



HAL
open science

Concurrence, Innovation et Régime Optimal de Licence de Brevet

Bouguezzi Fehmi

► **To cite this version:**

Bouguezzi Fehmi. Concurrence, Innovation et Régime Optimal de Licence de Brevet. Economies et finances. Université de Nice Sophia Antipolis; Université de Tunis El Manar, 2014. Français. NNT : . tel-02383668

HAL Id: tel-02383668

<https://theses.hal.science/tel-02383668v1>

Submitted on 27 Nov 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITE DE TUNIS EL MANAR
UNIVERSITE DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS



INSTITUT SUPERIEUR D'ECONOMIE ET DE MANAGEMENT



ÉCOLE DOCTORALE 513
Droit Et Sciences Politiques, Économiques et de Gestion
Groupe de Recherche En Droit, Économie, Gestion – UMR 6227



**Thèse en vue de l'obtention du
Doctorat en Sciences-Économiques**

**Concurrence, Innovation et Régime Optimal
de Licence de Brevet**

Présentée et soutenue publiquement par

Fehmi Bouguezzi

19 Décembre 2014

Jury :

Dominique TORRE	Professeur - UNS	Président
Zouhour KARRAY	Professeur – ESSEC de Tunis	Rapporteur
Stéphane LEMARIE	Directeur de recherches - UMR GAEL INRA -UPMF	Rapporteur
Christophe CHARLIER	Maître de Conférences - UNS	Directeur de Thèse
Mohamed Adel DHIF	Professeur - FSEG de Nabeul	Directeur de Thèse

Résumé

On étudie dans cette thèse les modalités de licence de brevet entre une firme innovatrice et une autre firme non innovatrice. On étudie pour cela les modalités de licence par un prix fixe et par une royauté dans un modèle linéaire à la Hotelling, un modèle circulaire à la *Salop* quand les coûts de transport sont linéaires et les coûts de production sont symétriques puis asymétriques et puis on étudie dans un autre modèle le transfert de technologie à la *Hotelling* quand les coûts sont quadratiques et enfin on cherche si les mêmes régimes restent optimaux quand les consommateurs se localisent non pas sur des modèles linéaires mais sur une ville plus réaliste à deux dimensions. On trouve qu'un équilibre de Nash existe dans le premier modèle si les firmes se situent à une certaine distance des extrémités de la ville, Qu'on a les mêmes modalités de licence optimales dans le cas d'un modèle de *Salop* quand les coûts de production sont symétriques ou dans le cas où la firme qui détient le brevet est efficiente en terme de coûts. Par contre, quand la firme qui détient le brevet est très inefficace en terme de coûts et que la taille de l'innovation est intermédiaire alors, une licence par une royauté peut être optimale même quand l'innovation est intense. Dans l'étude du modèle linéaire à la Hotelling, on trouve que pour une structure de coûts quadratique, on a les mêmes modalités de licence optimales que dans le cas où les coûts sont linéaires. Enfin, dans le dernier article où les consommateurs sont localisés sur une ville à deux dimensions, on trouve qu'un prix fixe peut être optimal quand la taille de l'innovation est intermédiaire ou assez intense et que l'inefficacité de la firme qui détient le brevet en terme de coût est moyenne ou grande.

Abstract

We study here the patent licensing regimes in different duopoly models including an innovator firm and a non innovator. We compare two licensing regimes: a fixed fee and a per unit royalty in a linear model à la *Hotelling* then in a circular model à la *Salop* in a two dimensional model which is more realistic. We also study the *Hotelling* model with quadratic transportation costs. We show, in the first *Hotelling* model where firms are located at equal distances from the end points of the city, that a Nash equilibrium depends on the distance between the firm and the end point of the city. We show, in the circular model, that we find the same optimal licensing regimes when the production unit costs of the two firms are the same (asymmetric costs) or when the patent holder is efficient in costs. However, when the patent holder is highly inefficient in costs and the size of the innovation is intermediate, we find that a royalty licensing may be optimal even for a drastic innovation. In the *Hotelling* model with quadratic transportation costs, we find the same optimal regimes as in the *Hotelling* model with linear costs. Finally, in the two dimensional model where consumers are located in a realistic city, we find that a fixed fee licensing regime may be optimal when the size of the innovation is intermediate and or enough drastic and when the inefficiency of the patent holder in terms of costs is medium or high.

Plan

Introduction générale.....	5
Article 1 : Transfert de technologie dans une ville linéaire à la <i>Hotelling</i> avec emplacements symétriques.....	7
Article 2 : Transfert de technologie dans une ville linéaire à la <i>Hotelling</i> avec une fonction de coût quadratique.....	21
Article 3 : Licence de Brevet dans une Compétition Spatiale à une Dimension avec Asymétrie des Coûts.....	33
Article 4 : Transfert de technologie dans un modèle à deux dimensions	66
Conclusion.....	94

Introduction Générale

Les modalités de licence de brevet ont été étudiées par un certain nombre d'auteurs dont notamment Wang (1998) et (2002) où il a comparé deux régimes de licences dans un duopole à la Cournot puis dans un oligopole avec des produits différenciés et a trouvé que le régime de licence optimal dépend de la taille de l'innovation (intense ou non intense). Poddar et Sinha (2004) ont étudié le transfert de technologie dans un modèle à la Hotelling quand les firmes sont localisées aux deux extrémités de la ville et trouvent que, pour une firme innovatrice interne au marché, que le régime de licence par des royalties est optimal quand l'innovation est non intense et que l'absence de licence est meilleure pour une innovation intense

On étudie dans cette thèse quatre articles dans lesquels on compare les modalités de licence de brevet dans des modèles avec des structures différentes. Dans le premier article, on étudie le transfert de technologie dans un modèle linéaire à la *Hotelling* où il y a un duopole formé d'une firme innovatrice et une autre non innovatrice. On suppose que la firme innovatrice possède une innovation de procédé qu'elle avait brevetée auparavant et qu'elle va décider de la modalité de licence de brevet qui lui procure un revenu le plus élevé. On suppose que les consommateurs sont localisés sur une ville linéaire et que les deux firmes sont localisées à distances égales par rapport aux extrémités. La comparaison des modalités de licence se fait selon un paramètre qui a été introduit pour la première fois par *Arrow (1962)*, et qui a été discuté aussi par d'autres auteurs dont *Wang (1998)* et *Wang (2002)* et qui est la taille de l'innovation c'est-à-dire l'importance de l'innovation qui est mesurée par la diminution du coût de production unitaire suite à l'utilisation de la nouvelle technologie. On trouve qu'un équilibre de Nash existe si l'innovation est non intense et que la meilleure modalité est une royauté tandis que quand l'innovation est intense, la firme innovatrice n'a plus intérêt à accorder une licence.

On essaie dans le deuxième article d'étudier le transfert de technologie dans le cas où les firmes sont localisées aux deux extrémités d'un modèle à la Hotelling mais que les coûts de transport des consommateurs ne sont plus linéaires mais quadratiques. On trouve les mêmes régimes optimaux déjà trouvés par Poddar et Sinha (2004) c'est-à-dire le régime de licence par une royauté est optimal quand l'innovation est non intense et pas de licence en cas

d'innovation intense. On montre que la structure des coûts de transport qu'elle soit linéaire ou quadratique n'influe pas sur la décision de licence de la firme qui détient le brevet.

Dans un troisième article, on cherche à connaître les modalités de licence optimales si le modèle devient circulaire à la *Salop* et si en plus les coûts ne restent pas les mêmes c'est-à-dire que l'une des firmes devient inefficace ou efficace en termes de coûts. On trouve les mêmes résultats déjà trouvés dans le modèle de *Hotelling* quand les firmes sont localisées aux extrémités dans le cas où la firme innovatrice est efficace en termes de coûts. Cependant, les résultats différents pour les deux modèles linéaire et circulaire quand la firme innovatrice est inefficace c'est-à-dire quand son coût de production unitaire est inférieur au coût de production unitaire de la firme non innovatrice. En effet, on a trouvé qu'une royauté peut être optimale même quand l'innovation est intense et qu'un prix fixe n'est jamais optimal.

Dans le quatrième article, on essaie de voir ce qui se passe quand les consommateurs sont localisés sur une ville à deux dimensions et non pas en une seule dimension comme dans les deux premiers modèles ce qui est plus réaliste. On étudie l'asymétrie puis l'asymétrie des coûts c'est-à-dire quand la firme innovatrice est efficace puis inefficace en termes de coûts. On trouve qu'une modalité de licence par un prix fixe peut être optimale quand l'innovation est intermédiaire ou assez forte et que la différence entre les coûts est moyenne ou forte.

Dans chaque article, on présente un petit résumé, puis une introduction dans laquelle on présente la revue de littérature ainsi que les résultats, puis on présente le modèle et puis pour chaque régime de licence à savoir le régime d'absence de licence, le régime de licence par un prix fixe et puis le régime de licence par une royauté, on calcule les profits correspondants ainsi que le revenu total de la firme qui détient le brevet et on cherche le régime optimal et enfin on conclut.

Transfert de technologie dans une ville linéaire à la Hotelling avec emplacements symétriques

Résumé

Cet article compare les modalités de licence de brevet dans un duopole où l'une des firmes possède une innovation de procédé brevetée et qu'elle décide de la vendre ou non à l'autre firme sous l'une des modalités de prix fixe ou de royalties. L'apport de cet article par rapport à ce qui a été discuté dans la littérature est qu'ici le marché est sous la forme d'une ville linéaire au sens de *Hotelling* où il y a deux firmes situées symétriquement et à distances égales des deux extrémités. On trouve qu'en cas d'absence de licence, un équilibre de *Nash* existe si et seulement si l'innovation est non intense. On montre aussi qu'une modalité de licence par des royalties est meilleure qu'une modalité de licence par un prix fixe quand l'innovation est non intense ou assez forte, qu'un prix fixe est meilleur que des royalties en cas d'innovation intense et très forte. On trouve aussi que le régime de licence par prix fixe n'est pas optimal pour la firme innovatrice indépendamment de la taille de l'innovation et que le meilleur régime serait des royalties en cas d'innovation non intense. Si l'innovation est intense, la firme innovatrice n'a plus intérêt à accorder une licence et profite seule de son innovation.

Mots clés : *Modèle de Hotelling, transfert de technologie, licence de brevet*

Classification JEL : *C21, L24, O31, O32*

1 Introduction

Plusieurs auteurs ont étudié les modalités de licence de brevet et le transfert de l'innovation. *Wang* (1998) et (2002) compare deux régimes de licences dans un duopole à la *Cournot* puis dans un oligopole avec des produits différenciés et trouve que le régime de licence optimal dépend de la taille de l'innovation (intense ou non intense). *Kamien, Oren et Tauman* (1992) étudient le régime de licence optimal d'une innovation de procédé quand la firme innovatrice est externe au marché. *Cohen et Morrison* (2004) se sont concentrés sur les effets d'entraînements technologiques dans l'industrie manufacturière aux Etats Unis et trouve que ca affecte les décisions d'emplacement des firmes. *Mai et Peng* (1999) a discuté de la coopération et de la concurrence entre des firmes dans un modèle à la *Hotelling* avec différenciation des produits. *Piga et Theoloky* (2005) a supposé que les effets d'entraînement

technologiques dépendent de la localisation des firmes dans le sens où les effets d'entraînement augmentent quand les firmes se rapprochent et montrent que la distance entre les localisations des firmes augmente avec le degré de différenciation des produits. *Osborne et Pitchik* (1987) étudient les localisations optimales de deux firmes concurrentes dans un modèle à la *Hotelling* et trouvent que les firmes choisissent à l'équilibre des emplacements proches des quartiles de la ville linéaire. *Paci et Usai* (2000), à travers une étude économétrique de 85 secteurs industriels en Italie, étudient le processus d'agglomération spatiale de l'innovation et trouvent que les activités technologiques d'une industrie locale influence positivement les innovations dans les mêmes secteurs. *Alcacer et Chung* (2007) étudient le choix de localisation des firmes avec des stratégies différentes des firmes entrantes aux Etats Unis entre les années 1985 et 1994 et trouvent que les firmes choisissent des emplacements avec des activités d'innovation académique. *Poddar et Sinha* (2004) étudient le transfert de technologie dans un modèle à la *Hotelling* quand les firmes sont localisées aux deux extrémités de la ville et trouvent que, pour une firme innovatrice interne au marché, que le régime de licence par des royalties est optimal quand l'innovation est non intense et que l'absence de licence est meilleure pour une innovation intense. *Matsumura et Matsushima* (2008) étudient la relation entre les activités de licence et les emplacements des firmes et trouvent que les activités de licence qui suivent des investissements dans la recherche et le développement favorisent une différenciation maximale entre les firmes. *Long et Sonbeyran* (1998) supposent dans un modèle de *Hotelling* que les spillovers dépendent de la distance qui sépare les firmes et trouvent que l'agglomération peut être optimale pour l'emplacement des firmes. Ils montrent aussi qu'une dispersion géographique peut être une autre solution optimale dans une concurrence spatiale à deux dimensions. *Hussler, Lorentz et Rond* (2007) ont supposé que, dans un modèle à la *Hotelling*, que les capacités d'absorption des firmes sont fonction de leurs investissements interne en R&D et que les firmes déterminent le niveau maximum des spillovers qu'elles peuvent absorber. Ils trouvent que ce dernier est maximal quand les firmes sont placées symétriquement et tendent à s'agglomérer dans le centre de la ville linéaire quand le coût de transport augmente. *Pinske, Slade et Brett* (2002) trouvent, à travers une étude économétrique des vendeurs de carburants aux Etats Unis, que la concurrence est extrêmement concentrée géographiquement. *Alderighi et Piga* (2008) considèrent un modèle de ville circulaire à la *Salop* avec des coûts différents et trouvent que l'hétérogénéité des coûts augmente le surplus et diminue le nombre de firmes entrantes. Dans cet article on va étudier les modalités de licence par prix fixe et les royalties dans le cas d'une ville linéaire où les deux firmes sont mobiles et non pas fixes comme c'est le cas de la

recherche faite par *Poddar* et *Sinha* (2002) et on va trouver qu'un équilibre de *Nash* existe si et seulement si les firmes respectaient à l'équilibre certains emplacements bien spécifiés et selon la taille de l'innovation.

2 Modèle

Soit une ville linéaire de longueur l sur laquelle on trouve deux firmes A et B produisant un bien homogène et situées à distances égales des deux extrémités. On suppose que la firme A est située à l'abscisse a et que la firme B est située à l'abscisse $l-a$ (avec $a < \frac{l}{2}$ pour que la firme A soit située à la moitié gauche de la ville et que la firme B soit située à la moitié droite)

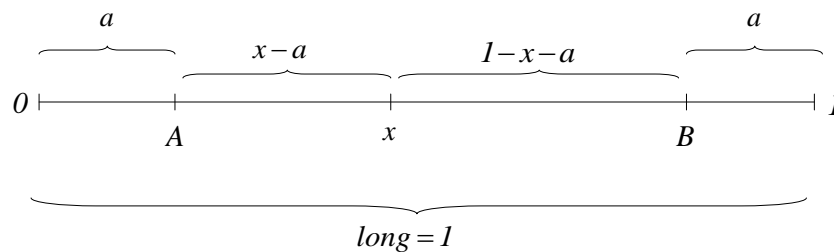


Fig 1 : Modèle

Pour étudier et pouvoir comparer les modalités de licence de brevet, on va supposer que la firme A possède une innovation brevetée qui permet de réduire le coût de production unitaire de ε qui est un paramètre de mesure de la taille de l'innovation et qui dépend des investissements dans la recherche et le développement entrepris par la firme innovatrice A et

qui ne va faire l'objet de cette recherche puisque l'objectif est de chercher les conditions de l'existence d'un équilibre de *Nash* et de comparer les modalités de licences. On suppose que les consommateurs sont répartis uniformément sur l'intervalle $[0, l]$ et que chaque consommateur subit un coût de transport linéaire égal à td avec t le coût de transport unitaire et d la distance le séparant de la firme.

On suppose que la firme innovatrice a le choix entre trois régimes de licences: Soit l'absence de licence où elle profite seule de son innovation, la firme non innovatrice utilise dans ce cas l'ancienne technologie. Soit le régime de licence par prix fixe dans lequel la firme non innovatrice profite de la nouvelle technologie à condition de payer une redevance annuelle fixe et ne dépendant pas de sa part de marché ou de sa production, soit le régime de royalties dans lequel la firme non innovatrice achète la licence de brevet en contre partie d'un prix qui dépend de sa production.

Le jeu se fait en quatre étapes. A la première étape les deux firmes choisissent leurs emplacements, à la deuxième étape la firme A décide de la modalité de licence ainsi que du montant de prix fixe ou de royalties, à la troisième étape la firme B décide d'accepter ou non l'offre de licence de la firme A et à la dernière étape les deux firmes fixent leurs prix de vente.

Pour déterminer les fonctions de demande adressées aux deux firmes, il faut trouver l'emplacement du consommateur indifférent entre les produits de la firme A et la firme B . l'utilité du consommateur situé en x dépend négativement du prix du produit acheté et du coût de transport subi.

$$U_A = -p_1 - t|x - a| \text{ et } U_B = -p_2 - t|l - x - a|$$

La fonction d'utilité d'un consommateur situé en x et achetant le produit de la firme A est

$$U_A = \begin{cases} -p_1 - t(a - x) & \text{si } x < a \\ -p_1 - t(x - a) & \text{si } x > a \end{cases}$$

La fonction d'utilité d'un consommateur situé en x et achetant le produit de la firme B est

$$U_B = \begin{cases} -p_2 - t(l - x - a) & \text{si } x < l - a \\ -p_2 - t(x + a - l) & \text{si } x > l - a \end{cases}$$

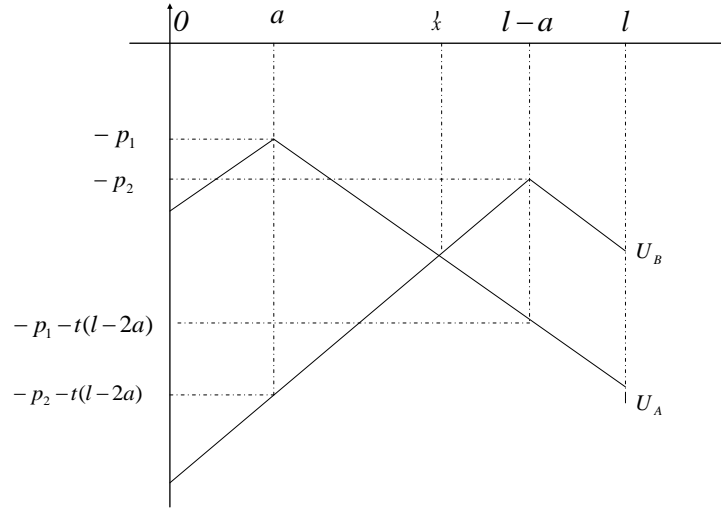


Fig 2 : Fonctions d'utilité des consommateurs

Dans l'intervalle $x \in [a, l-a]$ l'emplacement du consommateur marginal est \tilde{x} qui vérifie

$$U_A = U_B \Leftrightarrow \tilde{x} = \frac{p_2 - p_1 + tl}{2t}$$

La fonction de demande adressée à la firme A est :

$$D_A = \begin{cases} l & \text{si } p_1 \in \text{Int}_1^A \\ \tilde{x} & \text{si } p_1 \in \text{Int}_2^A \\ 0 & \text{si } p_1 \in \text{Int}_3^A \end{cases} \Leftrightarrow D_A = \begin{cases} l & \text{si } p_1 \in \text{Int}_1^A \\ \frac{p_2 - p_1 + tl}{2t} & \text{si } p_1 \in \text{Int}_2^A \\ 0 & \text{si } p_1 \in \text{Int}_3^A \end{cases}$$

avec

$$\text{INT}_1^A = [c_1, p_2 - t(l-2a)]$$

$$\text{INT}_2^A = [p_2 - t(l-2a), p_2 + t(l-2a)]$$

$$\text{INT}_3^A = [p_2 + t(l-2a), +\infty]$$

La fonction de demande adressée à la firme B est :

$$D_B = \begin{cases} 0 & \text{si } p_2 \in \text{Int}_1^B \\ l - \tilde{x} & \text{si } p_2 \in \text{Int}_2^B \\ l & \text{si } p_2 \in \text{Int}_3^B \end{cases} \Leftrightarrow D_B = \begin{cases} 0 & \text{si } p_2 \in \text{Int}_1^B \\ \frac{p_1 - p_2 + tl}{2t} & \text{si } p_2 \in \text{Int}_2^B \\ l & \text{si } p_2 \in \text{Int}_3^B \end{cases}$$

avec

$$\text{INT}_1^B = [p_1 + t(l - 2a), +\infty]$$

$$\text{INT}_2^B = [p_1 - t(l - 2a), p_1 + t(l - 2a)]$$

$$\text{INT}_3^B = [c_2, p_1 - t(l - 2a)]$$

Les fonctions de profit sont :

$$\pi_A = \begin{cases} (p_1 - c_1)l & \text{si } p_1 \in \text{Int}_1^A \\ (p_1 - c_1) \frac{p_2 - p_1 + tl}{2t} & \text{si } p_1 \in \text{Int}_2^A \\ 0 & \text{si } p_1 \in \text{Int}_3^A \end{cases}$$

$$\pi_B = \begin{cases} 0 & \text{si } p_2 \in \text{Int}_1^B \\ (p_2 - c_2) \frac{p_1 - p_2 + tl}{2t} & \text{si } p_2 \in \text{Int}_2^B \\ (p_2 - c_2)l & \text{si } p_2 \in \text{Int}_3^B \end{cases}$$

Pour qu'il existe un équilibre de *Nash*, il faut que les deux firmes pratiquent des prix p_1 et p_2 vérifiant $|p_1 - p_2| \leq t(l - 2a)$. En effet, pour la firme *A*, dans l'intervalle INT_3^A , son profit est nul et pour l'augmenter elle a intérêt à pratiquer un prix $p_1 < p_2 + t(l - 2a)$. De même; pour la firme *B*, dans l'intervalle INT_1^B , son profit est nul et a intérêt pour l'augmenter à pratiquer un prix $p_2 < p_1 + t(l - 2a)$. en résumé, un équilibre de *Nash* existe dans l'intervalle INT_2^A (ou INT_2^B).

La maximisation des profits des deux firmes par rapport aux prix donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_A}{\partial p_1} = \frac{1}{2t}(p_2 - 2p_1 + tl + c_1) \\ \frac{\partial^2 \pi_A}{\partial p_1^2} = -\frac{1}{t} < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial \pi_B}{\partial p_2} = \frac{1}{2t}(p_1 - 2p_2 + tl + c_2) \\ \frac{\partial^2 \pi_B}{\partial p_2^2} = -\frac{1}{t} < 0 \end{cases}$$

ce qui donne les prix d'équilibre suivants:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_A}{\partial p_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi_B}{\partial p_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{2}(p_2 + tl + c_1) \\ p_2 = \frac{1}{2}(p_1 + tl + c_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1^* = tl + \frac{1}{3}(2c_1 + c_2) \\ p_2^* = tl + \frac{1}{3}(c_1 + 2c_2) \end{cases}$$

En remplaçant dans les fonctions de profits des firmes A et B on trouve:

$$\pi_A^* = \frac{1}{2t} \left(tl + \frac{1}{3}(c_2 - c_1) \right)^2 \text{ et } \pi_B^* = \frac{1}{2t} \left(tl + \frac{1}{3}(c_1 - c_2) \right)^2$$

Les demandes d'équilibres adressées aux deux firmes sont :

$$D_A = \tilde{x} = \frac{1}{2t} \left(tl + \frac{1}{3}(c_2 - c_1) \right) \text{ si } p_1 \in INT_2^A$$

$$D_B = l - \tilde{x} = \frac{1}{2t} \left(tl - \frac{1}{3}(c_2 - c_1) \right) \text{ si } p_2 \in INT_2^B$$

3 Modalité d'absence de licence

Dans ce cas, la firme innovatrice profite seule de sa propre innovation tandis que sa concurrente utilise l'ancienne technologie. En notant par c_1 et c_2 les coûts de productions unitaires respectifs de la firme A et de la firme B on peut écrire $c_1 = c - \varepsilon$ et $c_2 = c$. en remplaçant dans les expressions d'équilibre des profits des firmes on trouve :

$$\pi_A = \frac{1}{2t} \left(tl + \frac{1}{3}\varepsilon \right)^2 \text{ et } \pi_B = \frac{1}{2t} \left(tl - \frac{1}{3}\varepsilon \right)^2$$

Les prix d'équilibre des deux firmes sont :

$$p_1^* = tl + c - \frac{2}{3}\varepsilon \text{ et } p_2^* = tl + c - \frac{1}{3}\varepsilon$$

On voit bien dans les expressions des prix p_1^* et p_2^* que l'utilisation de la nouvelle technologie permet à la firme A de baisser son prix de $|p_1^* - p_2^*| = \frac{1}{3}\varepsilon$ moins que le prix de la firme B . On voit bien que cette différence de prix dépend de la taille de l'innovation ε qui déterminera selon son intensité si la firme qui utilise l'ancienne technologie va rester ou quitter la ville linéaire.

La firme B ne profitant pas d'une licence réalise un profit non nul si $p_2^* > c \Leftrightarrow \varepsilon < 3tl$

On peut voir que le prix de la firme B dépasse son coût unitaire de production c si et seulement si l'innovation est non intense ($\varepsilon < 3tl$). Pour pouvoir parler d'équilibre de *Nash*,

on va supposer que l'innovation apportée par la firme A n'est pas intense pour ne pas avoir un monopole sur la ville linéaire car si $\varepsilon \geq 3tl$ on aura $p_2 < c$ et $\pi_B = 0$.

La fonction de profit de la firme A comporte trois parties: une partie affine sur l'intervalle INT_1^A , une partie parabolique sur l'intervalle INT_2^A et une partie nulle sur l'intervalle INT_3^A .

Or pour que l'équilibre de *Nash* existe et qu'il soit sur l'intervalle INT_2^A , il faut que le profit optimal de la firme A sur INT_2^A soit supérieur au profit maximal qu'elle peut réaliser sur la partie affine INT_1^A .

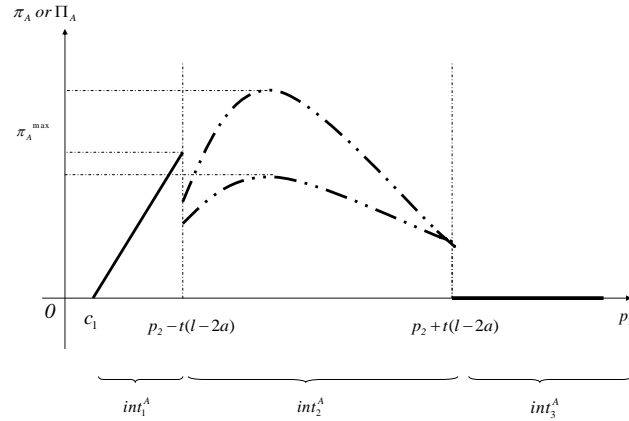


Fig 3 : Revenu total de la firme innovatrice

Le profit optimal de A déjà calculé sur INT_2^A est $\pi_A^{Int2} = \frac{1}{2t} \left(tl + \frac{1}{3} \varepsilon \right)^2$ et son profit maximal

sur INT_1^A est $\pi_A^{Int1} = \left(2at + \frac{2}{3} \varepsilon \right) l$

$$\pi_A = \begin{cases} (p_1 - c_1)l & \text{si } p_1 \in Int_1^A \\ (p_1 - c_1) \frac{p_2 - p_1 + tl}{2t} & \text{si } p_1 \in Int_2^A \\ 0 & \text{si } p_1 \in Int_3^A \end{cases} \Rightarrow \pi_A = \begin{cases} \left(2at + \frac{2}{3} \varepsilon \right) l & \text{si } p_1 \in Int_1^A \\ \frac{1}{2t} \left(tl + \frac{1}{3} \varepsilon \right)^2 & \text{si } p_1 \in Int_2^A \\ 0 & \text{si } p_1 \in Int_3^A \end{cases}$$

Un équilibre de *Nash* existe si $\pi_A^{Int2} > \pi_A^{Int1} \Leftrightarrow a < \frac{l}{4} + \frac{\varepsilon}{36t^2l} (\varepsilon - 6tl)$.

Proposition 1

En cas d'absence de licence, un équilibre de *Nash* existe si la taille de l'innovation apportée par la firme qui détient le brevet est non intense et que les firmes sont situées symétriquement sur la ville dans des emplacements vérifiant $a < \frac{l}{4} + \frac{\varepsilon}{36t^2l}(\varepsilon - 6tl)$. Dans le cas où l'innovation est intense, la firme non innovatrice, ne bénéficiant pas d'une licence, est écartée du marché.

Etudions l'effet de la taille de l'innovation sur la marge d'emplacement des deux firmes qu'on notera par $a_{\max} = \frac{l}{4} + \frac{\varepsilon}{36t^2l}(\varepsilon - 6tl)$. En calculant la dérivée de l'emplacement maximal par rapport à ε on trouve $\frac{\partial a_{\max}}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{18lt^2}(\varepsilon - 3tl) < 0$ pour $\varepsilon < 3tl$

Proposition 2

On remarque que lorsque la taille de l'innovation augmente tout en restant non intense, alors l'emplacement maximal se rapproche vers 0 c'est à dire que les deux firmes se rapprochent des extrémités

4 Modalité de licence par prix fixe

Dans ce cas, la firme *B* bénéficie de la nouvelle technologie en contre partie du paiement d'une prix fixe F . On supposera que F est égal au montant maximum que la firme *B* peut payer en contre parte de la licence et qui est égal à l'augmentation de son profit avec l'utilisation de la nouvelle technologie: $F = \pi_B^F - \pi_B^{PL} - \alpha$ avec $\alpha \rightarrow 0$ pour garantir que la firme *B* acceptera d'acheter une licence en contre partie de F .

les coûts unitaires de production des firmes *A* et *B* sont $c_1 = c_2 = c - \varepsilon$. en remplaçant dans

les expressions de profit on trouve : $\pi_A = \frac{1}{2t}(tl)^2$ et $\pi_B = \frac{1}{2t}(tl)^2$

Le montant de prix fixe à payer est :

$$F = \frac{\varepsilon}{6t} \left(2tl - \frac{1}{3}\varepsilon \right) - \alpha$$

Le revenu total de la firme *A* sera égal à son profit majoré du revenu qui provient de la vente de la licence:

$$\Pi_A^F = \pi_A + F = \frac{1}{2t}(tl)^2 + \frac{\varepsilon}{6t}\left(2tl - \frac{1}{3}\varepsilon\right) - \alpha = \frac{1}{2t}\left(\left(tl + \frac{1}{3}\varepsilon\right)^2 - \frac{2}{9}\varepsilon^2\right) - \alpha$$

Proposition 3

Dans le cas d'un modèle à la *Hotelling* où les firmes sont placées symétriquement et où l'une des firmes possède une innovation de procédé qu'elle peut vendre à sa concurrente alors elle n'a pas intérêt à choisir la modalité de licence par prix fixe car le régime d'absence de licence lui procure un revenu total meilleur que celui avec un prix fixe et ce indépendamment de la taille de l'innovation.

Preuve

$$\Pi_A^F - \pi_A^{PL} = -\frac{1}{9t}\varepsilon^2 - \alpha < 0$$

5 Modalité de licence par des royalties

Dans le cadre de ce régime de licence, la firme *B* profite de l'utilisation de la nouvelle technologie en contre partie du paiement de royalties proportionnelles à la quantité de biens vendues et égales à $r(l - \tilde{x})$ à la firme *A*. Le taux de royalties r doit être compris dans l'intervalle $]0, \varepsilon]$ car sinon la firme non innovatrice ne sera plus intéressée à acheter la licence.

Les coûts de productions unitaires des firmes *A* et *B* sont respectivement $c_1 = c - \varepsilon$ et $c_2 = c - \varepsilon + r$

En remplaçant dans les expressions de profit d'équilibre on trouve :

$$\pi_A = \frac{1}{2t}\left(tl + \frac{1}{3}r\right)^2 \text{ et } \pi_B = \frac{1}{2t}\left(tl - \frac{1}{3}r\right)^2$$

Le revenu total de la firme innovatrice s'écrit:

$$\Pi_A^r = \pi_A + r(l - \tilde{x}) = \frac{1}{2t}\left(tl + \frac{1}{3}r\right)^2 + \frac{r}{2t}\left(tl - \frac{1}{3}r\right)$$

Maximisant le revenu total de la firme innovatrice par rapport à r on trouve:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_A^r}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi_A^r}{\partial r^2} = -\frac{2}{9t} < 0 \end{cases} \Rightarrow r^* = \frac{15}{4}tl$$

Comme $r \in]0, \varepsilon]$ alors Π_A^r est maximal quand r est maximal et donc $r^* = \varepsilon - \alpha$ (avec $\alpha \rightarrow 0$ pour garantir que la firme B va acheter la licence)

Les profits des deux firmes deviennent égales à

$$\pi_A = \frac{1}{2t} \left(tl + \frac{1}{3} \varepsilon \right)^2 \text{ et } \pi_B = \frac{1}{2t} \left(tl - \frac{1}{3} \varepsilon \right)^2$$

Le profit de la firme A majoré de son revenu de licence est :

$$\Pi_A^r = \pi_A + r(l - \tilde{x}) = \frac{1}{2t} \left(tl + \frac{1}{3} \varepsilon \right)^2 + \frac{\varepsilon}{2t} \left(tl - \frac{1}{3} \varepsilon \right)$$

Proposition 4

Le régime de licence par des royalties est meilleur que le régime d'absence de licence si l'innovation est non intense ($\varepsilon < 3tl$).

Preuve

$$\Pi_A^r - \pi_A^{PL} = \frac{\varepsilon}{2t} \left(tl - \frac{1}{3} \varepsilon \right)$$

$$\Pi_A^r > \pi_A^{PL} \text{ si } \varepsilon < 3tl \text{ et } \Pi_A^r < \pi_A^{PL} \text{ si } \varepsilon > 3tl$$

En comparant le revenu total de la firme A pour une modalité de licence par prix fixe et son revenu total avec une modalité de licence par des royalties, on trouve que (pour $\alpha \rightarrow 0$):

$$\Pi_A^r - \Pi_A^F = \frac{\varepsilon}{18t} (9tl - \varepsilon)$$

On remarque que $\Pi_A^r > \Pi_A^F$ si $\varepsilon < 9tl$ et que $\Pi_A^r < \Pi_A^F$ si $\varepsilon > 9tl$.

Proposition 5

Le régime de licence par la modalité de royalties peut être meilleur que le régime de licence par un prix fixe quand l'innovation est non intense ou assez forte ($\varepsilon < 9tl$). Cependant, un prix fixe s'avère meilleur pour la firme innovatrice que des royalties quand l'innovation est très forte ($\varepsilon > 9tl$).

Les régimes optimaux de la firme A se résument ainsi :

$$\begin{cases} r \phi PL \phi F & \text{si } 0 < \varepsilon < 3tl \\ PL \phi r \phi F & \text{si } 3tl < \varepsilon < 9tl \\ Pl \phi F \phi r & \text{si } \varepsilon > 9tl \end{cases}$$

Il apparait donc que la meilleure modalité de licence est celle de royalties quand $\varepsilon < 3tl$ et celle d'absence de licence quand $\varepsilon > 3tl$. Cependant, un équilibre de *Nash* existe si et seulement si le profit optimal de la firme *A* sur la partie parabolique soit supérieur à son profit maximal sur la partie affine.

$$\Pi'_A = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\varepsilon + 2at\right)l & \text{if } p_1 \in Int_1^A \\ \frac{1}{2t}\left(tl + \frac{1}{3}\varepsilon\right)^2 + \frac{\varepsilon}{2t}\left(tl - \frac{1}{3}\varepsilon\right) & \text{if } p_1 \in Int_2^A \\ 0 & \text{if } p_1 \in Int_3^A \end{cases}$$

$$\Pi'_A(Int_2^A) > \Pi'_A(Int_1^A) \Leftrightarrow a < \frac{l}{4} - \frac{\varepsilon}{18t^2l}\left(\varepsilon - \frac{3}{2}tl\right)$$

Proposition 6

Pour une innovation non intense, la licence par des royalties est la meilleur modalité pour la firme innovatrice quand la taille de l'innovation est faible ($\varepsilon < 3tl$) et quand son emplacement sur la ville linéaire ne dépasse pas $\frac{l}{4} - \frac{\varepsilon}{18t^2l}\left(\varepsilon - \frac{3}{2}tl\right)$. Dans les autres cas, la meilleure stratégie est de ne pas accorder de licence et de devenir un monopole.

6 Conclusion

On a étudié dans le cadre de ce modèle les stratégies optimales de licence pour une firme innovatrice se situant sur une ville linéaire au sens de *Hotelling*. On a trouvé que la taille de l'innovation influe sur l'emplacement d'équilibre des firmes et que si celles si sont placées symétriquement et à distances égales des extrémités alors une augmentation de la taille de l'innovation fait rapprocher les deux firmes des deux extrémités. On a trouvé aussi que la modalité de licence par prix fixe n'est pas meilleure que celle d'absence de licence et qu'une innovation intense fait sortir la firme non innovatrice du marché dans le cas où celle ci ne bénéficie pas d'une licence. On a montré aussi qu'une licence par un prix fixe peut être meilleure qu'une licence par des royalties si l'innovation est intermédiaire ou forte. Enfin, on a montré l'existence d'un équilibre de *Nash* pour lequel la modalité de licence par des

royalties s'avère la meilleur modalité de licence pour la firme innovatrice quand l'innovation est faible et pour une marge d'emplacement bien spécifiée des deux firmes. Pour les autres cas, on a trouvé que la firme innovatrice n'a pas intérêt à accorder une licence et qu'elle fera mieux de bénéficier seule de son innovation et devenir un monopole.

Bibliographie

[1] Alcácer, J. and Chung, W., (2007) Location Strategies and Knowledge Spillovers, *Management Science* Vol. 53, No. 5, May 2007, pp. 760–776

[2] Alderighi, M. and Piga, C., The Circular City with Heterogeneous Firms (July, 13, 2008). Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1159381>

[3] Alderighi, M. and Piga, C., (2009) , On cost restrictions in spatial competition models with heterogeneous firms , Department of Economics , Discussion Paper Series.

[4] Cohen, J.P. and C.J. Morrison Paul, 2004, Agglomeration Economies and Industry Location Decisions: The Impacts of Spatial and Industrial Spillovers

[5] Hussler C., Lorentz A., Ronde P. (2007), "Agglomeration and endogenous absorptive capacities: *Hotelling* revisited", Jena Economic Research Papers, WP2007-12.

[6] Long, N.G., Soubeyran, A., 1998. R&D spillovers and location choice under *Cournot* rivalry. *Pacific Economic Review* 3, 105– 119.

[7] Mai, C.-C. and Peng, S.-K., 1999. Cooperation vs. competition in a spatial model. *Regional Science and Urban Economics* 29, 463–472.

[8] Matsumura and Matsushima (2008) On patent licensing in spatial competition with endogenous location choice

[9] Osborne, M. and Pitchik, C. (1987), equilibrium in a *Hotelling's* model of spatial

competition, *Econometrica* 55 (1987), pp. 911–922

[10] Paci, R. Usai, S. (2000) Externalities, knowledge spillovers and the spatial distribution of innovation, *GeoJournal* (vol. 4, 2000) special issue “ Learning and Regional Development: Theoretical Issues and Empirical Evidence” . Ed. Ron Boschma

[11] Piga, C., Theotoky, J. (2005) Endogenous R&D spillovers and locational choice , *Regional Science and Urban Economics* 35 (2005) 127– 139

[12] Pinkse, Slade, C Brett (2002), Spatial price competition a semiparametric approach, - *Econometrica*, 2002

[13] Poddar, S. and Sinha, U.B., (2004). On patent licensing in spatial competition. *Economic Record* 80, 208–218.

[14] Hussler C., Lorentz A., Ronde P. (2007), "Agglomeration and endogenous absorptive capacities: *Hotelling* revisited", Jena Economic Research Papers, WP2007-12.

[15] Wang, X.H., 1998. Fee versus royalty licensing in a *Cournot* duopoly model. *Economics Letters* 60, 55–62.

[16] Wang, X.H., 2002. Fee versus royalty licensing in a differentiated *Cournot* duopoly. *Journal of Economics and Business* 54, 253–266.

Transfert de technologie dans une ville linéaire à la Hotelling avec une fonction de coût quadratique

Résumé

On étudie dans cet article les modalités de licence optimales sur une ville linéaire à la Hotelling quand les firmes sont localisées aux extrémités de la ville et que le coût de transport est non pas linéaire mais quadratique. On étudie pour cela une fonction de coût plus générale et on compare les résultats à ceux précédemment trouvés dans le cas où la fonction de coût de transport est linéaire. On trouve qu'on a les mêmes régimes de licence optimaux à savoir un régime de licence par une royauté quand l'innovation est non intense et une absence de licence quand l'innovation est intense. On trouve aussi que le régime de licence par un prix fixe est toujours meilleur que celui d'absence de licence.

Mots clés : *Modèle de Hotelling, transfert de technologie, licence de brevet, fonction de coût de transport quadratique*

Classification JEL : *C21, L24, O31, O32*

1 Introduction et modèle

Certains auteurs dans la revue de littérature se sont intéressés dans leurs modèles aux fonctions de transport quadratiques dans des modèles spatiaux c'est à dire à la Hotelling ou à la *Salop*. Parmi ces auteurs on trouve Egli (2007) qui a étudié les stratégies d'équilibre dans le cas où il y a deux fonctions de coûts sur un modèle de Hotelling : des consommateurs avec une fonction de coût linéaire et d'autres avec une fonction de coût quadratique. D'Aspremont et al (1979) ont étudié les emplacements optimaux sur un modèle à la Hotelling. Ils ont trouvé qu'avec des coûts de transport quadratiques, les deux vendeurs vont se déplacer vers les extrémités de la ville. Hinloopenyand et al (2013) ont étudié les emplacements optimaux de deux firmes quand les coûts de transport sont linéaires puis quadratiques. Arguedas et al (2007) ont étudié les conditions de non existence d'un équilibre quand les coûts de transport sont quadratiques. Cependant, presque aucun auteur ne s'est intéressé aux modalités de licence optimales sur un modèle à la Hotelling quand les coûts de transport ne sont pas

linéaires mais quadratiques. C'est pour cette raison que je voudrais à travers cet article montrer si les modalités de licence optimales trouvées pour des coûts de transport linéaires restaient encore optimales quand les coûts de transport deviennent quadratiques.

J'essaie donc construire le même modèle déjà analysé à savoir le modèle de Hotelling et j'essaie de comparer les revenus de la firme qui détient le brevet quand les consommateurs paient un coût de transport quadratique. Je suppose que les consommateurs sont répartis uniformément sur la ville linéaire et que les deux firmes se situent aux deux extrémités de la ville.

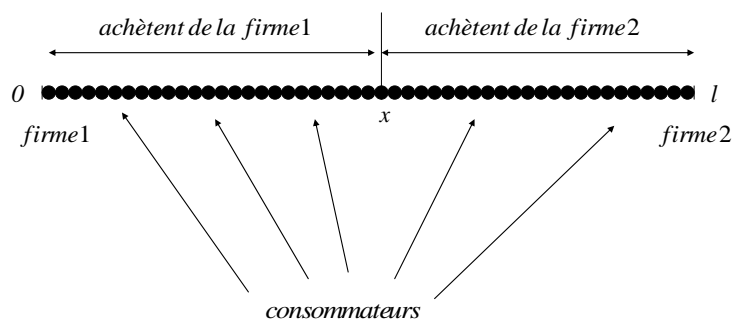


Fig 1 : Modèle

Je suppose que la fonction de coût de transport est la suivante :

$$C(d) = \alpha t d + \beta t d^2$$

où t est le coût de transport unitaire, d la distance entre consommateur et firme. Les variables α et β serviront pour comparer les résultats dans le cas où le coût de transport est purement linéaire $C(d) = t d$ (pour $\alpha = 1$ et $\beta = 0$) et puis dans le cas où la fonction de coût est quadratique sans composante linéaire $C(d) = \beta t d^2$ (pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1$).

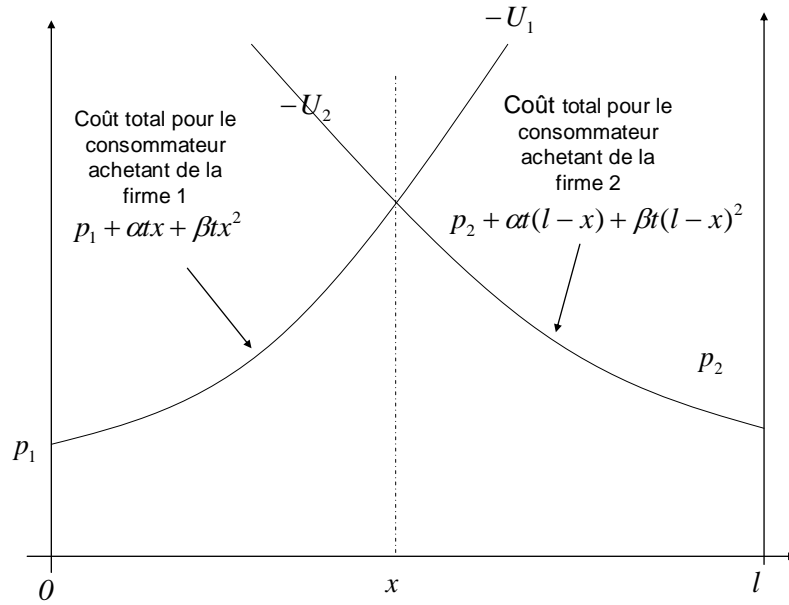


Fig 2 : Fonctions de coûts

La fonction d'utilité comprend un coût de transport linéaire dans le cas où $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. On retrouve ici le modèle déjà analysé dans Poddar et Sinha (2004)

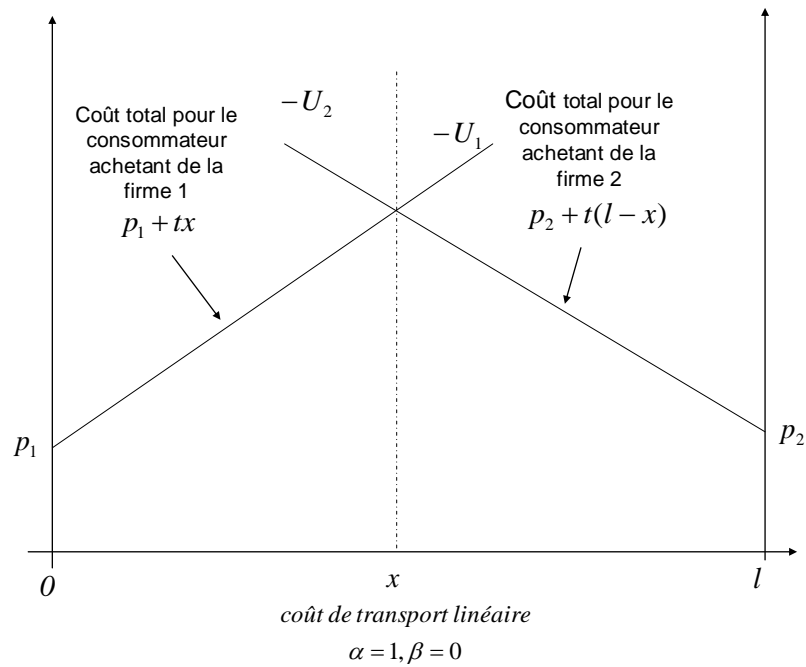


Fig 3 : Fonctions de coûts linéaires

La fonction d'utilité comprend ici un coût de transport purement quadratique dans le cas où $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

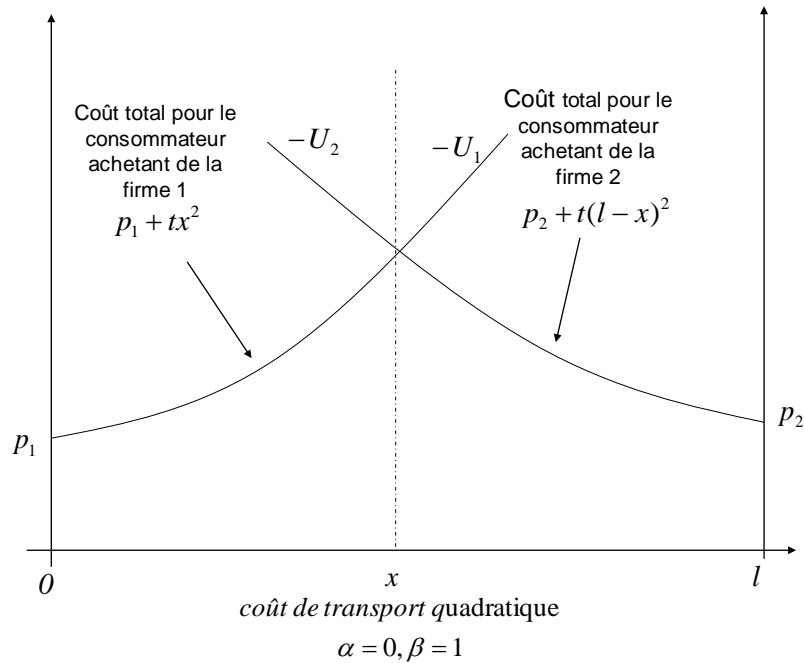


Fig 4 : Fonctions de coûts purement quadratiques

La fonction d'utilité d'un consommateur situé en x et achetant le produit de la firme 1 est:

$$U_1 = -p_1 - \alpha x - \beta x^2$$

La fonction d'utilité d'un consommateur situé en x et achetant le produit de la firme 2 est:

$$U_2 = -p_2 - \alpha(l-x) - \beta t(l-x)^2$$

L'emplacement du consommateur marginal est \tilde{x} qui vérifie l'égalité entre les deux utilités :

$$\tilde{x} = \frac{1}{2t(\alpha + l\beta)} (p_2 - p_1 + \alpha t l + \beta t l^2)$$

La fonction de demande adressée à la firme 1 est :

$$D_1 = \begin{cases} l & \text{si } p_1 < p_2 - \alpha t l - \beta t l^2 \\ \tilde{x} & \text{si } p_2 - \alpha t l - \beta t l^2 < p_1 < p_2 + \alpha t l + \beta t l^2 \\ 0 & \text{si } p_1 > p_2 + \alpha t l + \beta t l^2 \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{cases} l & \text{si } p_1 < p_2 - \alpha l - \beta t l^2 \\ \frac{1}{2t(\alpha + l\beta)} (p_2 - p_1 + \alpha l + \beta t l^2) & \text{si } p_2 - \alpha l - \beta t l^2 < p_1 < p_2 + \alpha l + \beta t l^2 \\ 0 & \text{si } p_1 > p_2 + \alpha l + \beta t l^2 \end{cases}$$

La fonction de demande adressée à la firme 2 est :

$$D_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } p_1 < p_2 - \alpha l - \beta t l^2 \\ l - \tilde{x} & \text{si } p_2 - \alpha l - \beta t l^2 < p_1 < p_2 + \alpha l + \beta t l^2 \\ l & \text{si } p_1 > p_2 + \alpha l + \beta t l^2 \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } p_1 < p_2 - \alpha l - \beta t l^2 \\ \frac{1}{2t(\alpha + l\beta)} (p_1 - p_2 + \alpha l + \beta t l^2) & \text{si } p_2 - \alpha l - \beta t l^2 < p_1 < p_2 + \alpha l + \beta t l^2 \\ l & \text{si } p_1 > p_2 + \alpha l + \beta t l^2 \end{cases}$$

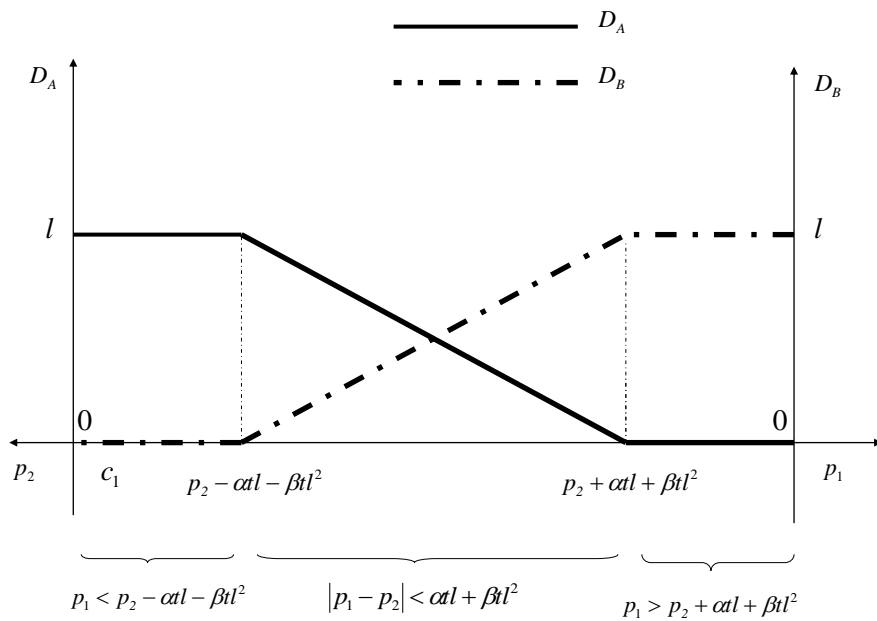


Fig 5 : Fonctions de demande

On a ici pour chaque fonction de demande trois intervalles différents de prix. Un intervalle de prix où il y a deux firmes actives et deux intervalles où il n'y a qu'une seule firme. En effet, les firmes sont actives quand $|p_1 - p_2| < \alpha l + \beta t l^2$

Si $|p_1 - p_2| > \alpha t l + \beta t l^2$ il y aura une seule firme sur le marché qui profite elle seule de toute la demande.

La firme 1 attire tous les consommateurs si son coût d'achat qui comprend le prix et le coût de transport du consommateur le plus éloigné est inférieur au prix d'achat chez la firme 2 c'est à dire $p_1 + \alpha t l + \beta t l^2 < p_2$.

De même la firme 2 attire tous les consommateurs quand son prix d'achat et le coût du transport de consommateur localisé en l'emplacement de la firme 1 est inférieur à p_1 c'est à dire $p_2 + \alpha t l + \beta t l^2 < p_1$

Dans le cas où on a deux firmes actives sur le marché c'est à dire quand $|p_1 - p_2| < \alpha t l + \beta t l^2$, les fonctions de profit sont :

$$\pi_1 = (p_1 - c_1)D_1 = (p_1 - c_1) \frac{1}{2t(\alpha + l\beta)} (p_2 - p_1 + \alpha t l + \beta t l^2)$$

$$\pi_2 = (p_2 - c_2)D_2 = (p_2 - c_2) \frac{1}{2t(\alpha + l\beta)} (p_1 - p_2 + \alpha t l + \beta t l^2)$$

La maximisation respective des deux fonctions de profit par rapport aux prix donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1^* = \alpha t l + \beta t l^2 + \frac{1}{3}(2c_1 + c_2) \\ p_2^* = \alpha t l + \beta t l^2 + \frac{1}{3}(c_1 + 2c_2) \end{cases}$$

Pour trouver les prix d'équilibres ci dessus, on doit chercher les fonctions de réaction en fonction des prix.

La première condition $\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = 0$ nous donne $p_1 = R_1(p_2) = \frac{1}{2}(p_2 + c_1 + \alpha t l + \beta t l^2)$

La deuxième condition $\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = 0$ nous donne $p_2 = R_2(p_1) = \frac{1}{2}(p_1 + c_2 + \alpha t l + \beta t l^2)$

L'intersection des deux fonctions de réaction nous donne les prix d'équilibre.

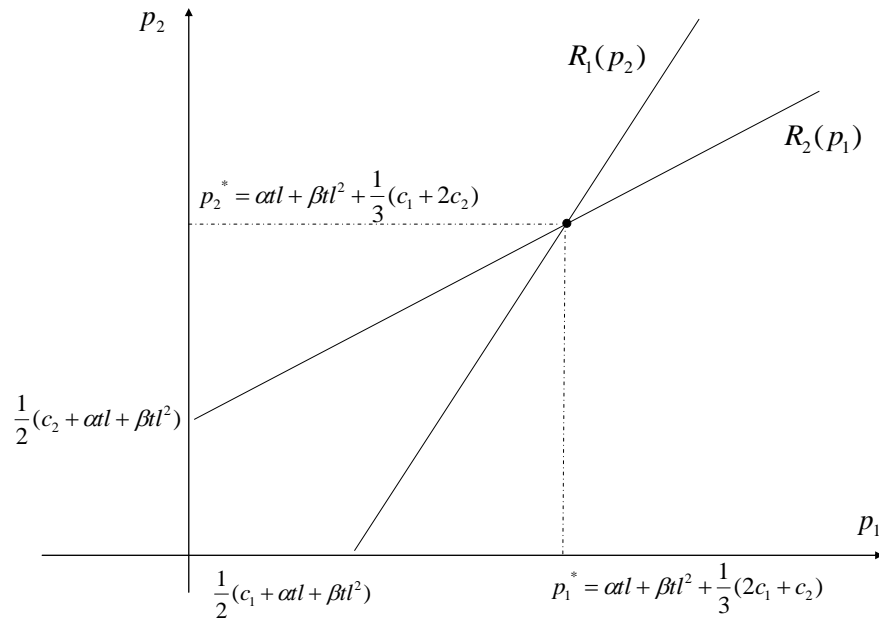


Fig 6 : Fonctions de réaction

Les fonctions de demande adressées aux deux firmes sont :

$$D_1 = \frac{1}{6t(\alpha + l\beta)} (c_2 - c_1 + 3\alpha t l + 3\beta t l^2)$$

$$D_2 = \frac{1}{6t(\alpha + l\beta)} (c_1 - c_2 + 3\alpha t l + 3\beta t l^2)$$

En remplaçant dans les fonctions de profits des firmes 1 et 2 on trouve:

$$\pi_1 = \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)} (c_2 - c_1 + 3\alpha t l + 3\beta t l^2)^2$$

$$\pi_2 = \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)} (c_1 - c_2 + 3\alpha t l + 3\beta t l^2)^2$$

Dans ce qui suit on va étudier le cas où $|p_1 - p_2| < \alpha t l + \beta t l^2$ c'est à dire quand

$$\left| \frac{1}{3}(c_1 - c_2) \right| < \alpha t l + \beta t l^2.$$

Dans le cas d'absence de licence ($c_1 = c - \varepsilon$ et $c_2 = c$) ça revient à supposer que $\varepsilon < 3\alpha t l + 3\beta t l^2$ (cas d'innovation non intense). Dans le cas où l'innovation est intense, il n'y aura qu'une seule firme sur le marché à savoir celle qui détient le brevet.

Dans les cas de licence par prix fixe ou par une royauté ($c_1 = c_2 = c - \varepsilon$) on aura toujours

cette condition vérifiée puisque $\alpha t l + \beta t l^2 > 0$.

2 Modalité d'absence de licence

Dans le cas d'absence de licence, le coût de production marginal de la firme innovatrice qui détient le brevet est $c_1 = c - \varepsilon$ et celui de la firme qui utilise l'ancienne technologie est $c_2 = c$.

Les fonctions de prix sont les suivantes :

$$p_1 = t\beta l^2 + t\alpha l + c - \frac{2}{3}\varepsilon$$

$$p_2 = t\beta l^2 + t\alpha l + c - \frac{1}{3}\varepsilon$$

La firme 2 vend à un prix supérieur à son coût marginal quand $\varepsilon < 3\alpha t l + 3\beta t l^2$ ce qui correspond à l'intervalle où la taille de l'innovation est non intense.

Dans ce cas d'innovation, on aura toujours deux firmes sur le marché et les demandes qui lui sont adressées sont :

$$D_1 = \frac{1}{6t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2 + \varepsilon)$$

$$D_2 = \frac{1}{6t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2 - \varepsilon)$$

Les profits sont :

$$\pi_1 = \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2 + \varepsilon)^2$$

$$\pi_2 = \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2 - \varepsilon)^2$$

Quand l'innovation est intense c'est à dire la taille de l'innovation est tel que $\varepsilon > 3\alpha t l + 3\beta t l^2$ il n'y aura qu'une seule firme sur le marché à savoir celle qui utilise seule la nouvelle technologie. Le prix pratiqué par celle là serait égal à son coût marginal minoré du coût de transport que devra payer le consommateur situé à l'emplacement de la firme 2 soit $p_1 = c - (\alpha t l + \beta t l^2)$.

Les demandes adressées aux deux firmes sont : $D_1 = l$ et $D_2 = 0$ puisque la firme 1 attire toute la demande.

Les profits des deux firmes sont : $\pi_1^{PL} = (\varepsilon - \alpha t l - \beta t l^2)l$ et $\pi_2^{PL} = 0$

3 Modalité de licence par prix fixe

Les deux firmes ici utilisent la nouvelle technologie. Leurs coûts de production sont les mêmes $c_1 = c_2 = c - \varepsilon$

Les prix des deux firmes sont : $p_1 = (\alpha t l + \beta t l^2 + c - \varepsilon)$ et $p_2 = (\alpha t l + \beta t l^2 + c - \varepsilon)$

Les demandes adressées aux deux firmes sont : $D_1 = \frac{1}{6t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2)$ et

$$D_2 = \frac{1}{6t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2)$$

Les profits sont : $\pi_1^F = \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2)^2$ et $\pi_2^F = \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2)^2$

Le calcul du prix fixe que la firme 1 doit payer à la firme 2 se fera selon deux cas: le cas non intense et le cas intense.

Dans le cas où l'innovation est non intense $\varepsilon < 3\alpha t l + 3\beta t l^2$:

$$F = \pi_2^F - \pi_2^{PL} = \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2)^2 - \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2 - \varepsilon)^2 = \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)}(6\alpha t l + 6\beta t l^2 - \varepsilon)\varepsilon$$

$$\Pi_1^F = \pi_1^F + F = \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2)^2 + \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)}(6\alpha t l + 6\beta t l^2 - \varepsilon)\varepsilon$$

Dans le cas où l'innovation est intense $\varepsilon > 3\alpha t l + 3\beta t l^2$:

$$F = \pi_2^F - \pi_2^{PL} = \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2)^2 - 0 = \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2)^2$$

$$\Pi_1^F = \pi_1^F + F = \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2)^2 + \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2)^2 = \frac{1}{9t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2)^2$$

Proposition

Le régime d'absence de licence est toujours meilleur que celui d'une licence avec un prix fixe dans le cas où le coût de transport est quadratique et indépendamment de la taille de l'innovation

Preuve

Pour le cas non intense $\varepsilon < 3\alpha t l + 3\beta t l^2$

$$\Pi_1^F - \pi_1^{PL} = -\frac{1}{9t(\alpha + l\beta)}\varepsilon^2 < 0$$

Pour le cas intense $\varepsilon > 3\alpha t l + 3\beta t l^2$

$$\Pi_1^F - \pi_1^{PL} = l(2\alpha t l + 2\beta t l^2 - \varepsilon) < 0$$

4 Modalité de licence par une royauté

Le transfert de la technologie se fera ici en échange d'une royauté sur la quantité produite par la firme qui achète la licence. Les coûts de production des deux firmes seront : $c_1 = c - \varepsilon$ et $c_2 = c - \varepsilon + r$ où r désigne la royauté qui doit être positive et inférieur à la taille de l'innovation ε .

Les demandes adressées aux deux firmes sont : $D_1 = \frac{1}{6t(\alpha + l\beta)}(r + 3\alpha t l + 3\beta t l^2)$ et

$$D_2 = \frac{1}{6t(\alpha + l\beta)}(-r + 3\alpha t l + 3\beta t l^2)$$

Les profits sont : $\pi_1 = \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2 + r)^2$ et $\pi_2 = \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)}(3\alpha t l + 3\beta t l^2 - r)^2$

Le revenu total de la firme qui détient le brevet est :

$$\Pi_1^r = \pi_1 + rD_2 = \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)}(r + 3\alpha t l + 3\beta t l^2)^2 + r \frac{1}{6t(\alpha + l\beta)}(-r + 3\alpha t l + 3\beta t l^2)$$

La maximisation de ce revenu par rapport à r donne :

$$r^* = \varepsilon \text{ si } \varepsilon < \frac{15}{4}tl(\alpha + \beta l) \text{ et } r^* = \frac{15}{4}tl(\alpha + l\beta) \text{ si } \varepsilon > \frac{15}{4}tl(\alpha + \beta l)$$

Le revenu total de la firme 1 sera donc égal à

$$\Pi_1^r = \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)}(\varepsilon + 3\alpha t l + 3\beta t l^2)^2 + \varepsilon \frac{1}{6t(\alpha + l\beta)}(-\varepsilon + 3\alpha t l + 3\beta t l^2) \text{ si } \varepsilon < \frac{15}{4}tl(\alpha + \beta l)$$

$$\Pi_1^r = \frac{33}{16}t l^2(\alpha + \beta l) \text{ si } \varepsilon > \frac{15}{4}tl(\alpha + \beta l)$$

Proposition

Le régime de licence par une royauté est optimal quand l'innovation est non intense. L'absence de licence est meilleure quand l'innovation est intense. On retrouve les mêmes régimes optimaux pour une fonction de coût de transport linéaire de la forme td ($\alpha = 1$ et $\beta = 0$) et les mêmes régimes pour une fonction de coût de transport quadratique de la forme td^2 ($\alpha = 0$ et $\beta = 1$)

Preuve

en cas d'innovation non intense $\varepsilon < 3\alpha t l + 3\beta t l^2$

$$\Pi_1^r - \pi_1^{PL} = \frac{1}{t(\alpha + \beta l)} \left(-\frac{1}{6}\varepsilon + \frac{1}{2}tl(\alpha + l\beta) \right) \varepsilon > 0$$

en cas d'innovation intense $\varepsilon > 3\alpha t l + 3\beta t l^2$ on distingue entre deux sous cas :

$$3\alpha t l + 3\beta t l^2 < \varepsilon < \frac{15}{4}tl(\alpha + \beta l) \text{ et } \varepsilon > \frac{15}{4}tl(\alpha + \beta l).$$

$$\text{si } 3\alpha t l + 3\beta t l^2 < \varepsilon < \frac{15}{4}tl(\alpha + \beta l)$$

$$\Pi_1^r - \pi_1^{PL} = \frac{1}{18t(\alpha + l\beta)} (2\varepsilon + 9\alpha t l + 9\beta t l^2) (3\alpha t l + 3\beta t l^2 - \varepsilon) < 0$$

$$\text{si } \varepsilon > \frac{15}{4}tl(\alpha + \beta l)$$

$$\Pi_1^r - \pi_1^{PL} = l \left(\frac{49}{16}\alpha t l + \frac{49}{16}\beta t l^2 - \varepsilon \right) < 0$$

5 Conclusion

On a essayé dans cet article de voir les modalités de licence optimales quand le coût de transport n'est plus linéaire mais quadratique. On a construit pour cela un modèle linéaire à la Hotelling où les consommateurs sont répartis uniformément et où les firmes sont localisés sur les deux extrémités de la ville. Les résultats montrent qu'on a les mêmes stratégies de licence optimales que dans le modèle où les coûts de transport sont linéaires. La meilleure stratégie reste un régime de licence par une royauté quand l'innovation est non intense et une absence de licence quand l'innovation est intense.

Bibliographie

[1] Arguedas, C., Hamoudi, H., Saez, M., 2007, Equilibrium Nonexistence in Spatial Competition with Quadratic Transportation Costs, Universidad Autónoma de Madrid (Spain), Department of Economic Analysis (Economic Theory and Economic History), Series

Working Papers in Economic Theory number 2007/01.

[2] D'Aspremont et al., 1979, On Hotelling's Stability in Competition, *Econometrica*, 47 (5), pp. 1145–1150

[3] Egli, A. 2007, Hotelling's Beach with Linear and Quadratic Transportation Costs: Existence of Pure Strategy Equilibria, *Australian Economic Papers*, vol. 46, issue 1, pages 39-51

[4] Hinloopenyand, J., Martinez, S., Costly location in Hotelling duopoly, 2013, Tinbergen Institute Discussion Papers with number 13-101/VII

[5] Poddar, S., Sinha, U., 2004, On patent licensing in spatial competition, *Economic Record*, Volume 80, Issue 249, pages 208–218

Licence de Brevet dans une Compétition Spatiale à une Dimension avec Asymétrie des coûts¹

Résumé

On étudie le régime de licence optimal d'une firme innovatrice interne au marché dans un modèle circulaire à la *Salop* et un modèle linéaire à la *Hotelling* quand les coûts de production sont asymétriques dans une concurrence à la *Bertrand*. On étudie deux régimes : une licence par un prix fixe et une licence par une royauté et on les compare selon l'intensité de l'innovation : intense ou non intense. Quand la firme innovatrice est efficiente en termes de coûts par rapport à la firme non innovatrice alors on retrouve les mêmes régimes optimaux que dans le cas où les coûts sont symétriques. Cependant, les résultats diffèrent quand la firme innovatrice est inefficace. En effet, on montre qu'une licence par une royauté peut être optimale même quand l'innovation est intense et que la firme innovatrice est très inefficace en terme de coûts. On montre aussi qu'un régime de licence par un prix fixe n'est jamais optimal.

Mots clés : *Innovation, Transfert de technologie, Modèle de Salop, Modèle de Hotelling, Licence de brevet, coûts symétriques et asymétriques*

Classification JEL : *D43, D45, L13*

1 Introduction

La licence de brevet est une pratique courante qui a lieu dans Presque toutes les industries. C'est une source de revenue pour un innovateur qui réalise des profits supplémentaires en faisant un transfert de sa nouvelle technologie. La plupart des articles précédents se sont

¹ Co-écrit en anglais avec Sougata Poddar, Division of Economics, Nanyang Technological University Singapore et Hanyang University, Seoul

focalisés sur trois régimes de licence de brevet : une royauté sur chaque unité produite avec la technologie brevetée, un prix fixe indépendant de la quantité produite, et un prix d'enchère où la firme innovatrice offre un certain nombre de licences au prix le plus élevé. Deux types de modèles ont été étudiés, notamment le cas où la firme innovatrice est interne et externe au marché. Quand le détenteur de brevet est une organisation de recherche et développement indépendante et qui ne concurrence pas la firme non innovatrice alors il est considéré comme innovateur externe ; cependant quand il concurrence la firme non innovatrice alors il devient innovateur interne. Dans les articles qui traitent des cas où l'innovateur est interne, ce qui le cas de cet article, le transfert de la nouvelle technologie est essentiellement étudié dans des modèles où les coûts de production des firmes concurrentes sont symétriques. On reprend ici le cas où les coûts sont symétriques et on essaie de voir si les mêmes résultats restent valables quand les coûts deviennent asymétriques. En effet, dans ce modèle, la firme innovatrice peut être efficiente ou inefficente en terme de coûts comparée à la firme non innovatrice et la question qui se pose est si le régime optimal dépend peut il être dépendant de la structure des coûts ? On trouve que quand la firme innovatrice est efficiente en terme de coûts alors les régimes optimaux sont les mêmes que dans le modèle symétrique alors que quand les coûts sont asymétriques alors la décision d'accorder une licence appropriée ou de ne pas accorder de licence dépend principalement de la taille de l'innovation et du degré d'asymétrie des coûts. Ainsi, l'analyse des modalités de licence de brevet d'un innovateur interne dans un modèle réaliste comme celui-ci nous donne des explications précieuses sur l'effet de la structure des coûts sur un régime de licence optimal puisque dans tous les marchés, les coûts ne sont pas tout le temps symétriques mais plutôt asymétriques.

Ainsi, une telle analyse est très intéressante pour comprendre réellement les régimes de licence optimaux dans diverses industries² et c'est ce qu'on va étudier dans cet article³.

Maintenant, pour étudier les régimes de licences optimales dans une concurrence spatiale, nous utilisons les modèles les plus utilisés en économie à savoir le modèle circulaire de *Salop* (1979) et le modèle linéaire de *Hotelling* (1929). Une très grande partie de la littérature (voir *Kamien* (1992) pour une revue de littérature sur les licences de brevet, et *Sen et Tauman* (2007) pour les modalités de licence), a étudié les régimes optimaux par un détenteur de

² Voir Rostoker (1983), Caves et al. (1983), Macho-Stadler et al. (1996), Jensen et Thursby (2001) et Vishwasrao (2007), pour les études empiriques sur la nature des contrats de licence dans différentes industries.

³ Poddar et Sinha (2010) dans un article récent, ont étudié le régime de licence optimal quand les firmes sont asymétriques et que la firme innovatrice est relativement inefficente en terme de coûts par rapport à la firme non innovatrice dans une compétition à la Cournot, et ont trouvé des résultats intéressants. Dans cet article, on étudie un modèle de concurrence à la Bertrand au lieu de Cournot.

brevet dans des modèles différents.⁴ Tous ces modèles ont été faits pour des compétitions portant sur le prix ou la quantité (c'est-à-dire l'approche du consommateur sur la différenciation du produit) mais peu d'études ont porté sur des modèles spatiaux.⁵ On croit que les modèles spatiaux, comme ceux de *Salop* et *Hotelling* sont appropriés pour étudier les régimes de licence des firmes dans des industries où les marchés sont déjà développés et non pas croissants dans le temps. Dans de tels modèles, le marché est toujours servi et le demande est stable. Cette caractéristique a certains avantages (*Singh et Vives*, 1984) par rapport aux modèles standard de différenciation de produit. Dans le modèle de *Singh et Vives* (1984), la demande est élastique. Donc comparer des valeurs d'équilibre pour différents régimes de licence s'avère incorrect pour des niveaux de demandes différents. Ainsi, on trouve que les modèles spatiaux de *Salop* et de *Hotelling* sont plus appropriés pour étudier les régimes de licence optimaux dans des marchés développés et matures. C'est aussi une étude des modalités de licence dans des marchés où les produits sont différenciés horizontalement.

Dans notre modèle ici, on considère un marché avec deux firmes, une firme qui détient un brevet et une autre qui est un acheteur potentiel de la licence. La firme qui détient le brevet possède une innovation qui permet de réduire le coût marginal de production. Dans le modèle circulaire à la *Salop*, les firmes sont localisées symétriquement sur la circonférence, et dans le modèle linéaire à la *Hotelling*, les firmes sont localisées sur les extrémités. Les consommateurs, quant à eux, sont distribués uniformément sur la circonférence du modèle de *Salop* et sur le segment linéaire du modèle de *Hotelling*. Dans les deux modèles, les emplacements des firmes concurrentes sont fixes. Le produit final vendu par les deux firmes est homogène, cependant à cause de la présence d'un coût de transport, les produits sont différenciés horizontalement. On considère deux types possibles d'innovation de procédé qui

⁴ Dans la littérature, les résultats trouvés concernant les régimes de licence optimaux sont : si la firme innovatrice est externe au marché alors une licence par un prix fixe (ou une enchère d'un certain nombre de licences) est optimale (voir Kamien & Tauman (1986) ; Katz & Shapiro (1986) ; voir aussi Sen (2005)), cependant une licence par une royalty s'avère optimale pour la firme innovatrice quand celle-ci est interne au marché (voir Rockett (1990) ; Wang (1998) ; Kamien & Tauman (2002) ; Erkal (2005)). Dans certains articles, les auteurs ont étudié les politiques de commerce stratégique en présence de transfert de technologie comme dans Kapiraj & Marjit (2003) ; Mukherjee & Pennings (2006) ; Muckerjee (2007) ; Ghosh & Saha (2008) à l'aide de différents contrats de licence.

⁵ Les licences de brevet dans un modèle spatial étaient initialement étudiées par Caballero et al (2002) ; et Poddar & Sinha (2004). Caballero et al ont utilisé le modèle de la ville circulaire à la *Salop* pour analyser les régimes de licence optimaux avec une firme innovatrice externe au marché et deux autres firmes non innovatrices quand les coûts de production sont les mêmes. Poddar et Sinha ont utilisé le modèle de la ville linéaire à la *Hotelling* pour analyser le cas d'une firme innovatrice interne au marché (aussi bien le cas d'une firme externe) quand les coûts de production sont les mêmes. Notre analyse ici dans le modèle de *Hotelling* (voir section 5) est une extension de Poddar et Sinha (2004), où les coûts de production sont asymétriques.

ont été étudiés dans la littérature à savoir une innovation intense et une innovation non intense. Dans notre analyse, on étudie les régimes de licence par un prix fixe et par une royauté et on cherche le régime de licence optimal que la firme qui détient le brevet va choisir⁶.

Comme c'est mentionné précédemment, la différence entre cet article et ce qui a été fait dans la littérature est l'asymétrie des coûts de production. On montre que quand la firme innovatrice est efficiente par rapport à la firme non innovatrice, plus précisément quand le coût marginal de production de la firme innovatrice est inférieur à celui de la firme non innovatrice alors on trouve les mêmes résultats que dans le cas où les firmes sont symétriques et ce dans les deux modèles : *Hotelling* et *Salop*. On trouve aussi un résultat nouveau par rapport à ce qui a trouvé à la littérature : le régime de licence par une royauté peut être optimal même quand l'innovation est intense et ce quand la firme innovatrice est largement inefficente en terme de coûts et que la taille de l'innovation n'est pas très grande.

Dans la littérature, *Poddar* et *Sinha* (2010) ont aussi étudié le régime optimal quand la firme qui détient le brevet est inefficente par rapport à la firme non innovatrice. Cependant, ils ont étudié le cas d'une compétition à la *Cournot* et ont trouvé que le régime optimal est composé de deux modalités (un prix fixe et une royauté)⁷.

Le reste de l'article est organisé comme suit : Dans la section suivante on étudie le modèle de *Salop*, à la section 3 on étudie les modalités de licence avec des coûts asymétriques dans le modèle de *Salop*. A la section 4, on étudie le même modèle mais avec des coûts asymétriques. A la section 5, on fait une étude similaire mais dans un modèle à la *Hotelling* et à la section 6 on conclut.

2. Modèle de Salop – Compétition à la Bertrand

Soit une ville circulaire dont la longueur de la circonférence est égale à l'unité et soient deux firmes *A* et *B* produisant un bien homogène et situées symétriquement sur la ville. Supposons que la firme *A* est localisée en 0 et que la firme *B* est localisée en $1/2$. Les consommateurs sont distribués uniformément sur la ville circulaire et chacun achète exactement une unité du produit vendu par la firme *A* ou *B*.

⁶ Notons qu'avec une seule firme concurrente, un prix d'enchère n'est pas le bon choix à faire et nous montrons aussi qu'un contrat de licence avec deux modalités ne peut jamais être optimal ici. Ainsi, considérer un contrat de licence avec uniquement un prix fixe et une royauté est suffisant pour trouver le régime de licence optimal.

⁷ L'optimalité avec un contrat de licence à deux modalités a aussi été analysée par Fauli-Oller et Sandonis (2002) dans le contexte de biens différenciés par Sen et Tauman (2007) dans une compétition oligopolistique à la Cournot et par Saracho (2002) dans le contexte de délégation stratégique.

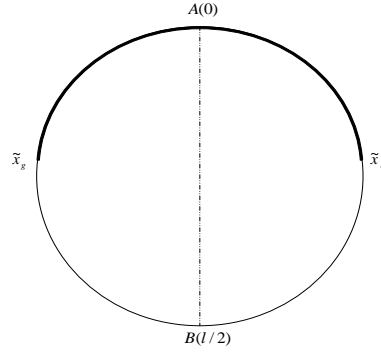


Figure 1

La fonction d'utilité d'un consommateur localisé en x et achetant le produit de la firme A est :

$$U_A = \begin{cases} -p_1 - x & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ -p_1 - (1-x) & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

La fonction d'utilité d'un consommateur localisé en x et achetant le produit de la firme B est :

$$U_B = \begin{cases} -p_2 - \left(\frac{1}{2} - x\right) & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ -p_2 - \left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

On détermine ensuite les demandes adressées aux firmes A et B en cherchant l'emplacement du consommateur indifférent entre acheter le produit des deux firmes. On distingue ici entre deux consommateurs indifférents : le premier localisé en \tilde{x}_d et le second localisé en \tilde{x}_g .

Notons par c_1 et c_2 les coûts marginaux des deux firmes A et B .

La fonction de demande de la firme A est :

$$D_A = \begin{cases} 1 & \text{si } p_1 < p_2 - \frac{1}{2} \\ \tilde{x}_d + (1 - \tilde{x}_g) & \text{si } p_2 - \frac{1}{2} \leq p_1 \leq p_2 + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } p_1 > p_2 + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow D_A = \begin{cases} 1 & \text{si } p_1 \in \text{int}_1^A \\ \frac{1}{2} + (p_2 - p_1) & \text{si } p_1 \in \text{int}_2^A \\ 0 & \text{si } p_1 \in \text{int}_3^A \end{cases}$$

Où $\text{int}_1^A = [c_1, p_2 - \frac{1}{2})$, $\text{int}_2^A = [p_2 - \frac{1}{2}, p_2 + \frac{1}{2}]$, $\text{int}_3^A = (p_2 + \frac{1}{2}, \infty)$

La fonction de demande de la firme B est :

$$D_B = \begin{cases} 0 & \text{si } p_2 > p_1 + \frac{1}{2} \\ \tilde{x}_g - \tilde{x}_d & \text{si } p_1 - \frac{1}{2} \leq p_2 \leq p_1 + \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } p_2 < p_1 - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow D_B = \begin{cases} 0 & \text{si } p_2 \in \text{int}_1^B \\ \frac{1}{2} + (p_1 - p_2) & \text{si } p_2 \in \text{int}_2^B \\ 1 & \text{si } p_2 \in \text{int}_3^B \end{cases}$$

$$\text{Où } \text{int}_1^B = (p_1 + \frac{1}{2}, \infty), \text{int}_2^B = [p_1 - \frac{1}{2}, p_1 + \frac{1}{2}], \text{int}_3^B = [c_2, p_1 - \frac{1}{2})$$

Le profit de la firme A est :

$$\pi_A = \begin{cases} (p_1 - c_1) & \text{si } p_1 \in \text{int}_1^A \\ (p_1 - c_1)(\frac{1}{2} + (p_1 - p_2)) & \text{si } p_1 \in \text{int}_2^A \\ 0 & \text{si } p_1 \in \text{int}_3^A \end{cases}$$

Le profit de la firme B est :

$$\pi_B = \begin{cases} 0 & \text{si } p_2 \in \text{Int}_1^B \\ (p_2 - c_2)(\frac{1}{2} + (p_1 - p_2)) & \text{si } p_2 \in \text{Int}_2^B \\ (p_2 - c_2) & \text{si } p_2 \in \text{Int}_3^B \end{cases}$$

Pour trouver un équilibre de Nash, les prix p_1 et p_2 doivent vérifier cette inégalité:

$$|p_1 - p_2| \leq \frac{1}{2}.$$

La maximisation des profits par rapport aux prix donne les fonctions de réaction suivantes :

$$p_1 = \frac{1}{4}(2p_2 + 1 + 2c_1)$$

$$p_2 = \frac{1}{4}(2p_1 + 1 + 2c_2)$$

$$\text{Les prix d'équilibre sont : } p_1^* = \frac{1}{6}(3 + 4c_1 + 2c_2), p_2^* = \frac{1}{6}(3 + 2c_1 + 4c_2) \quad (1)$$

$$\text{Les profits d'équilibre sont : } \pi_A^* = \frac{1}{36}(3 - 2(c_1 - c_2))^2 \quad \text{et} \quad \pi_B^* = \frac{1}{36}(3 + 2(c_1 - c_2))^2$$

(2)

$$\text{Les demandes à l'équilibre sont : } D_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(c_2 - c_1), D_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(c_1 - c_2)$$

(3)

3. Licence de brevet avec coûts symétriques

Supposons que les coûts marginaux des firmes A et B sont $c_1 = c_2 = c$ et que la firme innovatrice A possède une innovation qui permet de réduire le coût marginal de production d'un certain ε qui aussi une mesure de la taille de l'innovation. Supposons que la firme B est la firme non innovatrice et qui est un acheteur potentiel de la licence.

A la première étape du jeu, la firme qui détient le brevet A décide d'accorder ou non une licence à la firme B et si elle décide d'accorder une licence elle choisit la modalité : un prix fixe ou une royauté. A la deuxième étape du jeu, la firme rivale B décide d'accepter ou de rejeter l'offre de la firme A . à la troisième et dernière étape, les deux firmes se font concurrence à la *Bertrand*.

La firme A choisit son prix fixe ou son taux de royauté qui lui maximise la somme de son revenu qui provient de sa propre production et son revenu de licence. Dans un régime de licence par un prix fixe, la firme B doit payer une somme fixe une seule fois par contre, dans un régime de licence par une royauté, elle paie une somme fixe sur chaque unité produite avec la nouvelle technologie.

On va commencer l'étude par le cas où la firme A n'accorde aucune licence à la firme B et c'est ce qu'on appelle ici le régime l'absence de licence (noté ici par NL).

3.1 Absence de licence

Dans ce régime, la firme A profite seule de son innovation tandis que la firme B utilise l'ancienne technologie. Ainsi $c_1 = c - \varepsilon$ et $c_2 = c$. En remplaçant dans (1) on trouve :

$$p_1^* = \frac{1}{2} + c - \frac{2}{3}\varepsilon \text{ et } p_2^* = \frac{1}{2} + c - \frac{1}{3}\varepsilon$$

La firme B utilisant l'ancienne technologie réalise un profit positif si $D_B > 0$ ou

$$p_2^* > c \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{3}{2}.$$

Ainsi, l'innovation est non intense si $\varepsilon < \frac{3}{2}$ et elle est intense sinon.

Quand l'innovation est non intense $\left(\varepsilon < \frac{3}{2}\right)$, les profits d'équilibre sont :

$$\pi_A^{NL} = \frac{1}{36}(3 + 2\varepsilon)^2 \text{ et } \pi_B^{NL} = \frac{1}{36}(3 - 2\varepsilon)^2$$

Les demandes à l'équilibre sont : $D_A = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{3}$, $D_B = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3}$

Quand l'innovation est intense ($\varepsilon \geq \frac{3}{2}$), le prix de monopole fixé par la firme qui détient le brevet est $p_1 = c - \frac{1}{2}$ et son profit est $\pi_A^{NL} = \varepsilon - \frac{1}{2}$.

3.2 Licence par un prix fixe

Dans ce régime, la firme B peut utiliser la nouvelle technologie en contre partie du paiement d'un prix fixe noté par F . Le montant maximum que la firme A peut charger est égal à l'augmentation du profit de la firme B quand elle utilise la nouvelle technologie. Ainsi, $F = \pi_B^F - \pi_B^{NL}$.

Les coûts de production unitaires des firmes A et B sont $c_1 = c_2 = c - \varepsilon$. Donc, d'après (2) on trouve : $\pi_A = \frac{1}{4}$ et $\pi_B = \frac{1}{4}$.

Les demandes à l'équilibre pour les firmes A et B sont : $D_A = \frac{1}{2}$ et $D_B = \frac{1}{2}$

Pour une innovation non intense, le prix fixe est : $F = \frac{1}{9}\varepsilon(3 - \varepsilon)$

Ainsi, le revenu total de la firme innovatrice est : $\Pi_A^F = \pi_A + F = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{1}{9}\varepsilon^2$

Pour une innovation intense, le prix fixe est : $F = \frac{1}{4}$

Ainsi, le revenu total de la firme innovatrice est : $\Pi_A^F = \pi_A + F = \frac{1}{2}$

Lemme 1

*Dans un modèle circulaire à la Salop avec des coûts symétriques, l'absence de licence est toujours meilleure qu'un prix fixe pour la firme innovatrice quand l'innovation est intense et non intense.*⁸

Preuve

Pour $\varepsilon < \frac{3}{2}$, $\Pi_A^F - \pi_A^{NL} = -\frac{2}{9}\varepsilon^2 < 0$

⁸ Le même résultat a été démontré dans le modèle de la ville linéaire à la Hotelling à Poddar et Sinha (2004) où l'absence de licence est toujours meilleure qu'un licence par un prix fixe.

Pour $\varepsilon \geq \frac{3}{2}$, $\Pi_A^F - \pi_A^{NL} = -\varepsilon < 0$

3.3 Licence par une royaltie

Dans le régime de licence par royaltie, la licence est accordée à la firme B en contre partie d'une royaltie. Le montant maximal de la royaltie que la firme A peut charger ne doit pas excéder ε (car $0 \leq r \leq \varepsilon$).

Les coûts marginaux de production des firmes A et B après la licence sont respectivement $c_1 = c - \varepsilon$ et $c_2 = c - \varepsilon + r$. En remplaçant dans (1) on trouve les prix d'équilibre :

$$p_1 = \frac{1}{2} + c - \varepsilon + \frac{1}{3}r \text{ et } p_2 = \frac{1}{2} + c - \varepsilon + \frac{2}{3}r.$$

Les profits d'équilibre sont : $\pi_A = \frac{1}{36}(3+2r)^2$ et $\pi_B = \frac{1}{36}(3-2r)^2$

Les demandes à l'équilibre sont : $D_A = \frac{1}{2} + \frac{r}{3}$ et $D_B = \frac{1}{2} - \frac{r}{3}$

Ainsi, le revenu total de la firme A sous la modalité de licence par une royaltie est :

$$\Pi_A^r = \frac{1}{36}(3+2r)^2 + r\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{3}\right)$$

Notons que la demande adressée à la firme B est positive si $D_B = \frac{1}{2} - \frac{r}{3} \geq 0$ ce qui équivaut à

écrire $r \leq \frac{3}{2}$

Quand l'innovation est non intense, on a $r \leq \varepsilon < \frac{3}{2}$. La dérivée de la fonction du revenu total

de la firme A par rapport à r est: $\frac{\partial \Pi_A^r}{\partial r} = \frac{5}{6} - \frac{4}{9}r > 0$ car $r \leq \varepsilon < \frac{3}{2}$, et la royaltie optimale est

$r^* = \varepsilon$.

Pour une innovation intense : $\left(\varepsilon \geq \frac{3}{2}\right)$, $r^* = \frac{3}{2}$

En résumé on obtient :

	$\varepsilon < \frac{3}{2}$	$\varepsilon > \frac{3}{2}$
Π_A^r	$-\frac{2}{9}\varepsilon^2 + \frac{5}{6}\varepsilon + \frac{1}{4}$	1

Puisque le régime de licence par prix fixe est dominé par le régime d'absence de licence comme on l'a trouvé au Lemme 1, alors pour trouver le régime de licence optimal, on va se contenter de comparer uniquement les régimes d'absence de licence et celui par une royaltie..

Proposition 1

Dans un modèle circulaire de Salop avec des coûts symétriques, la firme qui détient le brevet accorde une licence sous la modalité de royaltie quand l'innovation est non intense. Quand l'innovation est intense, elle n'accorde aucune licence et devient un monopole.⁹

Preuve

Quand $\varepsilon < \frac{3}{2}$, $\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \frac{\varepsilon}{3} \left(\frac{3}{2} - \varepsilon \right) > 0$. Les deux firmes sont actives ici

puisque $|p_1 - p_2| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow r \leq \frac{3}{2}$ ce qui est vérifié ici.

Quand $\varepsilon > \frac{3}{2}$, $\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \frac{1}{2} - \varepsilon < 0$

4. Licence de brevet avec coûts asymétriques

Maintenant, supposons que les coûts de production unitaires des firmes A et B ne sont pas égales et supposons que la firme innovatrice est inefficace en terme de coûts c'est-à-dire $c_1 > c_2$ (on notera par $\delta = c_1 - c_2$ la différence entre les coûts). On étudiera après le cas où la firme innovatrice est efficace (c'est-à-dire $c_1 < c_2$).

4.1 Entreprise innovatrice inefficace

4.1.1 Licence par un prix fixe

Dans ce cas les deux firmes utilisent la nouvelle technologie et les coûts de production unitaires des firmes A et B sont respectivement $c_1' = c_1 - \varepsilon$ et $c_2' = c_2 - \varepsilon$. En remplaçant dans (1), (2) et (3) on trouve les prix d'équilibre ainsi que les profits et les demandes.

Pour une innovation non intense, ($\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$), le prix fixe est

⁹ Les mêmes résultats ont été trouvés dans Wang (1998) dans un duopole à la Cournot et dans Poddar et Sinha (2004) dans un modèle linéaire à la Hotelling avec une concurrence à la Bertrand.

$$F = \pi_B^F - \pi_B^{NL} = \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{1}{9}\varepsilon^2 + \frac{2}{9}\delta\varepsilon.$$

Le revenu total de la firme innovatrice est :

$$\Pi_A^F = \pi_A^F + F = \left(-\frac{1}{9}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\delta\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{9}\delta^2 - \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{4}\right)$$

Pour une innovation intense ($\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$), le prix fixe est $F = \pi_B^F - \pi_B^{NL} = \frac{1}{36}(3 + 2\delta)^2$

Le revenu total dans ce cas est : $\Pi_A^F = \pi_A^F + F = \frac{2}{9}\delta^2 + \frac{1}{2}$

Les deux firmes concurrentes sont actives sur le marché sous la modalité de licence par un prix fixe si les prix d'équilibre vérifient : $|p_2 - p_1| < \frac{1}{2}$.

On voit bien que $|p_2 - p_1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \delta < \frac{3}{2} = 1.5$ (en utilisant les prix d'équilibre). Donc cette condition doit être vérifiée pour le cas de licence par un prix fixe.

En résumé on obtient pour la modalité de licence par un prix fixe :

	$\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$	$\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$
Π_A^F	$\left(-\frac{1}{9}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\delta\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{9}\delta^2 - \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{4}\right)$	$\frac{2}{9}\delta^2 + \frac{1}{2}$

4.1.2 Licence par une royauté

Similairement au cas symétrique, la valeur de royauté optimale doit vérifier $0 \leq r \leq \varepsilon$ pour s'assurer que la firme B va acheter la licence. Les coûts de production unitaires sont dans ce cas : $c_1' = c_1 - \varepsilon$ et $c_2' = c_2 - \varepsilon + r$.

En remplaçant dans (1) on trouve les prix d'équilibre :

$$p_1^* = \frac{1}{6}(3 + 4c_1 + 2c_2 - 6\varepsilon + 2r); \quad p_2^* = \frac{1}{6}(3 + 2c_1 + 4c_2 - 6\varepsilon + 4r)$$

En remplaçant dans (3) on trouve les demandes à l'équilibre :

$$D_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(c_2 - c_1 + r), \quad D_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(c_1 - c_2 - r)$$

En remplaçant dans (2) on trouve les profits à l'équilibre :

$$\pi_A^r = \frac{1}{36}(3 - 2(c_1 - c_2 - r))^2 \quad \text{et} \quad \pi_B^r = \frac{1}{36}(3 + 2(c_1 - c_2 - r))^2$$

Le revenu total de la firme innovatrice est égal à :

$$\Pi'_A = \pi'_A + rD_B = \frac{1}{36}(3 - 2(\delta - r))^2 + r\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(\delta - r)\right)$$

En maximisant ce revenu total par rapport au taux de royauté on trouve :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi'_A}{\partial r} = \frac{1}{18}(2\delta - 8r + 15) \\ \frac{\partial^2 \Pi'_A}{\partial r^2} = -\frac{4}{9} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow r^* = \frac{15}{8} + \frac{1}{4}\delta$$

Cependant, on doit vérifier que la valeur optimale r^* ne dépasse pas ε et que la demande de la firme B est positive. On peut voir que $D_B > 0 \Leftrightarrow r < \frac{3}{2} + \delta$

On doit distinguer donc entre deux cas : innovation intense et non intense.

Pour une innovation non intense ($\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$), le taux de royauté optimal est :

$$\left\{ \begin{array}{l} r^* = \varepsilon \quad \text{if } \varepsilon < \frac{3}{2} + \delta \text{ and } \delta < \frac{1}{2} \\ r^* = \frac{15}{8} + \frac{1}{4}\delta \quad \text{if } \frac{15}{8} + \frac{1}{4}\delta < \varepsilon < \frac{3}{2} + \delta \text{ and } \delta > \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (4) \text{ et } (5)$$

Pour une innovation intense ($\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$), le taux de royauté optimal est :

$$\left\{ \begin{array}{l} r^* = \frac{3}{2} + \delta \quad \text{if } \frac{3}{2} + \delta < \frac{15}{8} + \frac{1}{4}\delta \Leftrightarrow \delta < \frac{1}{2} \\ r^* = \frac{15}{8} + \frac{1}{4}\delta \quad \text{if } \frac{15}{8} + \frac{1}{4}\delta < \frac{3}{2} + \delta \Leftrightarrow \delta > \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (6) \text{ et } (7)$$

On doit maintenant vérifier que $|p_2 - p_1| < \frac{1}{2}$ pour que les deux firmes soient actives sur le marché dans le cas d'une licence par une royauté.

En utilisant les prix d'équilibre, $|p_2 - p_1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \delta - \frac{3}{2} < r^* < \delta + \frac{3}{2}$; cette condition est vérifiée si et seulement si $\delta < 4.5$ (voir la démonstration à l'annexe (i) où on démontre aussi toutes les valeurs optimales du taux de royauté trouvées de (4) à (7)).

En résumé, pour le régime de licence par une royauté on trouve :

	$\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$	$\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$
$\delta < \frac{1}{2}$	$\Pi_A^r = \left(-\frac{2}{9}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{9}\delta\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{9}\delta^2 - \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{4}\right)$	$\Pi_A^r = 1$
$\delta > \frac{1}{2}$	$\Pi_A^r = \frac{33}{32} + \frac{1}{8}\delta^2 - \frac{1}{8}\delta$	$\Pi_A^r = \frac{33}{32} + \frac{1}{8}\delta^2 - \frac{1}{8}\delta$

4.1.3 Comparaison entre prix fixe et royaltie

On compare dans le tableau suivant les revenus totales de la firme innovatrice pour les régimes de licence par un prix fixe et par une royaltie :

	$\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$	$\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$
$\delta < \frac{1}{2}$	$\Pi_A^r - \Pi_A^F = \frac{1}{18}\varepsilon(-2\delta - 2\varepsilon + 9)$	$\Pi_A^r - \Pi_A^F = \frac{1}{2} - \frac{2}{9}\delta^2$
$\delta > \frac{1}{2}$	$\Pi_A^r - \Pi_A^F = \frac{1}{9}\varepsilon^2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\delta\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{72}\delta^2 + \frac{5}{24}\delta + \frac{25}{32}\right)$	$\Pi_A^r - \Pi_A^F = \frac{17}{32} - \frac{1}{8}\delta - \frac{7}{72}\delta^2$

En cherchant le signe des différences entre les revenus totaux concernés (voir l'annexe (ii)), on trouve ce qui suit :

	$\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$	$\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$
$\delta < \frac{1}{2}$	$\Pi_A^r - \Pi_A^F > 0$	$\Pi_A^r - \Pi_A^F > 0$
$\frac{1}{2} < \delta < 1.7815$	$\Pi_A^r - \Pi_A^F > 0$	$\Pi_A^r - \Pi_A^F > 0$

Ainsi, on peut énoncer le résultat suivant :

Lemme 2

Dans un modèle circulaire à la Salop avec des coûts asymétriques, quand la firme qui détient le brevet est inefficace, une royaltie est toujours meilleure qu'un prix fixe pour une innovation intense et non intense.

4.1.4 Absence de licence

Supposons maintenant que la firme innovatrice utilise seule la nouvelle technologie. Son coût de production unitaire est $c_1' = c_1 - \varepsilon$ et celui de la firme non innovatrice B qui utilise

l'ancienne technologie est $c_2' = c_2$.

Pour une innovation non intense, les profits des deux firmes sont

$$\pi_A^{NL} = \frac{1}{36}(3-2(\delta-\varepsilon))^2 \text{ et } \pi_B^{NL} = \frac{1}{36}(3+2(\delta-\varepsilon))^2$$

Pour une innovation intense, la firme B quitte le marché et la firme innovatrice devient un monopole. Dans ce cas $p_1 = c_2 - \frac{1}{2}$, $\pi_A^{NL} = \varepsilon - \frac{1}{2} - \delta$ ¹⁰ et $\pi_B^{NL} = 0$.

On aura ainsi :

	$\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$	$\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$
Firme A	$\pi_A^{NL} = \frac{1}{36}(3-2(\delta-\varepsilon))^2$	$\pi_A^{NL} = \varepsilon - \frac{1}{2} - \delta$
Firme B	$\pi_B^{NL} = \frac{1}{36}(3+2(\delta-\varepsilon))^2$	$\pi_B^{NL} = 0$

4.1.5 Modalité de licence optimale

Pour trouver la modalité de licence optimale, il suffit de comparer uniquement les modalités d'absence de licence et la modalité de licence par royauté puisqu'un prix fixe est toujours dominé par l'absence de licence. Considérons maintenant le tableau suivant :

	$\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$	$\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$
$\delta < \frac{1}{2}$	$\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \frac{1}{6}\varepsilon(2\delta - 2\varepsilon + 3) > 0$	$\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \delta - \varepsilon + \frac{3}{2} < 0$
$\delta > \frac{1}{2}$	$\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \left(-\frac{1}{9}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{2}{9}\delta - \frac{1}{3}\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{72}\delta^2 + \frac{5}{24}\delta + \frac{25}{32}\right) > 0$	$\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \frac{1}{8}\delta^2 + \frac{7}{8}\delta - \varepsilon + \frac{49}{32}$ (signe à établir)

En cherchant le signe (voir Annexe (iii)) on trouve :

¹⁰ $\pi_A^{NL} = p_1 - c_1 + \varepsilon = c_2 - \frac{1}{2} - c_1 + \varepsilon = \varepsilon - \frac{1}{2} - \delta$

	$\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$ Cas non intense	$\frac{3}{2} + \delta < \varepsilon < \frac{1}{8}\delta^2 + \frac{7}{8}\delta + \frac{49}{32}$ Cas intense	$\varepsilon > \frac{1}{8}\delta^2 + \frac{7}{8}\delta + \frac{49}{32}$ Cas intense
$\delta < \frac{1}{2}$	$\Pi_A^r > \pi_A^{NL}$	$\Pi_A^r < \pi_A^{NL}$	
$\delta > \frac{1}{2}$	$\Pi_A^r > \pi_A^{NL}$	$\Pi_A^r > \pi_A^{NL}$	$\Pi_A^r < \pi_A^{NL}$

Ainsi, un résultat très important vient d'être démontré :

Proposition 2

Dans le modèle circulaire à la Salop avec des coûts asymétriques, quand la firme qui détient le brevet est inefficace alors le régime de licence par une royauté est optimal pour une innovation non intense.

Pour une innovation intense, une royauté peut être optimale quand la firme innovatrice est largement inefficace (c'est-à-dire $\delta > \frac{1}{2}$) et quand la taille de l'innovation est intermédiaire

(c'est-à-dire $\frac{3}{2} + \delta < \varepsilon < \frac{1}{8}\delta^2 + \frac{7}{8}\delta + \frac{49}{32}$). Quand l'innovation est très intense alors la firme qui détient le brevet n'accorde aucune licence et devient un monopole.

4.2 Firme innovatrice efficiente

Dans ce cas on va étudier la situation où la firme innovatrice est efficiente en terme de coûts (c'est-à-dire $c_1 - c_2 = \delta < 0$)

4.2.1 Absence de licence et licence par un prix fixe

Dans le cas d'absence de licence, la demande adressée à la firme B est positive si $\delta > -\frac{3}{2}$ (voir¹¹)

¹¹ $D_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(c_1' - c_2')$ pour une licence par un prix fixe $c_1' = c_1 - \varepsilon$ et $c_2' = c_2 - \varepsilon$.

alors $D_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\delta > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\delta > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \delta > -\frac{3}{2}$

	$\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$	$\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$
Π_A^F	$\left(-\frac{1}{9}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\delta\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{9}\delta^2 - \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{4}\right)$	$\frac{2}{9}\delta^2 + \frac{1}{2}$
π_A^{NL}	$\frac{1}{36}(3 - 2(\delta - \varepsilon))^2$	$\varepsilon - \frac{1}{2} - \delta$
$\Pi_A^F - \pi_A^{NL}$	$\frac{2}{9}\varepsilon(2\delta - \varepsilon)$	$\frac{2}{9}\delta^2 + \delta + 1 - \varepsilon$

Pour une innovation non intense : $\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$ et $-\frac{3}{2} < \delta < 0$, on trouve : $\pi_A^{NL} > \Pi_A^F$

Pour une innovation intense : $\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$ et $-\frac{3}{2} < \delta < 0$, on trouve aussi $\pi_A^{NL} > \Pi_A^F$.

Lemme 3

Dans un modèle circulaire à la Salop où les coûts sont asymétriques, quand la firme innovatrice est efficiente, alors l'absence de licence est meilleure qu'une licence par un prix fixe indépendamment de la taille de l'innovation.

Notons que ce résultat est le même que celui trouvé au Lemme 1 pour des coûts symétriques.

4.2.2 Licence par une royauté

Le taux de royauté qui maximise le revenu total de la firme innovatrice est $r^* = \frac{15}{8} + \frac{1}{4}\delta$

La demande de la firme B doit être positive : $D_B > 0 \Leftrightarrow r < \frac{3}{2} + \delta$

Puisque $0 < r$ alors on aura $\frac{3}{2} + \delta > 0 \Leftrightarrow \delta > -\frac{3}{2}$ (dans ce cas $-\frac{3}{2} < \delta < 0$)

Et puisque $r \leq \varepsilon$ on aura :

$$r^* = \varepsilon \text{ si } \varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$$

$$r^* = \frac{3}{2} + \delta \text{ si } \varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$$

Le taux de royauté optimal pour une innovation non intense est alors $r^* = \varepsilon$. Pour avoir un équilibre de Nash avec deux firmes, les prix d'équilibre doivent vérifier

$|p_2 - p_1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \delta - \frac{3}{2} < r < \delta + \frac{3}{2}$. On peut voir que $\delta - \frac{3}{2} < \varepsilon < \delta + \frac{3}{2}$ puisque $\delta < 0 < \varepsilon + \frac{3}{2}$

et $\varepsilon < \delta + \frac{3}{2}$ (cas non intense).

Le revenu total de la firme innovatrice sous le régime de licence par une royauté est alors :

	$\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$	$\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$
$-\frac{3}{2} < \delta < 0$	$\Pi_A^r = \left(-\frac{2}{9}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{9}\delta\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{9}\delta^2 - \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{4}\right)$	$\Pi_A^r = 1$

4.2.3 Régime de licence optimal

Puisque le régime d'absence de licence est toujours meilleur que le régime de licence par un prix fixe alors pour trouver le régime optimal il suffit de comparer uniquement le régime d'absence de licence et celui de licence par une royauté.

	$\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$	$\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$
$-\frac{3}{2} < \delta < 0$	$\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \frac{1}{6}\varepsilon(2\delta - 2\varepsilon + 3) > 0$	$\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \delta - \varepsilon + \frac{3}{2} < 0$

Proposition 3

Dans un modèle circulaire à la Salop où les coûts sont asymétriques, quand la firme innovatrice est efficiente en termes de coûts on trouve les mêmes résultats que dans le cas symétrique (proposition 1) où une royauté est optimale quand l'innovation est non intense et l'absence de licence est optimale quand l'innovation est intense.

5. Modèle de Hotelling avec coûts asymétriques

Ceci est une extension de l'article de Poddar et Sinha (2004) quand la firme innovatrice est interne au marché. Poddar et Sinha, dans leur article, ont étudié les cas où les coûts sont symétriques et ont comparé les modalités de licences. On étudie ici les modalités de licences optimales pour une firme innovatrice quand les coûts ne sont pas symétriques. Comme pour le cas de *Salop*, on va supposer dans une première étape que la firme innovatrice est inefficente en terme de coûts ($c_1 > c_2$) puis dans une deuxième étape on va supposer qu'elle est efficiente ($c_1 < c_2$). Comme dans le modèle de Poddar et Sinha, on va supposer aussi que les deux firmes sont localisées aux deux extrémités de la ville linéaire.

Ainsi, les fonctions d'utilité sont :

$$U_A = -p_1 - x$$

$$U_B = -p_2 - (1-x)$$

Les fonctions de demande sont :

$$D_A = \begin{cases} 1 & \text{si } p_1 < p_2 - 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{p_1 - p_2}{2} & \text{si } p_2 - 1 < p_1 < p_2 + 1 \\ 0 & \text{si } p_1 > p_2 + 1 \end{cases}$$

$$D_B = \begin{cases} 0 & \text{si } p_2 > p_1 + 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2} & \text{si } p_1 - 1 < p_2 < p_1 + 1 \\ 1 & \text{si } p_2 < p_1 - 1 \end{cases}$$

Les fonctions de profits sont :

$$\pi_A = \begin{cases} p_1 - c_1 & \text{si } p_1 < p_2 - 1 \\ \left(p_1 - c_1 \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{p_1 - p_2}{2} \right) & \text{si } p_2 - 1 < p_1 < p_2 + 1 \\ 0 & \text{si } p_1 > p_2 + 1 \end{cases}$$

$$\pi_B = \begin{cases} 0 & \text{si } p_2 > p_1 + 1 \\ \left(p_2 - c_2 \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2} \right) & \text{si } p_1 - 1 < p_2 < p_1 + 1 \\ p_2 - c_2 & \text{si } p_2 < p_1 - 1 \end{cases}$$

Ainsi pour $|p_1 - p_2| < 1$ on a

$$\pi_A = \left(p_1 - c_1 \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{p_1 - p_2}{2} \right)$$

$$\pi_B = \left(p_2 - c_2 \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2} \right)$$

En maximisant les profits par rapport aux prix on trouve :

$$p_1 = 1 + \frac{2}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2$$

$$p_2 = 1 + \frac{1}{3}c_1 + \frac{2}{3}c_2$$

Les profits à l'équilibre sont :

$$\pi_A = \frac{1}{18} (3 - c_1 + c_2)^2$$

$$\pi_B = \frac{1}{18} (3 + c_1 - c_2)^2$$

Les demandes à l'équilibre sont :

$$D_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}(c_1 - c_2)$$

$$D_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(c_1 - c_2)$$

5.1 Entreprise innovatrice inefficace

La firme innovatrice est ici inefficace en terme de coûts par rapport à la firme non innovatrice ($\delta = c_1 - c_2 > 0$).

5.1.1 Licence par un prix fixe

Dans le régime de licence par un prix fixe, les coûts de production marginaux des firmes A et

B sont respectivement $c'_1 = (c_1 - \varepsilon)$ et $c'_2 = (c_2 - \varepsilon)$. Les prix à l'équilibre sont :

$$p_1 = 1 + \frac{2}{3}c'_1 + \frac{1}{3}c'_2 = 1 + \frac{2}{3}(c_1 - \varepsilon) + \frac{1}{3}(c_2 - \varepsilon) = \frac{2}{3}c_1 - \varepsilon + \frac{1}{3}c_2 + 1$$

$$p_2 = 1 + \frac{1}{3}c'_1 + \frac{2}{3}c'_2 = 1 + \frac{1}{3}(c_1 - \varepsilon) + \frac{2}{3}(c_2 - \varepsilon) = \frac{1}{3}c_1 - \varepsilon + \frac{2}{3}c_2 + 1$$

Les profits d'équilibre sont :

$$\pi_A^F = \frac{1}{18}(3 - c'_1 + c'_2)^2 = \frac{1}{18}(3 - (c_1 - \varepsilon) + (c_2 - \varepsilon))^2 = \frac{1}{18}(c_2 - c_1 + 3)^2 = \frac{1}{18}(3 - \delta)^2$$

$$\pi_B^F = \frac{1}{18}(3 + c'_1 - c'_2)^2 = \frac{1}{18}(3 + (c_1 - \varepsilon) - (c_2 - \varepsilon))^2 = \frac{1}{18}(c_1 - c_2 + 3)^2 = \frac{1}{18}(3 + \delta)^2$$

Les demandes à l'équilibre sont :

$$D_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}(c'_1 - c'_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}((c_1 - \varepsilon) - (c_2 - \varepsilon)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}(c_1 - c_2) = \frac{1}{2} - \frac{\delta}{6}$$

$$D_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(c'_1 - c'_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}((c_1 - \varepsilon) - (c_2 - \varepsilon)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(c_1 - c_2) = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{6}$$

Le prix fixe est égal à $F = \pi_B^F - \pi_B^{NL}$

En résumé on trouve :

	Innovation non intense	Innovation intense
	$\varepsilon < 3 + \delta$	$\varepsilon \geq 3 + \delta$
π_A^F	$\frac{1}{18}(3 - \delta)^2$	$\frac{1}{18}(3 - \delta)^2$
π_B^{NL}	$\frac{1}{18}(\varepsilon - \delta - 3)^2$	0
$F = \pi_B^F - \pi_B^{NL}$	$\frac{\varepsilon}{18}(2\delta - \varepsilon + 6)$	$\frac{1}{18}(3 + \delta)^2$
π_B^F	$\frac{1}{18}(3 - \delta)^2$	$\frac{1}{18}(3 - \delta)^2$
$\Pi_A^F = \pi_A^F + F$	$\left(-\frac{1}{18}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\delta\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{18}\delta^2 - \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{9}\delta^2 + 1$

Les deux firmes sont actives sur le marché si $|p_2 - p_1| < 1$. En remplaçant par les expressions des prix à l'équilibre on obtient :

$$|p_2 - p_1| = \left(\frac{1}{3}c_1 - \varepsilon + \frac{2}{3}c_2 + 1\right) - \left(\frac{2}{3}c_1 - \varepsilon + \frac{1}{3}c_2 + 1\right) = \frac{1}{3}c_2 - \frac{1}{3}c_1 = \frac{1}{3}\delta$$

Donc la condition d'existence d'un équilibre de Nash est équivalente à cette condition :

$$|p_2 - p_1| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\delta < 1 \Leftrightarrow \delta < 3$$

5.1.2 Licence par une royauté

Les coûts de production unitaires sont : $c_1' = (c_1 - \varepsilon)$ et $c_2' = (c_2 - \varepsilon + r)$

Les prix sont :

$$p_1 = 1 + \frac{2}{3}c_1' + \frac{1}{3}c_2' = 1 + \frac{2}{3}(c_1 - \varepsilon) + \frac{1}{3}(c_2 - \varepsilon + r) = \frac{1}{3}r - \varepsilon + \frac{2}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + 1$$

$$p_2 = 1 + \frac{1}{3}c_1' + \frac{2}{3}c_2' = 1 + \frac{1}{3}(c_1 - \varepsilon) + \frac{2}{3}(c_2 - \varepsilon + r) = \frac{2}{3}r - \varepsilon + \frac{1}{3}c_1 + \frac{2}{3}c_2 + 1$$

Les profits à l'équilibre :

$$\pi_A^r = \frac{1}{18}(3 - c_1' + c_2')^2 = \frac{1}{18}(3 - (c_1 - \varepsilon) + (c_2 - \varepsilon + r))^2 = \frac{1}{18}(3 + r - \delta)^2$$

$$\pi_B^r = \frac{1}{18}(3 + c_1' - c_2')^2 = \frac{1}{18}(3 + (c_1 - \varepsilon) - (c_2 - \varepsilon + r))^2 = \frac{1}{18}(3 - r + \delta)^2$$

Les demandes à l'équilibre :

$$D_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}(c_1' - c_2') = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}((c_1 - \varepsilon) - (c_2 - \varepsilon + r)) = \frac{1}{6}(3 + r - \delta)$$

$$D_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(c_1' - c_2') = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}((c_1 - \varepsilon) - (c_2 - \varepsilon + r)) = \frac{1}{6}(3 - r + \delta)$$

Le revenu total de la firme innovatrice A après la licence est :

$$\Pi_A^r = \pi_A^r + rD_B = \frac{1}{18}(3 + r - \delta)^2 + r\frac{1}{6}(3 - r + \delta)$$

$$\frac{\partial \Pi_A^r}{\partial r} = \frac{1}{18}(\delta - 4r + 15) \Leftrightarrow r^* = \frac{15}{4} + \frac{1}{4}\delta$$

La firme non innovatrice reste sur le marché si $D_B > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6}(3 - r + \delta) > 0 \Leftrightarrow r < 3 + \delta$, on

doit aussi vérifier que $r < \varepsilon$

Ainsi, on trouve :

Pour une innovation non intense $\varepsilon < 3 + \delta$

$$\begin{cases} r^* = \varepsilon & \text{si } \varepsilon < 3 + \delta \text{ et } \delta < 1 \\ r^* = \frac{15}{4} + \frac{1}{4}\delta & \text{si } \frac{15}{4} + \frac{1}{4}\delta < \varepsilon < 3 + \delta \text{ et } \delta > 1 \end{cases}$$

Pour une innovation intense $\varepsilon > 3 + \delta$

$$\begin{cases} r^* = 3 + \delta & \text{si } 3 + \delta < \frac{15}{4} + \frac{1}{4}\delta \Leftrightarrow \delta < 1 \\ r^* = \frac{15}{4} + \frac{1}{4}\delta & \text{si } \frac{15}{4} + \frac{1}{4}\delta < 3 + \delta \Leftrightarrow \delta > 1 \end{cases}$$

La condition d'existence d'un équilibre de Nash étant : $|p_2 - p_1| < 1$

$$|p_2 - p_1| = \left(\frac{2}{3}r - \varepsilon + \frac{1}{3}c_1 + \frac{2}{3}c_2 + 1 \right) - \left(\frac{1}{3}r - \varepsilon + \frac{2}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + 1 \right) = \frac{1}{3}r - \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = \frac{1}{3}r - \frac{1}{3}\delta$$

donc $|p_2 - p_1| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{1}{3}r - \frac{1}{3}\delta < 1 \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{3}\delta < \frac{1}{3}r < 1 + \frac{1}{3}\delta \Leftrightarrow -3 + \delta < r < 3 + \delta$

Les taux de royalties sont optimales si $-3 + \delta < r^* < 3 + \delta$ ce qui est vrai si et seulement si

$\delta < 9$ (puisque $-3 + \delta < r^* = \left(\frac{15}{4} + \frac{1}{4}\delta \right)$)

Le revenu total de la firme A est :

$\Pi_A^r = \frac{1}{18}(3 + r - \delta)^2 + r\frac{1}{6}(3 - r + \delta)$, en remplaçant par $r^* = \left(\frac{15}{4} + \frac{1}{4}\delta \right)$, on trouve ceci :

Le revenu total de la firme innovatrice à l'équilibre est :

$$\frac{1}{18} \left(3 + \left(\frac{15}{4} + \frac{1}{4} \delta \right) - \delta \right)^2 + \left(\frac{15}{4} + \frac{1}{4} \delta \right) \frac{1}{6} \left(3 - \left(\frac{15}{4} + \frac{1}{4} \delta \right) + \delta \right) = \frac{1}{16} \delta^2 - \frac{1}{8} \delta + \frac{33}{16}$$

	$\varepsilon < 3 + \delta$	$\varepsilon > 3 + \delta$
$\delta < 1$	$\Pi_A^r = \left(-\frac{1}{9} \right) \varepsilon^2 + \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{18} \delta \right) \varepsilon + \left(\frac{1}{18} \delta^2 - \frac{1}{3} \delta + \frac{1}{2} \right)$	$\Pi_A^r = 2$
$\delta > 1$	$\Pi_A^r = \frac{1}{16} \delta^2 - \frac{1}{8} \delta + \frac{33}{16}$	$\Pi_A^r = \frac{1}{16} \delta^2 - \frac{1}{8} \delta + \frac{33}{16}$

5.1.3 Comparaison entre une licence par un prix fixe et une licence par une royauté:

	$\varepsilon < 3 + \delta$	$\varepsilon > 3 + \delta$
$\delta < 1$	$\Pi_A^r - \Pi_A^F = \frac{\varepsilon}{18} (9 - \delta - \varepsilon) > 0$	$\Pi_A^r - \Pi_A^F = \frac{1}{9} \delta^2 + 1 > 0$
$\delta > 1$	$\Pi_A^r - \Pi_A^F = \frac{1}{18} \varepsilon^2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{9} \delta \right) \varepsilon + \left(\frac{1}{144} \delta^2 + \frac{5}{24} \delta + \frac{25}{16} \right)$	$\Pi_A^r - \Pi_A^F = \frac{17}{16} - \frac{1}{8} \delta - \frac{7}{144} \delta^2$

En étudiant les signes des expressions trouvées dans le tableau ci-dessus (voir annexe iv), on trouve ce qui suit :

	$\varepsilon < 3 + \delta$	$\varepsilon > 3 + \delta$
$\delta < 1$	$\Pi_A^r > \Pi_A^F$	$\Pi_A^r > \Pi_A^F$
$1 < \delta < 3.563$	$\Pi_A^r > \Pi_A^F$	$\Pi_A^r > \Pi_A^F$

Lemme 4

Dans un modèle de Hotelling où les coûts sont asymétriques, quand la firme innovatrice est inefficace alors une royauté est toujours meilleure qu'un prix fixe indépendamment de la taille de l'innovation (intense ou non intense).

Notons ici qu'on trouve le même résultat que celui trouvé au Lemme 2

5.1.4 Absence de licence

Les coûts de production unitaires des firmes A et B sont respectivement $c_1' = c_1 - \varepsilon$ et $c_2' = c_2$

Les prix à l'équilibre sont :

$$p_1 = 1 + \frac{2}{3}c_1' + \frac{1}{3}c_2' = 1 + \frac{2}{3}(c_1 - \varepsilon) + \frac{1}{3}c_2 = \frac{2}{3}c_1 - \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}c_2 + 1$$

$$p_2 = 1 + \frac{1}{3}c_1' + \frac{2}{3}c_2' = 1 + \frac{1}{3}(c_1 - \varepsilon) + \frac{2}{3}c_2 = \frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{2}{3}c_2 + 1$$

Pour une innovation non intense ($\varepsilon < 3 + \delta$), les profits à l'équilibre sont :

$$\pi_A = \frac{1}{18}(3 - c_1' + c_2')^2 = \frac{1}{18}(3 - (c_1 - \varepsilon) + c_2)^2 = \frac{1}{18}(\varepsilon - c_1 + c_2 + 3)^2 = \frac{1}{18}(\varepsilon - \delta + 3)^2$$

$$\pi_B = \frac{1}{18}(3 + c_1' - c_2')^2 = \frac{1}{18}(3 + (c_1 - \varepsilon) - c_2)^2 = \frac{1}{18}(\varepsilon - c_1 + c_2 - 3)^2 = \frac{1}{18}(\varepsilon - \delta - 3)^2$$

Les demandes à l'équilibre sont :

$$D_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}(c_1' - c_2') = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}((c_1 - \varepsilon) - c_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(\varepsilon - c_1 + c_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(\varepsilon - \delta)$$

$$D_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(c_1' - c_2') = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}((c_1 - \varepsilon) - c_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}(\varepsilon - c_1 + c_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}(\varepsilon - \delta)$$

Pour une innovation intense ($\varepsilon \geq 3 + \delta$) on aura :

$$p_A = c_2 - 1 \text{ et } \pi_A = (p_1 - c_1 + \varepsilon) = (c_2 - 1 - c_1 + \varepsilon) = (\varepsilon - 1 - \delta)$$

$$\pi_B = 0$$

En résumé, les profits trouvés sont :

	$\varepsilon < 3 + \delta$	$\varepsilon \geq 3 + \delta$
π_A^{NL}	$\frac{1}{18}(\varepsilon - \delta + 3)^2$	$(\varepsilon - 1 - \delta)$
π_B^{NL}	$\frac{1}{18}(\varepsilon - \delta - 3)^2$	0

5.1.5 Régime de licence optimal

Il suffit ici de comparer uniquement les régimes d'absence de licence et celui par une royauté puisque le régime de licence par une royauté est toujours meilleur que celui par un prix fixe.

	$\varepsilon < 3 + \delta$	$\varepsilon > 3 + \delta$
$\delta < 1$	$\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \frac{\varepsilon}{6}(\delta - \varepsilon + 3) > 0$	$\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = (3 + \delta - \varepsilon) < 0$
$\delta > 1$	$\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \left(-\frac{1}{18}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{9}\delta - \frac{1}{3}\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{144}\delta^2 + \frac{5}{24}\delta + \frac{25}{16}\right)$	$\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \frac{1}{16}\delta^2 + \frac{7}{8}\delta + \frac{49}{16} - \varepsilon$

En étudiant les signes des expressions ci-dessus (voir annexe iv), on trouve :

	$\varepsilon < 3 + \delta$ Cas non intense	$3 + \delta < \varepsilon < \frac{1}{16}\delta^2 + \frac{7}{8}\delta + \frac{49}{16}$ Cas intense	$\varepsilon > \frac{1}{16}\delta^2 + \frac{7}{8}\delta + \frac{49}{16}$ Cas intense
$\delta < 1$	$\Pi'_A > \pi_A^{NL}$	$\Pi'_A < \pi_A^{NL}$	
$\delta > 1$	$\Pi'_A > \pi_A^{NL}$	$\Pi'_A > \pi_A^{NL}$	$\Pi'_A < \pi_A^{NL}$

Proposition 4

Dans un modèle linéaire à la Hotelling où les coûts sont asymétriques, quand la firme innovatrice est inefficace, une licence par une royauté est optimale quand l'innovation est non intense.

Si l'innovation est intense, une royauté peut être optimale uniquement quand la firme innovatrice est largement inefficace (c'est-à-dire $\delta > 1$) et que la taille de l'innovation est intermédiaire (c'est-à-dire quand $3 + \delta < \varepsilon < \frac{1}{16}\delta^2 + \frac{7}{8}\delta + \frac{49}{16}$). Si l'innovation est très intense, alors il n'y aura pas de licence et la firme innovatrice devient un monopole.

5.2 Firme innovatrice efficiente

Supposons maintenant que la firme innovatrice est efficiente ($\delta = c_1 - c_2 < 0$)

5.2.1 Absence de licence et licence par un prix fixe

Dans le cas d'absence de licence (pour une innovation non intense) et pour le cas d'une licence par un prix fixe, la demande adressée à la firme B est positive si $\delta > -3$ (voir ¹²)

	$\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$	$\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$
Π_A^F	$\left(-\frac{1}{18}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\delta\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{18}\delta^2 - \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{9}\delta^2 + 1$
π_A^{NL}	$\frac{1}{18}(\varepsilon - \delta + 3)^2$	$\varepsilon - 1 - \delta$
$\Pi_A^F - \pi_A^{NL}$	$\frac{\varepsilon}{9}(2\delta - \varepsilon)$	$\frac{1}{9}\delta^2 + \delta + 2 - \varepsilon$

Pour le cas non intense : $\varepsilon < 3 + \delta$ où $-3 < \delta < 0$:

$$^{12} D_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(c_1' - c_2') = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(c_1 - \varepsilon - c_2 + \varepsilon) = \frac{1}{6}\delta + \frac{1}{2} > 0 \text{ ssi } \frac{1}{6}\delta > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \delta > -3$$

On peut montrer que $\Pi_A^F - \pi_A^{NL} = \frac{\varepsilon}{9}(2\delta - \varepsilon) < 0$

Pour le cas intense : $\varepsilon \geq 3 + \delta$ où $-3 < \delta < 0$:

On peut montrer que $\Pi_A^F - \pi_A^{NL} = \frac{1}{9}\delta^2 + \delta - \varepsilon + 2 = \left(\frac{1}{9}\delta^2 + \delta + 2 - \varepsilon\right)$

Pour $-3 < \delta < 0$ on a $\varepsilon \geq 3 + \delta > \frac{1}{9}\delta^2 + \delta + 2$, d'où $\Pi_A^F < \pi_A^{NL}$

Lemme 5

Dans un modèle linéaire à la Hotelling où les coûts sont asymétriques, quand la firme innovatrice est efficiente, l'absence de licence est meilleure que la licence par un prix fixe indépendamment de la taille de l'innovation

Notons que ce résultat est le même que celui trouvé au Lemme 3.

5.2.2 Licence par une royauté

Les taux de royalties optimales quand $\delta < 0$ sont $r^* = \varepsilon$ pour une innovation non intense et $r^* = 3 + \delta$ pour une innovation intense.

Puisque $r > 0$ alors on doit avoir $3 + \delta > 0 \Leftrightarrow \delta > -3$ (dans ce cas $-3 < \delta < 0$)

	$\varepsilon < 3 + \delta$	$\varepsilon > 3 + \delta$
$-3 < \delta < 0$	$r^* = \varepsilon$	$r^* = 3 + \delta$

On vérifie aussi que $|p_1 - p_2| < 1 \Leftrightarrow -3 + \delta < r^* < 3 + \delta$

Les revenus totaux de la firme innovatrice sous le régime de licence par une royauté sont :

	$\varepsilon < 3 + \delta$	$\varepsilon > 3 + \delta$
$-3 < \delta < 0$	$\Pi_A^r = \left(-\frac{1}{9}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{18}\delta\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{18}\delta^2 - \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{2}\right)$	$\Pi_A^r = 2$

En comparant les revenus totaux de la firme innovatrice sous la modalité de licence par une royauté et l'absence de licence on trouve :

	$\varepsilon < 3 + \delta$	$\varepsilon > 3 + \delta$
$-3 < \delta < 0$	$\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \frac{\varepsilon}{6}(\delta - \varepsilon + 3) > 0$	$\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = (3 + \delta - \varepsilon) < 0$

D'où le résultat suivant :

Proposition 5

Dans un modèle linéaire à la Hotelling où les coûts ont asymétries, quand la firme innovatrice est efficiente, on trouve les mêmes résultats que dans le modèle circulaire à la Salop avec des coûts symétriques. Une royauté est optimale quand l'innovation est non intense et l'absence de licence est optimale quand l'innovation est intense.

6. Conclusion

On a étudié dans cet article les modalités de licence optimales d'une firme innovatrice interne au marché dans un modèle circulaire à la *Salop* et un modèle linéaire à la *Hotelling*. Les coûts de productions des firmes sont asymétriques et les firmes se sont concurrencées sur les prix. La firme innovatrice possède une innovation de procédé qui permet de réduire le coût de production unitaire. Dans le modèle circulaire à la *Salop*, les firmes sont localisées symétriquement sur la circonférence et sont localisées sur les extrémités dans le modèle linéaire de *Hotelling*. Les consommateurs sont distribués uniformément sur la circonférence dans le modèle de *Salop* et sur le segment linéaire dans le modèle de *Hotelling*. Le produit des deux firmes est supposé homogène. Cependant, à cause des coûts de transport, le produit est différencié horizontalement pour les consommateurs. On a étudié deux types d'innovations de procédé qui ont été largement étudiées dans la littérature à savoir une innovation intense et une innovation non intense et on a comparé les régimes de licence à l'aide de ces deux types d'innovations. On trouve que quand la firme innovatrice est efficiente en termes de coûts par rapport à la firme non innovatrice alors on trouve les mêmes résultats déjà trouvés dans le cas symétrique. Ces résultats sont les mêmes dans le modèle de *Salop* aussi bien dans le modèle de *Hotelling*. Cependant, quand la firme innovatrice est inefficente les résultats diffèrent. On montre que dans les modèles de *Hotelling* et *Salop*, une royauté peut être optimale quand la firme innovatrice est largement inefficente en termes de coûts par rapport à la firme non innovatrice et que la taille de l'innovation est intermédiaire. On montre aussi qu'une licence par un prix fixe n'est jamais optimale.

Bibliographie

- [1] Caballero, F., Moner, R., et Semoere, J., (2002), 'Optimal Licensing in a Spatial Model', *Annales d'Economie et de Statistique*, 66, 258-279.
- [2] Caves, R., Crokell, H., et Killing P. (1983), 'The Imperfect Market for Technology Licenses', *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 45, 249-268.
- [3] Erkal, N. (2005), 'Optimal Licensing Policy in Differentiated Industries', *Economic Record*, 81, 51-60.
- [4] Fauli-Oller, R. et Sandonis, J. (2002), 'Welfare Reducing Licensing', *Games and Economic Behavior*, 41, 192-205.
- [5] Ghosh, A. et Saha, S. (2008), 'Trade Policy in the Presence of Technology Licensing', *Review of International Economics*, 16, 45-68.
- [6] Hotelling, H. (1929), 'Stability in Competition', *The Economic Journal*, 39, 41-57.
- [7] Jensen, R. et Thursby M. (2001), 'Proofs and Prototypes for Sale: The Licensing of University Inventions', *American Economic Review*, 91, 240-259.
- [8] Kabiraj, T., et Marjit, S. (2003), 'Protecting Consumers through Protection: The Role of Tariff-induced Technology Transfer,' *European Economic Review*, 47, 113-124.
- [9] Kamien, M. (1992), 'Patent Licensing', In Aumann, R. J., and Hart, S. (Eds.), *Handbook of Game Theory*, Chapter 11.
- [10] Kamien, M. I. et Tauman, Y. (1986), 'Fees versus Royalties and the Private Value of a Patent', *Quarterly Journal of Economics*, 101, 471-491.
- [11] Kamien, M. I. et Tauman, Y. (2002), 'Patent Licensing: the Inside Story', *The Manchester School*, 70, 7-15.

- [12] Katz, M. et Shapiro, C. (1986), 'How to License Intangible Property', *Quarterly Journal of Economics*, 101, 567-589.
- [13] Macho-Stadler, I., Martinez, X. et Prerez-Castrillo, D. (1996), 'The Role of Information in Licensing Contract Design,' *Research Policy*, 25, 43-57.
- [14] Mukherjee, A. (2007), 'Optimal Licensing Contract in an Open Economy', *Economics Bulletin*, 12, 1-6.
- [15] Mukherjee, A. et Pennings, E. (2006), 'Tariffs, Licensing and Market Structure', *European Economic Review*, 50, 1690 – 1707.
- [16] Poddar, S. et Sinha, U.B, 2004. On Patent Licensing in Spatial Competition. *Economic Record* 80, 208 – 218.
- [17] Poddar, S. et Sinha, U.B, 2010. Patent Licening from a High-Cost to a Low-Cost Firm. *Economic Record* 86, 384 – 395.
- [18] Salop, Steven 1979. Monopolistic competition with outside goods. *Bell Journal of Economics* 10, 141 - 156.
- [19] Rockett, K. (1990), 'The Quality of Licensed Technology', *International Journal of Industrial Organization*, 8, 559-574.
- [20] Rostoker, M. (1983), 'A Survey of Corporate Licensing', *IDEA-The Journal of Law and Technology*, PTC Research Report 24, 59-92.
- [21] Saracho, A. I. (2002), 'Patent Licensing under Strategic Delegation', *Journal of Economics and Management Strategy*, Volume 11, Number 2, 2002, 225–251.
- [22] Sen, D. (2005), 'Fee versus Royalty Reconsidered', *Games and Economic Behavior*, **53**, 141-147.
- [23] Sen, D., Tauman, Y. (2007), 'General Licensing Schemes for a Cost-Reducing

Innovation', *Games and Economic Behavior*, 59, 163-186.

[24] Singh, N., et Vives, X. (1984), 'Price and Quantity Competition in a Differentiated Duopoly', *Rand Journal of Economics*, 15, 546-554.

[25] Vishwasrao, S. (2007), 'Royalties vs. Fees: How Do Firms Pay for Foreign Technology?' *International Journal of Industrial Organization*, 25, 741-759.

[26] Wang, X. H., 1998. Fee versus royalty licensing in a *Cournot* duopoly model, *Economics Letters*, 60, (1998) 55-62

[27] Wang, X. H., 2002. Fee versus royalty licensing in differentiated *Cournot* oligopoly, *Journal of Economics and Business*, 54, (2002) 253-266.

Annexe (i)

D'après (4) on a : si $\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$ et $\delta < \frac{1}{2}$, on trouve $r^* = \varepsilon$

On peut vérifier que les deux firmes sont actives ici

$\delta - \frac{3}{2} < r^* < \delta + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \delta - \frac{3}{2} < \varepsilon < \delta + \frac{3}{2}$, vérifiée puisque $\varepsilon < \delta + \frac{3}{2}$ (cas non intense); et

$\delta < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \delta - \frac{3}{2} < 0$ alors $\delta - \frac{3}{2} < 0 < \varepsilon$

D'après (5) on a : si $\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$ et $\delta > \frac{1}{2}$, on trouve $r^* = \frac{15}{8} + \frac{1}{4}\delta$

On peut vérifier que les deux firmes sont actives ici si $\delta < 4.5$

$\delta - \frac{3}{2} < r^* < \delta + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \delta - \frac{3}{2} < \frac{15}{8} + \frac{1}{4}\delta < \delta + \frac{3}{2}$, vérifiée puisque $\frac{15}{8} + \frac{1}{4}\delta < \delta + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \delta > \frac{1}{2}$;

et $\delta - \frac{3}{2} < \frac{15}{8} + \frac{1}{4}\delta \Leftrightarrow \delta < 4.5$

D'après (6) on a : si $\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$ et $\delta < \frac{1}{2}$, on trouve $r^* = \frac{3}{2} + \delta$

On peut vérifier que les deux firmes sont actives ici

$$\delta - \frac{3}{2} < r^* < \delta + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \delta - \frac{3}{2} < \frac{3}{2} + \delta < \delta + \frac{3}{2} \text{ vérifiée}$$

D'après (7) on a : si $\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$ et $\delta > \frac{1}{2}$, on trouve $r^* = \frac{15}{8} + \frac{1}{4}\delta$

On peut vérifier que les deux firmes sont actives ici si $\delta < 4.5$

$$\delta - \frac{3}{2} < r^* < \delta + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \delta - \frac{3}{2} < \frac{15}{8} + \frac{1}{4}\delta < \delta + \frac{3}{2}, \text{ vérifiée puisque } \frac{15}{8} + \frac{1}{4}\delta < \delta + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \delta > \frac{1}{2}.$$

$$\text{et } \delta - \frac{3}{2} < \frac{15}{8} + \frac{1}{4}\delta \Leftrightarrow \delta < 4.5$$

Annexe (ii)

*Si $\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$ et $\delta < \frac{1}{2}$ on a $\Pi_A^r - \Pi_A^f = \frac{1}{18}\varepsilon(-2\delta - 2\varepsilon + 9) > 0$ car $\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta < \frac{9}{2} - \delta$ pour

$$\delta < \frac{1}{2}$$

*Si $\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$ et $\delta < \frac{1}{2}$ on a $\Pi_A^r - \Pi_A^f = \frac{1}{2} - \frac{2}{9}\delta^2 = \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2} - \delta\right)\left(\frac{3}{2} + \delta\right) > 0$ car $\delta < \frac{1}{2}$

*Si $\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$ et $\delta > \frac{1}{2}$ on a $\Pi_A^r - \Pi_A^f = \frac{17}{32} - \frac{1}{8}\delta - \frac{7}{72}\delta^2 = -\frac{7}{72}\delta^2 - \frac{1}{8}\delta + \frac{17}{32}$

Les racines du polynôme $-\frac{7}{72}\delta^2 - \frac{1}{8}\delta + \frac{17}{32}$ sont $\delta' = -3.0672$ et $\delta'' = 1.7815$

si $\frac{1}{2} < \delta < 1.7815$ alors $\Pi_A^r - \Pi_A^f = \frac{17}{32} - \frac{1}{8}\delta - \frac{7}{72}\delta^2 > 0$

*Si $\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$ et $\delta > \frac{1}{2}$ on a $\Pi_A^r - \Pi_A^f = \frac{1}{9}\varepsilon^2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\delta\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{72}\delta^2 + \frac{5}{24}\delta + \frac{25}{32}\right)$

Ce polynôme admet des solutions si le déterminant $\Delta = 7\delta^2 + 9\delta - \frac{153}{4} > 0$

On peut vérifier que $\Delta < 0$ si $\frac{1}{2} < \delta < 1.7815 \Rightarrow$ pas de solutions $\Rightarrow \Pi_A^r - \Pi_A^f > 0$

Annexe (iii)

Pour $\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$ et $\delta < \frac{1}{2}$ il est facile de voir que $\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \frac{1}{6}\varepsilon(2\delta - 2\varepsilon + 3) > 0$

Pour $\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$ et $\delta > \frac{1}{2}$ on a $\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \left(-\frac{1}{9}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{2}{9}\delta - \frac{1}{3}\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{72}\delta^2 + \frac{5}{24}\delta + \frac{25}{32}\right)$

En étudiant le signe de ce polynôme, on trouve que les solutions sont

$\varepsilon' = \delta - \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt{\delta^2 - \delta + \frac{33}{4}}$ et $\varepsilon'' = \delta - \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt{\delta^2 - \delta + \frac{33}{4}}$. Notons que ces solutions

ε' et ε'' existent puisque $\sqrt{\delta^2 - \delta + \frac{33}{4}} > 0$. On vérifie ensuite que $\varepsilon' < 0$ et que

$$\varepsilon'' - \left(\frac{3}{2} + \delta\right) > 0 \quad ^{13}.$$

Ainsi on peut écrire : $\varepsilon' < 0 < \varepsilon < \frac{3}{2} + \delta < \varepsilon''$

Donc, si $\delta > \frac{1}{2}$ et $\varepsilon < \frac{3}{2} + \delta$ alors :

$$\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \left(-\frac{1}{9}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{2}{9}\delta - \frac{1}{3}\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{72}\delta^2 + \frac{5}{24}\delta + \frac{25}{32}\right) > 0 \Rightarrow \Pi_A^r > \pi_A^{NL}$$

Si $\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$ et $\delta < \frac{1}{2}$ il est facile de voir que $\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \delta - \varepsilon + \frac{3}{2} < 0$ puisque

$$\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta \Rightarrow \Pi_A^r < \pi_A^{NL}$$

Si $\varepsilon > \frac{3}{2} + \delta$ et $\delta > \frac{1}{2}$ on a $\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \frac{1}{8}\delta^2 + \frac{7}{8}\delta + \frac{49}{32} - \varepsilon$

On distingue ici entre deux cas :

$$\text{Si } \frac{3}{2} + \delta < \varepsilon < \frac{1}{8}\delta^2 + \frac{7}{8}\delta + \frac{49}{32} \text{ alors } \pi_A^r - \pi_A^{NL} > 0 \Rightarrow \Pi_A^r > \pi_A^{NL}$$

$$\text{Si } \varepsilon > \frac{1}{8}\delta^2 + \frac{7}{8}\delta + \frac{49}{32} \text{ alors } \pi_A^r - \pi_A^{NL} < 0 \Rightarrow \Pi_A^r < \pi_A^{NL}$$

Annexe (iv)

Si $\delta > 1$ et $\varepsilon > 3 + \delta$ on a $\Pi_A^r - \Pi_A^f = \frac{17}{16} - \frac{1}{8}\delta - \frac{7}{144}\delta^2$

Les solutions du polynôme $\frac{17}{16} - \frac{1}{8}\delta - \frac{7}{144}\delta^2$ sont:

$$-\frac{9}{7} - \frac{24}{7}\sqrt{2} = -6.1344$$

$$\frac{24}{7}\sqrt{2} - \frac{9}{7} = 3.563$$

¹³ Puisque $\delta - \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt{\delta^2 - \delta + \frac{33}{4}} - \left(\frac{3}{2} + \delta\right) = \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt{\delta^2 - \delta + \frac{33}{4}} - 3 > 0$

Si $1 < \delta < 3.563$ alors $\Pi'_A - \Pi^F_A > 0 \Leftrightarrow \Pi'_A > \Pi^F_A$

Si $\delta > 1$ alors $\varepsilon < 3 + \delta$ on a $\Pi'_A - \Pi^F_A = \frac{1}{18}\varepsilon^2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\delta\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{144}\delta^2 + \frac{5}{24}\delta + \frac{25}{16}\right)$

Le déterminant $\Delta = -153 + 18\delta + 7\delta^2$

Les solutions sont :

$$-\frac{9}{7} - \frac{24}{7}\sqrt{2} = -6.1344$$

$$\frac{24}{7}\sqrt{2} - \frac{9}{7} = 3.563$$

D'où

$$\Delta < 0 \text{ si } \delta < 3.563 \Rightarrow \text{pas de solutions} \Rightarrow \Pi'_A - \Pi^F_A > 0 \Leftrightarrow \Pi'_A > \Pi^F_A$$

Annexe (v)

* Si $\varepsilon > 3 + \delta$ et $\delta > 1$

$$\Pi'_A - \pi^{NL}_A = \frac{1}{16}\delta^2 + \frac{7}{8}\delta + \frac{49}{16} - \varepsilon = \left(\frac{1}{16}\delta^2 + \frac{7}{8}\delta + \frac{49}{16} - \varepsilon\right)$$

On a : $\left(\frac{1}{16}\delta^2 + \frac{7}{8}\delta + \frac{49}{16}\right) > (3 + \delta)$ puisque $\left(\frac{1}{16}\delta^2 + \frac{7}{8}\delta + \frac{49}{16}\right) - (3 + \delta) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8}\delta + \frac{1}{16}\delta^2 > 0$

Alors si $3 + \delta < \varepsilon < \frac{1}{16}\delta^2 + \frac{7}{8}\delta + \frac{49}{16}$ on a $\Pi'_A - \pi^{NL}_A > 0 \Leftrightarrow \Pi'_A > \pi^{NL}_A$

Cependant si $\varepsilon > \frac{1}{16}\delta^2 + \frac{7}{8}\delta + \frac{49}{16}$ on a $\Pi'_A - \pi^{NL}_A < 0 \Leftrightarrow \Pi'_A < \pi^{NL}_A$

* Si $\varepsilon < 3 + \delta$ et $\delta > 1$

$$\Pi'_A - \pi^{NL}_A = \left(-\frac{1}{18}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{9}\delta - \frac{1}{3}\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{144}\delta^2 + \frac{5}{24}\delta + \frac{25}{16}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{18}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{9}\delta - \frac{1}{3}\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{144}\delta^2 + \frac{5}{24}\delta + \frac{25}{16}\right)$$

Les solutions sont :

$$\varepsilon' = \delta - 3 - \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt{33 - 2\delta + \delta^2}$$

$$\varepsilon'' = \delta - 3 + \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt{33 - 2\delta + \delta^2}$$

On peut vérifier que $\Delta = 33 - 2\delta + \delta^2 > 0$ (il y a deux solutions)

$$\varepsilon' = \delta - 3 - \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt{33 - 2\delta + \delta^2} < 0$$

$$\varepsilon'' - (3 + \delta) = \delta - 3 + \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt{33 - 2\delta + \delta^2} - (3 + \delta) = \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt{33 - 2\delta + \delta^2} - 6$$

La différence entre les carrés est :

$$\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt{33 - 2\delta + \delta^2}\right)^2 - 36 = \frac{9}{8}\delta^2 - \frac{9}{4}\delta + \frac{9}{8} > 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon'' > (3 + \delta)$$

$$\varepsilon' < 0 < \varepsilon < (3 + \delta) < \varepsilon'' \text{ donc}$$

$$\Pi_A^r - \pi_A^{NL} = \left(-\frac{1}{18}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{9}\delta - \frac{1}{3}\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{144}\delta^2 + \frac{5}{24}\delta + \frac{25}{16}\right) > 0 \Leftrightarrow \Pi_A^r > \pi_A^{NL}$$

Transfert de technologie dans un modèle à deux dimensions

Résumé

Cet article étudie et compare les modalités de licence de brevet dans un modèle à deux dimensions où deux firmes concurrentes sont situées symétriquement à la bordure de la ville. On suppose que l'une des firmes détient un brevet d'innovation de procédé qui permet de réduire le coût de production unitaire et qu'elle va choisir sa politique de licence selon la taille de son innovation. Les consommateurs sont répartis uniformément sur la ville et chacun paie un coût de transport quadratique pour se déplacer vers l'une des deux firmes. L'apport de cet article par rapport à ce qui a été fait est qu'ici le modèle se présente sous une forme plus réaliste à deux dimensions et non pas linéaire à la *Hotelling* ou à la *Salop*. En effet les consommateurs ne se localisent généralement pas sur une route mais dans des agglomérations spatiales. Les résultats montrent, contrairement à ce qui a été trouvé dans les modèles unidimensionnels, qu'une licence par un prix fixe peut être optimale quand l'innovation est intermédiaire ou assez intense et que la différence entre les coûts est moyenne ou forte.

Mots clés : *Transfert de technologie, Licence de brevet, innovation de procédé, coûts symétriques et asymétriques, prix fixe, royalties.*

Classification JEL : *C21, L24, O31, O32*

1 Introduction

Plusieurs articles de la revue de littérature existante ont traité et discuté à travers plusieurs modèles différents les modalités de transfert de technologie et de licence de brevet principalement les licences par les modalités de prix fixe et de royalties. La plupart de ces modèles se basent sur la notion de l'intensité de l'innovation qui s'est avérée déterminante dans le choix d'une modalité de licence. Selon *Arrow (1962)*, une innovation est dite intense lorsqu'elle permet à la firme qui détient le brevet de devenir un monopole quand elle n'accorde pas de licence et profite de son innovation seule. *Wang (1998)* a utilisé cette notion dans un fameux article pour comparer les modalités de licence par des royalties et prix fixe dans un marché homogène à la *Cournot* et trouve qu'une modalité de licence par des royalties peut être meilleure que celle par un prix fixe pour une innovation non intense. Dans un autre

article, Wang (2002) fait une extension de son article de 1998 et étudie les licences optimales dans un marché différencié et trouve le même résultat. Kamien et Tauman (1984, 1986), Katz et Shapiro (1986), Kamien et al (1992) se sont concentrés sur la position de la firme innovatrice. Ils trouvent que pour une innovation non intense, une licence par des royalties n'est pas meilleure qu'une licence par prix fixe ou un prix d'enchère. Giebe et Wolfstetter (2006) étudient une combinaison entre des royalties et un prix d'enchère et trouvent que quand la firme qui détient le brevet est externe au marché, cette combinaison est meilleure que celle par un prix d'enchère, par des royalties, ou par un mélange entre royalties et pris d'enchère. Sen (2002) a étudié un oligopole à la Cournot comportant au moins trois firmes et où l'une d'entre elles possède une innovation de procédé. Il montre qu'une version de licence avec des royalties peut permettre à la firme innovatrice de réaliser son profit de monopole. Dans un autre article, Sen (2004) montre que pour une firme innovatrice externe au marché, et dans une compétition à la Cournot qu'une licence par des royalties peut être meilleure qu'un mélange de prix fixe et prix d'enchère quand le nombre de licences ne prend que des valeurs entières. Dans d'autres articles, les auteurs ont comparé les modalités de licence dans un duopole ou la firme innovatrice est interne au marché et où les consommateurs paient un prix de transport pour se déplacer vers l'une des firmes. C'est le cas de l'article de Poddar et Sinha (2004) qui étudient le transfert de technologie dans un modèle à la Hotelling où les firmes sont localisées aux deux extrémités de la ville et ils trouvent qu'une licence par des royalties est optimale quand l'innovation est non intense. Une même étude a été faite avec Poddar (2011) dans laquelle l'étude a porté sur le cas de symétrie et puis d'asymétrie des coûts aux modèles de Hotelling et de Salop et les résultats montrent qu'une licence par royauté peut être optimale même pour innovation intense et qu'une licence par prix fixe n'est jamais optimale. L'apport de mon article ici c'est que dans la réalité, les consommateurs ne sont pas toujours situés sur une ville linéaire (des habitations tout le long d'une rue) mais le plus souvent ils se concentrent dans des agglomérations ce qui peut être modélisé mathématiquement par un plan à deux dimensions. J'essaie donc dans cet article d'étudier les modalités de licence dans un modèle d'une ville à deux dimensions. Les résultats montrent qu'un prix fixe peut être optimal lorsque la différence entre les coûts de production des deux firmes est forte et que l'innovation est intermédiaire ou intense ce qui contredit les résultats trouvés dans les modèles unidimensionnels. Dans cet article on présente dans la première partie le modèle avec les coûts symétriques puis le cas d'asymétrie des coûts à la deuxième partie. On discute et on compare dans chaque partie trois stratégies de licences: l'absence de licence, la licence par un prix fixe et la licence par des royalties.

2 Modèle avec coûts symétriques

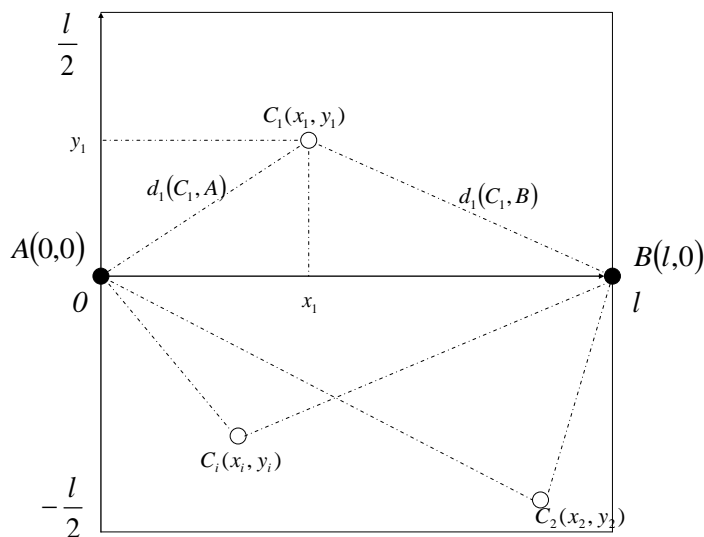


Fig 1 : Modèle

Soit une ville à deux dimensions sous la forme d'un carré à côté égal à l et soient deux firmes A et B produisant un bien homogène et situées symétriquement sur la bordure de la ville. On suppose que la firme A est située à l'abscisse 0 et que la firme B est située à l'abscisse l et que les deux se situent sur la droite qui passe par le centre de la ville en la divisant en deux parties égales. On suppose que la firme A détient un brevet permettant de réduire le coût unitaire de production et qu'elle peut vendre sous forme d'un contrat de licence à prix fixe ou avec des royalties. On suppose aussi que les consommateurs sont répartis uniformément sur la bordure et l'intérieur de la ville et que pour se déplacer vers l'une des firmes, ils doivent déboursier un coût de transport quadratique égal à td^2 avec t le coût de transport unitaire et d la distance le séparant de la firme. Le consommateur (i, j) se trouve en (x_i, y_j) tel que

$$0 \leq x_i \leq l \text{ et } -\frac{l}{2} \leq y_j \leq \frac{l}{2}.$$

Le jeu se fait en deux étapes. A la première étape, la firme A décide d'accorder une licence ou non ainsi que du montant de prix fixe et du taux de royalties et à la deuxième étape, les

deux firmes fixent leurs prix de vente.

L'utilité du consommateur situé en (x, y) et achetant le produit de la firme A est:

$$U_A = -p_1 - t(x^2 + y^2)$$

L'utilité du consommateur situé en (x, y) et achetant le produit de la firme B est:

$$U_B = -p_2 - t((l-x)^2 + y^2)$$

L'emplacement des consommateurs indifférents entre les deux firmes A et B se situent en \tilde{x} tel que

$$U_A = U_B \Leftrightarrow \tilde{x} = \frac{l}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t}$$

La fonction de demande adressée à la firme A est :

$$D_A = l\tilde{x} = \frac{l^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t}$$

La fonction de demande adressée à la firme B est :

$$D_B = (l - \tilde{x})l = \frac{l^2}{2} - \frac{p_2 - p_1}{2t}$$

Les fonctions de profit sont :

$$\pi_A = (p_1 - c_1)D_A = (p_1 - c_1) \left(\frac{l^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t} \right)$$

$$\pi_B = (p_2 - c_2)D_B = (p_2 - c_2) \left(\frac{l^2}{2} - \frac{p_2 - p_1}{2t} \right)$$

La maximisation des profits des deux firmes par rapport aux prix donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_A}{\partial p_1} = \frac{1}{2t}(p_2 - 2p_1 + tl^2 + c_1) \\ \frac{\partial^2 \pi_A}{\partial p_1^2} = -\frac{1}{t} < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial \pi_B}{\partial p_2} = \frac{1}{2t}(p_1 - 2p_2 + tl^2 + c_2) \\ \frac{\partial^2 \pi_B}{\partial p_2^2} = -\frac{1}{t} < 0 \end{cases}$$

ce qui donne les prix d'équilibre suivants:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_A}{\partial p_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi_B}{\partial p_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{2}(p_2 + tl^2 + c_1) \\ p_2 = \frac{1}{2}(p_1 + tl^2 + c_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1^* = tl^2 + \frac{1}{3}(2c_1 + c_2) \\ p_2^* = tl^2 + \frac{1}{3}(c_1 + 2c_2) \end{cases}$$

En remplaçant dans les fonctions de profits des firmes A et B on trouve:

$$\pi_A^* = \frac{1}{18t}(3tl^2 + c_2 - c_1)^2 \quad \text{et} \quad \pi_B^* = \frac{1}{18t}(3tl^2 + c_1 - c_2)^2$$

L'emplacement des consommateurs indifférents est:

$$\tilde{x} = \frac{l}{2} + \frac{1}{6t}(c_2 - c_1)$$

Les demandes d'équilibres adressées aux deux firmes sont :

$$D_A = \frac{l^2}{2} + \frac{1}{6t}(c_2 - c_1)$$

$$D_B = \frac{l^2}{2} - \frac{1}{6t}(c_2 - c_1)$$

2.1 Modalité d'absence de licence

Dans ce cas, la firme innovatrice profite seule de sa propre innovation tandis que sa concurrente utilise l'ancienne technologie. En notant par c_1 et c_2 les coûts de productions unitaires respectifs de la firme A et de la firme B on peut écrire $c_1 = c - \varepsilon$ et $c_2 = c$.

Le prix d'équilibre de la firme B est $p_2^* = tl^2 + c - \frac{1}{3}\varepsilon$. La firme B qui utilise l'ancienne technologie réalise un profit positif si le prix d'équilibre du produit qu'elle vend est supérieur strictement à son coût de production unitaire. $p_2^* > c \Leftrightarrow \varepsilon < 3tl^2$ ceci veut dire que la firme non innovatrice réalise un profit positif, en cas de non licence, si l'innovation est non intense. Par contre si $\varepsilon > 3tl^2$, elle quitte le marché et la firme A devient un monopole.

En cas d'innovation non intense, les profits d'équilibre des deux firmes sont:

$$\pi_A^{PL} = \frac{1}{18t}(3tl^2 + \varepsilon)^2 \text{ et } \pi_B^* = \frac{1}{18t}(3tl^2 - \varepsilon)^2$$

En cas d'innovation intense, les profits d'équilibre sont:

$$\pi_A^{PL} = (\varepsilon - tl^2)^2 \text{ et } \pi_B^* = 0$$

En effet, quand l'innovation est intense, la firme A va fixer son prix de monopole pour lequel elle aura toute la demande à elle. Le prix le plus bas qu'elle peut appliquer est celui qui attire le consommateur le plus loin de son emplacement. Pour ça elle applique un prix égal au coût unitaire de la firme B diminué de coût de transport supplémentaire que le consommateur le plus éloigné de A paiera pour acheter le produit de la firme A au lieu de celui de B . Le prix

de monopole est donc : $p_1^{PL} = c - \left(\frac{5}{4}tl^2 - t\frac{l^2}{4} \right) = c - tl^2$ et le profit de monopole est :

$$\pi_A^{PL} = (p_1^{PL} - c_1)^2 = (\varepsilon - tl^2)^2.$$

2.2 Modalité de licence par prix fixe

Dans ce cas, la firme B bénéficie de la nouvelle technologie en contre partie du paiement d'un prix fixe F . On supposera que F est égal au montant maximum que la firme B peut payer en contre partie de la licence et qui est égal à l'augmentation de son profit avec l'utilisation de la nouvelle technologie: $F = \pi_B^F - \pi_B^{PL}$. Les coûts unitaires de production des firmes A et B sont $c_1 = c_2 = c - \varepsilon$. En remplaçant dans les expressions de profit on trouve :

$$\pi_A^F = \frac{1}{2}tl^4 \text{ et } \pi_B^F = \frac{1}{2}tl^4$$

En cas d'innovation non intense ($\varepsilon < 3tl^2$), le montant de prix fixe à payer par la firme B est

$$: F = \frac{\varepsilon}{18t}(6tl^2 - \varepsilon)$$

Le revenu total de la firme A dans ce cas est: $\Pi_A^F = \pi_A^F + F = \frac{1}{18t}(9t^2l^4 + \varepsilon(6tl^2 - \varepsilon))$

En cas d'innovation intense ($\varepsilon > 3tl^2$), le montant de prix fixe est: $F = \frac{1}{2}tl^4$

Le revenu total de la firme A dans ce cas est: $\Pi_A^F = \pi_A^F + F = tl^4$

Lemme 1

L'absence de licence est meilleure pour la firme qui détient le brevet que la licence par un prix fixe indépendamment de la taille de l'innovation

Preuve

En cas d'innovation non intense: $\varepsilon < 3tl^2$

$$\Pi_A^F - \pi_A^{PL} = -\frac{\varepsilon^2}{9t} < 0$$

En cas d'innovation intense: $\varepsilon > 3tl^2$

$$\Pi_A^F - \pi_A^{PL} = l^2(2tl^2 - \varepsilon) < 0$$

2.3 Modalité de licence par des royalties

Dans le cadre de ce régime de licence, la firme B profite de l'utilisation de la nouvelle

technologie en contre partie du paiement de royalties proportionnelles à la quantité de biens vendues et égales à $r(l - \tilde{x})l$ à la firme A . Le taux de royalties r doit être compris dans l'intervalle $]0, \varepsilon]$ car sinon la firme non innovatrice ne sera plus intéressée à acheter la licence. Les coûts de productions unitaires des firmes A et B sont respectivement $c_1 = c - \varepsilon$ et $c_2 = c - \varepsilon + r$

En remplaçant dans les expressions de profit d'équilibre on trouve :

$$\pi_A^r = \frac{1}{18t} (3tl^2 + r)^2 \text{ et } \pi_B^r = \frac{1}{18t} (3tl^2 - r)^2$$

Le revenu total de la firme innovatrice s'écrit:

$$\Pi_A^r = \pi_A^r + r(l - \tilde{x})l = \frac{1}{18t} (3tl^2 + r)^2 + r \left(\frac{l^2}{2} - \frac{r}{6t} \right)$$

Maximisant le revenu total de la firme innovatrice par rapport à r on trouve:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_A^r}{\partial r} = -\frac{1}{18t} (4r - 15tl^2) \\ \frac{\partial^2 \Pi_A^r}{\partial r^2} = -\frac{2}{9t} < 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial \Pi_A^r}{\partial r} = 0 \Rightarrow r^* = \frac{15}{4} tl^2$$

Le taux de royalties doit vérifier $0 < r^* < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon > \frac{15}{4} tl^2$. Donc on aura deux valeurs

optimales du taux de royalties:

$$\begin{cases} r^* = \varepsilon & \text{si } \varepsilon < \frac{15}{4} tl^2 \\ r^* = \frac{15}{4} tl^2 & \text{si } \varepsilon > \frac{15}{4} tl^2 \end{cases}$$

Le revenu total de la firme innovatrice en cas de licence par des royalties devient égal à :

$$\Pi_A^r = \begin{cases} -\frac{1}{9t} \varepsilon^2 + \frac{5}{6} l^2 \varepsilon + \frac{1}{2} tl^4 & \text{si } \varepsilon < \frac{15}{4} tl^2 \\ \frac{33}{16} tl^4 & \text{si } \varepsilon > \frac{15}{4} tl^2 \end{cases}$$

Lemme 2

Le régime de licence par des royalties est meilleur que le régime d'absence de licence si l'innovation est non intense ($\varepsilon < 3tl^2$) et l'inverse pour une innovation intense ($\varepsilon \geq 3tl^2$).

Preuve

Si $\varepsilon < 3tl^2$ (innovation non intense)

$$\Pi_A^r - \pi_A^{PL} = \frac{1}{6t} \varepsilon (3tl^2 - \varepsilon) > 0$$

Si $3tl^2 < \varepsilon < \frac{15}{4}tl^2$ (innovation intense)

$$\Pi_A^r - \pi_A^{PL} = \frac{1}{18t} (2\varepsilon + 9tl^2)(3tl^2 - \varepsilon) < 0$$

Si $\varepsilon > \frac{15}{4}tl^2$ (innovation intense)

$$\Pi_A^r - \pi_A^{PL} = l^2 \left(\frac{49}{16}tl^2 - \varepsilon \right) < 0$$

2.4 Comparaison royalties et prix fixe

D'après les deux sections précédentes, les revenus totaux de la firme A après licence sous forme de prix fixe ou de royalties sont:

$$\Pi_A^F = \begin{cases} \frac{1}{18t} (9t^2l^4 + \varepsilon(6tl^2 - \varepsilon)) & \text{si } \varepsilon < 3tl^2 \\ tl^4 & \text{si } \varepsilon > 3tl^2 \end{cases}$$

$$\Pi_A^r = \begin{cases} -\frac{1}{9t} \varepsilon^2 + \frac{5}{6}l^2 \varepsilon + \frac{1}{2}tl^4 & \text{si } \varepsilon < \frac{15}{4}tl^2 \\ \frac{33}{16}tl^4 & \text{si } \varepsilon > \frac{15}{4}tl^2 \end{cases}$$

Ces revenus peuvent être rassemblés dans le tableau suivant:

ε	$\varepsilon < 3tl^2$	$3tl^2 < \varepsilon < \frac{15}{4}tl^2$	$\varepsilon > \frac{15}{4}tl^2$
Π_A^F	$\frac{1}{18t} (9t^2l^4 + \varepsilon(6tl^2 - \varepsilon))$	tl^4	tl^4
Π_A^r	$\frac{1}{9t} \left(-\varepsilon^2 + \frac{15}{2}tl^2 \varepsilon + \frac{9}{2}t^2l^4 \right)$	$\frac{1}{9t} \left(-\varepsilon^2 + \frac{15}{2}tl^2 \varepsilon + \frac{9}{2}t^2l^4 \right)$	$\frac{33}{16}tl^4$
$\Pi_A^r - \Pi_A^F$	$\frac{\varepsilon}{18t} (9tl^2 - \varepsilon)$	$-\frac{1}{9t} \varepsilon^2 + \frac{5}{6}l^2 \varepsilon + \frac{1}{2}t^2l^4$	$\frac{17}{16}tl^4$

Lemme 3

Le régime de licence par la modalité de royalties est toujours meilleur que le régime de

licence par un prix fixe indépendamment de la taille de l'innovation (intense ou non intense).

Preuve

$$\text{Si } \varepsilon < 3tl^2, \Pi_A^r - \Pi_A^F = \frac{\varepsilon}{18t} (9tl^2 - \varepsilon) > 0$$

$$\text{Si } 3tl^2 < \varepsilon < \frac{15}{4}tl^2, \Pi_A^r - \Pi_A^F = -\frac{1}{9t}\varepsilon^2 + \frac{5}{6}l^2\varepsilon + \frac{1}{2}t^2l^4 > 0 \text{ car les racines sont tels que}$$

$$\varepsilon' = \frac{9}{2}tl^2 \left(\frac{5}{6} - \sqrt{\frac{17}{36}} \right) < 3tl^2 < \varepsilon < \frac{15}{4}tl^2 < \varepsilon'' = \frac{9}{2}tl^2 \left(\frac{5}{6} + \sqrt{\frac{17}{36}} \right)$$

$$\text{Si } \varepsilon > \frac{15}{4}tl^2, \Pi_A^r - \Pi_A^F = \frac{17}{16}tl^4 > 0$$

Les régimes optimaux de la firme A se résument ainsi :

$$\begin{cases} \Pi_A^r > \pi_A^{PL} > \Pi_A^F & \text{si } \varepsilon < 3tl^2 \\ \pi_A^{PL} > \Pi_A^r > \Pi_A^F & \text{si } 3tl^2 < \varepsilon < \frac{15}{4}tl^2 \\ \pi_A^{PL} > \Pi_A^r > \Pi_A^F & \text{si } \varepsilon > \frac{15}{4}tl^2 \end{cases}$$

Proposition 1

Pour des coûts de production symétriques, les meilleures stratégies de licence dans un modèle à deux dimensions sont les mêmes que dans les deux modèles unidimensionnels à savoir à la *Hotelling* et à la *Salop* et dans lesquels la firme innovatrice à intérêt à accorder une licence sous la modalité de royauté quand l'innovation est non intense et n'accorde aucune licence quand l'innovation est intense.

3 Modèle avec coûts asymétriques

Dans cette partie, on va étudier et comparer les modalités de licence dans un même modèle où les coûts ne sont plus les mêmes. On va supposer que la firme non innovatrice est plus efficiente en termes de coût que la firme qui détient le brevet: $c_1 > c_2$ et on va noter cette inefficience de la firme innovatrice par $\delta = c_1 - c_2 (> 0)$.

On garde les mêmes autres propriétés du modèle symétrique des coûts où les deux firmes A et B produisent le même bien homogène et sont situées symétriquement sur la bordure de la

ville. il existe une seule firme innovatrice et qui détient un brevet permettant de réduire le coût de production unitaire à savoir la firme A et une seule firme non innovatrice à savoir a firme B . Les consommateurs sont répartis uniformément sur la ville à deux dimensions et paient un coût de transport quadratique pour se déplacer vers l'une des firmes existantes et égal à td^2 avec t le coût de transport unitaire et d la distance le séparant de la firme.

On trouve de la même manière que dans le cas symétrique des coûts l'emplacement des consommateurs indifférents entre les deux firmes A et B et qui se situent en \tilde{x} tel que

$$\tilde{x} = \frac{l}{2} + \frac{1}{6t}(c'_2 - c'_1) \text{ où on désigne ici par } c'_1 \text{ le coût de production total unitaire de la firme } A$$

et par c'_2 le coût de production total unitaire de la firme B .

Les fonctions de demande adressées aux firmes A et B sont:

$$D_A = \frac{l^2}{2} + \frac{1}{6t}(c'_2 - c'_1) \text{ et } D_B = \frac{l^2}{2} - \frac{1}{6t}(c'_2 - c'_1)$$

Les prix d'équilibre fixés respectivement par la firme A et la firme B sont :

$$p_1 = tl^2 + \frac{1}{3}(2c'_1 + c'_2) \text{ et } p_2 = tl^2 + \frac{1}{3}(c'_1 + 2c'_2)$$

Les profits d'équilibre des deux firmes sont:

$$\pi_A = \frac{1}{18t}(3tl^2 + c'_2 - c'_1)^2 \text{ et } \pi_B = \frac{1}{18t}(3tl^2 + c'_1 - c'_2)^2$$

3.1 Modalité d'absence de licence

Dans ce cas, la firme innovatrice profite seule de sa propre innovation tandis que sa concurrente utilise l'ancienne technologie. En notant par c'_1 et c'_2 les coûts de productions unitaires respectifs de la firme A et de la firme B on peut écrire $c'_1 = c - \varepsilon$ et $c'_2 = c$.

Le prix d'équilibre de la firme B est $p_2^* = tl^2 + \frac{1}{3}(c_1 - \varepsilon + 2c_2)$. La firme B qui utilise

l'ancienne technologie réalise un profit positif si le prix d'équilibre du produit qu'elle vend est supérieur strictement à son coût de production unitaire. $p_2^* > c_2 \Leftrightarrow \varepsilon < 3tl^2 + c_1 - c_2$ ceci veut dire que la firme non innovatrice réalise un profit positif, en cas de non licence, si l'innovation est non intense. Par contre si $\varepsilon > 3tl^2 + c_1 - c_2$, elle quitte le marché et la firme A devient un monopole.

En cas d'innovation non intense ($\varepsilon < 3tl^2 + c_1 - c_2$), les profits d'équilibre des deux firmes sont:

$$\pi_A^{PL} = \frac{1}{18t} (3tl^2 + c_2 - c_1 + \varepsilon)^2 \text{ et } \pi_B^* = \frac{1}{18t} (3tl^2 + c_1 - c_2 - \varepsilon)^2$$

En cas d'innovation intense ($\varepsilon \geq 3tl^2 + c_1 - c_2$), les profits d'équilibre sont:

$$\pi_A^{PL} = (c_2 - c_1 - tl^2 + \varepsilon)^2 \text{ et } \pi_B^* = 0$$

3.2 Modalité de licence par prix fixe

Dans ce cas, la firme B bénéficie de la nouvelle technologie en contre partie du paiement d'un prix fixe F . On supposera que F est égal au montant maximum que la firme B peut payer en contre partie de la licence et qui est égal à l'augmentation de son profit avec l'utilisation de la nouvelle technologie: $F = \pi_B^F - \pi_B^{PL}$. Les coûts unitaires de production des firmes A et B sont $c_1' = c_2' = c - \varepsilon$. En remplaçant dans les expressions de profit on trouve :

$$\pi_A^F = \frac{1}{18t} (3tl^2 + c_2 - c_1)^2 \text{ et } \pi_B^F = \frac{1}{18t} (3tl^2 + c_1 - c_2)^2.$$

On distingue ici entre deux cas: innovation non intense et innovation intense

3.2.1 Innovation non intense ($\varepsilon < 3tl^2 + c_1 - c_2$)

Dans ce cas, le montant de prix fixe à payer par la firme B est : $F = \frac{\varepsilon}{18t} (6tl^2 + 2c_1 - 2c_2 - \varepsilon)$

Le revenu total de la firme A dans ce cas est:

$$\Pi_A^F = \pi_A^F + F = \frac{1}{18t} (3tl^2 + c_2 - c_1)^2 + \frac{\varepsilon}{18t} (6tl^2 + 2c_1 - 2c_2 - \varepsilon)$$

En faisant la différence entre le revenu total de la firme innovatrice en cas de licence par prix

fixe et son revenu en cas de non licence, on trouve : $\Pi_A^F - \pi_A^{PL} = \frac{1}{9t} \varepsilon (2(c_1 - c_2) - \varepsilon)$

Lemme 4

Pour une innovation non intense, quand la différence entre les coûts est forte ou quand elle est faible et qu'en même temps l'innovation est faible alors un prix fixe est toujours meilleur qu'une absence de licence, Par contre quand la différence entre les coûts est faible et que

l'innovation est intermédiaire alors l'absence de licence est meilleure qu'un prix fixe.

Preuve

$$\Pi_A^F - \pi_A^{PL} = \frac{1}{9t} \varepsilon (2(c_1 - c_2) - \varepsilon) = \frac{1}{9t} \varepsilon (2\delta - \varepsilon) \text{ (en posant } \delta = c_1 - c_2 > 0)$$

Si $\varepsilon < 2\delta$ alors $\Pi_A^F > \pi_A^{PL}$ et Si $\varepsilon > 2\delta$ alors $\Pi_A^F < \pi_A^{PL}$

Ceci peut s'écrire aussi :

Si $\delta > 3tl^2 \Rightarrow \Pi_A^F > \pi_A^{PL}$

$$\text{Si } \delta < 3tl^2 \Rightarrow \begin{cases} \Pi_A^F > \pi_A^{PL} & \text{si } \varepsilon < 2\delta \\ \pi_A^{PL} > \Pi_A^F & \text{si } 2\delta < \varepsilon < 3tl^2 + \delta \end{cases}$$

	$\varepsilon < 2\delta$	$2\delta < \varepsilon < 3tl^2 + \delta$
$\delta < 3tl^2$	$\Pi_A^F > \pi_A^{PL}$	$\pi_A^{PL} > \Pi_A^F$
$\delta > 3tl^2$	$\Pi_A^F > \pi_A^{PL}$	

3.2.2 Innovation intense ($\varepsilon > 3tl^2 + c_1 - c_2$)

Dans ce cas, le montant de prix fixe est: $\frac{1}{18t} (3tl^2 + c_1 - c_2)^2$

Le revenu total de la firme A dans ce cas est: $\Pi_A^F = \pi_A^F + F = \frac{1}{9t} ((3tl^2)^2 + (c_1 - c_2)^2)$

La différence entre le revenu total de la firme innovatrice en cas de licence par prix fixe Π_A^F et son revenu en cas de non licence π_A^{PL} donne:

$$\Pi_A^F - \pi_A^{PL} = \frac{1}{9tl^2} (3tl^2 - \delta)(3tl^2 + \delta)$$

Lemme 5

Pour une innovation intense, quand la différence entre les coûts est faible ou qu'elle est forte et qu'en même temps l'innovation n'est pas très intense alors un prix fixe est meilleur qu'une absence de licence. Par contre quand la différence entre les coûts est forte et que l'innovation est très intense alors l'absence de licence est meilleure qu'un prix fixe

Preuve

$$\Pi_A^F - \pi_A^{PL} = \frac{1}{9tl^2} (3tl^2 - \delta)(3tl^2 + \delta)$$

$$\text{Si } \delta < 3tl^2 \Rightarrow \Pi_A^F > \pi_A^{PL}$$

$$\text{Si } \delta > 3tl^2 \Rightarrow \begin{cases} \Pi_A^F > \pi_A^{PL} & \text{si } 3tl^2 + \delta < \varepsilon < \frac{1}{9tl^2} \delta^2 + \delta + 2tl^2 \\ \pi_A^{PL} > \Pi_A^F & \text{si } \varepsilon > \frac{1}{9tl^2} \delta^2 + \delta + 2tl^2 \end{cases}$$

	$3tl^2 + \delta < \varepsilon < \frac{1}{9tl^2} \delta^2 + \delta + 2tl^2$	$\varepsilon > \frac{1}{9tl^2} \delta^2 + \delta + 2tl^2$
$\delta < 3tl^2$	$\Pi_A^F > \pi_A^{PL}$	
$\delta > 3tl^2$	$\Pi_A^F > \pi_A^{PL}$	$\pi_A^{PL} > \Pi_A^F$

3.3 Modalité de licence par des royalties

Dans le cadre de ce régime de licence, la firme B profite de l'utilisation de la nouvelle technologie en contre partie du paiement de royalties proportionnelles à la quantité de biens vendues et égales à $r(l - \tilde{x})l$ à la firme A . Le taux de royalties r doit être compris dans l'intervalle $]0, \varepsilon]$ car sinon la firme non innovatrice ne sera plus intéressée par l'achat de la licence. Les coûts de productions unitaires des firmes A et B sont respectivement $c'_1 = c_1 - \varepsilon$ et $c'_2 = c_2 - \varepsilon + r$. Une étude semblable à la partie symétrique des coûts donne les fonctions de profits des deux firmes A et B :

$$\pi_A^r = \frac{1}{18t} (3tl^2 + c_2 - c_1 + r)^2$$

$$\pi_B^r = \frac{1}{18t} (3tl^2 + c_1 - c_2 - r)^2$$

Le profit de la firme innovatrice majoré du produit des la vente de sa licence est

$$\Pi_A^r = \pi_A^r + rD_B = \frac{1}{18t} (3tl^2 - \delta + r)^2 + r \left(\frac{l^2}{2} - \frac{1}{6t} (-\delta + r) \right).$$

La maximisation de Π_A^r par rapport à r donne:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_A^r}{\partial r} = \frac{1}{18t} (15tl^2 - 4r + \delta) \\ \frac{\partial^2 \Pi_A^r}{\partial r^2} = -\frac{2}{9t} < 0 \end{cases}, \frac{\partial \Pi_A^r}{\partial r} = 0 \Leftrightarrow r^* = \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta$$

Comme $0 < r^* < \varepsilon$ alors on doit distinguer entre deux valeurs optimales du taux de royalties :

$$\begin{cases} r^* = \varepsilon & \text{si } \varepsilon < \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta \\ r^* = \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta & \text{si } \varepsilon > \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta \end{cases}$$

En remplaçant r^* dans la fonction du revenu total Π_A^r on trouve :

$$\Pi_A^r = \begin{cases} \frac{1}{18t} (-2\varepsilon^2 + (\delta + 15tl^2)\varepsilon + \delta^2 + 9t^2l^4 - 6tl^2\delta) & \text{si } \varepsilon < \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta \\ \frac{33}{16}tl^4 + \frac{1}{16t}\delta^2 - \frac{1}{8}l^2\delta & \text{si } \varepsilon > \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta \end{cases}$$

Pour comparer une licence par des royalties et une absence de licence, on doit distinguer entre

deux cas : cas où $\frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta < 3tl^2 + \delta$ et cas où $\frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta > 3tl^2 + \delta$ c'est à dire cas où

$\delta > tl^2$ (différence forte entre les coûts) et cas où $\delta < tl^2$ (différence faible entre les coûts)

En effet, on a trouvé que pour une absence de licence, la firme qui détient le brevet réalise les profits suivants :

$$\pi_A^{PL} = \begin{cases} \frac{1}{18t} (3tl^2 - \delta + \varepsilon)^2 & \text{si } \varepsilon < 3tl^2 + \delta \\ (\varepsilon - tl^2 - \delta)^2 & \text{si } \varepsilon > 3tl^2 + \delta \end{cases}$$

3.3.1 Faible différence des coûts ($\delta < tl^2$)

Dans ce cas on a $\frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta > 3tl^2 + \delta$

La différence entre les profits des deux cas de licence est :

$$\Pi_A^r - \pi_A^{PL} = \begin{cases} -\frac{1}{6t}\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{6t}\delta + \frac{1}{2}l^2\right)\varepsilon & \text{si } \varepsilon < 3tl^2 + \delta \\ -\frac{1}{9t}\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{18t}\delta - \frac{1}{6}l^2\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{18t}\delta^2 + \frac{3}{2}tl^4 + \frac{2}{3}l^2\delta\right) & \text{si } 3tl^2 + \delta < \varepsilon < \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta \\ -l^2\varepsilon + \left(\frac{1}{16t}\delta^2 + \frac{49}{16}tl^4 + \frac{7}{8}l^2\delta\right) & \text{si } \varepsilon > \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta \end{cases}$$

Lemme 6

En cas de faible différence entre les coûts alors une licence par une royaltie est meilleure qu'une absence de licence si l'innovation est non intense. Quand celle ci est intense alors l'absence de licence devient meilleure.

Preuve

Si $\varepsilon < 3tl^2 + \delta$:

$$\left(-\frac{1}{6t}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{6t}\delta + \frac{1}{2}l^2\right)\varepsilon > 0 \text{ car les solutions sont } \varepsilon_1 = 0 \text{ et } \varepsilon_2 = 3tl^2 + \delta$$

donc $\Pi_A^r - \pi_A^{PL} > 0$

Si $3tl^2 + \delta < \varepsilon < \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta$:

$$\left(-\frac{1}{9t}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{18t}\delta - \frac{1}{6}l^2\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{18t}\delta^2 + \frac{3}{2}l^4t + \frac{2}{3}l^2\delta\right) < 0 \quad \text{car les solutions sont}$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{9}{2}tl^2 - \frac{1}{2}\delta \text{ et } \varepsilon_2 = 3tl^2 + \delta$$

donc $\Pi_A^r - \pi_A^{PL} < 0$

Si $\varepsilon > \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta$:

$$(-l^2)\varepsilon + \left(\frac{1}{16t}\delta^2 + \frac{49}{16}l^4t + \frac{7}{8}l^2\delta\right) < 0 \text{ ssi } \varepsilon > \frac{1}{16tl^2}(\delta^2 + 14tl^2\delta + 49t^2l^4)$$

Comparons $\frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta$ et $\frac{1}{16tl^2}(\delta^2 + 14tl^2\delta + 49t^2l^4)$

$$\frac{1}{16tl^2}(\delta^2 + 14tl^2\delta + 49t^2l^4) - \left(\frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta\right) = \frac{1}{16tl^2}\delta^2 + \frac{5}{8}\delta - \frac{11}{16}tl^2$$

$$\frac{1}{16tl^2} \delta^2 + \frac{5}{8} \delta - \frac{11}{16} tl^2, \text{ les solutions sont : } -11tl^2, tl^2 \text{ dans notre cas } \delta < tl^2 \text{ et donc}$$

$$\frac{1}{16tl^2} \delta^2 + \frac{5}{8} \delta - \frac{11}{16} tl^2 < 0 \text{ et donc } \frac{1}{16tl^2} (\delta^2 + 14tl^2\delta + 49t^2l^4) < \left(\frac{15}{4} tl^2 + \frac{1}{4} \delta \right) \text{ et donc}$$

$$\varepsilon > \frac{1}{16tl^2} (\delta^2 + 14tl^2\delta + 49t^2l^4) \text{ d'où } \Pi_A^r - \pi_A^{PL} < 0$$

3.3.2 Forte différence des coûts ($\delta > tl^2$)

On a dans ce cas $\frac{15}{4} tl^2 + \frac{1}{4} \delta < 3tl^2 + \delta$. La différence entre les profits des deux cas de licence est :

$$\Pi_A^r - \pi_A^{PL} = \begin{cases} -\frac{1}{6t} \varepsilon^2 + \left(\frac{1}{6t} \delta + \frac{1}{2} l^2 \right) \varepsilon & \text{si } \varepsilon < \frac{15}{4} tl^2 + \frac{1}{4} \delta \\ -\frac{1}{18t} \varepsilon^2 + \left(\frac{1}{9t} \delta - \frac{1}{3} l^2 \right) \varepsilon + \left(\frac{1}{144t} \delta^2 + \frac{25}{16} tl^4 + \frac{5}{24} l^2 \delta \right) & \text{si } \frac{15}{4} tl^2 + \frac{1}{4} \delta < \varepsilon < 3tl^2 + \delta \\ -l^2 \varepsilon + \left(\frac{1}{16t} \delta^2 + \frac{49}{16} tl^4 + \frac{7}{8} l^2 \delta \right) & \text{si } \varepsilon > 3tl^2 + \delta \end{cases}$$

Lemme 7

En cas de forte différence entre les coûts, le régime de licence par royalties est meilleur que celui d'absence de licence quand l'innovation est non intense et même assez intense. Si l'innovation est très intense alors le régime d'absence de licence devient meilleur.

Preuve

si $\varepsilon < \frac{15}{4} tl^2 + \frac{1}{4} \delta$:

$$\left(-\frac{1}{6t} \right) \varepsilon^2 + \left(\frac{1}{6t} \delta + \frac{1}{2} l^2 \right) \varepsilon > 0 \text{ car les solutions sont } \varepsilon_1 = 0 \text{ et } \varepsilon_2 = 3tl^2 + \delta$$

donc $\Pi_A^r - \pi_A^{PL} > 0$

si $\frac{15}{4} tl^2 + \frac{1}{4} \delta < \varepsilon < 3tl^2 + \delta$:

$\left(-\frac{1}{18t}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{9t}\delta - \frac{1}{3}l^2\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{144t}\delta^2 + \frac{25}{16}l^4t + \frac{5}{24}l^2\delta\right) > 0$ car les solutions de ce polynôme

sont

$$\varepsilon_1 = \delta - 3tl^2 - \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt{33t^2l^4 - 2tl^2\delta + \delta^2}$$

$$\varepsilon_2 = \delta - 3tl^2 + \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt{33t^2l^4 - 2tl^2\delta + \delta^2}$$

et on a $\varepsilon_1 < \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta < 3tl^2 + \delta < \varepsilon_2$

en effet,

$$\left(\frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta\right) - \varepsilon_1 = \frac{3}{4}\left(-\delta + 9tl^2 + \sqrt{2}\sqrt{\delta^2 + 33l^4t^2 - 2tl^2\delta}\right)$$

Soit $\sigma = tl^2$ on aura :

$$\frac{3}{4}\left(-\delta + 9tl^2 + \sqrt{2}\sqrt{\delta^2 + 33l^4t^2 - 2tl^2\delta}\right) = \frac{3}{4}\left(-\delta + 9\sigma + \sqrt{2}\sqrt{\delta^2 + 33\sigma^2 - 2\sigma\delta}\right) > 0 \quad \text{pour tout}$$

$\sigma > 0$ et $\delta > 0$ (voir Fig 2)

$$\varepsilon_2 - (3tl^2 + \delta) = \left(\delta - 3tl^2 + \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt{33t^2l^4 - 2tl^2\delta + \delta^2}\right) - (3tl^2 + \delta) = \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt{33l^4t^2 - 2tl^2\delta + \delta^2} - 6tl^2$$

Soit $\sigma = tl^2$ on aura :

$$\varepsilon_2 - (3tl^2 + \delta) = \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt{33\sigma^2 - 2\sigma\delta + \delta^2} - 6\sigma > 0 \quad \text{pour tout } \sigma > 0 \text{ et } \delta > 0 \text{ (voir Fig 3)}$$

si $\varepsilon > 3tl^2 + \delta$:

$$\left(-l^2\right)\varepsilon + \left(\frac{1}{16t}\delta^2 + \frac{49}{16}l^4t + \frac{7}{8}l^2\delta\right) < 0 \quad \text{ssi } \varepsilon > \frac{1}{16tl^2}\left(\delta^2 + 14tl^2\delta + 49t^2l^4\right)$$

Comparons $3tl^2 + \delta$ et $\frac{1}{16tl^2}\left(\delta^2 + 14tl^2\delta + 49t^2l^4\right)$

$$\frac{1}{16tl^2}\left(\delta^2 + 14tl^2\delta + 49t^2l^4\right) - (3tl^2 + \delta) = \frac{1}{16tl^2}\left(tl^2 - \delta\right)^2 > 0$$

donc $\frac{1}{16tl^2}\left(\delta^2 + 14tl^2\delta + 49t^2l^4\right) > 3tl^2 + \delta$ et on aura deux cas :

Si $3tl^2 + \delta < \varepsilon < \frac{1}{16tl^2}\left(\delta^2 + 14tl^2\delta + 49t^2l^4\right)$ alors $\Pi'_A > \pi_A^{PL}$

Si $\varepsilon > \frac{1}{16tl^2}\left(\delta^2 + 14tl^2\delta + 49t^2l^4\right)$ alors $\Pi'_A < \pi_A^{PL}$

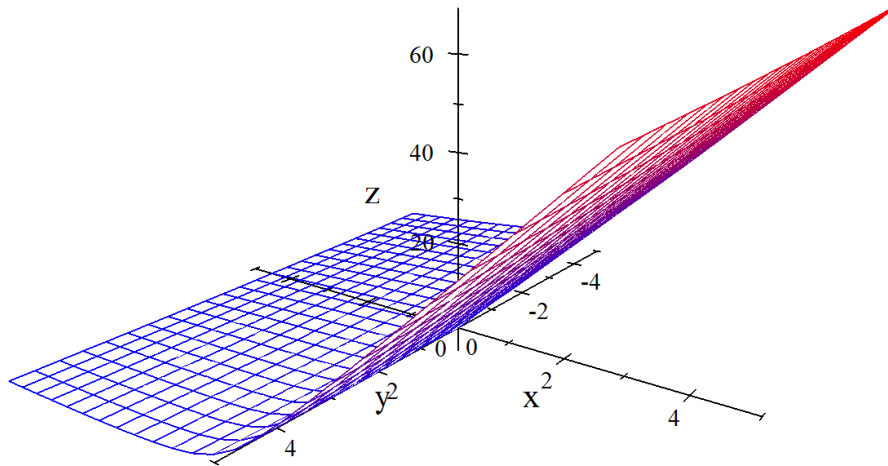


Fig 2 : $\left(\frac{15}{4}\sigma + \frac{1}{4}\delta\right) - \varepsilon_1 > 0$ pour tout $\sigma > 0$ et $\delta > 0$

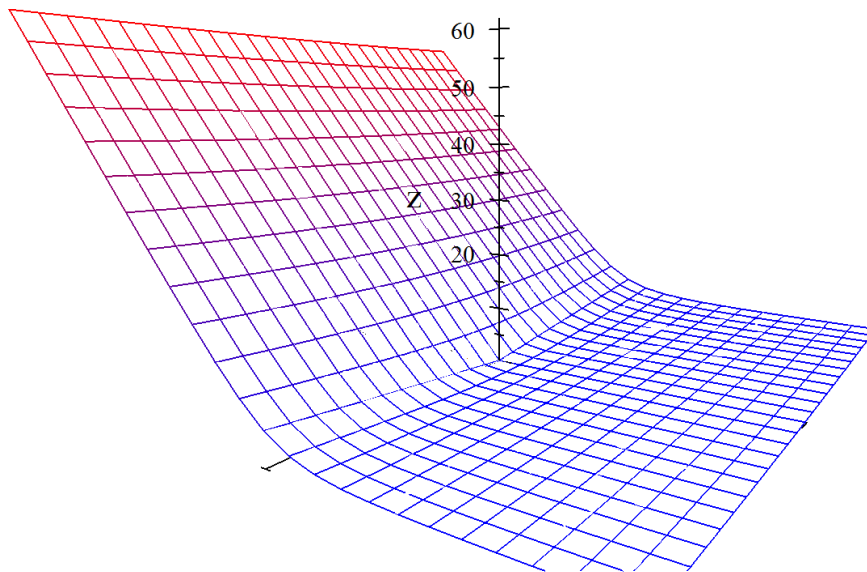


Fig 3 : $\varepsilon_2 - (3\sigma + \delta) > 0$ pour tout $\sigma > 0$ et $\delta > 0$

Lemme 8

En cas d'innovation non intense, le régime de licence par une royauté est meilleur que le régime d'absence de licence indépendamment de la différence des coûts. Il reste aussi

meilleur quand l'innovation n'est pas très intense et que la différence entre les coûts est élevée. Dans les autres cas où l'innovation est intense et que la différence entre les coûts est faible ou dans le cas où l'innovation est très intense et que la différence entre les coûts est forte alors l'absence de licence est meilleure que la licence par une royauté.

	$\varepsilon < 3tl^2 + \delta$	$3tl^2 + \delta < \varepsilon < \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta$	$\varepsilon > \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta$
$\delta < tl^2$	$\Pi_A^r > \pi_A^{PL}$	$\Pi_A^r < \pi_A^{PL}$	$\Pi_A^r < \pi_A^{PL}$

	$\varepsilon < \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta$	$\frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta < \varepsilon < 3tl^2 + \delta$
$\delta > tl^2$	$\Pi_A^r > \pi_A^{PL}$	$\Pi_A^r > \pi_A^{PL}$

	$3tl^2 + \delta < \varepsilon < \frac{1}{16tl^2}(\delta^2 + 14tl^2\delta + 49t^2l^4)$	$\varepsilon > \frac{1}{16tl^2}(\delta^2 + 14tl^2\delta + 49t^2l^4)$
$\delta > tl^2$	$\Pi_A^r > \pi_A^{PL}$	$\Pi_A^r < \pi_A^{PL}$

3.4 Comparaison royautés et prix fixe

D'après les deux sections précédentes, les revenus totaux de la firme A après licence sous forme de prix fixe ou de royautés sont:

$$\Pi_A^r = \begin{cases} \frac{1}{18t}(-2\varepsilon^2 + (\delta + 15tl^2)\varepsilon + \delta^2 + 9t^2l^4 - 6tl^2\delta) & \text{si } \varepsilon < \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta \\ \frac{33}{16}tl^4 + \frac{1}{16t}\delta^2 - \frac{1}{8}l^2\delta & \text{si } \varepsilon > \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta \end{cases}$$

$$\Pi_A^F = \begin{cases} \frac{1}{18t}(3tl^2 - \delta)^2 + \frac{1}{18t}\varepsilon(6tl^2 + 2\delta - \varepsilon) & \text{si } \varepsilon < 3tl^2 + \delta \\ \frac{1}{9t}((3tl^2)^2 + \delta^2) & \text{si } \varepsilon > 3tl^2 + \delta \end{cases}$$

On distingue ici entre deux cas : cas où $\frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta < 3tl^2 + \delta$ et cas où $\frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta > 3tl^2 + \delta$ c'est à dire cas où $\delta > tl^2$ (forte différence entre les coûts) et cas où $\delta < tl^2$ (faible différence entre les coûts)

3.4.1 Faible différence entre les coûts ($\delta < tl^2$)

On a dans ce cas :

$$\Pi_A^r - \Pi_A^F = \begin{cases} \frac{1}{18t}\varepsilon(9tl^2 - \delta - \varepsilon) & \text{si } \varepsilon < 3tl^2 + \delta \\ -\frac{1}{9t}\varepsilon^2 + \frac{1}{18t}(15tl^2 + \delta)\varepsilon - \frac{1}{18t}(9t^2l^4 + 6tl^2\delta + \delta^2) & \text{si } 3tl^2 + \delta < \varepsilon < \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta \\ -\frac{7}{144t}\delta^2 - \frac{1}{8}l^2\delta + \frac{17}{16}tl^4 & \text{si } \varepsilon > \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta \end{cases}$$

Lemme 9

En cas de faible différence entre les coûts, une licence par des royalties est toujours meilleure qu'une licence par un prix fixe indépendamment de la taille de l'innovation.

Preuve

si $\varepsilon < 3tl^2 + \delta$:

$$\frac{1}{18t}\varepsilon(9tl^2 - \delta - \varepsilon) > 0 \quad \text{car} \quad \text{ici} \quad \varepsilon < 3tl^2 + \delta \quad \text{et} \quad 3tl^2 + \delta < 9tl^2 - \delta \quad \text{puisque}$$

$$\delta < tl^2 < 3tl^2 \Rightarrow \Pi_A^r > \Pi_A^F$$

si $3tl^2 + \delta < \varepsilon < \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta$:

$$\left(-\frac{1}{9t}\right)\varepsilon^2 + \frac{1}{18t}(15tl^2 + \delta)\varepsilon - \frac{1}{18t}(9l^4t^2 + 6tl^2\delta + \delta^2) > 0 \text{ car:}$$

$\Delta = 153l^4t^2 - 18tl^2\delta - 7\delta^2 > 0$ car les solutions sont:

$$\delta_1 = -\frac{3}{7}tl^2(8\sqrt{2} + 3) = -6.1344tl^2$$

$$\delta_2 = \frac{3}{7}tl^2(8\sqrt{2} - 3) = 3.563tl^2$$

avec $\delta_1 < 0 < tl^2 < \delta_2$

Donc le polynôme admet les solutions suivantes :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4}\delta + \frac{15}{4}l^2t - \frac{1}{4}\sqrt{153l^4t^2 - 18tl^2\delta - 7\delta^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{4}\delta + \frac{15}{4}l^2t + \frac{1}{4}\sqrt{153l^4t^2 - 18tl^2\delta - 7\delta^2}$$

sont tels que $\varepsilon_1 < 3tl^2 + \delta < \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta < \varepsilon_2$

En effet,

$$(3tl^2 + \delta) - \varepsilon_1 = \frac{3}{4}\delta - \frac{3}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\sqrt{153l^4t^2 - 18tl^2\delta - 7\delta^2}$$

On pose $\sigma = tl^2$ on aura :

$$(3tl^2 + \delta) - \varepsilon_1 = \frac{1}{4}\sqrt{153\sigma^2 - 18\sigma\delta - 7\delta^2} - \frac{3}{4}(\sigma - \delta) > 0 \text{ car :}$$

$$\left(\frac{1}{4}\sqrt{153\sigma^2 - 18\sigma\delta - 7\delta^2}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}(\sigma - \delta)\right)^2 = 9\sigma^2 - \delta^2 > 0 \quad \text{car} \quad \text{ici} \quad \text{on} \quad \text{a}$$

$$\delta < \sigma \Rightarrow \delta^2 < \sigma^2 \Rightarrow 9\sigma^2 > \delta^2$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 - \left(\frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta\right) &= \left(\frac{1}{4}\delta + \frac{15}{4}l^2t + \frac{1}{4}\sqrt{153l^4t^2 - 18tl^2\delta - 7\delta^2}\right) - \left(\frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta\right) \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{-7\delta^2 + 153l^4t^2 - 18tl^2\delta} > 0 \end{aligned}$$

si $\varepsilon > \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta$:

$$\left(-\frac{7}{144t}\right)\delta^2 + \left(-\frac{1}{8}l^2\right)\delta + \frac{17}{16}l^4t > 0 \text{ car les solutions de ce polynôme sont :}$$

$$\delta_1 = -\frac{3}{7}tl^2(8\sqrt{2} + 3) = -6.1344tl^2$$

$$\delta_2 = \frac{3}{7}tl^2(8\sqrt{2}-3) = 3.563tl^2$$

et vérifient $\delta_1 < 0 < tl^2 < \delta_2$

	$\varepsilon < 3tl^2 + \delta$	$3tl^2 + \delta < \varepsilon < \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta$	$\varepsilon > \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta$
$\delta < tl^2$	$\Pi_A^r > \Pi_A^F$	$\Pi_A^r > \Pi_A^F$	$\Pi_A^r > \Pi_A^F$

3.4.2 Forte différence entre les coûts ($\delta < tl^2$)

La différence entre les profits est dans ce cas:

$$\Pi_A^r - \Pi_A^F = \begin{cases} -\frac{1}{6t}\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{6t}\delta + \frac{1}{2}l^2\right)\varepsilon & \text{si } \varepsilon < \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta \\ \frac{1}{18t}\varepsilon^2 + \left(-\frac{1}{9t}\delta - \frac{1}{3}l^2\right)\varepsilon + \frac{1}{144t}\delta^2 + \frac{25}{16}tl^4 + \frac{5}{24}l^2\delta & \text{si } \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta < \varepsilon < 3tl^2 + \delta \\ -\frac{7}{144t}\delta^2 - \frac{1}{8}l^2\delta + \frac{17}{16}tl^4 & \text{si } \varepsilon > 3tl^2 + \delta \end{cases}$$

Lemme 10

Quand la différence entre les coûts est forte alors les trois régimes de licence peuvent être optimaux selon le degré d'inefficacité de la firme innovatrice et selon l'intensité de l'innovation. Le calcul montre qu'une licence par prix fixe peut être optimale si la différence entre les coûts est forte et que l'innovation est intermédiaire ou assez intense.

Preuve

si $\varepsilon < \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta$:

$$\left(-\frac{1}{6t}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{6t}\delta + \frac{1}{2}l^2\right)\varepsilon = \frac{1}{6t}\varepsilon(3tl^2 + \delta - \varepsilon) > 0 \text{ car ici on a } \varepsilon < 3tl^2 + \delta \Rightarrow \Pi_A^r > \Pi_A^F$$

si $\frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta < \varepsilon < 3tl^2 + \delta$:

$$\frac{1}{18t} \varepsilon^2 + \left(-\frac{1}{9t} \delta - \frac{1}{3} l^2 \right) \varepsilon + \frac{1}{144t} \delta^2 + \frac{25}{16} l^4 t + \frac{5}{24} l^2 \delta,$$

Ce polynôme n'admet pas de solutions si $\Delta = -153l^4 t^2 + 18tl^2 \delta + 7\delta^2 < 0 \Leftrightarrow$ si $\delta < 3.563tl^2$

$$\Rightarrow \Pi'_A > \Pi_A^F$$

et admet des solutions si $\Delta = -153l^4 t^2 + 18tl^2 \delta + 7\delta^2 > 0 \Leftrightarrow$ si $\delta > 3.563tl^2$

Dans ce cas, les solutions sont :

$$\varepsilon_1 = \delta + 3tl^2 - \frac{1}{4} \sqrt{2} \sqrt{-153l^4 t^2 + 18tl^2 \delta + 7\delta^2}$$

$$\varepsilon_2 = \delta + 3tl^2 + \frac{1}{4} \sqrt{2} \sqrt{-153l^4 t^2 + 18tl^2 \delta + 7\delta^2}$$

$$\left(\frac{15}{4} tl^2 + \frac{1}{4} \delta \right) - \varepsilon_1 = \frac{1}{4} \left(-3\delta + 3tl^2 + \sqrt{2} \sqrt{7\delta^2 - 153l^4 t^2 + 18tl^2 \delta} \right)$$

On pose $\sigma = tl^2$

$$\left(\frac{15}{4} tl^2 + \frac{1}{4} \delta \right) - \varepsilon_1 = \frac{1}{4} \left(-3\delta + 3\sigma + \sqrt{2} \sqrt{7\delta^2 - 153\sigma^2 + 18\sigma\delta} \right)$$

Si $3.536\sigma < \delta < \frac{21}{5}\sigma$ alors $\varepsilon_1 > \frac{15}{4} tl^2 + \frac{1}{4} \delta$

Si $\delta > \frac{21}{5}\sigma$ alors $\varepsilon_1 < \frac{15}{4} tl^2 + \frac{1}{4} \delta$

$$\varepsilon_2 - (3tl^2 + \delta) = \left(\frac{1}{4} \sqrt{2} \right) \sqrt{7\delta^2 - 153l^4 t^2 + 18tl^2 \delta} > 0$$

$$(3tl^2 + \delta) - \varepsilon_1 = \left(\frac{1}{4} \sqrt{2} \right) \sqrt{7\delta^2 - 153l^4 t^2 + 18tl^2 \delta} > 0$$

D'où on peut résumer pour ce cas où $\frac{15}{4} tl^2 + \frac{1}{4} \delta < \varepsilon < 3tl^2 + \delta$ et $\delta > tl^2$

si $\varepsilon > 3tl^2 + \delta$:

$$\left(-\frac{7}{144t} \right) \delta^2 + \left(-\frac{1}{8} l^2 \right) \delta + \frac{17}{16} l^4 t, \text{ Les solutions sont :}$$

$$-\frac{3}{7} tl^2 (8\sqrt{2} + 3) = -6.1344tl^2$$

$$\frac{3}{7} tl^2 (8\sqrt{2} - 3) = 3.563tl^2$$

Si $tl^2 < \delta < 3.563tl^2$ alors $\Pi'_A > \Pi_A^F$

Si $\delta > 3.563tl^2$ alors $\Pi'_A < \Pi_A^F$

	$\varepsilon < \frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta$
$\delta > tl^2$	$\Pi_A^r > \Pi_A^F$

	$\frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta < \varepsilon < 3tl^2 + \delta$
$tl^2 < \delta < 3.536tl^2$	$\Pi_A^r > \Pi_A^F$

	$\frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta < \varepsilon < \varepsilon_1$	$\varepsilon_1 < \varepsilon < 3tl^2 + \delta$
$3.536tl^2 < \delta < \frac{21}{5}tl^2$	$\Pi_A^r > \Pi_A^F$	$\Pi_A^r < \Pi_A^F$

avec $\varepsilon_1 = \delta + 3tl^2 - \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{-153l^4t^2 + 18tl^2\delta + 7\delta^2}$

	$\frac{15}{4}tl^2 + \frac{1}{4}\delta < \varepsilon < 3tl^2 + \delta$
$\delta > \frac{21}{5}tl^2$	$\Pi_A^r < \Pi_A^F$

	$\varepsilon > 3tl^2 + \delta$
$tl^2 < \delta < 3.563tl^2$	$\Pi_A^r > \Pi_A^F$
$\delta > 3.563tl^2$	$\Pi_A^r < \Pi_A^F$

Proposition 2

Lorsque la firme qui détient le brevet est inefficace par rapport à la firme non innovatrice, on trouve que lorsque degré d'inefficace est faible alors une licence est accordée sous le régime de royalties si l'innovation est non intense et aucune licence n'est accordée pour une innovation intense. Quand le degré d'inefficace est important, les résultats montrent qu'un

prix fixe peut être optimal quand l'innovation est intermédiaire ou pas très forte. On trouve aussi que le régime de licence par royalties est optimal pour une faible innovation. Enfin pour une forte innovation, aucune licence n'est accordée et ce indépendamment du degré d'inefficience.

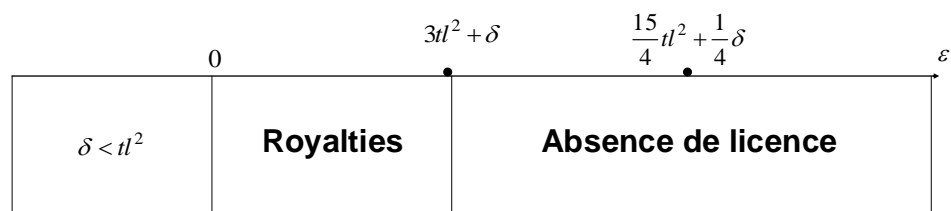
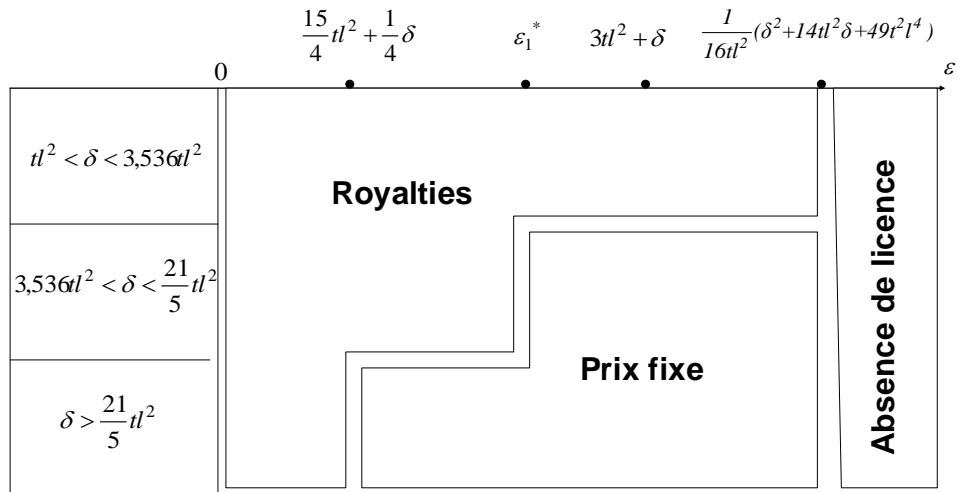


Fig 4 : Régime optimal pour $\delta < tl^2$



$$* \varepsilon_1 = \delta + 3t^2 - \frac{1}{4} \sqrt{2} \sqrt{-153t^2l^4 + 18tl^2\delta + 7\delta^2}$$

Fig 5: Régime optimal pour $\delta > tl^2$

4 Conclusion

Cet article a étudié et comparer les modalités de licence de brevet dans une ville à deux dimensions où les consommateurs se situent à la fois à l'intérieur et à la frontière de la ville. On a essayé de comparer les modalités de licence les plus connues à savoir un prix fixe et des royalties dans un modèle plus réaliste que celui à la *Hotelling* ou à la *Salop* puisque les consommateurs se localisent le plus souvent dans des espaces à deux dimensions et non pas à une seule dimension. On a supposé que deux firmes se font concurrence sur ce marché planaire et que l'une d'elles possède une innovation de procédé brevetée et qu'elle décidera de sa politique de licence qui lui maximise son profit total. On a étudié ici dans deux parties la symétrie et l'asymétrie des coûts. On a supposé que les firmes ont le même niveau de coût et puis on a supposé que la firme qui détient le brevet est moins efficace que sa concurrente et on s'est basé sur cette différence des coûts ainsi que sur la taille de l'innovation pour étudier sa stratégie de licence. On a trouvé des résultats qui diffèrent ceux des modèles à une seule dimension notamment dans le cas d'asymétrie des coûts puisqu'une licence par un prix fixe devient optimale lorsque l'innovation est intermédiaire ou assez intense et que la différence entre les coûts est forte.

Bibliographie

- [1] Arrow, K. (1962). Economic welfare and the allocation of resources for inventions. In: Nelson, R. (Ed.), *The Rate and Direction of Inventive Activity*. Princeton University Press, Princeton.
- [2] Bouguezzi, F., Poddar, S. (2011). Patent Licensing in Spatial Competition – Does Pre-innovation Cost Asymmetry Matter ?, MPRA Paper 32764, University Library of Munich, Germany
- [3] Caballero-Sanz F., Moner-Colonques R., Sempere-Monerris J. (2002). Optimal Licensing in a Spatial Model , *Annales d'économie et de statistiques*, n 66 – 2002
- [4] Giebe, T., Wolfstetter, E. (2008). License auctions with royalty contracts for (winners and) losers. *Games and Economic Behaviour*. doi:10.1016/j.geb.2007.08.010
- [5] Kamien, M., Tauman, Y. (1984). The private value of a patent: a game theoretic analysis. *Journal of Economics* (Supplement) 4, 93–118.
- [6] Kamien, M., Tauman, Y. (1986). Fees versus royalties and the private value of a patent. *Quarterly Journal of Economics* 101, 471–491.
- [7] Kamien, M., Oren, S., Tauman, Y. (1992). Optimal licensing of cost-reducing innovation. *Journal of Mathematical Economics* 21, 483–508.
- [8] Katz, M. and Shapiro, C., (1986). How to license intangible property, *Quarterly Journal of Economics*, 101, (3), 567-589.
- [9] Maldonado, M., Valverde, S., Escalona, M. (2005). Cournot Competition in a Two-Dimensional Circular City, *Manchester School*, Vol. 73, No. 1, pp. 40-49
- [10] Poddar, S. and Sinha, U.B. (2004). On patent licensing in spatial competition. *Economic Record* 80: 208-218.

- [11] Sen, D. (2002). Monopoly Profit in a Cournot oligopoly. *Economics Bulletin*, Vol. 4, No. 6 pp. 1-6
- [12] Sen, D. (2005). Fee versus royalty reconsidered. *Games and Economic Behaviour* 53 (2005) 141–147
- [13] Triest, S., Vis, W. (2007). Valuing patents on cost-reducing technology A case study. *International Journal of Production Economics* (105) 282–292
- [14] Vishwasrao, S. (2006). Royalties vs. fees: How do firms pay for foreign technology. *International Journal of Industrial Organization* (25) 741–759
- [15] Wang, X.H. (1998). Fee versus royalty licensing in a Cournot duopoly model. *Economics Letters* 60: 55-62.
- [16] Wang, X.H. (2002). Fee versus royalty licensing in a differentiated Cournot duopoly. *Journal of Economics and Business* 54: 253-266

Conclusion Générale

On a étudié dans cette thèse quatre articles dans lesquels on a essayé de comparer les modalités de licence de brevet les plus connus à savoir un prix fixe et une royauté dans des modèles différents et selon des structures de coûts de transport et de production différentes.

En effet, on a essayé de voir les modalités de licence optimales quand les firmes sont mobiles symétriquement sur un modèle à la Hotelling quand les coûts de production sont les mêmes et que les coûts de transport des consommateurs sont linéaires, puis on a essayé de voir si on a les mêmes régimes optimaux quand les coûts de transport deviennent quadratiques tout en gardant les firmes fixes aux deux extrémités et en gardant les mêmes coûts de production. Puis on a introduit une autre forme de modèle à savoir le modèle de la ville circulaire à la *Salop* et on a essayé de connaître l'effet du changement des coûts de production sur le choix du régime optimal. Pour cela on a étudié deux modèles linéaires : celui de la ville linéaire à la *Hotelling* et celui de la ville circulaire à la *Salop* quand les coûts de production sont symétriques puis quand la firme qui détient le brevet est inefficace en terme de coûts c'est-à-dire qu'elle produit à un coût plus élevé que sa rivale. Dans le dernier article, on a essayé de construire un modèle plus réaliste dans lequel les consommateurs ne sont plus localisés sur une seule dimension linéaire mais sur une ville plane à deux dimensions.

Les résultats qui ont été trouvés montrent que la modalité de licence optimale dans le modèle linéaire à la Hotelling est la même pour des coûts de transport linéaires ou quadratiques et que la modalité de licence par un prix fixe peut être optimale quand la structure du modèle passe du linéaire à une seule dimension au modèle à deux dimensions quand la firme qui détient le brevet est inefficace en terme de coûts.

D'autres extensions de ces articles sont envisageables car en fait on a supposé que les consommateurs sont uniformément répartis sur tous les modèles alors qu'en réalité les consommateurs s'agglomèrent à certains endroits et se dispersent à d'autres donc une extension qui tient en compte la concentration ou la dispersion ainsi que les emplacements optimaux des firmes serait très intéressante à étudier.