



**HAL**  
open science

# Mesure d'impédance acoustique pour la caractérisation des cycles limites de moteurs thermoacoustiques

Valentin Zornotti

► **To cite this version:**

Valentin Zornotti. Mesure d'impédance acoustique pour la caractérisation des cycles limites de moteurs thermoacoustiques. Acoustique [physics.class-ph]. Le Mans Université, 2019. Français. NNT : 2019LEMA1005 . tel-02383218

**HAL Id: tel-02383218**

**<https://theses.hal.science/tel-02383218>**

Submitted on 27 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE

LE MANS UNIVERSITÉ

COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

ÉCOLE DOCTORALE N°602  
*Sciences pour l'Ingénieur*  
Spécialité : Acoustique

Par

**Valentin ZORGNOTTI**

**Mesure d'impédance acoustique pour la caractérisation des cycles limites de moteurs thermoacoustiques**

**Thèse soutenue au Mans, le 18 Janvier 2019**  
**Unité de recherche : CNRS UMR-6613**  
**Thèse N° 2019LEMA1005**

## Composition du Jury :

Hélène BAILLIET (Rapporteure)	Maître de Conférence (HDR), Université de Poitiers, Institut Pprime (CNRS UPR-3346)
Fabien FORMOSA (Rapporteur)	Maître de Conférence (HDR), Université de Savoie Mont Blanc, SYMME (Polytech'Savoie)
Philippe BLANC-BENON (Président)	Directeur de recherche CNRS, École Centrale de Lyon, LMFA (CNRS UMR-5509)
François LANZETTA	Professeur des Universités, Université de Franche-Comté, FEMTO-ST (CNRS UMR-6174)
Pierrick LOTTON	Directeur de recherche CNRS, Le Mans Université, LAUM (CNRS UMR-6613)
Guillaume PENELET (Dir. de thèse)	Maître de Conférences (HDR), Le Mans Université, LAUM (UMR CNRS-6613)
Steven L. GARRETT (Co-Dir. de thèse)	Professeur associé, Le Mans Université, LAUM (UMR CNRS-6613)
Gaëlle POIGNAND (Co-Encadrante)	Ingénieur de recherche, Le Mans Université, LAUM (UMR CNRS-6613)

## Mesure d'impédance pour la caractérisation des cycles limites de moteurs thermoacoustiques

**Mots clés :** Moteurs thermoacoustiques, Mesure d'impédance acoustique, Caractérisation acoustique à forts niveaux

**Résumé :** Ce manuscrit de doctorat propose une méthode expérimentale pour la caractérisation du cycle limite acoustique atteint par les auto-oscillations générées dans un moteur thermoacoustique. Pour cela, un capteur d'impédance fort niveau est développé dans le but de mesurer l'impédance d'entrée d'un noyau thermoacoustique en fonction de la puissance de chauffage fournie, de la fréquence et de l'amplitude du forçage acoustique. L'utilisation de ces mesures permet de prédire avec succès la génération spontanée d'auto-oscillations ainsi que leur saturation jusqu'à un régime établi, pour différentes charges attachées au noyau. Les mesures ainsi obtenues sont comparées à un modèle établi sur la base de la théorie linéaire de la thermoacoustique, couplé un modèle thermique simplifié, menant à une meilleure compréhension des processus physiques responsables de la saturation des oscillations acoustiques. La procédure expérimentale décrite dans ce manuscrit permet aussi de proposer une méthode d'optimisation du couplage entre la charge et le noyau de manière à maximiser l'efficacité potentielle de la conversion d'énergie thermoacoustique. Finalement, une méthode expérimentale est décrite et permet l'étude de la stabilité des cycles limites, ou plus généralement de l'évolution lente de l'amplitude des auto-oscillations acoustiques, dans le cas où le moteur thermoacoustique est configuré de manière à donner lieu à un régime de déclenchements et arrêts périodiques.

## Acoustic impedance measurement to characterize thermoacoustic engines limit cycles

**Mots clés :** Thermoacoustic engines, Acoustic impedance measurement, High amplitude acoustic characterization

**Abstract :** This manuscript deals with the experimental characterization of the acoustic limit cycle reached by self-sustained oscillations generated in thermoacoustic engines. A specially designed, high amplitude, acoustic impedance sensor was developed to perform measurements of the input impedance of a thermoacoustic core, as a function of the heating power supplied to the device, of the frequency, and of the amplitude of acoustic forcing. Those measurements can then be used to predict the spontaneous generation of acoustic oscillations and their saturation up to a certain steady-state. Those predictions were successful for various acoustic loads connected to the thermoacoustic core. Moreover, the measurements of acoustic impedance as a function of the amplitude of acoustic oscillations are compared to a model based on the linear thermoacoustic theory, and this comparison provides insights into the processes controlling the saturation of acoustic oscillations. The experimental procedure described in this manuscript also leads to a practical way of optimizing the coupling between the thermoacoustic core and the load, in the way that the potential efficiency of thermoacoustic energy conversion is maximized. Finally, an experimental method is described and allows to study the stability of limit cycles, i.e. the temporal evolution of the self-oscillation amplitude, in the case of a system that is able to give rise to a spontaneous periodic *trigg and stop* behavior.

## Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, renommé Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans à partir de 2018. Sous l'égide de Le Mans Acoustique, le HUB Acoustique a financé ce travail pendant trois ans. Pour cela je remercie M. Vincent Tournat, directeur de recherche CNRS, alors à l'initiative des projets HUB Acoustique, et Joël Gilbert, directeur de recherche CNRS, alors au poste de directeur du laboratoire, ayant rendu ce travail possible. Dans le cadre du HUB, je tiens à remercier tout particulièrement Jana Le Coz et Illiana Diaz pour leur soutien dans les questions administratives. Pour les mêmes raisons, j'adresse les mêmes remerciements à Catherine Petitbon et Virginie Froger du pôle doctoral pour leur écoute, et leur aide dans les démarches associées à mon cursus à l'université en tant que doctorant, ainsi que pour des démarches pour lesquelles rien ne les obligeait à m'aider.

Premièrement, je remercie les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail, en particulier Hélène Bailliet, maître de conférences à l'Université de Poitiers attachée à l'institut Pprime, et Fabien Formosa, maître de conférences à l'Université de Savoie, pour s'être chargés de relire et de critiquer ce manuscrit.

Il me tient à cœur de remercier chaleureusement mes encadrants pour leur soutien, leur disponibilité et leur implication tout au long de ces trois années, et pour m'avoir fait garder le cap malgré les complications scientifiques rencontrées, les baisses de motivations et le stress, mais surtout pour leur soutien lors des difficultés rencontrées, inhérentes à tous travaux de thèse... Je nourris, et nourrirai sans doute encore longtemps, une profonde admiration pour la qualité de leurs travaux que leur humilité n'atténue en rien, ainsi que pour la passion qu'ils entretiennent à l'égard de leur métier. En particulier je remercie Guillaume pour sa rigueur et son investissement dans ces travaux, toujours à même de débloquer les situations délicates avec élégance, mais aussi Gaëlle pour son écoute et ses conseils pratiques dans la mise en place du banc de mesure, qui n'aura pas été une mince affaire, sans oublier Steve qui m'aura hébergé lors de mon court séjour chez lui à State College, *especially for this 4th of july spent in a very American way.*

Merci à l'équipe du pôle techno, Éric Egon et Jacky Maroudaye, pour la construction du banc de mesure et leur investissement dans le projet.

Je crois également qu'aucune thèse de l'UFR Sciences de l'Université du Mans ne peut être délivrée sans un remerciement préalable à Murielle, dite Mumu, ne serait-ce que pour son oreille disponible et sa bonne humeur de tous les jours autour d'une tasse d'un breuvage chaud quelconque préparé avec adresse.

En quittant ma terre Tahitienne, mon voyage à l'Université du Mans ne se résume pas à ces trois années de doctorat, et je ressens le besoin de remercier les personnes qui m'ont formé pendant ces huit ans maintenant, toute l'équipe pédagogique de la licence SPI, première du nom, et du Master, en particulier Sohbi Sahraoui, Jean-Pierre Dalmont, Olivier Richoux, Olivier Dazel, Christophe Ayrault et Bertrand Lihoreau. Merci à mes collègues et amis doctorants, particulièrement à Élie Chéron, plus grand fan de Maëtica, et Matti Niskanen

pour le soutien que nous alimentons réciproquement dans les passages délicats du doctorat traversés en même temps.

Je remercie bien évidemment mes parents pour m'avoir offert leur confiance et la chance de continuer les études que je souhaitais faire et cela dans de très bonnes conditions, ainsi que mon petit frère pour sa verve et son aplomb que j'admire dans le sport comme dans la vie.

Enfin, je remercie Charlotte, source d'inspiration et soutien infaillible dans la vie que nous avons choisie de partager, pour sa patience à toute épreuve ainsi que pour les sentiments que je me garderai ici de ternir de mes mots maladroits.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Description du banc de mesure</b>	<b>5</b>
1.1 Principe de la méthode de mesure d'impédance . . . . .	5
1.2 Conception du capteur . . . . .	8
1.3 Les capteurs microphoniques . . . . .	10
1.3.1 Étalonnage relatif des microphones . . . . .	10
1.3.2 Post-traitement des données microphoniques . . . . .	11
1.4 Étalonnage du capteur : méthode à 2 charges . . . . .	12
1.4.1 À bas niveau d'excitation acoustique . . . . .	12
1.4.2 Étalonnage fort niveau du capteur . . . . .	14
1.5 Validation de la méthode . . . . .	16
1.5.1 À partir de la mesure d'un tube vide connu . . . . .	16
1.5.2 À partir de la mesure d'une impédance de rayonnement. . . . .	17
1.6 Conclusion . . . . .	19
<b>2 Caractérisation de l'impédance d'entrée d'un noyau thermoacoustique</b>	<b>21</b>
2.1 Description du noyau thermoacoustique étudié . . . . .	21
2.2 Modélisation du noyau thermoacoustique . . . . .	23
2.3 Cas d'un noyau sans chauffage à faible niveau sonore . . . . .	30
2.4 Temps de stabilisation et protocole de mesure . . . . .	32
2.5 Cas d'un noyau avec chauffage . . . . .	33
2.5.1 En fonction de la puissance du chauffage, à faible niveau sonore . . . . .	33
2.5.2 En fonction de l'amplitude du forçage . . . . .	36

2.6	Cartographie complète de l'impédance d'entrée d'un noyau . . . . .	39
2.7	Conclusion . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Prédictions du comportement du moteur à partir de la méthode de raccordement des impédances</b>	<b>41</b>
3.1	Principe de la prédiction . . . . .	43
3.2	Prédiction du déclenchement d'une machine . . . . .	44
3.3	Prédiction du régime établi d'une machine . . . . .	47
3.4	Conclusion . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Application à l'optimisation de la charge raccordée à un noyau</b>	<b>51</b>
4.1	Puissance de sortie d'un noyau thermoacoustique . . . . .	52
4.2	Puissance transmise à un alternateur réel . . . . .	56
4.2.1	Modélisation de la charge réelle raccordée au noyau . . . . .	57
4.2.2	Ajustement de la valeur de la résistance de charge . . . . .	61
4.2.3	Ajustement de la valeur de la masse ajoutée . . . . .	65
4.3	Optimisation des deux paramètres . . . . .	67
4.4	Conclusion . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Sur l'analyse de stabilité des solutions stationnaires</b>	<b>69</b>
5.1	Étude d'un oscillateur simple . . . . .	70
5.1.1	Analyse de stabilité linéaire dans le domaine temporel . . . . .	71
5.1.2	Technique de la describing function . . . . .	72
5.1.3	Lien entre la méthode de la describing function et les présents travaux . . . . .	76
5.2	Description d'un oscillateur relaxant modèle . . . . .	78
5.2.1	Prise en compte des transferts thermiques . . . . .	80
5.2.2	Résolution numérique directe du système . . . . .	82
5.3	Étude de stabilité du modèle . . . . .	85
5.3.1	Analyse de stabilité linéaire . . . . .	85
5.3.2	Technique de la describing function . . . . .	88
5.3.3	Conclusion . . . . .	92
5.4	Méthode expérimentale pour l'étude de stabilité des Cycles Limites . . . . .	93
5.4.1	Oscillateur relaxant vu sous l'angle $Z_{load} + Z_{tac}$ . . . . .	93
5.4.2	Méthode expérimentale pour accéder à la dynamique lentes des auto-oscillations . . . . .	97
5.4.3	Conclusion . . . . .	99

<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>101</b>
<b>A Sur les coefficients de pertes thermiques latérales</b>	<b>105</b>
<b>B Détermination des temps caractéristiques de stabilisation</b>	<b>109</b>
B.1 Changement des conditions de l'excitation acoustique . . . . .	109
B.2 Changement des conditions de chauffage . . . . .	112
<b>C Expression de l'impédance du noyau sous la forme d'un polynôme rationnel</b>	<b>113</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>125</b>
<b>Publications et communications</b>	<b>126</b>

# Introduction

Ce mémoire de doctorat propose de s'intéresser au problème de la prédiction du comportement de moteurs thermoacoustiques. En proposant une méthode expérimentale de caractérisation des différents éléments qui constituent un moteur thermoacoustique, ces travaux visent à montrer qu'il est possible de prévoir son comportement avec une précision satisfaisante. Ce mémoire décrit en premier lieu la méthode de prédiction expérimentale utilisée, et propose, dans un second temps, quelques exemples d'application de cette méthode suggérant une solution pratique destinée à l'étude de ces moteurs lorsque la théorie linéaire ne suffit plus.

L'apport de chaleur fait partie des sources élémentaires de génération d'ondes sonores via une conversion d'énergie thermo-acoustique[23, 86]. La première mise en évidence expérimentale de la conversion thermoacoustique en laboratoire date de 1850 avec les travaux de Sondhauss[78]<sup>1</sup>, suivis par plusieurs autres études concernant différents prototypes de géométrie diverses[32, 71, 72, 73, 74, 75]. À la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, Lord Rayleigh propose une explication qualitative de l'origine du processus de conversion, qui réside au niveau de l'épaisseur des couches limites thermo-visqueuses (près des parois)[80, 81]. Un matériau poreux, ici appelé *stack*, inséré dans la machine, dite *thermoacoustique*, permet notamment d'augmenter la conversion d'énergie en augmentant la surface d'échange avec les parois de la machine. Lorsqu'une différence de température entre les deux extrémités du *stack* est maintenue au delà d'un certain seuil, appelé seuil de *déclenchement*, des auto-oscillations acoustiques fort niveau s'établissent spontanément, à la fréquence qui correspond au mode acoustique le plus instable du résonateur. Ce mécanisme de conversion de la chaleur permet de recueillir un travail mécanique afin, par exemple, de faire fonctionner un alternateur[33, 85].

Si les machines thermoacoustiques sont étudiées aujourd'hui c'est en grande partie pour leur potentiel de récupération de la chaleur, qui certes n'égale encore pas tout à fait celui d'autres machines (comme

---

1. Sans compter la découverte 'accidentelle' de Lord Bryan Higgins en 1777, mettant en évidence un processus nommé *singing flame*.

par exemple les machines de Stirling[90]), mais reste néanmoins très satisfaisant au regard de la simplicité technique et de la robustesse de leur construction[10, 17, 34, 67, 83, 87, 94]. Des efforts ont été fournis pour la compréhension des mécanismes physiques ayant cours au sein des machines thermoacoustiques, à partir des années 70 par Rott[77] et Swift[83], menant à la conception de machines qui favorisent cette conversion énergétique[9, 24, 25, 92, 91, 94]. Parmi les mécanismes encore à l'étude aujourd'hui se trouvent par exemple la propagation des ondes acoustiques et le transport de la chaleur acoustiquement induit au sein du matériau poreux (pouvant prendre une géométrie interne complexe[39, 56, 93, 98]), les effets entropiques et hydrodynamiques aux abords des extrémités du stack ou des échangeurs de chaleur[16, 20, 66], et des effets non linéaires tels que le vent acoustique[26, 40] ou la génération d'harmoniques supérieurs[60]. Des outils de modélisation[26, 40], développés sur la base de la théorie linéaire de Rott[77], permettent toutefois de prendre en compte, de manière approchée, une partie de ces mécanismes à l'origine de la saturation de l'amplification thermoacoustique et ainsi d'anticiper le comportement d'une machine avant sa construction. De la prise en compte incomplète des mécanismes responsables de la saturation découle naturellement la difficulté de prédiction des points de fonctionnement à forts niveaux des machines ainsi que, par exemple, l'impossibilité de reproduire théoriquement les phénomènes de déclenchements et arrêts périodiques des auto-oscillations qui ont parfois lieu et dont l'origine n'est toujours pas clairement identifiée[41]...

Une méthode éprouvée pour caractériser expérimentalement un élément acoustique consiste à mesurer sa *matrice de transfert*, matrice qui relie la pression acoustique et le débit volumique d'un côté à la pression et au débit de l'autre côté d'un système biporte acoustique. Dans le cas où une conversion d'énergie a lieu le long d'un biporte acoustique, il est possible de déduire de cette matrice les conditions nécessaires, voire optimales, de conversion d'énergie[7]. Pour un moteur thermoacoustique, c'est à l'intérieur du *noyau*, qui est la partie chargée du stack et dans laquelle le champ axial de température n'est pas uniforme, que se situe la conversion d'énergie. Réalisée à bas niveau acoustique pour une gamme de chauffage et de fréquence données, une mesure de la matrice de transfert du noyau permet alors de prédire le déclenchement de l'instabilité thermoacoustique[13, 39, 42], mais aussi d'obtenir les conditions optimales de conversion d'énergie à partir de la matrice de *diffusion* associée[47]. La matrice de diffusion relie les grandeurs acoustiques entrant dans l'élément à celles qui en sortent et les vecteurs propres de la matrice donnent les conditions à satisfaire pour atteindre une conversion optimale, dont la valeur est donnée par les valeurs propres. Cela permet alors de proposer une géométrie optimale de *charge*, c'est à dire de l'élément raccordé au noyau, qui assurera les conditions acoustiques calculées. Une autre méthode, proposée par Hatori et al., consiste à mesurer l'impédance d'entrée des différents éléments qui constituent le moteur thermoacoustique, à savoir le noyau d'un côté et la charge de l'autre, afin de prédire le seuil de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique du moteur une fois assemblé[46].

Ces méthodes sont réalisées à bas niveau sonore, et, de ce fait, excluent la détermination de la saturation d'une machine, c'est à dire de son *point de fonctionnement*. La méthode expérimentale développée dans ce manuscrit s'inspire d'une démarche proposée dans le cadre de l'étude des instabilités thermoacoustiques générées par des systèmes tels que les turbines à gaz[30, 31, 57]. Dans le cas de ces systèmes, il est possible de mesurer une *describing function* décrivant les mécanismes non linéaires au sein du brûleur, dissociés des autres mécanismes linéaires. Cette fonction caractérise l'instabilité thermoacoustique en fonction l'apport de chaleur et de l'amplitude du forçage acoustique au niveau de l'élément non linéaire, considéré *compact* au regard de la longueur d'onde acoustique[48].

Malheureusement, ce formalisme ne peut pas être appliqué directement pour l'étude de moteurs thermoacoustiques car la conversion d'énergie à l'intérieur d'un stack ne peut pas être décrite uniquement par l'amplitude du forçage puisqu'elle dépend aussi de la phase entre la pression acoustique et le débit volumique. Il est cependant possible de se soustraire à ce problème en caractérisant expérimentalement un noyau à l'intérieur duquel la phase entre la pression et le débit est déterminée par les conditions aux limites. C'est d'ailleurs le cas dans les travaux d'Hatori et al.[46], qui montrent que la mesure de l'*impédance acoustique* d'entrée de la charge et du noyau, c'est à dire le rapport entre la pression acoustique et le débit volumique à l'entrée d'un élément, permet de prédire le seuil de déclenchement d'une machine en raccordant ces impédances mesurées. Puisque la phase entre la pression et le débit est déterminée lors de la mesure de l'impédance d'entrée d'un noyau thermoacoustique, seul compte le niveau de forçage acoustique imposé lors de la mesure.

L'idée est alors d'adapter le principe du capteur d'impédance acoustique, développé par Dalmont[27, 28], principalement pour des applications en acoustique musicale, à l'utilisation à fort niveau sonore afin de chercher à caractériser la saturation de l'amplification thermoacoustique dans un noyau.

Le chapitre 1 a pour but d'expliquer le fonctionnement du capteur, ainsi que les précautions à prendre lors d'une mesure de l'impédance acoustique d'entrée d'un élément donné. Un soin particulier est apporté au détail de la procédure d'étalonnage du capteur mais aussi à la vérification de la validité des mesures. Une fois le capteur étalonné, des mesures d'impédance d'entrée sont effectuées sur un noyau thermoacoustique, en fonction de la fréquence et de la puissance du chauffage à bas niveau sonore, puis en fonction de l'amplitude du forçage acoustique. Ces mesures font l'objet du chapitre 2 et sont comparées à un modèle basé sur la théorie de Rott couplée à une description des transferts thermiques dans le noyau. Dans le chapitre 3, les mesures d'impédances d'entrée décrites aux chapitres 1 et 2 sont utilisées dans le cadre d'une méthode de raccordement menant à la prédiction du seuil de déclenchement ainsi qu'au point de fonctionnement, à fort niveau, du moteur. Le chapitre 4 s'appuie sur cette démarche pour décrire un procédé d'optimisation des paramètres d'une charge qui tirerait le meilleur parti du noyau auquel elle est couplée. Finalement, la question de la stabilité, ou plus généralement de l'évolution dans le temps, de l'amplitude des auto-oscillations

acoustiques générées par le moteur est discutée dans le chapitre [5](#).

# Chapitre 1

## Description du banc de mesure

Dans ce chapitre, le banc de mesure développé pour la caractérisation expérimentale d'un noyau thermoacoustique à fort niveau d'amplitude est présenté. Le premier paragraphe décrit la méthode de mesure utilisée. S'en suit le paragraphe 1.2 qui traite de la conception pratique du capteur et des considérations techniques à prendre en compte lors de sa réalisation. Le paragraphe 1.3 explicite le post-traitement appliqué aux signaux microphoniques ainsi que la méthode de détermination de leur sensibilité relative. Le pénultième paragraphe 1.4 de ce chapitre détaille la méthode de détermination des admittances  $Y_1$  et  $Y_2$ . Enfin, le paragraphe 1.5 propose quelques mesures d'impédances d'entrée de différentes charges obtenues en utilisant le capteur.

### 1.1 Principe de la méthode de mesure d'impédance

Un capteur d'impédance acoustique est un système qui permet de mesurer l'impédance à l'entrée de n'importe quel système acoustique auquel il est raccordé[27, 28]. Il est constitué d'une source de débit acoustique, un haut-parleur par exemple, insérée dans une cavité fermée, comme indiqué sur la figure 1.1. La source contrôle l'amplitude et la fréquence du champ acoustique au sein du capteur. Connaître ce champ acoustique interne permet de déduire une impédance acoustique au point de sortie :

$$Z_{\text{out}} = \frac{\tilde{p}_{\text{out}}}{\tilde{u}_{\text{out}}}, \quad (1.1)$$

où  $\tilde{p}_{\text{out}}$  et  $\tilde{u}_{\text{out}}$  sont respectivement les amplitudes complexes de la pression acoustique et le débit acoustique à la sortie du capteur. Cette impédance correspond à l'impédance d'entrée acoustique  $Z_{\text{in}}$  de la charge placée sur le capteur telle que  $Z_{\text{in}} = Z_{\text{out}}$ , par continuité des champs de pression et de débit volumique. La pression est mesurée en deux points par les microphones 1 ( $\tilde{p}_1$ ) et 2 ( $\tilde{p}_2$ ). Le haut-parleur sépare la cavité en deux parties, et les microphones sont placés de part et d'autre de la membrane. Le débit volumique est alors le

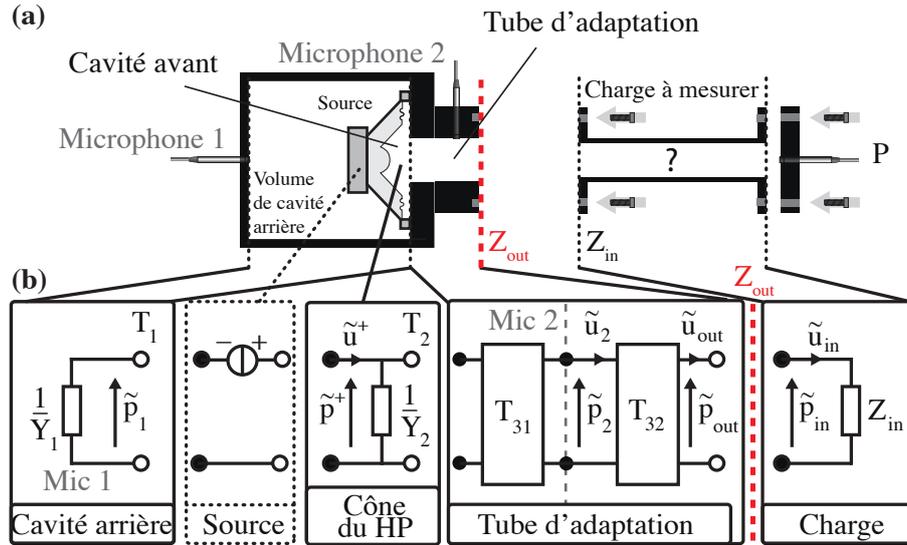


FIGURE 1.1 – (a) Schéma de la géométrie interne du capteur et (b) sa représentation électro-acoustique équivalente. Un haut-parleur, supporter par une pièce d'adaptation, est introduit dans une cavité en PVC.

même, au signe près, sur les deux faces de la membrane de la source utilisée. Sur cette même figure 1.1, le capteur est associé à sa propre représentation en analogie électro-acoustique[76]. Ce circuit équivalent dans le domaine acoustique permet de relier le microphone 1 (en cavité arrière) au débit du haut-parleur. En effet, en première approximation, la cavité arrière, fermée, s'apparente à un ressort gazeux. Il est alors possible de relier le débit volumique  $\tilde{u}^+$  imposé par le déplacement de la source à la pression mesurée au microphone 1 :

$$\tilde{u}^+ = -Y_1 \tilde{p}_1, \quad (1.2)$$

où  $Y_1$  est l'admittance équivalente à la raideur gazeuse de la cavité arrière. Une fois le débit acoustique  $\tilde{u}^+$  connu à la surface de la membrane, il est possible d'estimer le débit  $\tilde{u}_2$  au niveau du microphone 2, via la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_2 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{T}_{31}] \times [\mathbf{T}_2] \times \begin{bmatrix} \tilde{p}^+ \\ \tilde{u}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{31(p,p)} & T_{31(p,u)} \\ T_{31(u,p)} & T_{31(u,u)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -Y_2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{p}^+ \\ \tilde{u}^+ \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

où  $\tilde{p}^+$  est la pression s'exerçant sur la face avant de la membrane,  $[\mathbf{T}_{31}]$  et  $[\mathbf{T}_2]$  sont les matrices de transfert des éléments illustrés en figure 1.1. La matrice de transfert  $[\mathbf{T}_2]$  contient non seulement l'effet du volume d'air situé entre le cône du haut-parleur mais aussi l'effet de la discontinuité géométrique au niveau du changement de section[53]<sup>1</sup>.

Une matrice de transfert associée à un guide d'onde unidimensionnel de longueur  $L$  est définie en fonction

1. L'effet de la discontinuité se traite comme le problème d'un piston gazeux oscillant entre les deux sections. En toute rigueur, la matrice  $[\mathbf{T}_2]$  devrait donc faire apparaître un terme  $T_2(p, u)$  non nul. Cependant, la prise en compte d'un terme supplémentaire dans cette matrice alourdirait beaucoup la méthode conduisant à la mesure de  $[\mathbf{T}_2]$ . Ce rayonnement n'est donc pas directement pris en compte dans l'étalonnage, et il semble, comme le montre la suite du chapitre, que cette approximation ne joue pas un rôle critique pour la justesse de la mesure de l'impédance d'entrée d'un élément.

de la géométrie du milieu de propagation, voir par exemple [83, 85] :

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos(kL) & -jZ_c \sin(kL) \\ -jZ_c^{-1} \sin(kL) & \cos(kL) \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

avec  $k$  le nombre d'onde et  $Z_c$  l'impédance caractéristique du milieu, tous deux prenant en compte les effets viscothermiques le long des parois[79], et sont définis en fonction de la section  $S$  du guide, de la masse volumique moyenne  $\rho_0$  (à température ambiante) et de la célérité des ondes acoustiques  $c_0$  (à température ambiante) dans le milieu de propagation par :

$$k = k_0 \sqrt{\frac{1 + (\gamma - 1)f_\kappa}{1 - f_\nu}}, \quad (1.5)$$

$$Z_c = \frac{\rho_0 c_0}{S} \frac{1}{\sqrt{(1 - f_\nu)(1 + (\gamma - 1)f_\kappa)}}, \quad (1.6)$$

avec le nombre d'onde sans pertes  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ . Ces grandeurs font intervenir  $\gamma$  le coefficient polytropique (défini comme le rapport des chaleurs spécifiques) du fluide,  $f_\nu$  et  $f_\kappa$  les fonctions viscothermiques définies dans le cas d'un guide cylindrique à base circulaire de rayon  $R$ [4], en fonction de la couche limite visqueuse  $\delta_\nu = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$  avec  $\omega$  la pulsation et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide, et de la couche limite thermique  $\delta_\kappa = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}$  avec  $\kappa$ , la diffusivité thermique du fluide :

$$f_{\nu,\kappa} = \frac{2\delta_{\nu,\kappa}}{(1-j)R} \frac{J_1\left((1-j)\frac{R}{\delta_{\nu,\kappa}}\right)}{J_0\left((1-j)\frac{R}{\delta_{\nu,\kappa}}\right)}. \quad (1.7)$$

Cette expression fait apparaître des fonctions de Bessel d'ordre  $m$ , notées  $J_m$ .

L'équation (1.3) conduit à l'expression du débit  $\tilde{u}_2$  :

$$\tilde{u}_2 = (T_{31(u,p)} - Y_2 T_{31(u,u)}) \tilde{p}^+ + T_{31(u,u)} \tilde{u}^+, \quad (1.8)$$

situé au niveau du microphone 2, comme indiqué sur la figure 1.1. Cette relation fait cependant apparaître que la détermination préalable de la pression acoustique  $\tilde{p}^+$  et du débit  $\tilde{u}^+$  est nécessaire à sa résolution. Contrairement au débit de la membrane, dont l'expression dépend uniquement de la mesure de  $\tilde{p}_1$  via la relation (1.2), l'expression de la pression  $\tilde{p}^+$  ne peut être directement obtenue puisque la pression qui s'applique sur la face avant de la membrane n'est pas celle qui s'applique sur la face arrière. Pour obtenir la valeur de  $\tilde{p}^+$ , il faut ramener la pression  $\tilde{p}_2$  mesurée par le microphone 2 ( $\tilde{p}_2$ ) au niveau de la membrane telle que :

$$\tilde{p}^+ = T_{31(u,u)} \tilde{p}_2 - T_{31(p,u)} \tilde{u}_2. \quad (1.9)$$

Une fois cette dernière relation et celle en (1.2) substituées dans l'équation (1.8), le débit  $\tilde{u}_2$  s'exprime alors

sous la forme suivante :

$$\tilde{u}_2 = \frac{\left( T_{31(u,p)} - Y_2 T_{31(u,u)} + Y_1 \frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_2} \right) T_{31(u,u)}}{1 - Y_2 T_{31(p,u)} T_{31(u,u)} + T_{31(p,u)} T_{31(u,p)}} \tilde{p}_2. \quad (1.10)$$

L'impédance  $Z_2$  au niveau du microphone 2 est calculée en faisant intervenir la fonction de transfert  $H_{21}$  entre les deux microphones :

$$H_{21} = \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_1}, \quad (1.11)$$

ce qui mène à :

$$Z_2 = \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{u}_2} = \frac{1 - T_{31(p,u)} (Y_2 T_{31(u,u)} - T_{31(u,p)})}{T_{31(u,u)} \left( T_{31(u,p)} + Y_2 T_{31(u,u)} + \frac{Y_1}{H_{21}} \right)}. \quad (1.12)$$

Grâce à cette équation, il suffit d'écrire la relation entre  $Z_2$  et  $Z_{\text{in}}$  faisant intervenir la matrice de passage  $\mathbf{T}_{32}$  de la seconde partie du tube d'adaptation. La pression  $\tilde{p}_{\text{in}}$  et le débit  $\tilde{u}_{\text{in}}$  à l'entrée de la charge sont reliés à ceux au niveau du microphone 2 grâce à la relation :

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_{\text{in}} \\ \tilde{u}_{\text{in}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{32(p,p)} & T_{32(p,u)} \\ T_{32(u,p)} & T_{32(u,u)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{p}_2 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Finalement, l'impédance d'entrée de la charge s'écrit en faisant implicitement apparaître la fonction de transfert  $H_{21}$  :

$$Z_{\text{in}} = \frac{\tilde{p}_{\text{in}}}{\tilde{u}_{\text{in}}} = \frac{Z_2(H_{21})T_{32(p,p)} + T_{32(p,u)}}{Z_2(H_{21})T_{32(u,p)} + T_{32(u,u)}}. \quad (1.14)$$

L'impédance acoustique  $Z_{\text{in}}$  à l'entrée de la charge est donc obtenue à partir de cette relation qui dépend uniquement de la fonction de transfert  $H_{21}$ , reliant les pressions acoustiques mesurées par les microphones avant ( $\tilde{p}_2$ ) et arrière ( $\tilde{p}_1$ ), et de la connaissance de la géométrie du système :

$$Z_{\text{in}} = f(H_{21}, Y_1, Y_2). \quad (1.15)$$

La mesure de l'impédance  $Z_{\text{in}}$  nécessite donc de connaître non seulement la fonction de transfert  $H_{21}$  des microphones 1 et 2 mais aussi de déterminer les valeurs des admittances équivalentes  $Y_1$  et  $Y_2$ .

## 1.2 Conception du capteur

Pour les besoins spécifiques de la mesure, détaillés ci-avant, le capteur est construit au laboratoire où l'étude est réalisée.<sup>2</sup> La version finale du capteur est constituée d'une cavité cylindrique à base circulaire en PVC de 1 cm d'épaisseur de paroi pour un rayon interne de 10 cm, comme illustré sur la figure 1.2. Un presse-étoupe est placé au centre du fond rigide et permet de faire entrer le microphone 1 dans la cavité tout

2. Laboratoire d'Acoustique l'Université du Mans (CNRS - UMR 6613)

en assurant l'étanchéité de la paroi. La jonction entre le PVC et le pas de vis du presse-étoupe est ensuite vernie. Le microphone est finement ajusté pour affleurer la paroi minimisant ainsi son intrusivité dans la cavité.

Un tube de couplage de rayon  $R = 2.7$  cm permet de faire correspondre la section de l'entrée de la charge avec celle de la sortie du capteur. Ce tube de couplage doit d'abord être vissé sur la face avant d'une pièce en PVC permettant de supporter le châssis du haut-parleur (HP). Le tube de couplage est usiné en acier inoxydable afin de pouvoir le visser fortement depuis l'intérieur sans en abîmer le pas de vis. Du frein filet permet de minimiser le glissement des vis causé par les forts déplacements de la membrane. Des joints toriques, placés dans des gouttières, assurent l'étanchéité à la jonction entre les divers éléments du capteur. Le microphone 2 est encastré dans la pièce d'adaptation, à  $L_{32} = 2$  cm de la sortie du capteur, affleurant la paroi interne, et un presse-étoupe assure l'absence de fuite.

La source, ici un haut-parleur Beyma 6MI100<sup>3</sup>, est vissée sur la pièce d'adaptation depuis la face interne. Un soin particulier est apporté à la mise en place des vis qui maintiennent le haut-parleur au couvercle. En effet, la source est amenée à exécuter de grands déplacements, il faut donc s'assurer qu'elle reste parfaitement vissée au support lors d'une mesure. Les éventuels jours laissés par les vis sont ensuite vernis largement pour s'assurer de l'absence de fuites entre l'avant et l'arrière de la source. Pour s'assurer de l'étanchéité de la membrane cette fois, celle-ci est elle aussi vernie plusieurs fois. L'augmentation de la masse de la partie mobile causée par l'ajout du vernis est supposée ne pas avoir d'impact sur la qualité de la mesure car l'intérêt du système est justement de s'affranchir des paramètres de la source. En effet, comme le montre l'équation (1.15), le post-traitement des données pour la mesure de l'impédance d'entrée de la charge se fait indépendamment des caractéristiques électro-mécano-acoustiques du haut-parleur.

Des passe-câbles permettent d'alimenter le haut-parleur sans introduire de fuite dans la cavité. Une fois la source connectée, la pièce d'adaptation est montée sur la cavité arrière en s'assurant une nouvelle fois de l'étanchéité du capteur complet. Pour cela, un joint torique et de la graisse à vide sont utilisés et la pièce d'adaptation est vissée sur les parois latérales de la cavité arrière.

Le tube de couplage offre la possibilité de connecter toutes charges de même section tout en assurant une jonction étanche via un joint torique et l'utilisation de graisse à vide. Les charges sont donc vissées directement sur le tube à la sortie du capteur.

Une fois les microphones étalonnées l'un par rapport à l'autre, il devient possible d'extraire l'impédance d'entrée d'une charge montée sur le capteur à partir des signaux récupérés. Les microphones de mesure utilisés dans le capteur sont des Brüel & Kjaer 4938 et offrent un taux de saturation très faible, y compris à fort niveau de pression acoustique. Selon les spécifications du constructeur, les modèles de microphones 1/4 de pouce 4938 sont utilisables de 3 Hz à 70 kHz pour des niveaux de pression allant de 30 à 172 dB SPL

---

3. <https://www.beyma.com/products/lowmidfrequency/106MI108>

(leur sensibilité absolue est située aux alentours de 1.6 mV/Pa).

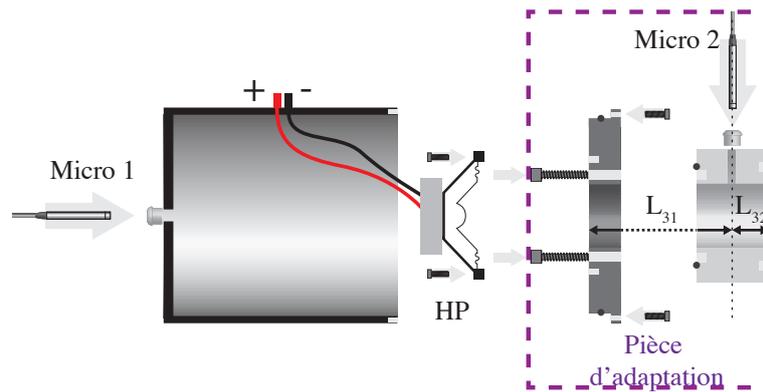


FIGURE 1.2 – Vue éclatée du capteur. Les microphones sont insérés, de manière étanche, dans le capteur grâce à l'utilisation de presse-étoupes. Un haut-parleur et un tube de couplage sont attachés de part et d'autre d'une épaisse pièce en PVC. Cet ensemble est ensuite vissé à l'entrée d'une cavité en PVC d'un centimètre d'épaisseur et de 10 cm de rayon, formant une pièce d'adaptation étanche.

## 1.3 Les capteurs microphoniques

### 1.3.1 Étalonnage relatif des microphones

La mesure de l'impédance d'entrée d'un élément connecté à la sortie du capteur nécessite la connaissance de la fonction de transfert  $H_{21}$ . Afin de déterminer le rapport des pressions  $\tilde{p}_1$  et  $\tilde{p}_2$  au niveau des microphones 1 et 2, il est nécessaire de connaître les sensibilités respectives des deux microphones et de compenser l'écart entre les deux. Noté  $S_{21}$ , ce rapport est donné par :

$$S_{21}(\omega) = \frac{\tilde{s}_2(\omega)}{\tilde{s}_1(\omega)}, \quad (1.16)$$

avec  $s_1$  et  $s_2$  étant respectivement les sensibilités des microphones 1 et 2 (dont le module et la phase dépendent de la pulsation  $\omega$ ). L'utilisation de la fonction de transfert  $H_{21}$  offre justement l'avantage qu'un étalonnage relatif soit suffisant, permettant de faire intervenir  $S_{21}$ , le rapport des sensibilités mesuré en fonction de la fréquence.

Un coupleur est un système permettant de placer deux microphones l'un en face de l'autre dans une petite cavité où le champ acoustique est uniforme. Cette uniformité du champ constitue l'intérêt du système et est assurée par une distance entre les deux microphones très faible devant la longueur d'onde. Un schéma de l'appareil est donné sur la figure 1.3b. Puisque le champ est le même sur les deux membranes microphoniques, la fonction de transfert du microphone 1 vers le microphone 2, correspond au rapport des tensions mesurées  $\tilde{s}_{(1,2)}\tilde{p}$  par les microphones pour une même pression acoustique complexe  $\tilde{p}$ , ce qui mène directement au

rapport des sensibilités :

$$S_{21} = \frac{\tilde{s}_2 \tilde{p}}{\tilde{s}_1 \tilde{p}} = \frac{\tilde{s}_2}{\tilde{s}_1}. \quad (1.17)$$

Après une mesure au coupleur dans la bande de fréquence d'intérêt, il suffit donc de diviser les futures mesures de  $H_{21}$  par  $S_{21}$  afin d'obtenir le rapport réel des pressions.

La bande d'intérêt est suffisamment restreinte (au maximum [130 :200] Hz) pour qu'une régression polynomiale<sup>4</sup> d'ordre 2 puisse suffire à décrire la fonction  $S_{21}$  avec une précision satisfaisante. D'après les courbes sur la figure 1.4, l'incertitude d'estimation de la sensibilité relative des microphones 1 et 2 est proche de 0.01%. L'intérêt de l'utilisation d'une régression polynomiale tient à sa facilité d'utilisation indépendamment des valeurs des fréquences étudiées, tant que ces dernières restent dans la gamme de validité de la régression.

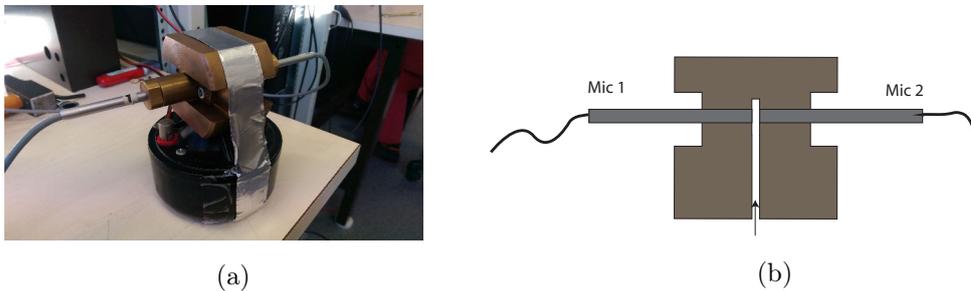


FIGURE 1.3 – (1.3a) Photographie et (1.3b) schéma du coupleur. Les deux microphones sont placés dans une même cavité, de très petite dimension devant la longueur d'onde, afin qu'une source impose un champ acoustique homogène. L'écart entre les deux microphones à l'intérieur est inférieur au millimètre.

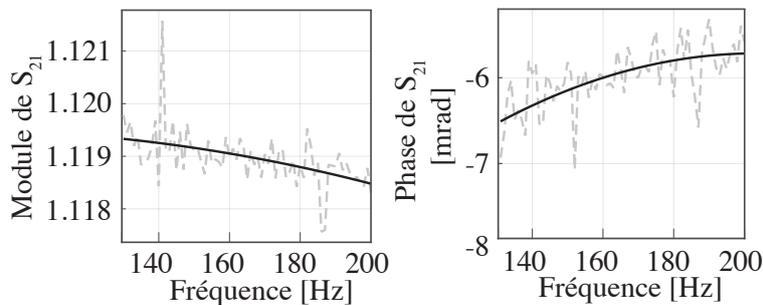


FIGURE 1.4 – Sensibilité relative des microphones 1 et 2, notée  $S_{21}$ , dans la bande d'intérêt [130 :200] Hz. Une régression polynomiale d'ordre 2 est réalisée en partie réelle et imaginaire sur les données.

### 1.3.2 Post-traitement des données microphoniques

Les tensions des microphones sont recueillies via une carte d'acquisition National Instrument® BNC-2110<sup>5</sup> dont la fréquence d'échantillonnage est ajustable. Ces signaux, une fois numérisés, sont traités afin

4. réalisée de manière indépendante sur la partie réelle et imaginaire

5. <http://sine.ni.com/nips/cds/view/p/lang/fr/nid/1865>

d'obtenir une amplitude complexe dans le domaine des fréquences, par une méthode de détection synchrone, pour chaque pulsation considérée :

$$\tilde{p}_i(\omega) = A_i(\omega)e^{j\phi_i(\omega)}, \quad (1.18)$$

où  $A_i$  est l'amplitude du signal et  $\phi_i$  est la phase du signal à la pulsation  $\omega$ .

## 1.4 Étalonnage du capteur : méthode à 2 charges

### 1.4.1 À bas niveau d'excitation acoustique

L'impédance d'entrée d'une charge montée à la sortie du capteur s'exprime via la fonction de transfert  $H_{21}$  reliant les deux microphones (avant et arrière), elle-même dépendante de la géométrie du banc, comme explicité par la relation (1.15). En se basant sur la mesure de la sensibilité relative des microphones,  $S_{21}$ , et en mesurant l'impédance d'entrée de différentes charges étalons (telles que des tubes vides), il est possible de caractériser la géométrie interne du capteur. En l'occurrence, il s'agit ici de déterminer les fonctions  $Y_1$  et  $Y_2$  nécessaires au traitement des signaux pour l'obtention de l'impédance d'entrée de la charge. La matrice de transfert d'un tube vide de longueur  $L$  s'écrit :

$$[\mathbf{T}_{\text{tube}}] = \begin{bmatrix} T_{pp} & T_{pu} \\ T_{up} & T_{uu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(kL) & -jZ_c \sin(kL) \\ -jZ_c^{-1} \sin(kL) & \cos(kL) \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Cette matrice relie la pression  $\tilde{p}_s$  et le débit volumique  $\tilde{u}_s$  en sortie à la pression  $\tilde{p}_e$  et au débit volumique  $\tilde{u}_e$  à l'entrée du tube :

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_s \\ \tilde{u}_s \end{bmatrix} = [\mathbf{T}_{\text{tube}}] \times \begin{bmatrix} \tilde{p}_e \\ \tilde{u}_e \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Dans le cas d'un tube terminé par une paroi rigide, le débit volumique en sortie est nul :

$$\tilde{u}_s = 0. \quad (1.21)$$

De cette manière, l'impédance d'entrée  $Z_{\text{charge}}$ , c'est-à-dire le rapport de  $\tilde{p}_e$  et  $\tilde{u}_e$ , d'un tube vide fermée s'écrit :

$$Z_{\text{charge}} = \frac{\tilde{p}_e}{\tilde{u}_e} = \frac{-jZ_c}{\tan(kL)}. \quad (1.22)$$

Pour déterminer les deux admittances  $Y_1$  et  $Y_2$ , deux mesures sont nécessaires, impliquant deux charges étalons différentes. Une première mesure est réalisée lorsque le capteur est fermé par une paroi rigide. L'usage de cette configuration est indiqué dans les équations par l'exposant ( $R$ ). Dans ce cas, l'impédance d'entrée de la charge,  $Z_{\text{charge}}^{(R)}$ , prend une valeur très grande, considérée infinie. Une deuxième configuration consiste à charger la sortie du capteur par un tube de longueur connue ( $L_{\text{tube}} = 20$  cm ici) fermé par un bouchon rigide. L'exposant ( $T$ ) se réfère aux grandeurs mesurées dans cette configuration. L'impédance d'entrée, notée  $Z_2$ ,

est calculée à la position du microphone 2 et s'écrit comme une fonction de l'impédance d'entrée de la charge montée sur le capteur :

$$Z_2 = \frac{T_{32(u,u)}Z_{\text{charge}} - T_{32(p,u)}}{T_{32(p,p)} - T_{32(u,p)}Z_{\text{charge}}}. \quad (1.23)$$

Selon le type de charge-étalon utilisée (paroi rigide ( $R$ ) ou tube vide ( $T$ )), cette impédance est donnée par :

$$Z_2^{(R)} = -\frac{T_{32(u,u)}}{T_{32(u,p)}} = \frac{-jZ_c}{\tan(kL_{32})}, \quad (1.24)$$

$$Z_2^{(T)} = -jZ_c \frac{\frac{\cos(kL_{32})}{\tan(kL_{\text{tube}})} - \sin(kL_{32})}{\cos(kL_{32}) \frac{\sin(kL_{32})}{\tan(kL_{\text{tube}})}}. \quad (1.25)$$

L'équation (1.25) est obtenue en considérant que l'impédance caractéristique  $Z_c$  est la même pour le tube d'adaptation et pour le tube étalon. Cette considération peut être faite car il s'agit là de deux tubes de section identique dont seule la longueur diffère. Quelques variables auxiliaires utiles pour la suite du développement sont définies :

$$\beta^{(R,T)} = -Z_2^{(R,T)}T_{31(u,p)} + T_{31(p,p)}, \quad (1.26)$$

$$\gamma^{(R,T)} = Z_2^{(R,T)}T_{31(u,u)} - T_{31(p,u)}. \quad (1.27)$$

Alors il est possible de se servir de la relation (1.13) et des paramètres  $-Z_2^{(R,T)}$ ,  $\beta^{(R,T)}$  et  $\gamma^{(R,T)}$  pour obtenir une définition de  $H_{21}$  faisant apparaître explicitement les fonctions  $Y_1$  et  $Y_2$  :

$$H_{21}^{(R,T)}(\omega) = \frac{Z_{32}^{(R,T)}Y_1(\omega)}{\beta^{(R,T)} + \gamma^{(R,T)}Y_2(\omega)}, \quad (1.28)$$

où :

$$Y_1(\omega) = \frac{1}{Z_2^{(R)} \left( \beta^{(R)}H_{21}^{(R)}(\omega) + \gamma^{(R)}H_{21}^{(R)}(\omega)Y_2(\omega) \right)}, \quad (1.29)$$

$$Y_2(\omega) = \frac{Z_2^{(T)}\beta^{(R)}H_{21}^{(R)}(\omega) - Z_2^{(R)}\beta^{(T)}H_{21}^{(T)}(\omega)}{Z_2^{(R)}\gamma^{(T)}H_{21}^{(T)}(\omega) - Z_2^{(T)}\gamma^{(R)}H_{21}^{(R)}(\omega)}. \quad (1.30)$$

Une fois les deux mesures réalisées, il suffit de substituer dans les équations (1.29) et (1.30) les fonctions de transfert par les données recueillies pour obtenir les valeurs mesurées des admittances  $Y_1$  et  $Y_2$ . Les courbes représentant la variation en fréquence de ces fonctions sont tracées en figure 1.5. Il apparaît que la partie imaginaire est de deux ordres plus grande que la partie réelle. Cela s'explique par le comportement principalement compliant des deux cavités. L'estimation de l'impédance  $Z_{\text{charge}}$  découle alors de l'équation (1.15) en utilisant ces valeurs de  $Y_1$  et  $Y_2$ .

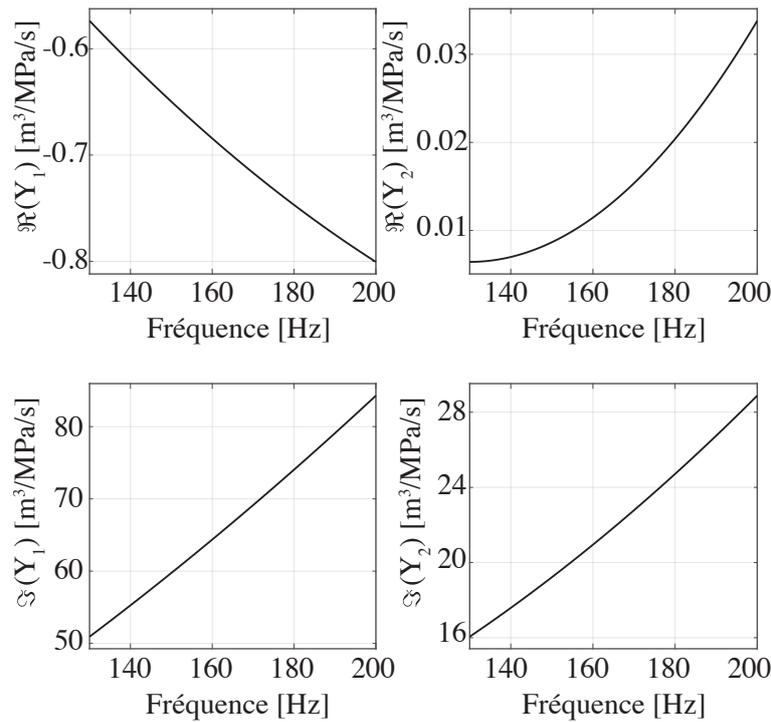


FIGURE 1.5 – Courbes expérimentales décrivant  $Y_1$  et  $Y_2$  déduites des équations (1.29) et (1.30) en fonction de la fréquence. Il apparaît que la partie imaginaire est de deux ordres plus grande que la partie réelle. Cela s’explique par le comportement principalement compliant des deux cavités.

### 1.4.2 Étalonnage fort niveau du capteur

L’intérêt du capteur décrit ci-avant est d’imposer un champ acoustique intense à une charge. Le haut-parleur utilisé doit être capable d’alimenter un champ acoustique de fort niveau de sorte que l’impédance puisse être mesurée en fonction de la pression enregistrée par le microphone de référence  $P$ . Jusqu’ici cependant, aucune hypothèse n’est faite sur la linéarité du capteur. Or, d’éventuelles pertes acoustiques non linéaires localisées à l’intérieur du capteur sont introduites à fort niveaux d’excitation en plus de l’impédance de la charge, et impactent la mesure de cette dernière. Ces pertes ont notamment de grandes chances d’être situées au niveau du changement de section dans la cavité avant, ou au niveau du saladier ou du moteur magnétique dans la cavité arrière, comme l’illustre le schéma sur la figure 1.6. Ceci risque de mener à une mauvaise estimation de l’impédance mesurée à fort niveaux de forçage acoustique, si ces pertes ne sont pas prises en compte. En effet, si des pertes additionnelles sont générées à l’intérieur du capteur, l’impédance du capteur augmente tandis que l’impédance d’un tube vide à mesurer ne sera que très peu impactée par le changement de niveau acoustique, à supposer qu’il soit assez court pour s’assurer du faible impact des effets de propagation non-linéaire. Pour des pertes de plus en plus importantes localisées dans le capteur, l’impédance de charge mesurée devient alors de plus en plus faible une fois traitée avec l’algorithme d’étalonnage bas niveau. Cet algorithme ne prenant pas en compte le changement de résistance interne du capteur, la charge est donc perçue comme de moins en moins résistante par rapport aux pertes contenues dans le

capteur qui, elles, augmentent.

Pour se soustraire à ce biais, il est proposé ici d'appliquer un nouvel étalonnage non plus en fonction de la fréquence mais de la pression acoustique imposée, plus précisément, en fonction du débit de la source en faisant l'hypothèse que ces pertes sont proportionnelles au débit acoustique au niveau de la discontinuité d'écoulement. Pour prendre en considération le débit de la source, il suffit de prendre en compte le niveau sonore mesuré dans la cavité arrière par le microphone 1. Les admittances  $Y_1$  et  $Y_2$  sont mesurées en fonction de la pression  $\tilde{p}_1$ . Les variations relatives, notées  $\delta Y_{(1,2)}$ , de ces fonctions sont calculées comme :

$$\delta Y_{(1,2)}(\tilde{p}_1) = \frac{Y_{(1,2)}(\tilde{p}_1) - Y_{(1,2)}(\tilde{p}_1 \rightarrow 0)}{Y_{(1,2)}(\tilde{p}_1 \rightarrow 0)}, \quad (1.31)$$

et sont représentées en figure (1.7) pour une fréquence  $f = 160\text{Hz}$ . La dépendance de ces fonctions à la pression  $\tilde{p}_1$  est quantifiable et ces dernières peuvent se réécrire, en première approche, sous la forme d'une fonction affine :

$$Y_1(f_n, \tilde{p}_1) = Y_1(f_n, \tilde{p}_1 \rightarrow 0) + \alpha_1 \tilde{p}_1; \quad (1.32)$$

$$Y_2(f_n, \tilde{p}_1) = Y_2(f_n, \tilde{p}_1 \rightarrow 0) + \alpha_2 \tilde{p}_1; \quad (1.33)$$

où,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des coefficients complexes qui dépendent *a priori* de la fréquence. Cependant, au regard de l'étroite bande de fréquence d'intérêt ([130 : 200] Hz), il se trouve que ces coefficients ne varient en réalité que très peu au regard de  $f$ . Cette correction sera utilisée dans le cadre de futures mesures à fort niveau de forçage au cours des chapitres 2 et 3. Dans le cadre de ces futures études, il sera possible de discuter de l'intérêt (ou non) d'un tel étalonnage.

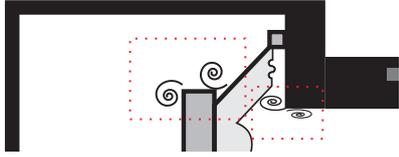


FIGURE 1.6 – Schéma représentant les pertes aérodynamiques (non linéaires) localisées dans le capteur lors de son utilisation à fort niveau.

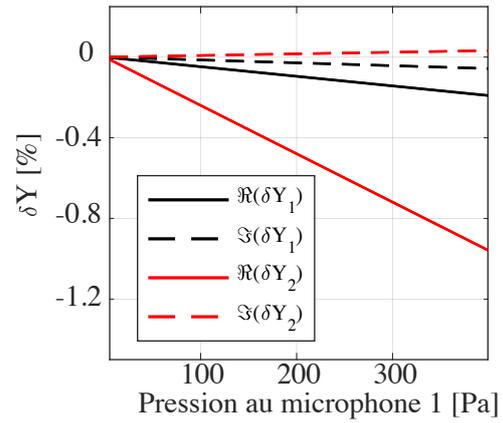


FIGURE 1.7 – Fonctions  $\delta Y_1$  et  $\delta Y_2$  en fonction de la pression,  $\tilde{p}_1$ , mesurée par le microphone en cavité arrière à la fréquence  $f = 160$  Hz. Les courbes en pointillés sont les courbes des parties imaginaires tandis que les courbes en trait plein représentent les parties réelles de ces fonctions.

## 1.5 Validation de la méthode

Une fois le capteur étalonné, il reste à vérifier que l'impédance fournie après application du post-traitement est valide. Un moyen de rendre compte de cette validité est de se servir de charges de référence. La particularité de ces charges réside dans le fait qu'elles puissent être décrites analytiquement de manière précise. L'impédance d'entrée d'un tube vide fermé par une paroi rigide par exemple est suffisamment bien connue pour que sa mesure serve d'examen pour la justesse de l'estimation fournie par le capteur, du moins à bas niveau de forçage. C'est d'ailleurs en considérant que ce genre de charge est bien décrit que les fonctions  $Y_1$  et  $Y_2$  sont estimées précédemment, via les relations (1.29) et (1.30) pour l'étalonnage linéaire, et (1.32) et (1.33) pour l'étalonnage non linéaire. Dans le paragraphe suivant, des impédances d'entrée de tubes vides de différentes longueurs sont mesurées et confrontées aux résultats obtenus par la théorie. Dans un second paragraphe, une charge de nature différente est étudiée afin de compléter l'examen de validation.

### 1.5.1 À partir de la mesure d'un tube vide connu

La procédure consiste à raccorder un tube vide à la sortie du capteur et à appliquer la relation (1.15) avec la fonction de transfert  $H_{21}$  mesurée pour obtenir l'impédance d'entrée du tube. La source de débit impose une excitation de forme sinusoïdale de faible amplitude ( $P < 100$  Pa) à une fréquence  $f$ . Une acquisition est réalisée durant un temps  $T = 1$  s, avec une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 4000$  Hz. La fréquence  $f$  est ensuite incrémentée graduellement afin d'obtenir un vecteur fréquence discret s'étendant de 130 à 200 Hz, par pas de 1 Hz. Les impédances d'entrée mesurées, à faibles niveaux sonores, sur des tubes de longueurs

différentes ( $L = 25$  cm et  $L = 30$  cm), ainsi que les valeurs théoriques issues de l'expression (1.22) sont représentées sur la figure 1.8. L'accord entre mesure et théorie indique que le capteur est capable de fournir des résultats proches de ceux attendus pour les différentes longueurs de tube considérées.

Dans cette plage de fréquence restreinte, qui reste la plage d'intérêt tout au long de ce manuscrit, la partie réelle de l'impédance est très faible comparée à la partie imaginaire, de l'ordre de 1%. Cela traduit le fait que la charge n'est que faiblement résistive. En effet, seules les pertes visqueuses et thermiques, générées à proximité des parois internes du tuyau, composent la partie réelle de l'impédance d'entrée du tube. La très faible contribution de cette partie réelle implique donc du point de vue de la mesure une difficulté supplémentaire. L'impédance de la charge est estimée à partir d'une fonction de transfert entre deux microphones. Cette fonction de transfert complexe porte une amplitude et une phase. La phase de la fonction de transfert se situe, dans le cas d'un tube vide, autour de  $\pi$ , soit une opposition de phase quasi-parfaite des signaux microphoniques. Or la composante réelle de l'impédance de la charge sera portée par les variations (faibles) de la phase de la fonction de transfert  $H_{21}$  autour de  $\pi$ . Pour cette raison, cette grandeur est difficile à estimer si le système mesuré n'est pas assez résistif, comme ici par exemple. Un biais de mesure n'est d'ailleurs pas à exclure sur l'estimation de cette fonction de transfert, et un biais de l'ordre du pour-cent induit déjà une erreur plus significative que les pertes à mesurer.

À la lumière de ces considérations, les courbes représentées sur la figure 1.8 traduisent finalement un très bon accord entre la théorie et la mesure, d'autant que les divergences obtenues en basse fréquence peuvent s'expliquer par des fuites dues à une mauvaise étanchéité de l'attache de la charge. Le fait que le tube de longueur  $L = 25$  cm soit constitué d'une jonction supplémentaire pour raccorder un tube de 20 cm à un tube de 5 cm peut, par suite, justifier que son impédance d'entrée sur la figure 1.8a révèle un plus grand écart avec le modèle.

L'étude d'une charge ouverte est proposée dans le paragraphe suivant. Ce genre de charge offre l'avantage de réduire la disproportion constatée entre les parties résistive et réactive de l'impédance d'entrée. C'est aussi l'occasion de tester la méthode sur une charge de nature inertielle plutôt que sur une charge compliant comme dans le cas du tube vide fermé en basse fréquence.

### 1.5.2 À partir de la mesure d'une impédance de rayonnement.

Dans le cas où le capteur n'est pas chargé, laissé ouvert, l'impédance de charge sera l'impédance de rayonnement de l'ouverture,  $Z_{\text{ray}}$ . Or, l'impédance d'une terminaison ouverte offre l'avantage d'être d'une nature différente de celle d'un tube vide fermé par une paroi rigide, ce qui permet de contrôler la justesse de la méthode d'étalonnage (voir paragraphe précédent) dans un cas de figure intrinsèquement différent. Ce type de charge est étudié par Levine[54] dans le cas d'une ouverture non bafflée et par Nomura[59] dans le cas d'une ouverture bafflée. Mellow[55] propose quant à lui différentes formes approchées, plus simple à

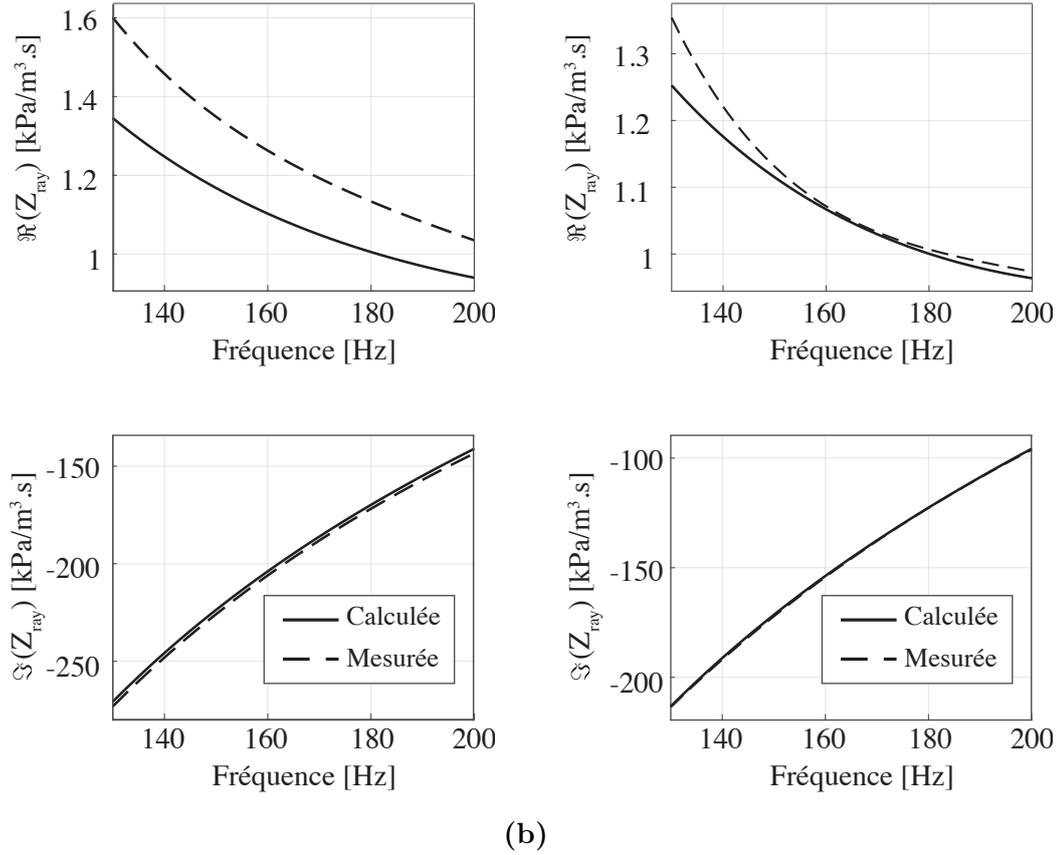


FIGURE 1.8 – Impédances d’entrées théorique (—) et mesurée (---) d’un tube vide de longueur  $L_{\text{tube}} = 25$  cm (a), et  $L_{\text{tube}} = 30$  cm (b).

implémenter, valides en basse fréquence, en fonction de la géométrie du problème. Pour cela, la section à la sortie est modélisée par un piston plan gazeux, rayonnant dans un espace semi-infini. Dans le cas considéré ici, le capteur dispose d’une ouverture de rayon  $R_a = 2.7$  cm et d’un baffle circulaire de rayon  $R_b = 7$  cm, comme sur la figure 1.9. Cette analogie permet d’écrire l’impédance de rayonnement comme la somme de la résistance du piston gazeux,  $R_{\text{ray}}$ , et de sa réactance,  $X_{\text{ray}}$  :

$$Z_{\text{ray}} = \frac{\rho_0 c_0}{S} (R_{\text{ray}} + jX_{\text{ray}}), \quad (1.34)$$

où  $R_{\text{ray}}$  et  $X_{\text{ray}}$  sont supposées linéaires, c’est à dire indépendantes du niveau de pression acoustique ou de débit volumique. Les composantes résistives et réactives s’écrivent[55] :

$$R_{\text{ray}} = \frac{1}{4}(kR_a)^2, \quad (1.35)$$

$$X_{\text{ray}} = \frac{4}{\pi}(kR_a) \frac{2R_b - R_a}{3R_b - R_a}. \quad (1.36)$$

Les résultats de ce modèle sont donnés en figure 1.10.

Il apparaît que les courbes théorique et mesurée de  $Z_{\text{ray}}$  suivent la même tendance. Une meilleure corres-

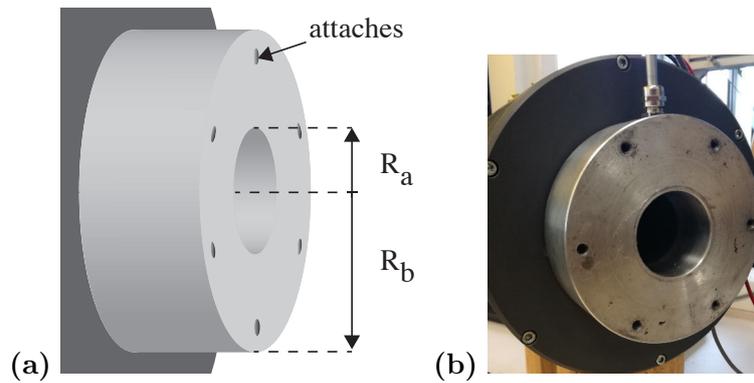


FIGURE 1.9 – (a) Schéma et (b) photo de l'ouverture du capteur. Les rayons d'ouverture  $R_a$  et de baffle  $R_b$  sont représentés. Quelques attaches sont prévues afin de permettre de visser la charge au capteur.

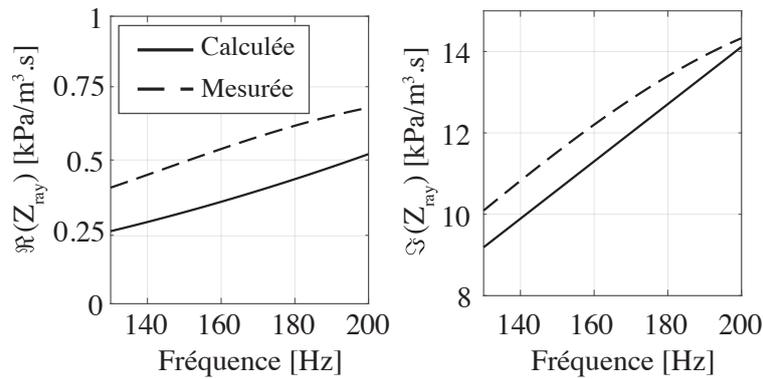


FIGURE 1.10 – Comparaison entre la courbe théorique simulée de l'impédance acoustique d'entrée d'un tube ouvert et sa mesure. Les différences sont sans doute dues à la non prise en compte des éléments externes au système pouvant interférer avec le rayonnement.

pondance entre la théorie et la mesure découlerait de la prise en compte de la géométrie précise de l'ouverture, notamment des divers orifices permettant l'attache de la charge, ainsi que des éventuels obstacles placés près de l'ouverture du capteur. Toutefois l'accord relativement bon entre le modèle et la mesure permet de conclure au bon étalonnage du capteur. Il est néanmoins important de garder à l'esprit que les parties réelles mesurées peuvent s'éloigner un peu des valeurs attendues, surtout sur des systèmes ne comprenant que peu de pertes.

## 1.6 Conclusion

Ce chapitre détaille le principe de fonctionnement du banc de mesure qui est utilisé par la suite. Ce banc de mesure permet de caractériser l'impédance acoustique à l'entrée de n'importe quelle charge acoustique raccordée à sa sortie. La mesure de l'impédance repose à la fois sur la connaissance de la géométrie du banc, basée sur l'estimation préalable des admittances  $Y_1$  et  $Y_2$  des cavités avant et arrière, ainsi que sur la mesure de la fonction de transfert  $H_{21}$  entre les microphones 1 et 2. Ce banc requiert donc un étalonnage préliminaire afin d'estimer ces admittances. L'étalonnage est validé à faible niveau acoustique via la mesure d'impédances d'entrée de systèmes de manière précise, à l'instar de tubes vides de géométrie connue. Un étalonnage fort

niveau est aussi décrit dans le dernier paragraphe mais son impact reste difficilement quantifiable par le biais de mesures à forts niveaux de forçage acoustique réalisées sur des systèmes ayant trop peu de sources de non-linéarités. L'impact réel de cet étalonnage sera discuté dans les futurs chapitres 2 et 3 sur des systèmes ayant un comportement non-linéaire plus visible, notamment dans la suite de ce manuscrit où le banc est utilisé pour extraire l'impédance d'un noyau thermoacoustique simple. Dans ce cas, confronter la mesure à un modèle théorique nécessite, en premier lieu, de proposer un modèle décrivant le noyau. Ce modèle ainsi que l'analyse de l'impédance d'entrée acoustique d'un noyau thermoacoustique font l'objet du prochain chapitre.

## Chapitre 2

# Caractérisation de l'impédance d'entrée d'un noyau thermoacoustique

Dans ce chapitre, l'impédance d'entrée du noyau thermoacoustique est caractérisé théoriquement puis expérimentalement, Après avoir décrit le noyau dans un premier paragraphe, le paragraphe 2.2 détaille le modèle servant à décrire le noyau. Les résultats issus de ce modèle sont par la suite confrontés aux valeurs retrouvées expérimentalement pour diverses configurations. Le but de ce premier paragraphe n'est pas de fournir un modèle qui prendrait finement en compte toute une liste des phénomènes complexes présents dans le noyau mais de disposer d'un modèle pouvant être confronté aux mesures.

Le reste du chapitre correspond à la mise en place de la mesure de l'impédance d'entrée d'un noyau thermoacoustique pour différentes configurations, et contient quelques comparaisons avec le modèle établi au premier paragraphe. L'impédance d'entrée du noyau est d'abord mesurée en fonction de la fréquence d'excitation (paragraphe 2.3), à bas niveau de forçage et en l'absence de chauffage. Puis l'impact du chauffage sur l'impédance mesurée du noyau est étudié à partir du paragraphe 2.5, pour plusieurs fréquences d'excitation à faible niveau de pression acoustique, et finalement, pour plusieurs valeurs de fréquence  $f$  et de puissance de chauffage  $Q$ , en fonction de l'amplitude du forçage acoustique imposée par le capteur.

### 2.1 Description du noyau thermoacoustique étudié

Dans un moteur thermoacoustique, la partie inhomogène en température qui contient le matériau poreux dans lequel la transduction thermo-acoustique a lieu est appelée noyau. Ce système se présente sous la forme d'un guide d'onde, court devant la longueur d'onde, dans lequel est placé un matériau poreux. Une source de chaleur impose un flux thermique à une des extrémités du matériau poreux, via un échangeur de chaleur chaud, ce qui crée une différence de température avec l'autre extrémité (puisqu'une part de la chaleur fournie

est évacuée par les parois latérales du guide d'onde). L'utilisation d'un échangeur de chaleur froid placé du côté opposé à la source de chaleur facilite le contrôle du gradient de température en imposant la température du côté froid. Toutefois, cette étude s'intéresse à un type de noyau ne disposant pas d'un tel échangeur pour des raisons principalement pratiques de mise en œuvre technique. En effet, le but est de disposer d'un système simple à moduler afin d'en faire varier la configuration rapidement selon les besoins de la mesure.

Le noyau à l'étude reste globalement le même tout le long de ce manuscrit. Ce dernier est constitué d'un tube en acier, de longueur  $L_{\text{tac}} = 34$  cm, dans lequel est placé un stack (Celcor® 400 cpsi ou *Cells Per Square Inch*), de longueur  $L_{\text{stack}} = 4$  cm, comme sur la figure 2.1. La portion de tube séparant le côté chaud du stack de la paroi rigide est généralement appelée 'TBT' (pour *Thermal Buffer Tube*), sa longueur est notée  $L_{\text{TBT}}$ . Un changement de longueur de TBT induit logiquement un changement de la position du stack le long du noyau, puisque la longueur totale  $L_{\text{tac}}$  est conservée. Le noyau possède une section uniforme  $S = \pi \times R_{\text{tac}}$  associée à son rayon  $R_{\text{tac}} = 2.67$  cm. La figure 2.1 référence ces dimensions sur un schéma du noyau. Un fil de Nickel-Chrome est utilisé en guise d'échangeur de chaleur chaud. Ce fil, d'une longueur de 50.5 cm, est enroulé à l'extrémité du stack, tel que représenté sur la figure 2.1b. Ayant une résistance linéique de 5.5  $\Omega$ /pied, sa résistance totale est de 9.11  $\Omega$ . Une tension  $U_h$  est imposée aux bornes de ce dernier, et de ce fait ce n'est pas la puissance de chauffage  $Q$  qui est contrôlée directement mais la tension  $U_h$  aux bornes du fil chauffant. La puissance de chauffage  $Q$  résultante est mesurée en prenant en compte la tension  $U_h$ , fixée, et l'intensité du courant  $I_h$ , traversant le fil chauffant, recueilli à l'aide d'une pince ampèremétrique, telle que  $Q = U_h I_h$ .

Un microphone de référence est encastré dans la paroi rigide au bout du noyau et mesure l'amplitude de la pression, notée  $P$ . Ce dernier permet de fournir une valeur de contrôle du niveau de pression qui ne soit pas tributaire de la distribution du champ de pression le long du noyau. Un générateur de fonction (GBF<sup>1</sup>) génère une tension  $U_{\text{GBF}}$  à un amplificateur<sup>2</sup>. Le gain en tension de l'amplificateur est réglé à +12dB et délivre une tension  $U_{\text{HP}}$  aux bornes du haut-parleur. Un niveau de tension maximum est délimité au préalable afin d'assurer que la puissance électrique aux bornes du haut-parleur ne cause pas son endommagement, soit par la surchauffe de sa bobine, soit par le déchirement de sa membrane.

---

1. Agilent 33120A  
2. QSC - RMX 820a

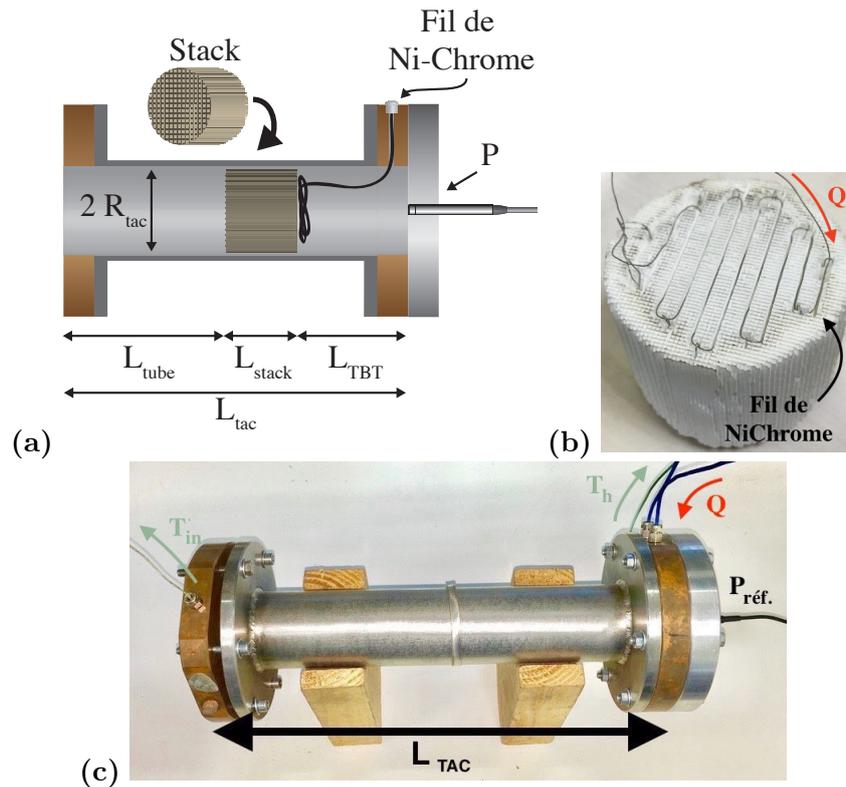


FIGURE 2.1 – Schéma (a) et photo (c) du système étudié. Un matériau poreux, appelé stack, est inséré dans le tube à une longueur  $L_{TBT}$  du fond rigide du noyau. Une photo de ce matériau est donnée en (b). Un fil de NiChrome d’une longueur d’environ 50 cm est enroulé à une des extrémités du stack. La puissance électrique de chauffage  $Q$  est imposée à ce fil de NiChrome qui produit ainsi, par effet Joule, un flux de chaleur au sein du noyau. Sur la photo (c), deux câbles verts sont visibles et décrits comme  $T_c$  et  $T_h$ . Ces câbles sont des thermocouples permettant de mesurer les températures à la sortie du noyau ( $T_c$ ) et au niveau du point chaud du stack ( $T_h$ ). Ces thermocouples ne sont pas indiqués sur le schéma car ils ne présentent qu’un intérêt de contrôle de températures lors des séries de mesures, celles-ci ne sont ensuite pas utilisées pour le traitement des données.

## 2.2 Modélisation du noyau thermoacoustique

Le noyau thermoacoustique se compose de trois parties : un tube amont, la partie du tube chargée du stack, et le TBT. La propagation acoustique dans chacune de ces parties dépend des propriétés géométriques et thermo-physiques du milieu et de la distribution de température  $T(x)$  le long du système. L’impédance acoustique d’entrée d’un noyau thermoacoustique est notée  $Z_{tac}$  et dépend de la fréquence, de l’amplitude des oscillations acoustiques ainsi que de la puissance thermique injectée via l’échangeur de chaleur chaud. Cette impédance se calcule sur les bases de la théorie linéaire de la thermoacoustique, comme énoncée par Rott[77], qui repose sur les équations linéarisées de l’acoustique et l’approximation couche limite. L’utilisation de cette théorie suppose de considérer que la propagation acoustique se fait en mode plan et sans aucune source de non-linéarité de propagation. Le stack quant à lui est décrit comme un réseau de pores cylindriques. Dans la réalité, ses pores sont à section carrée, de côté  $a$ , mais sont considérés comme ayant une section circulaire,

de rayon  $R_h$ . Cette approximation permet par la suite de simplifier les développements analytiques, et d'un point de vue plus technique, d'alléger la programmation de la simulation. Aussi, l'erreur induite par cette simplification est discutée et jugée faible par Guédra[41]. D'après Swift[85], les variations de l'amplitude complexe de la pression  $\tilde{p}$  et du débit volumique  $\tilde{u}$  en fonction de la position  $x$  le long du système sont données par :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = -\frac{j\omega\rho_0}{\phi S} \frac{1}{1-f_\nu} \tilde{u}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = -\frac{j\omega\phi S}{\gamma P_0} [1 + (\gamma - 1)f_\kappa] \tilde{p} + \frac{f_\kappa - f_\nu}{(1-f_\nu)(1-\sigma)} \frac{dT_0}{dx} \frac{1}{T_0} \tilde{u}, \quad (2.2)$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique du milieu estimée à la pression statique  $P_0$  et à la température  $T_0$  du fluide,  $\phi$  est la porosité du milieu,  $\gamma$  est le coefficient polytropique (rapport des chaleurs spécifiques),  $\sigma$  est le nombre de Prandtl (le rapport de la viscosité cinématique  $\nu_0$  et de la conductivité thermique du fluide  $\kappa_0$ , estimées à la température de la pièce  $T_0$ ), et les fonctions  $f_\nu$  et  $f_\kappa$  sont les fonctions prenant en compte les effets visco-thermiques, introduites par Rott[77] :

$$f_\kappa = \frac{2}{(1-j)\sqrt{\omega\tau}} \frac{J_1[(1-j)\sqrt{\omega\tau}]}{J_0[(1-j)\sqrt{\omega\tau}]}, \quad (2.3)$$

$$f_\nu = \frac{2}{(1-j)\sqrt{\omega\frac{\tau}{\sigma}}} \frac{J_1\left[(1-j)\sqrt{\omega\frac{\tau}{\sigma}}\right]}{J_0\left[(1-j)\sqrt{\omega\frac{\tau}{\sigma}}\right]}, \quad (2.4)$$

où  $J_m$  sont les fonctions de Bessel d'ordre  $m$  et  $\tau$  est un temps caractéristique de diffusion thermique introduit tel que  $\tau = R_h^2/2\kappa_0$ .

Le tube situé en amont du stack et le TBT sont également décrits à l'aide de ces équations en considérant qu'ils sont constitués d'un seul pore de section constante  $S$  et de porosité  $\phi = 1$ .

Sur la base de ces deux équations, le système est discrétisé en une suite de volumes de contrôle, de section  $S$  et de longueur  $\Delta x$ , tel qu'explicité sur la figure 2.2<sup>3</sup>. Chaque volume de contrôle, numéroté  $n$ , est soumis à une pression acoustique  $\tilde{p}_n$ , un débit volumique  $\tilde{u}_n$  et une température  $T_n$ . Les variations de ces grandeurs d'un volume de contrôle  $n$  au volume de contrôle suivant  $n + 1$  s'écrit :

$$\left. \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \right|_{x=x_n} \simeq \frac{\tilde{p}_{n+1} - \tilde{p}_n}{\Delta x_n}, \quad (2.5)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right|_{x=x_n} \simeq \frac{\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n}{\Delta x_n}, \quad (2.6)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_n} \simeq \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta x_n}, \quad (2.7)$$

3. Chaque volume de contrôle doit respecter la condition  $|k\Delta x| \ll 1$ , or en présence du stack, la partie imaginaire du nombre d'onde  $k$  augmente significativement. Pour cette raison, la discrétisation est plus fine pour la description du stack qu'elle ne l'est pour les parties de tube vides.

Cette discrétisation associée aux équations (2.1) et (2.2) permet d'exprimer la propagation acoustique par le biais d'une matrice de transfert :

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_{n+1} \\ \tilde{u}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{i\omega\rho_n\Delta x_n}{\phi S} \frac{1}{1-f_{\nu_n}} \\ -\frac{i\omega\phi S\Delta x_n}{\gamma P_0} [1 + (\gamma - 1)f_{\kappa_n}] & 1 + \frac{f_{\kappa_n} - f_{\nu_n}}{(1 - f_{\nu_n})(1 - \sigma)} \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{p}_n \\ \tilde{u}_n \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

où l'indice  $n$  indique que la variable, ou la fonction, est évaluée dans les conditions de température et de pression du volume de contrôle  $n$ . Les variations de  $f_{\nu_n, \kappa_n}$  induites par le changement de température sont prises en compte sous la forme d'une loi empirique proposée par Bailliet[12] :

$$\nu_n = \nu_0(T_n/T_\infty)^{1+\beta}; \quad (2.9)$$

$$\kappa_n = \kappa_0(T_n/T_\infty)^{1+\beta}; \quad (2.10)$$

$$\beta = 0.77 \text{ (pour l'air)}, \quad (2.11)$$

où  $T_\infty$  est la température de la pièce.

L'équation (2.8) permet, à partir d'un champ de température connu, et de la condition au niveau du fond rigide (voir figure 2.2) :

$$\tilde{u}_{x_{n3}} = 0, \quad (2.12)$$

de calculer la distribution du champ acoustique, et donc d'accéder à une valeur d'impédance acoustique d'entrée du noyau complet :

$$Z_{tac} = \frac{\tilde{p}_{n=1}}{\tilde{u}_{n=1}}. \quad (2.13)$$

Cependant, dans le cas présent, ni la distribution de température ni le différentiel de température  $\Delta T$  entre le point chaud et le point froid ne sont imposés. En revanche, c'est la puissance de chauffage  $Q$  qui est fixée aux bornes du fil de NiChrome. Cette source de chaleur conduit à l'établissement d'une distribution de température le long du système sous l'effet des flux de chaleur thermoacoustique et de conduction thermique ainsi que des pertes thermiques latérales. Aussi, les différentes températures  $T_n$  sont considérées comme des grandeurs moyennées sur la section du tuyau, et il convient donc de noter que l'hypothèse est faite que le champ thermique peut se résumer à sa composante axiale moyenne (sans considération sur le fait que la distribution de température n'est pas uniforme sur une section, notamment près de l'échangeur de chaleur chaud[16]). Le modèle développé ici est donc unidimensionnel par construction.

Pour reconstruire cette distribution de température, une analogie électro-thermique est considérée dans le même esprit que pour la reconstruction du champ acoustique. Comme le montre la figure 2.3a, chaque discrétisation du système se fait sous la forme d'un volume de contrôle, décrit par un circuit électrique équivalent donné sur la figure 2.3b.

Chacun de ces volumes de contrôle possède une résistance thermique  $R_{n-1}^{th}$  en entrée et  $R_n^{th}$  en sortie qui

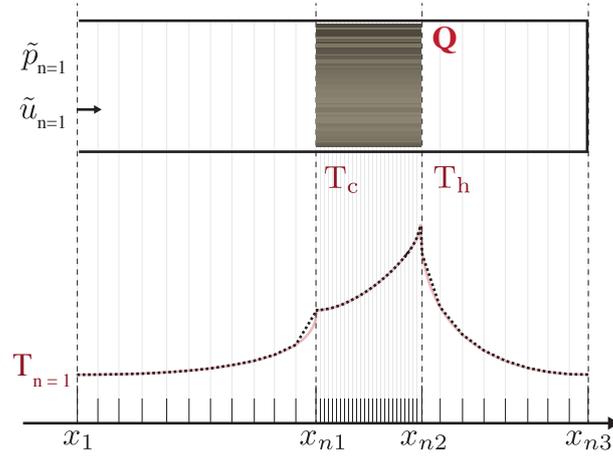


FIGURE 2.2 – Schéma du problème une fois discrétisé. Une pression acoustique  $\tilde{p}_{n=1}$  et un débit entrant  $\tilde{u}_{n=1}$  sont représentés à l'entrée du noyau. Les températures  $T_h$  du point chaud,  $T_c$  du côté du froid du stack ainsi que  $T_{n=1}$  à la sortie du noyau sont indiquées.

prend en compte la conduction thermique axiale du milieu, notée  $\lambda$ . Cette conduction est directement celle de l'air  $\lambda_a$  en l'absence de stack, tandis qu'elle prend la valeur de la conductivité du milieu céramique/air équivalent en présence du stack,  $\lambda_s$  :

$$\lambda_s = \lambda_a \phi_s + \lambda_c (1 - \phi_s). \quad (2.14)$$

Dans cette dernière équation  $\lambda_a$  et  $\lambda_c$  sont les conductivités thermiques respectives de l'air et de la céramique. Cette conductivité équivalente est estimée par Guédra et al.[41] à  $\lambda_s = 0.6 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  dans le cadre de travaux portant sur le même type de stack.  $R_{\text{lat}}^{\text{th}}$  est la résistance thermique qui se réfère aux pertes thermiques latérales à travers les parois du système et  $Q_2$  est la contribution du flux thermoacoustique qui ne dépend pas du gradient axial de température. Une fois ces notations introduites, le bilan thermique pour le volume de contrôle  $n$  s'écrit[61] :

$$Q_n - Q_{n-1} - Q_{\text{lat},n} + Q_2(\tilde{p}_n, \tilde{u}_n) - Q_2(\tilde{p}_{n-1}, \tilde{u}_{n-1}) = 0, \quad (2.15)$$

soit :

$$\frac{T_{n-1} - T_n}{R_{n-1}^{\text{th}}} - \frac{T_n - T_{n+1}}{R_n^{\text{th}}} - \frac{T_n - T_0}{R_{\text{lat}}^{\text{th}}} + Q_2(\tilde{p}_n, \tilde{u}_n) - Q_2(\tilde{p}_{n-1}, \tilde{u}_{n-1}) = 0. \quad (2.16)$$

Les fonctions  $\Gamma_{\lambda_n}$ ,  $\tilde{g}_n$  et  $\tilde{g}_{D_n}$ , liées aux mécanismes de transport de la chaleur acoustiquement induits, sont définies par Tominaga[89] :

$$\Gamma_{\lambda_n} = \frac{1}{(\phi S)^2 2\omega(1 - \sigma^2)} \mathfrak{S}(\tilde{g}_{D_n}), \quad (2.17)$$

$$\tilde{g}_n = \frac{\sigma f_{\nu_n}^* - f_{\kappa_n}}{|1 - f_{\nu_n}|^2}, \quad (2.18)$$

$$\tilde{g}_{D_n} = \frac{f_{\nu_n}^* - f_{\kappa_n}}{(1 + \sigma)(1 - f_{\nu_n}^*)}, \quad (2.19)$$

où la notation  $f^*$  fait référence au conjugué de la fonction complexe  $f$ , et les coefficients d'échanges mis en jeu dans l'équation (2.16) sont donnés par :

$$R_n^{th} = \frac{\Delta x}{(\lambda_s + \Gamma_{\lambda_n} |\tilde{u}_n|^2) S}, \quad (2.20)$$

$$Q_2(\tilde{p}_n, \tilde{u}_n) = \frac{1}{2\phi} \Re(\tilde{g}_n \tilde{p}_n \tilde{u}_n^*). \quad (2.21)$$

La résistance thermique  $R_{lat}^{th}$  prend en compte le flux thermique au travers des parois du système :

$$R_{lat}^{th} = \frac{1}{2\pi R_{tac} \Delta x_n h_{lat}}, \quad (2.22)$$

avec  $h_{lat}$  le coefficient d'échange latéral qui s'exprime en  $W/m^2/K$ . En l'absence de stack le coefficient  $h_{lat,a}$  diffère de celui qui concerne les portions de tube chargées du stack  $h_{lat,s}$ . Les deux coefficients prennent notamment en compte la différence de capacité thermique du volume de contrôle avec celle de l'air ambiant au delà de la paroi. De ce fait, il est nécessaire de considérer deux valeurs différentes pour les deux milieux différents. Dans une étude concernant un système thermo-acoustique similaire, Guédra[41] montre que le modèle nécessite à un moment ou un autre l'ajustement des paramètres liés aux fuites thermiques latérales<sup>4</sup>. Dans le cas présenté ici, les coefficients  $h_{lat}$  sont d'abord estimés puis ajustés dans le modèle afin de les faire correspondre au mieux avec des mesures réalisées sur le noyau réel.

Pour la résolution du problème complet, les conditions aux limites de raccordement de la température et du flux de chaleur axial au niveau des interfaces entre les tubes vides et la portion chargée d'un stack sont associées à l'équation (2.16). Ce raccordement est simplement écrit comme une condition de continuité de la température et du flux de chaleur aux positions  $x = x_{n_1}$  et  $x = x_{n_2}$  spécifiées sur la figure 2.1. La puissance de chauffage  $Q$  est apportée au système en  $x = x_{n_2}$  :

$$Q = \frac{T_{n_2} - T_{n_2-1}}{R_{n_2-1}^{th}} + \frac{T_{n_2+1} - T_{n_2}}{R_{n_2}^{th}}, \quad (2.23)$$

où  $R_{n_2}^{th} = \frac{\Delta x_{n_2}}{\lambda_{n_2} S}$  est la résistance thermique associée à la conduction axiale de la chaleur vers le TBT, et où  $\lambda_{n_2}$  est la conductivité thermique du fluide à la position  $x = x_{n_2}$  dépendante de la température via la relation empirique :

$$\lambda_{n_2} = \lambda_{\infty} (T_{n_2}/T_0)^{\beta}, \quad (2.24)$$

avec la conductivité thermique  $\lambda_{\infty} = 2.26 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  de l'air estimée à température ambiante  $T_0$ .

Ces équations, qui décrivent le champ de température en régime établi, sont donc finalement des fonctions du chauffage imposé mais aussi des phénomènes de diffusion de la chaleur classique ou acoustiquement induits. Couplées aux relations décrivant la propagation à travers les parties discrétisées du système, ce jeu d'équations

4. L'annexe B s'attarde sur les différences entre les deux manières de poser le problème ainsi que sur la méthode permettant de lier les deux approches entre elles.

permet l'estimation d'une impédance d'entrée du noyau complet en fonction de la fréquence, de l'amplitude de pression acoustique ainsi que de la puissance de chauffage  $Q$  imposée via l'échangeur.

Quelques paramètres du modèle nécessitent néanmoins d'être évalués au préalable : la porosité  $\phi_s$  du stack, le rayon hydraulique  $R_h$  (équivalent au rayon du pore dans le cas d'une approximation en pores cylindriques) ou les coefficients  $h_{lat}$  notamment. Des mesures réalisées pour diverses configurations du noyau aident à retrouver des valeurs approchées de ces paramètres jusqu'ici estimés. Les prochains paragraphes traitent de ces ajustements. Une fois ces ajustements réalisés, le modèle sera utilisé pour calculer les impédances d'entrée des noyaux thermoacoustiques amenés à être mesurés lors de l'étude.

Pour résumer, ce modèle, dont la justesse repose sur un jeu de mesures préalables, permet d'estimer certains paramètres thermophysiques du système, et a pour but d'être ensuite confronté à des mesures issues d'autres configurations de noyau partageant le même stack mais à des positions de stack et des puissances de chauffage différentes.

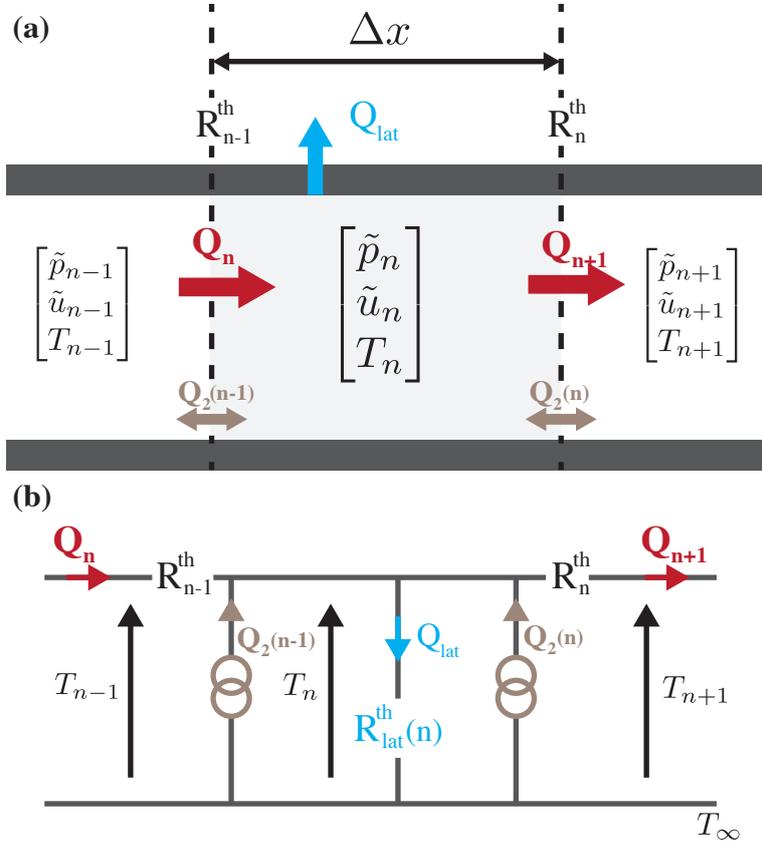


FIGURE 2.3 – (a) Schéma de la discrétisation à l’intérieur du système à modéliser. Le volume de contrôle  $n$  est représenté en gris et est soumis à une pression incidente  $\tilde{p}_n$ , un débit volumique entrant  $\tilde{u}_n$  ainsi qu’à une température  $T_n$ . Le volume de contrôle  $n - 1$  apporte un flux de chaleur  $Q_n$  à l’entrée du volume grisé. Une résistance thermique d’entrée équivalente  $R_{n-1}^{th}$  est placée en amont du volume  $n$ . Le flux de chaleur est ensuite en parti transmis au volume  $n + 1$ , après que sa puissance se soit légèrement dissipée dans la résistance thermique de sortie  $R_n^{th}$ . Deux autres flux de chaleur  $Q_2^{(n-1)}$  et  $Q_2^{(n)}$ , issus du mécanisme de pompage de la chaleur par l’onde acoustique, sont pris en compte. (b) Schéma électro-thermique équivalent au volume de contrôle. Les températures à l’intérieur / à la sortie du volume de contrôle sont données aux bornes du circuit, associées à leur flux thermiques entrant/sortant,  $Q_{(n)}$  et  $Q_{(n+1)}$ . Le flux thermique latéral est analogue à une dérivation ayant une résistance  $R_{lat}^{th}(n)$ . Les flux thermiques acoustiquement induits, indépendant du gradient local de température, sont représentés par deux générateurs équivalents  $Q_2^{(n-1)}$  et  $Q_2^{(n)}$ .

## 2.3 Cas d'un noyau sans chauffage à faible niveau sonore

Dans un premier temps, le noyau est raccordé au capteur et la mesure de son impédance d'entrée est réalisée. Ce paragraphe traite du cas où l'échangeur chaud n'est pas alimenté, le stack est laissé à température ambiante. Dans ce cas, la différence de température est considérée comme nulle entre le point chaud et le point froid du stack et le champ de température comme constant le long du système. De cette manière les paramètres d'échanges thermiques n'ont pas d'influence sur l'impédance d'entrée du noyau. Les paramètres tels que la porosité  $\phi_s$  et le rayon hydraulique  $R_h$  du stack ne dépendent pas du gradient de température. Pour ces raisons, la mesure de l'impédance d'entrée du noyau sans chauffage permet de fixer  $\phi_s$  et  $R_h$  en essayant de rapprocher les résultats obtenus par le modèle à ceux obtenus par la mesure.

La mesure de l'impédance d'entrée est réalisée sur un tube de 34 cm, chargé d'un stack situé à  $L_{TBT} = 22$  cm, dans la gamme de fréquence [130 : 200] Hz pour une faible amplitude de pression acoustique. Un schéma du système est représenté sur la figure 2.4a. L'impédance mesurée est quant à elle représentée sur la figure 2.4b. Sur cette figure, les différents points représentent les données brutes après traitement qui sont accompagnées d'une courbe lissée par une loi polynomiale d'ordre 2. La simulation, issue de la méthode précisée plus haut, est tracée sur cette même figure. Afin d'obtenir un accord aussi proche les paramètres du stack ont été ajustés tels que :

$$\phi_s = 0.75, \quad (2.25)$$

$$R_h = 0.565 \text{ mm}, \quad (2.26)$$

soient des valeurs acceptables et proches à la fois de celles annoncées par le constructeur, celles obtenues par Guédra[41] et celles pouvant être mesurées directement sur le matériau.

La figure 2.4b montre que lorsque les paramètres permettant la modélisation du stack sont ajustés à partir de la mesure, les courbes issues de la simulation et celle issues de la mesure s'accordent plutôt bien sur la tendance des variations selon la fréquence. Il est alors intéressant de quantifier l'impact du choix des paramètres propres au matériaux poreux sur l'impédance d'entrée simulée. La figure 2.5 représente l'impédance simulée pour une erreur commise de  $\pm 5\%$  sur les valeurs respectives de  $R_h$  et  $\phi_s$ . Les allures de courbes sont jugées suffisamment proches pour valider la valeur de ces paramètres.

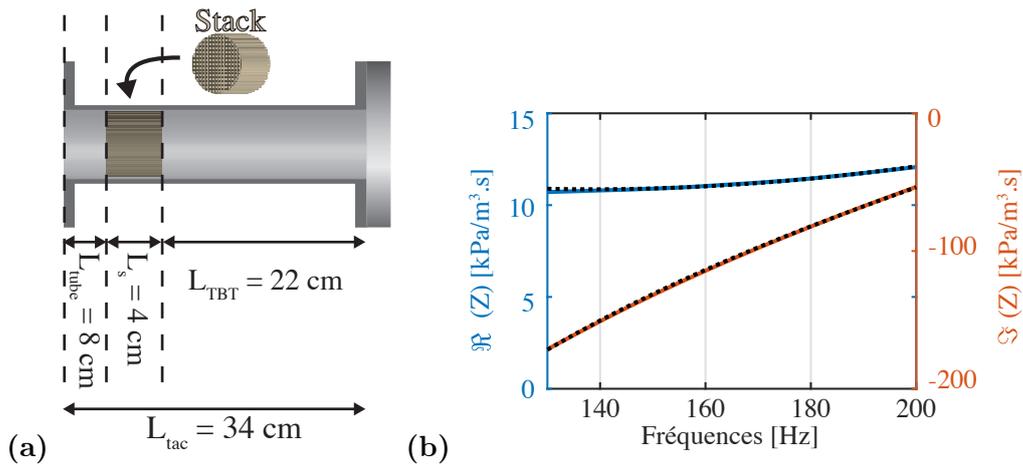


FIGURE 2.4 – (a) Schéma du tube dans lequel un stack non chauffé est inséré. La longueur totale de la charge est  $L_{\text{charge}} = 34$  cm et le stack est placé à  $L_{\text{TBT}} = 22$  cm du fond rigide. Le stack est un élément Celcor® de  $L_s = 4$  cm comprenant 400 cpsi (Cells Per Square Inch), ou cellules par pouce au carré, soit 62 pores par centimètre carré. (b) Impédances d'entrée mesurée (-) et simulée (- -) associées au noyau décrit en (a), en fonction de la fréquence.

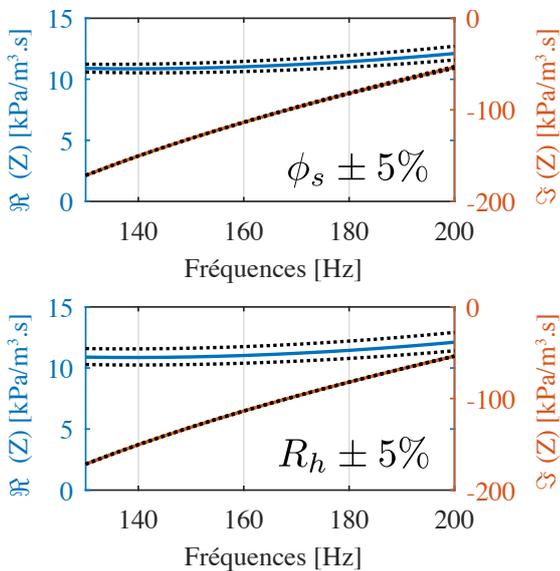


FIGURE 2.5 – Courbes d'impédance d'entrée simulées avec une variation de  $\pm 5\%$  sur le choix de  $\Phi$  (en haut), et une variation de  $\pm 5\%$  sur le choix de  $R_h$  (en bas). La configuration du système reste telle que décrite sur la figure 2.4.

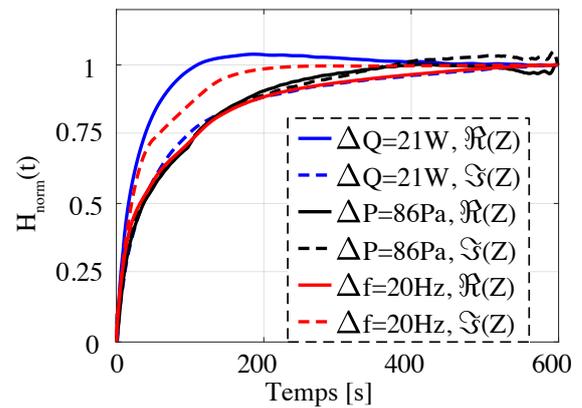


FIGURE 2.6 – Fonctions  $H_{\text{norm}}$  calculées pour le cas d'un noyau de longueur  $L_{\text{tac}} = 34$  cm avec un stack placé à  $L_{\text{TBT}} = 22$  cm du fond rigide, tel que décrit en figure 2.4.

## 2.4 Temps de stabilisation et protocole de mesure

Dans le cadre des mesures qui suivent sur un noyau soumis à une distribution de température non-homogène, quelques précautions sont à prendre pour s'assurer de la validité de la mesure. En effet, plusieurs mécanismes impactent la distribution du champ thermique dans le noyau, comme le pompage thermoacoustique et les différents flux de chaleur. Ces mécanismes agissent sur des échelles de temps longues qu'il convient de quantifier pour s'assurer du caractère stationnaire de la mesure d'impédance d'entrée. Pour cela, trois temps de stabilisation sont définis :

- $t_Q$  : le temps d'établissement du champ thermique en présence d'un champ acoustique stationnaire de faible amplitude suite à un incrément  $\Delta Q$  de puissance de chauffage ;
- $t_P$  : le temps de stabilisation suite à un incrément de niveau de pression acoustique  $\Delta P$ , à fréquence fixe, et à la puissance de chauffage  $Q$  fixée ;
- $t_f$  : le temps caractéristique suite à un incrément de fréquence  $\Delta f$  à un niveau d'amplitude de forçage imposé à la source constant et à la puissance de chauffage  $Q$  fixée.

Ces temps caractéristiques sont calculés à partir d'une fonction auxiliaire  $H_{\text{norm}}$  :

$$H_{\text{norm}}(t) = \frac{F(t) - F(t=0)}{F(t \rightarrow \infty) - F(t=0)}, \quad (2.27)$$

où  $F$  prend les valeurs de  $\Re(Z)$  et  $\Im(Z)$ . Ces fonctions auxiliaires sont tracées sur la figure 2.6 pour le cas d'un noyau de longueur totale  $L_{\text{tac}} = 34$  cm dans lequel le stack est placé à  $L_{TBT} = 22$  cm du fond rigide.

Grâce aux indications données sur la figure 2.6 et aux informations fournies par l'étude qui se trouve en annexe B, il est possible de définir des valeurs pour les différents temps d'attente mis en jeu dans la mesure d'une impédance d'entrée d'un noyau thermoacoustique chauffé. Le tableau 2.7 répertorie les temps d'attentes retenus pour le protocole.

Nature de l'incrément	Temps de stabilisation $t$ [s]
$\Delta Q$	600
$\Delta P$	100 → 300
$\Delta f$	10 → 100

FIGURE 2.7 – Temps de stabilisation retenus pour différentes natures d'incrément.

Le protocole retenu pour la mesure de l'impédance d'entrée d'un noyau thermoacoustique chauffé en fonction de la fréquence, de l'amplitude de la pression acoustique et du chauffage est donc le suivant :

- Une puissance de chauffage  $Q_{\text{min}}$  est imposée.
- Après un temps d'attente observé de  $t_Q = 600$  s, le haut-parleur situé dans le capteur impose une fréquence  $f = f_{\text{min}}$  et une pression acoustique  $P = P_{\text{min}}$ .

- L'impédance d'entrée du noyau  $Z_{\text{tac}}(Q_{\min}, f, P_{\min})$  est alors mesurée en fonction de la fréquence de  $f_{\min}$  à  $f_{\max}$  avec un pas fréquentiel  $\Delta f$  en respectant un temps d'attente  $t_f$  entre chaque point.
- Un incrément de pression acoustique  $\Delta P$  (induit par un incrément de la tension  $U_{\text{HP}}$  imposée aux bornes du haut-parleur) est réalisé et un temps d'attente  $t_P$  est respecté.
- L'impédance d'entrée du noyau  $Z_{\text{tac}}(Q_{\min}, f, P_{\min} + \Delta P)$  est mesurée en fonction de la fréquence de  $f_{\min}$  à  $f_{\max}$  avec un pas fréquentiel de  $\Delta f$  en respectant un temps d'attente  $t_f$  entre chaque point.
- La précédente opération est répétée en balayant la gamme de tension  $U_{\text{HP}}$  imposée au haut-parleur, jusqu'à atteindre la pression acoustique  $P_{\max}$ .
- Ce protocole est repris pour chaque valeur de puissance de chauffage  $Q$  allant de  $Q_{\min}$  à  $Q_{\max}$ .

Selon les besoins techniques de la série de mesure, les temps  $t_f$  et  $t_P$  peuvent varier, respectivement, de 10 à 100 s et de 100 à 300 s<sup>5</sup>.

$Z_{\text{tac}}(Q, f, P)$  à une puissance de chauffage  $Q$  fixée contient un nombre de point qui dépend de la résolution choisie en fréquence et en amplitude acoustiques de forçage. Dans la plupart des cas proposés au cours de ce manuscrit, la gamme de fréquence s'étend de 130 à 200 Hz avec une résolution de  $\Delta f = 5$  Hz. Les amplitudes d'excitation acoustique considérées s'étendent, quant à elles, de  $\sim 50$  à  $\sim 1250$  Pa avec une résolution moyenne<sup>6</sup> de  $\Delta P = 34$  Pa. La mesure prend alors un temps  $t_{\text{tot}} \simeq 1\text{h}30$  pour une matrice de  $[1 \times 15 \times 34]$  points.

## 2.5 Cas d'un noyau avec chauffage

### 2.5.1 En fonction de la puissance du chauffage, à faible niveau sonore

La charge constituée d'un noyau thermoacoustique, telle que détaillée au paragraphe 2.3, fournit plus de pertes que dans le cas d'un tube vide. Dans ce paragraphe, une puissance électrique est imposée aux bornes de l'échangeur chaud de sorte que le stack soit soumis à un gradient de température entre ses deux extrémités. Si la relation de phase entre la pression acoustique et le débit volumique dans le stack le permet (voir [77, 71, 83]), le stack fournit une amplification de nature thermoacoustique à l'onde acoustique incidente.

Tout d'abord, la fréquence d'excitation imposée par le capteur est maintenue constante, et l'impact de la puissance de chauffage sur l'impédance est étudié. Trois fréquences sont tour à tour imposées au noyau, à bas niveau de forçage, par la source du capteur :  $f = 140$  Hz,  $f = 170$  Hz et  $f = 200$  Hz et les puissances de chauffage  $Q$  étudiées s'étendent de 0 à 21 W.

La figure 2.8a montre les impédances du noyau obtenues expérimentalement. Lorsqu'à partir d'une certaine valeur de puissance de chauffage imposée, l'amplification fournie par le stack devient plus importante que les pertes présentes dans le noyau, ce dernier fournit un gain. Cette amplification de nature thermo-

5. Lorsque le niveau de pression acoustique de forçage est bas, les mécanismes de pompages de la chaleur induit par le champ acoustique ont un impact faible. Les temps de stabilisation peuvent alors être écourtés.

6. la résolution  $\Delta P$  n'est pas fixée directement, c'est l'incrément  $\Delta U_{\text{HP}}$  de tension fournie au haut-parleur qui contrôle  $\Delta P$ .

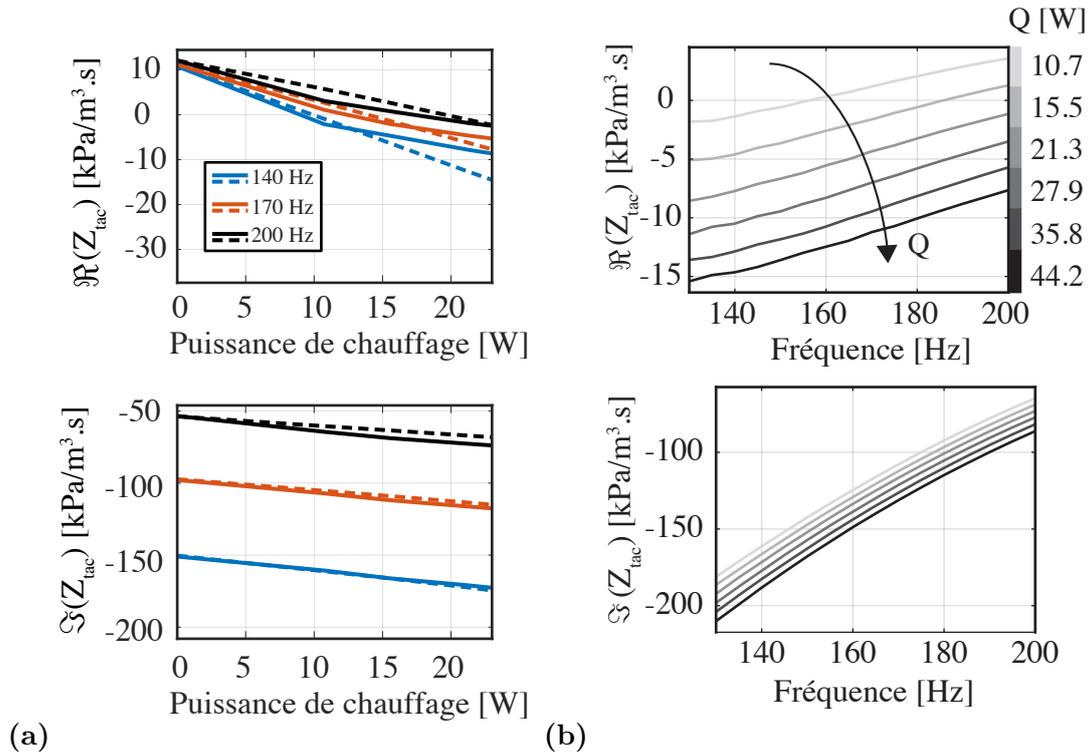


FIGURE 2.8 – (a) Comparaison entre le modèle (- -) et la mesure (-) de l'impédance d'un noyau thermoacoustique de longueur  $L_{tac} = 34$  cm, dans lequel le stack est placé à  $L_{TBT} = 22$  cm du fond rigide, en fonction de la puissance du chauffage imposée, pour trois fréquences différentes : 140, 170 et 200Hz. Le modèle est ajusté en cherchant à recaler la partie imaginaire en priorité. (b) Impédance d'entrée du noyau mesurée en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de puissance de chauffage. Les différentes nuances de gris des courbes se réfèrent aux différents niveaux de chauffage indiqués par la légende sur le côté de la figure.

coustique se traduit par une partie résistive (réelle) de l'impédance d'entrée du noyau,  $\Re(Z_{tac})$ , qui diminue jusqu'à changer de signe et devenir négative, ce qui a d'ailleurs déjà été observé par Atchley en 1994 sur ce genre de moteur[6]. En prenant l'exemple de la courbe  $f = 200$  Hz, la partie réelle est positive à  $Q = 10.7$  W et, bien qu'elle diminue, reste positive à  $Q = 15.5$  W. Ceci montre que, dans ce cas, la puissance de chauffage imposée à l'échangeur chaud, et donc la différence de température entre les points chaud et froid, apporte effectivement du gain de nature thermoacoustique via le stack mais pas suffisamment pour compenser les pertes présentes dans le noyau. Avec une puissance de chauffage plus grande par contre, à partir  $Q = 21.3$  W, le gain fourni par le stack surpasse les sources de pertes du noyau puisque l'impédance totale du noyau a une partie réelle négative. La partie imaginaire de l'impédance est d'ailleurs, elle aussi, fortement impactée par la puissance de chauffage  $Q$ . La célérité du son change avec la température et si la température n'est pas constante le long du noyau, la célérité (comme la masse volumique du fluide) ne l'est pas non plus et cette dernière affecte directement de la réactance du système.

La figure 2.8a met aussi en évidence l'influence de la fréquence sur le gain apporté par le noyau. Ce gain est une fonction de la distribution des champs de pression et de débit volumique à l'intérieur. Ceci se traduit

par une amplification plus ou moins forte pour les différentes fréquences testées.

La fréquence a donc un impact sur le comportement du noyau du point de vue de la thermoacoustique. En figure 2.8b, son impédance d'entrée est cette fois mesurée en fonction de la fréquence pour différentes puissances de chauffage. Cette nouvelle vue d'ensemble met en évidence la capacité du noyau à fournir de l'amplification thermoacoustique en fonction de la fréquence. Il apparaît que le noyau offre une plus grande amplification dans le bas de la gamme de fréquence étudiée.

À des fins de comparaison, le modèle de simulation décrit en paragraphe 2.2 est implémenté en prenant en compte une puissance de chauffage  $Q$  imposée à l'échangeur chaud. Les résultats de simulation sont reportés sur la figure 2.8a. Comme proposé par Guédra[41], les coefficients d'échanges thermiques  $h_{\text{lat}}$  au travers des parois sont ajustés pour se rapprocher des données de mesures. Dans ce cas, les valeurs ajustées sont  $h_{\text{lat,s}} = 70 \text{ W/m}^2/\text{K}$  pour la portion chargée du stack et  $h_{\text{lat,a}} = 10 \text{ W/m}^2/\text{K}$  pour les portions de tube non chargées. Ces coefficients sont obtenus à partir d'un compromis qui permet un bon accord entre mesure et simulation pour trois différentes fréquences, et pour plusieurs niveaux de puissance de chauffage  $Q$ , comme que le montrent les courbes sur la figure 2.8. Aussi, il est probable que les coefficients  $h_{\text{lat}}$  dépendent en réalité de la puissance  $Q$  fournie (car les coefficients d'échanges dépendent *a priori* de la température), et pour cette raison il est difficile de retrouver un meilleur accord entre les courbes mesurées et simulées en faisant appel à des coefficients  $h_{\text{lat}}$  qui ne sont pas des fonctions du chauffage  $Q$ .

Toutefois, ces courbes montrent un accord qualitatif satisfaisant entre le modèle et les données obtenues expérimentalement<sup>7</sup>. Le modèle, une fois ajusté, et malgré les différences observables, semble pertinent pour décrire les mécanismes thermoacoustiques à bas niveau de forçage acoustique. Ce qui change ici, par rapport au modèle linéaire de Rott, c'est que le champ thermique a été reconstruit afin de pouvoir calculer la différence de température, notée  $\Delta T$ , à partir d'une puissance de chauffage  $Q$  donnée. Par la suite, à partir d'une mesure d'impédance et de l'écriture du problème discrétisé, il est possible d'ajuster quelques paramètres (la porosité  $\phi$ , le rayon hydraulique  $R_h$  du stack et les coefficients d'échanges thermiques latéraux  $h_{\text{lat}}$ ) et ainsi d'obtenir une description empirique du stack. Ce modèle de stack peut donc être utilisé notamment pour comprendre les limites du modèle linéaire utilisé ici. Les mesures ont été effectuées à faible niveau de forçage, niveau pour lequel l'impédance reste indépendante de l'amplitude d'excitation. À plus forts niveaux cependant, le flux de chaleur thermoacoustique dépend du champ acoustique qui lui même influe sur la distribution de température le long du système, l'impédance dépend alors de  $P$  et de  $Q$  pour chaque fréquence  $f$ .

L'impact de l'amplitude du forçage acoustique fait l'objet du prochain paragraphe.

---

7. Les valeurs de  $h_{\text{lat}}$  sont ajustées à la main et un meilleur accord avec la mesure pourrait certainement être obtenu à l'aide d'un algorithme d'optimisation automatique.

### 2.5.2 En fonction de l'amplitude du forçage

Le noyau, toujours en place sur le capteur, est alimenté par une puissance  $Q$  fixée et un champ acoustique à la fréquence  $f$  imposée par la source. L'impédance est alors mesurée à différents niveaux d'excitation acoustique.

Le niveau de forçage est imposé par la tension  $U_{HP}$  au haut-parleur situé dans le capteur et non en fonction de la pression de contrôle  $P$  mesurée par le microphone de référence encastré dans le fond rigide du noyau. Cependant, c'est bien la pression de contrôle qui est la variable de mesure pour l'impédance d'entrée du noyau. La figure 2.9 montre que, pour cette raison, la pression  $P$  n'est pas la même à chaque fréquence ou à chaque puissance de chauffage. Ces courbes représentent la diminution de la pression enregistrée par le microphone encastré dans la paroi rigide au fond du noyau en fonction de la puissance de chauffage lors de la mesure d'impédance associée à la figure 2.8a.

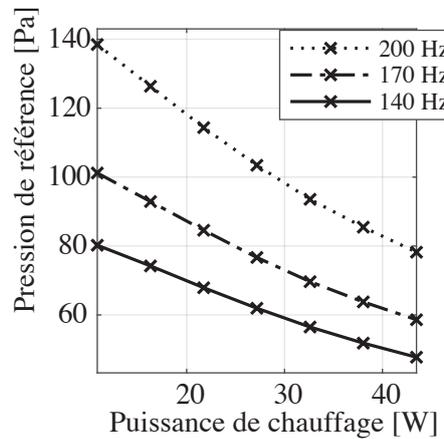


FIGURE 2.9 – Pression acoustique  $P$  au niveau du microphone de référence, situé au niveau du fond rigide du noyau, en fonction de la puissance de chauffage pour trois fréquences différentes. La tension imposée au haut-parleur ici est  $U_{HP} \sim 400$  mV.

La dépendance de  $P$  en fréquence est assez logique ne serait-ce que par le filtrage en fréquence de la source elle-même. Cependant, pour une même fréquence  $f$  et tension  $U_{GBF}$  d'alimentation, l'amplitude de pression  $P$  varie avec la puissance de chauffage  $Q$ . Un modèle électro-acoustique permet de décrire cet effet via la modélisation du système complet.

Comme l'illustre la figure 2.10, ce modèle consiste à raccorder une impédance simulée d'entrée du noyau, chauffé avec une puissance  $Q$ , à la sortie du capteur, lui-même décrit comme dans le chapitre 1 à l'aide du schéma donnée sur la figure 1.1. Le générateur de courant équivalent utilisé dans le modèle est alors remplacé par une description électro-acoustique de la source obtenue via ses paramètres de Thiele et Small fournis par le constructeur (donnés par le tableau sur la figure 2.1). Le modèle électro-acoustique du haut-parleur permet d'imposer une tension électrique  $U_{HP}$  aux bornes du capteur et d'en déduire une pression et un débit entrant dans la charge. Finalement, ces grandeurs sont introduites dans le modèle complet du système (incluant le

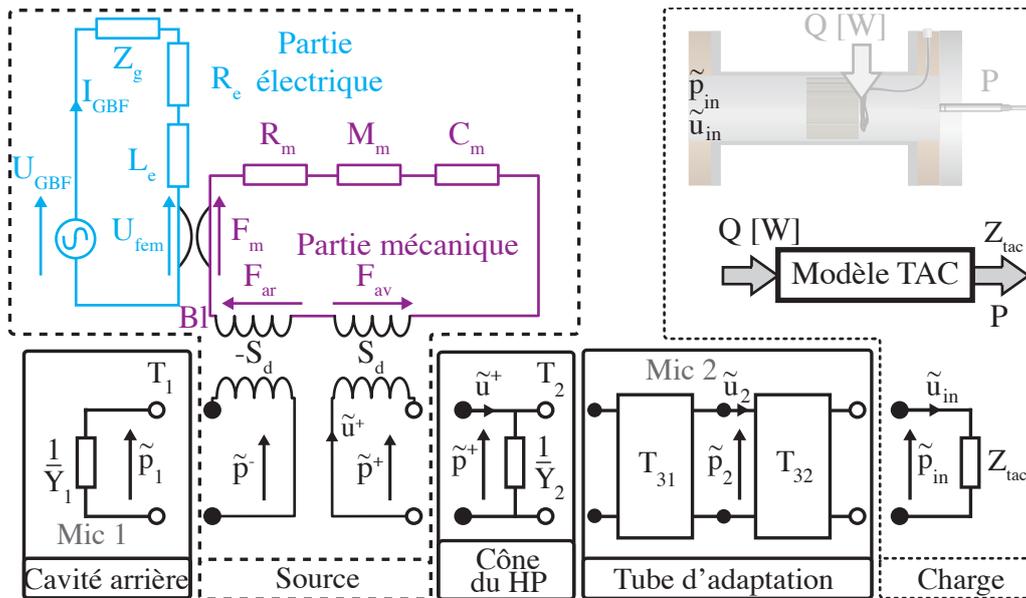


FIGURE 2.10 – Schéma de principe de la simulation d'expérience. La source du circuit est modélisée via un circuit électro-acoustique équivalent, voir Rossi[76], comprenant les caractéristiques électriques, mécaniques et acoustiques du haut-parleur, ainsi que l'impédance  $Z_g$  de sortie de l'amplificateur. Grâce à cette modélisation de la source il est possible d'imposer non plus une pression incidente au microphone de référence situé dans le noyau mais bien une tension aux bornes du haut-parleur,  $U_{HP}$ , situé dans le capteur. L'impédance de la charge est tirée de la simulation de l'impédance d'entrée du noyau pour un chauffage  $Q$  donné et permet de calculer  $Z_{tac}$  en fonction de l'amplitude de la pression  $P$ .

capteur et le noyau) afin d'en déduire l'amplitude de la pression  $P$  au niveau du microphone de référence. Les résultats de cette simulation sont donnés sur la figure 2.12. Le raccourcissement de la plage de variation de  $P$  est aussi observé dans cette simulation. Par la suite, seules les pressions de référence seront prises en compte dans la simulation de l'impédance d'entrée du noyau.

Paramètre	Symbole	Valeur [Unité]
Impédance nominale	$R_e$	8 [ $\Omega$ ]
Compliance mécanique	$C_{ms}$	119 [ $\mu\text{m}/\text{N}$ ]
Masse mobile	$M_{ms}$	0.014 [kg]
Résistance mécanique	$R_{ms}$	1.2 [kg/s]
Facteur $Bl$	$Bl$	10.8 [N/A]
Inductance de la bobine	$L_e$	0.2 [mH]
Surface de la membrane	$S_d$	0.014 [ $\text{m}^2$ ]

TABLE 2.1 – Paramètres de Thiele et Small du haut-parleur Beyma 6MI100, d'après le constructeur.

Le noyau est maintenant soumis à un niveau de forçage croissant, pour des fréquences de 140, 170 et 200 Hz. La figure 2.11 montre l'impédance du noyau en fonction de la pression  $P$  de référence, pour deux puissances de chauffage différentes ( $Q = 10.7$  W et  $Q = 44.3$  W).

Les résultats issus de la simulation du comportement du noyau sont ensuite confrontés aux données

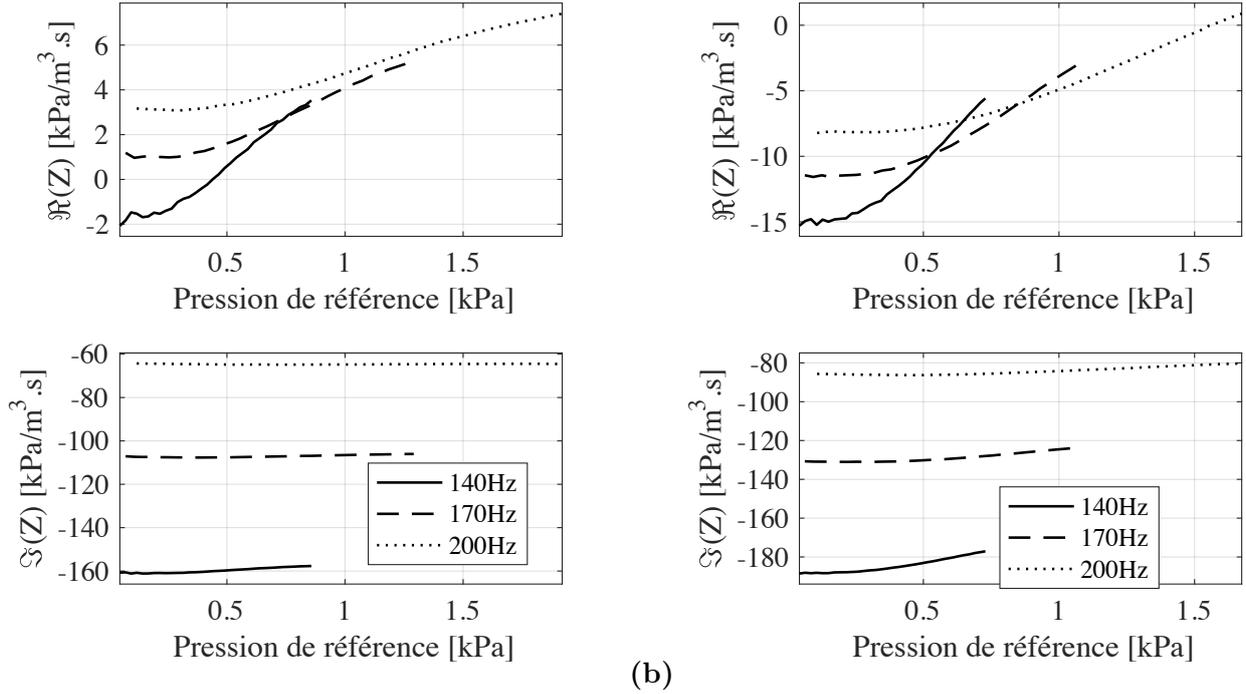


FIGURE 2.11 – Impédances d’entrée mesurées d’un noyau chauffé à  $Q = 10.7$  W (a), et  $Q = 44.3$  W (b). Les parties réelles sont représentées sur les figures du haut, les parties imaginaires sur celles du bas. Le noyau a une longueur de  $L_{tac} = 34$  cm, et le stack est positionné à  $L_{TBT} = 22$  cm.

mesurées sur un noyau réel. En faisant varier l’amplitude de la pression  $P$  dans le modèle, le champ acoustique est reconstruit suivant la méthode décrite plus haut, et l’impédance d’entrée du noyau est tracée sur la figure 2.13a pour une fréquence fixe  $f = 170$  Hz et une puissance de chauffage  $Q$ . Si le modèle se rapproche qualitativement des données expérimentales, il reste tout de même une différence visible entre les deux. En effet, une région à bas niveau ( $P \leq 300$  Pa) reste constante indépendamment de l’amplitude de forçage acoustique, ce qui n’est pas reproduit par les résultats de simulation. Ceci peut être dû au compromis fait lors du choix des temps d’attente utilisés lors du protocole de mesure, plus de détails sur ce point sont fournis en annexe B. La figure 2.13b, permet de quantifier l’impact de la correction fort niveau dont il est question au chapitre 1, au paragraphe 1.4.2. En l’occurrence, cette figure montre que la correction ne change que très peu la courbe de la partie imaginaire de l’impédance d’entrée du noyau, et n’induit aucun changement visible sur la partie réelle de cette impédance. Cette correction peut donc, ou non, être prise en compte sans que cela ne change significativement la qualité de la mesure. Par la suite, cette correction sera tout de même réalisée.

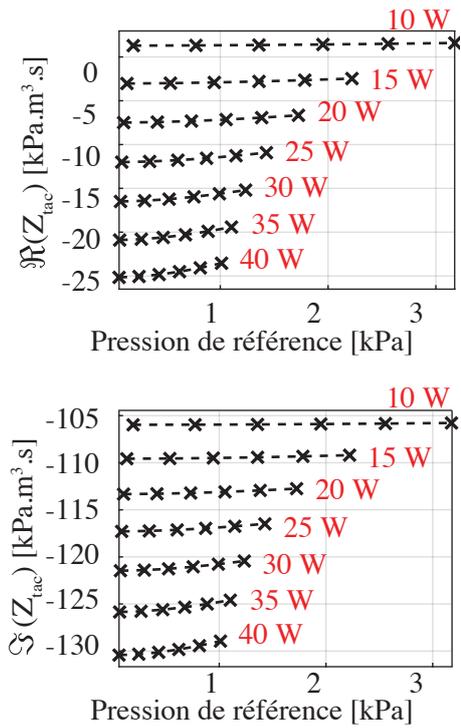


FIGURE 2.12 – Courbes d'impédances d'entrée simulées d'un noyau de longueur de  $L_{tac} = 34$  cm, dans lequel le stack est positionné à  $L_{TBT} = 22$  cm, en partie réelle (en haut) et en partie imaginaire (en bas) en fonction de l'amplitude de la pression au niveau du microphone de référence et pour plusieurs puissances de chauffage  $Q$  à 170 Hz.

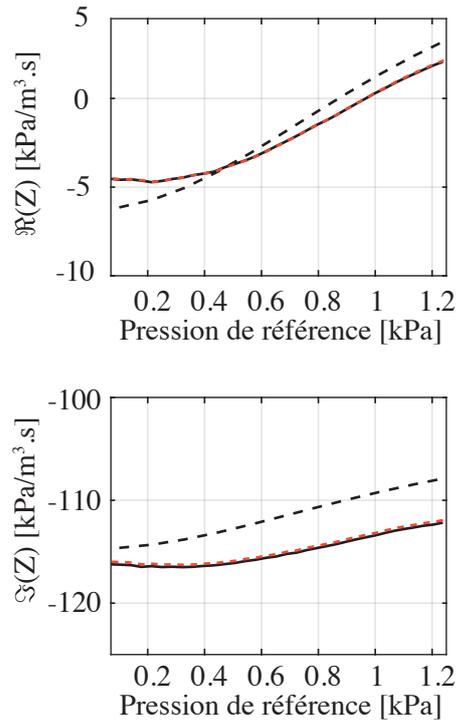


FIGURE 2.13 – Comparaison des impédances mesurée (—) et simulée (---) d'un noyau thermoacoustique de longueur de  $L_{tac} = 34$  cm, dans lequel le stack est positionné à  $L_{TBT} = 22$  cm et alimenté par une puissance de chauffage  $Q = 21.3$  W, en fonction de la fréquence, à 170 Hz en fonction de la pression de référence. Les courbes en orange représentent l'impédance du noyau sans correction non linéaire.

## 2.6 Cartographie complète de l'impédance d'entrée d'un noyau

L'impédance d'entrée du noyau est ici mesurée non plus en fonction d'une seule variable ( $f$ ,  $P$  ou  $Q$ ) mais de deux variables à la fois : l'amplitude  $P$  et la fréquence  $f$  de la pression acoustique, pour une puissance  $Q$  fixée. Le protocole détaillé au paragraphe 2.4 mène à la mesure de cette impédance. Celle-ci est représentée sur la figure 2.14 dans le cas où  $Q = 44.3$  W. La figure 2.14a montrent l'impédance, en parties réelle et imaginaire, mesurée en fonction de la fréquence en abscisse et de la tension  $U_{HP}$  imposée à la source en ordonnée. La figure 2.14b montre quant à elle les mêmes données expérimentales mais avec la pression  $P$  de référence, mesurée au niveau du fond rigide, en ordonnée. L'évolution de la dynamique de la plage de pression en fonction de la fréquence est d'ailleurs une nouvelle fois observée sur la figure 2.14b.

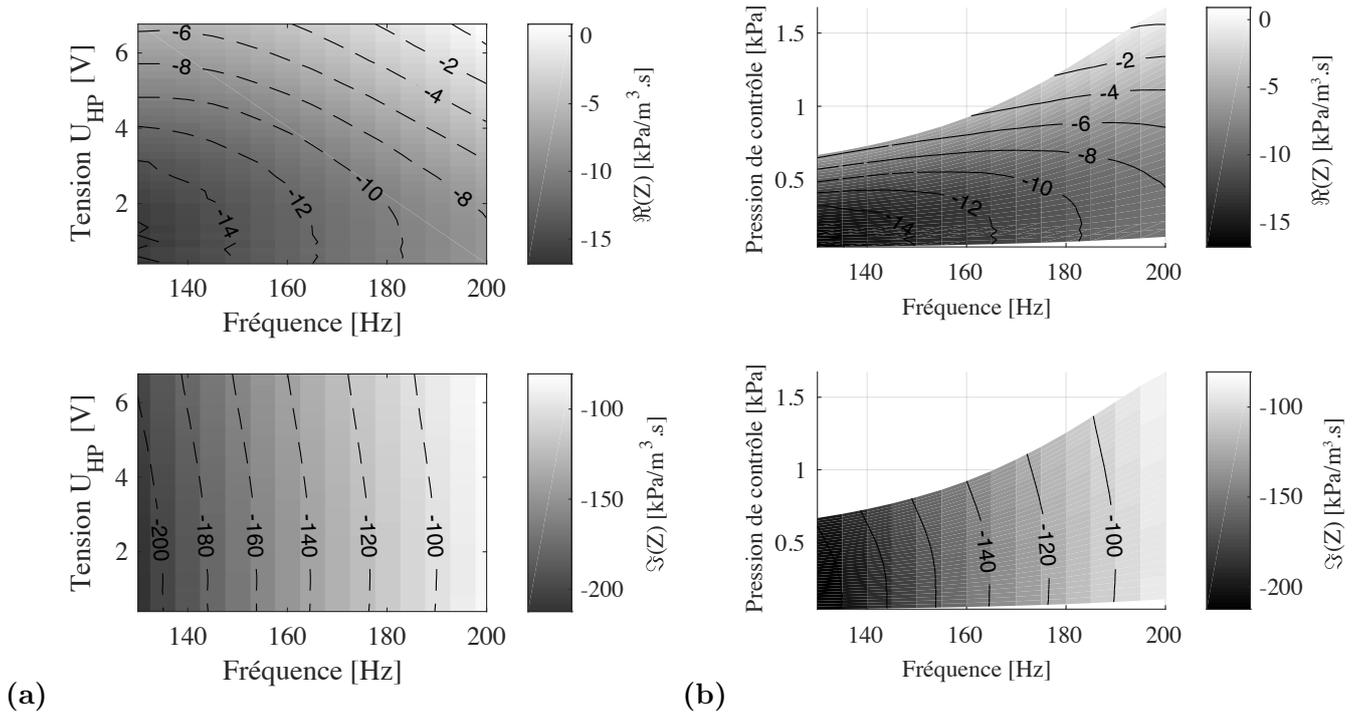


FIGURE 2.14 – Cartographie des parties réelle et imaginaire de l'impédance d'entrée du noyau thermoacoustique, de longueur  $L_{tac} = 34$  cm dans lequel est placé un stack à  $L_{TBT} = 22$  cm du fond rigide, alimenté par une puissance de chauffage  $Q = 44.2$  W, en fonction de la fréquence et de la tension  $U_{HP}$  (a) ou de la pression de contrôle  $P$  (b).

## 2.7 Conclusion

Ce chapitre présente tout d'abord un moyen de modéliser un noyau thermoacoustique. Le modèle se base sur la théorie linéaire de la thermoacoustique, couplée à une méthode de reconstruction de la distribution du champ de température interne. Cette méthode nécessite toutefois l'ajustement de certains paramètres liés au stack (comme la porosité  $\phi_s$  et le rayon hydraulique du matériau  $R_h$ ) mais aussi des coefficients de pertes thermiques latérales à travers les parois ( $h_{lat}$ ) qui rendent possible la stabilisation du champ de température le long du système en l'absence d'échangeur de chaleur à température ambiante. Le modèle donne des résultats dont la justesse dépend de la puissance de chauffage, et permet de prévoir qualitativement le comportement d'un noyau. Un modèle complet du banc permet de simuler l'expérience et de mettre notamment en avant le phénomène de rétrécissement de la plage d'amplitudes de pression acoustique pour différentes fréquences et puissances de chauffage.

Plusieurs mesures sont aussi réalisées afin de caractériser un noyau thermoacoustique pour diverses combinaisons de fréquences  $f$ , d'amplitudes de pression acoustique  $P$  et de puissances de chauffage  $Q$ . Les résultats peuvent alors être cartographiés afin de décrire le noyau selon deux paramètres de contrôle différents à la fois, en l'occurrence la fréquence et l'amplitude de la pression. Cette cartographie est utilisée dans le chapitre suivant afin de chercher à prévoir des points de fonctionnement pour un moteur incluant le noyau en question.

## Chapitre 3

# Prédictions du comportement du moteur à partir de la méthode de raccordement des impédances

Le régime de fonctionnement d'un moteur thermoacoustique est encore à ce jour difficile à prédire, y compris en connaissant parfaitement la géométrie du système complet. En cause, la description imparfaite de certains mécanismes saturants due à leur complexité intrinsèque. Parmi ces mécanismes, la distorsion des ondes acoustiques causée par la propagation à fort niveau le long d'un guide d'onde qui survient dans le cas d'auto-oscillations thermoacoustiques[19, 18]. Mais aussi, les effets aérodynamiques pouvant prendre place aux bords de certains composants de la machine (notamment aux extrémités du stack[1, 15]), ou bien les flux de masse induits acoustiquement au sein de la machine par exemple[12, 22, 29, 37, 44]. Ces mécanismes sont difficilement quantifiables et, pour cette raison, une méthode de mesure de l'impédance d'entrée du noyau thermoacoustique est proposée dans les chapitres 1 et 2. Cette méthode repose sur l'hypothèse que les mécanismes saturants sont pris en compte dans la mesure de l'impédance d'entrée du noyau.

Il est possible d'obtenir une estimation de l'état stationnaire du système en fonctionnement en ajoutant des processus saturants *a posteriori* dans le modèle linéaire de Rott[77]. C'est notamment l'approche adoptée par les développeurs du logiciel DeltaEC<sup>1</sup>, voir notamment en réf. [26]. Comme vu dans le chapitre précédent, Guédra[41] propose une méthode analogue basée sur une approche en matrice de transfert pour décrire le mécanisme thermoacoustique le long d'un moteur discrétisé. Cette méthode est détaillée et légèrement modifiée dans le paragraphe 2.2. Ces effets saturants, qu'il est possible d'inclure dans le modèle, ne sont malheureusement pas suffisants pour garantir une bonne estimation du régime établi du moteur. En effet, la théorie de Rott est limitée par son hypothèse de faible amplitude des oscillations acoustiques et ne permet pas de prédire avec certitude les mécanismes de saturation de la machine, à l'exception du pompage de

---

1. <http://www.lanl.gov/org/padste/adepts/materials-physics-applications/condensed-matter-magnet-science/thermoacoustics/computer-codes.php>

chaleur thermoacoustique qui tend à réduire le gradient de température imposé.

L'idée développée dans ce manuscrit est de considérer un auto-oscillateur thermoacoustique comme un système comprenant deux sous-systèmes raccordés l'un à l'autre. Le premier sous-système est le noyau thermoacoustique, il génère un gain acoustique thermiquement induit. Le second sous-système est constitué du reste des éléments qui forment l'auto-oscillateur complet. Une fois les deux sous-systèmes rattachés, le système complet peut donner lieu à une instabilité thermoacoustique. Suite à un régime transitoire plus ou moins long, le moteur converge vers un état stationnaire, point de fonctionnement de la machine. Cette approche est notamment adoptée par Biwa et Hatori[46]. Leur méthode consiste à mesurer l'impédance acoustique d'entrée des deux sous-systèmes en régime forcé et d'en tirer une condition de raccordement. Cette condition consiste à satisfaire la continuité de la pression acoustique et du débit volumique lorsque les deux sous-systèmes sont raccordés. Dans leur étude, les mesures d'impédances d'entrée se font via la mesure simultanée de la pression acoustique (à l'aide d'un microphone) et de la vitesse particulaire locale (à partir d'une méthode LDV<sup>2</sup>) en entrée du sous-système. Les deux sous-système sont ensuite raccordés l'un à l'autre via leurs impédances respectives et une condition de déclenchement de la machine permettant de satisfaire la condition de raccordement, est donné *a priori*.

Cependant, si l'approche adoptée dans ce manuscrit reste très proche de celle proposée par Biwa et Hatori, le principe de mesure et le type de système étudié diffèrent. D'une part, la méthode de mesure de l'impédance d'entrée proposée ici, voir aux chapitres 1 et 2, permet plus de facilité de mise en œuvre (car elle ne repose que sur des mesures microphoniques); d'autre part, dans le cadre du présent manuscrit, le moteur thermoacoustique est construit de manière à pouvoir re-configurer aisément le moteur. Cette flexibilité de mise et œuvre permet, entre autre, d'étudier l'impédance d'entrée du noyau dans différentes configurations (différentes positions de stack par rapport au fond rigide  $L_{TBT}$ , longueurs de noyau  $L_{tac}$  ou puissances de chauffage  $Q$ ). Toutefois la plus grande nouveauté reste que dans les travaux réalisés ici, les mesures d'impédances sont faites non seulement en fonction de la fréquence  $f$  et de la puissance  $Q$  imposée au noyau, mais aussi en fonction de l'amplitude de la pression acoustique  $P$  au sein du noyau. De cette manière, il est possible, pour un moteur donné, de prédire non-seulement une condition de déclenchement (lorsque le niveau acoustique est faible), mais aussi un point de fonctionnement de la machine prenant en compte les mécanismes saturants inclus dans l'impédance mesurée.

Le principe de la méthode est tout d'abord détaillé dans le prochain paragraphe 3.1 puis plusieurs prédictions du déclenchement et du régime établi d'une machine sont présentés, respectivement aux paragraphes 3.2 et 3.3.

---

2. *Laser Doppler Velocimetry* ou Vélométrie Laser Doppler

### 3.1 Principe de la prédiction

Le schéma en figure 3.1 résume le principe de la méthode. Les deux sous-systèmes formant le moteur sont identifiés : d'un côté une charge, de l'autre une partie motrice à l'origine du mécanisme d'amplification acoustique, le noyau thermoacoustique. Ces deux parties sont ensuite assimilées à deux boîtes noires jointes en un point où la continuité de la pression et du débit est supposée pour un point de fonctionnement de la machine. Cette hypothèse s'écrit :

$$\tilde{p}^+ = \tilde{p}^-; \quad (3.1)$$

$$\tilde{u}^+ = -\tilde{u}^-; \quad (3.2)$$

où les exposants (+) et (-) font respectivement référence aux grandeurs à l'entrée du sous-système de gauche et de droite. Sans faire d'hypothèse quant à la nature des processus acoustiques internes et propres à chaque élément, il est possible de caractériser les deux sous-systèmes via leurs impédances acoustiques d'entrée respectives définies comme le rapport de la pression acoustique et du débit volumique à l'entrée du sous-système considéré :

$$Z^+ = -Z^- \Leftrightarrow Z_{\text{charge}} = -Z_{\text{tac}}. \quad (3.3)$$

Le chapitre 2 explique en détails la méthode de mesure de l'impédance du noyau. Des impédances d'entrée du noyau, obtenues dans différentes configurations, et de différentes charges ont été présentées dans le chapitre 2.

Considérer la partie réelle de cette relation (3.3) fait naturellement apparaître la nécessité d'équilibrer les pertes de la charge  $\Re(Z_{\text{charge}})$  et le gain apporté par la partie motrice  $\Re(Z_{\text{tac}})$ ; la partie imaginaire porte, quant à elle, l'information qui concerne le raccordement du champ acoustique dont la distribution n'est évidemment pas la même dans les deux éléments. L'équation (3.3) suppose donc d'assurer à la fois l'équilibre entre gain et perte ainsi que la continuité du champ acoustique une fois les éléments joints. Si cette condition, dite de 'raccordement des impédances' (ou *impedance matching*), est satisfaite pour un jeu de paramètres connus, alors ces paramètres assurent le fonctionnement du système dans le cas particulier considéré. Il est donc possible de se servir de cette relation pour mettre à l'épreuve plusieurs jeux de paramètres imposés à la machine et prédire le comportement du système pour chaque jeu de paramètres. Ce jeu de paramètres peut être, par exemple, différentes charges ou différentes valeurs de puissance de chauffage imposées. À première vue cette méthode permet plusieurs observations. Une première observation se base sur la mesure de l'impédance d'entrée des éléments en fonction de la fréquence de l'excitation acoustique et de la puissance de chauffage imposée. Le chapitre 2 montre en effet que le chauffage impacte significativement l'impédance d'entrée du noyau. En particulier, la partie réelle diminue jusqu'à devenir négative pour un chauffage suffisant.

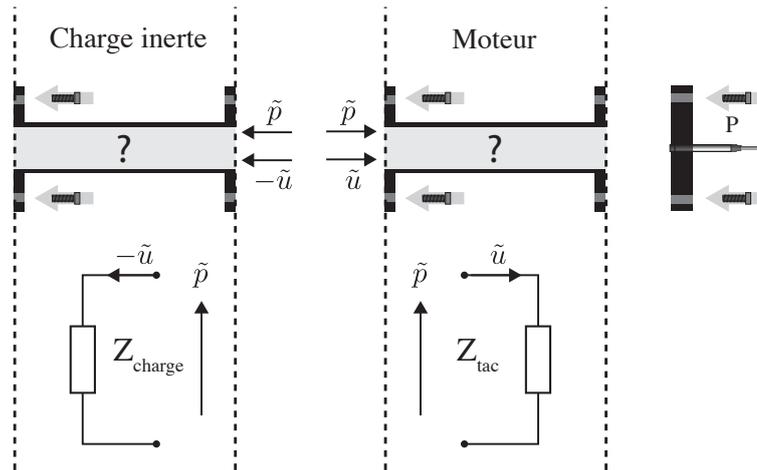


FIGURE 3.1 – Représentation schématique du problème. Un moteur thermo-acoustique peut se représenter comme un système comprenant une partie inerte et une partie motrice. Ces deux composants sont assimilés à deux boîtes noires caractérisées par leur impédance d’entrée. À la jonction de ces deux parties, la pression et le débit sont considérés comme continue, donc la pression  $\tilde{p}$  est la même aux deux entrées tandis que les débits  $\tilde{u}$  s’opposent.

Alors, pour une excitation acoustique faible, la valeur de puissance de chauffage  $Q$  permettant d’équilibrer parfaitement le gain apporté par le noyau avec les pertes présentes dans la charge ainsi que d’égaliser de la même manière les parties imaginaires des éléments raccordés, sera la puissance nécessaire au déclenchement de l’instabilité thermoacoustique aussi appelée puissance seuil, ou seuil de déclenchement  $Q_{\text{onset}}$ .

Le paragraphe suivant ?? montre qu’il est possible de prédire le déclenchement d’une machine à partir de la mesure préalable de l’impédance d’entrée de ses éléments.

### 3.2 Prédiction du déclenchement d’une machine

À partir des impédances d’entrée précédemment obtenues au chapitre 2, il est possible de simplement raccorder une charge à un noyau pour prédire le seuil de déclenchement de la machine. En effet, l’impédance du noyau reste relativement constante à faible niveau de pression. C’est pourquoi les résultats obtenus en régime linéaire peuvent être utilisés pour prédire le déclenchement. Pour cela, les impédances de la charge et du noyau doivent se raccorder en partie imaginaire et réelle pour une même fréquence  $f$ . Le seuil de déclenchement est la valeur de chauffage qui permet ce raccordement. Les figures 3.2a et 3.2b montrent respectivement les valeurs des parties réelles et imaginaires des impédances d’entrée de la charge  $Z_{\text{charge}}$  et du noyau  $Z_{\text{tac}}$ . Dans le cas présent, le noyau est celui présenté au paragraphe 2.1 ( $L_{\text{tac}} = 34$  cm et  $L_{\text{TBT}} = 22$  cm) et la charge est un tube fermé de longueur  $L_{\text{charge}} = 73$  cm. Les deux éléments partagent une même section  $S$  uniforme. Les lignes en trait plein correspondent à l’impédance du noyau pour différentes valeurs de chauffage. Les valeurs de  $Q$  croissantes sont indiquées par les nuances de gris sur le côté de la figure. Étant donnée la relation (3.3), ce n’est pas  $Z_{\text{charge}}$  mais bien  $-Z_{\text{charge}}$  qui est représentée en ligne

tirées pour rendre compte de l'opposition des débits volumiques entrants lors de la mesure, comme indiqué par l'équation (3.3).

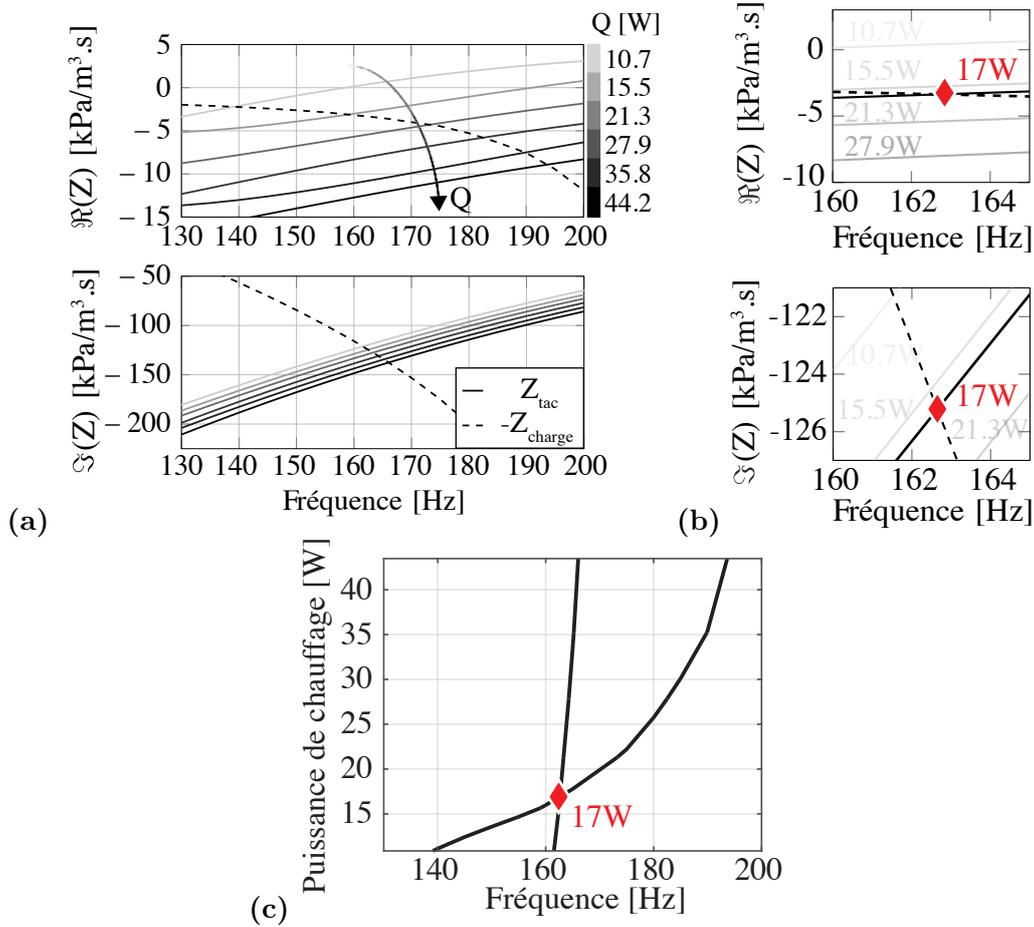


FIGURE 3.2 – (a) Courbes de l'impédance du noyau de longueur  $L_{tac} = 34$  cm dans lequel le stack est placé à  $L_{TBT}$  du fond rigide, pour différentes puissances de chauffage (-), et de (moins) l'impédance de la charge (- -) : un tube fermé de  $L_{charge} = 73$  cm, en fonction de la fréquence en partie réelle (haut) et imaginaire (bas). (b) Agrandissement de la zone d'intérêt pour la prédiction en partie réelle (gauche) et imaginaire (à droite). Les fuseaux rouges tracés sur ces quatre figures montre la fréquence pour laquelle les impédances sont raccordées autant en partie réelle qu'en partie imaginaire. Une droite auxiliaire est donnée en (b) et résulte d'une interpolation correspondant à une puissance de chauffage de  $Q = 17$  W.

La figure fait apparaître qu'il doit exister une valeur de puissance de chauffage  $Q$ , comprise entre 15.5 W et 21.3 W, telle que les impédances sont raccordées à la même fréquence  $f$ . Un trait rouge représente la fréquence  $f_{onset}$ . Cette valeur est obtenue à l'aide d'une méthode basée sur une interpolation linéaire réalisée entre les courbes  $Q = 15.5$  W et  $Q = 21.3$  W afin d'obtenir la valeur  $Q_{onset}$ . Un zoom sur la gamme de fréquence d'intérêt est proposé en figure 3.2b, et permet de mieux comprendre la méthode. La valeur de chauffage  $Q = 17$  W raccorde les impédances de charge et du noyau à la fréquence  $f \sim 162.5$  Hz et permet de prédire le seuil de déclenchement  $Q_{onset} = 17$  W pour cette configuration.

Une autre représentation a été pensée pour faciliter la prédiction. Le principe de cette représentation est de ne montrer que les valeurs qui respectent la condition (3.3) en séparant la partie réelle et la partie

imaginaire de la relation. Pour cela, une nouvelle fonction,  $Z_{\text{sum}}$ , est introduite :

$$Z_{\text{sum}} = Z_{\text{tac}} + Z_{\text{charge}}. \quad (3.4)$$

Cette nouvelle fonction, homogène à une impédance, est nulle dans le cas où la relation (3.3) est respectée. C'est précisément cette propriété qui est utilisée pour la nouvelle représentation. Une fois calculée, les zéros de  $\Re(Z_{\text{sum}})$  et de  $\Im(Z_{\text{sum}})$  sont tracés à l'aide de la fonction *contour* de MatLab® dans un plan ayant pour abscisse la fréquence et la puissance de chauffage en ordonnée. La séparation des champs réel et imaginaire permet de chercher un point de croisement clair dans le plan. Les coordonnées de ce point de croisement fournissent alors directement les valeurs  $f_{\text{onset}}$  et  $Q_{\text{onset}}$ . Le résultat de cette méthode est donné en figure 3.2(c) et mène à la prédiction faite précédemment :  $f_{\text{onset}} = 162.5$  Hz et  $Q_{\text{onset}} = 17$  W.

Si les deux représentations sont équivalentes en terme de résultats, cette dernière sera préférée pour sa lisibilité, et adaptée pour d'autres types de prédictions présentées plus loin.

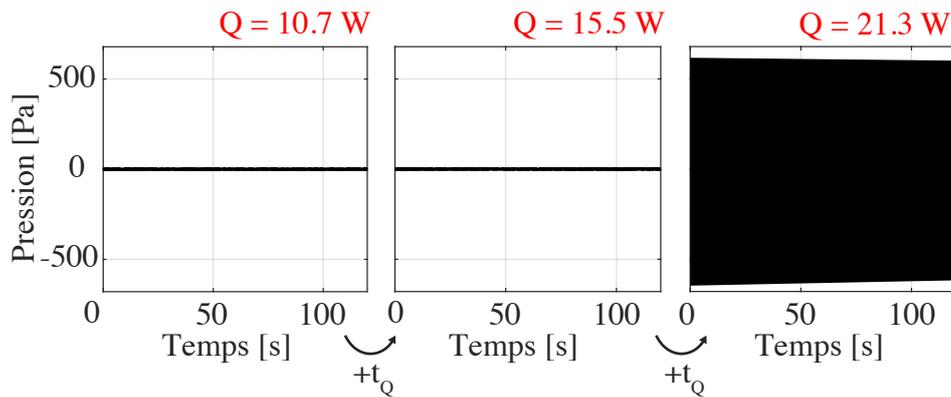


FIGURE 3.3 – Mesure de la pression  $P$  dans le moteur en fonction du temps, pour différentes puissances de chauffage. Le noyau a une longueur de  $L_{\text{tac}} = 34$  cm, le stack est placé à  $L_{\text{TBT}} = 22$  cm et la charge est un tube fermé de  $L_{\text{charge}} = 73$  cm. Un temps de stabilisation  $t_Q = 600$  s est respecté à chaque nouvelle mesure.

Une fois les mesures de prédictions réalisées, il est intéressant de raccorder physiquement le moteur afin de valider la méthode. Le moteur est donc monté suivant 1.1 et alimenté par des puissances chauffages croissantes, ici pour  $Q = 10.7$  W,  $Q = 15.5$  W et  $Q = 21.3$  W. Les figures 3.3 représentent la pression mesurée par le microphone de référence  $P$  situé au fond du noyau, pour ces trois puissances de chauffage. Ces résultats sont obtenus après avoir observé un temps de stabilisation de  $t_Q = 600$  s pour chaque mesure afin de s'assurer que la distribution de la température n'évolue plus le long du noyau. Ainsi, si aucune auto-oscillations n'est mesurée au bout du temps  $t_Q$ , il est considéré que le moteur ne déclenchera tout simplement pas pour la puissance de chauffage testée. La mesure de l'amplitude des auto-oscillations au sein du moteur est réalisée sur une période de 180 s. Les évolutions temporelles de l'amplitude de la pression indiquent que la machine se déclenche avec un chauffage de  $Q = 21.3$  W, mais pas pour  $Q = 10.7$  W et  $Q = 15.5$  W. Ce constat n'a pas pour but de fournir une estimation précise de la qualité de la prédiction mais permet de

prouver que les valeurs de chauffage testées respectent la condition de déclenchement.

### 3.3 Prédiction du régime établi d'une machine

Appliquer la méthode de raccordement en faisant varier non plus la puissance de chauffage  $Q$  mais l'amplitude de pression acoustique  $P$ , pour une puissance de chauffage fixée au dessus de la valeur seuil, conduit à prédire un point de fonctionnement pour la machine thermoacoustique considérée. Ce point de fonctionnement fournit des valeurs de  $P$  et de  $f$  qui satisfont les conditions de raccordement des impédances en partie réelle et imaginaire. Les valeurs retrouvées de cette manière correspondent alors aux conditions que devrait atteindre le moteur en fonctionnement en régime stationnaire. Un exemple de prédiction est donnée sur la figure 3.4, pour une puissance de chauffage fixée à  $Q = 25.6$  W. Comme précédemment, les courbes représentent les zéros des surfaces réelle et imaginaire de l'impédance  $Z_{sum}$  cartographiées selon  $P$  et  $f$ . Ce qui veut dire que ces courbes de niveaux (ne représentant que le niveau  $Z_{sum} = 0$ ) indiquent directement les couples  $(P; f)$  pour lesquels la condition donnée par l'équation (3.3) est respectée. En trait plein (—) figurent les mesures avec étalonnage non linéaire tandis qu'en trait tireté (- -) figurent les mesures n'ayant pas subi la correction non linéaire. Ces courbes finissent de montrer que l'étalonnage non-linéaire n'est pas critique pour les mesures exploitées dans ce manuscrit.

Un fait intéressant est que la condition  $\Im(Z_{sum}) = 0$  agit comme un curseur quasi-vertical, ce qui montre que la partie imaginaire porte principalement l'information de raccordement du champ acoustique (et impose donc la pulsation). D'ailleurs, la partie réelle est quant à elle quasi-horizontale sur une gamme de fréquence allant de 130 à 160Hz. Dans cette gamme de fréquence, la partie réelle est alors un curseur donnant une valeur de pression  $P$  alors que la partie imaginaire agit comme un curseur donnant l'indication de la valeur de la fréquence  $f$  atteinte en régime établi. À partir de 160 Hz cependant, les rôles des parties réelle et imaginaire ne sont plus identifiables de cette façon. La partie réelle de l'impédance forme une cloche, si le curseur formé par la partie imaginaire vient à passer dans cette région alors l'amplitude de pression prédite pour le régime établi du moteur dépendra de la fréquence à laquelle se trouve le croisement. Cette forme particulière a déjà été relevée sur l'impédance du noyau en figure 2.14 pour une puissance de chauffage et une fréquence fixes en fonction de la pression.

Un marqueur diamant indique les valeurs de  $P_\infty$  et de  $f_\infty$  mesurées sur le moteur en fonctionnement. Le choix du protocole de mesure joue à nouveau un rôle important dans la validité de la mesure. En effet, il est nécessaire de s'assurer que le noyau est soumis à une distribution de température comparable dans le cas où il est monté sur le capteur et dans le cas où il est attaché à une charge. Pour cela, le protocole de mesure utilisé dans l'objectif de prédire un régime établi est décrit ici.

- Le noyau est monté sur le capteur et son impédance d'entrée est mesurée pour une puissance  $Q$  donnée.

- Le noyau est ensuite démonté du capteur puis attaché à une charge sans que la puissance de chauffage imposée ne change.
- Le moteur commence à auto-osciller puis à saturer et finit par atteindre un régime établi pour lequel l'amplitude de pression  $P_\infty$  et la fréquence des auto-oscillations  $f_\infty$  sont recueillis par le microphone de référence situé sur la paroi rigide au fond du noyau.

Cette procédure est adoptée ici afin de minimiser l'impact de la dérive de l'impédance d'entrée du noyau au cours du temps. Cependant, cette procédure n'est pas parfaite puisque le temps durant lequel le changement de configuration est opéré suffit à la distribution de température au sein du noyau pour changer, et avoir un impact direct sur la qualité de la prédiction.

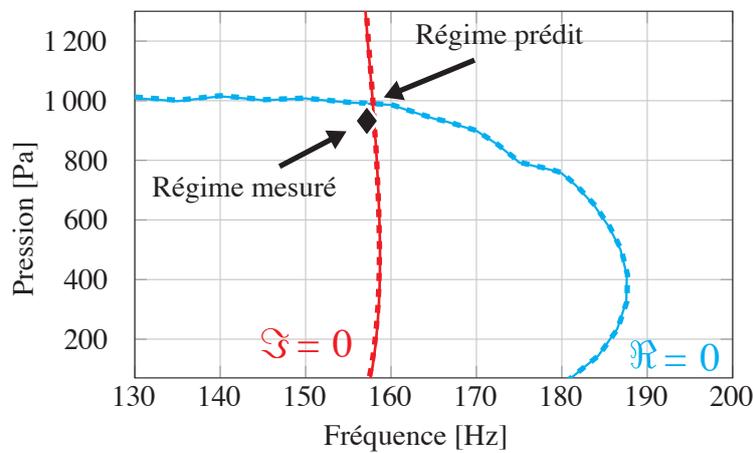


FIGURE 3.4 – Courbes de niveaux de la condition donnée en équation (3.3) pour différentes valeurs de  $P$  et  $f$ . Les courbes bleues montrent la partie réelle de la condition, tandis que la partie imaginaire est représentée en rouge. En trait plein (-) figurent les mesures avec étalonnage non linéaire tandis qu'en trait tireté (-) figurent les mesures n'ayant pas subi la correction non linéaire. Ces courbes finissent de montrer que l'étalonnage non-linéaire n'est pas critique pour les mesures exploitées dans ce manuscrit.

Les figures 3.5 reprennent cette représentation pour deux configurations différentes :

- en 3.5a une charge ouverte de longueur  $L_{\text{charge}} = 20$  cm ;
- en 3.5b une charge fermé par une paroi rigide de longueur  $L_{\text{charge}} = 73$  cm.

Plusieurs puissances de chauffage sont testées et représentées sur la même figure au moyen de différentes couleurs. Les parties réelles et imaginaires n'ont pas été différenciées sur cette représentation car elles adoptent le même comportement que dans l'exemple donné en figure 3.4, à savoir que la condition  $\Im(Z_{\text{sum}}) = 0$  forme une ligne verticale quasi-droite et est donc facilement différenciable de la courbe représentant  $\Re(Z_{\text{sum}})$ . La gamme de fréquence d'étude représentée ici est réduite à l'intervalle [150 : 180] Hz afin d'assurer une meilleure lisibilité. Le premier constat est que les valeurs prédites sont assez proches de ce qui est observé sur le moteur en fonctionnement, indépendamment de la configuration ou de la puissance de chauffage. En figure 3.5b est représentée une courbe en pointillé qui concerne une puissance de chauffage ne donnant pas lieu

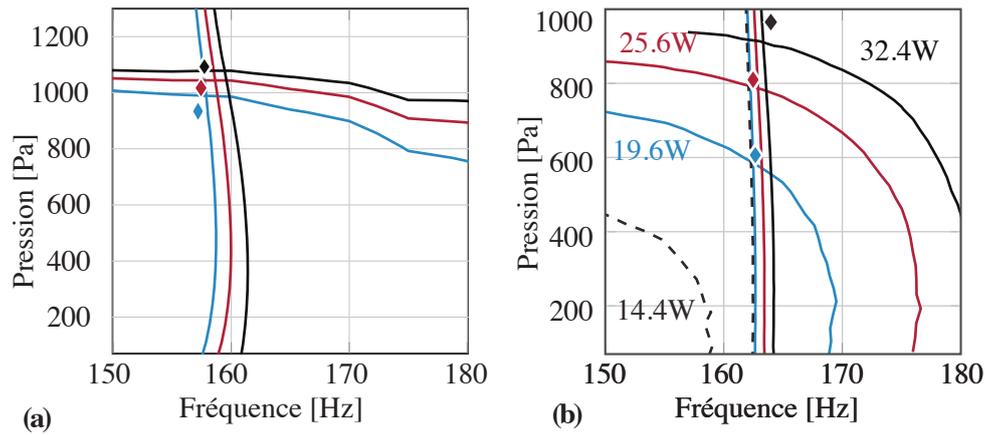


FIGURE 3.5 – Courbes de niveau représentant la condition de raccordement des impédances en fonction de l’amplitude de la pression  $P$ , mesurée par le microphone situé au fond du noyau, et de la fréquence  $f$ . En (a), le noyau est raccordé à un tube ouvert de 20 cm, tandis qu’en (b), il est raccordé à un tube fermé de 73 cm. Chaque puissance de chauffage testée est représentée par une couleur différente. Les points de croisements de ces courbes prédisent l’amplitude de la pression  $P$  et la fréquence  $f$  des auto-oscillations qui se produiraient une fois le moteur assemblé. Les marqueurs en forme de diamant représentent les conditions d’auto-oscillations mesurées sur le moteur en fonctionnement.

au déclenchement du moteur. En effet, la puissance de chauffage  $Q = 14.4W$  associée à cette courbe est en dessous du seuil de déclenchement  $Q_{\text{onset}}$  évalué pour le moteur dans la section précédente.

L’absence de contrôle du gradient de température le long du stack rend difficile l’obtention de cycles limites parfaitement reproductibles pour une configuration fixée. Lorsque le noyau est manipulé afin de procéder à la mesure de son impédance d’entrée, rien n’assure que le cycle prédit sera exactement celui qui sera obtenu après son raccordement à la charge (ou qui aurait été obtenu avant la mesure d’impédance). Les différences entre les cycles prédits et ceux réellement mesurés sur le moteur en fonctionnement s’expliquent probablement en grande partie par le choix du protocole de réalisation des mesures.

### 3.4 Conclusion

La méthode de raccordement des impédances permet de prédire de manière assez précise le régime saturé d’un moteur grâce à une mesure préalable de l’impédance d’entrée du noyau. Cette nouvelle méthode de prédiction du point de fonctionnement d’une machine thermoacoustique permet de se passer de la description précise des éléments qui constituent le noyau. Cette description peut en effet s’avérer complexe aussi bien analytiquement[4, 20, 26, 41] qu’expérimentalement[13, 38, 46].

Les divergences observées entre les points de fonctionnement prédits et mesurés s’expliquent principalement par le protocole de mesure adopté. Comme mentionné en Annexe B, il a été jugé nécessaire de réduire le temps de mesure et pour cela, le temps de stabilisation observé suite à un incrément de fréquence lors d’une mesure de l’impédance d’un noyau chauffé. Ce compromis permet à la fois de grandement raccourcir le temps

total de mesure mais aussi de garantir des prédictions de régimes stationnaires avec une précision suffisante. S'il reste difficile d'estimer l'impact du protocole sur la qualité de la prédiction, les résultats indiquent que cette nouvelle méthode est tout de même fiable dans le cas des différents auto-oscillateurs décrits ici.

Cette méthode peut cependant être améliorée. En effet, la limitation première de cette méthode réside dans le fait qu'une mesure d'impédance d'entrée est réalisée sur le noyau. Cela implique que les conditions aux limites d'un côté du noyau ont été imposées, ici par l'utilisation d'une paroi rigide pour fermer une des extrémités. Or, aujourd'hui, les moteurs thermoacoustiques adoptent diverses géométries qui assurent une meilleure efficacité que dans le cas des moteurs à ondes stationnaires[9, 24, 50, 82], et pour lesquelles le noyau thermoacoustique est placé dans une boucle de guide d'onde. Le pont d'impédance pourrait aussi être placé à l'entrée d'une boucle afin de s'affranchir du fait que la condition aux limites soit fixée à l'extrémité du noyau. Cependant, il serait intéressant de mettre en œuvre une méthode permettant la mesure des quatre termes de la matrice de transfert du noyau[2, 13, 42] (et non plus uniquement de l'impédance à l'entrée). Cette matrices donnent accès aux conditions acoustiques permettant d'optimiser le rendement de ce dernier[7]. Ainsi, un réseau de charges pourrait être construit autour du noyau, préalablement caractérisée, constituant un moteur dont la géométrie est optimale[47].

Il est toutefois possible, à partir des mesures déjà présentées dans ce manuscrit, d'étudier la puissance acoustique transmise à une charge et de chercher à la maximiser. Cet étude fait l'objet du prochain chapitre.

## Chapitre 4

# Application à l'optimisation de la charge raccordée à un noyau

Le chapitre 2 fait plusieurs fois mention de l'amplification acoustique d'une onde incidente par un noyau thermoacoustique chauffé, qui se traduit par une résistance acoustique d'entrée du noyau négative. Dans certains cas, comme le montre le chapitre 3, cette amplification donne lieu à des auto-oscillations au sein du réseau d'éléments acoustiques raccordés au noyau[9, 10, 11, 17, 24, 78]. Le moteur ainsi formé convertit une partie de l'énergie thermique, apportée via un échangeur chaud (un fil du NiChrome ici), en énergie acoustique. Le rendement du noyau peut alors s'écrire comme le rapport de l'énergie acoustique générée dans le noyau et de l'énergie thermique apportée.

La prédiction théorique du rendement d'une machine thermoacoustique se fait traditionnellement via la théorie de la thermoacoustique linéaire telle qu'énoncée par Rott [77]. Les modèles consistent souvent à considérer une version discrétisée du système thermoacoustique complet et à ajouter aux divers éléments des mécanismes saturants[41] (pertes de charge singulières, pompage thermoacoustique, etc)<sup>1</sup> afin d'en déduire un point de fonctionnement pour la machine une fois construite. L'optimisation ne peut, de cette manière, se faire que de manière indirecte car le rendement n'est connu qu'*a posteriori*.

Une autre méthode proposée par Holzinger [47], sur la base de travaux initiés par Aurégan[7], suggère qu'une optimisation du champ acoustique maximisant l'amplification thermoacoustique peut être réalisée via l'écriture d'une matrice de diffusion décrivant les éléments qui constituent le noyau, et l'optimisation de la conversion est recherchée en maximisant l'une des valeurs propres de cette matrice (le vecteur propre donne alors accès au champ optimal qui permettrait d'atteindre ce maximum d'amplification). Cette matrice peut être déterminée expérimentalement par exemple[2, 13, 42]. La machine optimisée complète se construit

---

1. qui dans la plupart de ces cas sont décrits de façon très approchée

alors par raccordement de divers éléments acoustiques afin d'obtenir le champ acoustique optimal au niveau du noyau, et donc de maximiser l'amplification thermoacoustique. La mesure de la matrice de transfert du noyau permet également de prédire un seuil de déclenchement pour la machine[38]. Malheureusement, ces méthodes reposent sur une caractérisation expérimentale du noyau à faible niveau et nécessitent que le champ de température ne soit pas impacté par le champ acoustique. Ainsi, si ces méthodes permettent bien d'optimiser la configuration d'une machine, aucune à ce jour ne garantit l'obtention précise du rendement prédit.

Le chapitre 3 montre que le point de fonctionnement d'un moteur thermoacoustique peut être prédit expérimentalement, via la mesure de l'impédance acoustique d'entrée de son noyau. La méthode proposée dans ce chapitre 4 se base également sur une mesure d'impédance d'entrée réalisée sur un noyau thermoacoustique et propose de quantifier la puissance délivrée par le noyau à une charge. Dans un premier temps, la démarche adoptée est introduite dans le cas d'une charge idéale. Le but n'est alors pas de décrire une machine réalisable en pratique mais simplement d'analyser la puissance maximale pouvant être délivrée par un noyau pour différentes fréquences et amplitudes de pression acoustique testées. Cette étude prospective permet par la suite de détailler une démarche d'optimisation de charge comprenant des composants réels, notamment un alternateur délivrant une puissance utile.

## 4.1 Puissance de sortie d'un noyau thermoacoustique

Le noyau thermoacoustique étudié ici est celui décrit au paragraphe 2.1, avec  $L_{tac} = 34$  cm et  $L_{TBT} = 22$  cm.

L'impédance d'un noyau,  $Z_{tac}$ , est cartographiée en fonction de la fréquence et de l'amplitude de pression  $\tilde{p}_{in}$ . De cette manière, il est possible d'estimer la puissance  $\mathcal{W}_a$  sortant du noyau, comme indiqué sur la figure 4.1 :

$$\mathcal{W}_a = \frac{1}{2} \Re[\tilde{p}_{in}(-\tilde{u}_{in}^*)], \quad (4.1)$$

$$\mathcal{W}_a = -\frac{1}{2} |\tilde{p}_{in}|^2 \frac{1}{\Re(Z_{tac}^*)}, \quad (4.2)$$

où  $Z_{tac}^*$  est le complexe conjugué de l'impédance acoustique d'entrée du noyau. Le signe moins dans ces expressions signifie que le débit acoustique  $\tilde{u}_{in}$  est orienté vers l'extérieur du noyau et non vers l'intérieur, contrairement à ce qui est mesuré par le capteur.

Lorsqu'une charge est raccordée au noyau chauffé le système complet peut se mettre à auto-osciller sous les conditions explicitées au chapitre 3, à savoir que le champ acoustique soit raccordé pour une fréquence à laquelle le noyau génère une amplification supérieure aux pertes présentes dans la charge. Après un régime transitoire plus ou moins long, le système atteint un régime stationnaire, la condition de raccordement des

impédances à la jonction entre le noyau et la charge est satisfaite, comme indiqué par l'équation (3.3). Dans ce cas l'énergie acoustique apportée par le noyau est dissipée dans la charge.

Dans un premier temps, cette charge est idéale et caractérisée par son impédance sous la forme d'une fonction complexe  $Z_{\text{charge}}$ . Cette fonction est choisie de manière à satisfaire la relation (3.3) pour n'importe quel couple ( $f$ ;  $P$ ) :

$$Z_{\text{charge}} = -Z_{\text{tac}}. \quad (4.3)$$

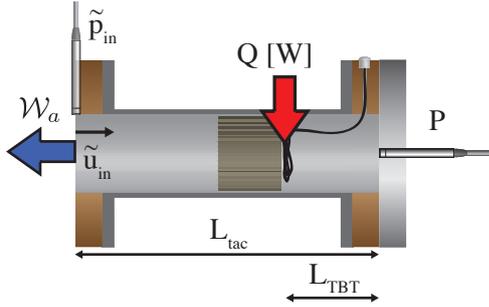


FIGURE 4.1 – Schéma du noyau étudié. La longueur de ce noyau est  $L_{\text{tac}} = 34$  cm, et le stack est placé à  $L_{\text{TBT}}$  (pouvant varier) du fond rigide et alimenté par une puissance de chauffage  $Q$ . La puissance acoustique délivrée est notée  $\mathcal{W}_a$ . La pression  $\tilde{p}_{\text{in}}$  est mesurée indirectement, comme indiqué au chapitre 1, via l'équation (1.13). Le microphone représenté à l'entrée du noyau n'est qu'un indicateur de position pour  $\tilde{p}_{\text{in}}$ . Le débit volumique  $\tilde{u}_{\text{in}}$ , à l'entrée du noyau, est défini comme entrant.  $P$  est la pression mesurée par le microphone de référence situé sur le fond rigide du noyau.

De cette manière, la puissance transmise à cette charge idéale

$$\mathcal{W}_a = \frac{1}{2} |\tilde{p}_{\text{in}}|^2 \frac{1}{\Re(Z_{\text{charge}}^*)}, \quad (4.4)$$

devient

$$\mathcal{W}_a = \frac{1}{2} |\tilde{p}_{\text{in}}|^2 \frac{1}{-\Re(Z_{\text{tac}}^*)}. \quad (4.5)$$

La mesure de  $Z_{\text{tac}}$  suffit alors à cartographier la puissance  $\mathcal{W}_a$  transmise à la charge, en fonction de la fréquence  $f$  et de l'amplitude de pression  $P$ . Sur la figure 4.2 sont répertoriées plusieurs de ces cartographies réalisées à partir de la mesure d'impédance acoustique d'entrée du noyau thermoacoustique considéré.

Un couple ( pression acoustique  $P$  - fréquence  $f$  ) optimal qui maximise  $\mathcal{W}_a$  apparait pour chaque puissance  $Q$  fixée imposée à l'échangeur chaud. L'impédance de la charge permettant d'atteindre ces conditions est alors donnée par l'équation (4.3).

Aussi, la figure 4.2 montre que, comme attendu, la valeur maximale de  $\mathcal{W}_a$  augmente avec la puissance de chauffage. Il est intéressant de représenter non plus la puissance transmise mais le rendement  $\eta$  du noyau, défini comme le rapport de la puissance acoustique transmise  $\mathcal{W}_a$  et de la puissance thermique injectée  $Q$ [83] :

$$\eta = \frac{\mathcal{W}_a}{Q}. \quad (4.6)$$

Le point de rendement optimal est relevé pour différents niveaux de chauffage. Il en résulte les courbes fournies sur la figure 4.3 qui représentent à la fois (a) la fréquence  $f$ , (b) l'amplitude de la pression  $P$  (prise au microphone de référence) ainsi que (c) le rendement  $\eta_{\text{max}}$  pour chaque point de fonctionnement

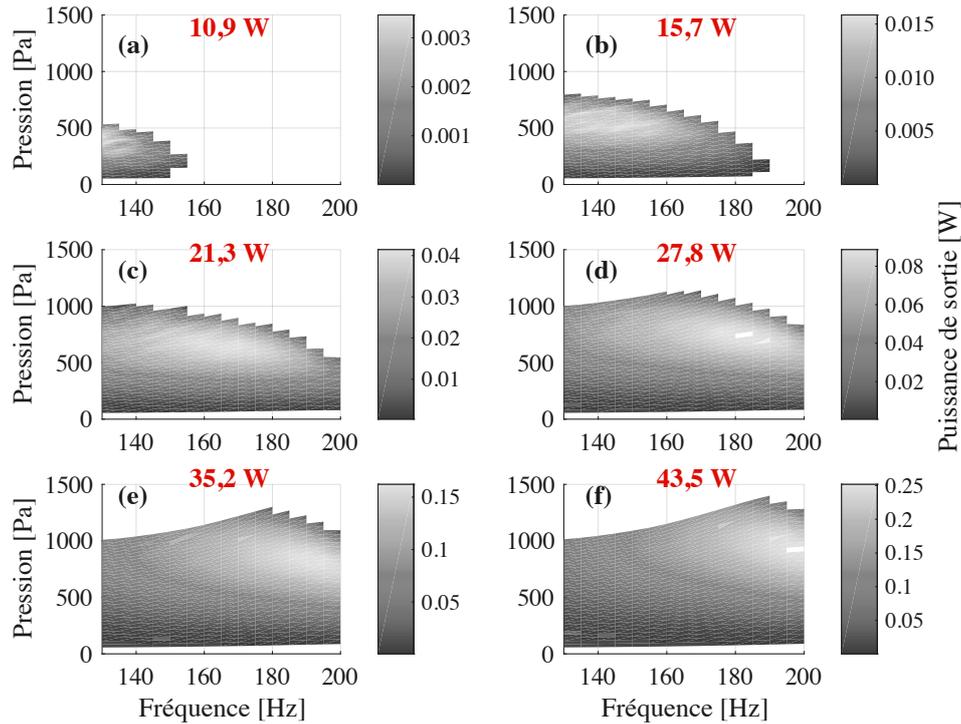


FIGURE 4.2 – Puissance acoustique  $\mathcal{W}_a$  transmise à la sortie du noyau en fonction de la fréquence et de l'amplitude de la pression acoustique (prise au niveau du fond rigide du noyau par le microphone de référence). Plusieurs cartographies sont réalisées pour différentes puissances de chauffage pour une même configuration de noyau.

optimal, à différentes puissances de chauffage  $Q$  imposées au noyau. Sur cette figure 4.3, il apparaît que, pour différentes puissances de chauffage  $Q$ , le point permettant un rendement optimal est obtenu à différentes fréquences  $f$  et différentes amplitudes de pression de contrôle  $P$ . Les valeurs de  $\eta_{\max}$  semblent d'ailleurs croître proportionnellement avec la puissance de chauffage  $Q$ . Il est important de noter que les points grisés, correspondant à des puissances de  $Q \sim 10$  W et  $Q \sim 43$  W, sont tous deux obtenus pour des fréquences de 130 Hz et 200 Hz, soient les deux bornes inférieure et supérieure de l'intervalle fréquentiel d'étude. Il se pourrait donc que ces valeurs résultent d'extrema locaux sur une gamme tronquée (trop courte). S'il était possible sur ce système d'augmenter la puissance de chauffage, un maximum de rendement serait de toute façon atteint pour une valeur donnée de chauffage, du fait de la limite théorique du rendement de Carnot.

La courbe de  $\eta_{\max}$  indique un point pour lequel la valeur de puissance de chauffage ne permet qu'un rendement maximal nul. Ce point, retrouvé graphiquement et représenté sous la forme d'un marqueur circulaire sur la figure 4.3c, donne accès à une valeur de puissance de chauffage minimale pour que le noyau commence à transmettre de l'énergie acoustique. Dans le cas du noyau étudié ici, cette valeur est  $Q_{\min} \sim 9$  W.

Il est également important de noter que les valeurs de rendement obtenues ici sont très faibles (inférieure à 1%), ce qui s'explique en grande partie par le fait que le système étudié ici est une maquette d'étude fonctionnant avec de l'air sous 1 bar. Une véritable machine emploierait de l'hélium pressurisé et serait

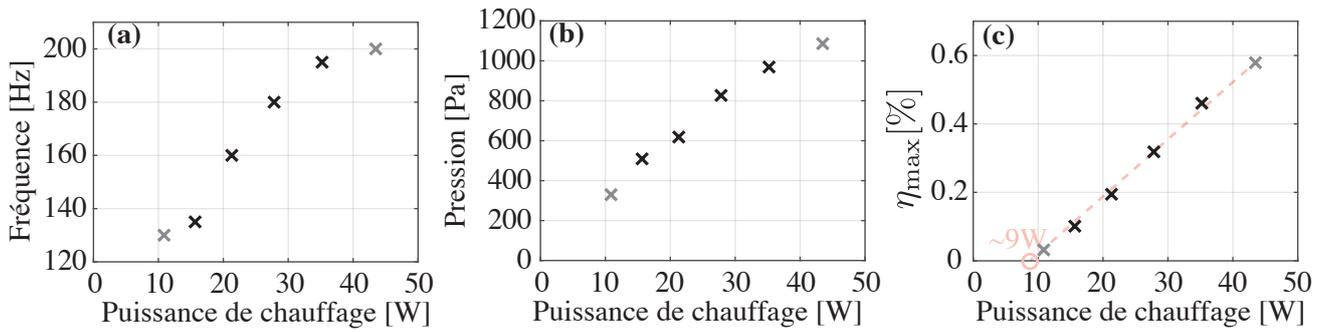


FIGURE 4.3 – (a) Fréquence  $f$  et (b) amplitude de pression  $P$  maximisant la transmission de l'énergie acoustique  $\mathcal{W}_a$  d'un noyau thermoacoustique réel ( $L_{\text{tac}} = 34$  cm,  $L_{\text{TBT}} = 22$  cm) en fonction de la puissance de chauffage  $Q$ . (c) Les valeurs  $\eta_{\max}$  sont les maxima obtenus pour chacune des valeurs de puissance de chauffage  $Q$  testées. Les marqueurs grisés résultent d'estimations donnant une fréquence optimale égale à une borne de la gamme de fréquence considérée. Pour cette raison, il se peut qu'un point grisé ne représente qu'un optimum sur une gamme tronquée. Le léger marqueur rouge résulte du croisement entre la droite passant par les points de mesure, en pointillés rouges, avec l'axe des abscisses. Ce dernier marque la puissance de chauffage minimum (ici  $Q \sim 9$  W), à partir de laquelle le noyau commence à transmettre de l'énergie acoustique.

munie d'échangeurs de chaleurs plus performants[5, 11, 25].

À partir de la fréquence et de la pression optimale, il est possible de déterminer l'impédance de la charge optimale associée à chaque puissance de chauffage  $Q$  considérée. Ces différentes valeurs d'impédances sont données sur la figure 4.4 en fonction de la valeur de  $Q$ . Dans cette configuration  $L_{\text{tac}} = 34$  cm et  $L_{\text{TBT}} = 22$  cm, le rendement maximal du moteur en présence d'une charge théorique optimale est obtenu pour  $Q = 35.2$  W (en excluant le cas où  $Q = 44.5$  W car la valeur de la fréquence optimale n'est pas garantie...).

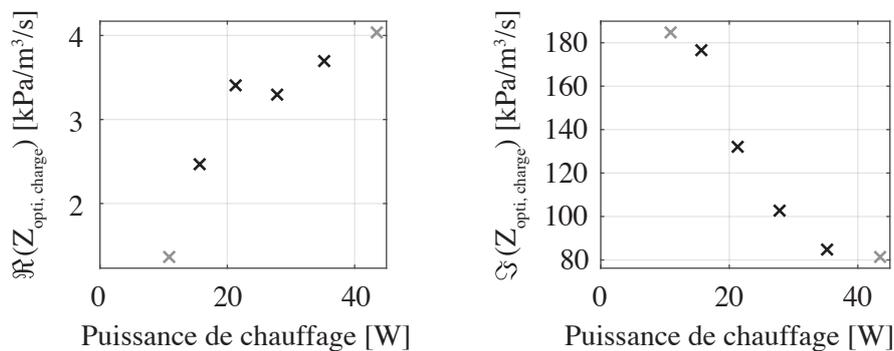


FIGURE 4.4 – Valeurs de l'impédance d'entrée de la charge optimale pour différentes puissances de chauffage  $Q$ , en partie réelle (a) et imaginaire (b). Le noyau qui transmet de la puissance acoustique à la charge a une longueur  $L_{\text{tac}} = 34$  cm, et le stack est placé à  $L_{\text{TBT}} = 22$  cm du fond rigide.

La charge idéale peut alors théoriquement être construite, en considérant par exemple un système masse-ressort-amortissement idéal raccordé au noyau, comme le montre le schéma sur la figure 4.5. Ce système

est constitué d'une membrane ayant une surface  $S = \pi R_{\text{tac}}$ , une masse mécanique  $M_m^{\text{th}}$ , un amortissement mécanique  $R_m^{\text{th}}$  et une raideur  $1/C_m^{\text{th}}$ . L'impédance de ce système dans le domaine acoustique s'écrit[76] :

$$Z_{\text{charge}} = \frac{1}{S^2} \left[ R_m^{\text{th}} + j\omega M_m^{\text{th}} + \frac{1}{j\omega C_m^{\text{th}}} \right]. \quad (4.7)$$

À partir de la condition de raccordement (4.3), il vient :

$$\left( \begin{array}{l} R_m^{\text{th}} = S^2 \Re(Z_{\text{opti, charge}}) \\ j\omega M_m^{\text{th}} + \frac{1}{j\omega C_m^{\text{th}}} = jS^2 \Im(Z_{\text{opti, charge}}) \end{array} \right) \quad (4.8)$$

Par exemple, pour  $Q = 35.2$  W, la charge idéale pourrait être un système masse-ressort-amortissement avec :

$$\left( \begin{array}{l} R_m^{\text{th}} = 18.6 \text{ mN/m}^3/\text{s}, \\ M_m^{\text{th}} = 10 \text{ g}, \\ C_m^{\text{th}} = 0.069 \text{ mN/m}. \end{array} \right) \quad (4.9)$$

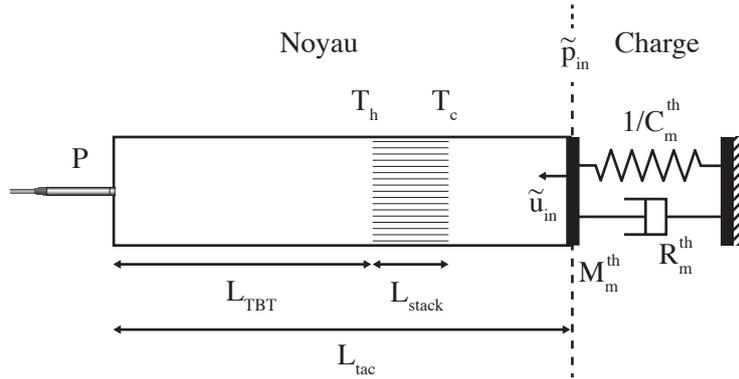


FIGURE 4.5 – Schéma de raccordement du noyau ( $L_{\text{tac}} = 34$  cm,  $L_{\text{TBT}} = 22$  cm) à une système masse-ressort-amortissement idéal.

Il convient de noter qu'ici ce qui est appelé 'puissance utile' ne correspond qu'à la puissance dissipée dans la résistance  $R_m^{\text{th}}$ .

## 4.2 Puissance transmise à un alternateur réel

Un moyen simple de parvenir à récupérer la puissance acoustique  $\mathcal{W}_a$  à la sortie d'un noyau thermoacoustique est d'utiliser un haut-parleur électrodynamique en tant qu'alternateur[8, 88]. Le déplacement de la membrane du haut-parleur transmet une partie de la puissance acoustique à une résistance de charge connectée au haut-parleur, lui même couplé au moteur thermoacoustique[96, 36]. La puissance transmise à l'alternateur dépend de son impédance et il est donc possible d'agir sur cette impédance afin de maximiser la puissance transmise. Deux moyens sont mis en œuvre dans les prochains paragraphes afin de faire varier cette impédance. Un premier consiste à faire varier directement la valeur de la résistance électrique de charge,  $\mathcal{R}$ ,

connectée aux bornes du haut-parleur. Un second moyen est d'ajouter de la masse mécanique  $\mathcal{M}$  directement sur la membrane de l'équipage mobile.

Un haut-parleur Beyma 6MI100 fait office d'alternateur dans l'étude qui suit. Pour cela, une pièce d'adaptation est usinée et permet de fixer le haut-parleur directement à la sortie du noyau thermoacoustique. Celle-ci consiste en un disque de 2 cm de longueur ayant une section interne  $S = \pi R_{\text{tac}}^2$  uniforme. Plusieurs attaches sont percées dans ce disque, permettant de fixer à la fois le châssis du haut-parleur d'un côté et un tube de même section  $S$  de l'autre. Un joint découple le châssis du haut-parleur des vibrations transmises via les parois du moteur, comme le montre la figure 4.6b. Ce joint se présente sous la forme d'un anneau en mousse collé sur la partie du châssis du haut-parleur en contact avec la pièce d'adaptation. La pièce d'adaptation s'attache à un tube de couplage formant un ensemble de longueur  $L_{ad}$ , de section uniforme  $S$ . Cet ensemble est connecté à la sortie du noyau thermoacoustique constituant ainsi un moteur de longueur totale  $L_{tot} = L_{tac} + L_{ad} = 56$  cm, tel que le montre la figure 4.6. La longueur  $L_{ad}$  de la charge permet de conserver une fréquence naturelle du système complet (noyau + charge) contenue dans la gamme de fréquence d'étude [130 :200] Hz pour laquelle le noyau thermoacoustique a été caractérisé.

L'objectif de ce paragraphe est de donner une méthode permettant de modéliser cette charge de manière à prédire son impédance d'entrée acoustique en fonction des paramètres électriques, mécaniques et acoustiques du haut-parleur monté au bout de la charge. De cette manière, le raccordement des impédances, permettant la prédiction de régimes stationnaires pour le moteur complet (voir le chapitre 3), peut se faire, notamment en faisant varier les paramètres d'ajustement,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{M}$ , de l'alternateur.

#### 4.2.1 Modélisation de la charge réelle raccordée au noyau

Tout d'abord, le haut-parleur est décrit par ses paramètres de Thiele-Small et son modèle électro-acoustique équivalent, donnés sur la figure 4.7. Le tableau 4.1 répertorie les paramètres du haut-parleur fournis par le constructeur. Les paramètres mécaniques se traduisent dans le domaine acoustique via la sur-

Paramètre	Symbole	Valeur [Unité]
Impédance nominale	$R_e$	8 [ $\Omega$ ]
Compliance mécanique	$C_{ms}$	119 [ $\mu\text{m}/\text{N}$ ]
Masse mobile	$M_{ms}$	0.014 [kg]
Résistance mécanique	$R_{ms}$	1.2 [kg/s]
Facteur $Bl$	$Bl$	10.8 [N/A]
Inductance de la bobine	$L_e$	0.2 [mH]
Surface de la membrane	$S_d$	0.014 [m <sup>2</sup> ]

TABLE 4.1 – Paramètres de Thiele et Small du haut-parleur Beyma 6MI100, d'après le constructeur.

face de la membrane  $S_d$  :  $R_{ma} = R_{ms}/S_d^2$ ,  $M_{ma} = M_{ms}/S_d^2$  et  $C_{ma} = C_{ms}S_d^2$ . L'impédance du haut-parleur

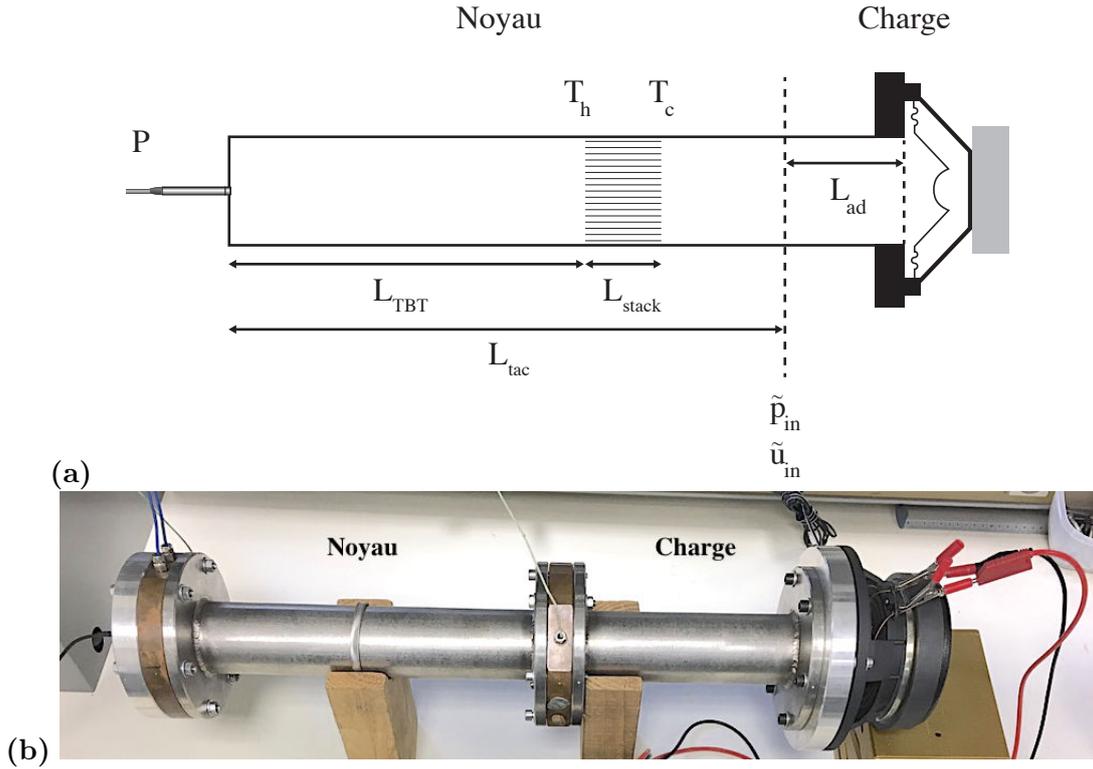


FIGURE 4.6 – Schéma (a) et photo (b) du moteur une fois assemblé. Le noyau est raccordé à une charge constituée d'un tube de couplage et d'un haut-parleur (Beyma 6MI100) tous deux rattachés par une pièce d'adaptation.

s'écrit alors, dans le domaine acoustique :

$$Z_{HP,a} = R_{ma} + j\omega M_{ma} + \frac{1}{j\omega C_{ma}} + Z_{ea} + Z_{ar}, \tag{4.10}$$

où  $Z_{ar}$  est l'impédance acoustique de rayonnement par la face arrière du haut-parleur, considérée négligeable, et  $Z_{ea}$  est l'impédance électrique du HP vue depuis le domaine acoustique. L'impédance électrique du haut-parleur, en considérant la résistance électrique  $R_e$ , l'inductance  $L_e$  et la résistance de charge  $\mathcal{R}$

$$Z_e = R_e + j\omega L_e + \mathcal{R}, \tag{4.11}$$

se traduit dans le domaine mécanique via le facteur de force  $Bl$  :  $Z_{em} = (Bl)^2/Z_e$ , puis finalement, dans le domaine acoustique via la surface  $S_d$  du haut-parleur :

$$Z_{ea} = \frac{Bl^2}{S_d^2} \frac{1}{R_e + j\omega L_e + \mathcal{R}}. \tag{4.12}$$

Le volume d'air compris entre la membrane du haut-parleur et la pièce d'adaptation est décrit comme un élément acoustique possédant une impédance  $Z_{cav}$  et une admittance  $Y_{cav}$ , comme le montre la figure 4.8. L'impédance  $Z'$  est l'impédance acoustique à l'entrée de la cavité à caractériser, comprenant l'élément  $Z_{cav}$

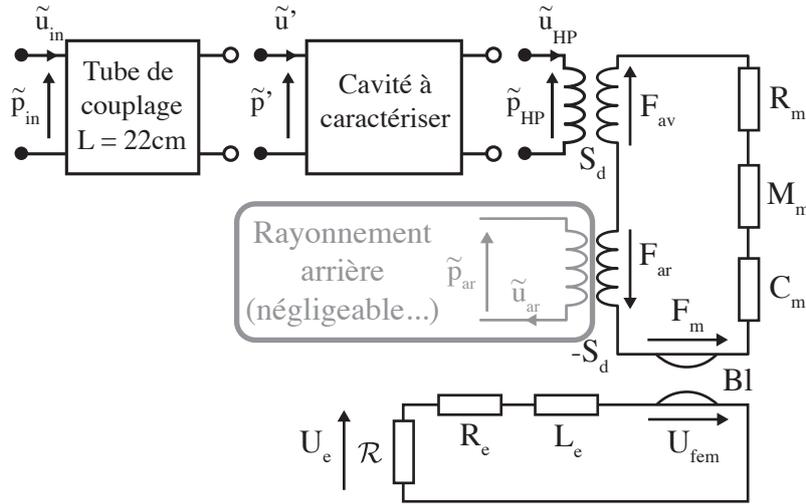


FIGURE 4.7 – Schéma électro-acoustique équivalent à un alternateur[76]. Une fois ramenée dans le domaine acoustique, l'impédance du haut-parleur au niveau de la face avant de la membrane est  $(Z_{HP})_a$ , tandis que dans le domaine électrique, l'impédance totale du haut-parleur est  $(Z_{HP})_e$ . L'impédance acoustique de rayonnement  $Z_{ar}$  par la face arrière du haut-parleur est considérée négligeable.

en série avec les éléments  $Y_{cav}$  et  $Z_{HP}$ , tels qu'indiqués par le circuit en figure 4.8. Cette impédance  $Z'$  s'écrit donc :

$$Z' = Z_{cav} + \frac{Y_{cav} Z_{HP}}{Y_{cav} + Z_{HP}}. \quad (4.13)$$

Afin de caractériser expérimentalement les fonctions  $Z_{cav}$  et  $Y_{cav}$ , une méthode de détermination à deux charges est mise en œuvre. Cette méthode consiste à écrire l'impédance acoustique au niveau de l'entrée de la cavité, pour deux configurations différentes sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z'^{(1)} = Z_{cav} + \frac{Y_{cav} Z_{HP}^{(1)}}{Y_{cav} + Z_{HP}^{(1)}}; \\ Z'^{(2)} = Z_{cav} + \frac{Y_{cav} Z_{HP}^{(2)}}{Y_{cav} + Z_{HP}^{(2)}}. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

La changement de configuration peut se faire soit par une variation de la valeur d'une résistance électrique connectée aux bornes du haut-parleur, soit par un ajout de masse sur l'équipage mobile. La condition sous-jacente à la mise en œuvre de cette méthode à deux charges est :

$$Z_{HP}^{(1)} \neq Z_{HP}^{(2)}. \quad (4.15)$$

Ici, deux mesures sont réalisées sur la charge avec comme masse ajoutée  $\mathcal{M}^{(1)} = 0$  g dans la première configuration et  $\mathcal{M}^{(2)} = 3$  g dans une seconde configuration. Dans les deux configurations la résistance de charge reste inchangée  $\mathcal{R}^{(1)} = \mathcal{R}^{(2)} = 3000 \Omega$ . En isolant  $Y_{cav}$  et  $Z_{cav}$  dans les équations (4.17) et (4.16), il est possible d'obtenir les variations de ces éléments en fonction de la fréquence, tel que le montrent les courbes sur la figure 4.9.

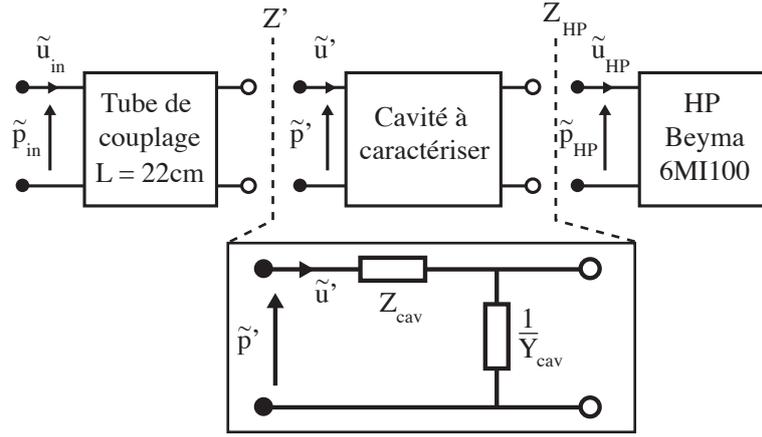


FIGURE 4.8 – Schéma de description de la charge. Un tube de couplage est attaché à une pièce d’adaptation qui constituent ensemble un élément de longueur  $L_{ad} = 22$  cm et de section uniforme  $S$ . Une cavité est formée par l’espace entre la membrane et la paroi de la pièce d’adaptation. Cette cavité est décrite sous la forme d’un biporte électro-acoustique équivalent ayant une impédance  $Z_{cav}$  et une admittance  $Y_{cav}$  en dérivation.

Les parties réelles et imaginaires de  $Z_{cav}$  et  $Y_{cav}$  sont ici décrites telles que :

$$Z_{cav} = [A_{11}f + A_{01}] + j[A_{12}f + B_{02}], \tag{4.16}$$

$$Y_{cav} = \left[ A_{01} + A_1 \frac{f - f_{01}}{\eta_1 + (f - f_{01})^2} \right] + j \left[ A_{02} + A_2 \frac{f - f_{02}}{\eta_2 + (f - f_{02})^2} \right], \tag{4.17}$$

où les coefficients  $A_i$  et  $B_i$  sont ajustées afin de reproduire au mieux les allures des fonctions mesurées, via un algorithme de minimisation au sens des moindres carrés.

En substituant les fonctions  $Z_{cav}$  et  $Y_{cav}$  mesurées par leurs expressions ajustées, les courbes représentées sur la figures 4.9 suivent les mêmes tendances. Les impédances  $Z'$  dans les deux configurations ayant servies à la détermination des fonctions  $Y_{cav}$  et  $Z_{cav}$  sont reconstruites à partir de ces mêmes fonctions  $Y_{cav}$  et  $Z_{cav}$  mesurées et il s’avère que les courbes ajustées et les courbes d’origine, sur la figure 4.10, se superposent parfaitement. La reconstruction des  $Z'$  à partir des fonctions retrouvées analytiquement (4.16) et (4.17) mène à une estimation très proche de la mesure. Cela est donc l’indicateur que la méthode est juste, en tout cas pour ces deux configurations. Afin de vérifier que la charge reste bien décrite indépendamment de la masse ajoutée  $\mathcal{M}$  ou de la résistance de charge  $\mathcal{R}$  imposée au haut-parleur, deux autres reconstructions de  $Z'$  sont présentées sur les figures 4.11 et 4.12. Sur la figure 4.11 tout d’abord, une masse de  $\mathcal{M} = 2$  g est ajoutée à l’équipage mobile du haut-parleur. La reconstruction de l’impédance  $Z'$  par le modèle est très proche de l’impédance mesurée dans ce premier cas. En figure 4.12 cette fois c’est la résistance de charge qui prend une valeur différente  $\mathcal{R} = 1000 \Omega$ . Aucune masse n’est ajoutée à l’équipage mobile cette fois. La reconstruction de l’impédance  $Z'$  reproduit une nouvelle fois l’allure de la courbe mesurée, avec toutefois un biais significatif sur la partie réelle de l’impédance.

Le modèle proposé dans ce premier paragraphe permet donc bien de décrire la charge sans avoir recours

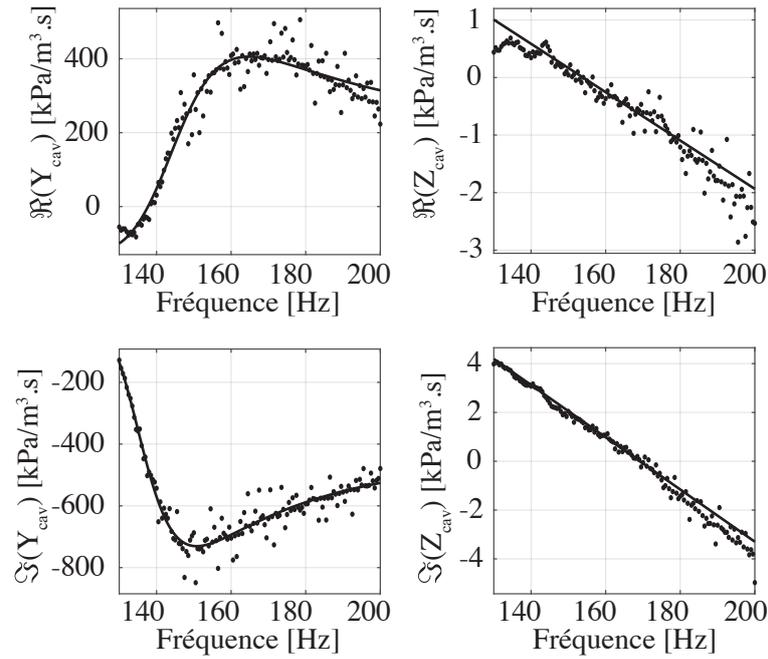


FIGURE 4.9 – Allures des parties réelles et imaginaires de  $Y_{cav}$  et  $Z_{cav}$  en fonction de la fréquence. Les nuages de points représentent les données issues de la mesure tandis que les courbes en traits pleins ont été ajustées à partir des fonctions (4.16) et (4.17) afin de reproduire au mieux les allures des fonctions mesurées.

à de nouvelles mesures pour différentes configurations de haut-parleur. Grâce à ce modèle il est alors possible de prédire, par raccordement des impédances, le comportement d'un moteur avant qu'il ne soit assemblé. Les deux prochains paragraphes proposent donc d'étudier l'impact de l'ajustement de la résistance de charge  $\mathcal{R}$  dans un premier temps puis de la masse mobile ajoutée  $\mathcal{M}$  en second temps.

#### 4.2.2 Ajustement de la valeur de la résistance de charge

L'énergie acoustique générée par le noyau est dissipée dans la charge qui y est raccordée. En plaçant une résistance électrique  $\mathcal{R}$  aux bornes de l'alternateur une partie de l'énergie transmise à la charge l'est sous la forme d'une puissance électrique dissipée dans cette résistance, voir le schéma en figure 4.13. L'intérêt de l'étude se porte sur cette puissance électrique "utile", notée  $\mathcal{P}$ , qu'il est possible de transmettre à la résistance électrique  $\mathcal{R}$  dans le but de chercher à la maximiser.

Étant donné que cette résistance agit directement sur l'impédance totale de la charge raccordée au noyau[36], quantifier cet impact permet alors de déterminer la valeur optimale de la résistance  $\mathcal{R}$  maximisant cette puissance  $\mathcal{P}$ .

Pour la mesure d'impédance du noyau, ce dernier est connecté au capteur puis chauffé via le fil de NiChrome, alimenté par un générateur de courant continu générant une puissance  $Q$  de 58 W. La procédure de mesure de l'impédance d'entrée du noyau chauffé est décrite en détails au chapitre 1. Le modèle de

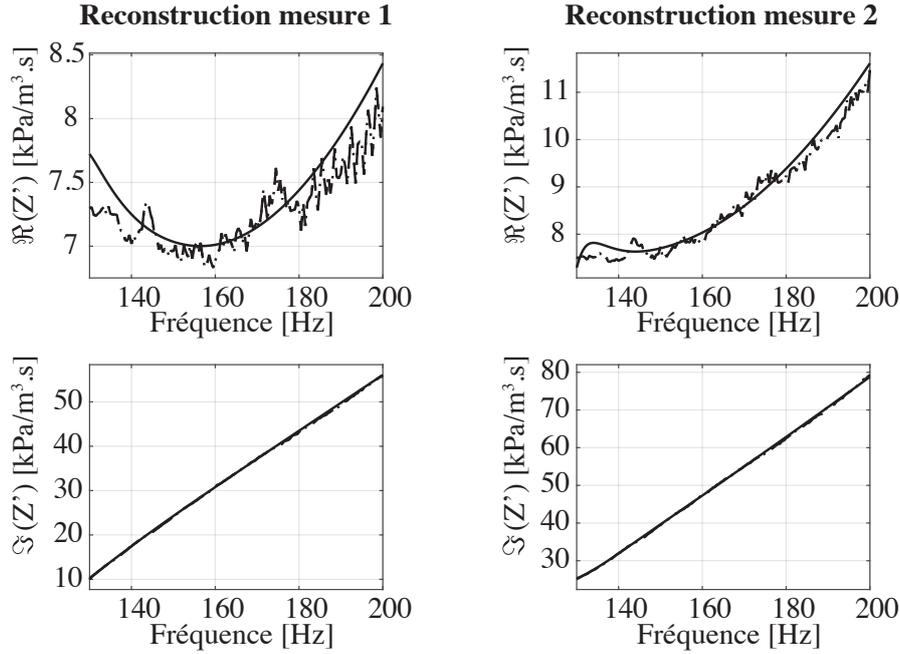


FIGURE 4.10 – Reconstruction des fonctions  $Z'$  utilisées pour la méthode à deux charges de détermination des fonctions  $Z_{\text{cav}}$  et  $Y_{\text{cav}}$ . Les courbes reconstruites (---) et originales (...) sont parfaitement confondues, ce qui permet de conclure que la méthode est bien implémentée. Aussi, les courbes en trait plein (—) sont obtenues à partir des expressions mathématiques approchées des fonctions  $Z_{\text{cav}}$  et  $Y_{\text{cav}}$ , et reproduisent bien les allures mesurées.

simulation développé au paragraphe précédent permet d'estimer l'impédance d'entrée de la charge sans faire appel à une mesure correspondant à chaque nouvelle valeur de  $\mathcal{R}$  testée. Le raccordement des impédances peut alors se faire pour la prédiction d'un cycle limite, comme explicité au chapitre 3, et nécessite uniquement la cartographie mesurée de l'impédance d'entrée du noyau thermoacoustique à la puissance de chauffage voulue. En effet, la relation (4.10) permet de faire varier la résistance  $\mathcal{R}$  et d'en tirer une impédance d'entrée acoustique pour la charge une fois introduite dans l'équation (4.13). Il vient alors un couple  $(f_\infty; P_\infty)$  pour chaque cycle limite prédit pour différentes valeurs de  $\mathcal{R}$ . La gamme de valeurs prises par la résistance s'étend ici de 400 à 3000  $\Omega$ .

Dans le cas d'un cycle limite prédit par raccordement des impédances, la puissance électrique consommée aux bornes de la résistance connectée à la sortie de l'alternateur s'écrit[96] :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \mathcal{R} \frac{|\tilde{u}_{\text{HP}}|^2}{S_d^2} \frac{Bl^2}{(R_e + \mathcal{R})^2 + (2\pi f_\infty)^2 L_e^2}, \quad (4.18)$$

où  $\tilde{u}_{\text{HP}}$  est l'amplitude complexe du débit de la membrane.

Une fois l'impédance du noyau cartographiée, ce dernier est raccordé à la charge. Le moteur commence à auto-osciller si le champ de température interne le permet. Un temps de stabilisation thermique  $t_Q = 600$  s est respecté avant de pouvoir mesurer les caractéristiques du régime ainsi établi (voir l'annexe B). Le microphone

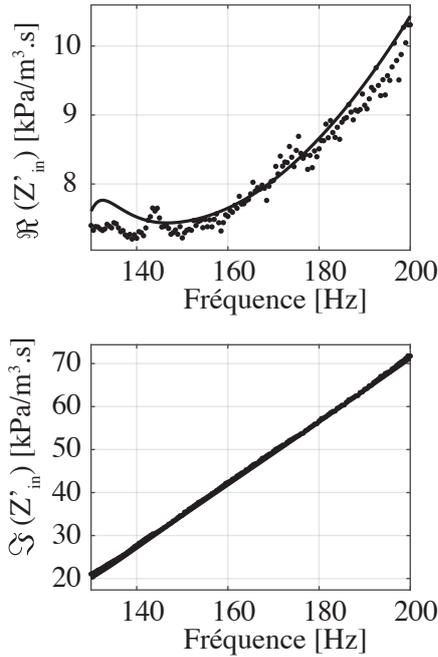


FIGURE 4.11 – Reconstruction de l'impédance  $Z'$  pour le cas où le haut-parleur est chargé d'une masse ajoutée de  $\mathcal{M} = 2$  g et d'une résistance de charge  $\mathcal{R} = 3000 \Omega$ . Le modèle reproduit bien l'allure de la courbe mesurée.

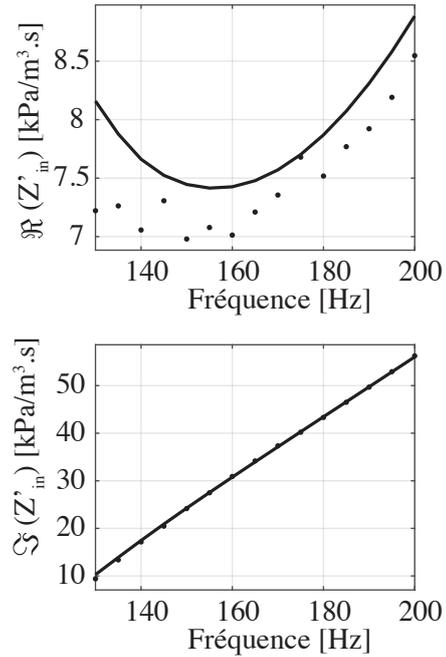


FIGURE 4.12 – Reconstruction de l'impédance  $Z'$  pour le cas où le haut-parleur est chargé d'une masse ajoutée de  $\mathcal{M} = 0$  g et d'une résistance de charge  $\mathcal{R} = 1000 \Omega$ . Le modèle reproduit encore une fois bien l'allure de la courbe mesurée.

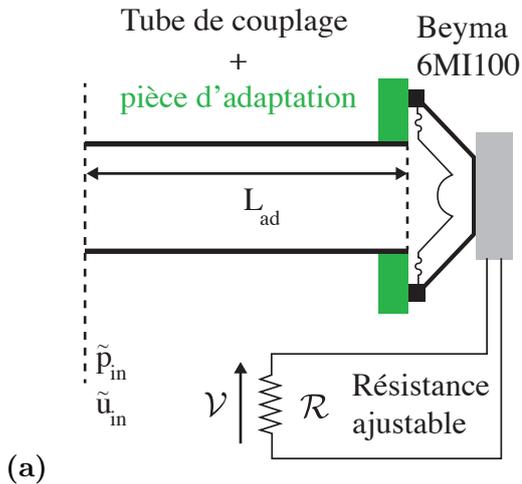


FIGURE 4.13 – Schéma de la charge avec une résistance  $\mathcal{R}$  connectée aux bornes de l'alternateur. La tension  $\mathcal{V}$  est transmise à la résistance.

de référence mesure alors la pression au fond du noyau pendant 120 s avec une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 1000$  Hz. La fréquence et l'amplitude crête des auto-oscillations, respectivement  $f_\infty$  et  $P_\infty$ , sont alors extraites du signal au moyen d'un algorithme de détection synchrone (implémenté sous MatLab®). Entre chaque mesure où un changement de la valeur de  $\mathcal{R}$  est réalisé, un temps de stabilisation est observé pour

tenir compte du temps d'établissement des auto-oscillations dans la nouvelle configuration. Ce temps de stabilisation correspond à celui retenu pour un échelon de pression,  $t_P = 100$  s. La puissance  $\mathcal{P}$  aux bornes de la résistance de charge  $\mathcal{R}$  est donnée par :

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{V}^2}{\mathcal{R}}, \quad (4.19)$$

où  $\mathcal{V}$  est l'amplitude de la tension mesurée aux bornes de la résistance de charge  $\mathcal{R}$ .

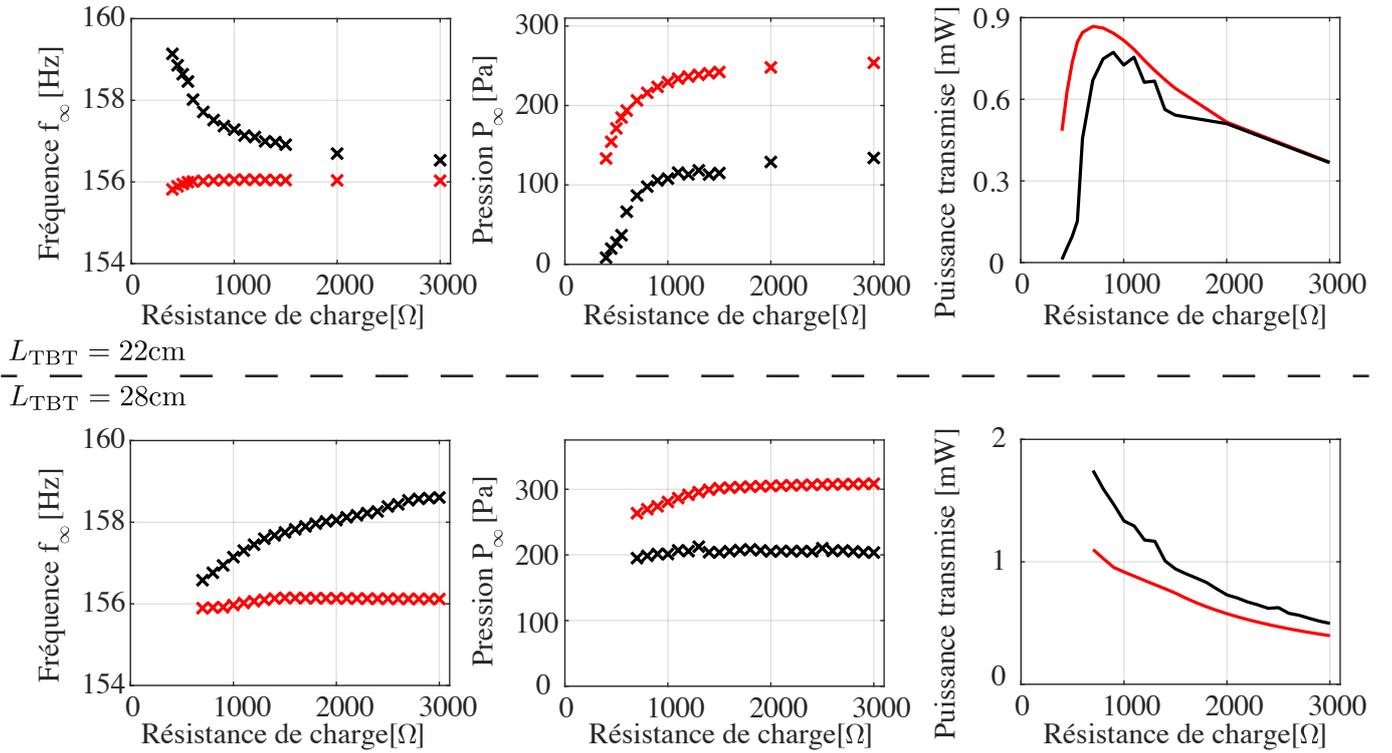


FIGURE 4.14 – Caractéristiques des régimes établis lorsque le stack se situe à  $L_{TBT} = 22$  cm (**haut**) et à  $L_{TBT} = 28$  cm (**bas**), en fonction de la valeur de la résistance de charge  $\mathcal{R}$ , lorsqu'une puissance de chauffage  $Q = 58$  W est imposée. Les courbes rouges sont obtenues par la prédiction, tandis que les noires le sont par la mesure directe sur le moteur en fonctionnement.

La fréquence  $f_\infty$ , l'amplitude de pression acoustique  $P$  (prise au niveau du microphone de référence), ainsi que la puissance  $\mathcal{P}$  transmise à la résistance de charge  $\mathcal{R}$  sont indiquées sur la figure 4.14 pour différentes valeurs de  $\mathcal{R}$  testées. Les courbes rouges sont relatives aux résultats obtenus par la simulation, les noires aux données directement mesurées sur le moteur en fonctionnement. Ce que montrent ces courbes c'est qu'il y a une valeur de résistance  $\mathcal{R}_{opti} \sim 1000\Omega$  qui maximise la puissance transmise à cette dernière lorsque le stack est situé à  $L_{TBT} = 22$  cm. Une valeur de  $\mathcal{R}_{opti}$  ne semble cependant pas être atteinte dans la gamme de valeurs de  $\mathcal{R}$  considérée lorsque le stack est repoussé à  $L_{TBT} = 28$  cm.

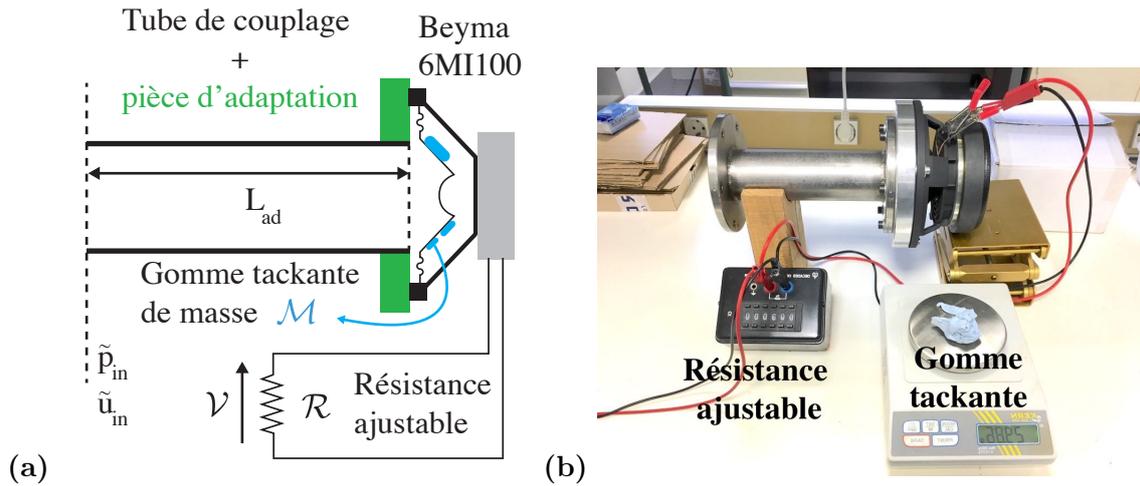


FIGURE 4.15 – Schéma de la charge avec une résistance  $\mathcal{R}$  connectée aux bornes de l’alternateur. La tension  $\mathcal{V}$  est transmise à la résistance.

### 4.2.3 Ajustement de la valeur de la masse ajoutée

Après avoir étudié l’impact de la résistance électrique de charge  $\mathcal{R}$  de l’alternateur, l’intérêt de l’étude se porte à présent vers la possibilité d’ajouter de la masse mécanique à l’alternateur en question. Pour cela, la configuration du montage permet l’ajout de morceaux de gommes tackantes sur la face arrière de la membrane du haut-parleur, tel que le montre la photo en figure 4.15. Chacun des morceaux ainsi appliqué sur la membrane ajoute une certaine masse, préalablement quantifiée, à l’équipage mobile du haut-parleur. La masse additionnelle totale ainsi greffée à l’arrière de la membrane se note  $\mathcal{M}$ .

Cette masse ajoutée  $\mathcal{M}$  accroît l’inertie du haut-parleur et joue un rôle dans l’impédance de la charge complète et, par conséquent, dans le rendement de la machine. Pour cette raison, une baisse de la fréquence acoustique des auto-oscillations  $f_\infty$  est attendue sous l’effet de la masse ajoutée  $\mathcal{M}$ .

En pratique, comme dans la section précédente, l’impédance du noyau est mesurée pour une puissance de chauffage de  $Q = 58 \text{ W}$  dans la gamme de fréquence  $[130 : 200] \text{ Hz}$ . Le stack est placé à une distance  $L_{TBT} = 22 \text{ cm}$  du fond rigide. Une fois la mesure réalisée, le noyau est déconnecté du capteur d’impédance et raccordé à la charge tel que le montre la figure 4.15. Le moteur se met alors à auto-osciller. Lors du raccordement du noyau avec la charge, un temps de stabilisation du champ thermique de  $\tau_Q = 600 \text{ s}$  est observé avant toute mesure des auto-oscillations. Le signal du microphone de référence est enregistré pendant 120 s. Une fois cette première mesure réalisée, une première gomme est pesée puis appliquée à l’arrière de la membrane du haut-parleur. L’impédance du haut-parleur change, la fréquence naturelle et l’amplitude des auto-oscillations sont impactées. Un nouveau temps de stabilisation de  $\tau_P = 100 \text{ s}$  s’écoule avant le lancement de l’acquisition suivante. Pour chaque valeur de masse ajoutée, trois valeurs de résistance de charge,  $\mathcal{R} = [1000; 2000; 3000] \Omega$ , sont testées, en respectant toujours le protocole et les temps de stabilisation donnés plus haut. Les valeurs de masse ajoutée quant à elles, s’étendent de 0 g (haut-parleur seul) à 7 g.

Une fois l'ensemble des valeurs d'intérêt balayées, le système est éteint et la mesure reprend une fois le noyau revenu à sa température initiale. Le stack est alors déplacé à  $L_{TBT} = 28$  cm du fond rigide du noyau. Dans cette configuration, seule une résistance de charge de  $\mathcal{R} = 1000 \Omega$  est testée. Les résultats de mesure sont présentés sur les figures 4.16 et sont confrontés aux prédictions faites via la méthode de raccordement des impédances. Pour prendre en compte la masse additionnelle dans le modèle, celle-ci est simplement ajoutée à la masse mécanique de l'équipage mobile :

$$M'_{ms} = M_{ms} + \mathcal{M}, \quad (4.20)$$

où  $M'_{ms}$  est la masse de l'équipage mobile après application d'un ensemble de gommes tackantes de masse totale  $\mathcal{M}$ .

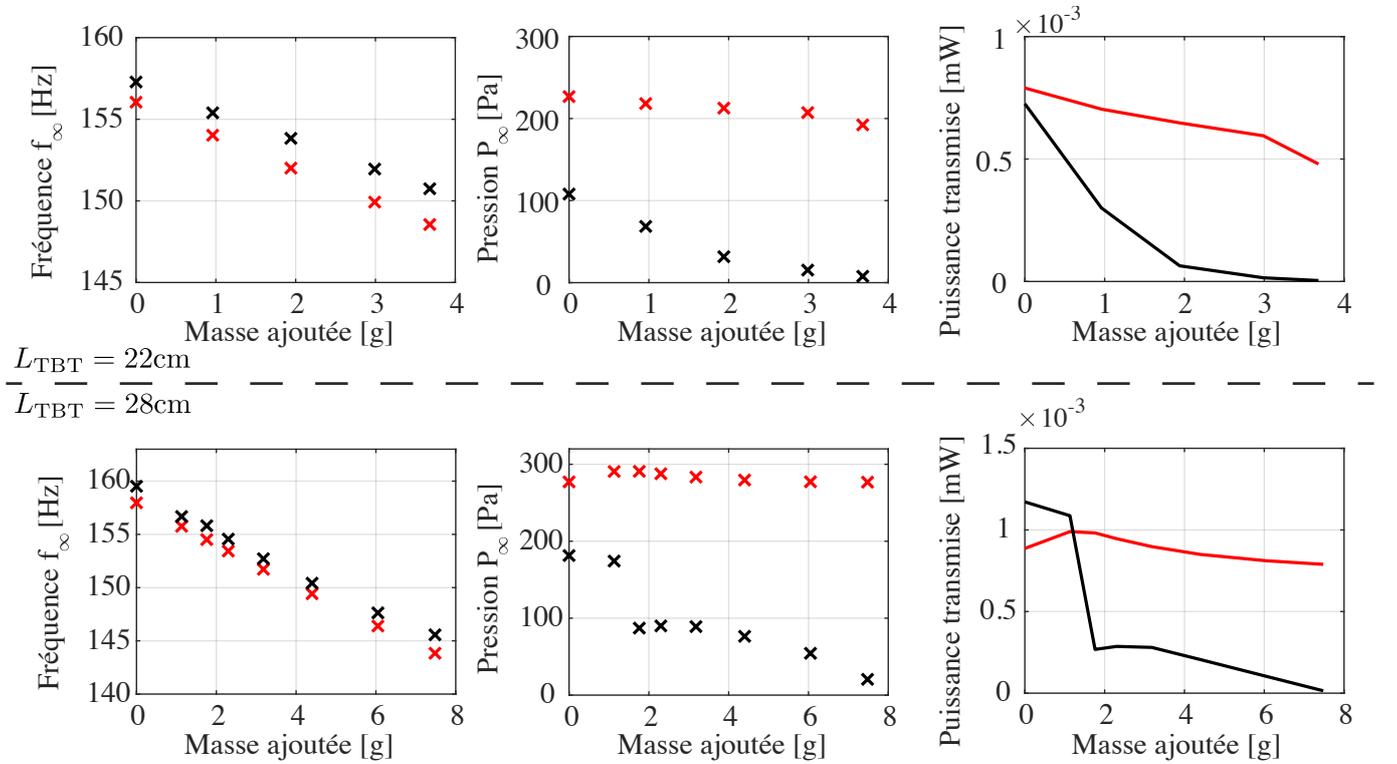


FIGURE 4.16 – Prédiction des caractéristiques des cycles limites en fonction de la masse ajoutée à l'équipage mobile du haut-parleur. Le haut-parleur est chargé d'une résistance  $\mathcal{R} = 1000 \Omega$  et le noyau est alimenté d'une puissance de chauffage  $Q = 58$  W. (**haut**) Le stack est placé à  $L_{TBT} = 22$  cm du fond rigide du noyau. (**bas**) Le stack est placé à  $L_{TBT} = 28$  cm du fond rigide du noyau. Les courbes rouges sont obtenues par la prédiction, tandis que les noires le sont par la mesure directe sur le moteur en fonctionnement.

Ces résultats montrent que l'accord entre les prédictions et les régimes de fonctionnement observés sur le moteur présentent des différences notables. Lors de la mesure, il a en effet été observé que les auto-oscillations pouvaient être fortement impactées par la mise en place des gommes tackantes sur la membrane. Le protocole de mesure et notamment le temps d'attente entre chaque mesure jouent également un rôle non négligeable sur l'obtention des cycles limites. Il se pourrait aussi que l'interpolation linéaire réalisée par la fonction contour

de MatLab® puisse poser problème sur des prédictions qui demande plus de finesse que dans les cas étudiés au chapitre 3.

### 4.3 Optimisation des deux paramètres

Les deux sections précédentes montrent qu'il est possible d'ajuster la valeur de la résistance électrique  $\mathcal{R}$  d'un alternateur ou de la masse mécanique ajoutée  $\mathcal{M}$  afin de tirer une meilleure efficacité d'un moteur. Pour cela, un modèle permettant de modéliser la charge est détaillé. Ce modèle fournit une impédance d'entrée  $Z_{\text{charge}}$  qui dépend explicitement de la résistance  $\mathcal{R}$  et de la masse ajoutée  $\mathcal{M}$ . Une fois les impédances d'entrée de charge (simulée) et de noyau (mesurée) raccordées l'une à l'autre, il est possible de retrouver les valeurs de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{M}$  permettant d'atteindre le meilleur rendement possible pour le moteur assemblé. Aucune mesure sur le moteur en fonctionnement n'est réalisé ici, le raccordement des impédances est simplement réalisé pour un ensemble de valeurs de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{M}$ . L'intérêt est simplement porté sur l'optimisation simultanée des valeurs de résistance et de masse ajoutée.

À partir de la mesure de l'impédance d'entrée d'un noyau, lorsque le stack est situé à  $L_{TBT} = 22$  ou  $28$  cm, alimenté par une puissance de chauffage de  $Q = 58$  W, la puissance électrique  $\mathcal{P}$ , dissipée dans  $\mathcal{R}$ , est cartographiée selon  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{M}$ . Les résultats sont donnés sur la figure 4.17. Ces derniers semblent indiquer que le couple  $(\mathcal{R}; \mathcal{M})$  qui maximise l'efficacité du moteur n'est pas le même pour les deux configurations considérées. Pour le noyau dans lequel le stack est placé à  $L_{TBT} = 22$  cm du fond rigide, la résistance de charge optimale est de  $\mathcal{R}_{\text{opti}} = 775 \Omega$  et la masse ajoutée  $\mathcal{M}_{\text{opti}} = 0 \text{ g}$ <sup>2</sup>, permettant l'établissement d'auto-oscillations à  $f_{\infty} = 156$  Hz et  $P = 210$  Pa. Lorsque le stack est situé à  $L_{TBT} = 28$  cm, la résistance de charge optimale devient  $\mathcal{R}_{\text{opti}} = 500 \Omega$  associée à une masse mécanique ajoutée de  $\mathcal{M}_{\text{opti}} = 1.5$  g, menant cette fois l'établissement d'auto-oscillations à  $f_{\infty} = 148$  Hz et  $P = 260$  Pa.

Si les prédictions faites dans le cas du changement de la valeur de résistance de charge  $\mathcal{R}$  sont proches de celles observées, ce n'est pas le cas lorsque la valeur de la masse mobile ajoutée  $\mathcal{M}$  change. Ceci a été montré dans les deux paragraphes précédents. Cependant, l'objet de cette étude est de proposer une méthode simple permettant d'optimiser le rendement d'un système en se basant sur une mesure de l'impédance d'entrée du noyau. Or, considérant que les écarts constatés entre expérience et simulation résultent probablement d'une caractérisation imprécise de la charge et d'un protocole de mesure perfectible, la méthode semble fonctionner et permet de fournir des indications pour la construction d'un moteur optimisé sur la base d'un noyau préalablement caractérisé.

---

2. Les résultats semblent indiquer qu'il faille alléger la membrane plutôt que l'alourdir pour obtenir un rendement optimal

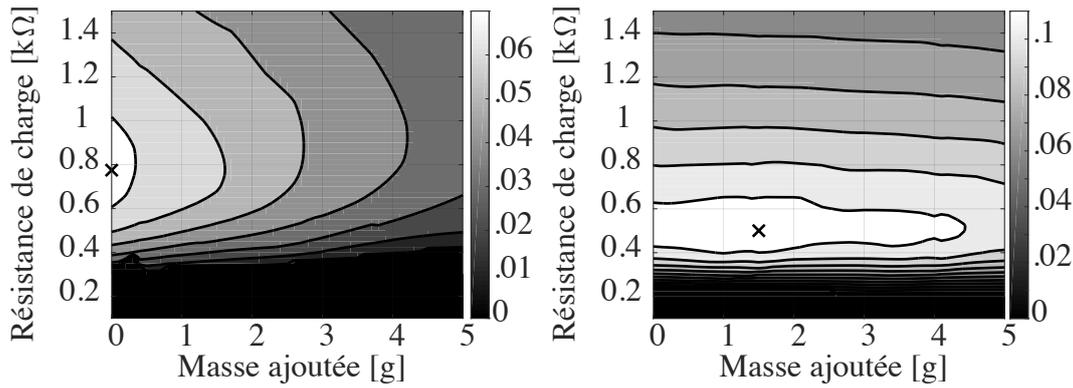


FIGURE 4.17 – Cartographie de la puissance  $\mathcal{P}$  électrique dissipée dans la résistance de charge  $\mathcal{R}$  en fonction de la valeur de  $\mathcal{R}$  et de la masse mécanique ajoutée  $\mathcal{M}$ . Le noyau a une longueur totale  $L_{tac} = 34$  cm et le stack est placé à  $L_{TBT} = 22$  cm (à gauche) et  $L_{TBT} = 28$  cm (à droite) du fond rigide du noyau. La puissance de chauffage imposée au fil de NiChrome est de  $Q = 58$  W. Les courbes rouges sont obtenues par la prédiction, tandis que les noires le sont par la mesure directe sur le moteur en fonctionnement.

## 4.4 Conclusion

Ce chapitre permet tout d'abord de quantifier la puissance acoustique de sortie d'un noyau à partir de la mesure de l'impédance d'entrée du noyau. L'analyse de cette puissance de sortie mène à la détermination de valeurs de fréquence et d'amplitude de pression acoustique optimales qui assurent un rendement maximal du noyau. Cette analyse se fait sans considération pour la charge qui y sera attachée afin de former un moteur complet. Il devient alors possible de construire une charge qui permet au noyau de fournir un rendement maximal pour une certaine puissance  $Q$  et une position de stack donnée. Plus généralement, cette méthode peut être appliquée à n'importe quel type de noyau thermoacoustique à partir du moment où il reste possible de le caractériser à partir de son impédance d'entrée.

Une charge a ensuite été choisie afin de vérifier qu'il était possible d'utiliser cette méthode d'optimisation sur un moteur réel. Cette charge est tout d'abord caractérisée afin de pouvoir utiliser son impédance d'entrée dans le cas d'un raccordement d'impédance. Les prédictions faites à partir du modèle de la charge acoustique sont proches des conditions de fonctionnement observées dans le cas d'un changement de résistance électrique  $\mathcal{R}$  connectée aux bornes de l'alternateur. Ce n'est en revanche pas le cas pour un changement de masse de l'équipage mobile.

Toutefois, malgré les différences observées entre les prédictions et les conditions de fonctionnement réelles de la machine, la méthode décrite dans ce chapitre permet, en se basant sur la mesure de l'impédance d'entrée d'un noyau thermoacoustique, d'optimiser la configuration d'une charge donnée afin de tirer un meilleur rendement de la machine construite.

## Chapitre 5

# Sur l'analyse de stabilité des solutions stationnaires

Le chapitre 2 explique le principe des mesures d'impédance d'entrée réalisées sur un noyau thermoacoustique. Ces impédances mesurées permettent notamment de caractériser l'amplification fournie par le noyau pour un chauffage  $Q$  donné, à une fréquence  $f$  et une amplitude de pression  $P$ . Les impédances d'entrée obtenues expérimentalement sont ainsi présentées pour des tubes vides au chapitre 1 et pour différents noyaux au chapitre 2.

À partir de ces mesures, le principe de la méthode de raccordement des impédances peut être mise en œuvre, comme détaillée au chapitre 3. Cette méthode permet de prévoir expérimentalement le comportement d'un moteur complet à partir des impédances d'entrée des éléments qui le constituent (noyau couplé à un tube vide).

Le déclenchement des auto-oscillations acoustiques conduit parfois à l'établissement de régimes stationnaires pour lesquels l'amplitude des auto-oscillations évolue au cours du temps. Cela se traduit soit sous la forme d'une modulation cyclique de l'amplitude, soit sous la forme de déclenchements/arrêts périodiques du moteur, comme reporté dans le cas de différents moteurs thermoacoustiques [41, 65, 62, 84, 95]. Les moteurs étudiés dans cette thèse, décrits dans les chapitres 3 et 4, donnent eux-aussi lieu à ce type de régime. Ce genre de comportement est observé lorsque le stack est placé suffisamment loin de la terminaison rigide et que la puissance de chauffage est réglée à une valeur faiblement supérieure au seuil de déclenchement. Vu sous l'angle de la prédiction de cycles limites, l'occurrence d'un régime de ce type pourrait être associée au caractère multistable du système dynamique étudié. En d'autres termes, l'existence de plusieurs régimes stationnaires possibles pour la machine est peut-être à l'origine de ces observations.

Le formalisme décrit au chapitre 3 ne permet *a priori* pas de résoudre le problème de la stabilité des régimes stationnaires. Il est cependant possible de s'inspirer du formalisme des describing functions proposé par Gelb[35]. Cette technique des describing functions est largement employée depuis plusieurs décennies

dans le domaine de l'électronique et du contrôle, et, plus récemment, par Noiray et al. pour la description d'instabilités de flamme acoustiquement induites[57]. Celle-ci est en réalité très proche de la méthode de raccordement des impédances proposée au chapitre 3. L'avantage de cette technique est qu'elle permet de disposer d'un critère de stabilité de solution stationnaire, appelé critère de Loeb. Ce critère est très utile dans le cas de l'étude menée dans cette thèse car elle est réalisée à partir d'une description en régime stationnaire des éléments du système.

Ce critère ne donne qu'une *indication* sur la stabilité des point fixes, en ce sens qu'il fournit une condition de stabilité nécessaire, mais pas suffisante. Dans un premier paragraphe, un oscillateur simple est étudié dans le but de présenter la méthode. L'objectif est d'introduire les outils applicables à un oscillateur simple, défini par une équation différentielle qu'il est possible de résoudre numériquement. Dans un second paragraphe, un nouvel oscillateur, ayant une dynamique proche de celle observée sur le moteur thermoacoustique, est présenté. Un troisième paragraphe propose de traiter le problème de la stabilité du régime établi de ce nouvel oscillateur à l'aide des outils présentés dans le premier paragraphe.

## 5.1 Étude d'un oscillateur simple

Un auto-oscillateur simple est étudié dans ce paragraphe. Il s'agit de l'oscillateur de Van der Pol, légèrement modifié, décrit par l'équation :

$$\ddot{x} - \mu \left(1 - \overline{x^2}\right) \dot{x} + x = 0, \quad (5.1)$$

où la notation  $\overline{x^2}$  représente la valeur moyenne sur un cycle (ou sur un temps très long en regard de la période) de  $x^2$  et où  $\mu$  représente l'amortissement ou le gain, qui donne naturellement lieu à une auto-oscillation harmonique. De plus, il présente une similitude avec un moteur thermoacoustique en ce sens que le mécanisme de saturation met en jeu l'amplitude moyenne sur un cycle,  $\overline{x^2}$ , des auto-oscillations (à l'instar des mécanismes de saturation comme le flux de chaleur thermoacoustique ou le vent acoustique[12, 44]).

Deux méthodes sont envisagées pour effectuer une analyse de stabilité des solutions stationnaires :

- une méthode de perturbation de la solution stationnaire, dans le domaine temporel, décrit au paragraphe 5.1.1,
- une méthode basée sur le critère de Loeb, dans le domaine fréquentiel, décrit au paragraphe 5.1.2.

*A priori*, ces méthodes sont adaptées au problème considéré, dans lequel la non-linéarité est faible (la génération d'harmonique n'étant pas une source majeure de saturation<sup>1</sup>).

---

1. En effet, une forte distorsion ne signifie pas nécessairement une dissipation importante au regard d'autres mécanismes de pertes localisés dans un noyau thermoacoustique. En ce qui concerne les mécanismes de saturations des machines thermoacoustiques, voir par exemple les travaux analytiques en réf. [51, 43] et numériques en réf. [97, 52, 45].

### 5.1.1 Analyse de stabilité linéaire dans le domaine temporel

La prédiction, et l'analyse de stabilité associée, des régimes stationnaires de l'oscillateur décrit par l'équation (5.1), peuvent être menées par des méthodes éprouvées et bien adaptées au problème considéré. L'application d'une méthode de moyennage (méthode de Krylov-Bogoliubov-Mitropolski[21, 49]) permet d'accéder assez directement aux solutions stationnaires. La stabilité de ces solutions est déterminée par une technique de perturbation. La validité de la démarche employée repose sur l'hypothèse préalable que l'amortissement (ou le gain) est faible, c'est-à-dire que  $\mu$  est un petit paramètre :  $\mu \ll 1$ . Cette hypothèse permet de supposer que l'amplitude des oscillations n'évolue quasiment pas sur un temps de l'ordre d'une période acoustique, et amène à postuler une solution sous la forme :

$$x(t, \mu t) = a(\mu t) \cos(t + \beta(\mu t)) \quad (5.2)$$

où l'amplitude  $a$  et la phase  $\beta$  des auto-oscillations sont supposées lentement variables (puisque  $\mu$  est faible). Il s'en suit que :

$$\dot{x} = -a \sin(t + \beta) + \mu \dot{a} \cos(t + \beta) - \mu a \dot{\beta} \sin(t + \beta), \quad (5.3)$$

$$\ddot{x} = -a \cos(t + \beta) - 2\mu \dot{a} \sin(t + \beta) - 2\mu a \dot{\beta} \cos(t + \beta) + \text{termes d'ordre } \mu^2, \quad (5.4)$$

et, par report dans l'équation de l'oscillateur :

$$\dot{a} \sin \varphi + a \dot{\beta} \cos \varphi = \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \frac{a}{2} \sin \varphi \quad (5.5)$$

où la variable  $\varphi(t) = t + \beta(\mu t)$  est introduite. En appliquant l'opération  $(1/2\pi) \int_0^{2\pi} (\dots) \sin \varphi d\varphi$  à l'équation (5.5), il vient :

$$\dot{a} = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{2}\right), \quad (5.6)$$

puis, en appliquant l'opération  $(1/2\pi) \int_0^{2\pi} (\dots) \cos \varphi d\varphi$  à l'équation (5.5) :

$$\dot{\beta} = 0. \quad (5.7)$$

L'oscillateur admet donc 2 couples  $(a_\infty, \beta_\infty)$  de solution stationnaires, à savoir :

- la solution triviale (pas d'oscillation) pour laquelle  $a_\infty = 0$  et  $\beta_\infty$  est une constante arbitraire,
- la solution non triviale correspondant à des oscillations d'amplitude  $a_\infty = \sqrt{2}$  (et de pulsation  $\omega = 1$ ), la phase  $\beta_\infty$  étant déterminée par les conditions initiales.

L'analyse de stabilité linéaire des solutions stationnaires peut ensuite être menée, en s'intéressant à l'évolution d'une petite perturbation  $a'(t)$  autour de la solution stationnaire  $a_\infty$ . Ainsi, en posant  $a(t) = a_\infty + a'(t)$  avec  $a' \ll a_\infty$  (ou bien  $a' \ll 1$  pour la solution triviale) et en reportant ce développement dans

l'équation (5.6) linéarisée, il vient :

$$d_t a' = \frac{a'}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} a_\infty^2 \right). \quad (5.8)$$

Par suite, en supposant que  $a' = a'_0 e^{\lambda t}$ , le report de cette expression dans l'équation ci-dessus permet de déterminer l'évolution de la perturbation via le signe de  $\lambda = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} a_\infty^2 \right)$ . Ainsi, il vient que :

- à la solution triviale est associée la valeur  $\lambda = 1/2$ , positive, de sorte que cette solution est instable,
- à la solution non triviale  $a_\infty = \sqrt{2}$  est associée la valeur  $\lambda = -1$ , négative, de sorte que cette solution est linéairement stable.

Dans la suite, la même conclusion peut être obtenue par une approche dans le domaine fréquentiel avec la technique de la describing function.

### 5.1.2 Technique de la describing function

La méthode des describing functions est une méthode d'usage courant en électronique pour le dimensionnement de systèmes de contrôle impliquant l'usage de dipôles électriques non-linéaires[35]. Le formalisme des describing functions est basé sur la représentation des systèmes sous forme de schéma bloc impliquant des boucles de rétroaction (éventuellement responsables du déclenchement d'auto-oscillations) dans lesquelles les contributions non-linéaires sont isolées des contributions linéaires. Pour décrire l'oscillateur représenté sur la figure 5.1 sous l'angle des describing functions, une première étape consiste à isoler la composante non-linéaire du système au second membre de l'équation :

$$\ddot{x} - \mu \dot{x} + x = -\overline{\mu x^2} \dot{x} = -\mu y(x(t)). \quad (5.9)$$

où  $y$  représente l'opérateur non-linéaire appliqué à la solution recherchée  $x(t)$ . Cette même équation peut être réécrite sous la forme :

$$1 + \mathcal{L}(x(t)) \times y(x(t)) = 0, \quad (5.10)$$

où

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{\frac{d^2}{dt^2} - \mu \frac{d}{dt} + 1} \quad (5.11)$$

représente l'opérateur linéaire (un filtre passe-bande à amortissement négatif) appliqué au signal  $x(t)$ . Cette façon d'écrire l'équation du système nous amène à représenter ce dernier sous la forme du schéma bloc de la figure 5.1a, conformément aux formalisme couramment rencontré dans le domaine de l'électronique et du contrôle, où  $r(t)$  est appelée *référence* et  $c(t)$  *contrôle*. De façon générale, la technique de la describing function consiste à approximer l'opérateur non-linéaire  $y$  en ne retenant de sa description que la réponse à la pulsation  $\omega$  à une entrée  $x(t) = a \sin(\omega t)$  supposée harmonique<sup>2</sup>, de sorte que la réponse non linéaire du

2. L'éventuelle génération d'harmoniques provenant du composant non-linéaire est donc négligée en supposant qu'elle contribue peu au comportement du système.

Le système se ramène à sa describing function  $\mathcal{N}(a, \omega)$  dont la réponse (à la pulsation  $\omega$ ) dépend de l'amplitude  $a$  de l'entrée.

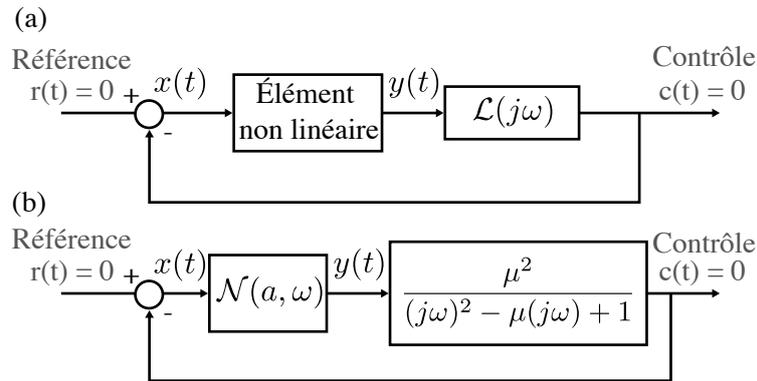


FIGURE 5.1 – (a) Représentation sous forme de schéma bloc de l'oscillateur décrit par l'équation (5.1). (b) La partie non-linéaire est remplacée par sa describing function  $\mathcal{N}(a, \omega)$  en supposant que la solution recherchée est un signal harmonique d'amplitude  $a$  et de pulsation  $\omega$

Ainsi, dans le cas de l'oscillateur considéré ici, la réponse  $y(t)$  à un signal harmonique  $x(t) = a \sin(\omega t)$  s'écrit :

$$y(t) = \overline{x^2} \dot{x} = \frac{a^2}{2} \dot{x}, \tag{5.12}$$

ce qui amène à définir, dans le domaine fréquentiel la describing function

$$\mathcal{N}(a, \omega) = \frac{a^2}{2} j\omega. \tag{5.13}$$

L'équation caractéristique  $1 + \mathcal{N}(a, \omega)\mathcal{L}(j\omega) = 0$  associée à l'oscillateur étudié ici s'écrit donc

$$1 + \left[ \frac{a^2}{2} j\omega \right] \times \left[ \frac{\mu}{(j\omega)^2 - \mu(j\omega) + 1} \right] = 0. \tag{5.14}$$

La résolution cette équation caractéristique mène à la détermination d'un cycle limite, dont la fréquence et l'amplitude peuvent être obtenues, de façon générale, numériquement ou bien graphiquement. Dans ce cas précis, où  $\mu = 0.1$ , la résolution analytique mène à une amplitude  $a_\infty = \sqrt{2}$  et à une pulsation  $\omega_\infty = 1$ . Cette même solution peut être obtenue graphiquement en traçant sur un même plan le module et la phase de l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}(j\omega)$  en fonction de la pulsation  $\omega$  ainsi que le module et la phase de  $-1/\mathcal{N}(a, \omega)$  en fonction de l'amplitude  $a$ , et pour différentes valeurs de la pulsation  $\omega$  comme sur la figure 5.2. S'il existe un point de croisement entre les deux courbes tel que  $1 + \mathcal{N}(a_\infty, \omega_\infty)\mathcal{L}(j\omega_\infty) = 0$ , alors ce point de croisement correspond à un cycle limite. Une autre représentation est proposée sur la figure 5.3. Cette représentation consiste à afficher l'amplitude et la phase de  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{N}$  en fonction de la fréquence. Pour la describing function  $\mathcal{N}$ , plusieurs valeurs de  $a$  sont testées. Le point fixe est obtenu graphiquement en cherchant une valeur de  $f$  qui permet d'obtenir un croisement des courbes en amplitude et en phase. Le même point fixe ( $a_\infty = \sqrt{2}; \omega_\infty = 1$ )

est obtenue avec cette méthode.

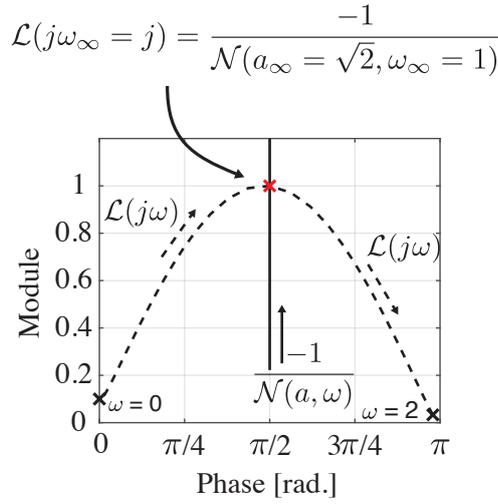


FIGURE 5.2 – Représentation du module et de la phase des fonctions  $\mathcal{L}$  et  $-1/\mathcal{N}$ . La composante linéaire,  $\mathcal{L}$ , est tracée en fonction de la pulsation  $\omega$ , tandis que  $-1/\mathcal{N}$  est tracée en fonction de  $a$  pour plusieurs  $\omega$  différentes. Les différentes courbes de  $\mathcal{N}$ , correspondant aux différentes pulsations testées, sont toutes superposées. Cela est dû au fait que la fonction est purement imaginaire, et donc sa phase reste égale à  $\pi/2$  quelque soit la valeur de  $a$  ou de  $\omega$ . Un point de croisement est obtenu pour les valeurs  $\omega_\infty = 1$  et  $a_\infty = \sqrt{2}$ .

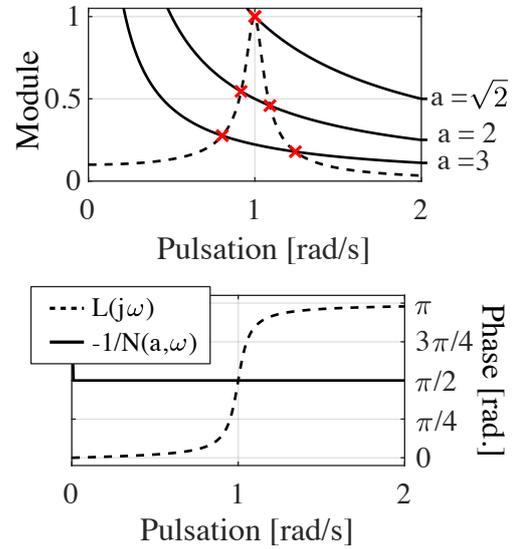


FIGURE 5.3 – Représentation du module (a) et de la phase (b) de  $\mathcal{L}$  et  $-1/\mathcal{N}$  en fonction de la pulsation et pour différentes valeurs de  $a$ . Le point de croisement doit être obtenu pour une même valeur de  $\omega$ , ici :  $\omega_\infty = 1$  et  $a_\infty = \sqrt{2}$ .

Ces approches graphiques présentent de nombreuses similitudes avec la méthode de raccordement des impédances utilisée au chapitre 3 (ne serait-ce que parce que le cycle limite peut être déterminé graphiquement). La principale différence tient au fait que seule la describing function  $\mathcal{N}$  porte la contribution non linéaire de l'oscillateur, alors que l'impédance d'entrée  $Z_{tac}(\mathcal{Q}, \omega, P)$  introduite et mesurée au chapitre 3 comporte les contributions non-linéaire *et* linéaire du noyau thermoacoustique. En outre, il est important de noter qu'au delà de la détermination graphique des cycle limites, cette approche permet également d'obtenir graphiquement un critère de stabilité du cycle limite, dit critère de Loeb. En effet, si l'amplitude  $a_\infty$  et la pulsation  $\omega_\infty$  d'un cycle limite existent, alors la relation :

$$1 + \mathcal{N}(a_\infty, \omega_\infty)\mathcal{L}(j\omega_\infty) = 0 \quad (5.15)$$

est satisfaite. Cette condition d'équilibre peut être reformulée en exprimant les parties réelle et imaginaire

de  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{L}$  ce qui mène à l'équation :

$$\mathcal{U}(a_\infty, \omega_\infty) + j\mathcal{V}(a_\infty, \omega_\infty) = 0 \quad (5.16)$$

où  $\mathcal{U} = 1 + \Re(\mathcal{N}\mathcal{L})$  et  $\mathcal{V} = \Im(\mathcal{N}\mathcal{L})$ . En supposant maintenant qu'une petite perturbation autour du cycle limite est appliquée dans l'équation (5.16) :

$$a_\infty \rightarrow a_\infty + \Delta a, \quad (5.17)$$

$$\omega_\infty \rightarrow \omega_\infty + \Delta\omega + j\Delta\sigma, \quad (5.18)$$

alors l'équation caractéristique (5.16) prend la forme :

$$\mathcal{U}(a_\infty + \Delta a, \omega_\infty + \Delta\omega + j\Delta\sigma) + j\mathcal{V}(a_\infty + \Delta a, \omega_\infty + \Delta\omega + j\Delta\sigma) = 0. \quad (5.19)$$

Dès lors que  $\Delta\omega \neq 0$  et/ou  $\Delta a \neq 0$ , cette équation ne peut être satisfaite que pour une valeur non-nulle de la partie imaginaire de la fréquence,  $\Delta\sigma$ . Cette valeur représente en réalité un taux d'atténuation de la perturbation :  $e^{j\omega t} = e^{j(\omega_\infty + \Delta\omega)t} e^{-\Delta\sigma t}$ . Par suite, compte-tenu que  $\Delta\omega$ ,  $\Delta a$  et  $\Delta\sigma$  sont supposées être des petites perturbations, le développement de Taylor de l'équation (5.19) au premier ordre de ces petites quantités mène au deux égalités :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a} \Delta a - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \omega} \Delta\sigma + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \omega} \Delta\omega = 0, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \omega} \Delta\sigma + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \omega} \Delta\omega = 0, \quad (5.21)$$

ou encore, par élimination de  $\Delta\omega$ , à la relation :

$$\left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \omega} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial a} \right) \Delta a = \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \omega} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \omega} \right)^2 \right] \Delta\sigma. \quad (5.22)$$

Pour qu'un cycle limite d'amplitude  $a_\infty$  soit stable, il faut qu'une perturbation positive  $\Delta a$  soit atténuée, c'est-à-dire que  $\Delta\sigma$  soit positif, ou qu'une perturbation négative  $\Delta a$  soit associée à un  $\Delta\sigma$  négatif. En d'autres termes, le signe de  $\Delta\sigma/\Delta a$  doit toujours être positif, ce qui mène au critère de stabilité locale, dit de Loeb :

$$\mathcal{C}_L = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \omega} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial a} > 0. \quad (5.23)$$

Ce critère de Loeb peut aussi être évalué de façon graphique. En effet, sur la figure 5.2, le sens d'évolution du point fixe est donné par les flèches donnant "l'orientation" des courbes. Ces courbes montrent qu'une perturbation du point fixe (représenté par un marqueur rouge) mène à une diminution (respectivement, une augmentation) de l'amplitude de  $\mathcal{L}$  si la perturbation est positive (respectivement, négative). Ici, donc, l'analyse graphique prévoit que le point fixe  $(a_\infty; \omega_\infty)$  est stable.

Le critère de Loeb peut également être estimé analytiquement pour l'auto-oscillateur de l'équation (5.1). En effet, les fonctions  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  s'expriment respectivement sous la forme suivante :

$$\mathcal{U} = 1 - \frac{a^2 \mu^2 \omega^2}{2 \left[ (1 - \omega^2)^2 + \mu^2 \omega^2 \right]}, \quad (5.24)$$

$$\mathcal{V} = \frac{a^2 \mu \omega (1 - \omega^2)}{2 \left[ (1 - \omega^2)^2 + \mu^2 \omega^2 \right]}, \quad (5.25)$$

et après calculs, le critère de Loeb est donné par :

$$\mathcal{C}_L = \frac{a_\infty^3 \mu^3 \omega_\infty^2 (1 + \omega_\infty^2)}{2 [\omega_\infty^4 + \mu^2 \omega_\infty^2 - 2\omega_\infty^2 + 1]^2}. \quad (5.26)$$

Ainsi, pour le cycle limite d'amplitude  $a_\infty = \sqrt{2}$  et de pulsation  $\omega_\infty = 1$ , il vient  $\mathcal{C}_L = 2\sqrt{2}/\mu$  qui est un nombre positif dès lors que  $\mu$  est positif (ici  $\mu = 0.1$ ). Le critère de Loeb obtenu analytiquement prévoit que le point fixe est stable, tout comme ce que prévoit l'analyse graphique précédente.

### 5.1.3 Lien entre la méthode de la describing function et les présents travaux

Comme mentionné précédemment, la méthode de la describing function présente des similitudes avec la méthode de raccordement des impédances proposée aux chapitres précédents : les deux méthodes permettent de prédire un cycle limite à partir de la réponse en fréquence de chaque composante du système. La méthode de raccordement des impédances ne permet cependant pas de disposer explicitement de la composante non linéaire, isolée, du système, c'est-à-dire de la describing function. En cause, l'impédance d'entrée du noyau thermoacoustique qui comporte également une contribution linéaire du système. Néanmoins, les deux méthodes permettent de prédire un cycle limite par la résolution, analytique ou graphique, de l'équation caractéristique. Il résulte assez directement des propos du paragraphe précédent que la mesure des impédances  $Z_{tac}(\omega, P, Q)$  et  $Z_{load}(\omega)$  permet donc également d'analyser la stabilité des cycles limites prédits par une évaluation du critère de Loeb. En effet, l'équation caractéristique prend la forme :

$$Z_{load}(\omega_\infty) + Z_{tac}(Q, \omega_\infty, P_\infty) = 0, \quad (5.27)$$

pour une puissance de chauffage donnée.

Les fonctions  $\mathcal{U}(Q, \omega_\infty, P_\infty) = \Re(Z_{load} + Z_{tac})$  et  $\mathcal{V}(Q, \omega_\infty, P_\infty) = \Im(Z_{load} + Z_{tac})$  sont obtenues directement, de sorte que l'évaluation du critère de Loeb autour du point fixe  $(\omega_\infty, P_\infty)$  permet d'analyser la stabilité du cycle limite prévu à partir des mesures de  $Z_{load}$  et  $Z_{tac}$ .

Pour cela, deux configurations du noyau sont imposées tour-à-tour au moteur décrit au chapitre 3, dans le cas où le noyau est connecté à un tube de 73 cm, fermé à son extrémité. Il en résulte les deux régimes stationnaires, tous deux caractérisés par la pression  $P$  mesurée par le microphone de référence, représentés

sur la figure 5.4. Dans un cas, le stack est placé à  $L_{\text{TBT}} = 22$  cm du fond rigide et le fil chauffant est alimentée par une puissance de chauffage  $Q = 28$  W, largement supérieure au seuil de déclenchement de la machine. Un régime établi, pour lequel les auto-oscillations acoustiques ont une amplitude stable dans le temps<sup>3</sup>, est atteint. Dans le second cas, le stack est placé à  $L_{\text{TBT}} = 28$  cm du fond rigide et le fil chauffant est alimentée par une puissance de chauffage  $Q = 20.3$  W, soit une valeur proche de celle du seuil de déclenchement. Cette fois, les auto-oscillations observées en régime établi subissent une forte modulation d'amplitude dont le caractère cyclique ne semble pas évoluer au cours du temps.

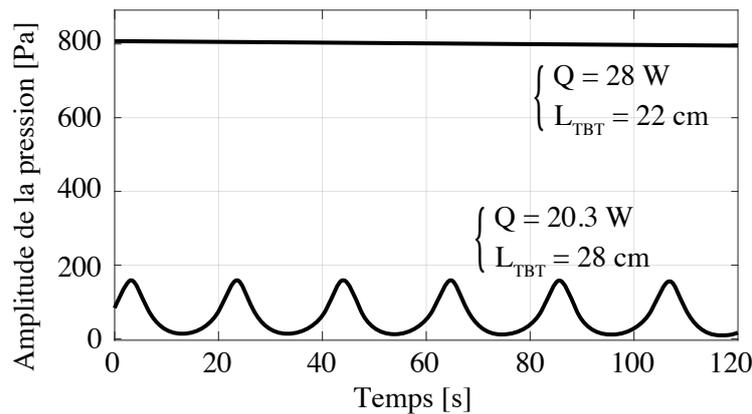


FIGURE 5.4 – Évolution de l'amplitude des auto-oscillations au cours du temps dans deux configurations différentes du noyau thermoacoustique, connecté à un tube de 73 cm fermé à son extrémité. Une puissance de chauffage  $Q = 28$  W, largement au dessus du seuil de déclenchement, associée à un stack situé à  $L_{\text{TBT}} = 22$  cm, donne lieu à un régime établi dont l'amplitude n'évolue que très peu au cours du temps. Pour une puissance  $Q = 20.3$  W, proche du seuil de déclenchement, associée à un stack situé à  $L_{\text{TBT}} = 28$  cm, les auto-oscillations subissent une large modulation d'amplitude cyclique.

Le critère de Loeb est alors déterminé à partir de l'équation (5.23). Pour cela, les mesures de  $Z_{\text{tac}}$  dans les deux différentes configurations sont réalisées. Il est possible de procéder à la prédiction du cycle limite dans les deux cas et de représenter le critère de Loeb sur la même figure 5.5. Le critère de Loeb est cartographié selon  $f$  et  $P$  : l'équation (5.23) est satisfaite dans la zone représentée en jaune<sup>4</sup>. Dès lors, il devient intéressant de noter que les points fixes prédits sont, dans les deux cas, stables selon le critère de Loeb. Or, la mesure montre que ce n'est pas le cas lorsque le stack est situé à  $L_{\text{TBT}} = 28$  cm, alimenté par une puissance de chauffage  $Q = 20.3$  W.

Le critère de Loeb n'est donc pas suffisant pour déterminer la stabilité d'un point fixe prédit par la méthode de raccordement des impédances. Dans le paragraphe suivant, un nouvel oscillateur modèle est décrit. Ce nouvel oscillateur a pour but de reproduire le comportement de relaxation observé sur le moteur.

3. Une légère dérive de l'amplitude des auto-oscillations peut cependant être observée entre le début et la fin de l'acquisition. Cette dérive a souvent été observée dans les mesures et est attribuée à une dérive extrêmement lente du champ de température pouvant prendre parfois jusqu'à 5 à 6h pour être parfaitement stabilisée.

4. Attention, le critère de Loeb reste un critère de stabilité *local* et il n'a de sens qu'autour du point fixe prédit.

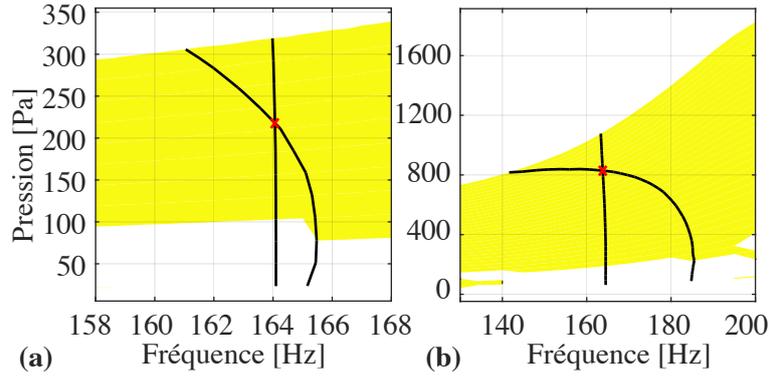


FIGURE 5.5 – Représentation de la méthode de raccordement des impédances dans les deux configurations étudiées. Les courbes en noire sont les parties réelle et imaginaire de la condition de raccordement, à savoir respectivement  $\Re(Z_{\text{sum}}) = 0$  et  $\Im(Z_{\text{sum}}) = 0$ . Dans les deux cas, le noyau est raccordé à un tube de 73 cm, fermé à son extrémité. (a) Dans le cas où le stack est situé à  $L_{\text{TBT}} = 28$  cm, avec une puissance de chauffage  $Q = 20.3$  W, et (b) dans le cas où le stack est à  $L_{\text{TBT}} = 22$  cm du fond rigide, avec une puissance de chauffage fixée à  $Q = 28$  W. La zone en jaune indique que le critère de stabilité de Loeb est satisfait.

Une analyse de stabilité des points fixes de ce modèle sera ensuite réalisée, permettant de mieux comprendre les limites des méthodes utilisées précédemment.

## 5.2 Description d'un oscillateur relaxant modèle

L'objectif de ce paragraphe est de proposer un modèle d'oscillateur se basant sur l'équation de Van Der Pol modifiée (5.1), pouvant, si possible, reproduire une dynamique proche de celle observée sur la figure 5.4. Il est important de noter que l'objet de ce paragraphe n'est pas de proposer un modèle thermoacoustique pour le moteur mais d'étudier un oscillateur qui présente des points communs avec ce dernier. Ainsi, les grandeurs physiques sont reliées aux paramètres de l'oscillateur dans le but de définir le rôle des mécanismes physiques mis en jeu.

La première des approximations consiste à considérer que l'oscillateur acoustique de la figure 5.6a puisse être assimilé à un système masse-ressort, par exemple en utilisant des analogies électroacoustiques sous l'hypothèse de basses fréquences. De cette manière, le débit acoustique  $u(t)$  traversant le stack s'exprime par une équation différentielle en fonction d'une masse acoustique  $\mathcal{M}$ , d'une compliance acoustique  $\mathcal{C}$  et d'une résistance acoustique  $\mathcal{R}$  :

$$\mathcal{M}\ddot{u} + \mathcal{R}\dot{u} + \frac{u}{\mathcal{C}} = 0. \quad (5.28)$$

La compliance et la masse acoustique ne sont pas exprimées en fonction des dimensions du système car seule la propriété de résonance est recherchée ici. En revanche, le phénomène d'amplification thermoacoustique est introduit via la résistance  $\mathcal{R}$ , supposée dépendante du champ de température axial  $T(x)$  le long du stack. Cette résistance est susceptible d'être négative sous l'effet du chauffage  $Q$ . La résistance  $\mathcal{R}$  est supposée

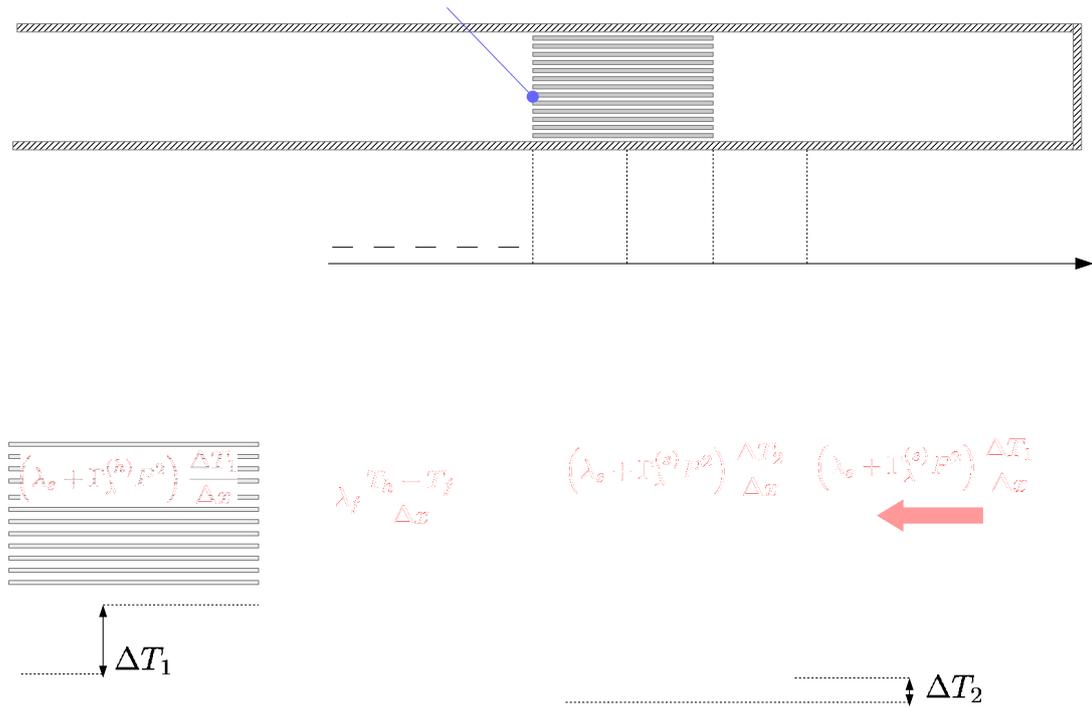


FIGURE 5.6 – (a) Schéma de principe d'un moteur thermoacoustique. (b) Représentation schématique des transferts thermiques au sein du volume de contrôle 1. (c) Représentation schématique des transferts thermiques au sein du volume de contrôle 2.

dépendre de l'amplitude des oscillations acoustiques par leur effet sur le champ de température, via le transport de chaleur thermoacoustique :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(T(x)). \quad (5.29)$$

En revanche, la masse acoustique  $\mathcal{M}$  et la compliance acoustique  $\mathcal{C}$  sont supposées être indépendantes du champ de température. L'équation de l'oscillateur est alors réécrite sous la forme :

$$\ddot{u} - \mu \omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = 0, \quad (5.30)$$

où :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\mathcal{M}\mathcal{C}}, \quad (5.31)$$

$$\mu = \frac{-\mathcal{R}}{\omega_0 \mathcal{M}}. \quad (5.32)$$

Dans ces équations, le terme d'amplification  $\mu$  dépend du champ de température instantané  $T(x, t)$ . Enfin,

en effectuant le changement de variable  $t \rightarrow \omega_0 t$ , l'équation de l'oscillateur prend la forme :

$$\ddot{u} + u = \mu (T(x, t)) \dot{u}. \quad (5.33)$$

Par la suite, l'amplification (positive ou négative) est considérée faible ( $\mu \ll 1$ ), cela implique que l'évolution de l'amplitude des auto-oscillations est lente en regard de la période des oscillations. L'évolution du champ de température (dont dépend  $\mu$ ) est considérée lente en regard de la période acoustique, et l'impact du champ acoustique sur le champ de température est supposé dépendre de façon quadratique de l'amplitude crête des oscillations (à l'instar de ce que prévoit la théorie linéaire de la thermoacoustique) :

$$T(x, t) = T(x, \mathcal{Q}, \overline{u^2}(t)). \quad (5.34)$$

Afin de conserver une description la plus simple possible d'un oscillateur dont l'amplification dépendrait de l'amplitude mais également de la forme du champ de température axial le long du stack, le gain thermoacoustique est décrit, de façon arbitraire, sous la forme :

$$\mu = \mu_0 [\beta \Delta T_1 + (1 - \beta) \Delta T_2 - 1], \quad (5.35)$$

où  $\Delta T_1$  et  $\Delta T_2$  représentent les écarts de température sur chaque demi-longueur du stack, comme représentées schématiquement sur la figure 5.6, et où  $\beta$  est un coefficient de pondération ( $0 < \beta < 1$ ) fixé arbitrairement. Ce coefficient  $\beta$  caractérise l'impact de la forme du champ de température sur l'amplification thermoacoustique. Dans le paragraphe qui suit, une description de l'évolution des écarts de température  $\Delta T_1$  et  $\Delta T_2$  sous l'effet du chauffage  $\mathcal{Q}$  et du pompage de chaleur thermoacoustique<sup>5</sup> est proposée.

### 5.2.1 Prise en compte des transferts thermiques

Les figures 5.6b et 5.6c représentent schématiquement l'approche utilisée pour aboutir à un jeu d'équations couplées décrivant l'évolution des écarts de température  $\Delta T_1$  et  $\Delta T_2$  le long du stack. La puissance calorifique de chauffage  $\mathcal{Q}$  est localisée à l'extrémité droite du stack, et l'extrémité gauche du stack est maintenue à la température ambiante  $T_\infty$ . Les parois du résonateur sont supposées parfaitement isolantes, les pertes thermiques latérales sont donc négligées. Le stack est traité comme un milieu homogène, caractérisé par sa conductivité thermique  $\lambda_s$ , sa masse volumique  $\rho_s$  et sa capacité calorifique  $C_s$ . Le milieu fluide à droite du stack est quant à lui caractérisé par les coefficients thermophysiques  $\lambda_f$ ,  $\rho_f$  et  $C_f$ .

L'évolution couplée des écarts de température  $\Delta T_1$  et  $\Delta T_2$  est décrite en faisant un bilan des transferts thermiques sur deux volumes de contrôle distincts représentés sur la Fig. 5.6a. Si l'essentiel de la chaleur fournie transite dans le stack plutôt que dans le fluide, car  $\lambda_f \ll \lambda_s$ , en première approximation, le bilan

5. pris en compte sous forme d'une conductivité thermique acoustiquement induite, donc proportionnelle à  $\overline{u^2}$

thermique à l'interface entre le stack et le fluide, voir figure 5.6b, mène à :

$$(\Delta x S) \rho_s C_s \frac{dT_h}{dt} \approx \mathcal{Q} - \left( \lambda_s + \Gamma_\lambda^{(h)} \overline{u^2} \right) \frac{S(T_h - T_s)}{\Delta x}, \quad (5.36)$$

où  $T_h$  et  $T_s$  représentent respectivement les températures à l'extrémité chaude et au milieu du stack, et où  $S$  désigne la section du résonateur. Le terme  $\Gamma_\lambda^{(h)} \overline{u^2}$  représente la conductivité thermique acoustiquement induite générée par le pompage de chaleur thermoacoustique.

Ce même bilan thermique peut être effectué dans le second volume de contrôle, conformément à la figure 5.6c, ce qui mène au résultat :

$$(2\Delta x S) \times \rho_s C_s \frac{dT_s}{dt} \approx \left( \lambda_s + \Gamma_\lambda^{(s)} \overline{u^2} \right) \frac{S(T_h - T_s)}{\Delta x} - \left( \lambda_s + \Gamma_\lambda^{(s)} \overline{u^2} \right) \frac{S(T_s - T_\infty)}{\Delta x}, \quad (5.37)$$

où la conductivité thermique acoustiquement induite dans le coeur du stack,  $\Gamma_\lambda^{(s)} \overline{u^2}$ , n'est pas nécessairement supposée être la même qu'à son extrémité chaude :  $\Gamma_\lambda^{(s)} \neq \Gamma_\lambda^{(h)}$ . Cette différence pourrait se justifier par exemple par la présence d'effets de bords qui impactent le transport advectif de chaleur.

Ainsi, en introduisant les écarts de température  $\Delta T_1 = T_h - T_s$  et  $\Delta T_2 = T_s - T_\infty$ , le jeu d'équations (5.36) et (5.37) prend la forme :

$$\left( \begin{array}{l} d_t \Delta T_1 + d_t \Delta T_2 = \frac{\mathcal{Q}}{\rho_s C_s S \Delta x} - \frac{\lambda_s + \Gamma_\lambda^{(h)} \overline{u^2}}{\rho_s C_s (\Delta x)^2} \Delta T_1, \\ d_t \Delta T_2 = \frac{\lambda_s + \Gamma_\lambda^{(s)} \overline{u^2}}{2\rho_s C_s (\Delta x)^2} (\Delta T_1 - \Delta T_2). \end{array} \right) \quad (5.38)$$

Alors, en posant :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\lambda_s}{\rho_s C_s S}, \\ \mathfrak{q} &= \frac{\mathcal{Q}}{\lambda_s \Delta x}, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2(\Delta x)^2}, \\ \alpha_2 &= \frac{\Gamma_\lambda^{(h)} S}{2\lambda_s (\Delta x)^2}, \\ \alpha_3 &= \frac{\Gamma_\lambda^{(s)} S}{2\lambda_s (\Delta x)^2}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

le jeu d'équations (5.38) peut être réécrit sous la forme :

$$\left( \begin{array}{l} d_t \Delta T_1 = \xi \left[ \mathfrak{q} - (3\alpha_1 + (2\alpha_2 + \alpha_3) \overline{u^2}) \Delta T_1 + (\alpha_1 + \alpha_3 \overline{u^2}) \Delta T_2 \right] \\ d_t \Delta T_2 = \xi (\alpha_1 + \alpha_3 \overline{u^2}) (\Delta T_1 - \Delta T_2) \end{array} \right). \quad (5.40)$$

Ce jeu d'équations représentatives des transferts de chaleurs (5.38), peut être combiné à l'équation :

$$\ddot{u} + u = \mu_0 [\beta \Delta T_1 + (1 - \beta) \Delta T_2 - 1] \dot{u}, \quad (5.41)$$

représentative du processus d'amplification thermoacoustique, pour obtenir le système d'équations :

$$\left( \begin{array}{l} \ddot{x} + x = \mu [\beta \Delta T_1 + (1 - \beta) \Delta T_2 - 1] \dot{x}, \\ \Delta \dot{T}_1 = \xi \left[ \mathfrak{q} - (3\alpha_1 + (2\alpha_2 + \alpha_3) \overline{u^2}) \Delta T_1 + (\alpha_1 + \alpha_3 \overline{u^2}) \Delta T_2 \right], \\ \Delta \dot{T}_2 = \xi (\alpha_1 + \alpha_3 \overline{u^2}) (\Delta T_1 - \Delta T_2). \end{array} \right) \quad (5.42)$$

qui constituent le modèle d'auto-oscillateur utilisé pour disposer d'un système :

- qui présente une dynamique similaire à celle observée sur le moteur thermoacoustique réel (et notamment l'occurrence d'un régime spontané de déclenchement-arrêt périodiques)
- dont chacun des termes peut être interprété physiquement dans la mesure où ce jeu d'équations a été établi sur la base d'une description simpliste d'un moteur thermoacoustique (en formulant toutefois nombre d'hypothèses non justifiées ...).

### 5.2.2 Résolution numérique directe du système

Une technique de moyennage est d'abord appliquée, comme auparavant pour l'oscillateur de l'équation (5.1), en posant  $x(t) = \sqrt{2}a(\mu t) \cos(t + \varphi(\mu t))$ , au jeu d'équations (5.42), il vient :

$$\left( \begin{array}{l} \dot{a} = [\beta \Delta T_1 + (1 - \beta) \Delta T_2 - 1] \frac{a}{2}, \\ \Delta \dot{T}_1 = \epsilon \left[ \mathfrak{q} - (3\alpha_1 + (2\alpha_2 + \alpha_3) a^2) \Delta T_1 + (\alpha_1 + \alpha_3 a^2) \Delta T_2 \right], \\ \Delta \dot{T}_2 = \epsilon (\alpha_1 + \alpha_3 a^2) (\Delta T_1 - \Delta T_2), \end{array} \right) \quad (5.43)$$

où  $\epsilon = \xi/\mu$ , après avoir introduit une nouvelle variable de temps  $t \equiv \mu t$ . La solution triviale est obtenue assez directement :

$$a_\infty = 0, \quad (5.44)$$

$$\Delta T_{1_\infty} = \Delta T_{2_\infty} = \frac{\mathfrak{q}}{2\alpha_1}, \quad (5.45)$$

et la solution non triviale est :

$$a_\infty^2 = \frac{\mathfrak{q} - 2\alpha_1}{2\alpha_2}, \quad (5.46)$$

$$\Delta T_{1_\infty} = \Delta T_{2_\infty} = 1, \quad (5.47)$$

où la condition  $\mathfrak{q} > 2\alpha_1$  doit être remplie.

Les résultats présentés sur la figure 5.7 sont issus de la résolution numérique du système, pour différentes valeurs du chauffage  $\mathfrak{q}$ , en fixant les différents paramètres du modèle aux valeurs suivantes :  $\epsilon = 0.25$ ,  $\alpha_1 = 0.01$ ,  $\alpha_2 = 0.001$ ,  $\alpha_3 = 0.0025$  et  $\beta = 0.3$ . Les évolutions de l'amplitude  $a$  et des écarts de température  $\Delta T_{1,2}$  sont d'abords données sur les figures 5.7a (pour  $\mathfrak{q} = 0.25$ ) et 5.7b (pour  $\mathfrak{q} = 1$ ) en fonction du temps.

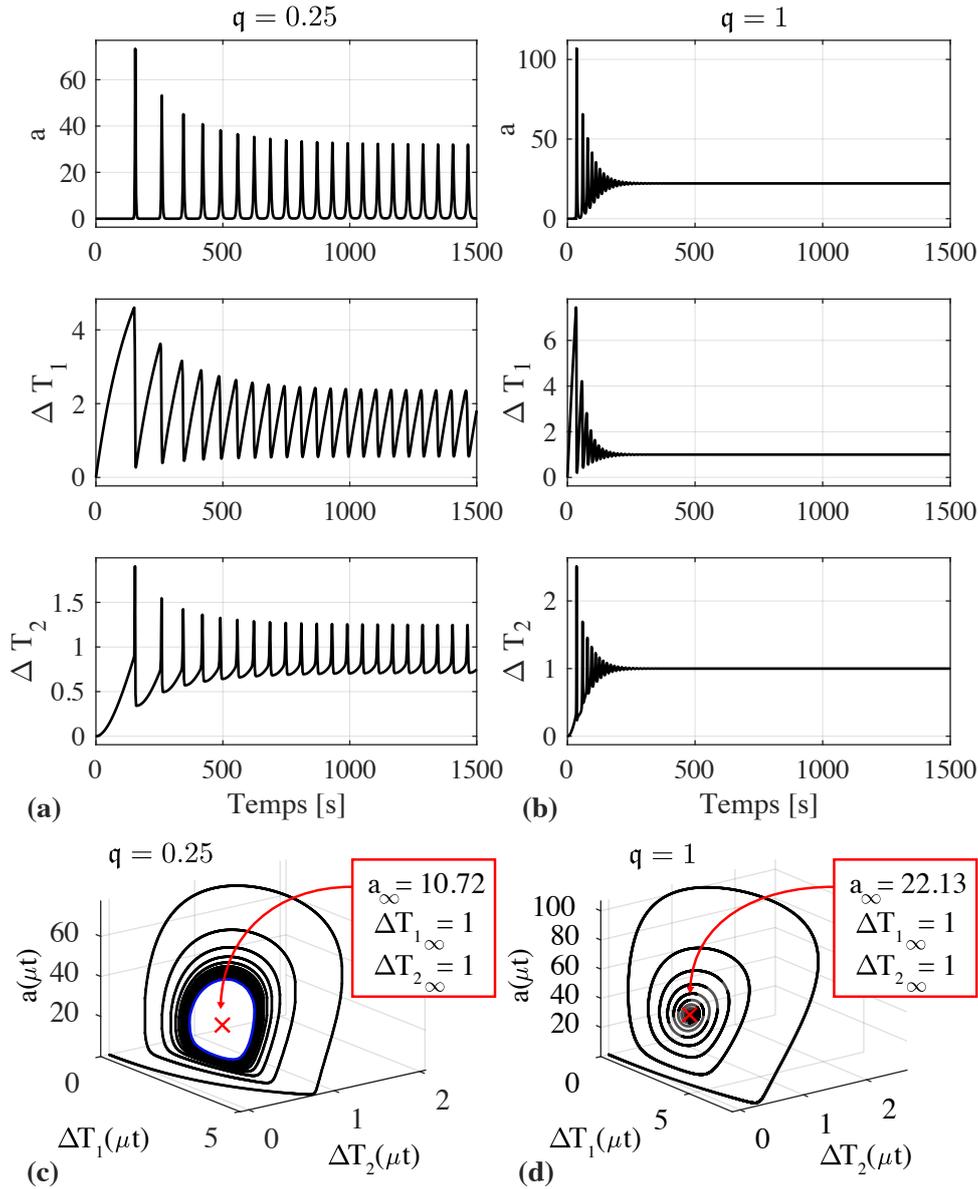


FIGURE 5.7 – (a) - (b) Évolution temporelle de l'amplitude  $a$  et des différences de températures  $\Delta T_{(1,2)}$ , issues de la résolution numérique directe du système d'équation (5.42), ainsi que (c) - (d) les portraits de phase associés, en prenant les paramètres  $\epsilon = 0.25$ ,  $\alpha_1 = 0.01$ ,  $\alpha_2 = 0.001$ ,  $\alpha_3 = 0.0025$ ,  $\beta = 0.3$ , et, pour (a),(c) :  $q = 0.25$ , pour (b),(d) :  $q = 1$ . Les marqueurs rouges sur (c) - (d) sont les valeurs des régimes stationnaires calculées analytiquement. Les conditions initiales imposées pour la résolution du système sont fixées à des valeurs très proches de zéro.

Dans le cas où le chauffage  $q = 1$ , le régime stationnaire est stable, tandis que  $q = 0.25$  mène à l'établissement d'un régime stationnaire instable, ce qui se manifeste par la relaxation observable des amplitude  $a$  et écarts de température  $\Delta T_{1,2}$  au cours du temps.

Henri Poincaré suggère en 1881[70], basé sur des arguments qualitatifs, qu'un système dynamique peut admettre une solution stationnaire dont le comportement asymptotique est cyclique, une *orbite*. Le théorème de Poincaré-Bendixson, faisant suite aux travaux de Bendixson sur le sujet[14], atteste de l'existence formelle

de telles solutions. Or, il semble que le système, décrivant les variations lentes (au regard de la période acoustique) de l'amplitude atteintes par l'oscillateur proposé ici, suive ce genre de comportement lorsque le régime stationnaire est qualifié d'instable, lorsque  $q = 0.25$  par exemple. Par ailleurs, un espace abstrait dont les coordonnées sont les variables dynamiques du système étudié, ou *espace des phases*[58], offre un cadre d'étude très adapté à la visualisation de ce genre de comportement. Les portraits de phase associés à la résolution du système dynamique étudié ici sont fournis sur les figures 5.7c (pour  $q = 0.25$ ) et 5.7d (pour  $q = 1$ ). Les portraits de phase indiquent que les conditions du régime stationnaire prévues analytiquement ne sont pas atteintes, et ne semblent pas pouvoir l'être, lorsque  $q = 0.25$  et avec des conditions initiales proches de 0. Un cycle limite, représenté par une courbe bleue sur la figure 5.7c, semble pourtant être atteint et suit une orbite autour du point fixe. Afin de vérifier que cet orbite est attractif, et que donc, le cycle limite de l'oscillateur ne finira pas par converger vers la solution analytique proposée, le système est résolu numériquement une seconde fois, en prenant comme conditions initiales les valeurs de  $\Delta T_{1,2\infty}$  obtenues analytiquement ainsi qu'une amplitude initiale  $a_{\text{init.}}$  perturbée telle que  $a_{\text{init.}} = a_{\infty} + a'$ . Le portrait de phase qui en résulte est tracé sur la figure 5.8 et montre que le système converge vers le même cycle limite que sur la figure 5.7c. Le point de fonctionnement prédit analytiquement est donc qualifié de *foyer répulsif*.

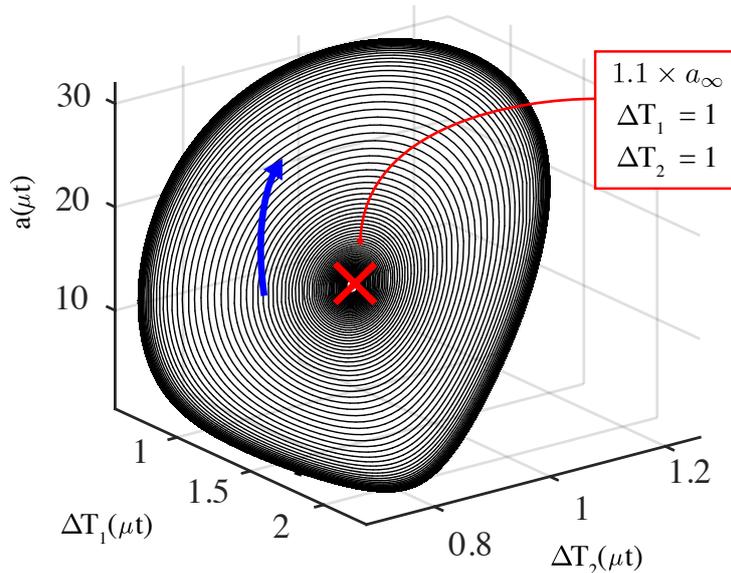


FIGURE 5.8 – Portrait de phase du système décrit par le jeu d'équation (5.42) lorsque  $q = 0.25$ , avec les paramètres  $\epsilon = 0.25$ ,  $\alpha_1 = 0.01$ ,  $\alpha_2 = 0.001$ ,  $\alpha_3 = 0.0025$  et  $\beta = 0.3$ . Les conditions initiales imposées pour la résolution numérique du système sont les conditions en régimes stationnaires, dont l'amplitude est perturbée, retrouvées par résolutions analytique du système pour le cas de la solution non triviale. Le système converge vers le cycle limite périodique déjà observé sur la figure 5.7c.

Comme le montre les différents régimes d'oscillation obtenus en figure 5.7, le système d'équations non linéaires (5.42) présente une dynamique qui se rapproche d'un oscillateur thermoacoustique réel. Le prochain paragraphe est donc consacré à l'analyse de stabilité des solutions stationnaires de cet oscillateur (5.42),

en utilisant les deux approches déjà introduites au paragraphe 5.1. L'oscillateur est d'abord étudié dans le prochain paragraphe 5.3.1 sous l'angle des systèmes dynamiques, ce qui consiste en une analyse de stabilité linéaire dans le domaine temporel par perturbation de la solution stationnaire, puis celui des describing functions (approche fréquentielle) dans le paragraphe 5.3.2. L'objectif est ici de comprendre, par l'étude de cet oscillateur, la raison pour laquelle le critère de Loeb est inopérant.

### 5.3 Étude de stabilité du modèle

Les résultats présentés au paragraphe 5.1 mettent en évidence le fait que le critère de Loeb est insuffisant pour conclure quant à la stabilité du (ou des) régime(s) prédit(s) par la technique de raccordement des impédances entre le noyau thermoacoustique et la charge. Ainsi, aucune conclusion ne peut être tirée sur la stabilité des cycles limites prédits si une attention particulière n'est pas portée à la dynamique d'établissement du champ de température. Or, cette information est perdue lorsque les mesures d'impédances sont réalisées sur un noyau ayant un champ de température établi. Aussi, l'oscillateur modèle décrit au paragraphe 5.2 précédent, dont la dynamique se rapproche de celle observée sur le système thermoacoustique expérimental (tel que décrit au chapitre 3), est maintenant étudié selon les méthodes utilisées précédemment.

#### 5.3.1 Analyse de stabilité linéaire

Les variations des amplitudes des oscillations et celles des écarts de température  $\Delta T_i$  sont supposées lentes au regard de la période des oscillations, pour cette raison une méthode de moyennage peut être appliquée au système décrit par les équations (5.42). L'analyse de stabilité se ramène alors à celle d'un (ou plusieurs) point fixes qui est (sont) obtenu(s) en résolvant le système d'équations :

$$\begin{pmatrix} 0 & = & [\beta \Delta T_{1\infty} + (1 - \beta) \Delta T_{2\infty} - 1] a_\infty \\ 0 & = & \epsilon [\mathbf{q} - (3\alpha_1 + (2\alpha_2 + \alpha_3) a_\infty^2) \Delta T_{1\infty} + (\alpha_1 + \alpha_3 a_\infty^2) \Delta T_{2\infty}] \\ 0 & = & \epsilon (\alpha_1 + \alpha_3 a_\infty^2) (\Delta T_{1\infty} - \Delta T_{2\infty}) \end{pmatrix}. \quad (5.48)$$

À l'instar de ce qui a été fait précédemment, une petite perturbation est introduite dans le jeu d'équations décrivant l'oscillateur, en régime établi :

$$a = a_\infty + a', \quad (5.49)$$

$$\Delta T_{1,2} = \Delta T_{1,2\infty} + \Delta T'_{1,2}, \quad (5.50)$$

et, après linéarisation, il vient le problème aux valeurs propres :

$$\left( \begin{array}{l} \lambda a' = [\beta \Delta T_{1_\infty} + (1 - \beta) \Delta T_{2_\infty} - 1] \frac{a'}{2} + \beta \frac{a_\infty}{2} \Delta T'_1 + (1 - \beta) \frac{a_\infty}{2} \Delta T'_2, \\ \lambda \Delta T'_1 = -\epsilon [3\alpha_1 + (2\alpha_2 + \alpha_3) a_\infty^2] \Delta T'_1 + \epsilon (\alpha_1 + \alpha_3 a_\infty^2) \Delta T'_2 \\ \quad - 2\epsilon [(2\alpha_2 + \alpha_3) a_\infty \Delta T_{1_\infty} - \alpha_3 a_\infty \Delta T_{2_\infty}] a', \\ \lambda \Delta T'_2 = \epsilon (\alpha_1 + \alpha_3 a_\infty^2) (\Delta T'_1 - \Delta T'_2) + 2\epsilon \alpha_3 a_\infty (\Delta T_{1_\infty} - \Delta T_{2_\infty}) a. \end{array} \right) \quad (5.51)$$

**Solution triviale** Le problème aux valeurs propres se ramène, dans le cas de la solution triviale, à :

$$\left( \begin{array}{l} \lambda a' = \frac{1}{2} \left[ \frac{\mathfrak{q}}{2\alpha_1} - 1 \right] a', \\ \lambda \Delta T'_1 = -3\epsilon \alpha_1 \Delta T'_1 + \epsilon \alpha_1 \Delta T'_2, \\ \lambda \Delta T'_2 = \epsilon \alpha_1 (\Delta T'_1 - \Delta T'_2), \end{array} \right) \quad (5.52)$$

et les valeurs propres :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\mathfrak{q}}{4\alpha_1} - \frac{1}{2}, \\ \lambda_{2,3} &= [-2 \pm \sqrt{2}] \epsilon \alpha_1, \end{aligned}$$

sont alors obtenues. Or, les paramètres  $\alpha_1$  et  $\epsilon$  sont supposés positifs. Pour cette raison, la condition pour laquelle la solution triviale devient instable, c'est-à-dire la condition de déclenchement, s'écrit  $\mathfrak{q} > 2\alpha_1$ ,  $\Re(\lambda_{2,3})$  étant toujours négatives.

**Solution(s) non triviale(s)** Pour le cas de la solution triviale, le problème aux valeurs propres se ramène à :

$$\left( \begin{array}{l} \lambda a' = \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{\mathfrak{q} - 2\alpha_1}{2\alpha_2}} \Delta T'_1 + \frac{(1 - \beta)}{2} \sqrt{\frac{\mathfrak{q} - 2\alpha_1}{2\alpha_2}} \Delta T'_2 \\ \lambda \Delta T'_1 = -\epsilon \left[ 3\alpha_1 + (2\alpha_2 + \alpha_3) \frac{\mathfrak{q} - 2\alpha_1}{2\alpha_2} \right] \Delta T'_1 + \epsilon \left( \alpha_1 + \alpha_3 \frac{\mathfrak{q} - 2\alpha_1}{2\alpha_2} \right) \Delta T'_2 \\ \quad - 2\epsilon \left( 2\alpha_2 \sqrt{\frac{\mathfrak{q} - 2\alpha_1}{2\alpha_2}} \right) a' \\ \lambda \Delta T'_2 = \epsilon \left( \alpha_1 + \alpha_3 \sqrt{\frac{\mathfrak{q} - 2\alpha_1}{2\alpha_2}} \right) (\Delta T'_1 - \Delta T'_2) \end{array} \right), \quad (5.53)$$

et les trois valeurs propres  $\lambda_i$  sont recherchées ici numériquement. Les différents paramètres du modèle sont réglés aux valeurs choisies pour tracer les régimes transitoires représentés sur la figure 5.7 avec :  $\epsilon = 0.25$ ,  $\alpha_1 = 0.01$ ,  $\alpha_2 = 0.001$ ,  $\alpha_3 = 0.0025$  et  $\beta = 0.3$ . La figure 5.9 représente les parties réelle et imaginaire de chacune des valeurs propres en fonction du paramètre  $\mathfrak{q}$ . Dans ces trois valeurs propres, l'une est purement réelle et les deux autres sont complexes et conjuguées.

La solution non triviale est instable (les valeurs réelles de  $\lambda_{1,2}$  étant positives) pour de faibles valeurs du chauffage  $\mathfrak{q}$ , et elle devient stable au delà d'un seuil de chauffage  $\mathfrak{q} \sim 0.335$  pour lequel les parties réelles de toutes les valeurs propres deviennent positives. Ce résultat est conforme aux observations de la figure 5.7

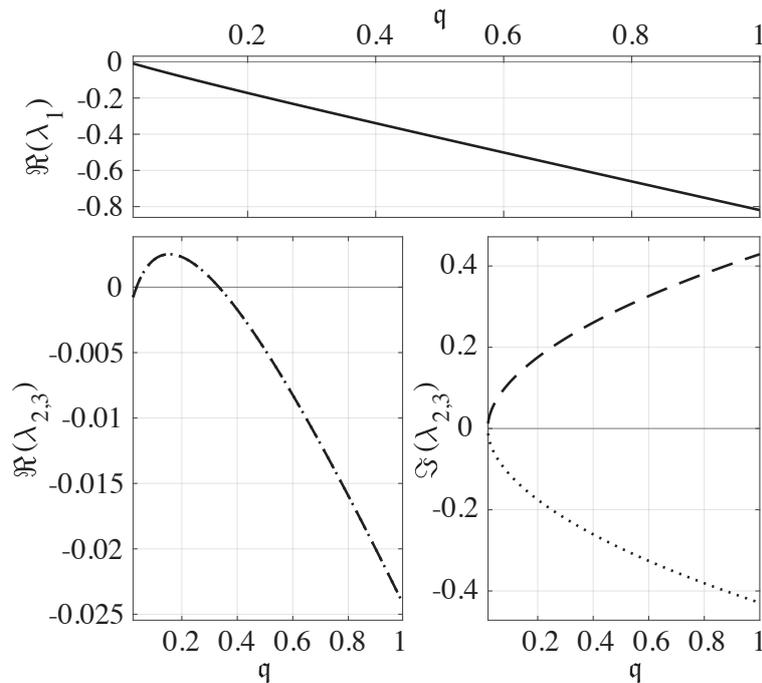


FIGURE 5.9 – Valeurs propres  $\lambda_i$  issues de la résolution du système d'équation (5.53), pour  $\epsilon = 0.25$ ,  $\alpha_1 = 0.01$ ,  $\alpha_2 = 0.001$ ,  $\alpha_3 = 0.0025$  et  $\beta = 0.3$  en fonction de  $q$ . La valeur propre  $\lambda_1$  est purement réelle et négative, tandis que  $\lambda_{2,3}$  sont complexes (conjuguées l'une par rapport à l'autre).

issues d'une résolution numérique directe du système d'équations.

Il convient de noter que la perte de stabilité de la solution non-triviale dépend du choix des paramètres  $\beta$ ,  $\epsilon$  et  $\alpha_{2,3}$  du modèle. Par exemple, le signe de  $\Re(\lambda_{2,3})$  est cartographié en faisant varier la valeur de  $\alpha_2$ . Le résultat est donné sur la figure 5.10. La zone grisée représente les valeurs de  $\Re(\lambda_{2,3})$  positive, menant donc à un point fixe instable. Cette cartographie montre que pour certaines valeurs de  $\alpha_2$ , le signe de  $\Re(\lambda_{2,3})$  est forcément négatif. Cela implique que ces valeurs de  $\alpha_2$  ne peuvent pas mener à l'établissement d'un régime établi instable, sans considération sur la valeur du "chauffage"  $q$ . Ce constat explique en particulier pourquoi l'oscillateur de Van Der Pol modifié décrit au paragraphe 5.1, par l'équation (5.1), ne peut pas donner lieu à un cycle limite instable.

Il convient de rappeler que le paragraphe 5.2 dresse un parallèle (sans justification formelle) entre l'oscillateur modèle étudié ici et un moteur thermoacoustique. Les paramètres  $\beta$ ,  $\epsilon$  et  $\alpha_{2,3}$  peuvent être interprétés de la manière suivante :

- le paramètre  $\beta$  représenterait l'impact de la forme du champ de température dans le stack sur l'amplification thermoacoustique ;
- le paramètre  $\epsilon$  représenterait le ratio entre le temps caractéristique lié à l'amplification des oscillations et celui caractérisant la rapidité de variation du champ de température ;
- les paramètres  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  représenteraient la conductivité thermique acoustiquement induite, respectivement dans le stack et à l'extrémité chaude du stack. Ainsi, une valeur de  $\alpha_3$  différente de celle de

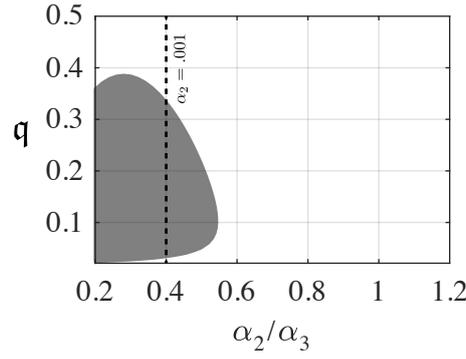


FIGURE 5.10 – Signe de  $\Re(\lambda_{2,3})$  selon  $q$  et le rapport  $\alpha_2/\alpha_3$ . La zone grisée représente un signe de  $\Re(\lambda_{2,3})$  positif, signifiant que les points fixes situés dans cette zone sont instables. Il n'est pas possible d'obtenir une valeur positive de  $\Re(\lambda_{2,3})$  lorsque  $\alpha_2 = \alpha_3$ , dans la gamme de  $q$  d'étude.

$\alpha_2$  stipulerait que le mécanisme de transport advectif de chaleur par les oscillations acoustiques est différent à l'extrémité du stack de ce qu'il est à l'intérieur du stack, du fait par exemple de l'impact des effets de bord.

Reste que les propos ci-dessus ne sont que des spéculations dans la mesure où le parallèle dressé entre cet oscillateur modèle et le moteur thermoacoustique ne repose sur aucune base formellement *solide*.

L'analyse de stabilité linéaire menée sur le système permet bien de déterminer la stabilité, ou l'instabilité, d'un régime stationnaire obtenu à partir d'un jeu de paramètres connus.

### 5.3.2 Technique de la describing function

Le même oscillateur est à présent traité sous l'angle des describing functions. À partir du jeu d'équations (5.42) écrit légèrement différemment :

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + x + \mu y(x, \dot{x}) = 0 \quad (5.54)$$

$$\Delta T_1 = \xi \left[ q - \left( 3\alpha_1 + (2\alpha_2 + \alpha_3) \overline{x^2} \right) \Delta T_1 + \left( \alpha_1 + \alpha_3 \overline{x^2} \right) \Delta T_2 \right], \quad (5.55)$$

$$\Delta T_2 = \xi \left( \alpha_1 + \alpha_3 \overline{x^2} \right) (\Delta T_1 - \Delta T_2). \quad (5.56)$$

où la fonction non linéaire  $y$  s'écrit :

$$y(x, \dot{x}) = -[\beta \Delta T_1(x) + (1 - \beta) \Delta T_2(x)] \dot{x} \quad (5.57)$$

La façon de procéder sur l'auto-oscillateur précédent est moins aisée à appliquer dans le cadre de la technique de la describing function, car le système présente une non-linéarité dynamique implicite, ou plus précisément deux non-linéarités implicites. En posant  $y(x, \dot{x}) = y_1(x, \dot{x}) + y_2(x, \dot{x})$  avec  $y_1(x, \dot{x}) = -\beta \Delta T_1(x) \dot{x}$  et

$y_2(x, \dot{x}) = -(1 - \beta)\Delta T_2(x)\dot{x}$ , puis en dérivant l'expression de  $y_1$  il vient :

$$\dot{y}_1 = -\beta\Delta\dot{T}_1\dot{x} - \beta\Delta T_1\ddot{x}, \quad (5.58)$$

$$= -\beta\Delta\dot{T}_1\dot{x} - \beta\Delta T_1(-x + \text{termes d'ordre } \mu), \quad (5.59)$$

$$\approx -\beta\Delta\dot{T}_1\dot{x} + \beta\Delta T_1x, \quad (5.60)$$

$$\approx -\beta\xi \left[ \mathfrak{q} - \left( 3\alpha_1 + (2\alpha_2 + \alpha_3)\overline{x^2} \right) \Delta T_1 + \left( \alpha_1 + \alpha_3\overline{x^2} \right) \Delta T_2 \right] \dot{x} + \beta\Delta T_1x, \quad (5.61)$$

et en reportant  $\Delta T_1 = -y_1/(\beta\dot{x})$  et  $\Delta T_2 = -y_2/[(1 - \beta)\dot{x}]$  dans cette dernière équation, il vient :

$$\dot{y}_1\dot{x} + y_1x + h_1y_1\dot{x} + h_2y_2\dot{x} + \beta\xi\mathfrak{q}\dot{x}^2 \approx 0 \quad (5.62)$$

avec

$$h_1 = \xi \left( 3\alpha_1 + (2\alpha_2 + \alpha_3)\overline{x^2} \right), \quad (5.63)$$

$$h_2 = -\frac{\beta\xi}{1 - \beta} \left( \alpha_1 + \alpha_3\overline{x^2} \right). \quad (5.64)$$

En opérant de même sur l'équation  $y_2 = -(1 - \beta)\Delta T_2\dot{x}$ , on obtient :

$$\dot{y}_2\dot{x} + y_2x + h_3y_1\dot{x} + h_4y_2\dot{x} \approx 0, \quad (5.65)$$

avec

$$h_3 = -\frac{1 - \beta}{\beta}\xi \left( \alpha_1 + \alpha_3\overline{x^2} \right), \quad (5.66)$$

$$h_4 = \xi \left( \alpha_1 + \alpha_3\overline{x^2} \right). \quad (5.67)$$

En posant ensuite  $x(t) = a \sin \omega t$ ,  $y_1(t) = Y_1 \sin(\omega t + \theta_1)$  et  $y_2(t) = Y_2 \sin(\omega t + \theta_2)$ , ces expressions sont introduites dans les deux équations (5.62) et (5.65), de sorte qu'après identification des termes statiques et des termes oscillant en  $\sin 2\omega t$  et  $\cos 2\omega t$  il vient le jeu de six équations (non linéaires) :

$$\left( \begin{array}{l} Y_1 [(1 + \omega^2) \cos \theta_1 + h_1\omega \sin \theta_1] + Y_2 h_2\omega \sin \theta_2 = -\xi\beta\mathfrak{q}\omega^2 a \\ Y_1 [(1 - \omega^2) \cos \theta_1 + h_1\omega \sin \theta_1] + Y_2 h_2\omega \sin \theta_2 = -\xi\beta\mathfrak{q}\omega^2 a \\ Y_1 h_3\omega \sin \theta_1 + Y_2 [(1 + \omega^2) \cos \theta_2 + h_4\omega \sin \theta_2] = 0 \\ Y_1 h_3\omega \sin \theta_1 + Y_2 [(1 - \omega^2) \cos \theta_2 + h_4\omega \sin \theta_2] = 0 \\ Y_1 [(1 - \omega^2) \sin \theta_1 + h_1\omega \cos \theta_1] + h_2 Y_2 \omega \cos \theta_2 = 0 \\ Y_1 h_3\omega \cos \theta_1 + Y_2 [(1 - \omega^2) \sin \theta_2 + h_4\omega \cos \theta_2] = 0 \end{array} \right), \quad (5.68)$$

avec

$$h_1 = \xi (3\alpha_1 + (2\alpha_2 + \alpha_3) a^2), \quad (5.69)$$

$$h_2 = -\frac{\beta\xi}{1-\beta} (\alpha_1 + \alpha_3 a^2), \quad (5.70)$$

$$h_3 = -\frac{1-\beta}{\beta} \xi (\alpha_1 + \alpha_3 a^2), \quad (5.71)$$

$$h_4 = \xi (\alpha_1 + \alpha_3 a^2). \quad (5.72)$$

Retrancher les deux premières équations du système (5.68) mène à  $2\omega^2 Y_1 \cos \theta_1 = 0$ , et donc à :  $\cos \theta_1 = 0$  et  $\sin \theta_1 = 1$ . En retranchant la troisième et la quatrième équations, il vient  $\cos \theta_2 = 0$  et  $\sin \theta_2 = 1$ . En reportant ce résultat dans les deux dernières équations, cela impose que  $(1 - \omega^2) = 0$  et donc  $\omega = 1$ . Par suite, le report de ces résultats dans la première et la troisième équations mènent à :

$$h_1 Y_1 + h_2 Y_2 = -\xi \beta \mathbf{q} a, \quad (5.73)$$

$$h_3 Y_1 + h_4 Y_2 = 0, \quad (5.74)$$

et donc à la détermination de  $Y_1$  et  $Y_2$  :

$$Y_1 = -\frac{\xi \beta h_4 \mathbf{q} a}{h_1 h_4 - h_2 h_3}, \quad (5.75)$$

$$Y_2 = \frac{\xi \beta h_3 \mathbf{q} a}{h_1 h_4 - h_2 h_3}. \quad (5.76)$$

L'équation caractéristique de l'oscillateur s'écrit finalement :

$$[(j\omega)^2 + (j\omega)\mu + 1] a + \mu [Y_1 e^{j\theta_1} + Y_2 e^{j\theta_2}] = 0, \quad (5.77)$$

avec  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ , soit encore

$$[(j\omega)^2 + (j\omega)\mu + 1] + j\xi\mu\beta\mathbf{q} \frac{h_3 - h_4}{h_1 h_4 - h_2 h_3} = 0, \quad (5.78)$$

soit encore

$$1 + \mathcal{L}(j\omega)\mathcal{N}(a, w) = 0, \quad (5.79)$$

avec

$$\mathcal{L}(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + (j\omega)\mu + 1}, \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(a, w) = \mathcal{N}(a) &= j\xi\mu\beta\mathbf{q} \times \frac{h_3 - h_4}{h_1 h_4 - h_2 h_3}, \\ &= -j\mu \frac{\mathbf{q}}{2} \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 a^2}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Pour obtenir les cycles limites, il faut trouver un ou plusieurs couples de solutions  $(\omega_\infty, a_\infty)$  tels que

$$1 + \mathcal{L}(j\omega)\mathcal{N}(a, \omega) = 0, \quad (5.82)$$

où  $\omega_\infty$  est réel et  $a_\infty$  est positif. Cette équation caractéristique s'écrit également :

$$[(j\omega)^2 + (j\omega)\mu + 1] (\alpha_1 + \alpha_2 a^2) - j\mu \frac{\mathfrak{q}}{2} = 0. \quad (5.83)$$

**Solution triviale** Une fois la solution triviale  $a_\infty = 0$  reportée dans l'équation caractéristique (5.83), il vient :

$$[(j\omega)^2 + (j\omega)\mu + 1] \alpha_1 - j\mu \frac{\mathfrak{q}}{2} = 0, \quad (5.84)$$

Ainsi, les deux conditions :

$$\omega = 1, \quad (5.85)$$

$$\mathfrak{q} = 2\alpha_1. \quad (5.86)$$

sont obtenues, et mènent à la conclusion que la solution triviale impose une valeur de  $\mathfrak{q}$  égale (et pas seulement inférieure) à  $2\alpha_1$ .

**Solution non triviale** La solution non triviale doit satisfaire l'équation :

$$[(j\omega_\infty)^2 + (j\omega_\infty)\mu + 1] (\alpha_1 + \alpha_2 a_\infty^2) - j\mu \frac{\mathfrak{q}}{2} = 0. \quad (5.87)$$

Chercher à annuler la partie réelle impose  $\omega_\infty = 1$ , et pour annuler la partie imaginaire, il faut que :

$$(\alpha_1 + \alpha_2 a_\infty^2) = \frac{\mathfrak{q}}{2}, \quad (5.88)$$

soit encore

$$a_\infty^2 = \frac{\mathfrak{q} - 2\alpha_1}{2\alpha_2}, \quad (5.89)$$

ce qui est conforme à la solution obtenue au paragraphe précédent avec une autre approche.

Le système étant désormais caractérisé sous l'angle de sa partie linéaire et de sa describing function, la solution non-triviale étant désormais connue, l'analyse de la stabilité de cette solution peut se faire au moyen du critère de Loeb. Sur la figure 5.11, le module et la phase de  $\mathcal{L}(\omega)$  et  $1/\mathcal{N}(a)$  sont tracés pour  $\mu = 0.01$ ,  $\epsilon = 0.25$ ,  $\alpha_1 = 0.01$ ,  $\alpha_2 = 0.001$ ,  $\alpha_3 = 0.0025$  et  $\beta = 0.3$ , et pour  $\mathfrak{q} = 1$ . Dans ces conditions la solution non-triviale est stable avec  $\omega_\infty = 1$  et  $a_\infty \approx 22$  et c'est effectivement bien ce qu'on peut vérifier.

La représentation dans le plan Module-Phase de  $\mathcal{L}(\omega)$  et  $1/\mathcal{N}(a)$  pour  $\mu = 0.01$ ,  $\epsilon = 0.25$ ,  $\alpha_1 = 0.01$ ,  $\alpha_2 = 0.001$ ,  $\alpha_3 = 0.0025$  et  $\beta = 0.3$ , mais pour  $\mathfrak{q} = 0.25$ , est donnée sur la figure 5.12. Dans ces conditions la

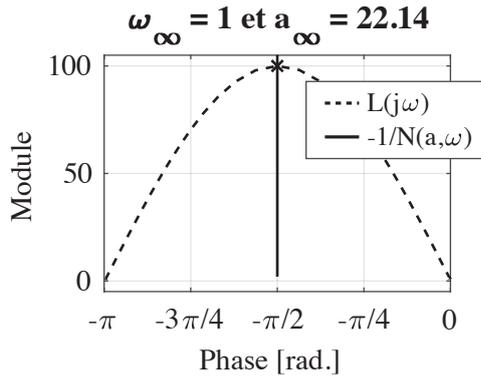


FIGURE 5.11 – Représentation Module-Phase des fonctions  $\mathcal{L}$  en fonction de la pulsation  $\omega$  et  $-1/\mathcal{N}$  en fonction de  $a$ , pour une chauffage  $q = 1$ . Les paramètres de l'oscillateurs sont fixés à :  $\epsilon = 0.25$ ,  $\alpha_1 = 0.01$ ,  $\alpha_2 = 0.001$ ,  $\alpha_3 = 0.0025$  et  $\beta = 0.3$ . Un point fixe est prédit pour une pulsation  $\omega_\infty = 1$  et une amplitude  $a_\infty \approx 22$ . Le point fixe est stable selon le critère de Loeb, ce qui s'accorde avec la résolution directe, dont le résultat est donnée sur la figure 5.7b.

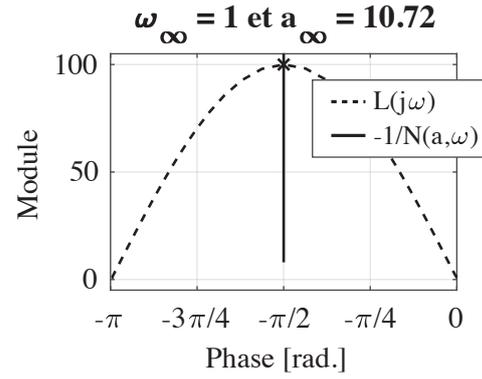


FIGURE 5.12 – Représentation Module-Phase des fonctions  $\mathcal{L}$  en fonction de la pulsation  $\omega$  et  $-1/\mathcal{N}$  en fonction de  $a$ , pour une chauffage  $q = 0.25$ . Les paramètres de l'oscillateur sont fixés à :  $\epsilon = 0.25$ ,  $\alpha_1 = 0.01$ ,  $\alpha_2 = 0.001$ ,  $\alpha_3 = 0.0025$  et  $\beta = 0.3$ . Un point fixe est prédit pour une pulsation  $\omega_\infty = 1$  et une amplitude  $a_\infty \approx 11$ . Le point fixe est stable selon le critère de Loeb, ce qui ne s'accorde pas avec la résolution directe, dont le résultat est donnée sur la figure 5.7a.

solution non-triviale est instable, comme le montre le résultat de la résolution numérique directe sur la figure 5.7a. La représentation Module-Phase sur la figure 5.12 montre l'existence d'un point fixe pour  $\omega_\infty = 1$  et  $a_\infty \approx 11$ , cependant rien n'indique que cette solution est instable, elle est même stable suivant le critère de Loeb.

### 5.3.3 Conclusion

Les résultats obtenus avec l'oscillateur décrit par le jeu d'équations (5.42) amènent à conclure que la méthode de la *describing function*, telle qu'appliquée ici, ne permet de prédire correctement la stabilité de la solution non triviale. Ce résultat n'est pas étonnant car les paramètres  $\xi$ ,  $\beta$  et  $\alpha_3$  n'interviennent pas dans la définition de la describing function, alors même que la méthode classique montre que  $\xi$  (ou bien  $\epsilon = \xi/\mu$ ),  $\beta$  et  $\alpha_3$ , sont les paramètres qui déterminent la stabilité de la solution stationnaire. En conclusion, il résulte de l'étude de l'oscillateur modèle proposé ici que le critère de Loeb, qui présente l'intérêt d'être directement évaluable sur la base des mesures de  $Z_{load}$  et  $Z_{tac}$ , peut cependant échouer à indiquer correctement la stabilité d'un cycle limite. Ce résultat est cohérent avec les résultats du paragraphe 5.1.3 qui indiquent que l'analyse de stabilité de l'oscillateur thermoacoustique ne semble pas pouvoir être menée sur la seule base de mesures réalisées en régime thermique établi.

## 5.4 Méthode expérimentale pour l'étude de stabilité des Cycles Limites

Cette dernière partie permet de proposer un lien entre la méthode de mesure de l'impédance d'entrée d'un noyau thermoacoustique, telle que décrite au chapitre 2, et l'oscillateur modèle étudié dans ce chapitre 5, au cours des paragraphes précédents. Dans un premier paragraphe, le système dynamique (tel que décrit dans les précédents paragraphes) est étudié sous l'angle d'une méthode de raccordement des impédances. L'objet de cette dernière partie est surtout de montrer qu'il serait possible, en théorie, d'étudier expérimentalement la stabilité d'un moteur thermoacoustique via la détermination des impédances du noyau thermoacoustique  $Z_{tac}$  et de la charge  $Z_{load}$  en régime établi, ainsi que de quelques mesures de  $Z_{tac}$  en régime transitoire (suite à un incrément de pression par exemple).

### 5.4.1 Oscillateur relaxant vu sous l'angle $Z_{load} + Z_{tac}$

Les équations de l'auto-oscillateur relaxant sont réécrites de façon générale sous la forme :

$$\left( \begin{array}{l} \mathcal{M}\ddot{x} + \mathcal{R}(\Delta T_1, \Delta T_2)\dot{x} + \mathcal{K}x = 0, \\ \Delta \dot{T}_1 = \xi \left[ \mathfrak{q} - \left( 3\alpha_1 + (2\alpha_2 + \alpha_3)\overline{x^2} \right) \Delta T_1 + \left( \alpha_1 + \alpha_3\overline{x^2} \right) \Delta T_2 \right], \\ \Delta \dot{T}_2 = \xi \left( \alpha_1 + \alpha_3\overline{x^2} \right) (\Delta T_1 - \Delta T_2), \end{array} \right) \quad (5.90)$$

c'est à dire en faisant directement apparaître les éléments d'un oscillateur mécanique (masse  $\mathcal{M} = 1$ , raideur  $\mathcal{K} = 1$ ) présentant un amortissement  $\mathcal{R}$  éventuellement négatif, et dépendant du chauffage  $\mathfrak{q}$  et des amplitudes moyennes d'oscillations  $\overline{x^2}$  via leur impact sur la distribution de température, représentée par les fonctions  $\Delta T_1$  et  $\Delta T_2$ . Ainsi, pour dresser un parallèle avec l'approche de raccordement d'impédance envisagée pour traiter l'oscillateur thermoacoustique, ce système modèle est vu sous l'angle d'un problème de raccordement d'une impédance de charge  $Z_{load}$  qui correspondrait à la composante inertielle du résonateur, c'est-à-dire à  $Z_{load}(\omega) \equiv j\mathcal{M}\omega$ , et d'une impédance motrice (et réactive)  $Z_{mot} \equiv \mathcal{R}(\Delta T_1, \Delta T_2) + \mathcal{K}/(j\omega)$ .

Dans ce cadre, une fois l'amplitude crête des oscillations  $X = \sqrt{2\overline{x^2}}$  introduite, faire une mesure de  $Z_{mot}(\omega, X)$  reviendrait à retirer la masse et à appliquer un forçage d'amplitude contrôlable  $F_0$ , et le problème s'écrit alors (dans le domaine temporel) :

$$\left( \begin{array}{l} \mathcal{R}(\Delta T_1, \Delta T_2)\dot{x} + \mathcal{K}x = F_0 \cos(\omega t) \\ \Delta \dot{T}_1 = \xi \left[ \mathfrak{q} - \left( 3\alpha_1 + (2\alpha_2 + \alpha_3)\overline{x^2} \right) \Delta T_1 + \left( \alpha_1 + \alpha_3\overline{x^2} \right) \Delta T_2 \right], \\ \Delta \dot{T}_2 = \xi \left( \alpha_1 + \alpha_3\overline{x^2} \right) (\Delta T_1 - \Delta T_2). \end{array} \right) \quad (5.91)$$

Si l'amortissement  $\mathcal{R}$  est supposé faible ( $\mu \ll 1$ ) et *lentement* variable (sous l'effet de  $\Delta T_1$  et  $\Delta T_2$ ) alors il paraît raisonnable de déterminer une solution approchée pour  $x(t)$  en considérant  $\mathcal{R}$  par résolution de

l'équation

$$\mathcal{R}\dot{p} + \mathcal{K}p = F_0 \cos \omega t, \quad (5.92)$$

dont la solution s'écrit comme la somme de la solution de l'équation homogène  $x_{EH}(t) \propto e^{-t/R}$ , négligeable dès lors que  $\mathcal{R} \ll 1$  et de la solution particulière

$$x_{SP}(t) = \frac{F_0}{\mathcal{K}} \frac{1}{\sqrt{1 + \mathcal{R}^2}} \cos(\omega t + \phi), \quad (5.93)$$

avec  $\phi = \arctan(\mathcal{R})$ . Ainsi, sous l'effet d'un forçage d'amplitude contrôlée  $F_0$ , les oscillations  $x(t, \xi t)$  peuvent s'écrire :

$$x(t, \xi t) = \frac{F_0}{\mathcal{K}} \frac{\cos[\omega t + \arctan(\mu [1 - \beta \Delta T_1(\xi t) - (1 - \beta) \Delta T_2(\xi t)])]}{\sqrt{1 + \mu^2 [1 - \beta \Delta T_1(\xi t) - (1 - \beta) \Delta T_2(\xi t)]^2}} \approx x(t) = \frac{F_0}{\mathcal{K}} \cos \omega t \quad (5.94)$$

compte-tenu que  $\mu \ll 1$ . L'évolution des termes d'amortissement  $\mathcal{R}(\xi t)$  et de phase  $\phi(\xi t)$  peuvent être déduits du jeu d'équations régissant  $\Delta T_{1,2}(\xi t)$  et dans lesquels il paraît raisonnable (compte-tenu que  $\mu \ll 1$ ) de remplacer  $\bar{x}^2$  par  $\bar{x}^2 \approx (F_0/\mathcal{K})^2/2$ . Si la mesure de  $Z_{mot.}(\omega, X)$  devait être réalisée en régime thermique établi, c'est-à-dire pour  $\xi t \rightarrow \infty$ , alors :

$$Z_{mot.}(\mathbf{q}, \omega, X) = \mathcal{R}(\Delta T_{1\infty}, \Delta T_{2\infty}) + \mathcal{K}/(j\omega) \quad (5.95)$$

où les écarts de température stationnaires  $\Delta T_{1\infty}(\mathbf{q}, X)$  et  $\Delta T_{2\infty}(\mathbf{q}, X)$  sont obtenus par résolution du système linéaire :

$$\left[ \mathbf{q} - \left( 3\alpha_1 + (2\alpha_2 + \alpha_3) \frac{X^2}{2} \right) \Delta T_{1\infty} + \left( \alpha_1 + \alpha_3 \frac{X^2}{2} \right) \Delta T_{2\infty} \right] = 0, \quad (5.96)$$

$$\left( \alpha_1 + \alpha_3 \frac{X^2}{2} \right) (\Delta T_{1\infty} - \Delta T_{2\infty}) = 0. \quad (5.97)$$

Cependant, une telle mesure ferait perdre l'information du transitoire, avec les conséquences vues concernant la détermination de la stabilité du cycle limite. Ainsi, l'objectif serait de déterminer, à partir d'une mesure d'impédance en régime transitoire  $Z_{mot.} = Z_{mot.}(\mathbf{q}, \omega, X(\xi t))$ , la loi d'évolution (lente) du paramètre d'amortissement  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbf{q}, X(\xi t))$  pour pouvoir remonter aux équations régissant notre système. Dans le cas de l'oscillateur modèle considéré ici, il est possible de connaître cette loi d'évolution sous forme d'une équation différentielle du second ordre dont les coefficients dépendent du chauffage  $\mathbf{q}$  et de l'amplitude  $X^2$ . En effet, partant de l'expression

$$\mathcal{R} = \mu [1 - \beta \Delta T_1 - (1 - \beta) \Delta T_2] \quad (5.98)$$

dérivée une première fois (et en utilisant les expressions de  $\dot{\Delta T}_1$  et  $\dot{\Delta T}_2$ ), il vient :

$$\dot{\mathcal{R}} = -\beta \mu \xi \mathbf{q} + \xi \mu \Delta T_1 f_1(X^2) + \xi \mu \Delta T_2 f_2(X^2), \quad (5.99)$$

avec

$$f_1(X^2) = \beta \left[ 3\alpha_1 + (2\alpha_2 + \alpha_3) \frac{X^2}{2} \right] - (1 - \beta) \left( \alpha_1 + \alpha_3 \frac{X^2}{2} \right), \quad (5.100)$$

$$f_2(X^2) = (1 - 2\beta) \left( \alpha_1 + \alpha_3 \frac{X^2}{2} \right). \quad (5.101)$$

En dérivant une seconde fois (et en utilisant encore les expressions de  $\Delta\dot{T}_1$  et  $\Delta\dot{T}_2$ ), il vient :

$$\ddot{\mathcal{R}} = \xi^2 \mu f_1(X^2) \mathbf{q} + \xi^2 \mu \Delta T_1 g_1(X^2) + \xi^2 \mu \Delta T_2 g_2(X^2), \quad (5.102)$$

avec

$$g_1(X^2) = -f_1(X^2) \left[ 3\alpha_1 + (2\alpha_2 + \alpha_3) \frac{X^2}{2} \right] + f_2(X^2) \left( \alpha_1 + \alpha_3 \frac{X^2}{2} \right), \quad (5.103)$$

$$g_2(X^2) = \left( \alpha_1 + \alpha_3 \frac{X^2}{2} \right) (f_1(X^2) - f_2(X^2)). \quad (5.104)$$

Enfin, en utilisant les équations (5.98) et (5.99) pour exprimer  $\Delta T_1$  et  $\Delta T_2$  en fonction de  $\mathcal{R}$  et  $\dot{\mathcal{R}}$ , une équation différentielle du second ordre dont les coefficients dépendent du forçage  $F_0$  (ou de façon quasi équivalente de l'amplitude des oscillations  $X$ ) est obtenue pour  $\mathcal{R}$  :

$$\ddot{\mathcal{R}} + h_2(X^2) \dot{\mathcal{R}} + h_1(X^2) \mathcal{R} = h_0(\mathbf{q}, X^2), \quad (5.105)$$

avec

$$h_0(\mathbf{q}, X^2) = \mu \xi^2 \left[ f_1(X^2) \mathbf{q} + d \frac{g_1(X^2)(\beta(1 - \beta) \mathbf{q} - f_2(X^2)) + g_2(X^2)(f_1(X^2) - \beta^2 \mathbf{q})}{(1 - \beta) f_1(X^2) - \beta f_2(X^2)} \right], \quad (5.106)$$

$$h_1(X^2) = -\xi^2 \frac{g_1(X^2) f_2(X^2) - g_2(X^2) f_1(X^2)}{(1 - \beta) f_1(X^2) - \beta f_2(X^2)}, \quad (5.107)$$

$$h_2(X^2) = -\xi \frac{g_1(X^2)(1 - \beta) - \beta g_2(X^2)}{(1 - \beta) f_1(X^2) - \beta f_2(X^2)}. \quad (5.108)$$

Ainsi, pour un forçage  $F_0 = \mathcal{K}X$  imposé ainsi qu'un chauffage imposé, la partie réelle de l'impédance  $Z_{mot}$ . suit un régime transitoire régi par l'équation (5.105), c'est à dire ici une équation différentielle du second ordre à coefficients constants<sup>6</sup>.

En résumé, si l'oscillateur modèle devait être considéré comme étant un véritable oscillateur, et qu'il était possible de le séparer en deux pour mesurer une impédance de charge  $Z_{load} = j\mathcal{M}\omega$  et une impédance "motrice"  $Z_{mot}(\mathbf{q}, X, \omega) = \mathcal{R}(\mathbf{q}, X) + \frac{\mathcal{K}}{j\omega}$ , le problème posé serait similaire au problème thermoacoustique

6. dont la solution s'écrit :

$$R(t) = \frac{h_0(\mathbf{q}, X^2)}{h_1(X^2)} + C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \quad (5.109)$$

sous réserve que le discriminant  $\Delta = h_2^2 - 4h_1$  soit positif, avec  $\alpha_{1,2} = \frac{-h_2 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$  et où les constantes  $C_{1,2}$  dépendent des conditions initiales ... et si  $\Delta < 0$  alors le régime obtenu est pseudo-oscillant

posé ici. Par conséquent, si la mesure de  $Z_{mot}$  n'est effectuée qu'en régime thermique établi, alors il n'est pas possible de conclure quant à la stabilité du point fixe, prédit par la condition de raccordement des impédances  $Z_{load} + Z_{mot} = 0$ . En revanche, si la mesure d'impédance peut être réalisée à différents instants  $t_i$  au cours du transitoire, c'est-à-dire que :

$$Z_{mot}(\mathbf{q}, X, \omega, t_i) = \mathcal{R}(t_i, \mathbf{q}, X) + \frac{\mathcal{K}}{j\omega}, \quad (5.110)$$

alors il devient possible de déterminer, à partir des échantillons mesurés  $\mathcal{R}(t_i)$ , pour une puissance de chauffage  $\mathbf{q}$  et une amplitude  $X$  fixées, une loi d'évolution (lente en regard de la période des oscillations) de la fonction  $\mathcal{R}$ . Dans ce cas, il deviendrait envisageable d'utiliser ces mesures d'impédance pour se ramener à un système dynamique dont l'analyse puisse être réalisée conformément aux méthodes proposées dans les paragraphes précédents. Ainsi, en partant de la condition de raccordement des impédances  $j\omega\mathcal{M} + \mathcal{R} + \mathcal{K}/(j\omega)$  rapportée dans le domaine temporel :

$$\left[ \mathcal{M} \frac{d}{dt} + \mathcal{R}(\mathbf{q}, \overline{x^2}) + \mathcal{K} \int .dt \right] \dot{x} = 0 \quad (5.111)$$

soit encore

$$\mathcal{M}\ddot{x} + \mathcal{R}(\mathbf{q}, \overline{x^2})\dot{x} + \mathcal{K}x = 0 \quad (5.112)$$

et en supposant que la mesure transitoire de l'impédance  $Z_{mot}(\mathbf{q}, X, \omega, t_i)$  permet d'accéder à la loi de comportement (5.105) de la résistance  $\mathcal{R}$ , alors il devient possible de résoudre le problème en admettant que l'évolution de  $\mathcal{R}$  est lente en regard de la période oscillatoire. Dans ce cas, la solution peut s'écrire :

$$x(t) = x(T_0, T_1) = X(T_1) \cos(\omega_d(T_1)T_0 + \beta_0) \quad (5.113)$$

où le "temps court"  $T_0 \sim t$  et le "temps lent"  $T_1 \sim \xi t$  ( $\xi \ll 1$ ) sont introduits, et avec

$$X(T_1) = e^{-\xi(T_1)\omega_0 t}, \quad (5.114)$$

$$\omega_d(T_1) = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}, \quad (5.115)$$

$$\xi(T_1) = \frac{\mathcal{R}(T_1)}{2\mathcal{M}\omega_0}, \quad (5.116)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\mathcal{K}/\mathcal{M}}. \quad (5.117)$$

Dès lors, en s'intéressant essentiellement à la loi d'évolution lente de l'amplitude  $X$  (et à son couplage avec

l'amplification thermoacoustique), et en posant  $S = \dot{R}$ , il s'agit de résoudre le système dynamique suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{X} &= -\frac{\mathcal{R}}{2\mathcal{M}}X, \\ \dot{\mathcal{R}} &= \mathcal{S}, \\ \dot{S} &= -h_2(2\overline{x^2})\mathcal{S} - h_1(2\overline{x^2})\mathcal{R} + h_0(\mathbf{q}, 2\overline{x^2}), \end{pmatrix} \quad (5.118)$$

et d'en produire une analyse de stabilité comme proposé précédemment.

Aussi, l'exemple de l'oscillateur modèle traité ici indique qu'il est possible d'accéder à la dynamique lente par une mesure d'évolution de l'impédance sous l'effet d'un échelon de pression ou de chauffage. Le paragraphe suivant décrit une méthode expérimentale pour accéder au comportement des auto-oscillations.

#### 5.4.2 Méthode expérimentale pour accéder à la dynamique lentes des auto-oscillations

L'exemple de l'oscillateur modèle traité au paragraphe 5.2 ainsi que les résultats expérimentaux présentés au paragraphe 5.1.3 permettent de dégager une stratégie menant à déterminer la stabilité de cycles limites en allant au-delà du critère de Loeb, en considérant que le système étudié comporte deux échelles de temps distinctes, à savoir la période acoustique et le temps caractéristique d'amplification et/ou d'évolution du champ de température. L'exemple de l'oscillateur modèle traité auparavant indique aussi qu'il est possible d'accéder à la dynamique lente par une mesure d'évolution de l'impédance sous l'effet d'un échelon de pression ou de chauffage, et c'est ce que propose ce nouveau paragraphe. L'impédance d'un noyau thermoacoustique est notée  $Z_{tac}(Q, \omega, P)$ , et, pour une valeur  $P_i$  donnée du forçage, l'annexe C montre que cette impédance peut être écrite sous la forme d'une fonction rationnelle d'ordre  $M_1$  au numérateur et d'ordre  $M_2$  au dénominateur :

$$Z_{tac}(Q, \omega, P) = \frac{\sum_{m_1=0}^{M_1} a_{m_1}^{(\infty)}(P(Q)) \times (j\omega)^{m_1}}{\sum_{m_2=0}^{M_2} b_{m_2}^{(\infty)}(P(Q)) \times (j\omega)^{m_2}}. \quad (5.119)$$

L'exposant  $(\infty)$  sur les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  est utilisé pour spécifier que ces coefficients ne sont pas des fonctions du temps, mais les valeurs atteintes après stabilisation du champ de température. L'annexe C détaille le fonctionnement et l'utilisation faite de la fonction *tfest* de l'environnement MatLab® permettant de retrouver les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  à partir de données mesurées. Dans la mesure où la valeur de la puissance de chauffage  $Q$  est ici supposée fixe, les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  ne sont donc pas considérés comme des fonctions du chauffage. Pour cette raison, les coefficients sont simplement notés  $a_n(P_i, Q) = a_n(P_i)$  et  $b_n(P_i, Q) = b_n(P_i)$  par la suite. Il est alors possible de retrouver une loi polynomiale pour ces coefficients, de

préférence sous la forme :

$$a_{m_1,\infty}(P) = a_{m_1,\infty}^{(0)} + a_{m_1,\infty}^{(2)}P^2, \quad (5.120)$$

$$b_{m_2,\infty}(P) = b_{m_2,\infty}^{(0)} + b_{m_2,\infty}^{(2)}P^2, \quad (5.121)$$

obtenue sur la base des données mesurées. Il est cependant possible qu'une telle régression ne permette pas de décrire l'évolution des coefficients de manière satisfaisante.

Par la suite, il est nécessaire de disposer d'une loi de comportement temporelle pour les coefficients  $a_n(t)$  et  $b_n(t)$ , à supposer que ces derniers tendent *lentement* (en regard de la période acoustique) vers leurs valeurs  $a_{m_1,\infty}$  et  $b_{m_2,\infty}$ , sous l'effet d'un incrément de pression de forçage. Ce genre de mesures est présent dans l'annexe B, qui explique la méthode utilisée pour la détermination des temps de stabilisation de l'impédance d'entrée d'un noyau thermoacoustique suite à un incrément de pression. Il s'agirait ici de refaire des mesures d'impédances mais en régime transitoire, en ayant maintenu  $Q$  à sa valeur (et attendu la stabilisation thermique), et en supposant que la pression de forçage est initialement nulle et qu'à l'instant  $t = 0$  elle passe à la valeur  $P_{inc}$ . Cette mesure peut être menée dans une gamme de fréquence restreinte autour de la fréquence supposée,  $\omega_0$ , des auto-oscillations qui prennent place lorsque une charge d'impédance  $Z_{load}$  est raccordée au noyau, à différents instants  $t_i$  :

$$Z_{tac}(Q, \omega, P, t_i) = \frac{\sum_{m_1=0}^{M_1} a_{m_1}^{(\infty)}(t_i, P(Q)) \times (j\omega)^{m_1}}{\sum_{m_2=0}^{M_2} b_{m_2}^{(\infty)}(t_i, P(Q)) \times (j\omega)^{m_2}}. \quad (5.122)$$

Par construction, chacune des fonctions  $a_{m_1}(t_i, P_{inc})$  et  $b_{m_2}(t_i, P_{inc})$  doit tendre lentement (au regard de la période  $2\pi/\omega_0$ ) vers sa valeur  $a_{m_1,\infty}(P_{inc})$ , respectivement  $b_{m_2,\infty}(P_{inc})$ , lorsque  $t_i \rightarrow \infty$ . L'idée est de tracer ces fonctions, et de voir comment les caractériser mathématiquement, avec pour objectif d'en obtenir une loi de comportement sous forme d'une équation différentielle portant sur chaque fonction  $a_{m_1}$  et  $b_{m_2}$ .

Par exemple, si l'évolution des fonctions  $a_{m_1}$  et  $b_{m_2}$  ressemble à une loi de charge d'un condensateur électrique (à l'instar de ce que montre l'annexe B), alors il est possible chercher à caractériser les données  $a_{m_1}(t_i)$  et  $b_{m_2}(t_i)$  obtenues expérimentalement, par une loi du type :

$$\left( \begin{array}{l} a_{m_1}(t) = a_{m_1,\infty}(P_{inc})(1 - e^{-t/\tau_{m_1,a}}), \\ b_{m_2}(t) = a_{m_2,\infty}(P_{inc})(1 - e^{-t/\tau_{m_2,b}}), \end{array} \right) \quad (5.123)$$

qui donne directement accès à l'équation différentielle recherchée :

$$\begin{aligned} \dot{a}_{m_1} &= \frac{a_{m_1} - a_{m_1,\infty}}{\tau_{m_1,\infty}}, \\ \dot{b}_{m_2} &= \frac{b_{m_2} - b_{m_2,\infty}}{\tau_{m_2,\infty}}. \end{aligned} \quad (5.124)$$

Dans ce cas, la condition de raccordement des impédances s'écrit  $(\bar{Z}_{load} + Z_{tac}(Q, \omega, P)) \tilde{u} = 0$  ou encore  $(Z_{load} + Z_{tac}(Q, \omega, P)) \tilde{p} = 0$  (vu que  $\tilde{p} = -Z_{load} \tilde{u}$ ) où  $\tilde{p}$  représente l'amplitude complexe de pression acoustique à l'interface entre la charge et le noyau. Cette condition de raccordement peut-être utilisée pour définir le jeu d'équation non linéaire qui décrit les auto-oscillations sous l'effet d'un chauffage  $Q$ . Concrètement, en supposant que  $Z_{load}$  peut être caractérisé par exemple par une fonction telle que :

$$Z_{load}(\omega) = \mathcal{R}_{load} + j\omega \mathcal{M}_{load}, \quad (5.125)$$

et en supposant également disposer d'un  $Z_{tac}$  (stationnaire et transitoire, à  $Q$  fixé) où les coefficients  $a_{m_1}$  et  $b_{m_2}$  deviennent des fonctions qui évoluent lentement du fait de leur dépendance avec l'amplitude de pression  $P$ , elle même lentement variable ( $P = P(\xi t)$ ,  $\xi \ll 1$ ), et en écrivant la condition de raccordement des impédances *dans le domaine temporel*, il vient :

$$\left[ \mathcal{R}_{load} + \mathcal{M}_{load} \frac{d}{dt} \right] p(t, \xi t) + \frac{\sum_{m_1=0}^{M_1} a_{m_1}^{(\infty)}(P(\xi t)) \times \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_1}}{\sum_{m_2=0}^{M_2} b_{m_2}^{(\infty)}(P(\xi t)) \times \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_2}} p(t, \xi t) = 0, \quad (5.126)$$

dont la solution est recherchée sous la forme :

$$p(t, \xi t) = P(\xi t) \cos(\omega_0(\xi t)t + \beta(\xi t)). \quad (5.127)$$

### 5.4.3 Conclusion

Cette dernière partie de chapitre *propose* une méthode permettant de prédire expérimentalement le comportement des auto-oscillations acoustiques au sein d'un moteur thermoacoustique à partir de la mesure de l'impédance d'entrée du noyau thermoacoustique en régime transitoire, et de l'impédance d'entrée de la charge. Si cette méthode devait être mise en œuvre, elle pourrait permettre de reproduire la dynamique temporelle du moteur à partir de la résolution de l'équation (5.126), y compris si l'amplitude des auto-oscillations n'est pas stationnaire. En perspective de ces travaux, des mesures pourraient donc être effectuées pour valider cette méthode.



# Conclusion et Perspectives

Une méthode permettant de mesurer l'impédance d'entrée d'un noyau thermoacoustique à fort niveau d'amplitude pour une puissance de chauffage, une amplitude de pression et une fréquence données a été proposée dans ce manuscrit. Cette méthode requiert la mise en place d'un banc de mesure spécifique pour la mesure à fort niveau d'amplitude menant, une fois le capteur étalonné, à des résultats dont la précision est fiable pour visualiser le comportement linéaire et non linéaire du noyau thermoacoustique.

Le premier chapitre est consacré à la présentation de ce banc de mesure : son principe de fonctionnement, son étalonnage et l'étude de la fiabilité de ses résultats à bas niveau de forçage acoustique. Par la suite, le banc ayant été caractérisé, celui-ci est utilisé pour mesurer l'impédance d'entrée d'un noyau thermoacoustique.

Pour caractériser l'impédance d'entrée d'un noyau thermoacoustique donné, un modèle basé sur la théorie linéaire de Rott, couplé à une description du problème thermique, est présenté au chapitre 2 et permet une vérification qualitative des résultats issus de la mesure. Si les résultats du modèle et de la mesure s'accordent en l'absence de chauffage, la simulation tend à s'éloigner significativement de la mesure lorsque la puissance de chauffage augmente. Cette différence s'explique en grande partie par le fait que les pertes thermiques latérales au travers des parois du moteur sont estimées grossièrement, mais également par le fait que le modèle ne prend en compte qu'un seul mécanisme de saturation (à savoir le pompage thermoacoustique) et que le champ de température est supposé unidimensionnel.

Dans un moteur construit à partir d'un noyau et d'une charge qui lui est rattachée, la méthode de raccordement des impédances est détaillée au chapitre 3 et permet de prédire le seuil de déclenchement (ainsi que la fréquence associée) de l'instabilité thermoacoustique. En mesurant la dépendance de l'impédance d'entrée du noyau à l'amplitude du forçage, cette méthode de raccordement permet alors de prédire le point

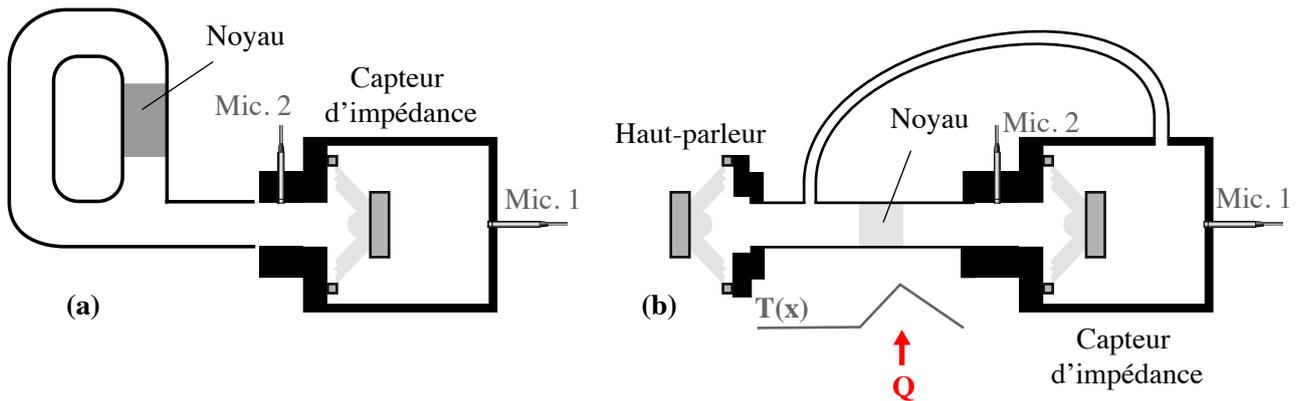


FIGURE 5.13 – Schéma de principe de la mesure (a) de l'impédance d'entrée d'une boucle, (b) de la matrice de transfert d'un noyau.

de fonctionnement fort niveau du moteur.

Le chapitre 4 s'attache à optimiser le couplage entre un noyau thermoacoustique (dont l'impédance a été préalablement mesuré) et une charge constituée d'un haut-parleur jouant le rôle d'un alternateur. Pour cela, un modèle représentant la charge est dressé sur la base de mesures d'impédance ce qui permet de modifier les caractéristiques électriques et mécaniques du haut-parleur directement dans le modèle afin de chercher à maximiser la puissance électrique induite par la mise en mouvement de la membrane par les oscillations acoustiques générées à l'intérieur du moteur en fonctionnement. Si les résultats du chapitre 4 traitant cette question sont convaincants concernant l'ajustement des caractéristiques électriques de l'alternateur, les résultats obtenus lors d'un changement effectué sur la partie mécanique du haut-parleur ne sont pas tout à fait les mêmes dans le cas du modèle et de la mesure directement réalisée sur le moteur. Il est possible que le protocole de mesure soit responsable de ces divergences, mais l'écart observé ne remet pas en cause la méthode décrite, qui permet de maximiser le rendement d'un moteur à partir de la caractérisation expérimentale du noyau. Cette méthode offre l'avantage de ne pas avoir recours à une description analytique ou numérique du noyau, nécessairement incomplètes, pour fournir une estimation des valeurs optimales d'une charge idéale ou réelle, préalablement modélisée.

Pour finir, le chapitre 5 propose une étude visant à qualifier la stabilité de l'amplitude des auto-oscillations acoustiques au sein du moteur. Ce dernier chapitre montre qu'une mesure effectuée en régime stationnaire est insuffisante pour déterminer la stabilité de l'amplitude des auto-oscillations acoustique à l'intérieur du moteur, et met en défaut le critère de stabilité local dit de Loeb. Une méthode expérimentale basée sur des mesures en régime transitoire est décrite pour prédire la stabilité des cycles limites d'un moteur thermo-

coustique.

Cette thèse aura été l'occasion de fournir une méthode de prédiction du point de fonctionnement d'un moteur thermoacoustique à partir d'une mesure, simple à mettre en œuvre (du moins en principe), réalisée sur un noyau préalablement construit. En perspectives, cette preuve de concept, réalisée sur un moteur thermoacoustique simple à construire, suggère que la méthode de prédiction donnera des résultats exploitables dans le cas de son utilisation sur un moteur plus complexe, muni d'une boucle et fonctionnant en fluide pressurisé, comme décrit par la figure 5.13a. Dans ce cas, la mesure de l'impédance d'entrée de la boucle, contenant le noyau thermoacoustique, en fonction du niveau de forçage, de la fréquence et de la puissance de chauffage injectée, se fait de la même manière que dans les travaux décrits dans ce manuscrit. Pour continuer sur cette voie, il serait intéressant d'élargir la méthode à une mesure non plus de l'impédance d'entrée du noyau, mais de sa matrice de transfert à fort niveau acoustique. Pour cela, un nouveau banc devra être construit en s'inspirant de celui représenté en figure 5.13b, pour lequel l'amplitude de la pression acoustique et sa phase avec le débit volumique sont contrôlés par les différents niveaux de forçage acoustique imposé par les sources à gauche et à droite du banc[68, 69]. Finalement, la méthode expérimentale décrite au chapitre 5 pourra être mise en œuvre afin de résoudre le problème lié à la prédiction de la stabilité des cycles limites notamment pour reproduire les comportements complexes observés lors du déclenchement des moteurs (déclenchement-arrêt[41] ou double déclenchement[63], par exemple).



# Annexe A

## Sur les coefficients de pertes thermiques latérales

Dans ce manuscrit, la théorie de la thermoacoustique linéaire, telle qu'énoncée par Rott[77], est couplée avec un modèle thermique permettant de connaître la distribution du champ de température à l'intérieur du noyau thermoacoustique. Ce modèle est détaillé au chapitre 2 et consiste en une version discrétisée du problème sous la forme d'une série de volumes de contrôle. Un bilan thermique est réalisé sur chacun de ces volumes de contrôle qui prend notamment en compte les fuites thermiques du noyau vers le milieu extérieur sous la forme d'un flux de chaleur noté  $Q_{lat}$ . Ce flux est décrit comme une dérivation dans le circuit électrique illustrant l'analogie électro-thermique réalisée.

Au chapitre 2, il est fait mention des travaux antérieurs de Guédra[38] sur un modèle similaire de moteur thermoacoustique quart d'onde. Les travaux de Guédra sont sur plusieurs points comparables à ceux détaillés dans ce manuscrit. En effet, le point commun des deux approches se trouve dans l'ajustement de flux thermiques latéraux. Ces flux latéraux permettent de garantir qu'une distribution de température stationnaire puisse être établie le long du moteur. En effet, en l'absence d'échangeur froid, ces seuls flux latéraux permettent une distribution de température non-uniforme de prendre place le long du moteur.

Dans les travaux de Guédra, le bilan thermique est réalisé sur le flux de chaleur le long des portions du guide d'onde discrétisé. L'équation du bilan thermique est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho_a C_a} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_a \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{T - T_\infty}{\tau_a} \quad (\text{A.1})$$

pour les portions de tube non chargées du stack ; et :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho_s C_s} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_s \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{T - T_\infty}{\tau_s} - \frac{1}{\rho_s C_s} \frac{\partial \phi_{ac}}{\partial x} \quad (\text{A.2})$$

pour les portions de tube chargées du stack. Dans ces équations, interviennent la température  $T$  évaluée au

point  $x$ , les masses volumiques, capacités thermiques du milieu et conductivités thermiques respectivement  $\rho_a$ ,  $C_a$  et  $\lambda_a$  dans l'air, et  $\rho_s$ ,  $C_s$  et  $\lambda_s$  dans le stack. La température de la pièce est notée  $T_\infty$  et le flux thermique acoustiquement induit  $\phi_{ac}$ . Dans ce bilan, apparaissent les termes représentant les fuites thermiques latérales. Ces termes sont écrits comme le rapport de la différence de température de la portion de tube discrétisée et d'un temps caractéristique  $\tau$  associé qui est estimé *a priori* via une méthode proposée en annexe de la référence[64]. Ces coefficients  $\tau_a$  et  $\tau_s$  sont ensuite ajustés afin de rapprocher les résultats fournis par le modèle des résultats expérimentaux.

Dans ce manuscrit, le bilan thermique n'est pas réalisé de la même manière puisqu'il concerne une suite de volumes de contrôle représentant le système de façon discrétisé. Ce bilan est écrit dans l'équation (2.16) et est ré-écrit ici dans un souci de facilité de lecture :

$$\frac{T_{n-1} - T_n}{R_{n-1}^{th}} - \frac{T_n - T_{n+1}}{R_n^{th}} - \frac{T_n - T_\infty}{R_{lat}^{th}} + Q_2(\tilde{p}_n, \tilde{u}_n) - Q_2(\tilde{p}_{n-1}, \tilde{u}_{n-1}) = 0. \quad (A.3)$$

Les flux thermiques latéraux s'écrivent ici comme le rapport de la différence de température du volume de contrôle avec celle de la salle et d'une résistance thermique  $R_{lat}^{th}$ . Cette résistance thermique est directement reliée à la surface de la paroi dans le volume de contrôle via un coefficient d'échange thermique  $h_{lat}$ , tel qu'exprimée par l'équation (2.22) :

$$R_{lat,(a,s)}^{th} = \frac{1}{2\pi R_{tac} \Delta x_n h_{lat,(a,s)}}. \quad (A.4)$$

Les deux manières de décrire ces fuites sont équivalentes : dans le premier cas c'est le flux de chaleur qui est considéré alors que dans le cas qui concerne la méthode utilisée dans cette thèse c'est un bilan des puissances thermiques entrantes qui est réalisé. Dans le but de faire apparaître un lien direct entre le paramètre  $\tau$  utilisé par Guédra et le coefficient d'échange thermique  $h_{lat}$  utilisé ici, il est possible de relier les temps caractéristiques  $\tau_{(a,s)}$  et les résistances thermiques latérales  $R_{lat}^{th}$  via la capacité thermique massique, la densité du milieu et le volume de contrôle :

$$\tau_{(a,s)} = R_{lat,(a,s)}^{th} \times \rho_{(a,s)} C_{(a,s)} S \Delta x. \quad (A.5)$$

En introduisant l'expression des  $R_{lat,(a,s)}^{th}$  dans cette relation, les coefficients d'échanges latéraux s'écrivent :

$$h_{lat,(a,s)} = \frac{\rho_{(a,s)} C_{(a,s)} R_{tac}}{2\tau_{(a,s)}}. \quad (A.6)$$

Les coefficients de transfert thermique au travers des parois sont donc inversement proportionnels aux temps caractéristiques  $\tau_{(a,s)}$ .

À partir de cette relation et des données fournies dans l'article de Guédra, il est possible de donner les

valeurs équivalentes des  $h_{\text{lat}}$  utilisées :

$$h_{\text{lat,(a)}} \Big|_{\text{Guédra}} = 3.1 \text{ W/K/m}^2, \quad (\text{A.7})$$

$$h_{\text{lat,(s)}} \Big|_{\text{Guédra}} = 12.9 \text{ W/K/m}^2. \quad (\text{A.8})$$

Les valeurs ajustées ici sont :

$$h_{\text{lat,(a)}} = 10 \text{ W/K/m}^2, \quad (\text{A.9})$$

$$h_{\text{lat,(s)}} = 70 \text{ W/K/m}^2. \quad (\text{A.10})$$

Le même ordre de grandeur est obtenu pour les deux coefficients dans les deux dispositifs étudiés. Les différences sont toutefois assez grandes et soulignent que les parois du moteur n'ont pas les mêmes caractéristiques dans les deux cas. Dans le cas des travaux de Guédra, les parois du moteur sont en verre tandis que l'étude proposée dans ce manuscrit traite le cas d'un moteur ayant des parois en acier. Comme le verre possède une conductivité thermique bien plus faible que celle de l'acier ces résultats semblent logiques.



## Annexe B

# Détermination des temps caractéristiques de stabilisation

Un noyau thermoacoustique chauffé, ici par l'intermédiaire d'un fil en NiChrome, est soumis à une distribution de température non-uniforme. Il est possible de reconstruire le champ de température à l'aide d'un modèle thermique discrétisé du problème, détaillé au chapitre 2. Ce modèle permet de mettre en lumière les mécanismes d'échange thermique donnant lieu à l'établissement du champ de température stabilisé. Ces derniers sont principalement des mécanismes de diffusion de la chaleur et pour cette raison le champ de température nécessite un certain temps d'établissement. Ce temps est lié à la diffusivité thermique du milieu. La plupart des mécanismes de transfert de la chaleur ne dépendent que de la géométrie et des matériaux du système, mais certains en revanche sont directement liés à la distribution du champ acoustique. Un changement des conditions de chauffage ou de l'excitation acoustique conduit à une convergence lente vers un nouveau régime établi. Or, la mesure de l'impédance d'entrée du noyau, telle que décrite au chapitre 1, nécessite de faire varier l'amplitude et la fréquence des oscillations acoustiques ou encore la puissance de chauffage. Il est donc nécessaire de déterminer des temps de stabilisation qui garantissent que la mesure est réalisée sur un noyau dont les champs acoustique et thermique sont quasi-stables.

### B.1 Changement des conditions de l'excitation acoustique

Une variation des conditions acoustiques au travers du noyau a un impact sur l'impédance d'entrée du noyau. Cet impact est lié à la dépendance du champ de température au champ acoustique. L'impédance du noyau converge alors lentement vers une valeur stationnaire. L'évolution de l'impédance acoustique d'entrée du système suite à une variation de l'excitation acoustique est recherchée<sup>1</sup> sous la forme d'une équation

---

1. sur la base de l'observation de l'allure des courbes expérimentales

décrivant la charge d'un condensateur électrique. La variation de cette impédance de noyau est d'abord écrite sous la forme d'une fonction auxiliaire  $H_{\text{norm}}(t)$  :

$$H_{\text{norm}} = \frac{F(t) - F(t=0)}{F(t \rightarrow \infty) - F(t=0)}, \quad (\text{B.1})$$

donnée au chapitre 2, dans l'équation (2.27). Cette variation suit d'ailleurs bien une allure correspondant, "à peu près", à une charge de condensateur électrique, de la forme :

$$f_{\tau} = \mathcal{A}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad (\text{B.2})$$

où  $\mathcal{A}$  correspond à la valeur asymptotique de la fonction lorsque  $t \rightarrow \infty$ , et  $\tau$  est le temps caractéristique de charge du système.  $\mathcal{A}$  doit logiquement converger vers 1 pour décrire la fonction  $H_{\text{norm}}(t)$ . Grâce à un algorithme itératif de minimisation au sens des moindres carrés, les paramètres  $\mathcal{A}$  et  $\tau$  sont ajustés afin de faire correspondre au mieux le modèle avec les données mesurées. Les paramètres ajustés sont notés  $\mathcal{A}_P$  et  $\tau_P$  pour un incrément de l'amplitude de la pression acoustique au sein du noyau, et  $\mathcal{A}_f$  et  $\tau_f$  pour un changement de la fréquence acoustique. Ces ajustements sont réalisés indépendamment sur les parties réelles et imaginaires des données mesurées. Pour cette raison, les exposants  $\Re$  et  $\Im$  indiquent si le paramètre résulte d'un ajustement sur une partie réelle ou imaginaire. Les valeurs issues de l'ajustement sont répertoriées ci-dessous.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_P^{\Re} = 0.98 \\ \mathcal{A}_P^{\Im} = 1.02 \\ \tau_P^{\Re} = 37 \text{ s} \\ \tau_P^{\Im} = 22 \text{ s} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_f^{\Re} = 0.97 \\ \mathcal{A}_f^{\Im} = 0.99 \\ \tau_f^{\Re} = 45 \text{ s} \\ \tau_f^{\Im} = 27 \text{ s} \end{array} \right\} \quad (\text{B.3})$$

Les courbes mesurées et ajustées sont données en figure B.1. Ces figures représentent aussi la tangente à l'origine de la fonction modèle et mettent de cette manière en évidence la valeur du temps caractéristique  $\tau$  obtenu dans chaque cas. Il est intéressant de remarquer que les valeurs de  $\mathcal{A}$  n'ont pas été imposées comme étant égales à 1, ce qui aurait pu être donné dès le départ au vu de la fonction recherchée, mais la méthode permet tout de même de retrouver des valeurs qui se rapprochent de 1.

À partir de ces valeurs il est possible de choisir des temps de stabilisation pertinents pour prendre en compte le temps nécessaire à la convergence de l'impédance du noyau vers sa valeur finale. La convergence de la fonction suite à un incrément de l'amplitude de la pression de  $\Delta P$  admet des temps caractéristiques  $\tau_P^{\Re} = 37 \text{ s}$  pour sa partie réelle et  $\tau_P^{\Im} = 22 \text{ s}$  pour sa partie imaginaire. La valeur finale la plus lente à obtenir est choisie pour déterminer la valeur du temps de stabilisation,  $t_P$ . Ce temps, associé à l'application d'un incrément  $\Delta P$ , est choisi afin d'assurer un écart inférieur à 5% à l'asymptote de la partie réelle, alors  $t_P = 3\tau_P^{\Re} \sim 100 \text{ s}$ .

La convergence de la fonction suite à un incrément de la fréquence de  $\Delta f$  conduit, elle, à des temps

caractéristiques  $\tau_f^{\Re} = 45$  s pour sa partie réelle et  $\tau_f^{\Im} = 27$  s pour sa partie imaginaire. Le temps de stabilisation  $t_f$  est d'abord choisi pour assurer un écart inférieur à 5% à celle de l'asymptote de la partie réelle :  $t_f = 3\tau_f^{\Re} \simeq 135$  s, car c'est la convergence la plus longue à obtenir. Il faut cependant prendre en compte que la partie réelle de l'impédance ne varie que très peu lors d'un incrément faible de la fréquence, loin de la résonance du système, au regard de la partie imaginaire. Pour cette raison, et afin de diminuer le temps de mesure total, le temps de stabilisation est alors choisi tel que :  $t_f = 100$  s (ou 10 s dans certains cas, comme par exemple lorsque le champ acoustique, bas niveau, n'impacte pas beaucoup le champ thermique dans le noyau). Ce temps  $t_f$  concerne cependant un incrément  $\Delta f$  nettement supérieur à celui utilisé lors de la mesure et ce dernier est divisé par le nombre d'incrément réalisés pour obtenir  $\Delta f = 20$  Hz. La pertinence de ce choix peut être discutée plus longuement, mais il convient de préciser qu'il est nécessaire de chercher à écourter le temps de mesure à cause de limitations techniques dues à la nature simplifiée du dispositif. L'impact d'un changement de fréquence sur l'impédance du noyau étant moins critique qu'une variation  $\Delta P$  ou  $\Delta Q$ , il a été jugé pertinent d'écourter  $t_f$  afin de maintenir une durée de mesure raisonnable.

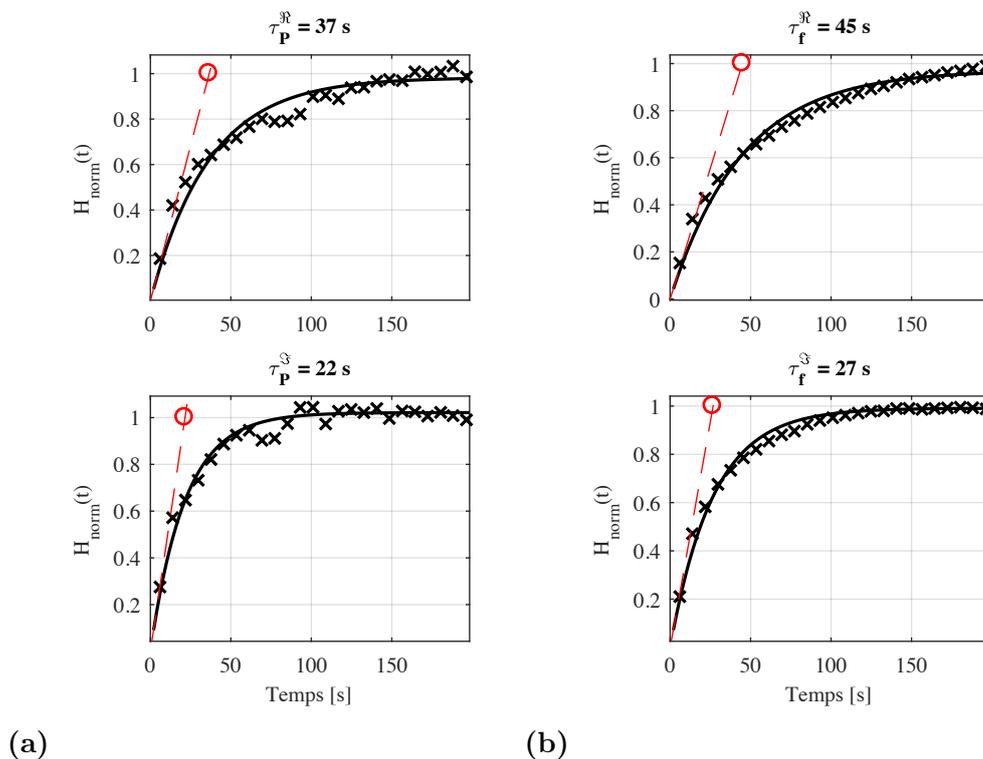


FIGURE B.1 – Variations relatives de l'impédance d'entrée d'un noyau thermoacoustique suite à un incrément de (a) l'amplitude de la pression ou (b) de fréquence acoustique. Les données représentées par des points ( $\times$ ) sont obtenues expérimentalement, le modèle ajusté suivant le comportement de charge d'un condensateur est indiqué via la courbe en pointillée (-). La courbe en rouge est la tangente du modèle au point  $t=0$ , et coupe la droite  $y=1$  en  $t = \tau$  au niveau du marqueur circulaire ( $\circ$ ).

## B.2 Changement des conditions de chauffage

Pour la détermination du temps caractéristique mis en jeu lors d'un incrément de puissance de chauffage, une équation de charge de condensateur n'est pas suffisante pour rendre compte de l'*overshoot* observé sur la courbe  $H_{\text{norm}}$  en figure 2.6. Afin de modéliser cet *overshoot*, l'équation d'un oscillateur sur-amorti est considérée :

$$f_{\tau}^{(2)} = A \cos(\omega t)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (\text{B.4})$$

et comparée avec celle qui décrit la charge d'un condensateur :

$$f_{\tau}^{(1)} = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (\text{B.5})$$

Ces fonctions font toutes les deux clairement apparaître un temps caractéristique de stabilisation.

Les fonctions  $f_{\tau}^{(1)}$  et  $f_{\tau}^{(2)}$  sont introduites dans l'algorithme d'ajustement au sens des moindres carrés. Pour les courbes de parties réelles, l'algorithme fournit les valeurs suivantes :

- pour une fonction de la forme  $f_{\tau}^{(1)}$ ,  $A = 1.015$  et  $\tau = 26$  s ;
- pour une fonction de la forme  $f_{\tau}^{(2)}$ ,  $A = 1.028$ ,  $\tau = 27$  s et  $\omega = 0.42$  mrad/s.

La fonction  $f_{\tau}^{(2)}$  permet de reproduire un léger *overshoot* et les valeurs de temps caractéristiques sont très proches dans les deux cas. Pour les courbes de parties imaginaires, l'algorithme de minimisation fournit les nouvelles valeurs suivantes :

- pour une fonction de la forme  $f_{\tau}^{(1)}$ ,  $A = 0.95$  et  $\tau = 58$  s ;
- pour une fonction de la forme  $f_{\tau}^{(2)}$ ,  $A = 0.95$ ,  $\tau = 58$  s et  $\omega = 0$  rad/s ;

Les deux fonctions prennent finalement la même forme ici en l'absence d'un *overshoot* observable.

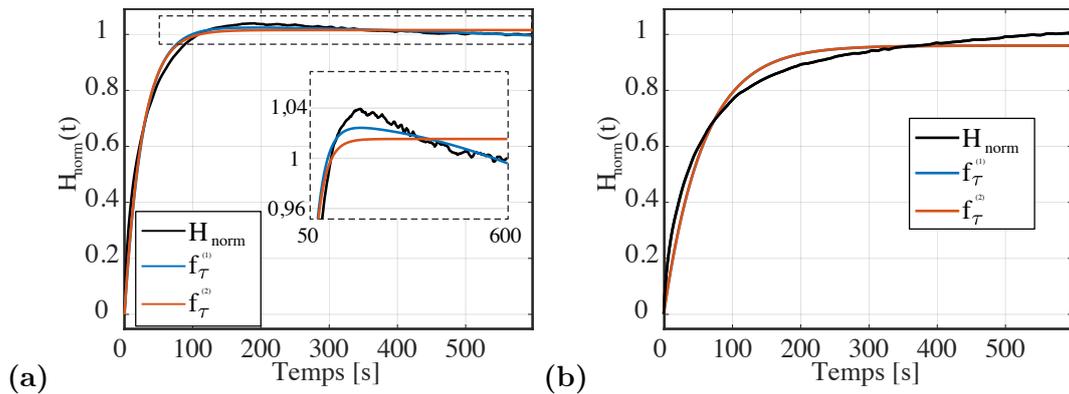


FIGURE B.2 – Variations relatives de l'impédance d'entrée du noyau suite à un incrément de la puissance de chauffage, (a) en partie réelle et (b) en partie imaginaire, en fonction du temps.

À partir des expressions données plus haut, les temps caractéristiques sont obtenus. Le temps de stabilisation lié à un incrément de chauffage est pris de manière à assurer 99% de la valeur finale car le chauffage a un impact très fort sur la partie réelle de l'impédance d'entrée :  $t_Q = 10\tau_Q \sim 600$  s.

## Annexe C

# Expression de l'impédance du noyau sous la forme d'un polynôme rationnel

En faisant l'hypothèse que le stack est compact au regard de la longueur d'onde, il est possible de modéliser le noyau avec un circuit électrique équivalent. Sans faire d'hypothèse sur les éléments qui constituent le circuit équivalent il est toutefois possible d'écrire l'impédance d'entrée équivalente sous la forme d'un polynôme rationnel. Ainsi, les racines du polynôme dénominateur seront les pôles alors que celles du polynôme numérateur seront les zéros de la fonction. En partant d'une impédance d'entrée mesurée, l'objectif est de se ramener à une forme polynomiale rationnelle pour chaque niveau de pression  $P$ , tel que l'impédance  $Z$  d'un élément mesuré puisse s'écrire :

$$Z(Q, \omega, P) = \frac{\sum_{m_1=0}^{M_1} a_{m_1}(P(Q)) \times (j\omega)^{m_1}}{\sum_{m_2=0}^{M_2} b_{m_2}(P(Q)) \times (j\omega)^{m_2}}. \quad (\text{C.1})$$

L'algorithme de régression est réalisé par la fonction *tfest*<sup>1</sup> dans l'environnement MatLab®<sup>®</sup>, voir en réf. [3]. Le but est ici de fournir un modèle ayant le meilleur compromis entre un ordre  $m_{(1,2)}$  bas pour le polynôme et une description néanmoins raisonnablement proche des données issues de la mesure. La figure C.1 montre le résultat de la régression en polynôme rationnel de la fonction d'impédance d'entrée d'un noyau thermoacoustique ( $L_{\text{tac}} = 34$  cm,  $L_{\text{TBT}} = 22$  cm et  $Q = 44.3$  W) **(a)** à bas niveau ( $P < 120$  Pa) et **(b)** à fort niveau de forçage ( $P < 730$  Pa), pour laquelle les degrés des polynômes numérateurs et dénominateurs sont respectivement fixés à  $m_1 = 3$  et  $m_2 = 2$ . Ces résultats sont résumés sur la figure C.2 par des courbes de niveaux lorsque la méthode est appliquée sur l'ensemble des valeurs de  $P$  mesurées. Pour  $m_1 = 3$  zéros et

---

1. identification toolbox : <https://fr.mathworks.com/help/ident/ref/tfest.html>

$m_2 = 2$  pôles, les courbes de niveaux, mesurées et fittées, sont très proches compte tenu de l'ordre assez faible de la régression polynômiale, l'erreur relative est cartographiée sur la figure C.3a et n'excède jamais 10%. Pour  $m_1 = 5$  zéros et  $m_2 = 4$  pôles, sur la figure C.2 les courbes sont cette fois confondues et la figure C.3b montre que l'erreur commise par l'algorithme de régression n'excède, cette fois, jamais 1%.

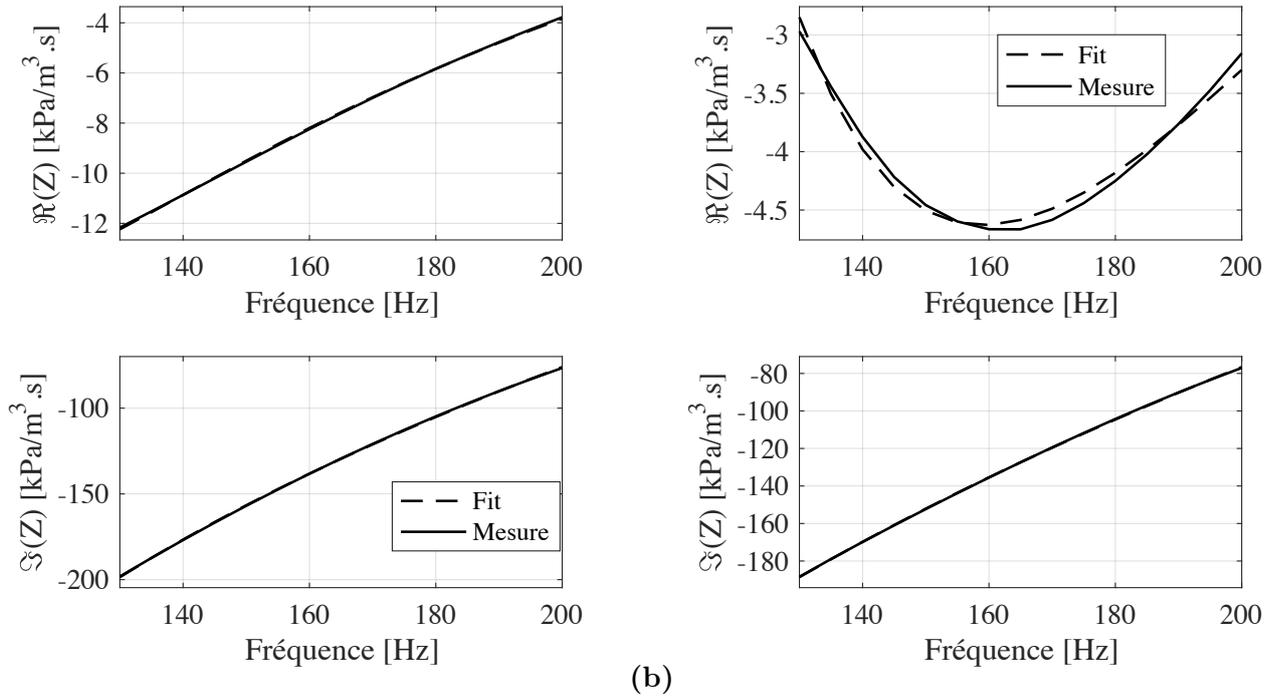


FIGURE C.1 – Allure des impédances fittée (via l'utilisation de la fonction *tfest* de l'environnement MatLab®) et mesurée d'un noyau thermoacoustique ( $L_{tac} = 34$  cm,  $L_{TBT} = 22$  cm et  $Q = 44.3$  W), en fonction de la fréquence  $f$ , (a) à bas niveau ( $P < 120$  Pa) et (b) à fort niveau de forçage ( $P < 730$  Pa).

Les coefficients polynômiaux des numérateur,  $a$ , et dénominateur,  $b$ , dépendent du niveau de pression. La figure C.4 donne l'allure des coefficients  $a$  et  $b$  en fonction de  $P$ . Ces derniers dépendent de la pression par une loi qui peut être rendue explicite via une nouvelle régression polynômiale (dont l'ordre est obtenu par méthode d'essais/erreurs).

Il est alors intéressant de pouvoir séparer clairement les contributions de  $f$ ,  $P$  et  $Q$ . En considérant séparément le numérateur et le dénominateur de l'expression de  $Z$ , il vient :

$$\sum_{m_1=0}^{M_1} a_{m_1}(P)(j\omega)^{m_1} = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{M_1}] \times \begin{bmatrix} (j\omega)^0 \\ (j\omega)^1 \\ \vdots \\ (j\omega)^{M_1} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}][\Omega_{M_1}]. \quad (\text{C.2})$$

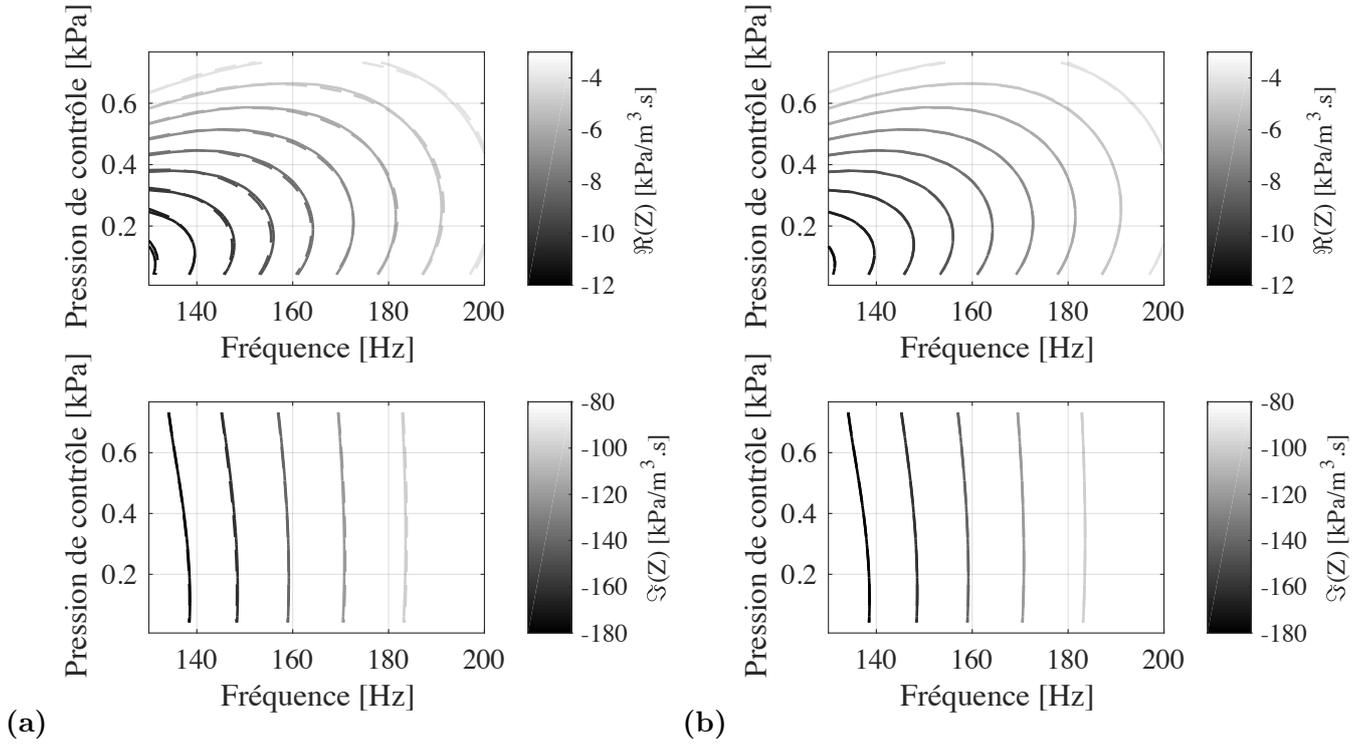


FIGURE C.2 – Courbes de niveaux de l'impédance du noyau thermoacoustique ( $L_{tac} = 34$  cm,  $L_{TBT} = 22$  cm et  $Q = 44.3$  W) obtenue expérimentalement, représentée via la fonction *contour* de MatLab® (--) et de la fonction ajustée (- -). En (a),  $M_1 = 3$ ,  $M_2 = 2$ . En (b),  $M_1 = 5$ ,  $M_2 = 4$  et les courbes expérimentales et ajustées sont confondus.

et :

$$\sum_{m_2=0}^{M_2} a_{m_2}(P)(j\omega)^{m_2} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{M_2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (j\omega)^0 \\ (j\omega)^1 \\ \vdots \\ (j\omega)^{M_2} \end{bmatrix} = [\mathbf{b}][\Omega_{M_2}]. \quad (\text{C.3})$$

Or, les coefficients  $a$  et  $b$  peuvent être substitués par leurs expressions en fonction de  $P$  :

$$[\mathbf{a}] = \begin{cases} a_1 = A_{1,4}P^4 + A_{1,3}P^3 + A_{1,2}P^2 + A_{1,1}P + A_{1,0} \\ a_2 = A_{2,4}P^4 + A_{2,3}P^3 + A_{2,2}P^2 + A_{2,1}P + A_{2,0} \\ a_3 = A_{3,4}P^4 + A_{3,3}P^3 + A_{3,2}P^2 + A_{3,1}P + A_{3,0} \\ a_4 = A_{4,4}P^4 + A_{4,3}P^3 + A_{4,2}P^2 + A_{4,1}P + A_{4,0} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

$$= \begin{cases} A_{1,4} & A_{1,3} & A_{1,2} & A_{1,1} & A_{1,0} \\ A_{2,4} & A_{2,3} & A_{2,2} & A_{2,1} & A_{2,0} \\ A_{3,4} & A_{3,3} & A_{3,2} & A_{3,1} & A_{3,0} \\ A_{4,4} & A_{4,3} & A_{4,2} & A_{4,1} & A_{4,0} \end{cases} \times \begin{bmatrix} P^4 \\ P^3 \\ P^2 \\ P^1 \\ P^0 \end{bmatrix} = \{\mathbf{A}\}[\mathbf{P}] \quad (\text{C.5})$$

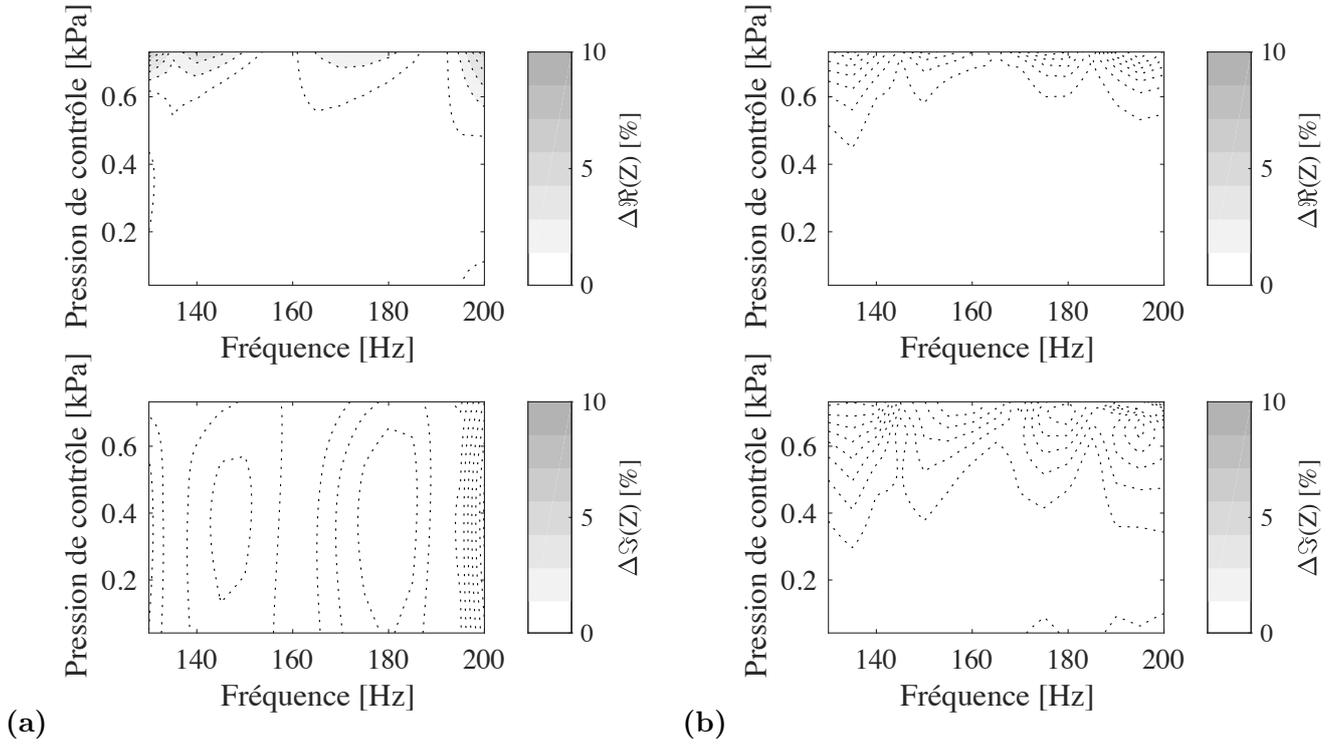


FIGURE C.3 – Cartographie de l’erreur relative entre les données mesurées et la fonction dont les coefficients sont ajustées, pour (a)  $M_1 = 3, M_2 = 2$  et (b)  $M_1 = 5, M_2 = 4$ .

et :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{[b]} &= \left\{ \begin{array}{l} b_1 = B_{1,4}P^4 + B_{1,3}P^3 + B_{1,2}P^2 + B_{1,1}P + B_{1,0} \\ b_2 = B_{2,4}P^4 + B_{2,3}P^3 + B_{2,2}P^2 + B_{2,1}P + B_{2,0} \\ b_3 = B_{3,4}P^4 + B_{3,3}P^3 + B_{3,2}P^2 + B_{3,1}P + B_{3,0} \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{ccccc} B_{1,4} & B_{1,3} & B_{1,2} & B_{1,1} & B_{1,0} \\ B_{2,4} & B_{2,3} & B_{2,2} & B_{2,1} & B_{2,0} \\ B_{3,4} & B_{3,3} & B_{3,2} & B_{3,1} & B_{3,0} \end{array} \right\} \times \begin{bmatrix} P^4 \\ P^3 \\ P^2 \\ P^1 \\ P^0 \end{bmatrix} = \mathbf{[B][P]}. \quad (\text{C.6})
 \end{aligned}$$

Les coefficients des matrices  $\mathbf{[A]}$  et  $\mathbf{[B]}$  sont définis pour chaque cartographie réalisée et portent l’information liée à la configuration du système. L’avantage qu’offre ces notations est de pouvoir écrire le système complet sous la forme d’un rapport de produit matriciel :

$$Z_{\text{TAC}} = \frac{\sum_{m_1=0}^{M_1} a_{m_1}(P)(j\omega)^{m_1}}{\sum_{m_2=0}^{M_2} b_{m_2}(P)(j\omega)^{m_2}} = \frac{\mathbf{[P]}^T \mathbf{[A]}^T [\Omega]}{\mathbf{[P]}^T \mathbf{[B]}^T [\Omega]} \quad (\text{C.7})$$

où les matrices  $\mathbf{[A]}$  et  $\mathbf{[B]}$ , caractérisant le système, sont obtenues expérimentalement. Or, en ayant accès

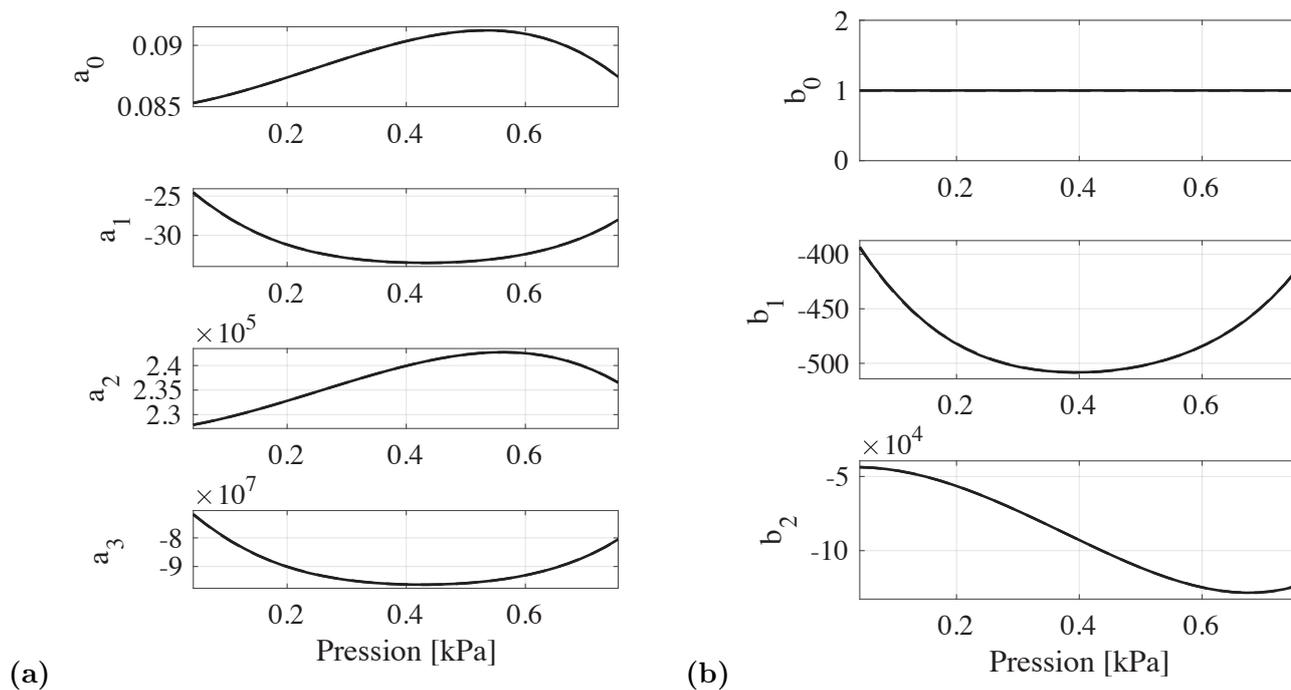


FIGURE C.4 – Évolution des coefficients (a)  $a$  et (b)  $b$  en fonction de la pression.

aux variations de  $\{\mathbf{A}\}$  et  $\{\mathbf{B}\}$  en fonction du temps, il est possible de résoudre le problème posé au chapitre 5, sous la forme de l'équation (5.126).



# Bibliographie

- [1] P. C. H. Aben, P. R. Bloemen, and J. C. H. Zeegers. 2-D PIV measurements of oscillatory flow around parallel plates. *Exp. Fluids*, 46(4) :631–641, 2009.
- [2] M. Abom. Measurement of the scattering-matrix of acoustical two-ports. *Mech. Syst. Signal Process.*, 5(2) :89–104, 1991.
- [3] A. Arda Ozdemir and S. Gumussoy. Transfer Function Estimation in System Identification Toolbox via Vector Fitting. *IFAC-PapersOnLine*, 2017.
- [4] W. P. Arnott, H. E. Bass, and R. Raspet. General formulation of thermoacoustics for stacks having arbitrarily shaped pore cross sections. *J. Acoust. Soc. Am.*, 90(6) :3228–3237, 1991.
- [5] A. A. Atchley, H. E. Bass, and T. J. Hoffer. Study of a thermoacoustic prime mover below onset of self-oscillation. 91(February), 1992.
- [6] A. A. Atchley, T. J. Hoffer, and H. T. Lin. Analysis of the initial buildup of oscillations in a thermoacoustic prime mover. 95(March) :1661–1664, 1994.
- [7] Y. Auregan and R. Starobinski. Determination of Acoustical Energy Dissipation/Production Potentiality from the Acoustical Transfer Functions of a Multiport. *Acta Acust. united with Acust.*, 85(6) :788–792, 1999.
- [8] A. W. Avent and C. R. Bowen. Principles of thermoacoustic energy harvesting. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 224(14-15) :2967–2992, 2015.
- [9] S. Backhaus and G. W. Swift. A thermoacoustic stirling heat engine. *Nature*, 399(6734) :335–338, 1999.
- [10] S. Backhaus and G. W. Swift. A thermoacoustic-Stirling heat engine : Detailed study. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107(6) :3148–3166, 2000.
- [11] S. Backhaus, E. Tward, and M. Petach. Traveling-wave thermoacoustic electric generator. *Appl. Phys. Lett.*, 85(6) :1085–1087, 2004.

- [12] H. Bailliet, V. Gusev, R. Raspet, and R. A. Hiller. Acoustic streaming in closed thermoacoustic devices. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(4) :1808–1821, 2001.
- [13] F. C. Bannwart, G. Penelet, P. Lotton, and J.-P. Dalmont. Measurements of the impedance matrix of a thermoacoustic core : Applications to the design of thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.*, 133 :2650–2660, 2013.
- [14] I. Bendixson. Sur les courbes définies par des équations différentielles. *J. Mathématiques*, 24 :1–88, 1899.
- [15] A. Berson and Ph. Blanc-Benon. Nonperiodicity of the flow within the gap of a thermoacoustic couple at high amplitudes. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(4) :EL122–L127, 2007.
- [16] A. Berson, G. Poignand, Ph. Blanc-Benon, and G. Comte-Bellot. Nonlinear temperature field near the stack ends of a standing-wave thermoacoustic refrigerator. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 54(21-22) :4730–4735, 2011.
- [17] T. Bi, Z. Wu, L. Zhang, G. Yu, E. Luo, and W. Dai. Development of a 5kW traveling-wave thermoacoustic electric generator. *Appl. Energy*, 185 :1355 – 1361, 2017.
- [18] T. Biwa, K. Sobata, S. Otake, and T. Yazaki. Observation of thermoacoustic shock waves in a resonance tube. *J. Acoust. Soc. Am.*, 136(3) :965–968, 2014.
- [19] T. Biwa, T. Takahashi, and T. Yazaki. Observation of traveling thermoacoustic shock waves (L). *J. Acoust. Soc. Am.*, 130(6) :3558–3561, 2011.
- [20] P. Blanc-Benon, E. Besnoin, and O. Knio. Experimental and computational visualization of the flow field in a thermoacoustic stack. *Comptes Rendus Mécanique*, 331(1) :17 – 24, 2003.
- [21] N. N. Bogoliubov and Y. A. Mitropolski. *Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear Oscillations*. Hindustan Publishing Company, Delhi, 1961.
- [22] S. Boluriaan and P. J. Morris. Acoustic Streaming : From Rayleigh to Today. *Int. J. Aeroacoustics*, 2(3) :255–292, 2003.
- [23] M. Bruneau. *Manuel d’Acoustique Fondamentale*. 1998.
- [24] P. H. Ceperley. A pistonless Stirling engine—The traveling wave heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 66(5) :1508–1513, 1979.
- [25] P. H. Ceperley. Gain and efficiency of a short traveling wave heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(3) :1239–1244, 1985.
- [26] J. P. Clark, W. C. Ward, and G. W. Swift. Design environment for low amplitude thermoacoustic energy conversion (DeltaEC). *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(5) :3014, 2007.
- [27] J.-P. Dalmont. Acoustic Impedance Measurement, Part I : a Review. *J. Sound Vib.*, 243(3) :427–439, 2001.

- [28] J.-P. Dalmont. Acoustic impedance measurement, Part II : A new calibration method. *J. Sound Vib.*, 243(3) :441–459, 2001.
- [29] C. Desjouis, G. Penelet, P. Lotton, and J. Blondeau. Measurement of acoustic streaming in a closed-loop traveling wave resonator using laser Doppler velocimetry. *J. Acoust. Soc. Am.*, 126(5) :2176–2183, 2009.
- [30] S. Ducruix, D. Durox, and S. Candel. Theoretical and experimental determination of the transfer function of a laminar premixed flame. *Proc. Combust. Inst.*, 28 :765–773, 2000.
- [31] D. Durox, T. Schuller, N. Noiray, A. L. Birbaud, and S. Candel. Rayleigh criterion and acoustic energy balance in unconfined self-sustained oscillating flames. *Combust. Flame*, 156(1) :106–119, 2009.
- [32] K. T. Jr. Feldman. Review of the Literature on Rijke Thermoacoustic Phenomena. *J. Sound Vib.*, 7(1) :83–89, 1968.
- [33] S. L. Garrett. Thermoacoustic engines and refrigerators. *Am. J. Phys.*, 72(11) :11–17, 2004.
- [34] S. L. Garrett, J. A. Smith, R. W. M. Smith, B. J. Heidrich, and M.D. Heibel. Fission-powered in-core thermoacoustic sensor. *Appl. Phys. Lett.*, 108(14), 2016.
- [35] A. Gelb and W. E. van der Velde. *Multiplex-input Describing Function and Nonlinear System Design*. Mc Graw-Hill Electronic Sciences Series, 1968.
- [36] E. Gonen and G. Grossman. Effect of variable mechanical resistance on electrodynamic alternator efficiency. *Energy Convers. Manag.*, 88 :894–906, 2014.
- [37] L. Gong, G. Penelet, and P. Picart. Experimental and theoretical study of density fluctuations near the stack ends of a thermoacoustic prime mover. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 126 :580–590, 2018.
- [38] M. Guédra. Études semi-analytiques des conditions de déclenchement et de saturation des auto-oscillations dans les moteurs thermoacoustiques de géométries diverses. *PhD Thesis, Univ. du Maine*, 2012.
- [39] M. Guédra, F. C. Bannwart, G. Penelet, and P. Lotton. Parameter estimation for the characterization of thermoacoustic stacks and regenerators. *Appl. Therm. Eng.*, 2015.
- [40] M. Guédra and G. Penelet. On the Use of a Complex Frequency for the Description of Thermoacoustic Engines. *Acta Acust. united with Acust.*, 98 :232–241, apr 2012.
- [41] M. Guédra, G. Penelet, and P. Lotton. Experimental and theoretical study of the dynamics of self-sustained oscillations in a standing wave thermoacoustic engine. *J. Appl. Phys.*, 115(024504), 2014.
- [42] M. Guédra, G. Penelet, P. Lotton, and J.-P. Dalmont. Theoretical prediction of the onset of thermoacoustic instability from the experimental transfer matrix of a thermoacoustic core. *J. Acoust. Soc. Am.*, 130 :145–152, 2011.
- [43] V. Gusev, H. Bailliet, P. Lotton, and M. Bruneau. Asymptotic Theory of Nonlinear Acoustic Waves in a Thermoacoustic Prime-Mover. *Acta Acust. united with Acustica*, 2000.

- [44] V. Gusev, S. Job, H. Bailliet, P. Lotton, and M. Bruneau. Acoustic streaming in annular thermoacoustic prime-movers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(3) :934, 2000.
- [45] M. F. Hamilton, Y. A. Ilinskii, and E. A. Zabolotskaya. Nonlinear two-dimensional model for thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111(5) :2076, 2002.
- [46] H. Hatori, T. Biwa, and T. Yazaki. How to build a loaded thermoacoustic engine. *J. Appl. Phys.*, 111(7) :1–6, 2012.
- [47] T. Holzinger, T. Emmert, and W. Polifke. Optimizing thermoacoustic regenerators for maximum amplification of acoustic power. *J. Acoust. Soc. Am.*, 136(5) :2432–2440, 2014.
- [48] S. J. Illingworth and M. P. Juniper. When will a flame describing function approach to thermoacoustics work well? *ICSV19*, 2012.
- [49] T. Kakutani and N. Sugimoto. Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky method for nonlinear wave modulation. *Phys. Fluids*, 17(8) :1617–1625, 1974.
- [50] H. Kang, P. Cheng, Z. Yu, and H. Zheng. A two-stage traveling-wave thermoacoustic electric generator with loudspeakers as alternators. *Appl. Energy*, 137 :9–17, 2015.
- [51] S. Karpov and A. Prosperetti. Nonlinear saturation of the thermoacoustic instability. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107(February) :3130–3147, 2000.
- [52] S. Karpov and A. Prosperetti. A nonlinear model of thermoacoustic devices. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(4) :1431–1444, 2002.
- [53] J. Kergomard and A. Garcia. Simple discontinuities in acoustic waveguides at low frequencies : Critical analysis and formulae. *J. Sound Vib.*, 114(3) :465–479, 1987.
- [54] H. Levine and J. Schwinger. On the radiation of sound from an unflanged circular pipe. *Phys. Rev.*, 73(4), 1948.
- [55] T. Mellow. On the sound field of an oscillating disk in a finite open and closed circular baffle. *J. Acoust. Soc. Am.*, 120(1) :90, 2006.
- [56] M. Napolitano, R. Romano, and R. Dragonetti. Open-cell foams for thermoacoustic applications. *Energy*, 138 :147–156, 2017.
- [57] N. Noiray, D. Durox, T. Schuller, and S. Candel. A unified framework for nonlinear combustion instability analysis based on the flame describing function. *J. Fluid Mech.*, 2008.
- [58] D. Nolte. The tangled tale of phase space. *Phys. Today*, 63(4) :33–38, 2010.
- [59] Y. Nomura, I. Yamamura, and S. Inawashiro. On the acoustic radiation from a flanged circular pipe. *J. Phys. Soc. Japan*, 15(3) :510–517, 1960.

- [60] C. Olivier, G. Penelet, G. Poignand, J. Gilbert, and P. Lotton. Weakly nonlinear propagation in thermoacoustic engines : A numerical study of higher harmonics generation up to the appearance of shock waves. *Acta Acust. united with Acust.*, 101(5) :941–949, apr 2015.
- [61] M.N. Özisik. *Heat Transfer : A Basic Approach*. McGraw-Hill, vol. 1 edition, 1985.
- [62] G. Penelet and T. Biwa. Synchronization of a thermoacoustic oscillator by an external sound source. *Am. J. Phys.*, 81(4) :290–297, 2013.
- [63] G. Penelet, E. Gaviot, V. Gusev, P. Lotton, and M. Bruneau. Experimental investigation of transient nonlinear phenomena in an annular thermoacoustic prime-mover : Observation of a double-threshold effect. *Cryogenics (Guildf.)*, 42(9) :527–532, 2002.
- [64] G. Penelet, V. Gusev, P. Lotton, and M. Bruneau. Experimental and theoretical study of processes leading to steady-state sound in annular thermoacoustic engines. *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.*, 72(1), 2005.
- [65] G. Penelet, V. Gusev, P. Lotton, and M. Bruneau. Nontrivial influence of acoustic streaming on the efficiency of annular thermoacoustic prime movers. *Phys. Lett. Sect. A Gen. At. Solid State Phys.*, 351(4-5) :268–273, 2006.
- [66] G. Penelet, M. Leclercq, T. Wassereau, and P. Picart. Measurement of density fluctuations using digital holographic interferometry in a standing wave thermoacoustic oscillator. *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 70 :176–184, 2016.
- [67] M. E. Poese and S. L. Garrett. Performance measurements on a thermoacoustic refrigerator driven at high amplitudes. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107(5) :2480–2486, 2000.
- [68] G. Poignand, P. Lotton, G. Penelet, and M. Bruneau. Thermoacoustic, small cavity excitation to achieve optimal performance. *Acta Acust. united with Acust.*, 97(6) :926–932, 2011.
- [69] G. Poignand, A. Podkovskiy, G. Penelet, P. Lotton, and M. Bruneau. Analysis of a coaxial, compact thermoacoustic heat-pump. *Acta Acust. united with Acust.*, 99(6) :898–904, 2013.
- [70] H. Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *J. Math. Pures Appl.*, 7(I) :375–422, 1881.
- [71] R. L. Raun, M. W. Beckstead, J. C. Finlinson, and K. P. Brooks. A review of Rijke tubes, Rijke burners and related devices. *Prog. Energy Combust. Sci.*, 19 :313–364, 1993.
- [72] P. Riese. Das Anblasen offener Röhren durch eine Flamme. *Ann. der Phys. und Chemie*, 108 :653–656, 1859.
- [73] P. Riese. Anhaltendes Tönen einer Röhre durch eine Flamme. *Ann. der Phys. und chemie*, 109 :145–147, 1860.

- [74] P. L. Rijke. Notiz über eine neue Art, die in einer an beiden Enden offenen Röhre enthaltene Luft in Schwingungen zu versetzen. *Ann. der Phys. und chemie*, 107 :339–343, 1859.
- [75] P. L. Rijke. On the vibration of the air in a tube open at both ends. *Philos. Mag.*, 17 :419–422, 1859.
- [76] M. Rossi. *Electro-acoustique*. Traité d'électricité, d'électronique et d'électrotechnique. 1986.
- [77] N. Rott. Thermoacoustics. *Adv. Appl. Mech.*, 20(C) :135–175, 1980.
- [78] C. Sondhauss. Ueber den Brummkreisler und das Schwingungsgesetz der kubischen Pfeifen. *Ann. der Phys. und chemie*, 155(1) :1–34, 1850.
- [79] M. R. Stinson. The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(2) :550–558, 1991.
- [80] J. W. Strutt. The explanation of certain acoustical phenomena. *Nature*, 18 :319–321, 1878.
- [81] J. W. Strutt. *The Theory of Sound (Vol. II)*. Dover Publications, New York, 2 edition, 1896.
- [82] D. M. Sun, K. Wang, Y. Xu, Q. Shen, and X. J. Zhang. Thermoacoustic compression based on alternating to direct gas flow conversion. *J. Appl. Phys.*, 111(9) :094905, 2012.
- [83] G. W. Swift. Thermoacoustic Engines. *J. Acoust. Soc. Am.*, 84(4) :1145–1180, 1988.
- [84] G. W. Swift. Analysis and performance of a large thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(3) :1551–1563, 1992.
- [85] G. W. Swift. *Thermoacoustics : A Unifying perspective for some engines and refrigerators : Second edition*. ASA Press / Springer, 2nd ed. edition, 2017.
- [86] S. Temkin. *Elements of Acoustics*. Wiley, 1981.
- [87] M. E. H. Tijani and S. Spoelstra. A high performance thermoacoustic engine. *J. Appl. Phys.*, 110(9) :93519, 2011.
- [88] M. A. G. Timmer, K. de Blok, and T. H. van der Meer. Review on the conversion of thermoacoustic power into electricity. *J. Acoust. Soc. Am.*, 143(2) :841–857, 2018.
- [89] A. Tominaga. Thermodynamic aspects of thermoacoustic theory. *Cryogenics (Guildf.)*, 35(7) :427–440, 1995.
- [90] K. Wang, S. R. Sanders, S. Dubey, F. H. Choo, and F. Duan. Stirling cycle engines for recovering low and moderate temperature heat : A review. *Renew. Sustain. Energy Rev.*, 62(Supplement C) :89 – 108, 2016.
- [91] J. Wheatley, T. Hofler, G. W. Swift, and A. Migliori. An intrinsically irreversible thermoacoustic heat engine. 74(1) :153–170, 1983.

- [92] J. Wheatley, T. Hofler, G. W. Swift, and A. Migliori. Experiments with an Intrinsically Irreversible Acoustic Heat Engine. *50(7)* :499–502, 1983.
- [93] L. A. Wilen. Dynamic measurements of the thermal dissipation function of reticulated vitreous carbon. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(1) :179–184, 2001.
- [94] T. Yazaki, A. Iwata, T. Maekawa, and A. Tominaga. Traveling wave thermoacoustic engine in a looped tube. *Phys. Rev. Lett.*, 1998.
- [95] Z. Yu and A. J. Jaworski. Impact of acoustic impedance and flow resistance on the power output capacity of the regenerators in travelling-wave thermoacoustic engines. *Energy Convers. Manag.*, 51(2) :350–359, 2010.
- [96] Z. Yu, P. Saechan, and A. J. Jaworski. A method of characterising performance of audio loudspeakers for linear alternator applications in low-cost thermoacoustic electricity generators. *Appl. Acoust.*, 72(5) :260–267, 2011.
- [97] H. Yuan, S. Karpov, and A. Prosperetti. A Simplified Model for Linear and Nonlinear Processes in Thermoacoustic Prime Movers. Part II. Nonlinear Oscillations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102(6) :3497–3506, 1997.
- [98] N. A. Zolpakar, N. Mohd-Ghazali, R. Ahmad, and T. Maré. Performance of a 3D-printed Stack in a Standing Wave Thermoacoustic Refrigerator. *Energy Procedia*, 105 :1382–1387, 2017.

## Liste des publications et communications scientifiques

### Articles dans des revues internationales à comité de lecture :

- V. Zornotti, G. Poignand, S. L. Garrett. Prediction of limit cycle amplitudes in thermoacoustic engines by means of impedance measurements. *Journal of Applied Physics*, **124**, 154901 (2018)\*

\*Pour cette publication, l'éditeur nous a fait l'honneur d'un *editor's pick*, à savoir que l'article est proposé gratuitement, dans sa version complète, sur le site : <https://aip.scitation.org/>.

### Communications orales à des conférences internationales avec comité de sélection :

- V. Zornotti, G. Poignand, S. L. Garrett. To predict a thermoacoustic engine's limit cycle from its impedance measurement. *The 173rd Meeting of the Acoustical Society of America*, ASA 2017, Boston (Ma), the United State of America, 25-29 Juin 2017.
- V. Zornotti, G. Poignand, S. L. Garrett. Prédiction de la dynamique des générateurs d'ondes thermoacoustiques à partir de la méthode des matrices de transfert non linéaires. *13ème Congrès Français d'Acoustique*, CFA 2016, Le Mans, France, 11-15 Avril 2016.

### Autres communications orales :

- V. Zornotti, G. Poignand, S. L. Garrett. High amplitude impedance measurement for thermoacoustic engines. *Thermoacoustic Hub Date*, Le Mans, France, 30 Mai - 1er Juin 2018.

### Productions en médiations scientifiques :

- Prix du public Ma Thèse en 180 secondes, Finale Régionale Bretagne-Loire, Rennes (2018). Accessible en ligne à [https://www.youtube.com/watch?v=1gj3Hor6OpU&list=PLObdaqMn-Z1p50d1r\\_tHM1FpMM7huSNcr](https://www.youtube.com/watch?v=1gj3Hor6OpU&list=PLObdaqMn-Z1p50d1r_tHM1FpMM7huSNcr),
- Prix du public Ma Thèse en 180 secondes, Finale Locale, Le Mans (2018). Accessible en ligne à <https://www.youtube.com/watch?v=WCbssaGj-yQ>,
- Exposé ta thèse, *Le Mans Université*, Le Mans (2017).
- Journée LMAc, *Le Mans Université*, Le Mans (2016).