



**HAL**  
open science

## Méthode de Mahler en caractéristique non nulle.

Gwladys Fernandes

► **To cite this version:**

Gwladys Fernandes. Méthode de Mahler en caractéristique non nulle.. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Lyon, 2019. Français. NNT : 2019LYSE1078 . tel-02386667

**HAL Id: tel-02386667**

**<https://theses.hal.science/tel-02386667>**

Submitted on 29 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Claude Bernard Lyon 1  
École doctorale InfoMaths (ED 512)  
Spécialité : Mathématiques  
n°. d'ordre : 2019LYSE1078

# Méthode de Mahler en caractéristique non nulle

Thèse présentée en vue d'obtenir le diplôme de  
Doctorat de l'Université de Lyon

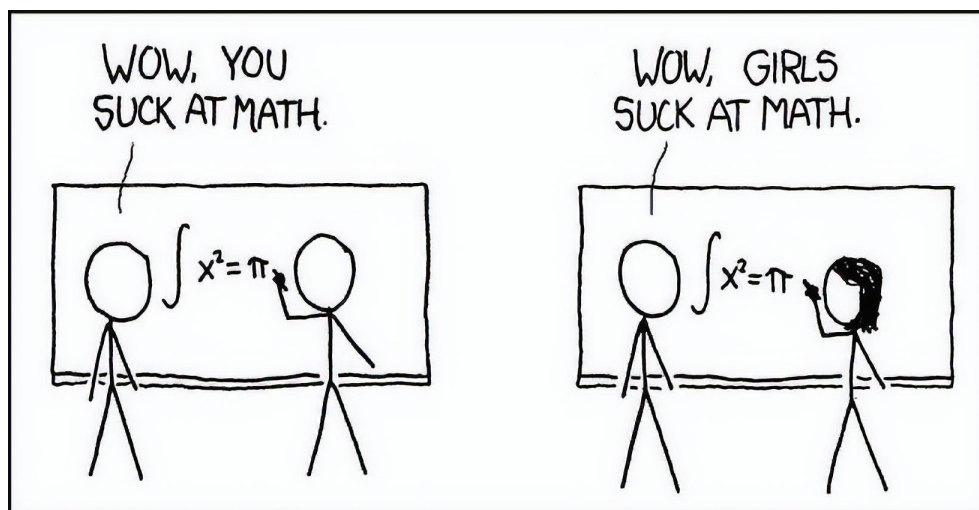
soutenue publiquement le 18 juin 2019 par  
Gwladys Fernandes

devant le jury composé de :

Boris Adamczewski	(Institut Camille Jordan, Lyon)	Directeur de Thèse
Valérie Berthé	(Institut de Recherche en Informatique Fondamentale, Paris)	Présidente
Lucia Di Vizio	(Laboratoire de Mathématiques de Versailles)	Rapporteuse
Charlotte Hardouin	(Institut de Mathématiques de Toulouse)	Examinatrice
Federico Pellarin	(Institut Camille Jordan, Saint-Étienne)	Examineur
Patrice Philippon	(Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris)	Rapporteur
Julien Roques	(Institut Camille Jordan, Lyon)	Examineur



# Méthode de Mahler en caractéristique non nulle



Gwladys Fernandes

Thèse de doctorat



*Quand on aura révisé le dictionnaire et féminisé la langue,  
chacun de ses mots sera, pour l'égoïsme mâle,  
un expressif rappel à l'ordre.*

**Hubertine Auclert**



# Remerciements

Voilà déjà quatre ans que j'attends d'écrire ces remerciements! J'espère que lorsque vous verrez apparaître vos noms sur mes lignes, vous ne serez pas surpris.e.s et que vous connaissez déjà l'étendue de ma gratitude à vos égards. Je suis toutefois ravie d'avoir l'occasion de rassembler les fils bienveillants que vous avez tissés autour de moi au cours de ces quatre années. Bien avant pour certain.e.s. Dès le commencement pour l'une d'entre vous.

## **Mon directeur de thèse**

Boris, je te remercie pour tout ce que tu m'as apporté sur le plan mathématique, au cours de mon mémoire de Master 2 d'abord, puis pendant ma thèse. J'ai énormément appris, autant sur ma façon d'aborder un problème mathématique que sur la manière de rédiger et présenter mes travaux, en passant par le fonctionnement de la communauté mathématique. Merci pour ton soutien lors de ma recherche de post-doctorat et notamment pour notre discussion constructive et déterminante au sujet de mon audition. J'apprécie également ta nouvelle façon d'écrire tes mails.

## **Les membres de mon jury**

Charlotte, je te remercie pour ton aide, tes encouragements et ton soutien lors de ma candidature de post-doctorat. J'aurais été ravie de travailler avec toi! Merci également de te déplacer depuis Toulouse pour ma soutenance. Federico, je te remercie pour nos échanges mathématiques et l'intérêt que tu portes à mes travaux. Merci de te déplacer depuis Saint-Étienne pour ma soutenance. Julien, je te remercie pour nos discussions mathématiques qui m'ont beaucoup aidée. Lucia, je te remercie d'avoir rapporté ma thèse. Merci pour la confiance que tu m'accordes pour mon post-doctorat, et pour tes nombreux messages enthousiastes et surtout rassurants après mon audition. C'est pour moi une chance de pouvoir travailler avec toi! Merci également de te déplacer depuis Versailles pour ma soutenance. Patrice, je vous remercie d'avoir rapporté ma thèse. Merci pour votre perpétuelle bienveillance à mon égard. Merci pour votre capacité à supporter et répondre à mes innombrables questions et tenir bon lorsque je viens carrément vous rencontrer à Jussieu! Merci de m'avoir toujours laissé le temps d'être prête, que ce soit pour votre invitation au GEPbD, lors de notre première rencontre, ou pour le rendu de mon manuscrit de thèse. Merci pour votre compréhension concernant mes remarques sur la féminisation des termes. Merci enfin de vous déplacer depuis Paris pour ma soutenance. Valérie, je te remercie d'avoir accepté de faire partie de mon jury et de te déplacer depuis Paris pour ma soutenance. Merci pour ton enthousiasme concernant ma demande de féminisation des termes. J'ai rarement reçu pareil accueil à ce sujet!

## **Les doctorant.e.s du labo et d'ailleurs**

Marion, ça va être trèèèèè compliqué d'être brève!!! Alors, résumé rapide. Tout a commencé avec une histoire de "non sectaire". Ou plutôt, n'a pas commencé. Ensuite je te casse la jambe en foirant une prise de tai-ji-tsu. De ce point de vue, la fin est inattendue : merci d'être une amie sur laquelle je peux toujours compter! Parce que tu m'encourages en permanence, que tu écoutes ce que je te dis et que tu ne poses pas de questions sur le reste, que tu me proposes ton aide sans commentaire la centième fois si je l'ai refusée les quatre-vingt-dix-neuf fois précédentes, parce que tu me soutiens dans tous mes combats, contre tout et tout le monde. Notamment en matière de sexisme, ça aurait été l'horreur sans toi. Merci pour ce fameux jour où j'étais écoeurée à ce sujet, pour la soirée organisée au pied levé et en extirpant Thomas du fin fond de son labo de bio! Le lendemain, j'avais de nouveau les yeux en face des trous (ou plutôt de mon manuscrit de thèse!), sur mon mode habituel du  $\dot{\jmath}$  no pasarán! Merci de ne pas désespérer quand tu me parles de géométrie algébrique, merci pour les pistes



mathématiques (je vais regarder!), pour tes exposés clairs (synonyme de "pédagogues" qui est disons, un peu connoté en ce moment! Aucun commentaire!) et vraiment super cool! Merci pour les études surveillées et préparations de TD. Merci pour ta relecture de ces remerciements (sauf des tiens, que je te laisse pour ma soutenance!) et pour ta patience face à ma paranoïa d'avant impression (ouiii, on part de suite à la reprographie, ceci est mon dernier ajout!!!). Merci pour le voyage à Londres au moment où j'étais obnubilée par mes maths et tou.te.s les soirées, les sorties, les repas, les pique-niques, les courses au parc de la Tête d'Or, les escapades au(x) lac(s) et les fous-rires qui ont rendu ces années à Lyon inoubliables!

Olga, I remember that during the very first months after we met (I hope this did not last long!!), you thought I was really frightening and wondered how it was possible to be "always smiling" : I was not aware of my attitude but I take it as a compliment!!! I was very lucky that my thesis writing and post-doc application overlapped with yours. Thanks for always sharing information about post-doc, for your help for administrative stuff, for your encouragements, support and kindness. Thanks for all these late-hour work in the office. Thanks for your ability in turning difficulties and "we have sooooo much woook!!!!" into laughter. Thanks for having been the living proof of the end of the "Zombie time" as you called it (you were right, it happened to me too!!). I am really happy for you becoming a Doctor : you fully deserve it!!!

Félix, merci pour ta gentillesse et pour les crises de fous rires après certains événements du bureau!! Merci de garder le secret quand je suis obligée de plonger derrière mon ordi pour rester discrète (Si, si, Marion, je suis TRÈS discrète!!).

Zahra, merci pour ton sourire et ta gentillesse! Jiao, merci pour ta bonne humeur et ton entrain, Tingxiang, merci pour ta gentillesse et ton enthousiasme, Mickaël, dire que j'ai eu le privilège d'assister à la multiplication des pains en direct tous les jours (traumatisme à vie)! Célia, merci pour ta gentillesse. Antoine, merci de me faire rire, même quand je suis débordée ou énervée!

Marina, merci pour ta gentillesse et ton organisation à toute épreuve, pour nos conversations mathématiques et les repas et sorties sur Lyon. Ne crois pas que je parte au moment où tu t'installes : je reviendrai! Daniel, merci pour ton rire facile et communicatif et de partager avec moi ton (passionnant!) sujet de thèse. Quentin, merci pour ta bonne humeur et nos discussions mathématiques. Pan, merci pour ton enthousiasme et de paraître toujours aussi ravie de me voir. C'est réciproque! Vincent, merci pour toutes les soirées, l'initiation technique aux lancers de frisbee et merci de m'avoir présenté Loreena! Loreena, merci pour ta gentillesse et ta bonne humeur! Hugo, merci pour ta gentillesse, ton optimisme et les supers études surveillées qu'on a faites ensemble. On a intérêt à caser ce fameux karaoké à un moment!!! Lola, merci pour ta gentillesse et ton écoute. Et merci énormément de m'avoir défendue! Clément, merci de me faire supporter Christian, en compensant les phrases sans queue ni tête! Christian, en fait, les phrases sans queue ni tête me font rire, et encore plus en période de rédaction de manuscrit! Je suis ravie que nos périodes de rédaction aient coïncidé, merci de m'avoir transmis le modèle .tex adéquat! Mélanie, merci d'avoir rendu notre partage de TD aussi agréable et pour ton soutien sur les questions féministes. Ariane et Caterina, merci pour nos conversations à ce sujet, vos actions et votre soutien. Benjamin D., merci pour ta gentillesse, Michele, merci de ne pas m'avoir tenu rigueur de t'avoir appelé Michèle! Thomas G. et Sam, merci de me faire rire. Rémy, merci de te réjouir autant de ma conf à Anglet, même si ça fait un peu flipper! Simon A., merci pour ta gentillesse. Octave, merci pour ta bonne humeur. Tanessi, Jorge, merci pour notre super sortie au marché de Noël! Je salue également les doctorant.e.s que j'ai croisé.e.s dans les couloirs du labo, ou avec qui j'ai mangé à Domus : Clemens, Chenmin, Garry, Kevin, Antoine U-C., Anatole, Khanh, Shmuel, Godfred, Simon Z., Carlos, Jean-Cyrille, Luigia, Ivan, Alexandre B., Léo P.. Simon B., merci pour nos conversations un brin philosophiques et pour les pâtamitiés. Julie, merci également pour ce dernier point et pour ton sourire. Laura G., merci pour ton soutien sur les questions féministes et ton enthousiasme! Maxime, merci pour ta gentillesse et tes réponses à toutes mes interrogations sur les ATER, post-docs, détachements, disponibilités, et problèmes administratifs en tous genres! Merci pour ta délicatesse quand tu me demandes des nouvelles de ma thèse, de mon manuscrit ou de ma recherche de post-doc! Merci pour les soirées et merci de me faire rire! C'était vraiment rassurant de t'avoir dans le bureau d'à-côté et je ne suis pas la seule à qui tu aies manqué depuis que tu as quitté le

labo! Benoît, merci pour tes imitations à se tordre de rire et pour les histoires de conf à n'en plus finir, dans lesquelles Antoine n'est pas le moins responsable de mes crampes d'estomacs! Seidon, merci pour ta gentillesse et de te réjouir de mon parcours mathématique. Bruno, merci pour l'invitation au séminaire des doctorant.e.s de Grenoble, et pour ta gentillesse. Colin, on n'a pas beaucoup eu l'occasion de se croiser. Merci d'autant plus pour ton enthousiasme pour ma thèse! Auguste, je crois que l'on s'est encore moins croisé.e : merci beaucoup d'avoir répondu à mes questions pour mon audition! Gabriel, merci de m'avoir fait tant rire à la conf du CIRM où on s'est rencontré.e! Amélie, merci d'avoir rendu la conf au CIRM si agréable en étant une super voisine de chambre, et de te réjouir autant pour mon post-doc. C'est réciproque! Isaac, merci pour les balades en conf et ta bonne humeur communicative. Cathy, je suis ravie que l'on ait repris contact après ton exposé à Lyon! Au risque de me répéter, tu n'as rien perdu de ta clarté et rigueur d'exposition depuis la prépa agrég sur Marseille! Félicitations pour ton titre de Doctoresse amplement mérité! Benjamin W. et George, je suis ravie de vous avoir rencontrés (grâce à Marion!)! Merci pour votre sourire, votre bonne humeur, et votre gentillesse!

### **Les permanent.e.s et personnel.le.s du labo**

Tuna, j'espère que tu recouvreras très vite ta liberté. Merci pour ton engagement et la lumière qui en émane. Malgré l'horreur de la situation. J'ai également une pensée pour Füsün Üstel et toutes les autres personnes injustement emprisonnées. Je vous souhaite beaucoup de courage.

Maria, Reem, merci pour votre gentillesse et votre écoute. Merci de toujours vous soucier de mon bien-être mathématique et de venir naturellement me parler en conférence. Maria, merci d'avoir accepté "avec plaisir" de rédiger une lettre de recommandation pour mes post-docs, ton soutien sur les questions féministes et tes compétences, autant mathématiques que d'encadrement. Reem, merci d'avoir autant amélioré mon C.V anglais (qui a conscience de revenir de loin!)! Theresia, merci pour ta gentillesse. Anne, merci pour ton soutien, sur les questions féministes notamment, et pour ton éternelle et inimitable ironie à ce sujet qui me permet d'en rire. Morgane, merci d'identifier le problème sans que j'aie à me justifier, et de le prendre immédiatement au sérieux, sans jamais minimiser. Anne-Laure, Véronique M-D., Elise, Oriane, merci pour votre soutien sur les questions féministes. Sylvie, merci pour ta disponibilité, ton écoute et ton soutien. Je ne te remercierai jamais assez d'avoir transformé l'annuaire de l'ICJ, d'autant que je sais ce qu'il en coûte.

Merci aux organisateur.trice.s d'événements qui permettent de combattre les stéréotypes de genre et encourager les femmes à s'orienter vers les sciences. Merci en particulier à Nathalie (Revol), Natacha (Portier), Jérôme (Germoni), Isabelle (Vauglin), Émilie (Jouin) et l'association Femmes et mathématiques. Barbara (Schapira), merci pour ton engagement sur ces questions et pour le dynamisme de la liste parité.

Véronique B., merci pour ton dynamisme, de partager avec moi tes connaissances sur la didactique et de t'intéresser à mon domaine mathématique. Amador, même si tu ne fais plus partie du labo, je te place quand même dans cette catégorie! Merci d'être aussi drôle et avenant! Thomas B., merci pour ton implication dans la résolution des problèmes. Régis, merci pour l'organisation de Math@Lyon! Luca, merci pour vos réponses à mes questions concernant l'organisation de ma thèse. Vincent et Laurent, merci d'avoir solutionné sans ciller mes nombreux problèmes informatiques. Merci à tou.te.s les bibliothécaires. Je vous ai tant sollicité.e.s pour des recherches d'articles introuvables mais que vous avez pourtant toujours trouvés! Merci en particulier à Claire! Merci à tout.e.s les responsables administratif.ive.s et notamment à celles que j'ai le plus souvent dérangées : Aurélie, et maintenant Lydia, Naïma, Betty, Maria, Christine, Houda, je vous remercie pour votre précieuse efficacité. Merci enfin aux responsables de l'entretien du bâtiment Braconnier, ancien.ne.s et actuel.le.s.

### **Les chercheur.euse.s extérieur.e.s**

Jean-Paul (Allouche), nous ne nous sommes rencontré.e qu'une seule fois en quatre ans, et pourtant, j'ai la sensation que vous avez été régulièrement présent dans ma vie mathématique. Et même constamment au cours de cette dernière année. Je vous remercie pour votre lettre de recommandation, pour l'intérêt que vous témoignez aux travaux que je vous envoie, pour vos encouragements et votre soutien. Par dessus-tout, je vous remercie pour un certain mail, sur une certaine liste de diffusion, que je n'oublierai jamais.

Laurent (Denis), merci pour ton soutien lors de ma candidature de post-doctorat, j'aurais été ravie

de travailler avec toi ! Je te remercie d'avoir accepté de me rencontrer après mon exposé à Lille ! De même que ceux de Kumiko Nishioka, tes articles me quittent rarement et je suis enchantée de pouvoir enfin mettre un visage sur ton nom ! Merci de m'avoir accueillie comme si nous avions toujours fait des maths ensemble et de parler le même langage mathématique que moi. Merci de me suggérer des pistes de recherche, j'espère que nous aurons encore l'occasion d'interagir !

Evgeniy (Zorin), merci pour ton enthousiasme contagieux, tout au long de ma thèse et au sujet de l'une des perspectives de celle-ci. C'est toujours un plaisir de te croiser en conférence et j'espère que nous aurons la possibilité de collaborer !

Émilie (Charlier), merci pour ton dynamisme, tes encouragements et ton soutien lors de mes deux candidatures de post-doctorat. J'aurais été ravie de travailler avec toi !

Tanguy (Rivoal), je te remercie pour ton invitation et ton accueil lors de mon exposé au séminaire de Grenoble. Sara (Checcoli), je te remercie de toujours me demander de mes nouvelles lorsque nous nous croisons en conférence.

Alin (Bostan) et Frédéric (Chyzak), je vous remercie pour l'intérêt que vous portez à ma recherche, votre invitation et votre accueil lors de mon exposé au séminaire de votre équipe à Saclay. Alin, merci énormément de te déplacer spécialement depuis Saclay pour assister à ma soutenance !

### **Les ancien.ne.s professeur.eresse.s**

De nombreux.euse.s professeur.eresse.s ont alimenté mon goût pour les mathématiques au cours de mes études. Madame Vivien, Madame Labbé, Monsieur Vignolles, dès le collège-lycée, vous m'avez transmis avec patience et pédagogie vos connaissances mathématiques. Je vous suis extrêmement reconnaissante pour la clarté de vos cours et le nombre incalculable (et je parle à des mathématicien.ne.s !) d'heures consacrées à répondre à mes intarissables questions. Avant les cours, pendant les cours, après les cours. Je suis ensuite partie à l'Université. À tou.te.s mes profs, je tiens à affirmer que je mesure la chance inestimable que j'ai eue d'être entourée, accompagnée, stimulée par des enseignant.e.s de votre qualité. Au cours de mes cinq années d'études sur Aix-Marseille, vous m'avez transmis votre passion pour les mathématiques, le sens de la rigueur et de la précision, vous avez alimenté ma curiosité mathématique, stimulé mon envie d'apprendre et de progresser et repoussé toute limite que j'aurais pu me fixer sur mes capacités mathématiques. Votre bienveillance et la confiance que vous m'avez témoignées ne cesseront jamais de guider mes pas. Pendant la préparation de mes enseignements, à chaque fois que des étudiant.e.s me posent une question, lorsque je leur réponds, toujours, je pense à vous. Je me dis que ce sera par ce biais que je rendrai tout ce que vous m'avez donné. J'ai conscience qu'il me faudra des années pour y parvenir.

Madame Chevalier, je pense que vous ne vous souvenez plus du tout de moi ! Mais je tenais tout de même à vous remercier pour la perfection de vos cours et pour m'avoir dit un jour que vous m'encouragez à continuer dans cette voie. Je n'oublierai jamais.

Lionel (Nguyen Van Thé), je te considérerai toujours comme mon enseignant-référent. Peut-être que si tu avais su que tu ne pourrais pas te débarrasser de moi, tu aurais refusé cette charge pendant ma L1 ! Merci d'avoir été présent pendant les moments clés de ma vie mathématique, de prendre de mes nouvelles et de m'encourager sans cesse. Thierry (Coulbois), merci pour ton inébranlable confiance en mes capacités mathématiques et pour te débrouiller pour suivre mon parcours mathématique à distance (je sais que Lionel y est pour beaucoup !). Merci aussi d'avoir été le premier à me parler de l'étendue du sexisme en mathématiques, pendant mon mémoire de Master 2. J'ai eu énormément de chance de passer entre les mailles du filet avant ma thèse et notre discussion m'a permis de ne pas tomber de (trop) haut. Merci également pour ton soutien à distance sur ce point. Franck (Boyer), tu es l'une des personnes qui m'a le plus stimulée en mathématiques. Merci de suivre avec toujours autant d'intérêt mon parcours mathématique et de réagir avec autant d'enthousiasme lorsque je te donne de mes nouvelles. Je suis toujours ravie d'échanger des mails avec toi ! Pierre (Bousquet), merci pour vos cours si limpides. Nicolas (Bédaride) et Youssfi (El Hassan), merci pour votre disponibilité. Guillemette (Chapuisat), merci pour vos cours d'une infinie clarté et tellement dynamiques, qui m'ont passionnée, Jean-Yves (Briend), merci d'avoir accepté d'encadrer mon mémoire de M1. Pascal (Hubert), je vous dois ma passion pour l'algèbre.

### **Mes ami.e.s extérieur.e.s**

Alex, Arnaud, Céc, Clairette, David, Eliane, Inga, Marionette, Raphaël : et dire que l'on est ami.e.s depuis le lycée (ou le collège pour toi Inga, cette fois j'évite de faire mon amie indigne!)!!! Merci pour toutes ces soirées hors du temps pendant lesquelles on a dansé, chanté et rigolé tellement fort et tellement longtemps! J'ai eu tellement de chance de vous rencontrer et je suis tellement heureuse qu'on arrive toujours à se voir depuis tout ce temps! Oui, j'arrête avec mes "tellement" mais ça n'a pas intérêt à changer, je vous préviens! Alex, merci de t'être extirpé du fin fond de la Chine et d'atterrir sur Paris au moment où j'y serai aussi! Arnaud, merci de me faire rire (non, ce n'est pas toujours à tes dépends!!), et pour les soirées jeux. Céc, merci pour ta bonne humeur, ton empathie (non, je ne fais pas référence à ton fameux classement en base/phase : j'ai réussi à éviter le sujet en mentionnant Arnaud, donc je continue sur ma lancée! Et puis, soi-disant, je suis en base rebelle donc je fais comme je veux hein!). Merci pour les potins et les crises de fous-rires! Clairette, merci pour les soirées à Aix et les fous-rires! David, merci pour tes soirées d'anniversaire qui nous donnent l'occasion de se rassembler, et pour les voyages à Munich et en Sicile (malgré le pas de course, j'ai adoré!)! Eliane, merci pour ta légendaire honnêteté, et pour les soirées pyjamas qui s'éternisent pendant qu'on se raconte nos vies! Inga, merci d'être ma confidente lors de nos interminables appels téléphoniques hebdomadaires, pour le voyage à Londres et mes supers séjours à Paris! L'année prochaine, je débarque pour de boooooon!!! Marionette, merci de ne m'avoir jamais laissée danser toute seule! Merci d'avoir été une super voisine à Marcy et de m'avoir fait rencontrer Thomas, merci de m'avoir hébergée, merci pour nos anniversaires en commun, qui j'espère se renouvelleront à vie. Merci d'être à l'écoute et merci pour les fous-rires! Raphaël, dire que je dois trouver une raison de te remercier. Ca va être compliqué! Merci d'animer nos soirées depuis toutes ces années! Patrice, merci pour ton accueil à chaque fois que je débarque chez vous, pour ta simplicité et ta gentillesse et pour les super aprem's jeux de société! Cassandra, je t'ai vue bébé et j'ai beaucoup de chance de te voir grandir : bonne première rentrée des classes en septembre! Alexandre, merci pour la visite commentée de la Bourgogne! J'ai adoré! Mais bon, ça ne dépasse quand même pas la région où il fait toujours beau (si, si, tu vois très bien où c'est!!)!

Léa, je ne sais pas pourquoi, mon premier souvenir de toi est lorsque tu me racontais l'histoire d'Eragon, que je n'avais pas lue à l'époque. Merci pour ton goût pour les livres de fantasy qui nous a rassemblés au collège-lycée. Je suis ravie que l'on ait repris contact!

Thomas, je suis tellement contente de t'avoir rencontré à Marcy!!! Merci d'avoir été un super voisin et d'être devenu un super ami!!! Merci de comprendre exactement toutes les embûches que j'ai rencontrées pour ma thèse, les pires étant celles de nature non mathématique mais je ne t'apprends rien! Merci pour nos soirées voisin-voisine qui ont perduré après mon déménagement. Merci pour nos repas à la fac et l'ouverture inespérée de mon tiroir de bureau! Merci pour ton écoute, pour tes conseils et merci d'avoir mon épanouissement personnel autant à cœur. Merci pour ton dynamisme et merci de me faire rire! On a intérêt à garder contact quand je serai à Paris!!!

Flo, merci d'être aussi solaire!!! Merci d'avoir rendu mon séjour à Montréal inoubliable! Merci à tes parents pour leur gentillesse et leur accueil! J'ai trop hâte de te voir en juillet!!!

Lucyle, merci pour ta gentillesse, ton enthousiasme, nos séances de sport et surtout nos soirées cuisine et repas à rallonge!!!

Aude, merci pour ta solidarité.

Akila, merci pour ton rire, malgré les circonstances. Félicitations pour tout ce que tu as déjà accompli et courage pour tout le reste, tu y arriveras!

### **Le théâtre du Sud**

Merci à Fred et à toutes les équipes de théâtre, celles auxquelles j'ai pris part et celles qui ont suivi! Je suis toujours ravie de revenir vous voir répéter et jouer!

### **Ma famille**

Kendhall et Dylan, merci pour les supers souvenirs de vacances.

Laet et Jon, merci pour notre enfance magique.

Maman, je ne connais personne d'aussi courageuse, honnête et droite que toi. Dans ce monde qui rabaisse, agresse et massacre les femmes, ta victoire est éclatante. Je te dois ce que je suis et je suis fière d'être ta fille. Merci. Pour tout. Infiniment.



# Préambule

Cette thèse se situe dans le domaine de la théorie des nombres. Elle traite de la transcendance et de l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions solutions d'équations aux différences linéaires de la forme suivante.

$$P_0(z)f(z) + P_1(z)f(z^d) + \cdots + P_m(z)f(z^{d^m}) = 0, \quad (1)$$

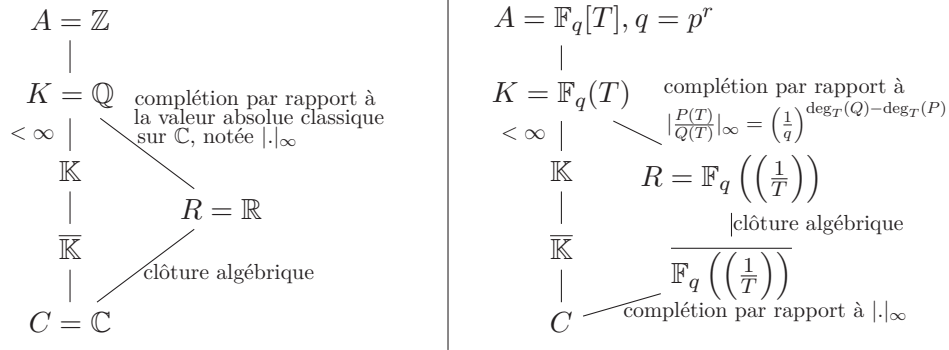
où  $d \geq 2$  est un entier,  $P_0(z), \dots, P_m(z) \in \mathbb{K}[z]$ ,  $P_m(z) \neq 0$  et  $\mathbb{K}$  désigne un corps de nombres ou un corps de fonctions de caractéristique non nulle. Toute solution de (1) développable en série entière au voisinage de l'origine et à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est appelée fonction  $d$ -mahlérienne, du nom de K. Mahler. L'auteur définit en effet dès 1929 une classe de fonctions (de plusieurs variables) vérifiant des équations similaires à (1), dans le cadre des corps de nombres [87, 88, 89]. Son objectif est d'étudier la transcendance de valeurs de telles fonctions aux points algébriques  $\alpha$ . Il introduit alors une méthode qui lui permet notamment d'établir que sous certaines conditions, la transcendance de  $f(z)$  est équivalente à celle de  $f(\alpha)$ . Malgré une première phase pendant laquelle la méthode de Mahler ne fait pas écho dans la communauté mathématique, celle-ci suscite l'intérêt de nombreux.euses chercheur.euse.s à partir des années 1970. Nous citerons par exemple les travaux de K. Kubota [76, 75], J. Loxton et A. van der Poorten [81, 82], et l'apport fondamental de Ku. Nishioka [100, 99]. L'autrice démontre en 1990 l'égalité entre le degré de transcendance de solutions d'un système mahlérien défini sur un corps de nombres et celui de leurs valeurs en un nombre algébrique régulier non nul. En particulier, l'indépendance algébrique des fonctions mahlériennes équivaut à celle de leurs valeurs aux points algébriques concernés. Ce type de résultat procède d'un questionnement plus général sur la possibilité d'établir l'équivalence entre l'indépendance algébrique de fonctions analytiques et celle de leurs valeurs aux points algébriques. Cependant, il existe de nombreux exemples de fonctions transcendentes prenant des valeurs algébriques en tout point algébrique (voir [127]). Par conséquent, nous ne pouvons espérer établir la connexion recherchée sans contraindre la classe de fonctions impliquée. Dans les trois cas suivants, concernant des solutions d'équations fonctionnelles, ce lien est établi. Le théorème de Siegel-Shidlovskii [123] pour des solutions de systèmes différentiels (voir aussi [19]), le théorème de Ku. Nishioka [99] déjà évoqué pour des solutions de systèmes mahlériens, et le théorème de G. Anderson, W. D. Brownawell et M. Papanikolas [18] (en caractéristique non nulle) pour des solutions de systèmes aux  $\tau$ -différences.

Pour revenir à la méthode de Mahler en caractéristique nulle, celle-ci alimente encore actuellement de nombreux travaux. Parmi eux se trouvent les recherches de P. Philippon [110] et B. Adamczewski et C. Favre [8, 11] qui ont permis de raffiner le théorème de Ku. Nishioka (voir aussi [94]) ou les tout récents articles des deux derniers auteurs concernant les fonctions mahlériennes de plusieurs variables [9, 10]. L'objectif de cette thèse est de développer une théorie similaire pour l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes en caractéristique non nulle. Ce contexte présente une profonde analogie avec les corps de nombres, qui permet de définir une arithmétique en miroir de la situation classique et d'en transposer les problématiques. Nous schématisons cela ci-dessous.



Corps de nombres

Corps de fonctions  
de caractéristique  $p > 0$



A gauche, les extensions finies  $\mathbb{K}$  de  $K$  sont des corps de nombres. A droite, on les nomme corps de fonctions (d'une variable). Une grande partie de la recherche en théorie de la transcendance et de l'indépendance algébrique classique vise certains nombres remarquables, appelées périodes, au sens de M. Kontsevich et D. Zagier [73]. Il s'agit par exemple de  $\pi$ , de valeurs du logarithme aux points algébriques, de la fonction Zêta de Riemann aux points entiers, ou de puissances de valeurs de la fonction Gamma d'Euler aux points rationnels. Dans le cadre des corps de fonctions de caractéristique non nulle, il est possible de définir les pendants des fonctions exponentielle complexe, logarithme, Zêta de Riemann ou Gamma d'Euler, ainsi que les valeurs qui leur sont associées, comme  $\pi$ . Obtenir des résultats sur la transcendance et l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes dans le cadre de la caractéristique non nulle comporte un intérêt général du point de vue théorique. Mais au-delà de cela, cette thèse se trouve également motivée par un intérêt spécifique à la caractéristique non nulle, mis en avant par L. Denis. Il s'agit du fait que beaucoup de nombres liés aux éléments remarquables précédemment évoqués peuvent s'obtenir comme valeurs en des points algébriques de fonctions mahlériennes définies sur des corps de fonctions de caractéristique non nulle. Il en va ainsi de l'analogue de  $\pi$ , de valeurs du logarithme de Carlitz en des nombres algébriques ou de la fonction Zêta de Carlitz en des nombres entiers, et plus généralement, d'éléments reliés à une importante classe de nombres appelés périodes de modules de Drinfeld. C'est pourquoi les fonctions mahlériennes dans ce cadre sont essentielles. Combinée à l'observation notable de L. Denis, la méthode de Mahler ouvre effectivement la voie à de stimulants résultats de transcendance et d'indépendance algébrique de nombres remarquables. Enfin, nous pouvons noter que le cadre de la caractéristique non nulle voit spontanément apparaître des fonctions mahlériennes. Nous mentionnons par exemple l'irruption de celles-ci à la croisée des chemins entre la théorie des automates, la géométrie, l'arithmétique et la combinatoire. Cette formidable interface est créée par certaines périodes fonctionnelles, comme les diagonales de fractions rationnelles. Plus précisément, considérons une fraction rationnelle  $R(X_1, \dots, X_r) \in \mathbb{Q}(X_1, \dots, X_r)$  admettant un développement en série formelle de plusieurs variables de la forme

$$R(X_1, \dots, X_r) = \sum_{\underline{n}} a(n_1, \dots, n_r) X_1^{n_1} \cdots X_r^{n_r} \in \mathbb{Q}[[X_1, \dots, X_r]].$$

On définit la diagonale de  $R$  par

$$\Delta(R)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a(n, \dots, n) t^n \in \mathbb{Q}[[t]].$$

Reprenons l'exemple détaillé dans [3] de l'équation différentielle linéaire

$$t(t-1)y''(t) + (2t-1)y'(t) + \frac{1}{4}y(t) = 0.$$

Comme expliqué dans [3], cette équation admet pour solution la fonction hypergéométrique

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{4n}} \binom{2n}{n}^2 t^n \in \mathbb{Q}[[t]],$$

qui est la diagonale de la fraction rationnelle

$$R(X_1, \dots, X_4) = \frac{2}{2 - X_1 - X_2} \cdot \frac{2}{2 - X_3 - X_4}.$$

Il s'avère également que  $\pi f(t)$  est une période fonctionnelle au sens de M. Kontsevich et D. Zagier [73], car

$$\pi f(t) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}.$$

Par ailleurs, on peut considérer la réduction  $f|_p(t) \in \mathbb{F}_p[[t]]$  de  $f(t)$  modulo tout premier impair  $p$ . Celle-ci étant la diagonale de la réduction de la fraction rationnelle  $R$  modulo  $p$ , un théorème de H. Furstenberg [59] implique que  $f|_p(t)$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(t)$ , ce qui est équivalent à dire que  $f|_p(t)$  est  $p$ -mahlérienne sur  $\mathbb{F}_p(t)$ . En effet, puisque l'on est en caractéristique  $p$  et que les coefficients de  $f|_p(t)$  sont dans  $\mathbb{F}_p$ , on a pour tout entier naturel  $i$

$$f|_p(t^{p^i}) = f|_p(t)^{p^i}.$$

Notons que d'après un théorème de G. Christol [40], l'algébricité de  $f|_p(t)$  équivaut également à dire que cette fonction est  $p$ -automatique.

Ainsi, les fonctions mahlériennes en caractéristique non nulle peuvent apparaître naturellement lorsque l'on réduit modulo  $p$  des solutions d'équations différentielles linéaires issues de la géométrie, comme par exemple, certaines fonctions hypergéométriques. Elles sont alors à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$ , algébriques et  $p$ -automatiques. Cette forte présence des fonctions mahlériennes en caractéristique non nulle, en connexion avec des domaines divers et variés, nourrit et conforte l'étude du pendant de la théorie classique des fonctions mahlériennes pour les corps de fonctions de caractéristique non nulle.





# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
I.1	La méthode de Mahler : dans la lignée des méthodes historiques de transcendance . . .	3
I.1.1	De J. Liouville à K. Weierstrass . . . . .	3
I.1.2	Les travaux de C. Siegel et l'apport d'A. Shidlovskii . . . . .	5
I.1.3	La méthode de Mahler et le théorème de Ku. Nishioka . . . . .	6
I.1.4	Fonctions mahlériennes et automates finis . . . . .	9
I.2	Le contexte des corps de fonctions de caractéristique non nulle . . . . .	10
I.3	Modules de Drinfeld et périodes . . . . .	11
I.3.1	Module de Carlitz et fonction exponentielle complexe . . . . .	12
I.3.2	Modules de Drinfeld de rang 2 et courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$ . . . . .	13
I.4	Indépendance algébrique de périodes de modules de Drinfeld . . . . .	15
I.4.1	Les débuts de la théorie : la méthode de L. Wade . . . . .	16
I.4.2	La méthode automatique . . . . .	16
I.4.3	La méthode de G. Anderson, W. D. Brownawell et M. Papanikolas . . . . .	17
I.4.4	La méthode de Mahler en caractéristique non nulle . . . . .	19
I.5	Résultats principaux de la thèse . . . . .	21
I.6	Premiers résultats de cette thèse sur l'indépendance algébrique fonctionnelle et perspectives . . . . .	24
I.6.1	Algébricité des fonctions mahlériennes . . . . .	24
I.6.2	La théorie de Galois . . . . .	25
I.6.3	Théorème de type Kolchin . . . . .	27
I.7	Résultat et travaux de cette thèse autour des mesures d'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes . . . . .	28
<b>II</b>	<b>Relations algébriques entre valeurs de fonctions mahlériennes</b>	<b>31</b>
II.1	Un analogue d'un théorème de Ku. Nishioka . . . . .	31
II.1.1	Contexte . . . . .	31
II.1.2	Critère d'indépendance algébrique de P. Philippon . . . . .	35
II.1.3	Démonstration du théorème II.1.1 . . . . .	36
II.1.4	Analogie du théorème de K. Mahler pour les corps de fonctions en caractéristique non nulle . . . . .	43
<b>III</b>	<b>Relèvement des relations algébriques entre valeurs de fonctions mahlériennes</b>	<b>49</b>
III.1	Framework and results . . . . .	49
III.1.1	Proof of Theorem III.1.1 . . . . .	53
III.1.2	Proof of Theorem III.1.2 . . . . .	61
III.1.3	Proof of Theorem III.1.3 and Corollary III.1.3 . . . . .	65
III.1.4	Proof of Corollary III.1.2 . . . . .	69
III.1.5	Examples . . . . .	70

<b>IV Algébricité et fonctions mahlériennes : premiers résultats</b>	<b>75</b>
IV.1 Transcendance fonctionnelle . . . . .	75
IV.1.1 Un exemple d'une classe de fonctions transcendantes . . . . .	75
IV.1.2 Transcendance de fonctions mahlériennes d'ordre 1 inhomogène . . . . .	77
IV.2 Théorème de Kolchin et équations mahlériennes d'ordre 1 inhomogène . . . . .	81
<b>V Mesures d'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes</b>	<b>87</b>
V.1 Lemme de multiplicité . . . . .	87
V.2 Critère d'indépendance algébrique quantitatif . . . . .	90
V.3 Mesures d'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes . . . . .	91
V.3.1 Construction d'une suite de polynômes adaptée . . . . .	91
V.3.2 Application de l'hypothèse V.2.1 . . . . .	97

# Chapitre I

## Introduction

Avant d'aborder en détail la méthode de Mahler, introduisons brièvement les définitions de base de la théorie de la transcendance. Soit  $C$  un corps et  $K$  un sous-corps de  $C$ . On dit que  $\alpha \in C$  est algébrique sur  $K$  s'il est racine d'un polynôme non nul  $P(X) \in K$ . On note  $\overline{K}$  l'ensemble de ces nombres. Tout nombre de  $C$  qui n'est pas dans  $\overline{K}$  est dit transcendant sur  $K$ . On associe à tout nombre  $\alpha \in \overline{K}$  le polynôme unitaire  $P(X) \in K[X]$  de degré minimal  $m$  tel que  $P(\alpha) = 0$ , appelé polynôme minimal de  $\alpha$  sur  $K$ . On nomme  $m$  le degré de  $\alpha$  sur  $K$ . Toute autre racine du polynôme minimal de  $\alpha$  sur  $K$  est appelée nombre conjugué à  $\alpha$  sur  $K$ . Maintenant, on dit que des nombres  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in C$  sont algébriquement dépendants sur  $K$  s'il existe un polynôme non nul  $P(X_1, \dots, X_n)$  à coefficients dans  $K$  tel que  $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ . Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont algébriquement indépendants sur  $K$ . On définit le degré de transcendance sur  $K$  d'une famille  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  d'éléments de  $C$  comme étant le nombre maximal d'éléments algébriquement indépendants sur  $K$  qu'elle contient. On notera ce nombre  $\text{degtr}_K\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Enfin, un corps de nombres  $\mathbb{K}$  est une extension finie (algébrique) de  $\mathbb{Q}$ , c'est-à-dire un corps contenant  $\mathbb{Q}$  et de dimension finie en tant que  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel.

### I.1 La méthode de Mahler : dans la lignée des méthodes historiques de transcendance

Le terme *transcendante* a été introduit par G. Leibniz en 1682 pour désigner certaines courbes, comme les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus, par opposition aux courbes *algébriques*.

#### I.1.1 De J. Liouville à K. Weierstrass

La théorie des nombres transcendants (voir [136]) démarre réellement en 1844 avec J. Liouville, qui définit formellement un nombre transcendant comme étant un nombre qui n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers et en donne les premiers exemples connus. Parmi eux se trouve  $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k!}$ . La démonstration repose sur un théorème fondamental d'approximation diophantienne de l'auteur qui affirme que pour tout nombre algébrique  $\alpha$  de degré  $n$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tous  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$  tels que  $p/q \neq \alpha$ , on ait

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n}. \quad (\text{I.1})$$

Or la décroissance du terme général du nombre proposé par J. Liouville est telle que celui-ci est trop bien approché par les nombres rationnels pour être algébrique. Plus précisément, J. Liouville remarque que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le nombre rationnel

$$\frac{p_n}{q_n} = \sum_{k=1}^n 2^{-k!}$$

est tel que

$$0 < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n}.$$

En 1874, G. Cantor démontre que l'ensemble des nombres réels est non dénombrable alors que l'ensemble des nombres algébriques l'est. Il montre ainsi que *presque tous* les nombres réels ou complexes sont transcendants. Mais l'un des premiers grands événements de la théorie de la transcendance avait déjà eu lieu un an auparavant, avec la preuve de la transcendance du nombre  $e$  par C. Hermite. L'ingrédient essentiel de cette preuve, appelé de nos jours approximant de Padé, est l'approximation simultanée des valeurs entières de la fonction exponentielle par des fractions rationnelles de même dénominateur. Cette approche est la clé de l'évolution de la théorie de la transcendance. La voici expliquée sur l'exemple de la démonstration de la transcendance de  $e$  (voir [122] et [123]). Le raisonnement se fait par l'absurde en supposant l'existence d'une relation linéaire non triviale à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de la forme

$$a_0 + a_1 e + \dots + a_m e^m = 0. \tag{I.2}$$

Le but est de construire une combinaison linéaire à coefficients constants en les  $a_i$  qui soit "trop petite" sans être nulle. Autrement dit, on cherche des nombres entiers  $F(0), \dots, F(m)$  tels que

$$0 < \left| \sum_{k=0}^m a_k F(k) \right| < 1. \tag{I.3}$$

Cela suffit à obtenir une contradiction puisque la valeur absolue d'un nombre entier non nul est au moins 1. Profitons-en pour souligner que cet argument élémentaire est déterminant dans les démonstrations générales de transcendance. On obtient (I.3) en prenant les  $F(k)$  tels que les fractions  $F(k)/F(0)$  soient des approximations **simultanées** des  $e^k$ , pour  $k = 0, \dots, m$ . Cela signifie que les  $e^k$  sont "bien approchés" par les fractions rationnelles **de même dénominateur**  $F(k)/F(0)$ . Concrètement dans notre cas, il existe une constante  $c > 0$ , "assez petite" ( $c < 1/(\sum_{k=0}^m |a_k|)$ ) telle que

$$\left| e^k - \frac{F(k)}{F(0)} \right| \leq \frac{c}{F(0)}, k = 0, \dots, m. \tag{I.4}$$

En multipliant les lignes (I.4) par  $F(0)a_k$  respectivement, puis en sommant sur  $k = 0, \dots, m$ , on obtient d'après (I.2),

$$\left| \sum_{k=0}^m a_k F(k) \right| \leq C, \text{ où } C = \sum_{k=0}^m |a_k| c < 1. \tag{I.5}$$

C. Hermite considère alors plusieurs fonctions  $F_\nu, \nu = 0, \dots, m$  telles que les  $F_\nu(k)/F_\nu(0)$  soient des approximations **simultanées** des  $e^k$ , pour  $k = 0, \dots, m$ , qui vérifient (I.5). C. Hermite montre alors que le déterminant de la matrice  $(F_\nu(k))_{0 \leq \nu, k \leq m}$  est non nul et conclut à l'existence d'un entier  $\nu$  tel que  $F = F_\nu$  vérifie (I.5) et tel que (I.5) soit non nulle. Ceci achève sa preuve. En suivant la même méthode, F. Lindemann démontre en 1882 la transcendance de  $\pi$ . L'auteur prouve par la suite la transcendance des valeurs aux nombres algébriques non nuls de la fonction exponentielle et énonce un théorème plus général, sans en donner de preuve complète. Celle-ci est rédigée plus tard par K. Weierstrass. Ce résultat, connu sous le nom de théorème de Lindemann-Weierstrass affirme qu'étant donnés des nombres algébriques  $\rho_1, \dots, \rho_n$  linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ , les nombres  $e^{\rho_1}, \dots, e^{\rho_n}$  sont algébriquement indépendants sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Les démonstrations de ces deux derniers résultats se fondent toujours sur l'approximation de nombres à l'aide de formes linéaires (voir [122] et [123]). Celles-ci proviennent de l'approximation préalable de fonctions par des fonctions rationnelles. Ainsi, le théorème de Lindemann-Weierstrass repose sur la construction d'une forme linéaire  $R(z, X_1, \dots, X_n)$  de degré en  $X$  et de hauteur (valeur absolue des coefficients) contrôlée, à coefficients algébriques telle que la fonction  $R(z, e^{\rho_1 z}, \dots, e^{\rho_n z})$  de la variable  $z$  ait un grand ordre en  $z = 0$ . L'idée est de garantir par cette condition la petitesse de son évaluation en  $z = 1$ , afin d'obtenir une forme linéaire petite en les nombres concernés. Cette fonction de  $z$  est appelée *fonction auxiliaire*.

Remarquons que l'existence de la forme linéaire  $R(z, X_1, \dots, X_n)$  telle que  $R(z, e^{\rho_1 z}, \dots, e^{\rho_n z})$  s'annule en un ordre assez grand en zéro repose sur le *principe des tiroirs*. Ce principe élémentaire qui affirme qu'une fonction d'un ensemble fini dans un ensemble fini de cardinal plus petit attribue la même valeur à au moins deux antécédents distincts, s'avère particulièrement féconde en théorie de la transcendance.

### I.1.2 Les travaux de C. Siegel et l'apport d'A. Shidlovskii

Les premiers résultats majeurs fondés sur le principe des tiroirs sont dus à C. Siegel, en 1929. L'auteur l'utilise par exemple pour démontrer la finitude du nombre de points entiers algébriques d'une courbe algébrique de genre  $g > 0$  définie sur  $\mathbb{Z}$  [124] (voir aussi [122]). Le deuxième argument essentiel de sa démonstration est un raffinement de l'inégalité de Liouville (I.1). Celle-ci avait déjà connu une amélioration en 1909, grâce à A. Thue [130] qui démontre que pour un nombre algébrique  $\alpha$  de degré  $n \geq 2$ , et pour tout  $\epsilon > 0$ , l'inégalité

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{\frac{n}{2} + 1 + \epsilon}} \quad (\text{I.6})$$

ne possède qu'un nombre fini de solutions  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ . En 1955, K. Roth remplace  $\frac{n}{2} + 1 + \epsilon$  par  $2 + \epsilon$  [117], qui ne dépend plus du degré  $n$  de  $\alpha$ . Enfin, cela est généralisé en un résultat d'approximation simultanée de plusieurs nombres algébriques par des rationnels de même dénominateur par W. Schmidt et son théorème du sous-espace [118]. C. Siegel démontre par ailleurs dans le même article [124], un résultat reliant l'indépendance algébrique de valeurs de  $E$ -fonctions à celle des fonctions elles-mêmes, sous certaines conditions techniques finalement éliminées en 1956 par A. Shidlovskii [123]. Il s'agit du théorème de Siegel-Shidlovskii que nous avons évoqué dans le préambule. Les  $E$ -fonctions, introduites par C. Siegel, sont des fonctions entières  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ , dont les coefficients  $a_n$  sont algébriques et vérifient certaines conditions arithmétiques de croissance (en terme de hauteur), et solutions de systèmes différentiels du type

$$\begin{pmatrix} f_1'(z) \\ \vdots \\ f_n'(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}, A(z) \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z)). \quad (\text{I.7})$$

On retrouve parmi les  $E$ -fonctions la fonction exponentielle, mais également la fonction de Bessel, ainsi que certaines fonctions hypergéométriques. Celles-ci rencontrent de ce fait un succès immédiat. Le théorème suivant est l'aboutissement des travaux de C. Siegel puis de A. Shidlovskii mentionnés plus haut.

**Théorème I.1.1** (Théorème de Siegel-Shidlovskii)

Soient  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  des  $E$ -fonctions solutions de (I.7). Notons  $T(z)$  le ppcm des dénominateurs des coefficients de  $A(z)$ . Soit  $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$  tel que  $\alpha T(\alpha) \neq 0$ . Alors on a

$$\text{degtr}_{\overline{\mathbb{K}}}\{f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)\} = \text{degtr}_{\overline{\mathbb{K}}(z)}\{f_1(z), \dots, f_n(z)\}.$$

La démonstration de Siegel-Shidlovskii repose sur un critère d'indépendance linéaire (plutôt de minoration du rang linéaire de nombres). Afin d'illustrer la stratégie employée, on considère des  $E$ -fonctions  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  solutions de (I.7) à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ . On les suppose linéairement indépendantes sur  $\mathbb{Q}(z)$ . L'objectif est de démontrer l'indépendance linéaire sur  $\mathbb{Q}$  des  $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$ . L'idée est d'appliquer ensuite ce raisonnement aux monômes en les  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  et  $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$ . L'approche est constituée des quatre étapes que voici, qui suivent et alimentent les résultats historiques de transcendance.

- **Mise en place.** On suppose par l'absurde que les  $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$  sont linéairement dépendantes sur  $\mathbb{Q}$ .

- **Étape 1.** Construction pour tout  $N$  d'une forme linéaire  $R(z, X_1, \dots, X_n)$  de degré en  $z$  plus petit que  $N$  et telle que la fonction auxiliaire  $R(z, f_1(z), \dots, f_n(z))$  ait un grand ordre  $n(N)$  en  $z = 0$  (minoré en fonction de  $N$ ). On a également besoin de contrôler la hauteur de ses coefficients.
- **Étape 2.** Itération du système (I.7) afin d'obtenir à partir de  $R(z, X_1, \dots, X_n)$   $n$  formes linéaires  $\{R_i(z, X_1, \dots, X_n)\}_i$  linéairement indépendantes prenant de petites valeurs en  $X_i = f_i(\alpha)$ . Vérification de la non-nullité des valeurs  $|R_i(\alpha, f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))|$ .
- **Étape 3.** Majoration des quantités  $|R_i(\alpha, f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))|$  par des méthodes analytiques.
- **Étape 4.** Minoration des nombres  $|R_i(\alpha, f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))|$  par des méthodes algébriques.
- **Conclusion.** On fait tendre  $N$  vers  $+\infty$  afin que les étapes 3 et 4 nous donnent une contradiction.

L'**étape 1** revient à résoudre un système linéaire à coefficients rationnels. L'existence d'une solution non nulle est donnée par le principe des tiroirs. Un lemme établi par C. Siegel permet ensuite de contrôler la taille de cette solution en fonction de la taille des coefficients du système. Ainsi, à partir de C. Siegel, la fonction auxiliaire n'est plus forcément explicite, comme cela a pu être le cas avec les théorèmes de C. Hermite, F. Lindemann et K. Weierstrass autour de la fonction exponentielle. Dans l'**étape 2**, afin de montrer que les formes linéaires construites sont linéairement indépendantes, on vérifie la non-nullité du déterminant de la matrice de leurs coefficients. Les arguments utilisés pour montrer la non-nullité dans ce contexte des quantités  $|R_i(\alpha, f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))|$  sont regroupés sous la dénomination générique de *lemme de zéros*. Ici, on se ramène, par des calculs utilisant le déterminant de la matrice des coefficients des formes linéaires considérées, à utiliser la remarque élémentaire selon laquelle la valeur absolue d'un entier non nul est supérieure ou égale à 1. Dans beaucoup de démonstrations de transcendance, la minoration de l'**étape 4** est réalisée grâce à un résultat qui porte le nom générique d'*inégalité de Liouville*, inspiré de (I.1). Ici, il s'agit plutôt de calculs autour du déterminant de la matrice des coefficients des formes linéaires concernées.

### I.1.3 La méthode de Mahler et le théorème de Ku. Nishioka

À la même époque, K. Mahler introduit une méthode similaire à celle de C. Siegel, qui s'applique à des fonctions de plusieurs variables solutions d'équations aux différences, plutôt que différentielles, du type suivant [87, 88, 89].

$$f(\Omega \mathbf{z}) = \frac{\sum_{l=0}^m a_l(\mathbf{z}) f(\mathbf{z})^l}{\sum_{l=0}^m b_l(\mathbf{z}) f(\mathbf{z})^l}, \quad (\text{I.8})$$

où  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ , les  $a_l(\mathbf{z}), b_l(\mathbf{z})$  sont des polynômes à coefficients dans un corps de nombres  $\mathbb{K}$  et  $\Omega = (r_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$  agit de la façon suivante sur  $\mathbb{C}^n$ .

$$\Omega \mathbf{z} = \left( \prod_{j=1}^n z_j^{r_{1,j}}, \dots, \prod_{j=1}^n z_j^{r_{n,j}} \right).$$

K. Mahler requiert de plus que la plus grande valeur propre  $\rho$  associée à  $\Omega$  soit réelle et strictement supérieure à 1, et que

$$1 \leq m < \rho. \quad (\text{I.9})$$

Dans le cas d'une seule variable, voici le premier résultat principal obtenu par l'auteur.

#### **Théorème I.1.2** (K. Mahler, 1929)

Soit  $\mathbb{K}$  un corps de nombres. Soit  $f(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  une fonction analytique dans un voisinage  $\mathcal{V}$  de l'origine inclus dans le disque unité de  $\mathbb{C}$  et solution de l'équation

$$f(z^d) = \frac{A(z, f(z))}{B(z, f(z))}, \quad (\text{I.10})$$

où  $d \geq 2$  est un entier naturel, et  $A(z, X) = \sum_{l=0}^m a_l(z)X^l$  et  $B(z, X) = \sum_{l=0}^m b_l(z)X^l \neq 0$  sont des polynômes à coefficients algébriques sur  $\mathbb{Q}$ . Notons  $\Delta(z)$  le résultant des polynômes  $A$  et  $B$  par rapport à la variable  $X$ . On suppose de plus que

$$m < d.$$

Soit  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}} \cap \mathcal{V}$  un nombre non nul régulier pour l'équation (I.10), c'est-à-dire tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta(\alpha^{d^k}) \neq 0$ .

Alors, l'égalité suivante est vérifiée.

$$\text{degr}_{\overline{\mathbb{K}}}\{f(\alpha)\} = \text{degr}_{\overline{\mathbb{K}}(z)}\{f(z)\}. \quad (\text{I.11})$$

Autrement dit, si la fonction  $f(z)$  est transcendante sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ , alors le nombre  $f(\alpha)$  est transcendant sur  $\overline{\mathbb{K}}$ .

Contrairement aux  $E$ -fonctions, les valeurs des fonctions solutions de (I.8) ne sont pas des nombres très prisés du point de vue des applications. Par exemple, on ne peut pas, a priori, obtenir  $\pi$  comme une valeur de telles fonctions en un point algébrique. Pourtant, K. Mahler visait deux objectifs stimulants avec sa méthode (voir par exemple [2]). Le premier concerne des fonctions du type de la fonction  $\Theta$  de Jacobi, comme par exemple

$$\Theta(z, q) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n} q^{n^2}.$$

Celle-ci vérifie l'équation suivante.

$$\Theta(zq, q) = \frac{\Theta(z, q) - 1}{z^2 q},$$

de matrice associée

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or la plus grande valeur propre de  $\Omega$  est  $\rho = 1$ , et ne satisfait pas aux hypothèses demandées par K. Mahler. Le second exemple auquel songe K. Mahler est le développement en série de Fourier  $J$  de l'invariant modulaire attaché à une courbe elliptique, dont il conjecture la transcendance aux points algébriques du disque unité épointé ouvert. Cette fonction vérifie en effet pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$  une équation de la forme

$$P_q(J(z), J(z^q)) = 0, P_q(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]. \quad (\text{I.12})$$

Bien que K. Mahler n'ait jamais étudié ce type d'équations polynomiales, il les a mentionnées à plusieurs reprises, et notamment lorsqu'il a relancé sa méthode en 1969, ce sur quoi nous reviendrons. Ku. Nishioka a quant à elle obtenu des résultats de transcendance sur les équations de la forme (I.12), sous la condition que le polynôme  $R(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]$  intervenant dans (I.12) vérifie

$$\deg_X(R) \deg_Y(R)^2 < q^2.$$

Malheureusement, cette condition n'est pas satisfaite par  $R = P_q$ . Malgré tout, il est intéressant de remarquer que cette conjecture de K. Mahler a finalement été démontrée en 1996 par K. Barré-Sirieix, G. Diaz, F. Gramain et G. Philibert [23] par le biais d'étapes semblables à celles de la méthode de Mahler. On peut donc en ce sens la considérer comme une source d'inspiration fructueuse. Il n'en demeure pas moins qu'à l'époque de K. Mahler, sa méthode souffre de l'absence d'exemples en lesquels l'appliquer et il semble que la simultanéité de la méthode de C. Siegel et ses nombreuses perspectives d'étude n'aient pas aidé à la rendre attractive aux yeux de ces contemporains. Elle tombe ainsi dans l'oubli jusqu'en 1969, lorsque W. Schwarz [120] démontre des résultats de transcendance de valeurs en certains points rationnels  $\alpha$  des fonctions

$$G_k(z) = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{z^{k^h}}{1 - z^{k^h}}, k \in \mathbb{N}.$$



Ces fonctions sont  $k$ -mahlériennes. Pourtant, W. Schwarz ne fait pas appel à la méthode de Mahler dans la démonstration de ses résultats et semble ignorer que ceux-ci sont en fait des conséquences des travaux de K. Mahler. Ce dernier publie alors un article [86] dans lequel il redonne la trame générale de sa méthode, ainsi que ses principaux résultats, et explique en quoi les énoncés établis par W. Schwarz sont des corollaires de sa méthode. Il démontre également que celle-ci permet de généraliser les résultats de W. Schwarz à tout point  $\alpha$  algébrique tel que  $0 < |\alpha| < 1$  et de démontrer pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , l'indépendance algébrique des valeurs des dérivées  $G_k(\alpha), \dots, G_k^{(m-1)}(\alpha)$ . K. Mahler profite également de son article pour poser trois problèmes ouverts, en vue de généraliser sa méthode. Cela suscite l'intérêt de K. Kubota [76, 75] et J. Loxton et A. van der Poorten [81, 82] qui étendent certains résultats de K. Mahler et contribuent à la popularisation de sa méthode. De nombreux travaux sont réalisés par la suite par M. Amou [16] P-G. Becker [24], Ku. Nishioka [100, 99], T. Töpfer [131], et bien d'autres. L'étude glisse progressivement vers les équations (1) similaires aux équations (I.8) initialement définies par K. Mahler, mais linéaires plutôt que polynomiales. La méthode de Mahler bénéficie également à la même époque de la popularisation par M. Mendès-France des liens qu'elle partage avec la théorie des automates finis, qui constitue une aire de recherche très dynamique. En effet, toute série génératrice d'une suite automatique est mahlérienne au sens de l'équation (1). Cela contribue également au basculement au profit des équations mahlériennes linéaires plutôt que polynomiales. Au cœur de l'engouement pour la méthode de Mahler se trouve la conjecture d'A. Cobham [42] selon laquelle le développement dans une base entière d'un nombre algébrique irrationnel ne peut être engendré par un automate fini. Celle-ci a été démontrée grâce au théorème du sous-espace de W. Schmidt par B. Adamczewski, Y. Bugeaud et F. Luca en 2004 [7]. Elle peut également se déduire de résultats de P. Philippon [110] et B. Adamczewski et C. Faverjon [8] dont le théorème I.5.2 que nous démontrons dans cette thèse est un analogue dans le cas de la caractéristique non nulle.

Pour en revenir aux équations mahlériennes linéaires (1), toute solution de l'équation (1) est une composante d'un vecteur solution du système donné par la matrice compagnon de (1), à savoir

$$\begin{pmatrix} f(z^d) \\ f(z^{d^2}) \\ \vdots \\ f(z^{d^n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -\frac{P_0(z)}{P_n(z)} & & & -\frac{P_{n-1}(z)}{P_n(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z) \\ f(z^d) \\ \vdots \\ f(z^{d^{n-1}}) \end{pmatrix}. \quad (\text{I.13})$$

On appelle système  $d$ -mahlérien tout système du type suivant.

$$\begin{pmatrix} f_1(z^d) \\ \vdots \\ f_n(z^d) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}, \quad A(z) \in GL_n(\mathbb{K}(z)). \quad (\text{I.14})$$

Toute fonction coordonnée d'un vecteur solution de (I.14) est  $d$ -mahlérienne. En effet, par itération de (I.14), on remarque que  $\text{vect}_{\mathbb{K}(z)} \{f(z^{d^i})\}_{i \geq 0}$  est de dimension finie sur  $\mathbb{K}(z)$  car

$$\text{vect}_{\mathbb{K}(z)} \{f(z^{d^i})\}_{i \geq 0} \subseteq \text{vect}_{\mathbb{K}(z)} \{f_1(z), \dots, f_n(z)\}.$$

Notons que K. Mahler n'avait quant à lui étudié que des systèmes correspondant à des équations linéaires inhomogènes d'ordre 1. L'apothéose de cette première période de recherches autour de la méthode de Mahler est atteinte par Ku. Nishioka, qui démontre en 1990 le théorème que voici.

**Théorème I.1.3** (Ku. Nishioka)

Soit  $\mathbb{K}$  un corps de nombres. Soient  $n \geq 1$ ,  $d \geq 2$  deux entiers et  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  des fonctions analytiques au voisinage de l'origine vérifiant le système  $d$ -mahlérien (I.14). Soit  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ ,  $0 < |\alpha| < 1$ , un nombre régulier pour le système (I.14). C'est-à-dire que pour tout entier naturel  $k$ , le nombre  $\alpha^{d^k}$  n'est pas un pôle de la matrice  $A(z)$  ni de la matrice  $A^{-1}(z)$ . Alors, l'égalité suivante est vérifiée.

$$\text{degtr}_{\overline{\mathbb{K}}}\{f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)\} = \text{degtr}_{\overline{\mathbb{K}(z)}}\{f_1(z), \dots, f_n(z)\}. \quad (\text{I.15})$$

Malgré l'apport essentiel du théorème I.1.3, celui-ci, tout comme le théorème I.1.1 de Siegel-Shidlovskii pour les  $E$ -fonctions, possède certaines limites. Tout d'abord, ce résultat ramène l'étude de l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes à celle des fonctions elles-mêmes. Or cela s'avère être en pratique une question ardue. Dans le cas des corps de nombres, des résultats ont été obtenus à l'aide de la théorie de Galois aux différences, par J. Roques [115, 116]. Il est cependant à noter que dans la pratique, le groupe de Galois associé au système mahlérien concerné est difficile à identifier et les résultats d'indépendance algébrique fonctionnelle explicites ne vont guère au delà des équations d'ordre 2. Toutefois, l'indépendance linéaire de fonctions mahlériennes est plus abordable. Pour preuve, les travaux de B. Adamczewski et C. Faverjon [8, 11] assurent l'existence d'un algorithme qui fournit une base des relations linéaires entre fonctions mahlériennes en caractéristique nulle. Ce résultat semble se transposer sans encombre à notre cadre de la caractéristique non nulle car la démonstration des deux auteurs utilise exclusivement des arguments d'algèbre linéaire. Le théorème I.1.3 possède également la limite suivante. Si l'on considère un vecteur solution  $(f_1(z), \dots, f_n(z))$  du système mahlérien (I.14) et que l'on suppose la fonction  $f_1(z)$  transcendante sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ , le théorème I.1.3 ne permet pas de conclure que le nombre  $f_1(\alpha)$  est transcendant sur  $\overline{\mathbb{K}}$ , où  $\alpha$  est un nombre algébrique non nul régulier pour le système (I.14) (mais seulement qu'il existe un nombre transcendant parmi les  $f_i(\alpha)$ ). Ces deux inconvénients motivent l'établissement d'un raffinement du théorème I.1.3 qui permettrait de relier directement l'indépendance linéaire des fonctions à celle de leurs évaluations en  $\alpha$ . Cette précision a été apportée au théorème de Siegel-Shidlovskii par F. Beukers [29] en 2006 (voir aussi [19]). L'énoncé stipule que sous les conditions du théorème I.1.1, toute relation algébrique homogène sur  $\overline{\mathbb{K}}$  entre les nombres  $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$  provient de l'évaluation en  $\alpha$  d'une relation algébrique homogène fonctionnelle sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$  entre les  $f_1(z), \dots, f_n(z)$ . Le même raffinement dans le cadre du théorème I.1.3 de Ku. Nishioka a été obtenue par B. Adamczewski et C. Faverjon [8] comme conséquence de travaux de P. Philippon [110] (voir aussi [94]). Un résultat similaire a été établi par G. Anderson, W. D. Brownawell et M. Papanikolas dans [18] pour des fonctions solutions de systèmes aux  $\tau$ -différences du type

$$\begin{pmatrix} \tau f_1(z) \\ \vdots \\ \tau f_n(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}, \quad (\text{I.16})$$

où les  $f_i(z)$  sont développables en série entière au voisinage de l'origine, à coefficients dans un corps de fonctions de caractéristique  $p > 0$  et où pour  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ ,

$$\tau f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{1/q} z^n, \quad q = p^r, \quad r \in \mathbb{N}^*.$$

#### I.1.4 Fonctions mahlériennes et automates finis

Comme évoqué précédemment, toute fonction automatique est mahlérienne. On dit qu'une fonction  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , avec  $(a_n)_n$  à valeurs dans un ensemble fini, est automatique si la suite  $(a_n)_n$  l'est. Une suite  $(a_n)_n$  est dite  $k$ -automatique, pour un entier naturel  $k$ , s'il existe un automate fini capable, pour tout  $n$ , de produire l'élément  $a_n$  si on lui fournit la décomposition de  $n$  dans la base  $k$ . Sans énoncer la définition théorique d'un automate fini, il s'agit d'une machine composée d'une entrée, dite *état initial* et qui, après la lecture d'une donnée, se retrouve dans un autre *état*, parmi un nombre fini de possibilités. On peut attribuer à chaque état une valeur. Les données que l'on insère dans un automate fini sont des suites finies de symboles  $w_r \cdots w_0$ , que la machine lira successivement, de gauche à droite (par exemple). La lecture de chacun de ces symboles la fera passer d'un état à un autre. Après la lecture du dernier symbole, ici  $w_0$ , l'automate se trouve dans un certain état, dit *final* et renvoie la valeur attribuée à cet état. Ainsi, si l'on note pour tout  $n$ ,

$$n = w_{r,n} k^{r_n} + \cdots + w_{0,n},$$

la décomposition de  $n$  dans la base  $k$ , la suite  $(a_n)_n$  est  $k$ -automatique s'il existe un automate fini tel que pour tout  $n$ , la lecture<sup>1</sup> de la donnée  $w_{r_n,n} \cdots w_{0,n}$  par celui-ci renvoie la valeur  $a_n$ . Considérons par exemple la célèbre suite de Thue-Morse  $(t_n)_n$  définie sur l'alphabet  $\{-1, 1\}$  par

$$t_n = \begin{cases} 1 & \text{si le nombre de 1 dans la décomposition en base 2 de } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

Cette suite est 2-automatique car produite par l'automate fini suivant.

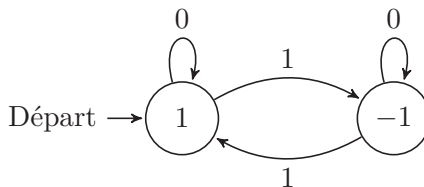


FIGURE I.1 – Automate produisant la suite de Thue-Morse.

Sur la figure I.1, les états de l'automate sont symbolisés par des disques, les flèches représentent le passage d'un état à un autre lors de la lecture de l'une des données qui les coiffent, la flèche *Départ* pointe sur l'état initial, et les nombres à l'intérieur des disques sont les valeurs attribuées à l'état correspondant.

Si l'on note

$$T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n z^n, \quad (\text{I.18})$$

la série génératrice associée à la suite de Thue-Morse, celle-ci est bien 2-mahlérienne, puisqu'elle vérifie l'équation suivante.

$$(1 - z)T(z^2) = T(z). \quad (\text{I.19})$$

## I.2 Le contexte des corps de fonctions de caractéristique non nulle

Nous avons déjà introduit brièvement le contexte des corps de fonctions de caractéristique non nulle sur le schéma du préambule. Rappelons que la forte analogie existant entre les corps de nombres  $\mathbb{K}$  de la colonne de gauche et les corps de fonctions  $\mathbb{K}$  de la colonne de droite permettent de recréer tout un contexte arithmétique parallèle au cadre classique. On y retrouve des analogues des fonctions exponentielle complexe, logarithme, Zêta de Riemann ou Gamma d'Euler, ainsi que les valeurs qui leur sont associées, comme  $\pi$ . Plus précisément, voici les principales analogies entre les deux contextes en présence. Les anneaux  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{F}_q[T]$  sont tous deux euclidiens. Ils sont notamment factoriels et admettent par conséquent une unique décomposition en éléments irréductibles. Ces éléments définissent des places (classe d'équivalence de valeurs absolues) sur les corps de nombres ou corps de fonctions  $\mathbb{K}$ . Celles-ci sont dans les deux contextes reliées par une formule du produit (voir (II.7)). Par ailleurs, les anneaux  $A$  des deux contextes possèdent un nombre fini d'éléments inversibles pour le produit. L'anneau  $\mathbb{Z}$  en possède 2 (éléments de  $\{-1, 1\}$ ), tandis que  $\mathbb{F}_q[T]$  en possède  $q - 1$  (éléments de  $\mathbb{F}_q^*$ ). Le sous-ensemble  $\mathbb{N}$  de  $\mathbb{Z}$  est créé en choisissant un représentant (toujours celui de signe positif) dans chaque classe d'équivalence de  $(\mathbb{Z}^*, \times)/\{-1, 1\}$ . De même en choisissant comme représentant de chaque classe d'équivalence de  $(\mathbb{F}_q[T]^*, \times)/\mathbb{F}_q^*$  l'unique polynôme unitaire qui s'y trouve, on obtient l'ensemble  $\mathbb{F}_q[T]_+$  des polynômes unitaires à coefficients dans  $\mathbb{F}_q$ . Cela explique pourquoi la définition (I.56) de la fonction Zêta de Carlitz  $\zeta_C$  donnée plus loin est considérée comme un analogue de la fonction  $\zeta$  de Riemann.

1. Il est équivalent de demander l'existence d'un automate fini qui, pour tout  $n$ , produit l'élément  $a_n$  en lisant  $w_{r_n,n} \cdots w_{0,n}$  de droite à gauche (voir [15, Theorem 5.2.3]).

On remarque au passage que les définitions de  $\zeta(2n)$  et de  $\zeta_C((q-1)n)$  respectivement ne dépendent pas du choix du représentant de  $(\mathbb{Z}^*, \times)/\{-1, 1\}$  et  $(\mathbb{F}_q[T]^*, \times)/\mathbb{F}_q^*$ . L'analogie entre  $q-1$  et  $2$  se reflète dans le fait que les valeurs de la fonction Zêta de Carlitz (voir la définition en (I.56)) aux entiers multiples de  $q-1$  sont reliées à l'analogie de  $\pi$  existant dans le contexte de la caractéristique non nulle par une formule similaire (voir (I.49)) à celle liant les valeurs paires de la fonction Zêta de Riemann à  $\pi$  (voir (I.51)).

Il existe cependant des difficultés spécifiques aux corps de fonctions de caractéristique non nulle, qui n'apparaissent pas sur les corps de nombres. En ce qui concerne les résultats de transcendance classiques, il est à noter que, dans le cadre des corps de fonctions de caractéristique non nulle, l'énoncé du théorème de K. Roth, et par conséquent, celui du sous-espace de W. Schmidt, n'est plus vérifié. Le premier contre-exemple en la matière est fourni par K. Mahler [85] sur  $\mathbb{F}_p(T)$ , pour tout nombre premier  $p \geq 3$ , avec

$$\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{T}\right)^{p^n} \in \mathbb{F}_p \left( \left(\frac{1}{T}\right) \right). \quad (\text{I.20})$$

L'auteur démontre en effet qu'il existe une infinité de paires  $(a_n, b_n) \in \mathbb{F}_p[T] \times \mathbb{F}_p[T]^*$  telles que

$$\left| \alpha - \frac{a_n}{b_n} \right| = \frac{1}{|b_n|^p}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |b_n| = +\infty. \quad (\text{I.21})$$

Ainsi,  $\alpha$  vérifie l'hypothèse d'approximation diophantienne du théorème de K. Roth. Néanmoins,  $\alpha$  n'est pas un nombre transcendant puisqu'il annule le polynôme  $P(X) = X^p - X + 1/T \in \mathbb{F}_p(T)[X]$ . Remarquons que le nombre  $\alpha$  est égal à  $f(1/T)$ , où  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{p^n}$  est une fonction  $p$ -mahlérienne solution de l'équation  $f(z^p) - f(z) + 1/T = 0$ . Seule l'inégalité de Liouville reste valable sur  $\mathbb{F}_q((1/T))$  [85]. Plus généralement, la formule du produit portant sur les places d'un corps de nombres ou d'un corps de fonctions fournit une inégalité de type Liouville similaire dans ces deux contextes (voir plus loin (II.7) et proposition II.1.1).

Malgré cela, les résultats d'indépendance algébrique sont souvent plus aboutis dans le contexte des corps de fonctions de caractéristique non nulle et leurs pendants se trouvent encore au stade de conjectures sur les corps de nombres. Comme précisé dans le préambule de cette thèse, L. Denis a observé que ces énoncés en caractéristique non nulle ont l'avantage de s'appliquer à des nombres remarquables, liés aux périodes de modules de Drinfeld (voir par exemple [50, 49]). Cela fait des fonctions mahlériennes des objets essentiels dans ce cadre.

### I.3 Modules de Drinfeld et périodes

Plus de détails concernant le sujet de cette section peuvent être trouvés dans [63]. On rappelle que l'on note  $q$  une puissance entière d'un nombre premier  $p$ ,  $A = \mathbb{F}_q[T]$ ,  $K = \mathbb{F}_q(T)$ ,  $R = \mathbb{F}_q \left( \left(\frac{1}{T}\right) \right)$  et  $C$  le complété de la clôture algébrique de  $R$ , pour l'extension de la valeur absolue  $1/T$ -adique. Partons d'un endomorphisme  $\mathbb{F}_q$ -linéaire

$$\sigma : R \rightarrow R.$$

Notons  $R[\sigma] \subseteq \text{End}(R)$  l'ensemble des polynômes en  $\sigma$  et à coefficients dans  $R$ , inclus dans l'ensemble des endomorphismes de  $R$ . Un module de Drinfeld  $\phi$  est une action

$$\begin{aligned} \phi : A &\rightarrow \text{End}(R) \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} R & \longrightarrow & R \\ x & \longmapsto & \phi(a)(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

de  $A$  sur  $R$  vérifiant les conditions suivantes.

1.  $\phi$  est  $\mathbb{F}_q$ -linéaire
2.  $\text{Im}(\phi) \subseteq R[\sigma]$

3. Pour tout  $a \in A$ ,  $\phi(a) = a\sigma^0 \pmod{R[\sigma]\sigma}$ .

On dit que  $\phi$  est de rang  $d$  si le degré de  $\phi(T)$  en  $\sigma$  est  $d$ . Étant donné un module de Drinfeld  $\phi$ , il existe une unique fonction entière  $e_\phi$  telle que

1.  $e_\phi(az) = \phi(a)(e_\phi(z))$ , pour tout  $a \in A$
2.  $e'_\phi(z) = 1$ .

Cette fonction est appelée exponentielle associée au module de Drinfeld  $\phi$ . C'est une fonction  $\mathbb{F}_q$ -linéaire et surjective (car entière et non nulle). Cela permet de donner une autre paramétrisation du module de Drinfeld  $\phi$ , de la façon suivante.

$$\begin{aligned} \phi : A &\rightarrow \text{End}(C) \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} C & \rightarrow & C \\ e_\phi(z) & \mapsto & e_\phi(az) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{I.23}$$

Notons qu'une série entière  $f(z) \in C\{z\}$  est  $\mathbb{F}_q$ -linéaire si et seulement si elle est de la forme suivante.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{qn}, \quad a_n \in C. \tag{I.24}$$

Réciproquement, la donnée d'une fonction exponentielle, c'est-à-dire d'une série entière  $\mathbb{F}_q$ -linéaire (I.24), non nulle (donc surjective), avec  $a_0 = 1$ , permet de définir un module de Drinfeld  $\phi$  avec (I.23).

L'ensemble des zéros de la fonction exponentielle  $e_\phi$  associée à un module de Drinfeld  $\phi$  de rang  $d$  constitue un réseau  $\Lambda_\phi$  de  $A$  de rang  $d$ . On a alors

$$e_\phi(x) = x \prod_{\alpha \in \Lambda_\phi \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right). \tag{I.25}$$

Réciproquement, tout réseau de rang  $d$  sur  $\mathbb{F}_q[T]$  définit un unique module de Drinfeld de rang  $d$ , par la formule (I.25) qui fournit sa fonction exponentielle. Cette correspondance entre réseau de  $A$  de rang  $d$  et module de Drinfeld de rang  $d$  donne lieu à une équivalence de catégories. Les éléments d'un réseau  $\Lambda_\phi$  de  $A$  sont appelés *périodes* du module de Drinfeld  $\phi$  correspondant. Notons également que l'exponentielle  $e_\phi$  réalise l'isomorphisme de  $\mathbb{F}_q[T]$ -modules suivant, de  $C/\Lambda_\phi$  (muni de la multiplication classique par un élément de  $\mathbb{F}_q[T]$ ) sur  $(C, \phi)$ .

$$\begin{aligned} e_\phi : C/\Lambda_\phi &\xrightarrow{\cong} (C, \phi) \\ z &\longmapsto e_\phi(z). \end{aligned} \tag{I.26}$$

### I.3.1 Module de Carlitz et fonction exponentielle complexe

Considérons les modules de Drinfeld de rang 1 associés à  $\sigma(z) = z^q$ . On peut montrer qu'ils sont tous isogènes, c'est-à-dire que pour toute paire  $\phi_1, \phi_2$  de modules de Drinfeld de rang 1 distincts, il existe  $\psi \in C[\sigma]$  tel que

$$\phi_1(a)\psi = \psi\phi_2(a), \quad \forall a \in A.$$

On appelle module de Carlitz le module de Drinfeld  $\phi$  de rang 1 associé à  $\sigma$  et défini par  $\phi(T) = T\sigma^0 + \sigma$ . Sa fonction exponentielle associée, appelée exponentielle de Carlitz, est la suivante.

$$e_\phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{q^n}}{D_n}, \tag{I.27}$$

où

$$\begin{aligned} D_0 &= 1, \\ D_n &= [n]D_{n-1}^q, \quad n \geq 1, \\ [n] &= T^{q^n} - T. \end{aligned} \tag{I.28}$$

Le réseau de  $A$  de rang 1 correspondant est  $\Lambda_\varphi = \varpi A$ , avec

$$\varpi = T(-T)^{1/q-1} \prod_{i=1}^{+\infty} (1 - T^{1-q^i})^{-1},$$

où  $(-T)^{1/q-1}$  est un choix fixé de racine  $(q-1)$ -ième de  $(-T)$  dans  $C$ . La fonction  $e_\varphi$  peut être considérée comme étant l'analogie de la fonction exponentielle réelle (voir la discussion dans [32] autour du théorème 2.4.5). En effet, elle intervient dans un théorème de D. Hayes [69], qui est l'analogie du célèbre théorème de Kronecker-Weber et affirme que les corps de classes de Hilbert sur  $K$  sont engendrés par les éléments  $e_\varphi\left(\frac{\lambda}{a}\right)$ , où  $a \in A \setminus \{0\}$ ,  $\lambda \in \Lambda_\varphi$ .

Par conséquent, la période du module de Carlitz  $\varpi$  est un analogue de  $2i\pi$  et le nombre

$$\prod_{i=1}^{+\infty} (1 - T^{1-q^i})^{-1}$$

est un analogue de  $\pi$ , que nous noterons  $\pi_q$ . L'isomorphisme (I.26) réalisé par  $e_\varphi$  est à rapprocher de l'isomorphisme de groupes réalisé par l'exponentielle complexe.

$$\begin{aligned} \exp : (\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}, +) &\xrightarrow{\cong} (\mathbb{C}^*, \times) \\ z &\longmapsto \exp(z). \end{aligned} \tag{I.29}$$

Cela motive l'intérêt porté aux périodes de modules de Drinfeld et rend compte de la profonde analogie avec le cas complexe classique.

### I.3.2 Modules de Drinfeld de rang 2 et courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$

Les modules de Drinfeld de rang 2 sont des analogues des courbes elliptiques sur l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$ . Nous en plantons le décor à l'aide des références [62, 61, 137] pour les modules de Drinfeld et [125] pour les courbes elliptiques, ainsi que [128].

#### Courbes elliptiques

Une courbe elliptique sur  $\mathbb{C}$  est une courbe projective régulière de genre 1, avec un point spécifique. Plus simplement, il s'agit de l'ensemble des  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$  vérifiant une équation dite de Weierstrass du type suivant.

$$y^2 = 4x^3 + ax^2 + bx + c, \text{ où } a, b, c \in \mathbb{C} \text{ et } \Delta \neq 0, \tag{I.30}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\alpha^3 - \beta^2}{1728}, \\ \alpha &= a^2 - 12b, \\ \beta &= -a^3 + 18ab - 216c. \end{aligned}$$

Le nombre  $\Delta$  est appelé le discriminant de la courbe elliptique. Sa non-nullité garantit que la courbe elliptique est régulière. Étant donnée une courbe elliptique  $E$  sur  $\mathbb{C}$ , il existe un unique réseau  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  (à une homothétie près) tel que  $\mathbb{C}/\Lambda$  soit isomorphe à l'ensemble des points de  $E$ , noté  $E(\mathbb{C})$ , de la façon suivante.

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}/\Lambda &\xrightarrow{\cong} E(\mathbb{C}) \\ z &\longmapsto [\mathfrak{p}_\Lambda(z), \mathfrak{p}'_\Lambda(z), 1]. \end{aligned} \tag{I.31}$$

La fonction  $\mathfrak{p}_\Lambda$  est la fonction de Weierstrass associée au réseau  $\Lambda$  qui vérifie l'équation différentielle algébrique suivante.

$$\mathfrak{p}'_\Lambda{}^2 = 4\mathfrak{p}_\Lambda^3 - g_2(\Lambda)\mathfrak{p}_\Lambda - g_3(\Lambda), \quad (\text{I.32})$$

où  $g_2(\Lambda), g_3(\Lambda) \in \mathbb{C}$  dépendent de  $\Lambda$  et sont tels que  $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ . La fonction  $\mathfrak{p}_\Lambda$  est une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$  et périodique relativement à  $\Lambda$ , c'est-à-dire que

$$\mathfrak{p}_\Lambda(z + \omega) = \mathfrak{p}_\Lambda(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \omega \in \Lambda.$$

On peut également attacher au réseau  $\Lambda$  une fonction  $\zeta_\Lambda$  telle que

$$\zeta'_\Lambda(z) = -\mathfrak{p}_\Lambda(z).$$

Cette fonction n'est pas périodique mais quasi-périodique par rapport à  $\Lambda$ . Autrement dit, elle vérifie l'égalité suivante.

$$\zeta_\Lambda(z + \omega) = \zeta_\Lambda(z) + \nu(\omega), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \omega \in \Lambda \quad (\text{I.33})$$

où  $\nu : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$  est linéaire.

Si l'on note  $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ , les nombres  $\omega_1, \omega_2$  sont appelées périodes de  $E$  et  $\nu(\omega_1), \nu(\omega_2)$  quasi-périodes de  $E$ . Si la partie imaginaire de  $\omega_1/\omega_2$  est strictement positive, ces quatre nombres sont connectés via la relation de Legendre suivante.

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \nu(\omega_1) & \nu(\omega_2) \end{vmatrix} = 2i\pi. \quad (\text{I.34})$$

Par ailleurs, on peut associer à toute courbe elliptique  $E$  de réseau  $\Lambda$  un nombre  $j(E)$ , invariant par isomorphisme de courbes elliptiques. Il se trouve qu'un isomorphisme de  $E$  correspond à une homothétie de  $\Lambda$ . On peut donc considérer que  $\Lambda = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$  et  $j(E) = j(\omega)$ . Cette fonction est holomorphe sur  $\mathbb{H} = \{z, \text{Im}(z) > 0\}$  et vérifie, pour tout  $z \in \mathbb{H}$ , les deux propriétés suivantes.

1. Pour toute matrice  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  on a

$$j(z) = j(\gamma z) = j\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

2. La fonction  $j$  admet un développement de Taylor  $J$  de la forme

$$j(z) = J(q) = \sum_{n=-1}^{+\infty} c_n q^n, \quad \text{où } q = e^{2i\pi z} \text{ et } c_n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{I.35})$$

## Modules de Drinfeld de rang 2

Nous expliquons à présent en quoi les modules de Drinfeld de rang 2 peuvent être considérés comme des analogues des courbes elliptiques. Un module de Drinfeld  $\phi$  de rang 2 peut s'écrire sous la forme suivante.

$$\phi(T) = T\sigma^0 + g\sigma + \Delta\sigma^2, \quad g, \Delta \in C \quad (\text{I.36})$$

L'analogie de l'isomorphisme (I.31) est l'isomorphisme (I.26) fourni par l'exponentielle  $e_\phi$ .

De même que pour les courbes elliptiques, on peut associer à tout module de Drinfeld  $\phi$  un nombre  $j(\phi)$  invariant par isomorphisme de modules. Un tel isomorphisme correspond également ici à une homothétie de  $\Lambda_\phi$ . On peut donc considérer que  $\Lambda_\phi = \omega A + A$  et  $j(\phi) = j(\omega)$ . La fonction  $j$  est holomorphe sur  $C \setminus R$  et vérifie les deux propriétés suivantes.



1. Pour toute matrice  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(A)$  on a

$$j(z) = j(\gamma z) = j\left(\frac{az + b}{cz + d}\right), \forall z \in C \setminus R$$

2. Soit  $t(z) = \frac{1}{e_\phi(\varpi z)}$ . Pour tout  $z$  tel que  $0 < |t(z)| < q^{-1/(q-1)}$ ,  $j(z)$  admet un développement de Taylor  $J$  de la forme (voir par exemple [20])

$$j(z) = J(t(z)) = \sum_{n=-1}^{+\infty} c_n t(z)^n, \quad c_n \in A. \quad (\text{I.37})$$

En ce qui concerne l'analogue de la fonction  $\mathfrak{p}_\Lambda(z)$  de Weierstrass, elle est définie comme l'unique solution  $F^{(0)}(z) \in z^q C\{z^q\}$  de

$$F(Tz) - TF(z) = \phi(T)(e_\phi(z)) - Te_\phi(z), \quad z \in \overline{R}. \quad (\text{I.38})$$

On a concrètement  $F^{(0)}(z) = e_\phi(z) - z$ . Notons que  $e_\phi$  est une solution périodique relativement à  $\Lambda_\phi$  de l'équation (I.38).

L'analogue de  $\zeta_\Lambda(z)$  est l'unique solution  $F^{(1)}(z) \in z^q C\{z^q\}$  de

$$G(Tz) - TG(z) = \exp_{\Lambda_\phi}(z)^q, \quad z \in \overline{R}. \quad (\text{I.39})$$

Les fonctions  $F^{(0)}(z), F^{(1)}(z)$  sont quasi-périodiques relativement à  $\Lambda_\phi$ , au sens où elles vérifient les deux propriétés suivantes.

1.  $F(z + \lambda) = F(z) + F(\lambda), \forall z \in \overline{R}, \lambda \in \Lambda_\phi$ .
2.  $F$  est  $A$ -linéaire sur  $\Lambda_\phi$ .

Les quasi-périodes associées à  $\Lambda_\phi$  sont les nombres  $F^{(0)}(\omega) = -\omega, F^{(0)}(1) = -1, F^{(1)}(\omega), F^{(1)}(1)$ . On définit alors le déterminant de Legendre associé à  $\Lambda_\phi$  par

$$L(\omega) = \begin{vmatrix} -\omega & -1 \\ F^{(1)}(\omega) & F^{(1)}(1) \end{vmatrix} = F^{(1)}(\omega) - \omega F^{(1)}(1). \quad (\text{I.40})$$

Si l'on considère une normalisation  $c\Lambda_\phi, c \in C$  de  $\Lambda_\phi$  de sorte que  $\Delta(c\Lambda_\phi) = -1$ , E-U. Gekeler [62] obtient l'analogue suivant de la relation de Legendre (I.34).

$$c^{q^2-1} L(\omega)^{q-1} = L(c\omega)^{q-1} = \varpi^{q-1}. \quad (\text{I.41})$$

Comme remarqué dans [62], cette formule reflète le fait que  $\varpi$  n'est pas intrinsèquement défini, puisque le nombre  $(-T)^{1/q-1}$  qui apparaît dans son expression résulte d'un choix réalisé à une constante de  $\mathbb{F}_q$  près.

## I.4 Indépendance algébrique de périodes de modules de Drinfeld

Donnons à présent un aperçu des principales découvertes, historiques comme actuelles, portant sur la transcendance ou l'indépendance algébrique de nombres liés aux périodes et quasi-périodes de modules de Drinfeld. Nous les comparerons aux résultats analogues dans le cas des corps de nombres.



### I.4.1 Les débuts de la théorie : la méthode de L. Wade

Les premiers résultats de transcendance autour des modules de Drinfeld sont dus à L. Wade au début des années 1940 [132, 133, 134]. L'auteur démontre notamment la transcendance des valeurs de l'exponentielle de Carlitz aux points algébriques non nuls. Cela constitue l'analogue du théorème classique de C. Hermite. L'auteur démontre également la transcendance du logarithme de Carlitz aux points algébriques non nuls, ainsi que la transcendance de la période  $\xi$  qu'il associe à l'exponentielle de Carlitz. Notons que J. Geijsel démontre par la suite [60] que l'ensemble des périodes de l'exponentielle de Carlitz est donné par  $\mathbb{F}_q[T]\xi$ ; si bien que le résultat de L. Wade s'étend à toutes les périodes de l'exponentielle. Précisons qu'à cette époque, le module de Carlitz est attaché à l'action définie par  $\phi(T) = T\sigma^0 - \sigma$  et non  $\phi(T) = T\sigma^0 + \sigma$  [38]. Bien que l'auteur affirme dans [132] que sa méthode ne s'applique pas à une catégorie plus large de fonctions, dont fait partie l'exponentielle de Carlitz moderne, J. Geijsel démontre dans [60] que la transcendance des valeurs de cette dernière aux points algébriques non nuls peut en fait être déduite d'un théorème obtenu par L. Wade dans [132]. Un autre résultat phare de cette période est l'analogue du théorème de Gelfond-Schneider, obtenu par L. Wade [135], et généralisé par J. Geijsel [60]. Celui-ci affirme qu'étant donné  $\alpha \in C$  non nul tel que  $e_{\mathcal{C}}(\alpha) \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$  et  $\beta \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \setminus \mathbb{F}_q(T)$ , le nombre  $e_{\mathcal{C}}(\alpha\beta)$  est transcendant sur  $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ . Disons à présent quelques mots sur le principe de la méthode développée par L. Wade (voir par exemple [43]). L'objectif est de démontrer qu'un nombre  $\alpha \in C$ , est transcendant sur  $\mathbb{F}_q(T)$ , pour des nombres typiquement de la forme

$$\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A_k(T)}{B_k(T)}, \quad A_k, B_k \in \mathbb{F}_q[T]. \quad (\text{I.42})$$

On raisonne par l'absurde en supposant  $\alpha$  algébrique. Le lemme d'O. Ore [102, 103] implique alors l'existence d'une relation algébrique non triviale de la forme suivante, dite relation d'Ore.

$$P(\alpha) = C_0\alpha + C_1\alpha^p + \dots + C_n\alpha^{p^n} = 0, \quad C_0, \dots, C_n \in \mathbb{F}_q[T]. \quad (\text{I.43})$$

On se débarrasse ensuite des dénominateurs des  $\beta$  premiers termes de la somme (I.42) en multipliant la relation d'Ore par un polynôme  $Q_\beta \in \mathbb{F}_q[T]$ . On décompose alors  $P(\alpha)Q_\beta$  en trois parties

$$0 = P(\alpha)Q_\beta = I_1 + I_2 + I_3, \quad (\text{I.44})$$

avec  $I_1, I_2, I_3 \in C$  telles que  $I_1 \in \mathbb{F}_q[T]$ ,  $|I_2| < 1$  et  $I_3$  un ensemble dont on ne maîtrise pas a priori la taille des éléments. Mais en faisant tendre  $\beta$  vers  $+\infty$ , on peut scinder  $I_3$  en deux termes  $I'_1, I'_2$  tels que  $I'_1 \in \mathbb{F}_q[T]$  et  $|I'_2| < 1$ , de sorte que l'on obtient pour  $\beta$  assez grand

$$0 = P(\alpha)Q_\beta = I + J, \quad I \in \mathbb{F}_q[T], |J| < 1. \quad (\text{I.45})$$

La dernière étape consiste à contredire (I.45) en montrant que  $I \neq 0$ . Pour ce faire, on démontre que pour  $\beta$  assez grand,  $I$  n'est pas congru à zéro modulo  $\beta$ .

Plus tard, d'autres résultats analogues aux résultats d'indépendance algébrique fondamentaux sur les corps de nombres sont établis dans le cadre des corps de fonctions de caractéristique non nulle. En 1997, J. Yu [138] démontre l'analogue du théorème notoire d'A. Baker. Étant donné un module de Drinfeld  $\phi$ , et des éléments algébriques  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$  dans le disque de convergence du logarithme  $\log_\phi$  associé, celui-ci affirme que l'indépendance linéaire de  $\log_\phi(\alpha_1), \dots, \log_\phi(\alpha_n)$  sur  $\text{End}_{\Lambda_\phi} := \{c \in C, c\Lambda_\phi \subseteq \Lambda_\phi\}$  entraîne l'indépendance linéaire de  $1, \log_\phi(\alpha_1), \dots, \log_\phi(\alpha_n)$  sur  $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$ . La démonstration de J. Yu repose sur la théorie des  $t$ -modules de G. Anderson, qui est une généralisation des modules de Drinfeld (I.22) à  $\phi(T) \in \text{Mat}(C)[\sigma]$ , à la place de  $\phi(T) \in C[\sigma]$ .

### I.4.2 La méthode automatique

Rappelons que pour des fonctions mahlériennes à coefficients constants  $f(z) \in \mathbb{F}_q\{z\}$ ,  $f(z)$  est  $q$ -mahlérienne sur  $\mathbb{K}(z)$  si et seulement si elle est algébrique sur  $\overline{\mathbb{K}(z)}$ . D'après le théorème de G.

Christol, cela revient à dire que  $f(z)$  est  $q$ -automatique. Notons qu'alors, un théorème de S. Eilenberg [54] fournit une caractérisation utile en pratique de l'automaticité. L'auteur démontre en effet que la suite  $(a_n)_n$  est  $k$ -automatique si et seulement si son  $k$ -noyau  $K_k(\underline{a})$  est fini, où

$$K_k(\underline{a}) = \{(a_{k^r n + j})_n, r \geq 0, 0 \leq j < k^r\}.$$

C'est en raisonnant par l'absurde et en exploitant le théorème de G. Christol et le théorème de S. Eilenberg que J-P. Allouche initie une méthode permettant de démontrer la transcendance de certains nombres  $\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1/T)^n \in \mathbb{F}_q((1/T))$ . L'auteur propose ainsi une preuve automatique de la transcendance de  $\pi_q$  [14] établie par L. Wade [132]. Sa technique est généralisée par V. Berthé qui retrouve de façon automatique la transcendance sur  $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$  des quotients  $\zeta_C(s)/\pi_q^s$  pour  $s \in \{1, \dots, q-2\}$  [26, 28], et démontre celle des éléments  $\log_C(P)/\pi_q^s$  pour  $s \in \{1, \dots, q-2\}$ ,  $q > 3$  et certaines fractions rationnelles  $P \in \mathbb{F}_q(T)$  [27].

### I.4.3 La méthode de G. Anderson, W. D. Brownawell et M. Papanikolas

La méthode développée par G. Anderson, W. D. Brownawell et M. Papanikolas a lieu dans le cadre des corps de fonctions de caractéristique non nulle et porte sur les systèmes aux  $\tau$ -différences suivants, déjà évoqués précédemment.

$$\begin{pmatrix} \tau f_1(z) \\ \vdots \\ \tau f_n(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}, \quad (\text{I.46})$$

où les  $f_i(z)$  sont développables en série entière au voisinage de l'origine, à coefficients dans un corps de fonctions de caractéristique  $p > 0$  et où pour  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ ,  $a_n \in C$ ,

$$\tau f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{1/q} z^n. \quad (\text{I.47})$$

Cette méthode, fondée sur la théorie des  $t$ -motifs de G. Anderson [17], que nous expliquons plus loin, a permis de dépasser largement les résultats d'indépendance algébrique classiques. C'est notamment ainsi que M. Papanikolas complète l'analogie du théorème notoire d'A. Baker en affirmant que si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$  sont dans le disque de convergence de  $\log_C$  et tels que  $\log_C(\alpha_1), \dots, \log_C(\alpha_n)$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{F}_q(T)$ , alors ces logarithmes sont algébriquement indépendants sur  $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$  [104]. Notons qu'en utilisant une approche tannakienne alternative, C. Hardouin donne un théorème de calcul de groupe de Galois qui lui permet de retrouver ce résultat [67]. Par ailleurs, C-Y. Chang et J. Yu (2007) ont prouvé, via les  $t$ -motifs, que toutes les relations algébriques sur  $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$  entre les valeurs aux entiers de la fonction Zêta de Carlitz (I.56) sont engendrées par les relations de Bernoulli-Carlitz et les relations du type

$$\zeta_C(p^k n) = \zeta_C(n)^{p^k}, n, k \geq 1. \quad (\text{I.48})$$

Par relations de Bernoulli-Carlitz, nous entendons les relations suivantes.

$$\zeta((q-1)n) = -B_{(q-1)n}(\varpi)^{(q-1)n} / (q-1)\Pi((q-1)n+1), \quad (\text{I.49})$$

où  $\Pi(m) = \prod_{i=0}^r D_i^{n_i} \in \mathbb{F}_q(T)$ , où  $n_0 + n_1 q + \dots + n_r q^r$  est le développement de  $m-1$  dans la base  $q$  (voir (I.28) pour la définition des  $D_i$ ). Il s'agit d'un analogue de la fonction  $\Gamma$  d'Euler, pour laquelle on rappelle que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(n+1) = n!$ . Les  $B_n \in \mathbb{F}_q(T)$  sont quant à eux les analogues des nombres de Bernoulli classiques (voir (I.52)) et sont définis par l'égalité suivante.

$$\frac{z}{e_{\mathcal{G}}(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{z^n}{\Pi(n+1)}. \quad (\text{I.50})$$

Notons que la méthode de Mahler fournit à F. Pellarin [105] une démonstration plus directe du théorème de C-Y. Chang et J. Yu, bien qu'utilisant encore (ponctuellement) la théorie des  $t$ -motifs de G. Anderson. Enfin, on peut mentionner que L. Denis établit l'indépendance algébrique sur  $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$  de  $e = e_{\mathcal{G}}(1)$  et  $\varpi$  (à l'aide de  $t$ -modules). Dans le cas classique, on est loin de tels énoncés. L'indépendance algébrique sur  $\mathbb{Q}$  de  $e$  et  $\pi$  ou celle de valeurs de logarithmes est conjecturée mais non démontrée. En ce qui concerne les valeurs de la fonction  $\zeta$  de Riemann, le seul résultat général est la transcendance de ses valeurs aux entiers pairs. Cela se fonde sur la transcendance de  $\pi$  et la célèbre formule d'Euler suivante.

$$\zeta(2n) = -B_{2n}(2i\pi)^{2n}/2(2n)!, \quad (\text{I.51})$$

où les  $B_n$  sont des éléments de  $\mathbb{Q}$  appelés nombres de Bernoulli et définis par l'égalité suivante.

$$\frac{z}{e(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{z^n}{n!}. \quad (\text{I.52})$$

Mais cela excepté, notre connaissance des valeurs de  $\zeta$  aux entiers demeure très mince. R. Apéry établit en 1978 l'irrationalité de  $\zeta(3)$ . Depuis, il a été prouvé par K. Ball et T. Rivoal [22] qu'une infinité de valeurs aux entiers impairs de  $\zeta$  est irrationnelle. Pourtant, on ne sait toujours pas exhiber une autre valeur irrationnelle en dehors de  $\zeta(3)$ . Le résultat le plus proche de cet objectif est dû à W. Zudilin [141] et garantit que l'un au moins des quatre nombres  $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$  est irrationnel.

En ce qui concerne les modules de Drinfeld de rang 2, commençons par nous intéresser à la fonction  $J$  associée à l'invariant modulaire  $j$ . En caractéristique nulle, K. Barré-Sirieix, G. Diaz, F. Gramain et G. Philibert obtiennent en 1996 la transcendance de  $J(\alpha)$  pour  $\alpha$  algébrique avec  $0 < |\alpha| < 1$  [23]. Ce résultat avait été conjecturé par K. Mahler (et Y. Manin pour sa version  $p$ -adique) et est à présent connu sous le nom de *théorème stéphanois*. L'analogue de cet énoncé en caractéristique non nulle est obtenu deux ans plus tard par M. Ably, L. Denis et F. Recher [1], pour  $\alpha$  algébrique tel que  $0 < |\alpha| < (1/q)^{1/(q-1)}$ .

A propos de l'indépendance algébrique des périodes et quasi-périodes d'une courbe elliptique en caractéristique nulle, citons tout d'abord T. Schneider qui démontre la transcendance de tout nombre du réseau des périodes associé à une courbe elliptique [119]. Un autre résultat marquant est dû à G. Chudnovsky et affirme l'indépendance algébrique des nombres  $\frac{\pi}{\omega}$  et  $\frac{\eta}{\omega}$ , pour tout couple  $(\omega, \eta)$  de période et quasi-période, lorsque les invariants du réseau associé sont algébriques. Toujours sous cette hypothèse, ce résultat implique l'existence d'au moins deux nombres algébriquement indépendants parmi les périodes et quasi-périodes  $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2$  [41]. Nous n'avons pas connaissance de résultats d'indépendance algébrique plus généraux dans ce cadre. En revanche, on en sait bien plus sur les périodes et quasi-périodes de modules de Drinfeld  $\phi$  de rang 2 en caractéristique non nulle. En effet, C-Y. Chang et M. Papanikolas ont démontré l'indépendance algébrique de  $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2$  où  $\omega_1, \omega_2$  sont des périodes de  $\phi$  et  $\eta_1, \eta_2$  les quasi-périodes associées, dans le cas où la caractéristique  $p$  est impaire et  $\phi$  est sans multiplication complexe. Cela signifie que  $\{c \in C, c\Lambda_\phi \subseteq \Lambda_\phi\} = \mathbb{F}_q[T]$ . Le cas avec multiplication complexe, autrement dit  $\mathbb{F}_q[T] \subsetneq \{c \in C, c\Lambda_\phi \subseteq \Lambda_\phi\}$ , est différent et connu depuis A. Thiery [129]. L'auteur a en effet démontré qu'alors, le degré de transcendance sur  $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$  des périodes et quasi-périodes  $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2$  est égal à 2. La démonstration de C-Y. Chang et M. Papanikolas repose sur la théorie des  $t$ -motifs de G. Anderson et un résultat de M. Papanikolas qui ramène l'étude des relations algébriques entre périodes et quasi-périodes de modules de Drinfeld à celle d'un groupe de Galois aux différences attaché à un système aux  $\tau$ -différences associé à  $\phi$ . Nous expliquons à présent ce procédé. Tout d'abord, un  $t$ -motif sera pour nous (comme dans [104] et [32]) ce que G. Anderson appelait un  $t$ -motif dual. Afin de justifier l'appellation de  $t$ -motifs, nous appellerons dans cette partie  $t$  la variable que nous notions jusqu'alors  $z$ , c'est-à-dire la variable analytique selon laquelle les fonctions sont développées. La variable  $T$  désignera toujours celle des corps de fonctions de caractéristique non nulle. Nous rappelons que  $K = \mathbb{F}_q(T)$ . Notons  $\overline{K}[t, \tau]$  l'anneau des polynômes à coefficients dans  $\overline{K}$ , en la variable commutative  $t$  et en la variable non-commutative  $\tau$ , soumise à la règle  $\tau x = x^{1/q} \tau = \tau(x) \tau$ , pour  $x \in \overline{K}$ , où  $\tau$  est défini en (I.47). Un  $t$ -motif  $M$  est un  $\overline{K}[t, \tau]$ -module à gauche tel que

1.  $M$  est libre de rang fini sur  $\overline{K}[t]$
2.  $M$  est libre de rang fini sur  $\overline{K}[\tau]$
3.  $(t - T)^n M \subseteq \tau M$ , pour  $n$  assez grand.

Pour tout  $t$ -motif, il existe des matrices

$$g \in \text{Mat}_{r,1}(M), \quad h \in \text{Mat}_{s,1}(M), \quad \Phi \in \text{Mat}_{r,r}(\overline{K}[t]), \quad \theta \in \text{Mat}_{s,s}(\overline{K}[\tau]), \quad (\text{I.53})$$

telles que

1. Les coordonnées de  $g$  forment une  $\overline{K}[t]$ -base de  $M$  et  $\tau g = \Phi g$ ,
2. Les coordonnées de  $h$  forment une  $\overline{K}[\tau]$ -base de  $M$  et  $t h = \theta h$ .

Il existe alors  $c \in \overline{K}$  tel que  $\det(\Phi) = c(t - T)^s$ . On dit qu'un  $t$ -motif  $M$  est *trivialement analytiquement rigide* (*rigid analytically trivial* en anglais) s'il existe une matrice fondamentale de solutions associée à l'équation aux différences définie par la matrice  $\Phi$  représentant l'action de  $\tau$ . Autrement dit, s'il existe une matrice inversible  $\Psi(t)$  ayant pour coordonnées des séries en  $t$  à coefficients dans  $C$  convergentes sur le disque unité fermé, telle que

$$\tau \Psi(t) = \Phi(t) \Psi(t), \quad \text{où } \tau \text{ est défini en (I.47)}. \quad (\text{I.54})$$

Or, un théorème de G. Anderson [17] établit que la catégorie des  $t$ -motifs trivialement analytiquement rigides est équivalente à celle des  $t$ -modules abéliens uniformisables. Sans rentrer dans les détails, le fait que l'exponentielle associée à un module de Drinfeld soit surjective implique que les modules de Drinfeld sont des  $t$ -modules abéliens uniformisables et donc de tels  $t$ -motifs. Le fait remarquable est que les périodes et quasi-périodes du module de Drinfeld considéré sont alors des combinaisons linéaires des inverses des coefficients de la matrice  $\Psi(T)$  de (I.54). Par ailleurs, M. Papanikolas a prouvé que l'on peut associer à l'équation aux différences (I.54) un groupe de Galois adapté  $G$ , tel que le degré de transcendance des coefficients de  $\Psi(T)$  soit égal à la dimension de  $G$ . Cela ramène donc de façon systématique l'étude du degré de transcendance des périodes et quasi-périodes d'un module de Drinfeld  $\phi$  à celle du groupe de Galois attaché à l'équation aux différences donnée par la matrice  $\Phi(t)$  associé à  $\phi$ . Notons cependant que bien qu'il ait été établi que ce lien s'applique à tous les modules de Drinfeld, les seuls énoncés généraux explicites en dehors du module de Carlitz concernent les modules de Drinfeld de rang 2 [39]. Au-delà, ni la méthode de Mahler, ni celle des  $t$ -motifs n'a à ce jour produit de résultat marquant. Cette connexion demeure néanmoins un avantage par rapport à la méthode de Mahler puisqu'elle donne d'entrée de jeu la fonction  $\Psi(t)$  qui déforme les périodes et quasi-périodes du module de Drinfeld. Notons également que le nombre algébrique qui les interpole est toujours  $t = T$ .

#### I.4.4 La méthode de Mahler en caractéristique non nulle

La méthode de Mahler a contribué aux premiers énoncés d'indépendance algébrique dépassant le cas classique, grâce aux travaux de L. Denis, dès les années 1990. Celle-ci permet à l'auteur de compléter l'analogie du théorème notoire d'A. Baker sur l'indépendance algébrique sur  $\overline{\mathbb{F}_q}(T)$  de valeurs de logarithmes en des points de  $\mathbb{F}_q(T^{1/k})$ , où  $k$  est un entier naturel non nul [50]. On a vu que cela a par la suite été étendu par la méthode de G. Anderson, W. D. Brownawell et M. Papanikolas aux points de  $\overline{\mathbb{F}_q}(T)$ . C'est également par la méthode de Mahler que L. Denis démontre l'indépendance algébrique des  $(p - 1)$  premières valeurs de la fonction Zêta de Carlitz, améliorée par la suite par C-Y. Chang et J. Yu.

Par ailleurs, au-delà de ces analogies entre corps de nombres et corps de fonctions de caractéristique non nulle, certains résultats établis dans ce dernier cadre ne possèdent pas de traduction dans le premier, car ils concernent des objets qui n'ont pas d'équivalents classiques. Par exemple, on voit que l'analogie  $\pi_q \in \mathbb{F}_q((1/T))$  de  $\pi$  dépend de  $q$ . En faisant varier  $q$ , on obtient ainsi plusieurs analogues de  $\pi$ . L. Denis a montré dans [48] que si  $i_1, \dots, i_n$  désigne une suite strictement croissante d'entiers naturels non nuls, alors  $\pi_{q^{i_1}}, \dots, \pi_{q^{i_n}}$  sont algébriquement indépendants sur  $\overline{\mathbb{F}_q}(T)$ . Son raisonnement

se fonde sur la méthode de Mahler. Un autre cas d'objets spécifiques aux corps de fonctions de caractéristique non nulle consiste en les dérivées (par rapport à  $T$ ) du nombre  $\pi_q$ , également introduites par L. Denis. Dans [49], l'auteur prouve l'indépendance algébrique des  $(p-1)$  premières dérivées de  $\pi_q$  en utilisant encore une fois la méthode de Mahler. Notons que ces nombres peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires de périodes de certains  $t$ -modules [46]. L. Denis s'intéresse également aux dérivées de l'exponentielle de Carlitz, obtenues en dérivant terme à terme les coefficients de la série  $e_{\mathcal{C}}(z)$  (I.27) par rapport à la variable  $T$  [46]. Cela donne pour  $k \in \{1, \dots, p-1\}$

$$e_{\mathcal{C}}^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k! z^{qn}}{[n]_k D_n}. \quad (\text{I.55})$$

L. Denis montre notamment l'indépendance algébrique des valeurs des  $p-1$  premières dérivées de  $e_{\mathcal{C}}(z)$  en  $z = 1$  [45]. Notons cependant que sa preuve n'utilise plus la méthode de Mahler mais la théorie des  $t$ -modules de G. Anderson. Comme remarqué par l'auteur dans [47], certaines fonctions quasi-périodiques attachées à un module de Drinfeld s'obtiennent par dérivation d'expressions liées à l'exponentielle associée, ce qui motive l'étude de telles dérivées.

Afin d'illustrer le fonctionnement de la méthode de Mahler ainsi que la réalisation de nombres remarquables comme valeurs de fonctions mahlériennes, nous revenons sur la démonstration de L. Denis [50] de l'indépendance algébrique sur  $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$  des  $(p-1)$  premières valeurs  $\zeta_C(1), \dots, \zeta_C(p-1)$  de la fonction Zêta de Carlitz. Celle-ci est définie par analogie avec la fonction Zêta de Riemann comme suit.

$$\zeta_C(s) = \sum_{a \in \mathbb{F}_q[T], a \text{ unitaire}} \frac{1}{a^s}, s \in \mathbb{N}^*. \quad (\text{I.56})$$

Nous présentons maintenant la trame de la démonstration de L. Denis. On note tout d'abord l'égalité suivante, due à L. Carlitz et valable pour tout  $s \in \{1, \dots, p-1\}$ .

$$\zeta_C(s) = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{hs}}{\left( (T^{qh} - T) (T^{q^{h-1}} - T) \dots (T^q - T) \right)^s}.$$

On définit alors les fonctions suivantes.

$$f_s(z) = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{hs}}{\left( (z^{qh} - T) (z^{q^{h-1}} - T) \dots (z^q - T) \right)^s}. \quad (\text{I.57})$$

Celles-ci sont  $q$ -mahlériennes, puisque l'on a

$$f_s(z^q) = (-1)^s (z^q - T)^s f_s(z) - (-1)^s (z^q - T)^s, \quad s = 1, \dots, p-1.$$

De plus, on a

$$f_s(T) = \zeta_C(s), \quad s = 1, \dots, p-1.$$

L. Denis a par ailleurs montré que les fonctions  $f_1(z), \dots, f_{p-1}(z)$  sont algébriquement indépendantes sur  $\overline{\mathbb{F}_q(T)}(z)$ . En vérifiant que  $T$  n'est pas un point singulier du système associé, un analogue dans ce contexte du théorème de Ku. Nishioka conclurait à l'indépendance algébrique sur  $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$  des nombres  $\zeta_C(1), \dots, \zeta_C(p-1)$ . Dans ce but, L. Denis a démontré dans [50] un analogue du théorème de Ku. Nishioka dans le cas particulier des équations mahlériennes inhomogènes d'ordre 1 définies sur des corps de fonctions de caractéristique non nulle concernées par cet exemple. Cela lui permet de conclure. Il est à noter que la démonstration de L. Denis de l'indépendance algébrique des fonctions mahlériennes  $f_s(z)$  dépend fortement du fait que ces fonctions vérifient une équation mahlérienne d'ordre 1 inhomogène. Pour des fonctions mahlériennes d'ordre supérieur, il semble plus difficile d'établir un tel résultat d'indépendance algébrique fonctionnel, comme mentionné précédemment.



## I.5 Résultats principaux de la thèse

Dans le but annoncé d'établir une théorie similaire au cadre classique concernant les relations algébriques de valeurs de fonctions mahlériennes définies sur des corps de fonctions de caractéristique non nulle, nous avons tout d'abord démontré un analogue du théorème I.1.3 de Ku. Nishioka. En voici l'énoncé [56].

### Théorème I.5.1 (F.)

Soit  $\mathbb{K}$  un corps de nombres ou un corps de fonctions de caractéristique non nulle. Soient  $n \geq 1$ ,  $d \geq 2$  deux entiers et  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  des fonctions analytiques au voisinage de l'origine vérifiant le système  $d$ -mahlérien (I.14).

Soit  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ ,  $0 < |\alpha|_\infty < 1$ , un nombre régulier pour le système (I.14).

Alors, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\text{degtr}_{\overline{\mathbb{K}}}\{f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)\} = \text{degtr}_{\overline{\mathbb{K}}(z)}\{f_1(z), \dots, f_n(z)\}. \quad (\text{I.58})$$

Le cas où  $\mathbb{K}$  est un corps de nombres est le théorème de Ku. Nishioka. La démonstration du théorème (I.5.1) que nous proposons permet de traiter de façon unifiée le cas des corps de nombres et des corps de fonctions de caractéristique non nulle et de retrouver ainsi le théorème de Ku. Nishioka. Cela est rendu possible par l'utilisation d'un critère général d'indépendance algébrique de P. Philippon [107], valable en toute caractéristique, en remplacement de la théorie de l'élimination mise en place par Y. Nesterenko (voir par exemple [95]) à la fin des années 1970, et exploitée par Ku. Nishioka, qui n'a été écrite qu'en caractéristique nulle. La trame de fond reste la méthode de Mahler. Celle-ci suit des étapes similaires à celles de la méthode de C. Siegel et s'inscrit de même dans la tradition des preuves historiques de transcendance. Afin d'en expliquer le procédé, considérons  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  des solutions de (I.14) algébriquement indépendantes sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$  et listons les étapes permettant de démontrer (sous certaines conditions) l'indépendance algébrique des valeurs  $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$ .

- **Étape 1.** Construction, pour chaque entier  $N$ , d'un polynôme  $R(z, X_1, \dots, X_n)$  de degré en  $z$  et  $X$  inférieur à  $N$ , et tel que la fonction auxiliaire  $R(z, f_1(z), \dots, f_n(z))$  de la variable  $z$ , ait un grand ordre  $n(N)$  en  $z = 0$  (minoré en fonction de  $N$ ).
- **Étape 2.** Pour chaque entier naturel  $N$  fixé, itération du système (I.14) afin d'obtenir à partir de  $R(z, X_1, \dots, X_n)$  des polynômes non nuls  $\{P_{N,k}(X_1, \dots, X_n)\}_k$  prenant de petites valeurs en  $X_i = f_i(\alpha)$ . Puis, lemme de zéros : vérification du fait que  $P_{N,k}(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) \neq 0$ . L'argument est dans ce cas le théorème des zéros isolés.
- **Étape 3.** Pour chaque  $N$  fixé, choix d'un polynôme  $P_N(X_1, \dots, X_n) = P_{N,k(N)}(X_1, \dots, X_n)$  parmi les  $\{P_{N,k}(X_1, \dots, X_n)\}_k$ , pour un entier  $k$  assez grand par rapport à  $N$ , et majoration de  $|P_N(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))|$  à l'aide d'outils analytiques.
- **Étape 4.** Minoration du nombre  $|P_N(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))|$ . Ici, on utilise également des arguments analytiques.
- **Conclusion.** On fait tendre  $N$  vers  $+\infty$  et on applique un critère général d'indépendance algébrique dû à P. Philippon [107].

Le critère général d'indépendance algébrique de P. Philippon qui permet de conclure se fonde sur des arguments algébriques et géométriques qui étendent la méthode d'élimination mise en place par Y. Nesterenko. L'idée générale de cette théorie est de raisonner par l'absurde en considérant l'idéal  $\mathfrak{p}$ , supposé non nul, des polynômes à  $n$  variables et coefficients algébriques s'annulant au point  $\omega = (f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))$ . On considère alors les intersections successives de la variété correspondante avec des hyperplans, c'est-à-dire des variétés associées à des idéaux engendrés par un seul polynôme. Des théorèmes dits de type Bézout (voir par exemple [109]) permettent de contrôler le degré, la hauteur (quantités associées à une variété, qui généralisent celles attachées à un polynôme) et la distance à  $\omega$  (généralisation de la notion de valeur absolue d'un polynôme en  $\omega$ ) de ces intersections successives, en fonction de la variété précédente. Lorsque l'on parvient à une variété de dimension suffisamment

petite, ces théorèmes fournissent une contradiction, portant sur ces quantités. On conclut que l'idéal  $\mathfrak{p}$  est nul et que les valeurs  $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$  sont algébriquement indépendantes.

La démonstration du théorème I.5.1 fait l'objet du **chapitre II**. Nous y démontrons également, à l'aide de la méthode de Mahler, l'analogie du théorème I.1.2 de K. Mahler.

Dans le **chapitre III**, nous raffinons le théorème I.5.1 en prouvant l'énoncé suivant. Il s'agit de l'analogie en caractéristique non nulle de travaux de P. Philippon [110] et de B. Adamczewski et C. Favrejon [8], déjà mentionnés à la fin de la **section I.1.3**.

**Théorème I.5.2 (F.)**

Soit  $\mathbb{K}$  un corps de fonctions de caractéristique non nulle. On se place sous les hypothèses du théorème I.5.1. Supposons de plus que l'extension

$$\overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$$

est régulière sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Alors, pour tout  $P(X_1, \dots, X_n) \in \overline{\mathbb{K}}[X_1, \dots, X_n]$  homogène en  $X_1, \dots, X_n$  tel que

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0,$$

il existe un polynôme  $Q(z, X_1, \dots, X_n) \in \overline{\mathbb{K}}[z][X_1, \dots, X_n]$  homogène en  $X_1, \dots, X_n$  tel que

$$Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0,$$

et

$$Q(\alpha, X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n).$$

Ainsi, toute relation algébrique entre valeurs, en un point algébrique non nul régulier, de fonctions mahlériennes engendrant une extension régulière, provient de la spécialisation d'une relation algébrique fonctionnelle. Avant de donner la définition d'une extension régulière, nous listons les principales conséquences du théorème I.5.2. En corollaire immédiat, nous obtenons le fait que l'indépendance linéaire de  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$  entraîne celle de  $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$  sur  $\overline{\mathbb{K}}$ . Par ailleurs, étant donnée une fonction mahlérienne transcendante  $f(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  dont l'extension associée est régulière, et  $\alpha$  un nombre algébrique dans le domaine de convergence de  $f(z)$ , nous pouvons déduire du théorème I.5.2 le fait que  $f(\alpha)$  est soit transcendante sur  $\mathbb{K}$  soit dans  $\mathbb{K}(\alpha)$ . Lorsque  $\mathbb{K}$  est un corps de nombres, les analogues de ces deux corollaires sont dus à B. Adamczewski et C. Favrejon [8]. Ces résultats permettent de démontrer la conjecture de Cobham évoquée dans la **section I.1.4** [8, 110] (voir aussi [5]).

Donnons à présent la définition d'une extension régulière.

**Définition I.5.1**

Soit  $\mathbf{k}$  un corps. On dit qu'une extension finiment engendrée  $\mathcal{E} = \mathbf{k}(u_1, \dots, u_n)$  de  $\mathbf{k}$  est régulière sur  $\mathbf{k}$  si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

1.  $\mathcal{E}$  est séparable sur  $\mathbf{k}$ . Autrement dit, il existe une base de transcendance  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathbf{k}$  telle que  $\mathcal{E}$  soit une extension algébrique séparable de  $\mathbf{k}(\mathcal{F})$  (voir [55, Appendix A1.2] et aussi [84]).
2. Tout élément de  $\mathcal{E}$  qui est algébrique sur  $\mathbf{k}$  appartient à  $\mathbf{k}$ .

Dans le cas de fonctions mahlériennes  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  définies sur  $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ , l'extension

$$\overline{\mathbb{Q}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$$

est toujours régulière sur  $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ . Il en est de même des  $E$ -fonctions solutions de systèmes différentiels (I.7). Pour ces dernières, il s'agit d'une conséquence de leur analyticité sur  $\mathbb{C}$ . Pour les fonctions mahlériennes, cela se déduit [8, 110] du fait que les fonctions mahlériennes   coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}$  sont soit rationnelles soit transcendantes [100, Theorem 5.1.7]. Mais lorsque  $\mathbb{K}$  est un corps de fonctions de

caractéristique  $p > 0$ , une telle dichotomie n'est plus systématique et il existe des extensions mahlériennes non régulières. En voici un exemple élémentaire, à l'aide du système  $p$ -mahlérien suivant.

$$\begin{pmatrix} f_1(z^p) \\ f_2(z^p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix}.$$

Une solution de ce système est donnée par

$$f_1(z) = 1, f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{p^n}.$$

De plus,  $f_2(z)$  est algébrique car  $f_2(z)^p = f_2(z^p) = f_2(z) - z$ . Par ailleurs, la suite des coefficients de  $f_2(z)$  n'est pas ultimement périodique. Donc  $f_2(z)$  n'est pas rationnelle. Cela entraîne que l'extension  $\mathcal{E} = \overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), f_2(z))$  n'est pas régulière sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Maintenant, soit  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ ,  $0 < |\alpha| < 1$  et  $\lambda = f_2(\alpha) \in \overline{\mathbb{K}}$ . Alors,  $\lambda f_1(\alpha) - f_2(\alpha) = 0$  est une relation linéaire non triviale entre  $f_1(\alpha)$  et  $f_2(\alpha)$  sur  $\overline{\mathbb{K}}$ . Cependant, il n'existe aucune relation linéaire non triviale entre les fonctions  $f_1(z)$  et  $f_2(z)$  sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ , puisque  $f_2(z)$  n'est pas rationnelle. Ainsi, la conclusion du théorème I.5.2 n'est pas vérifiée dans ce cas. Le théorème III.1.2, affirme que cet exemple reflète un comportement général, à savoir que la conclusion du théorème I.5.2 n'est jamais satisfaite lorsque  $\overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  n'est pas régulière sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ .

Nous établissons la démonstration du théorème I.5.2 dans la **section III.1.1** du **chapitre III**, en suivant la démarche de B. Adamczewski et C. Favre dans [8]. Celle-ci se divise en deux parties. Nous traitons tout d'abord le cas inhomogène. Autrement dit, nous nous donnons une relation algébrique  $P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0$  entre les valeurs des fonctions mahlériennes et nous cherchons à démontrer l'existence d'une relation algébrique  $Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0$  entre les fonctions telles que  $Q(\alpha, X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n)$ , sans chercher à garantir que  $Q$  soit homogène en  $X_1, \dots, X_n$ . Nous produisons la preuve de cet énoncé inhomogène en suivant celle de son analogue pour les corps de nombres établi par P. Philippon [110]. Dans un premier temps, nous en démontrons une version locale, c'est-à-dire valable pour tout  $\alpha$  suffisamment proche de l'origine. Dans un deuxième temps, nous remarquons que pour tout nombre algébrique non nul régulier  $\alpha$  et tout  $r \in \mathbb{N}$ , l'itération de la matrice  $A^{-1}(\alpha)$  transforme la relation  $P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0$  en une relation algébrique  $Q$  entre  $f_1(\alpha^{d^r}), \dots, f_n(\alpha^{d^r})$ . Or, pour  $r$  assez grand, le théorème inhomogène local précédemment établi fournit une relation algébrique entre  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  dont l'évaluation en  $z = \alpha^{d^r}$  donne  $Q$ . En remplaçant  $z$  par  $z^{d^r}$ , nous trouvons une relation entre  $f_1(z^{d^r}), \dots, f_n(z^{d^r})$ . A l'inverse, nous itérons ensuite la matrice  $A(z)$  afin de transposer cette relation algébrique en une relation algébrique entre les  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  dont nous vérifions que son évaluation en  $z = \alpha$  (valable par régularité de  $\alpha$ ) correspond à la relation initiale  $P$  entre  $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$ .

La seconde partie de la démonstration du théorème I.5.2 consiste à établir l'égalité suivante, que nous pouvons démontrer de la même façon que son analogue dans [8].

$$\text{Rel}_{\overline{\mathbb{K}}}(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = \text{ev}_{\alpha}(\text{Rel}_{\overline{\mathbb{K}}(z)}(f_1(z), \dots, f_n(z))), \quad (\text{I.59})$$

où pour un corps  $L$  et des éléments  $u_1, \dots, u_n$  d'un  $L$ -espace vectoriel,  $\text{Rel}_L(u_1, \dots, u_n)$  désigne l'ensemble des relations linéaires sur  $L$  entre les  $u_i$ . Pour finir, nous remarquons qu'une relation algébrique homogène de degré  $N$  entre  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  peut être vue comme une relation linéaire entre les monômes de degré  $N$  en  $f_1(z), \dots, f_n(z)$ . Nous prouvons que de tels monômes sont solutions d'un système mahlérien dont  $\alpha$  est un point régulier et leur appliquons (I.59).

Dans la **section III.1.2**, nous revenons sur l'hypothèse de régularité de l'extension mahlérienne du théorème I.5.2. En effet, comme expliqué précédemment, lorsque  $\mathbb{K}$  est un corps de fonctions de caractéristique non nulle, une extension mahlérienne  $\mathcal{E} = \overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  n'est pas systématiquement régulière, contrairement au cas classique. On est alors en droit de se demander si cette hypothèse est réellement nécessaire au théorème I.5.2. Le théorème III.1.2 répond à cette question



par l'affirmative. Sa démonstration fait l'objet de la **section III.1.2**. Toutefois, nous établissons dans la **section III.1.3** que la condition de régularité des extensions mahlériennes est garantie dans un certain cadre.

### **Théorème I.5.3**

*Soit  $d \geq 2$  un entier tel que  $p \nmid d$ . Alors une fonction  $d$ -mahlérienne  $f(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  sur  $\mathbb{K}(z)$  est soit transcendante soit dans  $\mathbb{K}(z)$ .*

Nous en déduisons le corollaire suivant.

### **Corollaire I.5.1**

*Soit  $d \geq 2$  un entier tel que  $p \nmid d$ . Alors, toute extension  $d$ -mahlérienne sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$  est régulière sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ .*

La démonstration du théorème I.5.3 généralise celle de J. Roques qui a établi ce résultat dans le cadre de fonctions mahlériennes à coefficients dans  $\mathbb{F}_q$  [114]. Le fil directeur en est la théorie des courbes projectives lisses sur  $\mathbb{P}^1(C)$ .

Nous formulons dans la **section III.1.4** notre contribution à l'une des limites du théorème I.5.1 précédemment évoquée, à savoir, la détermination de la transcendance de la valeur d'une seule fonction mahlérienne en un point algébrique non nul. Il s'agit du corollaire III.1.2, que nous démontrons en suivant la stratégie employée par B. Adamczewski et C. Favre pour traiter son analogue pour les corps de nombres dans [8]. Enfin, la **section III.1.5** fournit des illustrations des résultats précédents.

## **I.6 Premiers résultats de cette thèse sur l'indépendance algébrique fonctionnelle et perspectives**

Le théorème I.5.2 ramène l'étude des relations algébriques entre valeurs de fonctions mahlériennes aux points algébriques à celle des relations algébriques entre les fonctions elles-mêmes, à la condition que l'extension mahlérienne considérée soit régulière. Afin de vérifier cette condition, il faudrait en savoir d'avantage sur l'algébricité des fonctions mahlériennes en caractéristique non nulle. Plus généralement, appliquer le théorème I.5.2 nécessite de connaître les relations algébriques entre fonctions mahlériennes. Le **chapitre IV** est consacré à nos premières contributions à ces problèmes et aux perspectives de recherche envisagées.

### **I.6.1 Algébricité des fonctions mahlériennes**

En caractéristique nulle, les seules fonctions mahlériennes algébriques sont les fonctions rationnelles. Comme évoqué précédemment, cela n'est plus vrai en caractéristique non nulle. Notons au passage qu'une partie de la structure analytique des fonctions mahlériennes en caractéristique non nulle nous échappe également. En caractéristique nulle, nous savons qu'une fonction mahlérienne non rationnelle admet le cercle unité comme coupure [112] (voir aussi [25]). Une perspective de recherche parallèle serait d'étudier si cette propriété reste valable pour les fonctions mahlériennes en caractéristique non nulle. Pour revenir à l'algébricité des fonctions mahlériennes, il est connu qu'une fonction admettant une infinité de zéros ou de pôles est nécessairement transcendante. Cela est utilisé à de nombreuses reprises par L. Denis pour garantir la transcendance des fonctions mahlériennes qu'il étudie (voir par exemple [50, 49]). Lorsque nous avons affaire à des fonctions qui ne vérifient pas cette propriété, nous proposons deux approches permettant d'obtenir des résultats de transcendance dans des cas particuliers. Tout d'abord, remarquons qu'il serait envisageable de considérer une variante de la méthode automatique, fondée sur le constat suivant. Si  $f(z)$  est algébrique sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ , alors  $f(1/T)$  est algébrique sur  $\overline{\mathbb{K}}$ . Donc si nous montrons la transcendance de  $f(1/T)$ , nous obtenons celle de  $f(z)$ . Ainsi, dans le cas où  $f(z) \in \mathbb{F}_q((1/T))\{z\}$ ,  $f(1/T) \in \mathbb{F}_q((1/T))$  et nous pourrions appliquer la méthode automatique, mentionnée dans la section I.4.2, à  $\alpha = f(1/T)$ . Toutefois, nous avons conscience que ces

considérations ne sauraient être l’outil principal de l’étude de l’algébricité des fonctions mahlériennes en caractéristique non nulle. En effet, l’objectif de notre démarche est d’obtenir grâce au théorème I.5.2 la transcendance de  $f(1/T)$  à partir de celle de  $f(z)$ , et non l’inverse. Néanmoins, cela peut tout de même produire des résultats de transcendance nouveaux. En effet, si l’on montre que la fonction  $f(z)$  prend une valeur transcendante en  $1/T$ , on en déduit que  $f(z)$  est transcendante. Mais si l’extension mahlérienne engendrée par  $f(z)$  est régulière, en appliquant le théorème I.5.2 (plutôt son corollaire III.1.2), on obtient la transcendance de toute valeur de  $f(z)$  en un point algébrique régulier non nul. La méthode automatique possède également la limite suivante. Si nous souhaitons démontrer un résultat de transcendance valable sur une classe générale de fonctions (dans notre cas, celle-ci contient des déformations de la fonction  $q$ -mahlérienne  $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n z^{q^n}$ ), nous ne connaissons pas forcément le développement en série explicite de celles-ci et il est difficile d’utiliser le théorème de S. Eilenberg. C’est pourquoi nous proposons une approche alternative dans la **section IV.1.1**. Nous raisonnons par l’absurde, à partir d’une relation d’Ore (I.43). Puis, nous identifions certains coefficients de cette relation selon les puissances de  $z$ . Cela nous ramène à des égalités polynomiales dans  $\mathbb{F}_q(T)$  que nous contredisons par une étude des valuations en la variable  $T$  qui y apparaissent. De façon plus générale, nous démontrons dans la **section IV.1.2** le critère de transcendance suivant, valable pour une équation mahlérienne d’ordre 1 inhomogène.

### Théorème I.6.1

Soit  $f(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  non constante telle qu’il existe  $a(z) \in \mathbb{K}(z) \setminus \{0\}$ ,  $b(z) \in \mathbb{K}(z)$  tels que  $b(z) = 0$ , ou  $a(z)$  ne possède ni zéro ni pôle en  $z = 0$ , et

$$f(z) = a(z)f(z^q) + b(z). \quad (\text{I.60})$$

Alors  $f(z)$  est algébrique si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées

1. Il existe  $r(z) \in \overline{\mathbb{K}}(z) \setminus \{0\}$  telle que

$$a(z) = \frac{r(z)}{r(z^q)}.$$

2. La fraction  $\frac{b(z)}{r(z)}$  a tous ses pôles dans  $\cup_{k \geq 1} \mathbb{F}_{q^k}$ , ou est polynomiale.

Le théorème I.6.1 est une conséquence d’un théorème plus général d’indépendance algébrique concernant des systèmes provenant de plusieurs équations mahlériennes inhomogènes d’ordre 1. Ce résultat porte le nom générique de *théorème de Kolchin*. Il s’agit du théorème IV.2.1 que nous démontrons dans la **section IV.2**.

### I.6.2 La théorie de Galois

La théorie de Galois paraît être l’outil le plus efficace pour déterminer les relations algébriques entre fonctions solutions d’un système aux différences. Celle-ci a été développée par M. van der Put et M. Singer notamment [111]. Les deux auteurs traitent principalement de la caractéristique nulle, mais envisagent également certains aspects de leur théorie dans le cadre de la caractéristique non nulle. D’autres ont mis en place des théories de Galois adaptées au contexte de la caractéristique non nulle. Dans le cadre différentiel, nous pouvons citer B. Matzat [93] et sa théorie de Galois différentielle *itérative*. En utilisant une construction similaire, C. Hardouin développe une théorie de Galois itérative pour les systèmes aux  $q$ -différences, valable en toute caractéristique [66]. Pour les systèmes aux  $\tau$ -différences (I.46) en caractéristique non nulle, nous avons déjà mis en lumière les travaux galoisiens de M. Papanikolas. Mentionnons également la théorie de Galois tannakienne qui s’applique dans de nombreux contextes, de toute caractéristique, et notamment aux systèmes aux  $\tau$ -différences, comme cela a été mis en avant par C. Hardouin [67]. En ce qui concerne les fonctions mahlériennes, la théorie de Galois est étudiée par J. Roques [115, 116] dans le cadre de la caractéristique nulle mais ne semble pas avoir été spécifiquement écrite et exploitée dans le cadre de la caractéristique non nulle.

L’idée maîtresse de la théorie de Galois aux différences est d’attacher au système aux différences concerné un groupe reflétant les relations algébriques entre les solutions du système, appelé *groupe*

de Galois aux différences. Afin d'expliquer ce phénomène, nous nous appuyons sur [113]. Nous nous plaçons sur le corps algébriquement clos  $k = \overline{\mathbb{C}(z)}$  de caractéristique nulle, muni de l'automorphisme  $\sigma_d : z \mapsto z^d$ . Considérons le système  $d$ -mahlérien suivant.

$$\sigma_d(Y) = AY, A \in GL_n(k) \text{ et } Y \in \mathbb{C}\{z\}^n. \quad (\text{I.61})$$

On dit qu'une extension d'anneau aux différences  $R$  de  $(k, \sigma_d)$  est un anneau de Picard-Vessiot si les trois conditions suivantes sont satisfaites.

1. Il existe  $U \in GL_n(R)$  telle que  $\sigma_d(U) = AU$ . Une telle matrice est appelée *matrice fondamentale de solutions* de (I.61).
2.  $R$  est engendrée, en tant que  $k$ -algèbre, par les entrées de  $U$  et  $\det(U)^{-1}$ .
3.  $R$  est un anneau aux différences simple, c'est-à-dire que les seuls idéaux  $I$  de  $R$  tels que  $\sigma_d(I) \subseteq I$  sont  $\{0\}$  et  $R$ .

On a plus précisément l'égalité

$$R = k[X, \det(X)^{-1}]/I,$$

où  $X = (X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et  $I$  est l'idéal des relations algébriques dans  $k[X, \det(X)^{-1}]$  entre les entrées de  $U$  (voir [111]).

Le groupe de Galois sur  $k$ ,  $\text{Gal}(k)$ , associé à (I.61) est défini par

$$\text{Gal}(k) = \{\phi \in \text{Aut}(R/k), \sigma_d \circ \phi = \phi \circ \sigma_d\}. \quad (\text{I.62})$$

Ce groupe s'insère en tant que sous-groupe algébrique dans  $GL_n(\mathbb{C})$ . En effet, d'après [111], pour tout  $\phi \in \text{Gal}(k)$ , il existe une unique matrice  $M(\phi) \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $\phi(U) = UM(\phi)$ . On identifie alors  $\text{Gal}(k)$  à un sous-groupe algébrique de  $GL_n(\mathbb{C})$  par

$$\phi \in \text{Gal}(k) \mapsto M(\phi) \in GL_n(\mathbb{C}). \quad (\text{I.63})$$

Le groupe  $\text{Gal}(k)$  est donc le lieu des zéros d'un idéal  $J_{\mathbb{C}}$  de  $\mathbb{C}[X, \det(X)^{-1}]$ , où

$$J_{\mathbb{C}} = \{P(X) \in \mathbb{C}[X, \det(X)^{-1}], P(M) = 0, \forall M \in \text{Gal}(k)\}.$$

Posons

$$J_k = \{P(X) \in k[X, \det(X)^{-1}], P(M) = 0, \forall M \in \text{Gal}(k)\}.$$

Le groupe  $\text{Gal}(k)$  reflète les relations algébriques entre les entrées de la matrice fondamentale de solutions  $U$ . Nous illustrons ce fait en reprenant un exemple de [113] (voir aussi [115]). Supposons que  $n = 2$  et  $G = SL_2(\mathbb{C})$ . Soient  $(f_1(z), f_2(z))$  et  $(g_1(z), g_2(z))$  deux vecteurs solutions du système (I.61) tels que

$$U = \begin{pmatrix} f_1(z) & g_1(z) \\ f_2(z) & g_2(z) \end{pmatrix}.$$

Le but est de comparer l'idéal  $J_k$  définissant  $\text{Gal}(k)$  sur  $k$  et l'idéal  $I$  des relations algébriques entre  $f_1(z), f_2(z), g_1(z), g_2(z)$  dans  $k[X, \det(X)^{-1}]$ . Intuitivement, on voudrait que  $J_k = I$ . Cela n'est pas exactement le cas dans notre exemple, mais la situation n'en est pas bien éloignée. Tout d'abord, notons que

$$J_k = (\det(X) - 1).$$

Posons à présent

$$V = \{v \in GL_n(k), \forall P(X) \in I, P(v) = 0\}$$

le groupe algébrique associé à  $I$ . Un résultat de M. van der Put et M. Singer [111] implique que pour tout  $w \in V$ ,

$$V = w\text{Gal}(k).$$

Comme de plus  $I$  est un idéal radical, on a

$$\begin{aligned}
I &= \{Q(X) \in k[X, \det(X)^{-1}], Q(v) = 0, \forall v \in V\} \\
&= \{Q(X) \in k[X, \det(X)^{-1}], Q(wM) = 0, \forall M \in \text{Gal}(k)\} \\
&= \{Q(w^{-1}X), Q \in J_k\} \\
&= (\det(w^{-1}X) - 1) \\
&= (\det(X) - \det(w)) \\
&= (\det(X) - \lambda), \text{ où } \lambda = \det(w) \in k^*.
\end{aligned}$$

Ainsi, les relations algébriques sur  $k[X, \det(X)^{-1}]$  entre les fonctions

$$f_1(z), f_2(z), g_1(z), g_2(z)$$

sont engendrées sur  $k[X, \det(X)^{-1}]$  par le polynôme  $X_{1,1}X_{2,2} - X_{1,2}X_{2,1} - \lambda$ . Cela garantit par exemple que les coordonnées du vecteur solution  $(f_1(z), f_2(z))$  sont algébriquement indépendantes sur  $k$  (donc sur  $\mathbb{C}(z)$ ). En effet, un polynôme en les seules variables  $X_{1,1}, X_{2,1}$  ne saurait être un multiple sur  $k[X, \det(X)^{-1}]$  de  $X_{1,1}X_{2,2} - X_{1,2}X_{2,1} - \lambda$ . Cet exemple exprime l'idée générale de la théorie de Galois aux différences : si le groupe de Galois aux différences est gros (typiquement s'il contient  $SL_n(\mathbb{C})$ ), alors les fonctions solutions du système aux différences considéré sont algébriquement indépendantes.

Dans le cadre des fonctions mahlériennes en caractéristique nulle, les travaux récents de J. Roques [115, 116] exhibent des propriétés fondamentales du groupe de Galois aux différences concerné. L'auteur étudie également en détail les groupes de Galois des équations mahlériennes d'ordre 2 et retrouve notamment un résultat dû à Ku. Nishioka et S. Nishioka [101] sur l'indépendance algébrique sur  $\overline{\mathbb{Q}}(z)$  de fonctions reliées aux séries génératrices des fameuses suites de Rudin-Shapiro et Baum-Sweet.

Dans le cas des équations mahlériennes en caractéristique non nulle, la théorie de Galois ne semble pas avoir été exploitée pour produire des résultats d'indépendance algébrique fonctionnelle. L'une des perspectives de cette thèse serait de développer une théorie de Galois adaptée à ce sujet.

### I.6.3 Théorème de type Kolchin

Dans le cadre des équations mahlériennes inhomogènes d'ordre 1, nous pouvons nous passer de la théorie de Galois pour établir des résultats d'indépendance algébrique fonctionnelle. En effet, en exploitant la structure particulière de ce type d'équations mahlériennes, L. Denis obtient de tels résultats sur des exemples intéressants de fonctions mahlériennes [50, 49]. Comme mentionné plus haut, l'auteur en déduit l'indépendance algébrique de nombres remarquables comme des valeurs du logarithme de Carlitz en des nombres algébriques ou de la fonction Zêta de Carlitz en des entiers. En exploitant l'approche utilisée par L. Denis dans des cas particuliers, nous obtenons dans les **sections IV.1.2** et **IV.2** des résultats plus généraux sur la transcendance de solutions d'équations mahlériennes inhomogènes d'ordre 1 et sur l'indépendance algébrique de solutions d'équations mahlériennes homogènes d'ordre 1, sous certaines hypothèses. Un travail en cours consiste à mettre en avant des hypothèses peu restrictives garantissant l'indépendance algébrique de fonctions solutions de systèmes mahlériens inhomogènes d'ordre 1 plus génériques. La méthode employée repose sur un résultat général, dit de type Kolchin. Il s'agit du résultat suivant.

#### **Théorème I.6.2** (F.)

Soient  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  telles que pour tout  $j$ , il existe  $a_j(z) \in \mathbb{K}(z) \setminus \{0\}, b_j(z) \in \mathbb{K}(z)$  telles que

$$f_j(z) = a_j(z)f_j(z^q) + b_j(z). \quad (\text{I.64})$$

On suppose que les  $f_j(z)$  sont algébriquement dépendantes sur  $\mathbb{K}(z)$ , et non nulles. Alors, il existe  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$  non tous nuls et  $r(z) \in \overline{\mathbb{K}}(z) \setminus \{0\}$  telles que

$$\prod_{j=1}^n a_j(z)^{m_j} = \frac{r(z)}{r(z^q)}. \quad (\text{I.65})$$

Ce type de théorème existe dans le cadre de systèmes différentiels ou aux différences très généraux (voir par exemple [4]). Une version dans le cas des équations mahlériennes en caractéristique nulle a été établie par K. Kubota [76]. Nous démontrons le théorème I.6.2 dans la **section IV.2**, en généralisant l'approche de L. Denis sur des cas particuliers [50, 49].

## I.7 Résultat et travaux de cette thèse autour des mesures d'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes

Au-delà de l'étude qualitative de la transcendance et de l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes, émergent des questionnements d'ordre quantitatif. Par exemple, étant donné un nombre transcendant, il s'agit d'estimer à quel point la valeur d'un polynôme en ce nombre est éloignée de zéro. Pour tout  $P \in \overline{\mathbb{K}}[X_1, \dots, X_n]$ , on note  $\deg(P)$  son degré total en  $X_1, \dots, X_n$  et on définit la *hauteur* de  $P$ , notée  $H(P)$ , par le maximum des valeurs absolues de ses coefficients. Une mesure d'indépendance algébrique de nombres  $\xi_1, \dots, \xi_n \in C$  est une minoration du type

$$|P(\xi_1, \dots, \xi_n)| \geq \varphi(\deg(P), H(P)), \text{ où } \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\text{I.66})$$

qui soit valable pour tout polynôme  $P \in \overline{\mathbb{K}}[X_1, \dots, X_n]$  ne s'annulant pas en  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

Si l'on considère un seul nombre  $\xi \in C$ , on parle de mesure de transcendance. Lorsque  $\xi \in \mathbb{R}$ , on peut définir  $w_n(\xi)$  comme étant la borne supérieure des réels  $w$  tels qu'il existe une infinité de polynômes  $P$  à coefficients entiers et de degré au plus  $n$  tels que

$$0 < |P(\xi)| \leq H(P)^{-w}. \quad (\text{I.67})$$

Posons

$$w(\xi) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_n(\xi)}{n}.$$

En fonction du comportement de  $w(\xi)$ , K. Mahler établit en 1932 une classification selon les quatre catégories suivantes [90].

1.  $\xi$  est un A-nombre si  $w(\xi) = 0$
2.  $\xi$  est un S-nombre si  $0 < w(\xi) < +\infty$
3.  $\xi$  est un T-nombre si  $w(\xi) = +\infty$  et  $w_n(\xi) < +\infty$  pour tout  $n \geq 1$
4.  $\xi$  est un U-nombre s'il existe  $n \geq 1$  tel que  $w_n(\xi) = +\infty$ .

Il est intéressant de noter qu'en 1939, J. Koksma [72] réalise une classification parallèle des nombres réels  $\xi$ , dont il démontre qu'elle est équivalente à celle de K. Mahler. L'auteur définit les mêmes catégories que précédemment, avec  $w_n(\xi)$  remplacé par le nombre  $w_n^*(\xi)$  qui désigne la borne supérieure des exposants  $w$  tels que

$$0 < |\xi - \beta| \leq H(\beta)^{-w-1} \quad (\text{I.68})$$

possède une infinité de solutions algébriques  $\beta$ , de degré au plus  $n$ . Ici,  $H(\beta)$  désigne la hauteur du polynôme minimal de  $\beta$  sur  $\mathbb{Q}$ . Notons que bien que ces classifications soient équivalentes, il existe des nombres  $\xi$  pour lesquels  $w_n^*(\xi) \neq w_n(\xi)$  [21] et la comparaison de ces valeurs a notamment donné lieu à des travaux de Y. Bugeaud [33, 36, 35].

Nous savons que les A-nombres correspondent exactement aux nombres réels algébriques (voir par exemple [34]). De plus, K. Mahler a démontré que deux nombres algébriques d'une même catégorie sont algébriquement dépendants sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  (voir par exemple [34]). L'auteur a également établi que presque tous les nombres réels (au sens de la mesure de Lebesgue) sont des S-nombres, mais il est en pratique difficile de classer un nombre donné dans cette catégorie.

Grâce à la méthode de Mahler, Ku. Nishioka établit des mesures d'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes  $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$ , en caractéristique nulle [100]. Les mesures de transcendance de Ku. Nishioka permettent d'affirmer que les valeurs aux nombres algébriques non nuls réguliers  $\alpha$  de fonctions mahlériennes algébriquement indépendantes ne sont pas des  $U$ -nombres et que les valeurs en  $\alpha$  de telles fonctions dans le cadre d'équations mahlériennes d'ordre 1 inhomogène ne sont pas non plus des  $T$ -nombres. La stratégie de l'autrice est similaire à celle employée pour démontrer son théorème fondamental (théorème I.1.3). Elle repose sur la méthode de Mahler et la théorie de l'élimination de Y. Nesterenko. La différence cruciale réside en un meilleur contrôle des quantités liées aux polynômes de la construction mahlérienne. Cela est rendu possible par un résultat, dont le nom générique est *lemme de multiplicité*, établi par Ku. Nishioka dans [100]. Toutefois, celui-ci, et par conséquent, les mesures obtenues par l'autrice, ne sont valables que pour des fonctions mahlériennes algébriquement indépendantes. Or, les vecteurs solutions d'un système mahlérien ne sont pas en général composés de coordonnées algébriquement indépendantes. Les fonctions automatiques sont notamment concernées par ce phénomène. E. Zorin travaille actuellement sur l'établissement de mesures d'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes en caractéristique nulle, pour des fonctions quelconques. Les mesures de transcendance de l'auteur permettraient également d'exclure les  $U$ -nombres des valeurs de fonctions mahlériennes en caractéristique nulle. L'approche de E. Zorin remplace la méthode de Mahler par un procédé général dû à P. Philippon [108], et la théorie de l'élimination, par un critère général d'indépendance algébrique quantitatif du type de celui de C. Jadot [71]. L'auteur établit par ailleurs un lemme de multiplicité très général, et notamment valide pour des fonctions mahlériennes quelconques et en toute caractéristique.

Dans le cadre de la caractéristique non nulle, des mesures de transcendance ont été obtenues par P. Bundschuh [37] et B. de Mathan [92]. L'approche de L. Denis nous intéresse particulièrement puisqu'elle utilise la méthode de Mahler [52]. Notons que P-G. Becker est l'un des premiers à obtenir de telles mesures via la méthode de Mahler, mais exclusivement pour des fonctions mahlériennes  $f(z) \in \mathbb{F}_q\{z\}$ , à coefficients constants [24]. L. Denis établit des mesures de transcendance de valeurs de certaines fonctions mahlériennes, intéressantes du point de vue des applications, en des nombres de la forme  $T^{1/e}$ , où  $e$  est un entier naturel non nul. Une piste de recherche que nous suivons actuellement consiste en la généralisation de l'approche utilisée par L. Denis pour obtenir des mesures de transcendance de valeurs de fonctions mahlériennes solutions d'équations inhomogènes d'ordre 1 quelconques.

Nous nous intéressons également au développement d'une méthode générale d'obtention de mesures d'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes en caractéristique non nulle. Dans le **chapitre V**, nous proposons dans ce but une approche inspirée de celles de Ku. Nishioka et E. Zorin. Celle-ci se fonde sur la méthode de Mahler et nécessite un lemme de multiplicité et un critère d'indépendance algébrique quantitatif. Nous établissons dans la **section V.1** un lemme de multiplicité valable en toute caractéristique et pour des fonctions mahlériennes quelconques. Notre démonstration se fonde sur la méthode de Mahler et un critère d'indépendance algébrique de P. Philippon [107] (théorème II.1.2). Il s'agit du résultat suivant.

**Théorème I.7.1 (F.)**

Soit  $\mathbb{K}$  un corps de nombres ou de fonctions de caractéristique non nulle. Soient  $d \geq 2$  un entier naturel et  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  des fonctions  $d$ -mahlériennes vérifiant le système (I.14).

Notons

$$l' = \text{degtr}_{\overline{\mathbb{K}(z)}}\{f_1(z), \dots, f_n(z)\}.$$

Soient  $M \geq N \geq 1$  deux entiers. Alors il existe une constante réelle  $c$  strictement positive telle que pour tout polynôme non nul  $Q \in \mathbb{K}[z, X_1, \dots, X_n]$  tel que :

1.  $\text{deg}_X(Q) \leq N$
2.  $\text{deg}_z(Q) \leq M$
3.  $Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) \neq 0$ .

*on ait*

$$\text{ord}_{z=0}Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) \leq cMN^{l'}.$$

Le lemme de multiplicité général établi par E. Zorin [140] que nous évoquions plus haut fournit un énoncé similaire au théorème I.7.1 lorsque nous l'appliquons à notre cadre. Toutefois, notre démonstration est différente de celle de l'auteur, qui n'utilise pas la méthode de Mahler.

En ce qui concerne le critère d'indépendance algébrique quantitatif du type du critère de C. Jadot [71], nous n'avons pas connaissance de son analogue en caractéristique non nulle. Nous supposons donc l'existence de celui-ci sous la forme de l'hypothèse V.2.1 dans la **section V.2**. Nous précisons que nous ne nous attendons pas à ce que l'hypothèse V.2.1 soit satisfaite en l'état. Il y aurait lieu a minima de pondérer son énoncé par des constantes appropriées, dont nous ne nous encombrons pas ici. Dans la **section V.3**, nous déduisons du théorème I.7.1 et de l'hypothèse V.2.1 des mesures d'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes définies sur des corps de fonctions de caractéristique non nulle.



## Chapitre II

# Relations algébriques entre valeurs de fonctions mahlériennes

Ce chapitre s'inscrit dans la problématique générale d'établir l'équivalence entre l'indépendance algébrique de fonctions analytiques et celle de leurs valeurs en des points algébriques. Nous pouvons constater que toute relation algébrique entre fonctions se spécialise en une relation algébrique entre leurs valeurs au point considéré. Ainsi, l'indépendance algébrique des valeurs entraîne celle des fonctions elles-mêmes. Cependant, comme mentionné dans le préambule de cette thèse, la réciproque est fautive en général : il existe des fonctions transcendentes prenant des valeurs algébriques en tout point algébrique (voir [127, 91]). Toutefois, en demandant aux fonctions de vérifier certaines équations fonctionnelles et en sélectionnant des nombres algébriques adaptés, il existe au moins trois cadres dans lesquels sa véracité a été établie : le théorème de Siegel-Shidlovskii [123] pour des solutions de systèmes différentiels, le théorème de Ku. Nishioka [99] pour des solutions de systèmes mahlériens, et le théorème de G. Anderson, W. D. Brownawell et M. Papanikolas [18] (en caractéristique non nulle) pour des solutions de systèmes aux  $\tau$ -différences. L'objectif principal de ce chapitre est d'établir l'analogue du théorème de Ku. Nishioka dans le cadre des corps de fonctions de caractéristique non nulle. Au delà de l'intérêt général que cela comporte du point de vue de la théorie de la transcendance et de l'indépendance algébrique, nous sommes également motivée par l'observation fructueuse suivante, due à L. Denis. Certains nombres remarquables liés aux périodes de modules de Drinfeld se déforment en valeurs de fonctions mahlériennes en des points algébriques. Les fonctions mahlériennes jouent donc un rôle essentiel dans ce contexte.

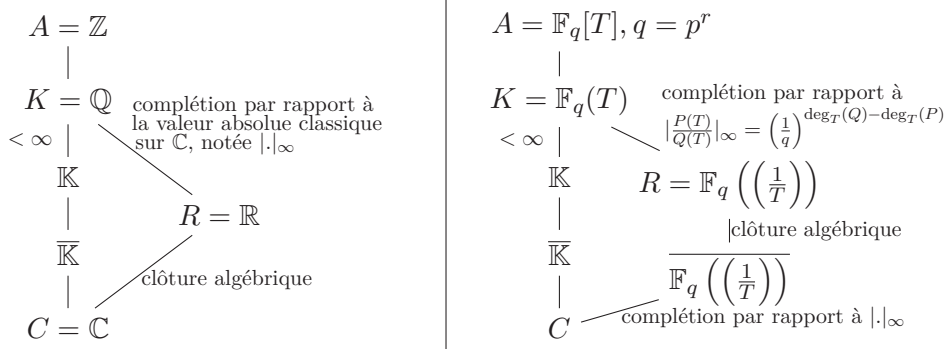
Ce qui suit provient de l'article [56] et s'organise de la façon suivante. Dans la **section II.1.1** nous décrivons les contextes des corps de nombres et des corps de fonctions en caractéristique non nulle dans lesquels nous nous placerons. Dans la **section II.1.2** nous énonçons le critère d'indépendance algébrique de P. Philippon et dans la **section II.1.3** nous démontrons le théorème II.1.1. Enfin, dans la **section II.1.4** nous établissons et illustrons par un exemple l'analogue du théorème I.1.2 de K. Mahler [87] dans le cadre des corps de fonctions en caractéristique non nulle.

## II.1 Un analogue d'un théorème de Ku. Nishioka

### II.1.1 Contexte

Nous commençons par rappeler le contexte dans lequel nous nous placerons, en soulignant la forte analogie existant entre corps de nombres et corps de fonctions en caractéristique non nulle. Nous reproduisons pour cela le schéma du préambule de cette thèse.





Étant donné un entier naturel  $d \geq 2$ , rappelons qu'une fonction  $f(z) \in \mathbb{K}[[z]]$  est dite  $d$ -mahlérienne sur  $\mathbb{K}(z)$  s'il existe des polynômes  $P_0(z), \dots, P_m(z) \in \mathbb{K}[z]$ ,  $P_m(z) \not\equiv 0$ , tels que

$$P_0(z)f(z) + P_1(z)f(z^d) + \dots + P_m(z)f(z^{d^m}) = 0.$$

L'entier  $m$  minimal vérifiant l'équation précédente est appelé l'ordre de  $f(z)$ . On dit que le vecteur colonne composé des fonctions  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbb{K}[[z]]$  vérifie un système  $d$ -mahlérien s'il existe une matrice  $A(z) \in GL_n(\mathbb{K}(z))$  telle que

$$\begin{pmatrix} f_1(z^d) \\ \vdots \\ f_n(z^d) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1})$$

Toute fonction  $d$ -mahlérienne s'insère dans un système  $d$ -mahlérien à l'aide d'une matrice compagnon et réciproquement, toute fonction coordonnée d'un vecteur vérifiant un système  $d$ -mahlérien est  $d$ -mahlérienne.

### Définition II.1.1

On dira qu'un nombre  $\alpha \in C$  est régulier pour le système (II.1) si pour tout entier naturel  $k$ , le nombre  $\alpha^{d^k}$  n'est pas un pôle de la matrice  $A(z)$  ni de la matrice  $A^{-1}(z)$ .

### Remarque II.1.1

Si l'on suppose les fonctions  $\{f_i(z)\}_{1 \leq i \leq n}$  analytiques au voisinage de l'origine et  $0 < |\alpha|_\infty < 1$ , alors, l'hypothèse selon laquelle pour tout  $k \in \mathbb{N}$  le nombre  $\alpha^{d^k}$  n'est pas un pôle de  $A^{-1}(z)$  garantit que les fonctions  $\{f_i(z)\}_{1 \leq i \leq n}$  sont bien définies en  $\alpha^{d^k}$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Notre résultat principal est le suivant. Il est valable pour tout choix de l'un ou l'autre des deux contextes du schéma précédent.

### Théorème II.1.1

Soit  $\mathbb{K}$  une extension finie de  $K$ . Soient  $n \geq 1$ ,  $d \geq 2$  deux entiers et  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  des fonctions analytiques au voisinage de l'origine vérifiant le système  $d$ -mahlérien (II.1).

Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $0 < |\alpha|_\infty < 1$ , un nombre régulier pour le système (II.1).

Alors, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\deg_{tr_{\mathbb{K}}}\{f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)\} = \deg_{tr_{\mathbb{K}(z)}}\{f_1(z), \dots, f_n(z)\}. \quad (\text{II.2})$$

Le cas où  $\mathbb{K}$  est un corps de nombres est dû à Ku. Nishioka. Il s'agit de l'analogie du théorème de Siegel-Shidlovskii pour les fonctions mahlériennes, que K. Kubota [75, 76] et J. Loxton et A. van

der Poorten [78, 79, 80] entre autres cherchaient à obtenir depuis les années 1970. La démonstration établie par Ku. Nishioka [99] (voir aussi [100]) s'appuie sur la méthode de Mahler et la théorie de l'élimination mise en place par Y. Nesterenko (voir par exemple [95]) à la fin des années 1970.

Nous reprenons l'approche introduite par L. Denis [49] en 1999 dans sa preuve d'un cas particulier du théorème II.1.1. Celle-ci se fonde sur un critère d'indépendance algébrique établi par P. Philippon [107] (voir aussi [106]). Cette méthode de démonstration a l'avantage d'être valable aussi bien pour les corps de nombres que pour les corps de fonctions en caractéristique non nulle, et permet notamment de retrouver le théorème de Ku. Nishioka. Notons que ce point de vue ne peut être considéré comme étant radicalement différent de celui adopté par Ku. Nishioka puisque la démonstration du critère d'indépendance algébrique de P. Philippon contient les outils développés par Y. Nesterenko sur lesquels reposent la démonstration de Ku. Nishioka. Toutefois, sa puissance réside en la validité du critère d'indépendance algébrique de P. Philippon dans un cadre très général qui confère à la méthode de Mahler, et donc à notre démonstration, son indépendance vis-à-vis de la caractéristique.

Nous introduisons dans la suite des notations communes au cadre des corps de nombres et des corps de fonctions en caractéristique non nulle, fondées sur les analogies en présence, et dont le sens dépendra du contexte choisi.

### Corps de nombres

On note  $A = \mathbb{Z}$  l'anneau des entiers relatifs,  $K = \mathbb{Q}$  le corps des fractions de  $A$ . On note  $R = \mathbb{R}$  le complété de  $K$  pour la valeur absolue usuelle  $|\cdot|_\infty$ . On note  $\overline{K} = \overline{\mathbb{Q}}$  et  $C = \mathbb{C}$  les clôtures algébriques respectives de  $K$  et  $R$ . Le corps  $C$  est complet pour  $|\cdot|_\infty$ . La notation  $\mathbb{K}$  désignera une extension algébrique finie de  $K$ .

### Corps de fonctions en caractéristique $p > 0$

On fixe un nombre premier  $p$  et  $q = p^r$  et on note  $A = \mathbb{F}_q[T]$  l'anneau des polynômes en la variable  $T$  et à coefficients dans le corps fini  $\mathbb{F}_q$  de caractéristique  $p$ ,  $K = \mathbb{F}_q(T)$  le corps des fractions de  $A$ ,  $R = \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{T}\right)\right)$  le complété de  $K$  pour la valeur absolue  $|\cdot|_\infty$  associée à la valuation  $(1/T)$ -adique  $v_T$  définie sur  $K$  de la façon suivante.

$$v_T : K \longrightarrow K \tag{II.3}$$

$$\frac{P(T)}{Q(T)} \longmapsto \deg_T(Q) - \deg_T(P), \tag{II.4}$$

où  $\deg_T(P)$  désignera dans toute la suite et pour toute caractéristique le degré du polynôme  $P$  en  $T$ . Puis :

$$|\cdot|_\infty : K \longrightarrow K \tag{II.5}$$

$$U \longmapsto q^{-v_T(U)}. \tag{II.6}$$

On note  $\overline{K}$  et  $\overline{R}$  les clôtures algébriques respectives de  $K$  et  $R$ . La valeur absolue  $|\cdot|_\infty$  se prolonge de façon unique sur  $\overline{R}$  et on note  $C$  le complété de  $\overline{R}$  par rapport à  $|\cdot|_\infty$ . Le corps  $C$  est algébriquement clos. On pose par convention :  $\deg(0) = -\infty$ . La notation  $\mathbb{K}$  désignera une extension algébrique finie de  $K$ .

### Extensions finies et formule du produit

Dans toute la suite, les notations suivantes,

$$A, K, \overline{K}, R, \overline{R}, |\cdot|_\infty, C, \mathbb{K},$$

introduites ci-dessus, auront des significations différentes selon que l'on considère des corps de nombres ou des corps de fonctions en caractéristique non nulle. Tout énoncé les contenant sera valable dans chacun de ces deux contextes. Si  $\mathbb{K}$  est une extension finie de  $K$ , on rappelle qu'une place de  $\mathbb{K}$  est une classe d'équivalence de valeurs absolues définies sur  $\mathbb{K}$  (que l'on associera à l'une de ses représentantes), où deux telles valeurs absolues sont dites équivalentes si elles définissent la même topologie sur  $\mathbb{K}$ . On rappelle également qu'une valeur absolue  $|\cdot|$  définie sur  $\mathbb{K}$  est dite ultramétrique (ou non-archimédienne) si elle vérifie pour tous  $x, y \in \mathbb{K}$  l'inégalité suivante.

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}.$$

Elle sera dite archimédienne dans le cas contraire. Une place associée à une valeur absolue ultramétrique sera appelée finie. Elle sera dénommée infinie dans le cas d'une valeur absolue archimédienne. On notera  $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$  l'ensemble des places de  $\mathbb{K}$  et  $\mathcal{M}_{\mathbb{K},\infty}$  l'ensemble des places infinies de  $\mathbb{K}$ . On supprimera le symbole  $\mathbb{K}$  des deux précédentes notations s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps concerné. Pour une place  $w$  de  $\mathbb{K}$  étendant une place  $v$  de  $K$ , on note  $\mathbb{K}_w$  et  $K_v$  les complétés respectifs de  $\mathbb{K}$  et  $K$  par rapport à  $w$  et  $v$  et on pose  $d_w = [\mathbb{K}_w : K_v]$ . La notation  $|\cdot|$  désignera dans toute la suite la valeur absolue  $|\cdot|_{\infty}$  distinguée précédemment.

Pour tout  $x \in \mathbb{K}^*$ , la formule suivante, dite formule du produit, est vérifiée :

$$\prod_{w \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}} |x|_w^{d_w} = 1, \quad (\text{II.7})$$

avec  $|x|_w = 1$  pour toute place  $w$  de  $\mathbb{K}$  à l'exception d'un nombre fini d'entre elles.

**Définition II.1.2** 1. Soit  $\mathbb{K}$  une extension finie de  $K$  et soit  $a \in \mathbb{K}$ . On définit la hauteur logarithmique absolue de Weil de  $a$  par :

$$h(a) = \frac{1}{[\mathbb{K} : K]} \sum_{w \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}} d_w \log(\max\{1, |a|_w\}).$$

2. Soit  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ . On définit la hauteur logarithmique absolue de Weil de  $(a_1, \dots, a_n)$  par

$$h(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{[\mathbb{K} : K]} \sum_{w \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}} d_w \log(\max\{1, |a_1|_w, \dots, |a_n|_w\}).$$

3. Soit  $P = \sum_{\alpha} a_{\alpha} X_0^{\alpha_0}, \dots, X_n^{\alpha_n} \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ . On définit sa hauteur logarithmique absolue de Weil par :

$$h(P) = h((a_{\alpha})_{\alpha}).$$

### Remarque II.1.2

Par construction, les quantités  $h(a)$  et  $h(P)$  ne dépendent pas de l'extension finie de  $K$  contenant  $a$  et les coefficients de  $P$  choisie.

Nous rappelons les égalités et inégalités fondamentales suivantes (voir par exemple [105]).

**Proposition II.1.1** 1. Soit  $\mathbb{K}$  une extension finie de  $K$  et soient  $a, b \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{Z}$  et  $P \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ . On a

$$h(a + b) \leq h(a) + h(b) + \log(2),$$

lorsque  $\mathbb{K}$  est un corps de nombres,

$$h(a + b) \leq h(a) + h(b),$$

lorsque  $\mathbb{K}$  est un corps de fonctions, et dans les deux cas,

$$h(ab) \leq h(a) + h(b).$$

2.

$$\text{Si } a \neq 0, \text{ alors } h(a^n) = |n|h(a).$$

3. Inégalité de Liouville :

$$\text{Si } a \neq 0, \text{ alors } \log|a| \geq -[\mathbb{K} : K]h(a).$$

4.

$$\text{On a } h(P) \leq \sum_{\alpha} h(a_{\alpha}),$$

où la somme porte sur l'ensemble des coefficients de  $P$ .

## II.1.2 Critère d'indépendance algébrique de P. Philippon

Le théorème II.1.1 repose sur le critère d'indépendance algébrique suivant (voir [107] et [49]).

**Théorème II.1.2** (P. Philippon)

Soient  $\omega = (1, \omega_1, \dots, \omega_n) \in C^{n+1}$  et  $s \in \{0, \dots, n\}$ . On suppose que pour toute constante  $c_1 > 0$ , il existe  $\delta(t), \sigma(t), \epsilon(t), \rho(t), t \in \mathbb{N}$  quatre suites croissantes à valeurs réelles supérieures ou égales à 1, vérifiant les conditions suivantes :

1.  $\delta(t) \leq \sigma(t)$
2.  $\epsilon(t) \leq \rho(t+1)$
3.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\delta(t) + \sigma(t)) = +\infty$
4.  $\left( \frac{\epsilon(t)}{(\delta(t) + \sigma(t))\delta(t)^s} \right)_t$  est une suite croissante.
- 5.

$$\frac{\epsilon(t)^{s+1}}{\delta(t)^{s-1}[\epsilon(t+1)^s + \rho(t+1)^s]} \geq c_1(\delta(t) + \sigma(t)) \quad (\text{II.8})$$

On suppose de plus que pour tout entier naturel  $t$ , il existe un polynôme homogène  $P_t \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  satisfaisant aux hypothèses suivantes :

$$6. \quad \deg(P_t) \leq \delta(t), h(P_t) \leq \sigma(t) \quad (\text{II.9})$$

$$7. \quad -\rho(t) \leq \log|P_t(\omega)| \leq -\epsilon(t) \quad (\text{II.10})$$

Alors, on a :

$$\text{degtr}_{\mathbb{K}}\{\omega_1, \dots, \omega_n\} \geq s.$$

On en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire II.1.1**

Soient  $\omega = (1, \omega_1, \dots, \omega_n) \in C^{n+1}$ ,  $s \in \{0, \dots, n\}$ , et  $(n(N))_{N \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres entiers pour laquelle il existe une constante  $c_2$  indépendante de  $N$  telle que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  :

$$n(N) \geq c_2 N^{s+1}. \quad (\text{II.11})$$

Supposons que pour tous  $N, k \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme homogène  $P_{N,k} \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  tel que :

$$\deg(P_{N,k}) \leq c_3 N, h(P_{N,k}) \leq c_4 d^k N, \quad (\text{II.12})$$

$$-c_5 d^k n(N) \leq \log|P_{N,k}(\omega)| \leq -c_6 d^k n(N), \quad (\text{II.13})$$

où les  $c_i$  sont des constantes strictement positives indépendantes de  $N$  et de  $k$ .

Alors :

$$\text{degtr}_{\mathbb{K}}\{\omega_1, \dots, \omega_n\} \geq s.$$

*Démonstration.* On se place sous les hypothèses et notations du corollaire II.1.1. On se donne une constante  $c_1 > 0$ . On fixe par ailleurs un entier  $N \in \mathbb{N}$  que l'on suppose assez grand en un sens précisé dans la suite. On pose  $t = k$ ,  $\delta(k) = c_3 N$ ,  $\sigma(k) = c_4 d^k N$ ,  $\epsilon(k) = c_6 d^k n(N)$ ,  $\rho(k) = c_5 d^k n(N)$ . Nous allons montrer que les suites  $\delta(k)$ ,  $\sigma(k)$ ,  $\epsilon(k)$ ,  $\rho(k)$  et les polynômes de l'ensemble  $\{P_{N,k}\}_k$  satisfont aux conditions du théorème II.1.2.

Les conditions 6 et 7 sont vérifiées. On note qu'alors  $c_5 \geq c_6$ , ce qui implique la condition 2. Les conditions 1 et 3 sont également satisfaites. Il reste à montrer que les conditions 4 et 5 sont remplies.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{\epsilon(k)}{(\delta(k) + \sigma(k))\delta(k)^s} = \frac{c_6 d^k n(N)}{(c_3 N + c_4 d^k N)c_3^s N^s}.$$

Or, on vérifie que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$f(x) = \frac{c_6 d^x n(N)}{(c_3 N + c_4 d^x N)c_3^s N^s}$$

est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Donc la condition (4) est vérifiée.

Enfin, un calcul donne pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{\epsilon(k)^{s+1}}{\delta(k)^{s-1}[\epsilon(k+1)^s + \rho(k+1)^s]} = c_7 \frac{d^k n(N)}{N^{s-1}} \tag{II.14}$$

$$\geq c_8 d^k N^2, \text{ d'après (II.11),} \tag{II.15}$$

où  $c_7$  et  $c_8$  désignent des constantes strictement positives indépendantes de  $N$  et de  $k$ . Puisque  $(\delta(k) + \sigma(k)) = o_{N \rightarrow +\infty}(d^k N^2)$  uniformément en  $k$ , si l'on a choisi  $N$  assez grand, la condition 5 est satisfaite. On conclut en appliquant le théorème II.1.2.  $\square$

### II.1.3 Démonstration du théorème II.1.1

Dans cette section nous démontrons le théorème II.1.1 à l'aide du corollaire II.1.1. Nous reprenons les notations de ce théorème. Comme  $\alpha$  est algébrique sur  $\mathbb{K}$ , quitte à remplacer  $\mathbb{K}$  par  $\mathbb{K}(\alpha)$ , on peut supposer que  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Notons  $l = \text{degr}_{\mathbb{K}}\{f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)\}$  et  $l' = \text{degr}_{\mathbb{K}(z)}\{f_1(z), \dots, f_n(z)\}$ . Remarquons que toute relation algébrique non triviale à coefficients dans  $\mathbb{K}(z)$  entre les fonctions  $f_i(z)$  peut se ramener à une relation algébrique non triviale entre ces fonctions, à coefficients dans  $\mathbb{K}[z]$  et premiers entre eux dans leur ensemble. Il en résulte que l'évaluation en  $z = \alpha$  d'une relation algébrique non triviale à coefficients dans  $\mathbb{K}(z)$  entre les fonctions  $f_i(z)$  fournit une relation algébrique non triviale à coefficients dans  $\mathbb{K}$  entre les nombres  $f_i(\alpha)$ . Par conséquent, on a :

$$l \leq l'.$$

Ainsi, démontrer le théorème II.1.1 revient à démontrer que l'on a  $l \geq l'$ . Si  $l' = 0$ , cela est clair. Par conséquent, il suffit de prouver que l'on a  $l \geq l'$  lorsque  $l' \geq 1$ . On suppose donc que  $l' \geq 1$ .

*Démonstration du théorème II.1.1.* On notera dans toute la suite  $\omega_0 = 1$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\omega_i = f_i(\alpha)$ . On rappelle que l'on suppose que  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $l' \geq 1$ .

D'après le corollaire II.1.1, il suffit de construire, pour tous  $N, k \in \mathbb{N}$ , un polynôme  $P_{N,k}(X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  tel que son degré, sa hauteur et la petitesse de son évaluation en  $X_i = \omega_i$  vérifient les inégalités (II.12) et (II.13), avec pour tout  $N \in \mathbb{N}$  :

$$n(N) \geq c_1 N^{l'+1}.$$

Afin de construire, à  $N$  fixé, un polynôme  $P_{N,k}(X_0, \dots, X_n) = P_k(X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  petit en  $X_i = \omega_i$  (au sens de (II.13)), on commencera par construire un polynôme  $R_0(z, X_0, \dots, X_n) \in$

$\mathbb{K}[z, X_0, \dots, X_n]$  prenant une petite valeur en  $z = \alpha$ ,  $X_i = \omega_i$ . Pour ce faire, on cherchera  $R_0(z, X_0, \dots, X_n)$  tel que la fonction de  $z : R_0(z, 1, f_1(z), \dots, f_n(z))$  prenne une petite valeur en  $z = 0$ . Ceci car en itérant  $k$  fois le système (II.1), pour un nombre  $k$  assez grand, on obtiendra, dans l'idée, un polynôme  $R_k(z, X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[z, X_0, \dots, X_n]$  tel que :

$$R_k(z, 1, f_1(z), \dots, f_n(z)) = R_0(z^{d^k}, 1, f_1(z^{d^k}), \dots, f_n(z^{d^k})),$$

dont l'évaluation en  $z = \alpha$ ,  $X_i = \omega_i$  sera de fait petite. On vérifiera alors que le polynôme  $P_k(X_0, \dots, X_n)$  défini par :

$$P_k(X_0, \dots, X_n) = R_k(\alpha, X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$$

prend une petite valeur en  $X_i = \omega_i$  et satisfait aux hypothèses du corollaire II.1.1.

1. Construction de  $R_0(z, X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[z, X_0, \dots, X_n]$ .

Soit  $N > l'!$  un entier naturel fixé jusqu'à la fin de cette preuve. Dans la suite de cette démonstration, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , le terme  $c_j$  désignera une constante strictement positive ne dépendant que de  $\mathbb{K}$ , des  $f_i(z)$  et de  $\alpha$  et  $c_j(N)$  désignera une constante strictement positive ne dépendant que de  $\mathbb{K}$ , des  $f_i(z)$ , de  $\alpha$  et de  $N$ . Nous noterons par ailleurs  $[\cdot]$  la fonction partie entière définie sur l'ensemble des réels.

Cherchons  $R_0(z, X_0, \dots, X_n)$  tel que la fonction de  $z : R_0(z, 1, f_1(z), \dots, f_n(z))$  soit de grand ordre en  $z = 0$ , ce qui garantira sa petitesse recherchée en  $z = 0$ . Par définition et quitte à renommer, on peut supposer que les fonctions  $f_1(z), \dots, f_{l'}(z)$  sont algébriquement indépendantes sur  $\mathbb{K}(z)$ . Il existe alors un polynôme non nul  $R(z, X_1, \dots, X_{l'}) \in \mathbb{K}[z, X_1, \dots, X_{l'}]$  vérifiant les conditions suivantes.

- (a)  $\deg_z(R) \leq N$
- (b)  $\deg_X(R) \leq N$
- (c)

$$n(N) := \text{ord}_{z=0} R(z, f_1(z), \dots, f_{l'}(z)) \geq \frac{N^{l'+1}}{l'!} := c_1 N^{l'+1} \quad (\text{II.16})$$

En effet, en regardant  $R$  comme un polynôme en les  $X_i$  à coefficients des polynômes  $P(z)$  de  $\mathbb{K}[z]$ , on obtiendrait cela en résolvant un système de  $[\frac{N^{l'+1}}{l'!}] + 1$  équations en les  $(N+1) \binom{l'+N}{N}$  inconnues que sont les coefficients des polynômes  $P(z)$ , équations à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Puisque :

$$\begin{aligned} (N+1) \binom{l'+N}{N} &\geq \frac{(N+1)^{l'+1}}{l'!} \\ &= \frac{N^{l'+1}}{l'!} + \frac{\sum_{j=0}^{l'} \binom{l'+1}{j} N^j}{l'!} \\ &> [\frac{N^{l'+1}}{l'!}] + 1, \text{ car } N > l'! \geq 1, \end{aligned}$$

il en existe bien une solution non triviale à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

Notons :

$$E_N(z) = R(z, f_1(z), \dots, f_{l'}(z)) = \sum_{j=n(N)}^{+\infty} a_j(N) z^j.$$

Comme les fonctions  $f_1(z), \dots, f_{l'}(z)$  sont algébriquement indépendantes,  $E_N(z) \not\equiv 0$ .

2. Construction de  $R_k(z, X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[z, X_0, \dots, X_n]$ .

Soit  $R_0(z, X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[z, X_0, \dots, X_n]$  le polynôme homogène de degré  $N$  en  $X_0, \dots, X_n$  vérifiant

$$R_0(z, 1, X_1, \dots, X_n) = R(z, X_1, \dots, X_n). \quad (\text{II.17})$$

On va construire  $R_k$  par récurrence sur  $k$ , en itérant l'application  $: z \mapsto z^d$ . En utilisant le système (II.1) vérifié par  $\bar{f}(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z))^t$ , et en notant  $A_i(z)$  la  $i$ -ème ligne de la matrice  $A(z)$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel sur  $(C\{z\})^n$ , on peut écrire :

$$R_0(z^d, 1, f_1(z^d), \dots, f_n(z^d)) = R_0(z^d, 1, \langle A_1(z), \bar{f}(z) \rangle, \dots, \langle A_n(z), \bar{f}(z) \rangle).$$

Comme les coefficients des lignes  $A_i(z)$  sont des fractions rationnelles et que l'on veut manipuler des polynômes, on considère  $a(z)$  un polynôme de  $\mathbb{K}[z]$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a(z)A_i(z) \in \mathbb{K}[z]^n$  et dont, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha^{dk}$  n'est pas un zéro (ce qui est possible puisque pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha^{dk}$  n'est pas un pôle de  $A(z)$ ). Notons  $M(z) = a(z)A(z)$  et  $M_i(z)$  la  $i$ -ème ligne de la matrice  $M(z)$ .

Cela donne :

$$\begin{aligned} R_0(z^d, a(z), a(z)f_1(z^d), \dots, a(z)f_n(z^d)) \\ = R_0(z^d, a(z), \langle M_1(z), \bar{f}(z) \rangle, \dots, \langle M_n(z), \bar{f}(z) \rangle). \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

On définit alors pour tout  $k \geq 1$  :

$$R_k(z, X_0, X_1, \dots, X_n) = R_{k-1}(z^d, a(z)X_0, \langle M_1(z), \bar{X} \rangle, \dots, \langle M_n(z), \bar{X} \rangle). \quad (\text{II.19})$$

où

$$\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)^t.$$

On remarque que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , le polynôme  $R_k$  est homogène de degré  $N$  en  $X_0, \dots, X_n$ . Donc en particulier :

$$\deg_X(R_k) = N, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

De plus, on obtient par récurrence sur  $k$  que

$$R_k(z, 1, f_1(z), \dots, f_n(z)) = \left( \prod_{j=0}^{k-1} a(z^{d^j}) \right)^N E_N(z^{d^k}), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (\text{II.20})$$

Par ailleurs, un calcul rapide montre que pour tout  $k$  assez grand par rapport à  $N$ , disons  $k \geq c_0(N)$ , on a :

$$E_N(\alpha^{d^k}) \neq 0, \quad (\text{II.21})$$

et

$$-c_7 d^k n(N) \leq \log |E_N(\alpha^{d^k})| \leq -c_8 d^k n(N). \quad (\text{II.22})$$

L'assertion (II.21) et le fait que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha^{dk}$  n'est pas un zéro de  $a(z)$  impliquent que :

$$R_k(\alpha, \omega_0, \dots, \omega_n) \neq 0, \quad \forall k \geq c_0(N). \quad (\text{II.23})$$

Puis, en posant :

$$a(z) = z^\nu b(z), \quad \text{avec } \nu \in \mathbb{N}, \quad b(0) \neq 0,$$

on obtient à l'aide de (II.20) :

$$\log|R_k(\alpha, \omega_0, \dots, \omega_n)| = \nu \log|\alpha| N \sum_{j=0}^{k-1} d^j + N \sum_{j=0}^{k-1} \log|b(\alpha^{d^j})| + \log|E_N(\alpha^{d^k})|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Comme  $b(z)$  est uniformément borné sur tout compact et que  $b(0) \neq 0$ , on a pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $j \in \{0, \dots, k-1\}$  :

$$-c_9 \leq \log|b(\alpha^{d^j})| \leq c_{10}. \quad (\text{II.24})$$

En constatant que :

$$\sum_{j=0}^{k-1} d^j = \frac{d^k - 1}{d - 1} \leq d^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (\text{II.25})$$

et d'après (II.22) et (II.24), il vient, pour tout  $k \geq c_0(N)$  :

$$-c_{11}d^k N - c_9 k N - c_7 d^k n(N) \leq \log|R_k(\alpha, \omega_0, \dots, \omega_n)| \leq c_{10} k N - c_8 d^k n(N). \quad (\text{II.26})$$

En remarquant que :

$$kN = o_{k \rightarrow +\infty}(d^k n(N)),$$

que d'après (II.16) :

$$N \leq \frac{1}{c_1} n(N),$$

et puisque les constantes impliquées dans (II.26) sont strictement positives, on obtient, quitte à augmenter  $c_0(N)$ , que pour tout  $k \geq c_0(N)$  :

$$-c_{12}d^k n(N) \leq \log|R_k(\alpha, \omega_0, \dots, \omega_n)| \leq -c_{13}d^k n(N). \quad (\text{II.27})$$

Il nous reste à contrôler la hauteur de  $R_k$ . Pour ce faire, nous avons besoin d'étudier le degré en  $z$  de  $R_k$ .

Notons  $c_{14}$  le maximum des degrés du polynôme  $a(z)$  et des polynômes de la matrice  $M(z)$ . Comme  $R_{k-1}(z, X_0, \dots, X_n)$  est homogène de degré  $N$  en  $X_0, \dots, X_n$ , on obtient d'après (II.19) :

$$\deg_z(R_k) \leq c_{14}N + d \times \deg_z(R_{k-1}), \quad \forall k \geq 1.$$

D'où par récurrence sur  $k$ ,

$$\deg_z(R_k) \leq c_{14}N \times \sum_{j=0}^{k-1} d^j + d^k \deg_z(R_0), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'après (II.25) et comme  $\deg_z(R_0) \leq N$ , il vient :

$$\deg_z(R_k) \leq c_{15}d^k N, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (\text{II.28})$$

On a par ailleurs besoin du lemme suivant.

**Lemme II.1.1**

Quitte à augmenter  $c_0(N)$ , on peut supposer que pour tout  $k \geq c_0(N)$  :

$$h(R_k) \leq c_{22}k^2. \quad (\text{II.29})$$



Démonstration du lemme II.1.1. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , posons :

$$R_k(z, X_0, \dots, X_n) = \sum_{\underline{i}} a_{k,\underline{i}} z^{i_{n+1}} X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}, \quad a_{k,\underline{i}} \in \mathbb{K}.$$

Notons  $\mathcal{E} \subset \mathbb{K}$  l'ensemble des coefficients du polynôme  $a(z)$  et des polynômes de la matrice  $M(z)$ . On rappelle que l'on note  $c_{14}$  le maximum des degrés du polynôme  $a(z)$  et des polynômes de la matrice  $M(z)$ .

On a d'après (II.19) :

$$\sum_{\underline{i}} a_{k,\underline{i}} z^{i_{n+1}} X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} = \sum_{\underline{j}} a_{k-1,\underline{j}} z^{j_{n+1}} (a(z)X_0)^{j_0} (\langle M_1(z), \bar{X} \rangle)^{j_1} \dots (\langle M_n(z), \bar{X} \rangle)^{j_n}. \quad (\text{II.30})$$

On pose :

$$a(z) = \sum_{s=0}^{c_{14}} a_s z^s, \quad a_s \in \mathbb{K},$$

$$M_i(z) = \left( \sum_{l=0}^{c_{14}} m_{i,j,l} z^l \right)_{1 \leq j \leq n}, \quad m_{i,j,l} \in \mathbb{K}, i \in \{1, \dots, n\},$$

$$\begin{aligned} U_{k-1,\underline{j}}(z, X_0, \dots, X_n) &= a_{k-1,\underline{j}} z^{j_{n+1}} (a(z)X_0)^{j_0} (\langle M_1(z), \bar{X} \rangle)^{j_1} \dots (\langle M_n(z), \bar{X} \rangle)^{j_n} \\ &= a_{k-1,\underline{j}} z^{j_{n+1}} \left( \sum_{s=0}^{c_{14}} a_s z^s X_0 \right)^{j_0} \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^{c_{14}} m_{i,j,l} z^l X_j \right)^{j_i}. \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

En développant (II.31) terme à terme, on obtient une somme d'au plus

$$(c_{14} + 1)^{j_0} ((c_{14} + 1)n)^{j_1 + \dots + j_n} \leq c_{16}^N$$

monômes en les  $z, X_0, \dots, X_n$ .

Par ailleurs, d'après (II.28) et comme  $R_{k-1}(z, X_0, \dots, X_n)$  est homogène de degré  $N$  en  $X_0, \dots, X_n$ , le polynôme  $R_{k-1}(z, X_0, \dots, X_n)$  possède au plus

$$\binom{N+n}{n} (c_{15} d^{k-1} N + 1) \leq c_{17}(N) c_{18}^k$$

monômes en les  $z, X_0, \dots, X_n$ . Donc le développement terme à terme du membre de droite de (II.30) produit une somme d'au plus

$$c_{16}^N \times c_{17}(N) c_{18}^k \leq c_{19}(N) c_{18}^k$$

monômes en les  $z, X_0, \dots, X_n$ .

Donc chaque élément  $a_{k,\underline{i}} z^{i_{n+1}} X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$  du membre de gauche de (II.30) est la somme d'au plus  $c_{19}(N) c_{18}^k$  monômes du type

$$u z^{i_{n+1}} X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}, \quad u \in \mathbb{K},$$

fournis par le développement terme à terme du membre de droite de (II.30). De plus, chaque coefficient  $u$  de tels monômes est un produit de  $N$  coefficients de  $\mathcal{E}$  par un coefficient de  $R_{k-1}(z, X_0, \dots, X_n)$ .

Par conséquent, d'une part, pour toute place archimédienne  $w$  de  $\mathbb{K}$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \max_{\underline{i}} |a_{k,\underline{i}}|_w &\leq c_{19}(N) c_{18}^k (\max_{e \in \mathcal{E}} |e|_w)^N \times \max_{\underline{i}} |a_{k-1,\underline{i}}|_w \\ &\leq c_{19}(N) c_{18}^k (\max_{e \in \mathcal{E}} (1, |e|_w))^N \times \max_{\underline{i}} (1, |a_{k-1,\underline{i}}|_w). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \log(\max_{\underline{i}} (1, |a_{k,\underline{i}}|_w)) &\leq \log(c_{19}(N)) + k \log(c_{18}) + N \log(\max_{e \in \mathcal{E}} (1, |e|_w)) \\ &\quad + \log(\max_{\underline{i}} (1, |a_{k-1,\underline{i}}|_w)). \end{aligned} \tag{II.32}$$

D'autre part, pour toute place ultramétrique  $w$  de  $\mathbb{K}$ , on trouve plus simplement :

$$\begin{aligned} \max_{\underline{i}} |a_{k,\underline{i}}|_w &\leq (\max_{e \in \mathcal{E}} |e|_w)^N \times \max_{\underline{i}} |a_{k-1,\underline{i}}|_w \\ &\leq (\max_{e \in \mathcal{E}} (1, |e|_w))^N \times \max_{\underline{i}} (1, |a_{k-1,\underline{i}}|_w). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \log(\max_{\underline{i}} (1, |a_{k,\underline{i}}|_w)) &\leq N \log(\max_{e \in \mathcal{E}} (1, |e|_w)) \\ &\quad + \log(\max_{\underline{i}} (1, |a_{k-1,\underline{i}}|_w)). \end{aligned} \tag{II.33}$$

### Remarque II.1.3

Dans le contexte des corps de fonctions en caractéristique non nulle, toutes les places sont ultramétriques. Dans celui des corps de nombres en caractéristique nulle, les places archimédiennes correspondent aux plongements réels et aux paires de plongements complexes non réels de  $\mathbb{K}$ , de sorte que :

$$\frac{1}{[\mathbb{K} : K]} \sum_{\omega \in \mathcal{M}_\infty} d_\omega = 1,$$

où  $\mathcal{M}_\infty$  désigne l'ensemble des places infinies de  $\mathbb{K}$ .

Les lignes (II.32) et (II.33) donnent :

$$\begin{aligned} h(R_k) &\leq \frac{1}{[\mathbb{K} : K]} \sum_{\omega \in \mathcal{M}_\infty} d_\omega [\log(c_{19}(N)) + k \log(c_{18}) + N \log(\max_{e \in \mathcal{E}} (1, |e|_w)) \\ &\quad + \log(\max_{\underline{i}} (1, |a_{k-1,\underline{i}}|_w))] \\ &\quad + \frac{1}{[\mathbb{K} : K]} \sum_{\omega \notin \mathcal{M}_\infty} d_\omega [N \log(\max_{e \in \mathcal{E}} (1, |e|_w)) + \log(\max_{\underline{i}} (1, |a_{k-1,\underline{i}}|_w))] \\ &\leq \left( \frac{1}{[\mathbb{K} : K]} \sum_{\omega \in \mathcal{M}_\infty} d_\omega \right) [\log(c_{19}(N)) + k \log(c_{18})] + c_{20}N + h(R_{k-1}) \\ &\leq \log(c_{19}(N)) + k \log(c_{18}) + c_{20}N + h(R_{k-1}), \text{ d'après la remarque (II.1.3)} \\ &\leq c_{21}k + h(R_{k-1}), \text{ pour } k \text{ assez grand par rapport à } N. \end{aligned}$$

Puis par récurrence sur  $k$  on obtient, quitte à augmenter  $c_0(N)$ , pour tout  $k \geq c_0(N)$ ,

$$h(R_k) \leq c_{21}k^2 + h(R_0) \leq c_{22}k^2.$$

□

### 3. Élimination de la variable $z$

Posons pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$P_k(X_0, \dots, X_n) = R_k(\alpha, X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n], \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{II.34}$$

D'une part :

$$\deg(P_k) = \deg_X(R_k) = N, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme II.1.2**

Quitte à augmenter  $c_0(N)$ , on peut supposer que pour tout  $k \geq c_0(N)$  :

$$h(P_k) \leq c_{25}d^k N.$$

*Démonstration du lemme II.1.2.* Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , notons  $b_{k,j} \in \mathbb{K}$  les coefficients du polynôme  $P_k(X_0, \dots, X_n)$  et rappelons que l'on note  $a_{k,i} \in \mathbb{K}$  les coefficients des polynômes  $R_k(z, X_0, \dots, X_n)$ . D'après (II.34), on voit qu'un coefficient de  $P_k(X_0, \dots, X_n)$  est une somme de produits d'une puissance de  $\alpha$  par un coefficient de  $R_k$ . D'après (II.28), le nombre de termes de cette somme est majoré par

$$c_{15}d^k N + 1 \leq c_{23}d^k N.$$

Par conséquent, d'une part pour toute place archimédienne  $w$  de  $\mathbb{K}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \max_j |b_{k,j}|_w &\leq c_{23}d^k N \times \max_{0 \leq j \leq \deg_z(R_k)} |\alpha|_w^j \times \max_{\underline{i}} |a_{k,\underline{i}}|_w \\ &\leq c_{23}d^k N \times \max_{0 \leq j \leq \deg_z(R_k)} (1, |\alpha|_w^j) \\ &\quad \times \max_{\underline{i}} (1, |a_{k,\underline{i}}|_w) \\ &\leq c_{23}d^k N \times (\max(1, |\alpha|_w))^{\deg_z(R_k)} \max_{\underline{i}} (1, |a_{k,\underline{i}}|_w). \end{aligned}$$

Donc pour tout  $k$  assez grand par rapport à  $N$  :

$$\begin{aligned} \log(\max_j (1, |b_{k,j}|_w)) &\leq c_{24}k + \deg_z(R_k) \log(\max(1, |\alpha|_w)) \\ &\quad + \log(\max_{\underline{i}} (1, |a_{k,\underline{i}}|_w)). \end{aligned} \tag{II.35}$$

D'autre part, pour toute place ultramétrique  $w$  de  $\mathbb{K}$ , on trouve plus simplement :

$$\begin{aligned} \max_j |b_{k,j}|_w &\leq \max_{0 \leq j \leq \deg_z(R_k)} |\alpha|_w^j \times \max_{\underline{i}} |a_{k,\underline{i}}|_w \\ &\leq \max_{0 \leq j \leq \deg_z(R_k)} (1, |\alpha|_w^j) \times \max_{\underline{i}} (1, |a_{k,\underline{i}}|_w) \\ &\leq (\max(1, |\alpha|_w))^{\deg_z(R_k)} \max_{\underline{i}} (1, |a_{k,\underline{i}}|_w). \end{aligned}$$

Donc pour tout  $k$  assez grand par rapport à  $N$  :

$$\begin{aligned} \log(\max_j (1, |b_{k,j}|_w)) &\leq \deg_z(R_k) \log(\max(1, |\alpha|_w)) \\ &\quad + \log(\max_{\underline{i}} (1, |a_{k,\underline{i}}|_w)). \end{aligned} \tag{II.36}$$

Les lignes (II.35) et (II.36) fournissent pour tout  $k$  assez grand par rapport à  $N$  :

$$\begin{aligned} h(P_k) &\leq c_{24}k + c_{15}d^k N h(\alpha) + h(R_k), \text{ d'après (II.28) et la remarque II.1.3} \\ &\leq c_{24}k + c_{15}d^k N h(\alpha) + c_{22}k^2, \text{ d'après (II.29).} \end{aligned}$$

En constatant que :

$$k^2 = o_{k \rightarrow +\infty}(d^k N),$$

et quitte à augmenter  $c_0(N)$ , il vient pour tout  $k \geq c_0(N)$  :

$$h(P_k) \leq c_{25}d^k N.$$

□

Afin d'achever la démonstration du théorème II.1.1, on remarque que, d'après (II.27) et (II.34), on a pour tout  $k \geq c_0(N)$  :

$$-c_{12}d^k n(N) \leq \log|P_k(\omega_0, \dots, \omega_n)| \leq -c_{13}d^k n(N).$$

On conclut la démonstration du théorème II.1.1 en appliquant le corollaire II.1.1, avec  $s = l'$ .

### Remarque II.1.4

Cette démonstration contient les quatre étapes classiques des preuves d'indépendance algébrique, qui ont servi ici à établir une minoration du degré de transcendance des nombres  $\omega_1, \dots, \omega_n$  et que l'on peut décrire comme suit.

(i) Construction, pour chaque entier  $N$ , d'une fonction analytique de la variable  $z$ , dite fonction auxiliaire, ayant un grand ordre  $n(N)$  (minoré en fonction de  $N$ ) en  $z = 0$ .

(ii) Vérification du fait que cette fonction est non identiquement nulle.

Pour chaque entier naturel  $N$  fixé, (i) et (ii) permettent d'obtenir par itération (ici de l'application  $z \mapsto z^d$ ) des polynômes non nuls  $\{P_{N,k}(X_0, \dots, X_n)\}_k$  prenant de petites valeurs en  $X_i = \omega_i$ .

(iii) et (iv) Pour chaque  $N$  fixé, choix d'un polynôme  $P_N(X_0, \dots, X_n) = P_{N,k(N)}(X_0, \dots, X_n)$  parmi les  $\{P_{N,k}(X_0, \dots, X_n)\}_k$  et majoration et minoration du nombre  $|P_N(\omega_0, \dots, \omega_n)|$  à l'aide de méthodes analytiques. L'ordre  $n(N)$  apparaît naturellement dans la majoration et la minoration.

On applique ensuite un critère d'indépendance algébrique du type du théorème II.1.2 dans lequel on doit notamment vérifier la condition 5. La quantité  $n(N)$  apparaissant naturellement dans (iii) et (iv), cette condition s'incarne, dans l'idée, en posant  $t = N$  et  $\epsilon(t) = \rho(t) = n(t)$ . Or, il s'avère en général difficile d'étudier le comportement du quotient  $n(N)/n(N+1)$  en fonction de  $N$ . Il est alors nécessaire de faire appel à un type de résultat souvent délicat à démontrer, appelé *lemme de multiplicité*, qui fournit une majoration de  $n(N)$  en fonction de  $N$ . Croisée avec la minoration de  $n(N)$  considérée en (i), celle-ci permet de vérifier la condition 5 du théorème II.1.2. On retrouve par exemple ce schéma de démonstration dans [30].

Ici, pour chaque  $N$  fixé, on sait en fait majorer et minorer tous les nombres  $\{|P_{N,k}(\omega_0, \dots, \omega_n)|\}_k$ , et pas simplement l'un d'entre eux, en (iii) et (iv). Pour chaque  $N$  fixé, l'indice  $k$  est donc libre de varier. Cela nous permet de poser  $t = k$  et, dans l'idée,  $\epsilon(t) = \rho(t) = n(N)d^t$  et de rendre le quotient  $\epsilon(t)/\epsilon(t+1)$  facile à contrôler par rapport à  $t$ . Cela permet de vérifier directement la condition 5 du théorème II.1.2 sans avoir recours à un *lemme de multiplicité* qui compliquerait la démonstration. Cette particularité constitue un avantage notable de la méthode de Mahler.

### II.1.4 Analogie du théorème de K. Mahler pour les corps de fonctions en caractéristique non nulle

Dans cette section, nous nous intéressons à des fonctions  $f(z) \in \mathbb{K}[[z]]$  pour lesquelles il existe un entier  $d \geq 2$  et deux polynômes  $A(z, X), B(z, X) \in \mathbb{K}[z, X]$ ,  $B(z, X) \not\equiv 0$ , tels que :

$$f(z^d) = \frac{A(z, f(z))}{B(z, f(z))}. \quad (\text{II.37})$$

On fixe pour la suite les notations suivantes.

$$A(z, X) = \sum_{i=0}^m a_i(z)X^i, B(z, X) = \sum_{i=0}^m b_i(z)X^i,$$

où

$$a_i(z), b_i(z) \in \mathbb{K}[z], \forall 1 \leq i \leq m \text{ et } m = \max\{\deg_X(A), \deg_X(B)\}.$$

Enfin,  $\Delta(z) \in \mathbb{K}[z]$  désignera le résultant des polynômes  $A$  et  $B$  par rapport à la variable  $X$ .

Pour ce type d'équation fonctionnelle, la définition d'un point régulier est la suivante.

#### Définition II.1.3

On dira qu'un nombre  $\alpha \in C$  est régulier pour l'équation (II.37) si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha^{d^k}$  n'est pas un zéro de  $\Delta(z)$ .

Nous énonçons ci-dessous le théorème que nous souhaitons établir dans cette section. Celui-ci est valable pour tout choix préalable de l'un ou l'autre des deux contextes des sous-sections II.1.1 et II.1.1.

### Théorème II.1.3

Soit  $\mathbb{K}$  une extension finie de  $K$ . Soit  $f(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  une fonction analytique dans un voisinage  $\mathcal{V}$  de l'origine inclus dans le disque unité de  $C$  et solution de l'équation (II.37). On suppose de plus que l'on a :

$$m < d.$$

Soit  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}} \cap \mathcal{V}$  un nombre non nul régulier pour l'équation (II.37).

Alors, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\text{degtr}_{\mathbb{K}}\{f(\alpha)\} = \text{degtr}_{\mathbb{K}(z)}\{f(z)\}. \quad (\text{II.38})$$

Autrement dit, si la fonction  $f(z)$  est transcendante sur  $\mathbb{K}(z)$ , alors le nombre  $f(\alpha)$  est transcendant sur  $\mathbb{K}$  (et réciproquement).

Le cas où  $\mathbb{K}$  est un corps de nombres est dû à K. Mahler [87] (voir aussi [100, p.5]). Nous nous proposons de démontrer ce théorème dans l'esprit de la démonstration du théorème II.1.1. Celle-ci sera encore une fois valable aussi bien pour les corps de nombres que pour les corps de fonctions en caractéristique non nulle. La principale différence avec la démonstration du théorème II.1.1 provient du fait que notre étude ne porte plus sur l'indépendance algébrique mais seulement sur la transcendance. Nous n'aurons donc pas besoin d'utiliser un résultat aussi fort que le critère d'indépendance algébrique de P. Philippon. En remplacement, l'inégalité de Liouville (proposition II.1.1, point 3), qui elle est élémentaire, suffira.

*Démonstration.* On suppose que la fonction  $f(z)$  est transcendante sur  $\mathbb{K}(z)$  (notons qu'alors  $m > 0$ ) et on veut montrer que le nombre  $f(\alpha)$  est transcendant sur  $\mathbb{K}$ , la réciproque étant claire. Quitte à remplacer  $\mathbb{K}$  par  $\mathbb{K}(\alpha)$ , on supposera avoir  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Soit  $N$  un entier naturel non nul fixé. Dans la suite de cette démonstration, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , le terme  $c_j$  désignera une constante strictement positive ne dépendant que de  $\mathbb{K}$ , de  $f(z)$  et de  $\alpha$  et  $c_j(N)$  désignera une constante strictement positive ne dépendant que de  $\mathbb{K}$ , de  $f(z)$ , de  $\alpha$  et de  $N$ . Il existe un polynôme non nul  $R(z, X) \in \mathbb{K}[z, X]$  vérifiant les conditions suivantes.

1.  $\text{deg}_z(R) \leq N$
2.  $\text{deg}_X(R) \leq N$
- 3.

$$n(N) := \text{ord}_{z=0} R(z, f(z)) \geq N^2 \quad (\text{II.39})$$

En effet, en regardant  $R$  comme un polynôme en  $X$  à coefficients des polynômes  $P(z)$  de  $\mathbb{K}[z]$ , cela revient à résoudre un système de  $N^2$  équations en les  $(N+1)^2$  inconnues que sont les coefficients des polynômes  $P(z)$ , équations à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Puisque  $N^2 < (N+1)^2$ , il en existe bien une solution non triviale à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

Notons :

$$E_N(z) = R(z, f(z)) = \sum_{j=n(N)}^{+\infty} a_j(N) z^j.$$

Comme  $f(z)$  est transcendante,  $E_N(z) \not\equiv 0$ .

Posons  $R_0(z, X) = R(z, X)$  et pour tout  $k \geq 1$  :

$$R_k(z, X) = R_{k-1} \left( z^d, \frac{A(z, X)}{B(z, X)} \right) B(z, X)^{m^{k-1}N}. \quad (\text{II.40})$$

On montre par récurrence sur  $k$  que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $R_k(z, X) \in \mathbb{K}[z, X]$  avec

$$\text{deg}_X(R_k) \leq m^k N, \quad (\text{II.41})$$

et :

$$R_k(z, f(z)) = \prod_{j=0}^{k-1} B(z^{d^j}, f(z^{d^j}))^{m^{k-1-j}N} E_N(z^{d^k}). \quad (\text{II.42})$$

D'autre part, un calcul rapide montre que, pour tout  $k$  assez grand par rapport à  $N$ , disons  $k \geq c_0(N)$ , on a :

$$E_N(\alpha^{d^k}) \neq 0, \quad (\text{II.43})$$

et :

$$-c_1 d^k n(N) \leq \log|E_N(\alpha^{d^k})| \leq -c_2 d^k n(N). \quad (\text{II.44})$$

Par ailleurs, l'équation (II.37) entraîne que pour tout  $k \geq 1$  :

$$B(\alpha^{d^{k-1}}, f(\alpha^{d^{k-1}}))f(\alpha^{d^k}) = A(\alpha^{d^{k-1}}, f(\alpha^{d^{k-1}})),$$

Comme  $\Delta(\alpha^{d^{k-1}}) \neq 0$  par hypothèse, il vient :

$$B(\alpha^{d^{k-1}}, f(\alpha^{d^{k-1}})) \neq 0, \quad \forall k \geq 1. \quad (\text{II.45})$$

D'après (II.42), (II.43) et (II.45), on trouve pour tout  $k \geq c_0(N)$  :

$$R_k(\alpha, f(\alpha)) \neq 0. \quad (\text{II.46})$$

L'égalité (II.42) est l'analogue de (II.20) de la démonstration du théorème II.1.1 et on en déduit de la même façon à l'aide de (II.44), et en utilisant de plus le fait que  $m < d$ , que, quitte à augmenter  $c_0(N)$  :

$$\log|R_k(\alpha, f(\alpha))| \leq -c_3 d^k n(N), \quad \forall k \geq c_0(N). \quad (\text{II.47})$$

Posons pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$P_k(X) = R_k(\alpha, X) \in \mathbb{K}[X]. \quad (\text{II.48})$$

On a d'après (II.46) et (II.47), pour tout  $k \geq c_0(N)$  :

$$P_k(f(\alpha)) \neq 0, \quad (\text{II.49})$$

et :

$$\log|P_k(f(\alpha))| \leq -c_3 d^k n(N).$$

Supposons par l'absurde que  $f(\alpha)$  est algébrique sur  $\mathbb{K}$ . Quitte à remplacer  $\mathbb{K}$  par  $\mathbb{K}(f(\alpha))$ , on peut dire que  $f(\alpha) \in \mathbb{K}$ . Cela et (II.49) entraînent que  $P_k(f(\alpha)) \in \mathbb{K}^*$  pour tout  $k \geq c_0(N)$ . L'inégalité de Liouville fournit alors :

$$\log|P_k(f(\alpha))| \geq -c_4 h(P_k(f(\alpha))), \quad \forall k \geq c_0(N). \quad (\text{II.50})$$

Estimons à présent la hauteur  $h(P_k(f(\alpha)))$ . Étudions tout d'abord les quantités  $\deg_z(R_k)$  et  $h(R_k)$ .

Par récurrence sur  $k$ , on obtient que

$$\deg_z(R_k) \leq c_5 N \sum_{j=0}^{k-1} m^j d^{k-1-j} + d^k \deg_z(R_0), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

où

$$c_5 = \max\{\deg_z(A), \deg_z(B)\}.$$

En remarquant que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} m^j d^{k-1-j} &= d^{k-1} \left( 1 + \frac{m}{d} + \cdots + \left( \frac{m}{d} \right)^{k-1} \right) \\ &\leq c_6 d^{k-1}, \text{ car } m < d, \end{aligned}$$

il vient :

$$\deg_z(R_k) \leq c_7 d^{k-1} N + d^k N \leq c_8 d^k N, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (\text{II.51})$$

De manière analogue à la démonstration du lemme II.1.1 dans la preuve du théorème II.1.1, on peut montrer que l'on a ici, quitte à augmenter  $c_0(N)$  :

$$h(R_k) \leq c_9 m^k N + c_{10} k^2, \quad \forall k \geq c_0(N). \quad (\text{II.52})$$

Posons pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$P_k(f(\alpha)) = R_k(\alpha, f(\alpha)) = \sum_{i \leq \deg_z(R_k), j \leq \deg_x(R_k)} d_{k,i,j} \alpha^i f(\alpha)^j, \quad d_{k,i,j} \in \mathbb{K}. \quad (\text{II.53})$$

Par conséquent, d'une part d'après (II.41) et (II.51), pour toute place archimédienne  $w$  de  $\mathbb{K}$ , on peut écrire :

$$|P_k(f(\alpha))|_w \leq (c_8 d^k N + 1)(m^k N + 1) \times \max_{i,j} |d_{k,i,j}|_w \times (\max\{1, |\alpha|_w\})^{c_8 d^k N} \times (\max\{1, |f(\alpha)|_w\})^{m^k N}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \log(\max\{1, |P_k(f(\alpha))|_w\}) &\leq c_{11}(N) + c_{12}k + \log(\max_{i,j}\{1, |d_{k,i,j}|_w\}) + c_8 d^k N \log(\max\{1, |\alpha|_w\}) \\ &\quad + m^k N \log(\max\{1, |f(\alpha)|_w\}). \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

D'autre part, pour toute place ultramétrique  $w$  de  $\mathbb{K}$ , on trouve plus simplement :

$$|P_k(f(\alpha))|_w \leq \max_{i,j} |d_{k,i,j}|_w \times (\max\{1, |\alpha|_w\})^{c_8 d^k N} \times (\max\{1, |f(\alpha)|_w\})^{m^k N}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \log(\max\{1, |P_k(f(\alpha))|_w\}) &\leq \log(\max_{i,j}\{1, |d_{k,i,j}|_w\}) + c_8 d^k N \log(\max\{1, |\alpha|_w\}) \\ &\quad + m^k N \log(\max\{1, |f(\alpha)|_w\}). \end{aligned} \quad (\text{II.55})$$

Quitte à augmenter  $c_0(N)$ , pour tout  $k \geq c_0(N)$  les lignes (II.54) et (II.55) et la remarque II.1.3 impliquent que :

$$\begin{aligned} h(P_k(f(\alpha))) &\leq c_{11}(N) + c_{12}k + h(R_k) + c_8 d^k N h(\alpha) + m^k N h(f(\alpha)) \\ &\leq c_{13}k + c_9 m^k N + c_{10} k^2 + c_8 d^k N h(\alpha) + m^k N h(f(\alpha)), \text{ d'après (II.52)} \\ &\leq c_{14} d^k N, \text{ car } m < d. \end{aligned}$$

Ainsi, (II.50) devient :

$$\log|P_k(f(\alpha))| \geq -c_{15} d^k N, \quad \forall k \geq c_0(N). \quad (\text{II.56})$$

D'après (II.47) et (II.56), on obtient :

$$-c_{15} d^k N \leq \log|P_k(f(\alpha))| \leq -c_3 d^k n(N), \quad \forall k \geq c_0(N).$$

D'où :

$$-c_{15}d^k N \leq -c_3 d^k n(N), \quad \forall k \geq c_0(N).$$

En divisant par  $d^k$  les deux côtés de l'inégalité précédente, on obtient :

$$-c_{15}N \leq -c_3 n(N).$$

Or, on a :

$$n(N) \geq N^2.$$

En choisissant au début de cette preuve  $N$  assez grand, on aboutit à une contradiction.

Donc  $f(\alpha)$  est transcendant, ce qui conclut la démonstration du théorème II.1.3.  $\square$

Nous donnons à présent un exemple d'application de ce théorème dans le contexte des corps de fonctions en caractéristique non nulle de la sous-section II.1.1. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $p \nmid n$ . Cela garantit que  $\frac{1}{n^k} \in \mathbb{Z}_p$ , pour tout entier naturel  $k$ . Le théorème d'É. Lucas [83] (voir aussi [13]) permet alors de définir la fonction suivante.

$$f(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - Tz^{q^k}\right)^{\frac{1}{n^k}}. \quad (\text{II.57})$$

Notons que la fonction  $f(z)$  est analytique sur  $\{|z| < \frac{1}{q}\}$  et que  $f(z) \in \mathbb{F}_q(T)[[z]]$ . On a alors le théorème suivant.

#### **Théorème II.1.4**

*Si  $n < q$ , alors pour tout nombre  $\alpha \in \overline{K}^* \cap \{|z| < \frac{1}{q}\}$ ,  $f(\alpha)$  est un nombre transcendant sur  $\mathbb{F}_q(T)$ .*

*Démonstration.* La fonction  $f(z)$  satisfait à l'équation suivante.

$$f(z^q) = \frac{f(z)^n}{(1 - Tz)^n}. \quad (\text{II.58})$$

Par ailleurs, on remarque que la fonction  $f(z)$  a une infinité de zéros sur  $\overline{K}$ , ce qui implique qu'elle est transcendante sur  $K(z)$ . De plus, on observe que :

$$\Delta(z) = (1 - Tz)^n.$$

Donc les seules singularités de l'équation (II.58) sont les racines  $q^k$ -ièmes de  $\frac{1}{T}$ , pour tout entier naturel  $k$ , dont aucune n'appartient à l'ensemble  $\{|z| < \frac{1}{q}\}$ . Ainsi, comme  $n < q$  par hypothèse, on peut appliquer le théorème II.1.3 avec :

$$d = q, \quad m = n, \quad A(z, X) = X^n, \quad B(z, X) = (1 - Tz)^n,$$

et  $\alpha \in \overline{K}^* \cap \{|z| < \frac{1}{q}\}$  pour conclure que le nombre  $f(\alpha)$  est transcendant sur  $K$ .  $\square$





# Chapitre III

## Relèvement des relations algébriques entre valeurs de fonctions mahlériennes

Le théorème II.1.1 ramène l'étude des relations algébriques entre valeurs de fonctions mahlériennes à celle des relations algébriques entre les fonctions elles-mêmes. Il possède certaines limites, évoquées dans la **section I.1.3**. Tout d'abord, la détermination des relations algébriques entre fonctions mahlériennes s'avère en général difficile. En caractéristique nulle, des résultats ont été obtenus par J. Roques via l'utilisation de la théorie de Galois aux différences [115, 116]. Cependant, les résultats d'indépendance algébrique explicites de fonctions mahlériennes ne dépassent guère les équations d'ordre 2. En caractéristique non nulle, il semble que cette approche galoisienne n'ait pas été exploitée et les relations algébriques entre fonctions mahlériennes dans ce cadre restent encore mystérieuses. En revanche, l'étude des relations linéaires fonctionnelles demeure plus accessible. En effet, les travaux de B. Adamczewski et C. Faverjon [8, 11] assurent l'existence d'un algorithme qui fournit une base des relations linéaires entre fonctions mahlériennes en caractéristique nulle, qui semble se transposer à la caractéristique non nulle. Par ailleurs, si l'on considère une seule fonction mahlérienne transcendante, le théorème II.1.1 ne permet pas de conclure à la transcendance de ses valeurs en des points algébriques. Cela motive le raffinement du théorème II.1.1, dans l'optique notamment de relier directement l'indépendance linéaire des fonctions mahlériennes à celles de leurs valeurs aux points algébriques. Nous reproduisons ci-dessous l'article [57] dans sa version anglaise d'origine, qui traite de cette problématique.

### III.1 Framework and results

Let  $\mathbb{K}$  be a field and let  $d \geq 2$  be an integer. We say that a power series  $f(z) \in \mathbb{K}[[z]]$  is a  $d$ -Mahler function over  $\mathbb{K}(z)$  if there exist polynomials  $P_0(z), \dots, P_n(z) \in \mathbb{K}[z]$ ,  $P_n(z) \neq 0$ , such that

$$P_0(z)f(z) + P_1(z)f(z^d) + \dots + P_n(z)f(z^{d^n}) = 0. \quad (\text{III.1})$$

The minimal integer  $n$  satisfying the previous equation is called the order of  $f(z)$ . We say that the column vector whose coordinates are the power series  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbb{K}[[z]]$  satisfies a  $d$ -Mahler system if there exists a matrix  $A(z) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}(z))$  such that

Any  $d$ -Mahler function is a coordinate of a vector solution of the  $d$ -Mahler system associated with the companion matrix of (III.1). Reciprocally, every coordinate of a vector solution of a  $d$ -Mahler system is a  $d$ -Mahler function. We say that a number  $\alpha \in \mathbb{K}$  is regular with respect to System (II.1) if for all integer  $k \geq 0$ , the number  $\alpha^{d^k}$  is neither a pole of the matrix  $A(z)$  nor a pole of the matrix  $A^{-1}(z)$ . In this paper, we are dealing with the case where  $\mathbb{K}$  is a function field of positive characteristic. Let us introduce the associated framework. We start with a prime number  $p$  and we let  $q = p^r$  denote a power of  $p$ . Then, we let  $A = \mathbb{F}_q[T]$  denote the ring of polynomials in  $T$ , with coefficients in the finite field  $\mathbb{F}_q$ , and we let  $K = \mathbb{F}_q(T)$  denote the fraction field of  $A$ . We define the  $\frac{1}{T}$ -adic absolute

value on  $K$  by  $\left| \frac{P(T)}{Q(T)} \right| = q^{\deg_T(P) - \deg_T(Q)}$ . We recall that the completion of  $K$  with respect to  $|\cdot|$  is the field  $\mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{T}\right)\right)$  of Laurent power series expansions over  $\mathbb{F}_q$ , and that the completion  $C$  of the algebraic closure of  $\mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{T}\right)\right)$  with respect to the unique extension of  $|\cdot|$  is a complete and algebraically closed field. Finally, as announced, we let  $\mathbb{K}$  denote a function field, that is, a finite extension of  $K$ . We let  $\overline{\mathbb{K}}$  denote the algebraic closure of  $\mathbb{K}$ , embedded in  $C$ .

Let  $\mathbb{K}\{z\}$  denote the set of functions which admit a convergent power series expansion on a domain containing the origin, with coefficients in  $\mathbb{K}$ . Let  $\mathbf{k}$  be a field and  $\mathcal{F}$  a finite family of elements of a  $\mathbf{k}$ -algebra. We let  $\text{trdeg}_{\mathbf{k}}\{\mathcal{F}\}$  denote the transcendence degree of  $\mathcal{F}$  over  $\mathbf{k}$ . That is, the maximal number of elements of  $\mathcal{F}$  that are algebraically independent over  $\mathbf{k}$ . In [56], the author has proved the following result. This is the analogue for function fields of characteristic  $p$  of a classical result due to Ku. Nishioka [99] when  $\mathbb{K}$  is a number field.

In general, few is known about the algebraic relations between the functions  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . This makes a priori difficult the question whether  $f(\alpha)$  is transcendental or not over  $\overline{\mathbb{K}}$ . However, it is easier to study linear relations between the functions  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . For example, when  $\mathbb{K}$  is a number field, a basis of the set of linear relations over  $\overline{\mathbb{Q}}(z)$  between the Mahler functions  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  can be explicitly computed [8, 11]. The arguments used by B. Adamczewski and C. Faverjon to obtain this result belong to linear algebra and might fit for function fields. This could be a further perspective of study. For these reasons, we are interested in refining Theorem II.1.1. The following definition is needed.

### Definition III.1.1

Let  $\mathbf{k}$  be a field. We say that a finitely generated field extension  $\mathcal{E} = \mathbf{k}(u_1, \dots, u_n)$  of  $\mathbf{k}$  is regular over  $\mathbf{k}$  if the following two conditions are satisfied.

1.  $\mathcal{E}$  is separable over  $\mathbf{k}$ . That is, there exists a transcendence basis  $\mathcal{F}$  of  $\mathcal{E}$  over  $\mathbf{k}$  such that  $\mathcal{E}$  is a separable algebraic extension of  $\mathbf{k}(\mathcal{F})$  (see [55, Appendix A1.2] and also [84]).
2. Every element of  $\mathcal{E}$  that is algebraic over  $\mathbf{k}$  belongs to  $\mathbf{k}$ .

With this definition, our main result is the following.

### Theorem III.1.1

We continue with the assumptions of Theorem II.1.1. Let us assume further that the extension  $\overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is regular over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ .

Then, for every polynomial  $P(X_1, \dots, X_n) \in \overline{\mathbb{K}}[X_1, \dots, X_n]$  homogeneous in  $X_1, \dots, X_n$  such that

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0,$$

there exists a polynomial  $Q(z, X_1, \dots, X_n) \in \overline{\mathbb{K}}[z][X_1, \dots, X_n]$  homogeneous in  $X_1, \dots, X_n$  such that

$$Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0,$$

and

$$Q(\alpha, X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n).$$

Let us note that any inhomogeneous algebraic relation

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0$$

can be turned into a homogeneous algebraic relation between the values at  $\alpha$  of the functions  $f_i(z)$  and the additional function 1.

As announced, Theorem III.1.1 allows us to deal with linear independence over  $\overline{\mathbb{K}}$  between values of Mahler functions.

### Corollary III.1.1

We continue with the assumptions of Theorem III.1.1. If the functions  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  are linearly independent over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ , then, the numbers  $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$  are linearly independent over  $\overline{\mathbb{K}}$ .

Given  $f(z)$  a Mahler function, one of the main goals of Mahler's method is to decide whether  $f(\alpha)$  is transcendental or not over  $\overline{\mathbb{K}}$ . Corollary III.1.1 applied with the functions  $1, f(z)$  shows the contribution of Theorem III.1.1 in understanding the nature of  $f(\alpha)$  when  $\alpha$  is regular. Corollary III.1.2 below states that this contribution even extends to the case of non-regular numbers  $\alpha$ . Let us start with a single transcendental  $d$ -Mahler function  $f(z)$ . Then, there exist an integer  $m \geq 1$  and coprime polynomials  $P_{-1}(z), \dots, P_m(z) \in \mathbb{K}[z]$ ,  $P_m(z) \not\equiv 0$ , such that

$$P_{-1}(z) + P_0(z)f(z) + P_1(z)f(z^d) + \dots + P_m(z)f(z^{d^m}) = 0. \quad (\text{III.2})$$

If  $m$  is minimal, we call (III.2) the minimal inhomogeneous equation of  $f(z)$  over  $\mathbb{K}(z)$ . We can associate with this equation the  $d$ -Mahler system

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(z^d) \\ \vdots \\ f(z^{d^m}) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} 1 \\ f(z) \\ \vdots \\ f(z^{d^{m-1}}) \end{pmatrix}, \quad (\text{III.3})$$

where  $A(z) \in \text{GL}_{m+1}(\mathbb{K}(z))$  is the companion matrix of Equation (III.2). Let  $\sigma_d$  denote the endomorphism of  $\mathbb{K}\{z\}$  defined by  $\sigma_d g(z) = g(z^d)$ . Then, we set

$$\overline{\mathbb{K}}(z)(g(z))_{\sigma_d} = \overline{\mathbb{K}}(z) \left( \{\sigma_d^i g(z)\}_{i \geq 0} \right).$$

Now, let  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ ,  $0 < |\alpha| < 1$ , be a regular number for System (III.3). The only thing we know a priori is that

$$\text{trdeg}_{\overline{\mathbb{K}}(z)} \{1, f(z), \dots, f(z^{d^{m-1}})\} \geq 1.$$

Therefore, Theorem II.1.1 only gives

$$\text{trdeg}_{\overline{\mathbb{K}}} \{1, f(\alpha), \dots, f(\alpha^{d^{m-1}})\} \geq 1.$$

That is, there exists at least one transcendental number among  $f(\alpha), \dots, f(\alpha^{d^{m-1}})$ . But we cannot conclude that  $f(\alpha)$  is transcendental. Our contribution to this problem is the following result.

### Corollary III.1.2

Let  $f(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  be a  $d$ -Mahler transcendental function over  $\mathbb{K}(z)$ . Let  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ ,  $0 < |\alpha| < 1$  such that  $\alpha$  is in the disc of convergence of  $f(z)$ . Let us assume that the extension

$\overline{\mathbb{K}}(z)(f(z))_{\sigma_d}$  is regular over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ .

Then, we have the following.

1. The number  $f(\alpha)$  is either transcendental or in  $\mathbb{K}(\alpha)$ .
2. If  $\alpha$  is a regular number with respect to  $d$ -Mahler System (III.3) satisfied by  $f(z)$  (that is  $P_0(\alpha^{d^k})P_m(\alpha^{d^k}) \neq 0$  for every integer  $k \geq 0$ ), then  $f(\alpha)$  is transcendental over  $\overline{\mathbb{K}}$ .

Such results were first established in the setting of linear differential equations over  $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ , especially for  $E$ -functions. Theorem II.1.1 is the analogue of Siegel-Shidlovskii's Theorem [123]. Theorem III.1.1 is the analogue of a theorem of F. Beukers [29]. F. Beukers's proof uses Galois Theory and results from Y. André. Moreover, Y. André proved [19] that the theorem of F. Beukers can be deduced from Siegel-Shidlovskii's theorem, using a new method involving the theory of affine quasi-homogeneous varieties. Finally, the analogue of Corollary III.1.2 for  $E$ -functions is stated in [58] (see also [12]). Getting back to Mahler functions, Theorem III.1.1 is the analogue for function fields of a theorem of B. Adamczewski and C. Faverjon [8], obtained as a consequence of a result of P. Philippon [110]. The analogues of Corollary III.1.1 and Corollary III.1.2 for number fields are proved in [8].

Besides, if  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  are either  $E$ -functions or Mahler functions over  $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ , the extension  $\overline{\mathbb{Q}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is always regular over  $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ . This is straightforward for  $E$ -functions for they are analytic on the whole complex plane. For Mahler functions, this can be deduced [8, 110] from the

fact that a Mahler function with coefficients in  $\overline{\mathbb{Q}}$  is either rational or transcendental [100, Theorem 5.1.7]). But when  $\mathbb{K}$  is a function field of characteristic  $p$ , such a dichotomy does not hold anymore and there do exist non-regular Mahler extensions. Let us provide a trivial example based on the following  $p$ -Mahler system.

$$\begin{pmatrix} f_1(z^p) \\ f_2(z^p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix}.$$

A solution to this system is given by

$$f_1(z) = 1, f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{p^n}.$$

Furthermore,  $f_2(z)$  is algebraic because  $f_2(z)^p = f_2(z^p) = f_2(z) - z$ . On the other hand, the sequence of coefficients of  $f_2(z)$  is not eventually periodic. Therefore,  $f_2(z)$  is not rational. It follows that the extension  $\mathcal{E} = \overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), f_2(z))$  is not regular over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Now, let  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ ,  $0 < |\alpha| < 1$  and  $\lambda = f_2(\alpha) \in \overline{\mathbb{K}}$ . Then,  $\lambda f_1(\alpha) - f_2(\alpha) = 0$  is a non-trivial linear relation between  $f_1(\alpha)$  and  $f_2(\alpha)$  over  $\overline{\mathbb{K}}$ . However, there is no non-trivial linear relation between the function  $f_1(z)$  and  $f_2(z)$  over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ , because  $f_2(z)$  is not rational. Hence, the conclusion of Theorem III.1.1 does not hold in this case. In Theorem III.1.2, we state that this example reflects a general behaviour. That is, the conclusion of Theorem III.1.1 is never satisfied when the extension  $\overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is not regular over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Let us first introduce some definitions and notations. Let  $\mathbf{k}$  be a valued field and  $\mathbf{k}_c$  its completion. Note that its valuation extends uniquely to  $\overline{\mathbf{k}_c}$  [121, II.2, Corollary 2]. We let  $\tilde{\mathbf{k}}$  denote the completion of  $\overline{\mathbf{k}_c}$  with respect to this valuation. Then,  $\tilde{\mathbf{k}}$  is complete and algebraically closed. Now, let  $\alpha \in \tilde{\mathbf{k}}$ . We say that a function is analytic at  $\alpha$  if it admits a convergent power series expansion in a connected open neighbourhood of  $\alpha$ , with coefficients in  $\tilde{\mathbf{k}}$ . If  $\mathcal{U} \subseteq \tilde{\mathbf{k}}$  is a domain, we say that a function is analytic on  $\mathcal{U}$  if it is analytic at each point of  $\mathcal{U}$ . If the power series expansion of  $f(z)$  at  $\alpha \in \mathcal{U}$  has coefficients in a subfield  $L$  of  $\tilde{\mathbf{k}}$ , we say that  $f(z)$  is analytic at  $\alpha$  over  $L$  and we let  $L\{z - \alpha\}$  denote the set of all such functions. Now, let  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbf{k}\{z\}$ . We set

$$\mathfrak{p} = \{Q(z, X_1, \dots, X_n) \in \overline{\mathbf{k}}(z)[X_1, \dots, X_n], Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0\}.$$

If the functions  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  are analytic at  $\alpha \in \overline{\mathbf{k}}$ , we set

$$\mathfrak{p}_\alpha = \{P(X_1, \dots, X_n) \in \overline{\mathbf{k}}[X_1, \dots, X_n], P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0\}.$$

Let  $R$  be a ring. If  $\mathfrak{q}$  is an ideal of  $A = R[X_1, \dots, X_n]$ , we write  $\tilde{\mathfrak{q}}$  to refer to the homogenized ideal of  $\mathfrak{q}$ . It is the ideal of  $A' = R[X_0, X_1, \dots, X_n]$  generated by all the homogeneous polynomials  $Q(X_0, \dots, X_n) \in A'$  for which there exists a polynomial  $P(X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{q}$  such that  $Q(1, X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n)$ . Finally, let  $\text{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \overline{\mathbf{k}}[z][X_0, \dots, X_n])$  denote the homogeneous ideal over  $\overline{\mathbf{k}}[X_0, \dots, X_n]$  constructed by evaluating the ideal  $\tilde{\mathfrak{p}} \cap \overline{\mathbf{k}}[z][X_0, \dots, X_n]$  at  $z = \alpha$ . With these definitions, the conclusion of Theorem III.1.1 implies the following assertion.

$$\text{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \overline{\mathbf{k}}[z][X_0, \dots, X_n]) = \tilde{\mathfrak{p}}_\alpha.$$

Now, we can state the announced result.

### Theorem III.1.2

Let  $\mathbf{k}$  be a valued field. We assume that  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \overline{\mathbf{k}}\{z\}$  are analytic functions on a domain  $\mathcal{U} \subseteq \tilde{\mathbf{k}}$  which contains the origin. Let  $\alpha \in \mathcal{U} \cap \overline{\mathbf{k}}$ . Let us assume further that the extension  $\overline{\mathbf{k}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is not regular over  $\overline{\mathbf{k}}(z)$ . Then we have

$$\text{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \overline{\mathbf{k}}[z][X_0, \dots, X_n]) \subsetneq \tilde{\mathfrak{p}}_\alpha.$$

In particular, the conclusion of Theorem III.1.1 does not hold.

Besides, let  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  be  $d$ -Mahler functions over  $\mathbb{K}(z)$ . Then, we say that the field extension  $\overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is a  $d$ -Mahler extension over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ , or, for short,  $d$ -Mahler. Now, if  $p \nmid d$ , we show that  $d$ -Mahler extensions over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$  behave just as in characteristic zero.

**Theorem III.1.3**

Let  $d \geq 2$  be an integer such that  $p \nmid d$ . Then, a  $d$ -Mahler function  $f(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  over  $\mathbb{K}(z)$  is either transcendental or in  $\mathbb{K}(z)$ .

The particular case where  $f$  is solution of a Mahler equation of order 1 can be found in [112, Chapitre 1].

**Corollary III.1.3**

Let  $d \geq 2$  be an integer such that  $p \nmid d$ . Then, a  $d$ -Mahler extension over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$  is always regular over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ .

The present paper is organised as follows. Section III.1.1 is dedicated to the proof of Theorem III.1.1. We follow the same approach as P. Philippon [110] and B. Adamczewski and C. Favre [8]. In Section III.1.2 we prove Theorem III.1.2. Section III.1.3 is devoted to the proof of Theorem III.1.3 and Corollary III.1.3. We follow an approach of J. Roques [114] dealing with the theory of smooth projective curves in  $\mathbb{P}^1(C)$ , and an argument from B. Adamczewski and C. Favre [8]. In Section III.1.4, we prove Corollary III.1.2. Finally, in Section III.1.5 we give an application of Theorem III.1.1 and provide, in the case where  $p \mid d$ , examples of regular and non-regular  $d$ -Mahler extensions.

**III.1.1 Proof of Theorem III.1.1**

Before going through the proof of Theorem III.1.1, let us introduce some definitions and recall some results. Let  $L$  be a field. If  $\mathfrak{q}$  is a prime ideal of  $L[X_1, \dots, X_n]$ , we say that  $\mathfrak{q}$  is absolutely prime over  $L$  if for every extension  $L_1$  of  $L$ , the extended ideal  $\mathfrak{q}L_1[X_1, \dots, X_n]$  is still prime in  $L_1[X_1, \dots, X_n]$ . We recall that  $\mathfrak{q}$  is prime (resp. absolutely prime) in  $L[X_1, \dots, X_n]$  if and only if its homogenized ideal  $\tilde{\mathfrak{q}}$  is prime (resp. absolutely prime) in  $L[X_0, \dots, X_n]$ . Furthermore, when both are prime, they have the same height. Finally, given functions  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbb{K}\{z\}$ , we recall that the extension  $\overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is regular over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$  if and only if the ideal  $\mathfrak{p}$  is absolutely prime in  $\overline{\mathbb{K}}(z)[X_1, \dots, X_n]$  [139, VII, Theorem 39].

**A local version of Theorem III.1.1**

In this subsection, we establish an analogue of a result of P. Philippon [110, Prop. 4.4] in the framework of function fields. This is Corollary III.1.4 below. We deduce this statement from the more general result stated in Proposition III.1.1, in the vein of [8, Proposition 3.1].

**Proposition III.1.1**

Let  $\mathbf{k}$  be a valued field and let  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbf{k}\{z\}$  be analytic functions on a domain  $\mathcal{U} \subseteq \tilde{\mathbf{k}}$  which contains the origin. Let us assume that the following two properties are satisfied.

1. There exists a set  $S \subseteq \mathcal{U} \cap \tilde{\mathbf{k}}$  such that, for every  $\alpha \in S$ , we have

$$\text{trdeg}_{\tilde{\mathbf{k}}} \{f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)\} = \text{trdeg}_{\tilde{\mathbf{k}}(z)} \{f_1(z), \dots, f_n(z)\}. \tag{III.4}$$

2. The extension  $\tilde{\mathbf{k}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is regular over  $\tilde{\mathbf{k}}(z)$ .

Then, there exists a finite set  $S' \subseteq S$  such that for every  $\alpha \in S \setminus S'$  and for every polynomial  $P(X_1, \dots, X_n) \in \tilde{\mathbf{k}}[X_1, \dots, X_n]$  of total degree  $N$  in  $X_1, \dots, X_n$  such that

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0,$$

there exists a polynomial  $Q(z, X_1, \dots, X_n) \in \tilde{\mathbf{k}}[z][X_1, \dots, X_n]$  of total degree  $N$  in  $X_1, \dots, X_n$  such that

$$Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0,$$

and

$$Q(\alpha, X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n).$$

**Corollary III.1.4**

Let  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  be functions satisfying (II.1) and such that the extension  $\overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is regular over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Then, there exists  $\rho$  with  $0 < \rho < 1$  such that for every  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ ,  $0 < |\alpha| < \rho$ , and for every polynomial  $P(X_1, \dots, X_n) \in \overline{\mathbb{K}}[X_1, \dots, X_n]$  of total degree  $N$  in  $X_1, \dots, X_n$  such that

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0,$$

there exists a polynomial  $Q(z, X_1, \dots, X_n) \in \overline{\mathbb{K}}[z][X_1, \dots, X_n]$  of total degree  $N$  in  $X_1, \dots, X_n$  such that

$$Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0,$$

and

$$Q(\alpha, X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n).$$

*Proof of Proposition III.1.1.* First, note that the conclusion of Proposition III.1.1 is equivalent to the following.

$$\text{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \overline{\mathbf{k}}[z][X_0, \dots, X_n]) = \tilde{\mathfrak{p}}_\alpha,$$

for all but finitely many  $\alpha \in S$ .

Thus, proving Proposition III.1.1 is the same as proving that  $\text{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \overline{\mathbf{k}}[z][X_0, \dots, X_n])$  is a prime ideal of same height as  $\tilde{\mathfrak{p}}_\alpha$ , for all but finitely many  $\alpha \in S$ . To do so, we notice that the ring  $\overline{\mathbf{k}}(z)[f_1(z), \dots, f_n(z)]$  is an integral (because  $\mathcal{U}$  is a domain) finitely generated  $\overline{\mathbf{k}}(z)$ -algebra. Hence applying results from commutative algebra (which only rely on these two properties and hold over any base field, see for example [55]), we get

$$\begin{aligned} \text{trdeg}_{\overline{\mathbf{k}}(z)}\{f_1(z), \dots, f_n(z)\} &= \dim\left(\overline{\mathbf{k}}(z)[f_1(z), \dots, f_n(z)]\right) \\ &= \dim\left(\overline{\mathbf{k}}(z)[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{p}\right) \\ &= \dim\left(\overline{\mathbf{k}}(z)[X_1, \dots, X_n]\right) - \text{ht}(\mathfrak{p}) \\ &= \dim\left(\overline{\mathbf{k}}(z)[X_0, \dots, X_n]\right) - \text{ht}(\tilde{\mathfrak{p}}) - 1. \end{aligned}$$

Let  $\alpha \in S$ . As  $\overline{\mathbf{k}}[f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)]$  is an integral finitely generated  $\overline{\mathbf{k}}$ -algebra, we obtain in the same way that

$$\text{trdeg}_{\overline{\mathbf{k}}}\{f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)\} = \dim\left(\overline{\mathbf{k}}[X_0, \dots, X_n]\right) - \text{ht}(\tilde{\mathfrak{p}}_\alpha) - 1.$$

By assumption, we get

$$\text{ht}(\tilde{\mathfrak{p}}) = \text{ht}(\tilde{\mathfrak{p}}_\alpha). \tag{III.5}$$

Thus, proving Proposition III.1.1 is now equivalent to prove that  $\text{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \overline{\mathbf{k}}[z][X_0, \dots, X_n])$  is a prime ideal of same height as  $\tilde{\mathfrak{p}}$ , for all but finitely many  $\alpha \in S$ . First, as, by assumption, the extension  $\overline{\mathbf{k}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is regular over  $\overline{\mathbf{k}}(z)$ , the ideal  $\mathfrak{p}$  is absolutely prime over  $\overline{\mathbf{k}}(z)[X_1, \dots, X_n]$  [139, VII, Theorem 39]. Therefore, as recalled earlier,  $\tilde{\mathfrak{p}}$  is absolutely prime over  $\overline{\mathbf{k}}(z)[X_0, \dots, X_n]$ . Now, a result from W. Krull [74, Satz 16], which holds for any base field, leads to the existence of a finite set  $S' \subseteq S$  such that for every  $\alpha \in S \setminus S'$ , the ideal  $\text{ev}_\alpha\left(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \overline{\mathbf{k}}[z][X_0, \dots, X_n]\right)$  is absolutely prime over  $\overline{\mathbf{k}}[X_0, \dots, X_n]$ . In particular, it is a prime ideal. Finally, let  $\alpha \in S \setminus S'$ . It remains to prove that

$$\text{ht}\left(\text{ev}_\alpha\left(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \overline{\mathbf{k}}[z][X_0, \dots, X_n]\right)\right) = \text{ht}(\tilde{\mathfrak{p}}). \tag{III.6}$$

This is implied by a result from the same article of W. Krull [74, Satz 13], involving Chow forms. Nevertheless, we can also prove (III.6) without this concept, following the approach of Y. Nesterenko



and A. Shidlovskii in [96]. This way is more elementary and interesting for the proof of Theorem III.1.2 (see Remark III.1.3). That is why we present it here.

We first notice that

$$\text{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \bar{\mathfrak{k}}[z][X_0, \dots, X_n]) \subseteq \tilde{\mathfrak{p}}_\alpha. \quad (\text{III.7})$$

It follows that

$$\begin{aligned} \text{ht} \left( \text{ev}_\alpha \left( \tilde{\mathfrak{p}} \cap \bar{\mathfrak{k}}[z][X_0, \dots, X_n] \right) \right) &\leq \text{ht}(\tilde{\mathfrak{p}}_\alpha) \\ &= \text{ht}(\tilde{\mathfrak{p}}), \text{ by (III.5)}. \end{aligned}$$

In order to prove the converse inequality, we use a result of D. Hilbert (see for example [139, VII, Theorem 41, Theorem 42]). We give a detailed account here because we did not find a reference in print. We reproduce an argument due to C. Faverjon (unpublished). We first introduce the following definitions, according to [96].

**Definition III.1.2** 1. For every  $N \in \mathbb{N}$  and every homogeneous ideal  $I$  of  $\bar{\mathfrak{k}}[X_0, \dots, X_n]$ , let us set

$$\mathcal{M}_I(N) = \text{vect}_{\bar{\mathfrak{k}}} \{ [P]_I, P \in \bar{\mathfrak{k}}[X_0, \dots, X_n], \text{ homogeneous of degree } N \},$$

where  $[P]_I$  stands for the congruence class of  $P$  modulo  $I$ .

2. For every  $N \in \mathbb{N}$  and every homogeneous ideal  $J$  of  $\bar{\mathfrak{k}}(z)[X_0, \dots, X_n]$ , let us set

$$\mathcal{L}_J(N) = \text{vect}_{\bar{\mathfrak{k}}(z)} \{ [Q]_J, Q \in \bar{\mathfrak{k}}(z)[X_0, \dots, X_n], \text{ homogeneous of degree } N \},$$

where  $[Q]_J$  stands for the congruence class of  $Q$  modulo  $J$ .

Now, let us set

$$\dim_{\bar{\mathfrak{k}}} \left( \mathcal{M}_{\text{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \bar{\mathfrak{k}}[z][X_0, \dots, X_n])}(N) \right) = \phi(N),$$

and

$$\dim_{\bar{\mathfrak{k}}(z)} (\mathcal{L}_{\tilde{\mathfrak{p}}}(N)) = \psi(N).$$

Then, we recall the following result.

**Theorem III.1.4** (D. Hilbert)

For every integer  $N \geq 0$ , the quantities  $\phi(N)$  and  $\psi(N)$  are finite. Moreover, for every  $N$  big enough, they are polynomials in  $N$ , and there exist  $a, b > 0$  such that

$$\begin{cases} \phi(N) &\sim_{N \rightarrow +\infty} aN^{n - \text{ht}(\text{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \bar{\mathfrak{k}}[z][X_0, \dots, X_n]))} \\ \psi(N) &\sim_{N \rightarrow +\infty} bN^{n - \text{ht}(\tilde{\mathfrak{p}})}. \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

With this theorem in hands, we only need to prove that

$$\phi(N) \leq \psi(N), \quad (\text{III.9})$$

for  $N$  large enough. We now set the following definition. For every  $\alpha \in \bar{\mathfrak{k}}$ , we let  $R_\alpha$  denote the localization of the ring  $\bar{\mathfrak{k}}[z]$  at the ideal  $(z - \alpha)$ . In other words, the subfield of  $\bar{\mathfrak{k}}(z)$  consisting of rational fractions without pole at  $z = \alpha$ . Then, the result [96, Lemma 3] furnishes polynomials  $b_1(z), \dots, b_{\psi(N)}(z) \in \bar{\mathfrak{k}}[z][X_0, \dots, X_n]$  such that  $\mathcal{B} = \{ [b_1(z)]_{\tilde{\mathfrak{p}}}, \dots, [b_{\psi(N)}(z)]_{\tilde{\mathfrak{p}}} \}$  is an  $\alpha$ -basis of  $\mathcal{L}_{\tilde{\mathfrak{p}}}(N)$  over  $\bar{\mathfrak{k}}(z)$ . That is, the following two properties are satisfied.

1.  $\mathcal{B}$  is a  $\bar{\mathfrak{k}}(z)$ -basis of  $\mathcal{L}_{\tilde{\mathfrak{p}}}(N)$ .
2. Every residue modulo  $\tilde{\mathfrak{p}}$  of a homogeneous polynomial of degree  $N$  in  $R_\alpha[X_0, \dots, X_n]$  is a linear combination of  $[b_1(z)]_{\tilde{\mathfrak{p}}}, \dots, [b_{\psi(N)}(z)]_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ , with coefficients in  $R_\alpha$ .



This result is used by Y. Nesterenko and A. Shidlovskii for the field  $\mathbb{C}$  instead of  $\bar{\mathbf{k}}$ . In our case, we can, as these authors, notice that the finite set of residues modulo  $\tilde{\mathfrak{p}}$  of all monomials

$$X_0^{i_0} \dots X_n^{i_n}$$

of degree  $i_0 + \dots + i_n = N$  generates  $\mathcal{L}_{\tilde{\mathfrak{p}}}(N)$  over  $\bar{\mathbf{k}}(z)$  and satisfies Property (2). Among all such finite sets which generate  $\mathcal{L}_{\tilde{\mathfrak{p}}}(N)$  and satisfy Property (2), let us consider a set  $\mathcal{S} = \{S_1(z), \dots, S_s(z)\}$  whose cardinality is minimal. If  $\mathcal{S}$  does not satisfy Property (1), there exist coprime polynomials  $T_1(z), \dots, T_s(z) \in \bar{\mathbf{k}}[z]$  such that

$$\sum_{l=1}^s T_l(z) S_l(z) = 0.$$

Without loss of generality, we may assume that  $T_s(\alpha) \neq 0$ . It follows that

$$S_s(z) = - \sum_{l=1}^{s-1} \frac{T_l(z)}{T_s(z)} S_l(z).$$

This contradicts the minimality of  $s$ . Thus, [96, Lemma 3] remains true in our framework.

**Remark III.1.1**

We see that the proof guarantees that we can choose an  $\alpha$ -basis of  $\mathcal{L}_{\tilde{\mathfrak{p}}}(N)$  over  $\bar{\mathbf{k}}(z)$  among the set of residues modulo  $\tilde{\mathfrak{p}}$  of all monic monomials

$$X_0^{i_0} \dots X_n^{i_n}$$

of degree  $i_0 + \dots + i_n = N$ .

Now, we are going to show that the family

$$\left\{ [\text{ev}_\alpha(b_i(z))]_{\text{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \bar{\mathbf{k}}[z][X_0, \dots, X_n])} \right\}_{1 \leq i \leq \psi(N)}$$

generates  $\mathcal{M}_{\text{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \bar{\mathbf{k}}[z][X_0, \dots, X_n])}(N)$  over  $\bar{\mathbf{k}}$ . Let  $P(X_0, \dots, X_n) \in \bar{\mathbf{k}}[X_0, \dots, X_n]$  be a homogeneous polynomial of degree  $N$ . As  $\bar{\mathbf{k}} \subseteq R_\alpha$ , there exist elements  $r_1, \dots, r_{\psi(N)} \in R_\alpha$  such that

$$P(X_0, \dots, X_n) - \sum_{i=1}^{\psi(N)} r_i b_i(z) \in \tilde{\mathfrak{p}}. \tag{III.10}$$

Observe that

$$P(X_0, \dots, X_n) - \sum_{i=1}^{\psi(N)} r_i b_i(z) \in \tilde{\mathfrak{p}} \cap R_\alpha[X_0, \dots, X_n].$$

Then, let us apply  $\text{ev}_\alpha(\cdot)$  to (III.10). We get

$$\begin{aligned} P(X_0, \dots, X_n) - \sum_{i=1}^{\psi(N)} \text{ev}_\alpha(r_i) \text{ev}_\alpha(b_i(z)) &\in \text{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{p}} \cap R_\alpha[X_0, \dots, X_n]) \\ &= \text{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \bar{\mathbf{k}}[z][X_0, \dots, X_n]). \end{aligned}$$

Therefore the family

$$\left\{ [\text{ev}_\alpha(b_i(z))]_{\text{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \bar{\mathbf{k}}[z][X_0, \dots, X_n])} \right\}_{1 \leq i \leq \psi(N)}$$

generates  $\mathcal{M}_{\text{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \bar{\mathbf{k}}[z][X_0, \dots, X_n])}(N)$  over  $\bar{\mathbf{k}}$ . Hence, we obtain (III.9) and Proposition III.1.1 is proved.  $\square$

We now deduce Corollary III.1.4.

*Proof of Corollary III.1.4.* First, the matrices  $A(z)$  and  $A^{-1}(z)$  only have finitely many poles. Then, there exists  $\rho_0$  with  $0 < \rho_0 < 1$  such that for every  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ ,  $0 < |\alpha| < \rho_0$ ,  $\alpha$  is regular with respect to System (II.1), and all the  $f_i(z)$ 's are analytic at  $\alpha$ . Now, in Proposition III.1.1, take  $S$  to be the set of all  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ , such that  $0 < |\alpha| < \rho_0$ . Assumption (1) of Proposition III.1.1 is guaranteed by Theorem II.1.1, Assumption (2) is satisfied, and Corollary III.1.4 follows from Proposition III.1.1.  $\square$

### Proof of the inhomogeneous counterpart of Theorem III.1.1

In this section, we use the same approach as P. Philippon [110] to obtain the following inhomogeneous counterpart of Theorem III.1.1 from Corollary III.1.4.

#### Proposition III.1.2

We continue with the assumptions of Theorem II.1.1. Let us assume further that the extension  $\overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is regular over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ .

Then, for every polynomial  $P(X_1, \dots, X_n) \in \overline{\mathbb{K}}[X_1, \dots, X_n]$  of total degree  $N$  in  $X_1, \dots, X_n$  such that

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0,$$

there exists a polynomial  $Q(z, X_1, \dots, X_n) \in \overline{\mathbb{K}}[z][X_1, \dots, X_n]$  of total degree  $N$  in  $X_1, \dots, X_n$  such that

$$Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0,$$

and

$$Q(\alpha, X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n).$$

*Proof of Proposition III.1.2.* Let us keep the assumptions of Proposition III.1.2. Let  $P(X_1, \dots, X_n) \in \overline{\mathbb{K}}[X_1, \dots, X_n]$  be a polynomial of total degree  $N$  in  $X_1, \dots, X_n$  such that

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0. \tag{III.11}$$

Let us consider  $\rho$  from Corollary III.1.4 and  $r \in \mathbb{N}$  such that  $0 < |\alpha^{dr}| < \rho$ . We can derive from  $d$ -Mahler System (II.1) the following equality.

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} f_1(z^{dr}) \\ \vdots \\ f_n(z^{dr}) \end{pmatrix}, \tag{III.12}$$

where

$$B(z) = A^{-1}(z)A^{-1}(z^d) \cdots A^{-1}(z^{dr-1}).$$

As  $\alpha$  is regular for System (II.1), it is neither a pole of  $B(z)$  nor a pole of  $B^{-1}(z)$ . Then, let us set  $z = \alpha$  in (III.12). We obtain

$$\begin{pmatrix} f_1(\alpha) \\ \vdots \\ f_n(\alpha) \end{pmatrix} = B(\alpha) \begin{pmatrix} f_1(\alpha^{dr}) \\ \vdots \\ f_n(\alpha^{dr}) \end{pmatrix}.$$

Now, let us set

$$Q(X_1, \dots, X_n) = P(\langle B_1(\alpha), \overline{X} \rangle, \dots, \langle B_n(\alpha), \overline{X} \rangle),$$

where, for every  $i \in \{1, \dots, n\}$ , we let  $B_i(z)$  denote the  $i$ -th row of the matrix  $B(z)$ ,  $\bar{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ , and  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  refers to the classical scalar product on  $\overline{\mathbb{K}}\{z\}^n$ . We get

$$Q\left(f_1\left(\alpha^{d^r}\right), \dots, f_n\left(\alpha^{d^r}\right)\right) = P\left(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)\right) = 0.$$

As  $B(\alpha)$  is invertible,  $\deg_X(Q) = \deg_X(P) = N$ . We now apply Corollary III.1.4 to  $Q$  and  $\alpha^{d^r}$ . There exists a polynomial  $R(z, X_1, \dots, X_n) \in \overline{\mathbb{K}}[z][X_1, \dots, X_n]$  of degree  $N$  in  $X_1, \dots, X_n$  such that

$$R(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0,$$

and

$$R(\alpha^{d^r}, X_1, \dots, X_n) = Q(X_1, \dots, X_n).$$

It follows that

$$R(z^{d^r}, f_1(z^{d^r}), \dots, f_n(z^{d^r})) = 0.$$

Now, let  $B_i^{-1}(z), i = 1, \dots, n$ , denote the  $i$ -th row of the matrix  $B^{-1}(z)$ . Let  $b(z) \in \mathbb{K}[z]$  be a polynomial such that for every  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $b(z)B_i^{-1}(z) \in \mathbb{K}[z]^n$  and for every  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha^{d^k}$  is not a zero of  $b(z)$  (which is possible because for every  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha^{d^k}$  is not a pole of  $A(z)$ ). Let us set

$$S(z, X_1, \dots, X_n) = R\left(z^{d^r}, \langle B_1^{-1}(z), \bar{X} \rangle, \dots, \langle B_n^{-1}(z), \bar{X} \rangle\right) \left(\frac{b(z)}{b(\alpha)}\right)^N.$$

By construction, we have

$$S(z, X_1, \dots, X_n) \in \overline{\mathbb{K}}[z][X_1, \dots, X_n].$$

As  $B^{-1}(z)$  is invertible,  $\deg_X(S) = \deg_X(R) = N$ . Besides, we obtain

$$S(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = R\left(z^{d^r}, f_1(z^{d^r}), \dots, f_n(z^{d^r})\right) \left(\frac{b(z)}{b(\alpha)}\right)^N = 0.$$

Finally, as  $\alpha$  is regular, we get

$$\begin{aligned} S(\alpha, X_1, \dots, X_n) &= R\left(\alpha^{d^r}, \langle B_1^{-1}(\alpha), \bar{X} \rangle, \dots, \langle B_n^{-1}(\alpha), \bar{X} \rangle\right) \\ &= Q\left(\langle B_1^{-1}(\alpha), \bar{X} \rangle, \dots, \langle B_n^{-1}(\alpha), \bar{X} \rangle\right) \\ &= P\left(\left\langle B_1(\alpha), \begin{pmatrix} \langle B_1^{-1}(\alpha), \bar{X} \rangle \\ \vdots \\ \langle B_n^{-1}(\alpha), \bar{X} \rangle \end{pmatrix} \right\rangle, \dots, \left\langle B_n(\alpha), \begin{pmatrix} \langle B_1^{-1}(\alpha), \bar{X} \rangle \\ \vdots \\ \langle B_n^{-1}(\alpha), \bar{X} \rangle \end{pmatrix} \right\rangle\right) \\ &= P(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Thus, we have found a polynomial  $S(z, X_1, \dots, X_n) \in \overline{\mathbb{K}}[z][X_1, \dots, X_n]$  of degree  $N$  in  $X_1, \dots, X_n$  such that

$$S(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0,$$

and

$$S(\alpha, X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n).$$

The inhomogeneous counterpart of Theorem III.1.1 is proved.  $\square$

### End of the proof of Theorem III.1.1

The first part of the proof of Theorem III.1.1 consists in showing the following analogue of [8, Théorème 4.1].

#### Theorem III.1.5

Under the assumptions of Theorem III.1.1, we have

$$\text{Rel}_{\overline{\mathbb{K}}}(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = \text{ev}_\alpha(\text{Rel}_{\overline{\mathbb{K}}(z)}(f_1(z), \dots, f_n(z))), \quad (\text{III.13})$$

where for a field  $L$  and elements  $u_1, \dots, u_n$  of a  $L$ -vector space, we let  $\text{Rel}_L(u_1, \dots, u_n)$  denote the set of linear relations over  $L$  between the  $u_i$ 's.

We do not reproduce the proof of Theorem III.1.5. It can be proved as in [8], by induction on the dimension of  $\text{Rel}_{\overline{\mathbb{K}}(z)}(f_1(z), \dots, f_n(z))$ . However, we give here more details about how to deduce Theorem III.1.1 from Theorem III.1.5 (also see [9]). Let  $P(X_1, \dots, X_n) \in \overline{\mathbb{K}}[X_1, \dots, X_n]$  be homogeneous of degree  $N$  in  $X_1, \dots, X_n$  such that

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0. \quad (\text{III.14})$$

Let  $\mathcal{G}_N$  denote the set of all monic monomials of degree  $N$  in  $f_1(z), \dots, f_n(z)$ . Then, (III.14) can be seen as a linear relation over  $\overline{\mathbb{K}}$  between specializations at  $z = \alpha$  of elements of  $\mathcal{G}_N$ . Our aim is to show that the elements of  $\mathcal{G}_N$  satisfy a  $d$ -Mahler system for which  $\alpha$  is still regular and apply Theorem III.1.5 to the functions of  $\mathcal{G}_N$  and  $P$ .

To do so, in the sequel, we define by induction on  $N$ ,  $n$  vectors  $M_N^1(z), \dots, M_N^n(z)$  which satisfy the following properties.

1. For every  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $M_N^i(z)$  is composed of  $n^{N-1}$  rows. We write

$$M_N^i(z) = \begin{pmatrix} L_{N,1}^i(z) \\ \vdots \\ L_{N,n^{N-1}}^i(z) \end{pmatrix}.$$

2. For all  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n^{N-1}\}$ ,  $L_{N,j}^i(z) \in \mathcal{G}_N$ .
3.  $\mathcal{G}_N \subseteq \{L_{N,j}^i(z)\}_{i,j}$ .

Let us set

$$M_N(z) = \begin{pmatrix} M_N^1(z) \\ \vdots \\ M_N^n(z) \end{pmatrix}. \quad (\text{III.15})$$

This is a vector of  $n^N$  rows of elements of  $\mathcal{G}_N$ . Let us define (III.15) by induction on  $N$  in the following way.

- (a) For every  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$M_1^i(z) = f_i(z).$$

- (b) For all  $N \geq 2$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$M_N^i(z) = M_{N-1}(z) f_i(z) = \begin{pmatrix} M_{N-1}^1(z) f_i(z) \\ \vdots \\ M_{N-1}^n(z) f_i(z) \end{pmatrix}.$$

We see that this definition allows  $M_N(z)$  to satisfy properties (1)-(3), for every  $N \geq 1$ . Now, we have the following Lemma.

**Lemma III.1.1**

The elements of  $\mathcal{G}_N$  satisfy the following  $d$ -Mahler system

$$M_N(z^d) = A^{\otimes N}(z)M_N(z), \quad (\text{III.16})$$

where  $\otimes$  stands for the Kronecker product.

*Proof of Lemma III.1.1.* We prove Lemma III.1.1 by induction on  $N$ . For  $N = 1$ , (III.16) holds. Now, let us assume that (III.16) is satisfied at the rank  $N - 1$ . Let us set  $A(z) = (a_{i,j}(z))_{i,j}$  for the matrix of  $d$ -Mahler System (II.1). Then, we have for every  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} M_N^i(z^d) &= M_{N-1}(z^d)f_i(z^d) \\ &= A^{\otimes N-1}(z)M_{N-1}(z)f_i(z^d), \text{ by assumption} \\ &= A^{\otimes N-1}(z)M_{N-1}(z)\sum_{j=1}^n a_{i,j}(z)f_j(z) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( a_{i,j}(z)A^{\otimes N-1}(z) \right) M_N^j(z). \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

If we cut the rows of the matrix  $A^{\otimes N}(z)$  from top to bottom into  $n$  blocks of  $n^{N-1}$  rows, (III.17) corresponds to the product of the  $i$ -th block of  $A^{\otimes N}(z)$  by  $M_N(z)$ . This implies Lemma III.1.1.  $\square$

We are now able to end the proof of Theorem III.1.1

*End of the proof of Theorem III.1.1.* By a property of the Kronecker product (see for example [64]), the coefficients of  $A^{\otimes N}(z)$  are products of elements of  $A(z)$  and we have, for every  $N \geq 2$ ,

$$\det \left( A^{\otimes N}(z) \right) = \det (A(z))^{nN}.$$

We deduce that  $\alpha$  is still a regular number for  $d$ -Mahler System (III.16). On the other hand,  $\overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is regular over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$  and

$$\overline{\mathbb{K}}(z)(\mathcal{G}_N) \subseteq \overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z)).$$

Then, by [55, Corollary A1.6],  $\overline{\mathbb{K}}(z)(\mathcal{G}_N)$  is separable over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . It follows that  $\overline{\mathbb{K}}(z)(\mathcal{G}_N)$  is regular over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Hence, Theorem III.1.1 follows from Theorem III.1.5.  $\square$

We end this section with the following remark, which allows us to consider Theorem III.1.1 from an other point of view.

**Remark III.1.2**

Let us keep the assumptions of Theorem II.1.1. Then, the regularity of

$$\overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$$

in the assumptions of Theorem III.1.1 can be replaced by

$$(*) \quad ev_\alpha \left( \tilde{\mathfrak{p}} \cap \overline{\mathbb{K}}[z][X_0, \dots, X_n] \right) \text{ is prime in } \overline{\mathbb{K}}[X_0, \dots, X_n].$$

Indeed, if  $(*)$  is satisfied, we can reproduce the proof of Proposition III.1.1 from (III.6) to the end to show that Proposition III.1.1 holds. Then, Corollary III.1.4 holds and it follows from Sections III.1.1 and III.1.1 that Theorem III.1.1 holds. Reciprocally, if Theorem III.1.1 holds, we have  $ev_\alpha(\tilde{\mathfrak{p}} \cap \overline{\mathbb{K}}[z][X_0, \dots, X_n]) = \tilde{\mathfrak{p}}_\alpha$ , and  $(*)$  is satisfied.

### III.1.2 Proof of Theorem III.1.2

Let us keep the notations and assumptions of Theorem III.1.2. We recall that  $R_\alpha$  is the localization of the ring  $\bar{\mathbf{k}}[z]$  at the ideal  $(z - \alpha)$ . Before going through the proof of Theorem III.1.2, let us make a remark in the vein of Remark III.1.1 and recall basic facts about Cartier operators, along with a result of S. Mac Lane concerning separability. Let  $N \in \mathbb{N}$ . We set

$$\mathcal{G} = \text{vect}_{\bar{\mathbf{k}}(z)}\{Q(f_1(z), \dots, f_n(z)), Q \in \bar{\mathbf{k}}(z)[X_1, \dots, X_n], \text{homogeneous, } \deg_X(Q) \leq N\}.$$

#### Remark III.1.3

We can prove, in the same way as in the proof of [96, Lemma 3], that there exist monic monomials  $M_l(X_1, \dots, X_n)$ , with  $\deg_X(M_l) \leq N$ ,  $l = 1, \dots, s$ , such that the family  $\{M_l(f_1(z), \dots, f_n(z))\}_l$  is a basis of  $\mathcal{G}$  which satisfies the following property.

(\* $_\alpha$ ) For every  $P(X_1, \dots, X_n) \in R_\alpha[X_1, \dots, X_n]$ , there exist  $P_1(z), \dots, P_s(z) \in R_\alpha$  such that

$$P(f_1(z), \dots, f_n(z)) = \sum_{l=1}^s P_l(z) M_l(f_1(z), \dots, f_n(z)).$$

If  $\mathbf{k}$  has characteristic  $p$ , we recall some basic facts about Cartier operators. Let

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a(n)z^n \in \tilde{\mathbf{k}}[[z]].$$

Let  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ . The  $r$ -th Cartier operator over  $\tilde{\mathbf{k}}[[z]]$  is defined by

$$\Lambda_r(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a(np+r)z^n.$$

Then, we recall the following result.

#### Proposition III.1.3

Let  $f, g \in \tilde{\mathbf{k}}[[z]]$ .

1. We have

$$f(z) = \sum_{i=0}^{p-1} \Lambda_i(f)^p z^i.$$

In particular,

$$f(z) \neq 0 \Rightarrow \exists i \in \{0, \dots, p-1\}, \Lambda_i(f) \neq 0.$$

2. Let  $i \in \{0, \dots, p-1\}$ . Then

$$\Lambda_i(fg^p) = \Lambda_i(f)g.$$

Besides, if  $\mathbf{k}$  has characteristic  $p$ , we let  $\mathbf{k}^{1/p^\infty}$  denote the perfect closure of  $\mathbf{k}$ . That is, the union over  $n$  of the fields generated by the  $p^n$ -th roots of all the elements of  $\mathbf{k}$ . Finally, we recall a fundamental theorem from S. Mac Lane [84] (see also [55, Theorem A1.3]).

#### Theorem III.1.6 (S. Mac Lane)

Let  $\mathbf{k} \subseteq L$  be a field extension. Then, this extension is separable if and only if every family  $\{x_i\}_i$  of elements of  $L$  that is linearly independent over  $\mathbf{k}$  remains linearly independent over  $\mathbf{k}^{1/p^\infty}$ .

Then, we prove the following result.

#### Proposition III.1.4

Let  $\mathbf{k}$  be a valued field. We assume that  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \bar{\mathbf{k}}\{z\}$  are analytic functions on a domain  $\mathcal{U} \subseteq \tilde{\mathbf{k}}$  which contains the origin. Then, the extension  $\bar{\mathbf{k}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is separable over  $\bar{\mathbf{k}}(z)$ .

*Proof of Proposition III.1.4.* If the characteristic of  $\mathbf{k}$  is zero, the result is known. Now, let us assume that  $\mathbf{k}$  has characteristic  $p > 0$ . Let us assume by contradiction that  $\overline{\mathbf{k}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is not separable over  $\overline{\mathbf{k}}(z)$ . Let us note that

$$\overline{\mathbf{k}}(z)^{1/p^\infty} = \cup_{k=0}^{+\infty} \overline{\mathbf{k}}(z^{1/p^k}).$$

Besides, let us set

$$\overline{\mathbf{k}}[z]^{1/p^\infty} = \cup_{k=0}^{+\infty} \overline{\mathbf{k}}[z^{1/p^k}].$$

By Theorem III.1.6, there exist elements  $g_1(z), \dots, g_m(z) \in \overline{\mathbf{k}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  which are linearly independent over  $\overline{\mathbf{k}}(z)$  but linearly dependent over  $\overline{\mathbf{k}}(z)^{1/p^\infty}$ . Let  $D \in \overline{\mathbf{k}}[z][f_1(z), \dots, f_n(z)] \setminus \{0\}$  be such that

$$g_i(z)D \in \overline{\mathbf{k}}[z][f_1(z), \dots, f_n(z)], \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Then,  $g_1(z)D, \dots, g_m(z)D$  are linearly independent over  $\overline{\mathbf{k}}(z)$  but linearly dependent over  $\overline{\mathbf{k}}(z)^{1/p^\infty}$ . Hence, even if it means replacing each  $g_i(z)$  by  $g_i(z)D$ , we assume that for every  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $g_i(z) \in \overline{\mathbf{k}}[z][f_1(z), \dots, f_n(z)]$ .

Then, there exist elements  $G_1(z), \dots, G_m(z) \in \overline{\mathbf{k}}[z]^{1/p^\infty}$  not all zero such that

$$\sum_{i=1}^m G_i(z)g_i(z) = 0.$$

Without loss of generality, we may assume that  $G_m(z) \neq 0$ . On the other hand, there exists an integer  $\mu \geq 1$  such that  $G_i(z)^{p^\mu} \in \overline{\mathbf{k}}[z]$  for every  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Then, we have

$$\sum_{i=1}^m G_i(z)^{p^\mu} g_i(z)^{p^\mu} = 0. \quad (\text{III.18})$$

Let us note that for every  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,

$$G_i(z)^{p^\mu}, g_i(z) \in \overline{\mathbf{k}}[z][f_1(z), \dots, f_n(z)] \subseteq \overline{\mathbf{k}}\{z\}.$$

Now, let us choose for every integer  $j \in \{1, \dots, \mu\}$  a Cartier operator  $\Lambda^{(j)}$  such that

$$\Lambda^{(\mu)} \circ \dots \circ \Lambda^{(1)}(G_m(z)^{p^\mu}) \neq 0.$$

We apply  $\Lambda := \Lambda^{(\mu)} \circ \dots \circ \Lambda^{(1)}$  to (III.18) and get

$$\sum_{i=1}^m \Lambda(G_i(z)^{p^\mu})g_i(z) = 0. \quad (\text{III.19})$$

Then, (III.19) is a non-trivial linear relation between the  $g_i(z)$ 's over  $\overline{\mathbf{k}}(z)$  and a contradiction. Proposition III.1.4 is thus proved. □

Before proving Theorem III.1.2, we introduce some definitions. We recall that we let  $\mathbf{k}$  denote a valued field and  $\mathbf{k}_c$  its completion. Its valuation extends uniquely to  $\overline{\mathbf{k}_c}$ , and we let  $\tilde{\mathbf{k}}$  denote the completion of  $\overline{\mathbf{k}_c}$  with respect to this valuation. Now, let  $\mathcal{U} \subseteq \tilde{\mathbf{k}}$  be a domain. We say that a function is meromorphic on  $\mathcal{U}$  if there exists a (possibly empty) discrete closed subset  $\mathcal{P}$  of  $\mathcal{U}$  such that  $f(z)$  is analytic on  $\mathcal{U} \setminus \mathcal{P}$ , and each element of  $\mathcal{P}$  is a pole of  $f(z)$ . Then, for every  $\alpha \in \mathcal{P}$ ,  $f(z)$  admits a convergent Laurent power series expansion in a punctured neighbourhood of  $\alpha$  with coefficients in  $\tilde{\mathbf{k}}$ , of the form  $\sum_{n=-N}^{+\infty} a_n(z - \alpha)^n$ , for some  $N \in \mathbb{N}$ . We notice that if  $\{f_i(z)\}_{1 \leq i \leq n} \subset \mathbb{K}\{z\}$  satisfies System (II.1), if  $0 < |\alpha| < 1$ , and if for every  $k \in \mathbb{N}$  the number  $\alpha^{d^k}$  is not a pole of  $A^{-1}(z)$ , then the  $f_i(z)$  are well-defined at  $\alpha$  and  $\{f_i(z)\}_{1 \leq i \leq n} \subset C\{z - \alpha\}$ .

We are now able to prove Theorem III.1.2.

*Proof of Theorem III.1.2.* Let us assume that the extension  $\overline{\mathbf{k}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is not regular over  $\overline{\mathbf{k}}(z)$ . We recall that  $\overline{\mathbf{k}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is regular over  $\overline{\mathbf{k}}(z)$  if

1.  $\overline{\mathbf{k}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is separable over  $\overline{\mathbf{k}}(z)$
2. Every element of  $\overline{\mathbf{k}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  that is algebraic over  $\overline{\mathbf{k}}(z)$  belongs to  $\overline{\mathbf{k}}(z)$ .

By Proposition III.1.4, we only have to prove that the conclusion of Theorem III.1.2 holds when there exists an element of  $\overline{\mathbf{k}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  that is algebraic over  $\overline{\mathbf{k}}(z)$  but does not belong to  $\overline{\mathbf{k}}(z)$ .

Thus, let us assume that there exists an element  $a(z) \in \overline{\mathbf{k}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z)) \cap \overline{\mathbf{k}(z)} \setminus \overline{\mathbf{k}}(z)$ . We can write

$$a(z) = \frac{P(f_1(z), \dots, f_n(z))}{Q(f_1(z), \dots, f_n(z))}, \quad (\text{III.20})$$

where  $P(X_1, \dots, X_n), Q(X_1, \dots, X_n) \in \overline{\mathbf{k}}[z][X_1, \dots, X_n]$  are polynomials of total degree less than or equal to some integer  $N \geq 0$ .

We recall that we let  $\mathcal{G}$  denote the  $\overline{\mathbf{k}}(z)$ -vector space generated by all homogeneous polynomials of degree less than or equal to  $N$  in  $f_1(z), \dots, f_n(z)$ .

By Remark III.1.3, there exist monic monomials  $M_l(X_1, \dots, X_n)$ , with  $\deg_X(M_l) \leq N, l = 1, \dots, s$ , such that the family  $\{M_l(\{f_i(z)\})\}_l$  is a basis of  $\mathcal{G}$  over  $\overline{\mathbf{k}}(z)$  which satisfies Property  $(*_\alpha)$  of Remark III.1.3. Then, (III.20) turns into

$$a(z) = \frac{N_1(z)M_1(\{f_i(z)\}) + \dots + N_s(z)M_s(\{f_i(z)\})}{D_1(z)M_1(\{f_i(z)\}) + \dots + D_s(z)M_s(\{f_i(z)\})}, \quad (\text{III.21})$$

where for every  $l \in \{1, \dots, s\}$ ,  $N_l(z), D_l(z) \in \overline{\mathbf{k}}[z]$ .

We can rewrite (III.21) in the following way

$$F_1(z)M_1(\{f_i(z)\}) + \dots + F_s(z)M_s(\{f_i(z)\}) = 0, \quad (\text{III.22})$$

where for every  $l \in \{1, \dots, s\}$ ,  $F_l(z) = D_l(z)a(z) - N_l(z)$ .

We may assume without loss of generality that for every  $l$ ,  $F_l(z) \in \tilde{\mathbf{k}}\{z - \alpha\}$ . Indeed, on the one hand, as the functions  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \tilde{\mathbf{k}}\{z - \alpha\}$ ,  $a(z)$  can be expressed as a Laurent power series at the point  $z = \alpha$ . If  $a(z) \notin \tilde{\mathbf{k}}\{z - \alpha\}$ , writing  $u > 0$  the order of the pole of  $a(z)$  at  $z = \alpha$ , we could replace  $a(z)$  by the function

$$(z - \alpha)^u a(z) \in \overline{\mathbf{k}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z)) \cap \overline{\mathbf{k}(z)} \setminus \overline{\mathbf{k}}(z),$$

which has no pole at  $z = \alpha$ . Therefore, we can assume that  $a(z) \in \tilde{\mathbf{k}}\{z - \alpha\}$ . Then, as for every  $l \in \{1, \dots, s\}$ ,  $N_l(z), D_l(z) \in \overline{\mathbf{k}}[z]$ , we get that  $F_l(z) \in \tilde{\mathbf{k}}\{z - \alpha\}$ .

Now, let us notice that we can assume without loss of generality that

$$\exists l_0 \in \{1, \dots, s\}, F_{l_0}(\alpha) \neq 0. \quad (\text{III.23})$$

Indeed,  $F_l(z) \in \tilde{\mathbf{k}}\{z - \alpha\}$ . Therefore, if (III.23) is not satisfied, let  $v > 0$  denote the minimal order at  $\alpha$  as a zero of the functions  $F_l(z)$ . Then, instead of (III.22), we could consider the following equation

$$G_1(z)M_1(\{f_i(z)\}) + \dots + G_s(z)M_s(\{f_i(z)\}) = 0, \quad (\text{III.24})$$

where for every  $l \in \{1, \dots, s\}$ ,  $G_l(z) = \frac{F_l(z)}{(z - \alpha)^v} \in \tilde{\mathbf{k}}\{z - \alpha\}$ . The functions  $G_l$  satisfy (III.23). Hence, even if it means replacing (III.22) by (III.24), we assume that (III.23) holds.

Then, we have

$$F_1(\alpha)M_1(\{f_i(\alpha)\}) + \dots + F_s(\alpha)M_s(\{f_i(\alpha)\}) = 0. \quad (\text{III.25})$$

Hence, setting

$$P(X_1, \dots, X_n) = \sum_{l=1}^s F_l(\alpha)M_l(X_1, \dots, X_n),$$



we get

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0. \quad (\text{III.26})$$

Let us assume by contradiction that the relation (III.26) lifts into a functional relation over  $\bar{\mathbf{k}}(z)$ . Let  $N' \leq N$  denote the total degree of  $P(X_1, \dots, X_n)$ . Then, there exists a polynomial

$$Q(z, X_1, \dots, X_n) \in \bar{\mathbf{k}}[z][X_1, \dots, X_n],$$

of total degree  $N'$  in  $X_1, \dots, X_n$ , such that

$$Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0, \quad (\text{III.27})$$

and

$$Q(\alpha, X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n). \quad (\text{III.28})$$

Let us notice that the family  $\{M_l(X_1, \dots, X_n)\}_l$  is free over  $\bar{\mathbf{k}}(z)$ . Let  $\{N_j(X_1, \dots, X_n)\}_{1 \leq j \leq t}$  be a family of monic monomials such that the family  $\{M_l(X_1, \dots, X_n), N_j(X_1, \dots, X_n)\}_{l,j}$  is a basis of the  $\bar{\mathbf{k}}(z)$ -vector space spanned by all homogeneous polynomials of degree less than or equal to  $N$  in  $X_1, \dots, X_n$ .

Then, we can write the polynomial  $Q(z, X_1, \dots, X_n)$  in the following way.

$$Q(z, X_1, \dots, X_n) = \sum_{l=1}^s Q_l(z) M_l(X_1, \dots, X_n) + \sum_{j=1}^t R_j(z) N_j(X_1, \dots, X_n),$$

where for every  $l$  and every  $j$ ,  $Q_l(z), R_j(z) \in \bar{\mathbf{k}}[z]$ . By (III.28), we have

$$\begin{cases} Q_l(\alpha) = F_l(\alpha), \forall l \in \{1, \dots, s\} \\ R_j(\alpha) = 0, \forall j \in \{1, \dots, t\}. \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

Now, we have

$$\begin{aligned} 0 &= Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) \\ &= \sum_{l=1}^s Q_l(z) M_l(\{f_i(z)\}) + \sum_{j=1}^t R_j(z) N_j(\{f_i(z)\}). \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

Let us remark that

$$N_j(X_1, \dots, X_n) \in \bar{\mathbf{k}}[X_1, \dots, X_n] \subseteq R_\alpha[X_1, \dots, X_n].$$

Hence, by Remark III.1.3, we get that for every  $j \in \{1, \dots, t\}$  there exist polynomials

$$S_{j,1}(z), \dots, S_{j,s}(z) \in R_\alpha,$$

such that

$$N_j(\{f_i(z)\}) = \sum_{l=1}^s S_{j,l}(z) M_l(\{f_i(z)\}).$$

Therefore, (III.30) turns into

$$0 = \sum_{l=1}^s Q_l(z) M_l(\{f_i(z)\}) + \sum_{j=1}^t R_j(z) \sum_{l=1}^s S_{j,l}(z) M_l(\{f_i(z)\}).$$

Now,  $\{M_l(f_1(z), \dots, f_n(z))\}_l$  is a  $\bar{\mathbf{k}}(z)$ -basis of  $\mathcal{G}$ . Thus, we obtain

$$Q_l(z) + \sum_{j=1}^t R_j(z) S_{j,l}(z) = 0, \forall l \in \{1, \dots, s\},$$

and

$$Q_l(\alpha) + \sum_{j=1}^t R_j(\alpha) S_{j,l}(\alpha) = 0, \quad \forall l \in \{1, \dots, s\}.$$

By (III.29), we get

$$F_l(\alpha) = 0, \quad \forall l \in \{1, \dots, s\},$$

which contradicts (III.23). Theorem III.1.2 is proved.  $\square$

### III.1.3 Proof of Theorem III.1.3 and Corollary III.1.3

We prove Theorem III.1.3 following the strategy of J. Roques [114]. We extend Proposition 4 and Corollary 5 of [114] for the base field  $C$  instead of  $\overline{\mathbb{F}_p}$ . The analogue of Proposition 4 is the following.

#### Proposition III.1.5

Let  $L$  be a finite extension of  $C(z)$ . Let  $d \geq 2$  be an integer such that  $p \nmid d$ . Let us assume that the endomorphism  $\phi_d$  of  $C(z)$  defined by  $\phi_d(P(z)) = P(z^d)$  extends to a field endomorphism of  $L$ . Then, there exist a positive integer  $N$  and  $z_N \in L$  such that

(i)  $z_N^N = z$ .

(ii)  $L$  is a purely inseparable extension of  $C(z_N)$ .

*Proof of Proposition III.1.5.* We still let  $\phi_d$  denote its extension to  $L$ . Let  $E$  denote the separable closure of  $C(z)$  in  $L$ . Then, we see that for every  $x \in E$ ,  $\phi_d(x) \in E$ . Hence,  $\phi_d$  induces a field endomorphism of  $E$ . Let  $X$  denote a smooth projective curve whose function field is  $E$  (see for example [68, I.6]). Let  $j : \mathbb{P}^1(C) \rightarrow \mathbb{P}^1(C)$  be the morphism of curves associated with  $\phi_d : C(z) \rightarrow C(z)$ ,  $f : X \rightarrow X$  the morphism of curves associated with the extension of  $\phi_d$  to  $E$ , and  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(C)$  the morphism of curves associated with the inclusion  $i : C(z) \hookrightarrow E$ . Then, we have the following commutative diagram.

$$\begin{array}{ccccc}
 (x_1, x_2) & & X & \xrightarrow{f} & X & & (x_1, x_2) \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 (1, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}) & & \mathbb{P}^1(C) & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(C) & & (1, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}) \\
 & & (x_1, x_2) \longmapsto_j & & \left(1, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}\right)^d & & 
 \end{array} \quad (D_1)$$

Now, we prove that  $f$  satisfies the following properties.

- (1)  $f$  is a separable morphism, that is  $E/\phi_d(E)$  is a separable extension.
- (2)  $f$  has degree  $d$ .
- (3)  $f$  is totally ramified above any point of  $\varphi^{-1}(0) \cup \varphi^{-1}(\infty)$ .

To prove the first assertion, it suffices to show that  $E/\phi_d(C(z))$  is separable. But  $\phi_d(C(z)) = C(z^d)$ . As  $p \nmid d$ ,  $C(z)/C(z^d)$  is separable. Besides, by definition,  $E/C(z)$  is separable. Assertion 1 follows. The second assertion can be read on the diagram  $(D_1)$ . We get  $\deg(f) \deg(\varphi) = \deg(\varphi) \deg(j)$ . But  $\deg(j) = [C(z) : \phi_d(C(z))] = d$ . Finally, let us prove the last assertion. By diagram  $(D_1)$ , we get  $f^{-1}(\varphi^{-1}(0)) = \varphi^{-1}(0)$ . Besides, as  $X$  is a smooth projective curve, by [68, II, 6.7, 6.8, Exercise 3.5], the set  $\varphi^{-1}(0)$  is finite. Let  $x \in \varphi^{-1}(0)$ . We deduce that the set  $f^{-1}(x)$  has exactly one element. Now, it follows from [125, II, Proposition 2.6] that  $f$  is totally ramified above  $x$ . The same arguments hold for  $\varphi^{-1}(\infty)$  and Assertion (3) is proved. Now, let  $g$  be the genus of  $X$ . We prove that  $g \in \{0, 1\}$ . First,



From now on, if  $h$  is a morphism of curves, we let  $h^*$  denote the associated morphism of function fields. We deduce from properties (1)-(4) of  $f$  that the morphism  $cf c^{-1}$  satisfies properties (1')-(4'). Hence  $h_2 = (cf c^{-1})^*$ . Now, let  $h_1 = (\varphi c^{-1})^*$  and  $P(u) \in C(u)$  be such that  $(\varphi c^{-1})^*(z) = P(u)$ .

By Diagram  $(D_1)$ , we get the following commutative diagram.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{cf c^{-1}} & X \\ \varphi c^{-1} \downarrow & & \downarrow \varphi c^{-1} \\ \mathbb{P}^1(C) & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(C) \\ (x_1, x_2) \xrightarrow{j} & & \left(1, \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^d\right) \end{array}$$

Lemma III.1.2 follows by considering the associated morphisms of function fields.  $\square$

We are now able to conclude the proof of Proposition III.1.5. Let us read Diagram  $(D_2)$ . On the one hand, we obtain

$$h_2 \circ h_1(z) = P(u^d),$$

and on the other hand

$$h_1 \circ \phi_d(z) = P(u)^d.$$

Then  $P(u^d) = P(u)^d$ . But  $p \nmid d$ . Hence

$$P(u) = \lambda u^N,$$

where  $N \in \mathbb{Z}$  and  $\lambda^d = \lambda \in C$ .

Now, let  $c_1 = (c^{-1})^*$  denote the function field automorphism associated with  $c^{-1}$ . We have

$$h_1 = (\varphi c^{-1})^* = c_1 \varphi^* = c_1 i,$$

where  $i$  is the inclusion of  $C(z)$  in  $E$  defined in the beginning of this proof. Let us set

$$i(z) = z = Q(u),$$

where  $Q(u) \in C(u)$ . Then, we get

$$\begin{aligned} \lambda u^N &= h_1(z) \\ &= c_1 i(z) \\ &= c_1(Q(u)). \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} z &= Q(u) \\ &= c_1^{-1}(\lambda u^N) \\ &= \lambda (c_1^{-1}(u))^N. \end{aligned}$$

Now, let  $\mu$  be a  $N$ -th root of  $\lambda$  in  $C$ . Let us set

$$\begin{cases} z_N &= \mu c_1^{-1}(u), \text{ if } N \geq 0 \\ &= 1/(\mu c_1^{-1}(u)) \text{ otherwise.} \end{cases}$$

In both cases,  $z_N \in E$  and we obtain

$$z = z_N^{|N|},$$

and

$$E = C(u) = C(z_N).$$

Finally, as  $E$  is the separable closure of  $C(z)$  in  $L$ ,  $L$  is a purely inseparable extension of  $C(z_N)$ . Proposition III.1.5 is proved.  $\square$

We deduce the analogue of Corollary 5 of [114].

**Corollary III.1.5**

Let  $L \subset C((z))$  be a finite extension of  $C(z)$ . Let  $d \geq 2$  be an integer such that  $p \nmid d$ . We assume that the endomorphism  $\phi_d$  of  $C(z)$  defined by  $\phi_d(P(z)) = P(z^d)$  extends to a field endomorphism of  $L$ . Then,  $L$  is a purely inseparable extension of  $C(z)$ .

*Proof of Corollary III.1.5.* We have  $z_N^N = z$ , with  $z_N \in L \subset C((z))$ . Hence,  $N = 1$ ,  $z_N = z$  and Corollary III.1.5 is proved.  $\square$

We are now able to prove Theorem III.1.3. To do so, we use here Cartier operators (see Proposition III.1.3).

*Proof of Theorem III.1.3.* Let us assume that  $f(z)$  is algebraic over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Let (III.2) be the minimal inhomogeneous equation of  $f(z)$  and set

$$L = C(z) \left( f(z), \dots, f \left( z^{d^{m-1}} \right) \right).$$

We note that, for every  $l \geq 0$ ,  $f \left( z^{d^l} \right)$  is algebraic over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . It follows that  $L$  is a finite extension of  $C(z)$ . Besides,  $d$ -Mahler Equation (III.2) guarantees that  $\phi_d$  induces a field endomorphism of  $L$ . Then, by Corollary III.1.5,  $L$  is a purely inseparable extension of  $C(z)$ . We deduce that there exists an integer  $s$  such that  $f(z)^{p^s} \in C(z)$ . Hence, there exist non-zero polynomials  $A(z), B(z) \in C[z]$  such that

$$B(z)f(z)^{p^s} = A(z). \tag{III.32}$$

Now, let us choose for every integer  $j \in \{1, \dots, s\}$  a Cartier operator  $\Lambda^{(j)}$  such that

$$\Lambda^{(s)} \circ \dots \circ \Lambda^{(1)}(B(z)) \neq 0.$$

We apply  $\Lambda := \Lambda^{(s)} \circ \dots \circ \Lambda^{(1)}$  to (III.32) and get

$$\Lambda(B(z))f(z) = \Lambda(A(z)).$$

Then,  $f(z) \in C(z) \cap \mathbb{K}\{z\} = \mathbb{K}(z)$  and Theorem III.1.3 is proved.  $\square$

*Proof of Corollary III.1.3.* Let  $L = \overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  be a  $d$ -Mahler extension over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Without loss of generality, we can assume that  $(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is a solution vector of System (II.1). Indeed, if not, we can insert the  $f_i(z)$  into a solution vector

$$\underline{g}(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z), g_{n+1}(z), \dots, g_N(z))$$

of a  $d$ -Mahler system of size  $N \geq n$ . Then, we have

$$L \subseteq \overline{\mathbb{K}}(z)(\underline{g}(z)).$$

Thus, if we prove that  $\overline{\mathbb{K}}(z)(\underline{g}(z))$  is regular over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ , it follows from [55, Corollary A1.6] that  $L$  is regular over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Now, by Proposition III.1.4,  $L$  is separable over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . It thus remains to prove that every element of  $L$  that is algebraic over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$  belongs to  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . To do so, we follow the same approach as in [8]. Let  $E$  be the algebraic closure of  $\overline{\mathbb{K}}(z)$  in  $L$  and  $f(z) \in E$ . Our aim is to prove that  $f(z)$  is  $d$ -Mahler and apply Theorem III.1.3. First, it follows from System (II.1) that for every  $l \geq 0$ ,  $f(z^{d^l}) \in L$ . Then, the fact that  $f(z) \in E$  implies that for every  $l \geq 0$ ,  $f(z^{d^l}) \in E$ . Now, it suffices to prove that  $E$  is a finite extension of  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . As  $L$  is a finitely generated extension of  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ , the subextension  $E$  has the same property (see for example [77, VIII, Exercise 4]). But  $E$  is also an algebraic extension of  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Hence,  $E$  is a finite extension of  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . It follows that  $f(z)$  is  $d$ -Mahler. Thus, by Theorem III.1.3,  $f(z) \in \mathbb{K}(z)$  and Corollary III.1.3 is proved.  $\square$

### III.1.4 Proof of Corollary III.1.2

We prove here Corollary III.1.2.

*Proof of Corollary III.1.2.* Let us keep the assumptions of Corollary III.1.2. Let (III.3) be the minimal inhomogeneous system satisfied by  $f(z)$ . Let us prove the first assertion. Let us assume that  $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{K}}$ . For every  $i \in \{1, \dots, m\}$ , let us set

$$f_i(z) = f(z^{d^{i-1}}).$$

There exists an integer  $l \geq 0$  such that  $\alpha^{d^l}$  is regular for  $d$ -Mahler System (III.3). Therefore, by Theorem III.1.1 and minimality of (III.3), the numbers  $1, f_1(\alpha^{d^l}), \dots, f_m(\alpha^{d^l})$  are linearly independent over  $\overline{\mathbb{K}}$ . Moreover, we can write

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = A_l(z) \begin{pmatrix} 1 \\ f_1(z^{d^l}) \\ \vdots \\ f_m(z^{d^l}) \end{pmatrix}, \quad (\text{III.33})$$

where

$$A_l(z) = A^{-1}(z)A^{-1}(z^d) \dots A^{-1}(z^{d^{l-1}}).$$

Then, we can see that  $\alpha$  is not a pole of the matrix  $A_l(z)$  of System (III.33). Indeed, otherwise, let  $r$  denote the maximum of the order of  $\alpha$  as a zero of the denominators of the coefficients of  $A_l(z)$ . We get

$$(z - \alpha)^r \begin{pmatrix} 1 \\ f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = B_l(z) \begin{pmatrix} 1 \\ f_1(z^{d^l}) \\ \vdots \\ f_m(z^{d^l}) \end{pmatrix}, \quad (\text{III.34})$$

where  $B_l(z) = (z - \alpha)^r A_l(z)$  has no pole at  $\alpha$  and is such that  $B_l(\alpha) \neq 0$ . Then, setting  $z = \alpha$  in (III.34), we would find a linear non-trivial relation between the numbers  $1, f_1(\alpha^{d^l}), \dots, f_m(\alpha^{d^l})$  which contradicts the fact that they are linearly independent over  $\overline{\mathbb{K}}$ . Now, if we set

$$\Lambda = \begin{pmatrix} f(\alpha) & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

we obtain

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ f_1(\alpha) \\ \vdots \\ f_m(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \Lambda A_l(\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ f_1(\alpha^{d^l}) \\ \vdots \\ f_m(\alpha^{d^l}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Then, the fact that  $1, f_1(\alpha^{d^l}), \dots, f_m(\alpha^{d^l})$  are linearly independent over  $\overline{\mathbb{K}}$  implies that

$$\Lambda A_l(\alpha) = 0. \quad (\text{III.35})$$

Now, as the first coordinate of the solution vector of System (III.33) is 1, there exists a column vector  $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}(\alpha)^{m+1}$  of  $A_l(\alpha)$  such that  $u_0 \neq 0$ . Then, by (III.35) we get

$$f(\alpha) = \frac{u_1}{u_0} \in \mathbb{K}(\alpha).$$

Let us prove the second statement. If  $\alpha$  is a regular number for System (III.3), let us assume by contradiction that  $f(\alpha)$  is algebraic over  $\overline{\mathbb{K}}$ , that is  $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{K}}$ . Then, the numbers  $1, f(\alpha)$  are linearly dependent over  $\overline{\mathbb{K}}$  and hence, the numbers  $1, f(\alpha), \dots, f(\alpha^{d^{m-1}})$  are linearly dependent over  $\overline{\mathbb{K}}$ . Then, Theorem III.1.1 implies that there exists a non-trivial linear relation between the functions  $1, f(z), \dots, f(z^{d^{m-1}})$  over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . This contradicts the minimality of Equation (III.2) and proves that  $f(\alpha)$  is transcendental over  $\overline{\mathbb{K}}$ . □

#### Remark III.1.4

In order to prove the first statement of Corollary III.1.2, we showed the existence of an integer  $l \geq 0$  and a matrix  $B(z) \in GL_{m+1}(\mathbb{K}(z))$  such that

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} 1 \\ f_1(z^{d^l}) \\ \vdots \\ f_m(z^{d^l}) \end{pmatrix}, \quad (\text{III.36})$$

and

1. the number  $\alpha^{d^l}$  is regular for System (III.36),
2. the number  $\alpha$  is not a pole of  $B(z)$ .

This is the analogue of [29, Theorem 1.5] for  $E$ -functions and of [8, Théorème 1.10] in the particular case of linearly independent Mahler functions.

### III.1.5 Examples

In this section, we illustrate Theorem III.1.1 and provide examples, in the case where  $p \mid d$ , of regular and non-regular  $d$ -Mahler extensions.

#### An application of Theorem III.1.1

Let  $d$  be an integer such that  $p \nmid d$ . Let us consider the system

$$\begin{pmatrix} f_1(z^d) \\ f_2(z^d) \\ f_3(z^d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ z^{d^2} - z & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ f_3(z) \end{pmatrix}. \quad (\text{III.37})$$

Let us set

$$a(z) = z + \sum_{n=1}^{+\infty} F_n z^{d^n}, \quad (\text{III.38})$$

where  $F_n$  is the residue modulo  $p$  of the  $n$ -th Fibonacci number (with  $F_1 = 1, F_2 = 1$ ). Then, a solution to System (III.37) is given by

$$f_1(z) = 1, f_2(z) = a(z), f_3(z) = a(z^d). \quad (\text{III.39})$$

By Corollary III.1.3, the  $d$ -Mahler extension  $\mathcal{E} = \overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), f_2(z), f_3(z))$  is regular over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . The advantage of Theorem III.1.1 is that we do not have to study algebraic relations between  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ ,  $f_3(z)$  to get the following result.

**Proposition III.1.6**

Let  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ ,  $0 < |\alpha| < 1$ . Then,  $1, a(\alpha), a(\alpha^d)$  are linearly independent over  $\overline{\mathbb{K}}$ .

By Corollary III.1.1, all we have to prove is the following result.

**Lemma III.1.3**

The functions  $f_1(z), f_2(z), f_3(z)$  are linearly independent over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ .

Proof of Lemma III.1.3 does not involve difficult arguments and illustrates the interest of Theorem III.1.1.

*Proof of Lemma III.1.3.* Let us assume by contradiction that there exist coprime polynomials

$$P_{-1}(z), P_0(z), P_1(z) \in \overline{\mathbb{K}}[z],$$

such that

$$P_{-1}(z) + P_0(z)a(z) + P_1(z)a(z^d) = 0.$$

It follows that

$$P_{-1}(z) + P_0(z)z + P_0(z) \sum_{n=1}^{+\infty} F_n z^{d^n} + P_1(z)z^d + P_1(z) \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-1} z^{d^n} = 0. \quad (\text{III.40})$$

For every  $n \geq 1$ , let us set  $a_n = d^n - d^{n-1}$ . Then, the sequence  $(a_n)_n$  is strictly increasing. Now, let us take a non-zero integer  $N \in \mathbb{N}$  such that  $a_n > \max(\deg(P_i))$  for every  $n \geq N$ . If we compare the coefficients of  $z^{d^N}$  and  $z^{d^{N+1}}$  respectively between the left and right-hand side of (III.40), we get

$$\begin{cases} p_{0,0}F_N + p_{1,0}F_{N-1} &= 0 \\ p_{0,0}F_{N+1} + p_{1,0}F_N &= 0, \end{cases} \quad (\text{III.41})$$

where  $p_{0,0}, p_{1,0}$  are respectively the constant term of  $P_0(z)$  and  $P_1(z)$ . By property of the Fibonacci sequence, the determinant  $F_N^2 - F_{N-1}F_{N+1}$  of System (III.41) is equal to  $(-1)^{N+1} \neq 0$ . Hence,  $p_{0,0} = p_{1,0} = 0$ . But, by (III.40), the constant term of  $P_{-1}(z)$  is equal to zero. This contradicts the fact that the  $P_i$ 's are coprime. Lemma III.1.3 is proved.  $\square$

**Regular extensions**

If  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  are algebraically independent functions over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ , then, the extension  $\overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is regular over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Indeed, let us set  $\mathcal{E} = \overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$ . As  $(f_1(z), \dots, f_n(z))$  is a transcendence basis of  $\mathcal{E}$  over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ ,  $\mathcal{E}$  is separable over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Moreover, let us assume that there exists an element

$$a(z) \in \overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z)) \cap \overline{\mathbb{K}(z)} \setminus \overline{\mathbb{K}}(z).$$

Then, by (III.22), the functions  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  are algebraically dependent over  $\overline{\mathbb{K}(z)}$ , and hence, over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ , which is a contradiction.

This shows in particular that, when  $p \mid d$ , there exist regular  $d$ -Mahler extensions. In fact, in this case, there even exist regular  $d$ -Mahler extensions associated with a solution of a  $d$ -Mahler system whose coordinates are algebraically dependent over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Indeed, let us consider the system



$$\begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ f_2(z^q) \\ f_3(z^q) \\ f_4(z^q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{z}\right)^q - T & -\left(\left(\frac{1}{z}\right)^q - T\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-Tz^q} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z^q} & -\frac{1}{z^q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ f_3(z) \\ f_4(z) \end{pmatrix}. \quad (\text{III.42})$$

Now, let us set

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\left(\frac{1}{z}\right)^q - T\right)\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{q^2} - T\right) \cdots \left(\left(\frac{1}{z}\right)^{q^n} - T\right)},$$

and

$$g(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - Tz^{q^n}\right).$$

These functions are respectively  $f_1\left(\frac{1}{z}\right)$  and  $g(z)$  introduced by L. Denis in [51, 49]. According to L. Denis,  $f(z)$  and  $g(z)$  are analytic on  $\{z \in C, |z| < \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\}$  (even on the open unit disc for  $g(z)$ ) and algebraically independent over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ .

We see that a solution to (III.42) is given by

$$f_1(z) = 1, f_2(z) = f(z), f_3(z) = g(z), f_4(z) = f(z)g(z).$$

Then, the Mahler extension  $\overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_4(z))$  is regular over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Indeed,  $f(z), g(z)$  are algebraically independent over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$  and  $\overline{\mathbb{K}}(z)(1, f(z), g(z), f(z)g(z)) = \overline{\mathbb{K}}(z)(f(z), g(z))$ .

### Non-regular extensions

We have seen in the introduction of this paper that the  $p$ -Mahler extension  $\mathcal{E} = \overline{\mathbb{K}}(z)(1, \sum_{n=0}^{+\infty} z^{p^n})$  is not regular over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . In this case,  $\mathcal{E}$  is an algebraic extension of  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . But there also exist non-regular transcendental  $q$ -Mahler extensions. Moreover, such an extension can be found among the simplest possible  $q$ -Mahler extensions, that is those of the form

$$\mathcal{E} = \overline{\mathbb{K}}(z)(f(z))_{\sigma_q},$$

where  $f(z)$  is a transcendental  $q$ -Mahler function.

Let us set

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{+\infty} F_n z^{q^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{q^n}}{1 - Tz^{q^n}},$$

where  $F_n$  is the residue modulo  $p$  of the  $n$ -th Fibonacci number (with  $F_1 = 1, F_2 = 1$ ). By [49],  $f(z)$  is a transcendental analytic function on  $\{z \in C, |z| < \frac{1}{q}\}$ . Moreover, we have

$$f\left(z^{q^3}\right) - 2f\left(z^q\right) + f(z) - R(z) = 0, \quad (\text{III.43})$$

where

$$R(z) = z - z^q - z^{q^2} + z^{q^3} - \frac{z}{1 - Tz} + \frac{z^q}{1 - Tz^q} + \frac{z^{q^2}}{1 - Tz^{q^2}}.$$

We prove the following proposition.

#### Proposition III.1.7

*The  $q$ -Mahler extension  $\mathcal{E} = \overline{\mathbb{K}}(z)(f(z))_{\sigma_q}$  is non-regular over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ .*

*Proof of Proposition III.1.7.* Let us set

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{q^n}}{1 - Tz^{q^n}},$$

and

$$a(z) = z + \sum_{n=1}^{+\infty} F_n z^{q^n}.$$

First, let us notice that  $g(z^q) = g(z) - \frac{z}{1-Tz}$ ,  $a(z^{q^2}) = -a(z^q) + a(z) + z^{q^2} - z$ , and  $a(z)^{q^2} = -a(z)^q + a(z) + z^{q^2} - z$ . On the other hand, the sequence  $(a_k)_k \in \mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$  defined by

$$a_1 = 1, \text{ and, for } k \geq 2, \text{ by } a_k = \begin{cases} F_n & \text{if } k = q^n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

admits unbounded gaps of consecutive zeros. Hence,  $(a_k)_k$  is not eventually periodic if there exists an infinite set of non-zero Fibonacci numbers modulo  $p$ . This latter property follows from the formula  $F_N^2 - F_{N-1}F_{N+1} = (-1)^{N+1} \neq 0$ . We deduce that

$$a(z) \in \overline{\mathbb{K}(z)} \setminus \overline{\mathbb{K}(z)}.$$

Now, we compute

$$\begin{aligned} f(z) - f(z^q) &= a(z) - g(z) - a(z^q) + g(z^q) \\ &= a(z) - a(z^q) - g(z) + g(z) - \frac{z}{1-Tz} \\ &= a(z) - a(z^q) - \frac{z}{1-Tz} \\ &= a(z^{q^2}) - z^{q^2} + z - \frac{z}{1-Tz}. \end{aligned} \tag{III.44}$$

But  $a(z^{q^2}) \in \overline{\mathbb{K}(z)} \setminus \overline{\mathbb{K}(z)}$  (if not, apply suitable Cartier operators and get  $a(z) \in \overline{\mathbb{K}(z)}$  which is a contradiction). This implies that  $f(z) - f(z^q) \in \mathcal{E} \cap \overline{\mathbb{K}(z)} \setminus \overline{\mathbb{K}(z)}$  and proves that  $\mathcal{E}$  is not regular over  $\overline{\mathbb{K}(z)}$ . Proposition III.1.7 is proved.  $\square$

In addition, in this case, a direct and elementary approach shows that the conclusion of Theorem III.1.1 is not satisfied. First, let us prove the following lemma.

**Lemma III.1.4**

*The functions  $1, f(z), f(z^q), f(z^{q^2})$  are linearly independent over  $\overline{\mathbb{K}(z)}$ . In other words, inhomogeneous Equation (III.43) is minimal.*

*Proof.* Let us assume by contradiction that there exist polynomials

$$P_{-1}(z), \dots, P_2(z) \in \overline{\mathbb{K}[z]},$$

not all zero, such that

$$P_{-1}(z) + P_0(z)f(z) + P_1(z)f(z^q) + P_2(z)f(z^{q^2}) = 0.$$

Then, after computations, we get

$$\begin{aligned} g(z)(P_0(z) + P_1(z) + P_2(z)) &= P_{-1}(z) + P_1(z)P(z) + P_2(z)Q(z) + P_2(z)P(z^q) \\ &\quad + P_2(z)P(z) + a(z)(P_0(z) + P_2(z)) \\ &\quad + a(z^q)(P_1(z) - P_2(z)), \end{aligned} \tag{III.45}$$

where  $P(z) = \frac{z}{1-Tz}$  and  $Q(z) = z^{q^2} - z$ . But  $g(z)$  is transcendental over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$  [49], whereas the right-hand side of (III.45) is algebraic over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Hence

$$P_0(z) + P_1(z) + P_2(z) = 0, \quad (\text{III.46})$$

and

$$\begin{aligned} P_{-1}(z) + P_1(z)P(z) + P_2(z)Q(z) + P_2(z)P(z^q) + P_2(z)P(z) + a(z)(P_0(z) + P_2(z)) \\ + a(z^q)(P_1(z) - P_2(z)) = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Now, let us notice that the function  $a(z)$  seems similar to the one defined by (III.38). But in (III.38),  $a(z)$  is  $d$ -Mahler with  $p \nmid d$  and is transcendental over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ , whereas here,  $a(z)$  is  $q$ -Mahler, with  $q = p^r$  and algebraic over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Nevertheless, arguing as in Lemma III.1.3, we get that  $1, a(z), a(z^q)$  are also linearly independent over  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Hence, by (III.47)

$$P_1(z) = P_2(z) = -P_0(z).$$

By (III.46), we get  $P_0(z) = P_1(z) = P_2(z) = 0$ . Finally, by (III.47),  $P_{-1}(z) = 0$ , which is a contradiction. Lemma III.1.4 is proved.  $\square$

Finally, let  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ ,  $0 < |\alpha| < 1$  be a regular number for the system associated with (III.43), that is,  $\alpha \notin \left\{ \left( \frac{1}{T} \right)^{1/q^k} \right\}_{k \geq 0}$ . By (III.44), we see that  $f(\alpha) - f(\alpha^q) \in \overline{\mathbb{K}}$ , that is  $1, f(\alpha), f(\alpha^q)$  are linearly dependent over  $\overline{\mathbb{K}}$ . Hence,  $1, f(\alpha), f(\alpha^q), f(\alpha^{q^2})$  are linearly dependent over  $\overline{\mathbb{K}}$ . But it follows from Lemma III.1.4 that the conclusion of Theorem III.1.1 is not satisfied.

# Chapitre IV

## Algébricité et fonctions mahlériennes : premiers résultats

Le théorème III.1.1 ramène l'étude de l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes à celle des fonctions elles-mêmes, dans le cas où l'extension mahlérienne concernée est régulière. En caractéristique nulle, les seules fonctions mahlériennes algébriques sont les fonctions rationnelles et toute extension est régulière. Rappelons que cette dichotomie n'est plus valable en caractéristique  $p$ . Toutefois, elle s'applique aux fonctions  $d$ -mahlériennes telles que  $p \nmid d$ . Il reste donc à traiter le cas où  $p \mid d$ . On se restreindra ici au cas où  $d = q$ , avec  $q$  une puissance entière de  $p$ . Pour vérifier la condition de régularité du théorème III.1.1, il serait utile de reconnaître les fonctions mahlériennes algébriques. Un premier outil consiste à invoquer le fait qu'une fonction admettant une infinité de zéros ou de pôles est nécessairement transcendante. En pratique et dans toute la suite, nous parlerons toujours de zéros ou pôles algébriques et situés dans le disque unité ouvert. Cet outil est utilisé à de nombreuses reprises par L. Denis pour assurer la transcendance des fonctions mahlériennes qu'il étudie (voir par exemple [50, 49]). Mais cette technique ne s'applique pas toujours. Par exemple, les séries automatiques en caractéristique non nulle sont mahlériennes et ne possèdent pas de pôles dans le disque unité ouvert. Elles peuvent également n'admettre qu'un nombre fini de zéros algébriques. La série génératrice (I.18) de la suite de Thue-Morse mentionnée dans l'introduction de cette thèse illustre ce phénomène. En caractéristique non nulle, nous pouvons évoquer la série  $q$ -mahlérienne de la remarque IV.1.1, qui ne possède aucun pôle dans son disque de convergence et aucun zéro algébrique en dehors de l'origine. Plus généralement, l'application du théorème III.1.1 nécessite la connaissance des relations algébriques entre fonctions mahlériennes définies sur un corps de fonctions  $\mathbb{K}$  de caractéristique  $p$ . Nous donnons dans cette section nos premières contributions à ce sujet.

### IV.1 Transcendance fonctionnelle

#### IV.1.1 Un exemple d'une classe de fonctions transcendentes

Nous étudions ici des fonctions  $f(z) \in \mathbb{F}_q(T)\{z\}$  pour lesquelles nous n'avons a priori aucune connaissance sur le nombre de leurs zéros ou pôles. Nous montrons cependant que l'asymptotique des valuations en  $T$  et  $z$  garantit leur transcendance. Celles-ci sont des fonctions analytiques au voisinage de l'origine, de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(T)z^{u_n}, \quad (\text{IV.1})$$

et vérifiant les conditions suivantes.

1. La suite  $(u_n)_n$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , strictement croissante, non bornée et vérifie

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1. \quad (\text{IV.2})$$

2. Pour tout  $n$ ,  $a_n(T) \in \mathbb{F}_q(T) \setminus \{0\}$ .

Si  $a_n(T) = \frac{P_n(T)}{Q_n(T)}$ , on note  $d_n = \deg(a_n(T)) = \deg(P_n(T)) - \deg(Q_n(T))$ .

3. La suite  $(d_n)_n$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , croissante, non bornée et vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = 1. \quad (\text{IV.3})$$

**Proposition IV.1.1**

Toute fonction  $f(z) \in \mathbb{F}_q(T)\{z\}$  de la forme (IV.1) satisfaisant aux hypothèses précédentes est transcendante sur  $\mathbb{F}_q(T)(z)$ .

**Remarque IV.1.1**

La fonction  $q$ -mahlérienne  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n z^{q^n}$  vérifie les propriétés précédentes.

On peut démontrer de façon automatique que  $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n z^{q^n}$  est transcendante sur  $\mathbb{F}_q(T)(z)$ , en démontrant que  $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n T^{q^n}$  l'est sur  $\mathbb{F}_q(T)$ . D'après le théorème de S. Eilenberg déjà mentionné dans l'introduction de cette thèse, il suffit de montrer que le  $q$ -noyau  $K_q(\underline{u})$ , associé à la suite définie par

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } k \text{ tel que } n = q^k + k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (\text{IV.4})$$

est infini. On peut constater par exemple que le sous-ensemble  $\{(u_{nq^i})_n, i \geq 0\}$  de  $K_q(\underline{u})$  est infini. Pour cela, on peut remarquer que les premières occurrences du symbole 1 dans les suites  $(u_{nq^i})_n$ , où  $i > 0$ , sont respectivement positionnées aux rangs  $n = q^{q^i - i} + 1$ , qui sont deux à deux distincts.

Dans le cas plus général des fonctions concernées par la proposition IV.1.1, la méconnaissance de leur développement en série explicite empêche d'utiliser la méthode automatique. Voici une approche alternative.

*Démonstration de la proposition IV.1.1.* Supposons par l'absurde que  $f(z)$  soit algébrique. D'après le lemme d'Ore, il existe des polynômes  $b_i(T, z) \in \mathbb{F}_q[T][z]$  tels que

$$\sum_{i=0}^l b_i(T, z) f(z)^{q^i} = 0,$$

avec  $b_0(T, z), b_l(T, z) \neq 0$ . Autrement dit,

$$b_0(T, z) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(T) z^{u_n} + b_1(T, z) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(T)^q z^{q u_n} + \dots + b_l(T, z) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(T)^{q^l} z^{q^l u_n} = 0. \quad (\text{IV.5})$$

Notons  $M = \max_i \deg_z(b_i(T, z))$  et  $k_0^* = \deg_z(b_0(T, z))$ . Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha(n) = u_n + k_0^*$ , et pour tout  $i \in \{0, \dots, l\}$ ,

$$A_i = b_i(T, z) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(T)^{q^i} z^{q^i u_n}.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Nous savons que le coefficient en  $z^{\alpha(n)}$  de la partie gauche de (IV.5) est nul. Toute contribution de  $A_i$  à ce coefficient est une puissance de la forme  $q^i u_{m_i(n)} + k_i(n)$  avec  $m_i(n), k_i(n)$  des entiers,  $k_i(n) \leq M$  et

$$q^i u_{m_i(n)} + k_i(n) = \alpha(n).$$

L'asymptotique des quotients successifs de la suite  $(u_n)_n$  garantit qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $i \geq 0$  et tout  $n \geq N$ , il existe au plus une contribution à  $z^{\alpha(n)}$  dans  $A_i$ . Si l'on note pour tout

$i \in \{0, \dots, l\}$ ,  $b_i(T, z) = \sum_{j=0}^M b_{i,j}(T)z^j$ , l'identification des coefficients devant  $z^{\alpha(n)}$  de chaque côté de (IV.5) donne

$$b_{0,k_0(n)}(T)a_{m_0(n)}(T) + b_{1,k_1(n)}(T)a_{m_1(n)}(T)^q + \dots + b_{l,k_l(n)}(T)a_{m_l(n)}(T)^{q^l} = 0. \quad (\text{IV.6})$$

Nous montrons à présent que pour  $n$  assez grand, les degrés en  $T$  des termes du membre de gauche de (IV.6) sont deux à deux distincts. Notons, pour tout  $i \in \{0, \dots, l\}$ ,  $c_i(n) = \deg_T(b_{i,k_i(n)}(T))$ . Comme les  $b_{i,j}(T)$  sont en nombre fini, la suite  $(c_i(n))_n$  est bornée. Supposons par l'absurde qu'il existe un ensemble infini  $\mathcal{S}$  d'entiers tel que pour tout  $n \in \mathcal{S}$ , il existe  $0 \leq j_n < i_n \leq l$  tels que

$$c_{i_n}(n) + q^{i_n}d_{m_{i_n}(n)} = c_{j_n}(n) + q^{j_n}d_{m_{j_n}(n)}. \quad (\text{IV.7})$$

L'asymptotique des quotients successifs de la suite  $(d_n)_n$  fournit une contradiction pour  $n$  assez grand. Ainsi, pour  $n$  assez grand, les degrés des termes du membre de gauche de (IV.6) sont deux à deux distincts, ce qui contredit (IV.6) et prouve que  $f(z)$  est transcendante.  $\square$

## IV.1.2 Transcendance de fonctions mahlériennes d'ordre 1 inhomogène

Nous caractérisons dans cette section la transcendance de fonctions mahlériennes d'ordre 1 inhomogène, grâce au théorème IV.1.1. Celui-ci découle des propositions IV.1.2 et IV.1.3 ci-dessous. Ces dernières sont des conséquences d'un résultat d'indépendance algébrique plus général, le théorème IV.2.1, qui sera démontré dans la section IV.2. Celui-ci est dit de type Kolchin. Ce genre de résultat existe dans divers contextes (voir par exemple [4] pour le cas homogène d'ordre 1), principalement ceux des équations différentielles ou aux différences. Nous citerons notamment, en caractéristique zéro, K. Kubota [76] dont nous exploitons la méthode de démonstration, que l'on retrouve adaptée chez L. Denis [49], pour notre preuve du théorème IV.2.1. Des énoncés similaires interviennent dans le cadre de critères d'hypertranscendance (en caractéristique zéro) [70, 65], et permettent notamment de retrouver celui établi par Ke. Nishioka dans [98], via des théories de Galois adaptées [97, 53].

Le résultat principal de cette section est le suivant.

### Théorème IV.1.1

Soit  $f(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  non constante telle qu'il existe  $a(z) \in \mathbb{K}(z) \setminus \{0\}$ ,  $b(z) \in \mathbb{K}(z)$  telles que  $b(z) = 0$ , ou  $a(z)$  ne possède ni zéro ni pôle en  $z = 0$ , et

$$f(z) = a(z)f(z^q) + b(z). \quad (\text{IV.8})$$

Alors  $f(z)$  est algébrique si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées

1. Il existe  $r(z) \in \overline{\mathbb{K}}(z) \setminus \{0\}$  telle que

$$a(z) = \frac{r(z)}{r(z^q)}.$$

2. La fraction  $\frac{b(z)}{r(z)}$  a tous ses pôles dans  $\cup_{k \geq 1} \mathbb{F}_{q^k}$ , ou est polynomiale.

Comme annoncé, nous aurons besoin des deux propositions ci-dessous, qui fournissent des critères de transcendance pour des fonctions solutions du système (IV.8), dans les cas extrêmes où  $b(z) = 0$ , ou  $a(z) = 1$ .

### Proposition IV.1.2

Soit  $f(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  non constante telle qu'il existe  $a(z) \in \mathbb{K}(z) \setminus \{0\}$ ,  $b(z) \in \mathbb{K}(z)$  telles que  $b(z) = 0$ , ou  $a(z)$  n'admette ni zéro ni pôle en  $z = 0$ , et

$$f(z) = a(z)f(z^q) + b(z). \quad (\text{IV.9})$$

Alors, si  $f(z)$  est algébrique, il existe  $r(z) \in \overline{\mathbb{K}}(z) \setminus \{0\}$  telle que

$$a(z) = \frac{r(z)}{r(z^q)}. \quad (\text{IV.10})$$

Au vu de la remarque IV.2.1 de la section IV.2, un corollaire immédiat est le suivant.

**Corollaire IV.1.1**

Soit  $f(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  non constante telle qu'il existe  $a(z) \in \mathbb{K}(z)$  telle que

$$f(z) = a(z)f(z^q). \quad (\text{IV.11})$$

Alors,  $f(z)$  est algébrique si et seulement s'il existe  $r(z) \in \overline{\mathbb{K}}(z) \setminus \{0\}$  telle que

$$a(z) = \frac{r(z)}{r(z^q)}. \quad (\text{IV.12})$$

**Remarque IV.1.2**

Soit  $f(z)$  une solution de (IV.11). Supposons que  $a(z)$  s'annule en  $z = 0$ . Comme  $f(z)$  n'a pas de pôle en  $z = 0$ , elle s'annule en  $z = 0$ . Une comparaison des ordres des annulations en  $z = 0$  à gauche et à droite de (IV.11) montre que  $f(z) = 0$ . Maintenant, si  $a(z)$  admet un pôle d'ordre  $\nu$  en  $z = 0$ ,  $f(z)$  s'annule à l'ordre  $u$  en  $z = 0$ , avec  $u = qu - \nu$ . En écrivant  $g(z) = f(z)/z^u$  et  $\tilde{a}(z) = z^\nu a(z)$ , on obtient

$$g(z) = \tilde{a}(z)g(z^q). \quad (\text{IV.13})$$

Ainsi, si  $f(z)$  est non nulle, quitte à remplacer  $f(z)$  par  $g(z) = f(z)/z^u$ , on peut supposer que  $a(z)$  n'a ni zéro ni pôle en  $z = 0$ . Dans ce cas,  $f(z)$  ne s'annule pas en  $z = 0$  et on a pour tout  $M > 0$

$$f(z) = \left( \prod_{k=0}^{M-1} a(z^{q^k}) \right) f(z^{q^M}). \quad (\text{IV.14})$$

La limite quand  $M$  tend vers l'infini de  $f(z^{q^M})$  est  $f(0) \neq 0$ . Donc le produit  $\prod_{k=0}^{M-1} a(z^{q^k})$  converge et on peut écrire

$$f(z) = f(0) \prod_{k=0}^{+\infty} a(z^{q^k}).$$

Notons également que si  $a(z) = a_1(z)/a_2(z)$ , avec  $a_1, a_2$  des polynômes premiers entre eux de  $\mathbb{K}[z]$ , ce produit ne peut converger si le quotient du terme constant de  $a_1(z)$  par celui de  $a_2(z)$  est différent de 1.

*Démonstration de la proposition IV.1.2.* Traitons dans un premier temps le cas où  $a(z)$  n'admet ni zéro ni pôle en  $z = 0$ . Supposons que  $f(z)$  soit algébrique. D'après le théorème IV.2.1 de la section IV.2, il existe  $m \in \mathbb{Z}$  et  $r(z) \in \overline{\mathbb{K}}(z) \setminus \{0\}$  tels que

$$a(z)^m = \frac{r(z)}{r(z^q)}. \quad (\text{IV.15})$$

On a donc, en notant  $r_0 = r(0) \neq 0$ ,

$$r(z) = r_0 \left( \prod_{k=0}^{+\infty} a(z^{q^k}) \right)^m. \quad (\text{IV.16})$$

Soient maintenant  $a_1(z), a_2(z) \in \mathbb{K}[z]$  premiers entre eux tels que

$$a(z) = \frac{a_1(z)}{a_2(z)}. \quad (\text{IV.17})$$

On peut alors écrire

$$r(z) = r_0 \left( \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{a_1(z^{q^k})}{a_2(z^{q^k})} \right)^m. \quad (\text{IV.18})$$

Or,  $r(z)$  est une fraction rationnelle. Elle possède donc un nombre fini de zéros et de pôles. Ainsi, il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $k \geq k_0$ , tous les zéros de  $a_1(z^{q^k})$  se retrouvent au dénominateur de (IV.18) et tous les zéros de  $a_2(z^{q^k})$  se retrouvent au numérateur de (IV.18). Cela montre que l'élément

$$r_0^{1/m} \left( \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{a_1(z^{q^k})}{a_2(z^{q^k})} \right)$$

est rationnel, où  $r_0^{1/m}$  désigne une racine  $m$ -ième de  $r_0$ . Si l'on note  $s(z) \in \overline{\mathbb{K}}(z)$  cette fraction, on a  $r(z) = s(z)^m$  et on trouve

$$a(z)^m = \frac{s(z)^m}{s(z^q)^m}.$$

Donc il existe  $u \in \overline{\mathbb{F}_q}$  tel que

$$a(z) = u \frac{s(z)}{s(z^q)}.$$

Mais on remarque qu'alors le quotient des termes constants du numérateur et dénominateur de  $a(z)$  écrit sous la forme (IV.17) est égal à  $u$ . D'après la remarque IV.1.2, on a  $u = 1$  et

$$a(z) = \frac{s(z)}{s(z^q)}.$$

Pour finir, si  $b(z) = 0$ , d'après la remarque IV.1.2, on se ramène au cas précédent. Avec les notations de la remarque IV.1.2, on obtient  $\tilde{a}(z) = s(z)/s(z^q)$ , et on en déduit que  $a(z) = r(z)/r(z^q)$ , avec  $r(z) = z^u s(z)$ . Ceci achève la démonstration de la proposition IV.1.2. □

Traisons à présent le cas où  $a(z) = 1$ .

### Proposition IV.1.3

Soit  $f(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  non constante telle qu'il existe  $b(z) \in \mathbb{K}(z)$  telle que

$$f(z) = f(z^q) + b(z). \quad (\text{IV.19})$$

Alors,  $f(z)$  est algébrique si et seulement si  $b(z)$  a tous ses pôles dans  $\cup_{k=0}^{+\infty} \mathbb{F}_{q^k}$  ou est un polynôme.

### Remarque IV.1.3

Soit  $f(z)$  une solution de (IV.19). Comme  $f(z)$  n'a pas de pôle en  $z = 0$ ,  $b(z)$  n'en a pas non plus. De plus, on a pour tout  $M > 0$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b(z^{q^k}) + f(z^{q^M}). \quad (\text{IV.20})$$

Si l'on note  $f_0 \in \mathbb{K}$  le terme constant de  $f(z)$ , on voit que  $f(z^{q^M})$  converge vers  $f_0$  lorsque  $M$  tend vers l'infini. Donc la somme  $\sum_{k=0}^{M-1} b(z^{q^k})$  converge et on peut écrire

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b(z^{q^k}) + f_0. \quad (\text{IV.21})$$

*Démonstration de la proposition IV.1.3.* Supposons que  $b(z)$  ait un pôle en dehors de  $\cup_{k=0}^{+\infty} \mathbb{F}_{q^k}$ . D'après (IV.21),  $f(z)$  a une infinité de pôles et est transcendante. Supposons maintenant que  $b(z)$  ait tous ses pôles dans  $\cup_{k=0}^{+\infty} \mathbb{F}_{q^k}$ . Ceux-ci sont en nombre fini. Notons-les  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ . Il existe alors  $l \in \mathbb{N}$  tel que

$$\alpha_j^{q^l} = \alpha_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, r\}. \quad (\text{IV.22})$$



Posons

$$b(z) = \frac{c(z)}{\prod_{j=0}^r (z - \alpha_j)},$$

avec

$$c(z) = \sum_{i=0}^s c_i z^i, \quad c_i \in \mathbb{K}.$$

On a alors, pour tous  $u \in \mathbb{N}$  et  $v \in \{0, \dots, l-1\}$ ,

$$\begin{aligned} b(z^{q^{ul+v}}) &= \sum_{i=0}^s c_i \frac{z^{iq^{ul+v}}}{\prod_{j=0}^r (z^{q^{ul+v}} - \alpha_j)} \\ &= \sum_{i=0}^s c_i \frac{z^{iq^{ul+v}}}{\prod_{j=0}^r (z^{q^v} - \alpha_j)^{q^{ul}}}, \quad \text{d'après (IV.22)} \\ &= \sum_{i=0}^s c_i \left( \frac{z^{iq^v}}{\prod_{j=0}^r (z^{q^v} - \alpha_j)} \right)^{q^{ul}}. \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} b(z^{q^k}) &= \sum_{u=0}^{+\infty} \sum_{v=0}^{l-1} \sum_{i=0}^s c_i \left( \frac{z^{iq^v}}{\prod_{j=0}^r (z^{q^v} - \alpha_j)} \right)^{q^{ul}} \\ &= \sum_{i=0}^s c_i \sum_{u=0}^{+\infty} \left( \sum_{v=0}^{l-1} \frac{z^{iq^v}}{\prod_{j=0}^r (z^{q^v} - \alpha_j)} \right)^{q^{ul}}. \end{aligned}$$

Or, la série  $\sum_{u=0}^{+\infty} Z^{q^{ul}}$  est algébrique sur  $\overline{\mathbb{K}}(Z)$ . En effet, elle annule le polynôme  $X^{q^l} - X + Z$ . En posant

$$Z = \sum_{v=0}^{l-1} \frac{z^{iq^v}}{\prod_{j=0}^r (z^{q^v} - \alpha_j)},$$

on voit que  $\sum_{k=0}^{+\infty} b(z^{q^k})$  est algébrique sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . D'après (IV.21),  $f(z)$  est algébrique.

Enfin, si  $b(z)$  est polynomiale, on a  $b(z) = \sum_{i=0}^s c_i z^i$  et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b(z^{q^k}) = \sum_{i=0}^s c_i \sum_{k=0}^{+\infty} (z^i)^{q^k}.$$

On conclut de même que  $f(z)$  est algébrique. La proposition IV.1.3 est démontrée.  $\square$

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le théorème IV.1.1.

*Démonstration du théorème IV.1.1.* Si  $b(z) = 0$ , le résultat découle du corollaire IV.1.1. Traitons donc le cas où  $b(z) \neq 0$ . Tout d'abord, supposons que les conditions 1 et 2 soient satisfaites. On a pour tout  $M > 0$

$$f(z) = \left( \prod_{k=0}^{M-1} a(z^{q^k}) \right) f(z^{q^M}) + \sum_{k=0}^{M-1} \left( \prod_{j=0}^{k-1} a(z^{q^j}) \right) b(z^{q^k}).$$

Comme  $a(z)$  ne possède ni zéro ni pôle en  $z = 0$ , il en est de même de  $r(z)$ . D'après la remarque IV.1.2, le produit  $\prod_{k=0}^{+\infty} a(z^{q^k})$  converge. Ainsi, si l'on note  $f_0$  le terme constant de  $f(z)$ , on obtient à la limite

$$f(z) = f_0 \prod_{k=0}^{+\infty} a(z^{q^k}) + \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \prod_{j=0}^{k-1} a(z^{q^j}) \right) b(z^{q^k}).$$

Ainsi, en notant  $r_0 = r(0) \neq 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f_0}{r_0} r(z) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r(z)}{r(z^{q^k})} b(z^{q^k}) \\ &= r(z) \left( \frac{f_0}{r_0} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b(z^{q^k})}{r(z^{q^k})} \right). \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

Posons à présent

$$g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b(z^{q^k})}{r(z^{q^k})}. \quad (\text{IV.24})$$

On obtient

$$g(z) = g(z^q) + \frac{b(z)}{r(z)}. \quad (\text{IV.25})$$

D'après la condition 2 et la proposition IV.1.3,  $g(z)$  est algébrique. On déduit de (IV.23) que  $f(z)$  est algébrique.

Réciproquement, si l'on suppose  $f(z)$  algébrique, d'après la proposition IV.1.2, il existe  $r(z) \in \overline{\mathbb{K}}(z) \setminus \{0\}$  telle que

$$a(z) = \frac{r(z)}{r(z^q)}. \quad (\text{IV.26})$$

On reproduit donc ce qui précède, jusqu'à obtenir (IV.23). On définit de même  $g(z)$  par (IV.24). Comme  $f(z)$  est algébrique,  $g(z)$  l'est également. Or,  $g(z)$  vérifie (IV.25). On conclut en appliquant la proposition IV.1.3 à  $g(z)$ .  $\square$

## IV.2 Théorème de Kolchin et équations mahlériennes d'ordre 1 inhomogène

Nous démontrons dans cette section un résultat dit de type Kolchin, le théorème IV.2.1, qui fournit une condition suffisante à l'indépendance algébrique de fonctions solutions d'équations mahlériennes d'ordre 1 inhomogène. La démonstration s'inspire de l'approche utilisée par L. Denis dans [50] (voir aussi [76]) pour obtenir l'indépendance algébrique de fonctions mahlériennes particulières, solutions d'équations mahlériennes inhomogènes d'ordre 1.

### Théorème IV.2.1

Soient  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  des fonctions non constantes telles que pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , il existe  $a_j(z) \in \mathbb{K}(z) \setminus \{0\}, b_j(z) \in \mathbb{K}(z)$  telles que

$$f_j(z) = a_j(z) f_j(z^q) + b_j(z). \quad (\text{IV.27})$$

On suppose que les  $f_j(z)$  sont algébriquement dépendantes sur  $\mathbb{K}(z)$ . Alors, il existe  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$  non tous nuls et  $r(z) \in \overline{\mathbb{K}}(z) \setminus \{0\}$  telles que

$$\prod_{j=1}^n a_j(z)^{m_j} = \frac{r(z)}{r(z^q)}. \quad (\text{IV.28})$$

Remarquons que nous considérons ici les quotients  $r(z)/r(z^q)$  et non leur inverse comme cela est habituellement le cas (voir par exemple [4]), pour la seule raison que cela nous paraît plus adapté à notre usage. Commençons par un lemme qui nous sera utile dans la suite et dont la démonstration est directe.

**Lemme IV.2.1**

Soit  $f(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  une solution de l'équation

$$f(z) = a(z)f(z^q), \text{ où } a(z) \in \mathbb{K}(z). \quad (\text{IV.29})$$

Soit  $u(z) \in \mathbb{K}(z) \setminus \{0\}$  telle que  $a(z) \neq \frac{u(z)}{u(z^q)}$  et posons

$$g_{f,u}(z) = f(z) + u(z). \quad (\text{IV.30})$$

Alors on a

$$g_{f,u}(z) = a(z)g_{f,u}(z^q) + b(z), \text{ où } b(z) = u(z) - a(z)u(z^q) \neq 0. \quad (\text{IV.31})$$

Nous démontrons à présent le théorème IV.2.1.

*Démonstration du théorème IV.2.1.* Supposons que  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  soient algébriquement dépendantes sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Si l'un des  $a_j(z)$  est de la forme  $\frac{r(z)}{r(z^q)}$ , avec  $r(z) \in \overline{\mathbb{K}}(z)$ , le résultat est démontré. Sinon, quitte à poser  $u(z) = 1$ , et remplacer les  $f_j(z)$  par les  $g_{f_j,u}(z)$  du lemme IV.2.1, on peut supposer que

$$b_j(z) \neq 0, \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (\text{IV.32})$$

Maintenant, quitte à renuméroter les fonctions, on suppose que  $f_1(z), \dots, f_{i-1}(z)$  est une base de transcendance de  $\overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_n(z))$  sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Il existe alors un polynôme non nul

$$P(z, X_1, \dots, X_i) \in \overline{\mathbb{K}}[z][X_1, \dots, X_i],$$

tel que

$$P(z, f_1(z), \dots, f_i(z)) = 0, \quad (\text{IV.33})$$

et  $P(z, f_1(z), \dots, f_{i-1}(z), X_i)$  engendre l'idéal des polynômes annulateurs de  $f_i(z)$  sur

$$\overline{\mathbb{K}}(z)(f_1(z), \dots, f_{i-1}(z)).$$

Par ailleurs, d'après (IV.27), on a

$$P\left(z^q, \frac{f_1(z) - b_1(z)}{a_1(z)}, \dots, \frac{f_i(z) - b_i(z)}{a_i(z)}\right) = 0.$$

Posons

$$\tilde{P}(z, X_1, \dots, X_i) = P\left(z^q, \frac{X_1 - b_1(z)}{a_1(z)}, \dots, \frac{X_i - b_i(z)}{a_i(z)}\right).$$

Il existe alors

$$R(z, X_1, \dots, X_i) \in \overline{\mathbb{K}}(z)(X_1, \dots, X_{i-1})[X_i]$$

tel que

$$\tilde{P}(z, f_1(z), \dots, f_{i-1}(z), X_i) = R(z, f_1(z), \dots, f_{i-1}(z), X_i)P(z, f_1(z), \dots, f_{i-1}(z), X_i). \quad (\text{IV.34})$$

Séparons la suite de cette démonstration en deux parties.

**Partie 1 :** Nous montrons qu'en fait  $R \in \overline{\mathbb{K}}(z)$ . Soit  $S(z, X_1, \dots, X_{i-1}) \in \overline{\mathbb{K}}(z)[X_1, \dots, X_{i-1}]$  tel que

$$R_0(z, X_1, \dots, X_i) := S(z, X_1, \dots, X_{i-1})R(z, X_1, \dots, X_i) \in \overline{\mathbb{K}}(z)[X_1, \dots, X_i].$$

On a

$$\begin{aligned} S(z, f_1(z), \dots, f_{i-1}(z))\tilde{P}(z, f_1(z), \dots, f_{i-1}(z), X_i) \\ = R_0(z, f_1(z), \dots, f_{i-1}(z), X_i)P(z, f_1(z), \dots, f_{i-1}(z), X_i). \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

Or,  $\{f_1(z), \dots, f_{i-1}(z)\}$  est formée d'éléments algébriquement indépendants sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . On en déduit que

$$S(z, X_1, \dots, X_{i-1})\tilde{P}(z, X_1, \dots, X_i) = R_0(z, X_1, \dots, X_i)P(z, X_1, \dots, X_i). \quad (\text{IV.36})$$

Par ailleurs, les polynômes  $\tilde{P}(z, X_1, \dots, X_i)$  et  $P(z, X_1, \dots, X_i)$  ont même degré partiel en  $X_i$ . Donc on obtient

$$R_0(z, X_1, \dots, X_i) = R_0(z, X_1, \dots, X_{i-1}) \in \overline{\mathbb{K}}(z)[X_1, \dots, X_{i-1}].$$

Il en découle que

$$S(z, X_1, \dots, X_{i-1})\tilde{P}(z, X_1, \dots, X_i) = R_0(z, X_1, \dots, X_{i-1})P(z, X_1, \dots, X_i).$$

Autrement dit, on a

$$\tilde{P}(z, X_1, \dots, X_i) = R(z, X_1, \dots, X_{i-1})P(z, X_1, \dots, X_i). \quad (\text{IV.37})$$

Or, les degrés des plus grands monômes respectifs, pour l'ordre lexicographique (où  $X_i$  est la plus grande variable), de  $\tilde{P}(z, X_1, \dots, X_i)$  et  $P(z, X_1, \dots, X_i)$  sont identiques. De plus, les coefficients de ces monômes ne diffèrent qu'à une multiplication par un élément de  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . On en déduit que

$$R(z, X_1, \dots, X_{i-1}) = R(z) \in \overline{\mathbb{K}}(z).$$

Maintenant, notons  $U = \cup_{k=0}^{+\infty} \overline{\mathbb{K}}(z^{1/p^k})$ ,  $E = \cup_{k=0}^{+\infty} \overline{\mathbb{K}}[z^{1/p^k}]$  et

$$\mathcal{E} = \{Q(z, X_1, \dots, X_i) \in E[X_1, \dots, X_i], \deg_X(Q) > 0, \exists R(z) \in U, (\text{IV.38}) \text{ est vérifiée} \},$$

où  $\deg_X(Q)$  désigne le degré total de  $Q$  en les variables  $X_1, \dots, X_i$  et

$$Q\left(z^q, \frac{X_1 - b_1(z)}{a_1(z)}, \dots, \frac{X_i - b_i(z)}{a_i(z)}\right) = R(z)Q(z, X_1, \dots, X_i). \quad (\text{IV.38})$$

**Partie 2 :** Nous allons obtenir (IV.28) en comparant les coefficients de certains monômes à gauche et à droite de (IV.38), pour un polynôme  $Q$  minimal, au sens suivant. Le polynôme  $P$  étant non constant en  $X_1, \dots, X_i$ , l'ensemble  $\mathcal{E}$  est non vide et il existe un polynôme  $Q \in \mathcal{E}$ , de degré total en  $X$  minimal parmi les éléments de  $\mathcal{E}$ , tel que (IV.38) soit satisfaite.

On remarque que pour tout  $j \in \{1, \dots, i\}$ , le polynôme  $\frac{\partial}{\partial X_j} Q$  vérifie (IV.38), avec  $R(z)$  remplacé par  $R(z)a_j(z)$ . Par minimalité de  $\deg_X(Q)$ , il vient que, pour tout  $j \in \{1, \dots, i\}$ , le polynôme  $\frac{\partial}{\partial X_j} Q$  appartient à  $E$ . Cela se traduit de la façon suivante.

$$Q(z, X_1, \dots, X_i) = \sum_{j=1}^i c_j(z)X_j + \sum_{\underline{k}} c_{\underline{k}}(z)X_1^{pk_1} \cdots X_i^{pk_i}, \quad (\text{IV.39})$$

où  $c_j(z), c_{\underline{k}}(z) \in E$ . Comme  $E$  est stable par extraction de racine  $p$ -ième, la minimalité de  $\deg_X(Q)$  et (IV.39) entraînent l'existence d'un indice  $j_0$  tel que  $c_{j_0}(z) \neq 0$ . En comparant les termes de degré total égal à 1 en  $X_1, \dots, X_i$  des deux côtés de (IV.38), on obtient

$$R(z)c_j(z) = \frac{c_j(z^q)}{a_j(z)}, \forall j \in \{1, \dots, i\}. \quad (\text{IV.40})$$

Nous divisons la fin de cette démonstration en deux cas.

— **Cas 1 :** Supposons qu'il existe  $j \neq j_0$  tel que  $c_j(z) \neq 0$ .

On obtient alors que

$$\frac{c_j(z)/c_{j_0}(z)}{c_j(z^q)/c_{j_0}(z^q)} = \frac{a_{j_0}(z)}{a_j(z)}. \quad (\text{IV.41})$$

Posons  $s(z) = c_j(z)/c_{j_0}(z) \in U$ . Il existe un entier  $\mu > 0$  tel que  $s(z)^{q^\mu} \in \overline{\mathbb{K}}(z)$ . Notons  $r(z) = s(z)^{q^\mu}$ . En élevant (IV.41) à la puissance  $q^\mu$ -ième, on obtient

$$\frac{r(z)}{r(z^q)} = \frac{a_{j_0}(z)^{q^\mu}}{a_j(z)^{q^\mu}}. \quad (\text{IV.42})$$

Dans ce cas, (IV.28) est donc vérifiée.

- **Cas 2** : Supposons qu'il n'existe pas de  $j \neq j_0$  tel que  $c_j(z) \neq 0$ . Si  $Q(z, X_1, \dots, X_i) = c_{j_0}(z)X_{j_0}$ , par identification des termes de degré 0 de part et d'autre de (IV.38), on obtient

$$c_{j_0}(z^q) b_{j_0}(z) = 0.$$

Or,  $c_{j_0}(z) \neq 0$ . On en déduit que  $b_{j_0}(z) = 0$ . Cela contredit (IV.32). Donc il existe  $\underline{m}$  non nul et maximal pour l'ordre lexicographique tel que  $c_{\underline{m}}(z) \neq 0$ . En comparant les termes de degré maximal  $\underline{m}$  des deux côtés de (IV.38), on obtient

$$R(z)c_{\underline{m}}(z) = \frac{c_{\underline{m}}(z^q)}{a_1(z)^{pm_1} \dots a_i(z)^{pm_i}}. \quad (\text{IV.43})$$

D'où

$$\frac{c_{\underline{m}}(z)/c_{j_0}(z)}{c_{\underline{m}}(z^q)/c_{j_0}(z^q)} = \frac{a_{j_0}(z)}{a_1(z)^{pm_1} \dots a_i(z)^{pm_i}}. \quad (\text{IV.44})$$

De même que précédemment, posons  $s(z) = c_{\underline{m}}(z)/c_{j_0}(z) \in U$ . Il existe un entier  $\mu > 0$  tel que  $s(z)^{q^\mu} \in \overline{\mathbb{K}}(z)$ . Notons  $r(z) = s(z)^{q^\mu}$ . En élevant (IV.44) à la puissance  $q^\mu$ -ième, on obtient

$$\frac{r(z)}{r(z^q)} = \frac{a_{j_0}(z)^{q^\mu}}{a_1(z)^{pm_1 q^\mu} \dots a_i(z)^{pm_i q^\mu}}. \quad (\text{IV.45})$$

Donc (IV.28) est vérifiée. Ceci achève la démonstration du théorème IV.2.1. □

### Remarque IV.2.1

Lorsque  $b_j(z) = 0$  pour tout  $j$ , le théorème IV.2.1 est en fait une équivalence (voir par exemple [6]). C'est-à-dire que s'il existe  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$  non tous nuls et  $r(z) \in \overline{\mathbb{K}}(z) \setminus \{0\}$  tel.le.s que (IV.28) soit vérifiée, alors les fonctions sont algébriquement dépendantes. En effet, on remarque que la fonction  $g(z) = \prod_{j=1}^n f_j(z)^{m_j}$  satisfait à l'équation suivante.

$$g(z) = \prod_{j=1}^n a_j(z)^{m_j} g(z^q). \quad (\text{IV.46})$$

Donc si (IV.28) est vérifiée, on obtient

$$g(z) = \frac{r(z)}{r(z^q)} g(z^q). \quad (\text{IV.47})$$

On en déduit qu'il existe  $u \in \overline{\mathbb{K}}$  tel que  $g(z) = ur(z)$ , ce qui fournit une relation algébrique entre les  $f_j(z)$  sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . En revanche, lorsque  $b(z) \neq 0$ , on ne peut pas s'attendre à conserver cette équivalence en général. En effet, considérons

$$f_1(z) = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(z^{q^h} - T)(z^{q^{h-1}} - T) \dots (z^q - T)}, \quad (\text{IV.48})$$

et

$$f_2(z) = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{((z^{q^h} - T)(z^{q^{h-1}} - T) \dots (z^q - T))^2} \quad (\text{IV.49})$$

Ces fonctions ont été introduites par L. Denis dans [50]. Elles vérifient

$$f_1(z) = a_1(z)f_1(z^q) + 1, \text{ où } a_1(z) = -\frac{1}{z^q - T}, \quad (\text{IV.50})$$

et

$$f_2(z) = a_2(z)f_2(z^q) + 1, \text{ où } a_2(z) = \frac{1}{(z^q - T)^2}. \quad (\text{IV.51})$$

On a  $a_1(z)^{-2}a_2(z) = 1$ . Donc (IV.28) est vérifiée avec  $r(z) = 1$ . Mais L. Denis a montré dans [50] que ces fonctions sont algébriquement indépendantes. En comparaison, si l'on considère les équations homogènes

$$g_1(z) = a_1(z)g_1(z^q), \quad (\text{IV.52})$$

et

$$g_2(z) = a_2(z)g_2(z^q), \quad (\text{IV.53})$$

la fonction  $g_1(z)^2$  est solution de (IV.53). Il existe alors  $u \in \overline{\mathbb{K}}$  tel que  $g_1(z)^2 = ug_2(z)$  et les fonctions  $g_1(z), g_2(z)$  sont bien algébriquement dépendantes.

Considérons à présent une solution  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  du système (IV.27). En imposant des conditions sur les  $a_j(z), b_j(z)$ , il est possible de garantir l'indépendance algébrique des  $f_j(z)$  sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . Nous y travaillons actuellement, mais nous nous contentons ici d'en donner une illustration dans le cas de systèmes homogènes d'ordre 1. Nous cherchons pour ce faire à mettre en défaut (IV.28). Avant cela, définissons, pour tout  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}, 0 < |\alpha| < 1$ , l'orbite de  $\alpha$  par

$$\text{Orb}(\alpha) = \{\alpha^{q^k}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

### Proposition IV.2.1

Soient  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  non constantes telles que pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , il existe  $a_j(z) \in \mathbb{K}(z)$  telle que

$$f_j(z) = a_j(z)f_j(z^q). \quad (\text{IV.54})$$

On suppose que pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_j(z)$  admette un zéro (ou resp. un pôle)  $\alpha$  en dehors de  $\cup_{k \geq 1} \mathbb{F}_{q^k}$ , tel que pour tout  $l \in \{1, \dots, n\}$ , tout pôle (ou resp. tout zéro)  $\beta$  de  $a_l(z)$  vérifie  $\beta \notin \text{Orb}(\alpha)$ .

Alors,  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  sont algébriquement indépendantes sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ .

*Démonstration.* D'après la remarque IV.1.2, on peut supposer que les  $a_j(z)$  n'ont ni zéro ni pôle en  $z = 0$ . Raisonnons par l'absurde. Supposons que  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  soient algébriquement dépendantes sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ . D'après le théorème IV.2.1, il existe  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$  non tous nuls et  $r(z) \in \overline{\mathbb{K}}(z) \setminus \{0\}$  tel.le.s que

$$\prod_{j=1}^n a_j(z)^{m_j} = \frac{r(z)}{r(z^q)}.$$

On remarque que  $r(z)$  n'a ni zéro ni pôle en  $z = 0$ . On obtient alors que

$$r(z) = r(0) \prod_{k=0}^{+\infty} \prod_{j=1}^n a_j(z^{q^k})^{m_j}. \quad (\text{IV.55})$$

On peut supposer sans perte de généralité que  $m_1 \neq 0$ . Comme  $f_1(z) \neq 0$ ,  $a_1(z)$  est non constante. Donc  $a_1(z)$  admet au moins un zéro ou un pôle. Par hypothèse sur les pôles et zéros des  $a_j(z)$ , la partie de droite de (IV.55) admet une infinité de zéros ou une infinité de pôles. Cela contredit le fait que  $r(z)$  est rationnelle. Donc  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  sont algébriquement indépendantes sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$ .  $\square$



# Chapitre V

## Mesures d'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes

L'objectif de ce chapitre est de développer une méthode qui permettrait d'établir des mesures d'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes définies sur des corps de fonctions de caractéristique non nulle. Celle-ci se fonde sur deux arguments. D'une part, un résultat appelé lemme de multiplicité et d'autre part un critère d'indépendance algébrique quantitatif. Comme mentionné dans l'introduction de cette thèse, un raisonnement fondé sur ces deux ingrédients connaît un développement récent en caractéristique zéro, au travers des travaux de E. Zorin qui visent à établir des mesures d'indépendance algébrique de valeurs de fonctions générales (notamment solutions de systèmes mahlériens ou différentiels). Nous démontrons un lemme de multiplicité, le théorème V.1.1, valable en toute caractéristique dans la section V.1. L'analogie de ce résultat, établi par E. Zorin dans un cadre très général fournit un énoncé comparable au théorème V.1.1 lorsque nous l'appliquons à notre cadre. Cependant, la démonstration employée par l'auteur est d'une nature différente de la nôtre. Nous utilisons la méthode de Mahler (construction d'une fonction auxiliaire puis d'une suite de polynômes de "taille" contrôlée par itération du système mahlérien) et un critère d'indépendance algébrique de P. Philippon [107], tandis que la stratégie employée par E. Zorin repose sur un lemme dit de transfert également dû à P. Philippon [108]. Intuitivement, ce résultat établit l'existence d'un  $n$ -uplet de fonctions  $(\alpha_1(z), \dots, \alpha_n(z))$  proche de  $(f_1(z), \dots, f_n(z))$  (en terme de distance projective), annulant le polynôme  $Q \in \mathbb{K}[z, X_1, \dots, X_n]$  pour lequel on veut minorer l'ordre en zéro de  $Q(f_1(z), \dots, f_n(z))$ , et tel que tout polynôme s'annulant en  $(f_1(z), \dots, f_n(z))$  s'annule aussi en  $(\alpha_1(z), \dots, \alpha_n(z))$ .

En ce qui concerne le critère d'indépendance algébrique quantitatif, un tel énoncé a été établi en caractéristique nulle, notamment par C. Jadot [71]. Cependant comme expliqué dans l'introduction de cette thèse, nous n'avons pas connaissance de son analogue en caractéristique non nulle. L'hypothèse V.2.1 serait la forme du résultat attendu, par analogie avec le théorème de C. Jadot. Dans la **section V.3**, nous mettons en oeuvre notre méthode afin de montrer comment la combinaison du théorème V.1.1 et l'hypothèse V.2.1 produirait des mesures d'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes définies sur des corps de fonctions de caractéristique non nulle. Notre démarche est similaire à celle utilisée pour la démonstration du théorème II.1.1. Nous faisons appel à la méthode de Mahler pour construire une suite de polynômes satisfaisant à l'hypothèse V.2.1 (qui remplace le critère d'indépendance algébrique qualitatif de P. Philippon). La différence avec la démonstration du théorème II.1.1 est l'intervention du théorème V.1.1 afin d'exercer un contrôle quantitatif plus précis sur la hauteur et les valeurs en  $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$  des polynômes construits par la méthode de Mahler.

### V.1 Lemme de multiplicité

Nous commençons par citer et démontrer le premier argument de la méthode présentée : un lemme de multiplicité. Dans toute la suite, les  $c_i$  (resp.  $c_i(N)$ ) désigneront des constantes réelles strictement



positives et qui ne dépendent que des éléments  $f_1(z), \dots, f_n(z), \alpha, \mathbb{K}$ , lorsque ceux-ci sont présents dans l'environnement considéré (resp. et du paramètre  $N$ ).

**Théorème V.1.1 (F.)**

Soit  $\mathbb{K}$  un corps de nombres ou de fonctions de caractéristique non nulle. Soient  $d \geq 2$  un entier naturel et  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  des fonctions  $d$ -mahlériennes vérifiant le système

$$\begin{pmatrix} f_1(z^d) \\ \vdots \\ f_n(z^d) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}, \text{ où } A(z) \in GL_n(\mathbb{K}(z)). \quad (\text{V.1})$$

Notons

$$l' = \text{degtr}_{\overline{\mathbb{K}(z)}}\{f_1(z), \dots, f_n(z)\}.$$

Soient  $M \geq N \geq 1$  deux entiers. Alors il existe une constante réelle  $c$  strictement positive telle que pour tout polynôme non nul  $Q \in \mathbb{K}[z, X_1, \dots, X_n]$  vérifiant

1.  $\text{deg}_X(Q) \leq N$
2.  $\text{deg}_z(Q) \leq M$
3.  $Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) \neq 0$ ,

on ait

$$\text{ord}_{z=0}Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) \leq cMN^{l'}.$$

Nous aurons besoin du critère d'indépendance algébrique de P. Philippon [107], recopié en le théorème II.1.2. Démontrons à présent le théorème V.1.1.

*Démonstration du théorème V.1.1.* On se place sous les notations et hypothèses du théorème V.1.1. On suppose par l'absurde que pour  $\lambda$  assez grand (au sens explicité dans la suite), on ait

$$\text{ord}_{z=0}Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = \lambda MN^{l'}. \quad (\text{V.2})$$

On fixe par ailleurs un nombre algébrique  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$  dans le domaine de convergence des fonctions  $f_i(z)$  et régulier pour le système (V.1) dont on se servira dans la suite pour obtenir une contradiction à (V.2). Nous découpons notre raisonnement en deux étapes. La première consiste en la mise en œuvre de la méthode de Mahler dans le but de construire une suite de polynômes satisfaisant aux hypothèses du théorème II.1.2 et la seconde, à appliquer ce critère d'indépendance algébrique afin d'obtenir une contradiction.

— **Étape 1** : Construction d'une suite de polynômes  $P_k(X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  satisfaisant aux hypothèses du critère d'indépendance algébrique de P. Philippon, recopié en le théorème II.1.2. Ceux-ci doivent être de degré et hauteur contrôlé.e et prendre de petites valeurs en  $1, f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$ . Afin de garantir cette dernière condition, l'idée est la même que pour la démonstration du théorème II.1.1. Nous établissons en effet que le polynôme  $Q(z, X_1, \dots, X_n)$  du théorème V.1.1 est tel que la fonction  $Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z))$  est de grand ordre en  $z = 0$ . Celle-ci sera la fonction auxiliaire à partir de laquelle nous construirons les  $P_k$ , par itération du système mahlérien (V.1).

Soit  $Q_0(z, X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[z, X_0, \dots, X_n]$  le polynôme homogène en  $X$ , de degré  $N$  tel que

$$\begin{cases} Q_0(z, 1, X_1, \dots, X_n) = Q(z, X_1, \dots, X_n) \\ \text{deg}_z(Q_0) = \text{deg}_z(Q) \leq M \end{cases}.$$

Nous nous intéressons tout d'abord au contrôle de l'ordre de  $Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z))$  en  $z = 0$ .

On pose, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$Q_k(z, X_0, X_1, \dots, X_n) = Q_{k-1}(z^d, X_0, \langle A_1(z), \overline{X} \rangle, \dots, \langle A_n(z), \overline{X} \rangle)(a(z))^N, \quad (\text{V.3})$$

où  $a(z)$  est un polynôme de  $\mathbb{K}[z]$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a(z)A_i(z) \in \mathbb{K}[z]^n$  et dont, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha^{d^k}$  n'est pas un zéro (ce qui est possible puisque pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha^{d^k}$  n'est pas un pôle de  $A(z)$ ), et  $A_i(z)$  la  $i$ -ème ligne de la matrice  $A(z)$ . Comme la matrice  $A(z)$  est inversible et que le polynôme homogène  $Q_0$  est non nul, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , le polynôme  $Q_k$  est homogène en  $X_0, \dots, X_n$  de degré  $N$ . De plus, on trouve par récurrence sur  $k$  que

$$Q_k(z, 1, f_1(z), \dots, f_n(z)) = \left( \prod_{j=0}^{k-1} a(z^{d^j}) \right)^N Q(z^{d^k}, f_1(z^{d^k}), \dots, f_n(z^{d^k})).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \text{ord}_{z=0} Q_k(z, 1, f_1(z), \dots, f_n(z)) &= N \text{ord}_{z=0}(a(z)) \sum_{j=0}^{k-1} d^j + d^k \text{ord}_{z=0} Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) \\ &= c_2 N \frac{d^k - 1}{d - 1} + d^k \lambda M N^{l'}. \end{aligned}$$

Or, en supposant  $\lambda > c_2$ , comme  $M \geq N$ , on a :

$$0 \leq c_2 N \frac{d^k - 1}{d - 1} \leq \lambda M N^{l'} d^k,$$

d'où :

$$\lambda M N^{l'} d^k \leq \text{ord}_{z=0} Q_k(z, 1, f_1(z), \dots, f_n(z)) \leq 2\lambda M N^{l'} d^k. \quad (\text{V.4})$$

Par ailleurs, d'après le théorème des zéros isolés, pour tout  $k$  assez grand par rapport à  $N$ , disons  $k \geq c_0(N)$ , on a :

$$Q(\alpha^{d^k}, f_1(\alpha^{d^k}), \dots, f_n(\alpha^{d^k})) \neq 0, \quad (\text{V.5})$$

Ceci combiné au fait que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha^{d^k}$  n'est pas un zéro de  $a(z)$  implique que

$$Q_k(\alpha, 1, f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) \neq 0, \quad \forall k \geq c_0(N). \quad (\text{V.6})$$

A présent, posons pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$P_k(X_0, \dots, X_n) = Q_k(\alpha, X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]. \quad (\text{V.7})$$

On remarque que

$$\deg(P_k) = \deg_X(Q_k) = N.$$

Il reste à présent à contrôler la hauteur et la valeur en  $1, f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$  des  $P_k$ . Nous nous y attelons dans la suite.

Tout d'abord, en procédant comme dans [56, Démonstration du théorème 1.3] (ligne (4.12)), on trouve que pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\deg_z(Q_k) \leq c_3 d^k M. \quad (\text{V.8})$$

Ainsi, en raisonnant comme dans [56, Démonstration du lemme 4.3], quitte à augmenter  $c_0(N)$ , on obtient que pour tout  $k \geq c_0(N)$ ,

$$h(P_k) \leq c_4 d^k M.$$

Enfin, en procédant comme dans [56, Démonstration du théorème 1.3] (ligne (4.11)), quitte à augmenter  $c_0(N)$ , on trouve que pour tout  $k \geq c_0(N)$ ,

$$-c_5 d^k \lambda M N^{l'} \leq \log |P_k(1, f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))| \leq -c_6 d^k \lambda M N^{l'}.$$

— **Étape 2** : Nous appliquons le critère d'indépendance algébrique de P. Philippon (recopié en le théorème II.1.2) aux  $1, f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$  et à  $s = l' + 1$ , où  $l' = \text{degtr}_{\overline{\mathbb{K}}(z)}\{f_i(z)\}$ , afin d'obtenir une contradiction.

Soit  $c_1 > 0$ . On pose  $t = k$ ,  $s = l' + 1$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega_i = f_i(\alpha)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , et  $\delta(k) = N$ ,  $\sigma(k) = c_4 d^k M$ ,  $\epsilon(k) = c_6 d^k \lambda M N^{l'}$ ,  $\rho(k) = c_5 d^k \lambda M N^{l'}$ .

Pour conclure, nous montrons qu'avec ces notations, les polynômes  $P_k$  et le nombre  $\alpha$ , les hypothèses du théorème II.1.2 sont vérifiées, ce qui nous fournira une contradiction à (V.2). Les conditions 6 et 7 le sont. On note qu'alors  $c_5 \geq c_6$ , ce qui implique la condition 2. Les conditions 1 et 3 sont également satisfaites. Il reste à montrer que les conditions 4 et 5 sont remplies.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{\epsilon(k)}{(\delta(k) + \sigma(k))\delta(k)^s} = \frac{c_6 d^k \lambda M N^{l'}}{(N + c_4 d^k M)N^{l'+1}}.$$

Or, on vérifie que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$f(x) = \frac{c_6 d^x \lambda M}{(N + c_4 d^x M)N}$$

est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Donc la condition 4 est vérifiée.

Enfin, un calcul donne pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{\epsilon(k)^{l'+2}}{\delta(k)^{l'}[\epsilon(k+1)^{l'+1} + \rho(k+1)^{l'+1}]} = c_7 \frac{d^k \lambda M N^{l'}}{N^{l'}} \quad (\text{V.9})$$

$$= c_7 d^k \lambda M. \quad (\text{V.10})$$

Puisque  $(\delta(k) + \sigma(k)) = o_{\lambda \rightarrow +\infty}(d^k \lambda M)$  uniformément en  $k$  et indépendamment de  $M$ , quitte à augmenter  $\lambda$ , on peut supposer que la condition 5 est satisfaite. Le théorème II.1.2 implique alors que

$$\text{degtr}_{\overline{\mathbb{K}}}\{f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)\} \geq l' + 1,$$

ce qui est une contradiction car

$$\text{degtr}_{\overline{\mathbb{K}}}\{f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)\} \leq \text{degtr}_{\overline{\mathbb{K}}(z)}\{f_1(z), \dots, f_n(z)\} = l'.$$

Ainsi, (V.2) est mise en défaut pour  $\lambda$  assez grand, ce qui achève la démonstration du théorème V.1.1. □

### Remarque V.1.1

Notons qu'un lemme de multiplicité, du type du théorème V.1.1, possède également des applications dans un tout autre contexte. Il intervient en effet de façon primordiale dans l'établissement par B. Adamczewski et C. Favre [8, 11] d'une base des relations linéaires entre fonctions mahlériennes en caractéristique nulle. Nous avons déjà évoqué ce résultat, qui semble se transposer à la caractéristique non nulle, à la fin de la section I.1.3 de l'introduction de cette thèse et au début du chapitre III. Cette maîtrise des relations de dépendance linéaire entre fonctions mahlériennes est l'un des intérêts du raffinement du théorème II.1.1 en le théorème III.1.1.

## V.2 Critère d'indépendance algébrique quantitatif

Dans toute la suite,  $K$  désignera  $\mathbb{F}_q(T)$  et  $\mathbb{K}$  un corps de fonctions de caractéristique non nulle. Voici la forme générale que prendrait l'analogie du critère d'indépendance algébrique quantitatif de C.

Jadot en caractéristique non nulle. Comme expliqué dans la section I.7 de l'introduction de cette thèse, nous ne nous attendons pas à la réalisation exacte de cette hypothèse. Il y aurait lieu par exemple de pondérer la ligne (V.11) par des constantes appropriées. Nous ne démontrons pas cette hypothèse dans cette thèse. Cela constitue une perspective de recherche intéressante. Avant de l'énoncer, nous introduisons la notation suivante. Pour un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ ,  $t(P)$  désignera la *taille* de  $P$ , définie par

$$t(P) = \deg(P) + h(P).$$

**Hypothèse V.2.1** (fondée sur un théorème de C. Jadot pour les corps de nombres)

Soient  $\omega = (1, \omega_1, \dots, \omega_n) \in C^{n+1}$  tels que  $s = \text{degr}_K\{\omega_1, \dots, \omega_n\} \geq 1$ ,  $\delta, \tau, \sigma, U$  des nombres réels tels que  $\delta \geq 1$ ,  $\sigma \geq 1$ ,  $\sigma^s < \tau < U$ . On suppose de plus que pour tout  $S$  tel que  $\frac{\tau}{\sigma^s} < S < \frac{U}{\sigma^s}$ , il existe un polynôme  $Q \in A[X_0, \dots, X_n]$  tel que

1.  $\deg_X(Q) \leq \delta$
2.  $h(Q) \leq \tau$
3.  $-S\sigma^{s+1} \leq \log|Q(\omega)| \leq -S\sigma^s$ .

Soit  $P \in \overline{\mathbb{K}}[X_0, \dots, X_n]$  tel que  $P(\omega) \neq 0$  et

$$\frac{\delta}{\tau}t(P) + \deg(P) < \frac{U}{\sigma^s \tau \delta^{s-1}}. \quad (\text{V.11})$$

Alors

$$\log|P(\omega)| \geq -U. \quad (\text{V.12})$$

### V.3 Mesures d'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes

Les mesures d'indépendance algébrique que l'on obtient en combinant le théorème V.1.1 et l'hypothèse V.2.1 sont de la forme suivante.

**Théorème V.3.1** (F.)

Supposons que l'hypothèse V.2.1 soit vérifiée. Soient  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  des solutions du système mahlérien (V.1). Soit  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ ,  $0 < |\alpha| < 1$ , un nombre régulier pour le système (V.1). Soit  $\omega = (1, f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) \in C^{n+1}$ . Notons

$$l' = \text{degr}_{\overline{\mathbb{K}}(z)}\{f_i(z)\}.$$

Soit  $P(X_0, \dots, X_n) \in \overline{\mathbb{K}}[X_0, \dots, X_n]$  un polynôme homogène tel que  $P(\omega) \neq 0$ . Alors il existe une constante  $c_1 > 0$  telle que  $\log|P(\omega)| \geq -c_1 \deg(P)^{l'} t(P) (\deg(P)^{l'+1} + 1)$ .

Nous démontrons à présent le théorème V.3.1 en deux étapes, qui font l'objet des deux sections suivantes. La première consiste en la mise en œuvre de la méthode de Mahler, afin de construire une suite de polynômes vérifiant les conditions de l'hypothèse V.2.1 et la seconde en l'application de celle-ci.

#### V.3.1 Construction d'une suite de polynômes adaptée

L'objectif de cette section est de démontrer la proposition V.3.1 ci-dessous. Celle-ci assure l'existence d'une suite de polynômes de degré, hauteur et valeurs en  $1, f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$  contrôlé.e.s. Nous utilisons pour cela la méthode de Mahler. La différence notable avec l'usage qui en est fait dans la démonstration du théorème II.1.1 réside en l'intervention du lemme de multiplicité (théorème V.1.1), qui permet un meilleur contrôle des quantités associées aux polynômes construits.

**Proposition V.3.1**

Soient  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  des solutions du système mahlérien (V.1). Soit  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ ,  $0 < |\alpha| < 1$ , un nombre régulier pour le système (V.1). Soit  $\omega = (1, f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) \in C^{n+1}$ . Notons

$$l' = \text{degr}_{\overline{\mathbb{K}}(z)} \{f_i(z)\}.$$

Alors, il existe des constantes  $c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  telles que pour tous  $M \geq N \geq c_2$  et  $k$  tel que  $d^k \geq c_3 MN^{l'+1}$ , il existe un polynôme homogène  $P = P_{M,N,k}(X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  tel que

1.  $\deg_X(P) \leq N$ .
2.  $h(P) \leq c_4 d^k M$ .
3.  $-c_5 d^k MN^{l'} \leq \log|P(\omega)| \leq -c_6 d^k MN^{l'}$ .

Afin de démontrer la proposition V.3.1, le lemme classique suivant nous sera utile. Nous en donnons la démonstration pour plus de confort (voir [131, Lemma 7]).

**Lemme V.3.1**

Soient  $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \mathbb{K}\{z\}$  des solutions du système mahlérien (V.1). Notons

$$f_i(z) = \sum_{l=0}^{+\infty} f_{i,l} z^l, \text{ où } f_{i,l} \in \mathbb{K}.$$

Alors il existe un ensemble fini  $S$  de places de  $\mathbb{K}$  tel que pour tous  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $l \geq 0$ ,  $f_{i,l}$  soit un  $S$ -entier. De plus, il existe deux constantes  $c_7, c_8$  telles que pour toute place  $v$  de  $\mathbb{K}$ ,

$$|f_{i,l}|_v \leq c_7 c_8^l. \tag{V.13}$$

*Démonstration du lemme V.3.1.* Remarquons que d'après l'équation mahlérienne vérifiée par  $f_i(z)$ , il existe un entier  $l_i$  tel que pour tout  $l > l_i$   $f_{i,l}$  soit une combinaison linéaire de termes  $f_{i,s}$ , avec  $s < l$ , à coefficients dans l'ensemble fini des coefficients  $u_{i,r_i} \in \mathbb{K}, r_i = 0, \dots, R_i$ , des polynômes de cette équation mahlérienne (voir par exemple [11, Lemme 4.1]). On obtient (V.13) par récurrence. Par ailleurs, on sait qu'il existe un ensemble fini  $S$  de places de  $\mathbb{K}$  telles que pour tous  $i \in \{1, \dots, n\}, l \leq l_i$  et  $0 \leq r_i \leq R_i$ , les nombres  $f_{i,l}$  et  $u_{i,r_i}$  soient des  $S$ -entiers. L'assertion restant à démontrer découle du fait que l'ensemble des  $S$ -entiers est un anneau. □

Nous sommes à présent en mesure de démontrer la proposition V.3.1.

*Démonstration de la proposition V.3.1.* Posons, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$f_i(z) = \sum_{l=0}^{+\infty} f_{i,l} z^l, \text{ où } f_{i,l} \in \mathbb{K}.$$

Notons  $a(z) \in \mathbb{K}[z]$  le ppcm des dénominateurs des coefficients de  $A(z)$  et  $M(z) = a(z)A(z) \in GL_n(\mathbb{K}[z])$ . Soient  $M \geq N \geq 2[\mathbb{K} : K]$  deux entiers. Nous omettrons dans la suite les dépendances en  $M$  et  $N$ . La démonstration de la proposition V.3.1 repose sur la méthode de Mahler, dont les deux étapes principales sont la construction d'une fonction auxiliaire, en  $f_1(z), \dots, f_n(z)$ , de grand ordre en  $z = 0$  et l'itération du système mahlérien à partir de celle-ci afin d'obtenir une suite de polynômes de degré, hauteur et valeur en  $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$  contrôlé.e.s.

— **Étape 1** : Construction d'une fonction auxiliaire de grand ordre en l'origine.

Notre objectif est de construire un polynôme  $R(z, X_1, \dots, X_{l'}) = \sum_i Q_i(z) X_1^{i_1} \dots X_{l'}^{i_{l'}}$ , où  $Q_i(z) = \sum_{r=0}^M q_{i,r} z^r, q_{i,r} \in \mathbb{K}$ , pour lequel il existe deux constantes  $c_9, c_{10}$  telles que

1.  $\deg_z(R) \leq M$ .
2.  $\deg_X(R) \leq N$ .

$$3. n(M, N) := \text{ord}_{z=0}(R(z, f_1(z), \dots, f_{l'}(z))) \geq c_9(M+1) \binom{l'+N}{N}.$$

$$4. h(q_{i,r}) \leq c_{10}MN^{l'+1}$$

Remarquons qu'alors, on aura

$$n(M, N) \geq c_{11}MN^{l'}. \quad (\text{V.14})$$

Notons

$$R(z, f_1(z), \dots, f_{l'}(z)) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j z^j, \quad a_j \in \mathbb{K}.$$

Remarquons que pour tout entier  $j \geq 0$ ,  $a_j$  est une somme de produits d'un coefficient  $q_{i,r}$  par un produit d'au plus  $N$  coefficients  $f_{i,l}$ , avec  $l \leq j$ . On trouve un polynôme  $R(z, X_1, \dots, X_{l'})$  satisfaisant aux conditions 1-3 en résolvant le système d'équations

$$a_j = 0, 0 \leq j \leq \left\lfloor (M+1) \binom{l'+N}{N} \frac{1}{2^{[\mathbb{K}:K]}} \right\rfloor - 1 \quad (\text{V.15})$$

en les  $(M+1) \binom{l'+N}{N}$  inconnues que sont les coefficients  $q_{i,r}$ , équations à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

Notons  $n_0 = \left\lfloor (M+1) \binom{l'+N}{N} \frac{1}{2^{[\mathbb{K}:K]}} \right\rfloor$  le nombre d'équations du système (V.15), et  $m_0 = (M+1) \binom{l'+N}{N}$  le nombre d'inconnues de (V.15). Notons que

$$\begin{aligned} n_0[\mathbb{K}:K] &\leq (M+1) \binom{l'+N}{N} \frac{1}{2^{[\mathbb{K}:K]}} [\mathbb{K}:K] \\ &\leq (M+1) \binom{l'+N}{N} \frac{1}{2} \\ &= \frac{m_0}{2} \\ &< m_0, \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

Donc d'après le lemme de type Siegel établi par L. Denis dans [44] (comme remarqué dans [31] l'hypothèse de régularité de l'extension  $\mathbb{K}$  n'est pas nécessaire), il existe une solution  $(q_{i,r})_{i,r}$  au système (V.15) composée d'éléments non tous nuls de  $\mathbb{F}_q[T]$  telle que

$$h(q_{i,r}) \leq c_{12}[\mathbb{K}:K] \frac{1}{m_0 - n_0[\mathbb{K}:K]} \sum_{\nu=1}^{n_0} h(\gamma_{1,\nu}, \dots, \gamma_{m_0,\nu}), \quad (\text{V.17})$$

où  $\gamma_{s,j}$  est le coefficient de la  $s$ -ième inconnue sur la  $j$ -ième ligne du système (V.15). Afin de vérifier la condition 4, étudions les quantités intervenant dans (V.17). Tout d'abord, majorons la hauteur des coefficients du système (V.15). Fixons  $i \in \{1, \dots, n\}$ . D'après le lemme V.3.1, il existe un ensemble fini  $S$  tel que les  $f_{i,l}$  soient des  $S$ -entiers. De plus, pour toute  $v \in S$ , on a

$$|f_{i,l}|_v \leq c_7 c_8^l, \forall l \geq 0. \quad (\text{V.18})$$

Mais les coefficients  $\gamma$  du système (V.15) sont des sommes de produits d'au plus  $N$  coefficients des  $f_i(z)$  correspondant à des puissances de  $z$  de degré au plus  $n_0$ . Ce sont donc également des

$S$ -entiers et on a pour toute  $v \in S$ , par ultramétrie

$$\begin{aligned}
|\gamma|_v &\leq \max_{1 \leq i \leq n, 0 \leq l \leq n_0} |f_{i,l}|_v^N \\
\log |\gamma|_v &\leq N \log \max_{1 \leq i \leq n, 0 \leq l \leq n_0} |f_{i,l}|_v \\
&\leq N \max_{0 \leq l \leq n_0} (l \log(c_8) + \log(c_7)) \\
&\leq c_{13} n_0 N \\
&\leq c_{14} n(M, N) N.
\end{aligned} \tag{V.19}$$

En appliquant le théorème V.1.1, on obtient

$$\log |\gamma|_v \leq c_{15} M N^{l'+1}. \tag{V.20}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
h(\gamma_{1,\nu}, \dots, \gamma_{m_0,\nu}) &= \frac{1}{[\mathbb{K} : K]} \sum_{v \in S} d_v \log(\max\{1, |\gamma_{1,\nu}|_v, \dots, |\gamma_{m_0,\nu}|_v\}) \\
&\leq \frac{1}{[\mathbb{K} : K]} \sum_{v \in S} d_v c_{15} M N^{l'+1} \\
&\leq c_{16} M N^{l'+1}.
\end{aligned} \tag{V.21}$$

Donc (V.17) devient

$$h(q_{i,r}) \leq c_{17} \frac{n_0 [\mathbb{K} : K]}{m_0 - n_0 [\mathbb{K} : K]} M N^{l'+1}. \tag{V.22}$$

Or, la fonction  $x \mapsto \frac{x}{m_0 - x}$  est croissante sur  $[0, m_0[$  et vaut 1 en  $m_0/2$ . Donc d'après (V.16),

$$\frac{n_0 [\mathbb{K} : K]}{m_0 - n_0 [\mathbb{K} : K]} \leq 1,$$

et (V.22) devient

$$h(q_{i,r}) \leq c_{17} M N^{l'+1}. \tag{V.23}$$

On a donc trouvé un polynôme  $R(z, X_1, \dots, X_{l'}) \in \mathbb{K}[z][X_1, \dots, X_{l'}]$  satisfaisant aux conditions 1-4.

— **Étape 2** : Itération du système mahlérien.

Notons  $R_0(z, X_0, \dots, X_n)$  le polynôme homogène de degré  $N$  en  $X_0, \dots, X_n$  et de même degré en  $z$  que  $R$ , tel que

$$R_0(z, 1, X_1, \dots, X_n) = R(z, X_1, \dots, X_n).$$

Rappelons que  $a(z)$  désigne le ppcm des dénominateurs des coefficients de  $A(z)$  et que nous notons  $M(z) = a(z)A(z) \in GL_n(\mathbb{K}[z])$ , et  $M_i(z)$  la  $i$ -ème ligne de la matrice  $M(z)$ . Posons également  $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)^t$ . On définit alors par récurrence pour tout  $k \geq 1$ ,

$$R_k(z, X_0, X_1, \dots, X_n) = R_{k-1}(z^d, a(z)X_0, \langle M_1(z), \bar{X} \rangle, \dots, \langle M_n(z), \bar{X} \rangle).$$

Nous allons à présent contrôler le degré, la hauteur et la valeur en  $(\alpha, \omega)$  des  $R_k$ .

Tout d'abord, on remarque que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a

$$\deg_X(R_k) = N. \tag{V.24}$$

Tâchons à présent de contrôler la valeur des  $R_k$  en  $(\alpha, \omega)$ . Notons pour ce faire,

$$E_{M,N}(z) = R(z, f_1(z), \dots, f_{l'}(z)) = \sum_{j=n(M,N)}^{+\infty} a_j(M, N) z^j.$$

Nous écrivons dans la suite, pour tout  $j \geq n(M, N)$ ,  $a_j = a_j(M, N)$ . Tout d'abord, notons que

$$R_k(\alpha, \omega) = \left( \prod_{j=0}^{k-1} a(\alpha^{d^j}) \right)^N E_{M,N}(\alpha^{d^k}).$$

Commençons par évaluer la quantité  $|E_{M,N}(\alpha^{d^k})|$ . Remarquons que quitte à agrandir l'ensemble  $S$ , les  $q_{i,r}$ , et donc les coefficients  $a_j$ , sont également des  $S$ -entiers. Pour toute  $v \in S$ , on a par ultramétrie

$$\begin{aligned} |a_j|_v &\leq \max_{i,r} |q_{i,r}|_v \max_{1 \leq i \leq n, 0 \leq l \leq j} |f_{i,l}|_v^N \\ \log |a_j|_v &\leq c_{18} \max_{i,r} h(q_{i,r}) + N \log \max_{i \leq n, l \leq j} |f_{i,l}|_v \\ &\leq c_{19} MN^{l'+1} + c_{20} Nj, \text{ d'après (V.18) et (V.23).} \end{aligned} \quad (\text{V.25})$$

Comme les  $a_j$  sont des  $S$ -entiers, on trouve que pour tout entier  $j$ ,

$$h(a_j) \leq c_{21} MN^{l'+1} + c_{22} Nj. \quad (\text{V.26})$$

De plus, d'après l'inégalité de Liouville (I.1), on trouve pour tout entier  $j$ ,

$$\log |a_j|_v \geq -c_{23} h(a_j) \geq -c_{24} MN^{l'+1} - c_{25} Nj. \quad (\text{V.27})$$

Or, on constate que

$$E_{M,N}(\alpha^{d^k}) = a_{n(M,N)} \alpha^{d^k n(M,N)} \left( 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_{n(M,N)+j}}{a_{n(M,N)}} \alpha^{d^k j} \right). \quad (\text{V.28})$$

Nous nous attachons à présent à encadrer  $|E_N(\alpha^{d^k})|$ . Tout d'abord, d'après (V.26) et (V.27), on a

$$\left| \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_{n(M,N)+j}}{a_{n(M,N)}} \alpha^{d^k j} \right|_v \leq \sum_{j=1}^{+\infty} e^{c_{21} MN^{l'+1} + c_{22} N(n(M,N)+j) + c_{24} MN^{l'+1} + c_{25} Nn(M,N)} |\alpha|_v^{d^k j} \quad (\text{V.29})$$

D'après le théorème V.1.1, il vient

$$\left| \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_{n(M,N)+j}}{a_{n(M,N)}} \alpha^{d^k j} \right|_v \leq \sum_{j=1}^{+\infty} e^{c_{26} MN^{l'+1} + c_{22} Nj} |\alpha|_v^{d^k j} \quad (\text{V.30})$$

Donc il existe  $c_{27}$  telle que si  $k$  vérifie  $d^k \geq c_{27} MN^{l'+1}$ , on ait pour toute  $v \in S$ ,

$$\left| \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_{n(M,N)+j}}{a_{n(M,N)}} \alpha^{d^k j} \right|_v \leq \frac{1}{2}. \quad (\text{V.31})$$

Par ailleurs, d'après (V.14), (V.26) et (V.27), quitte à augmenter  $c_{27}$ , pour tout  $k$  tel que  $d^k \geq c_{27} MN^{l'+1}$ , et pour toute  $v \in S$ , on a

$$e^{-c_{28} d^k n(M,N)} \leq \left| a_{n(M,N)} \alpha^{d^k n(M,N)} \right|_v \leq e^{-c_{29} d^k n(M,N)}. \quad (\text{V.32})$$

Il découle de (V.31) et (V.32) que pour tout  $k$  tel que  $d^k \geq c_{27} MN^{l'+1}$ ,

$$E_{M,N}(\alpha^{d^k}) \neq 0,$$



et

$$-c_{30}d^k n(M, N) \leq \log |E_{M,N}(\alpha^{d^k})| \leq -c_{31}d^k n(M, N).$$

Enfin, en procédant comme dans [56, Démonstration du théorème 1.3] (ligne (4.11)), on trouve que, quitte à augmenter  $c_{27}$ , pour tout  $k$  tel que  $d^k \geq c_{27}MN^{l'+1}$ ,

$$-c_{32}d^k n(M, N) \leq \log |R_k(\alpha, \omega)| \leq -c_{33}d^k n(M, N).$$

On déduit de (V.14) et du théorème V.1.1 que pour tout  $k$  tel que  $d^k \geq c_{27}MN^{l'+1}$ , on a

$$-c_{34}d^k MN^{l'} \leq \log |P_k(\omega)| \leq -c_{35}d^k MN^{l'}. \quad (\text{V.33})$$

Étudions maintenant  $h(R_k)$ . En procédant comme dans [56, Démonstration du lemme 4.1], il existe  $c_{36}, c_{37}$  telles que

$$h(R_k) \leq c_{36}k(\log(M) + N) + c_{37}k^2 + h(R_0).$$

Or, on a

$$\begin{aligned} h(R_0) &= \frac{1}{[\mathbb{K} : K]} \sum_{v \in S} d_v \log(\max_{i,r} \{1, |q_{i,r}|_v\}) \\ &\leq c_{38} \max_{i,r} h(q_{i,r}) \\ &\leq c_{39}MN^{l'+1}, \text{ d'après (V.23)}. \end{aligned} \quad (\text{V.34})$$

D'où

$$h(R_k) \leq c_{36}k(\log(M) + N) + c_{37}k^2 + c_{39}MN^{l'+1}. \quad (\text{V.35})$$

Posons à présent

$$P_k(X_0, \dots, X_n) = R_k(\alpha, X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n].$$

On constate que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\deg_X(P_k) = \deg_X(R_k) = N.$$

De plus, en procédant comme dans [56, Démonstration du lemme 4.3], on obtient que

$$h(P_k) \leq c_{40}(k + \log(M)) + c_{41}d^k M + h(R_k).$$

Donc, quitte à augmenter  $c_{27}$ , pour tout  $k$  tel que  $d^k \geq c_{27}MN^{l'+1}$ , on trouve

$$h(P_k) \leq c_{42}d^k M + h(R_k),$$

et

$$h(P_k) \leq c_{43}d^k M. \quad (\text{V.36})$$

Ainsi, les polynômes  $P_k = P_{M,N,k}$  satisfont aux conditions de la proposition V.3.1. Celle-ci est donc démontrée.  $\square$

### V.3.2 Application de l'hypothèse V.2.1

La démonstration du théorème V.3.1 repose sur l'application de l'hypothèse V.2.1 aux polynômes construits dans la proposition V.3.1. Afin d'obtenir un résultat complet, il resterait à établir l'hypothèse V.2.1. Comme mentionné précédemment, ceci constitue une perspective de recherche de cette thèse.

*Démonstration du théorème V.3.1.* Nous nous plaçons sous les hypothèses et notations du théorème V.3.1. La démonstration du théorème V.3.1 repose sur l'application de l'hypothèse V.2.1 aux paramètres définis ci-dessous. Considérons  $c_2, c_3, c_4$  et  $c_5 \geq c_6$  de la proposition V.3.1. On peut supposer que  $c_2, c_3, c_4$  sont des entiers (non nuls) et que  $c_6 \leq 1$ . Soit  $\sigma$  un entier tel que  $\sigma \geq (c_2 + 1)^{l' \frac{c_5}{c_6}}$ . Posons  $u = \left\lfloor \frac{2^{l'}}{c_6^{l'}} c_4 \sigma^{l'} (c_2 + 1)^{l'-1} \right\rfloor + 1$ . Soient  $N = u \deg(P)$  et  $M = u^2 (c_2 + 1) \deg(P)$ . Soit  $k$  le plus petit entier tel que  $d^{k-1} \leq u c_3 M N^{l'} t(P) < d^k$ . Ceci pour faire en sorte que  $M \geq N \geq c_2$ ,  $M \geq u(c_2 + 1)N$ ,  $d^k \geq c_3 M N^{l'+1}$  et  $d^k \geq t(P)$ . Posons  $\delta = 2^{\frac{c_2+1}{c_6}} N$ ,  $\tau = c_4 d^k M$ ,  $U = d^k M N^{l'} + M N^{l'-1} t(P)$ ,  $s = l'$ . Vérifions à présent que ces paramètres satisfont aux conditions de l'hypothèse V.2.1. Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} \frac{U}{\sigma^{l'} \tau \delta^{l'-1}} &= \frac{c_6^{l'-1}}{2^{l'-1} (c_2 + 1)^{l'-1}} \frac{d^k M N^{l'} + M N^{l'-1} t(P)}{c_4 \sigma^{l'} d^k M N^{l'-1}} \\ &= \frac{c_6^{l'-1}}{\sigma^{l'} 2^{l'-1} (c_2 + 1)^{l'-1}} \left( \frac{N}{c_4} + \frac{t(P)}{c_4 d^k} \right) \\ &\geq \frac{c_6^{l'-1}}{\sigma^{l'} 2^{l'-1} (c_2 + 1)^{l'-1}} \left( \frac{u \deg(P)}{c_4} + \frac{u(c_2 + 1)N}{c_4 M d^k} t(P) \right) \\ &\geq \deg(P) + \frac{\delta}{\tau} t(P). \end{aligned}$$

Donc la condition (V.11) du théorème V.2.1 est satisfaite. Soit à présent  $S$  tel que

$$\frac{\tau}{\sigma^{l'}} < S < \frac{U}{\sigma^{l'}}. \quad (\text{V.37})$$

Posons

$$N_0 = \left\lfloor \left( \frac{S \sigma^{l'}}{c_6 d^k M} \right)^{\frac{1}{l'}} + c_2 \right\rfloor. \quad (\text{V.38})$$

Comme  $S \sigma^{l'} > \tau \geq d^k M$ , et  $c_6 \leq 1$ , on a bien  $N_0 \geq c_2$ .

De plus, on obtient que

$$\left( \frac{S \sigma^{l'}}{c_6 d^k M} \right)^{\frac{1}{l'}} + c_2 - 1 \leq N_0 \leq \left( \frac{S \sigma^{l'}}{c_6 d^k M} \right)^{\frac{1}{l'}} + c_2. \quad (\text{V.39})$$

Il en découle que

$$\left( \frac{S \sigma^{l'}}{c_6 d^k M} \right)^{\frac{1}{l'}} \leq N_0 \leq (c_2 + 1) \left( \frac{S \sigma^{l'}}{c_6 d^k M} \right)^{\frac{1}{l'}}. \quad (\text{V.40})$$

On en déduit que

$$-\frac{(c_2 + 1)^{l'}}{c_6} S \sigma^{l'} \leq -N_0^{l'} d^k M \leq -\frac{S \sigma^{l'}}{c_6}. \quad (\text{V.41})$$

On a donc

$$-c_6 N_0^{l'} d^k M \leq -S \sigma^{l'}.$$

Enfin, on a

$$-\frac{c_5(c_2+1)^{l'}}{c_6} S\sigma^{l'} \leq -c_5 N_0^{l'} d^k M$$

Or  $\sigma \geq \frac{c_5(c_2+1)^{l'}}{c_6}$ . Il vient alors que

$$-S\sigma^{l'+1} \leq -c_5 N_0^{l'} d^k M \leq -S\sigma^{l'}. \quad (\text{V.42})$$

Enfin,

$$\begin{aligned} N_0 &\leq (c_2+1) \left( \frac{U}{c_6 d^k M} \right)^{\frac{1}{l'}} \\ &= (c_2+1) \left( \frac{d^k M N^{l'} + M N^{l'-1} t(P)}{c_6 d^k M} \right)^{\frac{1}{l'}} \\ &\leq (c_2+1) N \left( \frac{1}{c_6} + \frac{t(P)}{c_6 d^k N} \right)^{\frac{1}{l'}} \\ &\leq 2 \frac{(c_2+1)}{c_6} N, \text{ car } d^k \geq t(P) \\ &= \delta. \end{aligned} \quad (\text{V.43})$$

Ainsi, étant donné  $S$  vérifiant (V.37),  $Q = P_{M, N_0, k}$ , de la proposition V.3.1, satisfait aux conditions 1,2 et 3 de l'hypothèse V.2.1. Cela implique alors que

$$\log |P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))| \geq -U \geq -c_{44} \deg(P)^{l'} t(P) (\deg(P)^{l'+2} + 1).$$

□

### Le cas où $A^{-1}(z)$ est une matrice à coefficients polynomiaux

Lorsque  $A^{-1}(z)$  est une matrice à coefficients polynomiaux, nous obtenons, toujours sous l'hypothèse V.2.1, de meilleures mesures qu'au théorème V.3.1. Nous considérons donc ici le système mahlérien suivant.

$$\begin{pmatrix} f_1(z^d) \\ \vdots \\ f_n(z^d) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}, \text{ où } A^{-1}(z) \in GL_n(\mathbb{K}[z]). \quad (\text{V.44})$$

### Théorème V.3.2

Supposons que l'hypothèse V.2.1 soit vérifiée. Soient  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  des fonctions solutions du système mahlérien (V.44). Soit  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ ,  $0 < |\alpha| < 1$ , un nombre régulier pour le système (V.44). Soit  $\omega = (1, f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) \in C^{n+1}$ . Notons

$$l' = \text{degtr}_{\overline{\mathbb{K}}(z)} \{f_i(z)\}.$$

Soit  $P(X_0, \dots, X_n) \in \overline{\mathbb{K}}[X_0, \dots, X_n]$  un polynôme homogène tel que  $P(\omega) \neq 0$ . Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\log |P(\omega)| \geq -c \deg(P)^{l'} t(P) (\deg(P) \log(\deg(P)) + 1)$ .

La démonstration du théorème V.3.2 est similaire à celle du théorème V.3.1. La proposition V.3.1 est remplacée par la proposition suivante.

### Proposition V.3.2

Soient  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  des fonctions solutions du système mahlérien (V.44). Soit  $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ ,  $0 < |\alpha| < 1$ , un nombre régulier pour le système (V.44). Soit  $\omega = (1, f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) \in C^{n+1}$ . Notons

$$l' = \text{degtr}_{\overline{\mathbb{K}}(z)} \{f_i(z)\}.$$

Alors, il existe des constantes  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  telles que pour tout  $N \geq c_1$  et tout  $k$  tel que  $d^k \geq c_2 \log(M)N$ , il existe un polynôme homogène  $P = P_{N,k}(X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$  tel que

1.  $\deg_X(P) \leq N$ .
2.  $h(P) \leq c_3 d^k M$ .
3.  $-c_4 d^k M N^{l'} \leq \log|P(\omega)| \leq -c_5 d^k M N^{l'}$ .

La démonstration de la proposition V.3.2 s'appuie sur le lemme suivant, qui remplace le lemme V.3.1.

**Lemme V.3.2**

Soient  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  des fonctions solutions du système mahlérien (V.44). Notons

$$f_i(z) = \sum_{l=0}^{+\infty} f_{i,l} z^l, \text{ où } f_{i,l} \in \mathbb{K}.$$

Alors il existe un ensemble fini  $S$  de places de  $\mathbb{K}$  tel que pour tous  $i \in \{1, \dots, n\}, l \geq 0$ ,  $f_{i,l}$  est un  $S$ -entier. De plus, il existe deux constantes  $c_6, c_7$  telles que pour toute place  $v$  de  $\mathbb{K}$  et  $l \geq 1$ , on ait

$$|f_{i,l}|_v \leq c_6 l^{c_7}.$$

Commençons par donner la démonstration du lemme V.3.2.

*Démonstration du lemme V.3.2.* Posons  $B(z) = A^{-1}(z) \in GL_n(\mathbb{K}[z])$ .

L'existence d'un ensemble fini  $S$  de places de  $\mathbb{K}$  tel que pour tous  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $l \geq 0$ ,  $f_{i,l}$  est un  $S$ -entier se démontre comme pour le lemme V.3.1. Pour le reste, soit  $l \in \mathbb{N}$ . Soit  $k$  un entier tel que  $l < d^k$ . On a

$$\mathbf{f}(z) = B(z)B(z^d) \cdots B(z^{d^{k-1}}) \mathbf{f}(z^{d^k}), \quad \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^t. \quad (\text{V.45})$$

En comparant les coefficients en  $z^l$  à gauche et à droite de (V.45), on voit que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f_{i,l}$  est égal au coefficient en  $z^l$  du produit scalaire suivant.

$$\left\langle \left[ B(z) \cdots B(z^{d^{k-1}}) \right]_i, \mathbf{f}_0 \right\rangle,$$

où  $[M]_i$  désigne la  $i$ -ème ligne de la matrice  $M$  et  $\mathbf{f}_0 = \begin{pmatrix} f_{1,0} \\ \vdots \\ f_{n,0} \end{pmatrix}$ .

Or, la ligne  $\left[ B(z) \cdots B(z^{d^{k-1}}) \right]_i$  est une somme de  $n^{k-1}$  termes, qui eux-mêmes sont des produits de  $k$  coefficients des matrices  $B(z), \dots, B(z^{d^{k-1}})$ . Si l'on note  $b-1$  le maximum des degrés des polynômes de  $B(z)$ , chacun de ces produits est de la forme

$$\left( \sum_{i=0}^{b-1} b_{0,i} z^i \right) \cdots \left( \sum_{i=0}^{b-1} b_{k-1,i} z^{d^{k-1}i} \right), \quad b_{j,i} \in \mathbb{K}, \quad (\text{V.46})$$

où pour tout  $j \in \{0, \dots, k-1\}$ ,  $\sum_{i=0}^{b-1} b_{j,i} z^i$  est un polynôme de la matrice  $B(z)$ . Remarquons que le développement de chaque terme de (V.46) est une somme de  $b^k$  termes, qui eux-mêmes sont des produits de  $k$  coefficients des polynômes de la matrice  $B(z)$  (les  $b_{j,i}$ ). Notons  $u$  le maximum des  $|a|_v$ , sur l'ensemble des places  $v$  de  $S$  et l'ensemble des coefficients  $a$  des polynômes de la matrice  $B(z)$ . Il vient que

$$|f_{i,l}|_v \leq n^{k-1} b^k u^k \leq c_8^k. \quad (\text{V.47})$$

A présent, si  $l \geq 1$ , choisissons  $k$  tel que  $d^{k-1} \leq l < d^k$ . On a alors  $k \leq c_9 \log(l) + c_{10}$ . On déduit de (V.47) que

$$|f_{i,l}|_v \leq c_{11} l^{c_{12}}.$$

□

Présentons maintenant la démonstration de la proposition V.3.2, par analogie avec la démonstration de la proposition V.3.1.

*Démonstration de la proposition V.3.2.* Suivre la démonstration de la proposition V.3.1. La borne de la ligne (V.18) devient  $c_{13} \log(l + 1)$ ; celle de la ligne (V.19) devient  $c_{14} N \log(n(M, N))$ ; celle de la ligne (V.20) devient  $c_{15} \log(M)N$ , celle de la ligne (V.20) devient  $c_{16} \log(M)N$ ; celle de la ligne (V.22) devient  $c_{17} \frac{n_0 [\mathbb{K}:K]}{m_0 - n_0 [\mathbb{K}:K]} \log(M)N$ ; celle de la ligne (V.23) devient  $c_{18} \log(M)N$ , celle de la ligne (V.25) devient  $c_{19} \log(M)N + c_{20} N \log(j + 1)$ ; celle de la ligne (V.31) reste inchangée, mais est valable pour  $k \geq c_{21} \log(M)N$ ; celle de la ligne (V.24) reste inchangée; celle de la ligne (V.33) reste inchangée; celle de la ligne (V.34) devient  $c_{22} \log(M)N$ , celle de la ligne (V.35) devient  $c_{23} k(\log(M) + N) + c_{24} k^2 + c_{25} \log(M)N$ ; celle de la ligne (V.36) reste inchangée mais est valable pour tout  $k$  tel que  $d^k \geq c_{26} \log(M)N$ . Ceci fournit la démonstration de la proposition V.3.2.  $\square$

Enfin, la démonstration du théorème V.3.2 s'appuie sur la proposition V.3.2, de la même façon que le théorème V.3.1 provenait de la proposition V.3.1.

*Démonstration du théorème V.3.2.* Suivre la démonstration du théorème V.3.2 en posant les mêmes quantités  $\delta, \sigma, \tau, U$ , excepté pour  $k$ , où la contrainte issue de la proposition V.3.2 est moins forte que celle héritée de la proposition V.3.1. En effet, il s'agit d'avoir  $d^k \geq c_9 \log(M)N$  (et  $d^k \geq t(P)$  qui est utile à la ligne (V.43) de la démonstration du théorème V.3.1). On pose donc  $k$  le plus petit entier tel que  $d^{k-1} \leq uc_9 \log(M)t(P) < d^k$ . On applique alors l'hypothèse V.2.1, qui fournit le résultat souhaité.  $\square$

# Bibliographie

- [1] M. ABLY, L. DENIS and F. RECHER – « Transcendance de l'invariant modulaire en caractéristique finie », *Math. Z.* **231** (1999), 75–89.
- [2] B. ADAMCZEWSKI – « Mahler's method », <http://adamczewski.perso.math.cnrs.fr>, 2017.
- [3] B. ADAMCZEWSKI and J. P. BELL – « Diagonalization and rationalization of algebraic Laurent series », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **46** (2013), no. 6, 963–1004.
- [4] B. ADAMCZEWSKI, J. P. BELL and E. DELAYGUE – « Algebraic independence of G-functions and congruences "à la Lucas" », *arXiv :1603.04187v1 [math.NT]* (2016).
- [5] B. ADAMCZEWSKI and Y. BUGEAUD – « On the complexity of algebraic numbers. I. Expansions in integer bases », *Ann. of Math.* **165** (2007), 547–565.
- [6] — , « On the independence of expansions of algebraic numbers in an integer base », *Bull. Lond. Math. Soc.* **39** (2007), 283–289.
- [7] B. ADAMCZEWSKI, Y. BUGEAUD and F. LUCA – « Sur la complexité des nombres algébriques », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **339** (2004), no. 1, 11–14.
- [8] B. ADAMCZEWSKI and C. FAVERJON – « Méthode de Mahler : relations linéaires, transcendance et applications aux nombres automatiques », *Proc. London Math. Soc.* **115** (2017), 55–90.
- [9] — , « Mahler's method in several variables I. The theory of regular singular systems », *pré-publication* (2018), 65 pp., *arXiv :1809.04823 [math.NT]*.
- [10] — , « Mahler's method in several variables II. Applications to base change problems and finite automata », *pré-publication* (2018), 47 pp., *arXiv :1809.04826 [math.NT]*.
- [11] — , « Méthode de Mahler, transcendance et relations linéaires : aspects effectifs », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **30** (2018), 557–573.
- [12] B. ADAMCZEWSKI and T. RIVOAL – « Exceptional values of E-functions at algebraic points », *Bull. London Math. Soc.* **50** (2018), 697–708.
- [13] J.-P. ALLOUCHE, M. MENDÈS FRANCE and A. J. VAN DER POORTEN – « Indépendance algébrique de certaines séries formelles », *Bull. Soc. Math. France* **116** (1988), no. 4, 449–454 (1989).
- [14] J.-P. ALLOUCHE – « Sur la transcendance de la série formelle II », *Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2)* **2** (1990), 103–117.
- [15] J.-P. ALLOUCHE and J. SHALLIT – *Automatic sequences*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, Theory, applications, generalizations.
- [16] M. AMOU – « Algebraic independence of the values of certain functions at a transcendental number », *Acta Arith.* **59** (1991), 71–82.
- [17] G. W. ANDERSON – «  $t$ -motives », *Duke Math. J.* **53** (1986), 457–502.
- [18] G. W. ANDERSON, W. D. BROWNAWELL and M. A. PAPANIKOLAS – « Determination of the algebraic relations among special  $\Gamma$ -values in positive characteristic », *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), 237–313.
- [19] Y. ANDRÉ – « Solution algebras of differential equations and quasi-homogeneous varieties : a new differential Galois correspondence », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **47** (2014), no. 2, 449–467.
- [20] S. BAE and S. LEE – « On the coefficients of the Drinfeld modular equation », *J. Number Theory* **66** (1997), no. 1, 85–101.
- [21] R. C. BAKER – « On approximation with algebraic numbers of bounded degree », *Mathematika* **23** (1976), 18–31.
- [22] K. BALL and T. RIVOAL – « Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs », *Invent. Math.* **146** (2001), 193–207.

- [23] K. BARRÉ-SIRIEIX, G. DIAZ, F. GRAMAIN and G. PHILIBERT – « Une preuve de la conjecture de Mahler-Manin », *Invent. Math.* **124** (1996), 1–9.
- [24] P.-G. BECKER – « Transcendence measures for the values of generalized Mahler functions in arbitrary characteristic », *Publ. Math. Debrecen* **45** (1994), 269–282.
- [25] J. P. BELL, M. COONS and E. ROWLAND – « The rational-transcendental dichotomy of Mahler functions », *J. Integer Seq.* **16** (2013).
- [26] V. BERTHÉ – « Fonction  $\zeta$  de Carlitz et automates », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **5** (1993), 53–77.
- [27] —, « Automates et valeurs de transcendance du logarithme de Carlitz », *Acta Arith.* **66** (1994), 369–390.
- [28] —, « Combinaisons linéaires de  $\zeta(s)/\Pi^s$  sur  $\mathbf{F}_q(x)$ , pour  $1 \leq s \leq q - 2$  », *J. Number Theory* **53** (1995), 272–299.
- [29] F. BEUKERS – « A refined version of the Siegel-Shidlovskii theorem », *Ann. of Math. (2)* **163** (2006), no. 1, 369–379.
- [30] V. BOSSER – « Indépendance algébrique de valeurs de séries d’Eisenstein (théorème de Nesterenko) », *Formes modulaires et transcendance*, Sémin. Congr. **12**, Soc. Math. France, Paris, 2005, 119–178.
- [31] V. BOSSER and A. GALATEAU – « Lower bounds for the canonical height on Drinfeld modules », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2019), 165–200.
- [32] W. D. BROWNAWELL and M. A. PAPANIKOLAS – « Transcendence in positive characteristic », 2008, Lecture notes.
- [33] Y. BUGEAUD – « Mahler’s classification of numbers compared with Koksma’s », *Acta Arith.* **110** (2003), 89–105.
- [34] —, *Approximation by algebraic numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics **160**, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [35] —, « Mahler’s classification of numbers compared with Koksma’s. III », *Publ. Math. Debrecen* **65** (2004), 305–316.
- [36] —, « Mahler’s classification of numbers compared with Koksma’s. II », *Diophantine approximation*, Dev. Math. **16**, SpringerWienNewYork, Vienna, 2008, 107–121.
- [37] P. BUNDSCHUH – « Transzendenzmasse in Körpern formaler Laurentreihen », *J. Reine Angew. Math.* **299/300** (1978), 411–432.
- [38] L. CARLITZ – « On certain functions connected with polynomials in a Galois field », *Duke Math. J.* **1** (1935), no. 2, 137–168.
- [39] C.-Y. CHANG and M. A. PAPANIKOLAS – « Algebraic independence of periods and logarithms of Drinfeld modules », *J. Amer. Math. Soc.* **25** (2012), 123–150, With an appendix by Brian Conrad.
- [40] G. CHRISTOL – « Ensembles presque périodiques  $k$ -reconnaissables », *Theoret. Comput. Sci.* **9** (1979), no. 1, 141–145.
- [41] G. V. CHUDNOVSKY – *Contributions to the theory of transcendental numbers*, Mathematical Surveys and Monographs **19**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1984.
- [42] A. COBHAM – « On the hartmanis-stearns problem for a class of tag machines », *Conference Record of 1968 Ninth Annual Symposium on Switching and Automata Theory* (1968), 51–60.
- [43] G. DAMAMME and Y. HELLEGOUARCH – « Transcendence of the values of the Carlitz zeta function by Wade’s method », *J. Number Theory* **39** (1991), no. 3, 257–278.
- [44] L. DENIS – « Hauteurs canoniques et modules de Drinfeld », *Math. Ann.* **294** (1992), 213–223.
- [45] —, « Méthodes fonctionnelles pour la transcendance en caractéristique finie », *Bull. Austral. Math. Soc.* **50** (1994), 273–286.
- [46] —, « Dérivées d’un module de Drinfeld et transcendance », *Duke Math. J.* **80** (1995), no. 1, 1–13.
- [47] —, « Indépendance algébrique en caractéristique deux », *J. Number Theory* **66** (1997), 183–200.
- [48] —, « Indépendance algébrique de différents  $\pi$  », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **327** (1998), 711–714.
- [49] —, « Indépendance algébrique des dérivées d’une période du module de Carlitz », *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **69** (2000), 8–18.
- [50] —, « Indépendance algébrique de logarithmes en caractéristique  $p$  », *Bull. Austral. Math. Soc.* **74** (2006), no. 3, 461–470.
- [51] —, « Indépendance algébrique de logarithmes en caractéristique  $p$  », *Bull. Austral. Math. Soc.* **74** (2006), 461–470.



- [52] — , « Approximation algébrique en caractéristique  $p$  », *Acta Arith.* **147** (2011), 101–113.
- [53] T. DREYFUS, C. HARDOUIN and J. ROQUES – « Hypertranscendence of solutions of Mahler equations », *J. Eur. Math. Soc.* **20** (2018), 2209–2238.
- [54] S. EILENBERG – *Automata, languages, and machines. Vol. A*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1974.
- [55] D. EISENBUD – *Commutative algebra. with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [56] G. FERNANDES – « Méthode de Mahler en caractéristique non nulle : un analogue du théorème de Ku. Nishioka », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **68** (2018), 2553–2580.
- [57] — , « Regular extensions and algebraic relations between values of Mahler functions in positive characteristic », à paraître aux *Trans. Amer. Math. Soc.* (2018), arXiv :1808.00719 [math.NT].
- [58] S. FISCHLER and T. RIVOAL – « Arithmetic theory of  $E$ -operators », *J. Éc. polytech. Math.* **3** (2016), 31–65.
- [59] H. FURSTENBERG – « Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation », *Math. Systems Theory* **1** (1967), 1–49.
- [60] J. M. GEIJSSEL – *Transcendence in fields of positive characteristic*, Mathematical Centre Tracts **91**, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1979.
- [61] E.-U. GEKELER – « On the coefficients of Drinfeld modular forms », *Invent. Math.* **93** (1988), 667–700.
- [62] — , « Quasi-periodic functions and Drinfeld modular forms », *Compositio Math.* **69** (1989), 277–293.
- [63] D. GOSS – *Basic structures of function field arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)] **35**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [64] A. GRAHAM – *Kronecker products and matrix calculus : with applications*, Ellis Horwood Ltd., Chichester ; Halsted Press [John Wiley & Sons, Inc.], New York, 1981.
- [65] C. HARDOUIN – « Hypertranscendance des systèmes aux différences diagonaux », *Compos. Math.* **144** (2008), no. 3, 565–581.
- [66] — , « Iterative  $q$ -difference Galois theory », *J. Reine Angew. Math.* **644** (2010), 101–144.
- [67] — , « Unipotent radicals of Tannakian Galois groups in positive characteristic », Arithmetic and Galois theories of differential equations, Sémin. Congr. **23**, Soc. Math. France, Paris, 2011, 223–239.
- [68] R. HARTSHORNE – *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [69] D. R. HAYES – « Explicit class field theory for rational function fields », *Trans. Amer. Math. Soc.* **189** (1974), 77–91.
- [70] K. ISHIZAKI – « Hypertranscendence of meromorphic solutions of a linear functional equation », *Aequationes Math.* **56** (1998), no. 3, 271–283.
- [71] C. JADOT – « Critères pour l'indépendance algébrique et linéaire », *Thèse, Université Paris VI* (1996).
- [72] J. F. KOKSMA – « Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen », *Monatsh. Math. Phys.* **48** (1939), 176–189.
- [73] M. KONTSEVICH and D. ZAGIER – « Periods », Mathematics unlimited—2001 and beyond, Springer, Berlin, 2001, 771–808.
- [74] W. KRULL – « Parameterspezialisierung in Polynomringen. II. Das Grundpolynom », *Arch. Math. (Basel)* **1** (1948), 129–137.
- [75] K. K. KUBOTA – « Linear functional equations and algebraic independence », Transcendence theory : advances and applications (Proc. Conf., Univ. Cambridge, Cambridge, 1976), Academic Press, London, 1977, 227–229.
- [76] — , « On the algebraic independence of holomorphic solutions of certain functional equations and their values », *Math. Ann.* **227** (1977), 9–50.
- [77] S. LANG – *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics **211**, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [78] J. H. LOXTON and A. J. VAN DER POORTEN – « Arithmetic properties of certain functions in several variables », *J. Number Theory* **9** (1977), no. 1, 87–106.
- [79] — , « Arithmetic properties of certain functions in several variables. II », *J. Number Theory* **24** (1977), no. 4, 393–408.



- [80] — , « Arithmetic properties of certain functions in several variables. III », *Bull. Austral. Math. Soc.* **16** (1977), no. 1, 15–47.
- [81] J. H. LOXTON and A. J. VAN DER POORTEN – « Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations », *J. Reine Angew. Math.* **330** (1982), 159–172.
- [82] — , « Arithmetic properties of automata : regular sequences », *J. Reine Angew. Math.* **392** (1988), 57–69.
- [83] E. LUCAS – « Sur les congruences des nombres eulériens et les coefficients différentiels des fonctions trigonométriques suivant un module premier », *Bull. Soc. Math. France* **6** (1878), 49–54.
- [84] S. MAC LANE – « Modular fields. I. Separating transcendence bases », *Duke Math. J.* **5** (1939), 372–393.
- [85] K. MAHLER – « On a theorem of Liouville in fields of positive characteristic », *Canadian J. Math.* **1** (1949), 397–400.
- [86] — , « Remarks on a paper by W. Schwarz », *J. Number Theory* **1** (1969), 512–521.
- [87] K. MAHLER – « Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen », *Math. Ann.* **101** (1929), no. 1, 342–366.
- [88] — , « Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzrender Funktionen », *Math. Z.* **32** (1930), no. 1, 545–585.
- [89] — , « Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen in speziellen Punktfolgen », *Math. Ann.* **103** (1930), no. 1, 573–587.
- [90] — , « Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil I », *J. Reine Angew. Math.* **166** (1932), 118–136.
- [91] — , « Lectures on transcendental numbers », 1969 Number Theory Institute (Proc. Sympos. Pure Math., Vol XX, State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1969), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971, 248–274.
- [92] B. DE MATHAN – « Irrationality measures and transcendence in positive characteristic », *J. Number Theory* **54** (1995), 93–112.
- [93] B. H. MATZAT – « Differential galois theory in positive characteristic », *notes par Julia Hartmann* (2001).
- [94] L. NAGY and T. SZAMUELY – « A general theory of André’s solutions algebras », *pré-publication* (2019), 23.
- [95] Y. V. NESTERENKO – *Algebraic independence*, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay ; by Narosa Publishing House, New Delhi, 2009.
- [96] Y. V. NESTERENKO and A. B. SHIDLOVSKIĬ – « On the linear independence of values of  $E$ -functions », *Mat. Sb.* **187** (1996), 93–108.
- [97] P. NGUYEN PHU QUI – « Equations de Mahler et hypertranscendance », *Thèse, Université Pierre et Marie Curie* (2012).
- [98] K. NISHIOKA – « A note on differentially algebraic solutions of first order linear difference equations », *Aequationes Math.* **27** (1984), no. 1-2, 32–48.
- [99] K. NISHIOKA – « New approach in Mahler’s method », *J. Reine Angew. Math.* **407** (1990), 202–219.
- [100] — , *Mahler functions and transcendence*, Lecture Notes in Mathematics **1631**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [101] K. NISHIOKA and S. NISHIOKA – « Algebraic theory of difference equations and Mahler functions », *Aequationes Math.* **84** (2012), no. 3, 245–259.
- [102] O. ORE – « On a special class of polynomials », *Trans. Amer. Math. Soc.* **35** (1933), 559–584.
- [103] — , « Errata in my paper : “On a special class of polynomials” [Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933), no. 3, 559–584 ; 1501703] », *Trans. Amer. Math. Soc.* **36** (1934), no. 2, 275.
- [104] M. A. PAPANIKOLAS – « Tannakian duality for Anderson-Drinfeld motives and algebraic independence of Carlitz logarithms », *Invent. Math.* **171** (2008), 123–174.
- [105] F. PELLARIN – « An introduction to Mahler’s method for transcendence and algebraic independence », *arXiv :1005.1216v2* (2013).
- [106] P. PHILIPPON – « Critères pour l’indépendance algébrique », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1986), no. 64, 5–52.
- [107] — , « Critères pour l’indépendance algébrique dans les anneaux diophantiens », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **315** (1992), no. 5, 511–515.

- [108] — , « Indépendance algébrique et  $K$ -fonctions », *J. Reine Angew. Math.* **497** (1998), 1–15.
- [109] — , « Diophantine geometry », Introduction to algebraic independence theory, Lecture Notes in Math. **1752**, Springer, Berlin, 2001, 83–94.
- [110] — , « Groupes de Galois et nombres automatiques », *J. Lond. Math. Soc. (2)* **92** (2015), 596–614.
- [111] M. VAN DER PUT and M. F. SINGER – *Galois theory of difference equations*, Lecture Notes in Mathematics **1666**, 1997.
- [112] B. RANDÉ – « Equations fonctionnelles de Mahler et applications aux suites  $p$ -régulières », *Thèse, Université Bordeaux 1* (1992).
- [113] J. ROQUES – « An introduction to difference Galois theory », Symmetries and integrability of difference equations, CRM Ser. Math. Phys., Springer, Cham, 2017, 359–390.
- [114] — , « On the reduction modulo  $p$  of Mahler equations », *Tohoku Math. J.* **69** (2017), 55–65.
- [115] — , « On the algebraic relations between Mahler functions », *Trans. Amer. Math. Soc.* **370** (2018), 321–355.
- [116] — , « On the local structure of Mahler modules », *pré-publication* (2019), 9.
- [117] K. F. ROTH – « Rational approximations to algebraic numbers », *Mathematika* **2** (1955), 1–20; corrigendum, 168.
- [118] H. L. SCHMID – « Über die Automorphismen eines algebraischen Funktionenkörpers von Primzahlcharakteristik », *J. Reine Angew. Math.* **179** (1938), 5–15.
- [119] T. SCHNEIDER – *Einführung in die transzendenten Zahlen*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957.
- [120] W. SCHWARZ – « Remarks on the irrationality and transcendence of certain series », *Math. Scand* **20** (1967), 269–274.
- [121] J.-P. SERRE – *Corps locaux*, Publications de l'Université de Nancago, Hermann, Paris, 1968.
- [122] I. R. SHAFAREVICH (éd.) – *Number theory. IV*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **44**, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Transcendental numbers, A translation of it Number theory. 4 (Russian), Ross. Akad. Nauk, Vseross. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, Translation by N. Koblitz, Translation edited by A. N. Parshin and I. R. Shafarevich.
- [123] A. B. SHIDLOVSKII – *Transcendental numbers*, De Gruyter Studies in Mathematics **12**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1989, Translated from the Russian by Neal Koblitz, With a foreword by W. Dale Brownawell.
- [124] C. L. SIEGEL – « Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen [reprint of Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse 1929, Nr. 1] », On some applications of Diophantine approximations, *Quad./Monogr.* **2**, 81–138.
- [125] J. H. SILVERMAN – *The arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Mathematics **106**, Springer, Dordrecht, 2009.
- [126] B. SINGH – « On the group of automorphisms of function field of genus at least two », *J. Pure Appl. Algebra* **4** (1974), 205–229.
- [127] A. SURROCA – « Sur le nombre de points algébriques où une fonction analytique transcendante prend des valeurs algébriques », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **334** (2002), no. 9, 721–725.
- [128] D. S. THAKUR – *Function field arithmetic*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2004.
- [129] A. THIERY – « Indépendance algébrique des périodes et quasi-périodes d'un module de Drinfeld », The arithmetic of function fields (Columbus, OH, 1991), Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ. **2**, de Gruyter, Berlin, 1992, 265–284.
- [130] A. THUE – « Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen », *J. Reine Angew. Math.* **135** (1909), 284–305.
- [131] T. TÖPFER – « Algebraic independence of the values of generalized Mahler functions », *Acta Arith.* **70** (1995), no. 2, 161–181.
- [132] L. I. WADE – « Certain quantities transcendental over  $GF(p^n, x)$  », *Duke Math. J.* **8** (1941), 701–720.
- [133] — , « Certain quantities transcendental over  $GF(p^n, x)$ . II », *Duke Math. J.* **10** (1943), 587–594.
- [134] — , « Remarks on the Carlitz  $\psi$ -functions », *Duke Math. J.* **13** (1946), 71–78.
- [135] — , « Transcendence properties of the Carlitz  $\psi$ -functions », *Duke Math. J.* **13** (1946), 79–85.
- [136] M. WALDSCHMIDT – « Un demi-siècle de transcendance », Development of mathematics 1950–2000, Birkhäuser, Basel, 2000, 1121–1186.

- [137] J. YU – « On periods and quasi-periods of Drinfeld modules », *Compositio Math.* **74** (1990), 235–245.
- [138] — , « Analytic homomorphisms into Drinfeld modules », *Ann. of Math. (2)* **145** (1997), no. 2, 215–233.
- [139] O. ZARISKI and P. SAMUEL – *Commutative algebra*, The University Series in Higher Mathematics **II**, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J.-Toronto-London-New York, 1960.
- [140] E. ZORIN – « Multiplicity estimates for algebraically dependent analytic functions », *Proceedings of the London Mathematical Society* **108** (2014), no. 4, 989–1029.
- [141] W. ZUDILIN – « Arithmetic of linear forms involving odd zeta values », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **16** (2004), 251–291.



# Méthode de Mahler en caractéristique non nulle.

**Résumé.** Cette thèse se situe dans le domaine de la théorie des nombres. Elle porte sur la transcendance et l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes en des points algébriques. Il s'agit de fonctions développables en série entière au voisinage de l'origine, à coefficients dans un corps de nombres  $\mathbb{K}$ , et solutions d'équations aux différences linéaires de la forme

$$P_0(z)f(z) + P_1(z)f(z^d) + \cdots + P_m(z)f(z^{d^m}) = 0,$$

où les  $P_i(z)$  sont des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et  $d$  est un entier supérieur ou égal à 2. Ce type d'équations est introduit par K. Mahler en 1929. L'auteur développe une méthode qui lui permet de relier, sous certaines conditions, la transcendance d'une fonction mahlérienne à celle de ses valeurs en des points algébriques. De nombreux travaux émergent à partir des années 1970 autour de la méthode de Mahler, sous l'impulsion notamment de K. Kubota et J. Loxton et A. van der Poorten. Cette première phase de recherche atteint son apogée avec le théorème de Ku. Nishioka en 1990. L'autrice démontre l'égalité entre le degré de transcendance de fonctions solutions d'un système mahlérien et celui de leurs valeurs en un point algébrique non nul régulier. Récemment, les travaux de P. Philippon et B. Adamczewski et C. Favre raffinent ce résultat en établissant que toute relation algébrique homogène entre valeurs de fonctions solutions d'un système mahlérien en un point algébrique non nul régulier provient de la spécialisation d'une relation algébrique homogène entre les fonctions elles-mêmes.

Dans cette thèse, nous obtenons les analogues des deux résultats précédents, dans le cadre où  $\mathbb{K}$  est un corps de fonctions de caractéristique non nulle. L'intérêt est double. Tout d'abord, ces résultats apportent une connaissance générale du point de vue de la théorie de la transcendance et de l'indépendance algébrique. S'ajoute à cela la motivation spécifique suivante, mise en avant par L. Denis. Contrairement à la caractéristique nulle, il est possible de déformer des nombres remarquables, comme les périodes de modules de Drinfeld, en valeurs de fonctions mahlériennes définies sur des corps de fonctions de caractéristique non nulle.

Les deux principaux résultats de cette thèse évoqués plus haut ramènent l'étude de l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions mahlériennes à celle des fonctions elles-mêmes. Le théorème de spécialisation nécessite l'hypothèse supplémentaire selon laquelle l'extension engendrée sur  $\overline{\mathbb{K}}(z)$  par les solutions du système mahlérien considéré est régulière. En caractéristique nulle, toute extension mahlérienne est régulière. Cela se déduit du fait que toute fonction mahlérienne algébrique est rationnelle. Cependant, cette situation ne perdure pas en caractéristique  $p > 0$ , où la transcendance de fonctions mahlériennes demeure encore mystérieuse. Néanmoins, nous établissons dans cette thèse que cette dichotomie reste valide pour les fonctions  $d$ -mahlériennes, où  $p$  ne divise pas  $d$ .

Par ailleurs, nous démontrons un théorème dit de type Kolchin, qui fournit une condition suffisante à l'indépendance algébrique de fonctions mahlériennes solutions d'équations inhomogènes d'ordre 1, ainsi qu'une caractérisation de la transcendance de telles fonctions. Enfin, au-delà de ces résultats qualitatifs, nous nous intéressons aux mesures d'indépendance algébrique entre valeurs de fonctions mahlériennes en caractéristique non nulle. Nous proposons une approche, inspirée de travaux récents de E. Zorin en caractéristique nulle, qui permettrait d'obtenir de tels résultats quantitatifs.

**Mots-clés :** Transcendance, indépendance algébrique, méthode de Mahler, caractéristique non nulle

**Image de couverture:** Dessin réalisé par Randall Munroe, présent sur le site <https://xkcd.com/385/>, libre de reproduction pour tout usage non-commercial.



ED 512

INFO MATHS

Ecole doctorale

