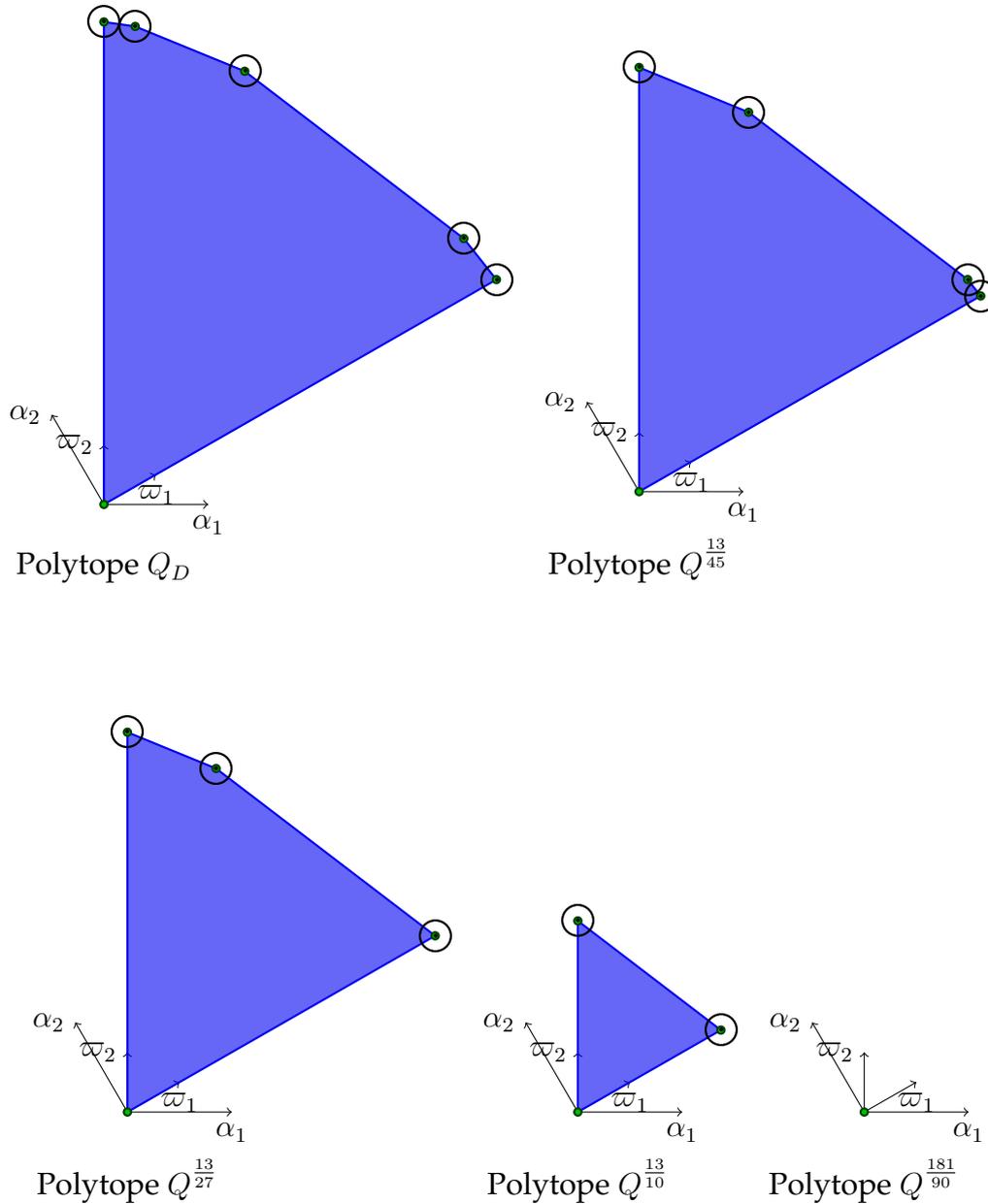
$$D = \frac{579}{10}X_{\nu_1} + \frac{101}{2}X_{\nu_2} + 47X_{\nu_3} + \frac{263}{5}X_{\nu_4} + \frac{7}{10}D_{\alpha_1} + \frac{2}{5}D_{\alpha_2}$$

un \mathbb{Q} -diviseur de Cartier ample. On montre l'évolution du polytope Q^ϵ dans la figure ci-après. En particulier on trouve comme partition les intervalles

$$\left[0, \frac{13}{45}\right], \left[\frac{13}{45}, \frac{13}{27}\right], \left[\frac{13}{27}, \frac{13}{10}\right], \left[\frac{13}{10}, \frac{181}{90}\right], \left\{\frac{181}{90}\right\}.$$

Pour $\epsilon > \frac{181}{90}$ le polytope Q^ϵ est le polytope vide, et $Q^{\frac{181}{90}}$ est réduit au point 0. Il n'y a aucun flip : chaque changement de polytope correspond à une contraction divisorielle.

FIGURE 5.1 – Exemple 5.2.1



5.4.2 $G = SL_4$

On veut maintenant regarder le cas avec $G = SL_4$. On obtient similairement

$$\mathbb{C}(G/G) = \mathbb{C}(SL_4) = \mathbb{C}(X_{11}, \dots, X_{44}) / (\det = 1).$$

Le réseau $\mathcal{X}(G/G)$ est engendré par les poids dominants $(\varpi_1, -\varpi_1)$, $(\varpi_2, -\varpi_2)$ et $(\varpi_3, -\varpi_3)$. L'ensemble des racines sphériques est $\Sigma = \{(\alpha_1, -\alpha_1), (\alpha_2, -\alpha_2), (\alpha_3, -\alpha_3)\}$. Il y a 3 couleurs qui sont associées au zéros des mineurs principaux dominants notées

$D_{\alpha_1}, D_{\alpha_2}$ et D_{α_3} :

$$D_{\alpha_1} = \left\{ \det \begin{pmatrix} X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} = 0 \right\},$$

$$D_{\alpha_2} = \left\{ \det \begin{pmatrix} X_{33} & X_{34} \\ X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} = 0 \right\} \text{ et } D_{\alpha_3} = \{X_{44} = 0\}.$$

Les coefficients d'un diviseur canonique K_X sont donnés par

$$K_X = - \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} X_\nu - 2D_{\alpha_1} - 2D_{\alpha_2} - 2D_{\alpha_3}.$$

Le réseau $\mathcal{X}(\mathbb{G}/G)$ s'identifie naturellement au réseau des caractères de SL_4 , et le cône de valuation \mathcal{V} est la chambre négative.

Exemple 5.10. Soit X le \mathbb{G}/G -plongement dont les valuations des diviseurs \mathbb{G} -stable sont $\nu_1 = -3\alpha_1^\vee - 2\alpha_2^\vee - \alpha_3^\vee$, $\nu_2 = -\alpha_1^\vee - 2\alpha_2^\vee - \alpha_3^\vee$, $\nu_3 = -\alpha_1^\vee - 2\alpha_2^\vee - 3\alpha_3^\vee$ et $\nu_4 = -\alpha_1^\vee - \alpha_2^\vee - \alpha_3^\vee$ et dont les cônes maximaux de l'éventail sont

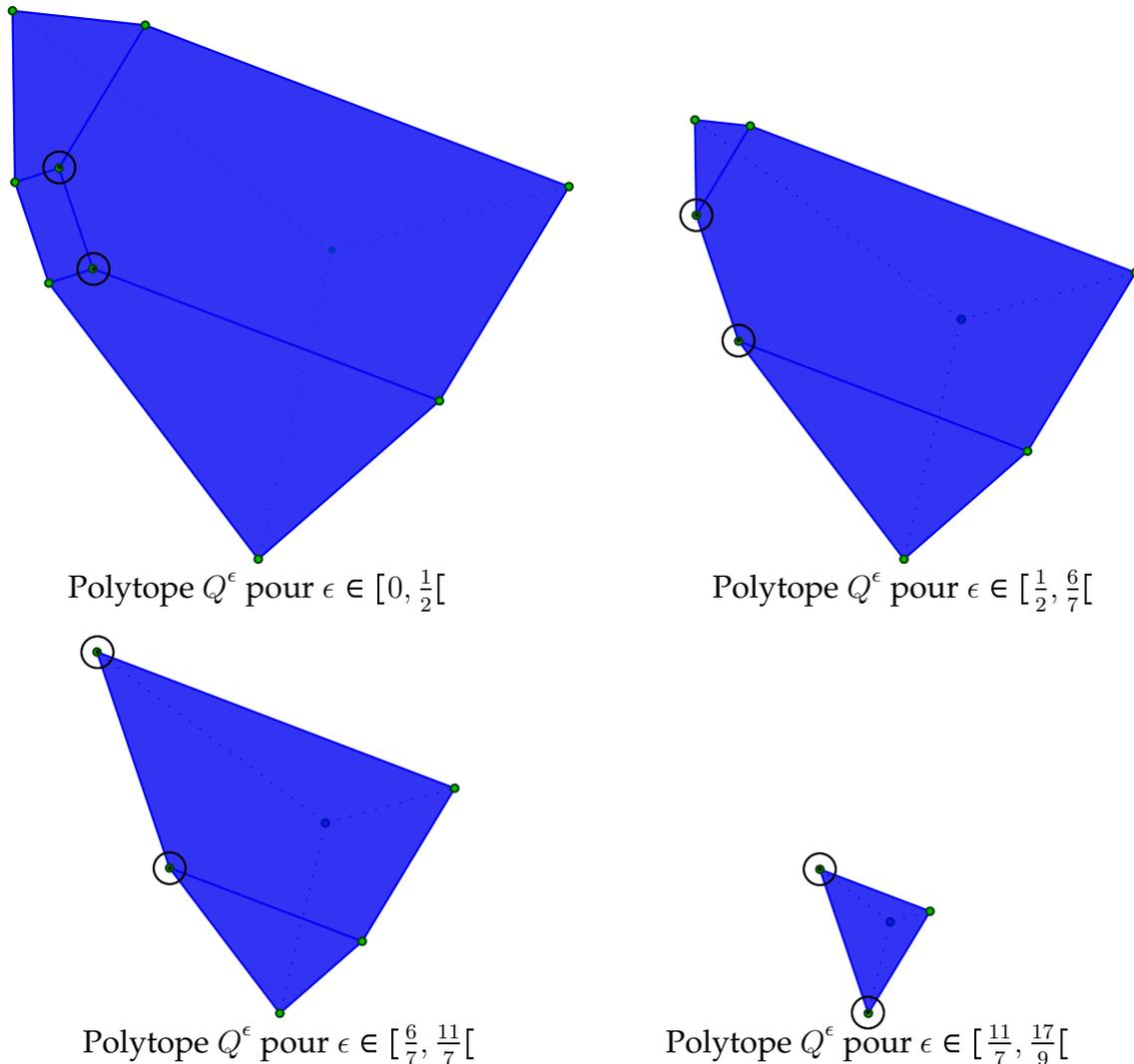
$$\text{Cône}(\nu_1, \nu_2, \nu_4) \text{ et } \text{Cône}(\nu_2, \nu_3, \nu_4).$$

On pose $D = 32X_{\nu_1} + 20X_{\nu_2} + 48X_{\nu_3} + 19X_{\nu_4} - 3D_{\alpha_3}$. Le diviseur D est \mathbb{Q} -Cartier et ample. Dans les figures suivantes, on montre l'évolution du polytope Q^ϵ . Les intervalles sont :

$$\left[0, \frac{1}{2} \right], \left[\frac{1}{2}, \frac{6}{7} \right], \left[\frac{6}{7}, \frac{11}{77} \right] \text{ et } \left\{ \frac{17}{9} \right\}.$$

A chaque étape, une face du polytope se contracte. On en déduit donc que les morphismes entre les variétés sont toutes des contractions divisorielles, et qu'il n'y a donc aucun flip.

FIGURE 5.2 – Exemple 5.2.2



Exemple 5.11. On regarde maintenant la variété dont les valuations des diviseurs \mathbb{G} -stable sont $\nu_1 = -3\alpha_1^\vee - 2\alpha_2^\vee - \alpha_3^\vee$, $\nu_2 = -\alpha_1^\vee - 2\alpha_2^\vee - \alpha_3^\vee$, $\nu_3 = -\alpha_1^\vee - 2\alpha_2^\vee - 3\alpha_3^\vee$ et $\nu_4 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = -5\alpha_1^\vee - 6\alpha_2^\vee - 5\alpha_3^\vee$ et dont les cônes maximaux de l'éventail sont

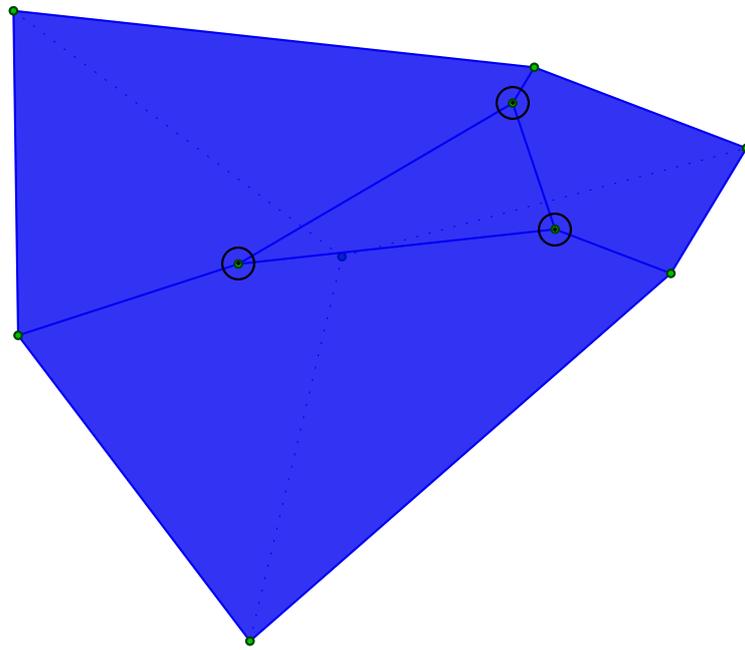
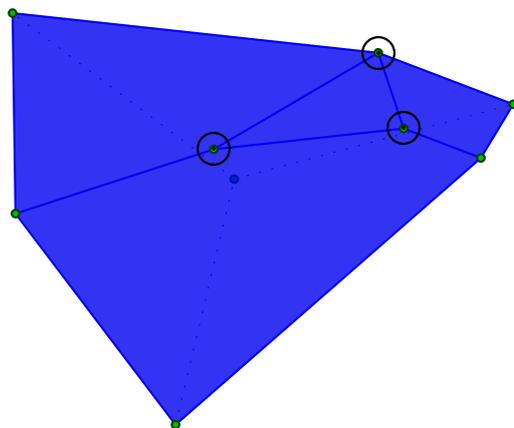
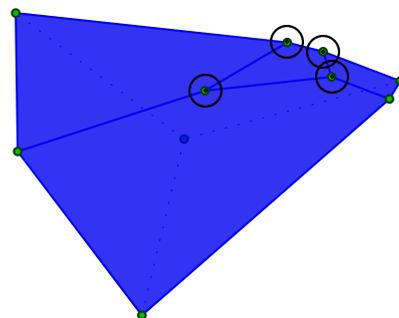
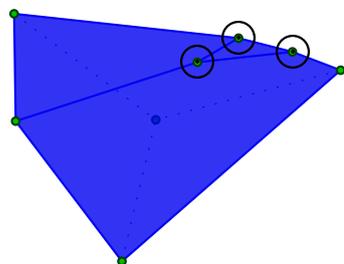
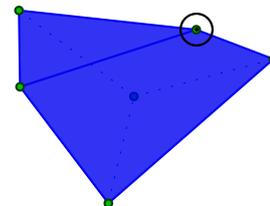
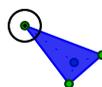
$$\text{Cône}(\nu_1, \nu_2, \nu_4), \text{Cône}(\nu_1, \nu_3, \nu_4) \text{ et } \text{Cône}(\nu_2, \nu_3, \nu_4)$$

Le diviseur $D = 23X_{\nu_1} + 14X_{\nu_2} + 13X_{\nu_3} + 45X_{\nu_4} - D_{\alpha_1} + 5D_{\alpha_2} + 6D_{\alpha_3}$ est \mathbb{Q} -Cartier et ample. Les intervalles d'équivalences du polytope Q^ϵ sont :

$$\left[0, 1\left[\left[\left\{1\right\}, 1, \frac{7}{4}\left[\left[\frac{7}{4}, 2\left[\left[2, \frac{34}{13}\left[\left[\frac{34}{13}, \frac{36}{13}\left[\left\{\frac{36}{13}\right\}\right.$$

Le polytope Q^1 définit une variété qui n'est pas \mathbb{Q} -factorielle. On a ici l'exemple d'un flip en $\epsilon = 1$. Au niveau du polytope on voit ce flip par un sommet qui vient se coller à un mur de la chambre dominante, et qui se divise ensuite en deux sommets. La traduction directe est qu'une orbite fermée va se "décomposer" en deux orbites fermées.

FIGURE 5.3 – Exemple 5.2.3

Polytope Q^ϵ pour $\epsilon \in [0, 1[$ Polytope Q^ϵ pour $\epsilon = 1$ Polytope Q^ϵ pour $\epsilon \in]1, \frac{7}{4}[$ Polytope Q^ϵ pour $\epsilon \in [\frac{7}{4}, 2[$ Polytope Q^ϵ pour $\epsilon \in [2, \frac{34}{13}[$ Polytope Q^ϵ pour $\epsilon \in [\frac{34}{13}, \frac{36}{13}[$

Exemple 5.12. On donne un dernier exemple illustrant le fait que le choix de départ du diviseur est crucial : deux diviseurs différents peuvent donner des MMP très différents !

On regarde la variété dont les valuations des diviseurs \mathbb{G} -stable sont $\nu_1 = -3\alpha_1^\vee - 2\alpha_2^\vee - \alpha_3^\vee$, $\nu_2 = -\alpha_1^\vee - 2\alpha_2^\vee - \alpha_3^\vee$, $\nu_3 = -\alpha_1^\vee - 2\alpha_2^\vee - 3\alpha_3^\vee$, $\nu_4 = -3\alpha_1^\vee - 4\alpha_2^\vee - 3\alpha_3^\vee$ et $\nu_5 = -4\alpha_1^\vee - 4\alpha_2^\vee - 3\alpha_3^\vee$ et dont les cônes maximaux de l'éventail sont

$$\text{Cône}(\nu_1, \nu_2, \nu_4, \nu_5), \text{Cône}(\nu_2, \nu_3, \nu_4), \text{Cône}(\nu_3, \nu_4, \nu_5) \text{ et } \text{Cône}(\nu_1, \nu_3, \nu_5).$$

En particulier, la variété n'est pas \mathbb{Q} -factorielle mais elle est bien \mathbb{Q} -Gorenstein. En fait on a même mieux : c'est une variété de Fano.

Le diviseur $D_1 = 53X_{\nu_1} + 39X_{\nu_2} + 57X_{\nu_3} + 90X_{\nu_4} + 97X_{\nu_5} + 4D_{\alpha_1} - 3D_{\alpha_2} + 6D_{\alpha_3}$ est \mathbb{Q} -Cartier et ample. Les intervalles d'équivalences du polytope Q^ϵ sont :

$$[0, 1[, \{1\}, \left]1, \frac{13}{4}\right[, \left\{\frac{13}{4}\right\}, \left]\frac{13}{4}, \frac{7}{2}\right[, \left[\frac{7}{2}, 4\right[, \left[4, \frac{31}{7}\right[, \left[\frac{31}{7}, \frac{14}{3}\right[\text{ et } \left\{\frac{14}{3}\right\}.$$

Les polytopes représentants sont listés dans la figure qui suit. En particulier, il y a deux flips en $\epsilon = 1$ et $\epsilon = \frac{13}{4}$.

Si l'on prend le diviseur \mathbb{Q} -Cartier et ample $D_2 = 25X_{\nu_1} + 23X_{\nu_2} + 41X_{\nu_3} + 54X_{\nu_4} + 55X_{\nu_5} + 4D_{\alpha_1} - D_{\alpha_3}$ alors les classes d'équivalences sont :

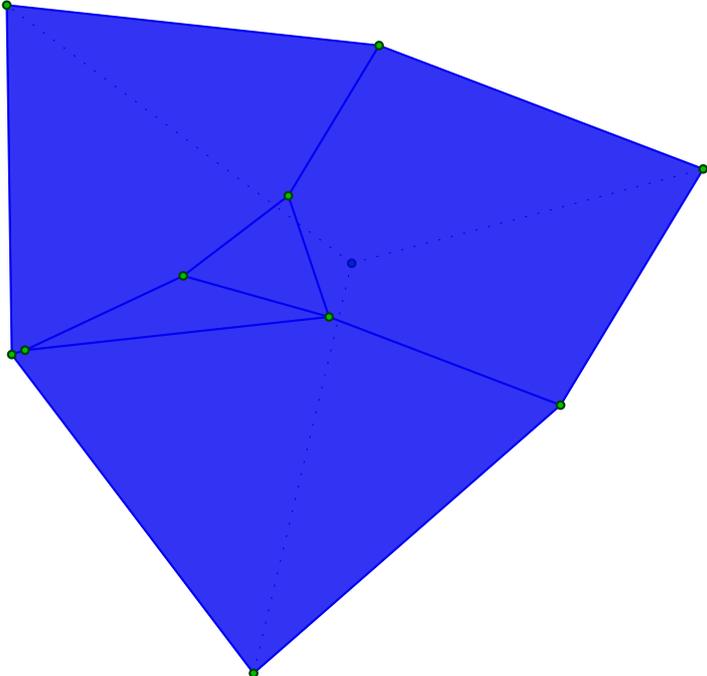
$$[0, 2[, \left[2, \frac{5}{2}\right[, \left[\frac{5}{2}, \frac{33}{13}\right[, \left[\frac{33}{13}, \frac{36}{13}\right[, \text{ et } \left\{\frac{36}{13}\right\}.$$

Il n'y a que des contractions divisorielles.

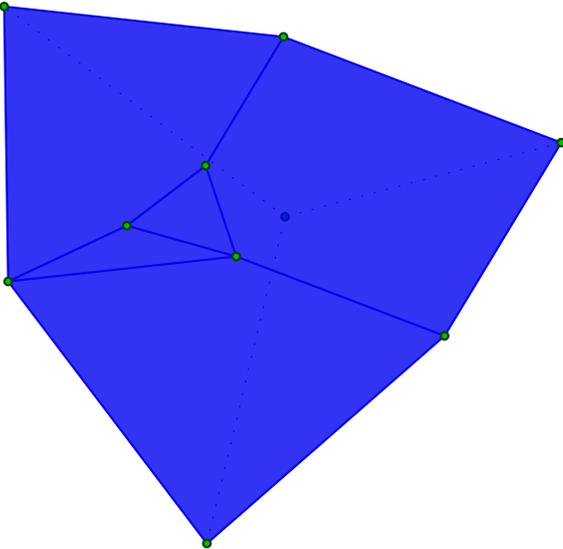
On pourrait aussi prendre le diviseur $-K_X$ qui est ample, et donc on aurait eu directement une fibration avec changement de dimension, et donc seulement deux classes d'équivalences :

$$[0, 1[\text{ et } \{1\}.$$

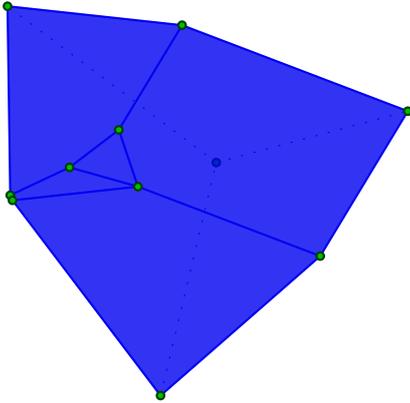
FIGURE 5.4 – Exemple 5.2.3 avec le diviseur D_1



Polytope Q^ϵ pour $\epsilon \in]0, 2[$



Polytope Q^1



Polytope Q^ϵ pour $\epsilon \in]1, \frac{13}{4}[$

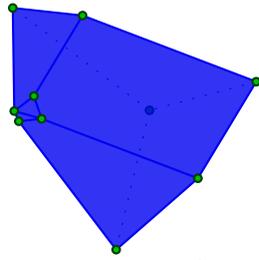
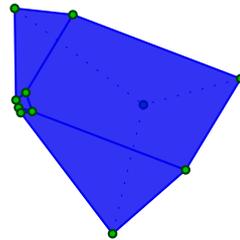
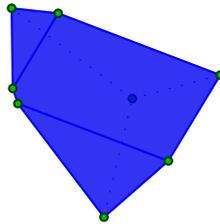
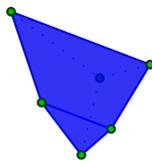
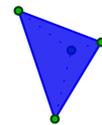
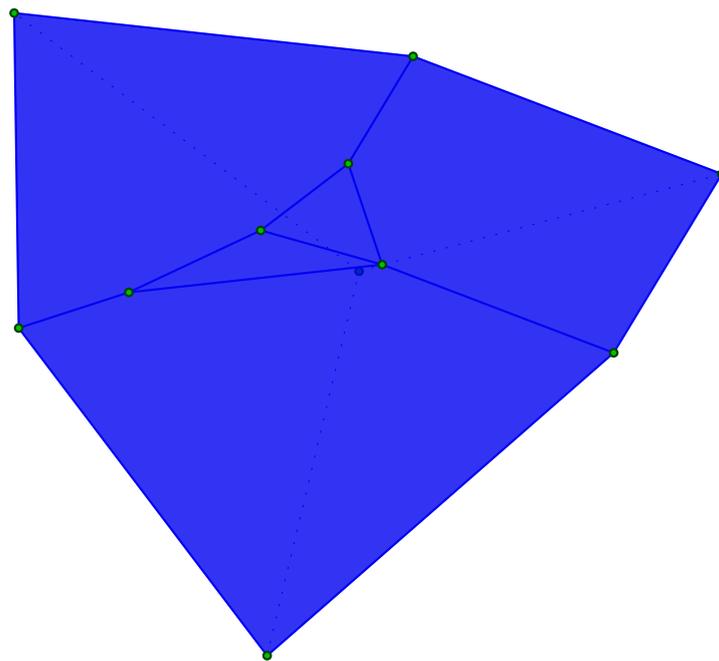
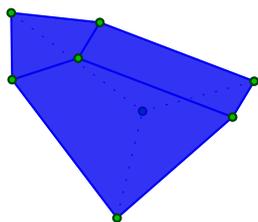
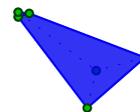
Polytope $Q^{\frac{13}{4}}$ Polytope Q^ϵ pour $\epsilon \in]\frac{13}{4}, \frac{7}{2}[$ Polytope Q^ϵ pour $\epsilon \in]\frac{7}{2}, 4[$ Polytope Q^ϵ pour $\epsilon \in [4, \frac{31}{7}[$ Polytope Q^ϵ pour $\epsilon \in [\frac{31}{7}, \frac{14}{3}[$

FIGURE 5.5 – Exemple 5.2.3 avec le diviseur D_2 

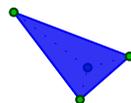
Polytope Q^ϵ pour $\epsilon \in [0, 2[$



Polytope Q^ϵ pour $\epsilon \in [2, \frac{5}{2}[$



Polytope Q^ϵ pour $\epsilon \in [\frac{5}{2}, \frac{33}{13}[$



Polytope Q^ϵ pour $\epsilon \in [\frac{33}{13}, \frac{36}{13}[$

VI

Annexes : Programmation en SageMath

On donne le code sous SageMath [25]. Pour avoir une copie des fichiers, il suffit de m'envoyer un mail à l'adresse paulbartholmey[AT]gmail.com.

6.1 Notations générales

Pour définir une variété sphérique on a besoin du cône des valuations, des couleurs, des diviseurs G -stables et de l'éventail. On donne un exemple dans le cas où $G = SL_4$ pour comprendre comment on les note.

Dans ce cas on écrit les coordonnées dans la base des co-racines. On a alors que le

cône des valuations est $\mathcal{V} = \text{Cône} \left(\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$. Ensuite, on se fixe l'image

des couleurs ainsi que les valuations des diviseurs G -stable toujours dans la base des coracines. Pour l'éventail on n'écrit que les cônes coloriés maximaux. Ici, il y en a trois. Les trois cônes maximaux sont $\text{Cône}(\{\nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5\})$, $\text{Cône}(\{\nu_1, \nu_4, \nu_5\}, \{D_2\})$ et $\text{Cône}(\{\nu_0, \nu_3, \nu_4\}, \{D_2\})$ où ν_i est le i -ième vecteur dans $G\text{Div}$ et D_2 la deuxième couleur dans Colors . Attention, SageMaths commence l'indentation à 0 ! On aura parfois besoin de la matrice de Cartan du groupe que l'on notera M , ici c'est la matrice de Cartan de SL_4 , ie de type A_3 .

```
V=Cone([[ -3, -2, -1],[ -1, -2, -1],[ -1, -2, -3]],ZZ^3)
Colors=[[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]]
GDiv=[[ -3, -2, -1],[ -1, -2, -1],[ -1, -2, -3],[ -1, -1, -1],[ -2, -2, -1],[ -1, -2, -2]]
Eventail=Set([(Set([2,3,4,5]),Set([])),(Set([1,4,5]),Set([2])),(Set
([0,3,4]),Set([2])))]])
M=CartanMatrix(['A',3])
```

On notera un diviseur D par une liste qui donne les coefficients des diviseurs dans `GDiv` et dans `Colors`, et toujours dans cet ordre là. En gardant la variété définie par les données ci-dessus, le diviseur $D = \sum_{i=0}^5 n_{\nu_i} X_{\nu_i} + \sum_{j=0}^2 n_{\alpha_j} D_{\alpha_j}$ est noté comme suit. Il sera aussi nécessaire de noter les diviseurs sous forme de vecteurs, comme dans l'exemple de K_X (on prendra garde que le diviseur noté `K_X` est en fait l'anticanonique).

```
D=[ n_{\nu_0}, n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, n_{\nu_3}, n_{\nu_4}, n_{\nu_5}, n_{\alpha_1}, n_{\alpha_2}, n_{\alpha_3} ]
K_X=vector ([1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2])
```

6.2 Fonctions générales

Pour cette partie on garde en mémoire les données précédentes, et on choisit un diviseur D pour servir d'exemple :

```
V=Cone([[ -3, -2, -1],[ -1, -2, -1],[ -1, -2, -3]],ZZ^3)
Colors=[[1, 0, 0],[0, 1, 0],[0, 0, 1]]
GDiv=[[ -3, -2, -1],[ -1, -2, -1],[ -1, -2, -3],[ -1, -1, -1],[ -2, -2, -1],[ -1, -2, -2]]
Eventail=Set ([ (Set ([2, 3, 4, 5]), Set ([ ])) , (Set ([1, 4, 5]), Set ([2])) ) , (Set ([0, 3, 4]), Set ([2])) ) ]
M=CartanMatrix ([ 'A' ,3])
D=[19, 10, 2, 5, 14, 6, 3, 1, 4]
```

Le but de la fonction `Position_Diviseur` est de rendre les coefficients n_{ν_i} et n_{α_j} tels que ν_i et α_j sont dans un cône maximal C . On donne le résultat pour les deux premiers cônes maximaux de l'éventail.

```
def Position_Diviseur (C, Colors ,GDiv ,D) :
    R=[]
    for j in range(len(C[0])):
        R.append(D[C[0][j]])
    for j in range(len(C[1])):
        R.append(D[C[1][j]+len(GDiv)])
    return R

[2, 5, 14, 6] #est le resultat de Position_Diviseur(Eventail[0],Colors ,GDiv ,D)
[19, 5, 14, 4] #est le resultat de Position_Diviseur(Eventail[1],Colors ,GDiv ,D)
```

Les deux fonctions suivantes sont plus classiques. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel alors `orthogonal_complement(E)` renvoie une base de l'orthogonal de E . Si L_1 et L_2 sont deux listes alors `List_Intersection(L1, L2)` renvoie une liste des éléments communs à L_1 et L_2 .

```
def orthogonal_complement(space):
    if space.dimension()==0:
        return space.ambient_vector_space()
    else:
        return space.basis_matrix().right_kernel()

def List_Intersection(List0, List1):
    return [x for x in List0 if x in List1]
```

La fonction `Matrix_Erase_Line` prend en entrées une matrice M de taille $n \times m$ et un ensemble I d'entiers naturels $\leq n$ et renvoie la matrice M à laquelle on a gardé uniquement les lignes $i \in I$.

```
def Matrix_Erase_Line(M, I):
    if max(I) >= M.nrows(): print('I is bigger than #rows'); return false
    List=[]
    for i in I:
        List=List+[M.rows()[i]]
    return matrix(List)
```

Si M est une matrice de taille $n \times n$ et $I \subset \{1, \dots, n\}$ alors la fonction `Bloc_Matrix` renseigne sur la façon dont la matrice M à laquelle on a mit des zéros sur les lignes et colonnes $i \in I$ est diagonale par blocs.

```
def Bloc_Matrix(M, I):
    N=copy(M)
    for i in range(M.ncols()):
        if (i in I)==false:
            for k in range(M.ncols()):
                N[k, i]=0
                N[i, k]=0

    J=[]
    temp=[]
    for k in range(N.ncols()):
        if N[k, k]==0:
            if temp<>[]:
                J.append(temp)
                temp=[]
        if N[k, k]<>0:
            temp.append(k)
            if k==N.ncols()-1:
                J.append(temp)

    return J
```

La fonction `New_Fan` permet de réécrire les diviseurs G -stables et l'éventail dans un ordre que l'on préfère.

```
def New_Fan(Eventail, Old_GDiv, New_GDiv, D):
    transition=[]
```

```

gdiv=[]
New_Eventail=Set([])
for i in Old_GDiv:
    if i in New_GDiv: gdiv=gdiv+[i]
for i in New_GDiv:
    if (i in gdiv)==false: gdiv=gdiv+[i]
for C in Eventail:
    temp=[]
    for i in C[0]:
        temp=temp+[New_GDiv.index(Old_GDiv[i])]
    New_Eventail=New_Eventail.union(Set([(Set(temp),C[1])]))
New_D=[]
for i in range(len(gdiv)):
    New_D=New_D+[D[Old_GDiv.index(gdiv[i])] ]
for i in range(len(Colors)):
    New_D=New_D+[D[i+len(Old_GDiv) ] ]
return gdiv , New_Eventail , New_D

```

La fonction suivante est plus cruciale. Elle permet de trier les coracines α_i^V pour $i \in I$ comme dans la Remarque 3.3, en utilisant la matrice de Cartan M .

```

def Bloc_Root(Colors ,M,I):
    test=0
    J=[[I[0]]]
    for i in range(1 ,len(I)):
        t=0
        while((test==0) & (t<=len(J)-1)):
            K=copy(J)
            temp=len(K[t])
            for l in range(temp):
                if vector(Colors[K[t][l]]) . dot_product(M*vector(Colors[I[i]
                ])) <>0:
                    test=1
                    J[t].append(I[i])
            t=t+1
        if test==0:
            J.append([I[i]])
        test=0
    return J

```

Ces deux dernières fonctions sont beaucoup plus générales. La fonction `Liste_Trie_Sans_Repetitions` renvoie la liste donnée en entrée en supprimant les nombres apparaissant plusieurs fois. La fonction `Extraction` servira plus tard pour extraire des nombres d'une autre liste.

```

def Extraction(R):
    L=[]
    for r in R:
        if type(r)<>list:
            if r.rhs() in QQ:
                if r.rhs()>=0: L=L+[Rational(r.rhs())]
            else:
                if r.lhs()>=0: L=L+[Rational(r.lhs())]

```

```

else:
    for i in r:
        if i.rhs() in QQ:
            if i.rhs() >=0: L=L+[Rational(i.rhs())]
        else:
            if i.lhs() >=0: L=L+[Rational(i.lhs())]
return L

def Liste_Trie_Sans_Repetition(L):
    R=[]
    for l in L:
        if (l in R) == False: R=R+[l]
    return R

```

6.3 Fonctions sur les diviseurs

On se place dans le \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension $\#couleurs + \#G$ -diviseurs, et on calcule le sous-espace vectoriel des diviseurs de Cartier ainsi que le cône des diviseurs amples. Pour être plus précis la fonction `Ample_Cone` renvoie le cône des diviseurs engendrés par leurs sections globales, et donc le cône ample est l'intérieur de ce dernier. On notera que ce cône contient des parties linéaires qui correspondent aux diviseurs équivalents à 0.

```

def Cartier_Subspace(Eventail, Colors, GDiv):
    E=QQ^(len(Colors)+len(GDiv))
    if Colors==[]: n=len(GDiv[0])
    else: n=len(Colors[0])
    for i in range(len(Eventail)):
        gdiv=list(Eventail[i][0])
        colors=list(Eventail[i][1])
        M=matrix(QQ,n,len(Eventail[i][0])+len(Eventail[i][1]))
        for a in range(n):
            for b in range(len(Eventail[i][0])+len(Eventail[i][1])):
                if b<=len(Eventail[i][0])-1:
                    M[a,b]=GDiv[gdiv[b]][a]
                if b>len(Eventail[i][0])-1:
                    M[a,b]=Colors[colors[b-len(Eventail[i][0])]][a]
    K=kernel(transpose(M)).basis()
    for v in K:
        b=[]
        for j in range(len(GDiv)):
            if j in Eventail[i][0]:
                b=b+[v[gdiv.index(j)]]
            else:
                b=b+[0]
        for j in range(len(Colors)):
            if j in Eventail[i][1]:
                b=b+[v[colors.index(j)+len(Eventail[i][0])]]
            else:
                b=b+[0]
    B=transpose(matrix([b]))

```

```

        if dim(kernel(B))>0: E=E.intersection(kernel(B))
    return E

def Ample_Cone(Eventail , Colors , GDiv) :
    E=QQ^(len(Colors)+len(GDiv))
    if Colors==[]: n=len(GDiv[0])
    else: n=len(Colors[0])
    IQ=[]
    for i in range(len(Eventail)):
        gdiv=list(Eventail[i][0])
        colors=list(Eventail[i][1])
        M=matrix(QQ,n,len(Eventail[i][0])+len(Eventail[i][1]))
        for a in range(n):
            for b in range(len(Eventail[i][0])+len(Eventail[i][1])):
                if b<=len(Eventail[i][0])-1:
                    M[a,b]=GDiv[gdiv[b]][a]
                if b>len(Eventail[i][0])-1:
                    M[a,b]=Colors[colors[b-len(Eventail[i][0])]][a]
        for j in range(len(GDiv)):
            if (j in Eventail[i][0])==false:
                X=M.solve_right(vector(GDiv[j]))
                iq=[0]
                for k in range(len(GDiv)):
                    if k in Eventail[i][0]: iq.append(-X[list(Eventail[i]
]][0)].index(k))
                    else: iq.append(0)
                for k in range(len(Colors)):
                    if k in Eventail[i][1]: iq.append(-X[list(Eventail[i]
]][1)].index(k)+len(Eventail[i][0]))
                    else: iq.append(0)
                iq[j+1]=1
                IQ=IQ+iq
        for j in range(len(Colors)):
            if (j in Eventail[i][1])==false:
                X=M.solve_right(vector(Colors[j]))
                iq=[0]
                for k in range(len(GDiv)):
                    if k in Eventail[i][0]: iq.append(-X[gdiv.index(k)])
                    else: iq.append(0)
                for k in range(len(Colors)):
                    if k in Eventail[i][1]: iq.append(-X[colors.index(k)+
len(Eventail[i][0])])
                    else: iq.append(0)
                iq[j+len(GDiv)+1]=1
                IQ=IQ+iq
    V=orthogonal_complement(Cartier_Subspace(Eventail , Colors , GDiv))
    B=[]
    for i in range(len(V.basis())):
        B=B+[[0]+list(V.basis()[i])]
    c=polytopes.hypercube(len(Colors)+len(GDiv))
    Q=c.intersection(Polyhedron(ieqs=IQ, eqns=B))
    C=Cone(Q.vertices() , ZZ^(len(Colors)+len(GDiv)))
    return C

```

La fonction `Linear_Fonction_Of_Divisor` renvoie la fonction linéaire par morceaux associée au diviseur D sous la forme d'une liste de vecteurs, où le i -ième vecteur correspond à la fonction linéaire sur le i -ième cône maximal. Si le diviseur D n'est pas de Cartier et n'a donc pas de telle fonction associée, `Linear_Fonction_Of_Divisor` renvoie la liste vide.

```
def Linear_Fonction_Of_Divisor(Eventail, Colors, GDiv, D):
    l=[]
    if Colors==[]: n=len(GDiv[0])
    else: n=len(Colors[0])
    for i in range(len(Eventail)):
        M=matrix(QQ,n, len(Eventail[i][0])+len(Eventail[i][1]))
        for a in range(n):
            for b in range(len(Eventail[i][0])+len(Eventail[i][1])):
                if b<=len(Eventail[i][0]) -1:
                    M[a,b]=GDiv[Eventail[i][0]][b][a]
                if b>len(Eventail[i][0]) -1:
                    M[a,b]=Colors[Eventail[i][1]][b-len(Eventail[i][0])][a]
        P_vect=vector(Position_Diviseur(Eventail[i], Colors, GDiv, D))
    if (P_vect in image(M))==False: return []
        X=M.solve_left(P_vect)
        l.append(list(X))
    return l
```

La fonction `Is_Ample` nous indique si un diviseur D est de Cartier, engendré par ses sections globales ou ample. Les tests sont effectués via la fonction linéaire par morceaux associée à D .

```
def Is_Ample(Eventail, Colors, GDiv, D):
    l_D=Linear_Fonction_Of_Divisor(Eventail, Colors, GDiv, D)
    if l_D==[]: return "D is not Cartier"
    gg=0
    for i in range(len(Eventail)):
        for j in range(len(GDiv)):
            if (j in Eventail[i][0])==false:
                if (matrix(l_D[i])*vector(GDiv[j]))[0]>D[j]: return "D is
not globally generated"
                if (matrix(l_D[i])*vector(GDiv[j]))[0]==D[j]: gg=1
        for j in range(len(Colors)):
            if (j in Eventail[i][1])==false:
                if (matrix(l_D[i])*vector(Colors[j]))[0]>D[j+len(GDiv)]:
return "D is not globally generated"
                if (matrix(l_D[i])*vector(Colors[j]))[0]==D[j+len(GDiv)]: gg
=1
    if gg==1: return "D is only globally generated"
    return "D is ample"
```

Cette fonction fournit un diviseur ample choisi aléatoirement. Si on note $\{R_i\}$ les rayons extrémaux du cône des diviseurs engendrés par leurs sections globales, on choisit aléatoirement un entier n_i entre 1 et 10 et alors le diviseur $D = \sum_i n_i R_i$ est dans l'intérieur relatif du cône, donc est ample.

```

def Random_Ample_Divisor(Eventail, Colors, GDiv):
    C=Ample_Cone(Eventail, Colors, GDiv)
    D=0
    for i in range(len(C.rays())):
        D=D+randint(1,10)*C.rays()[i]
    return vector(D)

```

6.4 Fonctions sur les polytopes

On se propose de donner les fonctions utilisées sur les polytopes moments. La première étape est bien entendu de créer le polytope moment d'un diviseur. Attention la fonction `Polytope_Of_Divisor` crée un polytope pour tout diviseur D . Ceci n'est défini dans la théorie des variétés sphériques uniquement si D est ample.

```

def Polytope_Of_Divisor(Eventail, Colors, GDiv, D, Poids):
    n=max(len(Colors[0]), len(GDiv[0]))
    iq=[]
    t=vector(QQ, n)
    for i in range(len(Colors)):
        t=t+D[i+len(GDiv)]*vector(Poids[i], QQ)
    for i in range(len(GDiv)):
        temp=[]
        temp=temp+[-t.dot_product(vector(GDiv[i]))+D[i]]
        temp=temp+GDiv[i]
        iq=iq+[temp]
    for i in range(len(Colors)):
        temp=[]
        temp=temp+[-t.dot_product(vector(Colors[i]))+D[i+len(GDiv)]]
        temp=temp+Colors[i]
        iq=iq+[temp]
    return Polyhedron(ieqs=iq)

```

La fonction `Polytope_To_Fan` reconstruit l'éventail et la liste des diviseurs G -stables à partir d'un polytope, du cône des valuations et des couleurs. On prendra garde cependant, l'ordre où sont notés les diviseurs G -stables peut être changé, de même pour l'éventail. On pourra se servir de la fonction `New_Fan` dans la section 6.2.

```

def Polytope_To_Fan(Q, V, Colors):
    Eventail=Set([])
    GDiv=[]
    for i in range(len(Q.vertices())):
        P=-((-Q).translation(Q.vertices()[i]))
        C=Cone(P.vertices(), ZZ^(Q.dim())).dual()
        I=C.intersection(V)
        if I.dim()==V.dim():
            temp_gdiv=[]
            temp_colors=[]
            M=C.rays().column_matrix()
            L=[list(M.column(j)) for j in range(len(C.rays()))]

```

```

    for j in range(len(L)):
        if (L[j] in GDiv)==false:
            if (L[j] in Colors)==false:
                GDiv=GDiv+[L[j]]
            if L[j] in Colors :
                temp_gdiv=temp_gdiv+[Colors.index(L[j])]
            if (L[j] in Colors)==false:
                temp_colors=temp_colors+[GDiv.index(L[j])]
        Eventail=Eventail.union(Set([(Set(temp_colors),Set(temp_gdiv))
]))
    return GDiv,Eventail

```

Les deux fonctions suivantes permettent de savoir si une face est admissible. Une face est définie par l'intersection des facettes qui sont orthogonales à un certain diviseur de base. On note I la place des tels diviseurs apparaissant. Et alors la fonction `Is_Admissible(Colors,GDiv,I, M)` indique si la face est admissible.

```

def Is_Admissible_For_A_Bloc(Colors ,GDiv,M,I ,j ):
    for i in I:
        if i<len(GDiv):
            for k in j:
                if vector(Colors[k]).dot_product(M*vector(GDiv[i]))<>0:
                    return true
    return false

def Is_Admissible(Colors ,GDiv,I ,M):
    L=[]
    for i in I:
        if i>=len(GDiv):
            L.append(i-len(GDiv))
    if L==[]: return true
    J=Bloc_Root(Colors ,M,L)
    for j in J:
        if Is_Admissible_For_A_Bloc(Colors ,GDiv,M,I ,j)==false: return false
    return true

```

La dernière fonction de cette section indique si deux polytopes moments sont équivalents. Il est nécessaire de renseigner les couleurs et le cône des valuations.

```

def Are_Polytopes_Equivalent(Q1,Q2,V, Colors ):
    GDiv_1=Polytope_To_Fan(Q1,V, Colors)[0]
    Eventail_1=Polytope_To_Fan(Q1,V, Colors)[1]
    GDiv_2=Polytope_To_Fan(Q2,V, Colors)[0]
    Eventail_2=Polytope_To_Fan(Q2,V, Colors)[1]
    if sorted(GDiv_1)<>sorted(GDiv_2):
        return false
    temp=[0 for i in range(len(GDiv_1)+len(Colors))]
    eventail=New_Fan(Eventail_2 ,GDiv_2,GDiv_1,temp)[1]
    if eventail<>Eventail_1:
        return false
    return true

```

6.5 Fonctions pour la description du MMP

On se donne maintenant les fonctions qui vont permettre de calculer les intervalles comme dans le corollaire 4.1.

Mais il nous faut avant des fonctions intermédiaires. La fonction `Epsilon_Limit` renvoie une partie des $\epsilon > 0$ pour lesquels Q^ϵ change de classe d'équivalence. Cependant la façon de résoudre trouve des difficultés lors des flips. Il faut regarder plus attentivement, ce dont la fonction `Epsilon_Total` se charge. Finalement, la fonction `Intervalles_Epsilon` se charge de mettre en forme les intervalles d'équivalences. On donne ensuite un exemple de ces intervalles, qui sont

$$[0, 1[, \{1\}, \left]1, \frac{13}{4}\right[, \left\{\frac{13}{4}\right\}, \left] \frac{13}{4}, \frac{7}{2}\right[, \left[\frac{7}{2}, 4\right[, \left[4, \frac{31}{7}\right[, \left[\frac{31}{7}, \frac{14}{3}\right[\text{ et } \left\{\frac{14}{3}\right\}.$$

```
def Epsilon_Limit(Colors, GDiv, D, K_X, M):
    A=matrix(GDiv+Colors)
    B=matrix([[ -d] for d in D])
    C=matrix([[k] for k in K_X])
    S=[]
    for I in list(Subsets([i for i in range(A.nrows())], submultiset=True)):
        if (I<>[]) & (Is_Admissible(Colors, GDiv, I, M)):
            T=Vertices_limit(A, B, C, I)
            if (T<> 'Error I is too small to define vertices') & (T<> 'Error
I is too big') & (T<> 'no solution'):
                V=[]
                if T<>[]:
                    for t in T:
                        if type(t[0])<>list:V=V+[t[0]]
                        else:V=V+[t[0][0]]
                    re=Extraction(solve(V, e))
                    S=S+Liste_Trie_Sans_Repetition(sorted(re))
    return Liste_Trie_Sans_Repetition(sorted(S))

def Epsilon_Total(Eventail, GDiv, V, Colors, D, K_X, S):
    Epsilon=[0]
    Polytopes=[Polytope_Of_Divisor(Eventail, Colors, GDiv, D, Colors)]
    for i in range(len(S)-2):
        Epsilon=Epsilon+[S[i]]
        milieu=Rational((S[i+1]+S[i])*0.5)
        if Are_Polytopes_Equivalent(Polytope_Of_Divisor(Eventail, Colors,
GDiv, D-milieu*K_X, Colors), Polytope_Of_Divisor(Eventail, Colors, GDiv, D-S[i
]*K_X, Colors), V, Colors)== false:
            Epsilon=Epsilon+[milieu]
    Epsilon=Epsilon+[S[len(S)-2]]
    Epsilon=Epsilon+[S[len(S)-1]]
    return Epsilon

def Intervalles_Epsilon(S, E):
    L=[[0, S[0]]]
    for i in range(len(S)-1):
        if (S[i]+S[i+1])/2 in E:
```

```

        L=L+[[S[i]]]
    L=L+[[S[i],S[i+1]]]
L=L+[[S[len(S)-1]]]
return L

```

#L'exemple est

```
[[0,1],[1],[1,13/4],[13/4],[13/4,7/2],[7/2,4],[4,31/7],[31/7,14/3],[14/3]]
```

La fonction finale se nomme `MMP`. Elle prend comme données le cône des valuations, la matrice de Cartan, l'éventail, les couleurs, les diviseurs G -stables, un diviseur ample ainsi que l'anticanonique et renvoie les intervalles d'équivalences ainsi qu'un polytope moment représentant chaque classe.

```

def MMP(V,M,Eventail,Colors,GDiv,D,K_X):
    S=Epsilon_Limit(Colors,GDiv,D,K_X,M)
    E=Epsilon_Total(Eventail,GDiv,V,Colors,D,K_X,S)
    Intervalles=Intervalles_Epsilon(S,E)
    Polytopes=[Polytope_Of_Divisor(Eventail,Colors,GDiv,D-e*K_X,Colors) for
e in E]
return [Intervalles,Polytopes]

```


Bibliographie

- [1] Caucher Birkar, Paolo Cascini, Christopher Hacon, and James McKernan. Existence of minimal models for varieties of log general type. *J. Amer. Math. Soc.*, 23(2):405–468, 2010. 2
- [2] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: systèmes de racines.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968. 9
- [3] P. Bravi and G. Pezzini. The spherical systems of the wonderful reductive subgroups. *J. Lie Theory*, 25(1):105–123, 2015. 4
- [4] Michel Brion. Variétés sphériques et théorie de Mori. *Duke Math. J.*, 72(2):369–404, 1993. 4, 5, 22, 23
- [5] Michel Brion. Variétés sphériques, 1997. Notes de la session de la S. M. F. "Opérations hamiltoniennes et opérations de groupes algébriques". 10, 24, 25, 50
- [6] Michel Brion. Lectures on the geometry of flag varieties, 2003. Notes de l'école d'été "Schubert Varieties". 2
- [7] Herbert Clemens, János Kollár, and Shigefumi Mori. Higher-dimensional complex geometry. *Astérisque*, (166):144 pp. (1989), 1988. 1
- [8] Stéphanie Cupit-Foutou. Spherical varieties and perspectives in representation theory. In *Representation theory—current trends and perspectives*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 47–57. Eur. Math. Soc., Zürich, 2017. 4
- [9] Stéphanie Cupit-Foutou, Guido Pezzini, and Bart Van Steirteghem. Momentum polytopes of projective spherical varieties and related kähler geometry. arXiv:1809.08171v1[math.AG]. 4, 7, 8, 12, 19, 21
- [10] Thibaut Delcroix. Kähler geometry of horosymmetric varieties, and application to Mabuchi's K-energy functional. Comments welcome, 2017. 4
- [11] William Fulton. *Introduction to toric varieties*, volume 131 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. The William H. Roever Lectures in Geometry. 2
- [12] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. 1

- [13] Victor Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990. 29
- [14] Friedrich Knop. The Luna-Vust theory of spherical embeddings. In *Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups (Hyderabad, 1989)*, pages 225–249. Manoj Prakashan, Madras, 1991. 4
- [15] Friedrich Knop, Hanspeter Kraft, Domingo Luna, and Thierry Vust. Local properties of algebraic group actions. In *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*, volume 13 of *DMV Sem.*, pages 63–75. Birkhäuser, Basel, 1989. 11
- [16] János Kollár and Shigefumi Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, volume 134 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original. 21
- [17] Ivan Losev. Uniqueness property for spherical homogeneous spaces. *Duke Math. J.*, 147(2):315–343, 2009. 4, 55
- [18] Dominique Luna. Variétés sphériques de type A . *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (94):161–226, 2001. 4
- [19] Kenji Matsuki. *Introduction to the Mori program*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002. 2
- [20] Tadao Oda. *Convex bodies and algebraic geometry*, volume 15 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. An introduction to the theory of toric varieties, Translated from the Japanese. 2
- [21] Boris Pasquier. Variétés horosphériques de Fano. *Bull. Soc. Math. France*, 136(2):195–225, 2008. 2
- [22] Boris Pasquier. An approach of the minimal model program for horospherical varieties via moment polytopes. *J. Reine Angew. Math.*, 708:173–212, 2015. 4, 6, 8, 43, 56
- [23] Guido Pezzini. Lectures on wonderful varieties. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 34(3):417–438, 2018. 2
- [24] Alessandro Ruzzi. Fano symmetric varieties with low rank. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 48(2):235–278, 2012. 3
- [25] SageMath. <http://www.sagemath.org/index.html>. 67
- [26] Tonny Albert Springer. *Linear algebraic groups*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, second edition, 2009. 55

Résumé : Le *programme des modèles minimaux (MMP)* est l'une des grandes théories développée en géométrie algébrique en vue de classifier les variétés algébriques complexes. Pour certaines familles d'exemples, le *MMP* est très bien connu. Notamment, pour les variétés toriques et horosphériques, la théorie se résume à une étude assez simple de familles de polytopes, dits polytopes moments, et elle s'étend même à des variétés plus singulières que dans le cas général. Le but de cette thèse est d'étendre ces résultats à des compactifications sphériques d'un groupe. On décrit dans un premier temps ces variétés, et on classifie tous les polytopes moments attachés à de telles compactifications. Puis on démontre que le *MMP* appliqué sur ces compactifications sphériques se traduit en termes de polytopes moments. Enfin on donne un programme codé en *SageMath* qui permet de donner les polytopes apparaissant dans le *MMP* d'une compactification sphérique d'un groupe simple.

Mots clés : Géométrie algébrique, Mori, Sphériques, MMP, Polytopes moments.

Abstract: The *Minimal Model Program (MMP)* is one of the greatest theories in Algebraic Geometry developed to classify algebraic varieties. For some families of algebraic varieties, the *MMP* has been studied in depth. In particular, for toric and horospherical varieties, it comes down to a quite easy study of families of polytopes, called moment polytopes, and it could be adapted to weaker hypothesis of singularities. The goal of this thesis is to show that this reduction can be extended to spherical compactifications of a group. First of all we describe these varieties and classify all moment polytopes of such compactifications. Then we prove that the *MMP* applied on this spherical compactifications reduces to a study of a families of this moment polytopes. Finally we give a computer program, coded in *SageMath*, which gives all polytopes appearing in the *MMP* of a simple group's spherical compactification.

Keywords: Algebraic geometry, Mori, Spherical, MMP, Moment polytopes.
