



HAL
open science

Zéros exceptionnels des fonctions L p-adiques de Rankin-Selberg

Stéphane Horte

► **To cite this version:**

Stéphane Horte. Zéros exceptionnels des fonctions L p-adiques de Rankin-Selberg. Théorie des nombres [math.NT]. Université de Bordeaux, 2019. Français. NNT : 2019BORD0155 . tel-02390682

HAL Id: tel-02390682

<https://theses.hal.science/tel-02390682>

Submitted on 3 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École doctorale
**Mathématiques
et informatique**

université
de **BORDEAUX**

Thèse de Doctorat

présentée à

L'université de Bordeaux

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Stéphane HORTE

sous la direction de Denis BENOIS

POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES - THÉORIE DES NOMBRES

Zéros exceptionnels des fonctions L p -adiques de Rankin-Selberg

Soutenance prévue le 27 septembre 2019 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux
devant le jury composé de :

Denis BENOIS	Professeur	Université de Bordeaux	Directeur de thèse
Olivier BRINON	Professeur	Université de Bordeaux	Examinateur
Pierre CHAROLLOIS	Maître de Conférences	Université Paris 6	Examinateur
Mladen DIMITROV	Professeur	Université de Lille	Rapporteur
Pierre PARENT	Maître de Conférences	Université de Bordeaux	Examinateur
Bernadette PERRIN-RIOU	Professeur	Université Paris-Sud	Présidente du jury
Víctor ROTGER CERDÀ	Professeur	Universitat Politècnica de Catalunya	Rapporteur

Table des matières

Introduction	7
0.1 Phénomène des zéros exceptionnels	7
0.2 Fonctions L de Rankin-Selberg	13
0.3 Plan de la thèse	17
1 Préliminaires	19
1.1 (φ, Γ) -modules	19
1.2 Cohomologie des (φ, Γ) -modules	22
1.3 (φ, Γ) -modules de rang 1	26
1.4 Exponentielle élargie et logarithme de Perrin-Riou	29
1.5 Exponentielle élargie pour les (φ, Γ) -modules	32
1.6 Courbes modulaires et formes modulaires	35
1.7 Interpolation p -adique des formes modulaires	39
2 Définition et interprétation de l'invariant \mathcal{L}	45
2.1 L'invariant \mathcal{L} d'une représentation de poids -2	45
2.2 L'invariant \mathcal{L} d'une représentation de poids 0	51
2.3 Lien entre les deux invariants définis	56
2.4 Interprétation de l'invariant \mathcal{L}	58
3 Les fonctions L du produit de Rankin-Selberg	63
3.1 La fonction L complexe de Rankin-Selberg	63
3.2 Fonctions L p -adiques de Rankin-Selberg	66
3.3 Représentations p -adiques et produit de Rankin-Selberg	69
3.4 Éléments de Beilinson-Flach	74
3.5 Fonction L p -adique et éléments de Beilinson-Flach	88
4 Zéros de la fonction de Urban	97
4.1 Recherche des points d'annulations	97
4.2 Démonstration du théorème principal	100
4.3 Lien avec la conjecture des zéros exceptionnels	107

Résumé

Le but de cette thèse est d'étudier les zéros exceptionnels des fonctions L p -adiques de Rankin-Selberg. Autrement dit, pour un couple de formes modulaires nous étudierons l'annulation de la fonction p -adique interpolant la fonction L de Rankin-Selberg associée à ce couple. Lorsque la fonction s'annule, on exprime alors la dérivée de la fonction L p -adique en fonction de l'invariant \mathcal{L} , des périodes p -adique et infinie et du terme principal de la fonction complexe de Rankin-Selberg.

Mots clefs : *Fonctions L , Invariant \mathcal{L} , zéros exceptionnels, formes modulaires, Rankin-Selberg.*

Abstract

Extra zeros of the p -adic L -functions of Rankin-Selberg

The aim of this thesis is to study the extra zeros of the p -adic L functions of Rankin-Selberg. In other words, for a couple of modular forms we study the zeros of the p -adic function interpolating the Rankin-Selberg L function associated to this couple. When the function has a zero we express the value of the derivate in terms of the \mathcal{L} invariant, p -adic and infinite periods and the principal term of the complex Rankin-Selberg function.

Key words : *L functions, \mathcal{L} invariant, extra zeros, modular forms, Rankin-Selberg.*

A la mémoire de mon grand père, Jean-Claude Horte,
un homme au cœur si grand qu'il en aura rempli le notre.

Remerciements

Mes premiers remerciements sont dirigés vers mon directeur de thèse, Denis Benois. Je lui suis reconnaissant de m'avoir aiguillé vers un sujet aussi intéressant et de la confiance dont il a fait preuve dès les premiers instants. Je le remercie aussi pour sa relecture minutieuse de mon texte et sa motivation permanente pour le perfectionner permettant ainsi une amélioration conséquente de ma thèse.

Je remercie aussi grandement les rapporteurs, Mladen Dimitrov et Victor Rotger pour la qualité de leur lecture. Je remercie Victor Rotger pour l'enthousiasme qu'il m'a transmis et pour son ouverture sur l'étude du cas $k = 1$ comme suite naturelle de ma thèse. Je remercie Mladen Dimitrov pour la liste de corrections manuscrites qu'il m'a transmise et grâce à laquelle le manuscrit s'est vu amélioré. Je regrette de ne pas avoir eu le temps d'implémenter l'ensemble de ces remarques et les garde précieusement pour une éventuelle publication des ces travaux.

Je suis très reconnaissant envers Olivier Brinon, Pierre Charollois, Pierre Parent et Bernadette Perrin-Riou pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. C'est pour moi un grand honneur de présenter mes travaux devant un tel jury. Je remercie aussi particulièrement Bernadette Perrin-Riou pour sa liste de corrections manuscrite et sa discussion sur la définition de régularité. Ces remarques m'ont beaucoup aidé à améliorer le texte après la soutenance.

Je remercie l'équipe de théorie des nombres de l'université de Bordeaux pour la qualité de travail proposée mais aussi pour avoir toujours pris le temps d'écouter mes questions et de réfléchir ensemble.

Je suis reconnaissant à l'ensemble des membres de l'université de Bordeaux m'ayant accompagné tout au long de ces 4 ans, permettant ainsi un déroulement aussi agréable que possible de cette expérience. Je remercie particulièrement Jean-Jacque Ruch pour avoir trouvé un nombre suffisant d'heures d'enseignement afin de me proposer un second demi-A.T.E.R et Andreas Hartmann pour avoir grandement facilité la procédure de déclaration de soutenance malgré des délais parfois très courts.

D'un point de vue plus personnel je suis très reconnaissant de tous les professeurs m'ayant accompagné jusqu'au doctorat. En particulier Séverine Verneyre-Petitgirard pour avoir été la première à me présenter la beauté des mathématiques et Gaëtan Chenevier pour m'avoir introduit à la théorie des nombres et pour sa pédagogie.

Je souhaite aussi remercier mes amis. En premier lieu, et chronologiquement, Bastien Vigneron pour sa joie de vivre et sa musique qui m'accompagne tous les jours. Mon ami de Polytechnique, Bastien Proux pour toutes nos soirées, nos sorties motos et bien d'autres.

Je remercie mes amis de Cambridge, Emma for all the caring, baking and series, T. for all his energy and amazing stories I never get bored to discover, Erwan pour nos soirées philosophiques et pour m'avoir fait découvrir tant de choses. Je remercie aussi particulièrement Eleonora pour sa folie de vivre et son énergie communicative mais aussi pour sa présence réconfortante.

Je remercie mes amis de Bordeaux, Jialun et Florian pour m'avoir appris à les battre au poker, Perrine et Victo pour toutes nos sorties et leur spontanéité. Je remercie aussi Lilia, pour sa gentillesse, son calme et ses horaires tardifs partagés. Une pensée particulière pour Bianca qui apporte le soleil même en hiver. Sans elle et tous ses projets les plus fous ces quatre années n'auraient jamais été aussi mémorables.

Je remercie aussi mes amis de Toulouse, Sylvain, Clément, Maryse pour toutes nos soirées jeux de sociétés. Je remercie surtout Vincent et Lauranne pour ces heures innombrables à rigoler, pour nos moments à Toulouse, en Grèce, à Numbani ou à Erangel mais aussi pour leur soutien permanent.

Je remercie Xavier pour tous les chocolats de la victoire passés et à venir. Je remercie aussi énormément Aurélie pour m'avoir soutenu et motivé au quotidien, pour nos moments partagés, sa complicité et bien sûr pour sa relecture.

Enfin, je remercie toute ma famille. C'est un plaisir d'y compter ma marraine, mon parrain, Véronique, Marie et Nicolas tous plus formidables les uns que les autres. Je remercie aussi mamie et ma tante Béatrice. Je remercie chaleureusement ma sœur à qui je pense beaucoup, mémé pour avoir toujours veillé sur moi, mon père pour avoir toujours été mon héros et ma mère qui a tant fait pour moi.

Introduction

Tout au long de ce mémoire le symbole p désignera un nombre premier.

Le but de cette thèse est d'étudier les zéros exceptionnels des fonctions L p -adiques de Rankin-Selberg. Autrement dit, pour un couple de formes modulaires nous étudierons l'annulation de la fonction p -adique interpolant la fonction L de Rankin-Selberg associée à ce couple. Lorsque la fonction s'annule, on exprime alors la dérivée de la fonction L p -adique en fonction de l'invariant \mathcal{L} , des périodes p -adique et infinie et du terme principal de la fonction complexe de Rankin-Selberg. Ce travail s'inscrit dans la conjecture des zéros exceptionnels et propose le premier résultat en un point non-critique.

0.1 Phénomène des zéros exceptionnels

Dans un premier temps on donne un portrait rapide des résultats connus sur les zéros exceptionnels. Dans les deux premiers paragraphes, on présente des résultats connus sur les zéros exceptionnels des fonctions L de Dirichlet et des formes modulaires respectivement. Dans le troisième paragraphe on énonce la conjecture des zéros exceptionnels. Dans les deux derniers paragraphes on fait le lien entre la conjecture et les cas connus.

0.1.1. Le premier cas de zéro exceptionnel étudié est celui des fonctions L de Dirichlet.

Définition. Pour $\eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ un caractère de Dirichlet de conducteur N , on définit la fonction L de Dirichlet comme la série

$$L(\eta, s) := \sum_{n \geq 1} \frac{\eta(n)}{n^s}$$

sur le demi plan $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Les propriétés de ces fonctions données dans ce paragraphe peuvent être trouvées dans le livre [Was97] par exemple. Les fonctions L de Dirichlet possèdent un prolongement méromorphe au plan \mathbb{C} . Les prolongements vérifient l'équation fonctionnelle

$$\Gamma\left(\frac{s-1+a}{2}\right) L(\eta^{-1}, 1-s) = \frac{i^a \sqrt{N}}{G(\eta)} \left(\frac{\pi}{N}\right)^{\frac{1}{2}-s} \Gamma\left(\frac{-s+a}{2}\right) L(\eta, s)$$

où $a = \frac{1-\eta(-1)}{2}$ et $G(\eta)$ désigne la somme de Gauss de η . On peut écrire $L(\eta, s)$ comme le produit eulérien convergeant sur le demi plan de \mathbb{C} donné par $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$L(\eta, s) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{\eta(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Soit p un nombre premier ne divisant pas le conducteur N . On suppose que η est un caractère impair. Kubota et Leopoldt ont défini un analogue p -adique de la fonction L de Dirichlet, $L_p(\eta, s)$, interpolant les valeurs de $L(\eta, s)$ aux points entiers négatifs. C'est une fonction analytique de \mathbb{Z}_p à valeurs dans une extension finie de \mathbb{Q}_p , voir par exemple [Iwa74] et [KL64] pour la construction et les propriétés de cette fonction. La fonction p -adique L_p de Kubota-Leopoldt vérifie la propriété d'interpolation suivante

$$L_p(\eta\omega^m, 1-j) = (1 - (\eta\omega^{m-j})(p)p^{1-j})L(\eta\omega^{m-j}, 1-j), \quad j \geq 1 \quad (1)$$

où ω est le caractère de Teichmüller. En particulier, le facteur eulérien $1 - (\eta\omega^{m-j})(p)p^{1-j}$ ne s'annule que si $j = 1$, $\eta(p) = 1$ et $m = 1$. La valeur de $L(\eta, 0)$ est non-nulle si η est un caractère impair, c'est-à-dire $\eta(-1) = -1$. Donc, sous les conditions

$$\eta(p) = 1, \quad m = 1, \quad \eta(-1) = -1 \quad (2)$$

l'équation (1) assure l'annulation de la fonction L p -adique en 0 alors que la fonction L complexe ne s'annule pas. Ce phénomène est appelé un zéro exceptionnel. Ferrero et Greenberg ont prouvé le résultat suivant

Proposition 0.1.1. [FG78, Propositions 1 et 2] *Si η est un caractère impair de conducteur N et que $p \geq 3$ est un nombre premier tel que $\eta(p) = 1$, alors la fonction $L_p(\eta\omega, s)$ possède un zéro simple en $s = 0$. De plus, la valeur de $L'_p(\eta\omega, 0)$ est donnée par la formule suivante*

$$L'_p(\eta\omega, 0) = \sum_{c=1}^N \eta(c) \log_p(\Gamma_p(c/N))$$

où \log_p est le logarithme p -adique et Γ_p l'analogue p -adique de la fonction Γ classique (voir [Mor75]).

Gross définit un invariant $\mathcal{L}(\eta)$ comme la somme de logarithmes p -adiques. Il prouve alors le résultat suivant

Théorème 0.1.2 (Gross [Gro81]). *Soit η un caractère impair de conducteur N . Soit $p \geq 3$ un nombre premier tel que $\eta(p) = 1$. Alors*

$$L'_p(\eta\omega, 0) = -\mathcal{L}(\eta)L(\eta, 0)$$

où $\mathcal{L}(\eta)$ est l'invariant défini par Gross.

0.1.2. Dans ce paragraphe, on cherche à énoncer les résultats obtenus sur les zéros exceptionnels des fonctions L associées à une forme modulaire.

Soit f une forme modulaire de poids $k \geq 2$, de niveau N et de caractère ε . On suppose que f est primitive, c'est-à-dire parabolique, normalisée, propre et nouvelle. On note son développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n, \quad q = e^{2i\pi z}.$$

Définition. *On définit la fonction L associée à la forme modulaire f comme la série*

$$L(f, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

pour s dans le demi plan $\operatorname{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1$.

Des relations de récurrence sur les coefficients du développement sont connues (voir [DS05, Proposition 5.8.5]). Celles-ci permettent de réécrire la fonction L associée à f comme un produit eulérien sur son demi-plan de convergence (voir [DS05, Théorème 5.9.2])

$$L(f, s) = \prod_{p \text{ prime}} (1 - a_p p^{-s} + \varepsilon_f(p) p^{k-1-2s})^{-1}.$$

On définit $E_p(f, X) := X^2 - a_p X + \varepsilon_f(p) p^{k-1}$ le polynôme de Hecke de f en p . Les fonctions $L(f, s)$ admettent un prolongement analytique sur \mathbb{C} et vérifient l'équation fonctionnelle suivante (voir [Miy06, Théorème 4.3.5])

$$\Gamma(s)L(f, s) = i^k N^{-s+k/2} (2\pi)^{2s-k} \Gamma(k-s) \lambda_N(f) L(f^*, k-s)$$

où f^* est la forme modulaire conjuguée de f définie par $f^*(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{a_n} q^n$ où $\overline{a_n}$ désigne le conjugué complexe de a_n et où $\lambda_N(f)$ est la pseudo valeur de Atkin-Lehner de f (voir (1.6)).

Pour η un caractère de Dirichlet, on définit la fonction L associée à f et η comme la série

$$L(f, \eta, s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n \eta(n)}{n^s}.$$

On appelle bande critique les entiers j compris entre 1 et $k-1$. La théorie des symboles modulaires implique l'existence de deux périodes complexes Ω_f^+ et Ω_f^- telles que

$$\tilde{L}(f, \eta, j) := \frac{\Gamma(j)}{(2i\pi)^j \Omega_f^\pm} L(f, \eta, j) \in \overline{\mathbb{Q}}, \quad \forall 1 \leq j \leq k-1 \quad (3)$$

où le signe de la période prise est $(-1)^{j-1} \eta(-1)$.

Des fonctions L p -adiques interpolant $\tilde{L}(f, \eta, s)$ ont été construites par Manin [Man73] et Vishik [Vis76] ou, de manière indépendante, par Amice-Velu [AV75]. Soit α une racine du polynôme $E_p(f, X)$ dont la valuation p -adique est strictement plus petite que $k-1$. Il est possible de construire une fonction L p -adique $L_{p,\alpha}(f, \eta, s)$ sur \mathbb{Z}_p à valeurs dans une extension finie de \mathbb{Q}_p telle que pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et η un caractère de Dirichlet de conducteur premier à p , la propriété d'interpolation suivante est vérifiée

$$L_{p,\alpha}(f, \eta \omega^m, j) = \mathcal{E}_\alpha(f, \eta \omega^m, j) \tilde{L}(f, \eta \omega^{j-m}, j), \quad \forall 1 \leq j \leq k-1,$$

où ω est le caractère de Teichmüller et $\mathcal{E}_\alpha(f, \eta \omega^m, j)$ est le facteur eulérien défini par

$$\mathcal{E}_\alpha(f, \eta \omega^m, j) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\overline{\eta}(p) p^{j-1}}{\alpha}\right) \left(1 - \frac{\beta \eta(p)}{p^j}\right) & \text{si } m \equiv j[p-1] \\ \frac{p^j \overline{\eta}(p^m)}{\alpha^m G(\omega^{j-m})} & \text{si } m \not\equiv j[p-1] \end{cases}$$

où β est l'autre racine de $E_p(f, X)$. Voir le texte [MTT86] pour plus d'informations sur le sujet. Le facteur $\mathcal{E}_\alpha(f, \eta \omega^m, j)$ s'annule si et seulement si $j \equiv m[p-1]$ et

$$\alpha = p^{j-1} \overline{\eta}(p) \text{ ou } \beta = p^j \overline{\eta}(p).$$

Étudier la fonction $L(f, \eta\omega^m, s)$ revient, grossièrement, à étudier la fonction $L(f \otimes \eta, \omega^m, s)$ où $f \otimes \eta$ désigne la forme modulaire $\sum_{n=1}^{+\infty} \eta(n) a_n q^n$ de niveau NC^2 où C est le conducteur de η . On cherche à étudier le cas où $L(f, \omega^{j-m}, j) \neq 0$ et $\mathcal{E}(f, \omega^m, j) = 0$. On dit alors que $L_{p,\alpha}(f, \omega^m, j)$ possède un zéro exceptionnel. Le phénomène de zéro exceptionnel fut premièrement étudié par Mazur-Tate-Teitelbaum [MTT86] où 3 cas sont distingués suivant le comportement local de la représentation associée à la forme f en p :

- *le cas semistable* : dans le cas où $p \parallel N$, où le poids k de f est pair et où α racine de Hecke est telle que $\alpha = a_p = p^{k/2-1}$ la fonction $L_{p,\alpha}(f, \omega^{k/2}, s)$ admet un zéro exceptionnel en $s = k/2$. On remarque que $k/2$ correspond alors au point central pour la symétrie induite par l'équation fonctionnelle.
- *le cas cristallin* : dans le cas où $(p, N) = 1$, où le poids k est impair et où $\alpha = p^{(k-1)/2}$ (respectivement $\alpha = \varepsilon_f(p) p^{(k-1)/2}$) alors la fonction $L_{p,\alpha}(f, \omega^{(k+1)/2}, s)$ (respectivement $L_{p,\alpha}(f, \omega^{(k-1)/2}, s)$) admet un zéro exceptionnel au point presque central $s = \frac{k+1}{2}$ (respectivement $s = \frac{k-1}{2}$).
- *le cas potentiellement cristallin* : dans le cas où $p \mid N$, où k est impair et où $\alpha = p^{(k-1)/2}$ la fonction $L_{p,\alpha}(f, \omega^{(k+1)/2}, s)$ admet un zéro exceptionnel au point presque central $s = \frac{k+1}{2}$.

Soit

$$\rho_f : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}(V_f)$$

la représentation galoisienne p -adique associée à f par Eichler-Shimura et Deligne (voir [Del71]). On considère le cas semistable avec k pair et $\alpha = a_p = p^{k/2-1}$. Alors, la restriction de ρ_f au groupe de décomposition en p est semistable non-cristalline dans le sens de Fontaine [Fon94b]. Le (φ, N) -module filtré associé $\mathbb{D}_{\text{st}}(V_f)$ possède une base $\{e_\alpha, e_\beta\}$ tels que $e_\alpha = Ne_\beta$, $\varphi(e_\alpha) = a_p e_\alpha$ et $\varphi(e_\beta) = pa_p \varphi(e_\beta)$. Les sauts de filtration de $\mathbb{D}_{\text{st}}(V_f)$ sont 0 et $k-1$ et l'invariant \mathcal{L} de Fontaine-Mazur est l'unique élément $\mathcal{L}_{\text{FM}}(f) \in \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\text{Fil}^{k-1} \mathbb{D}_{\text{st}}(V_f)$ soit engendré par l'élément $e_\beta + \mathcal{L}_{\text{FM}}(f)e_\alpha$. Dans [MTT86] il est conjecturé que

$$L_{p,\alpha}(f, \omega^{k/2}, k/2) = \mathcal{L}_{\text{FM}}(f) \tilde{L}(f, k/2). \quad (4)$$

Cette notation est anachronique dans le sens où dans [MTT86] la conjecture est énoncé pour $k = 2$ avec un invariant ad-hoc mais équivalent. La définition de $\mathcal{L}_{\text{FM}}(f)$ est dans le cas général est donnée par Mazur [Maz94]. On remarque qu'il est possible que $L(f, k/2)$ s'annule. La conjecture (4) est prouvé pour les formes modulaires de poids 2 par Greenberg et Stevens [GS93]. Le cas général est prouvé par Stevens [Ste10] en utilisant la théorie des familles p -adiques de formes modulaires et par Barrera-Dimitrov-Jorza pour les formes modulaires de Hilbert de tout poids [BDJ17]. Une autre preuve de ce résultat utilisant le système d'Euler de Kato associé à f est donnée par Kato, Kurihara et Tsuji en utilisant l'invariant \mathcal{L} de Fontaine Mazur. On remarque que dans le cas semistable, il existe plusieurs définitions pour l'invariant \mathcal{L} , par exemple, celui de Fontaine Mazur, celui de Coleman, et celui de Benois. Grâce à [Ben11, Proposition 2.2.4] on sait que l'invariant \mathcal{L} de Fontaine Mazur coïncide avec celui de Benois. On se réfère à [CI10] et [Col05] pour plus d'informations sur ce cas.

La définition de l'invariant \mathcal{L} a été généralisée par Greenberg à toutes les représen-

tations p -ordinaires et critiques dans [Gre94].¹ Cette définition est étendue aux représentations semistables et critiques par Benois dans [Ben11]. Enfin, en 2014, un texte de Benois propose la construction d'un invariant \mathcal{L} pour les représentations cristallines sans supposer que la représentation soit critique dans [Ben14a].

On considère maintenant le cas cristallin. On traite le cas où k est impair et $\alpha = p^{(k-1)/2}$. La représentation ρ_f associée à f est cristalline. On pose $W_f := V_f(\frac{k+1}{2})$ la torsion de V_f par la $\frac{k+1}{2}$ -ième puissance du caractère cyclotomique. Alors, $\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_f)^{\varphi=p^{-1}}$ est de dimension 1 et l'on note $D_\alpha := \mathbb{D}_{\text{cris}}(W_f)^{\varphi=p^{-1}}$. Comme précisé précédemment, la construction de Benois permet de définir l'invariant $\mathcal{L}(W_f, D_\alpha)$ (voir section 2.1). La dérivée de la fonction L p -adique au point d'annulation s'écrit

$$L'_{p,\alpha} \left(f, w^{\frac{k+1}{2}}, \frac{k+1}{2} \right) = -\mathcal{L}(W_f, D_\alpha) \left(1 - \frac{\varepsilon_f(p)}{p} \right) \tilde{L} \left(f, \frac{k+1}{2} \right) \quad (5)$$

(voir [Ben14b, Théorème 4.3.2]). Grâce à un résultat de [JS76] on sait que dans ce cas $\tilde{L} \left(f, \frac{k+1}{2} \right)$ ne s'annule pas.

Dans le cas potentiellement cristallin une analyse similaire donne naissance à une formule analogue à (5), voir [Ben14b].

0.1.3. On va maintenant énoncer la conjecture des zéros exceptionnels dans le cas cristallin comme proposée dans [Ben14a].

Soit M un motif pur sur \mathbb{Q} de poids motivique inférieur ou égal à -2 . On suppose que la fonction L complexe $L(M, s)$ de M admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} . Conjecturalement il est possible de construire un analogue p -adique de $L(M, s)$ interpolant p -adiquement la partie algébrique de ses valeurs spéciales. Cette construction est connue dans plusieurs cas mais reste conjecturale dans son ensemble. Dans [PR95] Perrin-Riou a formulé des conjectures précises sur l'existence et les propriétés arithmétiques des fonctions L p -adiques lorsque la réalisation p -adique de M est cristalline en p . On note V la réalisation p -adique de M . On considère un sous- φ -module D régulier de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ (voir 2.1.1 pour la définition). Soit T un réseau de V stable sous l'action galoisienne et N un réseau de D . Perrin-Riou a conjecturé qu'il est possible d'associer à T et N une fonction L p -adique $L_p(T, N, s)$ satisfaisant des propriétés d'interpolations explicites. Soit r l'ordre d'annulation de $L(M, s)$ en $s = 0$ et $L^*(M, 0)$ le terme principal de $L(M, s)$ en 0, c'est-à-dire $\lim_{s \rightarrow 0} s^{-r} L(M, s)$. Conjecturalement la propriété d'interpolation en $s = 0$ s'écrit

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{L_p(T, N, s)}{s^r} = \mathcal{E}(V, D) R_{V,D}(\omega_{V,N}) \frac{L^*(M, 0)}{R_{M,\infty}(\omega_M)} \quad (6)$$

où $R_{M,\infty}(\omega_M)$ (respectivement $R_{V,D}(\omega_{V,N})$) est le déterminant du régulateur de Beilinson (respectivement le déterminant du régulateur p -adique) calculé pour des bases compatibles ω_M et $\omega_{V,N}$ et $\mathcal{E}(V, D)$ est le facteur eulérien donné par

1. On dit qu'une représentation est critique si elle est la p -réalisation d'un motif critique. Un motif est dit critique si les produits de facteurs gamma $L_\infty(M, s)$ et $L_\infty(M^*, 1-s)$ construit grâce à la décomposition de Hodge de M et M^* n'ont pas de pôle en $s = 0$. Voir [Del79] pour plus de détails.

$$\mathcal{E}(V, D) = \det(1 - p^{-1}\varphi^{-1}|D) \det(1 - \varphi|\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)/D).$$

Le choix de bases compatibles correspond au choix des réseaux T et N . Le fait de choisir des réseaux dans les représentations V et modules D permet de fixer la normalisation et en particulier le facteur d'algébricité nécessaire à la construction d'interpolations p -adiques.

Si $D^{\varphi=p^{-1}} \neq 0$ ou $(\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)/D)^{\varphi=1} \neq 0$, l'ordre d'annulation de $L_p(T, N, s)$ est strictement supérieur à r . On dit alors que $L_p(T, N, s)$ admet un zéro exceptionnel en $s = 0$. Conjecturalement $D^{\varphi=p^{-1}} \neq 0$ n'est possible que si le poids motivique de M vaut -2 et $(\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)/D)^{\varphi=1} \neq 0$ n'est possible que si le poids motivique de M vaut 0 .

On suppose que $D^{\varphi=p^{-1}} \neq 0$ et que le poids motivique de M vaut -2 . On suppose certaines conditions supplémentaires sur V et D afin de pouvoir définir l'invariant $\mathcal{L}(V, D)$ (voir section 2.1). On suppose que le Frobenius φ est semi-simple, ce qui est conjecturalement toujours vrai. Cela nous permet d'écrire la décomposition

$$D = D^{\varphi=p^{-1}} \oplus D_{-1}.$$

On note le coefficient eulérien $\mathcal{E}^+(V, D)$ le facteur $\mathcal{E}(V, D)$ privé de la partie apportant son annulation. C'est-à-dire

$$\mathcal{E}^+(V, D) = \det(1 - p^{-1}\varphi^{-1}|D_{-1}) \det(1 - \varphi|\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)/D). \quad (7)$$

La conjecture de Beilinson-Deligne dit que $L(M, s)$ ne s'annule pas en 0 et que $L(M^*(1), s)$ possède un zéro d'ordre $r = \dim_{\mathbb{Q}_p} H_f^1(\mathbb{Q}, V)$ en $s = 0$ où $H_f^1(\mathbb{Q}, V)$ est le sous groupe de $H^1(\mathbb{Q}, V)$ défini en (2.1). La conjecture des zéros exceptionnels proposée par Benois ([Ben14a]) s'écrit

Conjecture 0.1.3 (Conjecture des zéros exceptionnels). *On suppose que la conjecture de Beilinson est satisfaite. Soit D un sous-espace régulier de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ et on note $e = \dim_{\mathbb{Q}_p} D^{\varphi=p^{-1}}$. Alors,*

i) La fonction $L_p(T, N, s)$ a un zéro d'ordre e en $s = 0$ et

$$\frac{L_p^*(T, N, 0)}{R_{V,D}(\omega_{V,N})} = -\mathcal{L}(V, D)\mathcal{E}^+(V, D) \frac{L(M, 0)}{R_{M,\infty}(\omega_M)}.$$

ii) Soit D^\perp le complément orthogonal de D pour la dualité canonique donnée par $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \times \mathbb{D}_{\text{cris}}(V^(1)) \rightarrow E$ où V^* est la représentation duale de V . Alors, la fonction L p -adique $L_p(T^*(1), N^\perp, s)$ possède un zéro d'ordre $e + r$ en $s = 0$ et*

$$\frac{L_p^*(T^*(1), N^\perp, 0)}{R_{V^*(1), D^\perp}(\omega_{V^*(1), N^\perp})} = \mathcal{L}(V, D)\mathcal{E}^+(V, D) \frac{L(M^*(1), 0)}{R_{M^*(1), \infty}(\omega_{M^*(1)})}.$$

On va montrer comment les cas connus d'études de zéros exceptionnels s'inscrivent dans le cadre de la conjecture des zéros exceptionnels.

0.1.4. Soit η un caractère de Dirichlet de conducteur N premier à p . Il existe un motif pur de poids -2 associé au caractère $\eta^{-1}\chi$ où χ est le caractère cyclotomique classique (voir paragraphe 1.1.1. pour la définition de χ). La réalisation p -adique de ce motif est la

représentation $E(\eta^{-1}\chi)$ où E est une extension finie de \mathbb{Q}_p . La fonction L associée au dual de ce motif coïncide avec $L(\eta, s)$. On sait que $H_f^1(\mathbb{Q}, E(\eta)) = 0$ et que $H_f^1(\mathbb{Q}, E(\chi\eta^{-1})) = 0$ si η est impair. Le Frobenius agit sur $\mathbb{D}_{\text{cris}}(E(\chi\eta^{-1}))$ comme multiplication par $\eta^{-1}(p)p^{-1}$. On suppose les conditions (2), ainsi, on a

$$H_f^1(\mathbb{Q}, E(\eta)) = H_f^1(\mathbb{Q}, E(\chi\eta^{-1})) = 0, \quad \mathbb{D}_{\text{cris}}(E(\chi\eta^{-1}))^{\varphi=p^{-1}} = E(\chi\eta^{-1}).$$

On pose $D = \mathbb{D}_{\text{cris}}(E(\chi\eta^{-1}))$, c'est un module régulier de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(E(\chi\eta^{-1}))$. Il est alors facile de voir que $\mathcal{E}^+(E(\eta^{-1}\chi), D) = 1$. On est alors dans le cas critique et les régulateurs p -adiques et infinis valent tous les deux 1. De plus, on sait que l'invariant $\mathcal{L}(\eta)$ construit par Gross coïncide avec $-\mathcal{L}(E(\chi\eta^{-1}), D)$ (voir [Ben14b, Théorème 3.3.2]). Il est donc aisé de voir que le Théorème 0.1.2 est en accord avec le point *ii*) de la conjecture des zéros exceptionnels.

0.1.5. Soit f une forme modulaire primitive de conducteur N premier à p , de poids k impair et de caractère ε_f . Il existe un motif de Grothendieck M_f associé à f par Scholl [Sch90] dont la réalisation p -adique est la représentation V_f associée à f par Deligne. De plus, la fonction $L(M_f(\frac{k+1}{2}), s)$ associée au motif $M_f(\frac{k+1}{2})$ coïncide avec $L(f, \frac{k+1}{2} + s)$. Si $p \nmid N$, alors la représentation V_f est cristalline en p et le polynôme de caractéristique du Frobenius est donné par le polynôme $E_p(f, X)$ défini précédemment. Soit $W_f := V_f(\frac{k+1}{2})$. On suppose que $\alpha = p^{\frac{k-1}{2}}$. Alors $\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_f)^{\varphi=p^{-1}}$ est de dimension 1. On note D cet espace. On peut prouver que D est régulier. Par les relations coefficients-racines du polynôme $E_p(f, X)$ on peut montrer que

$$\mathcal{E}^+(W_f, D) = \left(1 - \frac{\varepsilon_f(p)}{p}\right).$$

La fonction $L_{p,\alpha}$ vérifie les propriétés de $L_p(T, N, s)$ pour T et N des $G_{\mathbb{Q}}$ -réseau et \mathbb{Z}_p -réseau adaptés. Le régulateur de Beilinson-Deligne coïncide avec la période Ω_f^{\pm} où \pm est $(-1)^{\frac{k+1}{2}}\eta(-1)$ et le premier point de la formule de la conjecture des zéros exceptionnels prend la forme de l'équation (5).

0.2 Fonctions L de Rankin-Selberg

0.2.1. L'objet d'étude de cette thèse est la fonction L associée à un couple de formes modulaires. Soient deux formes modulaires f et g nouvelles, paraboliques, de poids respectifs k et l , de niveaux respectifs N_f et N_g et de caractères respectifs ε_f et ε_g . On suppose que $2 \leq l \leq k$. On suppose que le produit de caractères $\varepsilon_f\varepsilon_g$ est primitif modulo $N := \text{ppcm}(N_f, N_g)$. On peut alors définir la fonction L imprimitive de Rankin-Selberg comme la série

$$L(f, g, s) = L(\varepsilon_f\varepsilon_g, 2s - k - l + 2) \sum_{n \geq 1} \frac{a_n b_n}{n^s}, \quad \text{Re}(s) > \frac{k+l}{2} + 1$$

où a_n et b_n sont les n -ièmes coefficients de la série de Fourier associée à f et g respectivement. Cette fonction L possède une écriture comme un produit eulérien (voir (3.1.2)).

De plus, la fonction $L(f, g, s)$ et peut être prolongée en une fonction méromorphe du plan complexe. Les fonctions L de Rankin-Selberg vérifient une équation fonctionnelle reliant

$$L(f, g, s) \text{ et } L(f^*, g^*, k + l - 1 - s) \quad (8)$$

(voir (3.1.5)). Shimura [Shi77] a prouvé un résultat d'algébricité de la fonction $L(f, g, j)$ pour j parcourant les entiers compris entre l et $k - 1$ (voir 3.1.7). Les entiers compris entre l et $k - 1$ sont appelés les points critiques de la fonction L . On se réfère à la section 3.1 pour des propriétés plus précises sur ces fonctions L .

Soit p un nombre premier ne divisant pas N . Le résultat de Shimura est un premier pas vers l'interpolation p -adique des valeurs algébriques de la fonction L de Rankin-Selberg. Une telle construction peut être trouvée dans les travaux de Panschikin [Pan82] et de Hida [Hid88] dans le cas ordinaire. Sous certaines conditions supplémentaires on peut considérer deux familles de Coleman \mathbf{f} et \mathbf{g} passant par les p -stabilisations des formes f et g . Urban (voir [Urb14] et [AI17]) a construit une fonction L p -adique $L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^a)$ à 3 variables interpolant les valeurs spéciales des fonctions L de Rankin-Selberg. Cette construction généralise les travaux de Hida [Hid88], [Hid93] au cas où f et g ne sont pas ordinaires. On pose, pour $a \in \mathbb{N}$

$$L_p(f, g, \omega^a, j) := L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^a)(k, l, j).$$

Pour $l \leq j \leq k - 1$, on a

$$L_p(f, g, \omega^a, j) = (\star)L(f, g, j)$$

où (\star) est un coefficient qui dépend de a, j et des comportements locaux en p des représentations automorphes associées à f et g (voir 3.2.1).

Soit $c = \frac{k+l-1}{2}$ le point de symétrie donné par l'équation fonctionnelle (8). On suppose que k et l sont de même parité et on note $c^\pm = c \pm \frac{1}{2}$ les deux entiers presque centraux. On note $(\alpha_p(f), \beta_p(f))$ (respectivement $(\alpha_p(g), \beta_p(g))$) les racines de $E_p(f, X)$ (respectivement $E_p(g, X)$). Dans la section 4.1 on montre que si

$$\alpha_p(f)\beta_p(g) = p^{c^-} \quad (9)$$

alors $L_p(f, g, \omega^{c^+}, s)$ s'annule en $s = c^+$. On remarque que le point c^+ est dans la bande critique si et seulement si $l < k$. Dans cette thèse on s'intéresse uniquement au cas non-critique. On suppose donc que les poids des deux formes modulaires sont égaux. Dans ce cas $c^+ = k = l$ et $c^- = k - 1$.

Soit $V_{f,g} := V_f \otimes V_g$ le produit des représentations p -adiques de Deligne associées à f et g . On note $W_{f,g} := V_{f,g}(k)$. Puisque $p \nmid N$, alors $W_{f,g}$ est une représentation cristalline de dimension 4. Le poids motivique de la représentation $V_{f,g}(m)$ est $k + l - 2 - 2m$. En particulier, si $k = l$ le poids motivique de la représentation $W_{f,g}$ est -2 .

Dans le cas ordinaire, Kings-Loeffler-Zerbes ont défini une période p -adique qu'ils notent $\Omega_p(k-1, v)$ (voir [KLZ15, Définition 7.2.3]). Dans l'esprit de la conjecture de Perrin-Riou (6) cet élément serait la période p -adique associée à la représentation $V_{f,g}^*(1-k)$.

Kings-Loeffler-Zerbes ont montré que si $\beta_p(f)\alpha_p(g) \neq p^{k-1}$ alors on a

$$-(k-2)! \frac{G(\varepsilon_f^{-1})G(\varepsilon_g^{-1})}{\mathcal{E}(f, g, k-1)} L_p(f, g, \omega^{k-1}, k-1) = \Omega_p(k-1, v)$$

où $\mathcal{E}(f, g, k-1)$ est défini en 3.2.1 (voir [KLZ15, Théorème 6.5.9]). De manière équivalente, il est possible de montrer, en utilisant l'équation fonctionnelle, une égalité reliant $L_p(f, g, \omega^k, k)$ à la période p -adique de la représentation $V_{f,g}(k)$ à condition que $\alpha_p(f)\beta_p(g) \neq p^{k-1}$, c'est-à-dire si (9) n'est pas satisfait. Ces deux résultats sont dans la direction de la conjecture de Perrin-Riou (6).

Dans nos travaux on ne suppose pas que f et g soient ordinaires. On considère D , le sous- φ -espace de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_f)$ de dimension 2 défini comme la somme des deux espaces propres associés aux valeurs propres $\alpha_p(f)\alpha_p(g)p^{-k}$ et $\alpha_p(f)\beta_p(g)p^{-k}$. En particulier si (9) est satisfait cela implique $D^{\varphi=p^{-1}} \neq 0$, on a ainsi

$$D = D^{\varphi=p^{-1}} \oplus D^{\varphi=\alpha_p(f)\alpha_p(g)p^{-k}}$$

avec la dimension de $D^{\varphi=p^{-1}}$ valant 1. La conjecture des zéros triviaux prévoit alors l'annulation de la fonction $L_p(f, g, \omega^k, s)$ en $s = k$. On construit $\Omega_p(W_{f,g})$ en (4.15) comme l'accouplement du logarithme de Bloch et Kato d'un élément de Beilinson-Flach avec un élément canonique de l'espace cristallin. Le scalaire $\Omega_p(W_{f,g})$ est, à une renormalisation près, l'élément $\Omega_p(k-1, v)$ de Kings, Loeffler et Zerbes. Si $\Omega_p(W_{f,g}) \neq 0$, le résultat principal de la thèse s'écrit

Théorème 0.2.1 (Théorème 4.2.6). *Lorsque $\alpha_p(f)\beta_p(g) = p^{k-1}$ la fonction $L_p(f, g, \omega^k, s)$ s'annule en $s = k$ et sa dérivée vérifie l'équation suivante*

$$L'_p(f, g, \omega^k, k) = \epsilon_p(f, g) \frac{\mathcal{E}^+(W_{f,g}, D)}{(k-2)! \mathcal{E}(f)} \ell(W_{f,g}, D) \Omega_p(W_{f,g}).$$

où $\mathcal{E}(f)$ et $\epsilon_p(f, g) := \epsilon_p^{(\mathbf{f}, \mathbf{g}, k)}(k, k, k)$ sont définis 3.2.1 en 3.2.3 et respectivement, $\ell(W_{f,g}, D)$ est défini en 4.2.3 et $\mathcal{E}^+(W_{f,g}, D)$ est le facteur eulérien modifié défini en (7).

Ce théorème est le premier résultat obtenu pour la conjecture des zéros exceptionnels en un point non-critique. De plus, ce théorème est bien aussi valable dans le cas ordinaire et permet donc de compléter le résultat précédent de Kings-Loeffler-Zerbes.

Pour le reste de ce paragraphe on considère toujours que $\alpha_p(f)\beta_p(g) = p^{k-1}$.

Soit $M_{f,g}$ le motif associé au couple de formes modulaires (f, g) tordu par la k -ième puissance du caractère cyclotomique. On suppose que l'espace D défini précédemment est régulier. Soient T et N des réseaux de W_f et D stable par $G_{\mathbb{Q}}$ et $G_{\mathbb{Q}_p}$ respectivement. Alors la fonction L p -adique associée $L_p(N, T, s)$ coïncide, à un nombre fini de facteurs eulériens près avec $L_p(f, g, \omega^k, s+k)$. Puisque $D^{\varphi=p^{-1}}$ est de dimension 1, la conjecture des zéros triviaux prévoit un zéro simple de la fonction $L_p(f, g, \omega^k, s)$ en $s = k$. Dans ce texte il est montré que le zéro est simple si $\Omega_p(W_{f,g}) \neq 0$ (voir section 4.2). Sous certaines conditions techniques (voir section 4.3) on peut montrer que l'invariant ad-hoc

$\ell(W_{f,g})$ coïncide avec l'invariant $\mathcal{L}(W_{f,g}, D)$ et que $\Omega_p(W_{f,g})$ coïncide avec la période p -adique associée à $W_{f,g}$ et D calculée dans une base explicitée dans le texte. On suppose, comme dans le chapitre 7 de [KLZ15], que le terme principal de la fonction complexe $L(f^*, g^*, s)$ en $s = k - 1$ s'exprime grâce à la période infinie $\Omega_\infty(f^*, g^*)$ associée au motif $M_{f^*, g^*}(-1)$. On remarque que ce motif peut être aussi vu comme le motif $M_{f^*, g^*}(1)$. Alors, grâce à l'équation fonctionnelle, le terme principal de $L(M_{f,g}, s)$ en $s = 0$ est lié à la même période et le théorème 0.2.1 se réécrit

$$\frac{L'_p(T, N, 0)}{\Omega_p(W_{f,g})} = \frac{N_f N_g (k_0 - 1)! \mathcal{E}^+(W_{f,g}, D)}{16\pi^2 \mathcal{E}(f)} \mathcal{L}(W_{f,g}, D) \frac{L(M_{f,g}, 0)}{\Omega_\infty(f^*, g^*)}$$

(voir 4.3.3). Bien qu'on ne retrouve pas directement l'équation de la conjecture des zéros exceptionnels cette formule s'inscrit dans la lignée de cette théorie. La période $\Omega_\infty(f^*, g^*)$ du motif dual apparaît suite à l'utilisation de l'équation fonctionnelle. Cela a pour but de garder les mêmes hypothèses que dans le chapitre 7 de [KLZ15]. Il serait aussi possible de formuler une conjecture analogue faisant apparaître la période liée à $M_{f,g}$ à la place, nous rapprochant ainsi du résultat donné par la conjecture des zéros exceptionnels.

Dans le cas où $f = g^*$ et sont de poids 1, Rivero et Rotger [RR18] étudient les zéros triviaux de la représentation adjointe en spécialisant le système d'Euler de Beilinson-Flach au poids (1, 1). Il serait intéressant de mieux comprendre le lien entre les deux textes.

0.2.2. La preuve du théorème principal repose grandement sur le fait de pouvoir exprimer la fonction L p -adique associée aux familles de Coleman \mathbf{f} et \mathbf{g} grâce au logarithme élargi d'éléments de Beilinson-Flach.

Les éléments dits de Beilinson-Flach ont été introduits par Beilinson ([Bei84, chapitre 2]). Beilinson a lié leurs images par le régulateur complexe avec la valeur en $s = 2$ de la fonction $L(f, g, s)$ de Rankin-Selberg pour f et g deux formes de poids 2. Ces éléments sont retravaillés dans le texte de Flach [Fla92]. Ces travaux ont été généralisés par Bertolini, Darmon et Rotger [BDR15a]. Ils montrent que pour f fixe, ordinaire de poids 2, et \mathbf{g} la famille de Hida passant par la forme ordinaire g , la fonction L p -adique à 2 variables introduite dans [BDR15b] coïncide avec le régulateur p -adique d'un certain élément de Beilinson-Flach. Un résultat similaire est prouvé dans [LLZ14] pour f variant en famille et g une forme fixée de poids supérieur ou égal à 2. Les travaux de Kings-Loeffler-Zerbes [KLZ17] ont permis de généraliser ce résultat à la fonction de Hida à 3 variables en faisant varier f et g en familles. Dans cette thèse on utilise une généralisation de ce résultat aux familles de Coleman faite par Loeffler-Zerbes, enlevant ainsi la condition d'ordinarité des formes f et g .

Théorème 0.2.2. [KLZ17, théorème 10.2.2] *Soient f et g des formes modulaires primitives, et \mathbf{f} et \mathbf{g} des familles de Coleman passant par des p -stabilisations de f et g . Alors la fonction L p -adique à trois variables associées aux familles \mathbf{f} et \mathbf{g} coïncide avec le logarithme élargi d'un élément de Beilinson Flach.*

On définit la fonction L p -adique associée à f et g comme la restriction de $L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^a)$ à la droite (k, l, s)

$$L_p(f, g, \omega^a, s) := L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^a)(k, l, s).$$

En spécialisant les familles de Coleman \mathbf{f} et \mathbf{g} en f_α et g_α on obtient une écriture de la fonction p -adique $L_p(f, g, \omega^k, s)$ comme le logarithme élargi de Perrin-Riou d'un élément de Beilinson-Flach ${}_c\mathcal{BF}_{k-1}^{f,g}$ de la cohomologie d'Iwasawa

$$H_{Iw,S}^1(\mathbb{Q}, W_{f,g}^*(1))$$

(voir Proposition 3.5.4). On dérive alors le logarithme élargi dans l'esprit du texte de Benois [Ben14b]. Il est ensuite possible de faire ressortir un invariant ad-hoc $\ell(W_{f,g}, D)$ et on obtient la proposition suivante

Théorème 0.2.3 (voir 4.2.4). *Soit $c > 1$ un paramètre tel que $(c, 6Np) = 1$. Sous certaines conditions techniques, on peut exprimer la dérivée de la fonction L p -adique associée à f et g en $s = k$ en terme de l'invariant $\ell(W_{f,g}, D)$ et d'un élément de Beilinson-Flach ${}_c\mathbf{bf}^{f,g,k-1}$ dépendant de f, g et de c*

$$L'_p(f, g, \omega^k, k) = \frac{(-1)^{k+1} (c^2 - \varepsilon_f^{-1}(c)\varepsilon_g^{-1}(c)c^2)^{-1}}{\mathcal{E}(f)^{-1}G(\varepsilon_f^{-1})G(\varepsilon_g^{-1})\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \ell(W_{f,g}, D) [\exp^*({}_c\mathbf{bf}^{f,g,k-1}), \bar{\Theta}_{f,g}[k]]$$

où \exp^* désigne l'exponentielle duale de Bloch et Kato, où $G(\varepsilon_f^{-1})$ et $G(\varepsilon_g^{-1})$ sont les sommes de Gauss de ε_f^{-1} et ε_g^{-1} , où $\bar{\Theta}_{f,g}[k]$ est un vecteur propre du Frobenius de valeur propre p^{-1} défini en (3.64) et où $[\cdot, \cdot]$ désigne l'accouplement classique

$$\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g}) \times \mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g}^*(1)) \rightarrow E.$$

On cherche ensuite à donner une seconde écriture pour l'accouplement présent dans le théorème précédent $[\exp^*({}_c\mathbf{bf}^{f,g,k-1}), \bar{\Theta}_{f,g}[k]]$. En utilisant l'équation fonctionnelle prouvée en 3.2.3 pour les fonctions L p -adiques à 3 variables, on a

$$L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^k)(k, y, y) = \epsilon(\mathbf{f}, \mathbf{g}, y) L_p(\mathbf{f}^*, \mathbf{g}^*, \omega^{k-1})(k, y, k-1)$$

où \mathbf{f}^* et \mathbf{g}^* sont les familles de Coleman associées aux formes modulaires conjuguées f^* et g^* et y est une variable parcourant un espace dense d'une boule de \mathbb{Z}_p . Grâce à des éléments de Beilinson-Flach modifiés construits dans la section 3.4 il est possible de mettre en facteur le facteur eulérien s'annulant dans l'écriture des deux restrictions (voir Proposition 3.5.6 et Proposition 3.5.8). Pour ce faire, on crée des éléments de Beilinson-Flach non-stabilisés (voir Proposition 3.4.12). Cette stratégie est dans l'esprit des fonctions L dites améliorées construites par Greenberg-Stevens dans [GS93] pour la fonction L associée à une seule forme modulaire. En utilisant la continuité des fonctions L p -adique il est possible de factoriser ce mauvais facteur. Alors, en évaluant en un certain point on arrive à lier l'accouplement $[\exp^*({}_c\mathbf{bf}^{f,g,k-1}), \bar{\Theta}_{f,g}[k]]$ avec l'analogue ad-hoc de la période p -adique $\Omega_p(W_{f,g})$. En liant ce résultat avec le Théorème 0.2.3 on prouve ainsi le théorème principal de la thèse.

0.3 Plan de la thèse

Voici un rapide aperçu du plan de ce travail :

Le premier chapitre a pour but de donner un certain nombre de définitions et propriétés nécessaires pour le reste de la thèse. On commence par dresser un portrait non-exhaustif

des propriétés des (φ, Γ) -modules et de leur cohomologie dans les deux premières sections. Dans la troisième section, on s'intéresse tout particulièrement aux cas des modules de rang 1. Dans les deux sections suivantes, on présente l'exponentielle élargie de Perrin-Riou et sa généralisation par Nakamura. Dans la sixième section, on rappelle les définitions et propriétés des courbes modulaires et formes modulaires. Dans la dernière section, on introduit les interpolations p -adique des formes modulaires. Dans cette section, on cherche aussi à donner une interpolation p -adique de leurs objets associés, comme les représentations de Deligne et les (φ, Γ) -modules associés.

Le second chapitre a pour but de définir l'invariant \mathcal{L} et d'en donner une interprétation. Dans la première section on définit l'invariant \mathcal{L} des représentations de poids motivique valant -2 , ce qui nous sera utile pour la représentation $W_{f,g}$. Dans la seconde section, on propose une définition analogue de l'invariant \mathcal{L} aux représentations de poids motivique valant 0 . Ensuite, dans une troisième section, on lie les deux constructions par dualité. Enfin, dans la dernière section on montre que l'invariant \mathcal{L} d'une représentation p -adique est naturellement retrouvé dans la dérivée de l'exponentielle élargie de Perrin-Riou.

Le troisième chapitre a pour but de mettre en place les outils nécessaires afin de prouver le théorème principal de la thèse. Dans la première section, on définit et on donne les propriétés importantes des fonctions L de Rankin-Selberg associées aux couples de formes modulaires. Dans la seconde section, on donne les propriétés de la fonction de Urban à 3 variables permettant d'interpoler p -adiquement les fonctions de Rankin-Selberg grâce aux familles de formes modulaires. Dans une troisième section, on étudie les représentations associées aux couples de formes modulaires. Dans la quatrième section, on donne la définition des éléments de Beilinson-Flach associés aux formes modulaires. Dans la dernière section, on utilise les éléments de Beilinson-Flach construits précédemment et les travaux de Kings-Loeffer-Zerbes pour lier la fonction de Urban à 3 variables aux éléments de Beilinson-Flach construits dans la section précédente.

Le dernier chapitre a pour but de prouver le théorème principal de la thèse. Dans une première section on recherche les points classiques d'annulation de la fonction L de Urban. Dans la seconde sections on utilise l'ensemble des outils construits précédemment pour calculer la dérivée de la fonction L p -adique en fonction de l'invariant \mathcal{L} et de la période p -adique. Enfin, dans la dernière section, on met en relation le résultat précédent et la conjecture des zéros exceptionnels.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on introduit des notions nécessaires tout au long de ce mémoire. Dans les trois premières sections, on s'intéresse aux (φ, Γ) -modules. On introduit cette notion dans le premier paragraphe, dans le second on étudie la cohomologie de ces modules et dans le troisième on se penche particulièrement sur les modules de rang 1. Dans les sections 4 et 5, on s'intéresse aux exponentielles élargies en donnant la construction de Perrin-Riou dans la section 4 et une généralisation de Nakamura dans la section suivante. Dans la sixième section on rappelle les définitions des courbes modulaires et des formes modulaires. Enfin, dans la dernière section, on introduit des interpolations p -adiques de différents éléments définis dans les sections précédentes.

1.1 (φ, Γ) -modules

La théorie des (φ, Γ) -modules fut initiée par Fontaine dans son papier [Fon91].

1.1.1. Soit p un nombre premier. Soit $\overline{\mathbb{Q}_p}$ une clôture algébrique de \mathbb{Q}_p que l'on fixe pour le reste de ce manuscrit et \mathbb{C}_p la complétion p -adique de $\overline{\mathbb{Q}_p}$. On note $v_p : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ la valuation p -adique normalisée par $v_p(p) = 1$. On note $|x|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{v_p(x)}$ la norme p -adique de x . On note $B(r, 1)$ la couronne

$$B(r, 1) := \{x \in \mathbb{C}_p \mid r \leq |x|_p < 1\}.$$

On fixe un système de racines primitives p^n -ièmes de l'unité $\varepsilon := (\zeta_{p^n})_{n \geq 0}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on aie $\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}$. On note $G_{\mathbb{Q}_p} := \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. On note $K_n := \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$ et $K_\infty := \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$ la tour cyclotomique. Soit $\Gamma := \text{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q}_p)$. Le caractère cyclotomique $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ est défini par $\tau(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^{\chi(\tau)}$ pour tout $\tau \in \Gamma$.

1.1.2. Pour tout $0 \leq s < 1$, on note

$$\mathcal{R}^{(s)} := \left\{ f(X) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k X^k \mid a_k \in \mathbb{Z}_p \text{ et } f \text{ est holomorphe sur } B(s, 1) \right\},$$
$$\mathcal{E}^{(s)} := \left\{ f(X) \in \mathcal{R}^{(s)} \mid f \text{ est bornée sur } B(s, 1) \right\}.$$

On muni ces anneaux d'une action de Γ et d'un Frobenius φ comme suit :
Les actions de Γ et de φ sont triviales sur les coefficients de la série et sont données par les deux équations suivantes

$$\forall \tau \in \Gamma_K, \tau(f(X)) = f(\tau(X)) \text{ où } \tau(X) = (1 + X)^{\chi(\tau)} - 1,$$

$$\varphi(f(X)) = f(\varphi(X)) \text{ où } \varphi(X) = (1 + X)^p - 1.$$

On note le corps $\mathcal{E}^\dagger = \bigcup_{0 \leq r < 1} \mathcal{E}^{(s)}$. L'opérateur φ possède un inverse par la gauche que l'on note ψ et qui s'écrit

$$\psi(f) = \frac{1}{p} \varphi^{-1} \left(\text{Tr}_{\mathcal{E}^\dagger/\varphi(\mathcal{E}^\dagger)}(f) \right).$$

L'action de ψ sur les séries s'écrit aussi

$$\psi(f(X)) = \frac{1}{p} \varphi^{-1} \left(\sum_{\zeta^p=1} f(\zeta(1 + X) - 1) \right).$$

Le corps \mathcal{E}^\dagger possède une valuation que l'on écrit w

$$w \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k X^k \right) = \min \{ v_p(a_k) \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

Cela permet de définir $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ l'anneau des entiers de \mathcal{E}^\dagger .

De manière similaire, on définit $\mathcal{R} = \bigcup_{0 \leq r < 1} \mathcal{R}^{(s)}$. Les actions de Γ et de φ s'étendent sur \mathcal{R} par continuité. On définit

$$t := \log(1 + X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} X^k}{k} \in \mathcal{R}. \quad (1.1)$$

Un calcul rapide donne $\varphi(t) = pt$ et $\tau(t) = \chi(\tau)t$ pour tout $\tau \in \Gamma$.

1.1.3. Soit E une extension finie de \mathbb{Q}_p . Pour travailler sur les représentations p -adiques à coefficients dans E il est pratique de définir les anneaux $\mathcal{E}_E^\dagger := \mathcal{E}^\dagger \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$, $\mathcal{R}_E := \mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_E^\dagger} := \mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E$.

Définition 1.1.1. *i) Un (φ, Γ) -module au-dessus de \mathcal{E}_E^\dagger (respectivement \mathcal{R}_E) est un \mathcal{E}_E^\dagger -module libre (respectivement \mathcal{R}_E -module) \mathbb{D} de rang fini équipé d'actions linéaires de Γ et de φ qui commutent entre elles et telles que l'application linéaire induite $\mathcal{E}_E^\dagger \otimes_{\mathcal{E}_E^\dagger, \varphi} \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ (respectivement $\mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{R}_E, \varphi} \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$) soit un isomorphisme.*

ii) Un (φ, Γ) -module au-dessus de \mathcal{E}_E^\dagger est dit étale s'il existe une base de \mathbb{D} telle que la matrice de φ dans cette base soit dans $\text{GL}_d \left(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_E^\dagger} \right)$.

On appelle $\mathbf{Rep}_E(G_{\mathbb{Q}_p})$ la catégorie des représentations p -adiques de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et à coefficients dans E , c'est-à-dire la catégorie des E -espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action continue et linéaire de $G_{\mathbb{Q}_p}$.

Théorème 1.1.2 ([Fon91], [CC98]). *Il existe un foncteur naturel $V \rightarrow \mathbb{D}^\dagger(V)$ qui induit une équivalence de catégories entre $\mathbf{Rep}_E(G_{\mathbb{Q}_p})$ et la catégorie des (φ, Γ) -modules au-dessus de \mathcal{E}_E^\dagger qui sont étales.*

Grâce à la théorie de Kedlaya (voir [Col08, Proposition 1.4 et Corollaire 1.5]) on sait que le foncteur $\mathbb{D} \rightarrow \mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{E}_E^\dagger} \mathbb{D}$ établit une équivalence entre la catégorie des (φ, Γ) -modules étales au-dessus de \mathcal{E}_E^\dagger et la catégorie des (φ, Γ) -modules au-dessus de \mathcal{R}_E qui sont de pente 0 dans le sens de Kedlaya voir [Ked04]. En utilisant ce résultat ainsi que le théorème précédent on sait que le foncteur $V \mapsto \mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ défini par $\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) := \mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{E}_E^\dagger} \mathbb{D}^\dagger(V)$ induit une équivalence entre $\mathbf{Rep}_E(G_{\mathbb{Q}_p})$ et la catégorie des (φ, Γ) -modules au-dessus de \mathcal{R}_E qui sont de pente 0.

1.1.4. On appelle (φ, N) -module filtré au-dessus de K à coefficients dans E tout E -espace vectoriel M équipé des structures suivantes :

- un opérateur E -linéaire et nilpotent N tel que $N \circ \varphi = p \cdot \varphi \circ N$
- une filtration exhaustive et décroissante $(\text{Fil}^i M)_{i \in \mathbb{Z}}$ de M .

On note $\mathbf{MF}_{\mathbb{Q}_p}^{\varphi, N}$ la catégorie des (φ, N) -modules filtrés. Les sauts dans la filtration sont appelés poids de Hodge-Tate du module. On appelle module de Dieudonné filtré tout élément de $\mathbf{MF}_{\mathbb{Q}_p}^{\varphi, N}$ avec $N = 0$. On note $\mathbf{MF}_{\mathbb{Q}_p}^\varphi$ la catégorie des modules de Dieudonné filtrés. On définit $\mathcal{R}_{E, \log} := \mathcal{R}_E[\log X]$ où $\log X$ satisfait les lois suivantes

$$\tau(\log(X)) = d \log(X) + \log\left(\frac{\tau(X)}{X}\right), \tau \in \Gamma, \quad \varphi(\log(X)) = p \log(X) + \log\left(\frac{\varphi(X)}{X^p}\right).$$

On définit l'opérateur de monodromie $N : \mathcal{R}_{E, \log} \rightarrow \mathcal{R}_{E, \log}$ par $N := -\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \frac{d}{d \log X}$. Pour tout (φ, Γ) -module \mathbb{D} au-dessus de \mathcal{R}_E on définit

$$\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}) := (\mathbb{D} \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{R}_E[1/t])^\Gamma, \quad \mathcal{D}_{\text{st}}(\mathbb{D}) := (\mathbb{D} \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{R}_{E, \log}[1/t])^\Gamma.$$

Alors $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D})$ (respectivement $\mathcal{D}_{\text{st}}(\mathbb{D})$) est un E -espace vectoriel de dimension finie équipé d'une action naturelle de φ (respectivement d'actions naturelles de φ et N). De plus, on construit des filtrations décroissantes sur $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D})$ et $\mathcal{D}_{\text{st}}(\mathbb{D})$ en prenant

$$\text{Fil}^i(\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D})) := (\mathbb{D} \otimes_{\mathcal{R}_E} t^i \mathcal{R}_E)^\Gamma, \quad \text{Fil}^i(\mathcal{D}_{\text{st}}(\mathbb{D})) := (\mathbb{D} \otimes_{\mathcal{R}_E} t^i \mathcal{R}_{E, \log})^\Gamma.$$

On a

$$\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}) = \mathcal{D}_{\text{st}}(\mathbb{D})^{N=0},$$

$$\dim(\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D})) \leq \dim(\mathcal{D}_{\text{st}}(\mathbb{D})) \leq \text{rank}(\mathbb{D}).$$

On dit que \mathbb{D} est cristallin (respectivement semi-stable) si la dimension de $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D})$ est égale au rang de \mathbb{D} (respectivement si $\dim(\mathcal{D}_{\text{st}}(\mathbb{D})) = \text{rank}(\mathbb{D})$). On note $\mathbf{M}_{\text{st}, \mathbb{Q}_p}^{\varphi, \Gamma}$ et $\mathbf{M}_{\text{cris}, \mathbb{Q}_p}^{\varphi, \Gamma}$ respectivement les catégories des (φ, Γ) -modules semi-stables et cristallins. Lorsque \mathbb{D} est semistable on appelle poids de Hodge-Tate de \mathbb{D} les poids de Hodge-Tate de $\mathcal{D}_{\text{st}}(\mathbb{D})_K$.

Théorème 1.1.3. *i) Les foncteurs $\mathcal{D}_{\text{cris}} : \mathbf{M}_{\text{cris}, \mathbb{Q}_p}^{\varphi, \Gamma} \rightarrow \mathbf{MF}_{\mathbb{Q}_p}^\varphi$ et $\mathcal{D}_{\text{st}} : \mathbf{M}_{\text{st}, \mathbb{Q}_p}^{\varphi, \Gamma} \rightarrow \mathbf{MF}_{\mathbb{Q}_p}^{\varphi, N}$ sont des équivalences de catégories.*

ii) Si V est une représentation p -adique de $G_{\mathbb{Q}_p}$ alors $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V))$ (respectivement $\mathcal{D}_{\text{st}}(\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V))$) est canoniquement et fonctoriellement isomorphe au module de Fontaine $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ (respectivement $\mathbb{D}_{\text{st}}(V)$).

Démonstration. Le premier point est dû à [Ber08, Théorème III.2.4]. Le second point est une conséquence de [Ber02, Théorème 0.2]. \square

1.1.5. Pour toute E -algèbre affinoïde A on définit $\mathcal{E}_A := \mathcal{E}_E \widehat{\otimes}_E A$ et $\mathcal{R}_A := \mathcal{R}_E \widehat{\otimes}_E A$. Une représentation p -adique de $G_{\mathbb{Q}_p}$ à coefficients dans A est un A -module projectif de type fini avec une action continue linéaire de $G_{\mathbb{Q}_p}$. Il est alors possible de définir pour chaque représentation V un module $\mathbb{D}_{\text{rig},A}^\dagger(V)$ au-dessus de $\mathcal{R}_A(K)$ (voir [KPX14] pour la construction de $\mathbb{D}_{\text{rig},A}^\dagger(V)$).

Théorème 1.1.4. [KPX14, Théorème 2.2.17] *Le foncteur allant de la catégorie des représentations p -adiques de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et à valeurs dans la catégorie des modules au-dessus de $\mathcal{R}_A(K)$ défini par $V \mapsto \mathbb{D}_{\text{rig},A}^\dagger(V)$ est pleinement fidèle et commute avec les morphismes de changement de bases.*

De plus, si $A = E$ l'espace $\mathbb{D}_{\text{rig},A}^\dagger(V)$ est exactement $\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ défini précédemment.

1.1.6. Pour $\mathcal{B} = \mathcal{E}_E^\dagger(K)$ où $\mathcal{B} = \mathcal{R}_A(K)$, si \mathbb{D} est un (φ, Γ_K) -module au-dessus de \mathcal{B} , on note \mathbb{D}^* le module dual $\mathbb{D}^* := \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathbb{D}, \mathcal{B})$. On note $\mathbb{D}(\chi)$ le module obtenu en tordant l'action de Γ_K sur \mathbb{D} par le caractère cyclotomique.

1.2 Cohomologie des (φ, Γ) -modules

1.2.1. On fixe γ un générateur topologique de Γ . Si \mathbb{D} est un (φ, Γ) -module au-dessus de $\mathcal{R}_A(K)$ on écrit $H^*(\mathbb{D})$ pour la cohomologie du complexe

$$C_{\varphi,\gamma}(\mathbb{D}) : 0 \rightarrow \mathbb{D} \xrightarrow{f} \mathbb{D} \oplus \mathbb{D} \xrightarrow{g} \mathbb{D} \rightarrow 0.$$

où $f(x) = ((\varphi - 1)x, (\gamma - 1)x)$ et $g(y, z) = (\gamma - 1)y - (\varphi - 1)z$. Pour toute suite exacte courte de (φ, Γ) -modules

$$0 \rightarrow \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}_2 \rightarrow 0$$

on a une suite exacte longue sur les groupes de cohomologie

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{D}_1) \rightarrow H^0(\mathbb{D}) \rightarrow H^0(\mathbb{D}_2) \rightarrow H^1(\mathbb{D}_1) \rightarrow \dots \rightarrow H^2(\mathbb{D}_2) \rightarrow 0.$$

Proposition 1.2.1. *La cohomologie des (φ, Γ) -modules sur \mathcal{R}_A satisfait les propriétés suivantes :*

- les $H^*(\mathbb{D})$ sont des A -modules de type fini.
- La dualité de Tate. pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$ il existe un accouplement fonctoriel donné par le cup produit

$$H^i(\mathbb{D}) \times H^{2-i}(\mathbb{D}^*(\chi)) \xrightarrow{\cup} H^2(\mathcal{R}_A(K)(\chi)) \simeq A$$

qui est compatible avec les homomorphismes de connexion dans le sens usuel. C'est une généralisation de la dualité de Poincaré lorsque $A = E$.

Démonstration. Voir respectivement [KPX14, Théorème 4.4.2 et Théorème 4.4.5(2)] pour le premier et second point. \square

La cohomologie galoisienne est liée à la cohomologie des (φ, Γ) -modules.

Proposition 1.2.2. *Soit V une représentation p -adique de $G_{\mathbb{Q}_p}$ à coefficients dans A alors la cohomologie galoisienne continue $H^*(\mathbb{Q}_p, V)$ est fonctoriellement isomorphe à $H^*(\mathbb{D}_{\text{rig}, A}^\dagger(V))$.*

Démonstration. Voir [KPX14, Proposition 2.3.7]. \square

1.2.2. Pour tout caractère continu $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow A^\times$ soit $\mathcal{R}_A(\delta) := \mathcal{R}_{Ae_\delta}$ le (φ, Γ) -module de rang un défini par les lois

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \gamma(e_\delta) = \delta(\chi(\gamma))e_\delta, \quad \varphi(e_\delta) = \delta(p)e_\delta.$$

Proposition 1.2.3. [Nak14, sections 2.3 et 2.4] *Soit $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow A^\times$ un caractère continu vérifiant*

$$\exists m \in \mathbb{Z}^{\geq 1}, \quad \delta(u) = u^m, \quad \forall u \in \mathbb{Z}_p^\times.$$

et $\mathbb{D} = \mathcal{R}_A(\delta)$ le (φ, Γ) -module de rang 1 à coefficients dans A associé à δ . Il existe un morphisme appelé exponentielle

$$\exp_{\mathbb{D}} : \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}) \rightarrow H^1(\mathbb{D})$$

tel que pour tout $\psi : A \rightarrow E$ et $\mathbb{D}_\psi = \mathbb{D} \otimes_{A, \psi} E$ le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}) & \xrightarrow{\exp_{\mathbb{D}}} & H^1(\mathbb{D}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}_\psi) & \xrightarrow{\exp_{\mathbb{D}_\psi}} & H^1(\mathbb{D}_\psi) \end{array}$$

Soit l'accouplement canonique $[\cdot, \cdot]$ défini par

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}) \times \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}^*(\chi)) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_E(\chi)) \simeq E.$$

Par dualité locale, on définit l'exponentielle duale comme l'unique morphisme

$$\exp_{\mathbb{D}^*(\chi)}^* : H^1(\mathbb{D}^*(\chi)) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}^*(\chi))$$

vérifiant

$$\exp_{\mathbb{D}}(x) \cup y = [x, \exp_{\mathbb{D}^*(\chi)}^*(y)]$$

pour tout $x \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D})$ et $y \in H^1(\mathbb{D}^*(\chi))$. De plus, ce morphisme est compatible avec les morphismes de changement de bases.

1.2.3. Soit V une représentation p -adique de $G_{\mathbb{Q}_p}$ à coefficients dans une E -algèbre affinoïde A . On suppose que A est une algèbre réduite. Par un théorème de Chenevier (voir [Che09, Lemme 3.18]) il est possible de définir une norme sur A dont la boule unité est $A^\circ := \{a \in A \mid \|a\| \leq 1\}$ et un sous- A° -module T de A de type fini stable sous l'action de $G_{\mathbb{Q}_p}$. On définit

$$H_{\text{Iw}}^i(K, T) := \varprojlim_{\text{cor}_{K_n/K_{n-1}}} H^i(K_n, T),$$

où $\text{cor}_{K_n/K_{n-1}}$ est le morphisme de corestriction. On définit aussi

$$H_{\text{Iw}}^i(K, V) := H_{\text{Iw}}^i(K, T) \otimes_{\mathcal{O}_E} E.$$

Cette définition est indépendante du choix du module T .

1.2.4. Pour la suite de cette section, on suppose que $A = E$. Soit \mathbb{D} un (φ, Γ) -module sur \mathcal{R}_E . D'après le premier point de la Proposition 1.2.1, $H^i(\mathbb{D})$ est un E -espace vectoriel de dimension finie pour tout i . De plus, la formule usuelle de la caractéristique d'Euler est satisfaite (voir [Liu07] et [Her98])

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim_E H^i(\mathbb{D}) = -[K : \mathbb{Q}_p] \text{rank}_{\mathcal{R}_E(K)}(\mathbb{D}).$$

On associe à tout cocycle $\alpha = (a, b) \in Z^1(C_{\varphi, \Gamma}(\mathbb{D}))$ l'extension

$$0 \rightarrow \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}_\alpha \rightarrow \mathcal{R}_E \rightarrow 0$$

définie par

$$\mathbb{D}_\alpha = \mathbb{D} \oplus \mathcal{R}_E \cdot e, \quad (\varphi - 1)e = a, \quad (\gamma - 1)e = b.$$

Cela définit un isomorphisme canonique

$$H^1(\mathbb{D}) \simeq \text{Ext}_{\varphi, \Gamma}^1(\mathcal{R}_E, \mathbb{D}).$$

On dit qu'une classe $\text{cl}(\alpha)$ de $H^1(\mathbb{D})$ est cristalline si

$$\dim_E \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}_\alpha) = \dim_E \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}) + 1$$

et on note

$$H_f^1(\mathbb{D}) := \{\text{cl}(\alpha) \in H^1(\mathbb{D}) \mid \text{cl}(\alpha) \text{ est cristalline}\}$$

l'ensemble des classes cristallines.

Proposition 1.2.4. *Soit*

$$0 \rightarrow \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}_2 \rightarrow 0$$

une suite exacte de (φ, Γ) -modules cristallins. Alors la suite suivante est exacte

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{D}_1) \rightarrow H^0(\mathbb{D}) \rightarrow H^0(\mathbb{D}_2) \rightarrow H_f^1(\mathbb{D}_1) \rightarrow H_f^1(\mathbb{D}) \rightarrow H_f^1(\mathbb{D}_2) \rightarrow 0.$$

Démonstration. Voir [Ben11, Corollaire 1.4.6]. □

Pour le reste de ce paragraphe, on suppose que \mathbb{D} est cristalline. On définit l'espace tangent de \mathbb{D} par

$$t_{\mathbb{D}}(\mathbb{Q}_p) := \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}) / \text{Fil}^0 \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}).$$

On considère le complexe suivant (voir [Nek90] et [FPR94])

$$C_{\text{cris}}^\bullet(\mathbb{D}) : \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}) \xrightarrow{h} t_{\mathbb{D}}(\mathbb{Q}_p) \oplus \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D})$$

où les modules sont placés dans les degrés 0 et 1 et où

$$h(d) = (d \pmod{\text{Fil}^0 \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D})}, (1 - \varphi)(d)).$$

L'équivalence entre $\mathbf{MF}_{\mathbb{Q}_p}^\varphi$ et $\mathbf{M}_{\text{cris}, \mathbb{Q}_p}^{\varphi, \Gamma}$ donne un isomorphisme canonique

$$H^1(C_{\text{cris}}^\bullet(\mathbb{D})) \rightarrow H_f^1(\mathbb{D}).$$

On définit alors l'application exponentielle

$$\exp_{\mathbb{D}} : t_{\mathbb{D}}(\mathbb{Q}_p) \oplus \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}) \rightarrow H^1(\mathbb{D})$$

comme la composition de l'isomorphisme précédent avec la projection naturelle $t_{\mathbb{D}}(\mathbb{Q}_p) \oplus \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}) \rightarrow H^1(C_{\text{cris}}^\bullet(\mathbb{D}))$ et l'inclusion $H_f^1(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{D})$.

1.2.5. Soit V une représentation de $G_{\mathbb{Q}_p}$ cristalline. Cela est équivalent à demander que $\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ soit un (φ, Γ) -module cristallin. L'isomorphisme $H^1(\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)) \simeq H^1(\mathbb{Q}_p, V)$ donnée dans la Proposition 1.2.2 identifie aussi les deux espaces $H_f^1(\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V))$ et $H_f^1(\mathbb{Q}_p, V)$ de Bloch et Kato ([Ben11, Proposition 1.4.2]). L'espace tangent de V est par définition

$$t_V(\mathbb{Q}_p) := \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) / \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{cris}}(V).$$

On a le diagramme commutatif suivant grâce à [Nak14, Théorème 2.21]

$$\begin{array}{ccc} t_{\mathbb{D}}(\mathbb{Q}_p) & \xrightarrow{\exp_{\mathbb{D}}} & H^1(\mathbb{D}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ t_V(\mathbb{Q}_p) & \xrightarrow{\exp_V} & H^1(\mathbb{Q}_p, V) \end{array}$$

où l'on note $\mathbb{D} = \mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ par souci de concision. Cela permet ainsi d'identifier l'exponentielle des (φ, Γ) -modules avec celle de Bloch et Kato (définition au Paragraphe 4 de [BK90]).

Comme dans le paragraphe précédent, on définit alors l'application exponentielle duale

$$\exp_{\mathbb{D}^*}^* : H^1(\mathbb{D}^*(\chi)) \rightarrow \text{Fil}^0 \mathcal{D}_{\text{dR}}(\mathbb{D}^*(\chi)).$$

C'est l'unique application linéaire de $H^1(\mathbb{D}^*(\chi))$ dans $\text{Fil}^0 \mathcal{D}_{\text{dR}}(\mathbb{D}^*(\chi))$ telle que

$$\exp_{\mathbb{D}}(x) \cup y = [x, \exp_{\mathbb{D}^*}^*(y)]$$

pour tout $x \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D})$ et $y \in H^1(\mathbb{D}^*(\chi))$.

1.2.6. Soit V une représentation de $G_{\mathbb{Q}_p}$ cristalline.

Proposition 1.2.5. *L'application naturelle*

$$\mathbb{D}^\dagger(V) \rightarrow \mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$$

induit un quasi-isomorphisme de complexes $C_{\varphi, \gamma_K}(\mathbb{D}^\dagger(V)) \rightarrow C_{\varphi, \gamma_K}(\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V))$.

Par conséquent, la cohomologie du complexe $C_{\varphi, \gamma_K}(\mathbb{D}^\dagger(V))$ permet de retrouver les groupes de cohomologie $H^i(\mathbb{Q}_p, V)$.

Soit $C_{\text{Iw}, \psi}^\dagger(V)$ le complexe

$$C_{\text{Iw}, \psi}^\dagger(V) : \mathbb{D}^\dagger(V) \xrightarrow{\psi^{-1}} \mathbb{D}^\dagger(V).$$

La cohomologie d'Iwasawa $H_{\text{Iw}}^*(\mathbb{Q}_p, V)$ est fonctoriellement isomorphe à la cohomologie du complexe $C_{\text{Iw}, \psi}^\dagger(V)$ (voir [CC99]).

Le travail joint de Cherbonnier et Colmez [CC98] et [CC99] permet de donner l'interprétation suivante des applications de projection $\text{pr}_{V, n} : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V) \rightarrow H^1(K_n, V)$. Soit $x \in \mathbb{D}^\dagger(V)^{\psi=1}$ et $\gamma_n = \gamma^{[K_n : \mathbb{Q}_p]}$. Alors $(\varphi - 1)x \in \mathbb{D}^\dagger(V)^{\psi=0}$ et grâce à [CC98, Lemme 1.5.1] il existe un élément $u \in \mathbb{D}^\dagger(V)$ tel que $(\gamma_n - 1)u = (\varphi - 1)x$. La projection $\text{pr}_{V, n}$ envoie alors x sur la classe $\text{cl}(y, x)$. Cette interprétation a été mise en avant par Fontaine.

1.3 (φ, Γ) -modules de rang 1

1.3.1. Premièrement, on s'intéresse aux (φ, Γ) de rang 1, ce sujet est étudié dans les textes [Ben11] et [Col08].

Proposition 1.3.1. *i) Tout (φ, Γ) -module de rang 1 au-dessus de \mathcal{R}_E est isomorphe à $\mathcal{R}_E(\delta)$ pour un unique caractère $\delta : \mathbb{Q}_p^* \rightarrow E^*$.*

ii) Tout (φ, Γ) -module de rang 1 au-dessus de \mathcal{R}_E est cristallin si et seulement si le caractère δ restreint à \mathbb{Z}_p^\times est de la forme $\delta|_{\mathbb{Z}_p^\times} : u \mapsto u^m$ pour un certain $m \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Le premier point est [Col08, Proposition 3.1] et le second point est [Ben11, Lemme 1.5.2]. \square

Dans le cas cristallin $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_E(\delta))$ est l'espace vectoriel de dimension 1 engendré par $t^{-m}e_\delta$ où m est l'unique poids de Hodge Tate de $\mathcal{R}_E(\delta)$. et où le Frobenius φ agit sur $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_E(\delta))$ par la multiplication par $p^{-m}\delta(p)$. Le calcul des groupes de cohomologie des (φ, Γ) -modules de rang 1 se divise en 4 cas. Le lecteur est invité à se référer aux sections 2.3-2.5 du texte de Colmez [Col08] ainsi qu'à la Proposition 1.5.3 et au Théorème 1.5.7 du texte de Benois [Ben11] pour plus de détails ainsi que pour les preuves des résultats cités ci-dessous.

- S'il existe $m \geq 0$ tel que $\delta(u) = u^{-m}$ pour tout u dans \mathbb{Z}_p^\times et $\delta(x) \neq x^{-m}$ sur \mathbb{Z}_p , alors $H^i(\mathcal{R}_E(\delta)) = 0$ pour $i \in \{0, 2\}$ et $H^1(\mathcal{R}_E(\delta))$ est un E -espace vectoriel de dimension 1 avec $H_f^1(\mathcal{R}_E(\delta)) = 0$.
- S'il existe $m \geq 0$ tel que $\delta(x) = x^{-m}$ sur \mathbb{Z}_p , alors on a

$$H^0(\mathcal{R}_E(\delta)) = \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_E(\delta)), \quad H^2(\mathcal{R}_E(\delta)) = 0.$$

De plus l'application

$$i_\delta : \begin{cases} \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_E(\delta)) \otimes \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_E(\delta)) & \rightarrow H^1(\mathcal{R}_E(\delta)) \\ (x, y) & \mapsto \text{cl}(-x, \log(\chi(\gamma))y). \end{cases}$$

est un isomorphisme. On note $i_{\delta, f}$ (respectivement $i_{\delta, c}$) la restriction de i_δ à la première coordonnée (respectivement la seconde coordonnée). Alors $\text{Im}(i_{\delta, f}) = H_f^1(\mathcal{R}_E(\delta))$ et on a la décomposition canonique

$$H^1(\mathcal{R}_E(\delta)) \simeq H_f^1(\mathcal{R}_E(\delta)) \oplus H_c^1(\mathcal{R}_E(\delta))$$

où $H_c^1(\mathcal{R}_E(\delta))$ est l'image de $i_{\delta, c}$. On pose

$$\mathbf{x}_m = i_{\delta, f}(t^m e_\delta) = -\text{cl}(t^m e_\delta, 0),$$

$$\mathbf{y}_m = i_{\delta, c}(t^m e_\delta) = \log(\chi(\gamma)) \text{cl}(0, t^m e_\delta).$$

- S'il existe $m \geq 1$ tel que $\delta(u) = u^m$ pour tout u dans \mathbb{Z}_p^\times et $\delta(x) \neq |x|_p x^m$ sur \mathbb{Z}_p , alors $H^i(\mathcal{R}_E(\delta)) = 0$ pour $i \in \{0, 2\}$ et $H^1(\mathcal{R}_E(\delta))$ est un E -espace vectoriel de dimension 1 avec $H_f^1(\mathcal{R}_E(\delta)) = H^1(\mathcal{R}_E(\delta))$.
- S'il existe $m \geq 1$ tel que $\delta(x) = |x|_p x^m$ sur \mathbb{Z}_p , alors $H^0(\mathcal{R}_E(\delta)) = 0$ et $H^2(\mathcal{R}_E(\delta))$ est un E -espace vectoriel de dimension 1. De plus $\chi(x) \delta^{-1}(x) = x^{1-m}$ et il existe un unique isomorphisme

$$i_\delta : \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_E(\delta)) \otimes \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_E(\delta)) \rightarrow H^1(\mathcal{R}_E(\delta))$$

tel que

$$i_\delta(\alpha, \beta) \cup i_{\chi\delta^{-1}}(x, y) = [\beta, x] - [\alpha, y]$$

où $[\cdot, \cdot] : \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_E(\delta)) \times \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_E(\chi\delta^{-1})) \rightarrow E$ est l'accouplement usuel. Comme pour le second cas on note $i_{\delta, f}$ et $i_{\delta, c}$ les restrictions de i_δ à la première et à la seconde coordonnée respectivement. Alors $\text{Im}(i_{\delta, f}) = H_f^1(\mathcal{R}_E(\delta))$ et on a la décomposition canonique

$$H^1(\mathcal{R}_E(\delta)) \simeq H_f^1(\mathcal{R}_E(\delta)) \oplus H_c^1(\mathcal{R}_E(\delta))$$

où $H_c^1(\mathcal{R}_E(\delta))$ est l'image de $i_{\delta, c}$.

1.3.2. Il est aussi intéressant d'étudier les (φ, Γ) -modules \mathbb{D} tels que le Frobenius agisse comme la multiplication par une constante sur $\mathcal{D}_{\text{st}}(\mathbb{D})$.

Proposition 1.3.2. *Soit \mathbb{D} un (φ, Γ) -module semi-stable de rang d et de poids de Hodge Tate k_1, \dots, k_d écrits avec leur multiplicité. On suppose que $\mathcal{D}_{\text{st}}(\mathbb{D}) = \mathcal{D}_{\text{st}}(\mathbb{D})^{\varphi=\lambda}$ pour un λ quelconque de \mathbb{Q}_p^* . Alors, le module \mathbb{D} admet la décomposition*

$$\mathbb{D} \simeq \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{R}_E(\delta_i)$$

où les δ_i sont définis par $\delta_i(u) = u^{k_i}$ pour $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ et $\delta_i(p) = \lambda p^{k_i}$.

Démonstration. Voir [Ben11, Proposition 1.5.9]. □

1.3.3. On considère maintenant les (φ, Γ) -modules de rang 1 sur \mathcal{R}_A .

Remarque 1.3.3. Contrairement à 1.3.1*i*) il existe des (φ, Γ) -modules de rang un \mathbb{D} sur \mathcal{R}_A tels que $\mathbb{D} \not\simeq \mathcal{R}_A(\delta)$ pour tout caractère continu δ .

Proposition 1.3.4. Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in A^\times$, on définit un caractère continu δ de \mathbb{Q}_p^\times dans A^\times par

$$\delta(u) = u^m, u \in \mathbb{Z}_p^\times, \quad \delta(p) = \alpha. \quad (1.2)$$

La cohomologie de $\mathcal{R}_A(\delta)$ vérifie les propriétés suivantes :

i) Si $p^{-m}\alpha \neq 1$ alors

$$H^0(\mathcal{R}_A(\delta)) = 0.$$

ii) Si A est principal et $m \leq 0$, alors

$$H^2(\mathcal{R}_A(\delta)) = 0.$$

Démonstration. Si δ satisfait (1.2) le module cristallin $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_A(\delta))$ est le A -module libre de rang 1 engendré par $d_\delta := t^{-m}e_\delta$. Alors

$$\varphi(d_\delta) = p^{-m}\alpha d_\delta.$$

Si $p^{-m}\alpha \neq 1$ alors

$$H^0(\mathcal{R}_A(\delta)) \subset \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_A(\delta))^{\varphi=1} = \{0\}$$

ce qui prouve le premier point.

Soient C^\bullet un complexe de A -modules et B un A -module. On a la suite spectrale suivante

$$E_2^{i,j} := \text{Tor}_{-i}^A(H^j(C^\bullet), B) \Rightarrow E_2^{i+j} := H^{i+j}(C^\bullet \otimes_A B).$$

Soit $\mathfrak{m} \in \text{Spm}(A)$, en appliquant cette suite spectrale en $B := A/\mathfrak{m}$ et $C^\bullet := C_{\psi,\gamma}(\mathcal{R}_A(\delta))$ on obtient la suite spectrale suivante

$$E_2^{i,j} := \text{Tor}_{-i}^A(H^j(\mathcal{R}_A(\delta)), A/\mathfrak{m}) \Rightarrow E_2^{i+j} := H^{i+j}(\mathcal{R}_A(\delta) \otimes A/\mathfrak{m}). \quad (1.3)$$

Puisque A est principal, $E_2^{i,j}$ est nul sauf si $i \in \{0, -1\}$. Pour $i + j = 2$ le seul terme non-nul est $E_2^{0,2}$ donc

$$H^2(\mathcal{R}_A(\delta) \otimes A/\mathfrak{m}) \simeq H^2(\mathcal{R}_A(\delta)) \otimes A/\mathfrak{m}.$$

De plus, $\mathcal{R}_A(\delta) \otimes A/\mathfrak{m} = \mathcal{R}_E(\delta_\mathfrak{m})$ or $\delta_\mathfrak{m}(u) = u^m, \forall u \in \mathbb{Z}_p^\times$. Alors, puisque $m \leq 0$

$$\forall \mathfrak{m} \in \text{Spm}(A), H^2(\mathcal{R}_A(\delta)) \otimes A/\mathfrak{m} = 0.$$

Or, A est principal et $H^2(\mathcal{R}_A(\delta))$ est un A -module de type fini. On a la décomposition

$$H^2(\mathcal{R}_A(\delta)) = A^r \oplus_{j=1}^t A/(\lambda_j)$$

où $r, t \in \mathbb{N}$ et λ_j sont des éléments de A . En regardant le produit tensoriel avec les différents A/\mathfrak{m} , on obtient le second point de la proposition. \square

Proposition 1.3.5. On suppose que A est principal et que $m \leq 0$ on a :

i) Si $p^{-m}\alpha - 1 \in A^\times$ alors $H^1(\mathcal{R}_A(\delta))$ est un A -module libre de rang 1.

ii) Si $p^{-m}\alpha - 1 = 0$ alors $H^1(\mathcal{R}_A(\delta))$ est un A -module libre de rang 2.

Démonstration. Soit $\mathfrak{m} \in \text{Spm}(A)$. En utilisant la suite spectrale du Tor pour $i + j = 1$, grâce à la Proposition 1.3.4,ii) on sait que $E_2^{-1,2} = 0$, le seul terme non-nul est alors $E_2^{0,1}$ et on obtient l'isomorphisme

$$H^1(\mathcal{R}_A(\delta) \otimes A/\mathfrak{m}) \simeq H^1(\mathcal{R}_A(\delta)) \otimes A/\mathfrak{m}.$$

En utilisant la cohomologie des (φ, Γ) -modules de rang 1 au-dessus de \mathcal{R}_E on sait que le E -rang de $H^1(\mathcal{R}_A(\delta) \otimes A/\mathfrak{m})$ vaut 1 si $p^{-m}\alpha - 1 \notin \mathfrak{m}$ et 2 sinon. Dans le cas i) et ii) le rang de $H^1(\mathcal{R}_A(\delta)) \otimes A/\mathfrak{m}$ vaut toujours 1 et 2 respectivement, ce qui nous donne les résultats voulus. \square

1.4 Exponentielle élargie et logarithme de Perrin-Riou

Le but de cette section est de rappeler les propriétés de base de l'exponentielle de Perrin-Riou. Le lecteur peut trouver les preuves ainsi que plus d'informations sur la construction de l'exponentielle dans les textes [PR94], [Col98], [Ben00] et [Ber03]. Les notations des paragraphes précédents sont conservées.

1.4.1. Soit E une extension finie de \mathbb{Q}_p . On note $\Lambda_E := \mathcal{O}_E[[\Gamma]]$ l'algèbre d'Iwasawa de Γ sur \mathcal{O}_E et on note $\mathcal{R}_E^+ = \mathcal{R}_E \cap E[[X]]$. Autrement dit, \mathcal{R}_E^+ est l'anneau des séries à coefficients dans E et qui convergent sur le disque unité ouvert. On rappelle les notations $K_n := \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$ et $K_\infty := \bigcup_{n \geq 0} K_n$, et on note $\Gamma_n := \text{Gal}(K_\infty/K_n)$. On fixe un générateur topologique γ de Γ , cela permet de définir un système de générateurs de Γ_n en posant $\gamma_1 := \gamma^{p^{-1}}$ et $\gamma_{n+1} = \gamma_n^p$ pour $n \geq 1$. Soit $\Delta := \text{Gal}(K_1/\mathbb{Q}_p)$, on définit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_E &:= \{f(\gamma_1 - 1) \mid f \in \mathcal{R}_E^+\}, \\ \mathcal{H}_E(\Gamma) &:= \mathbb{Z}_p[\Delta] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{H}_E. \end{aligned} \tag{1.4}$$

On a la décomposition

$$\mathcal{H}_E(\Gamma) = \bigoplus_{i=0}^{p-2} \delta_i \mathcal{H}_E \tag{1.5}$$

où l'on note δ_i l'élément unipotent

$$\delta_i := \frac{1}{|\Delta|} \sum_{g \in \Delta} \omega^{-i}(g) g \tag{1.6}$$

où $\omega : \Delta \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ est le caractère de Teichmüller. Alors $\mathcal{H}_E(\Gamma)^\Delta = \mathcal{H}_E$.

Définition 1.4.1. Soit $h = \sum_{j=0}^{p-2} \delta_j h_j(\gamma_1 - 1) \in \mathcal{H}_E(\Gamma)$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note $\mathcal{A}_{\omega^i}^c(h)$ la fonction analytique de \mathbb{Z}_p dans E définie par

$$\forall s \in \mathbb{Z}_p, \quad \mathcal{A}_{\omega^i}^c(h)(s) = h_i(\chi(\gamma_1)^s - 1).$$

On équipe $\mathcal{H}_E(\Gamma)$ avec l'opérateur de twist

$$\text{Tw}_m : \begin{cases} \mathcal{H}_E(\Gamma) & \rightarrow \mathcal{H}_E(\Gamma) \\ \sum_{i=0}^{p-2} \delta_i h_i(\gamma_1 - 1) & \mapsto \sum_{i=0}^{p-2} \delta_{i-m} h_i(\chi(\gamma_1)^m \gamma_1 - 1). \end{cases} \tag{1.7}$$

Pour tout $h \in \mathcal{H}_E(\Gamma)$ et pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on a

$$\forall s \in \mathbb{Z}_p, \quad \mathcal{A}_{\omega^i}^c(\text{Tw}_m(h))(s) = \mathcal{A}_{\omega^{i+m}}^c(h)(s + m). \tag{1.8}$$

L'anneau $\mathcal{H}_E(\Gamma)$ agit sur \mathcal{R}_E^+ . On a une description explicite du noyau du morphisme ψ sur \mathcal{R}_E^+ .

Proposition 1.4.2. [PR94, Proposition 1.2.7] $(\mathcal{R}_E^+)^{\psi=0}$ est le $\mathcal{H}_E(\Gamma)$ -module de rang 1 engendré par $(1 + X)$

$$(\mathcal{R}_E^+)^{\psi=0} = \mathcal{H}_E(\Gamma) \cdot (1 + X).$$

1.4.2. Soit V une représentation cristalline de $G_{\mathbb{Q}_p}$. On rappelle que ε est l'élément fixé défini par $\varepsilon := (\zeta_{p^n})_{n \geq 0}$. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on définit l'opérateur de torsion sur la cohomologie d'Iwasawa de la manière suivante

$$\mathrm{Tw}_m^\varepsilon : \begin{cases} H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V) & \rightarrow H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V(m)) \\ x & \mapsto x \otimes \varepsilon^{\otimes m}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Son lien avec Tw_m est donné dans le Lemme 1.4.6. Soit $\iota : \mathcal{H}_E(\Gamma) \rightarrow \mathcal{H}_E(\Gamma)$ l'involution définie par $\iota(\tau) = \tau^{-1}$, $\tau \in \Gamma$. On a l'écriture suivante de la cohomologie d'Iwasawa (voir [Pot12])

$$H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V) \otimes_{\Lambda_E} \mathcal{H}_E(\Gamma) = H^1(\mathbb{Q}_p, V \otimes_E \mathcal{H}_E^\iota(\Gamma)) \quad (1.10)$$

où $\mathcal{H}_E^\iota(\Gamma)$ est $\mathcal{H}_E(\Gamma)$ où Γ agit à travers ι .

Pour tout caractère continu $\mu : \Gamma \rightarrow E^\times$ le morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_E^\iota(\Gamma) &\rightarrow E(\mu^{-1}) \\ \gamma &\mapsto \mu(\gamma). \end{aligned}$$

induit un morphisme de représentation $V \otimes_E \mathcal{H}_E^\iota(\Gamma) \rightarrow V(\mu^{-1})$. Le groupe Γ agit comme l'inverse de μ à cause de l'involution ι . En utilisant l'écriture (1.10) cela induit un morphisme dit de spécialisation en μ

$$H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, V(\mu^{-1})).$$

On appelle spécialisation en j la spécialisation en χ^j . On note pr_0 la projection de la cohomologie d'Iwasawa sur le corps de base

$$\mathrm{pr}_0 : H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, V).$$

La spécialisation en j coïncide avec la composition $\mathrm{pr}_0 \circ \mathrm{Tw}_{-j}^\varepsilon$ du twist $\mathrm{Tw}_{-j}^\varepsilon$ avec la projection pr_0 .

1.4.3. Soit V une représentation cristalline de $G_{\mathbb{Q}_p}$. On pose

$$\mathcal{D}(V) := \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V) \otimes_E (\mathcal{R}_E^+)^{\psi=0}.$$

Théorème 1.4.3. *Soit V une représentation cristalline de $G_{\mathbb{Q}_p}$ à coefficients dans E . Pour tout entiers h et m tels que $\mathrm{Fil}^{-h} \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et $m + h \geq 1$, il existe un unique $\mathcal{H}_E(\Gamma)$ -homomorphisme*

$$\mathrm{Exp}_{V(m),h}^\varepsilon : \mathcal{D}(V(m)) \rightarrow H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V(m)) \otimes_{\Lambda_E} \mathcal{H}_E(\Gamma).$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

i) Si $\mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V(m))^{\varphi=1} = 0$, alors pour tout $x \in \mathcal{D}(V(m))$ on a l'égalité

$$\mathrm{pr}_0(\mathrm{Exp}_{V(m),h}^\varepsilon(x)) = \Gamma(h) \exp_{V(m)} \left(\frac{1 - p^{-1}\varphi^{-1}}{1 - \varphi}(x(0)) \right)$$

où pr_0 est la projection sur le corps de base, $\Gamma(h) := (h-1)!$ la fonction Γ évaluée en h et $\exp_{V(m)}$ est l'exponentielle de Bloch et Kato.

- ii) Soit $e_{-1} := \varepsilon^{-1} \otimes t$ le générateur canonique de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(-1))$ où t est défini en (1.1). On a l'égalité

$$\text{Exp}_{V(m+1),h+1}^\varepsilon = -\text{Tw}_{V(m),1}^\varepsilon \circ \text{Exp}_{V(m),h}^\varepsilon \circ (\partial \otimes e_{-1})$$

où ∂ est l'opérateur $\partial := (1 + X) \frac{d}{dX}$.

- iii) On a aussi l'égalité suivante

$$\text{Exp}_{V(m),h+1}^\varepsilon = l_h \text{Exp}_{V(m),h}^\varepsilon$$

où $l_h := h - \frac{\log(\gamma_1)}{\log(\chi(\gamma_1))}$.

Démonstration. Ce théorème fut d'abord prouvé par Perrin-Riou dans le [PR94] pour les représentations cristallines. D'autres preuves peuvent être trouvées dans [Ben00] et [Ber03]. Le résultat est étendu aux représentations potentiellement semi-stables dans [KKT96] et [Col98]. \square

1.4.4. Pour tout élément $d \in \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ on définit l'élément

$$\tilde{d} := d \otimes (1 + X) \in \mathcal{D}(V).$$

Lorsque V est une représentation semi-stable de dimension 1 on a une formule plus précise pour l'interpolation effectuée par l'exponentielle de Perrin-Riou. Grâce à la Proposition 1.3.1 on sait qu'il existe un unique caractère, que l'on note δ_V , tel que $\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) = \mathcal{R}_E(\delta_V)$.

Proposition 1.4.4. *Soit V une représentation cristalline de dimension 1 d'unique poids de Hodge-Tate m et soit $d \in \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$. Soit $h \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ tel que $h \geq m$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))^{\varphi=1} = 0$, la spécialisation de la classe de cohomologie $\text{Exp}_{V,h}^\varepsilon(\tilde{d})$ au caractère χ^{-k} est donnée par*

$$\text{pr}_0 \circ \text{Tw}_k^\varepsilon \left(\text{Exp}_{V,h}^\varepsilon(\tilde{d}) \right) = \Gamma(k+h) \frac{1 - p^{m+k-1} \delta^{-1}(p)}{1 - p^{-m-k} \delta(p)} \exp_{V(k)}(d[k]), \quad \text{si } k+m \geq 1,$$

$$\exp_{V(k)}^* \left(\text{pr}_0 \circ \text{Tw}_k^\varepsilon \left(\text{Exp}_{V,h}^\varepsilon(\tilde{d}) \right) \right) = \Gamma^*(k+h) \frac{1 - p^{m+k-1} \delta^{-1}(p)}{1 - p^{-m-k} \delta(p)} d[k], \quad \text{si } k+m \leq 0$$

où $\Gamma^*(j) = \frac{(-1)^j}{j!}$ si $j \in \mathbb{Z}^{<0}$ et $\Gamma^*(j) = \Gamma(j)$ pour $j \in \mathbb{N}$ et où $d[k] := d \otimes e_k$.

1.4.5. Soit T un \mathcal{O}_E -réseau de V stable sous l'action de $\mathbb{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Les accouplements cohomologiques

$$(\ , \)_{T,n} : H^1(K_n, T) \times H^1(K_n, T^*(1))^\vee \rightarrow \mathcal{O}_E$$

donnent naissance à un accouplement Λ_E -bilinéaire

$$\langle \ , \ \rangle_T : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, T) \times H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, T^*(1))^\vee \rightarrow \Lambda_E$$

défini par

$$\langle x, y \rangle_T \equiv \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_n} (\tau^{-1} x_n, y_n)_{T,n} \tau \pmod{(\gamma_n - 1)}$$

(voir [PR94, section 3.6.1]). On étend par linéarité cet accouplement à

$$\langle \ , \ \rangle_T : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, T) \otimes_{\Lambda_E} \mathcal{H}_E(\Gamma) \times H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, T^*(1))^\vee \otimes_{\Lambda_E} \mathcal{H}_E(\Gamma) \rightarrow \mathcal{H}_E(\Gamma)$$

Il est alors possible de définir un logarithme que l'on appelle logarithme élargi.

Définition 1.4.5. *Pour toute représentation p -adique cristalline V , soit $d \in \mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))$ et $h \geq 1$ tel que $\text{Fil}^{-h}(\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) = \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$. On définit le logarithme élargi comme le morphisme*

$$\text{Log}_{V,1-h,d}^{\varepsilon} : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V) \rightarrow \mathcal{H}_E(\Gamma)$$

par

$$\text{Log}_{V,1-h,d}^{\varepsilon}(x) = \left\langle x, \text{Exp}_{V^*(1),h}^{\varepsilon^{-1}}(\widetilde{d})^t \right\rangle_V.$$

Les différents twists du logarithme sont liés par une relation qui découle facilement des propriétés générales de l'exponentielle élargie.

Lemme 1.4.6. *Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on a*

$$\text{Log}_{V(-1),-h,d \otimes e_1}^{\varepsilon}(\text{Tw}_{V,-1}^{\varepsilon}(x)) = \text{Tw}_1(\text{Log}_{V,1-h,d}^{\varepsilon}(x)).$$

Ce lemme permet d'évaluer les différentes branches données par un logarithme élargi.

Lemme 1.4.7. *Soit $\mathbf{z} \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V)$ et $i \in \mathbb{Z}$. Alors pour tout $j \equiv i[p-1]$ et que $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(j+1))^{\varphi=1} = 0$ on a*

$$\mathcal{A}_{\omega^i}^c(\text{Log}_{V,1-h,d}^{\varepsilon}(\mathbf{z}))(j) = \Gamma(h+j) \left(\text{pr}_0(\text{Tw}_{V,-j}^{\varepsilon}(\mathbf{z})) \cup \exp_{V^*(j+1)} \left(\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}(d[j]) \right) \right).$$

Démonstration. En utilisant l'équation (1.8) on a

$$\mathcal{A}_{\omega^i}^c(\text{Log}_{V,1-h,d}^{\varepsilon}(\mathbf{z}))(j) = \mathcal{A}_{\omega^0}^c(\text{Tw}_j \circ \text{Log}_{V,1-h,d}^{\varepsilon}(\mathbf{z}))(0).$$

En utilisant le Lemme 1.4.6 sur la torsion des logarithmes on a

$$\text{Tw}_j(\text{Log}_{V,1-h,d}^{\varepsilon}(\mathbf{z})) = \text{Log}_{V(-j),1-h-j,d[j]}^{\varepsilon}(\text{Tw}_{V,-j}^{\varepsilon}(\mathbf{z})).$$

On a donc

$$\mathcal{A}_{\omega^i}^c(\text{Log}_{V,1-h,d}^{\varepsilon}(\mathbf{z}))(j) = \left\langle \text{pr}_0(\text{Tw}_{V,-j}^{\varepsilon}(\mathbf{z})), \text{pr}_0 \left(\text{Exp}_{V^*(j+1),h+j}^{\varepsilon^{-1}}(\widetilde{d[j]}) \right) \right\rangle.$$

En utilisant le premier point du Théorème 1.4.3 on a alors

$$\text{pr}_0 \left(\text{Exp}_{V^*(j+1),h+j}^{\varepsilon^{-1}}(\widetilde{d[j]}) \right) = \Gamma(h+j) \exp_{V^*(j+1)} \left(\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}(d[j]) \right)$$

ce qui donne le résultat souhaité. \square

1.5 Exponentielle élargie pour les (φ, Γ) -modules

Dans cette section on établit un portrait de l'exponentielle élargie des (φ, Γ) -modules de rang 1 à coefficients dans une algèbre affinoïde A sur E . Cette construction est un cas particulier de la construction de Nakamura [Nak14] qui généralise l'approche de Berger aux (φ, Γ) -modules à coefficients dans A .

1.5.1. Soit \mathbb{D} un (φ, Γ) -module de rang fini au-dessus de \mathcal{R}_A . On note $C_{\psi}^{\bullet}(\mathbb{D})$ le complexe

$$\mathbb{D} \xrightarrow{\psi-1} \mathbb{D}$$

où les modules sont placés aux degrés 1 et 2. On note

$$H_{\text{Iw}}^*(\mathbb{D}) := H^*(C_\psi^\bullet(\mathbb{D})). \quad (1.11)$$

On note $\mathcal{H}_A(\Gamma) := \mathcal{H}_E(\Gamma) \widehat{\otimes}_E A$ où $\mathcal{H}_E(\Gamma)$ est défini en (1.4). Le [KPX14, Théorème 4.4.8] donne une seconde écriture de cette cohomologie

$$H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}) \simeq H^1(\mathbb{D} \widehat{\otimes}_A \mathcal{H}_A^\iota(\Gamma)) \quad (1.12)$$

où Γ agit diagonalement sur $\mathbb{D} \widehat{\otimes}_A \mathcal{H}_A^\iota(\Gamma)$ et φ et ψ agissent uniquement sur la composante \mathbb{D} . De la même manière que précédemment, pour tout morphisme continu $\mu : \Gamma \rightarrow A$ on peut projeter $\mathbb{D}_{\text{rig},A}^\dagger(\mathcal{H}_A^\iota(\Gamma))$ dans $\mathcal{R}_A(\mu^{-1})$ ce qui implique un morphisme de spécialisation sur les espaces cohomologiques

$$H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}) \rightarrow H^1(\mathbb{D}(\mu^{-1})). \quad (1.13)$$

Ce morphisme est compatible avec les morphismes de spécialisation $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}_\rho := \mathbb{D} \otimes_{A,\rho} E$ où $\rho : A \rightarrow E$ est un caractère continu. La cohomologie d'Iwasawa au-dessus d'un espace affinoïde A permet ainsi de pouvoir spécialiser à tout caractère $\mu : \Gamma \rightarrow A$ et $\rho : A \rightarrow E$.

En particulier, pour 2 morphismes ρ et μ comme précédemment on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}) & \xrightarrow{\mu} & H^1(\mathbb{D}(\mu^{-1})) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho \\ H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}_\rho) & \xrightarrow{\mu_\rho} & H^1(\mathbb{D}_\rho(\mu_\rho^{-1})) \end{array} \quad (1.14)$$

où $\mu_\rho : \Gamma \rightarrow E$ est le caractère continu $\rho \circ \mu$.

1.5.2. Soit V une représentation cristalline de $G_{\mathbb{Q}_p}$ à coefficients dans A . Alors la cohomologie d'Iwasawa $H_{\text{Iw}}^i(\mathbb{Q}_p, V)$ est liée à la cohomologie du complexe $C_\psi^\bullet(\mathbb{D}_{\text{rig},A}^\dagger(V))$. Le [KPX14, Corollaire 4.4.11] donne l'isomorphisme suivant

$$H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V) \otimes_{\Lambda_E} \mathcal{H}_E(\Gamma) = H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}_{\text{rig},A}^\dagger(V)).$$

Cet isomorphisme est un analogue de (1.10) dans le cas affinoïde.

1.5.3. Soit $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow A^\times$ un caractère continu. On considère le (φ, Γ) module $\mathcal{R}_A(\delta)$ de rang 1 au-dessus de A . On note $\xi(x) := \delta(p) \in A$. On suppose que les conditions suivantes sont réunies :

- $\delta|_{\mathbb{Z}_p^\times}(u) = u^m$ pour un entier $m \geq 1$.
- La fonction $x \mapsto \nu_p(\xi(x))$ est constante sur $\text{Spm}(A)$.

On dit alors que δ est cristalline et de pente constante. Le module cristallin associé $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_A(\delta))$ est un A -module libre de rang 1 engendré par $t^{-m} \otimes e_\delta$ tel que le Frobenius agisse comme multiplication par $p^{-m}\delta(p)$.

La cohomologie d'Iwasawa $H_{\text{Iw}}^1(\mathcal{R}_A(\delta))$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{R}_A(\delta)^{\psi=1}$. Soient $z \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_A(\delta)) \otimes_A \mathcal{E}_A^{\psi=0}$ et $h \geq m$. On montre que l'équation

$$(\varphi - 1)F = z - \frac{\partial^h z(0)}{m!} t^h$$

admet une solution F dans $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_A(\delta)) \otimes_A \mathcal{E}_A$ et on définit alors

$$\text{Exp}_{\mathcal{R}_A(\delta),h}^\varepsilon(z) = (-1)^h \frac{\log(\chi(\gamma))}{p} t^h \partial^h(F).$$

Comme dans le cas classique $A = E$ (voir [Ber08]) on a $\text{Exp}_{\mathcal{R}_A(\delta),h}(z) \in \mathcal{R}_A(\delta)^{\psi=0}$. On obtient un morphisme

$$\text{Exp}_{\mathcal{R}_A(\delta),h}^\varepsilon : \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_A(\delta)) \otimes_A \mathcal{E}_A^{\psi=0} \rightarrow H_{\text{Iw}}^1(\mathcal{R}_A(\delta)).$$

Soit $d \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_A(\delta))$. On note $\tilde{d} := d \otimes (1 + X)$.

Proposition 1.5.1. *Si $p^{-m}\delta(p) \neq 1$ alors pour tout $d \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{R}_A(\delta))$ on a l'égalité*

$$\text{pr}_0 \left(\text{Exp}_{\mathcal{R}_A(\delta),h}^\varepsilon(\tilde{d}) \right) = \Gamma(h) \frac{1 - p^{m-1}\delta^{-1}(p)}{1 - p^{-m}\delta(p)} \exp_{\mathcal{R}_A(\delta)}(d)$$

où pr_0 est la projection sur le corps de base, c'est-à-dire la spécialisation au caractère trivial, $\Gamma(h) := (h-1)!$ la fonction Γ évaluée en h et $\exp_{\mathcal{R}_A(\delta)}$ est l'exponentielle de Nakamura (voir Proposition 1.2.3).

1.5.4. Soit V une représentation p -adique à coefficients dans A . Soit $\mathbb{D} = \mathcal{R}_A(\delta)$ un (φ, Γ) -sous-module cristallin de rang 1 de $\mathbb{D}_{\text{rig},A}^\dagger(V)$ de pente constante. On note alors

$$\text{Exp}_{V,\mathbb{D},h}^\varepsilon : \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}) \otimes_A \mathcal{E}_A^{\psi=0} \rightarrow H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V)$$

la composition de $\text{Exp}_{\mathcal{R}_A(\delta),h}$ avec le morphisme naturel $H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}) \rightarrow H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V)$. L'indice ε permet de mettre l'accent sur la dépendance du choix d'un système compatible $\varepsilon = (\zeta_{p^n})_{n>0}$ de racine de l'unité p^n -ième. Ce système est nécessaire pour la définition du foncteur $\mathbb{D}_{\text{rig},A}^\dagger$.

Théorème 1.5.2. *i) Le morphisme $\text{Exp}_{V,\mathbb{D}}^\varepsilon$ est compatible avec les morphismes de changement de base.*

ii) Soit $\rho : A \rightarrow E^\times$ un caractère continu tel que $V_\rho := V \otimes_{A,\rho} E$ soit semi-stable. On note $E_\rho = A \otimes_{A,\rho} E$. Alors $\text{Exp}_{V_\rho,\mathbb{D}_\rho,h}^\varepsilon$ coïncide avec la restriction de l'exponentielle élargie de Perrin-Riou

$$\text{Exp}_{V_\rho,h}^\varepsilon : \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_\rho) \otimes_E \mathcal{E}_{E_\rho}^{\psi=0} \rightarrow H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V_\rho)$$

à $\mathbb{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}_\rho) \otimes_E \mathcal{E}_{E_\rho}^{\psi=0}$.

1.5.5. Soit \mathbb{D} un (φ, Γ) -module cristallin de rang 1. Grâce à [KPX14, Lemme 4.2.5] on sait que

$$(\mathbb{D}^*)^{\psi=0} \simeq \text{Hom}_{\mathcal{R}_A}(\mathbb{D}^{\psi=0}, \mathcal{R}_A)^\vee. \quad (1.15)$$

De plus, pour $x \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}) \simeq \mathbb{D}^{\psi=1}$ (respectivement $x \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}^*) \simeq (\mathbb{D}^*)^{\psi=1}$) on a $(\varphi-1)x \in \mathbb{D}^{\psi=0}$ (respectivement $(\varphi-1)x \in (\mathbb{D}^*)^{\psi=0}$). Il existe un unique accouplement $\mathcal{H}_A(\Gamma)$ -bilinéaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}) \times (H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}^*(\chi)))^\vee \rightarrow \mathcal{H}_A(\Gamma). \quad (1.16)$$

donné par $\langle x, y \rangle := \{(\varphi-1)x, (\varphi-1)y\}$ où $\{.,.\}$ est l'accouplement induit par (1.15) (voir [KPX14, Lemme 4.2.7]). On peut ainsi définir un logarithme élargi dans le cas des (φ, Γ) -modules

Définition 1.5.3. Soit \mathbb{D} un (φ, Γ) -module de rang 1 cristallin et de pente constante tel que l'unique poids de Hodge-Tate m vérifie $m \leq 0$. Soit $h \geq -m$ et $d \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}^*(\chi))$ et $h \geq 1 - m$. On définit le logarithme élargi comme le morphisme

$$\text{Log}_{\mathbb{D}, 1-h, d}^{\varepsilon} : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{H}_A(\Gamma)$$

par

$$\text{Log}_{\mathbb{D}, 1-h, d}^{\varepsilon}(x) = \left\langle x, \text{Exp}_{\mathbb{D}^*(\chi), h}^{\varepsilon^{-1}}(\tilde{d})^t \right\rangle.$$

1.6 Courbes modulaires et formes modulaires

1.6.1. Soit f une forme modulaire parabolique de poids k_0 , de niveau N_f et de caractère ε_f . La forme f admet un développement en série de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n, \text{ avec } q = e^{2i\pi z}$$

avec $a_n = O(n^{k_0/2})$ (voir de [Miy06, Corollaire 2.1.6]). Soit $\mathbb{Q}(f)$ le corps de nombres des coefficients de f . On fixe E une extension finie de \mathbb{Q}_p contenant $i_p(\mathbb{Q}(f))$ où $i_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$.

On note f^* la forme modulaire conjuguée de f . C'est la forme de poids k_0 , de niveau N_f et de caractère ε_f^{-1} définie par

$$f^*(z) = \overline{f(-\bar{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n q^n, \text{ avec } q = e^{2i\pi z} \quad (1.17)$$

où \bar{a} est le complexe conjugué de a où $i_{\infty} : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ est fixé.

On suppose que f soit une forme propre, c'est-à-dire un vecteur propre pour tous les opérateurs de Hecke T_n agissant sur les formes modulaires pour $n \in \mathbb{N}$.

Soit l un nombre premier. On note $E_l(f, X)$ le polynôme de Hecke de f en l

$$E_l(f, X) = X^2 - a_l X + \varepsilon_f(l) l^{k_0-1}.$$

On note $\alpha_l(f)$ et $\sigma_l(f)$ les deux racines de ce polynôme. Si $\alpha_l(f) \neq 0$ on définit aussi $\beta_l(f)$ comme

$$\beta_l(f) := \frac{\varepsilon_f^0(l) l^{k_0-1}}{\alpha_l(f)} \quad (1.18)$$

où ε_f^0 est le caractère primitif associé à ε_f . On sépare alors en deux cas :

- si $l \nmid N_f$ on alors supposer que $\nu_l(\alpha_l(f)) \leq \nu_l(\sigma_l(f))$ où ν_l est la valuation l -adique. Par les relations coefficients-racines on a l'égalité $\sigma_l(f) = \beta_l(f)$. Par des résultats de Deligne, voir [Del71] et [Del74], le module des racines de Hecke vaut

$$|\alpha_l(f)| = |\sigma_l(f)| = l^{\frac{k_0-1}{2}}. \quad (1.19)$$

Si $\nu_l(a_l) = 0$, on dit que f est ordinaire en l , dans ce cas $\nu_l(\alpha_l(f)) = 0$ et $\nu_l(\sigma_l(f)) = k_0 - 1$. Si on note $(\alpha_l(f^*), \sigma_l(f^*))$ les deux racines de Hecke de f^* en l alors ce sont les racines de $X^2 - \overline{a_l}X + \varepsilon_f(l)l^{k_0-1}$. On sait que les deux racines de ce polynôme sont $\{\overline{\alpha_l(f)}, \overline{\sigma_l(f)}\}$. En utilisant la valeur du module (1.19) on a

$$\{\alpha_l(f^*), \sigma_l(f^*)\} = \left\{ \frac{l^{k_0-1}}{\alpha_l(f)}, \frac{l^{k_0-1}}{\sigma_l(f)} \right\}.$$

Lorsque $\nu_l(\alpha_p(f)) < \nu_l(\sigma_p(f))$ l'ordre choisi sur les racines de Hecke implique

$$\alpha_l(f^*) = \frac{l^{k_0-1}}{\sigma_l(f)}, \quad \sigma_l(f^*) = \frac{l^{k_0-1}}{\alpha_l(f)}. \quad (1.20)$$

Si $\nu_l(\alpha_l(f)) = \nu_l(\sigma_l(f))$ il n'y a pas d'ordre choisi sur les racines et on les choisit de manière à ce que l'équation précédente soit satisfaite.

- si $l \mid N_f$ alors le couple $(\alpha_l(f), \sigma_l(f))$ vaut $(a_l, 0)$.

Si $l \nmid N_f$ on définit la l -stabilisation f_{α_l} de f par rapport à $\alpha_l(f)$ comme

$$f_{\alpha_l}(q) = f(q) - \sigma_l(f) f(q^l).$$

C'est une forme modulaire parabolique de poids k_0 , de niveau lN_f et de caractère ε_f . Alors

$$\alpha_l(f_{\alpha_l}) = \alpha_l(f), \quad \beta_l(f_{\alpha_l}) = \sigma_l(f).$$

1.6.2. On définit w_{N_f} l'opérateur d'Atkin-Lehner sur les formes modulaires de niveau k_0 par

$$w_{N_f} f(z) := z^{-k_0} f\left(\frac{1}{-N_f z}\right). \quad (1.21)$$

On dit que f est une forme primitive si elle est parabolique, normalisée, propre et nouvelle. Si f est primitive alors il existe une constante notée $\lambda_{N_f}(f)$ telle que

$$w_{N_f} f = \lambda_{N_f}(f) f^*$$

([Miy06, Théorème 4.6.15]). On appelle $\lambda_{N_f}(f)$ la pseudo valeur propre de Atkin-Lehner associée à f .

1.6.3. On rappelle la définition de certaines courbes modulaires (voir [Kat04]). Soient des entiers $M, N \geq 1$ tels que $M+N \geq 5$ et $p \geq 3$ un nombre premier. On définit $Y(M, N)$ le $\mathbb{Z}[1/MN]$ -schéma représentant le foncteur

$$S \mapsto \{\text{Classes d'isomorphismes } (E, e_1, e_2)\}$$

où S est un $\mathbb{Z}[1/MN]$ -schéma, E/S une courbe elliptique et $e_1, e_2 \in E(S)$ tels que e_1 soit d'ordre M , e_2 d'ordre N et (e_1, e_2) génère un groupe d'ordre MN . Pour $N \geq 4$ on définit $Y_1(N) := Y(1, N)$. Afin d'introduire les opérateurs de Hecke il faut définir les courbes modulaires $Y(M, N(A))$ et $Y(M(A), N)$. Ce sont des $\mathbb{Z}[1/AMN]$ -schémas. $Y(M, N(A))$ représente le foncteur

$$S \mapsto \{\text{Classes d'isomorphismes } (E, e_1, e_2, C)\}$$

où le triplet $(E, e_1, e_2) \in Y(M, N)(S)$ possède les mêmes propriétés que précédemment et C est un sous-groupe cyclique d'ordre AN tel que C contienne e_2 et que l'application $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z} \times C \rightarrow E, (x, y) \mapsto xe_1 + y$ soit injective. On dit alors que C est complémentaire à e_1 . De la même manière, $Y(M(A), N)$ classe les classes d'isomorphismes de (E, e_1, e_2, C) avec C un sous-groupe d'ordre AM contenant e_1 et complémentaire à e_2 .

Toutes les courbes modulaires Y considérées précédemment sont équipées d'une courbe elliptique universelle $\pi : \mathcal{E} \rightarrow Y$. Pour $r \geq 1$ on définit

$$\mathcal{H}_r := R^1\pi_*(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}(1))$$

qui est un $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ -faisceau lisse, étale et de rang 2 sur $Y[1/p]$. On note aussi

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p} := \varprojlim_r \mathcal{H}_r, \quad \mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p} := \mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

qui sont des \mathbb{Z}_p et \mathbb{Q}_p faisceaux respectivement.

Pour H un groupe abélien et $k \geq 0$, on définit le module des tenseurs symétriques $\text{TSym}^k H$ à valeurs dans H comme étant les \mathfrak{S}_k invariants du produit tensoriel $H^{\otimes k}$ (voir Paragraphe 2.2 de [Kin15]). Ces modules forment une algèbre graduée

$$\text{TSym} H = \bigoplus_{k \geq 0} \text{TSym}^k H$$

et pour tout $h \in H$ et $k \in \mathbb{N}$ on note $h^{[k]} = h^{\otimes k} \in \text{TSym}^k H$. L'addition et la multiplications sont données par les formules

$$\begin{aligned} (h + g)^{[k]} &= \sum_{j=0}^k h^{[j]} g^{[k-j]}, \\ h^{[m]} h^{[n]} &= \frac{(m+n)!}{m!n!} h^{[m+n]}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Pour X un $\mathbb{Z}[1/p]$ -schéma régulier et \mathcal{F} un faisceau étale localement constant de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ -modules sur X cela permet de définir les faisceaux étales $\text{TSym}^k \mathcal{F}$ pour tout $k \geq 0$. On définit ainsi les faisceaux $\text{TSym}^k \mathcal{H}_r$ pour $r \geq 1$, $\text{TSym}^k \mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}$ et $\text{TSym}^k \mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p}$ pour tout $k \geq 0$.

On peut construire plusieurs morphismes entre les différentes courbes modulaires définies précédemment. Soient A, M, N des entiers tels que $M + N \geq 5$. On note pr_1 et pr_2 les morphismes de $Y(M, NA) \rightarrow Y(M, N)$ définis par

$$\text{pr}_1(E, e_1, e_2) = (E, e_1, Ae_2), \quad \text{pr}_2(E, e_1, e_2) = (E/\langle Ne_2 \rangle, e_1 \bmod Ne_2, e_2 \bmod Ne_2). \tag{1.23}$$

On a des morphismes de projection

$$\text{pr} : \begin{cases} Y(M, N(A)) & \rightarrow Y(M, N) \\ (E, e_1, e_2, C) & \mapsto (E, e_1, e_2) \end{cases} \quad \widehat{\text{pr}} : \begin{cases} Y(M(A), N) & \rightarrow Y(M, N) \\ (E, e_1, e_2, C) & \mapsto (E, e_1, e_2) \end{cases}. \tag{1.24}$$

On a un isomorphisme entre les deux courbes $Y(M, N(A))$ et $Y(M(A), N)$ défini par

$$\varphi_A : \begin{cases} Y(M, N(A)) & \rightarrow Y(M(A), N) \\ (E, e_1, e_2, C) & \mapsto (E', e'_1, e'_2, C') \end{cases}$$

où $E' := E/NC$, e'_1 l'image de e_1 et e'_2 l'image de $[A]^{-1}(e_2) \cap C$ dans E' (réduite à un point) et C' est l'image de $[A]^{-1}\mathbb{Z}e_1$ dans E .

Soient \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 les courbes elliptiques universelles au-dessus de $Y(M, N(A))$ et $Y(M(A), N)$ respectivement, il existe une isogénie canonique

$$\lambda : \mathcal{E}_1 \rightarrow \varphi_A^*(\mathcal{E}_2).$$

Soit $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_r)_{r \geq 1}$ un pro-système de faisceaux étales sur un schéma S . On définit la cohomologie étale continue dans le sens de Jannsen [Jan88] : Pour tout i on note $H_{\text{ét}}^i(S, \mathcal{F})$ le i -ième rang du foncteur dérivé de

$$\mathcal{F} \mapsto \varprojlim_r H_{\text{ét}}^0(S, \mathcal{F}_r).$$

Définition 1.6.1. *Pour l un nombre premier, et pour tout i, j, k avec $k, i \geq 0$ on définit l'opérateur de Hecke T'_l si $l \nmid MN$ (ou U'_l sinon) agissant sur $H_{\text{ét}}^i(Y(M, N), \text{TSym}^k \mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}(j))$ comme la composition*

$$T'_l = (\text{pr})_* \circ (\lambda)^* \circ (\varphi_l)^* \circ (\widehat{\text{pr}})^*.$$

1.6.4. On garde les notations du Paragraphe 1.6.1, en particulier p est un nombre premier fixé, f est une forme modulaire de poids k_0 et niveau N_f . On note E une extension finie de \mathbb{Q}_p contenant les coefficients de la q -extension de f . On note S l'ensemble des nombres premiers divisant pN_f . Soit $\mathbb{Q}^{(S)}$ l'extension maximale de \mathbb{Q} non-ramifiée hors de $S \cup \{\infty\}$. On note $G_S := \text{Gal}(\mathbb{Q}^{(S)}/\mathbb{Q})$. Dans [Del71], Deligne a associé à toute forme parabolique une représentation V_f p -adique de $G_S := \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}^{(S)}/\mathbb{Q})$. Pour nous, il sera souvent plus commode de travailler avec la représentation duale $V_f^* := \text{Hom}_E(V_f, E)$ dont on rappelle la définition.

Définition 1.6.2. *Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \mid N_f$. On note V_f^* le plus grand quotient de*

$$H_{\text{ét}}^1(Y_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \text{TSym}^{k_0-2}(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p})(1)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$$

sur lequel les opérateurs de Hecke T'_l agissent comme a_l et on note π_f la projection sur le quotient.

Alors V_f^* est un E -espace vectoriel de dimension 2 au-dessus de E et possède une action galoisienne de $G_{\mathbb{Q}, S} := \text{Gal}(\mathbb{Q}^{(S)}/\mathbb{Q})$ induite par l'action du groupe de galois sur la courbe modulaire $Y_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ tel que $N_f \mid N$ le morphisme $(\text{pr}_1)_*$ défini en (1.23) induit un morphisme

$$(\text{pr}_1)_* : H_{\text{ét}}^1(Y_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \text{TSym}^{k_0-2}(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p})(1)) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(Y_1(N_f)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \text{TSym}^{k_0-2}(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p})(1)).$$

Ce morphisme induit un isomorphisme des (f) -espaces propres. En particulier la Définition 1.6.2 est indépendante du choix de N . Alors pour tout $N \geq 1$ tel que $N_f \mid N$ on note aussi π_f le morphisme de projection

$$\pi_f : H_{\text{ét}}^1(Y_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \text{TSym}^{k_0-2}(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p})(1)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \rightarrow V_f^*. \quad (1.25)$$

Pour l un nombre premier ne divisant pas $N_f p$, la restriction de la représentation de Deligne au groupe de décomposition en l est non-ramifiée. De plus, (voir [Del71])

$$\det(1 - \text{Frob}_l X \mid V_f) = 1 - a_l X + \varepsilon(l) l^{k_0-1} X^2.$$

Lorsque $l \mid N_f$ et $l \neq p$ alors on a (voir [Car86], [Lan73])

$$\det(1 - \text{Frob}_l X \mid V_f^{I_l}) = 1 - a_l X$$

où I_l est le groupe d'inertie en l . On a aussi

$$\det(1 - \varphi X \mid \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_f)) = 1 - a_p X + \varepsilon(p) p^{k_0-1} X^2 \quad (1.26)$$

(voir [Sai97], [Fal88] et [Tsu99]). En particulier si $p \nmid N_f$ la restriction au groupe de décomposition en p est cristalline.

Si $p \nmid N_f$, il est possible grâce aux pullback des morphismes de projection sur les courbes modulaires définis en (1.23) de définir le morphisme

$$(\text{Pr}^\alpha)_* : H_{\text{ét}}^1(Y_1(pN_f)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \text{TSym}^{k_0-2}(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p})(1)) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(Y_1(N_f)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \text{TSym}^{k_0-2}(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p})(1))$$

par

$$(\text{Pr}^\alpha)_* := (\text{pr}_1)_* - \frac{\beta_p(f)}{p^{k_0-1}} (\text{pr}_2)_*. \quad (1.27)$$

La projection π_f de $H_{\text{ét}}^1(Y_1(N_f)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \text{TSym}^{k_0-2}(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p})(1))$ sur la représentation de V_f^* se factorise par $V_{f_\alpha}^*$ cela donne un isomorphisme de représentations qui sera noté de la même manière

$$(\text{Pr}^\alpha)_* : V_{f_\alpha}^* \simeq V_f^*. \quad (1.28)$$

1.7 Interpolation p -adique des formes modulaires

1.7.1. Soient $p \geq 3$ un nombre premier et E une extension finie de \mathbb{Q}_p . On note

$$A = E \left\{ \left\{ \frac{w_1}{p^r}, \dots, \frac{w_d}{p^r} \right\} \right\}$$

l'algèbre de Tate des séries formelles $F(w_1, \dots, w_d)$ qui convergent sur le disque ouvert

$$B(0, r) := \{(w_1, \dots, w_d) \mid \|w_i\|_p \leq 1/p^r, \quad 1 \leq i \leq d\}.$$

Soit $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_p^d$. On définit le disque fermé p -adique

$$D(k, 1/p^{r-1}) := k + p^{r-1} \mathbb{Z}_p^d. \quad (1.29)$$

Pour tout $F \in A$ on définit la fonction analytique p -adique $\mathcal{A}^{\text{wt}}(F)$ définie sur le disque $D(k, 1/p^{r-1})$ et à valeurs dans E par

$$\mathcal{A}^{\text{wt}}(F)(\kappa_1, \dots, \kappa_d) = F\left((1+p)^{\kappa_1-k_1} - 1, \dots, (1+p)^{\kappa_d-k_d} - 1\right).$$

La valeur $\mathcal{A}^{\text{wt}}(F)(\kappa_1, \dots, \kappa_d)$ est aussi appelée spécialisation de F en $(\kappa_1, \dots, \kappa_d)$. On rappelle la notation

$$\mathcal{H}_A(\Gamma) := A \widehat{\otimes}_E \mathcal{H}_E(\Gamma).$$

Pour tout élément de $F \in \mathcal{H}_A(\Gamma)$ et tout $i \in \mathbb{Z}$ on définit la fonction analytique $\mathcal{A}_{\omega^i}(F)$ sur $D(k, 1/p^{r-1}) \times \mathbb{Z}_p$ à valeurs dans E par

$$\mathcal{A}_{\omega^i}(F)(\kappa_1, \dots, \kappa_d, s) = \mathcal{A}^{\text{wt}}(F)(\kappa_1, \dots, \kappa_d) \otimes \mathcal{A}_{\omega^i}^c(F)(s)$$

pour tout $(\kappa_1, \dots, \kappa_d) \in D(k, 1/p^{r-1})$, $s \in \mathbb{Z}_p$.

1.7.2. On s'intéresse au cas où $d = 1$. Soient $A = E \left\{ \left\{ \frac{w}{p^r} \right\} \right\}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On définit le caractère χ par

$$\chi : \begin{cases} \Gamma & \rightarrow A^\times \\ \gamma & \mapsto \chi^k(\gamma) \exp\left(\log_p(1+w) \frac{\log(\langle \chi(\gamma) \rangle)}{\log(1+p)}\right). \end{cases} \quad (1.30)$$

On a alors l'égalité des fonctions sur $D(k, 1/p^{r-1})$

$$\mathcal{A}^{\text{wt}}(\chi(\gamma))(\kappa) = \chi^k(\gamma) \langle \chi(\gamma) \rangle^{\kappa-k}, \quad \kappa \in D(k, 1/p^{r-1}).$$

1.7.3. Soit $f \in S_{k_0}(N_f, \varepsilon_f)$ une forme modulaire primitive. Pour le reste de cette section on suppose que p ne divise pas N_f .

Définition 1.7.1. On dit que f est p -régulière si les deux conditions suivantes sont réunies :

- les deux racines de Hecke en p , $\alpha_p(f)$ et $\sigma_p(f)$ sont distinctes.
- si $\nu_p(\alpha_p(f)) = k_0 - 1$ alors la représentation de galois V_f restreinte au groupe de décomposition en p n'est pas la somme directe de deux caractères (condition dite de non-criticalité).

La première condition est supposée être vraie pour toute forme modulaire. Cette conjecture est prouvée dans le cadre des formes modulaires de poids 2.

Proposition 1.7.2. On suppose que f est p -régulière. Il existe une extension finie E de \mathbb{Q}_p , un entier $r_f \geq 1$ et une unique q -série

$$\mathbf{f} := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n q^n, \quad \mathbf{a}_n \in A_{\mathbf{f}}$$

où $A_{\mathbf{f}} := E \left\{ \left\{ \frac{w}{p^{r_f}} \right\} \right\}$ telle que :

i) Pour tout entier $k \geq 2$ du disque $D((k_0, 1/p^{r_f-1}))$ la série

$$\mathbf{f}_k := \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}^{\text{wt}}(\mathbf{a}_n)(k) q^n \in E[[q]]$$

soit la q -extension d'une forme propre parabolique de poids k , de niveau pN_f et de caractère $\omega^{k-k_0}\varepsilon_f$.

ii) On ait l'égalité $\mathbf{f}_{k_0} = f_\alpha$.

Démonstration. Les deux premiers points sont des conséquences de [CM98] et [Col97] voir [Col97, Corolaire B5.7.1] par exemple. La preuve de l'existence est rappelée dans le [LZ16, Théorème 4.6.4]. \square

On dit que \mathbf{f} est l'unique famille de Coleman passant par f et pour tout $k \geq 2$ dans $D(k_0, 1/p^{r_f-1})$ on appelle \mathbf{f}_k la spécialisation de \mathbf{f} en k .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n, N_f) = 1$, les relations sur les racines de Hecke impliquent

$$\varepsilon_f(n)\overline{a_n} = a_n$$

où a_n est le n -ième coefficient de la forme f . On note \mathbf{f}^* la famille de Coleman associée à f^* . Quitte à réduire les rayons on peut supposer que les familles de Coleman \mathbf{f} et \mathbf{f}^* sont définies sur le même affinoïde (c'est-à-dire $r_f = r_{f^*}$) de manière à avoir $A_{\mathbf{f}^*} = A_{\mathbf{f}}$.

1.7.4. Pour tout $k \in D(k_0, 1/p^{r_f-1})$ on note ϖ_k le morphisme

$$\varpi_k : \begin{cases} A & \rightarrow E \\ F & \mapsto \mathcal{A}^{\text{wt}}(F)(k). \end{cases} \quad (1.31)$$

que l'on appelle spécialisation en k . Il existe une représentation au-dessus de l'affinoïde $A_{\mathbf{f}}$ interpolant l'ensemble des représentations de Deligne des p -stabilisations \mathbf{f}_k .

Proposition 1.7.3. *Quitte à restreindre le disque $U_f := D(k_0, 1/p^{r_f-1})$, il existe un $A_{\mathbf{f}}$ -module $V_{\mathbf{f}}$, libre de rang 2 muni d'une action continue de $G_{\mathbb{Q}, S}$, où S est l'ensemble des nombres premiers divisant pN_f , tel que pour tout $k \in U_f \cap \mathbb{Z}_{\geq 2}$ la spécialisation en k induise un isomorphisme*

$$\varpi_k : V_{\mathbf{f}} \xrightarrow{\sim} V_{\mathbf{f}_k}.$$

Démonstration. Cette représentation peut être construite grâce à la théorie des pseudos-caractères comme expliqué dans [CM98]. Bien que ce texte ne présente que le cas de $N = 1$ la technique exposée peut être généralisée à un N quelconque. Une seconde construction de cette représentation a été donnée récemment dans [AIS15]. \square

On définit la représentation duale en famille par

$$V_{\mathbf{f}}^* := \text{Hom}_{A_{\mathbf{f}}}(V_{\mathbf{f}}, A_{\mathbf{f}}).$$

C'est un $A_{\mathbf{f}}$ -module libre de rang 2 muni tel que pour tout $k \in U_f \cap \mathbb{Z}_{\geq 2}$ on ait

$$\varpi_k : V_{\mathbf{f}}^* \xrightarrow{\sim} V_{\mathbf{f}_k}^*.$$

On définit

$$\mathbb{D}_{\mathbf{f}} := \mathbb{D}_{\text{rig}, A_{\mathbf{f}}}^{\dagger}(V_{\mathbf{f}})$$

alors

$$\mathbb{D}_{\mathbf{f}}^* := \mathbb{D}_{\text{rig}, A_{\mathbf{f}}}^{\dagger}(V_{\mathbf{f}}^*).$$

Théorème 1.7.4. *Quitte à réduire le rayon p^{-r_f} , il existe une filtration de (φ, Γ) -modules au-dessus de \mathcal{R}_{A_f}*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^+ \mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{D}_f \rightarrow \mathcal{F}^- \mathbb{D}_f \rightarrow 0$$

où $\mathcal{F}^+ \mathbb{D}_f$ et $\mathcal{F}^- \mathbb{D}_f$ sont libres de rang 1 au-dessus de \mathcal{R}_{A_f} . De plus, $\mathcal{F}^+ \mathbb{D}_f \simeq \mathcal{R}_{A_f}(\delta_f^+)$ et $\mathcal{F}^- \mathbb{D}_f \simeq \mathcal{R}_{A_f}(\delta_f^-)$ où les caractères δ_f^+ et δ_f^- de \mathbb{Q}_p^\times dans A_f^\times sont définis par

$$\begin{aligned} \delta_f^+|_{\mathbb{Z}_p^\times} &= 1, & \delta_f^+(p) &= \alpha_p(\mathbf{f}), \\ \delta_f^-|_{\mathbb{Z}_p^\times} &= \chi \mathcal{X}^{-1}, & \delta_f^-(p) &= \frac{1}{\alpha_p(\mathbf{f}^*)} \end{aligned}$$

où χ est défini en (1.30).

Démonstration. C'est une conséquence de [Liu15, Théorème 0.3.4]. \square

On pourra identifier les espaces $\mathcal{F}^\pm \mathbb{D}_f$ avec les espaces \mathcal{R}_{A_f} tordus par les caractères adaptés. Pour toute spécialisation en k le poids de Hodge-Tate de la sous-représentation $\mathcal{F}^+ \mathbb{D}_{\mathbf{f}_k}$ est toujours égal à 0 alors que le poids du quotient $\mathcal{F}^- \mathbb{D}_{\mathbf{f}_k}$ varie et vaut $1 - k$.

De plus, cette filtration induit une filtration sur l'espace dual \mathbb{D}_f^*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^+ \mathbb{D}_f^* \rightarrow \mathbb{D}_f^* \rightarrow \mathcal{F}^- \mathbb{D}_f^* \rightarrow 0. \quad (1.32)$$

Grâce au Théorème 1.7.4 on a les identifications suivantes

$$\mathcal{F}^+ \mathbb{D}_f^* \simeq \mathcal{R}_{A_f}((\delta_f^-)^{-1}), \quad \mathcal{F}^- \mathbb{D}_f^* \simeq \mathcal{R}_{A_f}((\delta_f^+)^{-1}).$$

Proposition 1.7.5. *Soit $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ tel que $k \in D(k_0, 1/p^{r_f-1})$ et $k \equiv k_0[p-1]$. Si $k > 2$. Alors, \mathbf{f}_k est la p -stabilisation d'une forme primitive $\mathbf{f}_k^0 \in S_k(N_f, \varepsilon_f)$.*

Démonstration. Soit un entier k vérifiant $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ tel que $k \in D(k_0, 1/p^{r_f-1})$ et $k \equiv k_0[p-1]$. Les deux modules $\mathcal{F}^\pm \mathbb{D}_{\mathbf{f}_k}$ sont cristallins donc le module $\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k}$ l'est aussi. Par définition cela revient à dire que la représentation $V_{\mathbf{f}_k}$ est aussi cristalline. Cela n'est vrai que si la forme modulaire \mathbf{f}_k de niveau pN_f est une forme vieille obtenue à partir d'une forme nouvelle de niveau premier à p . La propriété en découle. \square

On note I^f les entiers plus grands que 2 congrus à k_0 modulo $(p-1)p^{r_f-1}$

$$I^f := \{k \in \mathbb{Z}^{\geq 2} \mid k \equiv k_0 \pmod{(p-1)p^{r_f-1}}\}.$$

On appelle les éléments de I^f les poids classiques.

Pour \mathbf{f} une famille de Coleman on note $\alpha_p(\mathbf{f}) := \mathbf{a}_p \in A_f$ le p -ième coefficient de la q -extension de \mathbf{f} . Alors, pour tout poids classique $k \in I^f$ on a l'égalité

$$\mathcal{A}^{\text{wt}}(\alpha_p(\mathbf{f}))(k) = \alpha_p(\mathbf{f}_k) = \alpha_p(\mathbf{f}_k^0).$$

Par continuité, quitte à réduire le rayon p^{-r_f} il est possible de supposer que la valuation p -adique de $\alpha_p(\mathbf{f}_k)$ est constant sur U_f . Cela implique, entre autres, que $\alpha_p(\mathbf{f}) \in A_f^\times$.

Pour \mathbf{f}^* la famille de Coleman associée à la forme conjuguée f^* on a $I^{f^*} = I^f$. De plus, en conséquence de [GS93, Proposition 2.9] on a pour tout $k \in I^f$ la relation suivante

$$(\mathbf{f}^*)_k^0 = (\mathbf{f}_k^0)^*.$$

On note cette forme $(\mathbf{f}^*)_k^0 = \mathbf{f}_k^{0,*}$. On remarque cependant que $(\mathbf{f}^*)_k \neq (\mathbf{f}_k)^*$.

1.7.5. Il est intéressant de se demander si la pseudo valeur propre de Atkin-Lehner admet une interpolation p -adique.

Proposition 1.7.6. *Il existe un élément $\lambda_{N_f}(\mathbf{f}) \in A_{\mathbf{f}}$ tel que pour tout poids classique $k \in I^f$ on ait*

$$\mathcal{A}^{wt}(\lambda_{N_f}(\mathbf{f}))(k) = \lambda_{N_f}(\mathbf{f}_k^0)$$

où $\lambda_{N_f}(\mathbf{f}_k^0)$ est la pseudo valeur propre de Atkin-Lehner (voir (1.21)) de la forme modulaire primitive \mathbf{f}_k^0 .

Démonstration. Voir la discussion suivant la proposition 10.1.2 de [KLZ17]. \square

1.7.6. On suppose que $p \nmid N_f$, alors on rappelle que la représentation V_f est cristalline, ou de manière équivalente que $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_f)$ est de dimension 2. Grâce à l'équation (1.26) on remarque que les deux valeurs propres du Frobenius sont $\alpha_p(f)$ et $\beta_p(f)$ les racines de Hecke de f en p . Comme défini dans la section 3.8 de [Kat04] on associe à f la différentielle

$$(2i\pi)^{k_0-1} f(\tau) (dz)^{k_0-2} d\tau$$

et cela permet de définir le vecteur canonique (voir [Kat04, section 11.3])

$$\omega_f \in \text{Fil}^{k_0-1} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_f).$$

Par dimension cet élément est une base de $\text{Fil}^i \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_f)$ pour $1 \geq i \geq k_0 - 1$. Le vecteur ω_f défini dans [KLZ15] n'est pas le même que celui qu'on considère ici, le vecteur utilisé est sa renormalisation par la somme de Gauss $G(\varepsilon_f^{-1})$ et est noté w'_f dans [KLZ15]. Cette normalisation sera importante pour la section 3.5. On définit η_f l'unique vecteur propre associé à $\alpha_p(f)$ tel que

$$[\eta_f, \omega_{f^*}] = 1$$

où

$$[\cdot, \cdot] : \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_f) \times \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_{f^*}) \rightarrow E(k_0 - 1)$$

est l'accouplement induit par l'identification $V_{f^*}(k_0 - 1) \simeq V_f^*$. On définit aussi ω_f^β l'unique vecteur propre associé à $\beta_p(f)$ tel que ω_f et ω_f^β aient la même projection modulo η_f .

On définit

$$(\text{Pr}^\alpha)^* : V_f \rightarrow V_{f_\alpha} \tag{1.33}$$

le dual de l'isomorphisme $(\text{Pr}^\alpha)_* : V_{f_\alpha}^* \rightarrow V_f^*$ (1.28) pour l'accouplement classique. Cela induit un isomorphisme sur les modules cristallins que l'on note de la même manière

$$(\text{Pr}^\alpha)^* : \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_{f_\alpha}) \simeq \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_f).$$

En particulier la représentation V_{f_α} est aussi cristalline et on définit les éléments $\omega_{f_\alpha}, \eta_{f_\alpha}$ et $\omega_{f_\alpha}^\beta$ comme les uniques vecteurs de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_{f_\alpha})$ tels que

$$(\text{Pr}^\alpha)^*(\omega_{f_\alpha}) = \omega_f, \quad (\text{Pr}^\alpha)^*(\eta_{f_\alpha}) = \eta_f, \quad (\text{Pr}^\alpha)^*(\omega_{f_\alpha}^\beta) = \omega_f^\beta.$$

Le Théorème 1.7.4 induit une filtration sur les modules cristallins $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_{\mathbf{f}_k})$ des spécialisations de \mathbf{f} en tout poids classique $k \in I^f$. On note cette filtration par

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^+ \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_{\mathbf{f}_k}) \rightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_{\mathbf{f}_k}) \rightarrow \mathcal{F}^- \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_{\mathbf{f}_k}) \rightarrow 0.$$

Grâce à l'écriture explicite de cette filtration on remarque que

$$\mathcal{F}^+ \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_{\mathbf{f}_k}) = (\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_{\mathbf{f}_k}))^{\varphi=\alpha_p(f)}.$$

En particulier $\eta_{\mathbf{f}_k} \in \mathcal{F}^+ \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_{\mathbf{f}_k})$.

Théorème 1.7.7. [LZ16, Théorème 6.4.1] *Quitte à réduire le rayon p^{-r_f} , il existe un unique vecteur*

$$\xi_{\mathbf{f}} \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^- \mathbb{D}_{\mathbf{f}}(\mathcal{X}\mathcal{X}^{-1}))$$

tel que pour tout point classique $k \in I^f$ la spécialisation de $\xi_{\mathbf{f}}$ en k coïncide avec

$$\overline{\omega_{\mathbf{f}_k}} [k-1] \in \mathcal{F}^- \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_{\mathbf{f}_k}(k-1))$$

où $\overline{\omega_{\mathbf{f}_k}}$ est la projection de l'élément canonique $\omega_{\mathbf{f}_k}$ de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_{\mathbf{f}_k})$ sur $\mathcal{F}^- \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_{\mathbf{f}_k})$.

Théorème 1.7.8. [LZ16, Corollaire 6.4.3] *Quitte à réduire le rayon p^{-r_f} , il existe un unique vecteur*

$$\eta_{\mathbf{f}} \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^+ \mathbb{D}_{\mathbf{f}})$$

tel que pour tout poids classique $k \in I^f$ la spécialisation de $\eta_{\mathbf{f}}$ en k coïncide avec

$$\frac{1}{\lambda_{N_f}(\mathbf{f}_k^0) \mathcal{E}(\mathbf{f}_k)} \eta_{\mathbf{f}_k} \in \mathcal{F}^+ \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_{\mathbf{f}_k})$$

où λ_{N_f} est la pseudo valeur propre de Atkin-Lehner et \mathcal{E} est défini par

$$\mathcal{E}(\mathbf{f}_k) = \left(1 - \frac{\beta_p(\mathbf{f}_k)}{p\alpha_p(\mathbf{f}_k)}\right) \left(1 - \frac{\beta_p(\mathbf{f}_k)}{\alpha_p(\mathbf{f}_k)}\right).$$

Ces éléments sont légèrement différents que ceux utilisés dans [LZ16], ils sont renormalisés afin d'être définis dans les espaces cristallins annoncés et non leurs extensions par $\mathbb{Q}_p[\mu_N]$.

Chapitre 2

Définition et interprétation de l'invariant \mathcal{L}

Ce chapitre a pour but de définir l'invariant \mathcal{L} dans deux situations duales l'une de l'autre. Dans un premier temps, on respecte fidèlement le raisonnement de Benois dans [Ben14a] afin de définir l'invariant \mathcal{L} dans le cas des représentations V de poids motivique plus petit que -2 . Dans une seconde section, on étend cette construction aux représentations de poids positif. Dans la troisième section on prouve que ces deux constructions sont liées par la dualité. Enfin, dans une dernière section, on développe l'interprétation de l'invariant \mathcal{L} en tant que dérivée de l'exponentielle.

2.1 L'invariant \mathcal{L} d'une représentation de poids -2

Soit p un nombre premier et S un ensemble fini de nombres premiers de \mathbb{Q} contenant p . On fixe E une extension finie de \mathbb{Q}_p . Soit V une représentation E -adique de G_S , c'est-à-dire un E -espace vectoriel de dimension finie avec une action linéaire continue de $G_S := \text{Gal}(\mathbb{Q}^{(S)}/\mathbb{Q})$. On note $H_S^*(\mathbb{Q}, V)$ la cohomologie continue de G_S à coefficients dans V . On suppose que V est pseudo-géométrique, c'est-à-dire que la restriction de V au groupe de décomposition en p est une représentation de de Rham. Pour tous les nombres premiers $l \neq p$ Greenberg [Gre94] définit un sous-groupe $H_f^1(\mathbb{Q}_l, V)$ de $H^1(\mathbb{Q}_l, V)$ que l'on appelle groupe de cohomologie finie. Pour le groupe de décomposition en p la définition du sous groupe $H_f^1(\mathbb{Q}_p, V)$ de $H^1(\mathbb{Q}_p, V)$ est proposée par Bloch et Kato [BK90]. On rappelle ces définitions

$$H_f^1(\mathbb{Q}_l, V) := \begin{cases} \ker(H^1(\mathbb{Q}_l, V) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}_l^{\text{ur}}, V)) & \text{si } l \neq p \\ \ker(H^1(\mathbb{Q}_p, V) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, V \otimes \mathbb{B}_{\text{cris}})) & \text{si } l = p \end{cases}$$

où \mathbb{Q}_l^{ur} est l'extension maximale non-ramifiée de \mathbb{Q}_l et \mathbb{B}_{cris} est l'anneau des périodes cristallin défini dans [Fon94a]. On définit le groupe de Selmer de V par

$$H_f^1(\mathbb{Q}, V) := \ker \left(H_S^1(\mathbb{Q}, V) \rightarrow \bigoplus_{l \in S} \frac{H^1(\mathbb{Q}_l, V)}{H_f^1(\mathbb{Q}_l, V)} \right). \quad (2.1)$$

En d'autres termes, un élément du groupe de Selmer est une classe de cohomologie globale telle que toutes les restrictions aux groupes de décomposition en l , pour l dans S soit dans

le sous-groupe de cohomologie $H_f^1(\mathbb{Q}_l, V)$. C'est une généralisation du groupe $A(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p$ où A/\mathbb{Q} est une variété abélienne.

On définit aussi le groupe de Selmer relâché en p de la manière suivante

$$H_{f, \{p\}}^1(\mathbb{Q}, V) := \ker \left(H_S^1(\mathbb{Q}, V) \rightarrow \bigoplus_{l \in S - \{p\}} \frac{H^1(\mathbb{Q}_l, V)}{H_f^1(\mathbb{Q}_l, V)} \right).$$

Grâce à la suite exacte d'inflation-restriction on peut remarquer que ces définitions sont indépendantes du choix de S .

Afin de pouvoir définir l'invariant \mathcal{L} il est nécessaire de supposer que V respecte les conditions suivantes :

Conditions A.

C1) $H_f^1(\mathbb{Q}, V^*(1)) = 0$.

C2) $H_S^0(\mathbb{Q}, V) = H_S^0(\mathbb{Q}, V^*(1)) = 0$.

C3) La restriction de V à une représentation de $G_{\mathbb{Q}_p}$ est cristalline et $\varphi : \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \rightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ est semi-simple en p^{-1} .

C4) $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)^{\varphi=1} = 0$.

C5) La localisation $\text{loc}_p : H_f^1(\mathbb{Q}, V) \rightarrow H_f^1(\mathbb{Q}_p, V)$ est injective.

Ces conditions sont conjecturalement réunies dans la situation suivante : Soit X une variété propre et lisse sur \mathbb{Q} . Soit $H_p^i(X)$ la cohomologie p -adique de X . On considère les représentations de galois

$$V = H_p^i(X)(m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Soit $w = i - 2m$ le poids motivique de V . La formulation de Bloch et Kato de la conjecture de Beilinson prédit que

$$H_f^1(V^*(1)) = 0$$

si $w \leq -2$. Cela correspond à l'hypothèse qu'il n'existe pas d'extension non-triviale de \mathbb{Q} par des motifs de poids ≥ 0 . Si X est de bonne réduction en p alors V est cristalline [Fal88] et la semi-simplicité de φ est une conjecture connue et difficile. Grâce aux résultats de Katz et Messing [KM74] on sait que $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)^{\varphi=1} = 0$ si $w \neq 0$. Grâce à un résultat de Jansen [Jan89] (Lemme 4 et théorème 3) on en déduit que loc_p est injective dès lors que le poids n'est pas égal à -2 ou 0 . La dualité permet de passer des poids ≤ -2 aux poids ≥ 0 . Il est donc raisonnable de penser que les représentations V de poids ≤ -2 vérifient les conditions A et que les représentations V de poids ≥ 0 , $V^*(1)$ vérifient les conditions A.

Les conditions A sont supposées réunies pour le reste de cette section.

Une partie de la suite exacte courte de Poitou-Tate (voir [FPR94, Proposition 2.2.1]) s'écrit

$$\dots \rightarrow H_f^1(\mathbb{Q}, V) \rightarrow H_S^1(\mathbb{Q}, V) \rightarrow \bigoplus_{l \in S} \frac{H^1(\mathbb{Q}_l, V)}{H_f^1(\mathbb{Q}_l, V)} \rightarrow H_f^1(\mathbb{Q}, V^*(1))^* \rightarrow \dots$$

On en déduit facilement (voir preuve de [PR95, Lemme 3.3.6]) que la suite suivante est aussi exacte lorsque la condition $C1$) est satisfaite

$$0 \rightarrow H_f^1(\mathbb{Q}, V) \rightarrow H_{f, \{p\}}^1(\mathbb{Q}, V) \rightarrow \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, V)}{H_f^1(\mathbb{Q}_p, V)} \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Fontaine et Perrin-Riou ont prouvé dans [FPR94] l'égalité suivante

$$\dim_E H_f^1(\mathbb{Q}, V) - \dim_E H_f^1(\mathbb{Q}, V^*(1)) - \dim_E H_S^0(\mathbb{Q}, V) + \dim_E H_S^0(\mathbb{Q}, V^*(1)) = \dim_E t_V(\mathbb{Q}_p) - \dim_E H^0(\mathbb{R}, V). \quad (2.3)$$

Sous la condition $C4$) l'application exponentielle de Bloch et Kato $\exp_V : t_V(\mathbb{Q}_p) \rightarrow H_f^1(\mathbb{Q}_p, V)$ est un isomorphisme. Cela permet de définir \log_V son inverse. Sous la condition $C5$) la localisation en p est injective et on définit le morphisme injectif r_V de la manière suivante

$$r_V : H_f^1(\mathbb{Q}, V) \xrightarrow{\text{loc}_p} H_f^1(\mathbb{Q}_p, V) \xrightarrow{\log_V} t_V(\mathbb{Q}_p).$$

Les conditions $C1$) et $C2$) injectées dans l'équation (2.3) donnent la relation suivante

$$\dim_E H_f^1(\mathbb{Q}, V) = \dim_E t_V(\mathbb{Q}_p) - d_+(V) \quad (2.4)$$

où $d_{\pm}(V) := \dim_E V^{c=\pm 1}$ en notant c la conjugaison complexe. En injectant ce résultat dans la suite exacte courte (2.2) et en utilisant la condition $C4$) et la caractéristique d'Euler-Poincaré on a

$$\dim_E H_{f, \{p\}}^1(\mathbb{Q}, V) = d_-(V) + \dim_E H^0(\mathbb{Q}_p, V^*(1)). \quad (2.5)$$

On a maintenant tous les éléments nécessaires aux définitions d'un sous-espace régulier et corégulier des modules cristallins associés à V et $V^*(1)$ respectivement.

Définition 2.1.1 (Perrin-Riou). 1) Un φ -sous-module D de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ est dit régulier si $D \cap \text{Fil}^0(\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) = 0$ et si l'application

$$r_{V,D} : H_f^1(\mathbb{Q}, V) \xrightarrow{r_V} t_V(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\text{proj}} \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}{D + \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}$$

est un isomorphisme.

2) De manière duale un φ -sous-module D de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))$ est corégulier si

$$D + \text{Fil}^0(\mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))) = \mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))$$

et le morphisme

$$D \cap \text{Fil}^0(\mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}, V)^*$$

induit par le morphisme dual $r_V^* : \text{Fil}^0(\mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}, V)^*$ est un isomorphisme.

On remarque que pour D un sous-module régulier de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ si et seulement si le module $D^\perp = \text{Hom}(\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)/D, \mathbb{D}_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(1)))$ est un sous-module corégulier de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))$. Si D est régulier, l'équation (2.4) implique l'égalité

$$\dim_E D = d_+(V). \quad (2.6)$$

On fixe D un sous espace régulier de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$. Puisque V satisfait la condition C3) nous pouvons utiliser la semi-simplicité de φ en p^{-1} afin de décomposer D en une somme directe de φ -modules

$$D = D_{-1} \oplus D^{\varphi=p^{-1}}.$$

Ce qui nous donne la filtration en 4 crans suivante

$$\{0\} \subset D_{-1} \subset D \subset \mathbb{D}_{\text{cris}}(V). \quad (2.7)$$

On note \mathbb{D} et \mathbb{D}_{-1} les (φ, Γ) -sous-modules de $\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ associés à D et D_{-1} par la théorie de Berger (voir [Ber08, Théorème II.2.6]). Par conséquent, on a

$$D = \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}), \quad D_{-1} = \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}_{-1})$$

ainsi que la filtration en 4 crans de $\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$

$$\{0\} \subset \mathbb{D}_{-1} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V). \quad (2.8)$$

En notant $\mathbb{W} := \mathbb{D}/\mathbb{D}_{-1}$ et $\mathbb{D}' := \mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)/\mathbb{D}$ on a les suites exactes tautologiques suivantes

$$0 \rightarrow \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) \rightarrow \mathbb{D}' \rightarrow 0, \quad (2.9)$$

$$0 \rightarrow \mathbb{D}_{-1} \rightarrow \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{W} \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

Remarque 2.1.2. Pour que la suite soit non-triviale il faut que $D^{\varphi=p^{-1}}$ soit non-nul. Or les valeurs propres du Frobenius sont de modules $p^{w/2}$ où w est le poids motivique. Cela force donc la nécessité d'avoir un poids égale à -2. Cela est conjecturalement cohérent avec les conditions A.

On commence par prouver quelques propriétés de ces modules.

Lemme 2.1.3. [Ben14a, section 3.1.3] a) Les morphismes $H^1(\mathbb{D}_{-1}) \rightarrow H^1(\mathbb{D})$ ainsi que $H^1(\mathbb{D}) \rightarrow H^1(\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)) = H^1(\mathbb{Q}_p, V)$ induits par les injections $\mathbb{D}_{-1} \subset \mathbb{D}$ et $\mathbb{D} \subset \mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ sont injectifs.

b) Le morphisme exponentiel $\exp_{\mathbb{D}_{-1}}$ définit un isomorphisme de D_{-1} dans $H^1(\mathbb{D}_{-1})$.

c) Le morphisme exponentiel $\exp_{\mathbb{D}}$ définit un isomorphisme de D dans $H_f^1(\mathbb{D})$.

On remarque que la condition C5) permet de voir l'espace $H_f^1(\mathbb{Q}, V)$ comme un sous espace de $H_f^1(\mathbb{Q}_p, V)$ grâce au morphisme injectif de localisation. Grâce à l'égalité $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)^{\varphi=1} = 0$ on sait que $H^0(\mathbb{D}') = 0$, cela permet d'utiliser la Proposition 1.2.4 sur la suite exacte (2.9) et d'affirmer que la suite

$$0 \rightarrow H_f^1(\mathbb{D}) \rightarrow H_f^1(\mathbb{Q}_p, V) \rightarrow H_f^1(\mathbb{D}') \rightarrow 0$$

est exacte ce qui permet de voir $H_f^1(\mathbb{D})$ comme un sous espace de $H_f^1(\mathbb{Q}_p, V)$. On peut alors caractériser la régularité de D .

Lemme 2.1.4. [Ben14a, section 3.1.3] La régularité de D est équivalente à la décomposition

$$H_f^1(\mathbb{Q}_p, V) = \text{loc}_p(H_f^1(\mathbb{Q}, V)) \oplus H_f^1(\mathbb{D}). \quad (2.11)$$

On s'intéresse maintenant à l'application de localisation $H_{f,\{p\}}^1(\mathbb{Q}, V) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, V)$. Un élément du noyau de cette application appartient aussi à $H_f^1(\mathbb{Q}, V)$ car $0 \in H_f^1(\mathbb{Q}_p, V)$. Par injectivité de la localisation sur $H_f^1(\mathbb{Q}, V)$ on obtient la nullité de cet élément. Par conséquent $\text{loc}_p : H_{f,\{p\}}^1(\mathbb{Q}, V) \hookrightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, V)$ est aussi injective. On définit

$$\kappa_D : H_{f,\{p\}}^1(\mathbb{Q}, V) \rightarrow \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, V)}{H_f^1(\mathbb{D})}$$

comme la composition de la localisation en p avec l'application de projection canonique.

Lemme 2.1.5. [*Ben14a*, lemme 3.1.4] a) On a

$$H_f^1(\mathbb{Q}_p, V) \cap H^1(\mathbb{D}) = H_f^1(\mathbb{D}).$$

b) L'application κ_D est un isomorphisme.

Soit \mathbb{W} défini précédemment. On a $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}) = D^{\varphi=p^{-1}}$ alors

$$\text{Fil}^0 \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}) = \{0\}, \quad \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W})^{\varphi=p^{-1}} = \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}).$$

On note $e = \dim_E \left(D^{\varphi=p^{-1}} \right)$. En utilisant la Proposition 1.3.2 et la cohomologie des modules du type $\mathcal{R}_E(\delta)$ où $\delta(x) = |x|_p x^m$ avec $m \geq 1$ on obtient

$$H^0(\mathbb{W}) = \{0\}, \quad \dim_E H^1(\mathbb{W}) = 2e, \quad \dim_E(\mathbb{W}) = e.$$

De plus, il existe une décomposition canonique de $H^1(\mathbb{W})$

$$H^1(\mathbb{W}) = H_f^1(\mathbb{W}) \oplus H_c^1(\mathbb{W}) \tag{2.12}$$

et des isomorphismes canoniques

$$i_{D,f} : \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}) \simeq H_f^1(\mathbb{W}), \quad i_{D,c} : \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}) \simeq H_c^1(\mathbb{W}). \tag{2.13}$$

Ces isomorphismes peuvent être décrits explicitement. Puisque les modules $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W})^{\varphi=1}$ et $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}_{-1})^{\varphi=p^{-1}}$ sont nuls on obtient $H^0(\mathbb{W}) = H^2(\mathbb{D}_{-1}) = \{0\}$. En partant de la suite exacte courte (2.10) et en utilisant la suite exacte longue de cohomologie pour la suite exacte courte du bas et la Proposition 1.2.4 pour celle du haut on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_f^1(\mathbb{D}_{-1}) & \longrightarrow & H_f^1(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H_f^1(\mathbb{W}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(\mathbb{D}_{-1}) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{W}) \longrightarrow 0. \end{array} \tag{2.14}$$

En utilisant le Lemme 2.1.3.b) on obtient $H_f^1(\mathbb{D}_{-1}) = H^1(\mathbb{D}_{-1})$. Grâce au lemme du serpent on obtient l'isomorphisme

$$\frac{H^1(\mathbb{D})}{H_f^1(\mathbb{D})} \simeq \frac{H^1(\mathbb{W})}{H_f^1(\mathbb{W})}.$$

Puisque $H^1(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{Q}_p, V)$ on peut voir $H^1(\mathbb{D})/H_f^1(\mathbb{D})$ comme un sous ensemble de $H^1(\mathbb{Q}_p, V)/H_f^1(\mathbb{D})$.

Définition 2.1.6. On note $H^1(D, V) \subset H_{f, \{p\}}^1(\mathbb{Q}, V)$ l'image inverse de $H^1(\mathbb{D})/H_f^1(\mathbb{D})$ par κ_D .

Il est donc clair que κ_D induit un isomorphisme

$$H^1(D, V) \simeq \frac{H^1(\mathbb{D})}{H_f^1(\mathbb{D})}.$$

On définit le morphisme $\rho_D : H^1(D, V) \rightarrow H^1(\mathbb{W})$ comme la composée de la localisation $H^1(D, V) \hookrightarrow H^1(\mathbb{D})$ avec le morphisme de la suite exacte longue de cohomologie $H^1(\mathbb{D}) \rightarrow H^1(\mathbb{W})$. Grâce à la suite exacte du bas de (2.14) on sait qu'un élément du noyau de $\bar{\rho}_D$ est une classe de $H^1(D, V)$ dont la p -localisation est dans $H^1(\mathbb{D}_{-1})$. Or $H^1(\mathbb{D}_{-1}) = H_f^1(\mathbb{D}_{-1}) \subset H_f^1(\mathbb{D})$ donc cet élément est dans le noyau de κ_D qui est un isomorphisme. Par conséquent, l'application $H^1(D, V) \rightarrow H^1(\mathbb{W})$ est une injection.

On définit les morphismes $\rho_{D,f}, \rho_{D,c}$ comme étant les uniques applications qui rendent le prochain diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}) & \xrightarrow{i_{D,f}} & H_f^1(\mathbb{W}) \\ \rho_{D,f} \uparrow & & \uparrow p_{D,f} \\ H^1(D, V) & \xrightarrow{\rho_D} & H^1(\mathbb{W}) \\ \downarrow \rho_{D,c} & & \downarrow p_{D,c} \\ \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}) & \xrightarrow{i_{D,c}} & H_c^1(\mathbb{W}) \end{array} \quad (2.15)$$

où $p_{D,f}$ et $p_{D,c}$ sont les projections habituelles impliquées par la décomposition de $H^1(\mathbb{W})$. Puisque $H^1(D, V) \simeq H^1(\mathbb{W})/H_f^1(\mathbb{W}) \simeq H_c^1(\mathbb{W})$ il est clair que la composition des deux applications $H^1(D, V) \rightarrow H^1(\mathbb{W}) \rightarrow H_c^1(\mathbb{W})$ est un isomorphisme. En effet, un élément du noyau de la composition serait aussi dans le noyau de κ_D et donc nul. Ensuite, la bijectivité découle de l'injectivité par dimensions. On remarque donc que $\rho_{D,c}$ est un isomorphisme.

Définition 2.1.7. Le déterminant

$$\mathcal{L}(V, D) = \det(\rho_{D,f} \circ \rho_{D,c}^{-1} \mid \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}))$$

est appelé l'invariant \mathcal{L} associé à la représentation V et à l'espace régulier D .

Les conditions A ne sont pas toujours faciles à vérifier. Dans la section 4.2 on sera amené à définir un invariant ℓ sous des conditions relâchées. Il est donc intéressant de faire la remarque suivante sur l'utilité des différentes conditions.

Remarque 2.1.8. Bien que toutes les conditions soient nécessaires afin d'arriver jusqu'à la définition de l'invariant elles ne sont pas toutes nécessaires afin de définir les autres éléments de cette section. A partir d'un φ -module de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ il est possible de définir la filtration en 4 crans (2.8) dès que la condition C3) sur la semi-simplicité est satisfaite. De plus, si la condition C4) ainsi que $\mathbb{D} \cap \text{Fil}^0(\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) = \{0\}$ le Lemme 2.1.3 est vrai. Cela permet ainsi de définir sous ces 3 conditions l'application κ_D ainsi que l'espace $H^1(D, V)$ comme l'image réciproque de $H^1(\mathbb{D})/H_f^1(\mathbb{D})$ par κ_D . Les autres conditions sont quant à elles nécessaires pour voir κ_D comme un isomorphisme ainsi que pour l'existence du déterminant de la Définition 2.1.7 de l'invariant \mathcal{L} .

Maintenant que l'invariant \mathcal{L} associé à une représentation V de poids -2 et un espace régulier D de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ est défini on s'intéresse à la définition d'un invariant \mathcal{L} associé à la représentation duale $V^*(1)$ et à un espace corégulier D^\perp de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))$. C'est un travail original de cette thèse.

2.2 L'invariant \mathcal{L} d'une représentation de poids 0

Pour définir l'invariant \mathcal{L} associée à une représentation $V^*(1)$ de poids 0 on suppose, comme pour la section précédente, que V vérifie les conditions $C1) - C5)$. Tout sous-module corégulier de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))$ peut être construit comme l'orthogonal D^\perp d'un sous-module régulier D de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$. On fixe D^\perp un sous-module corégulier de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))$.

Grâce à la suite exacte de Poitou-Tate appliquée à la représentation $V^*(1)$ et à la condition $C1)$ on obtient la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow H_{f,\{p\}}^1(\mathbb{Q}, V^*(1)) \rightarrow \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))}{H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))} \rightarrow H_f^1(\mathbb{Q}, V)^*$$

où le dernier morphisme est le dual de la localisation $H_f^1(\mathbb{Q}, V) \xrightarrow{\text{loc}_p} H_f^1(\mathbb{Q}_p, V)$ composée avec la bijection induite par l'accouplement canonique $H_f^1(\mathbb{Q}_p, V)^* \simeq \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))}{H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))}$. Grâce à la condition $C5)$ la localisation est injective donc son dual est surjectif, on a alors la suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_{f,\{p\}}^1(\mathbb{Q}, V^*(1)) \rightarrow \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))}{H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))} \rightarrow H_f^1(\mathbb{Q}, V)^* \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

Par dualité de la filtration en 4 crans (2.7) on obtient une filtration en 4 crans de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))$

$$\{0\} \subset D^\perp \subset D_{-1}^\perp \subset \mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))$$

où D_{-1}^\perp est l'orthogonal de D_{-1} , il s'écrit aussi

$$D_{-1}^\perp \simeq \text{Hom}_E(\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)/D_{-1}, \mathbb{D}_{\text{cris}}(E(1))).$$

Par dualité D_{-1}^\perp est le plus grand espace de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))$ contenant D^\perp tel que le Frobenius agisse comme multiplication par 1 sur le quotient D_{-1}^\perp/D^\perp . En utilisant la théorie de Berger cela nous donne une filtration en 4 crans sur le (φ, Γ) -module $\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V^*(1))$ comme suit

$$\{0\} \subset \mathbb{D}^\perp \subset \mathbb{D}_{-1}^\perp \subset \mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V^*(1)).$$

C'est le dual de la filtration (2.8). On a la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbb{D}^\perp \rightarrow \mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V^*(1)) \rightarrow \mathbb{D}^*(\chi) \rightarrow 0. \quad (2.17)$$

Par dualité locale $H^2(\mathbb{D}^\perp) = \left(H^0(\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)/\mathbb{D})\right)^*$. De plus, grâce à la condition $C4)$ on a

$$H^0(\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)/\mathbb{D}) \subset \mathcal{D}_{\text{cris}}\left(\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)/\mathbb{D}\right)^{\varphi=1} = 0.$$

Ce qui implique $H^2(\mathbb{D}^\perp) = 0$. La suite exacte longue de la cohomologie associée à (2.17) s'écrit

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{D}^\perp) \rightarrow H^0(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) \rightarrow H^0(\mathbb{D}^*(\chi)) \rightarrow H^1(\mathbb{D}^\perp) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) \rightarrow H^1(\mathbb{D}^*(\chi)) \rightarrow 0. \quad (2.18)$$

On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{Fil}^0 \mathcal{D}_{\mathrm{cris}}(\mathbb{D}^\perp) \rightarrow \mathrm{Fil}^0 \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1)) \rightarrow \mathrm{Fil}^0 \mathcal{D}_{\mathrm{cris}}(\mathbb{D}^*(\chi)) \rightarrow 0.$$

La semi-simplicité du Frobenius sur $\mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ en p^{-1} implique la semi-simplicité du Frobenius sur $\mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))$ en 1. En prenant les invariants par le Frobenius on a la suite exacte courte suivante

$$0 \rightarrow \mathrm{Fil}^0 \mathcal{D}_{\mathrm{cris}}(\mathbb{D}^\perp)^{\varphi=1} \rightarrow \mathrm{Fil}^0 \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))^{\varphi=1} \rightarrow \mathrm{Fil}^0 \mathcal{D}_{\mathrm{cris}}(\mathbb{D}^*(\chi))^{\varphi=1} \rightarrow 0.$$

Or pour tout (φ, Γ) -module M on sait que $\mathrm{Fil}^0 \mathcal{D}_{\mathrm{cris}}(M)^{\varphi=1}$ s'identifie avec $H^0(M)$. La suite exacte courte se réécrit

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{D}^\perp) \rightarrow H^0(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) \rightarrow H^0(\mathbb{D}^*(\chi)) \rightarrow 0. \quad (2.19)$$

Le morphisme $H^0(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) \rightarrow H^0(\mathbb{D}^*(\chi))$ de la suite exacte longue (2.18) est surjective. Par conséquent, le morphisme $H^1(\mathbb{D}^\perp) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))$ est injectif et on obtient la suite exacte courte suivante

$$0 \rightarrow H^1(\mathbb{D}^\perp) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) \rightarrow H^1(\mathbb{D}^*(\chi)) \rightarrow 0. \quad (2.20)$$

Puisque $V^*(1)$ est cristalline, les modules \mathbb{D}^\perp et $\mathbb{D}^*(\chi)$ le sont aussi (voir [Ben11, Lemme 1.2.8] par exemple). En utilisant la Proposition 1.2.4 et la surjectivité du morphisme $H^0(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) \rightarrow H^0(\mathbb{D}^*(\chi))$ on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow H_f^1(\mathbb{D}^\perp) \rightarrow H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) \rightarrow H_f^1(\mathbb{D}^*(\chi)) \rightarrow 0. \quad (2.21)$$

Grâce à la suite exacte (2.20) on sait que $H^1(\mathbb{D}^\perp)$ s'injecte dans $H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))$. On considère le morphisme suivant

$$\kappa_{D^\perp} : H_{f, \{p\}}^1(V^*(1)) \rightarrow \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))}{H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) + H^1(\mathbb{D}^\perp)}$$

qui est la composition naturelle de la localisation en p et de la projection naturelle. Cette construction est l'analogie de κ_D dans le cas dual.

Les deux suites exactes (2.20) et (2.21) forment un diagramme commutatif (avatar de (2.14))

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_f^1(\mathbb{D}^\perp) & \longrightarrow & H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) & \longrightarrow & H_f^1(\mathbb{D}^*(\chi)) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(\mathbb{D}^\perp) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{D}^*(\chi)) \longrightarrow 0 \end{array}$$

ce qui permet d'affirmer que

$$H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) \cap H^1(\mathbb{D}^\perp) = H_f^1(\mathbb{D}^\perp). \quad (2.22)$$

Par la suite exacte (2.20) on sait que $H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))/H^1(\mathbb{D}^\perp) \simeq H^1(\mathbb{D}^*(\chi))$. En utilisant cette identification, l'équation (2.22) et le second théorème de l'isomorphisme on a l'identification suivante

$$\frac{H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))}{H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) + H^1(\mathbb{D}^\perp)} \simeq \frac{H^1(\mathbb{D}^*(\chi))}{H_f^1(\mathbb{D}^*(\chi))}. \quad (2.23)$$

Proposition 2.2.1. *L'application κ_{D^\perp} est un isomorphisme.*

Démonstration. On commence par montrer l'injectivité du morphisme κ_{D^\perp} . Soit un élément $x \in \ker \kappa_{D^\perp}$. Alors

$$\text{loc}_p(x) \in H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) + H^1(\mathbb{D}^\perp).$$

On rappelle que $H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))$ est l'orthogonal de $H_f^1(\mathbb{Q}_p, V)$ et que $H^1(\mathbb{D}^\perp)$ est dans l'orthogonal de $H^1(\mathbb{D})$. En particulier toute classe de $H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) + H^1(\mathbb{D}^\perp)$ est dans l'orthogonal de $H_f^1(\mathbb{D})$. De plus, en utilisant la suite exacte (2.16) on sait que $\text{loc}_p(x)$ est aussi dans l'orthogonal de l'image de $H_f^1(\mathbb{Q}, V)$ dans $H^1(\mathbb{Q}_p, V)$ par la localisation. En utilisant la décomposition (2.11) on en déduit $\text{loc}_p(x) \in H_f^1(\mathbb{Q}_p, V)^\perp$, c'est-à-dire

$$\text{loc}_p(x) \in H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)).$$

En particulier x est dans le noyau du morphisme

$$H_{f, \{p\}}^1(\mathbb{Q}, V^*(1)) \rightarrow \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))}{H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))}$$

de la suite exacte (2.16) donc $x = 0$ et κ_{D^\perp} est bien injectif.

Pour montrer la bijectivité il suffit de prouver que ces deux espaces sont de même dimension. La suite exacte (2.16) implique que

$$\dim_E H_{f, \{p\}}^1(\mathbb{Q}, V^*(1)) = \dim_E H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) - \dim_E H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) - \dim_E H_f^1(\mathbb{Q}, V)^*.$$

Or $\dim_E H_f^1(\mathbb{Q}, V)^* = \dim_E H_f^1(\mathbb{Q}, V)$ et en utilisant la décomposition (2.11) on a

$$\dim_E H_f^1(\mathbb{Q}, V)^* = \dim_E H_f^1(\mathbb{Q}_p, V) - \dim_E H_f^1(\mathbb{D}).$$

Par [BK90, Proposition 3.8] on a

$$\dim_E H_f^1(\mathbb{Q}_p, V) = \dim_E H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) - \dim_E H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)).$$

De plus, $H_f^1(\mathbb{D})$ est l'orthogonale de $H_f^1(\mathbb{D}^*(\chi))$ (voir [Ben11, Corollaire 1.4.10]) donc

$$\dim_E H_f^1(\mathbb{D}) = \dim_E H^1(\mathbb{D}^*(\chi)) - \dim_E H_f^1(\mathbb{D}^*(\chi)).$$

En utilisant les trois dernières égalités on a

$$\dim_E H_{f, \{p\}}^1(\mathbb{Q}, V^*(1)) = \dim_E H_f^1(\mathbb{D}^*(\chi)) - \dim_E H_f^1(\mathbb{D}^*(\chi)).$$

En utilisant l'isomorphisme (2.23) et l'égalité précédente on a

$$\dim_E \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))}{H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) + H^1(\mathbb{D}^\perp)} = \dim_E H_{f, \{p\}}^1(V^*(1))$$

donc l'injectivité implique la bijectivité. \square

On note le quotient $\mathbb{K} := \mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V^*(1))/\mathbb{D}_{-1}^\perp$. On a la suite exacte tautologique suivante

$$0 \rightarrow \mathbb{D}_{-1}^\perp \rightarrow \mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V^*(1)) \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow 0. \quad (2.24)$$

Par dualité locale $H^2(\mathbb{D}_{-1}^\perp) = H^0(\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)/\mathbb{D}_{-1})^*$. De plus, grâce à la condition C4) on a

$$H^0(\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)/\mathbb{D}_{-1}) \subset \mathcal{S}_{\text{cris}}\left(\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)/\mathbb{D}_{-1}\right)^{\varphi=1} = 0.$$

Ce qui implique $H^2(\mathbb{D}_{-1}^\perp) = 0$. Comme précédemment, la semi-simplicité du Frobenius en 1 sur $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))$ combinée avec la suite exacte longue de la cohomologie associée à (2.24) permet d'écrire les suites exactes courtes suivantes (analogues de (2.20) et (2.21))

$$0 \rightarrow H^1(\mathbb{D}_{-1}^\perp) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) \rightarrow H^1(\mathbb{K}) \rightarrow 0, \quad (2.25)$$

$$0 \rightarrow H_f^1(\mathbb{D}_{-1}^\perp) \rightarrow H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) \rightarrow H_f^1(\mathbb{K}) \rightarrow 0. \quad (2.26)$$

En particulier $H^1(\mathbb{D}_{-1}^\perp)$ peut être vu comme un sous-espace de $H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))$.

Lemme 2.2.2. *On a l'égalité $H_f^1(\mathbb{K}) = 0$, en particulier $H_f^1(\mathbb{D}_{-1}^\perp) = H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))$.*

Démonstration. Le module \mathbb{K} est le dual de Tate de \mathbb{D}_{-1} . Par [Ben11, Corollaire 1.4.10] et le point b) du Lemme 2.1.3 on a

$$\dim_E H_f^1(\mathbb{K}) = \dim_E H^1(\mathbb{D}_{-1}) - \dim_E H_f^1(\mathbb{D}_{-1}) = 0$$

ce qui prouve le premier point. De plus, la suite exacte (2.26) implique l'égalité $H_f^1(\mathbb{D}_{-1}^\perp) = H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))$. \square

Par dualité de la suite exacte courte (2.10) on a la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbb{D}^\perp \rightarrow \mathbb{D}_{-1}^\perp \rightarrow \mathbb{W}^*(\chi) \rightarrow 0.$$

On rappelle que $H^2(\mathbb{D}^\perp) = 0$. La semi-simplicité du Frobenius en 1 sur $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))$ implique la semi-simplicité du Frobenius en 1 sur $\mathcal{S}_{\text{cris}}(\mathbb{D}_{-1}^\perp)$. De manière similaire aux suites exactes (2.20) et (2.21) on obtient les suites exactes

$$0 \rightarrow H^1(\mathbb{D}^\perp) \rightarrow H^1(\mathbb{D}_{-1}^\perp) \rightarrow H^1(\mathbb{W}^*(\chi)) \rightarrow 0, \quad (2.27)$$

$$0 \rightarrow H_f^1(\mathbb{D}^\perp) \rightarrow H_f^1(\mathbb{D}_{-1}^\perp) \rightarrow H_f^1(\mathbb{W}^*(\chi)) \rightarrow 0. \quad (2.28)$$

En particulier $H^1(\mathbb{D}^\perp)$ s'injecte dans $H^1(\mathbb{D}_{-1}^\perp)$. On peut donc considérer le sous-espace

$$\frac{H^1(\mathbb{D}_{-1}^\perp)}{H_f^1(\mathbb{D}_{-1}^\perp) + H^1(\mathbb{D}^\perp)} = \frac{H^1(\mathbb{D}_{-1}^\perp)}{H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) + H^1(\mathbb{D}^\perp)} \subset \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))}{H_f^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) + H^1(\mathbb{D}^\perp)}.$$

Les suites exactes (2.27) et (2.28) et le second théorème de l'isomorphisme donnent l'identification suivante

$$\frac{H^1(\mathbb{D}_{-1}^\perp)}{H_f^1(\mathbb{D}_{-1}^\perp) + H^1(\mathbb{D}^\perp)} \simeq \frac{H^1(\mathbb{W}^*(\chi))}{H_f^1(\mathbb{W}^*(\chi))}.$$

Grâce à cette identification on peut définir l'espace suivant

Définition 2.2.3. On définit $H^1(V^*(1), D^\perp)$ comme l'image inverse de $\frac{H^1(\mathbb{W}^*(\chi))}{H_f^1(\mathbb{W}^*(\chi))}$ par κ_{D^\perp} .

En particulier, $H^1(V^*(1), D^\perp)$ est l'ensemble des classes de $H_{f, \{p\}}^1(\mathbb{Q}, V^*(1))$ dont la localisation en p est dans $H^1(\mathbb{D}_{-1}^\perp)$.

Les suites exactes (2.26) et (2.19) forment un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(\mathbb{D}^\perp) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{D}_{-1}^\perp) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{W}^*(\chi)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1(\mathbb{D}^\perp) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{D}^*(\chi)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où le morphisme $H^1(\mathbb{W}^*(\chi)) \rightarrow H^1(\mathbb{D}^*(\chi))$ est le morphisme induit par $W^*(\chi) \rightarrow \mathbb{D}^*(\chi)$. De plus le morphisme $H^1(\mathbb{D}_{-1}^\perp) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))$ est injectif (voir (2.25)), donc le morphisme $H^1(\mathbb{W}^*(\chi)) \rightarrow H^1(\mathbb{D}^*(\chi))$ est aussi injectif par le Lemme du serpent. En particulier, ce diagramme donne une seconde interprétation de $H^1(V^*(1), D^\perp)$. C'est l'ensemble des classes de $H_{f, \{p\}}^1(\mathbb{Q}, V^*(1))$ envoyées dans $H^1(\mathbb{W}^*(\chi))$ par la composition de la localisation en p et la projection sur le quotient $H^1(\mathbb{D}^*(\chi))$.

On remarque que $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}^*(\chi)) = \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}^*(\chi))^{\varphi=1}$. En utilisant la Proposition 1.3.2 et la cohomologie des modules du type $\mathcal{R}_E(\delta)$ où $\delta(x) = x^m$ avec $m \leq 0$ on obtient la décomposition canonique analogue à (2.12)

$$H^1(\mathbb{W}^*(\chi)) = H_f^1(\mathbb{W}^*(\chi)) \oplus H_c^1(\mathbb{W}^*(\chi))$$

munie des isomorphismes canoniques

$$i_{D^\perp, f} : \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}^*(\chi)) \simeq H_f^1(\mathbb{W}^*(\chi)), \quad i_{D^\perp, c} : \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}^*(\chi)) \simeq H_c^1(\mathbb{W}^*(\chi)). \quad (2.29)$$

Soit ρ_{D^\perp} la composition de localisation en p avec la projection sur le quotient par $H^1(\mathbb{D}^\perp)$. En particulier sa restriction à $H^1(V^*(1), D^\perp)$ et à valeurs dans $H^1(\mathbb{W}^*(\chi))$. On définit les morphismes $\rho_{D^\perp, f}, \rho_{D^\perp, c}$ comme étant les uniques applications qui rendent le prochain diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}^*(\chi)) & \xrightarrow{\sim}^{i_{D^\perp, f}} & H_f^1(\mathbb{W}^*(\chi)) \\ \rho_{D^\perp, f} \uparrow & & \uparrow p_{D^\perp, f} \\ H^1(D^\perp, V^*(1)) & \xrightarrow{\rho_{D^\perp}} & H^1(\mathbb{W}^*(\chi)) \\ \downarrow \rho_{D^\perp, c} & & \downarrow p_{D^\perp, c} \\ \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}^*(\chi)) & \xrightarrow{\sim}^{i_{D^\perp, c}} & H_c^1(\mathbb{W}^*(\chi)). \end{array} \quad (2.30)$$

Définition 2.2.4. On définit l'invariant \mathcal{L} associé à la représentation $V^*(1)$ et à l'espace D^\perp comme le déterminant suivant

$$\mathcal{L}(V^*(1), D^\perp) = (-1)^e \det \left(\rho_{D^\perp, f} \circ (\rho_{D^\perp, c})^{-1} \mid \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}^*(\chi)) \right)$$

où $e = \dim D^\perp$.

Remarque 2.2.5. Le changement de signe possiblement induit par le $(-1)^e$ n'est pas très intuitif au vu de la Définition 2.1.7, cependant il permet de rester cohérent avec l'équation fonctionnelle des fonctions L .

Remarque 2.2.6. Si on suppose que la dimension de \mathbb{W} est 1 alors on a une interprétation spéciale de $\mathcal{L}(V^*(1), D^\perp)$:

La dimension de $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}^*(\chi))$ est aussi de 1, alors le morphisme $\rho_{D^\perp, f} \circ \rho_{D^\perp, c}^{-1}$ n'est rien d'autre que la multiplication par le scalaire $-\mathcal{L}(V^*(1), D^\perp)$ (car $(-1)^e = -1$ ici). De plus, la dimension de $H^1(\mathbb{W}^*(\chi))/H_f^1(\mathbb{W}^*(\chi))$ est la même que celle de \mathbb{W} donc $H^1(D^\perp, V^*(1))$ est envoyé par ρ_{D^\perp} sur une droite de $H^1(\mathbb{W}^*(\chi))$. Soit $d^* \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}^*(\chi))$ non-nul. Alors $H_c^1(\mathbb{W}^*(\chi))$ est engendré par $i_{D^\perp, c}(d^*)$ et $H_f^1(\mathbb{W}^*(\chi))$ est engendré par $i_{D^\perp, f}(d^*)$. Soit $h \in H^1(V^*(1), D^\perp)$ tel que $\rho_{D^\perp, c}(h) = d^*$. En utilisant (2.30) on a

$$p_{D^\perp, c} \circ \rho_{D^\perp}(h) = i_{D^\perp, c}(d^*).$$

En composant par $\rho_{D^\perp, f} \circ \rho_{D^\perp, c}^{-1}$ et en utilisant (2.30) nous obtenons

$$p_{D^\perp, f} \circ \rho_{D^\perp}(h) = -\mathcal{L}(V^*(1), D^\perp) i_{D^\perp, f}(d^*).$$

En particulier

$$\rho_{D^\perp}(h) = i_{D^\perp, c}(d^*) - \mathcal{L}(V^*(1), D^\perp) i_{D^\perp, f}(d^*).$$

et $\rho_{D^\perp}(H^1(D^\perp, V^*(1)))$ est la droite de $H^1(\mathbb{W}^*(\chi))$ engendrée par cet élément.

Remarque 2.2.7. Pour faire une analogie avec la remarque 2.1.8 il est possible de définir $H^1(D, V^*(1))$ sous des hypothèses restreintes. Soient V une représentation satisfaisant C3) et C4) et D un φ -sous-module de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ tel que $\mathbb{D} \cap \text{Fil}^0(\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) = \{0\}$. Par la théorie de Berger, on note toujours \mathbb{D} le (φ, Γ) -sous-modules de $\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ associé à D . On a alors un morphisme, induit par l'inclusion $\mathbb{D} \subset \mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$

$$\kappa_{D^*} : H_{f, \{p\}}^1(\mathbb{Q}, V^*(1)) \xrightarrow{\text{loc}_p} H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) \rightarrow H^1(\mathbb{D}^*(\chi)).$$

Par la condition C3) il est possible de définir les (φ, Γ) -modules \mathbb{D}_{-1} et \mathbb{W} tel que la suite exacte (2.10) soit satisfaite et $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}) = \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D})^{\varphi=p^{-1}}$. En particulier cela implique $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{D}_{-1})^{\varphi=p^{-1}} = 0$ et donc $H^0(\mathbb{D}_{-1}^*(\chi)) = 0$. Par la suite exacte longue de la cohomologie associée au dual de (2.10) on a une injection

$$H^1(\mathbb{W}^*(\chi)) \hookrightarrow H^1(\mathbb{D}^*(\chi)).$$

On définit $H^1(D, V^*(1))$ comme l'image réciproque de $H^1(\mathbb{W}^*(\chi))$ par le κ_{D^*} . De manière similaire à la remarque 2.1.8 les autres conditions sont nécessaires pour voir κ_{D^\perp} comme un isomorphisme et ainsi justifier l'existence du déterminant de la Définition 2.2.4 de l'invariant \mathcal{L} associé au dual.

2.3 Lien entre les deux invariants définis

On continue à supposer que V est une représentation de poids -2 satisfaisant les conditions A. Dans le but d'unifier les deux constructions de ce chapitre on prouve un lien entre les deux invariants \mathcal{L} apparaissant pour des modules régulier et corégulier orthogonaux de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ et $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))$.

Proposition 2.3.1. *Les images de localisation en p de $H_{f,\{p\}}^1(\mathbb{Q}, V)$ et $H_{f,\{p\}}^1(\mathbb{Q}, V^*(1))$ dans $H^1(\mathbb{Q}_p, V)$ et $H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))$ respectivement sont orthogonales l'une de l'autre pour la dualité canonique.*

Démonstration. Voir [Mil86, Théorème I.4.10] ou [Tat62, Théorème 3.1] par exemple. \square

Grâce à cette propriété on peut alors prouver le lien suivant

Proposition 2.3.2. *On suppose toujours que V vérifie les conditions A. Soit $D \subset \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ un φ -module régulier. On a*

$$\mathcal{L}(V^*(1), D^\perp) = (-1)^e \mathcal{L}(V, D).$$

Démonstration. Soient $h_1 \in H^1(D, V)$ et $h_2 \in H^1(D, V^*(1))$. Grâce à la Proposition 2.3.1 on a

$$\text{loc}_p(h_1) \cup \text{loc}_p(h_2) = 0$$

où le cup produit est pris pour l'accouplement de $H^1(\mathbb{Q}_p, V) \times H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1))$. Par définition de $H^1(D, V)$ on a $\text{loc}_p h_1 \in H^1(\mathbb{D})$, donc on peut projeter $\text{loc}_p(h_2)$ dans $H^1(\mathbb{D}^*(\chi))$

$$\text{loc}_p(h_1) \cup \text{proj loc}_p(h_2) = 0$$

où le cup produit représente l'accouplement $H^1(\mathbb{D}) \times H^1(\mathbb{D}^*(\chi))$. Grâce à la seconde interprétation de $H^1(D^\perp, V^*(1))$ on sait que $\text{proj loc}_p(h_2) \in H^1(\mathbb{W}^*(\chi))$. De la même manière, on projette $\text{loc}_p(h_1)$ sur $H^1(\mathbb{W})$ et

$$\text{proj loc}_p(h_1) \cup \text{proj loc}_p(h_2) = 0$$

où le cup produit est ici l'accouplement de $H^1(\mathbb{W}) \times H^1(\mathbb{W}^*(\chi))$. On rappelle que la composition de loc_p et de la projection sur $H^1(\mathbb{W})$ (respectivement $H^1(\mathbb{W}^*(\chi))$) est le morphisme ρ_D (respectivement ρ_{D^\perp}) défini dans le Paragraphe 2.1 (respectivement 2.2). L'équation précédente se réécrit

$$\rho_D(h_1) \cup \rho_{D^\perp}(h_2) = 0. \tag{2.31}$$

Soient $\{e_i\}$ une base de $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W})$ et $\{e_i^*\}$ la base duale de $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}^*(\chi))$. Grâce aux isomorphismes $\rho_{D,c}$ et $\rho_{D^\perp,c}$ définis en (2.15) et (2.30) respectivement on obtient les bases de $H^1(V, D)$ et $H^1(V^*(1), D^\perp)$ suivantes $\{\rho_{D,c}^{-1}(e_i)\}$ et $\{\rho_{D^\perp,c}^{-1}(e_j^*)\}$. Pour tout i on note $f_i := \rho_{D,c}^{-1}(e_i)$ et $g_j := \rho_{D^\perp,c}^{-1}(e_j^*)$. On rappelle que $H^1(\mathbb{W})$ se décompose en la somme directe $H_c^1(\mathbb{W}) \oplus H_f^1(\mathbb{W})$ et que $H^1(\mathbb{W}^*(\chi))$ admet une décomposition similaire. Les diagrammes (2.15) et (2.30) donnent les décompositions suivantes

$$\rho_D(f_i) = i_{D,f}(\rho_{D,f}\rho_{D,c}^{-1}(e_i)) + i_{D,c}(e_i),$$

$$\rho_{D^\perp}(g_j) = i_{D^\perp,f}(\rho_{D^\perp,f}\rho_{D^\perp,c}^{-1}(e_j^*)) + i_{D^\perp,c}(e_j^*).$$

Puisque $H_f^1(\mathbb{W})$ et $H_f^1(\mathbb{W}^*(\chi))$ ainsi que $H_c^1(\mathbb{W})$ et $H_c^1(\mathbb{W}^*(\chi))$ sont orthogonaux nous pouvons réécrire le cup produit de la manière suivante

$$\rho_D(f_i) \cup \rho_{D^\perp}(g_j) = i_{D,f}(\rho_{D,f}\rho_{D,c}^{-1}(e_i)) \cup i_{D^\perp,c}(e_j^*) + i_{D,c}(e_i) \cup i_{D^\perp,f}(\rho_{D^\perp,f}\rho_{D^\perp,c}^{-1}(e_j^*)).$$

Pour tout $d_1 \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W})$ et $d_2^* \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}^*(\chi))$ on a les relations

$$\begin{aligned} i_{D,f}(d_1) \cup i_{D^\perp,c}(d_2^*) &= [d_1, d_2^*], \\ i_{D,c}(d_1) \cup i_{D^\perp,f}(d_2^*) &= -[d_1, d_2^*]. \end{aligned}$$

Donc, pour tout couple (i, j) on a

$$\rho_D(f_i) \cup \rho_{D^\perp}(g_j) = [\rho_{D,f}\rho_{D,c}^{-1}(e_i), e_j^*] - [e_i, \rho_{D^\perp,f}\rho_{D^\perp,c}^{-1}(e_j^*)]. \quad (2.32)$$

Si on note $A = (A_{i,j})$ la matrice de $\rho_{D,f}\rho_{D,c}^{-1}$ dans la base des $\{e_i\}$ et $B = (B_{i,j})$ la matrice de $\rho_{D^\perp,f}\rho_{D^\perp,c}^{-1}$ dans la base des $\{e_i^*\}$ alors les équations (2.31) et (2.32) impliquent l'égalité

$$A_{i,j} = B_{j,i}.$$

Donc B est la transposée de A et en particulier $\det(A) = \det(B)$. En revenant aux Définitions 2.1.7 et 2.2.4 on a $\det(A) = \mathcal{L}(V, D)$ et $\det(B) = (-1)^e \mathcal{L}(V^*(1), D^\perp)$ ce qui donne l'égalité souhaitée. \square

2.4 Interprétation de l'invariant \mathcal{L}

On va maintenant interpréter l'invariant \mathcal{L} comme la dérivée du logarithme élargi. On garde les notations des sections précédentes.

2.4.1. Pour la première partie de cette section on suppose que la représentation V vérifie les conditions C3) et C4). On fixe D un φ -sous-module de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ tel que

$$\text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \cap D = \{0\}.$$

Comme expliqué dans la remarque 2.1.8 on rappelle que dans ce cas la filtration en 4 crans (2.7) ainsi que la filtration associée de $\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ existent et que le Lemme 2.1.3 est satisfait. On rappelle les isomorphismes

$$\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)^{\psi=1} \simeq \mathcal{H}_E(\Gamma) \otimes H_{\text{Iw}}(\mathbb{Q}_p, V) \simeq H^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{H}_E(\Gamma) \otimes V).$$

On définit une filtration en 4 crans de l'espace $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{H}_E(\Gamma) \otimes V)$. Soit

$$F_0 H^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{H}_E(\Gamma) \otimes V) := \mathbb{D} \cap H^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{H}_E(\Gamma) \otimes V),$$

$$F_{-1} H^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{H}_E(\Gamma) \otimes V) := \mathbb{D}_{-1} \cap H^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{H}_E(\Gamma) \otimes V).$$

Suite à l'interprétation du morphisme de projection pr_0 proposée par Cherbonnier et Colmez (voir Paragraphe 1.2.6) on sait que pour tout $\beta \in F_0 H^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{H}_E(\Gamma) \otimes V)$ on a $\text{pr}_0(\beta) \in H^1(\mathbb{D})$. On rappelle la suite exacte (2.10)

$$0 \rightarrow \mathbb{D}_{-1} \rightarrow \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{W} \rightarrow 0.$$

Puisque $H^0(\mathbb{W}) = 0$ grâce à la condition C4) la suite exacte longue associée à (2.10) donne la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(\mathbb{D}_{-1}) \rightarrow H^1(\mathbb{D}) \rightarrow H^1(\mathbb{W}).$$

On rappelle que pour toute représentation p -adique V on note

$$\mathcal{D}(V) := \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \otimes \mathcal{H}_E(\Gamma) \cdot (1 + X),$$

ainsi que pour tout élément $x \in \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ on note

$$\tilde{x} \in \mathcal{D}(V) := x \otimes (1 + X).$$

Proposition 2.4.1. [Ben14a, Proposition 3.2.2] *Pour tout $a \in D^{\varphi=p^{-1}}$ et $\alpha \in \mathcal{D}(V)$ tel que $\alpha(0) = a$. Soit $h \geq 1$ tel que $\text{Fil}^{-h} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) = \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$. Alors*

i) Il existe un unique $\beta \in F_0 H^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{H}_E(\Gamma) \otimes V)$ tel que

$$(\gamma - 1)\beta = \text{Exp}_{V,h}^{\varepsilon}(\alpha).$$

ii) La composition

$$\begin{aligned} \delta_{D,h} : D^{\varphi=p^{-1}} &\rightarrow F^0 H_1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{H}_E(\Gamma) \otimes V) \rightarrow H^1(\mathbb{W}) \\ a &\mapsto \text{pr}_0(\beta) \pmod{H^1(\mathbb{D}_{-1})} \end{aligned}$$

est donnée par la formule suivante

$$\delta_{D,h}(a) = -\Gamma(h) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} (\log(\chi(\gamma)))^{-1} i_{D,c}(a)$$

où $i_{D,c}$ est défini en (2.13).

Remarque 2.4.2. Dans [Ben14a] Benois travaille dans le cas où V vérifie l'ensemble des conditions A et où D est régulier. Cependant, la preuve ne nécessite que les conditions C3), C4) et la non-intersection de $\text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ avec D , la propriété est donc satisfaite sous ces conditions relâchées grâce à la même preuve.

De manière similaire à la cohomologie locale (voir Paragraphe 1.2.3) on définit la cohomologie d'Iwasawa pour les représentations p -adique de \mathbb{Q} . Soit V une représentation p -adique de G_S . On fixe T un \mathbb{Z}_p réseau de V stable sous l'action de G_S alors

$$H_{\text{Iw},S}^1(\mathbb{Q}, T) := \varprojlim H_S^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), T)$$

où la limite projective est prise pour les morphismes de corestriction. On définit

$$H_{\text{Iw},S}^1(\mathbb{Q}, V) := H_{\text{Iw},S}^1(\mathbb{Q}, T) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p.$$

Cette définition est indépendante du réseau T choisi. Grâce au lemme de Shapiro on a aussi

$$H_{\text{Iw},S}^1(\mathbb{Q}, V^*(1)) \simeq H_S^1(\mathbb{Q}, V^*(1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \Lambda_E(\Gamma)^\iota).$$

On appelle $\Lambda_E(\Gamma)^\iota$ la partie cyclotomique. Tout morphisme continu $\mu : \Gamma \rightarrow E$ induit un morphisme dit de spécialisation $\Lambda_E(\Gamma) \rightarrow E(\mu)$ comme expliqué dans le Paragraphe 1.4.2. Grâce à la restriction au groupe de décomposition en p la cohomologie d'Iwasawa des représentations de \mathbb{Q} peut être envoyée dans celle des représentation de \mathbb{Q}_p .

Théorème 2.4.3. Soit $\mathbf{z} \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}, V^*(1))$ et $d \in D^{\varphi=p^{-1}}$. On suppose que la projection \mathbf{z}_0 de \mathbf{z} sur le corps de base soit non-nulle et que $\mathbf{z}_0 \in H^1(D^\perp, V^*(1))$, c'est-à-dire que la projection de \mathbf{z}_0 dans $H^1(\mathbb{D}^*(\chi))$ est incluse dans l'injection de $H^1(\mathbb{W}^*(\chi))$. On note $\mathbf{h}_\mathbf{z}$ l'élément de $\mathcal{H}_E(\Gamma)$ défini par

$$\mathbf{h}_\mathbf{z} = \text{Log}_{V^*(1), 1-h, d}^\varepsilon(\text{loc}_p(\mathbf{z})).$$

On considère la fonction L p -adique

$$L_p(\mathbf{h}_\mathbf{z}, s) = \mathcal{A}_{\omega_0}^c(\mathbf{h}_\mathbf{z})(s)$$

(où $\mathcal{A}_{\omega_0}^c$ est défini en 1.4.1). Alors cette fonction L p -adique admet un zéro

$$L_p(\mathbf{h}_\mathbf{z}, 0) = 0$$

et sa dérivée vaut

$$L'_p(\mathbf{h}_\mathbf{z}, 0) = \Gamma(h) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \langle \bar{\mathbf{z}}_0, i_{D,c}(d) \rangle$$

où $\bar{\mathbf{z}}_0$ est la projection de $\text{loc}_p(\mathbf{z}_0)$ dans $H^1(\mathbb{D}^*(\chi))$.

Démonstration. On fixe $\mathbf{z} \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}, V^*(1))$ vérifiant les conditions du théorème. On rappelle la décomposition (1.5)

$$\mathbf{h}_\mathbf{z} = \sum_{i=0}^{p-2} \delta_i h_i (\gamma_1 - 1).$$

On rappelle la définition de la fonction L p -adique (1.4.1)

$$L_p(\mathbf{h}_\mathbf{z}, s) = h_0(\chi(\gamma_1)^s - 1).$$

En utilisant la Proposition 2.4.1 on sait qu'il existe $\beta \in F^0 H_1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{H}(\Gamma) \otimes V)$ tel que

$$(\gamma - 1)\beta = \text{Exp}_{V,h}^{\varepsilon^{-1}}(d \otimes (1 + X)).$$

On a

$$\mathbf{h}_\mathbf{z} = (\gamma^{-1} - 1) \langle \text{loc}_p(\mathbf{z}), \beta^\iota \rangle_{V^*(1)}.$$

En utilisant la décomposition (1.5) il existe des $H_i \in \mathcal{H}_E$ tels que

$$\langle \text{loc}_p(\mathbf{z}), \beta^\iota \rangle_{V^*(1)} = \sum_{i=0}^{p-2} \delta_i H_i (\gamma_1 - 1)$$

alors

$$L_p(\mathbf{h}_\mathbf{z}, s) = (\chi(\gamma)^{-s} - 1) H_0 (\chi(\gamma_1)^s - 1).$$

En particulier, comme annoncé, on a

$$L_p(\mathbf{h}_\mathbf{z}, 0) = 0.$$

De plus, la dérivée en 0 vaut alors

$$L'_p(\mathbf{h}_\mathbf{z}, 0) = -\log(\chi(\gamma)) H_0(0). \tag{2.33}$$

Or

$$H_0(0) = \text{loc}_p(\mathbf{z}_0) \cup_V \text{pr}_0(\beta)$$

où \cup_V est le cup produit $H^1(\mathbb{Q}_p, V^*(1)) \times H^1(\mathbb{Q}_p, V) \rightarrow L$. Grâce à la Proposition 2.4.1 on sait que $\text{pr}_0(\beta)$ est dans l'image de l'injection de $H^1(\mathbb{D})$ dans $H^1(\mathbb{Q}_p, V)$. Par conséquent on projette $\text{loc}_p(\mathbf{z}_0)$ dans $H^1(\mathbb{D}^*(\chi))$, on note cet élément $\overline{\mathbf{z}}_0$ et

$$H_0(0) = \overline{\mathbf{z}}_0 \cup_{\mathbb{D}} \text{pr}_0(\beta).$$

Puisque $\mathbf{z}_0 \in H^1(D^\perp, V^*(1))$ on sait que $\overline{\mathbf{z}}_0 \in H^1(\mathbb{W}^*(\chi))$. Soit $\overline{\text{pr}_0(\beta)}$ la projection de $\text{pr}_0(\beta)$ modulo $H^1(\mathbb{D}_{-1})$. On a alors

$$H_0(0) = \overline{\mathbf{z}}_0 \cup_{\mathbb{W}} \overline{\text{pr}_0(\beta)}.$$

La Proposition 2.4.1 permet d'affirmer que

$$\overline{\text{pr}_0(\beta)} = -\Gamma(h) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} (\log(\chi(\gamma)))^{-1} i_{D,c}(d).$$

En injectant ce résultat dans la valeur de la dérivée ((2.33)) on obtient l'égalité souhaitée. \square

2.4.2. Dans ce paragraphe on suppose que V vérifie l'ensemble des conditions A et que D est un espace régulier. On suppose de plus que $\dim_E D^{\varphi=p^{-1}} = 1$. Alors, on a l'interprétation suivante de l'invariant \mathcal{L} .

Corollaire 2.4.4. *Soient $\mathbf{z} \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}, V^*(1))$ et $d \in D^{\varphi=p^{-1}}$ satisfaisant les conditions du Théorème 2.4.3. Soit $L_p(\mathbf{h}_z, s)$ la fonction L p -adique définie dans le Théorème 2.4.3. Si de plus $\dim_E D^{\varphi=p^{-1}} = 1$ alors la dérivée de $L_p(\mathbf{h}_z, s)$ en 0 s'écrit*

$$L'_p(\mathbf{h}_z, 0) = -\mathcal{L}(V, D)\Gamma(h) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} [\exp^*(\text{loc}_p(\mathbf{z}_0)), d]_V$$

où $[\ , \]_V : \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \times \mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1)) \rightarrow L$ est l'accouplement canonique et \exp^* est l'exponentielle duale de Bloch et Kato pour la représentation $V^*(1)$.

Démonstration. En utilisant la remarque 2.2.6 on a

$$\overline{\mathbf{z}}_0 = i_{D^\perp, c}(b^*) - \mathcal{L}(V^*(1), D^\perp) i_{D^\perp, f}(b^*)$$

pour un certain $b^* \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}^*(\chi))$. Dans notre cas $e = 1$ alors la Proposition 2.3.2 donne l'égalité $\mathcal{L}(V^*(1), D^\perp) = -\mathcal{L}(V, D)$. De plus, pour tout $b^* \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}^*(\chi))$ et $d \in D^{\varphi=p^{-1}}$ on a

$$\langle i_{D^\perp, c}(b^*), i_{D, f}(d) \rangle = -\langle i_{D^\perp, f}(b^*), i_{D, c}(d) \rangle.$$

De plus, $\langle i_{D^\perp, c}(b^*), i_{D, c}(d) \rangle = 0$ et $\langle i_{D^\perp, f}(b^*), i_{D, f}(d) \rangle = 0$ donc

$$\langle \overline{\mathbf{z}}_0, i_{D, c}(d) \rangle = -\mathcal{L}(V, D) \langle \overline{\mathbf{z}}_0, i_{D, f}(d) \rangle. \quad (2.34)$$

Pour $d \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}) = D^{\varphi=p^{-1}}$ on a

$$\exp_{\mathbb{W}}(d) = i_{D, f}(d).$$

Par functorialité de l'exponentielle on a

$$\exp_{\mathbb{W}}(d) = \exp_{\mathbb{D}}(d) \pmod{H^1(\mathbb{D}_{-1})},$$

en particulier on a

$$\langle \overline{\mathbf{z}_0}, i_{D,c}(d) \rangle = \overline{\mathbf{z}_0} \cup_{\mathbb{W}} i_{D,f}(d) = \overline{\mathbf{z}_0} \cup_{\mathbb{D}} \exp_{\mathbb{D}}(d).$$

En utilisant encore la functorialité on a

$$\langle \overline{\mathbf{z}_0}, i_{D,c}(d) \rangle = \text{loc}_p(\mathbf{z}_0) \cup_V \exp_V(d).$$

En injectant ce résultat dans l'équation (2.34) et en utilisant l'exponentielle duale on a

$$\langle \overline{\mathbf{z}_0}, i_{D,c}(d) \rangle = -\mathcal{L}(V, D) [\exp^*(\text{loc}_p(\mathbf{z}_0)), d]_V.$$

En injectant ce résultat dans le Théorème 2.4.3 on obtient l'égalité souhaitée. \square

Chapitre 3

Les fonctions L du produit de Rankin-Selberg

Dans une première section on définira les fonctions L complexes associées au produit de Rankin-Selberg de deux formes modulaires. Dans la seconde, on introduira les fonctions L p -adiques à trois variables de Urban interpolant les fonctions complexes de Rankin-Selberg. Ensuite, on étudie les représentations p -adiques associées au produit de Rankin-Selberg. Dans la quatrième section, on construira plusieurs familles de classes de cohomologies grâce aux éléments de Beilinson-Flach. Ceux ci seront utilisés dans la cinquième et dernière section pour donner de nouvelles écritures de la fonction L p -adique de Urban et de sa restriction suivant 3 droites différentes.

3.1 La fonction L complexe de Rankin-Selberg

Soient f et g deux formes modulaires primitives de poids respectifs k_0 et l_0 avec $l_0 \leq k_0$, de niveaux respectifs N_f et N_g et de caractères respectifs ε_f et ε_g

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n q^n.$$

A partir des deux développements de séries de Fourier on définit la série de convolution $D(f, g, s)$ de la manière suivante

$$D(f, g, s) := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n n^{-s}.$$

Grâce aux bornes sur a_n et b_n on peut déduire facilement que $D(f, g, s)$ converge sur le demi plan $\operatorname{Re}(s) > \frac{k_0+l_0}{2} + 1$.

On rappelle que pour tout nombre premier q , on note $\alpha_q(f)$ et $\sigma_q(f)$ les deux racines de Hecke de f et q , et $\alpha_q(g)$, $\sigma_q(g)$ celles de g .

Proposition 3.1.1. *Sur le demi plan $\operatorname{Re}(s) > \frac{k_0+l_0}{2} + 1$ la série $D(f, g, s)$ admet l'écriture en produit eulérien suivante*

$$D(f, g, s) = \prod_{q \text{ premier}} \left(1 - \frac{\alpha_q(f) \alpha_q(g) \sigma_q(f) \sigma_q(g)}{q^{2s}}\right) \left(1 - \frac{\alpha_q(f) \alpha_q(g)}{q^s}\right)^{-1} \times \\ \left(1 - \frac{\alpha_q(f) \sigma_q(g)}{q^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\sigma_q(f) \alpha_q(g)}{q^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\sigma_q(f) \sigma_q(g)}{q^s}\right)^{-1}.$$

Démonstration. Voir Lemme 2 de la section 5.4 de [Hid93]. \square

Définition 3.1.2. On définit la fonction L imprimitive de Rankin-Selberg associée au couple (f, g) comme étant le produit eulérien

$$L(f, g, s) := \prod_{q \text{ premier}} P_q(f, g, q^{-s})^{-1}$$

où

$$P_q(f, g, X) = (1 - \alpha_q(f) \alpha_q(g) X) (1 - \alpha_q(f) \sigma_q(g) X) \times \\ (1 - \sigma_q(f) \alpha_q(g) X) (1 - \sigma_q(f) \sigma_q(g) X).$$

Soit $N := \text{ppcm}(N_f, N_g)$. On note $L_{(N)}(\varepsilon_f \varepsilon_g, s)$ la fonction L de Dirichlet associée au caractère $\varepsilon_f \varepsilon_g$ vu modulo N . C'est la fonction $L(\varepsilon_f \varepsilon_g, s)$ où les facteurs eulériens pour $q \mid N$ ont été enlevés. Si $\varepsilon_f \varepsilon_g$ est primitif modulo N , les deux fonctions L sont égales. En utilisant les relations coefficients-racines du polynôme de Hecke on a

$$\prod_{q \text{ premier}} \left(1 - \frac{\alpha_q(f) \alpha_q(g) \sigma_q(f) \sigma_q(g)}{q^{2s}}\right) = \prod_{q \text{ premier}} \left(1 - \frac{\varepsilon_f(q) \varepsilon_g(q)}{q^{2s-k_0-l_0-2}}\right).$$

On a alors la décomposition

$$L(f, g, s) = L_{(N)}(\varepsilon_f \varepsilon_g, 2s - k_0 - l_0 + 2) D(f, g, s).$$

On rappelle la seconde écriture de la fonction L de Rankin-Selberg. Soit $M \in \mathbb{N}^*$ un entier non-nul et soit μ un caractère de Dirichlet modulo M . Soit $\lambda \in \mathbb{N}$ un entier tel que $\mu(-1) = (-1)^\lambda$. Pour $z \in \mathcal{H}$ un complexe dans le demi plan de Poincaré et $s \in \mathbb{C}$ on définit la série d'Eisenstein comme la série suivante

$$E_{\lambda, N}(z, s, \mu) = \sum'_{(m, n)} \frac{\mu(n)}{(mNz + n)^\lambda} \frac{1}{|mNz + n|^{2s}}$$

où $\sum'_{(m, n)}$ correspond à la sommation restreinte où (m, n) varie dans $\mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}$. Cette série est absolument convergente lorsque $\text{Re}(s) > 1 - \lambda/2$.

Proposition 3.1.3. Pour $\text{Re}(s) \gg 0$ on a

$$L(f, g, s) = \frac{(4\pi)^s}{2\Gamma(s)} \langle f^*(z), g(z) E_{k_0-l_0, N}(z, s+1-k_0, \varepsilon_f \varepsilon_g) \rangle_{k_0, N}$$

où $\langle f_1, f_2 \rangle_{k_0, N} := \int_{\Gamma_0(N)} f_1(z) \overline{f_2(z)} y^{k_0} \frac{dx dy}{y^2}$ avec $x = \text{Re}(z)$, $y = \text{Im}(z)$ est le produit de Petersson.

Démonstration. Voir la preuve du Théorème 2, en particulier l'équation (2.4) de [Shi76] par exemple. \square

Le comportement analytique de la fonction $E_{k_0-l_0, N}(z, s+1-k_0, \varepsilon_f \varepsilon_g)$ a été étudié par Rankin [Ran39], Selberg [SBM40] et Petersson [Pet49]. La fonction

$$s \mapsto \Gamma(s+k_0+l_0) E_{k_0-l_0, N}(z, s+1-k_0, \varepsilon_f \varepsilon_g)$$

admet un prolongement analytique sur \mathbb{C} lorsque $l_0 < k_0$. Si $l_0 = k_0$ alors elle admet un prolongement méromorphe sur \mathbb{C} avec un unique pôle simple en k_0 .

On définit la fonction complétée $\Lambda(f, g, s)$ de la fonction L de la manière suivante

$$\Lambda(f, g, s) := \Gamma(s) \Gamma(s-l_0+1) (2\pi)^{l_0-1-2s} L(f, g, s). \quad (3.1)$$

On rappelle que pour une forme modulaire f , f^* est la forme modulaire conjuguée définie par $f^*(z) = \overline{f(-\bar{z})}$.

Proposition 3.1.4. *Si f et g sont des formes primitives telles que $f^* \neq g$ alors la fonction Λ admet un prolongement holomorphe sur \mathbb{C} . Si $f^* = g$ alors la fonction $\Lambda(f, f^*, s)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{k_0\}$ et admet un pôle simple en k_0 .*

Démonstration. Théorème 1 de la section 9.4 de [Hid93] par exemple. \square

Théorème 3.1.5. *On suppose que les caractères de Dirichlet $\varepsilon_f, \varepsilon_g, \varepsilon_f \times \varepsilon_g$ sont primitifs modulo N_f, N_g, N respectivement. On note $d_f := N/N_f$ et $d_g := N/N_g$. On a alors une équation fonctionnelle*

$$\Lambda(f, g, s) = \epsilon(f, g, s) \Lambda(f^*, g^*, k_0 + l_0 - 1 - s) \quad (3.2)$$

avec

$$\epsilon(f, g, s) := (-1)^{l_0} \lambda_{N_f}(f) \lambda_{N_g}(g) G(\varepsilon_f \varepsilon_g) \overline{a_{d_g} b_{d_f}} N_f^{l_0-2} N_g^{k_0-2} (N N_f N_g)^{1-s}$$

où $G(\varepsilon_f \varepsilon_g)$ est la somme de Gauss associée au caractère $\varepsilon_f \varepsilon_g$, $\lambda_{N_f}(f)$, $\lambda_{N_g}(g)$ sont les pseudos valeurs propres de l'opérateur de Atkin-Lehner associées à f et g et a_{d_g} (respectivement b_{d_f}) est le coefficient d'indice d_g (respectivement d_f) de la décomposition en série de Fourier de f (respectivement g).

Démonstration. Théorème 1 de la section 9.5 de [Hid93] par exemple. \square

Remarque 3.1.6. [Discussion section 9.5 [Hid93]] Si les caractères ne sont pas primitifs il faudrait rajouter des facteurs eulériens supplémentaires à l'expression de Λ afin de retrouver une équation fonctionnelle formant alors un avatar du résultat précédent.

La fonction $\Lambda(f, g, s)$ ne s'annule pas pour $\operatorname{Re}(s) > \frac{k_0+l_0}{2}$. De plus, le Théorème 5.2 de Shahidi [Sha81] affirme que la fonction $L(f, g, s)$ ne s'annule pas en $\frac{k_0+l_0}{2}$. Lorsque $\frac{k_0+l_0}{2}$ est entier l'équation fonctionnelle permet de déduire l'ordre d'annulation de $L(f, g, j)$ pour tout j un entier. Si $\frac{k_0+l_0}{2}$ est un demi-entier alors on connaît l'ordre d'annulation de la fonction $L(f, g, s)$ à l'exception du point $s = \frac{k_0+l_0-1}{2}$

$$\operatorname{ord}_{s=j} L(f, g, s) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \geq l_0, j \neq \frac{k_0+l_0-1}{2} \\ 1 & \text{si } 1 \leq j \leq l_0 - 1 \\ 2 & \text{si } j \leq 0. \end{cases}$$

En particulier cela implique que la fonction $\Lambda(f, g, s)$ ne peut pas s'annuler en un point entier hors du point de symétrie.

Théorème 3.1.7 (Shimura, [Shi77]). *Si f et g sont des formes primitives alors*

$$\frac{\Lambda(f, g, j)}{j^{l_0 - k_0} G(\varepsilon_f) G(\varepsilon_g) \langle f, f \rangle_{k_0, N}} \in \mathbb{Q}(f, g) \quad , \forall j \in \mathbb{N} \cap [l_0, k_0 - 1].$$

Le résultat de Shimura permet de construire une fonction p -adique interpolant la fonction L de Rankin-Selberg sur $\mathbb{Z}_p \cap [l_0, k_0 - 1]$. La prochaine section introduit des fonctions analytiques p -adiques interpolant la fonction L de Rankin-Selberg.

3.2 Fonctions L p -adiques de Rankin-Selberg

Soient f et g deux formes primitives de poids k_0 et l_0 , de niveau N_f et N_g et de caractères ε_f et ε_g . On suppose que $2 \leq l_0 \leq k_0$. On fixe $p \geq 3$ un nombre premier ne divisant pas $N_f N_g$ tel que f et g soient p -régulières (voir Définition 1.7.1). Soient \mathbf{f} et \mathbf{g} les familles de Coleman passant respectivement par f_α et g_α définies dans la section 1.7. Quitte à réduire l'un des rayons p^{-r_f} où p^{-r_g} où r_f et r_g sont introduits dans la section 1.7 il est possible de supposer que $r_f = r_g$. On note

$$r := r_f = r_g.$$

On note le disque de \mathbb{Z}_p^2 lié au couple (f, g)

$$U_{f,g} := D(k_0, 1/p^{r-1}) \times D(l_0, 1/p^{r-1}).$$

Autrement dit $U_{f,g} = D((k_0, l_0), 1/p^{r-1})$ (voir (1.29)). On rappelle que les éléments de I^f et I^g sont respectivement les entiers k et l supérieurs à 2 dans $k_0 + p^{r-1}\mathbb{Z}_p$ et $l_0 + p^{r-1}\mathbb{Z}_p$ respectivement vérifiant

$$k \equiv k_0 \pmod{p-1}, \quad l \equiv l_0 \pmod{p-1}.$$

Les propriétés d'interpolations sont données pour les triplets (k, l, j) vérifiant

$$(k, l, j) \in I^f \times I^g \times \mathbb{Z}, \quad 2 \leq l \leq j < k. \quad (3.3)$$

Ce sont les triplets correspondant aux points critiques. On rappelle la définition de la fonction L p -adique de Urban à trois variables.

Théorème 3.2.1. [Urb14, Théorème 4.4.7] *Soit a une classe de congruence modulo $p-1$. Il existe une fonction p -adique analytique sur $U_{f,g} \times \mathbb{Z}_p$ que l'on note $L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^a)$, telle que pour tout triplet (k, l, j) vérifiant la relation (3.3) la propriété d'interpolation suivante soit satisfaite*

$$L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^a)(k, l, j) = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l, \omega^a, j)}{\mathcal{E}(\mathbf{f}_k)} \frac{\Gamma(j) \Gamma(j-l+1)}{(2\pi)^{2j-l+1} 2^{k-1} (-i)^{k-l} \langle \mathbf{f}_k^0, \mathbf{f}_k^0 \rangle_{k, N_f}} L(\mathbf{f}_k^0, \mathbf{g}_l^0, j). \quad (3.4)$$

Le facteur eulérien $\mathcal{E}(\mathbf{f}_k)$ est défini comme suit

$$\mathcal{E}(\mathbf{f}_k) = \left(1 - \frac{\beta_p(\mathbf{f}_k)}{p\alpha_p(\mathbf{f}_k)}\right) \left(1 - \frac{\beta_p(\mathbf{f}_k)}{\alpha_p(\mathbf{f}_k)}\right).$$

Si $j \equiv a \pmod{p-1}$ alors on définit $\mathcal{E}(\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l, j)$ par

$$\mathcal{E}(\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l, \omega^a, j) = \left(1 - \frac{p^{j-1}}{\alpha_p(\mathbf{f}_k) \alpha_p(\mathbf{g}_l)}\right) \left(1 - \frac{p^{j-1}}{\alpha_p(\mathbf{f}_k) \beta_p(\mathbf{g}_l)}\right) \times \\ \left(1 - \frac{\beta_p(\mathbf{f}_k) \alpha_p(\mathbf{g}_l)}{p^j}\right) \left(1 - \frac{\beta_p(\mathbf{f}_k) \beta_p(\mathbf{g}_l)}{p^j}\right)$$

sinon, si $j \not\equiv a \pmod{p-1}$, par

$$\mathcal{E}(\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l, \omega^a, j) = G(\omega^{j-a})^2 \frac{p^{2j-2}}{\alpha_p(f)^2 \alpha_p(g) \beta_p(g)}$$

où $G(\omega^{j-a})$ désigne la somme de Gauss de la puissance du caractère de Teichmüller.

Remarque 3.2.2. i) Le texte [Urb14] présente une lacune dans le raisonnement nécessaire pour la mise en place du théorème sus-cité. Celui ci est comblé depuis, voir l'appendice de [AI17].

ii) Les propriétés d'interpolation ne sont pas explicitement écrites dans [Urb14]. En effet, notre cas est en contradiction avec la condition 4) du Théorème 4.4.7. [Urb14]. Urban précise dans son texte que, lorsque cette condition n'est pas satisfaite, il faudrait alors rajouter certains facteurs eulériens. Dans les deux cas, $j \equiv a[p-1]$ et $j \not\equiv a[p-1]$ ces coefficients sont explicités dans le texte de Loeffler [Loe18].

iii) Lorsque f et g sont ordinaires, les familles de Coleman \mathbf{f} et \mathbf{g} coïncident, sur leur espace de définition, avec les familles de Hida associées à f et g (voir [Hid88]). La fonction de Urban, coïncide alors avec la fonction p -adique à 3 variables de Hida (voir [Hid88] où [Hid93]).

iv) L'ensemble des triplets vérifiant la condition (3.3) est un espace dense de $U_{f,g} \times \mathbb{Z}_p$, par continuité, les fonctions de Urban sont uniques.

v) Les fonctions $L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^a)$ et $L_p(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \omega^a)$ ne sont pas égales bien que les fonctions $L(f, g)$ et $L(g, f)$ le soient.

vi) La notation choisie pour \mathcal{E} diffère légèrement de celle prise par Kings, Loeffler et Zerbes. Les deux facteurs eulériens de $\mathcal{E}(\mathbf{f}_k)$ ne peuvent pas s'annuler :

Puisque $|\beta_p(\mathbf{f}_k)| = |\alpha_p(\mathbf{f}_k)|$ alors $1 - \frac{\beta_p(\mathbf{f}_k)}{p\alpha_p(\mathbf{f}_k)} \neq 0$. Puisque f est p -régulière on a $\alpha_p(f) \neq \beta_p(f)$ donc $1 - \frac{\beta_p(\mathbf{f}_k)}{\alpha_p(\mathbf{f}_k)} \neq 0$.

L'équation fonctionnelle suivante est satisfaite par la fonction de Urban à 3 variables

Théorème 3.2.3. *On suppose que les caractères de Dirichlet $\varepsilon_f, \varepsilon_g, \varepsilon_f \times \varepsilon_g$ soient primitifs modulo N_f, N_g, N respectivement. On note $d_f := N/N_f$ et $d_g := N/N_g$. Soit a une classe de congruence modulo $p-1$. On note a^* la classe de congruence de $k_0 + l_0 - 1 - a$ modulo $p-1$. L'équation fonctionnelle suivante est satisfaite. Pour tout triplet $(k, l, j) \in U_{f,g} \times \mathbb{Z}_p$ on a*

$$L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^a)(k, l, j) = \epsilon_p^{(\mathbf{f}, \mathbf{g}, a)}(k, l, j) L_p(\mathbf{f}^*, \mathbf{g}^*, \omega^{a^*})(k, l, k+l-1-j), \quad (3.5)$$

où le coefficient $\epsilon_p^{(\mathbf{f}, \mathbf{g}, a)}(k, l, j)$ est défini par

$$\epsilon_p^{(\mathbf{f}, \mathbf{g}, a)}(k, l, j) := (-1)^{l_0} \mathcal{A}^{wt}(\lambda_{N_f}(\mathbf{f}))(k) \mathcal{A}^{wt}(\lambda_{N_g}(\mathbf{g}))(l) G(\varepsilon_f \varepsilon_g) \overline{a_{d_g}(k) b_{d_f}(l)} \times \\ \omega(N_f)^{l_0-2} \langle N_f \rangle^{l-2} \omega(N_g)^{k_0-2} \langle N_g \rangle^{k-2} \omega(N N_f N_g)^{1-a} \langle N N_f N_g \rangle^{1-j}$$

où \bar{z} est le conjugué de z , où $a_{d_g}(k) := \varpi_k(a_{d_g})$ est le d_g -ième coefficient de la famille de Coleman \mathbf{f} évalué au poids k . De même $b_{d_f}(k)$ est de d_f -ième coefficient de la famille de Coleman \mathbf{g} évalué au poids k . Enfin, $\lambda_{N_f}(\mathbf{f})$ et $\lambda_{N_g}(\mathbf{g})$ sont les interpolations des pseudo-valeurs propres de Atkin-Lehner définies en 1.7.6.

Démonstration. Soit a une classe de congruence modulo $p-1$. Soit (k, l, j) un triplet vérifiant (3.3). La définition de la fonction L complétée Λ de Rankin-Selberg (3.1) injectée dans l'équation (3.4) donne

$$L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^a)(k, l, j) = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l, \omega^a, j)}{\mathcal{E}(\mathbf{f}_k)} \frac{1}{(-i)^{k-l} 2^{k-1} \langle \mathbf{f}_k^0, \mathbf{f}_k^0 \rangle_{k, N_f}} \Lambda(\mathbf{f}_k^0, \mathbf{g}_l^0, j).$$

En utilisant l'équation fonctionnelle 3.2 du Théorème 3.1.5 on obtient

$$L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^a)(k, l, j) = \epsilon(\mathbf{f}_k^0, \mathbf{g}_l^0, j) \frac{\mathcal{E}(\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l, \omega^a, j)}{\mathcal{E}(\mathbf{f}_k)} \frac{\Lambda(\mathbf{f}_k^{0,*}, \mathbf{g}_l^{0,*}, k+l-1-j)}{(-i)^{k-l} 2^{k-1} \langle \mathbf{f}_k^0, \mathbf{f}_k^0 \rangle_{k, N_f}} \quad (3.6)$$

où $\epsilon(\mathbf{f}_k^0, \mathbf{g}_l^0, j)$ est défini dans le Théorème 3.1.5. On rappelle sa valeur

$$\epsilon(\mathbf{f}_k^0, \mathbf{g}_l^0, j) := (-1)^l \lambda_{N_f}(\mathbf{f}_k^0) \lambda_{N_g}(\mathbf{g}_l^0) G(\varepsilon_f \varepsilon_g) \overline{a_{d_g}(k) b_{d_f}(l)} N_f^{l-2} N_g^{k-2} (N N_f N_g)^{1-j}.$$

L'utilisation directe du Théorème 3.1.5 donne le d_g -ième coefficient de la forme primitive \mathbf{f}_k^0 . Cependant p ne divise pas d_g c'est donc aussi le d_g -ième coefficient de sa p -stabilisation. Le même raisonnement justifie la présence de b_{d_f} . Cela valide la forme du coefficient ϵ donnée, en particulier $a_{d_g} b_{d_f}$ est une fonction analytique de $U_{f,g}$. Les relations (1.20) entre les racines de Hecke d'une forme modulaire et les racines de sa forme conjuguée impliquent les égalités

$$\mathcal{E}(\mathbf{f}_k) = \mathcal{E}(\mathbf{f}_k^*), \quad \mathcal{E}(\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l, \omega^a, j) = \mathcal{E}(\mathbf{f}_k^*, \mathbf{g}_l^*, \omega^{a^*}, k+l-1-j)$$

où a^* désigne la classe de congruence de $k_0 + l_0 - 1 - a$ modulo $p-1$. En revenant à la définition du produit de Petersson il est facile de voir que

$$\langle \mathbf{f}_k^0, \mathbf{f}_k^0 \rangle_{k, N_f} = \langle \mathbf{f}_k^{0,*}, \mathbf{f}_k^{0,*} \rangle_{k, N_f}.$$

En injectant ces équations dans (3.6) on obtient

$$L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^a)(k, l, j) = \epsilon(\mathbf{f}_k^0, \mathbf{g}_l^0, j) \frac{\mathcal{E}(\mathbf{f}_k^*, \mathbf{g}_l^*, \omega^{a^*}, k+l-1-j)}{\mathcal{E}(\mathbf{f}_k^*)} \frac{\Lambda(\mathbf{f}_k^{0,*}, \mathbf{g}_l^{0,*}, k+l-1-j)}{(-i)^{k-l} 2^{k-1} \langle \mathbf{f}_k^{0,*}, \mathbf{f}_k^{0,*} \rangle_{k, N_f}}.$$

Si (k, l, j) vérifie (3.3) alors le triplet $(k, l, k+l-1-j)$ est un triplet de I^{f^*, g^*, a^*} qui vérifie $2 \leq l \leq k+l-1-j < k$. En utilisant de nouveau la propriété d'interpolation (3.4) avec le couple de familles de Coleman $(\mathbf{f}^*, \mathbf{g}^*)$ on a pour tout triplet (k, l, j) vérifiant (3.3) la relation suivante

$$L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^a)(k, l, j) = \epsilon(\mathbf{f}_k^0, \mathbf{g}_l^0, j) L_p(\mathbf{f}^*, \mathbf{g}^*, \omega^{a^*})(k, l, k+l-1-j).$$

Les triplets vérifiant (3.3) forment un espace dense de $U_{f,g} \times \mathbb{Z}_p$. Le facteur ϵ admet comme interpolation p -adique sur $U_{f,g} \times \mathbb{Z}_p$ le facteur analytique $\epsilon_p^{(\mathbf{f}, \mathbf{g}, a)}$ défini dans l'énoncé. Par continuité des fonctions L p -adique et du facteur $\epsilon_p^{(\mathbf{f}, \mathbf{g}, a)}$ le résultat voulu est prouvé. \square

3.3 Représentations p -adiques et produit de Rankin-Selberg

Le but de cette section est de mettre en avant certains éléments et certaines constructions sur les (φ, Γ) -modules associés au produit de Rankin-Selberg. Cette section est un glossaire utilisé dans les sections suivantes. Bien que certaines définitions soient similaires, une liste exhaustive semblait être la meilleure approche.

Soient f et g deux formes primitives de poids k_0 et l_0 , de niveaux N_f et N_g et de caractères ε_f et ε_g . Soit $N := \text{ppcm}(N_f, N_g)$. Soit $p \geq 3$ un nombre premier tel que $p \nmid N$ et tel que f et g soient p -régulières. On note \mathbf{f} et \mathbf{g} les familles de Coleman associée à f et g .

Dans les deux premiers paragraphes on s'intéresse aux (φ, Γ) associés à \mathbf{f} et \mathbf{g} , dans les deux suivant on se penche sur leur duals. Dans le dernier paragraphe on définit la notion de spécialisation en un triplet de poids.

3.3.1. Soient $V_{\mathbf{f}}$ et $V_{\mathbf{g}}$ les représentations de Deligne en familles associées à \mathbf{f} et \mathbf{g} à coefficients dans des E -algèbres affinoïdes $A_{\mathbf{f}}$ et $A_{\mathbf{g}}$ (voir Théorèmes 1.7.2 et et 1.7.3). On note

$$V_{\mathbf{f}, \mathbf{g}} := V_{\mathbf{f}} \widehat{\otimes}_E V_{\mathbf{g}}.$$

On rappelle les définitions de (φ, Γ) -modules associés aux familles \mathbf{f} et \mathbf{g}

$$\mathbb{D}_{\mathbf{f}} := \mathbb{D}_{\text{rig}, A_{\mathbf{f}}}^{\dagger}(V_{\mathbf{f}}), \quad \mathbb{D}_{\mathbf{g}} := \mathbb{D}_{\text{rig}, A_{\mathbf{g}}}^{\dagger}(V_{\mathbf{g}}).$$

On rappelle que ces modules sont équipés de filtrations données par les suites exactes courtes (voir 1.7.4)

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{F}^+ \mathbb{D}_{\mathbf{f}} \rightarrow \mathbb{D}_{\mathbf{f}} \rightarrow \mathcal{F}^- \mathbb{D}_{\mathbf{f}} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{F}^+ \mathbb{D}_{\mathbf{g}} \rightarrow \mathbb{D}_{\mathbf{g}} \rightarrow \mathcal{F}^- \mathbb{D}_{\mathbf{g}} \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

On note $A_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}$ le produit tensoriel des algèbres $A_{\mathbf{f}}$ et $A_{\mathbf{g}}$

$$A_{\mathbf{f}, \mathbf{g}} := A_{\mathbf{f}} \widehat{\otimes}_E A_{\mathbf{g}}.$$

On note $\mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}$ le produit tensoriel des modules $\mathbb{D}_{\mathbf{f}}$ et $\mathbb{D}_{\mathbf{g}}$

$$\mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}} := \mathbb{D}_{\mathbf{f}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}_E} \mathbb{D}_{\mathbf{g}}.$$

C'est un (φ, Γ) -module de rang 4 sur l'algèbre $\mathcal{R}_{A_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}}$ et on a un isomorphisme

$$\mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}} \simeq \mathbb{D}_{\text{rig}, A_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}}^{\dagger}(V_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}).$$

Grâce aux filtrations (3.7) on définit le sous-module de rang 3

$$\mathcal{F}^{\circ} \mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}} := \mathcal{F}^+ \mathbb{D}_{\mathbf{f}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}_E} \mathbb{D}_{\mathbf{g}} + \mathbb{D}_{\mathbf{f}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}_E} \mathcal{F}^+ \mathbb{D}_{\mathbf{g}}, \tag{3.8}$$

le sous-module de rang 2

$$\mathcal{F}^{+ \circ} \mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}} := \mathcal{F}^+ \mathbb{D}_{\mathbf{f}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}_E} \mathbb{D}_{\mathbf{g}} \tag{3.9}$$

ainsi que les modules de rang 1

$$\mathcal{F}^{++}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}} := \mathcal{F}^+\mathbb{D}_{\mathbf{f}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}_E} \mathcal{F}^+\mathbb{D}_{\mathbf{g}}, \quad \mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}} := \mathcal{F}^+\mathbb{D}_{\mathbf{f}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}_E} \mathcal{F}^-\mathbb{D}_{\mathbf{g}}. \quad (3.10)$$

On a la triangulation de $\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}$ suivante

$$\{0\} \subset \mathcal{F}^{++}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \subset \mathcal{F}^{+\circ}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \subset \mathcal{F}^{\circ\circ}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \subset \mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}. \quad (3.11)$$

On a l'identification suivante induite par le Théorème 1.7.4

$$\mathcal{F}^{++}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \simeq \mathcal{R}_{A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}} \left(\widetilde{\delta}_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \right) \quad \text{où} \quad \widetilde{\delta}_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \Big|_{\mathbb{Z}_p^\times} = 1, \quad \widetilde{\delta}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}(p) = \alpha_p(\mathbf{f}) \alpha_p(\mathbf{g}). \quad (3.12)$$

On note $\chi_{\mathbf{g}}$ le caractère continu de $\mathbb{Q}_p^\times \rightarrow A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}$ défini par $\chi_{\mathbf{g}}(p) = 1$ et sur \mathbb{Z}_p^\times comme la composition

$$\chi_{\mathbf{g}} \Big|_{\mathbb{Z}_p^\times} : \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\chi^{-1}} \Gamma \xrightarrow{\chi} A_{\mathbf{g}} \hookrightarrow A_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \quad (3.13)$$

où χ^{-1} est l'inverse de l'isomorphisme donné par la caractère cyclotomique $\chi : \Gamma \simeq \mathbb{Z}_p^\times$ et où χ est le caractère défini en (1.30). On a l'identification suivante induite par le Théorème 1.7.4

$$\mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \simeq \mathcal{R}_{A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}} (\delta_{\mathbf{f},\mathbf{g}}) \quad \text{où} \quad \delta_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \Big|_{\mathbb{Z}_p^\times} = \chi_{\mathbf{g}}^{-1} \chi, \quad \delta_{\mathbf{f},\mathbf{g}}(p) = \frac{\alpha_p(\mathbf{f})}{\alpha_p(\mathbf{g}^*)}. \quad (3.14)$$

On définit le module

$$M_{\mathbf{f},\mathbf{g}} := \mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}} (\chi_{\mathbf{g}}) \quad (3.15)$$

Quitte à réduire le rayons p^{-rf} et p^{-rg} il est possible de supposer que la p -valuation de $\frac{\alpha_p(\mathbf{f})}{\alpha_p(\mathbf{g}^*)}$ est constante sur $\text{Spm}(A_{\mathbf{f},\mathbf{g}})$. Ainsi, le module $M_{\mathbf{f},\mathbf{g}}$ est cristallin de rang 1, de poids de Hodge-Tate 1 et de pente constante.

3.3.2. Pour tout poids classique $k \in I^f$ on rappelle l'existence du morphisme de spécialisation $\varpi_k : A_{\mathbf{f}} \rightarrow E$ défini en (1.31). Il induit un morphisme

$$\varpi_k : \mathbb{D}_{\mathbf{f}} \rightarrow \mathbb{D}_{\mathbf{f}_k}, \quad \text{où} \quad \mathbb{D}_{\mathbf{f}_k} := \mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(V_{\mathbf{f}_k})$$

et une filtration sur $\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k}$ grâce à celle de $\mathbb{D}_{\mathbf{f}}$. Lorsqu'on travaille sur l'algèbre $A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}$ il peut être intéressant de spécialiser uniquement $A_{\mathbf{f}}$. On note

$$\varpi_k^{\mathbf{f}} := \varpi_k \otimes \text{Id} : A_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \rightarrow A_{\mathbf{g}}. \quad (3.16)$$

Ce morphisme induit un morphisme compatible avec les filtrations

$$\varpi_k^{\mathbf{f}} : \mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \rightarrow \mathbb{D}_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}} \quad \text{où} \quad \mathbb{D}_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}} = \mathbb{D}_{\mathbf{f}_k} \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}_E} \mathbb{D}_{\mathbf{g}}.$$

On note le sous-quotient et la sous-représentation de rang 1

$$\mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}} := \mathcal{F}^+\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k} \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}_E} \mathcal{F}^-\mathbb{D}_{\mathbf{g}}, \quad \mathcal{F}^{++}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}} := \mathcal{F}^+\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k} \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}_E} \mathcal{F}^+\mathbb{D}_{\mathbf{g}}. \quad (3.17)$$

On a les identifications suivantes induites par (3.14) et (3.12)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}} &\simeq \mathcal{R}_{A_{\mathbf{g}}} (\delta_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}}) & \text{où} & \quad \delta_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}} \Big|_{\mathbb{Z}_p^\times} = \chi^{-1} \chi, \quad \delta_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}}(p) = \frac{\alpha_p(\mathbf{f}_k)}{\alpha_p(\mathbf{g}^*)}, \\ \mathcal{F}^{++}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}} &\simeq \mathcal{R}_{A_{\mathbf{g}}} \left(\widetilde{\delta}_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}} \right) & \text{où} & \quad \widetilde{\delta}_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}} \Big|_{\mathbb{Z}_p^\times} = 1, \quad \widetilde{\delta}_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}}(p) = \alpha_p(\mathbf{f}_k) \alpha_p(\mathbf{g}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

où χ est vu comme un caractère de \mathbb{Z}_p^\times à travers l'identification $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p^\times$ induite par le caractère cyclotomique. Le caractère $\delta_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}}$ est la spécialisation du caractère $\delta_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}}$, c'est-à-dire $\delta_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}} = \varpi_k^f \circ \delta_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}}$. On rappelle l'isomorphisme défini en (1.33)

$$(\mathrm{Pr}^\alpha)^* : V_{\mathbf{f}_k^0} \rightarrow V_{\mathbf{f}_k}$$

où \mathbf{f}_k^0 est la forme primitive de niveau N_f et de poids k dont la p -stabilisation est \mathbf{f}_k . L'isomorphisme $(\mathrm{Pr}^\alpha)^*$ induit un isomorphisme que l'on note de la même manière

$$(\mathrm{Pr}^\alpha)^* : \mathbb{D}_{\mathbf{f}_k^0} \rightarrow \mathbb{D}_{\mathbf{f}_k} \quad \text{où} \quad \mathbb{D}_{\mathbf{f}_k^0} := \mathbb{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V_{\mathbf{f}_k^0}).$$

On note de manière analogue à (3.17)

$$\mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}} := \mathcal{F}^+\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k^0} \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}_E} \mathcal{F}^-\mathbb{D}_{\mathbf{g}}.$$

On a un isomorphisme

$$(\mathrm{Pr}^\alpha \times \mathrm{Id})^* : \mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k^0, \mathbf{g}} \rightarrow \mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}}.$$

On définit les deux modules cristallins

$$M_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}} := \mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}}(\chi), \quad M_{\mathbf{f}_k^0, \mathbf{g}} := \mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k^0, \mathbf{g}}(\chi). \quad (3.19)$$

On considère maintenant $k = k_0$, alors $\mathbf{f}_{k_0} = f_\alpha$ et $\mathbf{f}_{k_0}^0 = f$. Quitte à réduire le rayon p^{-r_g} on suppose que la p -valuation de $\frac{\alpha_p(f)}{\alpha_p(\mathbf{g}^*)}$ est constante sur $\mathrm{Spm}(A_{\mathbf{g}})$. Les modules $M_{f, \mathbf{g}}$ et $M_{f_\alpha, \mathbf{g}}$ sont donc cristallins de rang 1, d'unique poids de Hodge-Tate égal à 1 et de pente constante.

3.3.3. Soient $V_{\mathbf{f}}^*$ et $V_{\mathbf{g}}^*$ les représentations duales de $V_{\mathbf{f}}$ et $V_{\mathbf{g}}$. On note $V_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^*$ le produit tensoriel de ces représentations. On a

$$V_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^* := V_{\mathbf{f}}^* \widehat{\otimes}_E V_{\mathbf{g}}^* = (V_{\mathbf{f}, \mathbf{g}})^*. \quad (3.20)$$

On rappelle que $\mathbb{D}_{\mathbf{f}}^*$ et $\mathbb{D}_{\mathbf{g}}^*$ désignent respectivement les duaux de $\mathbb{D}_{\mathbf{f}}$ et $\mathbb{D}_{\mathbf{g}}$. On a

$$\mathbb{D}_{\mathbf{f}}^* = \mathbb{D}_{\mathrm{rig}, A_{\mathbf{f}}}^\dagger(V_{\mathbf{f}}^*), \quad \mathbb{D}_{\mathbf{g}}^* = \mathbb{D}_{\mathrm{rig}, A_{\mathbf{g}}}^\dagger(V_{\mathbf{g}}^*).$$

On note $\mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^*$ le dual de $\mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}$. On a les trois écritures équivalentes

$$\mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^* = \mathbb{D}_{\mathbf{f}}^* \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}_E} \mathbb{D}_{\mathbf{g}}^* \simeq \mathbb{D}_{\mathrm{rig}, A_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}}^\dagger(V_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^*). \quad (3.21)$$

On rappelle les deux suites exactes courtes (voir (1.32)) duales des suites exactes (3.7)

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{F}^+\mathbb{D}_{\mathbf{f}}^* \rightarrow \mathbb{D}_{\mathbf{f}}^* \rightarrow \mathcal{F}^-\mathbb{D}_{\mathbf{f}}^* \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{F}^+\mathbb{D}_{\mathbf{g}}^* \rightarrow \mathbb{D}_{\mathbf{g}}^* \rightarrow \mathcal{F}^-\mathbb{D}_{\mathbf{g}}^* \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

On définit $\mathcal{F}^{-\circ}\mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^*$ le quotient de $\mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^*$ suivant

$$\mathcal{F}^{-\circ}\mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^* := \mathcal{F}^-\mathbb{D}_{\mathbf{f}}^* \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}_E} \mathbb{D}_{\mathbf{g}}^*.$$

C'est un (φ, Γ) -module de rang 2 sur $A_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}$ et le dual du (φ, Γ) -module défini en (3.9)

$$\mathcal{F}^{-\circ} \mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^* = (\mathcal{F}^{+\circ} \mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}})^* .$$

On définit les (φ, Γ) -modules de rang 1 sur $A_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}$ suivants

$$\mathcal{F}^{--} \mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^* := \mathcal{F}^- \mathbb{D}_{\mathbf{f}}^* \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}_E} \mathcal{F}^- \mathbb{D}_{\mathbf{g}}^* , \quad \mathcal{F}^{-+} \mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^* := \mathcal{F}^- \mathbb{D}_{\mathbf{f}}^* \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}_E} \mathcal{F}^+ \mathbb{D}_{\mathbf{g}}^* .$$

On peut aussi exprimer ces modules comme les duals de ceux définis en (3.10)

$$\mathcal{F}^{--} \mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^* = (\mathcal{F}^{++} \mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}})^* , \quad \mathcal{F}^{-+} \mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^* = (\mathcal{F}^{+-} \mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}})^* .$$

En prenant le dual des identifications (3.12) et (3.14) on a

$$\mathcal{F}^{--} \mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^* \simeq \mathcal{R}_{A_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}} \left(\widetilde{\delta}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^{-1} \right) , \quad \mathcal{F}^{-+} \mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^* \simeq \mathcal{R}_{A_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}} \left(\delta_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^{-1} \right) . \quad (3.23)$$

Les filtrations (3.22) impliquent la suite exacte courte suivante

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^{-+} \mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^* \rightarrow \mathcal{F}^{-\circ} \mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^* \rightarrow \mathcal{F}^{--} \mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^* \rightarrow 0 \quad (3.24)$$

3.3.4. Soit $\mathbb{D}_{f_\alpha}^*$ le (φ, Γ) -module induit par la spécialisation au poids k_0 du module $\mathbb{D}_{\mathbf{f}}^*$

$$\mathbb{D}_{f_\alpha}^* := \varpi_{k_0} (\mathbb{D}_{\mathbf{f}}^*) = \mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger (V_{f_\alpha}^*) .$$

On note \mathbb{D}_f^* le (φ, Γ) -module associé à la forme f , c'est-à-dire,

$$\mathbb{D}_f^* := \mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger (V_f^*) .$$

On rappelle l'isomorphisme $(\text{Pr}^\alpha)_*$ défini en (1.28) induisant un isomorphisme que l'on désigne par le même symbole

$$(\text{Pr}^\alpha)_* : \mathbb{D}_{f_\alpha}^* \rightarrow \mathbb{D}_f^* .$$

Les deux modules précédents sont munis de filtrations induites par (3.22) à travers le morphisme de spécialisation et le morphisme $(\text{Pr}^\alpha)_*$. En particulier, on définit le module de rang 2

$$\mathcal{F}^{-\circ} \mathbb{D}_{f, \mathbf{g}}^* := \mathcal{F}^- \mathbb{D}_f^* \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}_E} \mathbb{D}_{\mathbf{g}}^*$$

et les deux modules de rang 1

$$\mathcal{F}^{--} \mathbb{D}_{f, \mathbf{g}}^* := \mathcal{F}^- \mathbb{D}_f^* \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}_E} \mathcal{F}^- \mathbb{D}_{\mathbf{g}}^* , \quad \mathcal{F}^{-+} \mathbb{D}_{f, \mathbf{g}}^* := \mathcal{F}^- \mathbb{D}_f^* \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}_E} \mathcal{F}^+ \mathbb{D}_{\mathbf{g}}^* .$$

Le module $\mathcal{F}^{-\circ} \mathbb{D}_{f, \mathbf{g}}^*$ s'exprime aussi grâce au foncteur $\mathbb{D}_{\text{rig}, A_{\mathbf{g}}}^\dagger$

$$\mathcal{F}^{-\circ} \mathbb{D}_{f, \mathbf{g}}^* \simeq \mathbb{D}_{\text{rig}, A_{\mathbf{g}}}^\dagger (V_{f, \mathbf{g}}^*)$$

où

$$V_{f, \mathbf{g}}^* := V_f^* \widehat{\otimes}_E V_{\mathbf{g}}^* \quad (3.25)$$

On spécialise le poids de la famille \mathbf{f} dans les identifications (3.23) grâce au morphisme $\varpi_{k_0}^{\mathbf{f}}$ défini en (3.16) et on identifie la version non-stabilisée grâce au morphisme $(\text{Pr}^\alpha \times \text{Id})_*$. On obtient alors l'identification

$$\mathcal{F}^{--} \mathbb{D}_{f, \mathbf{g}}^* \simeq \mathcal{R}_{A_{\mathbf{g}}} \left(\widetilde{\delta}_{f, \mathbf{g}}^{-1} \right) , \quad \mathcal{F}^{-+} \mathbb{D}_{f, \mathbf{g}}^* \simeq \mathcal{R}_{A_{\mathbf{g}}} \left(\delta_{f, \mathbf{g}}^{-1} \right) \quad (3.26)$$

où les morphismes $\delta_{f, \mathbf{g}} := \varpi_{k_0}^{\mathbf{f}} \circ \delta_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}$ et $\widetilde{\delta}_{f, \mathbf{g}} := \varpi_{k_0}^{\mathbf{f}} \circ \widetilde{\delta}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}$ sont respectivement égaux à $\delta_{\mathbf{f}, k_0, \mathbf{g}}$ et $\widetilde{\delta}_{f, \mathbf{g}}$ définis en (3.18). On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^{-+} \mathbb{D}_{f, \mathbf{g}}^* (\chi^{2-k_0}) \rightarrow \mathcal{F}^{-\circ} \mathbb{D}_{f, \mathbf{g}}^* (\chi^{2-k_0}) \rightarrow \mathcal{F}^{--} \mathbb{D}_{f, \mathbf{g}}^* (\chi^{2-k_0}) \rightarrow 0 . \quad (3.27)$$

Lemme 3.3.1. *Quitte à réduire le rayon p^{-r_g} on a*

$$H^0(\mathcal{F}^{--}\mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0})) = 0.$$

Démonstration. Par (3.26) on sait que $\mathcal{F}^{--}\mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0})$ est un module cristallin d'unique poids de Hodge-Tate $2 - k_0$, il est isomorphe au module $\mathcal{R}_{A_{\mathbf{g}}}(\tilde{\delta}_{f,\mathbf{g}}^{-1}\chi^{2-k_0})$ où par abus de langage χ est étendu à un caractère de \mathbb{Q}_p^\times en fixant $\chi(p) = 1$. Afin d'utiliser la Proposition 1.3.4 i) il faut montrer que

$$\tilde{\delta}_{f,\mathbf{g}}(p) \neq p^{k_0-2}. \quad (3.28)$$

On rappelle que $\tilde{\delta}_{f,\mathbf{g}}(p) = \alpha_p(f)\alpha_p(\mathbf{g})$. Pour tout $l \in I^g$ l'égalité (1.19) donne

$$|\alpha_p(f)\alpha_p(\mathbf{g}_l)| = p^{\frac{k_0+l}{2}-1}$$

donc si $l \neq k_0 - 2$ on a $\alpha_p(f)\alpha_p(\mathbf{g}_l) \neq p^{k_0-2}$. Or il existe un tel l dans I^g donc l'équation (3.28) est satisfaite et la Proposition 1.3.4 i) induit le résultat souhaité. \square

La suite exacte longue de la cohomologie induite par (3.27) donne, grâce au Lemme 3.3.1 la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(\mathcal{F}^{--}\mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0})) \rightarrow H^1(\mathcal{F}^{--}\mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0})) \rightarrow H^1(\mathcal{F}^{--}\mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0})). \quad (3.29)$$

3.3.5. On rappelle que, quitte à réduire r_f où r_g , l'on pose $r = r_f = r_g$. On rappelle aussi que l'on note

$$U_{f,g} := D((k_0, l_0), 1/p^{r-1}) = D(k_0, 1/p^{r-1}) \times D(k_0, 1/p^{r-1}).$$

Soit $(x, y) \in U_{f,g}$ un couple de poids. On appelle morphisme de spécialisation des familles \mathbf{f} et \mathbf{g} en (x, y) le morphisme défini par

$$\varpi_{x,y} : \varpi_x \otimes \varpi_y : \begin{cases} A_{\mathbf{f},\mathbf{g}} & \rightarrow E \\ F & \mapsto \mathcal{A}^{\text{wt}}(F)(x, y) \end{cases}. \quad (3.30)$$

Ce morphisme admet aussi l'écriture suivante

$$\varpi_{x,y} = \varpi_y \circ \varpi_x^{\mathbf{f}}$$

où $\varpi_x^{\mathbf{f}}$ est défini en (3.16), et $\varpi_y : A_{\mathbf{g}} \rightarrow E$ est la spécialisation de la famille \mathbf{g} définie en (1.31) pour l'algèbre $A_{\mathbf{g}}$. Pour $(k, l) \in I^f \times I^g$ un couple de poids classique on note de la même façon

$$\varpi_{k,l} : V_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \rightarrow V_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}_l}, \quad \varpi_{k,l} : \mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \rightarrow \mathbb{D}_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}_l}$$

où

$$V_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}_l} := V_{\mathbf{f}_k} \otimes_E V_{\mathbf{g}_l}, \quad \mathbb{D}_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}_l} := \mathbb{D}_{\mathbf{f}_k} \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathbb{D}_{\mathbf{g}_l}. \quad (3.31)$$

On définit aussi le sous- (φ, Γ) -module de dimension 2

$$\mathcal{F}^{+\circ}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}_l} := \mathcal{F}^+\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k} \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathbb{D}_{\mathbf{g}_l} \quad (3.32)$$

et les (φ, Γ) -modules de rang 1

$$\mathcal{F}^{++}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}_l} := \mathcal{F}^+\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k} \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{F}^+\mathbb{D}_{\mathbf{g}_l}, \quad \mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k,\mathbf{g}_l} := \mathcal{F}^+\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k} \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{F}^-\mathbb{D}_{\mathbf{g}_l}. \quad (3.33)$$

En spécialisant l'identification (3.12) on a

$$\mathcal{F}^{++}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l} \simeq \mathcal{R}_E \left(\tilde{\delta}_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l} \right) \quad \text{où} \quad \tilde{\delta}_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l} \Big|_{\mathbb{Z}_p^\times} = 1, \quad \tilde{\delta}_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l}(p) = \alpha_p(\mathbf{f}_k) \alpha_p(\mathbf{g}_l), \quad (3.34)$$

$$\mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l} \simeq \mathcal{R}_E(\delta_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l}) \quad \text{où} \quad \delta_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l} \Big|_{\mathbb{Z}_p^\times} = \chi^{1-l}, \quad \delta_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l}(p) = \frac{\alpha_p(\mathbf{f}_k) \beta_p(\mathbf{g}_l)}{p^{l-1}}. \quad (3.35)$$

On note aussi

$$\mathcal{F}^{-\circ}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l}^* := \mathcal{F}^{-}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k}^* \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathbb{D}_{\mathbf{g}_l}^*$$

le dual de $\mathcal{F}^{+\circ}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l}$ et

$$\mathcal{F}^{--}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l}^* := \mathcal{F}^{-}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k}^* \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{F}^{-}\mathbb{D}_{\mathbf{g}_l}^* \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{-+}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l}^* := \mathcal{F}^{-}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k}^* \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{F}^{+}\mathbb{D}_{\mathbf{g}_l}^*$$

les duals de $\mathcal{F}^{++}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l}$ et $\mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l}$ respectivement.

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on note la spécialisation de la partie cyclotomique en j le morphisme compatible avec l'action de Γ

$$\varpi_j^c : \begin{cases} \mathcal{H}_E(\Gamma)^\iota & \rightarrow E(-j) \\ H & \mapsto \mathcal{A}_{\omega^j}^c(H)(j). \end{cases} \quad (3.36)$$

Enfin, on appelle spécialisation au triplet (k, l, j) le morphisme défini par

$$\varpi_{k,l,j}^c : \begin{cases} \mathcal{H}_{A_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}}(\Gamma)^\iota & \rightarrow E(-j) \\ F & \mapsto \mathcal{A}_{\omega^j}(F)(k, l, j). \end{cases}$$

Il coïncide avec les compositions $\varpi_{k,l} \circ \varpi_j^c$ et $\varpi_j^c \circ \varpi_{k,l}$. On appelle aussi spécialisation au triplet (k, l, j) le morphisme induit sur la cohomologie d'Iwasawa

$$\varpi_{k,l,j}^c : H_{\text{Iw}}(\mathbb{Q}_p, V_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^*) \simeq H^1(\mathbb{Q}_p, V_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^* \otimes_E \mathcal{H}_E(\Gamma)^\iota) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, V_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l}^*(-j)). \quad (3.37)$$

Ce morphisme induit aussi le morphisme sur la cohomologie des (φ, Γ) -modules

$$\varpi_{k,l,j}^c : H_{\text{Iw}}(\mathcal{F}^{-+}\mathbb{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^*) \rightarrow H^1(\mathcal{F}^{-+}\mathbb{D}_{\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l}^*(\chi^{-j})). \quad (3.38)$$

3.4 Éléments de Beilinson-Flach

Le but de cette section est de construire l'ensemble des éléments de Beilinson-Flach nécessaires à notre travail. Ces éléments seront utilisés dans la section suivante pour donner une seconde écriture de la fonction L p -adique à trois variables définie en section 3.2 ainsi que certaines de ses restrictions. Dans le premier paragraphe, on définit quelques outils nécessaires à cette construction. Dans le second paragraphe, on introduit les éléments de Beilinson-Flach permettant de construire l'ensemble des éléments de Beilinson-Flach nécessaires pour nos travaux. En particulier, on construit :

- Un élément de Beilinson-Flach pour des couples de formes modulaires (3.4.3).
- Un élément de Beilinson-Flach pour une forme modulaire et une famille de Coleman (3.4.4).
- Un élément de Beilinson-Flach pour tout couple de familles de Coleman (3.4.5).

- Un élément de la cohomologie d'Iwasawa pour tout couple de formes modulaires (3.4.6).

3.4.1. Soient $p \geq 3$ un nombre premier et $N \geq 4$. On conserve les notations des courbes modulaires introduites dans la section 1.6. Soit Y une courbe modulaire de la forme $Y_1(N)$ ou $Y_1(N(p)) := Y(1, N(p))$. On note $\pi : \mathcal{E} \rightarrow Y$ la courbe elliptique universelle associée à Y . Lorsqu'on souhaite les différentier, on notera \mathcal{E}_N la courbe elliptique universelle de $Y_1(N)$ et $\mathcal{E}_{N(p)}$ la courbe elliptique universelle de $Y_1(N(p))$.

On rappelle que la courbe modulaire $Y_1(N)$ représente les classes d'isomorphismes (E, A) où E est une courbe elliptique et A un point d'ordre N . On considère D_N le schéma des points d'ordre N canoniques. On a la section

$$\begin{array}{ccc} Y_1(N) & \xrightarrow{t_N} & \mathcal{E}_N \\ & \searrow & \uparrow \\ & & D_N \end{array}$$

où l'on définit $t_N(E, A) = A \in D_N$.

On rappelle que la courbe modulaire $Y_1(N(p))$ représente les classes d'isomorphismes (E, B, C) où E est une courbe elliptique, B un point d'ordre N et C un groupe cyclique d'ordre pN contenant B . On note $D_{N(p)} \hookrightarrow \mathcal{E}_{N(p)}$ le sous-schéma des points $X \in \mathcal{E}_{N(p)}[Np]$ tels que X soit d'ordre pN et que $pX = B$ soit un point canonique d'ordre N . La multiplication par N sur $\mathcal{E}_{N(p)}$ induit un morphisme

$$[N] : D_{N(p)} \longrightarrow D'$$

où D' sont les points d'ordre p .

Définition 3.4.1. Soit $\iota_D : D \hookrightarrow \mathcal{E}$ un sous-schéma fini, étale au-dessus de $Y_1(N)$ et on note $p_D := \pi \circ \iota_D : D \rightarrow S$. Pour $r \geq 1$ on pose

$$\Lambda_r(\mathcal{H}_r\langle D \rangle) := (p_D)_* (\iota_D)^* [p^r]_* (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}).$$

On note $\Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}\langle D \rangle)$ le faisceau donné par le pro-système $(\Lambda_r(\mathcal{H}_r\langle D \rangle))_{r \geq 1}$. Pour $D = Y_1(N)$ et ι la section triviale on note $\Lambda_r(\mathcal{H}_r) = \Lambda_r(\mathcal{H}_r\langle D \rangle)$ et $\Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}) = \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}\langle D \rangle)$.

Les définitions et propriétés de ces objets sont données dans la section 2.3 de l'article de Kings [Kin15]. En particulier, dans ces travaux, on considère le $Y_1(N)$ -faisceau $\Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})$ et le $Y_1(N(p))$ -faisceau $\Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}\langle D' \rangle)$.

Pour tout $k \geq 0$ la section 2.5 de [Kin15] donne aussi la construction de morphismes de moment au niveau fini

$$\text{mom}_r^k : \Lambda_r(\mathcal{H}_r) \rightarrow \text{TSym}^k \mathcal{H}_r.$$

Ces morphismes sont compatibles pour la limite inverse et forment un morphisme

$$\text{mom}^k : \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}) \rightarrow \text{TSym}^k \mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}.$$

Faisons une aparté pour donner une intuition de ces espaces et morphismes (voir [Kin15, sections 2.1 et 2.2] pour les résultats suivants). Soit H un groupe profini de la forme \mathbb{Z}_p^d pour $d \in \mathbb{N}^*$. Pour $r \geq 1$ on note $H_r := (\mathbb{Z}_p/p^r\mathbb{Z}_p)^d$, on a donc $H = \varprojlim H_r$. Alors, $\Lambda(H_r)$ est l'espace des mesures sur H_r à coefficients $\mathbb{Z}_p/p^r\mathbb{Z}_p$

$$\Lambda_r(H_r) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{C}(H_r, \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p/p^r\mathbb{Z}_p)$$

où $\mathcal{C}(H_r, \mathbb{Z}_p)$ est l'ensemble des fonctions continues sur H_r et à valeurs dans \mathbb{Z}_p . De manière analogue, $\Lambda(H)$ est l'espace des mesures sur H à coefficients \mathbb{Z}_p . Alors, on a $\Lambda(H) = \varprojlim \Lambda_r(H_r)$. Le morphisme de moment est défini par

$$\text{mom}_r^k : \begin{cases} \Lambda_r(H_r) & \rightarrow \text{TSym}^k H_r \\ \mu_r & \mapsto \sum_{h \in H_r} \mu_r(h) h^{\otimes k}. \end{cases}$$

Ces morphismes sont compatibles pour la limite projective et induisent le morphisme

$$\text{mom}^k : \begin{cases} \Lambda(H) & \rightarrow \text{TSym}^k H \\ \delta_h & \mapsto h^{\otimes k} \end{cases}$$

où δ_h est le Dirac en h . Ces morphismes peuvent être traduits en termes de faisceaux comme dans [Kin15, section 2.5].

On revient sur les faisceaux d'algèbres d'Iwasawa $\Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})$. Ce faisceau permet ainsi d'interpoler les différentes puissances du tenseur symétrique de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}$ grâce aux applications de moment. Pour $j \geq 0$ on définit aussi

$$\Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})^{[j]} := \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \text{TSym}^j(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}).$$

Cet espace peut être vu comme une "translation" d'indice de l'interpolation précédente. Pour $k \geq j$ on note $\text{mom}^{k-j} \otimes \text{Id}$ la composition

$$\text{mom}^{k-j} \otimes \text{Id} : \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})^{[j]} \rightarrow \text{TSym}^{k-j}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}) \otimes \text{TSym}^j(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}) \rightarrow \text{TSym}^k(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})$$

où le morphisme $\text{TSym}^{k-j}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}) \otimes \text{TSym}^j(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}) \rightarrow \text{TSym}^k(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})$ est donné par la multiplication (voir (1.22) pour la multiplication sur l'algèbre graduée $\text{TSym} H$).

On définit le produit tensoriel extérieur

$$\Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})^{[j,j]} := \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})^{[j]} \boxtimes \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})^{[j]}$$

au-dessus de $Y_1(N)^2$. C'est-à-dire le produit tensoriel $\Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})^{[j]} \otimes \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})^{[j]}$ où la première copie de $Y_1(N)$ agit sur la première copie de $\Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})^{[j]}$ et pareillement pour la seconde. On définit aussi

$$\Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p} \langle D' \rangle)^{[j,j]} := (\Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p} \langle D' \rangle) \otimes \text{TSym}^j \mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})^{\boxtimes 2}.$$

3.4.2. Soient $N \geq 4$ et $c > 1$ un entier premier avec $6Np$. Alors, pour $j \geq 0$, on note l'élément de Beilinson-Flach

$${}_c \mathcal{BF}_N^{[j]} \in H_{\text{ét}}^3(Y_1(N)^2[1/p], \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})^{[j,j]}(2-j))$$

pour l'élément $\mathcal{RT}_{1,N,1}^{[j]}$ défini dans [KLZ17, Définition 5.1.5].

Dans [KLZ17] il est montré que si $p \nmid N$, alors il existe un élément de Beilinson-Flach que l'on note

$${}^c\mathcal{BF}_{N(p)}^{[j]} \in H_{\text{ét}}^3(Y_1(N(p))^2, \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}\langle D' \rangle)^{[j,j]}(2-j))$$

qui est envoyé sur ${}^c\mathcal{BF}_N^{[j]}$ par le morphisme

$$H_{\text{ét}}^3(Y_1(N(p))^2, \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}\langle D' \rangle)^{[j,j]}(2-j)) \rightarrow H_{\text{ét}}^3(Y_1(N)^2[1/p], \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})^{[j,j]}(2-j))$$

induit par la multiplication par p et la dégénérescence canonique $\text{pr} : Y_1(N(p)) \rightarrow Y_1(N)$ définie en (1.24). L'existence d'un tel antécédent est une conséquence des éléments dits d'Eisenstein-Iwasawa dans [KLZ17] (voir [KLZ17, Chapitre 4]) et se généralise aux éléments de Beilinson-Flach. La propriété au niveau des éléments de Beilinson-Flach est rappelée en [LZ16, remarque 3.3.6].

La suite spectrale de Hochschild-Serre et l'annulation de $H_{\text{ét}}^3$ au-dessus d'un corps algébriquement clos induit un morphisme

$$H_{\text{ét}}^3(Y_1(N)^2[1/p], \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})^{[j,j]}(2-j)) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(\mathbb{Z}[1/Np], H_{\text{ét}}^2(Y_1(N)_{\mathbb{Q}}^2, \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})^{[j,j]}(2-j))).$$

Par abus de langage on note de la même manière l'élément ${}^c\mathcal{BF}_N^{[j]}$ vu dans

$$H_{\text{ét}}^1(\mathbb{Z}[1/Np], H_{\text{ét}}^2(Y_1(N)_{\mathbb{Q}}^2, \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})^{[j,j]}(2-j)))$$

à travers ce morphisme.

Lorsque $p \nmid N$ la construction précédente donne aussi l'existence de ${}^c\mathcal{BF}_{N(p)}^{[j]}$ un antécédent de ${}^c\mathcal{BF}_N^{[j]}$ dans

$$H_{\text{ét}}^1(\mathbb{Z}[1/Np], H_{\text{ét}}^2(Y_1(N(p))_{\mathbb{Q}}^2, \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}\langle D' \rangle)^{[j,j]}(2-j)))$$

pour $[p]_*$ le morphisme induit par la multiplication par p .

L'ensemble des éléments de Beilinson-Flach qui seront considérés dans ce manuscrit sont construits à partir de ces éléments.

Pour $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ et $0 \leq j \leq \min\{k, l\} - 2$ on définit l'élément de Beilinson-Flach associé au triplet (k, l, j) par

$$\begin{aligned} {}^c\mathcal{BF}_N^{[k,l,j]} &:= (\text{mom}^{k-j-2} \otimes \text{Id}) \boxtimes (\text{mom}^{l-j-2} \otimes \text{Id}) \left({}^c\mathcal{BF}_N^{[j]} \right) \\ &\in H_{\text{ét}}^1(\mathbb{Z}[1/Np], H_{\text{ét}}^2(Y_1(N)_{\mathbb{Q}}^2, \text{TSym}^{[k-2, l-2]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})(2-j))) \end{aligned}$$

où $\text{TSym}^{[k-2, l-2]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}) := \text{TSym}^{k-2}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}) \boxtimes \text{TSym}^{l-2}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})$.

3.4.3. Soient f et g deux formes primitives de poids k_0 et l_0 , de niveau N_f et N_g et de caractères ε_f et ε_g . Soit E une extension finie de \mathbb{Q}_p contenant les coefficients de f et g . On note $N := \text{ppcm}(N_f, N_g)$. On cherche à construire les éléments de Beilinson-Flach associés à f et g .

La formule de Künneth (voir [Kem93, section 9.2]) fourni un isomorphisme

$$H_{\text{ét}}^2 \left(Y_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \text{TSym}^{[k_0-2, l_0-2]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})(2) \right) \simeq H_{\text{ét}}^1 \left(Y_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \text{TSym}^{k_0-2}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})(1) \right) \otimes H_{\text{ét}}^1 \left(Y_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \text{TSym}^{l_0-2}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})(1) \right). \quad (3.39)$$

On rappelle les projections naturelles

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^1 \left(Y_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \text{TSym}^{k_0-2}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})(1) \right) &\xrightarrow{\pi_f} V_f^*, \\ H_{\text{ét}}^1 \left(Y_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \text{TSym}^{l_0-2}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})(1) \right) &\xrightarrow{\pi_g} V_g^* \end{aligned} \quad (3.40)$$

où π_f et π_g sont les projections sur les duals des représentations de Deligne définis en (1.25). En composant l'isomorphisme de Künneth donné en (3.39) et les projections (3.40) on obtient le morphisme

$$\pi_{f,g} : H_{\text{ét}}^2 \left(Y_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \text{TSym}^{[k_0-2, l_0-2]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})(2) \right) \rightarrow V_{f,g}^* \quad (3.41)$$

où $V_{f,g}^* := V_f^* \otimes_E V_g^*$ comme défini en (3.31).

Définition 3.4.2. Pour $0 \leq j \leq \min\{k_0, l_0\} - 2$ on définit l'élément de Beilinson-Flach associé à f , g et j par

$${}_c\mathcal{BF}^{[f,g,j]} := \pi_{f,g} \left({}_c\mathcal{BF}_N^{[k_0, l_0, j]} \right) \in H_S^1(\mathbb{Q}, V_{f,g}^*(-j)) \quad (3.42)$$

où S est l'ensemble des nombres premiers divisant pN .

Lorsque $p \nmid N$, l'élément de Beilinson-Flach associé à f et g est lié à l'élément de Beilinson-Flach associé à leur p -stabilisation grâce à l'isomorphisme $(\text{Pr}^\alpha)_*$ défini dans la section précédente.

Proposition 3.4.3. [KLZ17, Théorème 5.7.6] Si $p \nmid N$ et $0 \leq j \leq \min\{k_0, l_0\} - 2$ on a

$$(\text{Pr}^\alpha \times \text{Pr}^\alpha)_* \left({}_c\mathcal{BF}^{[f,g,\alpha,j]} \right) = \left(1 - \frac{\alpha_p(f)\beta_p(g)}{p^{1+j}} \right) \left(1 - \frac{\beta_p(f)\alpha_p(g)}{p^{1+j}} \right) \times \left(1 - \frac{\beta_p(f)\beta_p(g)}{p^{1+j}} \right) {}_c\mathcal{BF}^{[f,g,j]}$$

où $\alpha_p(f)$ et $\beta_p(f)$ sont les racines de Hecke de f en p comme défini en (1.18) et $\alpha_p(g)$ et $\beta_p(g)$ celles de g .

En utilisant le morphisme $(\text{Id} \times \text{Pr}^\alpha)_*$ on considère uniquement la p -stabilisation d'une des deux formes. On a alors le lien suivant

Proposition 3.4.4. Si $p \nmid N$ et $0 \leq j \leq \min\{k_0, l_0\} - 2$ on a

$$(\text{Id} \times \text{Pr}^\alpha)_* \left({}_c\mathcal{BF}^{[f,g,\alpha,j]} \right) = \left(1 - \frac{\alpha_p(f)\beta_p(g)}{p^{1+j}} \right) \left(1 - \frac{\beta_p(f)\beta_p(g)}{p^{1+j}} \right) {}_c\mathcal{BF}^{[f,g,j]}.$$

Démonstration. On note f_β la p -stabilisation de f par rapport à la seconde racine de Hecke. C'est la forme définie par

$$f_\beta(q) = f(q) - \alpha_p(f) f(q^p).$$

On définit $(\mathrm{Pr}^\beta)_*$ le morphisme

$$(\mathrm{Pr}^\beta)_* : H_{\text{ét}}^1(Y_1(pN_f)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathrm{TSym}^{k_0-2}(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p})(1)) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(Y_1(N_f)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathrm{TSym}^{k_0-2}(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p})(1))$$

par $(\mathrm{Pr}^\beta)_* := (\mathrm{pr}_1)_* - \frac{\alpha_p(f)}{p^{k_0-1}} (\mathrm{pr}_2)_*$. En utilisant la définition de $(\mathrm{Pr}^\alpha)_*$ (voir (1.27)) on remarque que

$$(\mathrm{pr}_1)_* = \frac{\alpha_p(f) (\mathrm{Pr}^\alpha)_* - \beta_p(f) (\mathrm{Pr}^\beta)_*}{\alpha_p(f) - \beta_p(f)}. \quad (3.43)$$

Les projections sur les représentations de Deligne commutent avec les morphismes $(\mathrm{Pr}^\alpha)_*$ et $(\mathrm{Pr}^\beta)_*$ de la manière suivante

$$\pi_f \circ (\mathrm{Pr}^\alpha)_* = (\mathrm{Pr}^\alpha)_* \circ \pi_{f_\alpha}, \quad \pi_f \circ (\mathrm{Pr}^\beta)_* = (\mathrm{Pr}^\beta)_* \circ \pi_{f_\beta}. \quad (3.44)$$

On rappelle aussi l'égalité $\pi_f \circ (\mathrm{pr}_1)_* = \pi_f$. Par construction on a

$$(\mathrm{Id} \times \mathrm{Pr}^\alpha)_* \left({}_c\mathcal{BF}^{[f, g_\alpha, j]} \right) = (\mathrm{Id} \times \mathrm{Pr}^\alpha)_* \left(\pi_f \circ (\mathrm{pr}_1)_*, \pi_{g_\alpha} \circ (\mathrm{pr}_1)_* \right) \left({}_c\mathcal{BF}_N^{[k_0, l_0, j]} \right).$$

En utilisant les équations (3.43) et (3.44) on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id} \times \mathrm{Pr}^\alpha)_* \left({}_c\mathcal{BF}^{[f, g_\alpha, j]} \right) &= \frac{\alpha_p(f)}{\alpha_p(f) - \beta_p(f)} (\mathrm{Pr}^\alpha \times \mathrm{Pr}^\alpha)_* \left({}_c\mathcal{BF}^{[f_\alpha, g_\alpha, j]} \right) - \\ &\quad \frac{\beta_p(f)}{\alpha_p(f) - \beta_p(f)} (\mathrm{Pr}^\beta \times \mathrm{Pr}^\alpha)_* \left({}_c\mathcal{BF}^{[f_\beta, g_\alpha, j]} \right). \end{aligned}$$

La Proposition 3.4.3 ne dépend pas du choix de la racine de Hecke donc la valeur de $(\mathrm{Pr}^\beta \times \mathrm{Pr}^\alpha)_* \left({}_c\mathcal{BF}^{[f_\beta, g_\alpha, j]} \right)$ est aussi donnée par la Proposition 3.4.3 en échangeant $\alpha_p(f)$ et $\beta_p(f)$. En exprimant les deux éléments de Beilinson-Flach $(\mathrm{Pr}^\alpha \times \mathrm{Pr}^\alpha)_* \left({}_c\mathcal{BF}^{[f_\alpha, g_\alpha, j]} \right)$ et $(\mathrm{Pr}^\beta \times \mathrm{Pr}^\alpha)_* \left({}_c\mathcal{BF}^{[f_\beta, g_\alpha, j]} \right)$ en fonction de ${}_c\mathcal{BF}^{[f, g, j]}$ grâce à la Proposition 3.4.3 on obtient le résultat annoncé. \square

On note la restriction des éléments de Beilinson-Flach au groupe de décomposition en p avec l'indice p

$${}^p\mathcal{BF}^{[f, g, j]} := \mathrm{loc}_p \left({}_c\mathcal{BF}^{[f, g, j]} \right) \in H^1(\mathbb{Q}_p, V_{f, g}^*(-j)).$$

En voyant que la localisation de l'élément de Beilinson-Flach appartient à l'image du régulateur syntonic, un résultat de de Nekovář et Nizioł[NN16, Théorème B] permet d'affirmer que

$${}^p\mathcal{BF}^{[f, g, j]} \in H_g^1(\mathbb{Q}_p, V_{f, g}^*(-j)).$$

En particulier, si $\mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V_{f, g}^*(-j))^{\varphi=p^{-1}} = 0$ on a

$${}^p\mathcal{BF}^{[f, g, j]} \in H_f^1(\mathbb{Q}_p, V_{f, g}^*(-j)). \quad (3.45)$$

Par une étude du module complexe des racines de Hecke on en déduit le corollaire

Corollaire 3.4.5. *Pour $j \neq \frac{k_0+l_0}{2} - 2$ on a*

$${}^p\mathcal{BF}^{[f,g,j]} \in H_f^1(\mathbb{Q}_p, V_{f,g}^*(-j)).$$

3.4.4. Pour le reste de cette section on suppose que $p \nmid N$. Dans ce paragraphe on construit un élément de Beilinson-Flach associé à la famille \mathbf{g} et à f non-stabilisé grâce à différents outils mis en avant dans [LZ16].

On rappelle la définition de $U_g := l_0 + p^{r_g-1}\mathbb{Z}_p$. Pour $j \in \mathbb{N}$ on note $U_g^{[j]} := U_g - j$. [LZ16, Proposition 4.4.3] introduit le $Y_1(N_g(p))$ -faisceaux $\mathcal{D}_{U_g^{[j]}, r_g-1}^\circ(\mathcal{H}'_0)$. La construction de ces faisceaux ne sera pas détaillée dans ce texte. On note

$$\mathcal{D}_{U_g^{[j]}} := \mathcal{D}_{U_g^{[j]}, r_g-1}^\circ(\mathcal{H}'_0)[1/p].$$

Par soucis de concision on note simplement $\mathcal{D}_{U_g} := \mathcal{D}_{U_g^{[0]}}$. Ces différents faisceaux sont liés par le projecteur surconvergent.

Proposition 3.4.6. [LZ16, Proposition 5.2.1] *Pour tout $j \in \mathbb{N}$ il existe un morphisme de $Y_1(N_g(p))$ -faisceaux δ_j^**

$$\delta_j^* : \mathcal{D}_{U_g^{[j]}} \otimes \text{TSym}^j(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}) \rightarrow \mathcal{D}_{U_g}$$

où l'on rappelle que $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}$ est défini dans le Paragraphe 1.6.3. Ce morphisme est appelé projecteur surconvergent.

Dans l'esprit des notations de Loeffler et Zerbes on note

$$M_{U_g} := H_{\text{ét}}^1(Y_1(N_g(p))_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{D}_{U_g})(1).$$

Les opérateurs de Hecke et le groupe de galois de $\mathbb{Q}^{(pN_g)}/\mathbb{Q}$ opèrent sur M_{U_g} . On note $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{b}_n q^n$ avec $\mathbf{b}_n \in A_{\mathbf{g}}$ la q -expansion de la famille de Coleman \mathbf{g} .

Proposition 3.4.7. [LZ16, Théorème 4.6.6] *La représentation de Deligne en famille $V_{\mathbf{g}}^*$ coïncide avec le plus grand espace de M_{U_g} sur lequel les opérateurs de Hecke T'_n agissent comme \mathbf{b}_n .*

On définit

$$\pi_{\mathbf{g}} : M_{U_g} \rightarrow V_{\mathbf{g}}^*$$

la projection sur cet espace propre. Comme expliqué dans la discussion suivant la Définition 5.3.1 [LZ16] il existe un morphisme de $Y_1(N_g(p))$ -faisceaux

$$\Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}\langle D' \rangle) \rightarrow \mathcal{D}_{U_g^{[j]}}.$$

Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a la composition de morphismes de $Y(N_g(p))$ -faisceaux

$$\Lambda^{[j]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}\langle D' \rangle) \rightarrow \mathcal{D}_{U_g^{[j]}} \otimes \text{TSym}^j \mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p} \xrightarrow{\delta_j^*} \mathcal{D}_{U_g}. \quad (3.46)$$

Proposition 3.4.8. *Soit $j \in \mathbb{N}$ et $l \in I^g$ vérifiant $l \geq j + 2$. Le morphisme (3.46) s'inscrit dans le diagramme commutatif de $Y_1(N_g)$ -faisceaux*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{[j]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}\langle D' \rangle) & \longrightarrow & \mathcal{D}_{U_g} \\ \downarrow [p]_* \otimes \text{Id} & & \downarrow \\ \Lambda^{[j]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}) & \xrightarrow{\text{mom}^{l-2-j} \otimes \text{Id}} & \text{TSym}^{l-2} \mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p} \end{array}$$

où le morphisme $\mathcal{D}_{U_g} \rightarrow \text{TSym}^k \mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}$ apparaît dans [LZ16, Proposition 4.4.5] et les $Y_1(N_g(p))$ -faisceaux sont vus comme des $Y_1(N_g)$ -faisceaux à travers la dégénérescence classique $(\text{pr})_*$.

Démonstration. Pour $j = 0$ cette proposition est exactement [LZ16, Proposition 4.4.5]. Ce résultat est étendu pour $j > 0$ grâce à [LZ16, Corollaire 5.1.4]. \square

Définition 3.4.9. *Pour tout $j \in \mathbb{N}$ on définit le morphisme de $A_{\mathbf{g}}$ -modules*

$$\pi_{\mathbf{g}}^{[j]} : H_{\text{ét}}^1(Y_1(N_g(p))_{\overline{\mathbb{Q}}}, \Lambda^{[j]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}\langle D' \rangle)(1)) \rightarrow V_{\mathbf{g}}^*$$

comme la composition

$$H_{\text{ét}}^1(Y_1(N_g(p))_{\overline{\mathbb{Q}}}, \Lambda^{[j]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}\langle D' \rangle)(1)) \rightarrow M_{U_g} \xrightarrow{\pi_{\mathbf{g}}} V_{\mathbf{g}}^*$$

où le premier morphisme est le morphisme induit sur la cohomologie par (3.46).

Soit $\nabla \in A_{\mathbf{g}}$ l'élément défini par

$$\nabla := l_0 - 2 + \frac{\log(1+w)}{\log_p(1+p)}.$$

En particulier, pour tout $l \in U_g$ on a $\varpi_l(\nabla) = l - 2$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ on définit aussi l'élément

$$\binom{\nabla}{j} := \frac{1}{j!} \nabla(\nabla - 1) \dots (\nabla - j + 1) \in A_{\mathbf{g}}.$$

Proposition 3.4.10. *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, le morphisme $\pi_{\mathbf{g}}^{[j]}$ est à valeurs dans $\binom{\nabla}{j} V_{\mathbf{g}}^*$. De plus, pour tout $l \in I^g$ tel que $l \geq j + 2$ on a le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{ét}}^1(Y_1(N_g(p))_{\overline{\mathbb{Q}}}, \Lambda^{[j]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}\langle D' \rangle)(1)) & \xrightarrow{\pi_{\mathbf{g}}^{[j]}} & V_{\mathbf{g}}^* \\ \downarrow (\text{mom}^{l-2-j} \circ [p]_* \otimes \text{Id}) & & \downarrow \varpi_l \\ H_{\text{ét}}^1(Y_1(N_g)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \text{TSym}^{l-2} \mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}(1)) & \xrightarrow{\pi_{\mathbf{g}l}} & V_{\mathbf{g}l}^*. \end{array}$$

Démonstration. Le premier point est prouvé dans [LZ16, Proposition 5.2.5]. Le diagramme est une conséquence de la Proposition 3.4.8, du second point de [LZ16, Proposition 4.4.8] et de [LZ16, Proposition 5.2.5]. \square

On rappelle la définition $V_{f,\mathbf{g}}^* := V_f^* \otimes_E V_{\mathbf{g}}^*$ (voir (3.25)). On note $\mathrm{pr}_{1,(p)} : Y_1(N(p)) \rightarrow Y_1(N_g(p))$ l'application de dégénérescence donné par $(E, B, C) \rightarrow (E, d.B, d.C)$ où $d = N/N_g$. On a la diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y_1(N(p)) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{1,(p)}} & Y_1(N_g(p)) \\ \downarrow \mathrm{pr} & & \downarrow \mathrm{pr} \\ Y_1(N) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & Y_1(N_g). \end{array}$$

Pour $0 \leq j \leq k_0 - 2$ on définit un morphisme

$$\pi_{f,\mathbf{g}}^{[j]} : H_{\mathrm{ét}}^2 \left(Y_1(N(p))_{\mathbb{Q}}^2, \Lambda^{[j,j]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p} \langle D' \rangle)(2) \right) \rightarrow \binom{\nabla}{j} V_{f,\mathbf{g}}^*$$

comme la composition de l'isomorphisme de Künneth

$$H_{\mathrm{ét}}^2 \left(Y_1(N(p))_{\mathbb{Q}}^2, \Lambda^{[j,j]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p} \langle D' \rangle)(2) \right) \rightarrow H_{\mathrm{ét}}^1 \left(Y_1(N(p))_{\mathbb{Q}}, \Lambda^{[j]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p} \langle D' \rangle)(1) \right)^{\otimes 2}$$

avec les morphismes

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{ét}}^1 \left(Y_1(N(p))_{\mathbb{Q}}, \Lambda^{[j]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p} \langle D' \rangle)(1) \right) &\xrightarrow{\mathrm{mom} \circ [p]^*} H_{\mathrm{ét}}^1 \left(Y_1(N)_{\mathbb{Q}}, \mathrm{TSym}^{k_0-2} \mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}(1) \right) \xrightarrow{\pi_f} V_f^*, \\ H_{\mathrm{ét}}^1 \left(Y_1(N(p))_{\mathbb{Q}}, \Lambda^{[j]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p} \langle D' \rangle)(1) \right) &\xrightarrow{(\mathrm{pr}_{1,(p)})^*} H_{\mathrm{ét}}^1 \left(Y_1(N_g(p))_{\mathbb{Q}}, \Lambda^{[j]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p} \langle D' \rangle)(1) \right) \xrightarrow{\pi_{\mathbf{g}}^{[j]}} \binom{\nabla}{j} V_{\mathbf{g}}^*, \end{aligned} \quad (3.47)$$

où, par concision, $\mathrm{mom} \circ [p]^*$ désigne ici le morphisme $(\mathrm{mom}^{k_0-2-j} \otimes \mathrm{Id}) \circ ([p]^* \otimes \mathrm{Id})$. On note aussi $\pi_{f,\mathbf{g}}^{[j]}$ le morphisme induit sur la cohomologie

$$\begin{aligned} \pi_{f,\mathbf{g}}^{[j]} : H_{\mathrm{ét}}^1 \left(\mathbb{Z} \left[\frac{1}{pN} \right], H_{\mathrm{ét}}^2 \left(Y_1(N(p))_{\mathbb{Q}}^2, \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p} \langle D' \rangle)^{[j,j]}(2-j) \right) \right) &\longrightarrow \\ &\binom{\nabla}{j} H_{\mathrm{ét}}^1 \left(\mathbb{Z} \left[\frac{1}{pN} \right], V_{f,\mathbf{g}}^*(-j) \right). \end{aligned}$$

Définition 3.4.11. *On fixe un élément*

$${}_c\mathcal{BF}^{f,\mathbf{g},k_0-2} \in H_{\mathrm{ét}}^1 \left(\mathbb{Z} \left[\frac{1}{pN} \right], V_{f,\mathbf{g}}^*(2-k_0) \right)$$

tel que

$$\binom{\nabla}{k_0-2} {}_c\mathcal{BF}^{f,\mathbf{g},k_0-2} = \pi_{f,\mathbf{g}}^{[k_0-2]} \left({}_c\mathcal{BF}_{N(p)}^{[k_0-2]} \right)$$

où ${}_c\mathcal{BF}_{N(p)}^{[k_0-2]}$ est l'antécédent de ${}_c\mathcal{BF}_N^{[k_0-2]}$ pour $[p]^*$ défini dans le Paragraphe 3.4.2.

Proposition 3.4.12. *Pour tout $l \in I^g$ tel que $l \geq k_0$, la propriété d'interpolation suivante est satisfaite*

$$\varpi_l({}_c\mathcal{BF}^{f,\mathbf{g},k_0-2}) = \binom{l-2}{k_0-2}^{-1} {}_c\mathcal{BF}^{[f,\mathbf{g},k_0-2]} \in H_S^1(\mathbb{Q}, V_{f,\mathbf{g}_l}^*(2-k_0))$$

où S est l'ensemble des nombres premiers divisant pN .

Démonstration. Soit $l \in I^g$ avec $l \geq k_0$. En revenant aux constructions (3.40) et (3.47) et en utilisant la Proposition 3.4.10 on remarque que $\varpi_l \circ \left(\pi_{f,\mathbf{g}}^{[k_0-2]} \right)$ coïncide avec le morphisme

$$H_{\text{ét}}^2 \left(Y_1(N(p))_{\mathbb{Q}}^2, \Lambda^{[k_0-2, k_0-2]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p} \langle D' \rangle)(2) \right) \longrightarrow H_{\text{ét}}^2 \left(Y_1(pN)_{\mathbb{Q}}^2, \text{TSym}^{[k_0-2, l-2]}(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p})(2) \right) \\ \xrightarrow{\pi_{f,\mathbf{g}_l}} V_{f,\mathbf{g}_l}^*$$

où le premier morphisme est $(\text{mom}^0 \otimes \text{Id}) \boxtimes (\text{mom}^{l-k_0} \otimes \text{Id}) \circ [p]_*$ et π_{f,\mathbf{g}_l} est le morphisme défini en (3.41). En revenant à la définition de ${}_c\mathcal{BF}^{[f,\mathbf{g}_l, k_0-2]}$ (voir 3.4.2) on a

$$\varpi_l \left(\pi_{f,\mathbf{g}}^{[k_0-2]} \left({}_c\mathcal{BF}_{N(p)}^{[k_0-2]} \right) \right) = {}_c\mathcal{BF}^{[f,\mathbf{g}_l, k_0-2]}.$$

En utilisant $\varpi_l \left(\binom{\nabla}{k_0-2} \right) = \binom{l-2}{k_0-2}$ et la Définition 3.4.11 on a

$$\binom{l-2}{k_0-2} \varpi_l \left({}_c\mathcal{BF}^{f,\mathbf{g}, k_0-2} \right) = \varpi_l \left(\pi_{f,\mathbf{g}} \left({}_c\mathcal{BF}_{N(p)}^{[k_0-2]} \right) \right).$$

En divisant par $\binom{l-2}{k_0-2}$ on obtient le résultat annoncé. \square

On note avec l'indice p la restriction de ${}_c\mathcal{BF}^{f,\mathbf{g}, k_0-2}$ au groupe de décomposition en p

$${}^p{}_c\mathcal{BF}^{f,\mathbf{g}, k_0-2} := \text{loc}_p \left({}_c\mathcal{BF}^{f,\mathbf{g}, k_0-2} \right) \in H^1(\mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0})).$$

On définit

$$\overline{{}^p{}_c\mathcal{BF}^{f,\mathbf{g}, k_0-2}} := \text{proj} \left({}^p{}_c\mathcal{BF}^{f,\mathbf{g}, k_0-2} \right) \in H^1(\mathcal{F}^{-\circ} \mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0}))$$

où proj est le morphisme induit par la projection $\mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0}) \rightarrow \mathcal{F}^{-\circ} \mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0})$. Cet élément peut être ensuite projeté dans $H^1(\mathcal{F}^{--} \mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0}))$ par le morphisme induit par la projection $\mathcal{F}^{-\circ} \mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0}) \rightarrow \mathcal{F}^{--} \mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0})$.

Proposition 3.4.13. *Quitte à réduire le rayon p^{-r_g} la projection de $\overline{{}^p{}_c\mathcal{BF}^{f,\mathbf{g}, k_0-2}}$ dans l'espace $H^1(\mathcal{F}^{--} \mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0}))$ est nulle.*

Démonstration. Quitte à réduire le rayon p^{-r_g} la Proposition 1.3.5 implique que le module $H^1(\mathcal{F}^{--} \mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0}))$ est un $A_{\mathbf{g}}$ -module libre de rang 1. Soit \mathbf{h} la projection de $\overline{{}^p{}_c\mathcal{BF}^{f,\mathbf{g}, k_0-2}}$ dans cet espace vue comme un élément de $A_{\mathbf{g}}$. Soit $l \in I^g$ tel que $l > k_0$, par le Corollaire 3.4.5 on a

$$\varpi_l \left({}^p{}_c\mathcal{BF}^{f,\mathbf{g}, k_0-2} \right) = \binom{l-2}{k_0-2}^{-1} \text{loc}_p \left({}_c\mathcal{BF}^{[f,\mathbf{g}_l, k_0-2]} \right) \in H_f^1(\mathbb{Q}_p, V_{f,\mathbf{g}_l}^*(2-k_0))$$

où ϖ_l est le morphisme de spécialisation de la famille \mathbf{g} au poids l . Par conséquent, la projection vérifie

$$\text{proj} \left(\overline{{}^p{}_c\mathcal{BF}^{f,\mathbf{g}, k_0-2}} \right) \in H_f^1(\mathcal{F}^{--} \mathbb{D}_{f,\mathbf{g}_l}^*(\chi^{2-k_0})).$$

En utilisant l'isomorphisme $(\text{Pr}^\alpha \times \text{Id})^*$ et l'identification (3.34) on a

$$\mathcal{F}^{--} \mathbb{D}_{f,\mathbf{g}_l}^* \simeq \mathcal{F}^{--} \mathbb{D}_{f_\alpha, \mathbf{g}_l}^* \simeq \mathcal{R}_E \left(\tilde{\delta}_{f_\alpha, \mathbf{g}_l}^{-1} \right).$$

On rappelle que χ est étendu en un caractère de \mathbb{Q}_p^\times en posant $\chi(p) = 1$. On a

$$\tilde{\delta}_{f,\mathbf{g}l}^{-1}(u)\chi^{2-k_0}(u) = u^{2-k_0}, u \in \mathbb{Z}_p^\times$$

et par un argument de module on a

$$\tilde{\delta}_{f,\mathbf{g}l}^{-1}(p)\chi^{2-k_0}(p) = \frac{1}{\alpha_p(f)\beta_p(\mathbf{g}l)} \neq p^{2-k_0}$$

Donc, en se référant à la section 1.3, on est dans le premier cas particulier exposé et on a $H_f^1(\mathcal{F}^{--}\mathbb{D}_{f,\mathbf{g}l}^*(\chi^{2-k_0})) = 0$. Donc pour $l \in I^g, l > k_0$ on a

$$\varpi_l(\mathbf{h}) = 0.$$

Donc $\mathbf{h} = 0$ comme annoncé. □

Par la suite exacte (3.29) on sait que $\overline{{}_c\mathcal{BF}^{f,\mathbf{g},k_0-2}}$ appartient à l'injection du module

$$H^1(\mathcal{F}^{--}\mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0})) \hookrightarrow H^1(\mathcal{F}^{-\circ}\mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0})).$$

Définition 3.4.14. *On note*

$${}_c\mathbf{bf}^{f,\mathbf{g},k_0-2} \in H^1(\mathcal{F}^{--}\mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0})) \quad (3.48)$$

l'antécédent de $\overline{{}_c\mathcal{BF}^{f,\mathbf{g},k_0-2}}$ par l'injection.

3.4.5. On suppose toujours que $p \nmid N$ et que f et g sont p -régulières. Soient \mathbf{f} et \mathbf{g} les familles de Coleman associées à f et g . On cherche à mettre en avant un élément de Beilinson-Flach interpolant les différents éléments de Beilinson-Flach des spécialisation de \mathbf{f} et \mathbf{g} .

On conserve les notations de la section 3.3. On rappelle la notation $V_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^* := V_{\mathbf{f}}^* \widehat{\otimes}_E V_{\mathbf{g}}^*$ comme défini en (3.20).

Théorème 3.4.15. [LZ16, Théorème 5.4.2] *Soit S l'ensemble des nombres premiers divisant pN . Il existe un élément de Beilinson-Flach en famille*

$${}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f},\mathbf{g}} \in H_{\text{Iw},S}^1(\mathbb{Q}, V_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^*)$$

tel que pour tout $k \in I^f, l \in I^g$ et $0 \leq j \leq \min\{k, l\} - 2$ la propriété d'interpolation suivante soit satisfaite

$${}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}(k, l, j) = \left(1 - \frac{p^j}{\alpha_p(\mathbf{f}_k)\alpha_p(\mathbf{g}l)}\right) \frac{{}_c\mathcal{BF}^{[\mathbf{f}_k, \mathbf{g}l, j]}}{(-1)^j j! \binom{k-2}{j} \binom{l-2}{j}}$$

où l'on note ${}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}(k, l, j)$ la spécialisation de ${}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}$ au triplet (k, l, j) comme défini en (3.37).

On note la restriction de cet élément au groupe de décomposition en p

$${}^p\mathcal{BF}^{\mathbf{f},\mathbf{g}} := \text{loc}_p({}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}) \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^*).$$

Le morphisme $\Lambda_E(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{H}_E(\Gamma)$ induit un morphisme canonique

$$H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^*) \rightarrow H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^*)$$

où $\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^* = \mathbb{D}_{\mathbf{f}}^* \widehat{\otimes}_{\mathcal{R}(E)} \mathbb{D}_{\mathbf{g}}^*$ comme défini en (3.21). Par abus de langage on gardera la notation ${}^p\mathcal{BF}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}$ pour l'élément vu dans l'espace $H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^*)$ à travers ce morphisme. On définit

$$\overline{{}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}} := \text{proj}({}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}) \in H_{\text{Iw}}^1(\mathcal{F}^{-\circ}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^*)$$

où le morphisme proj induit par la projection $\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^* \twoheadrightarrow \mathcal{F}^{-\circ}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^*$. On rappelle que cet élément peut être projeté dans $H_{\text{Iw}}^1(\mathcal{F}^{--}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^*)$ par le morphisme induit par $\mathcal{F}^{-\circ}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^* \twoheadrightarrow \mathcal{F}^{--}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^*$.

On peut montrer (voir [LZ16, Proposition 7.1.2]) que la projection de $\overline{{}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}}$ dans l'espace $H_{\text{Iw}}^1(\mathcal{F}^{--}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^*)$ est nulle. De plus, pour tout (φ, Γ) -modules \mathbb{D} , le module $H_{\text{Iw}}^0(\mathbb{D}) = 0$. En associant ce résultat avec la suite exacte longue de la cohomologie induite par la suite exacte courte (3.24) on obtient la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow H_{\text{Iw}}^1(\mathcal{F}^{-+}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^*) \rightarrow H_{\text{Iw}}^1(\mathcal{F}^{-\circ}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^*) \rightarrow H_{\text{Iw}}^1(\mathcal{F}^{--}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^*).$$

On en déduit que $\overline{{}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}}$ appartient à l'injection de $H_{\text{Iw}}^1(\mathcal{F}^{-+}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^*)$ dans $H_{\text{Iw}}^1(\mathcal{F}^{-\circ}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^*)$.

Définition 3.4.16. *On note*

$${}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}} \in H_{\text{Iw}}^1(\mathcal{F}^{-+}\mathbb{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}^*)$$

l'antécédent de $\overline{{}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}}$ par l'injection.

On peut faire le lien avec les éléments de Beilinson-Flach définis en 3.4.4.

Soit $\mathcal{E}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}$ le produit de facteurs eulériens

$$\mathcal{E}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}(l) := \mathcal{A}^{\text{wt}} \left(\left(1 - \frac{p^{k_0-2}}{\alpha_p(f)\alpha_p(\mathbf{g})} \right) \left(1 - \frac{\beta_p(f)\alpha_p(\mathbf{g})}{p^{k_0-1}} \right) \right) (l), \quad l \in U_g. \quad (3.49)$$

On rappelle que ${}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g},k_0-2}$ est défini en 3.4.14.

Lemme 3.4.17. *Soit l un entier du disque p -adique $U_g = D(l_0, 1/p^{r_g-1})$ tel que $l \geq k_0$, on a*

$$(\text{Pr}^\alpha \times \text{Pr}^\alpha)_* ({}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}(k_0, l, k_0 - 2)) = \frac{(-1)^{k_0}}{(k_0 - 2)!} \mathcal{E}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}(l) (\text{Id} \times \text{Pr}^\alpha)_* (\varpi_l ({}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g},k_0-2}))$$

où ${}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}(k_0, l, k_0 - 2)$ désigne la spécialisation au triplet $(k_0, l, k_0 - 2)$ de ${}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}$ et ϖ_l est le morphisme de spécialisation de la famille \mathbf{g} au poids l .

Démonstration. Pour l un entier de $D(l_0, 1/p^{r_g-1})$ tel que $l \geq k_0$ alors d'après le Théorème 3.4.15 la spécialisation de ${}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f}, \mathbf{g}}$ au triplet $(k_0, l, k_0 - 2)$ s'écrit

$${}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f}, \mathbf{g}}(k_0, l, k_0 - 2) = \frac{(-1)^{k_0}}{(k_0 - 2)!} \left(1 - \frac{p^{k_0-2}}{\alpha_p(f)\alpha_p(\mathbf{g}_l)} \right) \frac{{}_c\mathcal{BF}^{[f_\alpha, \mathbf{g}_l, k_0-2]}}{\binom{l-2}{k_0-2}}.$$

D'après la Proposition 3.4.12 la spécialisation de ${}_c\mathcal{BF}^{f, \mathbf{g}, k_0-2}$ au poids l s'écrit

$$\varpi_l({}_c\mathcal{BF}^{f, \mathbf{g}, k_0-2}) = \binom{l-2}{k_0-2}^{-1} {}_c\mathcal{BF}^{[f, \mathbf{g}_l, k_0-2]} \in H_S^1(\mathbb{Q}, V_{f, \mathbf{g}_l}^*(2 - k_0)).$$

Grâce aux Propositions 3.4.3 et 3.4.4 et les morphismes $(\text{Pr}^\alpha \times \text{Pr}^\alpha)_*$ et $(\text{Id} \times \text{Pr}^\alpha)_*$ on peut envoyer les deux éléments précédents sur $\mathcal{BF}^{[f, \mathbf{g}_l^0, k_0-2]}$. En comparant les deux résultats on obtient

$$\begin{aligned} (\text{Pr}^\alpha \times \text{Pr}^\alpha)_*({}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f}, \mathbf{g}}(k_0, l, k_0 - 2)) &= \frac{(-1)^{k_0}}{(k_0 - 2)!} \left(1 - \frac{p^{k_0-2}}{\alpha_p(f)\alpha_p(\mathbf{g}_l)} \right) \times \\ &\quad \left(1 - \frac{\beta_p(f)\alpha_p(\mathbf{g}_l)}{p^{k_0-1}} \right) (\text{Id} \times \text{Pr}^\alpha)_* (\varpi_l({}_c\mathcal{BF}^{f, \mathbf{g}, k_0-2})). \end{aligned}$$

En appliquant la projection induite par la filtration des (φ, Γ) -modules on obtient le résultat voulu. \square

3.4.6. On définit aussi un élément de la cohomologie d'Iwasawa associé aux formes f et g . Celui ci sera utilisé pour étudier la fonction L p -adique de Rankin-Selberg associée au couple (f, g) .

Comme défini en (3.30) on peut spécialiser les familles de Coleman au couple de poids (k_0, l_0) grâce au morphisme ϖ_{k_0, l_0} . Le morphisme induit sur la cohomologie d'Iwasawa appliqué à l'élément de Beilinson-Flach défini en 3.4.15 fournit un élément

$${}_c\mathcal{BF}^{f_\alpha, g_\alpha} := \varpi_{k_0, l_0}({}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f}, \mathbf{g}}) \in H_{\text{Iw}, S}^1(\mathbb{Q}, V_{f_\alpha, g_\alpha}^*).$$

On rappelle que l'injection canonique $\Lambda_E(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{H}_E(\Gamma)$ permet de voir $\text{loc}_p({}_c\mathcal{BF}^{f_\alpha, g_\alpha})$ comme un élément de $H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}_{f_\alpha, g_\alpha}^*)$. Puisque la restriction au groupe de décomposition en p et les morphismes induits par la filtration commutent avec les morphismes de spécialisation on a

$$\text{proj} \circ \text{loc}_p({}_c\mathcal{BF}^{f_\alpha, g_\alpha}) = \varpi_{k_0, l_0}(\text{proj} \circ \text{loc}_p({}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f}, \mathbf{g}})) \quad (3.50)$$

où la projection est le morphisme induit par $\mathbb{D}_{f_\alpha, g_\alpha}^* \twoheadrightarrow \mathcal{F}^{-\circ} \mathbb{D}_{f_\alpha, g_\alpha}^*$. On définit ${}_c\mathbf{bf}^{f_\alpha, g_\alpha}$ la spécialisation de ${}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f}, \mathbf{g}}$ au couple de poids (k_0, l_0)

$${}_c\mathbf{bf}^{f_\alpha, g_\alpha} := \varpi_{k_0, l_0}({}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f}, \mathbf{g}}) \in H_{\text{Iw}}^1(\mathcal{F}^{-+} \mathbb{D}_{f_\alpha, g_\alpha}^*). \quad (3.51)$$

On rappelle que l'injection canonique $\Lambda_E(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{H}_E(\Gamma)$ permet de voir ${}_c\mathcal{BF}^{f_\alpha, g_\alpha}$ comme un élément de $H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}_{f_\alpha, g_\alpha}^*)$. L'équation (3.50) et la Définition 3.4.16 de ${}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f}, \mathbf{g}}$ impliquent le lemme suivant

Lemme 3.4.18. *L'élément ${}_c\mathbf{bf}^{f\alpha:g\alpha}$ est un antécédent de $\text{proj} \circ \text{loc}_p({}_c\mathcal{BF}^{f\alpha:g\alpha})$ pour le morphisme*

$$H_{\text{Iw}}^1(\mathcal{F}^{-+}\mathbb{D}_{f\alpha,g\alpha}^*) \rightarrow H_{\text{Iw}}^1(\mathcal{F}^{-\circ}\mathbb{D}_{f\alpha,g\alpha}^*)$$

induit par la filtration.

On définit l'élément de Beilinson-Flach associé aux formes non-stabilisées par

$${}_c\mathcal{BF}^{f,g} := (\text{Pr}^\alpha \times \text{Pr}^\alpha)_*({}_c\mathcal{BF}^{f\alpha:g\alpha}) \in H_{\text{Iw},S}^1(\mathbb{Q}, V_{f,g}^*).$$

On note le twist de ces éléments

$${}_c\mathcal{BF}_j^{f,g} := \text{Tw}_{V_{f,g}^*, -j}^\varepsilon({}_c\mathcal{BF}^{f,g}) \in H_{\text{Iw},S}^1(\mathbb{Q}, V_{f,g}^*(-j)) \quad (3.52)$$

où l'on rappelle que le twist est défini en (1.9).

Lemme 3.4.19. *Soit $j \in \mathbb{Z}$ et $p^j \neq \alpha_p(f)\alpha_p(g)$ on a une injection*

$$H^1(\mathcal{F}^{-+}\mathbb{D}_{f,g}^*(\chi^{-j})) \hookrightarrow H^1(\mathcal{F}^{-\circ}\mathbb{D}_{f,g}^*(\chi^{-j})). \quad (3.53)$$

De plus, la projection de $\text{loc}_p \circ \text{pr}_0({}_c\mathcal{BF}_j^{f,g})$ dans $H^1(\mathcal{F}^{-\circ}\mathbb{D}_{f,g}^(\chi^{-j}))$ appartient à l'image de cette injection où pr_0 est la projection sur le corps de base.*

Démonstration. Le Frobenius agit sur le module $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^{--}\mathbb{D}_{f,g}^*(\chi^{-j}))$ comme multiplication par $\frac{p^j}{\alpha_p(f)\alpha_p(g)}$. La condition sur j implique que $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^{--}\mathbb{D}_{f,g}^*(\chi^{-j}))^{\varphi=1} = 0$ donc

$$H^0(\mathcal{F}^{--}\mathbb{D}_{f,g}^*(\chi^{-j})) = 0$$

et l'injection en découle. Puisque l'isomorphisme $(\text{Pr}^\alpha \times \text{Pr}^\alpha)_*$ commute avec la projection sur le corps de base pr_0 on a

$$\text{pr}_0({}_c\mathcal{BF}_j^{f,g}) = (\text{Pr}^\alpha \times \text{Pr}^\alpha)_* \left(\text{pr}_0 \circ \text{Tw}_{V_{f,g}^*, -j}({}_c\mathcal{BF}^{f\alpha:g\alpha}) \right).$$

Or $\text{pr}_0 \circ \text{Tw}_{V_{f,g}^*, -j}$ coïncide avec le morphisme ϖ_j^c de spécialisation en j défini en (3.36). En revenant aux définitions on a

$$\text{pr}_0 \circ \text{Tw}_{V_{f,g}^*, -j}({}_c\mathcal{BF}^{f\alpha:g\alpha}) = \varpi_j^c({}_c\mathcal{BF}^{f\alpha:g\alpha}) = {}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}(k_0, l_0, j)$$

où ${}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}(k_0, l_0, j)$ est la spécialisation au triplet (k_0, l_0, j) comme défini en (3.38). Le morphisme de restriction loc_p et le morphisme de projection sur le quotient commutent avec l'isomorphisme $(\text{Pr}^\alpha \times \text{Pr}^\alpha)_*$ et les morphismes de spécialisation donc

$$\text{proj} \circ \text{loc}_p \circ \text{pr}_0({}_c\mathcal{BF}_j^{f,g}) = (\text{Pr}^\alpha \times \text{Pr}^\alpha)_* \left(\overline{{}_c\mathcal{BF}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}(k_0, l_0, j)} \right).$$

Cet élément est l'image de

$$(\text{Pr}^\alpha \times \text{Pr}^\alpha)_*({}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}(k_0, l_0, j)) \in H^1(\mathcal{F}^{-+}\mathbb{D}_{f,g}^*(\chi^{-j}))$$

à travers l'injection (3.53) ce qui prouve le résultat voulu. \square

3.5 Fonction L p -adique et éléments de Beilinson-Flach

Le but de cette section de lier la fonction L p -adique de Urban avec les éléments de Beilinson-Flach. Dans un premier paragraphe, on introduit [LZ16, Théorème 7.1.5] exprimant la fonction L p -adique de Urban grâce à l'élément de Beilinson-Flach associé à deux familles de Coleman. Dans les trois paragraphes suivants, on donne l'écriture de la restriction de la fonction de Urban à trois droites grâce aux éléments de Beilinson-Flach définis dans la section précédente. En particulier, les deux dernières droites sont envoyées l'une sur l'autre à travers l'équation fonctionnelle satisfaite par la fonction L p -adique. Ces deux dernières écritures permettent de factoriser la fonction de Urban par un facteur eulérien particulier. Il s'agit d'une idée similaire à la fonction L améliorée étudiée par Greenberg-Stevens. Ce facteur sera la source de l'annulation de la fonction L p -adique dans le chapitre 4 du manuscrit.

Les notations des sections 3.3 et 3.4 sont conservées.

3.5.1 Soient f et g deux formes primitives de poids k_0 et l_0 , de niveaux N_f et N_g et de caractères ε_f et ε_g . Soit $N := \text{ppcm}(N_f, N_g)$. Soit $p \geq 3$ un nombre premier tel que $p \nmid N$ et tel que f et g soient ordinaires en p . On note \mathbf{f} et \mathbf{g} les familles de Coleman associées à f et g .

On rappelle l'existence du caractère $\chi_{\mathbf{g}} : \Gamma \rightarrow A_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}$ (voir (3.13)). Pour tout $\tau \in \Gamma$ on a

$$\chi_{\mathbf{g}}(\tau) = \chi^{l_0}(\gamma) \exp \left(\log_p(1+w) \frac{\log(\langle \chi(\gamma) \rangle)}{\log(1+p)} \right).$$

On rappelle la décomposition $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p^* \simeq \Delta \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$ où $\Delta := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Le caractère $\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}$ restreint à Δ se réécrit

$$\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}|_{\Delta} = \omega^{l_0-1}.$$

En particulier, $\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}$ envoie l'élément unipotent δ_i sur δ_{i-l_0+1} (voir (1.6) pour la définition de δ_i). On définit $\text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}}$ l'isomorphisme défini par

$$\text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}} : \begin{cases} \mathcal{H}_{A_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}}(\Gamma) & \rightarrow \mathcal{H}_{A_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}}(\Gamma) \\ \sum_{i=0}^{p-2} H_i(\gamma_1 - 1)\delta_i & \mapsto \sum_{i=0}^{p-2} H_i(\chi_{\mathbf{g}}(\gamma_1)\chi(\gamma_1)^{-1}\gamma_1 - 1)\delta_{i-l_0+1} \end{cases}$$

et son inverse

$$\text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi} : \begin{cases} \mathcal{H}_{A_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}}(\Gamma) & \rightarrow \mathcal{H}_{A_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}}(\Gamma) \\ \sum_{i=0}^{p-2} H_i(\gamma_1 - 1)\delta_i & \mapsto \sum_{i=0}^{p-2} H_i(\chi_{\mathbf{g}}(\gamma_1)^{-1}\chi(\gamma_1)\gamma_1 - 1)\delta_{i+l_0-1}. \end{cases}$$

En comparant avec le twist Tw_m défini en (1.7) on remarque que pour $x \in U_f$ et $y \in I^g$ on a l'égalité

$$\varpi_{x,y} \circ \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}} = \text{Tw}_{y-1}.$$

Puisque $\chi(\gamma_1) \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ alors pour tout $y \in U_g$ on a $\varpi_y \circ \chi_{\mathbf{g}}(\gamma_1) = \chi^y(\gamma_1)$. Alors, pour tout $H \in \mathcal{H}_{A_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}}(\Gamma)$ on a un décalage

$$\mathcal{A}_{\omega^i}^c \left(\text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi}(H) \right) (x, y, s) = \mathcal{A}_{\omega^{i-l_0+1}}^c (H) (x, y, s - y + 1), \quad (x, y, s) \in U_{f,g} \times \mathbb{Z}_p, i \in \mathbb{Z}. \quad (3.54)$$

Soit τ in Γ , un simple calcul montre que pour tout $H \in \mathcal{H}_{A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}}(\Gamma)$ on a

$$\tau. \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}}(H) = \chi_{\mathbf{g}}^{-1}(\tau)\chi(\tau) \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}}(\tau.H).$$

Autrement dit, prendre l'image par $\text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}}$ tord l'action de Γ par le caractère $\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi$.

Soit \mathbb{D} un (φ, Γ) -module sur $\mathcal{R}_{A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}}$. On définit l'isomorphisme canonique de $A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}$ -modules

$$\text{can}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}} : \begin{cases} \mathbb{D} & \rightarrow \mathbb{D}(\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}) \\ d & \mapsto d \otimes e_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}} \end{cases}$$

où $e_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}}$ est défini comme dans le Paragraphe 1.2.2. C'est-à-dire pour tout $\tau \in \Gamma$, on a $\tau.e_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}} = \chi_{\mathbf{g}}(\tau)\chi^{-1}(\tau)e_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}}$ et on a aussi $\varphi(e_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}}) = e_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}}$ car $\chi_{\mathbf{g}}(p)\chi^{-1}(p) = 1$. Ce morphisme laisse l'action de φ inchangée. Par conséquent, ce morphisme n'a aucun effet sur l'action de ψ non plus. On alors un isomorphisme compatible avec l'action de φ et de Γ

$$\text{can}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}} \otimes \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi} : \mathbb{D} \widehat{\otimes}_{A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}} \mathcal{H}_{A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}}(\Gamma)^\iota \rightarrow \mathbb{D}(\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}) \widehat{\otimes}_{A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}} \mathcal{H}_{A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}}(\Gamma)^\iota$$

En utilisant l'identification $H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}) \simeq H^1(\mathbb{D} \widehat{\otimes}_{A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}} \mathcal{H}_{A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}}(\Gamma)^\iota)$ on a donc un isomorphisme sur la cohomologie d'Iwasawa

$$\text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}}^{\text{Iw}} : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}) \rightarrow H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}(\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}))$$

induit par l'isomorphisme $\text{can}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}} \otimes \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi}$. On note l'inverse de cet isomorphisme

$$\text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi}^{\text{Iw}} : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}) \rightarrow H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}(\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi)).$$

C'est le morphisme induit par $\text{can}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi} \otimes \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}}$.

Pour tout $\mu : \Gamma \rightarrow A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}$ on rappelle le morphisme de spécialisation de la cohomologie d'Iwasawa donné par l'évaluation de $\mathcal{H}_A(\Gamma)^\iota$ au caractère μ que l'on note

$$\mu : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}) \rightarrow H^1(\mathbb{D}(\mu^{-1}))$$

(voir (1.13)). On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}) & \xrightarrow{\text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}}^{\text{Iw}}} & H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}(\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1})) \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1} \\ & & H^1(\mathbb{D}(\mu^{-1})) \end{array} \quad . \quad (3.55)$$

On rappelle l'accouplement d'Iwasawa

$$H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}) \times H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}^*(\chi))^\iota \rightarrow \mathcal{H}_{A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}}(\Gamma)$$

compatible avec les morphismes de spécialisations. On dispose aussi de l'accouplement $H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}(\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi)) \times H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}^*(\chi_{\mathbf{g}}^{-1}))^\iota \rightarrow \mathcal{H}_{A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}}(\Gamma)$. Pour tout $h_1 \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D})$ et $h_2 \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}^*(\chi))$ on remarque, grâce au diagramme (3.55), que la spécialisation de $\langle \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}}^{\text{Iw}} h_1, \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi}^{\text{Iw}} h_2 \rangle$

en $\mu\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}$ coïncide avec la spécialisation de $\langle h_1, h_2 \rangle$ en μ . Donc, prendre le twist de la cohomologie par le caractère $\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}$ induit un twist de l'accouplement par le caractère $\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi$. C'est-à-dire, pour tout $h_1 \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D})$ et $h_2 \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}^*(\chi))$ on obtient

$$\langle \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}}^{\text{Iw}} h_1, \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi}^{\text{Iw}} h_2 \rangle = \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi} \langle h_1, h_2 \rangle. \quad (3.56)$$

Des morphismes identiques peuvent être construits pour tout (φ, Γ) module \mathbb{D} sur $\mathcal{R}_{A_{\mathbf{g}}}$.

Pour $x \in U_f$ et $y \in I^g$ on a l'égalité $\varpi_{x,y} \circ \chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1} = \chi^{y-1}$. Donc, la composition des morphismes $\varpi_{x,y} \circ \text{can}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}_{x,y}(\chi^{y-1})$ où $\mathbb{D}_{x,y}$ est la spécialisation de \mathbb{D} en $\varpi_{x,y}$ coïncide avec la composition $\text{can}_{\chi^{y-1}} \circ \varpi_{x,y}$ où $\text{can}_{\chi^{y-1}}(d) = d \otimes e_{y-1}$ avec e_{y-1} le vecteur canonique de $\mathbb{Q}_p(y-1)$. En comparant avec le twist Tw_j^ε défini en (1.9) on remarque que pour $x \in U_f$ et $y \in I^g$ on a l'égalité

$$\varpi_{x,y} \circ \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}}^{\text{Iw}} = \text{Tw}_{y-1}^\varepsilon. \quad (3.57)$$

3.5.2 On rappelle l'existence de $\xi_{\mathbf{g}}$ et $\eta_{\mathbf{f}}$ introduits dans les Propositions 1.7.7 et 1.7.8, ce sont les éléments interpolant les vecteurs canoniques $\bar{\omega}_{\mathbf{g}_l}[l-1] \in \mathcal{F}^- \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_{\mathbf{g}_l}(l-1))$ et $\eta_{\mathbf{f}_k}$ respectivement. On définit

$$\theta_{\mathbf{f},\mathbf{g}} := \eta_{\mathbf{f}} \otimes \xi_{\mathbf{g}}[1] \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(M_{\mathbf{f},\mathbf{g}}) \quad (3.58)$$

où $M_{\mathbf{f},\mathbf{g}}$ est défini en (3.15). Pour $j \in \mathbb{Z}$ on note $\theta_{\mathbf{f},\mathbf{g}}[j] := \theta_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \otimes e_j$. Quitte à réduire le rayon p^{-r} on définit l'exponentielle élargie

$$\text{Exp}_{M_{\mathbf{f},\mathbf{g}},1}^{\varepsilon^{-1}} : \mathcal{D}_{\text{cris}}(M_{\mathbf{f},\mathbf{g}}) \otimes_{A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}} \mathcal{H}_{A_{\mathbf{f},\mathbf{g}}}(\Gamma) \cdot (1+X) \rightarrow H_{\text{Iw}}^1(M_{\mathbf{f},\mathbf{g}}).$$

Grâce à l'accouplement de la cohomologie d'Iwasawa on peut définir

$$\left\langle {}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}, \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi}^{\text{Iw}} \left(\text{Exp}_{M_{\mathbf{f},\mathbf{g}},1}^{\varepsilon^{-1}}(\theta_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \otimes (1+X)) \right)^\iota \right\rangle \in A_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \widehat{\otimes} \mathcal{H}_E(\Gamma).$$

Par la relation (3.56) cet accouplement coïncide aussi avec l'élément

$$\text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}} \left\langle \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi}^{\text{Iw}}({}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}), \text{Exp}_{M_{\mathbf{f},\mathbf{g}},1}^{\varepsilon^{-1}}(\theta_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \otimes (1+X))^\iota \right\rangle. \quad (3.59)$$

Définition 3.5.1. Pour tout entier a l'accouplement induit une fonction L p -adique analytique définie sur $U_{f,g} \times \mathbb{Z}_p$ par

$$L_p({}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}, \omega^a, x, y, s) = \mathcal{A}_{\omega^a} \left(\left\langle {}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}, \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi}^{\text{Iw}} \left(\text{Exp}_{M_{\mathbf{f},\mathbf{g}},1}^{\varepsilon^{-1}}(\theta_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \otimes (1+X)) \right)^\iota \right\rangle \right) (x, y, s). \quad (3.60)$$

En utilisant l'écriture équivalente (3.59) et la compatibilité du twist avec la spécialisation avec la règle donnée en (3.54) on a la seconde écriture de la fonction L p -adique suivante

$$L_p({}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}, \omega^a, x, y, s) = \mathcal{A}_{\omega^{a-l_0+1}}^c \left(\left\langle \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi}^{\text{Iw}}({}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}), \text{Exp}_{M_{\mathbf{f},\mathbf{g}},1}^{\varepsilon^{-1}}(\theta_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \otimes (1+X))^\iota \right\rangle \right) (x, y, s - y + 1). \quad (3.61)$$

Pour tout entier a on définit la fonction continue de \mathbb{Z}_p dans \mathbb{Z}_p

$$\tilde{\nu}_c(f, g, \omega^a, s) = c^2 - \varepsilon_f^{-1}(c)\varepsilon_g^{-1}(c)\omega(c)^{a+2} \langle c \rangle^{s+2}.$$

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on note aussi

$$\nu_c(f, g, j) = \tilde{\nu}_c(f, g, \omega^j, j) = c^2 - \varepsilon_f^{-1}(c)\varepsilon_g^{-1}(c)c^{j+2}. \quad (3.62)$$

On pose $G(f, g) := G(\varepsilon_f^{-1})G(\varepsilon_g^{-1})$ et on rappelle que $\lambda_{N_f}(\mathbf{f})$ désigne l'interpolation de la pseudo-valeur propre de Atkin-Lehner associée à \mathbf{f} (voir 1.7.6).

Théorème 3.5.2. [LZ16, Théorème 7.1.5] *On suppose que le rayon p^{-r_f} soit suffisamment petit. La fonction p -adique de Urban admet l'écriture suivante*

$$L_p({}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f}, \mathbf{g}}, \omega^{a-1}, x, y, s-1) = {}_cB(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^a, x, y, s)L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^a)(x, y, s)$$

où ${}_cB(\omega^a, x, y, s)$ est la fonction analytique de $U_{f,g} \times \mathbb{Z}_p$ définie par

$${}_cB(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^a, x, y, s) = \frac{(-1)^a G(f, g)}{\lambda_{N_f}(\mathbf{f})(x)} \tilde{\nu}_c(f, g, \omega^{2a-k_0-l_0}, 2s-x-y). \quad (3.63)$$

3.5.3. On considère la restriction de $L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^{l_0})$ à la droite (k_0, l_0, s) , où s varie dans \mathbb{Z}_p . On note cette fonction $L_p(f, g, \omega^{l_0}, s)$. Pour toute forme modulaire, on rappelle l'existence des vecteurs propres du Frobenius η_f et ω_f^β de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_f)$ associés à $\alpha_p(f)$ et $\beta_p(f)$ respectivement (voir Paragraphe 1.7.6). En particulier, on rappelle aussi que $\eta_f \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^+\mathbb{D}_f)$. On note les éléments des modules cristallins associés aux couples (f, g) et (f_α, g_α)

$$\begin{aligned} \Theta_{f,g} &:= \eta_f \otimes \omega_g^\beta \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^+\mathbb{D}_{f,g}), \\ \Theta_{f_\alpha, g_\alpha} &:= (\text{Pr}^\alpha \times \text{Pr}^\alpha)^*(\Theta_{f,g}) \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^+\mathbb{D}_{f_\alpha, g_\alpha}). \end{aligned}$$

On a aussi l'écriture suivante $\Theta_{f_\alpha, g_\alpha} = \eta_{f_\alpha} \otimes \omega_{g_\alpha}^\beta$. On note les projections sur les quotients $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^+\mathbb{D}_{f_\alpha, g_\alpha})$ et $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^+\mathbb{D}_{f,g})$ respectivement

$$\bar{\Theta}_{f_\alpha, g_\alpha} := \text{proj}(\Theta_{f_\alpha, g_\alpha}), \quad \bar{\Theta}_{f,g} := \text{proj}(\Theta_{f,g}). \quad (3.64)$$

En particulier, $\frac{1}{\lambda_{N_f}(f)\mathcal{E}(f)}\bar{\Theta}_{f_\alpha, g_\alpha}[l_0]$ coïncide avec la spécialisation en (k_0, l_0) de $\theta_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}$. On a les écritures secondaires $\bar{\Theta}_{f_\alpha, g_\alpha} = \eta_{f_\alpha} \otimes \bar{\beta}_{g_\alpha}$ et $\bar{\Theta}_{f,g} = \eta_f \otimes \bar{\beta}_g$. On rappelle l'existence de l'élément

$${}_c\mathcal{BF}_{l_0-1}^{f,g} \in H_{\text{Iw}, S}^1(\mathbb{Q}, V_{f,g}^*(1-l_0))$$

comme défini en (3.52). Grâce au logarithme élargi de Perrin-Riou (voir 1.4.5) on a

$$\text{Log}_{V_{f,g}^*(1-l_0), 1-l_0, \Theta_{f,g}[l_0]}^\varepsilon \left(\text{loc}_p \left({}_c\mathcal{BF}_{l_0-1}^{f,g} \right) \right) \in \mathcal{H}_E(\Gamma).$$

Définition 3.5.3. *On note la fonction analytique de \mathbb{Z}_p dans E*

$$L_p \left({}_c\mathcal{BF}_{l_0-1}^{f,g}, s \right) := \mathcal{A}_{\omega^0} \left(\text{Log}_{V_{f,g}^*(1-l_0), 1-l_0, \Theta_{f,g}[l_0]}^\varepsilon \left(\text{loc}_p \left({}_c\mathcal{BF}_{l_0-1}^{f,g} \right) \right) \right) (s).$$

On définit la fonction analytique de \mathbb{Z}_p par $\Gamma(l_0, s) := \prod_{m=1}^{l_0-1} (s+m)$. Par analogie, on note

$$\Gamma(l_0, \gamma_1) := \prod_{m=1}^{l_0-1} \left(m + \frac{\log \gamma_1}{\log(\chi(\gamma_1))} \right) \in \mathcal{H}_E.$$

En particulier pour tout $s \in \mathbb{Z}_p$ on a

$$\Gamma(l_0, s) = \mathcal{A}_{\omega^0}^c(\Gamma(l_0, \gamma_1))(s).$$

Proposition 3.5.4. *On a l'égalité des fonctions analytiques sur \mathbb{Z}_p*

$$\tilde{\nu}_c(f, g, \omega^{l_0-k_0}, s+l_0-k_0) \Gamma(l_0, s) L_p(f, g, \omega^{l_0}, l_0+s) = \frac{(-1)^{l_0}}{\mathcal{E}(f)G(f, g)} L_p\left({}_c\mathcal{BF}_{l_0-1}^{f, g}, s\right).$$

Démonstration. Soit $h_{f, g} \in \mathcal{H}_E(\Gamma)$ l'élément défini par

$$h_{f, g} := \mathcal{A}^{\text{wt}} \left(\mathcal{E}(f) \lambda_{N_f}(f) \left\langle \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi}^{\text{Iw}}({}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f}, \mathbf{g}}), \text{Exp}_{M_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}, 1}^{\varepsilon^{-1}}(\theta_{\mathbf{f}, \mathbf{g}} \otimes (1+X))^t \right\rangle \right) (k_0, l_0) \quad (3.65)$$

Par compatibilité de l'accouplement et de l'exponentielle avec la spécialisation des familles \mathbf{f} et \mathbf{g} on a

$$h_{f, g} = \left\langle \text{Tw}_{1-l_0}^{\varepsilon}({}_c\mathbf{bf}^{f_{\alpha}, g_{\alpha}}), \text{Exp}_{M_{f_{\alpha}, g_{\alpha}}, 1}^{\varepsilon^{-1}}(\overline{\Theta}_{f_{\alpha}, g_{\alpha}}[l_0] \otimes (1+X))^t \right\rangle$$

où l'on rappelle que la spécialisation de $\text{Tw} \chi_{\mathbf{g}}^{-1} \chi$ est donnée par (3.57) et que

$${}_c\mathbf{bf}^{f_{\alpha}, g_{\alpha}} := \varpi_{k_0, l_0}({}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f}, \mathbf{g}}) \in H_{\text{Iw}}^1(\mathcal{F}^{-+} \mathbb{D}_{f_{\alpha}, g_{\alpha}}^*)$$

comme défini en (3.51). Grâce au 3ième point du Théorème 1.4.3 on change l'indice de l'exponentielle de 1 à l_0 grâce au coefficient $\Gamma(l_0, \gamma_1)$

$$\Gamma(l_0, \gamma_1) h_{f, g} = \left\langle \text{Tw}_{1-l_0}^{\varepsilon}({}_c\mathbf{bf}^{f_{\alpha}, g_{\alpha}}), \text{Exp}_{M_{f_{\alpha}, g_{\alpha}}, l_0}^{\varepsilon^{-1}}(\overline{\Theta}_{f_{\alpha}, g_{\alpha}}[l_0] \otimes (1+X))^t \right\rangle.$$

On rappelle que l'élément ${}_c\mathbf{bf}^{f_{\alpha}, g_{\alpha}}$ est la projection de ${}^p\mathcal{BF}^{f_{\alpha}, g_{\alpha}} \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{D}_{f_{\alpha}, g_{\alpha}})$ par le morphisme induit par $\mathbb{D}_{f_{\alpha}, g_{\alpha}} \rightarrow \mathcal{F}^{-\circ} \mathbb{D}_{f_{\alpha}, g_{\alpha}}$ (voir Proposition 3.4.18). On peut relever l'accouplement en

$$\Gamma(l_0, \gamma_1) h_{f, g} = \left\langle \text{Tw}_{1-l_0}^{\varepsilon}({}^p\mathcal{BF}^{f_{\alpha}, g_{\alpha}}), \text{Exp}_{\mathbb{D}_{f_{\alpha}, g_{\alpha}}(\chi^{l_0}), l_0}^{\varepsilon^{-1}}(\Theta_{f_{\alpha}, g_{\alpha}}[l_0] \otimes (1+X))^t \right\rangle$$

Par functorialité de l'exponentielle avec l'isomorphisme $(\text{Pr}^{\alpha} \times \text{Pr}^{\alpha})_*$ on a

$$\Gamma(l_0, \gamma_1) h_{f, g} = \left\langle \text{loc}_p\left({}_c\mathcal{BF}_{l_0-1}^{f, g}\right), \text{Exp}_{\mathbb{D}_{f, g}(\chi^{l_0}), l_0}^{\varepsilon^{-1}}(\Theta_{f, g}[l_0] \otimes (1+X))^t \right\rangle.$$

Autrement dit, on a

$$\Gamma(l_0, \gamma_1) h_{f, g} = \text{Log}_{V_{f, g}^*(1-l_0), 1-l_0, \Theta_{f, g}[l_0]}^{\varepsilon} \left(\text{loc}_p\left({}_c\mathcal{BF}_{l_0-1}^{f, g}\right) \right)$$

donc pour tout $s \in \mathbb{Z}_p$, on a

$$L_p\left({}_c\mathcal{BF}_{l_0-1}^{f, g}, s\right) = \Gamma(l_0, s) \mathcal{A}_{\omega^0}(h_{f, g})(s). \quad (3.66)$$

Pour tout $s \in \mathbb{Z}_p$, en spécialisant (3.65) on a

$$\mathcal{A}_{\omega^0}^c(h_{f,g})(s) := \mathcal{E}(f)\lambda_{N_f}(f)\mathcal{A}_{\omega^0} \left(\left\langle \mathrm{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi}^{\mathrm{Iw}}(c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}), \mathrm{Exp}(\theta_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \otimes (1+X))^t \right\rangle \right) (k_0, l_0, s)$$

où Exp désigne $\mathrm{Exp}_{M_{\mathbf{f},\mathbf{g}},1}^{\varepsilon^{-1}}$. En comparant l'égalité (3.66) avec la seconde écriture de la fonction $L_p(c\mathbf{BF}_{l_0-1}^{f,g}, \omega^{l_0-1}, k_0, l_0, s+l_0-1)$ donnée en (3.61) avec $x = k_0, y = l_0$ et $a = l_0-1$ on a l'égalité

$$L_p(c\mathcal{BF}_{l_0-1}^{f,g}, s) = \mathcal{E}(f)\lambda_{N_f}(f)\Gamma(l_0, s)L_p(c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}, \omega^{l_0-1}, k_0, l_0, s+l_0-1)..$$

En utilisant le Théorème 3.5.2 on obtient le résultat souhaité. \square

3.5.4. On s'intéresse maintenant à la restriction de la fonction $L_p^{(l_0)}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ de Urban suivant la droite (k_0, y, y) , où y varie dans le disque $U_g := D(l_0, 1/p^{r-1})$.

En utilisant l'écriture (3.61) avec $x = k_0, y \in D(l_0, 1/p^{r-1}), s = y-1$ et $a = l_0-1$ on obtient l'égalité

$$L_p(c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}, \omega^{l_0-1}, k_0, y, y-1) = \mathcal{A}_{\omega^0}^c \left(\left\langle \mathrm{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi}^{\mathrm{Iw}}(c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}), \mathrm{Exp}(\theta_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \otimes (1+X))^t \right\rangle \right) (k_0, y, 0) \quad (3.67)$$

où Exp désigne l'exponentielle élargie $\mathrm{Exp}_{M_{\mathbf{f},\mathbf{g}},1}^{\varepsilon^{-1}}$. En spécialisant le poids de la famille \mathbf{f} en k_0 grâce au morphisme $\varpi_{k_0}^{\mathbf{f}} : A_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \rightarrow A_{\mathbf{g}}$ défini en (3.16) on a

$$\varpi_{k_0}^{\mathbf{f}} \left(\mathrm{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi}^{\mathrm{Iw}}(c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}) \right) \in H_{\mathrm{Iw}}^1(M_{f_{\alpha},\mathbf{g}}^*(\chi))$$

où $M_{f_{\alpha},\mathbf{g}}$ est défini en (3.19). On note alors $c\widetilde{\mathbf{bf}}^{f_{\alpha},\mathbf{g}}$ sa projection sur le corps de base

$$c\widetilde{\mathbf{bf}}^{f_{\alpha},\mathbf{g}} := \mathrm{pr}_0 \circ \varpi_{k_0}^{\mathbf{f}} \left(\mathrm{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi}^{\mathrm{Iw}}(c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}) \right) \in H^1(M_{f_{\alpha},\mathbf{g}}^*(\chi)). \quad (3.68)$$

On note $\theta_{f_{\alpha},\mathbf{g}}$ l'élément cristallin canonique de $\mathcal{D}_{\mathrm{cris}}(M_{f_{\alpha},\mathbf{g}})$

$$\theta_{f_{\alpha},\mathbf{g}} := \frac{1}{\mathcal{E}(f)\lambda_{N_f}(f)} \eta_{f_{\alpha}} \otimes \xi_{\mathbf{g}}[1] \in \mathcal{D}_{\mathrm{cris}}(M_{f_{\alpha},\mathbf{g}}).$$

Alors, on a $\theta_{f_{\alpha},\mathbf{g}} = \varpi_{k_0}^{\mathbf{f}}(\theta_{\mathbf{f},\mathbf{g}})$ où $\theta_{\mathbf{f},\mathbf{g}}$ est défini en (3.58) (voir Théorème 1.7.8). Le module $M_{f_{\alpha},\mathbf{g}}$ est cristallin et muni d'une exponentielle $\exp_{M_{f_{\alpha},\mathbf{g}}} : \mathcal{D}_{\mathrm{cris}}(M_{f_{\alpha},\mathbf{g}}) \rightarrow H^1(M_{f_{\alpha},\mathbf{g}})$ (voir 1.2.3).

Définition 3.5.5. On définit la fonction L p -adique suivante

$$L_p(c\widetilde{\mathbf{bf}}^{f_{\alpha},\mathbf{g}}, y) = \mathcal{A}^{wt} \left(\left\langle c\widetilde{\mathbf{bf}}^{f_{\alpha},\mathbf{g}}, \exp_{M_{f_{\alpha},\mathbf{g}}}(\theta_{f_{\alpha},\mathbf{g}}) \right\rangle \right) (y).$$

Proposition 3.5.6. On a l'égalité des fonctions analytiques sur U_g

$${}_cB(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^{l_0}, k_0, y, y)L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^{l_0})(k_0, y, y) = \widetilde{\mathcal{E}}^{f_{\alpha},\mathbf{g}}(y)L_p(c\widetilde{\mathbf{bf}}^{f_{\alpha},\mathbf{g}}, y)$$

où ${}_cB(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^{l_0}, k_0, y, y)$ est défini dans (3.63) et le facteur eulérien $\widetilde{\mathcal{E}}^{f_{\alpha},\mathbf{g}}(y)$ est défini par

$$\widetilde{\mathcal{E}}^{f_{\alpha},\mathbf{g}}(y) := \mathcal{A}^{wt} \left(\left(\left(1 - \frac{\alpha_p(\mathbf{g}^*)}{\alpha_p(f)} \right) \left(1 - \frac{\alpha_p(f)}{p\alpha_p(\mathbf{g}^*)} \right)^{-1} \right) \right) (y) \quad (3.69)$$

Démonstration. En spécialisant le poids de la famille \mathbf{f} en k_0 en utilisant l'écriture alternative (3.61) de la fonction $L_p(c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}, \omega^{l_0-1}, k_0, y, y-1)$ on obtient

$$\begin{aligned} L_p(c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}, \omega^{l_0-1}, k_0, y, y-1) &= \mathcal{A}_{w_0}^c \left(\left\langle \mathrm{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}\chi^{-1}}^{\mathrm{Iw}}(c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}), \mathrm{Exp}(\theta_{\mathbf{f},\mathbf{g}} \otimes (1+X))^t \right\rangle \right) (k_0, y, 0) \\ &= \mathcal{A}^{\mathrm{wt}} \left(\left\langle {}_c\widetilde{\mathbf{bf}}^{f_{\alpha},\mathbf{g}}, \mathrm{pr}_0(\mathrm{Exp}(\theta_{f_{\alpha},\mathbf{g}} \otimes (1+X))) \right\rangle \right) (y). \end{aligned}$$

où Exp désigne $\mathrm{Exp}_{M_{\mathbf{f},\mathbf{g}},1}^{\varepsilon^{-1}}$ par soucis de concision. En utilisant la proposition de descente de l'exponentielle élargie (1.5.1) on a

$$\mathrm{pr}_0 \left(\mathrm{Exp}_{M_{\mathbf{f},\mathbf{g}},1}^{\varepsilon^{-1}}(\theta_{f_{\alpha},\mathbf{g}} \otimes (1+X)) \right) = \left(1 - \frac{\alpha_p(\mathbf{g}^*)}{\alpha_p(f)} \right) \left(1 - \frac{\alpha_p(f)}{p\alpha_p(\mathbf{g}^*)} \right)^{-1} \exp(\theta_{f_{\alpha},\mathbf{g}})$$

donc

$$\begin{aligned} L_p(c\mathbf{bf}^{\mathbf{f},\mathbf{g}}, \omega^{l_0-1}, k_0, y, y-1) &= \widetilde{\mathcal{E}}^{f_{\alpha},\mathbf{g}}(y) \mathcal{A}^{\mathrm{wt}} \left(\left\langle {}_c\widetilde{\mathbf{bf}}^{f_{\alpha},\mathbf{g}}, \exp(\theta_{f_{\alpha},\mathbf{g}}) \right\rangle \right) (y) \\ &= \widetilde{\mathcal{E}}^{f_{\alpha},\mathbf{g}}(y) L_p \left({}_c\widetilde{\mathbf{bf}}^{f_{\alpha},\mathbf{g}}, y \right). \end{aligned}$$

Alors, en utilisant le Théorème 3.5.2 on obtient le résultat voulu. \square

On dit que la fonction $L_p(h_{f_{\alpha},\mathbf{g}}, y)$ est améliorée dans l'esprit du texte [GS93] de Greenberg-Stevens. En effet celle-ci permet de retrouver la fonction L p -adique de Urban sans le facteur eulérien $\widetilde{\mathcal{E}}^{f_{\alpha},\mathbf{g}}$.

3.5.5. La restriction de la fonction de Urban à la droite (k_0, l, l) est envoyée, par l'équation fonctionnelle, sur la droite $(k_0, l, k_0 - 1)$. Le paragraphe précédent donne ainsi une méthode pour calculer la restriction de la fonction $L_p^{(k_0-1)}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ sur cette droite. Grâce à l'élément de Beilinson-Flach construit pour la forme f et la famille \mathbf{g} il est possible de donner une seconde écriture sans passer par l'équation fonctionnelle.

Soit $\theta_{f,\mathbf{g}}$ l'élément canonique du module cristallin associé à la forme f et la famille \mathbf{g}

$$\theta_{f,\mathbf{g}} := \frac{1}{\mathcal{E}(f)\lambda_{N_f}(f)} \eta_f \otimes \xi_{\mathbf{g}}[1] \in \mathcal{D}_{\mathrm{cris}}(M_{f,\mathbf{g}})$$

où $M_{f,\mathbf{g}}$ est défini en (3.19). En particulier, si on spécialise le poids de la famille \mathbf{f} en k_0 grâce au morphisme $\varpi_{k_0}^{\mathbf{f}}$ défini en (3.16) on obtient

$$(\mathrm{Pr}^{\alpha} \times \mathrm{Id})^*(\theta_{f,\mathbf{g}}) = \varpi_{k_0}^{\mathbf{f}}(\theta_{\mathbf{f},\mathbf{g}})$$

(voir Théorème 1.7.8). Quitte à réduire le rayon p^{1-r} , $M_{f,\mathbf{g}}$ est de rang 1, cristallin de poids de Hodge-Tate égal à 1 et de pente constante. Alors, on définit l'exponentielle élargie (voir section 1.5)

$$\mathrm{Exp}_{M_{f,\mathbf{g}},1}^{\varepsilon} : \mathcal{D}_{\mathrm{cris}}(M_{f,\mathbf{g}}) \otimes_{A_{\mathbf{g}}} \mathcal{H}_{A_{\mathbf{g}}}(\Gamma) \cdot (1+X) \rightarrow H_{\mathrm{Iw}}^1(M_{f,\mathbf{g}}).$$

On note

$$b_{f,\mathbf{g}} := \varpi_{2-k_0}^c \circ \mathrm{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi}^{\mathrm{Iw}} \left(\mathrm{Exp}_{M_{f,\mathbf{g}},1}^{\varepsilon^{-1}}(\theta_{f,\mathbf{g}} \otimes (1+X)) \right) \in H^1(\mathcal{F}^{+-} \mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}(\chi^{k_0-1}))$$

où $\varpi_{2-k_0}^c$, défini en (3.36), est le morphisme induit par la spécialisation de la variable cyclotomique. On rappelle l'existence de ${}_c\mathbf{bf}^{f,\mathbf{g},k_0-2} \in H^1(\mathcal{F}^{-+} \mathbb{D}_{f,\mathbf{g}}^*(\chi^{2-k_0}))$ défini en (3.48).

Définition 3.5.7. On définit la fonction L p-adique définie sur $U_g := D(l_0, 1/p^{r-1})$

$$L_p(\mathbf{c}\mathbf{b}\mathbf{f}^{f,\mathbf{g},k_0-2}, y) = \mathcal{A}^{\text{wt}}(\langle \mathbf{c}\mathbf{b}\mathbf{f}^{f,\mathbf{g},k_0-2}, b_{f,\mathbf{g}} \rangle)(y). \quad (3.70)$$

On rappelle la définition de $\mathcal{E}^{f,\mathbf{g}}$ le facteur eulérien (voir (3.49))

$$\mathcal{E}^{f,\mathbf{g}}(y) := \mathcal{A}^{\text{wt}}\left(\left(1 - \frac{p^{k_0-2}}{\alpha_p(f)\alpha_p(\mathbf{g})}\right)\left(1 - \frac{\beta_p(f)\alpha_p(\mathbf{g})}{p^{k_0-1}}\right)\right)(y). \quad (3.71)$$

Proposition 3.5.8. On a l'égalité des fonctions analytiques définies sur U_g

$${}_cB(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^{k_0-1}, k_0, y, k_0 - 1)L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, w^{k_0-1})(k_0, y, k_0 - 1) = \frac{(-1)^{k_0}\mathcal{E}^{f,\mathbf{g}}(y)}{(k_0 - 2)!} L_p(\mathbf{c}\mathbf{b}\mathbf{f}^{f,\mathbf{g},k_0-2}, y)$$

où y évolue dans U_g et ${}_cB(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^{k_0-1}, k_0, y, k_0 - 1)$ est défini en 3.5.2.

Démonstration. Soit l un entier de $U_g := D(l_0, 1/p^{r-1})$ tel que $l > k_0$ et $l \equiv l_0 \pmod{p-1}$. On rappelle l'égalité (3.57)

$$\varpi_l \circ \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi} = \text{Tw}_{1-l}^\varepsilon \circ \varpi_l$$

où ϖ_l est le morphisme de spécialisation de \mathbf{g} en l et $\text{Tw}_{1-l}^\varepsilon$ est le twist défini en (1.9). De plus on a $\varpi_{2-k_0}^c \circ \text{Tw}_{1-l}^\varepsilon = \varpi_{l+1-k_0}^c$ donc on a $\varpi_l \circ \varpi_{2-k_0}^c \circ \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi} = \varpi_{l+1-k_0}^c \circ \varpi_l$. Par conséquent, la spécialisation de $b_{f,\mathbf{g}}$ au poids l s'écrit

$$\begin{aligned} \varpi_l(b_{f,\mathbf{g}}) &= \varpi_l \circ \varpi_{2-k_0}^c \circ \text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1}\chi} \left(\text{Exp}_{M_{f,\mathbf{g}},1}^{\varepsilon^{-1}}(\theta_{f,\mathbf{g}} \otimes (1+X)) \right) \\ &= \varpi_{l+1-k_0}^c \circ \varpi_l \left(\text{Exp}_{M_{f,\mathbf{g}},1}^{\varepsilon^{-1}}(\theta_{f,\mathbf{g}} \otimes (1+X)) \right) \end{aligned}$$

Par compatibilité de l'exponentielle élargie avec le morphisme de spécialisation (voir Théorème 1.5.2) on a

$$\varpi_l(b_{f,\mathbf{g}}) = \frac{1}{\lambda_{N_f}(f)\mathcal{E}(f)} \varpi_{l+1-k_0}^c \left(\text{Exp}_{M_{f,\mathbf{g}_l},1}^{\varepsilon^{-1}}(\overline{\Theta}_{f,\mathbf{g}_l}[l] \otimes (1+X)) \right)$$

où $\text{Exp}_{M_{f,\mathbf{g}_l},1}^{\varepsilon^{-1}}$ désigne l'exponentielle élargie de Perrin-Riou. Le Frobenius agit sur le module $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{f,\mathbf{g}_l}(k_0-1))$ comme la multiplication par $\alpha_p(f)\beta_p(\mathbf{g}_l)p^{1-k_0}$. L'équation (1.19) implique que $|\alpha_p(f)\beta_p(\mathbf{g}_l)p^{1-k_0}| = p^{\frac{l_0-k_0}{2}}$. Puisque $l \neq k_0$ cela implique

$$\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{f,\mathbf{g}_l}(\chi^{k_0-1}))^{\varphi=1} = 0.$$

Alors, en utilisant l'égalité $\overline{\Theta}_{f,\mathbf{g}_l}[k_0-1] = (\text{Id} \times \text{Pr}^\alpha)^* \left(\overline{\Theta}_{f,\mathbf{g}_l^0}[k_0-1] \right)$ et la Proposition 1.4.4 avec $k = k_0 - l - 1$ et $h = m = 1$ on obtient

$$\varpi_l(b_{f,\mathbf{g}}) = \frac{\Psi(f, \mathbf{g}_l)}{\mathcal{E}(f)\lambda_{N_f}(f)} (\exp^*)^{-1} \left((\text{Id} \times \text{Pr}^\alpha)^* \left(\overline{\Theta}_{f,\mathbf{g}_l^0}[k_0-1] \right) \right) \quad (3.72)$$

où $\Psi(f, \mathbf{g}_l)$ est défini par

$$\Psi(f, \mathbf{g}_l) = \left(1 - \frac{p^{k_0-2}}{\alpha_p(f)\beta_p(\mathbf{g}_l)} \right) \left(1 - \frac{\alpha_p(f)\beta_p(\mathbf{g}_l)}{p^{k_0-1}} \right)^{-1}. \quad (3.73)$$

De l'autre côté de l'équation on cherche à spécialiser l'écriture (3.60) en $(k_0, l, k_0 - 2)$. Le calcul précédent permet, de manière analogue, de prouver l'égalité

$$\varpi_{k_0, l_0, 2-k_0}^c \circ \mathrm{Tw}_{\mathbf{X}_{\mathbf{g}}^{-1}\chi}^{\mathrm{Iw}} \left(\mathrm{Exp}_{M_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}, 1}^{\varepsilon^{-1}} (\theta_{\mathbf{f}, \mathbf{g}} \otimes (1 + X)) \right) = \frac{\Psi(f, \mathbf{g}_l)}{\mathcal{E}(f)\lambda_{N_f}(f)} (\exp^*)^{-1} (\bar{\Theta}_{f, \mathbf{g}_l}[k_0 - 1])$$

où $\varpi_{k_0, l_0, 2-k_0}^c$ est le morphisme de spécialisation défini en (3.37). En utilisant la compatibilité de l'accouplement avec les morphismes de spécialisation et en utilisant l'adjoint $(\mathrm{Pr}^\alpha \times \mathrm{Pr}^\alpha)_*$ de $(\mathrm{Pr}^\alpha \times \mathrm{Pr}^\alpha)^*$ on a

$$L_p({}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f}, \mathbf{g}}, \omega^{k_0-2}, k_0, l, k_0 - 2) = \left\langle (\mathrm{Pr}^\alpha \times \mathrm{Pr}^\alpha)_* ({}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f}, \mathbf{g}}(k_0, l, k_0 - 2)), \frac{\Psi(f, \mathbf{g}_l)}{\mathcal{E}(f)\lambda_{N_f}(f)} (\exp^*)^{-1} (\bar{\Theta}_{f, \mathbf{g}_l^0}[k_0 - 1]) \right\rangle$$

où $\Psi(f, \mathbf{g}_l)$ est le facteur défini précédemment. En utilisant le Lemme 3.4.17 on peut réécrire cette équation

$$\frac{(-1)^{k_0}}{(k_0 - 2)!} \left\langle \mathcal{E}^{f, \mathbf{g}}(l) (\mathrm{Id} \times \mathrm{Pr}^\alpha)_* (\varpi_l ({}_c\mathbf{bf}^{f, \mathbf{g}, k_0-2})) , \frac{\Psi(f, \mathbf{g}_l)}{\mathcal{E}(f)\lambda_{N_f}(f)} (\exp^*)^{-1} (\bar{\Theta}_{f, \mathbf{g}_l^0}[k_0 - 1]) \right\rangle.$$

On reconnaît la spécialisation de $b_{f, \mathbf{g}}$ au poids l multipliée par le facteur $\frac{(-1)^{k_0}}{(k_0-2)!} \mathcal{E}^{f, \mathbf{g}}(l)$ (voir (3.72)). En comparant avec la définition de $L_p ({}_c\mathbf{bf}^{f, \mathbf{g}, k_0-2}, l)$ on obtient

$$L_p({}_c\mathbf{bf}^{\mathbf{f}, \mathbf{g}}, \omega^{k_0-2}, k_0, l, k_0 - 2) = \frac{(-1)^{k_0}}{(k_0 - 2)!} \mathcal{E}^{f, \mathbf{g}}(l) L_p ({}_c\mathbf{bf}^{f, \mathbf{g}, k_0-2}, l).$$

En utilisant le Théorème 3.5.2, la continuité des fonctions apparaissant et la densité de l'ensemble des l vérifiant les propriétés souhaitées on obtient le résultat voulu. \square

Chapitre 4

Zéros de la fonction de Urban

Le but de ce chapitre est d'étudier le cas où la fonction L p -adique de Urban s'annule. Dans un premier temps on étudiera des conditions suffisantes pour que la fonction s'annule. Ensuite, on dérivera la fonction L_p de Urban dans le sens cyclotomique. Enfin, on utilisera l'équation fonctionnelle pour faire apparaître le régulateur p -adique et infini mettant ainsi en évidence le lien entre la dérivée de la fonction p -adique et la fonction complexe. Dans le dernier paragraphe, on présentera un résultat nécessitant des conditions supplémentaires faisant apparaître l'invariant \mathcal{L} défini dans le chapitre 2 et les périodes p -adiques et infinie. Ce dernier résultat est en accord avec la théorie des zéros exceptionnels comme exposée dans [Ben14a].

4.1 Recherche des points d'annulations

Soient f et g deux formes primitives de niveaux respectifs N_f et N_g , de poids respectifs k_0 et l_0 supérieurs ou égaux à 2 et de caractères respectifs ε_f et ε_g . On suppose que $l_0 \leq k_0$. On suppose que ε_f , ε_g et $\varepsilon_f \varepsilon_g$ soient des caractères primitifs de conducteurs N_f , N_g et N respectivement. On suppose aussi que $f^* \neq g$. Soit p un nombre premier plus grand que 5 qui ne divise pas $N_f N_g$ et tel que f et g soient p -régulières. On suppose également que $\varepsilon_f(p) \varepsilon_g(p) \neq 1$. Soit un entier $c > 1$ premier avec $6N_f N_g p$ tel que $\varepsilon_f(c) \varepsilon_g(c) \neq 1$. Soient les familles de Coleman \mathbf{f} et \mathbf{g} passant par f_α et g_α respectivement. Les notations des chapitres précédents sont conservées.

Pour a un entier, on considère la fonction analytique de Urban $L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^a)$ définie sur $U_{f,g} \times \mathbb{Z}_p$. En fixant les poids du couple (\mathbf{f}, \mathbf{g}) en (k_0, l_0) on obtient la fonction p -adique définie sur \mathbb{Z}_p associée au couple (f, g)

$$L_p(f, g, \omega^a, j) := L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^a)(k_0, l_0, j). \quad (4.1)$$

Les points critiques de la fonction de Rankin-Selberg sont les entiers j vérifiant

$$l_0 \leq j \leq k_0 - 1$$

On s'intéresse particulièrement aux points j entiers tels que la fonction L p -adique s'annule alors que $\Lambda(f, g, j)$ ne s'annule pas. On rappelle que la fonction L complétée de Rankin-Selberg ne peut s'annuler qu'au point de symétrie $j = \frac{k_0 + l_0 - 1}{2}$ lorsque celui-ci est entier. On commence par chercher de tels points parmi les points critiques. En particulier, on

rappelle que si $l_0 = k_0$ cet ensemble est vide. Grâce à l'équation (3.4) on voit que pour tout point critique j la fonction $L_p(f, g, \omega^a, j)$ ne s'annule que si $L(f, g, j) = 0$ ou si $\mathcal{E}(f, g, \omega^a, j) = 0$ (voir (3.4) pour sa définition).

Proposition 4.1.1. *Pour tout entier a la fonction $\mathcal{E}(f, g, \omega^a, j)$ ne peut s'annuler pour $k_0 \leq j < l_0$ que si $j \equiv a \pmod{p-1}$ et $j = \frac{k_0+l_0}{2} - 1$ ou $j = \frac{k_0+l_0}{2}$.*

Démonstration. Soit j un point critique de la fonction de Rankin-Selberg. Si $j \not\equiv a \pmod{p-1}$ alors on rappelle que

$$\mathcal{E}(\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_l, \omega^a, j) = G(\omega^{j-a})^2 \frac{p^{2j-2}}{\alpha_p(f)^2 \alpha_p(g) \beta_p(g)}$$

ce qui est trivialement non-nul. Si $j \equiv a \pmod{p-1}$ on rappelle que $\mathcal{E}(f, g, \omega^a, j)$ est le produit des 4 facteurs eulériens

$$\left(1 - \frac{p^{j-1}}{\alpha_p(f) \alpha_p(g)}\right) \left(1 - \frac{p^{j-1}}{\alpha_p(f) \beta_p(g)}\right) \left(1 - \frac{\beta_p(f) \alpha_p(g)}{p^j}\right) \left(1 - \frac{\beta_p(f) \beta_p(g)}{p^j}\right)$$

comme défini dans le Théorème 3.2.1. On rappelle que le module des racines de Hecke vaut

$$|\alpha_p(f)| = |\beta_p(f)| = p^{\frac{k_0-1}{2}}, \quad |\alpha_p(g)| = |\beta_p(g)| = p^{\frac{l_0-1}{2}}.$$

En particulier on sait que les deux premiers facteurs de $\mathcal{E}(f, g, \omega^a, j)$ ne peuvent s'annuler que si

$$j - 1 = \frac{k_0 + l_0}{2} - 1$$

et les deux derniers ne peuvent s'annuler que si

$$j = \frac{k_0 + l_0}{2} - 1$$

ce qui prouve le résultat voulu. \square

En particulier, on remarque que les deux points d'annulation possibles du facteur $\mathcal{E}(f, g, \omega^a, j)$ sont les points $\frac{k_0+l_0-1}{2} \pm \frac{1}{2}$. Ces points sont appelés presque centraux.

Remarque 4.1.2. Dans le cas plus restrictif où f et g sont des formes modulaires ordinaires en p on a

$$\nu_p(\alpha_p(f)) = \nu_p(\alpha_p(g)) = 0, \quad \nu_p(\beta_p(f)) = k_0 - 1, \quad \nu_p(\beta_p(g)) = l_0 - 1$$

alors une brève analyse de la valuation p -adique des 4 facteurs eulériens composant $\mathcal{E}(f, g, \omega^a, j)$ montrent qu'ils ne peuvent pas s'annuler lorsque j est un point critique.

On cherche maintenant les points d'annulation de la fonction L p -adique hors des points critiques. Dans ce cas, on sait que $\Lambda(f, g, j) \neq 0$. Grâce à la symétrie induite par l'équation fonctionnelle (3.5) il suffit de s'intéresser aux zéros pour les entiers j vérifiant $j \geq k_0$. Le reste des points d'annulation sont déduits par symétrie. En spécialisant l'écriture de la fonction L p -adique de Urban du Théorème 3.5.2 au triplet (k_0, l_0, j) on obtient

$$\mu_c(f, g, j) L_p(f, g, \omega^j, j) = \left(1 - \frac{p^{j-1}}{\alpha_p(f) \beta_p(g)}\right) [\exp^*(\mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{f}^{f, g, j-1}), \eta_f \otimes \bar{\omega}_g[j]]$$

où

$${}_c\mathbf{bf}^{f,g,j-1} := (\mathrm{Pr}^\alpha \times \mathrm{Pr}^\alpha)_* ({}_c\mathbf{bf}^{f,\mathbf{g}}(k_0, l_0, j-1)) \quad (4.2)$$

et où la fonction analytique $\mu_c(f, g, j)$ est définie par

$$\mu_c(f, g, j) := \mathcal{E}(f)G(f, g) \frac{1}{(j-l_0)!} \left(1 - \frac{\alpha_p(f)\beta_p(g)}{p^j}\right) (-1)^j \nu_c(f, g, 2j - k_0 - l_0)$$

avec $G(f, g) := G(\varepsilon_f^{-1})G(\varepsilon_g^{-1})$ et $\mathcal{E}(f)$ défini en 3.2.1, et $\nu_c(f, g, j)$ en (3.62). Par un argument de module complexe le facteur $\left(1 - \frac{\alpha_p(f)\beta_p(g)}{p^j}\right)$ de $\mu_c(f, g, j)$ ne peut s'annuler et en particulier, $\mu_c(f, g, j)$ ne s'annule jamais. Par conséquent, la fonction $L_p(f, g, \omega^\alpha)$ ne s'annule en j que, si et seulement si, le facteur

$$\left(1 - \frac{p^{j-1}}{\alpha_p(f)\beta_p(g)}\right) \quad (4.3)$$

s'annule ou si l'accouplement suivant est nul

$$[\exp^* ({}_c\mathbf{bf}^{f,g,j-1}), \eta_f \otimes \overline{\omega}_g[j]]. \quad (4.4)$$

Par le même argument de valuation complexe qu'en 4.1.1 on sait que $\left(1 - \frac{p^{j-1}}{\alpha_p(f)\beta_p(g)}\right)$ ne s'annule que si $j = \frac{k_0+l_0}{2}$. Or, si $l_0 \leq k_0$ et $j = \frac{k_0+l_0}{2} \geq k_0$ on a $l_0 = k_0 = j$. Par conséquent, le facteur (4.3) ne s'annule que si et seulement si

$$j = k_0 = l_0 \text{ et } \alpha_p(f)\beta_p(g) = p^{k_0-1}.$$

Il est plus difficile de savoir lorsque l'accouplement (4.4) s'annule lorsque $j \geq k_0$. C'est pourquoi ce manuscrit s'intéresse aux zéros induits par le facteur (4.3). On a prouvé le résultat suivant

Lemme 4.1.3. *Si f et g sont de même poids k_0 et si*

$$\alpha_p(f)\beta_p(g) = p^{k_0-1}$$

alors la fonction p -adique $L_p(f, g, \omega^{k_0}, k_0) = 0$ et $L(f, g, k_0) \neq 0$.

Grâce à la symétrie imposée par l'équation fonctionnelle (3.5) la fonction p -adique $L_p(f, g, \omega^{k_0-1}, j)$ admet un zéro en $j = k_0 - 1$ si

$$\alpha_p(f^*)\beta_p(g^*) = p^{k_0-1}.$$

En utilisant les liens entre les racines de Hecke associées à une forme modulaire et celles associées à sa forme conjuguée ((1.20)) c'est équivalent à $\beta_p(f)\alpha_p(g) = p^{k_0-1}$. Dans ce cas on a l'écriture

$$\mu_c(f, g, k_0 - 1)L_p(f, g, \omega^{k_0-1}, j) = \left(1 - \frac{p^{j-1}}{\alpha_p(f)\beta_p(g)}\right) [\exp^* ({}_c\mathbf{bf}^{f,g,j-1}), \eta_f \otimes \overline{\omega}_g[j]]$$

Dans ce cas, le zéro ne provient plus de l'annulation du facteur (4.3) mais de l'accouplement (4.4) car

$${}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-2} = 0.$$

Ce résultat est une conséquence de 3.4.3 et de l'annulation du facteur eulérien

$$1 - \frac{\beta_p(\mathbf{f}_{k_0})\alpha_p(\mathbf{g}_{l_0})}{p^{k_0-1}}.$$

Dans cette thèse nous nous intéresserons uniquement au cas où la valeur de $L_p(f, g, j)$ s'annule pour j un point non-critique vérifiant les conditions du Lemme 4.1.3. Le but de ce chapitre est alors de lier la dérivée de la fonction $L_p(f, g, \omega^{k_0}, s)$ en k_0 à la valeur de la fonction $L(f, g, k_0)$.

4.2 Démonstration du théorème principal

Le but de cette section est d'exprimer la dérivée de la fonction L p -adique associée à un couple de forme modulaire lorsque le facteur eulérien décrit précédemment s'annule. Dans le premier paragraphe, on fait un parallèle entre les notations du chapitre 2 et les (φ, Γ) -modules apparaissant dans le cadre de Rankin-Selberg. Dans le second paragraphe, on cherche à utiliser les résultats du chapitre 2. En particulier, le Théorème 2.4.3 permettra d'exprimer la dérivée en fonction d'un certain accouplement. On pourra alors définir un invariant ad-hoc ℓ permettant d'arriver à un résultat similaire au Corollaire 2.4.4. Sous certaines conditions supplémentaires qui seront explicitées dans la prochaine section, ℓ coïncide avec l'invariant \mathcal{L} et le résultat obtenu est une application du Corollaire 2.4.4. Dans le troisième paragraphe, on exprime l'exponentielle duale obtenue en termes de logarithme. On verra dans la prochaine section que ce logarithme, sous certaines conditions, peut être vu comme un régulateur p -adique. Dans le dernier paragraphe, on énonce et démontre le théorème principal de la thèse.

4.2.1. Soient f et g comme définies au début de la section précédente. On se place dans le cas où les conditions du Lemme 4.1.3 sont satisfaites, c'est-à-dire qu'on suppose que $k_0 = l_0$ et que

$$\alpha_p(f)\beta_p(g) = p^{k_0-1}.$$

On note le twist du produit tensoriel des représentations de Deligne associées au couple de formes modulaires f et g

$$W_{f,g} = V_{f,g}(k_0).$$

Puisque p ne divise pas les niveaux N_f et N_g , cette représentation est cristalline et les sauts dans la filtration de Hodge Tate de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g})$ sont exactement en $(-k_0, -1, -1, k_0 - 2)$. Plus précisément $\text{Fil}^0(\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g}))$ est la droite engendrée par $\omega_f \otimes \omega_g[k_0]$.

Afin de pouvoir utiliser certaines constructions du chapitre 2 on doit vérifier que les deux assertions C3) et C4) des conditions A (voir section 2.1) sont satisfaites pour la représentation $W_{f,g}$:

- C3) puisque f et g sont supposées p -régulières on rappelle que les deux valeurs propres du Frobenius sur $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_f)$ (respectivement $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_g)$) sont différentes. Le Frobenius est donc semi-simple sur $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_f)$ (respectivement $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_g)$). Par conséquent, φ est aussi semi-simple sur $\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g})$.
- C4) le module des valeurs propres du Frobenius sur $\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g})$ vaut p^{-1} , en particulier $\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g})^{\varphi=1} = 0$.

Soit D le sous E -sous-espace vectoriel de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g})$ engendré par les vecteurs

$$\{\eta_f \otimes \eta_g[k_0], \eta_f \otimes \omega_g^\beta[k_0]\}. \quad (4.5)$$

En particulier D s'écrit aussi

$$D = \{\eta_f \otimes d \mid d \in \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_g(k_0))\}.$$

Puisque η_f et ω_f sont linéairement indépendants il est aisé de voir que

$$D \cap \text{Fil}^0(\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g})) = \{0\}.$$

Sous les conditions du Lemme 4.1.3 on sait que $D^{\varphi=p^{-1}}$ est la droite engendrée par $\eta_f \otimes \omega_g^\beta[k_0]$. La filtration en 4 crans de l'espace cristallin $\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g})$ induite par la semi-simplicité du Frobenius (voir (2.7)) s'écrit

$$\{0\} \subset D_{-1} = E \cdot \eta_f \otimes \eta_g[k_0] \subset D \subset \mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g}). \quad (4.6)$$

On rappelle l'existence de la filtration en 4 crans de l'espace $\mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(W_{f,g})$ induite par la théorie des (φ, Γ) -modules (voir (2.8))

$$\{0\} \subset \mathbb{D}_{-1} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(W_{f,g}).$$

On rappelle l'existence du module $\mathcal{F}^{+\circ} \mathbb{D}_{f,g}(\chi^{k_0}) \subset \mathbb{D}_{\text{rig}}^\dagger(W_{f,g})$ (voir (3.33)) et de son dual $\mathcal{F}^{-\circ} \mathbb{D}_{f,g}^*(\chi^{1-k_0})$. Grâce à l'identification (3.34) on sait que le Frobenius agit comme multiplication par $\alpha_p(f)$ sur $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^+ \mathbb{D}_f)$. Par conséquent, les valeurs propres du Frobenius sur le module $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^{+\circ} \mathbb{D}_{f,g}(\chi^{k_0}))$ sont $\alpha_p(f) \alpha_p(g) p^{-k_0}$ et $\alpha_p(f) \beta_p(g) p^{-k_0}$. On a l'égalité

$$\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^{+\circ} \mathbb{D}_{f,g}(\chi^{k_0})) = D.$$

Par conséquent, cela implique les égalités

$$\mathcal{F}^{+\circ} \mathbb{D}_{f,g}(\chi^{k_0}) = \mathbb{D}, \quad \mathcal{F}^{-\circ} \mathbb{D}_{f,g}^*(\chi^{1-k_0}) = \mathbb{D}^*(\chi). \quad (4.7)$$

On rappelle aussi l'existence des (φ, Γ) -modules de rang 1 $\mathcal{F}^{++} \mathbb{D}_{f,g}(\chi^{k_0})$ et $\mathcal{F}^{+-} \mathbb{D}_{f,g}(\chi^{k_0})$ définis en (3.32). En regardant les valeurs propres du Frobenius sur les modules

$$\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^{++} \mathbb{D}_{f,g}(\chi^{k_0})) \text{ et } \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^{+-} \mathbb{D}_{f,g}(\chi^{k_0}))$$

on obtient les identifications suivantes

$$\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^{++} \mathbb{D}_{f,g}(\chi^{k_0})) = D_{-1}, \quad \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^{+-} \mathbb{D}_{f,g}(\chi^{k_0})) = W$$

où $W := D/D_{-1}$ comme dans la section 2.1. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{++} \mathbb{D}_{f,g}(\chi^{k_0}) &= \mathbb{D}_{-1}, & \mathcal{F}^{--} \mathbb{D}_{f,g}^*(\chi^{1-k_0}) &= \mathbb{D}_{-1}^*(\chi), \\ \mathcal{F}^{+-} \mathbb{D}_{f,g}(\chi^{k_0}) &= W, & \mathcal{F}^{-+} \mathbb{D}_{f,g}^*(\chi^{1-k_0}) &= W^*(\chi). \end{aligned}$$

En particulier on a les identifications des groupes de cohomologie

$$H^1(\mathcal{F}^{-\circ} \mathbb{D}_{f,g}^*(\chi^{1-k_0})) = H^1(\mathbb{D}^*(\chi)), \quad (4.8)$$

$$H^1(\mathcal{F}^{-+}\mathbb{D}_{f,g}^*(\chi^{1-k_0})) = H^1(\mathbb{W}^*(\chi)). \quad (4.9)$$

4.2.2. On cherche à utiliser les résultats du chapitre 2 dans le cas de Rankin-Selberg. On rappelle l'existence de l'élément de Beilinson-Flach

$${}_c\mathcal{BF}_{k_0-1}^{f,g} := \mathrm{Tw}_{V_{f,g}^*, -j}^\varepsilon({}_c\mathcal{BF}^{f,g}) \in H_{\mathrm{Iw}, S}^1(\mathbb{Q}, V_{f,g}^*(1-k_0))$$

défini en (3.52) et de la fonction p -adique $L_p({}_c\mathcal{BF}_{l_0-1}^{f,g}, s)$ liée à la restriction $L_p(f, g, \omega^{k_0})$ définie en (4.1) par la Proposition 3.5.4. Comme expliqué dans la remarque 2.2.7 on rappelle que dans ce cadre $H^1(D, W_{f,g}^*(1))$ est défini comme l'ensemble des classes de $H_{f, \{p\}}^1(\mathbb{Q}, W_{f,g}^*(1))$ dont la projection dans $H^1(\mathbb{D}^*(\chi))$ est contenue dans $H^1(\mathbb{W}^*(\chi))$. En particulier, en utilisant les identifications (4.8) et (4.9) le Lemme 3.4.19 se réécrit

Lemme 4.2.1. *L'élément $\mathrm{pr}_0({}_c\mathcal{BF}_{k_0-1}^{f,g})$ appartient à $H^1(D, W_{f,g}^*(1))$.*

Démonstration. Afin d'utiliser le Lemme 3.4.19 il faut vérifier que

$$\alpha_p(f)\alpha_p(g) \neq p^{k_0-1}. \quad (4.10)$$

Or, on rappelle que $\alpha_p(f)\beta_p(g) = p^{k_0-1}$. De plus, g est p -régulière, donc $\alpha_p(g) \neq \beta_p(g)$. Par conséquent, l'inégalité (4.10) est vraie et le Lemme 3.4.19 donne le résultat voulu. \square

On peut alors exprimer la dérivée de $L_p(f, g, \omega^{k_0}, k_0)$ grâce aux résultats prouvés dans le chapitre 2.

Proposition 4.2.2. *Si les conditions du Lemme 4.1.3 sont satisfaites, la dérivée dans le sens cyclotomique de la fonction L p -adique associée à f et g s'écrit*

$$L'_p(f, g, \omega^{k_0}, k_0) = \frac{(-1)^{k_0}}{\nu_c(f, g, 0) \left(1 - \frac{1}{p}\right) \mathcal{E}(f)G(f, g)} \langle {}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-1}, i_{D,c}(\overline{\Theta}_{f,g}[k_0]) \rangle$$

où l'on rappelle que $\overline{\Theta}_{f,g} := \eta_f \otimes \overline{\omega}_g$ comme défini en (3.64).

Démonstration. Grâce au Lemme 4.2.1 on peut appliquer le Théorème 2.4.3 pour la fonction $L_p({}_c\mathcal{BF}_{l_0-1}^{f,g}, s)$. En particulier, on en déduit que celle-ci s'annule en 0 et que sa dérivée vaut

$$L'_p({}_c\mathcal{BF}_{l_0-1}^{f,g}, 0) = \Gamma(k_0) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \left[\mathrm{proj} \left(\mathrm{pr}_0 \left(\mathrm{loc}_p \left({}_c\mathcal{BF}_{k_0-1}^{f,g} \right) \right) \right), i_{D,c}(\overline{\Theta}_{f,g}[k_0]) \right].$$

Par compatibilité de la filtration et des spécialisations avec le morphisme $(\mathrm{Pr}^\alpha \times \mathrm{Pr}^\alpha)_*$, le Lemme 3.4.18 implique

$$\mathrm{proj} \left(\mathrm{pr}_0 \left(\mathrm{loc}_p \left({}_c\mathcal{BF}_{k_0-1}^{f,g} \right) \right) \right) = {}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-1}.$$

De plus la Proposition 3.5.4 évaluée en $s = 0$ donne

$$\nu_c(f, g, 0)\Gamma(k_0)L_p(f, g, \omega^{k_0}, k_0) = \frac{(-1)^{k_0}}{\mathcal{E}(f)G(f, g)} L_p({}_c\mathcal{BF}_{k_0-1}^{f,g}, 0).$$

Or $\nu_c(f, g, 0) \neq 0$ donc on retrouve bien l'annulation de $L_p(f, g, \omega^{k_0}, k_0)$ et en dérivant la relation de la Proposition 3.5.4 on obtient le résultat voulu. \square

En utilisant les identifications (3.35) et (4.2) on a l'égalité de caractères $\delta_{\mathbf{f}_{k_0}, \mathbf{g}_{k_0}} = \chi^{1-k_0}$. On a donc l'identification

$$\mathbb{W}^*(\chi) \simeq \mathcal{R}_E.$$

Grâce à la section 1.3, on sait donc que $H^1(\mathbb{W}^*(\chi))$ est de dimension 2 et se décompose en la somme directe de deux sous-espaces de dimension 1

$$H^1(\mathbb{W}^*(\chi)) = H_f^1(\mathbb{W}^*(\chi)) \oplus H_c^1(\mathbb{W}^*(\chi)).$$

Soit $d := \overline{\Theta}_{f,g}^*[1 - k_0] \in \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}^*(\chi))$. Les deux éléments $i_{D^\perp, f}(d)$ et $i_{D^\perp, c}(d)$ forment une base de $H_f^1(\mathbb{W}^*(\chi))$ et $H_c^1(\mathbb{W}^*(\chi))$ respectivement, où les morphismes $i_{D^\perp, f}$ et $i_{D^\perp, c}$ sont définis en (2.29) (on rappelle que D^- et $\mathbb{W}^*(\chi)$ ont été prouvés être les mêmes espaces). Il existe donc deux scalaires uniques a et b de E tels que

$${}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-1} = ai_{D^\perp, f}(d) + bi_{D^\perp, c}(d). \quad (4.11)$$

En particulier on remarque que $b = 0$ est équivalent à la condition

$${}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-1} \in H_f^1(\mathbb{W}^*(\chi)).$$

Puisque $\exp(\overline{\Theta}_{f,g}[k_0])$ est une base de $H_f^1(\mathbb{W})$ on a l'équivalence de conditions

$${}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-1} \in H_f^1(\mathbb{W}^*(\chi)) \iff [\exp^*({}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-1}), \overline{\Theta}_{f,g}[k_0]] = 0. \quad (4.12)$$

Définition 4.2.3. Si ${}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-1} \notin H_f^1(\mathbb{W}^*(\chi))$ on définit l'invariant ad-hoc $\ell(W_{f,g}, D)$ comme

$$\ell(W_{f,g}, D) = a/b.$$

Un calcul analogue à celui de la preuve de 2.4.4 permet d'affirmer que

$$\langle {}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-1}, i_{D,c}(\overline{\Theta}_{f,g}[k_0]) \rangle = -\ell(W_{f,g}, D) [\exp^*({}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-1}), \overline{\Theta}_{f,g}[k_0]].$$

Dans le cas où le ${}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-1} \notin H_f^1(\mathbb{W}^*(\chi))$ on en déduit une conséquence directe de la Proposition 4.2.2.

Théorème 4.2.4. On suppose toujours que les conditions du Lemme 4.1.3 sont satisfaites. Si ${}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-1} \notin H_f^1(\mathbb{W}^*(\chi))$ alors on peut exprimer la dérivée dans le sens cyclotomique de la fonction L p -adique associée à f et g en terme de l'invariant ℓ et d'un accouplement

$$L'_p(f, g, \omega^{k_0}, k_0) = \frac{(-1)^{k_0+1} \mathcal{E}(f)^{-1}}{\nu_c(f, g, 0) G(f, g)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \ell(W_{f,g}, D) [\exp^*({}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-1}), \overline{\Theta}_{f,g}[k_0]].$$

4.2.3. On cherche à donner une nouvelle écriture de l'accouplement

$$[\exp^*({}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-1}), \overline{\Theta}_{f,g}[k_0]].$$

En utilisant l'équation fonctionnelle (3.5) satisfaite par la fonction p -adique de Urban à trois variables aux triplets de la forme $(k_0, y, y - 1)$ pour $y \in k_0 + p^{r_g-1}\mathbb{Z}_p$ on obtient

$$L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^{k_0})(k_0, y, y - 1) = \epsilon_p^{(\mathbf{f}, \mathbf{g}, k_0)}(k_0, y, y - 1) L_p(\mathbf{f}^*, \mathbf{g}^*, \omega^{k_0-1})(k_0, y, k_0 - 1)$$

où \mathbf{f}^* et \mathbf{g}^* sont les familles de Coleman associées aux formes conjuguées. Il est alors possible d'utiliser les deux écritures proposées en 3.5.6 et 3.5.8 pour les deux fonctions $L_p(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^{k_0}) (k_0, y, y-1)$ et $L_p(\mathbf{f}^*, \mathbf{g}^*, \omega^{k_0-1}) (k_0, y, k_0-1)$. On rappelle l'existence des deux facteurs eulériens $\tilde{\mathcal{E}}^{f, \mathbf{g}}$ et $\mathcal{E}^{f^*, \mathbf{g}^*}$ apparaissant dans l'écriture des restrictions (voir Définitions (3.69) et (3.71) respectivement). Ils s'écrivent comme le produit de deux facteurs eulériens

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}^{f, \mathbf{g}}(y) &= \tilde{\mathcal{E}}_1^{f, \mathbf{g}}(y) \left(\tilde{\mathcal{E}}_2^{f, \mathbf{g}}(y) \right)^{-1} \text{ où } \tilde{\mathcal{E}}_1^{f, \mathbf{g}}(y) := 1 - \frac{\alpha_p(\mathbf{g}_y^*)}{\alpha_p(f)} \text{ et } \tilde{\mathcal{E}}_2^{f, \mathbf{g}}(y) := 1 - \frac{\alpha_p(f)}{p\alpha_p(\mathbf{g}_y^*)}, \\ \mathcal{E}^{f^*, \mathbf{g}^*}(y) &= \mathcal{E}_1^{f^*, \mathbf{g}^*}(y) \mathcal{E}_2^{f^*, \mathbf{g}^*}(y) \text{ où } \mathcal{E}_1^{f^*, \mathbf{g}^*}(y) := 1 - \frac{\beta_p(f^*)\alpha_p(\mathbf{g}_y^*)}{p^{k_0-1}} \text{ et} \\ &\mathcal{E}_2^{f^*, \mathbf{g}^*}(y) := 1 - \frac{p^{k_0-2}}{\alpha_p(f^*)\alpha_p(\mathbf{g}_y^*)}. \end{aligned}$$

En utilisant les relations (1.20) sur les racines de Hecke des formes conjuguées on obtient l'égalité des facteurs eulériens

$$\mathcal{E}_1^{f^*, \mathbf{g}^*} = \tilde{\mathcal{E}}_1^{f, \mathbf{g}}.$$

En utilisant les Propositions 3.5.6 et 3.5.8 on a l'égalité des fonctions analytiques définies sur U_g

$$\begin{aligned} {}_c B(\mathbf{f}^*, \mathbf{g}^*, \omega^{k_0-1}, k_0, y, k_0-1) \tilde{\mathcal{E}}_1^{f, \mathbf{g}}(y) \left(\tilde{\mathcal{E}}_2^{f, \mathbf{g}}(y) \right)^{-1} L_p \left({}_c \widetilde{\mathbf{b}}\mathbf{f}^{f, \mathbf{g}}, y \right) &= \epsilon_p^{(f, \mathbf{g}, k_0)}(k_0, y, y) \times \\ &{}_c B(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^{k_0}, k_0, y, y) \frac{(-1)^{k_0}}{(k_0-2)!} \mathcal{E}_1^{f^*, \mathbf{g}^*}(y) \mathcal{E}_2^{f^*, \mathbf{g}^*}(y) L_p \left({}_c \mathbf{b}\mathbf{f}^{f^*, \mathbf{g}^*, k_0-2}, y \right) \end{aligned}$$

où $L_p \left({}_c \widetilde{\mathbf{b}}\mathbf{f}^{f, \mathbf{g}}, y \right)$ et $L_p \left({}_c \mathbf{b}\mathbf{f}^{f^*, \mathbf{g}^*, k_0-2}, y \right)$ sont les fonctions analytiques définies en 3.5.5 et 3.5.7 respectivement et où ${}_c B(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^{k_0}, k_0, y, y)$ et ${}_c B(\mathbf{f}^*, \mathbf{g}^*, \omega^{k_0-1}, k_0, y, k_0-1)$ sont les fonctions analytiques définies en (3.63) pour les couples (\mathbf{f}, \mathbf{g}) et $(\mathbf{f}^*, \mathbf{g}^*)$ respectivement. Par continuité il est possible de simplifier les deux côtés de l'équation par la fonction analytique non-identiquement nulle $\tilde{\mathcal{E}}_1^{f, \mathbf{g}}(y)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} {}_c B(\mathbf{f}^*, \mathbf{g}^*, \omega^{k_0-1}, k_0, y, k_0-1) \left(\tilde{\mathcal{E}}_2^{f, \mathbf{g}}(y) \right)^{-1} L_p \left({}_c \widetilde{\mathbf{b}}\mathbf{f}^{f, \mathbf{g}}, y \right) L_p(h_{f, \mathbf{g}}, y) &= \\ \epsilon_p^{(f, \mathbf{g}, k_0)}(k_0, y, y) {}_c B(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^{k_0}, k_0, y, y) \frac{(-1)^{k_0}}{(k_0-2)!} \mathcal{E}_2^{f^*, \mathbf{g}^*}(y) L_p \left({}_c \mathbf{b}\mathbf{f}^{f^*, \mathbf{g}^*, k_0-2}, y \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

On définit le facteur eulérien

$$\mathcal{E}^+(W_{f, g}, D) := \det(1 - p^{-1}\varphi^{-1} | D_{-1}) \det(1 - \varphi | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)/D)$$

où D est le module défini en (4.5) et D_{-1} est le sous-module de D défini (4.6). Alors, on a

$$\mathcal{E}^+(W_{f, g}, D) := \left(1 - \frac{p^{k_0-1}}{\alpha_p(f)\alpha_p(g)} \right) \left(1 - \frac{\beta_p(f)\alpha_p(g)}{p^{k_0}} \right) \left(1 - \frac{\beta_p(f)\beta_p(g)}{p^{k_0}} \right).$$

Proposition 4.2.5. *On peut donner une seconde écriture de l'accouplement apparaissant dans le Théorème 4.2.4*

$$\langle \exp^* \left({}_c \mathbf{b}\mathbf{f}^{f, g, k_0-1} \right), \overline{\Theta}_{f, g}[k_0] \rangle = \rho_c(f, g) \left[\log \circ \text{proj} \left({}_p \mathcal{B}\mathcal{F}^{[f^*, g^*, k_0-2]} \right), \overline{\Theta}_{f^*, g^*}[k_0-1] \right]$$

où le coefficient $\rho_c(f, g)$ s'écrit

$$\rho_c(f, g) = \epsilon_p(f, g) \frac{(-1)^{k_0-1}}{(k_0-2)!} \frac{\nu_c(f, g, 0)G(f, g)}{\nu_c(f^*, g^*, -2)G(f^*, g^*)} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \mathcal{E}^+(W_{f, g}, D)$$

où l'on note $\epsilon_p(f, g) := \epsilon_p^{(\mathbf{f}, \mathbf{g}, k_0)}(k_0, k_0, k_0)$.

Démonstration. On cherche à évaluer l'équation (4.13) en $y = k_0$. Les valeurs des fonctions ${}_cB(\mathbf{f}^*, \mathbf{g}^*, \omega^{k_0-1}, k_0, y, k_0 - 1)$ et ${}_cB(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \omega^{k_0}, k_0, y, y)$ sont directement données par la Définition (3.63). La condition $\alpha_p(f)\beta_p(g) = p^{k_0-1}$ se réécrit $\alpha_p(f) = \alpha_p(g^*)$ grâce à la relation (1.20). Ainsi, on déduit immédiatement de la définition l'égalité suivante

$$\tilde{\mathcal{E}}_2^{f, \mathbf{g}}(k_0) := 1 - \frac{1}{p}.$$

En utilisant la définition du facteur $\mathcal{E}_2^{f, \mathbf{g}}$ et les relations (1.20) on a aussi

$$\mathcal{E}_2^{f^*, \mathbf{g}^*}(k_0) := 1 - \frac{p^{k_0-2}}{\alpha_p(f^*)\alpha_p(g^*)} = 1 - \frac{\beta_p(f)\beta_p(g)}{p^{k_0}}.$$

En spécialisant la Définition 3.5.5 en $y = k_0$ et en utilisant la functorialité de l'exponentielle on obtient

$$L_p \left({}_c\widetilde{\mathbf{bf}}^{f_{\alpha}, \mathbf{g}}, k_0 \right) = \left\langle \varpi_{k_0} \left({}_c\widetilde{\mathbf{bf}}^{f_{\alpha}, \mathbf{g}} \right), \exp_{M_{f_{\alpha}, g_{\alpha}}}(\theta_{f_{\alpha}, g_{\alpha}}) \right\rangle$$

où la valeur de ϖ_{k_0} désigne le morphisme de spécialisation de la famille \mathbf{g} en k_0 . En revenant à la définition de ${}_c\widetilde{\mathbf{bf}}^{f_{\alpha}, \mathbf{g}}$ (voir (3.68)) et en utilisant la commutativité de pr_0 et ϖ_{k_0} et en utilisant (3.57) on a

$$\begin{aligned} \varpi_{k_0} \left({}_c\widetilde{\mathbf{bf}}^{f_{\alpha}, \mathbf{g}} \right) &= \text{pr}_0 \circ \varpi_{k_0, k_0} \left(\text{Tw}_{\chi_{\mathbf{g}}^{-1} \chi}^{\text{Iw}} \left({}_c\mathbf{bf}^{f, \mathbf{g}} \right) \right) \\ &= \varpi_{k_0, k_0, k_0-1}^c \left({}_c\mathbf{bf}^{f, \mathbf{g}} \right) = {}_c\mathbf{bf}^{f, \mathbf{g}}(k_0, k_0, k_0 - 1) \end{aligned}$$

où $\varpi_{k_0, k_0, k_0-1}^c$ est défini en (3.37). En rappelant la Définition (4.2) on a alors

$$(\text{Pr}^{\alpha} \times \text{Pr}^{\alpha})_* \left(\varpi_{k_0} \left({}_c\widetilde{\mathbf{bf}}^{f_{\alpha}, \mathbf{g}} \right) \right) = {}_c\mathbf{bf}^{f, g, k_0-1}$$

et par commutativité de l'exponentielle avec $(\text{Pr}^{\alpha} \times \text{Pr}^{\alpha})_*$ on a l'égalité

$$L_p \left({}_c\widetilde{\mathbf{bf}}^{f_{\alpha}, \mathbf{g}}, k_0 \right) = \left\langle {}_c\mathbf{bf}^{f, g, k_0-1}, \exp(\overline{\Theta}_{f, g}[k_0]) \right\rangle.$$

En spécialisant la Définition 3.5.7 en $y = k_0$ on a

$$L_p \left({}_c\mathbf{bf}^{f^*, \mathbf{g}^*, k_0-2}, k_0 \right) = \left\langle \varpi_{k_0} \left({}_c\mathbf{bf}^{f^*, \mathbf{g}^*, k_0-2} \right), \varpi_{k_0} \left(b_{f^*, \mathbf{g}^*} \right) \right\rangle$$

où ϖ_{k_0} désigne encore le morphisme induit par la spécialisation de la famille \mathbf{g} en k_0 . Par la Proposition (3.4.12) on a

$$\varpi_{k_0} \left({}_c\mathbf{bf}^{f^*, \mathbf{g}^*, k_0-2} \right) = \text{proj} \circ \text{loc}_p \left({}_c\mathcal{BF}^{[f^*, g_{\alpha}^*, k_0-2]} \right) \in H^1(\mathcal{F}^{-+} \mathbb{D}_{f^*, g_{\alpha}^*}^* (\chi^{2-k_0}))$$

où proj est la projection de $H^1(\mathbb{D}_{f^*,g_\alpha^*}(\chi^{2-k_0}))$ dans $H^1(\mathcal{F}^{-\circ}\mathbb{D}_{f^*,g_\alpha^*}(\chi^{2-k_0}))$. Si les conditions de la proposition sont satisfaites, le Frobenius agit sur $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{f^*,g_\alpha^*}(\chi^{k_0-1}))$ comme multiplication par

$$\frac{\alpha_p(f^*)\beta_p(g_\alpha^*)}{p^{k_0-1}} = \varepsilon_f^{-1}(p)\varepsilon_g^{-1}(p) \neq 1$$

donc la spécialisation de b_{f^*,g^*} est toujours donnée par l'équation (3.72), à savoir

$$\varpi_{k_0}(b_{f^*,g^*}) = \frac{\Psi(f^*,g_\alpha^*)}{\mathcal{E}(f)\lambda_{N_f}(f^*)} (\exp^*)^{-1}(\overline{\Theta}_{f^*,g_\alpha^*}[k_0-1])$$

où $\Psi(f^*,g_\alpha^*)$ est défini en (3.73). En utilisant les relations (1.20) on a

$$\Psi(f^*,g_\alpha^*) = \left(1 - \frac{\beta_p(f)\alpha_p(g)}{p^{k_0}}\right) \left(1 - \frac{p^{k_0-1}}{\beta_p(f)\alpha_p(g)}\right)^{-1}.$$

D'après le résultat de Nekovář-Nizioł, on sait que

$$\text{proj}\left({}^p\mathcal{BF}^{[f^*,g_\alpha^*,k_0-2]}\right) \in H_g^1(\mathcal{F}^{-+}\mathbb{D}_{f^*,g_\alpha^*}(\chi^{2-k_0})).$$

De plus

$$\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{f^*,g_\alpha^*}(\chi^{k_0-1}))^{\varphi=1} = \mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathcal{F}^{+-}\mathbb{D}_{f^*,g_\alpha^*}(\chi^{k_0-1}))^{\varphi=p^{-1}} = \{0\}$$

donc $H_g^1(\mathcal{F}^{-+}\mathbb{D}_{f^*,g_\alpha^*}(\chi^{2-k_0}))$ coïncide avec l'image de l'exponentielle. On peut donc déduire

$$L_p({}_c\mathbf{bf}^{f^*,g^*,k_0-2}, k_0) = \frac{\Psi(f^*,g_\alpha^*)}{\mathcal{E}(f)\lambda_{N_f}(f^*)} \left[\text{proj} \circ \log\left({}^p\mathcal{BF}^{[f^*,g_\alpha^*,k_0-2]}\right), \overline{\Theta}_{f^*,g_\alpha^*}[k_0-1] \right].$$

En injectant les informations précédentes dans l'équation (4.13) pour $y = k_0$ on obtient

$$\begin{aligned} \langle {}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-1}, \exp(\overline{\Theta}_{f,g}[k_0]) \rangle &= \epsilon_p(f,g) \frac{(-1)^{k_0-1}}{(k_0-2)!} \frac{\nu_c(f,g,0)G(f,g)}{\nu_c(f^*,g^*,-2)G(f^*,g^*)} \times \\ &\left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{\beta_p(f)\beta_p(g)}{p^{k_0}}\right) \Psi(f^*,g_\alpha^*) \left[\log \circ \text{proj}\left({}^p\mathcal{BF}^{[f^*,g_\alpha^*,k_0-2]}\right), \overline{\Theta}_{f^*,g_\alpha^*}[k_0-1] \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

On sait que $\overline{\Theta}_{f^*,g_\alpha^*} = (\text{Id} \times \text{Pr}^\alpha)^*(\overline{\Theta}_{f^*,g^*})$. En utilisant le dual de $(\text{Id} \times \text{Pr}^\alpha)^*$, la Proposition 3.4.4 et les relations des racines de Hecke (1.20) on a

$$(\text{Id} \times \text{Pr}^\alpha)_* \left({}^p\mathcal{BF}^{[f^*,g_\alpha^*,k_0-2]} \right) = \left(1 - \frac{p^{k_0-1}}{\beta_p(f)\alpha_p(g)}\right) \left(1 - \frac{p^{k_0-1}}{\alpha_p(f)\alpha_p(g)}\right) {}^p\mathcal{BF}^{[f^*,g^*,k_0-2]}.$$

En injectant ces résultats dans l'équation (4.14) et en utilisant la commutativité du morphisme $(\text{Id} \times \text{Pr}^\alpha)_*$ on obtient le résultat voulu. \square

4.2.4. On définit alors le scalaire $\Omega_p(W_{f,g}) \in E$ comme suit

$$\Omega_p(W_{f,g}) := \frac{1}{G(f^*,g^*)\nu_c(f^*,g^*,-2)} \left[\log \circ \text{proj}\left({}^p\mathcal{BF}^{[f^*,g_\alpha^*,k_0-2]}\right), \overline{\Theta}_{f^*,g_\alpha^*}[k_0-1] \right]. \quad (4.15)$$

En remarquant que le coefficient $\rho_c(f,g) \neq 0$ la Proposition 4.2.5 implique que $\Omega_p(W_{f,g}) \neq 0$ si et seulement si $\langle \exp^*({}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-1}), \overline{\Theta}_{f,g}[k_0] \rangle \neq 0$. En utilisant l'équivalence (4.12), on a ${}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-1} \notin H_f^1(\mathbb{W}^*(\chi))$ si et seulement si $\Omega_p(W_{f,g}) \neq 0$.

Théorème 4.2.6. *Soient f et g deux formes primitives de niveaux respectifs N_f et N_g , de caractères respectifs ε_f et ε_g et de même poids $k_0 \geq 2$. On suppose que ε_f , ε_g et $\varepsilon_f\varepsilon_g$ soient des caractères primitifs. On suppose aussi que $f^* \neq g$. Soit $p \geq 5$ un nombre premier ne divisant pas N_fN_g et tel que f et g soient p -régulières. On suppose de plus que $\varepsilon_f(p)\varepsilon_g(p) \neq 1$. Soit un entier $c > 1$ premier avec $6N_fN_gp$ tel que $\varepsilon_f(c)\varepsilon_g(c) \neq 1$. Si*

$$\alpha_p(f)\beta_p(g) = p^{k_0-1}$$

alors $L_p(f, g, \omega^{k_0}, k_0) = 0$ et si $\Omega_p(W_{f,g}) \neq 0$ sa dérivée vaut

$$L'_p(f, g, \omega^{k_0}, k_0) = \epsilon_p(f, g) \frac{\mathcal{E}^+(W_{f,g}, D)}{(k_0 - 2)! \mathcal{E}(f)} \ell(W_{f,g}, D) \Omega_p(W_{f,g}).$$

Démonstration. En injectant le résultat de la Proposition 4.2.5 dans le Théorème 4.2.4 on obtient directement ce résultat. \square

Dans la prochaine section on montrera que ce résultat s'inscrit dans la conjecture des zéros triviaux comme décrite dans [Ben14a].

4.3 Lien avec la conjecture des zéros exceptionnels

Dans un premier paragraphe, on met en avant le lien entre l'invariant $\ell(W_{f,g}, D)$ défini dans la section précédente et l'invariant $\mathcal{L}(W_{f,g}, D)$ défini dans le chapitre 2. Dans le troisième et le quatrième paragraphe, on traitera des périodes p -adique et infinie respectivement. Enfin, dans le dernier paragraphe, on donnera une réécriture conditionnelle du Théorème 4.2.6.

On conserve les notations de la section précédente. On suppose que les conditions du Lemme 4.1.3 sont satisfaites. On rappelle alors que f et g sont deux formes primitives de niveaux respectifs N_f et N_g , de caractères respectifs ε_f et ε_g et de même poids $k_0 \geq 2$. On suppose que ε_f , ε_g et $\varepsilon_f\varepsilon_g$ soient des caractères primitifs de conducteurs N_f , N_g et N respectivement. En particulier cela implique que $f^* \neq g$. Soit $p \geq 5$ un nombre premier ne divisant pas N_fN_g et tel que f et g soient p -régulières. On suppose de plus que $\varepsilon_f(p)\varepsilon_g(p) \neq 1$. Soit un entier $c > 1$ premier avec $6N_fN_gp$ tel que $\varepsilon_f(c)\varepsilon_g(c) \neq 1$. Si

$$\alpha_p(f)\beta_p(g) = p^{k_0-1}.$$

4.3.1. On cherche à lier l'invariant $\ell(W_{f,g}, D)$ à l'invariant $\mathcal{L}(W_{f,g}, D)$ lorsque ceux-ci peuvent être définis. Afin de pouvoir définir l'invariant \mathcal{L} il est nécessaire de s'intéresser aux conditions A (voir section 2.1) et à la régularité de l'espace D choisi. On rappelle que sous les conditions énoncées, les conditions C3) et C4) sont satisfaites (voir Paragraphe 4.2.1). On s'intéresse donc aux conditions C1) C2) et C5).

- C1) La conjecture de Beilinson prédit que $H_f^1(\mathbb{Q}, W_{f,g}^*(1)) = 0$ où, de façon équivalente, que $\dim H_f^1(\mathbb{Q}, W_{f,g}) = 1$. Cela est cohérent avec le fait que $L(f, g, k_0) \neq 0$.
- C2) Si $H_S^0(\mathbb{Q}, W_{f,g}) \neq 0$ alors il existe un élément non-nul de $W_{f,g}$ stable par l'action de G_S . Cela implique l'existence d'un morphisme non-trivial de $V_f(k_0)$ dans $V_g^* \simeq V_{g^*}(k_0 - 1)$. C'est impossible car les poids de Hodge-Tate des deux représentations ne sont pas égaux. Si $H_S^0(\mathbb{Q}, W_{f,g}^*(1)) \neq 0$, cela impliquerait de manière similaire un

isomorphisme non-trivial de $V_f(k_0 - 1)$ dans $V_{g^*}(k_0 - 1)$ ce qui est impossible dès lors que f et g^* ne sont pas issues de la même forme primitive. En particulier, puisque f et g sont primitives la condition C2) est satisfaite si et seulement si $f \neq g^*$. En particulier, cette condition est satisfaite dans le cadre de ce travail.

C5) Le fait que localisation $\text{loc}_p : H_f^1(\mathbb{Q}, W_{f,g}) \rightarrow H_f^1(\mathbb{Q}_p, W_{f,g})$ soit injective est une question difficile.

On supposera pour le reste de ce texte que les conditions C1) et C5) sont satisfaites.

Remarque 4.3.1. Puisque la C2) est satisfaite l'équation (2.3) s'écrit

$$\dim_E H_f^1(\mathbb{Q}, W_{f,g}) - \dim_E H_f^1(\mathbb{Q}, W_{f,g}^*(1)) = 1$$

car $\dim_E H^0(\mathbb{R}, W_{f,g}) = 2$. Alors, la condition C1) est équivalente à la condition $\dim_E H_f^1(\mathbb{Q}, W_{f,g}) = 1$. Donc, si C1) est satisfaite, la condition C5) est alors équivalente à la non-nullité de l'application de localisation.

4.3.2. Grâce aux équations (2.4) et (2.6) on sait qu'un sous-module régulier de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g})$ est nécessairement un φ -sous-module de dimension 2 dont l'intersection avec $\text{Fil}^0(\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g}))$ est réduite à $\{0\}$. En particulier, l'espace D choisi vérifie ces deux conditions. Pour le reste de ce texte on suppose que D est un espace régulier, ou de manière équivalente, car les autres conditions sont respectées, que l'application

$$r_{W_{f,g},D} : H_f^1(\mathbb{Q}, W_{f,g}) \xrightarrow{r_{W_{f,g}}} t_{W_{f,g}}(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\text{proj}} \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g})}{D + \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g})}$$

est un isomorphisme.

4.3.3. On rappelle que ${}_c\mathcal{BF}^{[f^*,g^*,k_0-2]} \in H_S^1(\mathbb{Q}, V_{f^*,g^*}(2 - k_0))$ est défini en (3.42). En utilisant l'isomorphisme

$$V_{f^*,g^*}(2 - k_0) \simeq W_{f,g}$$

il est possible de voir ${}_c\mathcal{BF}^{[f^*,g^*,k_0-2]}$ comme un élément de $H_S^1(\mathbb{Q}, W_{f,g})$. Pour tout nombre premier l tel que $l \nmid N_f N_g$ la localisation de ${}_c\mathcal{BF}^{[f^*,g^*,k_0-2]}$ en l est dans le sous groupe $H_f^1(\mathbb{Q}_l, V_{f,g}(k_0))$, voir par exemple la discussion suivant la Définition 3.3.2 de [KLZ17].

Par le résultat de Nekovář-Nizioł déjà invoqué, on sait que sa restriction au groupe de décomposition vérifie

$${}_p\mathcal{BF}^{[f^*,g^*,k_0-2]} := \text{loc}_p \left({}_c\mathcal{BF}^{[f^*,g^*,k_0-2]} \right) \in H_g^1(\mathbb{Q}_p, W_{f,g}).$$

Cependant $\alpha_p(f)\beta_p(g)p^{-k_0} = p^{-1}$ est valeur propre du Frobenius sur $\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g})$, il n'y a donc pas égalité entre $H_g^1(\mathbb{Q}_p, W_{f,g})$ et $H_f^1(\mathbb{Q}_p, W_{f,g})$.

Pour le reste de ce texte on suppose que

$${}_c\mathcal{BF}^{[f^*,g^*,k_0-2]} \in H_f^1(\mathbb{Q}, W_{f,g}). \quad (4.16)$$

Autrement dit, on suppose que pour tout l premier tel que $l \mid pN_f N_g$ la localisation en l est cristalline.

4.3.4. Si la condition C1) est satisfaite l'espace cohomologique $H_f^1(\mathbb{Q}, W_{f,g})$ est de dimension 1, et si de plus ${}_c\mathcal{BF}^{[f^*,g^*,k_0-2]}$ est un élément non-nul de cet espace alors l'élément $\nu_c(f^*, g^*, -2)^{-1} {}_c\mathcal{BF}^{[f^*,g^*,k_0-2]}$ qui, par construction (voir [LZ16]), ne dépend pas du paramètre c , donne une base canonique de cet espace.

On rappelle que D est le sous-module de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g})$ engendré par

$$\{\eta_f \otimes \eta_g[k_0], \eta_f \otimes \omega_g^\beta[k_0]\}.$$

On a l'identification

$$\frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g})}{\text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g}) + D} \simeq \mathcal{F}^{-+}(\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g}))$$

et l'espace $\mathcal{F}^{-+}(\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g}))$ est la droite engendrée par $\bar{\omega}_f \otimes \eta_g[k_0]$. Le dual de cet élément dans

$$\mathcal{F}^{+-} \mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g}^*(1)) \simeq \mathcal{F}^{+-} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_{f^*,g^*}(k_0 - 1))$$

est l'élément $\bar{\Theta}_{f^*,g^*}[k_0 - 1] = \eta_{f^*} \otimes \bar{\omega}_{g^*}[k_0 - 1]$. Afin de prendre en compte la normalisation choisie dans ce texte, projeter un élément de $\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g})$ sur $\mathcal{F}^{-+}(\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g}))$ correspond à prendre l'accouplement avec l'élément $\frac{1}{G(f^*,g^*)} \bar{\Theta}_{f^*,g^*}[k_0 - 1]$. Si la condition (4.16) est satisfaite, alors ${}_c\mathcal{BF}^{[f^*,g^*,k_0-2]} \in H_f^1(\mathbb{Q}_p, W_{f,g})$. Or $\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g})^{\varphi=1} = 0$ donc cet élément est dans l'image de l'exponentielle et par commutativité du morphisme de projection avec le logarithme on a la réécriture

$$\Omega_p(W_{f,g}) = \left[\text{proj} \circ \log \left(\frac{1}{\nu_c(f^*, g^*, -2)} {}_c\mathcal{BF}^{[f^*,g^*,k_0-2]} \right), \frac{1}{G(f^*, g^*)} \bar{\Theta}_{f^*,g^*}[k_0 - 1] \right].$$

L'accouplement $\Omega_p(W_{f,g})$ est alors le déterminant de l'isomorphisme

$$r_{W_{f,g},D} : H_f^1(\mathbb{Q}, W_{f,g}) \rightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g})}{D + \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{cris}}(W_{f,g})}$$

dans les bases données précédemment. Ce déterminant est appelé période p -adique et est non-nul grâce aux conditions (4.16) et C5).

4.3.5. Sous ces hypothèses supplémentaires sur $W_{f,g}$ et D on rappelle que la section 2.2 permet de définir l'invariant \mathcal{L} associé à $W_{f,g}^*(1)$ et D^\perp .

Soit d un élément de $\mathcal{D}_{\text{cris}}(\mathbb{W}^*(\chi))$. Puisque $e = 1$, la Remarque 2.2.6 permet d'affirmer qu'il existe alors un unique scalaire $r \in E$ tel que

$${}_c\mathbf{bf}^{f,g,k_0-1} = r \cdot (i_{D^\perp, f}(d) - \mathcal{L}(W_{f,g}^*(1), D^\perp) \cdot i_{D^\perp, c}(d)). \quad (4.17)$$

On remarque que les scalaires a et b de l'écriture (4.11) se réécrivent

$$a = -r \mathcal{L}(W_{f,g}^*(1), D^\perp) \quad , \quad b = r.$$

En particulier, on sait que sous les hypothèses de cette section la période p -adique $\Omega_p(W_{f,g})$ est non-nulle. Donc, par le raisonnement effectué dans la section précédente on sait que

le scalaire r est non-nul. En particulier l'invariant ℓ peut être défini et l'équation (4.17) implique les égalités

$$\ell(W_{f,g}, D) = -\mathcal{L}(W_{f,g}^*(1), D^\perp) = \mathcal{L}(W_{f,g}, D). \quad (4.18)$$

4.3.6. La conjecture de Beilinson comme discutée dans la section 7.1 de [KLZ15] suppose l'existence d'un motif de Chow que l'on note $M(f^* \otimes g^*)$ associé au couple de formes modulaires (f^*, g^*) . On appelle régulateur infini le déterminant du régulateur de Beilinson Flach associé à $M(f^* \otimes g^*)^*(k_0 - 1)$ et on le note $\Omega_\infty(f^*, g^*)$.

Théorème 4.3.2. [KLZ15, Théorème 7.1.14] *Si la conjecture de Beilinson est satisfaite alors*

$$\frac{L'(f^*, g^*, k_0 - 1)}{\Omega_\infty(f^*, g^*)} = \frac{-4}{N_f N_g (k_0 - 2)! (k_0 - 2)!} \in \mathbb{Q}(f, g)^\times.$$

Cette conjecture n'est prouvée que dans le cas $k_0 = 2$. L'équation fonctionnelle (3.2) du Théorème 3.1.5 sur les fonctions L complétées de Rankin-Selberg évaluée en k_0 donne l'égalité

$$\frac{(k_0 - 1)!}{(2\pi)^{k_0+1}} L(f, g, k_0) = \epsilon(f, g) \frac{(k_0 - 2)!}{(2\pi)^{k_0-1}} L'(f^*, g^*, k_0 - 1).$$

où $\epsilon(f, g)$ coïncide avec le facteur $\epsilon_p(f, g)$ défini dans la Proposition 4.2.5. Si la conjecture de Beilinson est satisfaite on a

$$\frac{(k_0 - 1)! (k_0 - 2)!}{-16\pi^2} \frac{L(f, g, k_0)}{\Omega_\infty(f^*, g^*)} = \epsilon(f, g) \frac{1}{N_f N_g}. \quad (4.19)$$

4.3.7. En injectant les équations (4.18) et (4.19) dans le résultat du Théorème 4.2.6 on obtient directement le théorème suivant.

Théorème 4.3.3. *Soient f et g deux formes primitives de niveaux respectifs N_f et N_g , de caractères respectifs ε_f et ε_g et de même poids $k_0 \geq 2$. On suppose que ε_f , ε_g et $\varepsilon_f \varepsilon_g$ soient des caractères primitifs de conducteurs respectifs N_f , N_g et N . On suppose aussi que $f^* \neq g$. Soit $p \geq 5$ un nombre premier ne divisant pas $N_f N_g$ et tel que f et g en p -régulières. On suppose de plus que $\varepsilon_f(p) \varepsilon_g(p) \neq 1$. Soit un entier $c > 1$ premier avec $6N_f N_g p$ tel que $\varepsilon_f(c) \varepsilon_g(c) \neq 1$. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

- on a l'égalité $\alpha_p(f) \beta_p(g) = p^{k_0-1}$.
- la représentation $W_{f,g}$ vérifie les conditions A de la section 2.2.
- le φ -module D est régulier.
- l'élément ${}_c \mathcal{BF}^{[f^*, g^*, k_0-2]}$ est un élément non-nul de $H_f^1(\mathbb{Q}, W_{f,g})$.
- la conjecture de Beilinson est satisfaite.

Alors $L(f, g, \omega^{k_0}, k_0) = 0$ et la dérivée de la fonction L p -adique s'exprime en fonction de la fonction L de Rankin-Selberg, de l'invariant \mathcal{L} et des périodes p -adique et infinie

$$\frac{L'_p(f, g, \omega^{k_0}, k_0)}{\Omega_p(W_{f,g})} = \frac{N_f N_g (k_0 - 1)!}{16\pi^2} \frac{\mathcal{E}^+(W_{f,g}, D)}{\mathcal{E}(f)} \mathcal{L}(W_{f,g}, D) \frac{L(f, g, k_0)}{\Omega_\infty(f^*, g^*)}.$$

Ce résultat s'inscrit dans la lignée de l'"Extra zero conjecture" du texte [Ben14a] comme rappelée dans l'introduction. Ce résultat représente le premier cas d'étude de zéro exceptionnel hors de la bande critique pour ce motif.

Bibliographie

- [AI17] Fabrizio Andreatta and Adrian Iovita. Triple product p -adic L -functions associated to finite slope p -adic families of modular forms, with an appendix by Eric Urban. *arXiv preprint arXiv :1708.02785*, 2017.
- [AIS15] Fabrizio Andreatta, Adrian Iovita, and Glenn Stevens. Overconvergent Eichler–Shimura isomorphisms. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 14(2) :221–274, 2015.
- [AV75] Yvette Amice and Jacques Vêlu. Distributions p -adiques associées aux séries de Hecke. *Astérisque*, 24(25) :119–131, 1975.
- [BDJ17] Daniel Barrera, Mladen Dimitrov, and Andrei Jorza. p -adic L -functions for nearly finite slope Hilbert modular forms and the exceptional zero conjecture. *arXiv preprint arXiv :1709.08105*, 2017.
- [BDR15a] Massimo Bertolini, Henri Darmon, and Victor Rotger. Beilinson–Flach elements and Euler systems II : p -adic families and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture. *Journal of algebraic geometry*, 24 :569–604, 2015.
- [BDR15b] Massimo Bertolini, Henri Darmon, and Victor Rotger. Beilinson–Flach elements and Euler systems I : syntomic regulators and p -adic Rankin L -series. *Journal of algebraic geometry*, 24(2) :355–378, 2015.
- [Bei84] Aleksandr Aleksandrovich Beilinson. Higher regulators and values of L -functions. *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya " Sovremennye Problemy Matematiki. Noveishie Dostizheniya "*, 24 :181–238, 1984.
- [Ben00] Denis Benois. On Iwasawa theory of crystalline representations. *Duke Mathematical Journal*, 104(2) :211–267, 2000.
- [Ben11] Denis Benois. A generalization of Greenberg’s \mathcal{L} -invariant. *American journal of mathematics*, 133(6) :1573–1632, 2011.
- [Ben14a] Denis Benois. On extra zeros of p -adic L -functions : the crystalline case. In *Iwasawa Theory 2012*, pages 65–133. Springer, 2014.
- [Ben14b] Denis Benois. Trivial zeros of p -adic L -functions at near-central points. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 13(3) :561–598, 2014.
- [Ber02] Laurent Berger. Représentations p -adiques et équations différentielles. *Inventiones mathematicae*, 148(2) :219–284, 2002.
- [Ber03] Laurent Berger. Bloch and Kato’s exponential map : three explicit formulas. *Documenta Math., Extra Volume : Kazuya Kato’s Fiftieth Birthday*, pages 99–129, 2003.
- [Ber08] Laurent Berger. Equations différentielles p -adiques et (φ, N) -modules filtrés. *Astérisque*, 319 :13–38, 2008.

- [BK90] S BLOCH and K Kato. L -functions and Tamagawa numbers of motives. *The Grothendieck Festschrift*, pages 333–400, 1990.
- [Car86] Henri Carayol. Sur les représentations ℓ -adiques associées aux formes modulaires de Hilbert. In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 19, pages 409–468. Elsevier, 1986.
- [CC98] Frédéric Cherbonnier and Pierre Colmez. Représentations p -adiques surconvergentes. *Inventiones mathematicae*, 133(3) :581–611, 1998.
- [CC99] Frédéric Cherbonnier and Pierre Colmez. Théorie d'Iwasawa des représentations p -adiques d'un corps local. *Journal of the American Mathematical Society*, 12(1) :241–268, 1999.
- [Che09] Gaëtan Chenevier. Une application des variétés de Hecke des groupes unitaires. *preprint*, 1621, 2009.
- [CI10] Robert Coleman and Adrian Iovita. Hidden structures on semistable curves. *Astérisque*, 331 :179–254, 2010.
- [CM98] Robert Coleman and Barry Mazur. The eigencurve. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, pages 1–114, 1998.
- [Col97] Robert F Coleman. p -adic Banach spaces and families of modular forms. *Inventiones mathematicae*, 127(3) :417–479, 1997.
- [Col98] Pierre Colmez. Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local. *Annals of Mathematics*, pages 485–571, 1998.
- [Col05] Pierre Colmez. Zéros supplémentaires de fonctions L p -adiques de formes modulaires. In *Algebra and number theory*, pages 193–210. Springer, 2005.
- [Col08] Pierre Colmez. Représentations triangulines de dimension 2. *Astérisque*, 319(213-258) :83, 2008.
- [Del71] Pierre Deligne. Formes modulaires et représentations ℓ -adiques. In *Séminaire Bourbaki vol. 1968/69 Exposés 347-363*, pages 139–172. Springer, 1971.
- [Del74] Pierre Deligne. La conjecture de Weil. i. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 43(1) :273–307, 1974.
- [Del79] Pierre Deligne. Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 33(2) :313–346, 1979.
- [DS05] Fred Diamond and Jerry Shurman. *A first course in modular forms*, volume 228 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [Fal88] Gerd Faltings. Crystalline cohomology and p -adic Galois-representations. *Algebraic analysis, geometry, and number theory*, 1988.
- [FG78] Bruce Ferrero and Ralph Greenberg. On the behavior of p -adic L -functions at $s = 0$. *Inventiones mathematicae*, 50(1) :91–102, 1978.
- [Fla92] Matthias Flach. A finiteness theorem for the symmetric square of an elliptic curve. *Inventiones mathematicae*, 109(1) :307–327, 1992.
- [Fon91] Jean-Marc Fontaine. Représentations p -adiques des corps locaux. In *The Grothendieck Festschrift*, pages 249–309. 1991.
- [Fon94a] Jean-Marc Fontaine. Le corps des périodes p -adiques. *Astérisque*, 223 :59–111, 1994.

- [Fon94b] Jean-Marc Fontaine. Représentations p -adiques semi-stables. *Astérisque*, 223 :113–184, 1994.
- [FPR94] Jean-Marc Fontaine and Bernadette Perrin-Riou. Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L. In *Motives (Seattle, WA, 1991)*, volume 55 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 599–706. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [Gre94] Ralph Greenberg. Iwasawa theory of p -adic L -functions in p -adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston ma 1991). *Contemporary Mathematics*, 165 :149–174, 1994.
- [Gro81] Benedict H Gross. p -adic L -series at $s = 0$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math*, 28(3) :979–994, 1981.
- [GS93] Ralph Greenberg and Glenn Stevens. p -adic L -functions and p -adic periods of modular forms. *Inventiones mathematicae*, 111(1) :407–447, 1993.
- [Her98] Laurent Herr. Sur la cohomologie galoisienne des corps p -adiques. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 126(4) :563–600, 1998.
- [Hid88] Haruzo Hida. A p -adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic modular forms. II. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 38(3) :1–83, 1988.
- [Hid93] Haruzo Hida. *Elementary theory of L -functions and Eisenstein series*, volume 26. Cambridge University Press, 1993.
- [Iwa74] Kenkichi Iwasawa. *Lectures on p -adic L -functions*. Princeton University Press, 1974.
- [Jan88] Uwe Jannsen. Continuous étale cohomology. *Mathematische Annalen*, 280(2) :207–246, 1988.
- [Jan89] Uwe Jannsen. On the ℓ -adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology. In *Galois Groups over \mathbb{Q}* , pages 315–360. Springer, 1989.
- [JS76] Hervé Jacquet and Joseph A Shalika. A non-vanishing theorem for zeta functions of GL_n . *Inventiones mathematicae*, 38(1) :1–16, 1976.
- [Kat04] Kazuya Kato. p -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms. *Astérisque*, 295 :117–290, 2004.
- [Ked04] Kiran S. Kedlaya. A p -adic local monodromy theorem. *Ann. of Math. (2)*, 160(1) :93–184, 2004.
- [Kem93] George R. Kempf. *Algebraic varieties*, volume 172 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [Kin15] Guido Kings. Eisenstein classes, elliptic soulé elements and the ℓ -adic elliptic polylogarithm, the Bloch–Kato conjecture for the Riemann zeta function (John Coates, Anantharam Raghuram, Anupam Saikia, and Ramdorai Sujatha, eds.). *London Math. Soc. Lecture Note Ser*, 418, 2015.
- [KKT96] Kazuya Kato, Masato Kurihara, and Takeshi Tsuji. Local Iwasawa theory of Perrin-Riou and syntomic complexes. *preprint*, 1996.
- [KL64] Tomio Kubota and Heinrich W Leopoldt. Eine p -adische theorie der zetawerte. teil i : Einführung der p -adischen Dirichletschen L -funktionen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 214 :328–339, 1964.

- [KLZ15] Guido Kings, David Loeffler, and Sarah Livia Zerbes. Rankin–Eisenstein classes for modular forms. *arXiv preprint arXiv :1501.03289*, 2015.
- [KLZ17] Guido Kings, David Loeffler, and Sarah Livia Zerbes. Rankin–Eisenstein classes and explicit reciprocity laws. *Cambridge Journal of Mathematics*, 5(1) :1–122, 2017.
- [KM74] Nicholas M Katz and William Messing. Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields. *Inventiones mathematicae*, 23(1) :73–77, 1974.
- [KPX14] Kiran Kedlaya, Jonathan Pottharst, and Liang Xiao. Cohomology of arithmetic families of (φ, γ) -modules. *Journal of the American Mathematical Society*, 27(4) :1043–1115, 2014.
- [Lan73] Robert P Langlands. Modular forms and ℓ -adic representations. In *Modular functions of one variable II*, pages 361–500. Springer, 1973.
- [Liu07] Ruochuan Liu. Cohomology and duality for (φ, γ) -modules over the Robba ring. *International Mathematics Research Notices*, 2007(9) :rnm150–rnm150, 2007.
- [Liu15] Ruochuan Liu. Triangulation of refined families. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 90(4) :831–904, 2015.
- [LLZ14] Antonio Lei, David Loeffler, and Sarah Livia Zerbes. Euler systems for Rankin–Selberg convolutions of modular forms. *Annals of mathematics*, pages 653–771, 2014.
- [Loe18] David Loeffler. A note on p -adic Rankin–Selberg L -functions. *Canadian Mathematical Bulletin*, 61(3) :608–621, 2018.
- [LZ16] David Loeffler and Sarah Livia Zerbes. Rankin–Eisenstein classes in Coleman families. *Research in the Mathematical Sciences*, 3(1) :29, 2016.
- [Man73] Yuriĭ Ivanovich Manin. Periods of parabolic forms and p -adic Hecke series. *Matematicheskii Sbornik*, 134(3) :378–401, 1973.
- [Maz94] B Mazur. On monodromy invariants occurring in global arithmetic, and Fontaine’s theory. *Contemporary Mathematics*, 165 :1–20, 1994.
- [Mil86] James S Milne. Arithmetic duality theorems. *Perspectives in Math.*, 1, 1986.
- [Miy06] Toshitsune Miyake. *Modular forms*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [Mor75] Yasuo Morita. A p -adic analogue of the γ -function. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 22 :255–266, 1975.
- [MTT86] Barry Mazur, John Tate, and Jeremy Teitelbaum. On p -adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer. *Inventiones mathematicae*, 84(1) :1–48, 1986.
- [Nak14] Kentaro Nakamura. Iwasawa theory of de Rham (φ, γ) -modules over the Robba ring. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 13(1) :65–118, 2014.
- [Nek90] Jan Nekovář. On p -adic height pairings. *Séminaire de théorie des nombres, Paris*, 91 :127–202, 1990.
- [NN16] Jan Nekovář and Wiesława Nizioł. Syntomic cohomology and p -adic regulators for varieties over p -adic fields. *Algebra & Number Theory*, 10(8) :1695–1790, 2016.

- [Pan82] Alexej A Pančiškin. Le prolongement p -adique analytique des fonctions L de Rankin. *Groupe de travail d'analyse ultramétrique*, 9(3) :J1–J6, 1982.
- [Pet49] Hans Petersson. Über die berechnung der skalarprodukte ganzer modulformen. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 22(1) :168–199, 1949.
- [Pot12] Jonathan Pottharst. Cyclotomic Iwasawa theory of motives. *preprint*, pages 115–147, 2012.
- [PR94] Bernadette Perrin-Riou. Théorie d'Iwasawa des représentations p -adiques sur un corps local (avec un appendice de J.-M. Fontaine). *Inventiones mathematicae*, 115(1) :81–150, 1994.
- [PR95] Bernadette Perrin-Riou. Fonctions L p -adiques des représentations p -adiques. *Astérisque*, 229 :198, 1995.
- [Ran39] Robert Alexander Rankin. Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions : li. the order of the Fourier coefficients of integral modular forms. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 35, pages 357–372. Cambridge University Press, 1939.
- [RR18] Óscar Rivero and Victor Rotger. Derived Beilinson-Flach elements and the arithmetic of the adjoint of a modular form. *arXiv preprint arXiv :1806.10022*, 2018.
- [Sai97] Takeshi Saito. Modular forms and p -adic Hodge theory. *Inventiones mathematicae*, 129(3) :607–620, 1997.
- [SBM40] Atle Selberg, Vilhelm Bjerknæs, and Jacob Molland. *Bemerkungen über eine Dirichletsche Reihe, die mit der Theorie der Modulformen nahe verbunden ist*. Cammermeyer i komm., 1940.
- [Sch90] Anthony J Scholl. Motives for modular forms. *Inventiones mathematicae*, 100(1) :419–430, 1990.
- [Sha81] Freydoon Shahidi. On certain L -functions. *American Journal of Mathematics*, 103(2) :297–355, 1981.
- [Shi76] Goro Shimura. The special values of the zeta functions associated with cusp forms. *Communications on pure and applied Mathematics*, 29(6) :783–804, 1976.
- [Shi77] Goro Shimura. On the periods of modular forms. *Mathematische Annalen*, 229(3) :211–221, 1977.
- [Ste10] Glenn Stevens. Coleman's L -invariant and families of modular forms. *Astérisque*, 331 :1–12, 2010.
- [Tat62] John Tate. Duality theorems in Galois cohomology over number fields. In *Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962)*, pages 288–295, 1962.
- [Tsu99] Takeshi Tsuji. p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. *Inventiones mathematicae*, 137(2) :233–411, 1999.
- [Urb14] Eric Urban. Nearly overconvergent modular forms. In *Iwasawa Theory 2012*, pages 401–441. Springer, 2014.
- [Vis76] Mikhail Markovich Vishik. Non-archimedean measures connected with Dirichlet series. *Matematicheskii Sbornik*, 141(2) :248–260, 1976.

- [Was97] Lawrence C Washington. *Introduction to cyclotomic fields*, volume 83. Springer Science & Business Media, 1997.