



**HAL**  
open science

# Approche géométrique couleur pour le traitement des images catadioptriques

Fatima Aziz

► **To cite this version:**

Fatima Aziz. Approche géométrique couleur pour le traitement des images catadioptriques. Optique / photonique. Université de Limoges, 2018. Français. NNT : 2018LIMO0080 . tel-02405997

**HAL Id: tel-02405997**

**<https://theses.hal.science/tel-02405997v1>**

Submitted on 12 Dec 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# UNIVERSITÉ DE LIMOGES

ED 610 - Sciences et Ingénierie des Systèmes, Mathématiques,  
Informatique (SISMI)

XLIM-UMR CNRS/ Université de Limoges 7252

Année : 2018

Thèse N X

## Thèse

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LIMOGES**

**Science et Ingénierie pour l'Information, Mathématiques**

présentée et soutenue par

**Fatima AZIZ**

le 11 Décembre 2018

## Approche géométrique couleur pour le traitement des images catadioptriques

**Thèse dirigée par Ouiddad LABBANI-IGBIDA et Ahmed TAMTAOUI**  
**Co-encadrée par Amina RADGUI**

### JURY :

<b>Peter STURM</b>	Directeur de Recherche, INRIA Grenoble Rhône-Alpes	Président du jury
<b>Simon LACROIX</b>	Directeur de Recherche CNRS, LAAS Toulouse	Rapporteur
<b>Pascal VASSEUR</b>	Professeur des universités, Université de Rouen	Rapporteur
<b>Ouiddad LABBANI-IGBIDA</b>	Professeure des universités, Université de Limoges	Examineur
<b>Amina RADGUI</b>	Maitre de conférences, INPT Rabat Maroc	Examineur
<b>Ahmed TAMTAOUI</b>	Professeur, INPT Rabat Maroc	Examineur





---

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Résumé</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Notations</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction générale</b>	<b>7</b>
1.1 Contexte général	7
1.2 Énoncé du problème	8
1.3 Principales contributions	10
1.4 Structuration du mémoire	12
<b>2 Vision omnidirectionnelle et outils Riemanniens</b>	<b>13</b>
2.1 Introduction	13
2.2 Capteurs omnidirectionnels	14
2.2.1 Définition	14
2.2.2 Caméra polydioptrique	14
2.2.3 Caméra fisheye	16
2.2.4 Caméra catadioptrique	16
2.3 Modélisation des capteurs catadioptriques	17
2.3.1 Contrainte du PVU	18
2.3.2 Modélisation de la projection catadioptrique	20
2.3.3 Modèle d'équivalence sphérique	22

2.4	Outils de la géométrie Riemannienne . . . . .	24
2.4.1	Notions autour de la géométrie Riemannienne . . . . .	24
2.4.2	Opérateurs différentiels Riemanniens . . . . .	26
2.5	Géométrie Riemannienne et vision . . . . .	27
2.5.1	Modèles Riemanniens déformables . . . . .	27
2.5.2	Modèles Riemanniens déformables et vision omnidirectionnelle . . . . .	28
2.6	Conclusion . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Tenseur hybride générique pour les images catadioptriques . . . . .</b>	<b>31</b>
3.1	Introduction . . . . .	31
3.2	Tenseur de structure classique . . . . .	32
3.3	Construction de la métrique . . . . .	34
3.3.1	Formalisme général . . . . .	34
3.3.2	Métrique spatiale générique . . . . .	36
3.3.3	Métrique spatiale-couleur générique . . . . .	38
3.4	Étude de cas . . . . .	38
3.4.1	Projection géométrique . . . . .	39
3.4.2	Projection colorimétrique . . . . .	43
3.4.3	Projection hybride spatio-colorimétrique . . . . .	44
3.5	Conclusion . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Fonction Gaussienne adaptée et applications . . . . .</b>	<b>49</b>
4.1	Introduction . . . . .	49
4.2	Noyau Gaussien adapté pour les images catadioptriques . . . . .	50
4.2.1	Noyau Gaussien et équation de diffusion . . . . .	50
4.2.2	Noyau Gaussien en imagerie catadioptrique . . . . .	53
4.2.3	Nouveau formalisme d'une Gaussienne adaptée . . . . .	56
4.3	Lissage adapté . . . . .	59
4.3.1	Lissage par Laplace-Beltrami . . . . .	59
4.3.2	Lissage par Gaussienne adaptée . . . . .	63
4.4	Filtrage par Différence de Gaussiennes adaptée . . . . .	67
4.5	Analyse multi-échelle . . . . .	71
4.6	Détection des contours . . . . .	74
4.7	Détection des points d'intérêt . . . . .	80
4.8	Conclusion . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Espace libre omnidirectionnel et planification de trajectoires . . . . .</b>	<b>89</b>
5.1	Introduction . . . . .	90
5.2	Approche Hamilton-Jacobi : théorie et résolution numérique . . . . .	91

5.2.1	Équation HJ et Équation Eikonal . . . . .	91
5.2.2	Contours actifs et level-sets . . . . .	95
5.2.3	Résolution numérique de l'équation HJ . . . . .	99
5.2.4	Fast Marching . . . . .	101
5.3	Distances géodésiques Riemanniennes . . . . .	103
5.3.1	Définitions . . . . .	104
5.3.2	Carte de distances et équation Hamilton-Jacobi : . . . . .	105
5.3.3	Fast marching anisotropique . . . . .	106
5.4	Cartes de distances dans l'image catadioptrique . . . . .	107
5.4.1	Extraction de l'espace libre . . . . .	107
5.4.2	Carte de distances aux obstacles . . . . .	113
5.4.3	Planification de trajectoires optimales . . . . .	117
5.5	Conclusion . . . . .	122
<b>6</b>	<b>Conclusion générale . . . . .</b>	<b>123</b>
6.1	Bilan général . . . . .	123
6.2	Perspectives . . . . .	125
6.3	Valorisation scientifique . . . . .	126
	<b>Annexes . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>A</b>	<b>Équations de la contrainte du PVU . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>B</b>	<b>Opérateurs différentiels . . . . .</b>	<b>131</b>
B.1	Gradient Riemannien . . . . .	131
B.2	Divergence Riemannienne . . . . .	132
<b>C</b>	<b>Développements mathématiques . . . . .</b>	<b>135</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>137</b>





---

## RÉSUMÉ

Ce manuscrit étudie les images omnidirectionnelles catadioptriques couleur en tant que variétés Riemanniennes. Cette représentation géométrique ouvre des pistes intéressantes pour résoudre les problèmes liés aux distorsions introduites par le système catadioptrique dans le cadre de la perception couleur des systèmes autonomes.

Notre travail démarre avec un état de l'art sur la vision omnidirectionnelle, les différents dispositifs et modèles de projection géométriques. Ensuite, nous présentons les notions de base de la géométrie Riemannienne et son utilisation en traitement d'images. Ceci nous amène à introduire les opérateurs différentiels sur les variétés Riemanniennes, qui nous seront utiles dans cette étude.

Nous développons alors une méthode de construction d'un tenseur métrique hybride adapté aux images catadioptriques couleur. Ce tenseur a la double caractéristique, de dépendre de la position géométrique des points dans l'image, et de leurs coordonnées photométriques également.

L'exploitation du tenseur métrique proposé pour différents traitements des images catadioptriques, est une partie importante dans cette thèse. En effet, on constate que la fonction Gaussienne est au cœur de plusieurs filtres et opérateurs pour diverses applications comme le débruitage, ou bien l'extraction des caractéristiques bas niveau à partir de la représentation dans l'espace-échelle Gaussien. On construit ainsi un nouveau noyau Gaussien dépendant du tenseur métrique Riemannien. Il présente l'avantage d'être applicable directement sur le plan image catadioptrique, également, variable dans l'espace et dépendant de l'information image locale.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous discutons des applications robotiques de la métrique hybride, en particulier, la détection de l'espace libre navigable pour un robot mobile, et nous développons une méthode de planification de trajectoires optimal.







---

## ABSTRACT

This manuscript investigates omnidirectional catadioptric color images as Riemannian manifolds. This geometric representation offers insights into the resolution of problems related to the distortions introduced by the catadioptric system in the context of the color perception of autonomous systems.

The report starts with an overview of the omnidirectional vision, the different used systems, and the geometric projection models. Then, we present the basic notions and tools of Riemannian geometry and its use in the image processing domain. This leads us to introduce some useful differential operators on Riemannian manifolds.

We develop a method of constructing a hybrid metric tensor adapted to color catadioptric images. This tensor has the dual characteristic of depending on the geometric position of the image points and their photometric coordinates as well.

In this work, we mostly deal with the exploitation of the previously constructed hybrid metric tensor in the catadioptric image processing. Indeed, it is recognized that the Gaussian function is at the core of several filters and operators for various applications, such as noise reduction, or the extraction of low-level characteristics from the Gaussian space-scale representation. We thus build a new Gaussian kernel dependent on the Riemannian metric tensor. It has the advantage of being applicable directly on the catadioptric image plane, also, variable in space and depending on the local image information.

As a final part in this thesis, we discuss some possible robotic applications of the hybrid metric tensor. We propose to define the free space and distance transforms in the omni-image, then to extract geodesic medial axis. The latter is a relevant topological representation for autonomous navigation, that we use to define an optimal trajectory planning method.





---

## NOTATIONS

### Notations pour les points

$P(X, Y, Z)^t$	Point de l'environnement 3D dans le référentiel caméra ( $\equiv$ référentiel monde)
$P_m(x_m, y_m, z_m)^t$	Point 3D projeté sur le miroir du système catadioptrique
$P_s(x_s, y_s, z_s)^t$	Point 3D projeté sur la sphère d'équivalence
$U(x, y)$	Point sur le plan image normalisé

### Notations pour les fonctions

$G$	Fonction Gaussienne
$G_g$	Fonction Gaussienne adaptée, l'indice $g$ indique la métrique
$I(x, y)$	Une image en niveaux de gris $I(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
$I * G_g$	Produit de convolution de l'image $I$ par la fonction de Gauss $G_g$
$I^i(x, y)$	Une composante $i$ d'une image multidimensionnelle $I(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ , telle que $i = 1, \dots, m$

### Notations pour le calcul différentiel

$\langle X, Y \rangle$	Produit scalaire entre les vecteurs $X$ et $Y$
$\Delta_g I$	L'opérateur Laplace-Beltrami, l'indice $g$ indique la métrique de la variété.
$\Gamma_{ij}^k$	Les coefficients de Christoffel

$\nabla I$	L'opérateur gradient de $I$
$d_E(p, q)$	Distance Euclidienne entre deux points $p$ et $q$
$d_g(p, q)$	Distance Riemannienne entre deux points $p$ et $q$
$g^{\mu\nu}$	Métrie Riemannienne inverse
$g_{\mu\nu}$	Métrie Riemannienne
$I_x, I_y$	Dérivées partielles de $I$ par rapport aux variables $x, y$
$T_p M$	L'espace vectoriel tangent à la variété $M$ au point $p \in M$

### **Abréviations et anglicismes**

<i>Backward et Forward</i>	Désigne la méthode de dérivation qui utilise dans sa formulation de voisinage le point courant et le point précédant (Backward) ou bien le point courant et le point suivant (Forward)
<i>DoG</i>	Difference of Gaussians
<i>EDP</i>	Équation aux Dérivées Partielles
<i>FM</i>	Fast Marching (Marche rapide) : méthode numérique utilisée pour la résolution des équations de type Hamilton-Jacobi
<i>HJ</i>	Equations Hamilton-Jacobi : Une classe particulière d'équations aux dérivées partielles
<i>LoG</i>	Laplacian of Gaussians
<i>PVU</i>	Point de Vue Unique
<i>Scale-space</i>	Représentation en Espace-échelle
<i>Single-pass</i>	Un algorithme Single-pass (ou one-pass) lit son entrée une seule fois, i.e, il effectue un passage unique par les données en entrée
<i>Snake</i>	(Littéralement serpent) Désigne les premiers contours actifs introduits par Kass et al. [1988]
<i>Upwind</i>	Schéma de discrétisation numérique appelé aussi schéma décentré

**Sommaire**

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte général . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>1.2</b>	<b>Énoncé du problème . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>1.3</b>	<b>Principales contributions . . . . .</b>	<b>10</b>
<b>1.4</b>	<b>Structuration du mémoire . . . . .</b>	<b>12</b>

---

**1.1 Contexte général**

Cette thèse s’inscrit dans le cadre d’une collaboration de cotutelle entre le laboratoire *XLIM* de l’université de Limoges (France) et le laboratoire *STRS* de l’Institut National des Postes et Télécommunications de Rabat INPT (Maroc).

Les travaux présentés dans ce mémoire s’articulent autour des systèmes perceptifs basés vision omnidirectionnelle. Ils ont été réalisés au sein de l’équipe *Robotique et Mécatronique* de l’institut de recherche *XLIM*, et l’équipe *MUSIC* (Multimédia, Signal and Communication Systems) du laboratoire *STRS* de l’INPT.

L’équipe *Robotique et Mécatronique* développe des traitements spécifiques pour des systèmes autonomes dans diverses applications. Ses domaines de recherche couvrent l’estimation d’état de systèmes complexes, la vision non conventionnelle, la perception visuelle et multi-sensorielle, la localisation, l’exploration et la navigation des robots. Quant à l’équipe *MUSIC*, elle mène des travaux de recherche autour de l’analyse, le traitement et le codage robuste d’image et de la vidéo, la vision par ordinateur, le codage de la parole,

la modélisation et le dimensionnement des réseaux de télécommunications, le tatouage des images, et la transmission sécurisée de documents multimédias dans les réseaux.

Les contributions de cette thèse s'inscrivent dans les objectifs de développements d'outils avancés pour le traitement des images catadioptriques omnidirectionnelles et leur application dans la perception de systèmes autonomes.

## 1.2 Énoncé du problème

Le thème central de cette thèse est la vision omnidirectionnelle catadioptrique, alors :

— **Qu'est-ce que la vision omnidirectionnelle, la vision catadioptrique ?**

Une caméra omnidirectionnelle est une caméra qui offre des images avec un champ de vue large par rapport aux caméras conventionnelles perspectives. Ce champ de vue peut atteindre environ  $180^\circ$  pour les caméras dioptriques qui utilisent des lentilles spéciales (de type *fisheye* par exemple). La vision omnidirectionnelle catadioptrique offre un champ de vue très large de  $360^\circ$ . Elle consiste en l'association d'une caméra classique avec un miroir de révolution<sup>1</sup> réfléchissant la scène. Cette vision est très intéressante pour des applications robotiques.

— **Pourquoi la vision omnidirectionnelle catadioptrique pour la robotique ?**

En robotique, on utilise plusieurs types de capteurs, par exemple, les caméras, les télémètres laser, sonar et radar. Les caméras présentent l'avantage majeur de la diversité des informations fournies (couleur, texture et mouvement) et qui ne sont pas toujours offertes par les autres dispositifs. Ce qui permet une meilleure perception et compréhension de la scène. La vision omnidirectionnelle a pris un essor considérable ces dernières années grâce à son large champ de vue, qui constitue, entre autres, un atout précieux en robotique.

— **Quels sont les principaux atouts et inconvénients de l'imagerie catadioptrique ?**

Les capteurs catadioptriques présentent le principal avantage d'offrir une image à champ de vue large par une seule capture. Toutefois, les distorsions géométriques de la scène capturée sont accentuées à cause de l'utilisation des miroirs. Ainsi, la résolution de l'image est variable en fonction de la distance radiale par rapport à son centre.

— **Quelles sont les catégories des différentes approches adoptées en vision omnidirectionnelle catadioptrique ?**

On peut classer les approches utilisées en vision catadioptrique en 4 catégories :

1. Les approches classiques Euclidiennes sans correction : dans ce cas, les algorithmes conçus pour les images conventionnelles perspectives sont appliqués

---

1. Le miroir peut prendre différentes formes géométriques : parabolique, hyperbolique, elliptique, ou sphérique par exemple.

sur les images catadioptriques sans aucune tentative de correction de la distorsion introduite par le système.

2. Les approches classiques sur les images panoramiques : il s'agit de transformer l'image catadioptrique en une image panoramique en la projetant sur un cylindre. Dans ce cas, les outils conventionnels s'appliquent.
3. Les approches sphériques : le domaine de définition de l'image catadioptrique est la sphère. Cette représentation est le résultat du théorème d'équivalence sphérique pour les systèmes à projection centrale.
4. Les approches avec correction dans le plan image : il s'agit de prendre en considération les distorsions du système catadioptrique tout en travaillant directement sur le plan image. Ces approches se basent sur la définition de l'image catadioptrique comme un espace non-Euclidien, d'où la déduction de métriques et opérateurs adaptés.

Notre travail s'inscrit dans cette dernière catégorie.

— **Quels sont les principaux problèmes traités dans cette thèse ?**

1. *Les distorsions géométriques* : Plusieurs aspects des traitements associés aux images catadioptriques sont encore à explorer pour tenir compte des anamorphoses de la formation de l'image. Un aspect, qui est presque absent dans la littérature, concerne l'intégration des déformations géométriques, dues au capteur catadioptrique, dans la formalisation et dans le calcul des outils différentiels et des distances géodésiques.
2. *L'information couleur* : Ces dernières années, plusieurs solutions ont été proposées pour les images couleur perspectives dans la littérature. L'approche tenseur de structure constitue une solution importante pour le traitement des images perspectives couleur. Pourtant, la majorité des travaux en imagerie omnidirectionnelle ne considèrent pas l'aspect couleur, qui reste un sujet d'étude très ouvert.

Notre objectif dans ce travail est d'améliorer le traitement des images catadioptriques couleur et leur exploitation dans des applications en robotique. L'amélioration résultera de la correction des distorsions géométriques tout en considérant l'aspect photométrique multidimensionnel de l'image.

— **Quelle est la méthode adoptée pour répondre à ces problématiques ?**

L'approche adoptée dans cette thèse consiste à définir l'image catadioptrique dans un espace métrique non-Euclidien permettant de tenir compte, simultanément, des distorsions géométriques et de l'information couleur de l'image.



### 1.3 Principales contributions

Les principales contributions dans cette thèse s’articulent autour de :

- ***Un nouveau formalisme d’une métrique Riemannienne spatiale-couleur.***
  - *Formulation du problème des distorsions introduites par le miroir, qui reste toujours ouvert et complexe, à l’aide d’un plongement Riemannien* : À la différence des approches de l’état de l’art [Bogdanova et al., 2007], notre approche est plus générique et compacte. Elle permet la simplification du calcul de la métrique (via la métrique du Pullback).
  - *Métrique Riemannienne générique* : La métrique déduite est dérivée en utilisant le modèle d’équivalence sphérique qui nous fournit un cadre générique pour l’étude de plusieurs types de caméras telles que les caméras perspectives, catadioptriques à point de vue unique, et certaines fisheyes...
  - *Métrique Riemannienne hybride* : La formulation sous forme d’un plongement Riemannien permet le calcul d’une métrique qui corrige les distorsions géométriques. En outre, elle a l’avantage de combiner les coordonnées spatiales et couleur dans une seule quantité métrique. Par conséquent, l’ensemble des informations concernant les déformations géométriques ainsi que les données visuelles couleur sont préservées.

Le calcul de la métrique Riemannienne est un élément important. La question qui se pose maintenant, est comment l’exploiter pour améliorer les traitements classiques. Dans un premier lieu, on pense aux opérateurs différentiels (gradient, Laplace-Beltrami, divergence, ...) sur les variétés Riemanniennes, qui constituent des outils essentiels en vision par ordinateur et traitement d’images. Sur un autre plan, on pense à la fonction Gaussienne qui joue un rôle primordial dans plusieurs applications, non seulement le filtrage, mais aussi la représentation en espace-échelle. Dans ce sens là, on propose :

- ***Une nouvelle représentation en espace-échelle (scale-space).***
  - *Nouveau noyau Gaussien adapté* : La représentation en espace-échelle par lissage Gaussien standard ne peut pas être appliquée aux images catadioptriques, car la condition d’invariance aux translations n’est pas satisfaite. Pour cette raison, nous proposons un nouveau noyau Gaussien adapté, en considérant les images catadioptriques comme des variétés Riemanniennes munies de la métrique adaptée.
  - *Alternative du lissage par diffusion* : Cette formulation est une alternative du lissage non linéaire basé sur la diffusion avec l’opérateur différentiel Laplace-Beltrami présentée dans [Aziz et al., 2016] et exploité dans des expériences de SIFT (Scale Invariant Feature Transform) [Arıcan and Frossard, 2012; Puig et al., 2014].

- *Représentation en espace-échelle sur le plan image* : La formulation proposée permet le traitement direct sur le plan image catadioptrique sans avoir recours à la projection de l'image sur l'espace sphérique pour des fins de prise en compte des déformations du miroir, comme adoptée précédemment pour le SIFT sphérique [Cruz-Mota et al., 2012].

Ayant un objectif de résoudre des problèmes liés à la robotique nous proposons :

- ***Des nouvelles approches métriques pour des applications de navigation.***
  - *Approche géodésique pour l'extraction de l'espace libre omnidirectionnel* : Proposition d'une nouvelle approche de l'extraction de l'espace libre pour la navigation d'un robot mobile à partir de l'information image uniquement. L'approche se base sur le calcul d'une distance colorimétrique obtenue par la résolution d'une équation de type Hamilton-Jacobi anisotropique. La métrique utilisée est le tenseur de structure extrait à partir des composantes couleur de l'image.
  - *Planification de trajectoires* : À partir de l'espace libre détecté, et en utilisant la métrique Riemannienne induite de la géométrie du miroir de notre système catadioptrique, nous adaptons une méthode pertinente de planification de trajectoire entre deux positions données. La méthode offre une trajectoire optimale tout en évitant les obstacles et l'emporte sur les méthodes classiques Euclidiennes qui ne tiennent pas compte de la déformation géométrique présente dans l'image catadioptrique.

## 1.4 Structuration du mémoire

Ce mémoire s'articule autour de six chapitres.

**Le chapitre 1** présente une introduction générale, décrivant le contexte, la problématique, les principales contributions et la structuration de ce mémoire.

**Le chapitre 2** porte sur les différentes solutions technologiques de la vision omnidirectionnelle et sur la modélisation de la projection des capteurs catadioptriques en particulier. En outre, nous présentons les outils de la géométrie Riemannienne (notions et opérateurs différentiels) qui nous seront utiles pour le traitement des images catadioptriques. À la fin de ce chapitre, nous donnons un état de l'art sur l'utilisation de la géométrie Riemannienne en traitement d'images conventionnelles, mais aussi, en traitement d'images catadioptriques.

**Le chapitre 3** propose la construction d'une métrique générique pour les images acquises par les caméras catadioptriques centrales. Il présente ainsi les outils de traitement des images couleur classiques menant à la construction de cette métrique, en concluant le chapitre par une étude explicite de différentes métriques dérivées de ce formalisme général.

**Le chapitre 4** vise à mettre en œuvre le tenseur métrique hydrique conçu dans le chapitre 4 dans différents traitements. Nous développons un nouveau noyau Gaussien adapté permettant une nouvelle représentation en espace des échelles (scale-space), et nous en déduisons l'opérateur Différence de Gaussiennes adapté. Enfin, l'efficacité de ces nouveaux opérateurs adaptés est validée par plusieurs expériences : lissage, analyse de la représentation en espace-échelle Gaussien adaptée, détection des contours et des coins et filtrage par l'opérateur Différence de Gaussiennes.

**Le chapitre 5** s'intéresse aux problèmes la planification de trajectoire en utilisant la vision omnidirectionnelle catadioptrique. Notre approche se base sur le calcul de distances géodésiques à partir du tenseur métrique couleur et la métrique spatiale déduite de la géométrie du miroir de notre système catadioptrique. Le calcul des distances géodésiques se base sur la théorie de propagation des fronts. Pour cette raison, nous présentons au préalable l'état de l'art concernant les équations Hamilton-Jacobi Euclidiennes qui modélisent ce problème de propagation de front, ensuite leur résolution dans un espace isotropique et anisotropique. Nous achevons ce chapitre par deux expérimentations mettant en œuvre la formulation Riemannienne du problème de propagation. Nous présentons donc une nouvelle approche métrique couleur pour la détection de l'espace libre, ainsi que la planification de trajectoire optimale en tenant compte des distorsions introduites par le miroir de la caméra catadioptrique.

**Le chapitre 6** fera office de conclusion générale et tracera des perspectives de ce travail. Nous suggérerons des évolutions possibles et de nombreuses applications envisageables.

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>2.2</b>	<b>Capteurs omnidirectionnels</b>	<b>14</b>
2.2.1	Définition	14
2.2.2	Caméra polydioptrique	14
2.2.3	Caméra fisheye	16
2.2.4	Caméra catadioptrique	16
<b>2.3</b>	<b>Modélisation des capteurs catadioptriques</b>	<b>17</b>
2.3.1	Contrainte du PVU	18
2.3.2	Modélisation de la projection catadioptrique	20
2.3.3	Modèle d'équivalence sphérique	22
<b>2.4</b>	<b>Outils de la géométrie Riemannienne</b>	<b>24</b>
2.4.1	Notions autour de la géométrie Riemannienne	24
2.4.2	Opérateurs différentiels Riemanniens	26
<b>2.5</b>	<b>Géométrie Riemannienne et vision</b>	<b>27</b>
2.5.1	Modèles Riemanniens déformables	27
2.5.2	Modèles Riemanniens déformables et vision omnidirectionnelle	28
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>30</b>

## 2.1 Introduction

Ce premier chapitre est consacré à introduire, dans un premier lieu, la vision omnidirectionnelle et particulièrement de type catadioptrique, qui constitue le cœur de notre

travail. En second lieu, nous introduisons les outils de la géométrie Riemannienne qui nous seront indispensables dans la suite.

Nous présentons brièvement les différents systèmes omnidirectionnels utilisés dans la littérature. Ensuite, nous nous penchons sur la vision catadioptrique en détaillant la théorie du Point de Vue Unique visant à définir les systèmes permettant une projection centrale. Nous abordons aussi la modélisation de la projection de deux principaux systèmes : paracatadioptrique et hyper-catadioptrique, aussi, le célèbre modèle sphérique générique de toute projection centrale. La géométrie Riemannienne constitue le cadre mathématique

de notre travail, pour cette raison, nous donnons au préalable quelques outils et notions de base, et un bref état de l'art sur son utilisation en vision et traitement d'images conventionnelles et catadioptriques.

## 2.2 Capteurs omnidirectionnels

### 2.2.1 Définition

Un système de vision omnidirectionnelle fournit une perception de l'environnement avec un champ de vue très large qui peut atteindre  $360^\circ$  autour de son axe. Plusieurs systèmes permettent l'obtention d'une image omnidirectionnelle, cette dernière pourrait être réduite à une bande donnant ce qu'on appelle une image panoramique.

Parmi les premiers systèmes omnidirectionnels, nous trouvons la caméra rotative. Il s'agit d'une caméra conventionnelle qui effectue une rotation autour d'un axe vertical à vitesse angulaire constante. L'image panoramique est construite par un procédé de "mosaicing" après l'acquisition de plusieurs images successives couvrant l'environnement observé. Un système polydioptrique permet également une vision omnidirectionnelle, c'est un regroupement de caméras pointant vers différentes directions (Sec. 2.2.2). Un autre système, largement utilisé ces dernières années, s'appuie sur l'utilisation des lentilles grand-angle comme la caméra fisheye (Sec. 2.2.3). Dans cette thèse, nous nous intéressons au système catadioptrique : c'est la combinaison d'une caméra perspective dirigée vers un miroir de révolution réfléchissant (Sec. 2.2.4).

### 2.2.2 Caméra polydioptrique

On peut noter les principaux inconvénients de la caméra rotative : le temps d'acquisition assez long et l'inadaptabilité aux scènes dynamiques. Pour cette raison, le système de caméras multiples a été conçu. Il repose sur l'assemblage des images acquises avec plusieurs caméras, chacune orientée vers une direction et recouvrant un champ de vue restreint. Pour ce type de systèmes, nous donnons l'exemple de deux caméras récentes :

- La caméra Ultra HD *Sphericam2*<sup>1</sup> Fig. 2.1, destinée à l'usage public, est capable de filmer à 360°. Elle est dotée de six lentilles synchronisées, de microphones, d'un GPS, peut être munie de cartes microSD, et intègre le WiFi. Ces caractéristiques font d'elle une caméra dotée de performances élevées, mais le prix dans le marché est assez onéreux (2499\$)<sup>2</sup>.



FIGURE 2.1 – (a) Caméra *Sphericam 2*. (b) Exemple d'image acquise.

- La caméra *Gear 360 Samsung*<sup>3</sup> Fig. 2.2 est une petite caméra munie de deux capteurs. Elle permet un mode à 180° et à 360°. Elle propose des caractéristiques avancées similaires à la *Sphéricam 2*.



FIGURE 2.2 – (a) Caméra *Gear 360 Samsung*. (b) Exemple d'image acquise.

1. <http://www.sphericam.com/sphericam2/>

2. <http://www.sphericam.com/shop/>

3. <http://www.samsung.com/fr/wearables/gear-360-sm-r210>

Pour conclure, une configuration de plusieurs caméras permet l'obtention d'une image de bonne qualité et à haute résolution. Cependant, la vue omnidirectionnelle construite à partir de plusieurs images partielles implique une difficulté de fabrication, et par conséquent, des coûts de réalisation prohibitifs en plus d'une possibilité de présence de discontinuités sur l'image omnidirectionnelle résultante.

### 2.2.3 Caméra fisheye

Afin d'obtenir un champ de vue plus large qu'une caméra perspective, un objectif appelé *fish-eye* (Œil de poisson) a été proposé au début du vingtième siècle. Sa particularité d'avoir une distance focale très courte induit un angle de champ très important de  $180^\circ$  et même  $190^\circ$ . La Fig. 2.3 présente un exemple de caméra fisheye<sup>4</sup> récente ainsi que l'image résultante.

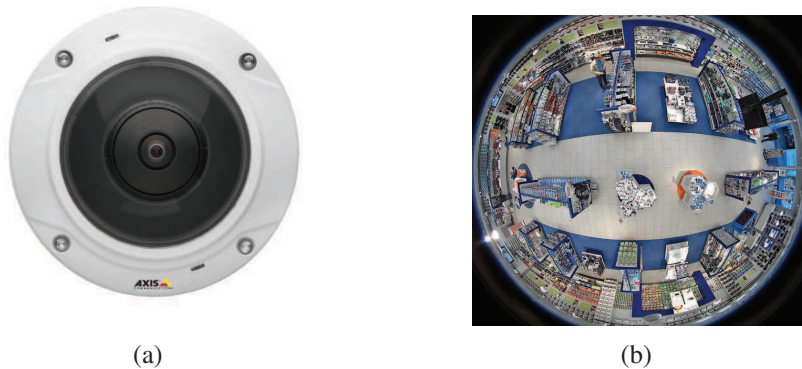


FIGURE 2.3 – (a) Caméra fisheye *AXIS M3007-PV*. (b) Exemple d'image acquise.

Un objectif fisheye présente l'avantage de sa simplicité d'utilisation, puisqu'il s'adapte comme toute autre optique sur les caméras. Cependant, il introduit de fortes distorsions radiales. En plus, ce type de capteur ne vérifie pas la contrainte du PVU (Point de Vue Unique), ce qui rend difficile la modélisation de sa projection, et le champ de vue reste inférieur aux autres solutions existantes.

Un modèle généralisé incluant à la fois les caméras fisheye et catadioptriques a été proposé dans [Ying and Hu, 2004], en substituant la sphère dans le modèle unifié [Geyer and Daniilidis, 2000] par une surface quadratique.

### 2.2.4 Caméra catadioptrique

L'association d'une caméra conventionnelle et d'un miroir de révolution permet la construction d'un système de vision omnidirectionnelle : les rayons lumineux provenant

4. <https://www.axis.com/ch/fr/products/axis-m3007-pv>

du l'environnement 3D sont réfléchis par la surface du miroir et dirigés vers la lentille de la caméra. Ces dispositifs sont référencés dans la littérature comme des systèmes *catadioptriques* :

- le mot "*cata*" renvoie à la catoptrique, c'est la partie de l'optique géométrique qui s'intéresse aux problèmes de réflexion sur des miroirs.
- le mot "*dioptrique*" renvoie à la réfraction des lentilles.

La figure 2.4 présente une caméra catadioptrique et un exemple d'image acquise par ce système. L'idée originale des caméras catadioptriques a été proposée par [Rees, 1970].



FIGURE 2.4 – (a) Caméra catadioptrique *AXIS M3007-PV*. (b) Exemple d'image acquise.

Plus tard, ce concept est devenu populaire et a été étendu par [Yagi and Kawato, 1990; Yamazawa et al., 1993], et utilisé activement dans plusieurs applications de vidéoconférence, de surveillance et de vision par ordinateur. Les miroirs de ces systèmes sont en général convexes et de révolution, et prennent habituellement la forme hyperboloïde ou parabololoïde.

### 2.3 Modélisation des capteurs catadioptriques

La modélisation de la projection permet de trouver le lien entre les points 2D sur l'image et leur correspondants dans le monde 3D. Dans cette section, nous abordons dans un premier temps la théorie de la contrainte du Point de Vue Unique qui permet de déduire les formes géométriques des miroirs permettant une projection centrale. Dans un deuxième temps, nous décrivons la modélisation géométrique de quelques projections catadioptriques centrales : hyper-catadioptrique et para-catadioptrique (cette configuration liée à l'équation du miroir). Ensuite, nous présentons le modèle sphérique générique qui englobe tout système à projection centrale.



### 2.3.1 Contrainte du PVU

La contrainte du point de vue unique (PVU) implique la convergence des rayons vers un point unique, appelé le centre optique du capteur. La caméra perspective est un exemple de système central à PVU. Cette propriété est intéressante et souhaitable pour les systèmes catadioptriques parce que chaque pixel dans l'image mesure l'intensité de lumière (l'irradiance) provenant d'une unique direction. Par conséquent, la modélisation du processus de projection devient plus simple. Ainsi, on a la possibilité d'une construction, géométriquement correcte, d'une image panoramique ou planaire perspective à partir d'une image catadioptrique.

[Baker and Nayar, 1999] ont étudié exhaustivement et minutieusement la contrainte du PVU pour les systèmes catadioptriques. Ils ont conclu les formes des miroirs à combiner avec la caméra conventionnelle permettant d'assurer cette contrainte, qui sont les miroirs paraboloides, hyperboloïdes et elliptiques. Les miroirs plans, sphériques et coniques permettent aussi l'obtention d'un PVU, mais le champ de vue ne s'améliore pas avec le miroir plan, et la réalisation pratique d'un système catadioptrique à PVU avec miroir sphérique ou conique reste impossible. La figure 2.5 présente la configuration géométrique de différents miroirs pour assurer une projection centrale. Nous dressons dans les paragraphes suivants une brève description de chaque forme de miroir :

**Miroir plan** Le champ de vision ne peut pas être augmenté par l'utilisation d'un miroir plan. En outre, le capteur construit par la combinaison d'une caméra et de plusieurs miroirs plans n'améliore pas le champ de vision tout en satisfaisant la contrainte du PVU. [Nalwa, 1996] a conçu un système à PVU par une configuration pyramidale de 4 miroirs plans et 4 caméras conventionnelles placées chacune au-dessus d'une face de la pyramide. Les centres optiques des caméras sont déplacés jusqu'à ce que les quatre points de vue coïncident en un seul point. Le résultat est un capteur de projection centrale omnidirectionnelle d'environ  $360^\circ \times 50^\circ$ .

**Miroir conique** La contrainte du PVU peut être satisfaite en utilisant un miroir conique à condition que le centre optique de la caméra soit situé sur le sommet du cône, de ce fait, la solution est irréalisable pratiquement. Toutefois, cette configuration a été utilisée plusieurs fois [Yagi and Kawato, 1990; Yagi and Yachida, 1991; Bogner, 1995], en éloignant la caméra du sommet du miroir.

**Miroir sphérique** Dans ce cas, la contrainte du PVU implique la coïncidence du centre optique de la caméra avec le centre de la sphère. Pareillement au cas conique, le miroir sphérique ne permet pas dans la pratique l'obtention d'un champ de vision large sous la contrainte du PVU. Néanmoins, la caméra catadioptrique avec miroir sphérique a été utilisée auparavant dans plusieurs expériences [Hong, 1991; Murphy, 1995; Bogner, 1995], dans lesquelles le centre optique de la caméra a été déplacé en dehors du miroir sphérique.

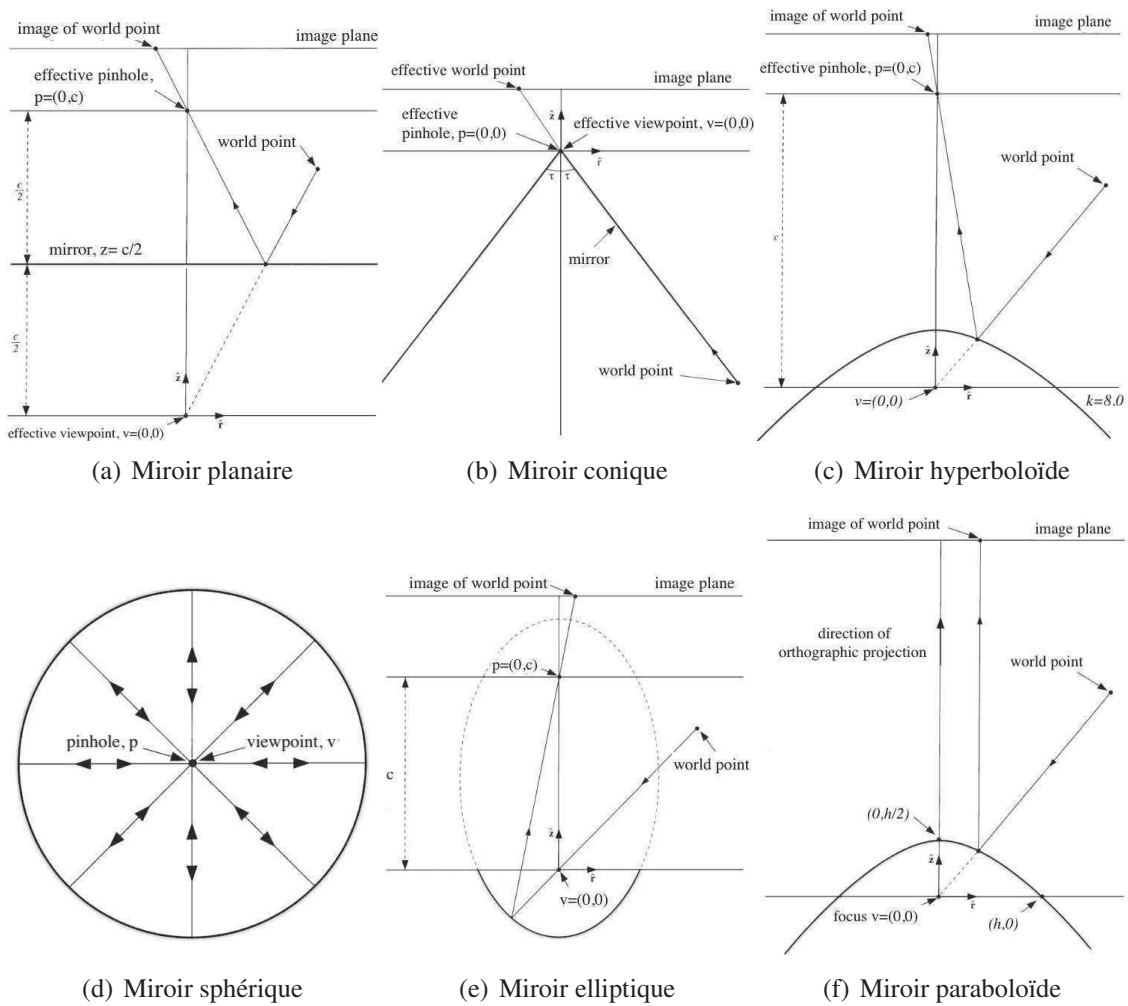


FIGURE 2.5 – Configurations des différents miroirs pour assurer la contrainte du PVU.

**Miroir elliptique** La contrainte du PVU avec un miroir elliptique est satisfaite lorsque le centre optique et le point de vue sont situés aux deux foyers de l'ellipsoïde. Donc, ce miroir permet d'améliorer le champ de vision tout en conservant la contrainte du PVU.

**Miroir hyperboloïde** Ce miroir produit également une solution réalisable à condition que le centre optique de la caméra perspective et le point de vue se situent aux deux foyers de l'hyperboloïde. La caméra hyper-catadioptrique a été employée initialement par [Rees, 1970] et plus tard [Yamazawa et al., 1993, 1995] pour des travaux de navigation autonome.

**Miroir parabololoïde** Ce miroir réalise une projection orthographique. Ainsi, la contrainte du PVU est supprimée. Pourtant, l'exploitation de ce miroir combiné à une lentille

télécentrique permet de construire un capteur catadioptrique à PVU situé au foyer du paraboloïde [Nayar, 1997].

### 2.3.2 Modélisation de la projection catadioptrique

La figure 2.6 illustre la formation des images dans les cas des miroirs hyperboloïdes et paraboloïdes.

- En ce qui concerne un système hyper-catadioptrique, un rayon incident d'un point 3D vers le foyer de l'hyperboloïde est réfléchi par la surface du miroir et projeté à travers le centre de projection de la caméra sur le plan image.
- Quant au système para-catadioptrique, une lentille orthographique est nécessaire entre la caméra et le miroir pour faire converger les rayons parallèles réfléchis par le miroir paraboloïde vers le centre de projection.

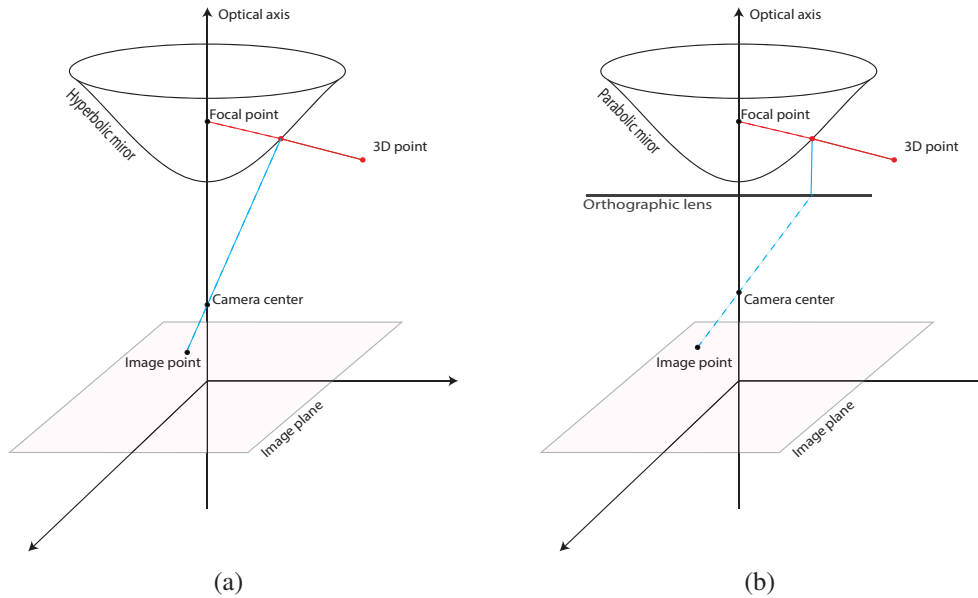


FIGURE 2.6 – (a) Formation d'une image hyper-catadioptrique. (b) Formation d'une image para-catadioptrique.

#### 2.3.2.1 Projection hyper-catadioptrique

L'équation du miroir hyperboloïde dans un repère centré en son foyer est :

$$\frac{(z_m + d/2)^2}{a^2} - \frac{x_m^2 + y_m^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d = 2\sqrt{a^2 + b^2} \\ a = 0.5 \left( \sqrt{d^2 + 4p^2} - 2p \right) \\ b = \sqrt{p\sqrt{d^2 + 4h^2} - 2p^2} \end{cases} \quad (2.1)$$

Le paramètre  $d$  est lié à l'excentricité  $e$  de la section conique du miroir tel que  $d = 2e$  et  $4p$  représente le *latus rectum*<sup>5</sup>.

D'une part, la première projection du point du monde  $P(X, Y, Z)$  sur la surface du miroir produisant le point  $P_m(x_m, y_m, z_m)$  est traduite par l'équation (2.2). D'autre part, la projection de  $P_m$  sur le plan image créant le point  $U(x, y, 0)$  est exprimée par l'équation (2.3).

$$\overrightarrow{FP_m} = \alpha \overrightarrow{FP} \quad (2.2) \quad \overrightarrow{F'U} = \beta \overrightarrow{F'P_m} \quad (2.3)$$

On note que  $F(0, 0, 0)$  et  $F'(0, 0, -d)$  sont les deux foyers de l'hyperboloïde,  $\alpha$  et  $\beta$  des scalaires non nuls. On en conclut les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_m = \alpha X \\ y_m = \alpha Y \\ z_m = \alpha Z \end{cases} \quad (2.4) \quad \frac{x}{x_m} = \frac{y}{y_m} = \frac{d}{z_m + d} \quad (2.5)$$

La valeur de  $\alpha$  est déterminée en remplaçant les termes (2.4) dans l'équation de l'hyperboloïde (2.1), on déduit :

$$\alpha = \frac{b^2 (0.5dZ \pm a\|P\|)}{a^2 (X^2 + Y^2) - b^2 Z^2} \quad \text{où } \|P\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (2.6)$$

Par conséquent, les coordonnées sur le plan image :

$$(x, y) = \left( \pm \frac{\frac{2pd}{\sqrt{d^2+4p^2}} X}{\frac{d}{\sqrt{d^2+4p^2}} \|P\| \mp Z}, \pm \frac{\frac{2pd}{\sqrt{d^2+4p^2}} Y}{\frac{d}{\sqrt{d^2+4p^2}} \|P\| \mp Z} \right) \quad (2.7)$$

La projection sur le plan image produit deux points (signe  $\pm$ ) dont l'un est physiquement réel.

### 2.3.2.2 Projection para-catadioptrique

Le repère est centré au foyer du paraboloïde  $F$ . Soit  $P(X, Y, Z)$  un point 3D de la scène. Le point  $P$  se projette sur le miroir en un point  $P_m(x_m, y_m, z_m)$  tel que :

$$\begin{cases} x_m = \frac{2pX}{\|P\| - Z} \\ y_m = \frac{2pY}{\|P\| - Z} \\ z_m = \frac{2pZ}{\|P\| - Z} \end{cases} \quad \text{où } \|P\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (2.8)$$

Le paramètre  $4p$  est le *latus rectum* du miroir d'équation :

$$z_m = \frac{(x_m^2 + y_m^2) - 4p^2}{4p}$$

5. La longueur du segment créé par l'intersection de la ligne passant par le foyer du miroir et sa section conique.

La projection du miroir parabololoïde est orthographique, ainsi, les coordonnées sur le plan image sont :

$$(x,y) = \left( \pm \frac{2pX}{\|P\| \mp Z}, \pm \frac{2pY}{\|P\| \mp Z} \right) \quad (2.9)$$

De la même manière que le cas hyperboloïde, la projection para-catadioptrique produit deux points dont l'un est physiquement réel, l'autre est virtuel.

### 2.3.3 Modèle d'équivalence sphérique

Le modèle de projection sphérique [Geyer and Daniilidis, 2000] unifie tout type de caméras conventionnelles ou systèmes catadioptriques centraux respectant la contrainte du PVU [Baker and Nayar, 1999]. Ce modèle est illustré sur la Fig. 2.7 et peut être décrit en deux étapes :

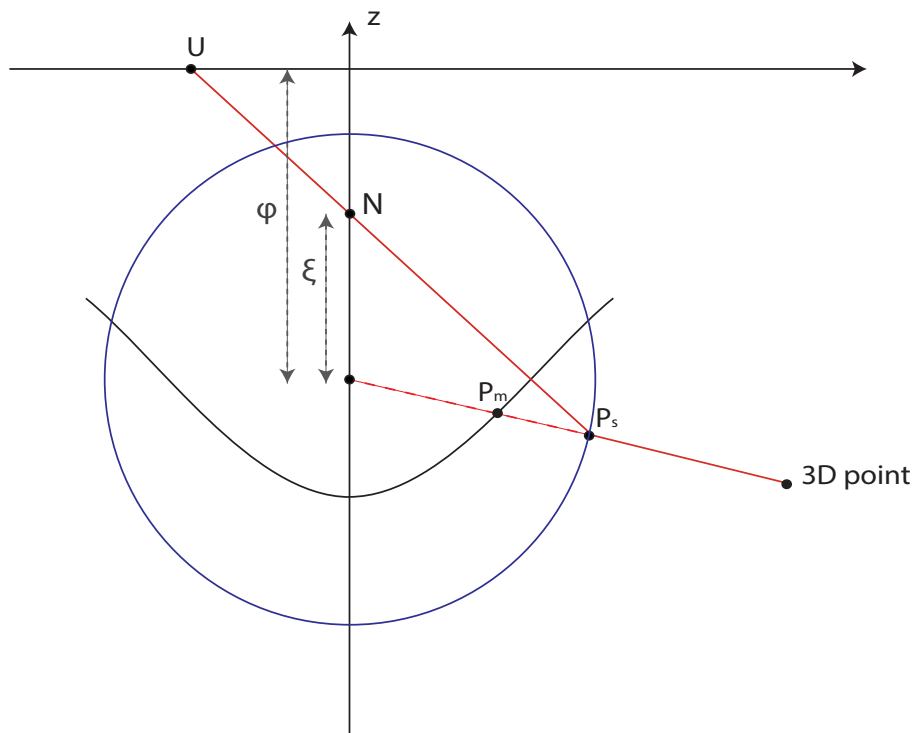


FIGURE 2.7 – Modèle sphérique unifié.

1. Une projection perspective du point  $P(X,Y,Z)$  de la scène sur la surface de la

sphère unitaire, centrée sur le PVU, produisant le point  $P_s(x_s, y_s, z_s)$ , tel que :

$$\begin{cases} x_s = \frac{X}{\|P\|} \\ y_s = \frac{Y}{\|P\|} \\ z_s = \frac{Z}{\|P\|} \end{cases} \quad \text{où } \|P\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (2.10)$$

2. Une projection sur le plan image catadioptrique à partir d'un point appartenant à l'axe vertical de la sphère, et situé à une distance  $\xi$  du centre de la sphère  $O_s$ . Le plan image est situé à une distance  $\varphi$  du centre de la sphère, tel que :

$$\begin{cases} x = \frac{\xi - \varphi}{\xi \|P\| - Z} X \\ y = \frac{\xi - \varphi}{\xi \|P\| - Z} Y \end{cases} \quad (2.11)$$

Le modèle sphérique unifié a donc deux paramètres  $\xi$  et  $\varphi$  déterminés en fonction des caractéristiques géométriques de la section conique du miroir. Le tableau 2.1 décrit ces paramètres où  $e$  indique l'*excentricité* de la section conique du miroir,  $4p$  est la *latus rectum* et  $f$  la *distance focale* [Geyer and Daniilidis, 2000].

TABLE 2.1 – Les paramètres  $\xi$  et  $\varphi$  selon la forme du miroir.

Miroir	$\xi$	$\varphi$
Parabolique	1	$1 - 2p$
Hyperbolique & Elliptique	$\frac{d}{\sqrt{d^2 + 4p^2}}$	$\frac{d(1 - 2p)}{\sqrt{d^2 + 4p^2}}$
Planaire	0	$f$

Afin de regrouper dans un seul modèle les caméras fisheye et catadioptriques centrales, une extension du modèle sphérique a été proposé dans [Ying and Hu, 2004] en substituant la sphère par une surface quadratique. Les motivations de la proposition de ce modèle sont basées sur les observations suivantes : dans [Smith et al., 1999], on affirme que les lignes du monde 3D sont projetées en sections coniques en utilisant une caméra fisheye satisfaisant la projection en deux étapes via une surface quadrique. En plus, dans [Brauer-Burchardt and Voss, 2001], on découvre que pour certaines caméras fisheye, ces sections coniques sont des cercles. Cette propriété est similaire à la projection para-catadioptrique [Nene and Nayar, 1998], qui envoie, elle aussi, les lignes de l'espace en cercles dans l'image. Ensuite, une version modifiée du modèle sphérique a été proposée [Barreto, 2006] dans le but d'inclure les caméras perspectives à distorsion non-linéaire.

## 2.4 Outils de la géométrie Riemannienne

On commence cette section par donner un aperçu général sur la géométrie Riemannienne et les outils de base que nous allons utiliser. Nous renvoyons le lecteur à [Lee, 2006; Petersen, 2006] pour de plus amples informations sur la géométrie Riemannienne.

### 2.4.1 Notions autour de la géométrie Riemannienne

**Un peu d'histoire :** L'objectif de la géométrie Euclidienne est d'étudier les formes et les propriétés géométriques des objets usuels (droites, segments, longueurs, mesures des angles, aires, etc.). Son nom vient d'*Euclide*<sup>6</sup> qui a défini des axiomes (ou postulats) sur lesquelles repose la géométrie Euclidienne actuelle. Les postulats les plus célèbres :

- Par deux points distincts ne peut passer qu'une seule droite.
- Toute droite finie peut être prolongée indéfiniment et continument.
- Par un point, on ne peut faire passer qu'une parallèle à une droite donnée.

Ce dernier est connu sous le nom de *postulatum d'Euclide* ou le *postulat des parallèles*. Depuis *Euclide*, beaucoup de mathématiciens ont cherché en vain à démontrer ce dernier postulat. Ce n'est qu'au XIXe siècle que quatre mathématiciens, *C.F. Gauss* (1777 ; 1855), *J. Bolyai* (1802 ; 1860), *N.I. Lobachevsky* (1793 ; 1856) et *Riemann* (1826 ; 1866), ont montré indépendamment et de façon irréfutable qu'il est impossible de démontrer le *postulat des parallèles*, en concevant des géométries dans lesquelles par un point n'appartenant pas à une droite, on peut tracer soit plusieurs, soit aucune parallèle à cette droite, d'où la naissance de la *géométrie non-Euclidienne*.

Un grand pas dans le monde de la géométrie non-Euclidienne revient à la publication du célèbre mémoire du mathématicien *Bernhard Riemann*, qui a inspiré la plupart des travaux récents. La géométrie Riemannienne introduisit le concept fondateur de *variété géométrique*. Elle étend les méthodes de la géométrie analytique en utilisant des coordonnées locales pour effectuer l'étude d'espaces courbes sur lesquels existent des notions d'angle et de longueur.

Une "variété" (manifold en anglais) est un espace topologique localement Euclidien, c'est-à-dire, le voisinage de chaque point de cet espace ressemble à  $\mathbb{R}^n$ . Formellement,

---

6. *Euclide* est l'un des mathématiciens les plus célèbres de l'Antiquité. Prémsumé né à Athènes, il vécut entre les IIe/IVe siècles av. J.-C. Il est connu pour ses écrits, notamment les *Éléments*, sur lesquels repose une grande partie des mathématiques. Du nom d'Euclide, dérive la géométrie Euclidienne appelée aussi la géométrie plane d'Euclide.

**Définition 1.** On dit que  $M$  est une **variété** (manifold) si en chaque point  $p \in M$ , il existe un voisinage homéomorphe<sup>7</sup> à  $\mathbb{R}^n$ .

Pour illustrer intuitivement cette notion, on donne l'exemple du "problème de la Terre", si elle est "plate ou ronde". En effet, on croit souvent que les hommes ont d'abord affirmé que la Terre était plate, puis le débat avait été clos par Galilée ou bien d'autres avec les preuves modernes. La divergence entre la croyance ancienne et la vérité actuelle provient essentiellement du fait qu'à notre échelle de perception, la Terre a l'air plate. En général, une variété de dimension  $n$  est tout espace qui s'apparente "plat" à petite échelle. L'exemple de base est l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^n$ , en particulier, la ligne des réels  $\mathbb{R}$  et le plan Euclidien  $\mathbb{R}^2$ . Également, une courbe unidimensionnelle est une variété de dimension 1. La sphère, le parabolöide ou bien l'hyperbolöide sont des variétés de dimension 2.

Une variété différentielle lisse peut être dotée d'une structure locale supplémentaire appelée "métrique Riemannienne". Formellement,

**Définition 2.** On appelle **métrique Riemannienne**  $g$  sur une variété lisse (smooth manifold)  $M$  la donnée d'un produit scalaire pour tout point  $p \in M$  sur chaque espace vectoriel tangent  $T_pM$ . On note  $\langle X, Y \rangle := g(X, Y)$  avec  $X, Y \in T_pM$ . Autrement dit,  $g$  associe à un point  $p \in M$  un produit scalaire de  $T_pM$ .

— Propriétés :

- $g$  est une forme bilinéaire symétrique, i.e.,  $g(X, Y) = g(Y, X)$
- $g$  est définie positive, i.e.,  $g(X, X) > 0$  si  $X \neq 0$ .

**Définition 3.** On appelle **variété Riemannienne** toute variété munie d'une métrique Riemannienne.

Si la métrique Riemannienne est donnée par le produit scalaire  $g(X, Y) = X \cdot Y$  pour tout  $X, Y \in T_p\mathbb{R}^n$  et  $p \in \mathbb{R}^n$ , la variété  $\mathbb{R}^n$  munie de cette métrique est l'espace Euclidien standard.

**Définition 4.** Soit  $M$  une variété munie d'une métrique  $g_{\mu\nu}$ . Le carré de la **longueur infinitésimale** d'un petit segment (the squared arc length)  $ds^2$  est donnée par la métrique  $g_{\mu\nu}$  de cette variété,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.12)$$

On note l'utilisation de la convention de sommation d'Einstein<sup>8</sup>. Par exemple, si  $\mu, \nu = \{1, 2\}$  et  $i, j = \{1, 2, 3\}$  et  $h_{ij} = \delta_{ij}$  donc  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{11} dx^2 + g_{12} dx dy + g_{21} dy dx + g_{22} dy^2$ .

7. En topologie, un homéomorphisme est une application bijective continue, d'un espace topologique dans un autre, dont la bijection réciproque est continue. Dans ce cas, les deux espaces topologiques sont dits homéomorphes.

8. La convention de sommation d'Einstein stipule que lorsqu'un indice d'une variable apparaît une fois en position supérieure et une fois en position inférieure, cela signifie qu'on doit sommer sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice.



En particulier, dans le cas de l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^3$  avec le système de coordonnées cartésiennes  $(x_0, x_1, x_2)$ , l'élément de longueur (2.12) est défini par la relation :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 \end{aligned}$$

**Définition 5.** *Un plongement Riemannien (Riemannian embedding) est une application lisse (smooth map)  $f: M \rightarrow N$  entre deux variétés  $(M, g_{\mu\nu})$  et  $(N, h_{ij})$  tel que  $g_{\mu\nu} = f^* h_{ij}$ , i.e.  $g(X, Y) = h(Df(X), Df(Y))$  pour tout vecteur tangent  $X, Y \in T_p M$  et tout  $p \in M$ .*

*La métrique  $g_{\mu\nu}$  sur  $M$  est induite par  $h_{ij}$  sur  $N$ , elle est appelée une métrique **Pullback** et est définie par la matrice symétrique :*

$$g_{\mu\nu} = h_{ij} \partial_\mu f^i \partial_\nu f^j \quad (2.13)$$

*La convention de sommation d'Einstein est utilisée, où  $\mu, \nu = \{1, \dots, \dim(M)\}$  et  $i, j = \{1, \dots, \dim(N)\}$  et  $\partial_\mu f^i$  est la dérivée partielle de  $f^i$  par rapport à la variable  $\mu$ .*

Le théorème de J. Nash [Nash, 1956] révolutionne la géométrie différentielle en affirmant la possibilité de plongement isométrique d'une variété Riemannienne quelconque dans un espace Euclidien de dimension assez grande. Par conséquent, toute variété Riemannienne peut être considérée comme une sous-variété d'un espace Euclidien. Également, le plongement est isométrique, il permet de préserver la longueur des courbes.

## 2.4.2 Opérateurs différentiels Riemanniens

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne munie d'une métrique Riemannienne induite  $g_{ij}$  qui encode les propriétés géométriques de la variété.

### Gradient Riemannien

Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $f \in C^\infty(M)$  et l'application différentielle  $d_x f: T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  est linéaire pour tout  $x \in M$ . Donc, il existe un champ de vecteurs sur  $TM$  appelé *gradient* de  $f$  et noté  $\nabla_g f$  tel que,

$$\langle \nabla_g f, X \rangle_{g(x)} = d_x f(X) \quad \text{pour tout } X \in T_x M \quad (2.14)$$

Dans un système de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$ , l'expression du gradient Riemannien est :

$$\nabla_g f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (2.15)$$

où  $g^{ij}$  est l'inverse de la métrique  $g_{ij}$ . La démonstration est détaillée dans l'annexe B.1. En notant  $G^{-1} = g^{ij}$ , l'expression suivante est adoptée en général :

$$\nabla_g f = G^{-1} \nabla f \quad (2.16)$$

Lorsque  $g_{ij} = \delta_{ij}$  est la matrice identité, le gradient Riemannien  $\nabla_g f$  définit le gradient Euclidien  $\nabla f$ .

### *Divergence Riemannienne*

Pour chaque fonction  $f$ , avec un support compact et un champ vectoriel  $X = X^i \partial_i$ , la divergence est l'opérateur adjoint au gradient et donné par l'expression :

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i (X^i \sqrt{\det g}) \quad (2.17)$$

où  $\det g$  est le déterminant de la métrique  $g_{ij}$ . La démonstration est donnée dans l'annexe B.2.

### *Opérateur Laplace-Beltrami*

On peut ainsi définir l'opérateur différentiel du second ordre  $\Delta_g = \operatorname{div} \circ \nabla_g$ , appelé l'opérateur Laplace-Beltrami

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_j (g^{ij} \sqrt{\det g} \partial_i f) \quad (2.18)$$

En considérant  $g_{\mathbb{R}^n}$  la métrique Euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ , la métrique est définie dans ce cas par la matrice identité  $g_{ij} = \delta_{ij}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $i, j = 1 \dots n$ . Pour cela, (2.18) devient le Laplacien sur  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\Delta_{g_{\mathbb{R}^n}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad (2.19)$$

## 2.5 Géométrie Riemannienne et vision

Le principe clé de l'utilisation des outils de la géométrie Riemannienne en vision est lié à la non linéarité de l'espace d'intérêt. De nombreux problèmes en vision et traitements d'images se trouvent ainsi concernés. La géométrie Riemannienne a été particulièrement utilisée dans le contexte de la segmentation par des modèles déformables. Ces derniers, introduits initialement par [Kass et al., 1988], sont initialisés en général sous forme d'une courbe dans le cas d'une image  $2D$  ou une surface dans le cas  $3D$ .

### 2.5.1 Modèles Riemanniens déformables

#### *Contours actifs géodésiques*

L'une des premières approches a proposé une formulation des contours actifs classiques en contours ou surfaces actives géodésiques [Caselles et al., 1997a,b] :

- Pour les contours actifs paramétriques, l'équation d'évolution d'une courbe paramétrée  $C(p) = (x(p), y(p))$  dans un domaine  $\Omega$  avec  $p \in [0, 1]$ , est donnée par la minimisation de l'énergie :

$$E(C) = \int_0^1 E_{int}(C(p)) + E_{ext}(C(p)) dp \quad (2.20)$$

- [Caselles et al., 1997a,b] ont montré que le problème de minimisation de  $E(C)$  (2.20) est en fait une géodésique dans un espace Riemannien dont la métrique est donnée dans l'espace image  $I$  par :  $g_{ij} = f^2(|\nabla I|)\delta_{ij}$ , telle que,

$$E(C) = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}C'_i C'_j} dp \quad (2.21)$$

$$= \int_0^1 \sqrt{f^2(|\nabla I|)\delta_{ij}C'_i C'_j} dp \quad (2.22)$$

$$= \int_0^1 f(|\nabla I(C(p))|)|C'(p)| dp \quad (2.23)$$

Le problème s'interprète alors comme la minimisation de la longueur du contour ou de la surface dans un espace muni d'une structure métrique prenant en compte les caractéristiques de l'image.

### Modèles hautement déformables

D'autres approches utilisent une métrique Riemannienne judicieusement choisie dans le but d'améliorer la qualité et la robustesse de la segmentation, tout en minimisant la complexité en temps de l'algorithme. Ces approches produisent ainsi des modèles Riemanniens hautement déformables et à densité adaptative [Lachaud and Taton, 2004, 2005]. L'idée directrice consiste à déformer l'espace à l'aide d'une métrique Riemannienne afin de :

- Concentrer l'effort de calcul au voisinage des zones d'intérêt, par exemple les parties de l'image contenant des contours significatifs.
- Adapter la densité des variables selon la position dans l'image.

La figure 2.8 illustre l'approche du modèle Riemannien hautement déformable pour réduire la complexité de l'algorithme de reconstruction d'un cube [Lachaud, 2006].

### 2.5.2 Modèles Riemanniens déformables et vision omnidirectionnelle

Le modèle des contours actifs géodésiques standard utilise dans sa formulation la métrique Euclidienne  $\delta_{ij}$  (2.22). Dans le cadre des images catadioptriques omnidirectionnelles, [Bogdanova et al., 2007] ont développé un modèle pour les images sphériques, paraboloides et hyperboloides en utilisant des métriques Riemanniennes  $g_{ij}$  conformes et équivalentes aux métriques Euclidiennes, calculées à travers la projection stéréographique. Ainsi l'énergie du modèle standard (2.22) devient dans le cas catadioptrique :

$$E(C) = \int_0^1 \sqrt{f^2(|\nabla I|)g_{ij}C'_i C'_j} dp \quad (2.24)$$

$$= \int_0^1 f(|\nabla I(C(p))|)g^{1/4}|C'(p)| dp \quad (2.25)$$

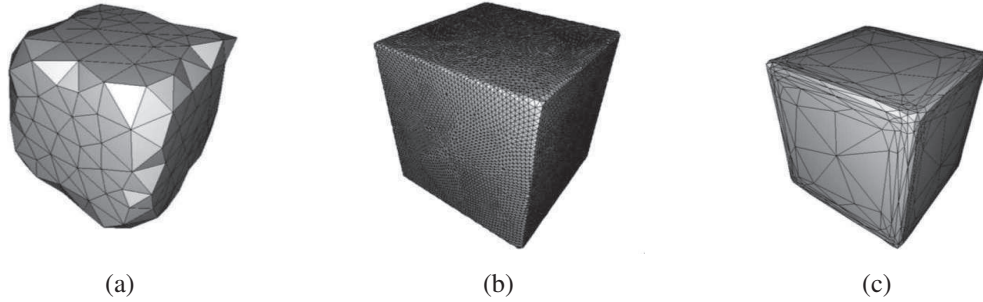


FIGURE 2.8 – Illustration de l’approche du modèle Riemannien hautement déformable pour réduire la complexité de l’algorithme de segmentation. Reconstruction d’un même cube avec : (a) une métrique Euclidienne et une résolution grossière (171 sommets), (b) une métrique Euclidienne et une résolution fine (12 576 sommets), (c) une métrique Riemannienne et une résolution adaptative (472 sommets) [Lachaud, 2006].

avec  $g$  le déterminant de la métrique Riemannienne  $g_{ij}$  et vaut dans le cas des images sphériques et paraboloides :

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

et dans le cas des images hyperboloïdes :

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{4}{(1-(x^2+y^2))^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1-(x^2+y^2))^2} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

La figure 2.9 illustre la comparaison entre l’influence de la métrique Riemannienne hyperbolique ci-dessus et la métrique Euclidienne dans une expérience de segmentation d’un objet d’intérêt. On remarque une transition lisse sur la variété hyperbolique tandis qu’elle apparaît sous forme d’une transition rapide sur l’image hyperbolique plane.

Les résultats montrent que la méthode basée sur la métrique Euclidienne ne parvient pas à segmenter la totalité de l’objet d’intérêt. Ceci est dû au faux contour correspondant à la transition rapide sur l’image hyperboloïde, alors que la méthode basée sur la métrique Riemannienne réussit la segmentation de l’objet d’intérêt parce que la fonction l’indicateur des contours  $f(|\nabla I(C(p))|)$  dans (2.25) est pondérée par le facteur  $g^{1/4} = \frac{2}{(1-(x^2+y^2))}$ .

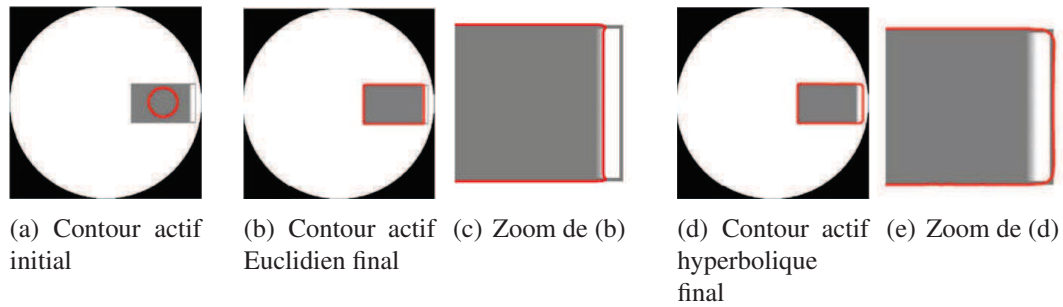


FIGURE 2.9 – Segmentation d’un objet d’intérêt dans une image catadioptrique hyperboloïde de synthèse en utilisant la méthode des contours actifs Euclidiens classiques (b) et (c), en utilisant la métrique Riemannienne induite de la géométrie du miroir (d) et (e) (Source : [Bogdanova et al., 2007]).

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit la vision omnidirectionnelle et catadioptrique en présentant les systèmes et les modèles de projection. Nous avons également introduit les notions fondamentales et quelques opérateurs de la géométrie Riemannienne. Étant le cadre de notre travail, nous avons ensuite présenté un aperçu de l’utilisation de la géométrie Riemannienne dans le domaine de la vision, en particulier la segmentation par modèles déformables, et les traitements des images conventionnelles et catadioptriques.

Dans le prochain chapitre, nous présentons un nouveau formalisme de construction d’une métrique Riemannienne générique pour les images catadioptriques couleur.

---

**Sommaire**

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>31</b>
<b>3.2</b>	<b>Tenseur de structure classique</b>	<b>32</b>
<b>3.3</b>	<b>Construction de la métrique</b>	<b>34</b>
3.3.1	Formalisme général	34
3.3.2	Métrique spatiale générique	36
3.3.3	Métrique spatiale-couleur générique	38
<b>3.4</b>	<b>Étude de cas</b>	<b>38</b>
3.4.1	Projection géométrique	39
3.4.2	Projection colorimétrique	43
3.4.3	Projection hybride spatio-colorimétrique	44
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>48</b>

---

**3.1 Introduction**

Nous présentons dans ce chapitre un nouveau formalisme unifié pour la construction d'une métrique générique pour les images catadioptriques couleur. Avant de commencer le calcul de notre métrique, nous présentons le tenseur de structure classique utilisé pour le traitement des images couleur. Ensuite, dans un cadre Riemannien, nous construisons un plongement de l'image catadioptrique couleur dans un espace de plus grande dimension et en déduisons une métrique générique. Afin de montrer la généralité de ce formalisme, nous allons expliciter différentes métriques. Ceci est équivalent à faire

des projections sélectives ; géométrique incorporant les coordonnées spatiales de l'image uniquement, ou bien photométrique menant à des métriques manipulant les composantes couleurs.

### 3.2 Tenseur de structure classique

Le tenseur de structure est un outil important pour les images multi-spectrales. Il était introduit initialement par Di-Zenzo dans [Di Zenzo, 1986] et utilisé par la suite dans l'analyse et la description de la géométrie locale dans une image.

Considérons  $I^i$  une fonction représentant une image de  $m$  canaux, avec  $i = \{1, \dots, m\}$ . Le tenseur de structure est construit en calculant localement la direction et l'amplitude d'une variation de chaque composante  $I^i$ . Soit  $F$  le carré de la variation multi-spectrale entre deux points voisins de coordonnées  $(x, y)$  et  $(x + dx, y + dy)$ ,

$$F = \sum_{i=1}^m (I^i(x, y) - I^i(x + dx, y + dy))^2 \quad (3.1)$$

En utilisant l'expansion de Taylor au premier ordre, la dernière expression prend la forme,

$$F = \sum_{i=1}^m \left\{ \left( \frac{\partial I^i}{\partial x} \right)^2 dx^2 + 2 \frac{\partial I^i}{\partial x} \frac{\partial I^i}{\partial y} dx dy + \left( \frac{\partial I^i}{\partial y} \right)^2 dy^2 \right\} \quad (3.2)$$

Réécrivant (3.2) sous forme matricielle,

$$F = (dx \quad dy) \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial I^i}{\partial x} \right)^2 & \frac{\partial I^i}{\partial x} \frac{\partial I^i}{\partial y} \\ \frac{\partial I^i}{\partial x} \frac{\partial I^i}{\partial y} & \left( \frac{\partial I^i}{\partial y} \right)^2 \end{pmatrix} (dx \quad dy)^T \quad (3.3)$$

On déduit l'expression du tenseur de structure classique donnée par la matrice symétrique (3.4). On mentionne qu'en général, l'image est régularisée par une convolution avec un noyau Gaussien d'écart type  $\sigma$  :  $I'_\sigma = I^i * G$ , ce qui conduit à :

$$T = \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial I'_\sigma}{\partial x} \right)^2 & \frac{\partial I'_\sigma}{\partial x} \frac{\partial I'_\sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial I'_\sigma}{\partial x} \frac{\partial I'_\sigma}{\partial y} & \left( \frac{\partial I'_\sigma}{\partial y} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Les *vecteurs propres* de ce tenseur indiquent la direction des variations maximales et minimales de l'information image. Les *valeurs propres* correspondantes ( $\lambda_+, \lambda_-$ ) représentent l'amplitude de ces variations. Si on désigne par  $g_{\mu\nu}$ , avec  $\mu, \nu = \{x, y\}$  les coefficients du tenseur  $T$ , on a,

$$\lambda_{\pm} = \frac{g_{xx} + g_{yy} \pm \sqrt{(g_{xx} - g_{yy})^2 + 4g_{xy}^2}}{2} \quad (3.5)$$

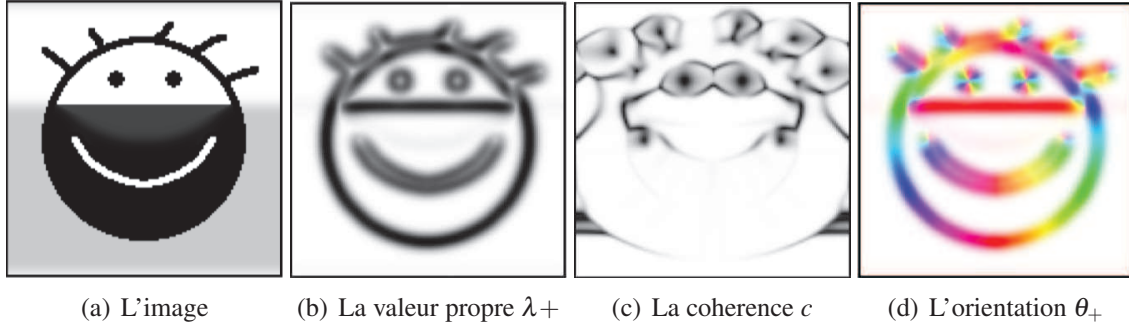


FIGURE 3.1 – Analyse par tenseur de structure d'une image (Source [Soulard, 2012])

La valeur propre la plus grande,  $\lambda_+$ , correspond à la valeur maximale de la variation locale, et est atteinte dans la direction  $\theta_+$  du vecteur propre associé :

$$\theta_+ = \frac{1}{2} \arg\{g_{xx} - g_{yy} + j2g_{xy}\} \quad (3.6)$$

Le second vecteur propre est orthogonal au premier, son amplitude mesure la variation minimale  $\lambda_-$ .

D'autres mesures intéressantes sont présentées d'une manière exhaustive dans [Jähne, 2005; Granlund, 1978; Bigün and Granlund, 1987]. On donne, à titre d'exemple, la formule de la *cohérence* notée  $c$ ,

$$c = \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-} \quad (3.7)$$

et le *vecteur d'orientation* noté  $o$ ,

$$o = \begin{pmatrix} g_{xx} - g_{yy} \\ 2g_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

La mesure de la cohérence varie entre 0 et 1. Une valeur  $c = 1$  signifie que l'orientation locale est *idéale*, c-à-d, la structure locale correspond effectivement à un bord rectiligne ( $\lambda_+ > 0, \lambda_- = 0$ ). Si  $c = 0$ , il s'agit d'une variation isotropique dans la structure ( $\lambda_+ = \lambda_- > 0$ ). La figure 3.1 illustre la plus grande valeur propre  $\lambda_+$ , la mesure de cohérence  $c$ , et la direction  $\theta_+$  du vecteur propre associé à  $\lambda_+$ . Avec ces mesures, le tenseur de structure offre ainsi une analyse bien établie de la structure locale.

Cette méthode du tenseur de structure est associée aux dérivées partielles d'ordre 1. D'autres méthodes alternatives se basant sur des filtres en quadrature [Knutsson, 1982; Granlund and Knutsson, 2013] existent. Une étude étendue autour de ces méthodes pourra être trouvée dans la thèse de [Soulard, 2012].



### 3.3 Construction de la métrique

Cette section présente une contribution majeure de la thèse. Elle définit le formalisme générique pour la construction de métriques adaptées aux images catadioptriques couleur. Dans la suite, nous proposons dans un cadre unifié la construction d’une métrique générique et de nature hybride pour les images catadioptriques couleur :

- La métrique est générique puisqu’elle intègre le modèle d’équivalence sphérique qui englobe la modélisation de tout système de projection centrale : les caméras perspectives et catadioptriques centrales.
- La métrique est de nature hybride car elle permet d’intégrer dans le même modèle, la métrique géométrique en fonction de la forme du miroir utilisé dans le capteur, et la métrique couleur en fonction des composantes multi-spectrales de l’image.

Nous montrerons dans le chapitre suivant plusieurs améliorations et traitements adaptatifs qui en résultent pour la vision catadioptrique couleur.

#### 3.3.1 Formalisme général

Étant donné que la formation des images catadioptriques passe par des miroirs courbés, les outils Euclidiens classiques sont inefficaces et non adaptés à l’analyse de ce type d’images. Pour cette raison, certains travaux (ex. [Bogdanova et al., 2007]) ont proposé de considérer ces images comme des variétés non-Euclidiennes.

Dans notre approche, nous proposons un plongement isométrique des images catadioptriques dans des variétés Riemanniennes. Le plongement dans un espace de plus grande dimension a été étudié pour les images conventionnelles [Sochen and Zeevi, 1998; Kimmel et al., 1998]. Dans ces travaux, une image d’intensité est considérée comme une surface dans un espace de 3 dimensions  $(x, y, I)$  comme illustré sur la figure 3.2. Une image couleur RGB peut donc être considérée une surface plongée dans un espace de 5 dimensions  $(x, y, R, G, B)$ .

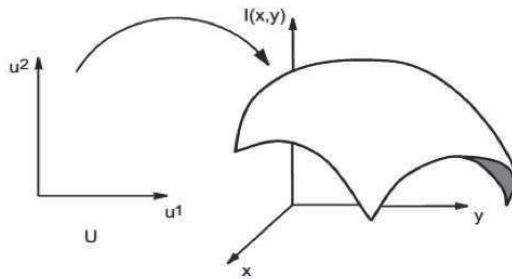


FIGURE 3.2 – Plongement d’une image 2D comme une surface dans un espace de 3 dimensions.

Cette représentation est pertinente du fait qu'elle permet l'utilisation de nouveaux outils de la géométrie Riemannienne dans l'analyse des images, comme l'opérateur différentiel Laplace-Beltrami qui est une généralisation du Laplacien Euclidien [Wetzler et al., 2013]. En outre, cette représentation mène à des méthodes efficaces, à titre d'exemple, l'amélioration et le débruitage anisotropique des images [Spira et al., 2005, 2007].

Le formalisme de la métrique du plan catadioptrique que nous proposons de construire est basé sur la construction du plongement et le calcul de la métrique *Pullback*. Considérons le plongement Riemannien suivant :

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{3+m} \quad (3.9)$$

$$(x, y) \mapsto (\chi_1^{-1}, \chi_2^{-1}, \chi_3^{-1}, \beta I^1, \dots, \beta I^m)$$

Ce mapping fait correspondre à chaque position  $(x, y)$  dans le plan image, un point défini par ses coordonnées spatiales sur la surface de la sphère  $(x_s, y_s, z_s)$  et également ses  $m$  coordonnées photométriques  $(I^1, \dots, I^m)$  représentant les canaux de l'image couleur.  $\chi^{-1}$  représente la projection inverse sur la sphère et est définie par :

$$\chi^{-1}(x, y) = (x_s, y_s, z_s) = (\chi_1^{-1}(x, y), \chi_2^{-1}(x, y), \chi_3^{-1}(x, y)) \quad (3.10)$$

Cette projection correspond au point  $P_s = (x_s, y_s, z_s)$  comme illustré sur la Fig. 3.3.

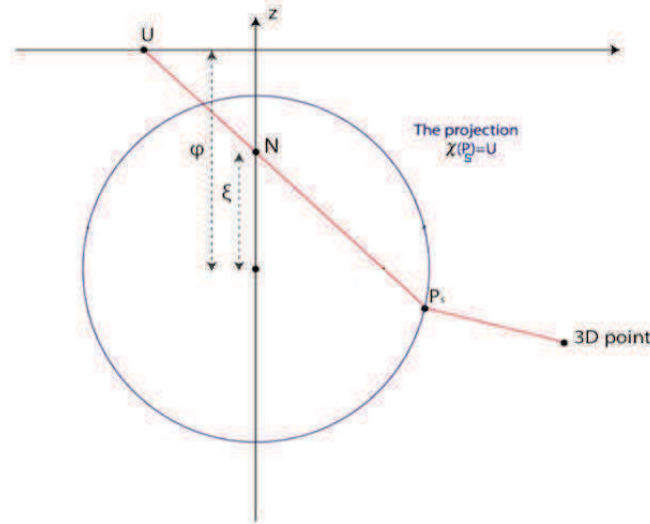


FIGURE 3.3 – Illustration de la projection inverse  $\chi^{-1}$ . Le point image  $U$  est défini par  $U = \chi(P_s)$  avec  $P_s$  la projection du point 3D sur la sphère.

Le paramètre  $\beta$  est un facteur d'échelle relatif à l'espace hybride spatial-couleur  $(\mathbb{R}^{3+m})$ . D'une manière similaire à [Sochen et al., 1998; Spira et al., 2005], on introduit ce para-

mètre car les coordonnées spatiales et les composantes couleur n'induisent pas physiquement la même mesure.

Par la construction du plongement Riemannien (3.9), nous supposons que l'espace hybride spatial-couleur  $\mathbb{R}^{m+3}$  est muni d'une métrique Euclidienne, notée  $h_{ij}$ . Cependant, le plan catadioptrique  $\mathbb{R}^2$  est non-Euclidien et est muni d'une métrique Riemannienne notée  $g_{\mu\nu}$ . Grâce à ce plongement,  $g_{\mu\nu}$  est une métrique *Pullback* définie au chapitre précédent (2.13).

Pour des raisons de clarté, nous considérons dans un premier temps l'aspect géométrique seulement où on calcule la métrique générique spatiale. Ensuite, on élabore la formulation générale hybride où la métrique intègre les coordonnées spatiales qui traduisent le processus de formation du point image après déformation des rayons par le miroir ainsi que les coordonnées couleur de l'image.

### 3.3.2 Métrique spatiale générique

Considérons l'application  $f$  entre les deux variétés suivantes :

- le plan image  $\mathbb{R}^2$  muni de la métrique Riemannienne  $g_{\mu\nu}$ ,
- et la sphère  $\mathbb{S}^2 \subset (\mathbb{R}^3, h_{ij})$  munie de la métrique Euclidienne locale  $h_{ij}$  :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad (3.11)$$

$$(x, y) \mapsto (x_s = \chi_1^{-1}(x, y), y_s = \chi_2^{-1}(x, y), z_s = \chi_3^{-1}(x, y))$$

où l'application  $\chi^{-1}$  est l'inverse de  $\chi: \mathbb{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  qui associe à chaque point  $P_s$  situé sur la surface de la sphère, un point  $U$  sur le plan catadioptrique par projection à partir d'un point  $N$  sur l'axe vertical de la sphère comme illustré sur la figure 3.3. Donc, la droite passant par  $N$  et  $P_s$  intersecte l'hyperplan  $z = \varphi$  en ce point  $U$ . Pour un certain  $\alpha$  non nul,  $U$  est caractérisé par la relation :

$$\overrightarrow{NP_s} = \alpha \overrightarrow{NU} \quad (3.12)$$

avec les coordonnées :  $N = (0, 0, \xi)$ ,  $P_s = (x_s, y_s, z_s)$ ,  $U = (x, y, \varphi)$ . La projection sur le plan image conduit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} x_s = \alpha x \\ y_s = \alpha y \\ z_s = \alpha(\varphi - \xi) + \xi \end{cases} \quad (3.13)$$

Étant situé sur la surface de la sphère de rayon  $r = 1$ , le point  $P_s \in \mathbb{S}^2$  satisfait l'équation :

$$x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 = 1 \quad (3.14)$$

En remplaçant (3.13) dans (3.14), on obtient :

$$\alpha_{\pm} = \frac{\xi(\xi - \varphi) \pm \sqrt{(\xi - \varphi)^2 + (x^2 + y^2)(1 - \xi^2)}}{(\xi - \varphi)^2 + x^2 + y^2} \quad (3.15)$$

On insère  $\alpha_+$  dans le système (3.13), on obtient ainsi les coordonnées d'un point appartenant à la surface de la sphère. Autrement dit, on obtient la formule de la projection inverse  $\chi^{-1}$  en fonction des coordonnées spatiales  $(x, y)$  et des paramètres du miroir  $\xi$  et  $\varphi$ .

La surface de la sphère est une variété Riemannienne qui ressemble localement à un espace topologique Euclidien. Elle est munie localement de la métrique Euclidienne  $h_{ij}$ . Cette configuration va nous permettre de déduire l'expression de la métrique Riemannienne  $g_{\mu\nu}$  sur le plan catadioptrique en utilisant la définition de la métrique Pullback (2.13) avec  $\mu, \nu = \{1, 2\}$ , et  $i, j = \{1, 2, 3\}$  et  $\partial_{\mu} f^i$  est la dérivée partielle de  $f^i$  par rapport à la variable  $\mu$ . Après calculs, la métrique Pullback  $g_{\mu\nu}$  est définie par la matrice symétrique suivante :

$$g_{\mu\nu} = \zeta \begin{bmatrix} (\xi - \varphi)^2 + (1 - \xi^2)y^2 & (1 - \xi^2)xy \\ (1 - \xi^2)xy & (\xi - \varphi)^2 + (1 - \xi^2)x^2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

où,

$$\zeta = \frac{\left(\xi(\xi - \varphi) + \sqrt{(\xi - \varphi)^2 + (1 - \xi^2)(x^2 + y^2)}\right)^2}{((\xi - \varphi)^2 + (1 - \xi^2)(x^2 + y^2))((\xi - \varphi)^2 + x^2 + y^2)^2} \quad (3.17)$$

Le déterminant de  $g_{\mu\nu}$  s'écrit :

$$\det(g_{\mu\nu}) = \zeta^2(\xi - \varphi)^2 [(1 - \xi^2)(x^2 + y^2) + (\xi - \varphi)^2] \quad (3.18)$$

On vérifie que  $g_{\mu\nu}$  est inversible, d'inverse :

$$g^{\mu\nu} = \eta \begin{bmatrix} (\xi - \varphi)^2 + (1 - \xi^2)x^2 & -(1 - \xi^2)xy \\ -(1 - \xi^2)xy & (\xi - \varphi)^2 + (1 - \xi^2)y^2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

où,

$$\eta = \frac{((\xi - \varphi)^2 + x^2 + y^2)^2}{(\xi - \varphi)^2 \left(\xi(\xi - \varphi) + \sqrt{(\xi - \varphi)^2 + (1 - \xi^2)(x^2 + y^2)}\right)^2} \quad (3.20)$$

Notons que cette métrique exprimée directement sur le plan catadioptrique, dépend des paramètres du miroir ( $\xi$  et  $\varphi$ ) et de la position  $(x, y)$  du pixel dans l'image.

### 3.3.3 Métrique spatiale-couleur générique

Nous considérons maintenant un plongement hybride générique qui incorpore à la fois les coordonnées spatiales, la position des points dans le plan image, et l'information couleur. Le tout exprimé dans un seul plongement général (3.9). La métrique Pullback résultante est hybride et générique. Le développement des calculs nous mène à la forme suivante :

$$(g_{\mu\nu})_{hybride} = \begin{bmatrix} \zeta((\xi - \varphi)^2 + (1 - \xi^2)y^2) + \beta^2 \sum_{i=1}^m (I_x^i)^2 & \zeta(1 - \xi^2)xy + \beta^2 \sum_{i=1}^m I_x^i I_y^i \\ \zeta(1 - \xi^2)xy + \beta^2 \sum_{i=1}^m I_x^i I_y^i & \zeta((\xi - \varphi)^2 + (1 - \xi^2)x^2) + \beta^2 \sum_{i=1}^m (I_y^i)^2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

avec  $\zeta$  donné dans (3.17).

La métrique générique hybride possède trois paramètres, deux liés au miroir ( $\xi$  et  $\varphi$ ), et le troisième  $\beta$  lié aux composantes couleur. La variation des paramètres ( $\xi, \varphi, \beta$ ) permet d'obtenir différentes métriques. Par exemple, si on traite uniquement l'aspect spatial ( $\beta = 0$ ), on obtient la métrique (3.16). Ainsi, la géométrie Riemannienne et particulièrement le plongement, nous permet de considérer, dans un cadre unifié, d'une manière simultanée ou séparée, la distorsion spatiale catadioptrique et/ou l'information couleur qui reflète la nature multidimensionnelle de l'image.

Le paramètre  $\beta$  induit ainsi un effet d'échelle dans la métrique (3.21) entre l'influence des caractéristiques image et /ou couleur. Le choix de ce paramètre peut être défini en fonction de l'application. En particulier, nous avons cherché à optimiser cette valeur dans l'expérience de débruitage. Pour cela, on utilise les indicateurs de **PSNR** (rapport signal/bruit de crête) et **SSIM** (indice de similarité structurelle [Wang et al., 2004]). La figure 3.4 représente la variation de ces mesures en fonction de différentes valeurs  $\beta$ . À partir de ces courbes, on déduit que  $\beta = 0.04$  est la valeur qui donne les meilleures mesures **PSNR** et **SSIM**.

Dans ce qui suit, la valeur empirique  $\beta = 0.04$  sera utilisée.

## 3.4 Étude de cas

Nous explicitons dans ce qui suit différents cas usuels pour la formalisation de la métrique hybride. Ces métriques peuvent correspondre à des métriques spatiales définies par la projection géométrique catadioptrique ou des métriques couleur définies par la projection colorimétrique.

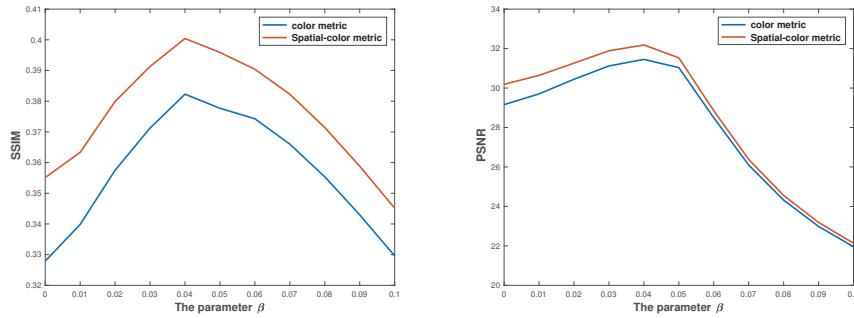


FIGURE 3.4 – La variation des mesures **SSIM** (à gauche) et **PSNR** (à droite) en fonction du paramètre  $\beta$ .

### 3.4.1 Projection géométrique

La projection géométrique centrale catadioptrique dépend de la forme du miroir du capteur. Ce dernier pourrait être, dans le cas de la projection centrale, de géométrie parabolöide, hyperboloïde et perspective.

#### 3.4.1.1 Projection parabolöide

Selon le modèle d'équivalence sphérique, lorsque  $\xi = 1$  et  $\varphi = 0$ , la projection correspond à un miroir parabolöide. Elle est équivalente à une première projection centrale sur la sphère, suivie d'une deuxième projection stéréographique à partir du pôle Nord de la sphère. Les résultats suivants en découlent :

- La métrique obtenue sur le plan catadioptrique est diagonale et prend la forme suivante,

$$(g_{\mu\nu})_{para} = \begin{bmatrix} \frac{4}{(x^2+y^2+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(x^2+y^2+1)^2} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Elle est conforme à la métrique Euclidienne. La propriété de la conformité permet de conserver localement les angles.

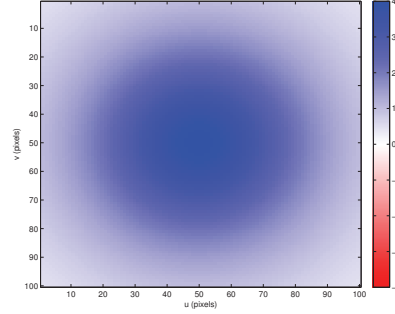
- Les lignes du monde 3D sont des cercles sur le plan image. En effet, la projection d'une ligne 3D est un grand-cercle sur la sphère. La projection stéréographique renvoie ensuite le grand-cercle à un cercle sur le plan image.

La figure 3.5 montre la représentation graphique de l'élément  $g_{11}=g_{22}$  de la métrique (3.22) comme une fonction sur le plan image. On constate que l'amplitude de  $g_{11}$  (aussi  $g_{22}$ ) prend la valeur maximale au niveau du centre de l'image. Elle diminue progressivement suivant la direction radiale vers la périphérie de l'image. Donc, la variation à partir du centre de l'image est isotropique.

Notons que la métrique parabolöide (3.22) que nous obtenons par le plongement Riemannien, dans le cas particulier du capteur paracatadioptrique, est similaire à celle exprimée par [Bogdanova et al., 2007; Aziz et al., 2016].

Miroir parabolöide avec  $\xi = 1$  et  $\varphi = 0$

$$\text{et } \begin{cases} g_{11} = g_{22} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \\ g_{12} = g_{21} = 0 \end{cases}$$



$g_{11} = g_{22}$  parabolöide

FIGURE 3.5 – Représentation graphique de la métrique Riemannienne  $(g_{\mu\nu})_{para}$  de l’image para-catadioptrique (ici  $g_{11} = g_{22}$  et  $g_{12} = g_{21} = 0$ ).

#### 3.4.1.2 Projection hyperbolöide

La projection hyperbolöide dans le modèle d’équivalence sphérique est caractérisée par la variable  $\xi$  dans l’intervalle  $0 < \xi < 1$ . À la différence du miroir parabolöide, la métrique Riemannienne correspondante n’est pas diagonale et la projection est non-conforme. Si on prend à titre d’exemple  $\xi = 0.93$  et  $\varphi = 0$ , nous obtenons la métrique suivante,

$$(g_{\mu\nu})_{hyper} = \frac{(0.93^2 + \sqrt{0.93^2 + 0.13(x^2 + y^2)})^2}{(0.93^2 + 0.13(x^2 + y^2))(0.93^2 + x^2 + y^2)^2} \begin{bmatrix} 0.93^2 + 0.13y^2 & 0.13xy \\ 0.13xy & 0.93^2 + 0.13x^2 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

La figure 3.6 illustre les coefficients de la métrique ci-dessus. Nous constatons que les éléments du tenseur métrique dépendent de la position du pixel dans l’image ; ce qui veut dire que ce champ tensoriel est anisotropique.

#### 3.4.1.3 Projection perspective

Le cas  $\xi = 0$  et  $\varphi = 1$  correspond à un système catadioptrique avec miroir planaire. La projection dans ce cas, est appelée perspective et correspond à la métrique suivante,

$$(g_{\mu\nu})_{pers} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \begin{bmatrix} 1 + y^2 & -xy \\ -xy & 1 + x^2 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

La figure 3.7 illustre les coefficients du tenseur métrique sur le plan image dans le cas d’un miroir planaire.

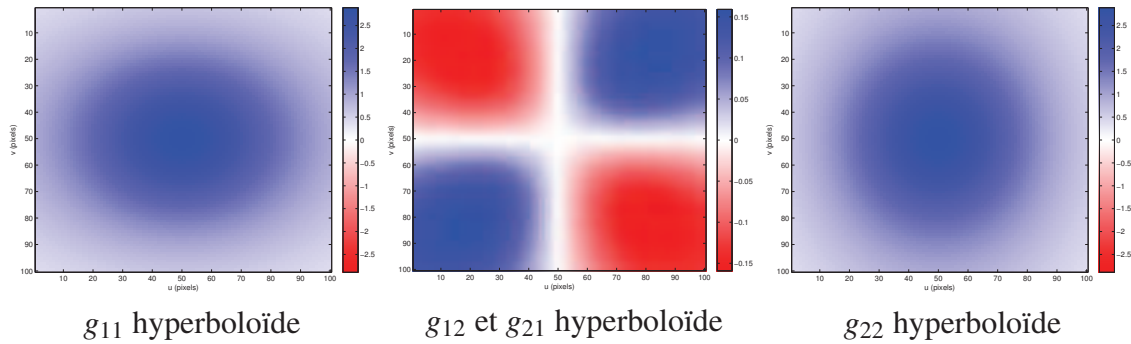


FIGURE 3.6 – Représentation graphique des coefficients du tenseur métrique Riemannien pour l’image hyper-catadioptrique avec  $\xi = 0.93$  et  $\varphi = 0$ .

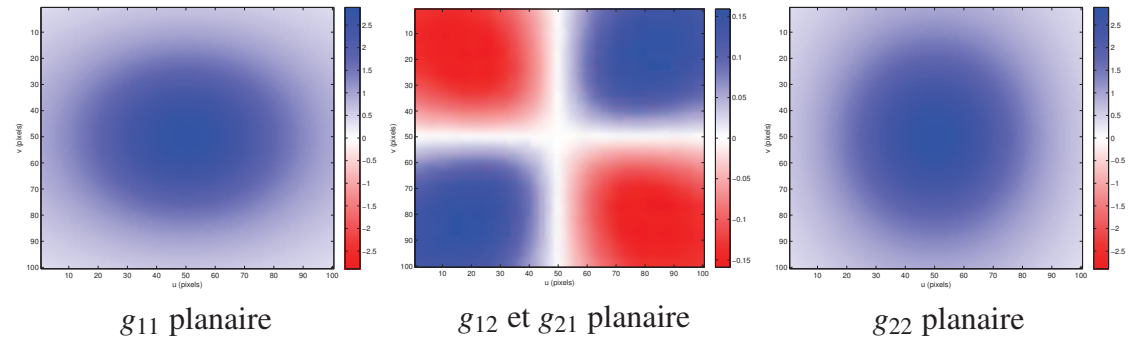


FIGURE 3.7 – Représentation graphique des coefficients du tenseur métrique Riemannien dans le cas d’un miroir planaire  $\xi = 0$  et  $\varphi = 1$ .

En observant la figure 3.7, l’allure des coefficients de la métrique ressemble au cas hyperboloïde. En revanche, les amplitudes sont inférieures. On note également que cette métrique n’est ni conforme, ni Euclidienne comme prévu. Cela revient au fait qu’on considère pour le calcul de la métrique générique uniquement la deuxième projection du modèle sphérique unifié.

Nous démontrons ci-dessous que, lorsqu’on considère la première et la deuxième projection du modèle sphérique unifié, ce qui se traduit par un plongement global (du plan image  $\mathbb{R}^2$  dans le monde 3D  $\mathbb{R}^3$ ), on retrouve une métrique Pullback conforme et proportionnelle à la métrique Euclidienne.

En effet, considérons le modèle de projection perspective des caméras conventionnelles (appelé modèle *sténopé* ou *pinhole*). Un point  $M(X, Y, Z)$  du monde 3D est projeté sur le plan image  $U(x, y, \varphi)$  le long du rayon qui le lie avec le centre de projection (centre de la



caméra).

Le plongement global est décrit par l'application :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.25)$$

$$(x, y) \mapsto (X, Y, Z)$$

Le centre de projection  $O(0, 0, 0)$ , le point sur la sphère  $P_s(x_s, y_s, z_s)$ , le point  $M(X, Y, Z)$  et le point image  $U(x, y, \varphi)$  sont liés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_s = \alpha x \\ y_s = \alpha y \\ z_s = \alpha \varphi \end{cases} \quad (3.26) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_s = \lambda X \\ y_s = \lambda Y \\ z_s = \lambda Z \end{cases} \quad (3.27) \quad \text{avec}$$

$\alpha$  et  $\lambda$  des valeurs réelles non nulles. À partir de ces équations, on déduit la relation entre les coordonnées  $(X, Y, Z)$  et  $(x, y)$  :

$$X = \frac{Z}{\varphi}x \quad \text{et} \quad Y = \frac{Z}{\varphi}y \quad (3.28)$$

Nous allons maintenant retrouver à partir de notre plongement générique, la métrique conforme à la métrique Euclidienne traduisant la projection perspective. On suppose que la variété représentant le monde 3D est munie de la métrique Euclidienne  $\delta_{ij}$ . Par conséquent, on pourrait déduire la métrique du plan image  $g_{\mu\nu}$  comme étant la métrique Pullback  $g_{\mu\nu} = \partial_\mu f^i \partial_\nu f^j$  avec  $f = (X = \frac{Z}{\varphi}x, Y = \frac{Z}{\varphi}y, Z)$ . Mais, bien évidemment, on ne peut pas extraire l'altitude  $Z$  à partir d'une seule image 2D, ce qui nous oblige à faire des hypothèses sur cette 3ème dimension. On suppose donc que  $Z$  est constant, ce qui revient à chercher la métrique pour les points qui appartiennent à une hauteur fixe ; les points du sol par exemple,

$$g_{11} = \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \quad (3.29)$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y} \quad (3.30)$$

$$g_{22} = \left( \frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \quad (3.31)$$

Donc,

$$g_{\mu\nu} = \left( \frac{Z}{\varphi} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Ainsi, on retrouve bien une métrique proportionnelle à la métrique Euclidienne.

### 3.4.2 Projection colorimétrique

Dans le cas particulier où l'on considère le plongement dans l'espace colorimétrique sans prise en compte de la déformation du miroir, on définit,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto (I^1(x, y), \dots, I^m(x, y)) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Si  $m = 3$  et si on équipe l'espace d'arrivée  $\mathbb{R}^3$  par un tenseur métrique de la forme,

$$h_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

On retrouve le tenseur de structure classique de l'approche de Di Zenzo [Di Zenzo, 1986],

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 (I_x^i)^2 & \sum_{i=1}^3 I_x^i I_y^i \\ \sum_{i=1}^3 I_x^i I_y^i & \sum_{i=1}^3 (I_y^i)^2 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Ce tenseur de structure d'ordre 2 est défini en chaque point de l'image et peut être vu, grâce au formalisme Riemannien, comme une métrique Pullback.

Pour montrer la pertinence et la généralité de ce formalisme dans le traitement des images multi-dimensionnelles, nous proposons de l'exploiter dans une application de détection des contours sélective. L'idée originale de la détection sélective a été proposée dans [Rousseau et al., 2010] et s'appuie sur le changement de la métrique  $h_{ij}$  de l'espace plongeant  $\mathbb{R}^{2+m}$ . En fonction du choix de cette métrique, on peut faire une détection des contours adaptative invariante à une (ou plusieurs) composante couleur précise. Alors, la conception de la métrique  $h_{ij}$  repose sur une forme quadrature  $Q$  calculée à partir de la signature spectrale  $s$  de cette couleur.

On considère une image synthétique couleur dans l'espace RGB (Fig. 3.8a) et on suppose vouloir détecter ses contours avec la particularité de confondre deux couleurs. Donc la forme quadratique  $Q$  est celle qui projette sur l'orthogonale de l'espace engendré par les signatures spectrales de ces couleurs. Soit  $(u, v)$  une base orthonormale de l'espace engendré par les deux signatures,  $h_{ij}$  prend la forme,

$$h_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus Q \quad \text{avec} \quad Q = \delta_{ij} - uu^t - vv^t \quad (3.36)$$

où  $\delta_{ij} = Id_3$ , tel que  $i, j = \{1, 2, 3\}$  est la métrique Euclidienne.

Lorsque nous choisissons une détection par métrique Euclidienne  $h_{ij} = \delta_{ij}$  de l'espace plongeant, tous les contours apparaissent comme illustré sur la figure 3.8b. En considérant la métrique de projection (3.36) en fonction de deux signatures différentes, nous obtenons une détection des contours qui ne différencie plus la zone rouge de la zone verte quand  $u = (1, 0, 0)$  et  $v = (0, 1, 0)$  comme illustré sur la figure 3.8c. Pareillement sur la figure 3.8d, la frontière entre la zone rouge et celle bleue n'est pas détectée quand  $u = (1, 0, 0)$  et  $v = (0, 0, 1)$ .

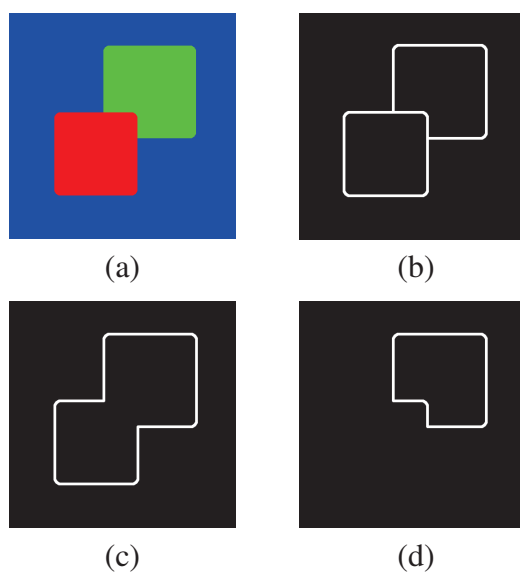


FIGURE 3.8 – Détection des contours sélective dans une image couleur. (a) L'image originale, (b) Détection avec métrique d'espace plongeant Euclidienne. (c) et (d) Détection avec métrique d'espace plongeant construite par projection sur un sous-espace et invariante au changement entre les zones rouge et verte dans (c) et les zones rouge et bleue dans (d).

### 3.4.3 Projection hybride spatio-colorimétrique

#### 3.4.3.1 Cas du Miroir Paraboloïde

La projection induite par un miroir paraboloïde sur le plan image est une projection orthographique. Comme le montrent Geyer et Daniilidis dans [Geyer and Daniilidis, 2000], grâce au modèle de caméra sphérique, la projection parabolique est équivalente à la projection à partir du pôle Nord de la sphère sur le plan. Ainsi, les images des miroirs paraboloïdes peuvent être représentées sur la sphère par la projection stéréographique inverse. À noter que la projection stéréographique est une projection conforme. En revanche, la

projection orthographique donne au plan image une métrique non conforme (matrice non diagonale), ce qui complique davantage les calculs.

Considérons donc le plongement de l'image parabolôïde multidimensionnelle de  $m$  composantes sur la surface de la sphère. Nous considérons ainsi deux variétés Riemanniennes : une sphère unitaire  $\mathbb{S}^2$  (de rayon  $r = 1$ )  $\subset \mathbb{R}^{3+m}$  et  $\mathbb{R}^2$ , et nous effectuons ensuite la projection *stéréographique* à partir du pôle Nord, noté  $N$ , de la sphère :

$$f_{\text{parab}}: \quad \mathbb{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3.37)$$

La projection  $f_{\text{parab}}$  renvoie un point  $P \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$  en un point image  $U$  où la ligne passant par  $N$  et  $P$  intersecte l'hyperplan  $z = 0$  comme illustré sur la Fig. 3.9.

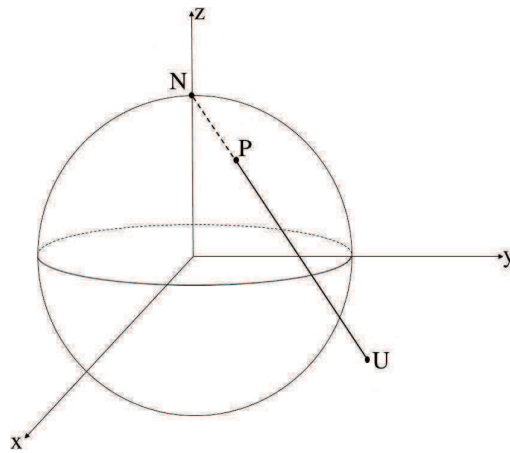


FIGURE 3.9 – Projection stéréographique sphérique.

Pour un scalaire non nul  $\lambda$ , le point image  $U$  est caractérisé par,

$$\vec{NP} = \lambda \vec{NU} \quad (3.38)$$

Nous rappelons les coordonnées,  $N = (0, 0, 1)$ ,  $P = (x_p, y_p, z_p)$ ,  $U = (x, y, z = 0)$ , cela conduit au système d'équations

$$x_p = \lambda x \quad y_p = \lambda y \quad z_p = 1 - \lambda \quad (3.39)$$

En remplaçant la valeur de  $\lambda$  de la troisième équation dans la première et la deuxième, on obtient la formule de la projection stéréographique,

$$f_{\text{parab}}(P) = (x, y) = \left( \frac{x_p}{1 - z_p}, \frac{y_p}{1 - z_p} \right) \quad (3.40)$$

Le point  $P = (x_p, y_p, z_p) = f_{parab}^{-1}(U)$  défini par ses coordonnées (3.39), se trouve sur la surface de la sphère et satisfait donc l'équation :

$$x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 = 1 \quad (3.41)$$

On remplace (3.39) dans (3.41), et on déduit :

$$\lambda = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} \quad (3.42)$$

En insérant  $\lambda$  dans (3.39), nous obtenons la formule de la projection stéréographique inverse

$$f_{parab}^{-1}(U) = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \quad (3.43)$$

Nous utilisons l'inverse de la projection *stéréographique* (3.43) pour le calcul de la métrique Pullback qui correspond au cas du miroir parabolé. Soit  $h_{ij}$  et  $g_{\mu\nu}$  les métriques sur la surface de la sphère  $\mathbb{S}^2 - \{N\} \subset \mathbb{R}^{3+m}$  et la variété  $\mathbb{R}^2$  respectivement. Considérons le plongement  $f: (x, y) \mapsto (f_{parab}^{-1}, \beta I^1, \dots, \beta I^m)$ , la métrique Pullback  $g_{\mu\nu}$  sur  $\mathbb{R}^2$  induite par la métrique Euclidienne  $h_{ij}$  est définie par l'équation (2.13). Lorsque  $\mu = \nu = x$ , on a,

$$g_{xx} = \sum_{i,j=1}^{m+3} h_{ij} \partial_x f^i \partial_x f^j = \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2} + \beta^2 \sum_{i=1}^m (I_x^i)^2 \quad (3.44)$$

On calcule de la même façon les éléments de  $g_{\mu\nu}$ . On déduit ainsi sa forme matricielle,

$$(g_{\mu\nu})_P = \begin{bmatrix} \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2} + \beta^2 \sum_{i=1}^m (I_x^i)^2 & \beta^2 \sum_{i=1}^m I_x^i I_y^i \\ \beta^2 \sum_{i=1}^m I_x^i I_y^i & \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2} + \beta^2 \sum_{i=1}^m (I_y^i)^2 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

À ce stade, on est capable de définir, à chaque point de l'image catadioptrique, un tenseur métrique hybride. Ce dernier traduit la quantité de distorsion introduite par le miroir en même temps que la variation colorimétrique locale.

### 3.4.3.2 Cas du Miroir Hyperboloïde

Dans le cas du miroir hyperboloïde, la variété Riemannienne est l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}_R^2$  de dimension 2 et de rayon  $R > 0$ .  $\mathbb{H}_R^2$  est la nappe supérieure de l'hyperboloïde à deux nappes défini dans un repère de coordonnées  $(x, y, z)$  par l'équation  $z^2 - x^2 - y^2 = 1$  et  $h$  sa métrique telle que,

$$h = \iota * \bar{m}$$

$\iota: \mathbb{H}_R^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une inclusion, et  $\bar{m}$  est la métrique *Minkowski* définie par  $\bar{m} = (dx)^2 + (dy)^2 - (dz)^2$ .

Nous commençons par construire un difféomorphisme à partir de l'hyperboloïde  $\mathbb{H}_R^2$  au disque  $\mathbb{B}^2 \subset \mathbb{R}^2$  de rayon  $R = 1$ . C'est une projection stéréographique hyperbolique,

$$\phi: \mathbb{H}_R^2 \rightarrow \mathbb{B}^2 \quad (3.46)$$

Soit  $S = (0, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$ , pour chaque  $P = (x_p, y_p, z_p)$ , on a  $\phi(P) = U \in \mathbb{B}^2$  avec  $U = (x, y, 0)$  désigne le point d'intersection de la ligne (SP) avec l'hyperplan  $z = 0$  (Fig. 3.10).

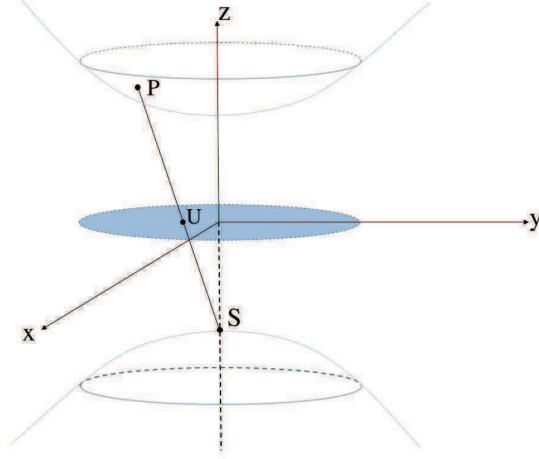


FIGURE 3.10 – Projection stéréographique hyperbolique.

Pour un certain scalaire  $\lambda$  non nul,  $U$  est caractérisé par,

$$\vec{S}U = \lambda \vec{S}P \quad (3.47)$$

Nous obtenons donc,

$$x = \lambda x_p \quad y = \lambda y_p \quad 1 = \lambda(z_p + 1) \quad (3.48)$$

Ces équations peuvent être résolues de la même manière que dans le cas paraboloidé. La projection *stéréographique hyperbolique* et son inverse sont ainsi écrites sous la forme,

$$\phi(P) = (x, y) = \left( \frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \quad (3.49)$$

et

$$\phi^{-1}(U) = \left( \frac{2x}{1-x^2-y^2}, \frac{2y}{1-x^2-y^2}, \frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2} \right) \quad (3.50)$$

Pour une image hyper-catadioptrique couleur, nous pouvons maintenant extraire le tenseur de structure hybride  $(g_{\mu\nu})_H$ . Pour les calculs, nous procédons comme dans le cas parabolique et nous déduisons sa forme matricielle :

$$(g_{\mu\nu})_H = \begin{bmatrix} \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} + \beta^2 \sum_{i=1}^m (I_x^i)^2 & \beta^2 \sum_{i=1}^m I_x^i I_y^i \\ \beta^2 \sum_{i=1}^m I_x^i I_y^i & \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} + \beta^2 \sum_{i=1}^m (I_y^i)^2 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploité la géométrie différentielle Riemannienne pour réaliser des plongements de l'image catadioptrique couleur dans un espace Riemannien de plus grande dimension :

- Le plongement constitue un cadre général pour le calcul d'une métrique spatiale-couleur adaptée pour les images acquises par les systèmes catadioptriques centraux.
- La métrique construite est considérée comme un tenseur de structure hybride pour les images catadioptriques couleur.
- La formulation proposée permet de traiter deux problèmes simultanément :
  - la déformation non linéaire due au miroir pourrait être considérée directement lors du traitement sur le plan image catadioptrique ;
  - également, l'information couleur pourrait être prise en compte au moyen de la représentation vectorielle de l'image.

Dans le chapitre suivant, nous introduirons un nouveau noyau Gaussien pour toute image non-Euclidienne équipée d'une métrique Riemannienne. Ce noyau est défini comme solution de l'équation de diffusion de la chaleur écrite en termes de l'opérateur Laplace-Beltrami. Nous démontrerons notamment une amélioration globale en considérant la métrique hybride adaptée à travers des expériences utilisant des images couleur catadioptriques de synthèse et réelles.

---

**FONCTION GAUSSIENNE ADAPTÉE ET APPLICATIONS**
**Sommaire**


---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>49</b>
<b>4.2</b>	<b>Noyau Gaussien adapté pour les images catadioptriques</b>	<b>50</b>
4.2.1	Noyau Gaussien et équation de diffusion	50
4.2.2	Noyau Gaussien en imagerie catadioptrique	53
4.2.3	Nouveau formalisme d'une Gaussienne adaptée	56
<b>4.3</b>	<b>Lissage adapté</b>	<b>59</b>
4.3.1	Lissage par Laplace-Beltrami	59
4.3.2	Lissage par Gaussienne adaptée	63
<b>4.4</b>	<b>Filtrage par Différence de Gaussiennes adaptée</b>	<b>67</b>
<b>4.5</b>	<b>Analyse multi-échelle</b>	<b>71</b>
<b>4.6</b>	<b>Détection des contours</b>	<b>74</b>
<b>4.7</b>	<b>Détection des points d'intérêt</b>	<b>80</b>
<b>4.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>86</b>

---

**4.1 Introduction**

En utilisant les outils de la géométrie Riemannienne, nous avons introduit dans le chapitre précédent un cadre unifié pour la construction d'une métrique adaptée aux images catadioptriques. Dans ce chapitre, nous utiliserons également ces outils pour introduire la deuxième contribution de cette thèse, où nous proposerons une nouvelle formulation pour le noyau Gaussien adapté aux images omnidirectionnelles catadioptriques.



Pour le mettre en œuvre et montrer son apport relativement au noyau Gaussien Euclidien, nous l'exploitons dans des applications de lissage adaptatif, de filtrage par Différence de Gaussiennes, d'analyse espace-échelle, et finalement de détection de contours et de points d'intérêt.

## 4.2 Noyau Gaussien adapté pour les images catadioptriques

Dans cette section, nous abordons la fonction Gaussienne et sa relation avec l'équation de diffusion de la chaleur, puis nous présentons les solutions apportées pour adapter cette fonction aux images catadioptriques. Ensuite, en utilisant la métrique hybride développée précédemment Eq. (3.21), nous dérivons l'expression du noyau Gaussien adapté aux images catadioptriques considérées comme des variétés non-Euclidiennes.

### 4.2.1 Noyau Gaussien et équation de diffusion

La fonction Gaussienne joue un rôle important dans de nombreux domaines tels que la vision par ordinateur, la théorie de l'information et la physique. En particulier, le filtrage par un noyau Gaussien a été largement utilisé en traitement du signal et de l'image pour des applications du dé-bruitage d'images et de détection des contours. Cette fonction a également été utilisée dans la théorie de l'espace-échelle (Scale-Space) introduite par [Witkin, 1984] pour générer des images multi-résolutions.

**Définition 6.** *Le Noyau Gaussien, connu aussi sous le nom de la fonction de Green, est la solution de l'équation de diffusion de la chaleur à une dimension [Babaud et al., 1986]. Soit une fonction réelle à deux variables (espace, temps)  $f(x,t)$ , et  $f_0(x,t=0)$  sa valeur initiale. Si  $f(x,t)$  satisfait l'équation de diffusion de la chaleur suivante :*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

alors  $f(x,t)$  est donnée par la convolution de  $f_0$  avec le noyau Gaussien  $G$ , tel que,

$$G(x, 1/\sqrt{2t}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \quad (4.2)$$

**Remarque 1.** *Le paramètre d'échelle  $t$  est lié à la déviation standard  $\sigma = \sqrt{2t}$ . En 1D et 2D, on a respectivement,*

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.3)$$

et

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.4)$$

La figure 4.1 illustre une représentation graphique du noyau Gaussien Euclidien dans le cas 2D-dimensionnel.

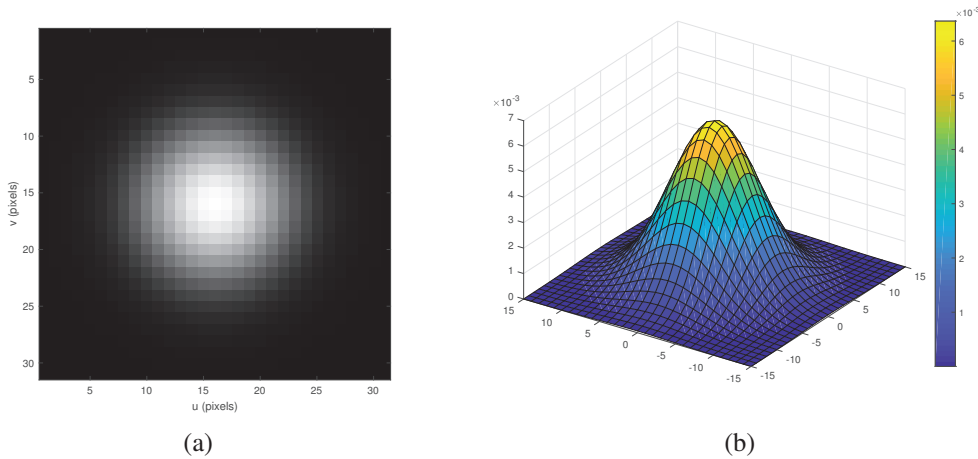


FIGURE 4.1 – Noyau Gaussien. (a) Représentation planaire 2D. (b) Représentation 3D sous forme d’une surface.

**Remarque 2.** La fonction Gaussienne est très utilisée dans de nombreux domaines scientifiques. En effet, un grand nombre de phénomènes physiques suivent une distribution de type Gaussienne. L’intérêt est dû également à certaines de ses propriétés mathématiques remarquables :

— La convolution de deux Gaussiennes est une Gaussienne :

$$G(\sigma_1) * G(\sigma_2) = G\left(\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$$

— La fonction Gaussienne Euclidienne 2D est séparable :

$$\begin{aligned} G(x, y) &= G(x) \times G(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ce qui implique que la convolution du noyau Gaussien 2D avec une autre fonction peut être effectuée par deux convolutions successives avec les noyaux Gaussiens 1D dans les directions  $x$  et  $y$ . L’avantage majeur de la propriété de séparabilité est le gain en nombre d’opérations, et par conséquent la réduction du temps des calculs.

— La fonction Gaussienne a la même forme (courbe en cloche) dans le domaine spatial et fréquentiel.

Les propriétés de la distribution Gaussienne et de sa relation avec l'équation de la chaleur ont été explorées exhaustivement dans [Chirikjian, 2009].

Sur la figure 4.2, on illustre un exemple d'utilisation du noyau Gaussien dans le processus de lissage d'une image omnidirectionnelle. L'inconvénient de cette technique est que le flou Gaussien est uniforme et ne préserve pas les contours des objets. Des approches bien connues [Perona and Malik, 1990; Sapiro and Ringach, 1996] fondées sur l'utilisation des Équations aux Dérivées Partielles (EDP) et plus particulièrement la diffusion anisotrope ont permis d'éviter le floutage des bords des objets.

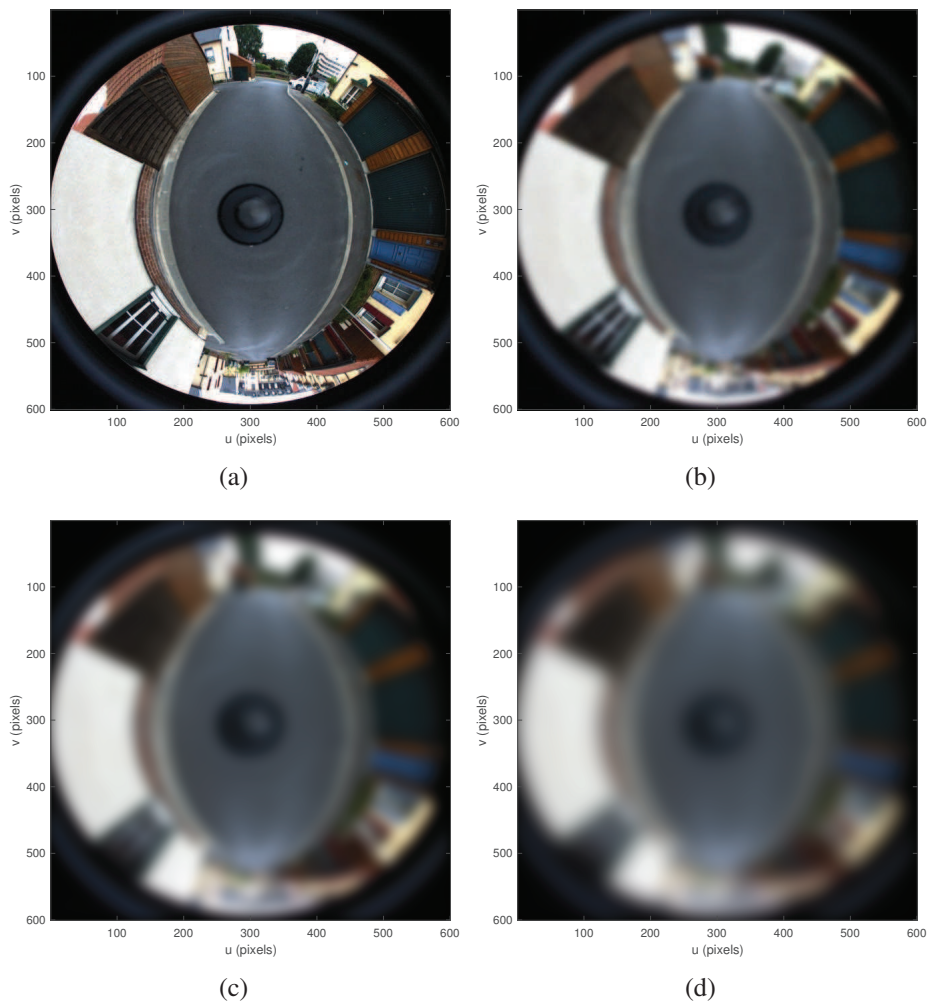


FIGURE 4.2 – Lissage Gaussien. (a) Image originale. (b-d) Lissage avec un noyau Gaussien conventionnel  $G$  Eq. (4.4) : (b)  $\sigma = 5$ , (c)  $\sigma = 10$ , (d)  $\sigma = 15$ .

## 4.2.2 Noyau Gaussien en imagerie catadioptrique

Nous détaillons ici les approches les plus probantes pour la définition des noyaux Gaussiens adaptés aux images catadioptriques.

### 4.2.2.1 Gaussienne sphérique

Grâce au modèle d'équivalence sphérique, une image omnidirectionnelle peut être équivalente à une image sphérique  $I(\theta, \phi)$ . L'image est alors projetée sur la sphère d'équivalence. Par conséquent, plusieurs outils sur la sphère ont été empruntés pour le traitement des images catadioptriques, parmi eux on trouve le noyau Gaussien sphérique.

**Définition 7.** *Le Noyau Gaussien sphérique  $G_{S^2}$  a été introduit par [Bülöw, 2001, 2004] comme solution de l'équation de diffusion sphérique*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta_{S^2} f \quad (4.6)$$

et donné par :

$$G_{S^2}(\theta, \phi, \sigma) = \sum_{l \in \mathbb{N}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Y_l^0(\theta, \phi) \exp\left(-\frac{l(l+1)\sigma^2}{2}\right) \quad (4.7)$$

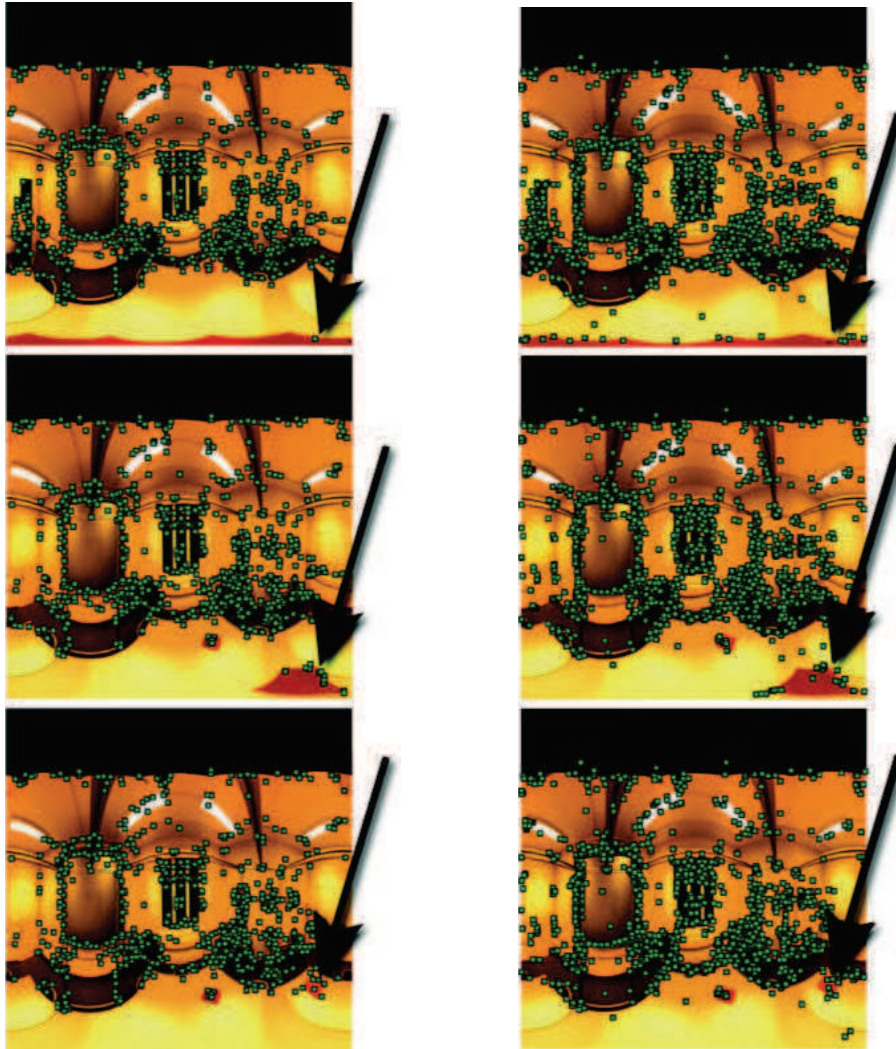
où  $Y_l^0(\theta, \phi)$  sont les harmoniques sphériques définies par les polynômes de Legendre.

La Gaussienne sphérique a été récemment exploitée par [Cruz-Mota et al., 2012] pour proposer un algorithme SIFT sphérique (Scale Invariant Feature Transform) pour les images catadioptriques. La méthode se base sur la représentation espace-échelle sphérique et la convolution des images sphériques  $I(\theta, \phi)$  avec le noyau Gaussien sphérique (4.7) :

$$L_{S^2}(\theta, \phi, \sigma) = I(\theta, \phi) * G_{S^2}(\theta, \phi, \sigma) \quad (4.8)$$

La figure 4.3 illustre l'utilisation de la Gaussienne sphérique pour une expérience du SIFT, proposée dans [Cruz-Mota et al., 2012]. L'objectif de cette l'expérience, est de montrer la perte des points caractéristiques en utilisant le SIFT classique sur des images omnidirectionnelles. On conclut de cette expérience que le SIFT sphérique, sur une séquence de trois images, extrait les mêmes points caractéristiques indépendamment de la position de l'objet sur l'image omnidirectionnelle. Tandis que le SIFT classique, n'arrive pas à détecter des caractéristiques similaires pour le même objet.

L'inconvénient majeur de l'utilisation de la Gaussienne sphérique est sa complexité, puisque sa formulation repose sur le développement en harmoniques sphériques et le domaine fréquentiel de Fourier.



(a) SIFT standard : Localisation des points extraits par la méthode du SIFT standard appliquée sur une séquence de trois images omnidirectionnelles. Du bas vers le haut : 808 points, 846 points, 855 points.

(b) SIFT sur la sphère : Localisation des points extraits par la méthode proposée du SIFT sur la sphère appliquée sur une séquence de trois images omnidirectionnelles. Du bas vers le haut : 1373 points, 1413 points, 1489 points.

FIGURE 4.3 – Comparaison entre les points extraits par l'implémentation du SIFT standard et ceux extraits par le SIFT Sphérique proposé dans [Cruz-Mota et al., 2012]. La flèche noire pointe vers l'objet "rouge" qui se déplace le long de la séquence. (Source [Cruz-Mota et al., 2012]).

#### 4.2.2.2 Gaussienne par projection stéréographique inverse

Dans le cadre de la théorie des ondelettes sur la sphère, un autre moyen a été proposé par [Antoine and Vandergheynst, 1999] pour construire une "Gaussienne sphérique" :

$$G_{\mathbb{S}^2} = \exp\left(-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (4.9)$$

Cette fonction est obtenue par la projection stéréographique inverse d'une fonction Gaussienne placée sur le plan tangent au pôle Sud de la sphère. Plus tard, la théorie des ondelettes sur les variétés non Euclidiennes a été étudiée dans la thèse de [Bogdanova, 2006], où il a été proposé un opérateur Différence de Gaussiennes basé sur la fonction Gaussienne (4.9). Un exemple d'application est montré en figure 4.4.

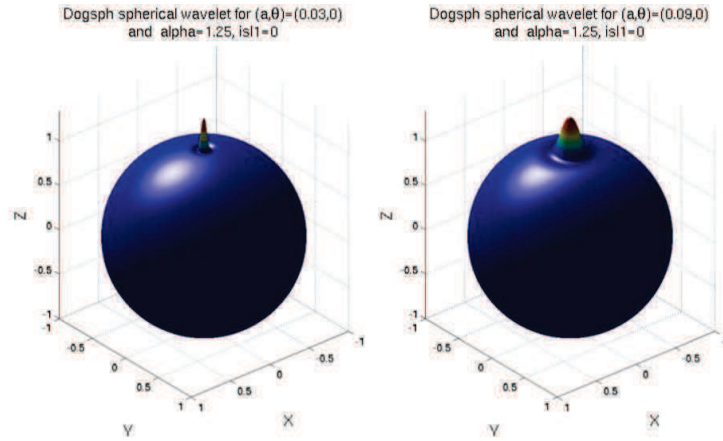


FIGURE 4.4 – Un exemple d'ondelettes de type "Différence de Gaussiennes" sur la sphère construites en se basant sur la "Gaussienne sphérique" Eq. ; (4.9). (Source Bogdanova [2006]).

#### 4.2.2.3 Gaussienne et distance géodésique sphérique

Une autre approche [Demonceaux et al., 2011] fournit une adaptation simple basée sur la distance géodésique sur la sphère. Par conséquent, le noyau Gaussien classique peut être remplacé par,

$$G_{x_s}(y_s, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\arccos(x_s, y_s)}{2\sigma^2}\right) \quad \forall x_s, y_s \in \mathbb{S}^2 \quad (4.10)$$

Afin de valider les performances de la fonction Gaussienne adapté, les auteurs [Demonceaux et al., 2011] l'ont utilisé comme opérateur de convolution pour l'adaptation de la méthode de Harris [Harris and Stephens, 1988] de détection de points d'intérêt de type

coins. La méthode de ZNCC (Zero mean Normalized Cross-Correlation) a été utilisée pour la mise en correspondance.

La figure 4.5 présente les résultats obtenus.



FIGURE 4.5 – Mise en correspondance de points d'intérêt par ZNCC (Zero mean Normalized Cross-Correlation). (a) Méthode classique Euclidienne : 65 correspondances au total, 53 correspondances correctes. (b) Méthode géodésique : 71 correspondances au total, 63 correspondances correctes.

L'inconvénient de ce type d'approches est la nécessité de la phase d'interpolation afin d'approximer le voisinage géodésique sur la sphère.

### 4.2.3 Nouveau formalisme d'une Gaussienne adaptée

Nous proposons dans la suite la définition d'un noyau Gaussien adapté aux images catadioptriques considérées comme variétés Riemanniennes munies de la métrique  $g_{\mu\nu}$  prédéfinie précédemment. La méthode est basée sur la résolution de l'équation de diffusion de la chaleur exprimée en terme de l'opérateur Laplace-Beltrami sur les variétés non Euclidiennes.

**Définition 8.** *Le Laplace-Beltrami, noté  $\Delta_g$ , est un opérateur différentiel de second ordre qui généralise le Laplacien Euclidien aux variétés Riemanniennes. Étant donné une va-*

riété  $(M, g_{\mu\nu})$ ,  $\Delta_g$  est défini comme suit [Rosenberg, 1997],

$$\begin{aligned}\Delta_g &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left( g^{\mu\nu} \sqrt{|g|} \partial_\nu \right) \\ &= g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^l \partial_l\end{aligned}\quad (4.11)$$

où  $|g| = \det(g_{\mu\nu})$  et  $\Gamma_{\mu\nu}^l = \frac{1}{2} g^{lk} (\partial_\mu g_{k\nu} + \partial_\nu g_{k\mu} - \partial_k g_{\mu\nu})$  sont les symboles de Christoffel.

**Définition 9.** L'équation de diffusion décrit l'évolution d'une distribution  $p(\mathbf{x}, t)$  à la position  $\mathbf{x}$  et le temps  $t$ . Elle est étroitement liée à l'opérateur Laplace-Beltrami sur une variété Riemannienne  $(M, g_{\mu\nu})$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \Delta_g p \\ &= \sum_{i,j=1}^n D_{ij} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{l=1}^n d_l \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial x_l}\end{aligned}\quad (4.12)$$

On note que  $\mathbf{x}$  est un vecteur colonne  $n$ -dimensionnel ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ), la matrice  $D$  est équivalente à l'inverse de la métrique Riemannienne  $g^{\mu\nu}$ , qu'on trouve dans l'équation de Laplace-Beltrami (4.11), et  $d = g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^l$  est un vecteur ligne  $n$ -dimensionnel.

**Proposition 1.** Pour une image catadioptrique, considérée comme une variété Riemannienne  $(M, g_{\mu\nu})$ , le **noyau Gaussien adapté** est,

$$G_g(\mathbf{x}, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 |g|^{-1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{x}^T g_{\mu\nu} \mathbf{x}\right) \quad (4.13)$$

avec  $|g| = \det(g_{\mu\nu})$  est le déterminant de la métrique  $g_{\mu\nu}$ , et  $\mathbf{x}$  est la position d'un pixel dans le plan image catadioptrique.

La démonstration est faite par la construction d'une solution de l'équation de diffusion écrite en fonction de l'opérateur Laplace-Beltrami.

*Démonstration.* Considérons  $p(\mathbf{x}, t)$  une fonction de distribution qui satisfait pour chaque instant  $t \in \mathbb{R}^+$  et chaque position  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  :

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}, t) \geq 0 \\ \int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 1 \end{cases} \quad (4.14)$$

D'un point de vue statistique, ces considérations font de  $p(\mathbf{x}, t)$  une *fonction de densité de probabilité*. Pour l'équation de diffusion (4.12), essayons une solution de la forme :

$$p(\mathbf{x}, t) = c(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma^{-1}(t) \mathbf{x}\right) \quad (4.15)$$



Tout d'abord, déterminons le coefficient dépendant du temps  $c(t)$ . On a,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \Sigma^{-1}(t)\mathbf{x}\right) d\mathbf{x} = \sqrt{\det(2\pi\Sigma(t))} \quad (4.16)$$

Puisque  $\int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} = 1$ , on déduit que :

$$c(t) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma(t))}} \quad (4.17)$$

Ensuite, déterminons la matrice dépendante du temps  $\Sigma(t)$ . Après avoir remplacé (4.15) dans l'équation de diffusion (4.12), on calcule les deux termes à gauche et à droite de l'équation, c'est-à-dire, les dérivées temporelle et spatiale de  $p(\mathbf{x},t)$ . Pour le terme à gauche,

$$\frac{\partial p(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \left(-\frac{\partial_t(\det\Sigma)}{2\det\Sigma} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \partial_t \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right) p(\mathbf{x},t) \quad (4.18)$$

$$\text{avec } \partial_t \Sigma^{-1} = -\Sigma^{-1} \partial_t \Sigma \Sigma^{-1}$$

donc,

$$\frac{\partial p(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \left(-\frac{\partial_t(\det\Sigma)}{2\det\Sigma} + \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \frac{1}{2} \partial_t \Sigma \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right) p(\mathbf{x},t) \quad (4.19)$$

Pour le terme à droite, on a,

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^n D_{ij} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x},t)}{\partial x_i \partial x_j} = (-\text{trace}(D\Sigma^{-1}) + \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} D \Sigma^{-1} \mathbf{x}) p(\mathbf{x},t) \\ \sum_{l=1}^n d_l \frac{\partial p(\mathbf{x},t)}{\partial x_l} = -d \Sigma \mathbf{x} p(\mathbf{x},t) \end{cases} \quad (4.20)$$

On déduit que,

$$-\frac{\partial_t(\det\Sigma)}{2\det\Sigma} + \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \frac{1}{2} \partial_t \Sigma \Sigma^{-1} \mathbf{x} = -\text{trace}(D\Sigma^{-1}) + \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} D \Sigma^{-1} \mathbf{x} + d \Sigma \mathbf{x} \quad (4.21)$$

En comparant les deux côtés de la dernière équation, nous tirons les conclusions suivantes :

$$\frac{1}{2} \partial_t \Sigma = D; \quad \frac{\partial_t(\det\Sigma)}{2\det\Sigma} = \text{trace}(D\Sigma^{-1}); \quad d = \vec{0} \quad (4.22)$$

Les conditions dans (4.22) sont satisfaites si,

$$\Sigma(t) = 2tD \quad \implies \quad \Sigma(t) = 2tg^{\mu\nu} \quad (4.23)$$

Enfin, on conclut qu'une solution de l'équation de diffusion sur une variété Riemannienne  $(M, g_{\mu\nu})$  de dimension  $n$  est sous la forme :

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2} (\det(g_{\mu\nu}))^{-1/2}} \exp\left(-\frac{1}{4t} (\mathbf{x}^T g_{\mu\nu} \mathbf{x})\right) \quad (4.24)$$

□

On note que  $t$  est connu comme paramètre d'échelle du noyau Gaussien dans la représentation multi-échelle d'images [Witkin, 1984; Lindeberg, 1994]. Il joue un rôle important, de manière à ce que lors du lissage par convolution avec un noyau Gaussien, des structures de l'image de taille spatiale inférieure à  $\sigma = \sqrt{2t}$  sont supprimées de l'image à l'échelle  $t$ . En outre,  $\sigma$  détermine la largeur du noyau Gaussien. Dans le domaine des statistiques, lorsqu'on considère une fonction de densité de probabilité Gaussienne, le paramètre  $\sigma$  est l'écart-type.

**Exemple 1.** Si on considère l'espace  $(\mathbb{R}^2, g_{\mu\nu})$  avec une métrique Euclidienne  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ , L'équation (4.13) est réduite au noyau Gaussien Euclidien standard :

$$G_{Euc}(\mathbf{x}, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.25)$$

Pour évaluer l'effet de la métrique sur le processus de lissage, nous l'opérons suivant deux modes : par convolution avec le noyau Gaussien adapté et par la méthode itérative basée sur l'opérateur Laplace-Beltrami. Ensuite, nous effectuons des méthodes adaptées de filtrage par Différence de Gaussiennes Riemannienne  $DoG_g$ , puis l'analyse multi-échelle, suivi de la détection des caractéristiques pertinentes dans une image : les contours et les points d'intérêt.

### 4.3 Lissage adapté

Le lissage est une opération fondamentale en traitement d'images, elle vise à atténuer un bruit ou supprimer les aspérités et petits détails dans une image. Nous présentons ici deux approches différentes pour appliquer un lissage adapté aux images catadioptriques. D'abord en incorporant la métrique Pullback dans l'opérateur Laplace-Beltrami. Ensuite, en utilisant le formalisme de la Gaussienne adaptée.

#### 4.3.1 Lissage par Laplace-Beltrami

Le formalisme de Laplace-Beltrami a été introduit par R. Kimmel [Kimmel et al., 1998, 1997] en traitement et analyse d'images considérées comme des variétés Riemanniennes. Il a été ensuite utilisé pour le filtrage non linéaire basé sur l'équation de diffusion

de la chaleur [Spira et al., 2005] :

$$\frac{\partial \mathbf{I}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \Delta_g \mathbf{I} \quad (4.26)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{|g|} \partial_\nu \mathbf{I}) \quad (4.27)$$

avec  $|g| = \det(g_{\mu\nu})$  le déterminant de la métrique  $g_{\mu\nu}$  de la variété, et  $g^{\mu\nu}$  son inverse. Si  $\mathbf{x} = (x, y)$ , l'équation (4.27) peut être réécrite sous forme de,

$$\frac{\partial \mathbf{I}(x, y, t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) \quad (4.28)$$

$$\text{avec } \begin{cases} |g| &= g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2 \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left( g_{yy} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x} - g_{xy} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial y} \right) \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left( g_{xx} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial y} - g_{xy} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x} \right) \end{cases}$$

Les développements mathématiques détaillés de ces expressions se trouvent dans l'annexe C.

Ce cadre a l'avantage d'intégrer la métrique Riemannienne  $g_{\mu\nu}$  dans le processus de lissage personnalisé et adapté au type d'images considéré. Dans notre cadre de lissage d'images catadioptriques, on va étendre le flot géométrique non-linéaire de Laplace-Beltrami au cas d'un espace hybride formé par les coordonnées spatiales tirées de la géométrie du miroir du système catadioptrique, et les coordonnées colorimétriques qui sont les composantes de l'image multi-dimensionnelle. L'image test dans cette section est une image de synthèse acquise par un capteur para-catadioptrique.

Avant de commencer l'expérience de lissage, soulignons la puissance et la généralité de ce formalisme Riemannien. En effet, selon le choix de la métrique  $g_{\mu\nu}$ , on peut séparer plusieurs traitements.

- (a) Tout d'abord, prenons le cas de la métrique Euclidienne, cela conduit à l'équation de diffusion classique exprimée en fonction du Laplacien Euclidien :

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} = \partial_{xx} \mathbf{I} + \partial_{yy} \mathbf{I} = \Delta_{\mathbb{R}^2} \mathbf{I} \quad (4.29)$$

- (b) Deuxièmement, considérons uniquement l'aspect vectoriel colorimétrique, le plongement correspondant dans ce cas est :

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow (\mathbb{R}^5, \delta_{ij}) \\ (x, y) &\mapsto (x, y, \beta I^1, \beta I^2, \beta I^3) \end{aligned}$$

La métrique induite et le flot correspondant sont :

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \beta^2 \sum_{i,j=1}^3 I_\mu^i I_\nu^j \quad \Rightarrow \quad \text{l'équation (4.28)} \quad (4.30)$$

- (c) Troisièmement, en tenant compte uniquement de la géométrie du miroir, on peut considérer le plongement :

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{S}^2 \subset (\mathbb{R}^3, \delta_{ij}) \\ (x, y) &\mapsto (\chi_1^{-1}(x, y), \chi_2^{-1}(x, y), \chi_3^{-1}(x, y)) \end{aligned}$$

avec  $\chi^{-1}$  la fonction qui associe à chaque point  $(x, y)$  sur le plan catadioptrique, un point sur la surface de la sphère  $\chi^{-1}(x, y) = (x_s, y_s, z_s)$ . Dans le cas de ce plongement géométrique, on obtient une métrique conforme à la métrique Euclidienne et un flot de chaleur égal à un facteur d'échelle multiplié par le Laplacien Euclidien dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$g_{\mu\nu} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \delta_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} = \frac{(1+x^2+y^2)^2}{4} \Delta_{\mathbb{R}^2} \mathbf{I} \quad (4.31)$$

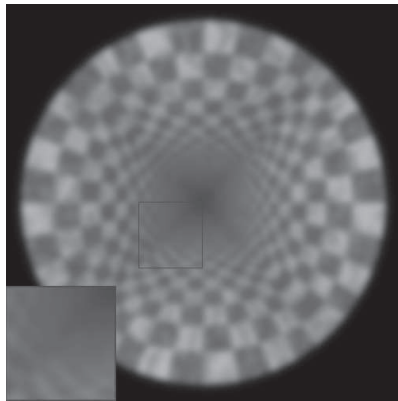
- (d) Enfin, on combine les aspects géométrique et couleur, ce qui revient à considérer le plongement hybride :

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow (\mathbb{R}^6, \delta_{ij}) \\ (x, y) &\mapsto (\chi_1^{-1}(x, y), \chi_2^{-1}(x, y), \chi_3^{-1}(x, y), \beta I^1, \beta I^2, \beta I^3) \end{aligned}$$

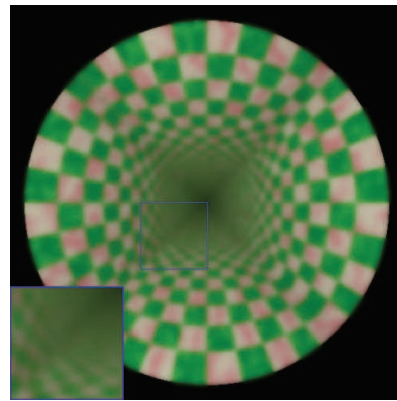
Ainsi, on trouve la métrique spatiale-couleur et le flot de chaleur suivant :

$$g_{\mu\nu} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \delta_{\mu\nu} + \beta^2 \sum_{i,j=1}^3 I_\mu^i I_\nu^j \quad \Rightarrow \quad \text{l'équation (4.28)} \quad (4.32)$$

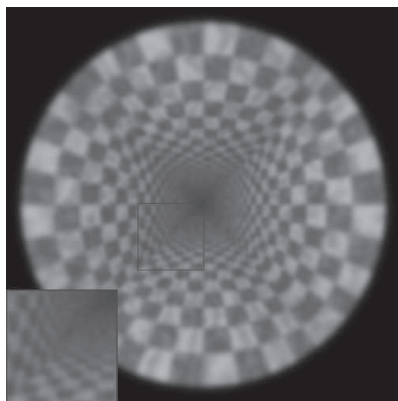
On suit l'algorithme 4.1 où  $I^i(x, y)$  est l'image à lisser,  $t$  est le niveau du lissage,  $dt$  est l'intervalle de temps et  $I_s^i = (x, y, t)$  est l'image lissée. En comparant les Figs. 4.6a et b avec les Figs. 4.6c et d, on remarque une différence dans le comportement du flot du lissage, particulièrement visible proche du centre de l'image. Lorsqu'on utilise l'information géométrique dérivée du miroir, on observe que le processus du lissage n'est pas uniforme. Au niveau de la périphérie de l'image, la métrique accélère la vitesse du flot. En se déplaçant vers le centre, la métrique le ralentit. Ce lissage non linéaire est approprié à la nature des images para-catadioptriques où la résolution n'est pas uniforme [Nayar, 1997]. Donc, la métrique dérivée de la géométrie du miroir vient corriger ce problème. Examinons maintenant de plus près les Figs. 4.6b et d, nous détectons la propriété de préservation des contours de Laplace-Beltrami avec la métrique couleur comparé au Laplacien Euclidien. En effet,  $|g| = \det(g_{\mu\nu})$  peut être considéré comme un indicateur des contours, donc ce flot est un mécanisme sélectif.



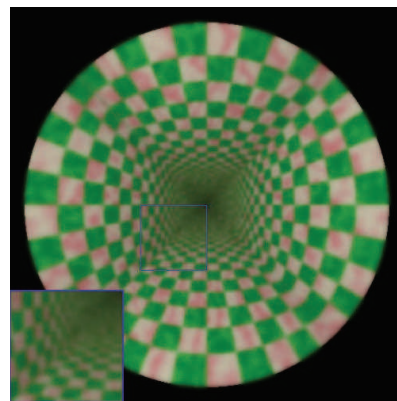
(a) Métrique Euclidienne (4.29) sur image test en niveaux de gris.



(b) Métrique couleur (4.30) sur image test couleur.



(c) Métrique spatiale (4.31) sur image test en niveaux de gris.



(d) Métrique spatiale-couleur (4.32) sur image test couleur.

FIGURE 4.6 – Résultats comparatifs de l'influence de la métrique dans le lissage d'une image para-catadioptrique. Le lissage est effectué avec l'équation de diffusion de la chaleur Riemannienne, le paramètre d'échelle est  $t = 10$ .

---

**Algorithme 4.1** Lissage non-linéaire avec le flot du Laplace-Beltrami adapté aux images catadioptriques couleur

---

**Input:**  $I^i(x, y), t, dt$

**Output:**  $I_s^i(x, y, t)$

*Initialisation :*  $I_s^i(x, y, 0) = I^i(x, y), N_{iterations} = t/dt$

**Repeat**

- 1: Calculer les dérivées spatiales de  $I^i$  avec  $i = \{R, G, B\}$
- 2: Calculer la métrique induite  $g_{\mu\nu}$
- 3: Calculer l'opérateur Laplace-Beltrami  $\Delta_g I^i$
- 4: Mettre à jour  $I_s^i(x, y, t) = I_s^i(x, y, t) + dt * \Delta_g I^i$

**Until**  $N_{iterations}$  est atteint.

---

### 4.3.2 Lissage par Gaussienne adaptée

On considère des images de synthèse obtenues par un capteur para-catadioptrique. Nous examinons quatre cas :

- (a) On ne prend pas en considération ni la déformation du miroir, ni la projection vectorielle colorimétrique de l'image, c'est-à-dire, on utilise la métrique Euclidienne,

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \quad (4.33)$$

- (b) On tient compte uniquement de la déformation induite par le miroir parabolöide,

$$g_{\mu\nu} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \delta_{\mu\nu} \quad (4.34)$$

- (c) On considère cette fois seulement les composantes de la couleur qui encodent l'information multidimensionnelle,

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \beta^2 \sum_{i,j=1}^3 I_\mu^i I_\nu^j \quad (4.35)$$

- (d) On examine enfin l'effet de la combinaison de la correction spatiale et couleur dans le tenseur hybride,

$$g_{\mu\nu} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \delta_{\mu\nu} + \beta^2 \sum_{i,j=1}^3 I_\mu^i I_\nu^j. \quad (4.36)$$

On suit l'algorithme 4.2 pour effectuer le lissage des images catadioptriques couleur. On note  $I^i(x, y)$  l'image couleur d'entrée,  $\sigma$  détermine le niveau du lissage et  $I_s^i(x, y)$  est l'image lissée de sortie. Les paramètres prennent les valeurs suivantes :  $\sigma = 3$  et  $\beta = 0.04$ .

**Algorithme 4.2** Lissage Gaussien adapté aux images catadioptriques couleur**Input:**  $I^i(x, y)$ ,  $\sigma$ ,  $\beta$ **Output:**  $I_s^i(x, y)$ 

- 1: Calculer les dérivées spatiales de  $I^i$  avec  $i = \{R, G, B\}$
- 2: Calculer la métrique induite  $g_{\mu\nu}$
- 3: Calculer le noyau Gaussien adapté  $G_g(\sigma)$
- 4: Convolver  $I^i$  avec  $G_g$  :  $I_s^i(x, y) = I^i(x, y) * G_g(\sigma)$

**Analyse qualitative du lissage**

Les résultats du lissage sont présentés sur la Fig. 4.7. On constate que le changement de la métrique dans le processus du lissage influence les résultats et par conséquent, le choix de la métrique est crucial. Lorsqu'on utilise une métrique Euclidienne (4.33), cela revient à appliquer le noyau Gaussien d'une manière uniforme, et donc la même quantité de flou sur l'image entière Fig. 4.7a. Lorsqu'on introduit la métrique Riemannienne spatiale pour l'image para-catadioptrique (4.34), la largeur et l'amplitude du noyau Gaussien dépend de la position du point dans l'image. Dès lors, on obtient un lissage adaptatif Fig. 4.7b, qui s'affine d'une manière significative près du centre de l'image. Sur la Fig. 4.7c, on constate que contrairement aux cas précédents, les contours sont préservés. En effet, la partie incorporant la couleur dans la métrique (4.35) agit comme un indicateur de contour, et la fonction Gaussienne est anisotrope dans ce cas. Enfin, on obtient les meilleurs résultats Fig. 4.7d lorsqu'on combine les coordonnées spatiales et couleur dans la construction de la métrique (4.36). Effectivement, grâce à la partie spatiale, la métrique permet une meilleure gestion du lissage de telle sorte à effectuer un lissage non-uniforme et progressivement affiné, partant de la périphérie vers le centre. D'autre part, les contours sont préservés grâce à la partie couleur de la métrique.

**Analyse quantitative du lissage**

Dans la suite, à l'aide d'une expérience de débruitage d'images, on va montrer l'influence de la métrique. Les images tests sont extraites d'une base de données d'images catadioptriques<sup>1</sup>. Les images contiennent à la fois des régions homogènes et des contours, et sont corrompues par un bruit Gaussien additif d'écart-type 0.1. L'algorithme de débruitage est basé sur la convolution de l'image avec le noyau Gaussien adapté en utilisant les différentes métriques : Euclidienne (4.33), Riemannienne spatiale (4.34), couleur (4.35) et enfin la métrique hybride spatiale-couleur (4.36). En comparant les images produites Fig. 4.8, on confirme que la métrique hybride spatiale-couleur offre le meilleur résultat Fig. 4.8d pour l'expérience du débruitage.

1. <http://rpg.ifi.uzh.ch/fov.html> et <http://cvrg.iyte.edu.tr/datasets.htm>.

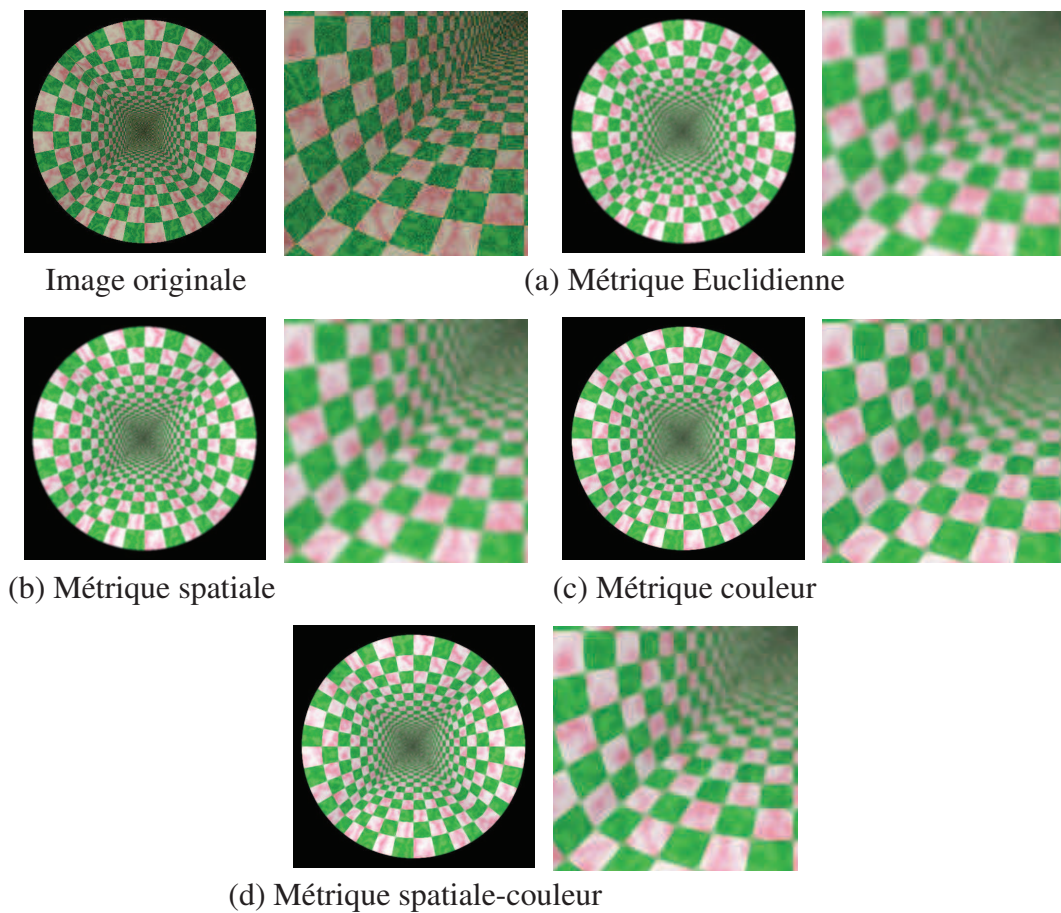


FIGURE 4.7 – Lissage Gaussien adapté en opérant différentes métriques. À droite de chaque image lissée, une vue agrandie de la zone centrale.

Afin d'évaluer numériquement les performances du débruitage, on utilise deux mesures de qualité différentes, le rapport signal/bruit de crête (PSNR) et l'indice de similarité structurelle (SSIM) [Wang et al., 2004].

TABLE 4.1 – La moyenne du **PSNR** pour différentes métriques et niveaux de débruitage  $\sigma$  testé sur des images catadioptriques couleur

	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 3$	$\sigma = 4$	$\sigma = 5$
Métrique Euclidienne	<b>26,056</b>	24,880	24,461	24,310	24,259
Métrique spatiale	25,481	25,206	24,673	24,444	24,348
Métrique couleur	21,535	<b>27,021</b>	26,445	25,932	25,428
Métrique spatiale-couleur	21,289	26,024	<b>26,564</b>	<b>26,024</b>	<b>25,494</b>



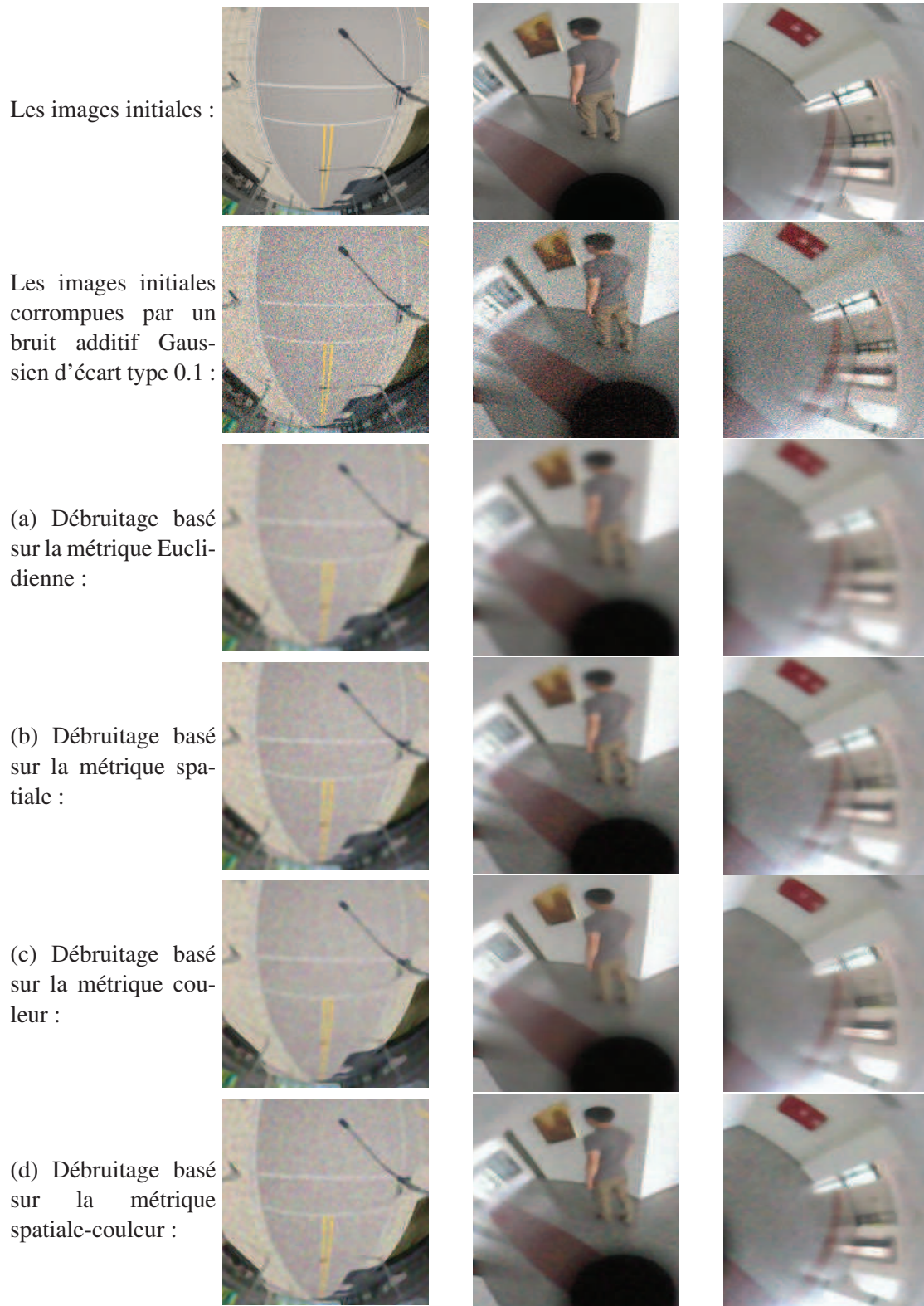


FIGURE 4.8 – Comparaison de l'effet de la métrique dans le processus du débruitage par convolution avec le noyau Gaussien adapté (l'échelle de débruitage est  $\sigma = 3$ ).

TABLE 4.2 – La moyenne de l’indice de similarité structurelle **SSIM** pour différentes métriques et niveaux de débruitage  $\sigma$  testé sur des images catadioptriques couleur.

	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 3$	$\sigma = 4$	$\sigma = 5$
Métrique Euclidienne	<b>0,689</b>	0,727	0,719	0,714	0,711
Métrique spatiale	0,630	0,722	0,723	0,719	0,715
Métrique couleur	0,384	<b>0,737</b>	0,739	0,740	0,735
Métrique spatiale-couleur	0,283	0,718	<b>0,740</b>	<b>0,742</b>	<b>0,737</b>

Les résultats sont donnés dans les tableaux 4.1 et 4.2. On peut noter une augmentation des mesures PSNR et SSIM en s’appuyant sur la méthode hybride qui utilise la métrique spatiale-couleur. Ces résultats sont particulièrement valides lorsqu’on augmente la largeur de la Gaussienne.

Notons enfin que ces résultats du lissage par convolution avec la Gaussienne adaptée aux images catadioptriques  $I_s^i(x, y) = I^i(x, y) * G_g(\sigma)$  sont similaires à ceux produit au moyen du flot de diffusion non-linéaire  $\frac{\partial I^i}{\partial t} = \Delta_g I^i$  développés précédemment (voir Sec. 4.3.1). On confirme par cette expérience l’équivalence entre le filtrage Gaussien sur les variétés Riemanniennes par convolution avec le noyau Gaussien adapté (4.13), et le lissage itératif avec l’équation de diffusion de la chaleur exprimée en fonction de l’opérateur Laplace-Beltrami.

#### 4.4 Filtrage par Différence de Gaussiennes adaptée

La *Différence de Gaussiennes*, notée *DoG* (Difference of Gaussians), est utilisée pratiquement pour approcher le *LoG* (Laplacian of Gaussians). Cette approximation est très utile dans le cadre de la théorie de la représentation multi-échelle (Scale-Space) [Lindeberg, 1994], où les points d’intérêt stables sont efficacement détectés comme extréma locaux dans l’espace et l’échelle de l’image convoluée avec la *DoG* [Lowe, 1999]. En outre, l’opérateur *DoG* est utilisé dans les applications d’amélioration de la netteté des contours (sharpening) en affinant la visibilité des détails à haute fréquence.

En se servant de la proposition (1), on va déduire la définition de l’opérateur *DoG* adapté aux images catadioptriques.

**Proposition 2.** *L’opérateur de Différence de Gaussiennes (DoG) adapté aux images ca-*

tadioptriques  $(M, g_{\mu\nu})$ , noté  $DoG_g$ , est la différence de deux noyaux Gaussiens adaptés,

$$\begin{aligned} DoG_g(\mathbf{x}, \sigma_1, \sigma_2) &= G_g(\mathbf{x}, \sigma_1) - G_g(\mathbf{x}, \sigma_2) \\ &= \frac{1}{2\pi(\det(g_{\mu\nu}))^{-1/2}} \left[ \frac{1}{\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2} \mathbf{x}^T g_{\mu\nu} \mathbf{x}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sigma_2^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2} \mathbf{x}^T g_{\mu\nu} \mathbf{x}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

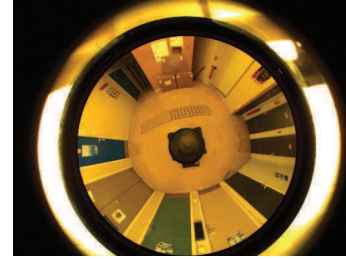
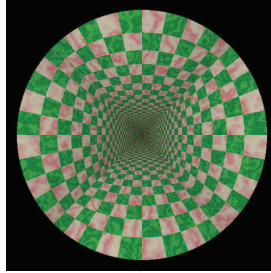
où  $\sigma_1 > \sigma_2$  et généralement  $\sigma_1 = \sqrt{2}\sigma_2$ .

Dans le cadre d'application de la proposition précédente, nous effectuons le filtrage d'images de synthèse para-catadioptriques et réelles hyper-catadioptriques. Ces images sont convoluées, d'une part, avec le  $DoG$  classique, en utilisant le noyau Gaussien Euclidien standard, et d'autre part, avec le  $DoG_g$  adapté, basé sur le noyau Gaussien adapté.

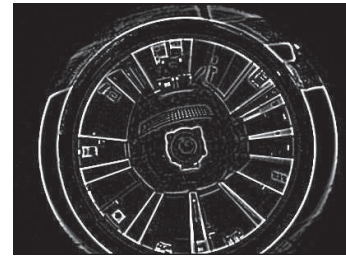
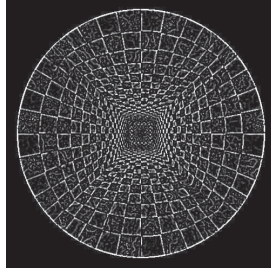
Comme le montre la Fig. 4.9, les contours sont clairement visibles sur la périphérie de l'image pour les deux approches considérées : Euclidiennes et Riemanniennes (Fig. 4.9a et Fig. 4.9b respectivement). Alors que, près du centre, ils sont flous et moins bien détectés dans le cas de la métrique Euclidienne Fig. 4.9c. Si on examine du plus près la région centrale de la Fig. 4.9d, on constate que la  $DoG_g$  adaptée permet d'extraire des contours plus précis et d'une épaisseur plus régulière. Cette amélioration est due à la métrique Riemannienne qui compense la distorsion du miroir du capteur, et qui opère en tenant compte de la position des points dans l'image.

Sur la figure 4.10, nous examinons l'influence des quatre métriques (Euclidienne, spatiale, couleur et spatiale-couleur) sur le filtrage par Différence de Gaussiennes. On constate que sur Fig. 4.10c et d, les contours des objets sont plus nets et apparents par rapport à Fig. 4.10a et b. Ceci revient à la contribution de la partie couleur dans la métrique qui n'est pas négligeable. Donc, la combinaison de la couleur et de la géométrie dans la métrique est la meilleure option.

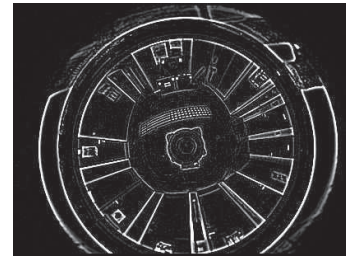
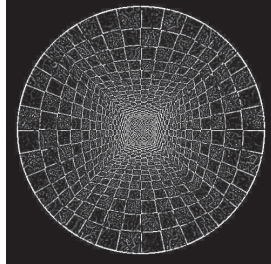
Les images initiales :



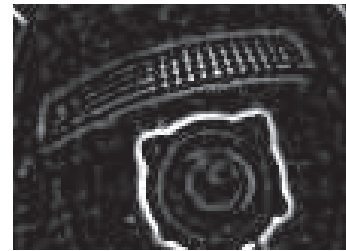
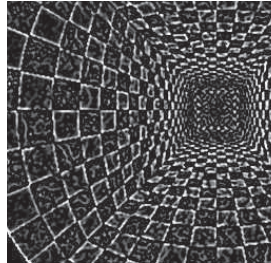
(a) Approche classique :  
DoG Euclidien :



(b) Approche Riemannienne  
basée sur la métrique Rie-  
mannienne.



(c) Vue agrandie près de la  
région centrale de (a) :



(d) Vue agrandie près de la  
région centrale de (b) :

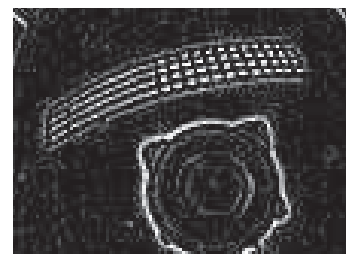
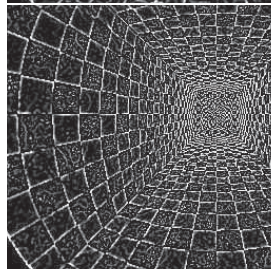


FIGURE 4.9 – Filtrage adapté par Différence de Gaussiennes (DoG).

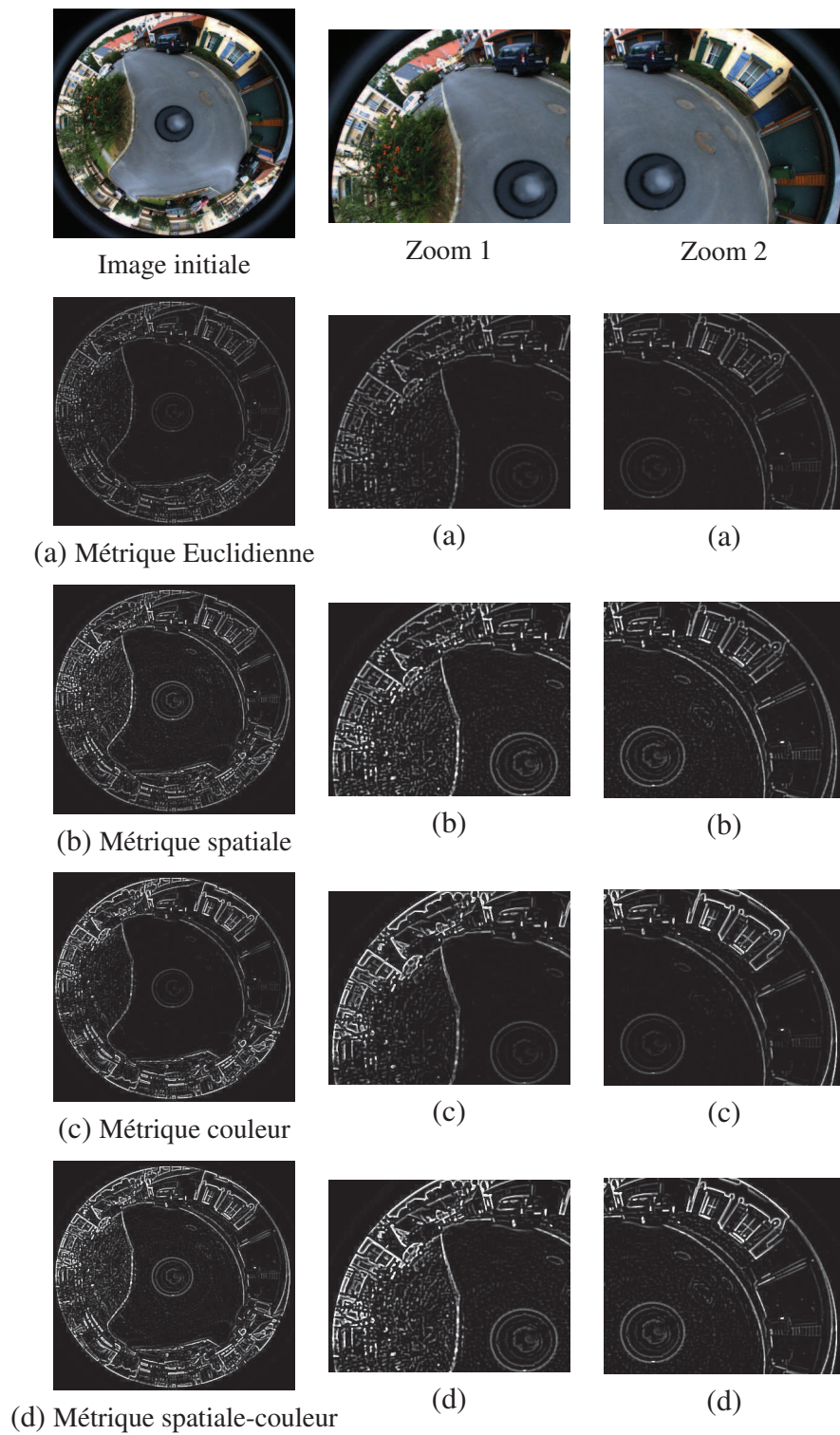


FIGURE 4.10 – Filtrage adapté par Différence de Gaussiennes ( $DoG_g$ ) en utilisant différentes métriques.

## 4.5 Analyse multi-échelle

La représentation multi-échelle Gaussienne est une famille d'images lissées en appliquant des noyaux Gaussiens  $G(\sigma)$  avec un écart-type  $\sigma$  croissant. Ce processus de lissage permet de manipuler les structures de l'image à différentes échelles. Il entraîne la disparition progressive des régions plus petites, par conséquent, il simule la perte de détails produite quand une scène est capturée de plus en plus loin. Cette représentation est incontournable pour plusieurs algorithmes de détection de caractéristiques invariantes à l'échelle, tel que l'algorithme SIFT (*Scale Invariant Feature Transform*) [Lowe, 1999].

Dans le cadre des images catadioptriques, l'analyse multi-échelle et la détection des caractéristiques doivent prendre en considération la géométrie non Euclidienne de ces images, afin de corriger la distorsion particulière introduite par le miroir. L'objectif dans la suite de cette section est l'évaluation de l'opérateur Gaussien adapté dans la représentation en espace-échelle par rapport au noyau Gaussien classique. Soient  $I(x, y)$  et  $G_g(x, y; \sigma)$  une image catadioptrique et un noyau Gaussien adapté respectivement. Les étapes utilisées pour l'analyse espace-échelle adaptée sont :

- Nous calculons la séquence multi-échelle par convolution de l'image avec le noyau Gaussien adapté d'écart-type  $\sigma$  croissant :

$$L(x, y, \sigma) = G_g(x, y, \sigma) * I(x, y) \quad (4.38)$$

- De même que la méthode originale [Lindeberg, 1994], nous approximons le Laplacien de Gaussienne normalisé  $\sigma^2 \Delta G_g$  par l'opérateur Différence de Gaussiennes Riemannien  $DoG_g$ . Il est défini par la différence entre deux images filtrées, ayant des écarts-types qui se distinguent par un facteur multiplicatif constant  $k$  :

$$DoG_g(x, y; k\sigma) = G_g(x, y; k\sigma) - G_g(x, y; \sigma) \approx (k - 1) \sigma^2 \Delta G_g \quad (4.39)$$

Cette approximation a été utilisée dans la méthode SIFT [Lowe, 2004].

Pour l'évaluation expérimentale, nous capturons une scène plane avec une caméra conventionnelle perspective. La scène contient des carrés blancs de dimensions similaires, à l'exception de quelques carrés coupés sur les côtés (Fig. 4.11(a)). Ensuite, nous capturons la même scène avec une caméra catadioptrique ce qui produit des carrés déformés de différentes dimensions, comme le montre la Fig. 4.11(b). Pour l'évaluation expérimentale, la méthode adoptée consiste à effectuer la représentation multi-échelle lorsque :

- L'image test est perspective Fig. 4.11(a), et la représentation multi-échelle est calculée en utilisant le noyau Gaussien Euclidien.
- L'image test est une image catadioptrique Fig. 4.11(b), et la représentation multi-échelle est calculée en utilisant le noyau Gaussien Euclidien.

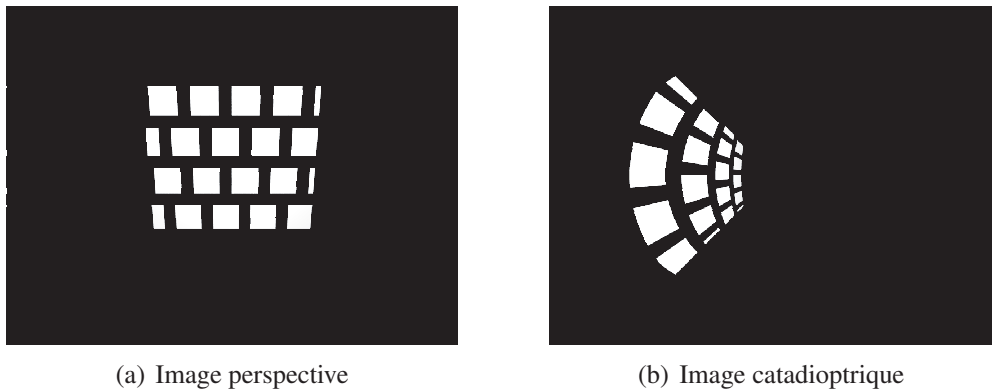


FIGURE 4.11 – (a) Image perspective contenant majoritairement des formes carrées. (b) La vue catadioptrique correspondante.

- L'image test est une image catadioptrique Fig. 4.11(b), et la représentation multi-échelle est calculée en utilisant le noyau Gaussien adapté proposé précédemment.

La figure 4.12 illustre l'opérateur LoG normalisé avec les valeurs d'échelle croissantes suivantes :  $\{2.06, 8.73, 12.50, 15.37\}$ . Considérons la figure 4.12(a) qui montre les résultats lorsque l'image d'entrée est perspective et la métrique du noyau Gaussien est Euclidienne. Au niveau des motifs carrés de l'image, nous constatons la même réponse du LoG, ce qui est cohérent puisqu'ils ont géométriquement la même taille et la même forme.

Les résultats basés sur la métrique Euclidienne pour une image catadioptrique sont présentés sur la Fig. 4.12(b). Nous observons que les motifs déformés proches du centre de l'image ont une faible réponse du LoG par rapport aux "grands" motifs sur la périphérie. Par conséquent, ils ont tendance à disparaître tout en augmentant l'échelle  $\sigma$ . Passons maintenant à la Fig. 4.12(c) qui représente les résultats pour l'image catadioptrique, et la séquence multi-échelle calculée en utilisant la métrique Riemannienne. On constate que les carrés déformés proches du centre de l'image ont presque la même réponse LoG qu'en périphérie. En effet, la taille et la forme des carrés de la zone centrale est semblable à celle située vers la périphérie. On observe également que les localisations des contours sont plus fines et plus précises. D'une manière implicite, la métrique Riemannienne corrige les mesures de telle sorte à prendre en compte la déformation projective, c.-à-d, de telle sorte à considérer que les motifs de cette région sont en réalité plus grand que ce qui était estimé avec les outils Euclidiens.

On conclut donc que la métrique Riemannienne permet de fournir des mesures plus appropriées à la géométrie des objets 3D, en corrigeant l'anamorphose introduite par le miroir.

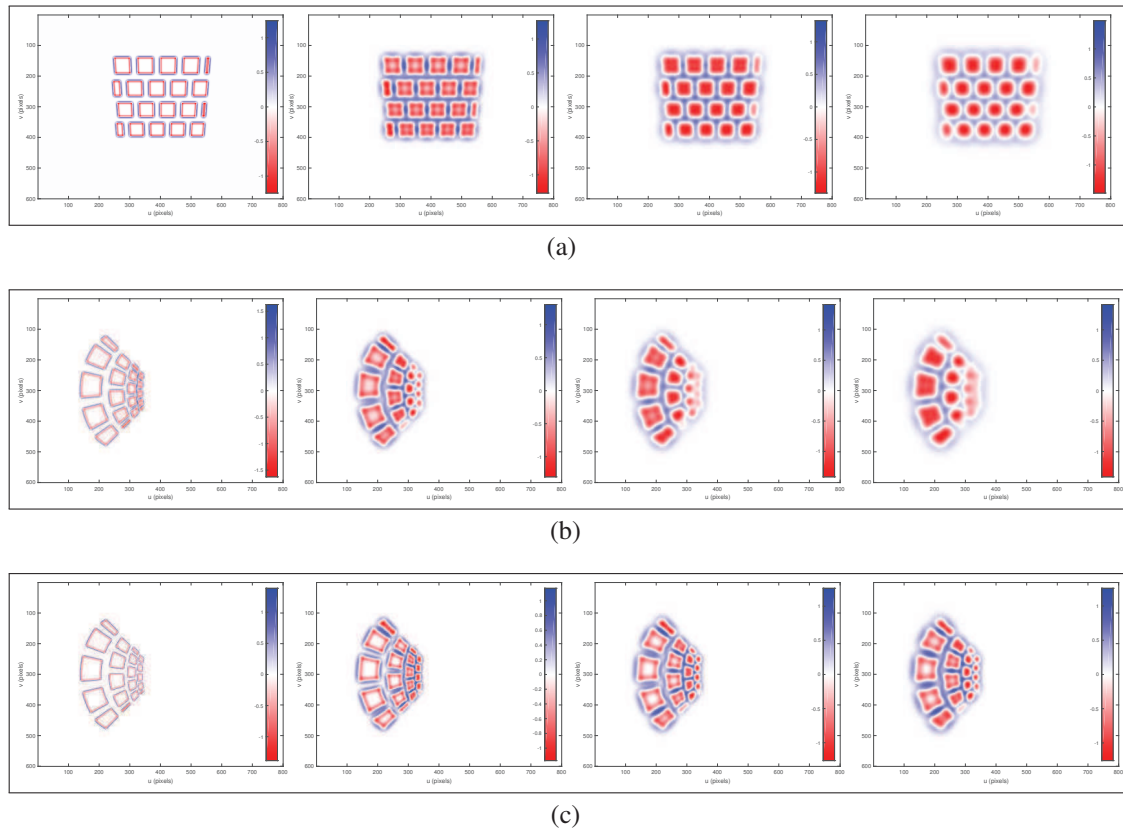


FIGURE 4.12 – La valeur absolue du Laplacien de Gaussienne normalisé  $LoG$  pour des valeurs croissantes d'échelle, de gauche à droite. (a) L'image d'entrée est perspective et le LoG est calculé en utilisant la métrique Euclidienne. (b) L'image d'entrée est catadioptrique et le LoG est calculé en utilisant la métrique Euclidienne. (c) L'image d'entrée est catadioptrique et le LoG est calculé en utilisant la métrique Riemannienne.



## 4.6 Détection des contours

En vision et traitement d'image, la notion de contour peut se matérialiser par une discontinuité d'intensité dans l'image suivant une direction donnée comme l'illustre la Fig. 4.13(d). En faisant un zoom sur cette région contenant un contour, on peut observer sur la Fig. 4.13(e) un gradient progressif d'intensité. On en déduit que la définition des contours est problématique et ne peut pas être réduite à une simple rupture brutale d'intensité.

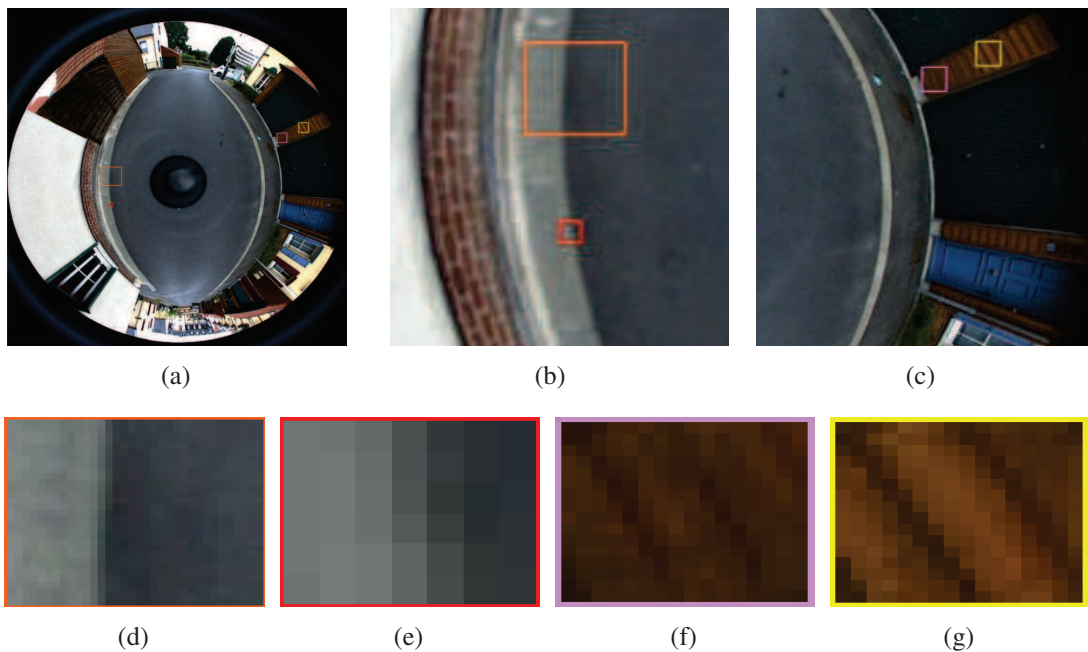


FIGURE 4.13 – La structure des contours dans une image omnidirectionnelle.

Deux approches sont connues pour la détection des contours dans les images perspectives. La première consiste à rechercher les extréma de la dérivée première de l'image (les maxima de l'amplitude du gradient), et la seconde approche recherche les zéros de la dérivée seconde (les zéros du Laplacien). Étant basés sur des dérivées, les algorithmes classiques d'extraction de contours sont très sensibles au bruit d'où l'utilisation d'un filtre passe bas, par exemple le filtre Gaussien pour le détecteur de Sobel et de Canny. Ce filtre a un effet de lissage et par conséquent de réduction du bruit. Ces méthodes classiques utilisent une échelle de lissage fixée, ce qui présente l'inconvénient de ne pas prendre en considération tous les profils de discontinuité présents dans une image.

En imagerie catadioptrique, la complexité de la détection des contours s'accroît à cause de la résolution qui n'est pas invariante radialement. Les figures 4.13(f) et 4.13(g) illustrent cette distorsion radiale. Elles représentent des zooms de deux fenêtres de même

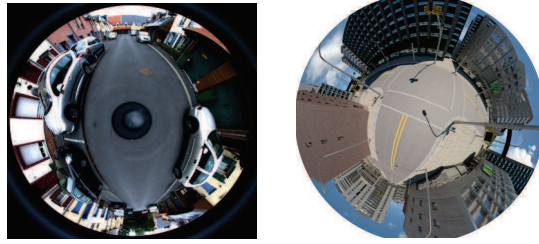


FIGURE 4.14 – Les images initiales.

dimensions distantes mais qui représentent en fait le même objet. Il est nécessaire donc d'utiliser des métriques adaptées afin de contrôler l'échelle du lissage utilisé dans les noyaux de détection des contours.

Tout comme nous l'avons fait pour le lissage, nous allons montrer dans la suite l'impact de l'intégration de la métrique Riemannienne sur des traitements d'extraction de contours dans une image catadioptrique. Dans cette optique, nous développerons un détecteur de contours dans l'image catadioptrique par la méthode du *gradient basée sur les dérivées Gaussiennes*.

La fonction Gaussienne possède une propriété intéressante lorsqu'elle est associée à l'opérateur de convolution. La dérivée directionnelle de la fonction représentant une image peut-être effectuée par convolution de cette fonction avec la dérivée du noyau Gaussien,

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{x}_i} \approx \frac{\partial (I * G_g)}{\partial \mathbf{x}_i} = I * \frac{\partial G_g}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (4.40)$$

On rappelle que le noyau  $G_g$  est défini en chaque point de l'image. Sa dérivée à un point  $\mathbf{x}$  est définie comme suit :

$$\frac{\partial G_g(\mathbf{x})}{\partial x} = -\frac{xg_{11} + yg_{12}}{\sigma^2} G_g ; \quad \frac{\partial G_g(\mathbf{x})}{\partial y} = -\frac{yg_{22} + xg_{12}}{\sigma^2} G_g \quad (4.41)$$

L'amplitude des contours est la norme du vecteur gradient,

$$\| \nabla I \| = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} \quad \text{où} \quad I_x = I * \frac{\partial G_g}{\partial x} \quad \text{et} \quad I_y = I * \frac{\partial G_g}{\partial y} \quad (4.42)$$

Afin de montrer l'influence de la métrique dans le processus de détection des contours sur des images catadioptriques Fig. 4.14, on effectue l'extraction des cartes de contours Fig. 4.15 avec la méthode de la norme du gradient, basée sur la dérivée de la Gaussienne adaptée et régie par différentes métriques :

- (a) Métrique Euclidienne.
- (b) Métrique spatiale.
- (c) Métrique couleur.
- (d) Métrique spatiale-couleur.
- (e) Métrique couleur.
- (f) Métrique spatiale-couleur.

On note qu'après calcul de la norme du gradient, on effectue une étape de suppression des non-maxima locaux et un seuillage par hystérésis ( $T_1 = 0.8$  et  $T_2 = 2$ ).

Comme illustré sur la Fig. 4.15d, plus de détails pertinents apparaissent dans la carte des contours en utilisant la méthode adaptée avec la métrique spatiale-couleur. D'une part, la partie spatiale de la métrique prend en compte la distorsion spécifique aux images catadioptriques. Elle influence la forme de la fonction Gaussienne selon la position du point dans l'image. L'amélioration est particulièrement visible à proximité du centre de l'image. D'autre part, la partie couleur de la métrique préserve les petits contours présents notamment au niveau de la périphérie de l'image.

Sur la figure 4.17, des paires parmi les figures (a), (b), (c) et (d) de la figure 4.15 sont représentées.

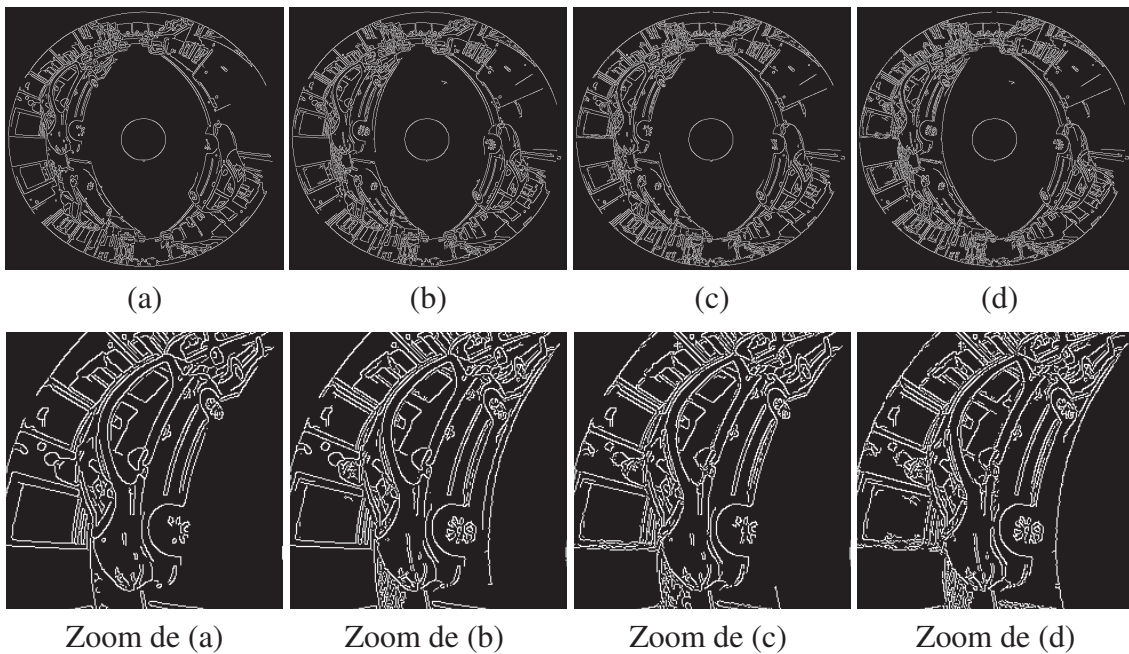


FIGURE 4.15 – Extraction des cartes des contours par la méthode de la dérivée de la Gaussienne en fonction de différentes métriques : (a) Euclidienne, (b) Riemannienne spatiale, (c) couleur, et (d) la métrique hybride spatiale-couleur.

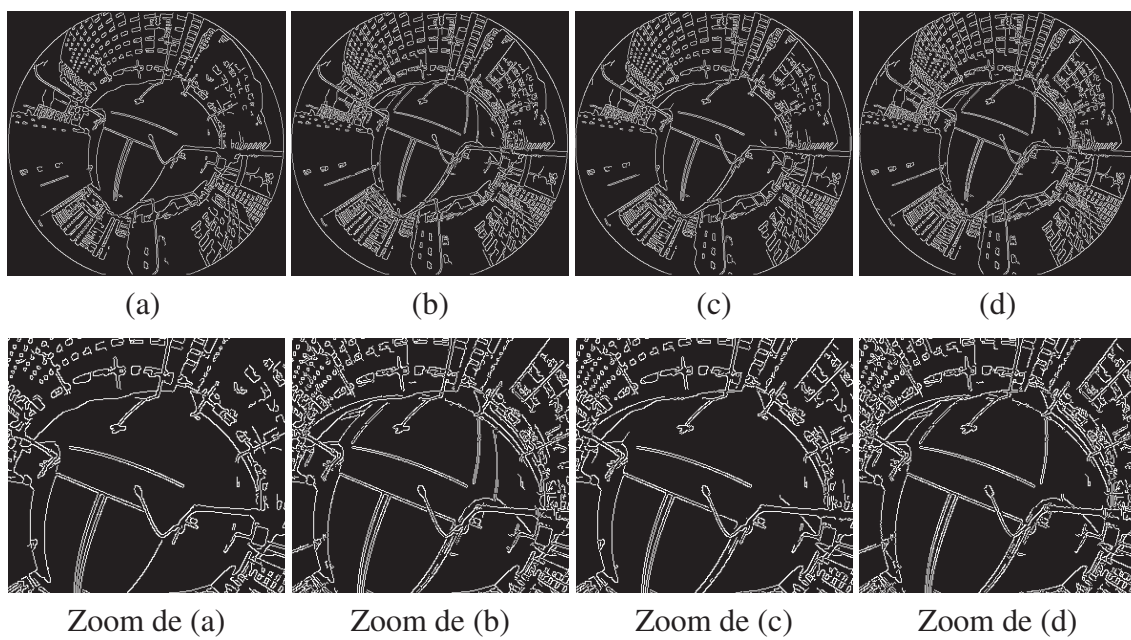


FIGURE 4.16 – Extraction des cartes des contours par la méthode de la dérivée de la Gaussienne en fonction de différentes métriques : (a) Euclidienne, (b) Riemannienne spatiale, (c) couleur, et (d) la métrique hybride spatiale-couleur.

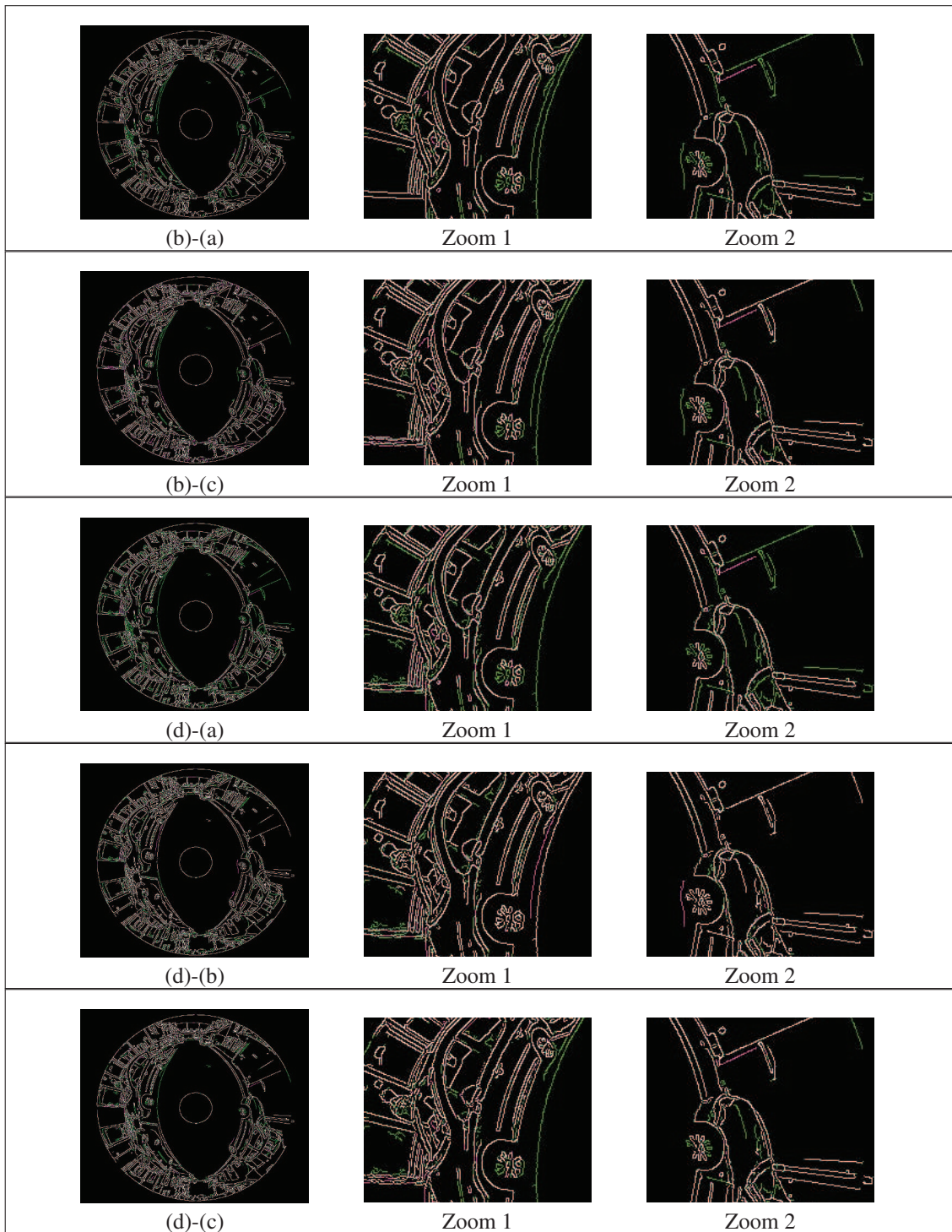


FIGURE 4.17 – Comparaison des résultats des cartes de contours. Chaque image représente une paire de la figure 4.15. Par exemple, dans (b) - (a) : les figures (b) et (a) sont superposées, les points de couleur blanche montrent les zones où les deux méthodes parviennent à détecter les mêmes contours. Les points en vert et magenta montrent les zones où les deux méthodes sont différentes et correspondent aux contours détectés par (b) et (a) respectivement.

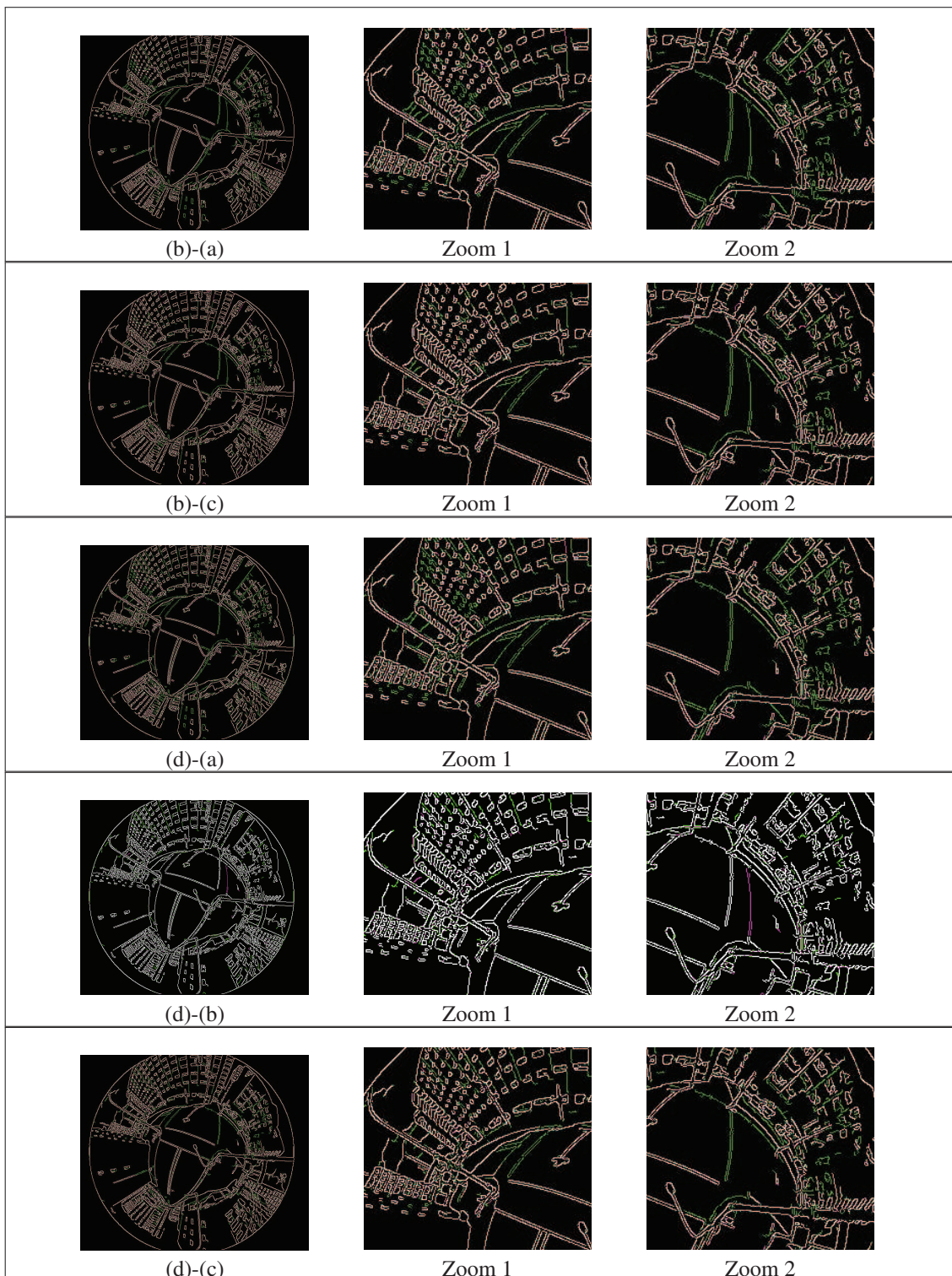


FIGURE 4.18 – Comparaison des résultats des cartes de contours. Chaque image représente une paire de la figure 4.15. Par exemple, dans (b) - (a) : les figures (b) et (a) sont superposées, les points de couleur blanche montrent les zones où les deux méthodes parviennent à détecter les mêmes contours. Les points en vert et magenta montrent les zones où les deux méthodes sont différentes et correspondent aux contours détectés par (b) et (a) respectivement.

## 4.7 Détection des points d'intérêt

Nous considérons en dernier lieu une application de notre formalisme à la détection de points d'intérêt, en particulier de type "coins". Les points d'intérêts sont largement utilisés pour la mise en correspondance d'images et la reconnaissance d'objets. Nous avons choisi de tester sur ce type de points, pour la facilité d'évaluation, dont la localisation est plus facile à évaluer visuellement.

En chaque point de l'image, la détection des coins est basée sur la mesure de la variation au carré d'intensité (3.1) (the squared local variation) [Moravec, 1980; Harris and Stephens, 1988; Noble, 1988; Tissainayagam and Suter, 2004]. Cette mesure est locale, et la fenêtre autour du point considéré est en général pondérée par un noyau Gaussien  $G(\sigma)$  convolué avec l'image. La mesure des différences au carré conduit au tenseur de structure (3.4) (Sec. 3.2), également appelé matrice d'auto-corrélation. En chaque point, la matrice du tenseur décrit la structure d'intensité du voisinage local. Ses valeurs propres offrent des informations importantes car elles fournissent une description invariante par rotation du voisinage. Si nous considérons une image  $I$  comme une surface, en un point  $p$  de cette surface, les valeurs propres du tenseur de structure correspondent en effet aux courbures principales en ce point.

- Si les deux valeurs propres, autrement dit les deux courbures, sont de faibles valeurs, alors la région considérée a une intensité approximativement constante.
- Si l'une des valeurs propres est grande alors que l'autre est petite, ceci indique la présence d'un contour dans la région.
- Si les deux valeurs propres sont grandes, alors l'intensité locale varie fortement dans toutes les directions et la région concernée contient donc un coin.

### L'énergie des coins

De nombreuses approches ont été proposées pour détecter des points d'intérêt [Moravec, 1980; Harris and Stephens, 1988; Noble, 1988]. Le détecteur de Harris est l'un des plus utilisés dans le domaine de la vision par ordinateur. La mesure "cornerness" définit le potentiel d'un point d'être un coin et se base sur le tenseur de structure  $T$ . L'énergie d'un coin est donnée par :

$$E_c = \det(T) - k \operatorname{trace}(T) \quad (4.43)$$

avec  $\det(T) = \lambda_1 \lambda_2$ ,  $\operatorname{trace}(T) = \lambda_1 + \lambda_2$ , et  $\lambda_i$  représentant les valeurs propres du tenseur de structure  $T$ . Une valeur couramment utilisée pour le scalaire  $k$  est 0,04. Une grande valeur de cette énergie représente la présence d'un coin robuste. Notons que le détecteur Harris évite de calculer les valeurs propres de  $T$ , ce qui réduit considérablement le temps des calculs.

### Détection des coins adaptée

Dans ce qui suit, nous effectuons une détection de points d'intérêt de type coin, adaptée pour les images catadioptriques. L'adaptation concerne le calcul des éléments du tenseur de structure (3.4), notamment :

1. Les dérivées spatiales seront calculées par convolution de l'image avec les dérivées du noyau Gaussien adapté Eq. (4.40).
2. Le lissage Gaussien des éléments du tenseur de structure est adapté afin d'obtenir des points d'intérêt stables et robustes.

Dans cette expérience, nous étudions l'influence de la métrique dans la détection des points d'intérêt. Les images testées sont des images de synthèse et réelles, para et hypercatadioptriques. Nous évaluons l'amélioration en nombre et en robustesse des coins détectés, en utilisant quatre métriques, d'une manière similaire à l'expérience du lissage dans la Sec. 4.3.

Par exemple, pour une image paracatadioptrique :

- Nous utilisons d'abord la métrique Euclidienne  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ , qui conduit à la méthode classique de détection des coins.
- Deuxièmement, nous utilisons la métrique spatiale Riemannienne  $g_{\mu\nu} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \delta_{\mu\nu}$  qui prend en compte la déformation du miroir.
- Troisièmement, nous considérons la métrique couleur  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \beta^2 \sum_{i,j=1}^3 I_{\mu}^i I_{\nu}^j$ .
- Enfin, nous considérons la métrique hybride spatial-couleur  $g_{\mu\nu} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \delta_{\mu\nu} + \beta^2 \sum_{i,j=1}^3 I_{\mu}^i I_{\nu}^j$  qui tient compte à la fois de l'aspect multidimensionnel de l'image et de la distorsion du miroir.

Comme le montre la Fig. 4.19, les points d'intérêt sont superposés sur l'image sous forme de carrés noirs. Une vue locale agrandie accompagne chaque résultat dans la deuxième et la quatrième rangée afin d'avoir une meilleure visibilité des points d'intérêt détectés et de leur localisation. On note que nous affichons seulement les 600 meilleures réponses. La Fig. 4.19(a)-(i) correspond à la détection basée sur la métrique Euclidienne, ce qui revient au détecteur de Harris classique. On remarque que les 600 coins les plus forts sont distribués d'une manière presque homogène sur l'image, sauf qu'ils sont absents en région centrale où les motifs carrés de l'image ont subi plus de distorsion. En regardant la Fig. 4.19(b)-(j) qui correspond à la détection basée sur la métrique spatiale déduite de la géométrie du miroir, on observe l'apparition de plusieurs coins dans la zone centrale. Contrairement à la Fig. 4.19(a), ces points ont une énergie plus forte que ceux situés sur la périphérie. Sur la Fig. 4.19(c)-(k), la détection est effectuée en utilisant la métrique



couleur seulement, nous observons de multiples détections autour de certains coins par rapport à la Fig. 4.19(a) et (b). On peut éviter ces détections multiples en effectuant la suppression des coins non-maximas dans leur voisinage après l'étape de détection. Enfin, sur la Fig. 4.19(d)-(l), la métrique combine à la fois les composantes couleur et la distorsion du miroir. Cette fois, les coins les plus robustes sont détectés simultanément dans la zone centrale et la périphérique de l'image. Par conséquent, cette approche semble être un bon compromis.

#### *Évaluation du nombre et de l'énergie des points d'intérêt*

Pour une évaluation plus quantitative, nous illustrons sur la figure 4.20(a) les graphiques représentant le nombre total des coins détectés pour plusieurs images catadioptriques (en abscisse). Tandis que la figure 4.20(b) illustre les 100 meilleurs coins cumulés. Nous en déduisons que la métrique Riemannienne, comparée à l'Euclidienne, améliore la capacité à détecter un plus grand nombre des coins. On note que ces points d'intérêt ont les énergies les plus fortes. En outre, la combinaison des coordonnées couleur et la position spatiale du point dans la métrique hybride donne les meilleurs résultats par rapport à la couleur uniquement.

#### *Évaluation de la précision de la détection*

Une autre mesure quantitative consiste à l'évaluation de l'exactitude et la précision de la localisation des coins. Pour ce faire, nous utilisons le critère de précision (accuracy) introduit dans [Mokhtarian and Mohanna, 2006], où il est nécessaire que les coins soient détectés le plus près possible de leurs positions correctes. Il est défini comme suit :

$$ACU = 100 \times \frac{\frac{N_a}{N_o} + \frac{N_a}{N_g}}{2} \quad (4.44)$$

où  $N_g$  est le nombre total de coins de la vérité terrain,  $N_o$  est le nombre total de coins détectés par un détecteur de coins spécifique, et  $N_a$  est le nombre total de coins matchés lors de la comparaison des coins détectés avec les coins de la vérité terrain à l'aide d'un test de voisinage.

Nous comparons l'influence de la métrique Euclidienne et de la métrique Riemannienne sur la localisation de coins détectés. La figure 4.21 montre les résultats obtenus pour une image catadioptrique de référence et pour deux autres images obtenues par la transformation de celle-ci par rotation et/ou translation de la caméra catadioptrique. Le tableau 4.3 présente le nombre de coins détectés et leurs correspondants avec la vérité terrain. Tandis que les résultats de la mesure de localisation "ACU" Eq. (4.44) sont présentés sur le tableau 4.4.

En regardant les résultats du tableau 4.3, on déduit que la métrique Riemannienne, utilisée dans la formulation du détecteur des coins adaptée, permet de détecter plus de

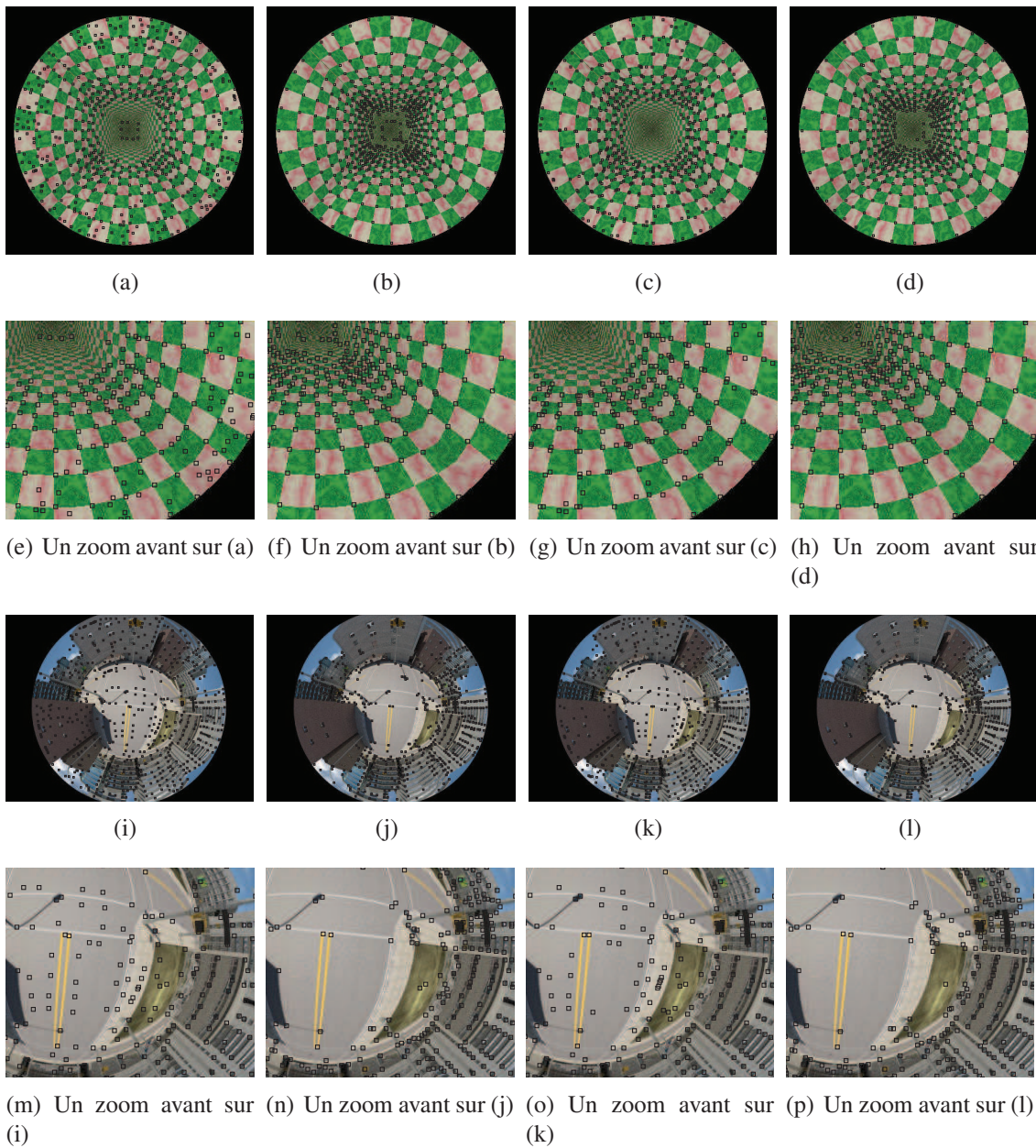
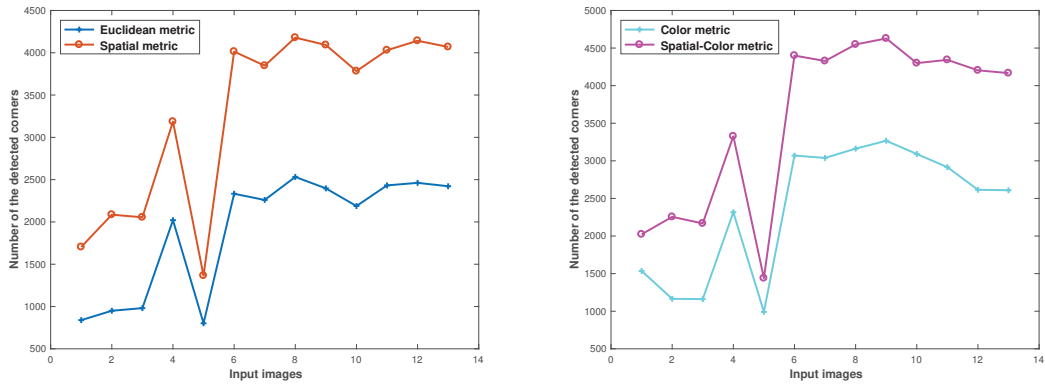
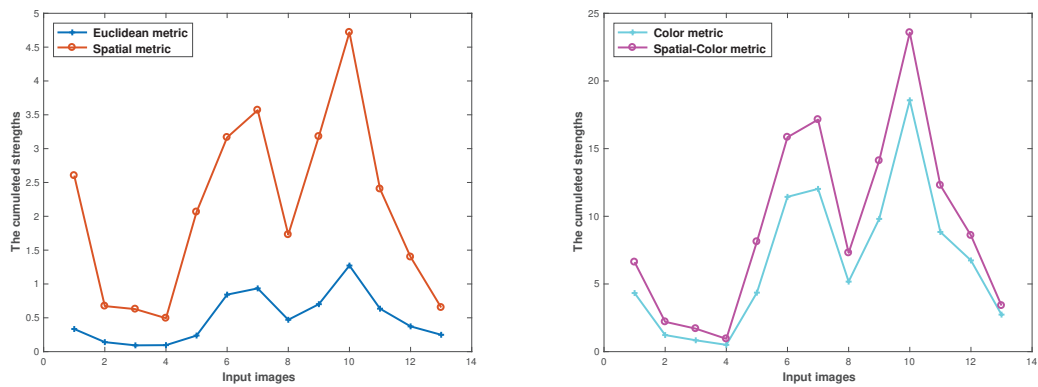


FIGURE 4.19 – Détection des points d'intérêt adaptée aux images catadioptriques en utilisant le noyau Gaussien proposé avec différentes métriques (on affiche sur les figures les 600 réponses les plus fortes) : (a) - (i) la métrique Euclidienne qui conduit à la détection Harris classique; (b) - (j) la métrique spatiale Riemannienne calculée précédemment et qui prend en compte la déformation du miroir; (c) - (k) la métrique couleur; (d) - (l) la métrique hybride spatiale-couleur qui combine à la fois l'information multidimensionnelle couleur et la distorsion du miroir.



(a) Le nombre des points d'intérêt détectés



(b) Les énergies cumulées des 100 plus forts points d'intérêts

FIGURE 4.20 – L'influence de la métrique du noyau Gaussien sur le nombre et l'amplitude de la réponse des coins détectés pour les images catadioptriques. (a) Le nombre total des coins détectés. (b) Les amplitudes cumulées des 100 robustes points d'intérêt.

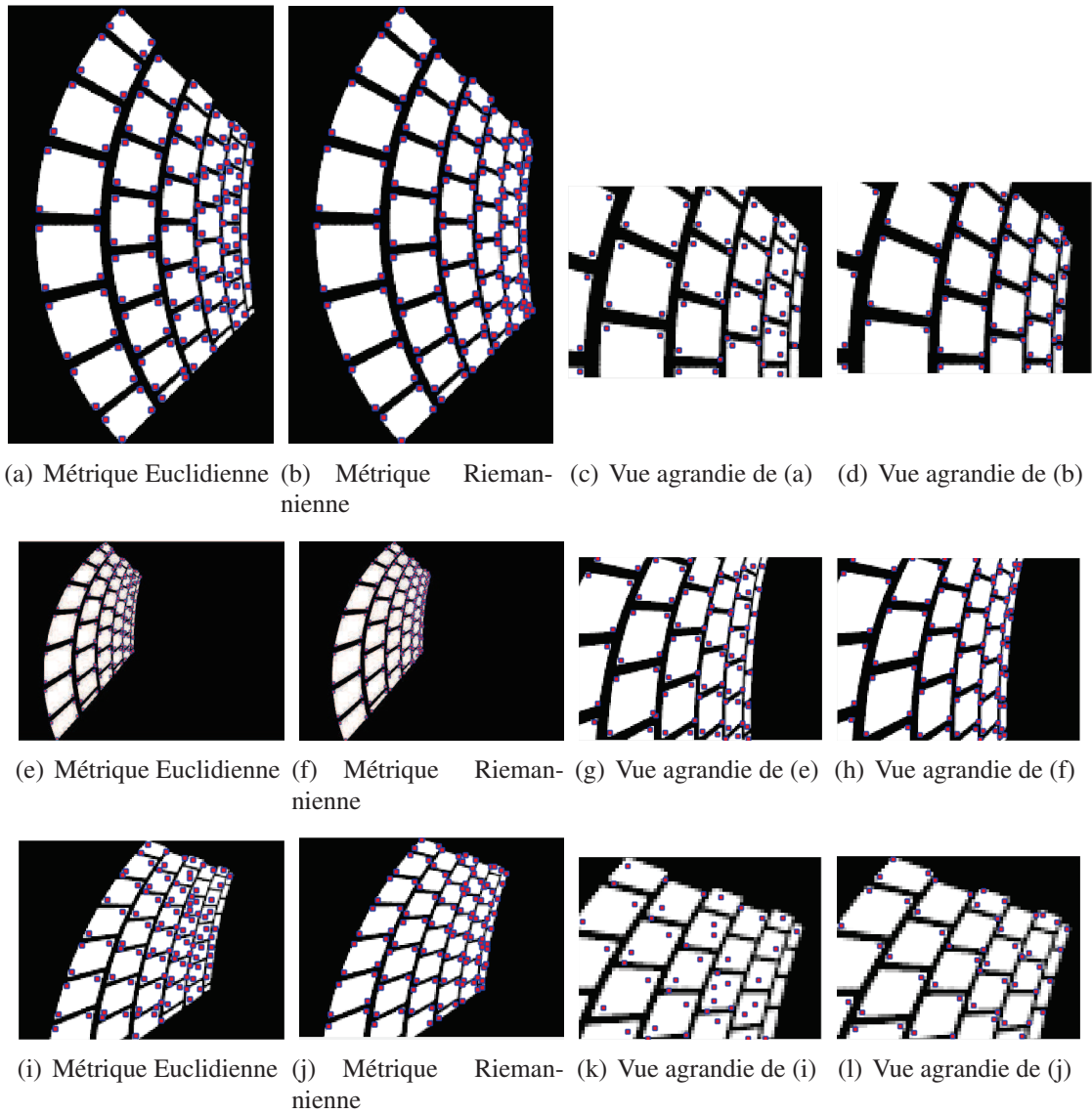


FIGURE 4.21 – Comparaison de la détection des coins en utilisant la métrique Euclidienne et la métrique Riemannienne pour une image de référence (*ligne 1*), et pour l'image transformée par une rotation de  $15^\circ$  et par une translation et rotation de la caméra catadioptrique – (*ligne 2*) et (*ligne 3*) respectivement.

TABLE 4.3 – Le nombre de coins détectés et ceux corrects (matchés avec la vérité terrain) en se basant sur la métrique Euclidienne et la métrique Riemannienne.

Images	En utilisant la métrique Euclidienne		En utilisant la métrique Riemannienne	
	Coins détectés	Coins corrects	Coins détectés	Coins corrects
Image de référence	147	75	171	155
Image transformée 1	159	72	180	148
Image transformée 2	115	29	127	100

TABLE 4.4 – La mesure de précision "ACU" Eq. (4.44) en utilisant la métrique Euclidienne et la métrique Riemannienne.

Images	La mesure de précision "ACU" Eq. (4.44) en utilisant la métrique Euclidienne	La mesure de précision "ACU" Eq. (4.44) en utilisant la métrique Riemannienne
Image de Référence	45.24%	86.11%
Image transformée 1	41.58%	80.05%
Image transformée 2	20,24%	65,68%

coins corrects pour l'image de référence et celles transformées. De plus, la mesure de précision de la localisation des coins dans le tableau 4.4 est améliorée par rapport à la métrique Euclidienne.

## 4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la métrique générique conçue dans le chapitre 3 pour :

- Construire un noyau Gaussien adapté aux images omnidirectionnelles catadioptriques. Ce noyau est largement utilisé en traitement d'image et la vision par ordinateur.
- Exploiter l'opérateur Laplace-Beltrami dans le traitement des images catadioptriques.
- Dédire l'opérateur  $DoG_g$  (Différence de Gaussiennes) adapté.

Afin de mettre en œuvre ces outils et déduire l'influence de la métrique générique, nous avons effectué dans ce chapitre plusieurs expériences :

- Lissage et débruitage en utilisant l'opérateur Laplace-Beltrami avec une métrique Riemannienne adaptée, ou en résolvant l'équation de chaleur aboutissant à la formulation du noyau Gaussien adapté.

- Filtrage en utilisant l'opérateur  $DoG_g$ .
- Analyse de la représentation en multi-échelle adaptée aux images catadioptriques.
- Détection des contours en utilisant la dérivée de la Gaussienne adaptée.
- Détection des points d'intérêt de type coins par la méthode de Harris adaptée.

Les résultats expérimentaux ont permis de valider la théorie et de prouver qu'une exploitation de la géométrie et de la couleur offre des meilleurs résultats.



**Sommaire**

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>90</b>
<b>5.2</b>	<b>Approche Hamilton-Jacobi : théorie et résolution numérique</b>	<b>91</b>
5.2.1	Équation HJ et Équation Eikonal	91
5.2.2	Contours actifs et level-sets	95
5.2.3	Résolution numérique de l'équation HJ	99
5.2.4	Fast Marching	101
<b>5.3</b>	<b>Distances géodésiques Riemanniennes</b>	<b>103</b>
5.3.1	Définitions	104
5.3.2	Carte de distances et équation Hamilton-Jacobi :	105
5.3.3	Fast marching anisotropique	106
<b>5.4</b>	<b>Cartes de distances dans l'image catadioptrique</b>	<b>107</b>
5.4.1	Extraction de l'espace libre	107
5.4.2	Carte de distances aux obstacles	113
5.4.3	Planification de trajectoires optimales	117
<b>5.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>122</b>

---



## 5.1 Introduction

La vision artificielle au sens large constitue l'un des moyens de perception des plus puissants. La vision omnidirectionnelle en particulier constitue une modalité perceptive intéressante, notamment avec les capteurs de type catadioptrique qui offrent une vue panoramique, en une seule prise d'image et avec une seule caméra. D'où son intérêt majeur pour des applications de navigation robotique, en particulier pour la détection de l'espace libre navigable et la planification de trajectoire.

Différentes techniques de segmentation sont utilisées pour la détection de l'espace libre. Elles ont pour objectif de partitionner l'image en régions homogènes et en contours. Les régions homogènes sont supposées correspondre aux parties intéressantes du monde réel et les contours correspondent aux bords apparents des objets. Une telle segmentation est un processus inné pour l'être humain, mais loin d'être trivial en vision artificielle. Elle est au cœur des premières étapes du processus de la perception visuelle, et à ce jour, on trouve de nombreuses méthodes et techniques.

Les contours actifs constituent une classe importante des méthodes de segmentation. Les modèles de contours actifs paramétriques, appelés *snakes*, ont été introduits initialement. L'approche est variationnelle, c'est-à-dire que l'équation d'évolution du contour actif se déduit de la minimisation d'une énergie modélisant l'objet d'intérêt. On trouve également des modèles de contours actifs géodésiques qui reprennent l'approche variationnelle des snakes, où le critère se base sur le calcul de la longueur géodésique du contour. D'autres méthodes, dites géométriques, définissent une équation d'évolution qui ne provient plus de la minimisation d'un critère. Ces approches utilisent une formulation par ensembles de niveaux (*level set*). Un contour actif dans ce cas est représenté par une courbe ou surface solution (niveau 0) d'une équation de type Hamilton-Jacobi. Ces équations gouvernent l'évolution et jouent ainsi un rôle important dans la dynamique de propagation du contour actif. Ce dernier suit ainsi la fonction solution.

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter l'état de l'art concernant ce type d'équations et leur utilisation en analyse et traitement d'images avec la métrique Euclidienne. Ensuite, on montre comment exploiter ces équations dans un espace de configuration non-Euclidien. Ce dernier est, dans notre cadre, l'espace Riemannien muni de la métrique Riemannienne déduite de la géométrie du miroir des images catadioptriques. Enfin, on utilise ces outils Riemanniens pour la définition de cartes de distances qui serviront à l'extraction de l'espace libre d'un robot mobile et à la génération de trajectoires en robotique.

## 5.2 Approche Hamilton-Jacobi : théorie et résolution numérique

L'équation *Hamilton-Jacobi* (HJ) constitue une classe particulière d'équations aux dérivées partielles (EDP) et est utilisée comme modèle mathématique pour la représentation d'une grande variété de phénomènes physiques. On la retrouve ainsi dans plusieurs algorithmes en traitement d'images et vision par ordinateur. Ci-dessous nous introduisons la définition de l'équation *Hamilton-Jacobi* (HJ), et l'équation *Eikonale* qui est un cas particulier des équations HJ. Ces équations n'admettent malheureusement pas toujours de solutions "fortes", nous présentons donc des solutions "faibles", celles qui résolvent l'équation presque partout, dites *solutions de viscosité*. Nous donnons ensuite quelques applications de l'équation d'Eikonal.

### 5.2.1 Équation HJ et Équation Eikonale

#### 5.2.1.1 L'équation HJ

L'équation Hamilton-Jacobi temporelle représente une classe des équations différentielles aux dérivées partielles, définie respectivement par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + H(t, \mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) = 0 & , \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(t = 0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) & , \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

$H$  est le Hamiltonien défini sur  $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $u$  est la fonction inconnue,  $\nabla u$  est son gradient. Cette équation décrit un problème d'évolution avec la donnée de conditions initiales. Pour obtenir de plus amples détails théoriques, le lecteur est invité à se reporter à ces livres [Bardi and Capuzzo-Dolcetta, 2008; Barles, 1994].

#### 5.2.1.2 L'équation Eikonale

L'équation Eikonale représente la version stationnaire de l'équation HJ (5.1). Elle est largement utilisée pour la représentation de l'évolution des interfaces. Une interface est interprétée comme une hypersurface, c'est-à-dire, un contour en 2D et une surface en 3D, qui sépare les régions intérieure et extérieure du domaine d'évolution. On considère l'exemple de la propagation monotone d'un front 2D, qui est donnée par l'équation :

$$\|\nabla\psi(\mathbf{x})\| F = 1 ; \quad \psi(\mathbf{x}) = 0 \text{ pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (5.2)$$

où  $F$  représente la vitesse de propagation du front. La fonction  $F$  peut dépendre de plusieurs facteurs comme la courbure, la direction de la normale, ou d'autres propriétés du milieu. La fonction  $\psi$  décrit le premier temps du passage du front par le point  $\mathbf{x}$  du domaine.  $\nabla\psi$  représente le gradient de  $\psi$  et  $\|\cdot\|$  la norme Euclidienne. Ainsi, l'équation Eikonale (5.2) peut être interprétée en terme de temps optimal nécessaire pour transférer un point  $\mathbf{x}$  du domaine au front par une dynamique appropriée (cf. Fig. 5.1).

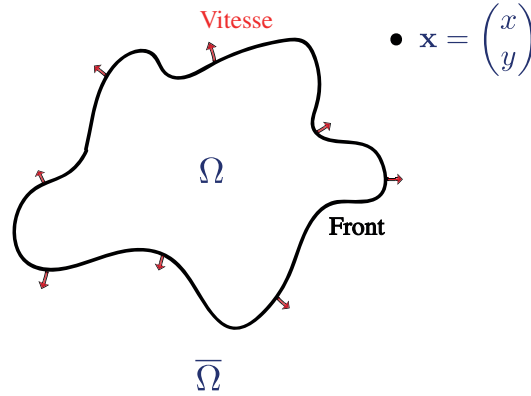


FIGURE 5.1 – Illustration du problème de propagation d'un front.

### 5.2.1.3 Solution de viscosité

Il est difficile et même parfois impossible de construire une solution classique d'un problème faisant intervenir l'équation HJ. Toutefois, il est possible de définir des solutions dites "faibles", des solutions vérifiant l'équation presque partout. Mais on peut trouver des cas simples pour lesquelles ces solutions sont bien trop nombreuses. En particulier, on n'a pas l'unicité. Crandall et Lions [Crandall and Lions, 1983] ont étudié la possibilité d'existence et d'unicité d'une solution "faible", appelée "solution de viscosité". Une solution de viscosité est une application continue pas nécessairement dérivable. On utilise des fonctions tests dérivables à souhait pour estimer  $u$  dans l'équation différentielle malgré sa non-dérivabilité :

**Définition 10.** Une *solution de viscosité* est une application continue qui vérifie les deux conditions suivantes :

- L'application continue  $u$  est une **sous-solution de viscosité** à l'équation de Hamilton-Jacobi si et seulement si pour toute fonction test  $v \in C^\infty$ , vérifiant  $v(t, \mathbf{x}) \geq u(t, \mathbf{x})$  au voisinage d'un point  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  et ,

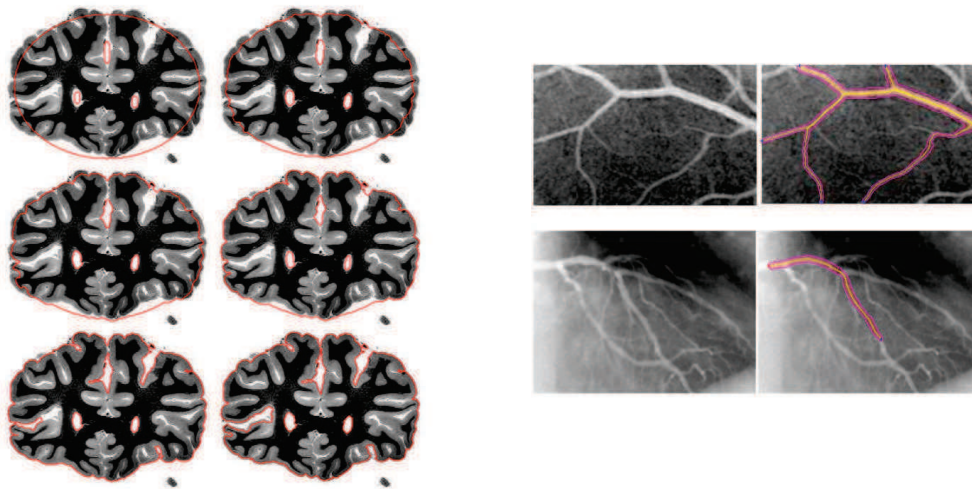
$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + H(t, \mathbf{x}, v(\mathbf{x}), \nabla v(\mathbf{x})) \leq 0 \\ v(t_0, \mathbf{x}_0) = u(t_0, \mathbf{x}_0) \end{cases} \quad (5.3)$$

- L'application continue  $u$  est une **sur-solution de viscosité** à l'équation de Hamilton-Jacobi si et seulement si pour toute fonction test  $v \in C^\infty$ , vérifiant  $v(t, \mathbf{x}) \leq u(t, \mathbf{x})$  au voisinage d'un point  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  et ,

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + H(t, \mathbf{x}, v(\mathbf{x}), \nabla v(\mathbf{x})) \geq 0 \\ v(t_0, \mathbf{x}_0) = u(t_0, \mathbf{x}_0) \end{cases} \quad (5.4)$$

## 5.2.1.4 Applications de l'équation HJ

**Traitement d'images - Segmentation :** La segmentation d'images par les modèles déformables est apparue dans les années 80 dans les travaux de Terzopoulos [Terzopoulos and Fleischer, 1988]. Les premiers modèles paramétriques (les *snakes*) s'appuient sur la minimisation d'un critère sous forme d'une fonctionnelle d'énergie. Plus tard, des modèles déformables géométriques utilisant la théorie de l'évolution de courbes ou level-set [Sethian, 1996, 1999; Sethian et al., 2003] ont rapidement contourné les inconvénients des méthodes paramétriques. L'évolution monotone des courbes est formulée à l'aide de l'équation Hamilton-Jacobi et résolue numériquement par des méthodes rapides comme le Fast Marching (FM). Plus récemment, une méthode plus généralisée de type FM pour l'équation Eikonale avec vitesse changeant de signe a été proposée [Forcadet et al., 2008] (cf. Fig. 5.2(a)). L'équation Eikonale a été utilisée également pour l'extraction de structures tubulaires, où [Benmansour and Cohen, 2011] ont proposé une méthode interactive pour la segmentation des vaisseaux sanguins dans les images médicales 2D et 3D (cf. Fig. 5.2).



(a) Différentes étapes du processus de segmentation d'image avec la méthode du FM généralisée (source [Forcadet et al., 2008]).

(b) Segmentation interactive des vaisseaux sanguins . À droite : les images originales. À gauche : Les images segmentées. (source [Benmansour and Cohen, 2011]).

FIGURE 5.2 – Les méthodes de Fast Marching pour la résolution de l'équation Eikonale appliquées à la segmentation des images.

Les équations de type HJ ont été également utilisées en robotique, en particulier, dans des applications de planification de chemins.

**Robotique - Planification de chemin :** La planification de chemin (*path planning*) consiste à déterminer un chemin, en général optimal (plus court chemin), permettant à un robot de se déplacer entre deux configurations données tout en respectant un certain nombre de critères et de contraintes. L’algorithme A\* est le plus célèbre pour ce type de problématiques. Il est connu par sa simplicité et privilégié pour sa rapidité. Une alternative récente de l’algorithme A\* se base sur la résolution de l’équation Eikonale. Dans cet objectif, différents schémas de calcul ont été proposés comme le Fast Marching Method (FMM) [Sethian, 1996], le Fast Sweeping Method (FSM) [Zhao, 2005] et le Fast Iterative Method (FIM) [Jeong and Whitaker, 2008]. Leur principal avantage est d’offrir une trajectoire de bonne qualité, plus lisse et plus précise.

En robotique, la méthode du FM a été optimisée afin de générer des chemins plus lisses, sécurisés et loin des obstacles [Valero-Gomez et al., 2013a] (Fig. 5.3). Il est aussi possible de combiner le FM avec d’autres méthodes comme de diagramme de Voronoï [Garrido et al., 2006, 2007, 2008] (Fig. 5.4). Des variantes du FM ont été adaptées aux milieux anisotropiques, à titre d’exemple, la planification de trajectoire en milieu sous-marin [Petres et al., 2007].

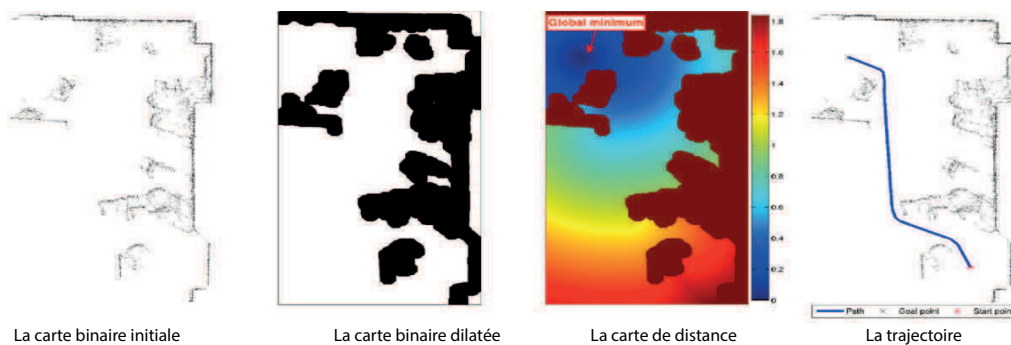


FIGURE 5.3 – Illustration des méthodes de Fast Marching pour la résolution de l’équation Eikonale appliquées à la planification de trajectoire (Sources [Valero-Gomez et al., 2013b; Gómez et al., 2013])

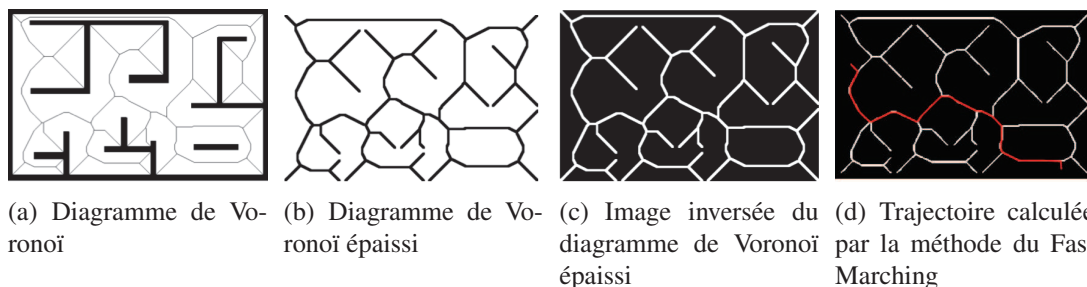


FIGURE 5.4 – Illustration de la méthode du Fast Marching et le diagramme de Voronoï pour la planification de trajectoire (Source [Garrido et al., 2006]).

On voit ainsi que les équations de type Hamilton-Jacobi sont présentes dans de nombreuses situations et applications. Dans la suite, nous focaliserons sur les méthodes de segmentation basées contours actifs et leurs liens avec les équations Hamilton-Jacobi temporelles.

### 5.2.2 Contours actifs et level-sets

Le principe des *contours actifs* est de déplacer progressivement une interface (courbe ou surface pour une image 3D) vers la frontière de l'objet à segmenter. Initialement introduits par [Kass et al., 1988], plusieurs améliorations ont été proposées par la suite dans la littérature.

#### 5.2.2.1 Les contours actifs paramétriques :

Soit  $C(p, t)$  une courbe paramétrée par  $p \in [a, b]$ , et  $t \in [0, T]$  un paramètre d'évolution tel que :

$$C: [a, b] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (5.5)$$

$$(p, t) \mapsto C(p, t) = \mathbf{x}(p, t) = \begin{pmatrix} x(p, t) \\ y(p, t) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

L'évolution de la courbe initiale se base sur la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie totale présente le long de la courbe. On distingue deux types d'énergies : l'une interne de la courbe contrôlant son aspect lisse, et l'autre une énergie externe dépendante de l'image, et qui a le rôle d'entraîner la courbe vers les zones de forts gradients :

$$E_{totale} = E_{interne} + E_{externe} \quad (5.7)$$

$$= \lambda_1 E_{d1}(C) + \lambda_2 E_{d2}(C) + \lambda_3 E_{image}(C) \quad (5.8)$$

$$= \lambda_1 \int |C'|^2 + \lambda_2 \int |C''|^2 - \lambda_3 \int |\nabla I|^2(C) \quad (5.9)$$

où  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$ , sont des paramètres contrôlant la régularité de la courbe. Le paramètre  $\lambda_3 > 0$  permet de faire tendre la courbe vers les frontières de l'objet d'intérêt. En résumé, on cherche à déformer la courbe  $C$  telle que :

- $C$  soit une courbe lisse et donc minimise ses dérivées premières et secondes  $E_{d1}$  et  $E_{d2}$ .
- $C$  épouse les frontières de l'objet à segmenter et délimite donc les zones de forts gradients.

L'évolution de la courbe s'arrête lorsqu'un équilibre est établi entre les forces internes et externes.

Une force de dilatation dans l'équation d'évolution a été rajoutée pour donner des *Snakes Baloons* [Cohen, 1991]. Depuis, des extensions de la méthode des *snakes* ont été développées [McInerney and Terzopoulos, 1995; Xu and Prince, 1997].

L'avantage majeur des contours actifs paramétriques est la rapidité des calculs numériques. Cependant, cette méthode possède des inconvénients, en particulier :

- Elle ne permet pas de segmenter plusieurs objets individuellement.
- Elle dépend de la paramétrisation de la courbe, l'énergie à optimiser n'est pas intrinsèque à l'image.
- La courbe d'initialisation doit être proche de l'objet.
- La courbe ne peut pas changer de topologie, sa topologie finale sera la topologie de la courbe initiale.

Les limites de cette méthode ont orienté les recherches vers une nouvelle formulation se basant sur les distances minimales et non plus vers la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie. Le modèle géodésique des contours actifs a été donc introduit.

#### 5.2.2.2 *Les contours actifs géodésiques :*

Quelques années plus tard, [Caselles et al., 1997a] ont développé une nouvelle méthode de contours actifs, dites géométriques ou géodésiques. Selon ce formalisme, on cherche à minimiser des courbes géodésiques suivant la trajectoire de la distance minimale entre des points données de l'image. Autrement dit, l'énergie à minimiser pour cette méthode est la longueur du contour lui-même en tenant compte des caractéristiques de l'image. La longueur est donnée par la forme :

$$L = \int_a^b f(|\nabla I(C(p))|) |C'(p)| dp \quad (5.10)$$

où  $C$  est la courbe et  $f$  désigne une fonction strictement décroissante telle que  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ . Théoriquement,  $f$  est une fonction d'arrêt de l'évolution du front et prend généralement la forme :

$$f = \frac{1}{1 + |\nabla G_{\sigma} * I|^2} \quad (5.11)$$

Par dérivation du critère de minimisation (5.10), on trouve l'équation d'évolution suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(p,t)}{\partial t} &= F \vec{N} \\ &= [f(|\nabla I(C(p))|) \kappa - \nabla f \cdot \vec{N}] \cdot \vec{N} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$F$  est un terme de vitesse dépendant de la courbure  $\kappa$  et les caractéristiques de l'image.  $\vec{N}$  est le vecteur normal unitaire intérieur à la courbe.

**Interprétation :**

- Sur les zones homogènes où le gradient de l'image est faible ( $|\nabla I| \ll \kappa$ ), on a  $f(|\nabla I|) \approx 1$  et  $\nabla f \cdot \vec{N} \approx 0$ , et donc le contour évolue suivant :

$$\frac{\partial C(p,t)}{\partial t} = \kappa \vec{N} \quad (5.13)$$

- Sur les zones de forts gradients, c'est-à-dire les contours ( $|\nabla I| \gg \kappa$ ), on a  $f(|\nabla I|) \approx 0$  et le contour évolue suivant :

$$\frac{\partial C(p,t)}{\partial t} = -\nabla f(|\nabla I|) \cdot \vec{N} \vec{N} \quad (5.14)$$

À la différence des contours actifs paramétriques, cette formulation a l'avantage d'être intrinsèque, c'est-à-dire, indépendante de la paramétrisation de la courbe.

**5.2.2.3 Level-sets**

Une autre formulation des contours actifs utilise les courbes de niveaux (level-sets) a été proposée initialement par [Osher and Sethian, 1988] puis [Caselles et al., 1993] et [Malladi et al., 1995]. La courbe  $C$ , du domaine  $\Omega$ , est représentée implicitement à l'aide d'une fonction  $u$  dont les propriétés sont les suivantes :

- $u(\mathbf{x}, t) > 0$  à l'extérieur de la courbe.
- $u(\mathbf{x}, t) < 0$  à l'intérieur de la courbe.
- $u(\mathbf{x}, t) = 0$  sur la courbe.

Ainsi,

$$C = \{\mathbf{x} \in \Omega, u(\mathbf{x}, t) = 0\} \quad (5.15)$$

La courbe  $C$  représente ainsi le niveau zéro de la fonction  $u$  (voir Fig. 5.5).

L'équation d'évolution est exprimée comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F \|\nabla u\| \quad \text{avec } F = f(I)(c + \kappa) \quad (5.16)$$

où  $c$  est une constante équivalente à la force "ballon" introduite par [Cohen, 1991],  $\kappa = \text{div}\left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\right)$  et la fonction  $f$  est généralement définie par  $f(I) = \frac{1}{1 + |\nabla G_\sigma * I|^2}$ .

**Remarque 3.** Cherchons à établir le lien entre les deux formulations précédentes, de l'équation d'évolution d'une courbe  $C(t)$  dans la direction de sa normale  $\vec{N}$  utilisée dans la formulation des contours géodésiques (5.17) :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = F \vec{N} \quad (5.17)$$



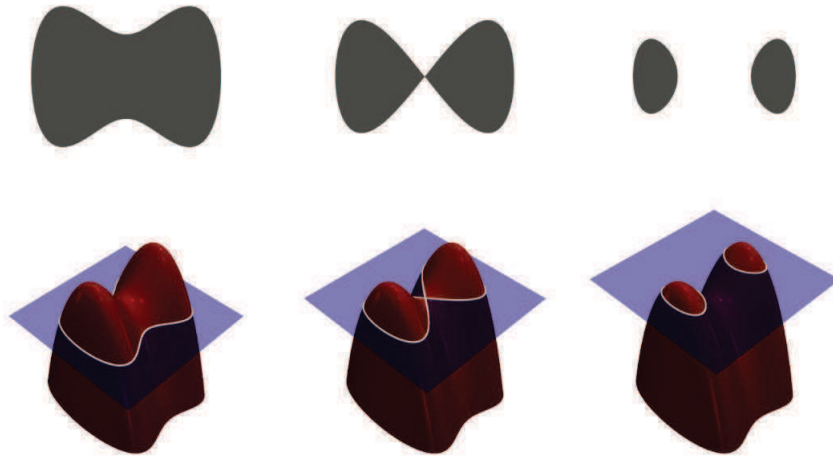


FIGURE 5.5 – Méthode Level-Set : Les contours sur la 1ère ligne correspondent au niveau 0 des cartes des distances sur la 2ième ligne.

et de l'équation (5.16) utilisée dans la formulation des courbes de niveaux (level-sets) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F \|\nabla u\| \quad (5.18)$$

Pour comprendre ce lien, l'idée consiste à déduire la propagation de la courbe  $C(p,t)$  à partir de la propagation de la fonction  $u$ , telle que  $C(p,t)$  est considérée comme le niveau zéro :  $u(\mathbf{x} \in C, t) = 0$ . Dérivons donc l'expression  $u(\mathbf{x} \in C, t) = 0$  par rapport à  $t$  :

$$\nabla u \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (5.19)$$

À partir de (5.17), et par définition de la normale intérieure,  $\vec{N} = -\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$ , on peut écrire :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = F \vec{N} = F \left( -\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) \quad (5.20)$$

En remplaçant dans (5.19), on retrouve ainsi la formulation de la propagation en courbes de niveaux (5.18).

La transformation de ces équations continues de la physique en un problème discret nécessite des méthodes de discrétisation efficaces. Nous présentons ainsi dans la suite, la méthode de résolution numérique et les schémas de discrétisation.

### 5.2.3 Résolution numérique de l'équation HJ

#### 5.2.3.1 Discrétisation de l'équation Eikonale

Les solveurs locaux de l'équation Eikonale se distinguent par le schéma de discrétisation et les approximations des fonctions dérivées. Ils peuvent être classés en trois catégories. La première catégorie consiste à utiliser le schéma décentré amont (*l'upwind finite difference*) [Vidale, 1988; Podvin and Lecomte, 1991; Rouy and Tourin, 1992; Sethian, 1996; Kimmel and Sethian, 1998; Sethian et al., 2003]. Ce schéma est le plus connu grâce à son efficacité et sa précision. La méthode de Vidale est considérée comme l'une des premières tentatives de résolution de l'équation Eikonale par la méthode des différences finies. L'avantage majeur de cette méthode de discrétisation est sa rapidité et sa facilité d'implémentation. La seconde catégorie consiste à utiliser des techniques de programmation dynamiques. Ce sont des approches semi-Lagrangiennes [Bardi and Capuzzo-Dolcetta, 2008; Cristiani and Falcone, 2007] qui s'appuient sur une transformation du problème initial en un problème de temps minimal en théorie du contrôle optimal. La dernière catégorie consiste à utiliser des techniques d'éléments finis [Bornemann and Rasch, 2006; Li et al., 2008] (voir [Ahmed et al., 2011] pour une comparaison étendue).

On utilisera par la suite le schéma par différences finies Upwind.

**Approximation des dérivées :** Étant donnée une grille régulière de dimension  $n$ , on peut approximer les équations différentielles partielles en utilisant l'expansion en série de Taylor. Pour une fonction  $f$  donnée, on a dans un voisinage de  $\mathbf{x}$ , avec  $h$  un petit déplacement :

$$f(\mathbf{x} + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(\mathbf{x}) + o(h^n) \quad (5.21)$$

où  $o(h^n)$  est une fonction négligeable par rapport à  $h^n$ . Dans le cas unidimensionnel, on a,

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + o(\Delta x) \quad (5.22)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + o(\Delta x) \quad (5.23)$$

On obtient ainsi l'approximation du premier ordre :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (5.25)$$

**Le schéma Upwind :** Le principe de construction des méthodes de différences finies consiste à discrétiser les opérateurs différentiels. En remplaçant les dérivées ci-dessus par des différences finies, on peut déduire dans le cas bidimensionnel, les quatre opérateurs de différentiation en un point  $(i, j)$  :

$$\text{Forward : } D_x^+ f_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x}; \quad D_y^+ f_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y}; \quad (5.26)$$

$$\text{Backward : } D_x^- f_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x}; \quad D_y^- f_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (5.27)$$

avec  $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$  et  $f_{i\pm 1,j} = f(x_i \pm \Delta x, y_j)$  et  $f_{i,j\pm 1} = f(x_i, y_j \pm \Delta y)$  .

La méthode Upwind utilise la direction du gradient afin de sélectionner quel opérateur de différentiation utiliser (Forward ou Backward).

La figure 5.6 illustre les quatre situations possibles : dans le premier cas (a), on utilise le schéma des différences finies "backward" pour les deux directions  $x$  et  $y$ . Dans le second cas (b), on utilise le schéma "forward" en  $x$  et  $y$ . Dans le troisième cas (c), le schéma "forward" en  $x$  et "backward" en  $y$ , et pour le dernier cas (d), le schéma "backward" en  $x$  et "forward" en  $y$ .

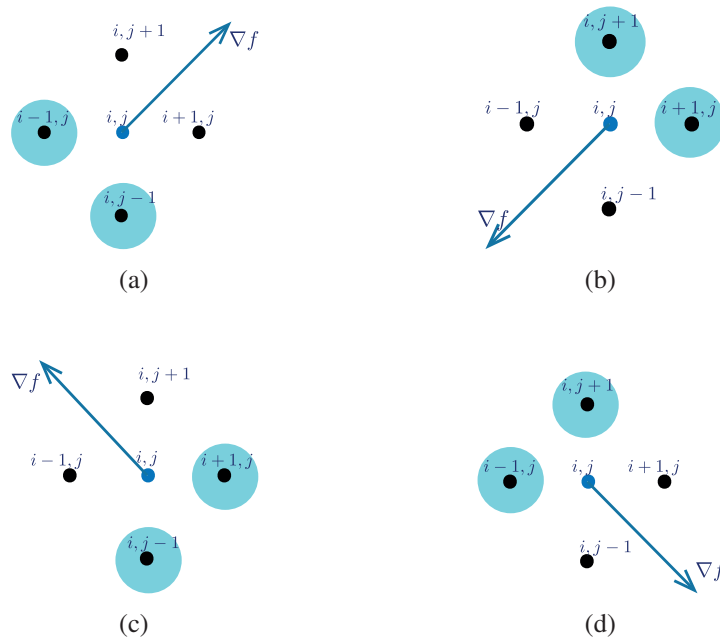


FIGURE 5.6 – Les quatres situations possibles du schéma des différences finies *upwind*.

Enfin, en ré-écrivant l'équation Eikonale (5.2) :  $\psi_x^2 + \psi_y^2 = \frac{1}{F^2(x,y)}$  et en remplaçant les

dérivées partielles par leurs approximations aux différences finies, on obtient la discrétisation de l'équation Eikonale comme suit :

$$\begin{aligned} & \left( \max \left\{ \max \{ D_x^- \psi_{i,j}, 0 \}, -\min \{ D_x^+ \psi_{i,j}, 0 \} \right\} \right)^2 \\ & + \left( \max \left\{ \max \{ D_y^- \psi_{i,j}, 0 \}, -\min \{ D_y^+ \psi_{i,j}, 0 \} \right\} \right)^2 = \frac{1}{F_{i,j}^2} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Par la suite, nous donnons un bref aperçu des méthodes globales pour le problème du front-tracking et nous présentons avec plus de détails la plus célèbre des approches de résolution numérique : la méthode du *Fast Marching*.

#### 5.2.4 Fast Marching

De nombreux algorithmes rapides ont été proposés pour approximer numériquement la solution de la version Euclidienne de l'équation Eikonale (5.34). Le solveur le plus célèbre de l'équation Eikonale est l'algorithme *Fast marching* introduit par [Sethian, 1996] et [Tsitsiklis, 1995]. Cet algorithme est similaire à celui du Dijkstra qui est utilisé en théorie des graphes pour trouver le plus court chemin dans un graphe.

Les méthodes du FM reposent sur le principe de causalité qui stipule que le calcul des valeurs des points s'effectue dans l'ordre croissant à partir des valeurs précédemment calculées. Par conséquent, il n'est pas nécessaire de calculer de nouvelles valeurs dans des zones déjà traversées par le front. Ainsi, le calcul des valeurs de tous les points du domaine s'effectue en un seul passage (single pass).

##### 5.2.4.1 Principe du FM

On propose dans [Sethian, 1996, 1999; Sethian et al., 2003], de diviser le domaine en trois régions distinctes comme illustré sur la figure 5.7 :

- *Accepted* : définit l'ensemble des points appartenant au front initial et qui ont été déjà traversés par le front. Les solutions pour ces points sont donc déjà calculées et les valeurs ne peuvent plus être modifiées.
- *Narrow-Band* : inclut l'ensemble des points voisins des nœuds acceptés à une itération donnée.
- *Far* : définit l'ensemble des points pour lesquels la solution n'est pas encore calculée, ils ne sont pas encore traversés par le front.

Le principe général de l'algorithme, illustré sur la Fig. 5.8, peut être décrit comme suit :

*Initialisation* : (Fig. 5.8(a) et (b))

1. Marquer *Accepted* les nœuds appartenant au front initial. Leur valeur est  $\psi = 0$ .

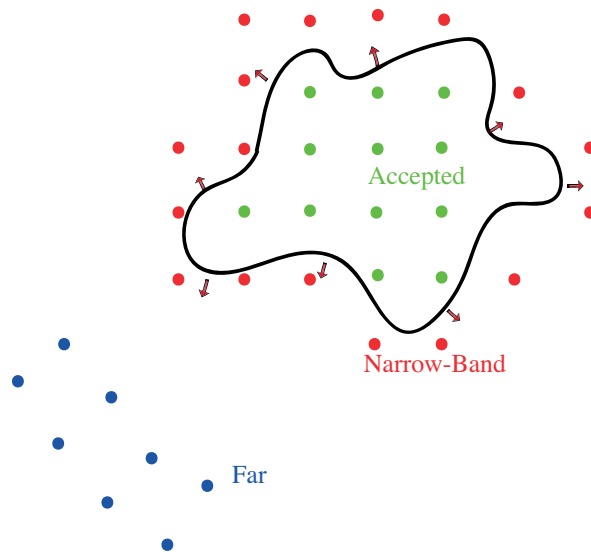


FIGURE 5.7 – Décomposition du domaine en trois régions pour l’application du Fast Marching.

2. Marquer *Narrow-Band* (*NB*) les nœuds voisins du front initial. Le voisinage d’un point  $\mathbf{x}$  est défini tel que  $V(\mathbf{x}) = \{(x_{i+1}, y_i), (x_{i-1}, y), (x_i, y_{i+1}), (x_i, y_{i-1})\}$ .
3. Marquer *FAR* le reste des points. Leur valeur est  $\psi = +\infty$ . (En pratique, un nombre maximum).

*Cycle principal : Propagation du front*

1. Calculer la valeur minimum de  $\psi$  pour chaque point de la zone *Narrow-Band*. Pour un point donné de la *Narrow-Band*, on note  $A$  le nœud ayant la solution minimum (Fig. 5.8 (c)).
2. Retirer de la zone *Narrow-Band* le nœud  $A$  qui a la solution la plus petite dans son voisinage et le marquer comme *Accepted* (Fig. 5.8 (d)).
3. Marquer *Active* tout nœud dans le voisinage de  $A$ . Si parmi les nœuds actifs se trouvent des nœuds marqués *FAR*. Ils sont transférés à la *Narrow-Band* (Fig. 5.8 (e)).
4. Calculer (ou recalculer) la valeur de  $\psi$  (en résolvant l’Eq. (5.28)).
5. Retourner à l’étape 1 tant que l’ensemble *Narrow-Band* n’est pas vide (Fig. 5.8 (f)).

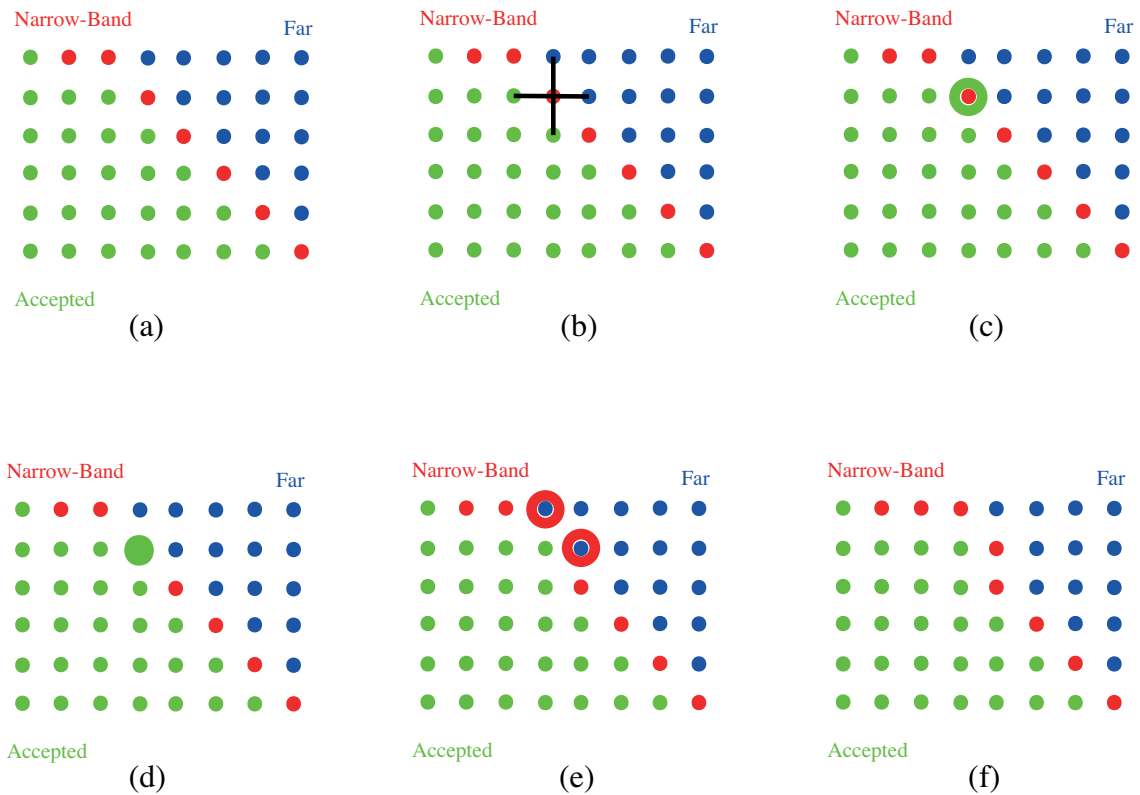


FIGURE 5.8 – Les étapes de la méthode du Fast Marching sur un voisinage pour la propagation d'un front.

### 5.3 Distances géodésiques Riemanniennes

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons étudié la version Euclidienne des équations de Hamilton-Jacobi et nous avons constaté qu'elles apparaissent dans de nombreux domaines scientifiques. Dans le cadre de traitement d'images catadioptriques, nous utiliserons ces équations pour formuler des problèmes liés au calcul de trajectoires dans l'espace libre omnidirectionnel d'un robot. Ces équations nous seront utiles en particulier pour calculer des cartes de distances et des géodésiques, qui serviront à délimiter l'espace libre d'un robot mobile et à estimer un chemin optimal entre deux positions données. Notons que les images catadioptriques ayant été considérées comme variétés Riemanniennes, la version Euclidienne des équations HJ n'est plus adaptée. Elle ne prend pas en compte les déformations géométriques dues au miroir catadioptrique. Pour cette raison, la problématique de calcul des distances sera abordée dans un cadre Riemannien doté de la métrique induite.

Avant de définir l'expression des équations HJ, temporelle et stationnaire, sur les variétés Riemanniennes, nous introduisons brièvement les géodésiques et les cartes de

distances Riemanniennes.

### 5.3.1 Définitions

#### Définition 11. Géodésique :

Une courbe  $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  paramétrée par  $t \in I$  est appelée **géodésique** si et seulement si  $\dot{\gamma}(t)$  est parallèle le long de  $\gamma(t)$ , c'est-à-dire, à chaque point  $p \in \gamma(t)$ , la dérivée covariante de  $\dot{\gamma}(t)$  est nulle :

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}(t) = 0 \quad (5.29)$$

Les géodésiques présentent un grand intérêt pour la géométrie Riemannienne. Ce sont les courbes qui minimisent localement la distance entre les points de la variété. Les exemples les plus familiers de géodésiques sont les lignes droites en géométrie Euclidienne. Dans le cas d'une surface sphérique, les géodésiques sont des « grands cercles », c'est-à-dire, que le trajet le plus court entre deux points quelconques A et B est l'arc de cercle qui a pour centre, le centre de la sphère, pour rayon, le rayon de la sphère, et qui passe par A et B (Fig. 5.9).

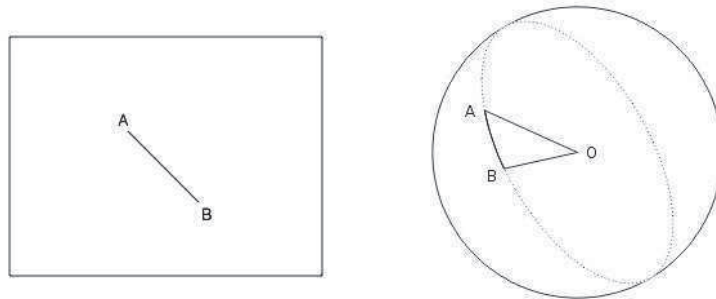


FIGURE 5.9 – Exemples de géodésiques : la ligne droite entre les points A et B sur le plan Euclidien (à gauche), et l'arc entre A et B du grand cercle sur la sphère (à droite).

#### Définition 12. Distance Riemannienne :

Soit  $(M, G)$  une variété Riemannienne et  $\gamma(t)$  la géodésique joignant deux points  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ . La plus courte **distance Riemannienne**  $d_G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est définie par :

$$d_G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf \left\{ \int_0^T \sqrt{G(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \right\}; \quad \text{telle que } \begin{cases} \gamma(0) = \mathbf{x} \\ \gamma(T) = \mathbf{y} \end{cases} \quad (5.30)$$

On peut fixer un ensemble de points  $S \in M$  et généraliser la définition ci-dessus à une carte de distances aux points de l'ensemble  $S$ .

**Définition 13. Carte de distances Riemannienne :**

La *carte de distances Riemannienne*, appelée aussi *transformée de distances*, aux points d'un ensemble  $S \in (M, G)$  est la fonction qui associe à chaque point  $x \in M$ , la distance Riemannienne au point  $y \in S$  le plus proche. Elle est définie par :

$$D_G(\mathbf{x}, S) = \inf_{\mathbf{y} \in S} d_G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x} \in M \quad (5.31)$$

que nous noterons  $G_S$  dans la suite. Si la métrique utilisée est Euclidienne, on obtient la carte des distances Euclidienne.

**5.3.2 Carte de distances et équation Hamilton-Jacobi :**

Le problème de calcul de carte de distances peut être transformé en un problème de résolution d'une équation différentielle partielle. En effet, il a été démontré que la carte de distances  $D_S$  est une solution *unique et faible*, qu'on appelle généralement *solution de viscosité* [Crandall and Lions, 1983], à l'équation Hamilton-Jacobi [Bagnerini et al., 2001],

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \|\nabla_G \psi\|_G \quad (5.32)$$

où  $\|\nabla_G \psi\|_G = \sqrt{\nabla \psi^T G^{-1} \nabla \psi}$  est la norme du gradient Riemannien.

Nous renvoyons le lecteur à [Mantegazza and Mennucci, 2002] pour une étude mathématique exhaustive de l'équation Hamilton-Jacobi et la fonction de distances sur les variétés Riemanniennes.

**Remarque 4.** La carte de distances  $D_S$  à l'ensemble des points de  $S$  peut être également considérée comme le temps d'arrivée (arrival time) d'un front qui se propage à partir des points de l'ensemble  $S$  et à une vitesse contrôlée par la métrique  $G$ .

De façon analogue au cas Euclidien, il a été démontré que l'équation évolutive (5.32) dépendante du temps peut être remplacée par sa formulation stationnaire, l'équation Eikonale Riemannienne :

$$\|\nabla_G \psi\|_G = 1 \quad (5.33)$$

La métrique  $G$  joue un rôle important et peut prendre différentes formes selon l'application finale désirée. Dans le cas particulier d'une métrique Euclidienne pondérée par une fonction scalaire  $G = F^2 \delta_{ij}$ , on retrouve l'équation Eikonale classique :

$$\|\nabla \psi\| = F \quad (5.34)$$

où la notation  $\|\cdot\|$  indique la norme standard Euclidienne.



### 5.3.3 Fast marching anisotropique

De nombreux algorithmes rapides ont été proposés pour approximer numériquement la solution de la version Euclidienne de l'équation Eikonale (5.34). L'algorithme Fast Marching classique est limité aux métriques isotropes sur une grille régulière. Cependant, pour traiter des variétés Riemanniennes arbitraires plongées dans  $R^n$ , il faudrait modifier la solution discrète classique de l'équation Eikonale.

L'une des premières tentatives destinée à traiter l'équation Hamilton-Jacobi sur une variété Riemannienne est due à [Bagnerini et al., 2001; Hoch and Rasclé, 2002] dans le cadre de la génération anisotropique de mailles et du raffinement automatique dans certaines régions particulières. Plus tard, [Estépar et al., 2005] dérive une formulation Riemannienne des courbes de niveaux (level-set) pour une application de segmentation d'images médicales en s'appuyant sur le flux de courbure moyenne.

Kimmel et Sethian [Kimmel and Sethian, 1998] ont développé une version de l'algorithme Fast Marching pour une surface  $M \subset R^n$  munie d'une métrique spécifique. L'algorithme de Kimmel et Sethian opère sur un maillage triangulé, et traite les triangles de ce maillage comme étant localement plats et équipés d'une métrique isotrope (Fig. 5.10). Le même algorithme a été utilisé [Peyré and Cohen, 2009; Peyré et al., 2010] avec une métrique anisotrope, dans plusieurs applications du calcul numérique des distances géodésiques et chemins, en particulier pour les problèmes liés à l'analyse de surfaces, génération de mailles et comparaison des formes.



FIGURE 5.10 – (a) Maillage triangulaire. (b) Exemple de propagation par Fast Marching sur un domaine triangulé (Source [Peyré and Cohen, 2009]).

Dans le cadre de notre travail sur les images catadioptriques considérées comme des variétés Riemanniennes, nous utilisons des métriques Riemanniennes, géométrique et couleur, pour tenir compte des distorsions radiales dans les images catadioptriques et de l'information multidimensionnelle de la couleur. Ces métriques sont intégrées dans l'équation Eikonale Riemannienne. Le cadre d'application est la navigation robotique, en particulier, l'extraction de l'espace libre navigable et la planification de trajectoires. Pour la résolution numérique, nous adaptions l'algorithme du FM anisotropique [Kimmel and Sethian, 1998] avec un schéma de différences finies optimal sur le domaine approximé.

## 5.4 Cartes de distances dans l'image catadioptrique

Après avoir présenté des outils théoriques de la géométrie Riemannienne, notamment le calcul de distances géodésiques, nous allons les mettre en œuvre dans des tâches de navigation de robots mobiles basées sur la perception omnidirectionnelle visuelle uniquement. Nous construisons d'abord un *espace libre* d'obstacles pour le déplacement du robot, suivi de la planification d'une *trajectoire optimale* avec évitement d'obstacles entre deux configurations quelconques de l'espace libre.

Nous montrerons en particulier que le cadre unifié du plongement Riemannien permettrait d'adapter les métriques induites à chaque étape du processus de la tâche de navigation.

### 5.4.1 Extraction de l'espace libre

#### 5.4.1.1 Définition de l'espace libre omnidirectionnel

La première phase dans la stratégie de navigation que nous proposons consiste à délimiter l'espace libre de navigation du robot. Cette caractérisation a été formalisée mathématiquement dans la thèse de [Merveilleux-Orzekowska, 2012] en utilisant la propagation de contours actifs dans l'image omnidirectionnelle. Dans ce modèle de détection d'espace libre, basé sur la vision omnidirectionnelle uniquement, il est supposé que les régions définissant l'espace libre sont approximativement homogènes (intensité photométrique approximativement uniforme). La carte des contours (edge map) sert dans ce cas de support pour la délimitation des frontières de l'espace libre.



FIGURE 5.11 – Image omnidirectionnelle prise par une caméra catadioptrique et l'espace libre extrait dans l'image (zone blanche).

Soit  $I$  une image définie sur un domaine  $\Omega$ , un sous espace de  $\mathbb{R}^2$ . Le contour initial de l'espace libre est défini à proximité du robot, par une courbe fermée  $\gamma(t=0)$  à une distance fixée  $r$  du centre de l'image :

$$\gamma(t=0) := \{x \in I; |d(x, x_o) - r| \leq \varepsilon\} \subset \Omega, \quad r > 0, \quad \varepsilon \geq 0 \quad (5.35)$$

où  $x_0$  représente le point central de l'image omnidirectionnelle. La distance  $r$  est définie de sorte que le contour initial encapsule simultanément la zone aveugle<sup>1</sup> et la projection du robot dans l'image. Par la suite,  $\gamma(t)$  est considérée comme une courbe fermée dynamique paramétrée par l'abscisse curviligne  $s \in [0; 1]$  telle que  $\gamma(s = 0, t) \equiv \gamma(s = 1, t)$ . L'espace libre omnidirectionnel dans le champ visuel du robot est défini comme suit :

**Définition 14. Espace libre omnidirectionnel** [Merveilleux-Orzekowska, 2012]

Considérons l'évolution dynamique du contour comme un chemin,  $\alpha: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tel que  $\alpha(t) = \gamma(s, t)$  et  $\alpha(0) = \gamma(s, t = 0)$  correspondant au contour défini initialement dans l'image. La surface de l'espace libre est définie comme l'ensemble des chemins traversés par le contour actif jusqu'à convergence (voir exemple Fig. 5.11).

Dans [Merveilleux-Orzekowska, 2012], il a été proposé un modèle de contours actifs qui permet l'extraction de l'espace libre directement dans l'image omnidirectionnelle. Ce modèle, dit "géo-paramétrique", est fondé sur l'évolution des courbes de Bézier. Il permet, comme pour le modèle géométrique (level-set), de segmenter les composantes connexes dans l'image. Il est aussi caractérisé d'être rapide, d'un point de vue computationnel, comme pour le modèle paramétrique (snakes). La Fig. 5.12 présente des exemples de résultats d'extraction d'espaces libres omnidirectionnels avec la méthode géo-paramétrique.

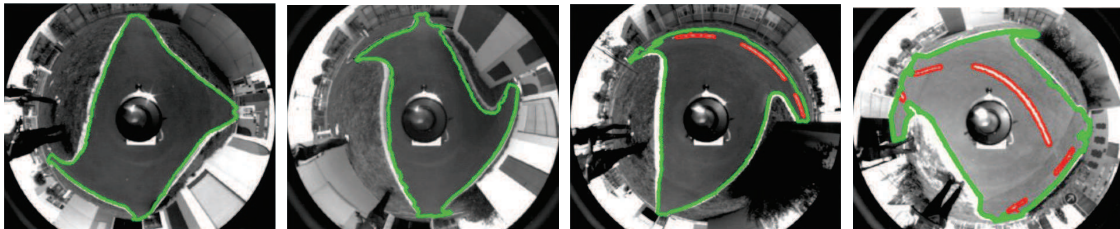


FIGURE 5.12 – Exemples de résultats d'extraction d'espaces libres omnidirectionnels avec la méthode géo-paramétrique [Merveilleux-Orzekowska, 2012].

La méthode a prouvé ses performances dans différents environnements, toutefois, elle présente quelques limites dans certaines situations. Ces limites sont liées en particulier aux traitements des images en niveaux de gris. Lorsque la variation de l'intensité (le gradient) n'est pas assez forte, il arrive que l'espace libre incorpore des obstacles dont l'intensité est proche de celle du sol. La Fig. 5.13 illustre des situations où des obstacles s'infiltrèrent dans le domaine de l'espace libre détecté par la méthode géo-paramétrique.

L'objectif de notre travail est de montrer l'apport du plongement Riemannien pour l'extraction de l'espace libre relativement à une métrique Euclidienne. Dans cette section, nous proposons une adaptation Riemannienne de l'extraction de l'espace libre, en

1. Elle englobe la projection du support du capteur dans l'image.

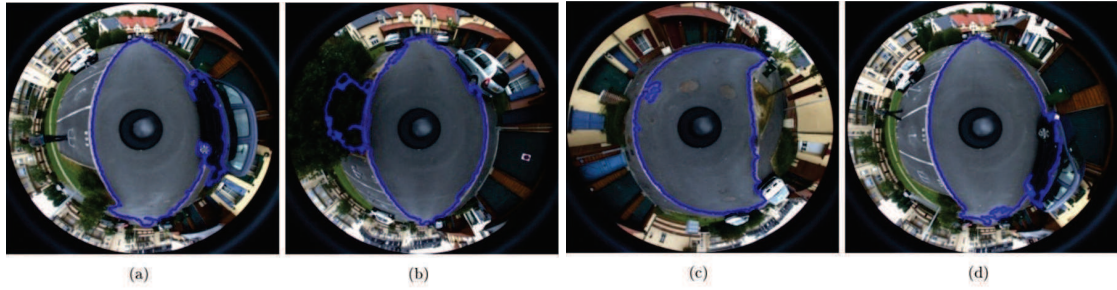


FIGURE 5.13 – Exemples de situations où l’algorithme ne détecte pas correctement l’espace libre. (a)(b) La transition entre espace libre et obstacle est par endroit trop lente, permettant à l’espace libre d’incorporer des obstacles à son domaine. (c) La présence de composante connexe (bouche d’égout) est trop proche des frontières de l’espace libre, elle y est intégrée. (d) Les reflets de la lumière sur la route et les ombres (des roues) impactent l’information photométrique (Source [Marie, 2014]).

utilisant un algorithme du Fast Marching anisotropique avec une distance Riemannienne couleur, et la définition des cartes de distances associées. Nous proposerons par la suite une extension vers la génération de chemin optimal pour rallier géodésiquement deux points quelconques de l’espace libre.

#### 5.4.1.2 Construction de la métrique

Comme mentionné ci-dessus, notre modèle de détection de l’espace libre s’appuie sur l’information couleur et les contours dans l’image. Nous exploitons donc la métrique Riemannienne contrôlant la propagation du front à partir du tenseur de structure de Dizzeno introduit précédemment (Sec. 3.2). Son expression est donnée par la matrice symétrique,

$$T = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m (I_x^i)^2 & \sum_{i=1}^m I_x^i I_y^i \\ \sum_{i=1}^m I_x^i I_y^i & \sum_{i=1}^m (I_y^i)^2 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Le tenseur de structure peut être décomposé en une combinaison linéaire de ses vecteurs propres  $(v_1, v_2)$  pondérés par ses valeurs propres  $(\lambda_1, \lambda_2)$ ,

$$T = \lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T \quad (5.37)$$

Si  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ , la direction de  $\lambda_1$ , à savoir  $v_1$ , est alignée avec le gradient et indique l’orientation locale préminente. La Fig. 5.14 représente les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  pour l’image dans la Fig. 5.11.

On peut voir la prééminence de la valeur  $\lambda_1$  correspondant aux contours dans l’image. Notons que cette *edge map* est basée sur la couleur (et non sur le niveau de gris comme dans les précédents travaux).

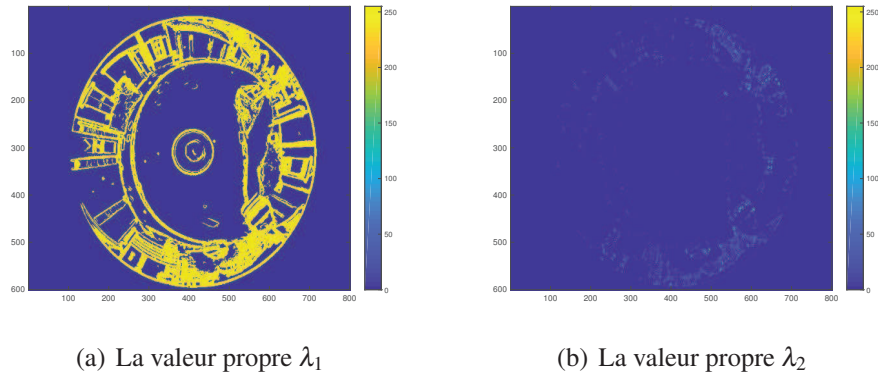


FIGURE 5.14 – Les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  du tenseur de structure (5.37) pour l’image de la Fig. 5.11.

À partir de la dernière expression du tenseur de structure  $T$ , on construit la métrique Riemannienne  $G_c$  comme indicateur des contours :

$$G_c = \lambda_1 v_1 v_1^T \quad (5.38)$$

La Fig. 5.15 représente les éléments de la métrique  $G_c$ . Cette métrique nous servira dans

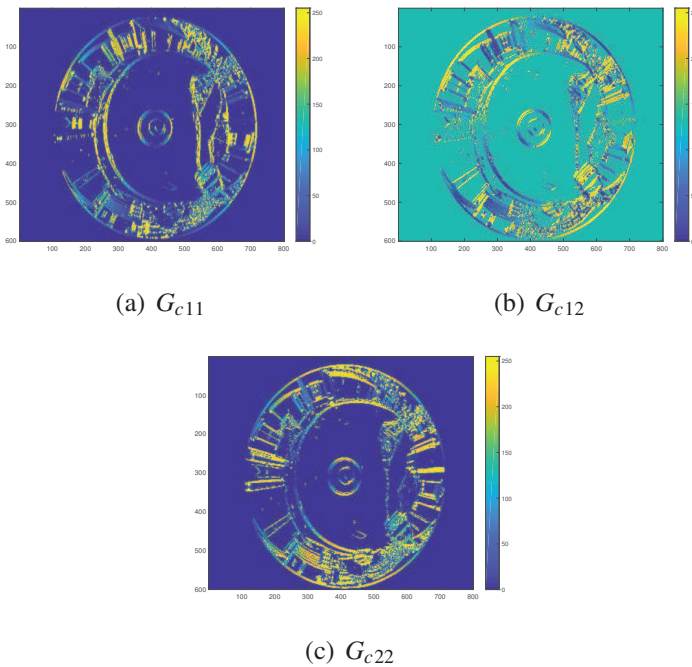


FIGURE 5.15 – Les éléments du tenseur métrique  $G_c$ .

la suite pour le calcul de la carte des distances colorimétrique, et ensuite, pour l'extraction de l'espace libre.

#### 5.4.1.3 Carte des distances colorimétrique

La carte des distances colorimétrique est déduite par propagation d'un front initialisé au centre de l'image et régulé par la métrique couleur  $G_c$ . Ainsi, le problème de propagation du front est formulé à l'aide de l'équation Eikonale Riemannienne :

$$\sqrt{\nabla\psi^T G_c^{-1} \nabla\psi} = 1 \quad (5.39)$$

La propagation est anisotropique en raison de l'intégration de la métrique  $G_c$ .

La solution de viscosité de l'équation Eikonale (5.39) est la carte de distances géodésique  $D_c$ . Cette carte est approximativement de valeur nulle dans les régions de faible gradient colorimétrique. En revanche, elle possède de grandes valeurs le long des régions de fort gradient (les contours couleur). De cette façon, l'espace libre est extrait à l'aide de cette carte et correspond aux régions où  $D_c \approx 0$ . La Fig. 5.16 illustre la carte des distances colorimétrique et l'espace libre correspondant.

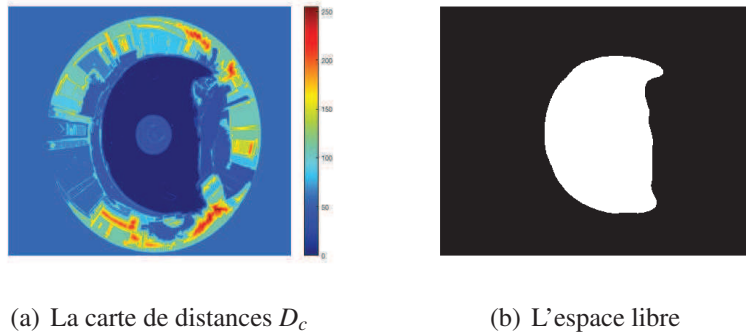


FIGURE 5.16 – (a) La carte des distances colorimétrique. (b) L'extraction de l'espace libre.

Des exemples d'extraction de l'espace libre dans des images catadioptriques omnidirectionnelles de synthèse et réelles sont donnés en Fig. 5.17. On peut observer, comparativement au cas Euclidien, l'efficacité de la carte des distances colorimétrique à mieux délimiter l'espace libre. Le principal avantage qui découle de cette formulation de géodésiques colorimétriques est qu'elle présente un fondement mathématique robuste qui permet d'inclure efficacement l'aspect multidimensionnel dans le traitement du problème. Le tenseur de structure permet de construire une métrique qui reflète une "bonne" mesure de la distance entre les couleurs (*color edge map*).

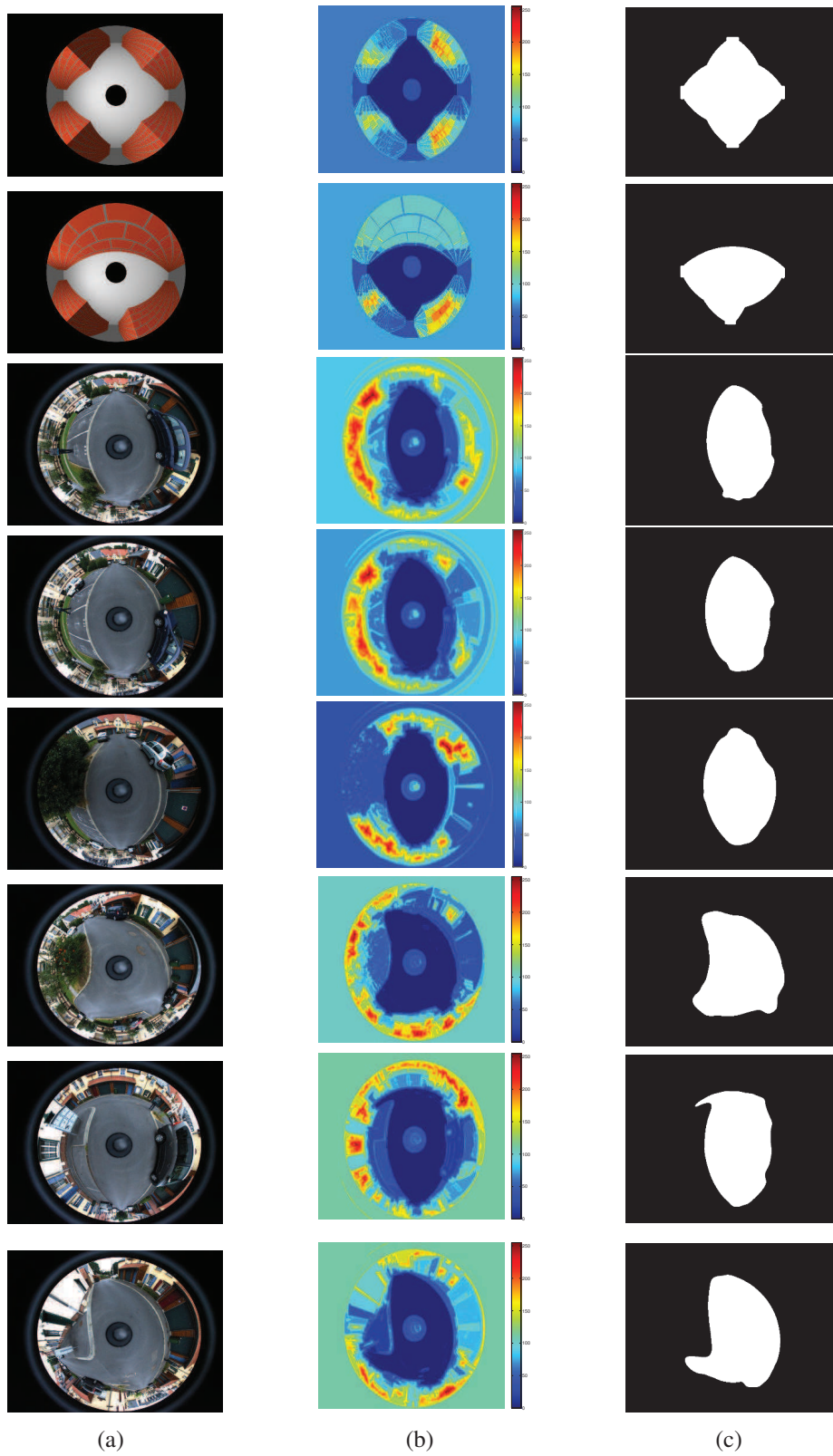


FIGURE 5.17 – Détection de l'espace libre omnidirectionnel. (a) L'image originale. (b) Carte de distances colorimétrique. (c) Espace libre calculé par le FM anisotropique.

### 5.4.2 Carte de distances aux obstacles

Étant donné l'espace libre d'une image catadioptrique, l'objectif est d'assigner à chaque point du domaine une valeur égale à sa distance au point appartenant au bord d'obstacle le plus proche. Ce processus produit une carte de distances (ou transformée de distances) et se base généralement sur la métrique Euclidienne. Au niveau des contours de la forme de l'espace libre (frontières du domaine), les valeurs de la carte de distances sont nulles et augmentent d'autant qu'on en s'éloigne.

Pour déterminer la transformée de distances, on commence par initier un front sur les frontières de l'espace libre. On fait ensuite évoluer le front vers le centre de l'image catadioptrique et on calcule les cartes de distances géométriques en résolvant les équations Eikonales Euclidienne (5.34) et Riemannienne (5.33), en utilisant les métriques Euclidienne et Riemannienne de l'image catadioptrique, respectivement.

Afin de montrer la pertinence du traitement Riemannien, nous comparons les deux cartes de distances. Les résultats sont présentés dans les Fig. 5.18 et Fig. 5.19 pour des images réelles et de synthèse. Dans le but de comprendre ces résultats, on transforme les images en *bird-eye-views* Fig. 5.18c et d, où les images remappées sont des projections orthographiques dans le plan du sol. Cette projection est adaptée au système de vision humaine et permet une meilleure visualisation et interprétation.

On remarque que les deux cartes de distances et leurs correspondantes *bird-eye-views* sont différentes. Pour la méthode Euclidienne, le résultat obtenu Fig. 5.18a est conforme aux distances attendues dans l'image (domaine de  $\mathbb{R}^2$ ). Toutefois, la projection dans le plan du sol Fig. 5.18c produit une vue qui n'est pas conforme aux mesures de distances dans l'environnement réel. En ce qui concerne la méthode Riemannienne, les résultats observés Fig. 5.18b sont opposés au cas Euclidien. La *bird-eye-view* Fig. 5.18d montre que l'utilisation de la métrique Riemannienne des images catadioptriques fournit des résultats pertinents et qui sont en parfaite adéquation avec la scène perçue.

En observant les cartes de distances Fig. 5.18 et Fig. 5.19, on constate le phénomène de crête qui correspond aux maximas locaux des transformées de distances. Ces crêtes caractérisent les axes médians (ou squelettes) de l'espace libre (domaine délimité par les frontières des obstacles). Notons que ces lieux sont les plus éloignés des frontières du domaine (obstacles) et peuvent constituer ainsi les supports des chemins sûrs pour la navigation du robot.

Les problèmes liés à la squelettisation ont été largement explorés pour les images perspectives. Cependant, peu de travaux [Marie et al., 2014, 2018] s'intéressent à ces problèmes pour les images catadioptriques, qui sont relativement complexes à traiter à cause de leur anamorphose. La plupart des méthodes existantes se contentent donc des algorithmes développés pour les images conventionnelles. La méthode de squelettisation d'images omnidirectionnelles proposée dans [Marie et al., 2014], appelée "Omnidirec-



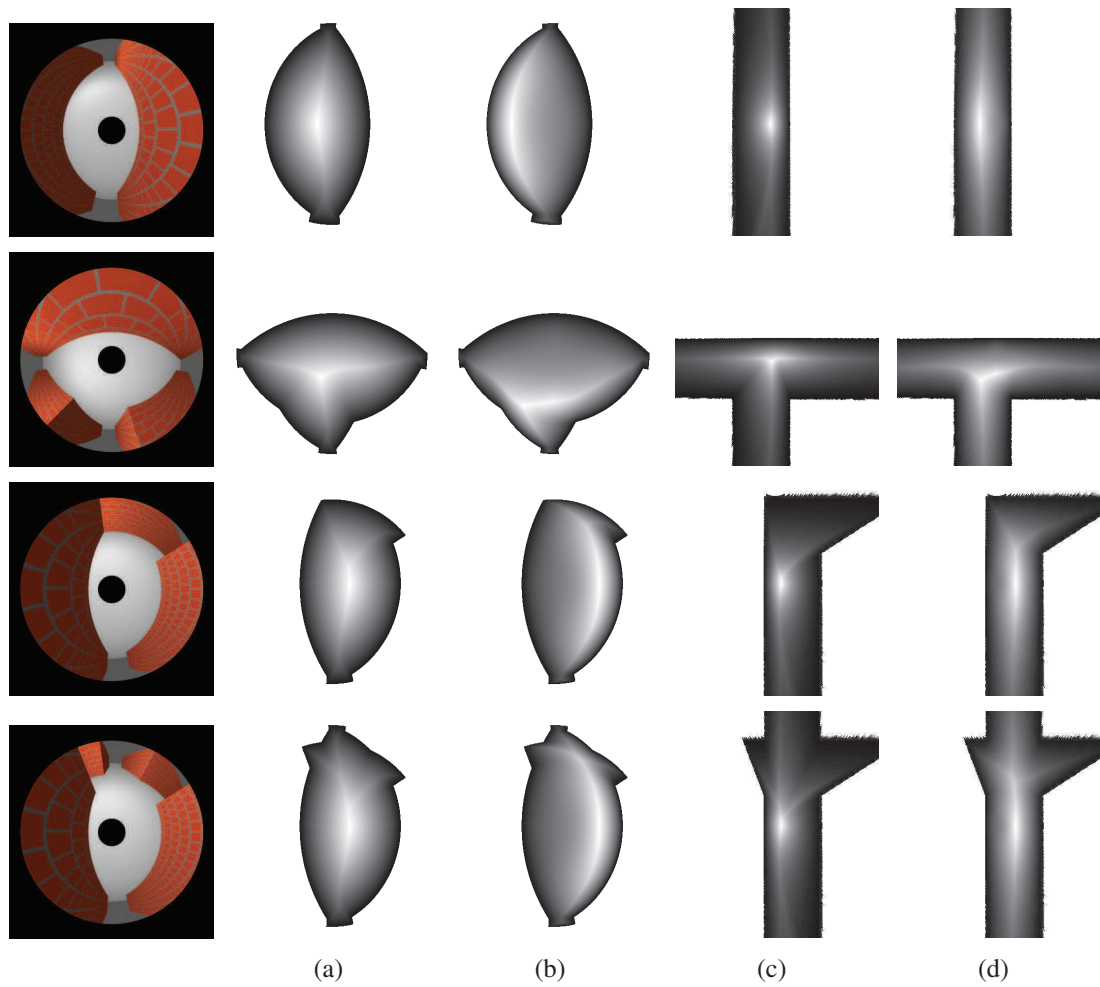


FIGURE 5.18 – Comparaison, sur des images catadioptriques de synthèse, des cartes de distances Euclidienne (a) et Riemannienne (b) et leurs projections bird-eye-views (c) et (d) respectivement.

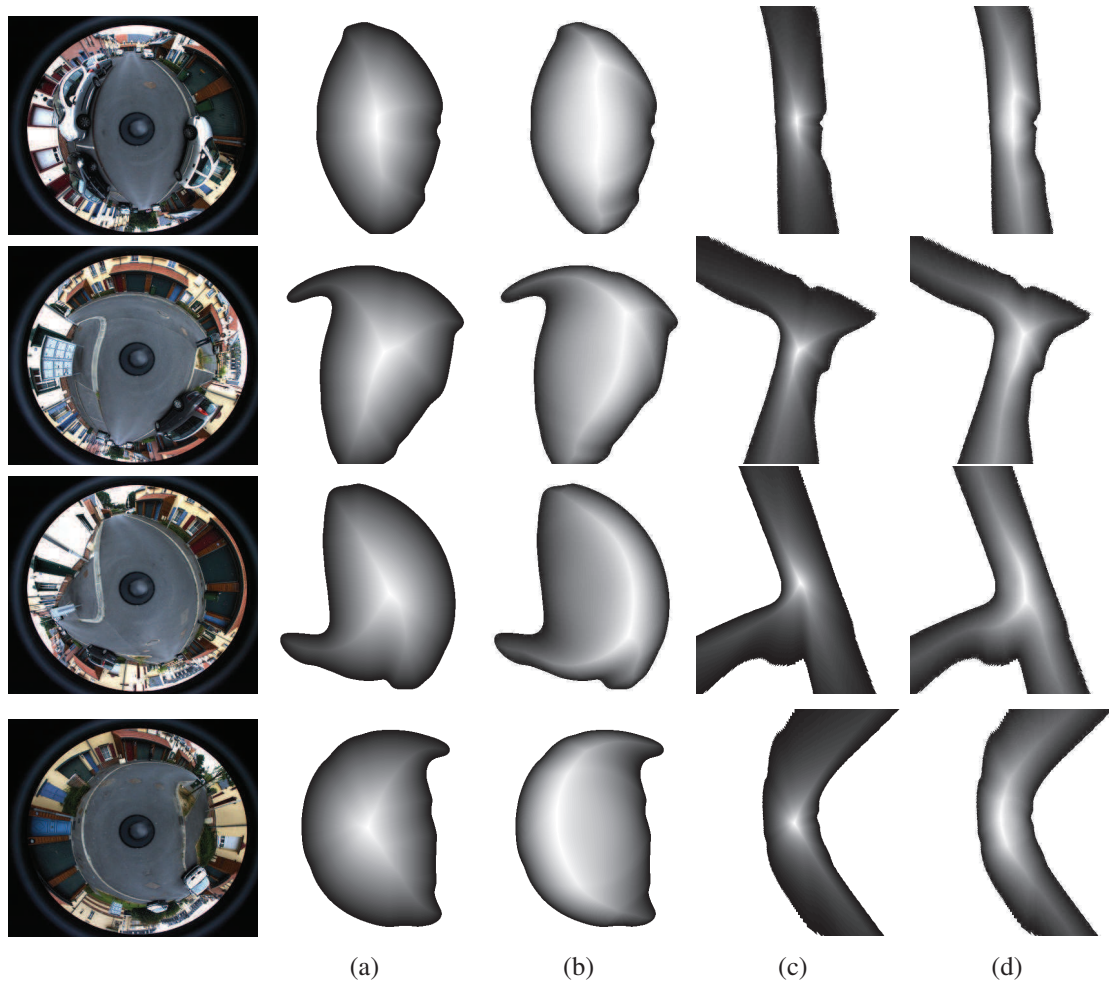


FIGURE 5.19 – Comparaison, sur des images catadioptriques réelles, des cartes de distances Euclidienne (a) et Riemannienne (b) et leurs projections bird-eye-views (c) et (d) respectivement.

tional  $\delta$ -Medial Axis (ODMA)", se base sur l'algorithme " $\delta$ -medial axis", développé dans [Marie, 2014; Marie et al., 2016]. Cet algorithme utilise un seul paramètre  $\delta$  pour supprimer les branches non désirées de l'axe médian d'une forme binaire discrète. Ce paramètre est automatiquement défini à partir des caractéristiques du système fournies par l'image. L'adaptation pour les images omnidirectionnelles se base sur la définition d'une nouvelle métrique  $\tilde{d}$  (5.40) conforme à la distance Euclidienne  $d$  dans le plan du sol (définie à un facteur d'échelle près).

$$\tilde{d}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \alpha d(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \alpha d(f^{-1}(\mathbf{p}_1), f^{-1}(\mathbf{p}_2)) \quad (5.40)$$

avec  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  les projections dans le plan image de deux points  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$  appartenant au plan du sol.  $f$  est la fonction de projection traduisant le processus de formation des points sur le plan image, et  $\alpha$  un facteur d'échelle. La figure 5.20 illustre les résultats de ce travail. On peut en particulier noter la cohérence de la localisation du squelette adapté

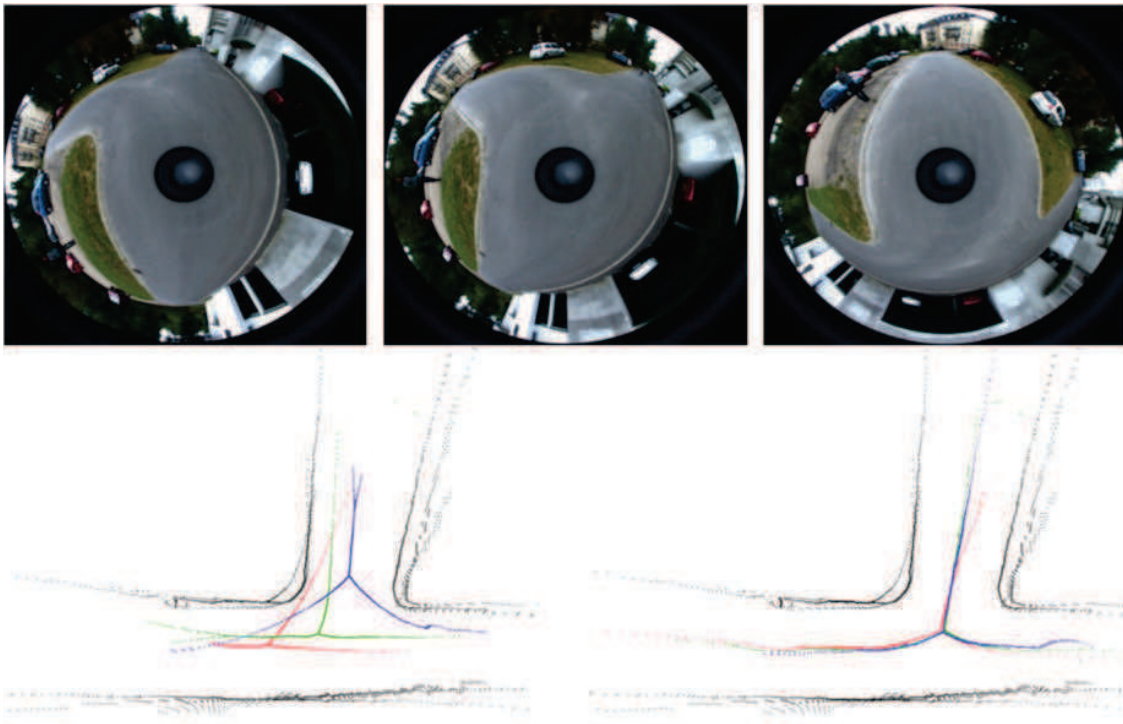


FIGURE 5.20 – En haut : trois vues différentes de la même scène (carrefour). En bas : squelettes résultants pour la version standard de l'algorithme DMA ( $\delta$  Medial Axis) (à gauche) et celle adaptée aux images omnidirectionnelles par (5.40) (à droite). [Marie et al., 2014].

avec les cartes de distances Riemanniennes construites précédemment pour l'espace libre omnidirectionnel.

### 5.4.3 Planification de trajectoires optimales

La problématique de génération de chemins par l'algorithme Fast Marching (FM) a été traitée dans la littérature [Garrido et al., 2006; Chiang et al., 2007; Valero-Gomez et al., 2013b; Garrido et al., 2013]. On note que les trajectoires générées par l'algorithme FM classique sont optimales selon le critère de distance Euclidienne minimale. Cependant, elles ne sont pas assez lisses et sûres car elles passent très près des obstacles (voir Fig. 5.21).

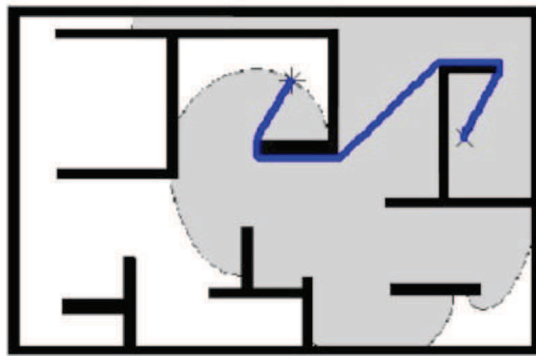


FIGURE 5.21 – La trajectoire obtenue avec la méthode du Fast Marching classique. (Source [Garrido et al., 2013])

Pour cette raison, l'algorithme Fast Marching Square ( $FM^2$ ) [Valero-Gomez et al., 2013a] a été proposé et a permis de générer des trajectoires plus régulières et fiables (voir exemple Fig. 5.22). L'idée principale de la méthode du  $FM^2$  est d'établir une première propagation du front par l'algorithme FM afin d'obtenir un premier champ de potentiels, qui définit la carte des distances aux bords des obstacles. Ce champ est ensuite utilisé pour contrôler la vitesse de propagation d'un deuxième front, qui permet de produire un deuxième champ de potentiels dans lequel la trajectoire serait déduite. Le principe est similaire à celui de la méthode Voronoï Fast Marching (VMF) [Garrido et al., 2007, 2008]. La différence se situe au niveau du calcul du premier champ de potentiels, qui est obtenu par la transformée de Voronoï étendue et qui attribue à chaque point du domaine, une valeur proportionnelle à la distance Euclidienne de ce point à l'obstacle le plus proche.

La méthode du  $FM^2$  a démontré sa robustesse et sa simplicité. Nous l'adoptons pour une application de planification de trajectoire basée sur la vision catadioptrique. Par contre, l'adaptation et la reconfiguration de la méthode dans le cadre Riemannien est nécessaire, ce que nous proposons ci-après.

- Dans une première étape, nous construisons le premier champ potentiel  $F$  qui définirait la carte des distances géodésiques, à partir des frontières de l'espace libre.

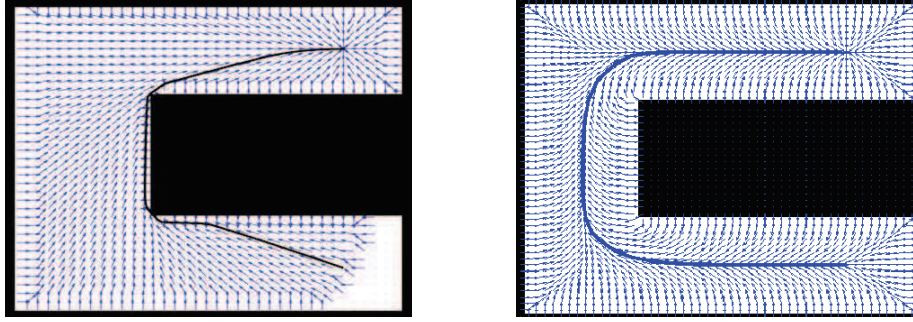


FIGURE 5.22 – Comparaison de trajectoires obtenues par la méthode du FM classique (à gauche) et la méthode du FM<sup>2</sup> (à droite) pour la planification de mouvement (Source : <http://roboticslab.uc3m.es/roboticslab/researchtopic/fast-marching>).

C'est la solution de viscosité de l'équation Eikonale Riemannienne suivante :

$$\| \nabla_{G_s} \psi \|_{G_s} = \sqrt{\nabla \psi^T G_s^{-1} \nabla \psi} = 1 \quad (5.41)$$

où  $G_s$  est la métrique Riemannienne spatiale adaptée aux images catadioptriques et développée précédemment (3.16). Le schéma numérique est résolu par l'algorithme du Fast Marching anisotropique.

- Dans une seconde étape, la carte des distances  $F$  est utilisée pour contrôler la propagation d'un second champ potentiel  $T$ , qui définit la carte de distances à partir du point final  $\mathbf{x}_1$  (l'objectif à atteindre). Cette carte est obtenue par la résolution de l'équation Eikonale suivante :

$$\| \nabla_H \psi \|_H = \sqrt{\nabla \psi^T (F^2 \delta_{ij})^{-1} \nabla \psi} = 1 \quad (5.42)$$

où  $H = F^2 \delta_{ij}$  est une métrique isotropique, définissant une métrique Euclidienne pondérée par la fonction  $F^2$ . Notons que  $F$  est déduite par propagation anisotropique. Elle définit donc les valeurs du champ de vitesse qui impacterait la propagation du champ  $T$ .

- Dans la troisième et dernière étape, ayant la carte de distances  $T$ , la trajectoire  $\gamma$  entre un point source  $\mathbf{x}_0$  et le point final  $\mathbf{x}_1$  est estimée avec la méthode de descente de gradient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma(t)}{\partial t} = -\tau \nabla T(\gamma(t)) & \forall t > 0 \\ \gamma(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (5.43)$$

où  $\tau > 0$  est appelé *le pas d'apprentissage*. Il permet de contrôler la vitesse de paramétrisation de la trajectoire. Pour une vitesse de paramétrisation unitaire, on peut utiliser  $\tau = \| \nabla T(\gamma(t)) \|^{-1}$ .

L'algorithme 5.1 résume les trois étapes du processus de calcul des cartes de distances et la génération des trajectoires Riemanniennes.

---

**Algorithme 5.1** Planification de trajectoires pour les images catadioptriques couleur

---

**Input:** Image catadioptrique couleur  $I^i$ . Paramètres du miroir  $\xi$  et  $\varphi$ . Point initial ( $\mathbf{x}_0$ ) et point final ( $\mathbf{x}_1$ ).

**Output:** La trajectoire optimale entre les positions  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{x}_1$ .

**Requirements** La métrique couleur  $G_c$  Eq. (5.38) et la métrique spatiale  $G_s$  Eq. (3.16).

1: Détection de l'espace libre :

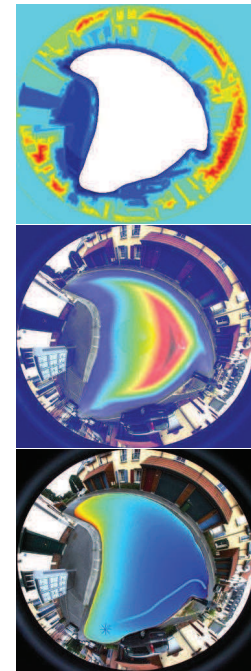
- Initier un front circulaire autour du disque noir central de la caméra (blind spot).
- Faire évoluer le front et calculer la carte des distances couleur  $D_c$  en résolvant l'Eq. (5.39).
- Dédire la région de l'espace libre correspondant à  $\|D_c\| \leq \varepsilon$ .

2: Calcul de la carte des distances  $F$  aux frontières de l'espace libre :

- Initier un front sur les frontières de l'espace libre.
- Faire évoluer le front et calculer la carte de distances géométriques  $F$  en résolvant l'Eq. (5.41).

3: Calcul de la carte des distances  $T$  à l'objectif et de la trajectoire :

- Propager un front à partir du point finale  $\mathbf{x}_1$  et calculer la carte des distances  $T$  en résolvant l'Eq. (5.42).
  - Calculer la trajectoire  $\gamma$  entre le point  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{x}_1$  avec la méthode de descente du gradient Eq. (5.43).
- 



La Fig. 5.23 représente les résultats comparatifs du FM<sup>2</sup> standard et du FM<sup>2</sup> Riemannien adapté aux images catadioptriques. On constate que les cartes des distances ainsi que les trajectoires sont distinctes. En se basant sur la métrique Euclidienne, les trajectoires générées Fig. 5.23a et c dévient du milieu de la route et s'approchent des obstacles, alors qu'elles doivent s'en éloigner autant que possible. Cependant, en se basant sur la métrique Riemannienne, les trajectoires produites Fig. 5.23b et d sont optimales et sécurisées, elles conservent une meilleure distance au bord de l'espace libre selon différentes topologies routières.

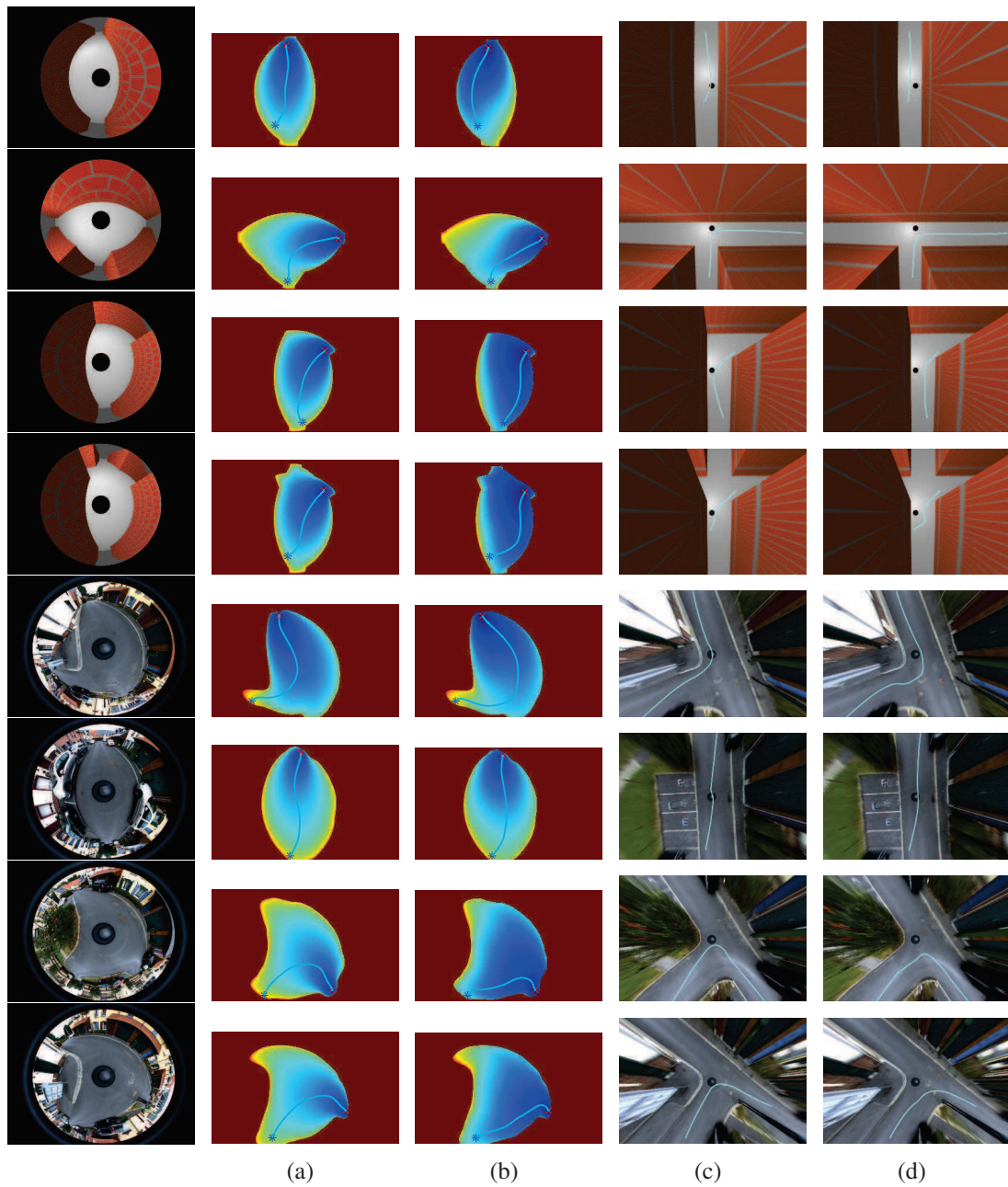


FIGURE 5.23 – Résultats comparatifs de la planification de trajectoires entre deux positions données : (a) La trajectoire et la carte des distances au point final en utilisant la méthode  $FM^2$  Euclidienne. (b) La trajectoire et la carte des distances au point final en utilisant la méthode  $FM^2$  Riemannienne. (c) et (d) représentent les reprojections bird-eye-views de la scène perçue sur lesquelles on a superposé les trajectoires Euclidiennes (c) et Riemanniennes (d) respectivement.

Dans l'objectif de vérifier que le chemin calculé avec la métrique Riemannienne suit le squelette de l'espace libre, on superpose la trajectoire obtenue et le carte de distances aux bords 5.24(a). On constate que, effectivement, la trajectoire entre deux points suit l'axe médian de l'espace libre, et par conséquent, la navigation sur ce chemin est sécurisée et permet d'éviter au plus loin les obstacles.

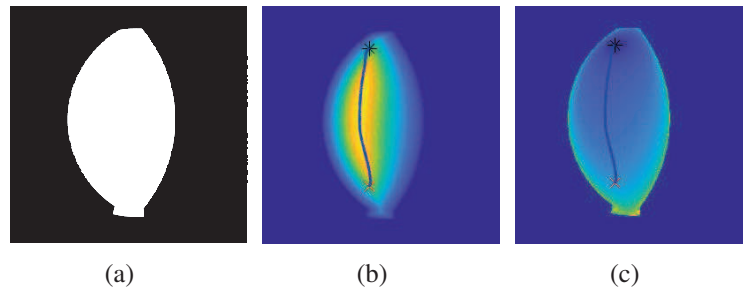


FIGURE 5.24 – (a) Espace libre. (b) Trajectoire superposée avec la carte de distances aux bords (la première carte). (c) Trajectoire superposée avec la carte de distances au point final (la deuxième carte).

Dans l'exemple suivant 5.25, on compare les géodésiques obtenues avec la métrique Euclidienne et la métrique Riemannienne pour une image para-catadioptrique où l'espace libre est sous forme d'un disque. Les géodésiques sont calculées en suivant l'algorithme 5.1.

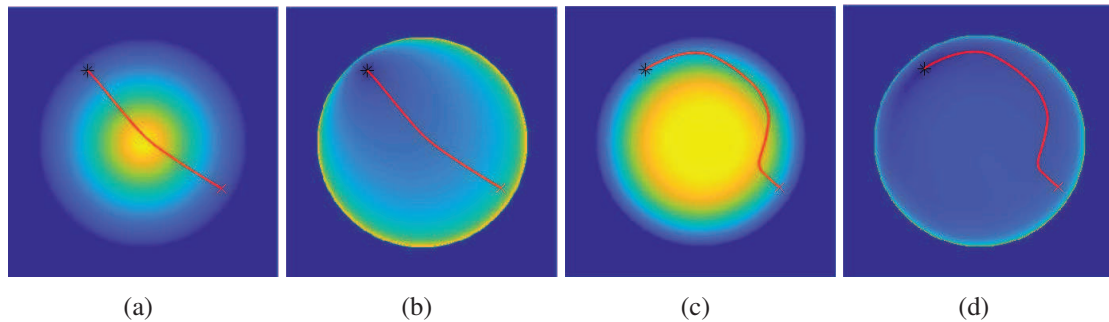


FIGURE 5.25 – Comparaison des trajectoires obtenues avec les métriques Euclidienne et Riemannienne dans l'espace libre d'une image paracatadioptrique de synthèse. (a) Trajectoire Euclidienne superposée avec la carte de distances aux bords. (b) Trajectoire Euclidienne superposée avec la carte de distances au point final. (c) Trajectoire Riemannienne superposée avec la carte de distances aux bords. (d) Trajectoire Riemannienne superposée avec la carte de distances au point final.

On note que pour les images para-catadioptriques, les lignes du monde 3D sont des



cercles sur le plan image. En effet, la projection d'une ligne 3D est un grand-cercle sur la sphère unifiée, et la projection stéréographique renvoie ensuite le grand-cercle à un cercle sur le plan image. Conformément aux attentes, les géodésiques obtenues avec la métrique Riemannienne parabolique sont circulaires Fig. 5.25.

Pour conclure, l'adaptation Riemannienne des algorithmes de vision catadioptrique n'est pas un choix facultatif ou optionnel qui pouvait améliorer les algorithmes traditionnels Euclidiens. Ces résultats démontrent l'importance des adaptations de métriques pour garantir des missions plus sûres et optimales, et particulièrement dans le domaine de la navigation des robots mobiles.

## 5.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un cadre Riemannien pour la perception couleur de l'espace libre omnidirectionnel et la planification de trajectoires. Nous avons démontré que l'approche Riemannienne pour les images catadioptriques couleur contourne les limitations de l'approche Euclidienne, et offre une alternative puissante aux calculs classiques. En particulier, le calcul de la transformée de distances est modifié de manière à incorporer une métrique Riemannienne adéquate.

On a montré également que le choix de cette métrique est spécifique à chaque application. Nous avons ainsi utilisé une métrique couleur pour effectuer une extraction améliorée de l'espace libre omnidirectionnel, et une métrique spatiale, induite à partir de la géométrie du miroir catadioptrique, pour calculer les cartes de distances Riemanniennes et les chemins géodésiques. Partant de ce fait, on tire l'un des principaux avantages de ce cadre qui réside dans sa généralité et sa flexibilité, et qui permet ainsi d'étendre les algorithmes classiques aux variétés et de doter l'espace de différentes métriques. De plus, le traitement est effectué directement sur le plan image catadioptrique sans avoir besoin de représenter l'image dans un autre espace, comme l'espace sphérique adopté par plusieurs travaux existants.

Les expériences menées dans ce chapitre, en utilisant des images catadioptriques couleur réelles et de synthèse, acquises dans des environnements intérieurs et extérieurs, ont montré des résultats prometteurs pour la navigation de robots mobiles.

## 6.1 Bilan général

Le thème central de cette thèse est de proposer des solutions pour tenir compte les distorsions géométriques dues à l'utilisation du miroir dans les caméras catadioptriques tout en considérant l'aspect couleur de l'image capturée.

Dans un premier temps, nous avons proposé un nouveau formalisme unifié pour la construction d'une métrique générique pour les images catadioptriques couleur. Pour ce faire, nous avons exploité la géométrie différentielle Riemannienne pour plonger l'image catadioptrique couleur dans un espace Riemannien de plus grande dimension, et nous avons déduit une métrique Riemannienne qui a ces principales propriétés :

- La métrique est générique : elle est valide pour toutes les images acquises par les systèmes catadioptriques centraux. Cette propriété est le résultat du plongement Riemannien de la sphère unifiée du célèbre modèle de projection pour les systèmes centraux.
- La métrique est de nature hybride et nous l'avons qualifiée de « métrique spatial-couleur » : la formulation proposée permet de traiter simultanément les deux problèmes : la déformation géométrique non linéaire due au miroir, et aussi la prise en compte des composantes couleur de l'image.

Ce formalisme permet de définir les traitements dans le plan image catadioptrique directement, sans nécessiter des traitements supplémentaires, visant la prise en compte des distorsions, et leur inconvénients. Par exemple, la perte d'information résultante de la phase d'interpolation en transformant l'image catadioptrique en image sphérique.

Grâce à ce nouveau formalisme unificateur, nous pouvons déduire différents types de

métriques (géométriques et/ou colorimétriques). Effectivement, après la construction du plongement Riemannien de l'image catadioptrique dans un espace de plus grande dimension, la métrique adéquate pour un type particulier d'image catadioptrique (parabolique, hyperbolique, . . .) peut-être déduite en faisant une projection géométrique et puis en remplaçant simplement les paramètres du miroir dans l'expression de la métrique générique. De même, un choix approprié de l'espace plongeant, permet de déduire différentes métriques couleur comme le tenseur de structure classique ou d'autres métriques pour des traitements adaptatifs.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes concentré sur la fonction Gaussienne et ses applications. En réalité, cette fonction est très utile et au cœur de plusieurs algorithmes en traitement d'images. Nous avons exploité l'équation de diffusion de chaleur définie sur les variétés Riemanniennes, pour modéliser un nouveau noyau Gaussien adapté aux images équipées d'une métrique Riemannienne.

- Ainsi, pour les images catadioptriques, nous avons proposé une nouvelle représentation en espace-échelle (scale-space) sur le plan image catadioptrique. On a montré que la représentation en espace-échelle par lissage avec fonction Gaussienne Euclidienne n'est pas adaptée aux images catadioptriques, puisque la condition d'invariance aux translations n'est pas satisfaite.
- Dans cette thèse, nous avons proposé une alternative du lissage non linéaire basé sur la diffusion avec l'opérateur différentiel Laplace-Beltrami. Elle consiste à convoluer l'image avec le nouveau noyau Gaussien adapté et équipé par la métrique spatial-couleur.
- Le noyau Gaussien proposé nous a permis ensuite d'améliorer plusieurs méthodes existantes. En l'exploitant pour la détection de contours et de points d'intérêt, nous avons démontré l'efficacité et les performances du noyau Gaussien adapté muni de la métrique spatial-couleur.

La dernière partie de cette thèse concernait l'utilisation de la métrique Riemannienne des images catadioptriques, à des fins de navigation autonome. On s'est intéressé particulièrement à la perception de l'espace libre omnidirectionnel et la planification de chemins optimaux. Étant donné que notre travail s'inscrit dans un cadre Riemannien, notre stratégie se base sur l'utilisation de métriques Riemanniennes appropriées tout en comparant leur apport à la métrique Euclidienne classique. Ainsi, pour calculer les distances, nous avons utilisé les équations différentielles partielles de type Hamilton-Jacobi qui modélisent la théorie de propagation des fronts. En premier lieu, pour la détection de l'espace libre, nous nous sommes appuyés sur le calcul des distances géodésiques photométriques à l'aide d'une métrique incorporant les composantes couleur de l'image. En second lieu, l'extraction de l'axe médial et le chemin optimal loin des obstacles, repose sur des distances spatiales déduites en utilisant la métrique Riemannienne induite par le procédé mis en œuvre pour l'acquisition de l'image. Nous avons mené des expérimentations qui com-

parent l'influence de la métrique Riemannienne relativement à la métrique Euclidienne. Les résultats obtenus ont montré l'efficacité et le potentiel de notre approche.

## 6.2 Perspectives

En s'appuyant sur le travail réalisé, plusieurs extensions et applications nouvelles peuvent être envisagées.

- L'approche actuelle pour la construction de la métrique est conçue pour un système de projection centrale respectant la contrainte du point de vue unique. Une perspective de ce travail consiste à étendre ce modèle aux images acquises par des caméras de type fisheye. Ce type de capteur est largement utilisé en robotique mais ne vérifie pas la contrainte du point de vue unique, ce qui rend difficile la modélisation de sa projection. Un modèle généralisé incluant à la fois les caméras fisheye et catadioptriques a été proposé dans [Ying and Hu, 2004], en substituant la sphère dans le modèle unifié [Geyer and Daniilidis, 2000] par une surface quadratique. L'étude et l'utilisation de cette surface quadratique serait intéressante pour généraliser le calcul de métrique aux caméras fisheye.
- Dans ce travail, nous avons utilisé la version adaptée des filtres de convolution Gaussiens dans des applications courantes de traitement d'images catadioptriques. À savoir, le flou Gaussien pour des applications de lissage afin d'atténuer le bruit, le filtre à base de la différence de Gaussiennes, la représentation multi-échelle, le filtre dérivateur à base de la dérivée de la Gaussienne pour détecter les bords et les coins. Maintenant, il sera intéressant d'utiliser la Gaussienne adaptée pour améliorer d'autres applications pour les images catadioptriques, comme La Scale-Invariant Feature Transform (SIFT).
- La définition de l'espace libre dans ce travail peut être à l'origine de certaines situations limitées. En effet, nous avons choisi de définir l'espace libre omnidirectionnel à proximité du robot à partir d'un critère d'homogénéité locale du sol. De ce fait, tout élément présent dans le champ perceptif du robot, dont la couleur ou la texture différerait de celle du sol sur lequel se déplace ce dernier, serait considéré comme un obstacle à éviter pour le robot. On pense notamment aux faux obstacles de type lignes blanches de signalisation qu'on retrouve régulièrement sur les routes. Il serait donc intéressant de corriger ce problème par l'estimation d'altitudes de quelques points de l'image, afin d'isoler uniquement les vrais obstacles.
- Enfin, il serait intéressant d'implémenter une méthode parallèle du Fast Marching anisotropique afin d'optimiser le temps de l'exécution de l'algorithme.

### 6.3 Valorisation scientifique

Quelques travaux présentés dans ce manuscrit ont été valorisés par des publications et communications internationales :

- Aziz, F., Labbani-Igbida, O., Radgui, A., & Tamtaoui, A. (2016, September). *Color-metric tensor for catadioptric systems*. In Image Processing (ICIP), 2016 IEEE International Conference on (pp. 1594-1598). IEEE.
- Aziz, F., Labbani-Igbida, O., Radgui, A., & Tamtaoui, A. *Generic Spatial-Color Metric for Scale-Space Processing of Catadioptric Images*. Computer Vision and Image Understanding.
- Article soumis : Aziz, F., Labbani-Igbida, O., Radgui, A., & Tamtaoui, A. *A Riemannian Approach for Free-Space Extraction and Path Planning using Omnidirectional Vision*. Journal of Mathematical Imaging and Vision.

## ÉQUATIONS DE LA CONTRAINTE DU PVU

La contrainte du point de vue unique (PVU) est une propriété intéressante pour les systèmes catadioptriques en particulier, et les systèmes à projection centrale en général. La convergence des rayons vers un point unique facilite la modélisation du processus de projection. [Baker and Nayar, 1999] l'ont étudié exhaustivement pour les systèmes catadioptriques et ont conclu les formes de miroir respectant cette contrainte. Dans cet annexe, on démontre comment les équations de contrainte de PVU sont-elles obtenues.

La figure A.1 illustre la géométrie utilisée pour dériver les équations de contrainte du PVU. Le miroir est supposé être une surface de révolution autour de l'axe  $\hat{z}$  dans un repère cartésien  $(v, \hat{r}, \hat{z})$ , avec  $\hat{r}$  le vecteur unitaire orthogonal à  $\hat{z}$  et  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

- $v = (0, 0)$  est le point de vue effectif du système catadioptrique, situé à l'origine du repère  $(v, \hat{r}, \hat{z})$ .
- $p = (0, c)$  est le centre optique de la caméra (pinhole) situé à une distance  $c$  de l'origine  $v(0, 0)$ .

Un rayon passant par un point 3D se reflète sur la surface du miroir au point  $(r, z)$  tel que :

- $\theta = \tan^{-1} \frac{z}{r}$  est l'angle entre le rayon provenant du point 3D et l'axe  $\hat{r}$ . Le rayon est supposé passer à travers l'origine  $v = (0, 0)$ .
- $\alpha = \tan^{-1} \frac{c-z}{r}$  est l'angle entre le rayon réfléchi passant par  $p = (0, c)$  et  $\hat{r}$ .
- $\gamma = 90^\circ - \alpha$  est l'angle entre le rayon réfléchi et l'axe  $\hat{z}$ .
- $\beta = \tan^{-1} \frac{dz}{dr}$  est l'angle entre la normale au miroir au point  $(r, z)$  et l'axe  $\hat{z}$ .

Le fait que l'angle d'incidence soit égal à l'angle de réflexion, permet de déduire la contrainte,

$$\alpha + \theta + 2(\gamma + \beta) = 180^\circ \quad (\text{A.1})$$

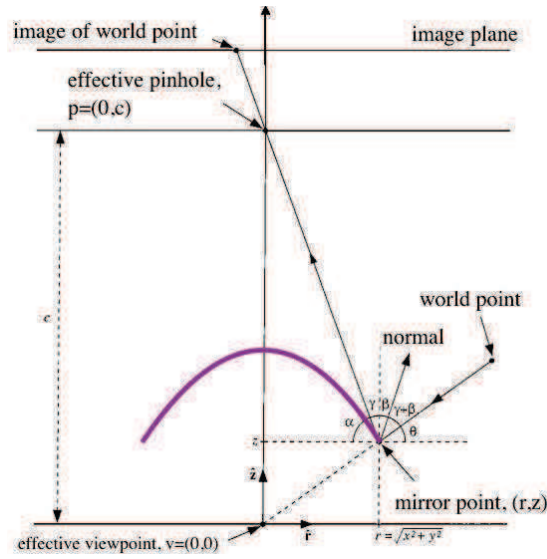


FIGURE A.1 – PVU

L'élimination de  $\gamma$  de cette expression donne :

$$2\beta = \alpha - \theta \quad (\text{A.2})$$

En prenant la tangente des deux côtés, on obtient,

$$\frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{\tan \alpha - \tan \theta}{1 + \tan \alpha \tan \theta} \quad (\text{A.3})$$

En substituant les valeurs de  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  par leur expressions, on obtient ainsi l'équation de contrainte du PVU,

$$r(c - 2z) \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 - 2(r^2 + cz + z^2) \frac{dz}{dr} + r(2z - c) = 0 \quad (\text{A.4})$$

La résolution de cette dernière équation mène à ces deux équations (démonstration dans [Baker and Nayar, 1999]) :

$$\left( z - \frac{c}{2} \right)^2 - r^2 \left( \frac{k}{2} - 1 \right) = \frac{c^2}{4} \left( \frac{k-2}{k} \right) \quad \text{avec } (k \geq 2). \quad (\text{A.5})$$

$$\left( z - \frac{c}{2} \right)^2 + r^2 \left( 1 + \frac{c^2}{2k} \right) = \left( \frac{2k + c^2}{4} \right) \quad \text{avec } (k > 0). \quad (\text{A.6})$$

### Solutions des équations de contrainte

Les solutions des dernières équations définissent des surfaces de section conique. Le tableau A.1 résume les équations des surfaces des miroirs en fonction des paramètres  $k$  et  $c$ . La figure 2.5 décrit graphiquement les solutions des équations de contrainte du PVU.

TABLE A.1 – Les solutions des équations de contrainte du PVU

	Paramètres		Équation du miroir
Eq. (A.5)	$k = 2$	$c > 0$	Planaire : $z = \frac{c}{2}$
	$k \geq 2$	$c = 0$	Conique : $z = \sqrt{\frac{k-2}{2}} r^2$
	$k > 2$	$c > 0$	Hyperbolique : $\frac{4k}{c^2(k-2)} \left(z - \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{2k}{c^2} r^2 = 1$
	$k \rightarrow \infty$	$c \rightarrow \infty$	Parabolique : $z = \frac{h^2 - r^2}{2h}$ avec $h = \frac{c}{k}$ constante
Eq. (A.6)	$k > 0$	$c = 0$	Sphérique $z^2 + r^2 = \frac{k}{2}$
	$k > 0$	$c > 0$	Elliptique : $\frac{4}{2k+c^2} \left(z - \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{2}{k} r^2 = 1$





### B.1 Gradient Riemannien

Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $f \in C^\infty(M)$  et l'application différentielle  $d_x f: T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  est linéaire pour tout  $x \in M$ . Donc, il existe un champ de vecteurs sur  $TM$  appelé *gradient* de  $f$  et noté  $\nabla_g f$  tel que,

$$\langle \nabla_g f, X \rangle_{g(x)} = d_x f(X) \quad \text{pour tout } X \in T_x M \quad (\text{B.1})$$

Dans un système de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$ , l'expression du gradient Riemannien est :

$$\nabla_g f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (\text{B.2})$$

où  $g^{ij}$  est l'inverse de la métrique  $g_{ij}$ . Lorsque  $g_{ij} = \delta_{ij}$  est la matrice identité, le gradient Riemannien  $\nabla_g f$  définit le gradient Euclidien  $\nabla f$ .

*Démonstration.* En coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$ , on a  $df(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ . Le champ de vecteurs gradient est une combinaison linéaire à coefficients  $a_i \in C^\infty(M)$  et de la forme  $\nabla_g f = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , donc,

$$(\text{B.1}) \Rightarrow \langle \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle_g = \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (\text{B.3})$$

donc,

$$\sum_{i=1}^n a_i g_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (\text{B.4})$$

Maintenant, on fixe un certain  $k$  et on multiplie l'équation ci-dessus par  $g^{jk}$  et on somme sur tous les  $j$ , ainsi,

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n g_{ij} g^{jk} = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ik} = a_k \quad (\text{B.5})$$

et par conséquent,

$$a_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} g^{jk} \quad (\text{B.6})$$

en changeant l'indice  $k$  par  $i$  dans l'équation précédente :  $a_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} g^{ji}$ , on obtient finalement l'expression du Gradient Riemannien,

$$\nabla_g f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (\text{B.7})$$

□

## B.2 Divergence Riemannienne

Pour chaque fonction  $f$ , avec un support compact et un champ vectoriel  $X = X^i \partial_i$ , la divergence est l'opérateur adjoint au gradient et donné par l'expression :

$$\text{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i (X^i \sqrt{\det g}) \quad (\text{B.8})$$

où  $\det g$  est le déterminant de la métrique  $g_{ij}$ .

*Démonstration.* Pour chaque fonction  $f$ , avec un support compact et un champ vectoriel  $X = X^i \partial_i$ , la divergence est l'opérateur adjoint au gradient et caractérisé par l'équation :

$$\langle X, \nabla f \rangle = \langle -\text{div}(X), f \rangle \quad (\text{B.9})$$

En intégrant sur la variété  $M$ , on obtient :

$$\langle X, \nabla f \rangle = \int_M \langle X, \nabla f \rangle \, dvol \quad (\text{B.10})$$

$$= \int_U \langle X^i \partial_i, g^{kj} \partial_k f \partial_j \rangle \, dvol \quad (\text{B.11})$$

$$= \int_U X^i (\partial_i f) g^{kj} g_{ij} \sqrt{\det g} \, dx^1 \dots dx^n \quad (\text{B.12})$$

$$= \int_U X^i (\partial_i f) \sqrt{\det g} \, dx^1 \dots dx^n \quad (\text{B.13})$$

$$= \int_U -f \cdot \partial_i X^i \sqrt{\det g} \, dx^1 \dots dx^n \quad (\text{B.14})$$

$$= - \int_U \frac{1}{\sqrt{\det g}} f \cdot \partial_i (X^i \sqrt{\det g}) \sqrt{\det g} \, dx^1 \dots dx^n \quad (\text{B.15})$$

$$= \langle f, -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i (X^i \sqrt{\det g}) \rangle \quad (\text{B.16})$$

On en déduit l'expression de la divergence d'un champ vectoriel,

$$\text{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i (X^i \sqrt{\det g}) \quad (\text{B.17})$$

□



Ici, nous montrons les développements mathématiques de l'expression du Laplace-Beltrami utilisé dans le chapitre 4.

*Démonstration.* On a

$$\Delta_g \mathbf{I} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{|g|} \partial_\nu \mathbf{I}) \quad (\text{C.1})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[ \partial_x (g^{xx} \sqrt{|g|} \partial_x \mathbf{I}) + \partial_x (g^{xy} \sqrt{|g|} \partial_y \mathbf{I}) \right] + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[ \partial_y (g^{yx} \sqrt{|g|} \partial_x \mathbf{I}) + \partial_y (g^{yy} \sqrt{|g|} \partial_y \mathbf{I}) \right] \quad (\text{C.2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|g|}} (\partial_x \mathbf{A} + \partial_y \mathbf{B}) \quad (\text{C.3})$$

tel que,

$$\begin{cases} \mathbf{A} = g^{xx} \sqrt{|g|} \partial_x \mathbf{I} + g^{xy} \sqrt{|g|} \partial_y \mathbf{I} \\ \mathbf{B} = g^{yx} \sqrt{|g|} \partial_x \mathbf{I} + g^{yy} \sqrt{|g|} \partial_y \mathbf{I} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Puisque,

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g^{xx} & g^{xy} \\ g^{yx} & g^{yy} \end{bmatrix} = \frac{1}{|g|} \begin{bmatrix} g_{yy} & -g_{xy} \\ -g_{yx} & g_{xx} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Donc,

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left( g_{yy} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x} - g_{xy} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial y} \right) \\ \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left( g_{xx} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial y} - g_{xy} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (\text{C.6})$$





---

## BIBLIOGRAPHIE

- Ahmed, S., Bak, S., McLaughlin, J., and Renzi, D. (2011). A third order accurate fast marching method for the eikonal equation in two dimensions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33(5) :2402–2420.
- Antoine, J.-P. and Vandergheynst, P. (1999). Wavelets on the 2-sphere : A group-theoretical approach. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 7(3) :262–291.
- Arıcan, Z. and Frossard, P. (2012). Scale-invariant features and polar descriptors in omnidirectional imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 21(5) :2412–2423.
- Aziz, F., Labbani-Igbida, O., Radgui, A., and Tamtaoui, A. (2016). Color-metric tensor for catadioptric systems. In *Image Processing (ICIP), 2016 IEEE International Conference on*, pages 1594–1598. IEEE.
- Babaud, J., Witkin, A. P., Baudin, M., and Duda, R. O. (1986). Uniqueness of the gaussian kernel for scale-space filtering. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 8(1) :26–33.
- Bagnerini, P., Hoch, P., and Rasclé, M. (2001). The eikonal equation on a manifold. applications to grid generation or refinement. In *Hyperbolic problems : theory, numerics, applications*, pages 109–118. Springer.
- Baker, S. and Nayar, S. K. (1999). A theory of single-viewpoint catadioptric image formation. *International Journal of Computer Vision*, 35(2) :175–196.
- Bardi, M. and Capuzzo-Dolcetta, I. (2008). *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Springer Science & Business Media.



- Barles, G. (1994). Solutions de viscosité des équations de hamilton-jacobi, volume 17 of mathématiques & applications (berlin)[mathematics & applications].
- Barreto, J. P. (2006). A unifying geometric representation for central projection systems. *Computer Vision and Image Understanding*, 103(3) :208–217.
- Benmansour, F. and Cohen, L. D. (2011). Tubular structure segmentation based on minimal path method and anisotropic enhancement. *International Journal of Computer Vision*, 92(2) :192–210.
- Bigün, J. and Granlund, G. H. (1987). Optimal orientation detection of linear symmetry. In *Proceedings of the IEEE First International Conference on Computer Vision*, pages 433–438, London, Great Britain.
- Bogdanova, I. (2006). Wavelets on non-euclidean manifolds.
- Bogdanova, I., Bresson, X., Thiran, J.-P., and Vandergheynst, P. (2007). Scale space analysis and active contours for omnidirectional images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 16(7) :1888–1901.
- Bogner, S. (1995). Introduction to panoramic imaging. In *IEEE SMC Conference*, volume 54, pages 3100–3106.
- Bornemann, F. and Rasch, C. (2006). Finite-element discretization of static hamilton-jacobi equations based on a local variational principle. *Computing and Visualization in Science*, 9(2) :57–69.
- Brauer-Burchardt, C. and Voss, K. (2001). A new algorithm to correct fish-eye-and strong wide-angle-lens-distortion from single images. In *Image Processing, 2001. Proceedings. 2001 International Conference on*, volume 1, pages 225–228. IEEE.
- Bülow, T. (2001). Spherical diffusion. *Technical Report No. MS-CIS-01-38, Computer and Information Science Departement, University of Pennsylvania*.
- Bülow, T. (2004). Spherical diffusion for 3d surface smoothing. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(12) :1650–1654.
- Caselles, V., Catté, F., Coll, T., and Dibos, F. (1993). A geometric model for active contours in image processing. *Numerische mathematik*, 66(1) :1–31.
- Caselles, V., Kimmel, R., and Sapiro, G. (1997a). Geodesic active contours. *International journal of computer vision*, 22(1) :61–79.
- Caselles, V., Kimmel, R., Sapiro, G., and Sbert, C. (1997b). Minimal surfaces based object segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(4) :394–398.

- 
- Chiang, C. H., Chiang, P. J., Fei, J. C.-C., and Liu, J. S. (2007). A comparative study of implementing fast marching method and a\* search for mobile robot path planning in grid environment : Effect of map resolution. In *Advanced Robotics and Its Social Impacts, 2007. ARSO 2007. IEEE Workshop on*, pages 1–6. IEEE.
- Chirikjian, G. S. (2009). Gaussian distributions and the heat equation. *Stochastic Models, Information Theory, and Lie Groups, Volume 1*, pages 31–61.
- Cohen, L. D. (1991). On active contour models and balloons. *CVGIP : Image understanding*, 53(2) :211–218.
- Crandall, M. G. and Lions, P.-L. (1983). Viscosity solutions of hamilton-jacobi equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 277(1) :1–42.
- Cristiani, E. and Falcone, M. (2007). Fast semi-lagrangian schemes for the eikonal equation and applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(5) :1979–2011.
- Cruz-Mota, J., Bogdanova, I., Paquier, B., Bierlaire, M., and Thiran, J.-P. (2012). Scale invariant feature transform on the sphere : Theory and applications. *International journal of computer vision*, 98(2) :217–241.
- Demonceaux, C., Vasseur, P., and Fougerolle, Y. (2011). Central catadioptric image processing with geodesic metric. *Image and Vision Computing*, 29(12) :840–849.
- Di Zenzo, S. (1986). A note on the gradient of a multi-image. *Computer vision, graphics, and image processing*, 33(1) :116–125.
- Estépar, R. S. J., Haker, S., and Westin, C.-F. (2005). Riemannian mean curvature flow. In *International Symposium on Visual Computing*, pages 613–620. Springer.
- Forcadel, N., Le Guyader, C., and Gout, C. (2008). Generalized fast marching method : applications to image segmentation. *Numerical Algorithms*, 48(1) :189–211.
- Garrido, S., Malfaz, M., and Blanco, D. (2013). Application of the fast marching method for outdoor motion planning in robotics. *Robotics and Autonomous Systems*, 61(2) :106–114.
- Garrido, S., Moreno, L., Abderrahim, M., and Martin, F. (2006). Path planning for mobile robot navigation using voronoi diagram and fast marching. In *Intelligent Robots and Systems, 2006 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 2376–2381. IEEE.
- Garrido, S., Moreno, L., and Blanco, D. (2008). Exploration of a cluttered environment using voronoi transform and fast marching. *Robotics and Autonomous Systems*, 56(12) :1069–1081.

- Garrido, S., Moreno, L., Blanco, D., and Munoz, M. L. (2007). Sensor-based global planning for mobile robot navigation. *Robotica*, 25(2) :189–199.
- Geyer, C. and Daniilidis, K. (2000). A unifying theory for central panoramic systems and practical implications. In *European conference on computer vision*, pages 445–461. Springer.
- Gómez, J. V., Lumbier, A., Garrido, S., and Moreno, L. (2013). Planning robot formations with fast marching square including uncertainty conditions. *Robotics and Autonomous Systems*, 61(2) :137–152.
- Granlund, G. H. (1978). In search of a general picture processing operator. *Computer Graphics and Image Processing*, 8(2) :155–173.
- Granlund, G. H. and Knutsson, H. (2013). *Signal processing for computer vision*. Springer Science & Business Media.
- Harris, C. and Stephens, M. (1988). A combined corner and edge detector. In *Alvey vision conference*, volume 15, pages 10–5244. Citeseer.
- Hoch, P. and Rasche, M. (2002). Hamilton–jacobi equations on a manifold and applications to grid generation or refinement. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 23(6) :2055–2073.
- Hong, J. (1991). others, image-based homing. In *Proc. Int. Conf. Robotics and Automation*.
- Jähne, B. (2005). *Digital Image Processing*. Springer, 6 edition.
- Jeong, W.-K. and Whitaker, R. T. (2008). A fast iterative method for eikonal equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(5) :2512–2534.
- Kass, M., Witkin, A., and Terzopoulos, D. (1988). Snakes : Active contour models. *International journal of computer vision*, 1(4) :321–331.
- Kimmel, R., Malladi, R., and Sochen, N. (1998). Image processing via the beltrami operator. In *Asian Conference on Computer Vision*, pages 574–581. Springer.
- Kimmel, R. and Sethian, J. A. (1998). Computing geodesic paths on manifolds. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 95(15) :8431–8435.
- Kimmel, R., Sochen, N., and Malladi, R. (1997). From high energy physics to low level vision. In *International Conference on Scale-Space Theories in Computer Vision*, pages 236–247. Springer.

- 
- Knutsson, H. (1982). *Filtering and reconstruction in image processing*. PhD thesis, Linköping University Electronic Press.
- Lachaud, J.-O. (2006). *Espaces non-euclidiens et analyse d'image : modèles déformables riemanniens et discrets, topologie et géométrie discrète*. PhD thesis, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I.
- Lachaud, J.-O. and Taton, B. (2004). Resolution independent deformable model. In *Pattern Recognition, 2004. ICPR 2004. Proceedings of the 17th International Conference on*, volume 2, pages 237–240. IEEE.
- Lachaud, J.-O. and Taton, B. (2005). Deformable model with a complexity independent from image resolution. *Computer Vision and Image Understanding*, 99(3) :453–475.
- Lee, J. M. (2006). *Riemannian manifolds : an introduction to curvature*, volume 176. Springer Science & Business Media.
- Li, F., Shu, C.-W., Zhang, Y.-T., and Zhao, H. (2008). A second order discontinuous galerkin fast sweeping method for eikonal equations. *Journal of Computational Physics*, 227(17) :8191–8208.
- Lindeberg, T. (1994). Scale-space theory : A basic tool for analyzing structures at different scales. *Journal of applied statistics*, 21(1-2) :225–270.
- Lowe, D. G. (1999). Object recognition from local scale-invariant features. In *Computer vision, 1999. The proceedings of the seventh IEEE international conference on*, volume 2, pages 1150–1157. Ieee.
- Lowe, D. G. (2004). Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International journal of computer vision*, 60(2) :91–110.
- Malladi, R., Sethian, J. A., and Vemuri, B. C. (1995). Shape modeling with front propagation : A level set approach. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 17(2) :158–175.
- Mantegazza and Mennucci (2002). Hamilton—jacobi equations and distance functions on riemannian manifolds. *Applied Mathematics & Optimization*, 47(1) :1–25.
- Marie, R. (2014). Exploration autonome et construction de cartes topologiques référencées vision omnidirectionnelle.
- Marie, R., Labbani-Igbida, O., and Mouaddib, E. M. (2014). Scale space and free space topology analysis for omnidirectional images. In *Robotics and Automation (ICRA), 2014 IEEE International Conference on*, pages 4451–4456. IEEE.

- Marie, R., Labbani-Igbida, O., and Mouaddib, E. M. (2016). The delta medial axis : a fast and robust algorithm for filtered skeleton extraction. *Pattern Recognition*, 56 :26–39.
- Marie, R., Said, H. B., Stéphant, J., and Labbani-Igbida, O. (2018). Visual servoing on the generalized voronoi diagram using an omnidirectional camera. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, pages 1–12.
- McInerney, T. and Terzopoulos, D. (1995). Topologically adaptable snakes. In *Computer Vision, 1995. Proceedings., Fifth International Conference on*, pages 840–845. IEEE.
- Merveilleux-Orzekowska, P. (2012). *Exploration et navigation de robots basées vision omnidirectionnelle*. PhD thesis, Amiens.
- Mokhtarian, F. and Mohanna, F. (2006). Performance evaluation of corner detectors using consistency and accuracy measures. *Computer Vision and Image Understanding*, 102(1) :81–94.
- Moravec, H. P. (1980). Obstacle avoidance and navigation in the real world by a seeing robot rover. Technical report, STANFORD UNIV CA DEPT OF COMPUTER SCIENCE.
- Murphy, J. R. (1995). Application of panospheric imaging to a teleoperated lunar rover. In *Systems, Man and Cybernetics, 1995. Intelligent Systems for the 21st Century., IEEE International Conference on*, volume 4, pages 3117–3121. IEEE.
- Nalwa, V. (1996). A true omnidirectional viewer. Technical report, technical report, Bell Laboratories.
- Nash, J. (1956). The imbedding problem for riemannian manifolds. *Annals of mathematics*, pages 20–63.
- Nayar, S. K. (1997). Catadioptric omnidirectional camera. In *Computer Vision and Pattern Recognition, 1997. Proceedings., 1997 IEEE Computer Society Conference on*, pages 482–488. IEEE.
- Nene, S. A. and Nayar, S. K. (1998). Stereo with mirrors. In *Computer Vision, 1998. Sixth International Conference on*, pages 1087–1094. IEEE.
- Noble, J. A. (1988). Finding corners. *Image and vision computing*, 6(2) :121–128.
- Osher, S. and Sethian, J. A. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of computational physics*, 79(1) :12–49.

- 
- Perona, P. and Malik, J. (1990). Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 12(7) :629–639.
- Petersen, P. (2006). *Riemannian geometry*, volume 171. Springer.
- Petres, C., Pailhas, Y., Patron, P., Petillot, Y., Evans, J., and Lane, D. (2007). Path planning for autonomous underwater vehicles. *IEEE Transactions on Robotics*, 23(2) :331–341.
- Peyré, G. and Cohen, L. D. (2009). Geodesic methods for shape and surface processing. *Advances in Computational Vision and Medical Image Processing*, pages 29–56.
- Peyré, G., Péchaud, M., Keriven, R., Cohen, L. D., et al. (2010). Geodesic methods in computer vision and graphics. *Foundations and Trends® in Computer Graphics and Vision*, 5(3–4) :197–397.
- Podvin, P. and Lecomte, I. (1991). Finite difference computation of traveltimes in very contrasted velocity models : a massively parallel approach and its associated tools. *Geophysical Journal International*, 105(1) :271–284.
- Puig, L., Guerrero, J. J., and Daniilidis, K. (2014). Scale space for camera invariant features. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 36(9) :1832–1846.
- Rees, D. W. (1970). Panoramic television viewing system. US Patent 3,505,465.
- Rosenberg, S. (1997). *The Laplacian on a Riemannian manifold : an introduction to analysis on manifolds*. Number 31. Cambridge University Press.
- Rousseau, S., Helbert, D., Carré, P., and Blanc-Talon, J. (2010). Metric tensor for multi-component edge detection. In *Image Processing (ICIP), 2010 17th IEEE International Conference on*, pages 1953–1956. IEEE.
- Rouy, E. and Tourin, A. (1992). A viscosity solutions approach to shape-from-shading. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29(3) :867–884.
- Sapiro, G. and Ringach, D. L. (1996). Anisotropic diffusion of multivalued images with applications to color filtering. *IEEE transactions on image processing*, 5(11) :1582–1586.
- Sethian, J. A. (1996). A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 93(4) :1591–1595.
- Sethian, J. A. (1999). *Level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*, volume 3. Cambridge university press.

- Sethian, J. A. et al. (2003). Level set methods and fast marching methods. *Journal of Computing and Information Technology*, 11(1) :1–2.
- Smith, P. W., Johnson, K. B., and Abidi, M. A. (1999). Efficient techniques for wide-angle stereo vision using surface projection models. In *Computer Vision and Pattern Recognition, 1999. IEEE Computer Society Conference on.*, volume 1, pages 113–118. IEEE.
- Sochen, N., Kimmel, R., and Malladi, R. (1998). A general framework for low level vision. *IEEE transactions on image processing*, 7(3) :310–318.
- Sochen, N. and Zeevi, Y. Y. (1998). Representation of colored images by manifolds embedded in higher dimensional non-euclidean space. In *Image Processing, 1998. ICIP 98. Proceedings. 1998 International Conference on*, volume 1, pages 166–170. IEEE.
- Soulard, R. (2012). *Ondelettes analytiques et monogènes pour la représentation des images couleur*. PhD thesis, Université de Poitiers.
- Spira, A., Kimmel, R., and Sochen, N. (2007). A short-time beltrami kernel for smoothing images and manifolds. *IEEE Transactions on Image Processing*, 16(6) :1628–1636.
- Spira, A., Sochen, N., and Kimmel, R. (2005). Geometric filters, diffusion flows, and kernels in image processing. In *Handbook of Geometric Computing*, pages 203–230. Springer.
- Terzopoulos, D. and Fleischer, K. (1988). Deformable models. *The visual computer*, 4(6) :306–331.
- Tissainayagam, P. and Suter, D. (2004). Assessing the performance of corner detectors for point feature tracking applications. *Image and Vision computing*, 22(8) :663–679.
- Tsitsiklis, J. N. (1995). Efficient algorithms for globally optimal trajectories. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(9) :1528–1538.
- Valero-Gomez, A., Gomez, J. V., Garrido, S., and Moreno, L. (2013a). Fast marching method for safer, more efficient mobile robot trajectories. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 1070(9932/13).
- Valero-Gomez, A., Gomez, J. V., Garrido, S., and Moreno, L. (2013b). The path to efficiency : fast marching method for safer, more efficient mobile robot trajectories. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 20(4) :111–120.

- 
- Vidale, J. (1988). Finite-difference calculation of travel times. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 78(6) :2062–2076.
- Wang, Z., Bovik, A. C., Sheikh, H. R., and Simoncelli, E. P. (2004). Image quality assessment : from error visibility to structural similarity. *IEEE transactions on image processing*, 13(4) :600–612.
- Wetzler, A., Aflalo, Y., Dubrovina, A., and Kimmel, R. (2013). The laplace-beltrami operator : a ubiquitous tool for image and shape processing. In *International Symposium on Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing*, pages 302–316. Springer.
- Witkin, A. (1984). Scale-space filtering : A new approach to multi-scale description. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP'84.*, volume 9, pages 150–153. IEEE.
- Xu, C. and Prince, J. L. (1997). Gradient vector flow : A new external force for snakes. In *Computer Vision and Pattern Recognition, 1997. Proceedings., 1997 IEEE Computer Society Conference on*, pages 66–71. IEEE.
- Yagi, Y. and Kawato, S. (1990). Panorama scene analysis with conic projection. In *Intelligent Robots and Systems' 90.'Towards a New Frontier of Applications', Proceedings. IROS'90. IEEE International Workshop on*, pages 181–187. IEEE.
- Yagi, Y. and Yachida, M. (1991). Real-time generation of environmental map and obstacle avoidance using omnidirectional image sensor with conic mirror. In *Computer Vision and Pattern Recognition, 1991. Proceedings CVPR'91., IEEE Computer Society Conference on*, pages 160–165. IEEE.
- Yamazawa, K., Yagi, Y., and Yachida, M. (1993). Omnidirectional imaging with hyperboloidal projection. In *Intelligent Robots and Systems' 93, IROS'93. Proceedings of the 1993 IEEE/RSJ International Conference on*, volume 2, pages 1029–1034. IEEE.
- Yamazawa, K., Yagi, Y., and Yachida, M. (1995). Obstacle detection with omnidirectional image sensor hyperomni vision. In *Robotics and Automation, 1995. Proceedings., 1995 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 1062–1067. IEEE.
- Ying, X. and Hu, Z. (2004). Can we consider central catadioptric cameras and fisheye cameras within a unified imaging model. In *European Conference on Computer Vision*, pages 442–455. Springer.
- Zhao, H. (2005). A fast sweeping method for eikonal equations. *Mathematics of computation*, 74(250) :603–627.