



HAL
open science

Imagerie topologique ultrasonore des milieux périodiques

Hamza Hafidi Alaoui

► **To cite this version:**

Hamza Hafidi Alaoui. Imagerie topologique ultrasonore des milieux périodiques. Mécanique [physics]. Université de Bordeaux, 2019. Français. NNT : 2019BORD0388 . tel-02418415

HAL Id: tel-02418415

<https://theses.hal.science/tel-02418415>

Submitted on 18 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par **Hamza Hafidi Alaoui**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPECIALITÉ : Mécanique

Imagerie topologique ultrasonore des milieux périodiques

Sous la direction de Marc DESCHAMPS et Hélène BARUCQ

Membres du jury :

Mme. H. BARUCQ,	Directeur de recherche INRIA	Co-Directrice
M. M. DESCHAMPS,	Directeur de recherche CNRS	Directeur
M. V. GIBIAT,	Professeur émérite, Université de Toulouse	Examineur
M. L. LAGUERRE,	Directeur de recherche IFSTTAR	Rapporteur
M. S. MENSAH,	Maître de conférence, École Centrale de Marseille	Rapporteur
M. S. RODRIGUEZ,	Maître de conférence, Université de Bordeaux	Examineur

31 mai 2019

Remerciements :

Ces travaux de thèse ont été réalisés dans le département acoustique physique de l'Institut de mécanique et d'ingénierie de Bordeaux (I2M) en collaboration avec l'Institut national de recherche en informatique et en automatique (INRIA). Pour m'avoir accueilli dans le laboratoire de l'I2M, je remercie successivement les directeurs Éric ARQUIS, Professeur des universités à l'Institut Polytechnique de Bordeaux (IPB) et Jean-Christophe BATSALE, Professeur des universités à l'École nationale supérieure d'arts et métiers (ENSAM).

Mes remerciements vont également à M. Laurent LAGUERRE, directeur de recherche à l'Institut français des sciences et technologies des transports, de l'aménagement et des réseaux (IFSTTAR), à M. Serge MENSAH, maître de conférences à l'École centrale de Marseille pour avoir examiné ce manuscrit, et à M. Vincent GIBIAT pour avoir présidé le jury de thèse. J'ai été sensible à l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Pour leur soutien indéfectible qui a marqué et marquera encore ma vie pour toujours. je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance envers Marc DESCHAMPS, directeur de recherche au Centre national de la recherche Scientifique (CNRS) et envers Samuel RODRIGUEZ, maître de conférences à l'université de Bordeaux. Merci à Marc de m'avoir donné le goût de la rigueur et de m'avoir guidé lors de nombreuses années. Merci à Samuel pour son investissement remarquable ainsi que ses précieux conseils, me guidant dans l'apprentissage du métier de chercheur. Pour son soutien depuis mon cycle de master, et pour son aide sur de nombreux points, je remercie vivement Olivier PONCELET.

J'adresse également mes remerciements à l'ensemble de mes collègues de l'I2M. Merci au personnel technique et administratif, ainsi qu'aux chercheurs permanents et non-permanents du bâtiment A4 ; pour leur aide et pour les nombreuses discussions ayant régulièrement apportées un regard neuf et utile à mes travaux.

Je remercie infiniment ma compagne Elodie pour sa présence tout au long de ce merveilleux parcours, et pour son soutien inconditionnel au niveau professionnel et personnel.

Sans ne vouloir oublier personne, je tiens à remercier tous ceux et celles avec qui j'ai partagé des souvenirs impérissables durant mon séjour à Bordeaux, mais également ceux et celles qui de loin, m'ont soutenu.

J'exprime ma plus profonde gratitude à mes parents qui m'ont donné la vie, qui m'ont éduqué avec amour et inculqué les compétences nécessaires pour réussir dans le monde académique. Grâce à leurs sacrifices, j'ai vécu à Bordeaux une merveilleuse expérience qui a marqué et marquera encore ma vie pour toujours. Je pense également à mes chers petits frères et sœurs, et leur souhaite une bonne continuation dans leurs études respectives.

Résumé :

La détection, la localisation et le suivi de l'évolution de défauts dans les milieux périodiques et les guides d'ondes est un enjeu majeur dans le domaine du Contrôle Non Destructif (CND). La propagation d'ondes dans ce genre de milieux est complexe, par exemple lorsque la vitesse dépend de la fréquence (dispersion) ou de la direction de propagation (anisotropie). La signature du défaut peut également être « noyée » dans le champ acoustique renvoyé par la structure (réverbération ou diffusion multiple). C'est pour répondre à ces enjeux de taille que l'Optimisation Topologique (OT) a été adaptée aux problèmes de diffraction des ondes acoustiques par des défauts infinitésimaux afin d'obtenir des images de réflectivité des milieux inspectés. La méthode peut être appliquée à toutes sortes de milieux, quelle que soit leur complexité, à condition d'être capable de simuler correctement (sur un milieu de référence) la propagation des ondes de l'expérience physique. En s'inspirant de l'OT, les travaux de cette thèse proposent de mettre en œuvre des méthodes d'imagerie qualitatives adaptées aux spécificités des Cristaux Phononiques (CP) et des guides d'ondes.

Dans un premier temps, nous nous attachons à la description du formalisme mathématique de l'Optimisation Topologique et de la *Full Waveform Inversion* (FWI). Bien que ces méthodes ne cherchent pas à résoudre les mêmes problèmes inverses, nous mettons en évidence leurs points communs. Dans un deuxième temps, nous appliquons l'Imagerie Topologique (IT) à l'inspection en réflexion des milieux faiblement hétérogènes. Dans un troisième temps, nous nous inspirons de l'IT pour définir une nouvelle variante de celle-ci nommée Imagerie Topologique Hybride (ITH). Nous appliquons ces méthodes pour l'inspection en réflexion des CP créés par des tiges d'acier immergées dans l'eau. Nous comparons les performances de ces méthodes en fonction du type de défaut dans le CP. Les simulations numériques correspondantes à certains cas d'étude sont appuyées par des essais expérimentaux concluants. Dans un quatrième temps, nous adaptons l'IT à une configuration d'inspection en transmission afin de mettre en œuvre une méthode de *Structural Health Monitoring* (SHM) des guides d'ondes. A ce propos, nous avons mis au point une nouvelle méthode d'imagerie mieux adaptée que l'IT aux configurations d'inspection en transmission.

Mots-clés : Ondes Ultrasonores, Contrôle Non Destructif, Optimisation Topologique, Imagerie Topologique, Inversion des Formes d'Ondes Complètes , Cristal Phononique, Guide d'ondes, Contrôle de Santé Intégré.

Abstract :

The detection, localization and monitoring of the evolution of defects in periodic media and waveguides is a major issue in the field of Non-Destructive Testing (NDT). Wave propagation in such media is complex, for example when the velocity depends on the frequency (dispersion) or direction of propagation (anisotropy). The signature of the defect can also be "embedded" in the acoustic field reflected by the structure (reverberation or multiple diffusion). It is to answer these stakes of the size that the Topological Optimization (TO) has been adapted to the problems of diffraction of the acoustic waves by infinitesimal defects in order to obtain reflectivity images of the inspected media. The method can be applied to all kinds of media, regardless of their complexity, provided an exact simulation of the wave propagation in a reference medium (without defects) is performed. Inspired by the TO, the work of this thesis proposes to implement qualitative imaging methods adapted to the specificities of Phononic Crystals (PC) and waveguides.

First, we focus on the description of the mathematical formalism of Topological Optimization and Full-Waveform Inversion (FWI). Although these methods do not try to solve the same inverse problems, we highlight their similarities. In a second step, we apply Topological Imaging (TI) to the inspection in pulse-echo configuration of weakly heterogeneous media. Thirdly, we draw inspiration from TI to define a new variant of this method called Hybrid Topological Imaging (HTI). We apply these methods for the pulse-echo configuration inspection of PCs created by steel rods immersed in water. We compare the performance of these methods according to the kind of defects in the PC. Numerical simulations for some case studies are supported by conclusive experimental trials. In a fourth step, we adapt the TI to a pitch-catch configuration in order to implement a new method of Structural Health Monitoring (SHM) of waveguides. In this regard, we have developed a new imaging method that is better suited than TI to pitch-catch configurations.

Mots-clés : Ultrasonic waves, Non Destructive Testing, Topological optimization, Topological Imaging, Full Waveform Inversion, Waveguide, Structural Health Monitoring.

Table des matières

Introduction générale	1
Généralités sur la diffusion multiple	1
Caractérisation et imagerie des milieux hétérogènes	5
Organisation du manuscrit	10
1 Exploration des structures enfouies et identification d’objets : Full Waveform Inversion et Optimisation Topologique	15
1.1 Généralités	15
1.1.1 Introduction	15
1.1.2 Positionnement du problème	17
1.2 Full WaveForm Inversion (FWI)	20
1.2.1 Le problème physique	20
1.2.2 La fonction coût	21
1.2.3 Minimisation de la fonction coût	23
1.2.4 Etude de la sensibilité de la fonction coût	24
1.3 Optimisation Topologique (OT)	28
1.3.1 Le problème physique	29
1.3.2 La fonction coût	30
1.3.3 Etude de la sensibilité de la fonction coût	30
1.3.4 La méthode adjointe	31

1.4	Interprétation physique des gradients de la FWI et de l'OT : points communs aux deux méthodes . . .	33
1.5	Conclusion	35
2	Imagerie Topologique : interprétation physique et mise en œuvre	39
2.1	Imagerie Topologique et méthodes d'imagerie classiques	40
2.1.1	L'Imagerie Topologique à partir du processus d'Optimisation Topologique	40
2.1.2	L'Imagerie Topologique : une généralisation des méthodes d'imagerie classiques	44
2.2	Physique des ondes dans des milieux homogènes continus	48
2.2.1	Propagation des ondes dans des milieux fluides	48
2.2.2	Propagation des ondes dans des milieux solides	50
2.2.3	Les conditions aux limites	56
2.3	Les méthodes numériques	57
2.3.1	Généralités sur les méthodes numériques	57
2.3.2	L'approche des éléments finis	59
2.4	Imagerie Topologique d'un milieu hétérogène dans un régime propagatif à faible désordre	63
2.4.1	Simulation du problème réel	65
2.4.2	Étude du champ direct	66
2.4.3	Etude du champ adjoint	68
2.4.4	Construction de l'image	68
2.4.5	Sensibilité de l'Imagerie Topologique vis-à-vis d'une erreur de positionnement de la barrette ultrasonore	70
2.5	Conclusion	75
3	Imagerie Topologique des Cristaux Phononiques	78
3.1	Généralités sur les CP et moyens de Contrôle Non Destructif	79
3.1.1	Généralités et bibliographie	79
3.1.2	Imagerie Topologique Standard et Imagerie Topologique Hybride pour le Contrôle Non Des- tructif des CP	82
3.2	Dispositif expérimental et modélisation de l'expérience	85

3.2.1	Description du dispositif expérimental	85
3.2.2	Modélisation fidèle de l'expérience	87
3.3	Mises en œuvre numérique et expérimentale des méthodes d'imagerie pour la localisation de défauts ponctuels ou étendus	88
3.3.1	Tige manquante	88
3.3.2	Tige déplacée : Imagerie Topologique Hétérogène	98
3.3.3	Tige déplacée : Imagerie Topologique Hybride	100
3.3.4	Défaut étendu : Imagerie Topologique dans un milieu homogène	101
3.3.5	Défaut étendu : Imagerie Topologique dans un milieu hétérogène	102
3.3.6	Défaut étendu : Imagerie Topologique Hybride	102
3.4	Conclusion	103
4	Imagerie en transmission	109
4.1	Généralités et bibliographie	109
4.1.1	Le Contrôle Non Destructif (CND)	110
4.1.2	Le Contrôle de Santé Intégré	111
4.1.3	Les types de défauts industriels	112
4.1.4	Méthodes actives	113
4.1.5	Méthodes passives	116
4.2	Imagerie ultrasonore des milieux homogènes : configuration d'inspection en transmission	118
4.2.1	Éclairage avec un front d'onde plan	118
4.2.2	Éclairage avec plusieurs transducteurs	124
4.3	Conclusion	129
	Conclusion Générale	135

Table des figures

1	Propagation d'une onde acoustique dans un milieu fluide hétérogène.	3
1.1	Schéma simplifié de l'expérience d'inspection ultrasonore d'un milieu homogène.	18
1.2	Représentation géométrique de la méthode du Lagrangien.	26
2.1	Représentation schématique du type d'excitation utilisé pour l'inspection du milieu.	45
2.2	Démarche de calcul du résidu lors des inspections ultrasonores.	66
2.3	Localisation d'un défaut dans un milieu hétérogènes dont le régime de transport est un régime propagatif à faible désordre.	69
2.4	Comparaison des résidus pour l'étude de la sensibilité de l'IT vis-à-vis d'une erreur de positionnement de la sonde lors de la simulation de l'expérience physique.	71
2.5	Résidu erroné - représentation de l'effet de l'erreur (dans les deux directions du plan) de positionne- ment de la sonde sur l'IT.	72
2.6	Résidu exact - représentation de l'effet de l'erreur dans le positionnement de la sonde (dans le milieu de référence virtuel) dans la direction \mathbf{x}_1 sur l'IT.	73
2.7	Résidu exact - représentation de l'effet de l'erreur dans le positionnement de la sonde (dans le milieu de référence virtuel) dans la direction \mathbf{x}_2 sur l'IT.	74
3.1	Image du dispositif expérimental utilisé pour l'inspection des CP.	85
3.2	Schéma simplifié du réseau périodique de tiges d'acier et de la barrette ultrasonore utilisée pour son inspection.	86

3.3	Représentation temporelle de la réponse du CP mesurée par le 64 ^{ème} transducteur.	90
3.4	IT Homogène du CP - absence d'une seule tige enfouie en profondeur du réseau périodique.	92
3.5	Représentation temporelle du résidu expérimental normalisé - absence d'une tige dans le CP.	94
3.6	IT Hétérogène du CP - absence d'une seule tige enfouie en profondeur du réseau périodique.	95
3.7	IT Hybride du CP - absence d'une seule tige enfouie en profondeur du réseau périodique.	98
3.8	Localisation d'une tige d'acier dans un milieu homogène semi-infini.	99
3.9	IT Hétérogène du CP - Tige déplacée.	100
3.10	IT Hybride du CP - Tige déplacée.	101
3.11	IT Homogène du CP - Défaut étendu.	102
3.12	IT Hétérogène du CP - Défaut étendu.	103
3.13	IT Hybride du CP - Défaut étendu.	103
4.1	Schéma descriptif de l'inspection ultrasonore en transmission d'un milieu fluide homogène - inspection du milieu avec un front d'onde plan.	119
4.2	Imagerie ultrasonore en transmission (IT et ICCA) d'un milieu homogène - éclairage avec un front d'onde plan.	120
4.3	Description du processus d'imagerie en transmission des deux méthodes : IT et ICCA.	121
4.4	Schéma descriptif de l'inspection ultrasonore en transmission d'un milieu fluide homogène - inspection du milieu avec neuf transducteurs.	124
4.5	Imagerie ultrasonore en transmission (IT et ICCA) d'un milieu homogène infini - éclairage avec neuf transducteurs.	125
4.6	magerie ultrasonore en transmission (IT et ICCA) d'un milieu homogène infini - éclairage avec un seul transducteur.	127

Introduction générale

Cette thèse de doctorat s'inscrit dans le cadre d'un partenariat entre l'Institut d'Ingénierie et de Mécanique (I2M) et l'Institut National de Recherche Informatique et Automatique (INRIA), plus précisément entre le département Acoustique physique et l'équipe Magique 3D. Elle se donne pour objectif de développer des méthodes d'imagerie adaptées aux milieux hétérogènes réguliers. Avant d'entrer dans le vif de sujet, nous y proposerons de faire un point sur le phénomène de diffusion multiple susceptible d'exister dans ce genre de milieu. Nous situerons par la suite le contexte de cette étude par rapport aux travaux antérieurs visant à imager des milieux hétérogènes aléatoires. Nous terminerons finalement l'introduction de ce travail de recherche par une section dédiée à l'organisation du manuscrit. Par ailleurs, nous souhaitons attirer l'attention du lecteur sur le fait que les références bibliographiques sont présentées à la fin de chaque chapitre.

Généralités sur la diffusion multiple

L'intérêt des physiciens pour l'étude des milieux diffusifs est suscité par différentes problématiques. En astrophysique où le rayonnement des astres est altéré par la traversée de nuages interstellaires, le problème revient à caractériser la source à partir de l'onde transmise à travers l'espace. En physique quantique ou en électronique, les questions les plus récurrentes portent sur le moyen de décrire le transport des électrons dans les métaux. Parmi les enjeux de ces disciplines, la prédiction et la modélisation de la propagation des ondes dans des milieux aux caractéristiques inconnues revêtent une importance capitale. Dans d'autres disciplines comme la médecine, la sismologie et le Contrôle Non Destructif (CND), la recherche est plus orientée vers les processus d'imagerie. La caractérisation d'un milieu inconnu à partir d'ondes diffusées constitue le cœur des problématiques étudiées dans ces domaines.

La principale différence entre l’astrophysique, la physique quantique ou l’acoustique ne réside pas dans les concepts physiques, mais plutôt dans la quantité physique mise en jeu dans l’expérience : l’onde est-elle électromagnétique, gravitationnelle, ou mécanique ? La quantité physique d’intérêt est-elle mesurée à chaque instant ou moyennée dans le temps ? Les diffuseurs sont-ils en mouvement ou immobiles ? Leur distribution spatiale est-elle aléatoire ou régulière ? Les méthodes proposées dans la littérature tiennent compte des spécificités du problème abordé. En particulier, les informations pertinentes à extraire à partir de l’observation du milieu peuvent jouer un rôle crucial quant à la mise en œuvre effective d’une méthode.

Le travail de recherche effectué dans cette thèse contribue à l’élaboration de méthodes d’imagerie adaptées au CND des milieux hétérogènes périodiques. Au cours de notre recherche bibliographique, nous avons constaté que la majorité des travaux publiés au sujet de l’imagerie portaient sur les milieux aléatoires. Il convient donc de décrire de façon simplifiée le comportement des ondes acoustiques dans ce type de milieux, et si possible de s’inspirer de certaines démarches connues. Pour illustrer nos propos, considérons un milieu homogène infini Ω_ε au sein duquel nous avons placé quelques hétérogénéités notées ε_i ($i = 1, \dots, N$ où N est le nombre d’hétérogénéités) matérialisées par des points rouges sur la figure 1-a. Une source ponctuelle localisée en \mathbf{x}_s émet des ondes dans toutes les directions et nous désirons mesurer le champ d’ondes reçu par l’observateur positionné en \mathbf{x}_O . On conçoit à travers le schéma de la figure 1 qu’il existe une infinité de chemins pour aller de la source à l’observateur. Il y a bien évidemment des trajectoires directes (voir la figure 1-a), d’autres qui atteignent l’observateur après avoir subies un seul événement de diffusion (voir la figure 1-b), ainsi que d’autres beaucoup plus complexes où l’on peut imaginer que l’onde interagit avec plusieurs diffuseurs avant d’atteindre l’observateur (voir les figures 1-c et 1-d). L’onde totale diffusée par le milieu Ω_ε (mesurée au point \mathbf{x}_O) comprend alors deux contributions :

1. Une contribution de diffusion simple lorsque l’onde n’interagit qu’une seule fois avec l’inclusion avant d’atteindre l’observateur placé en \mathbf{x}_O ,
2. Une contribution de diffusion multiple, lorsqu’une même onde est diffusée plusieurs fois successivement avant la réception.

Si l’onde totale diffusée par le milieu comprend principalement la contribution de diffusion simple, on parle de modèle de propagation d’ondes dans le cadre de l’approximation de Born au premier ordre. L’image de réflectivité du milieu est construite à partir d’une correspondance simple entre le temps d’arrivée d’un écho et la profondeur de la cible au sein du milieu inspecté.

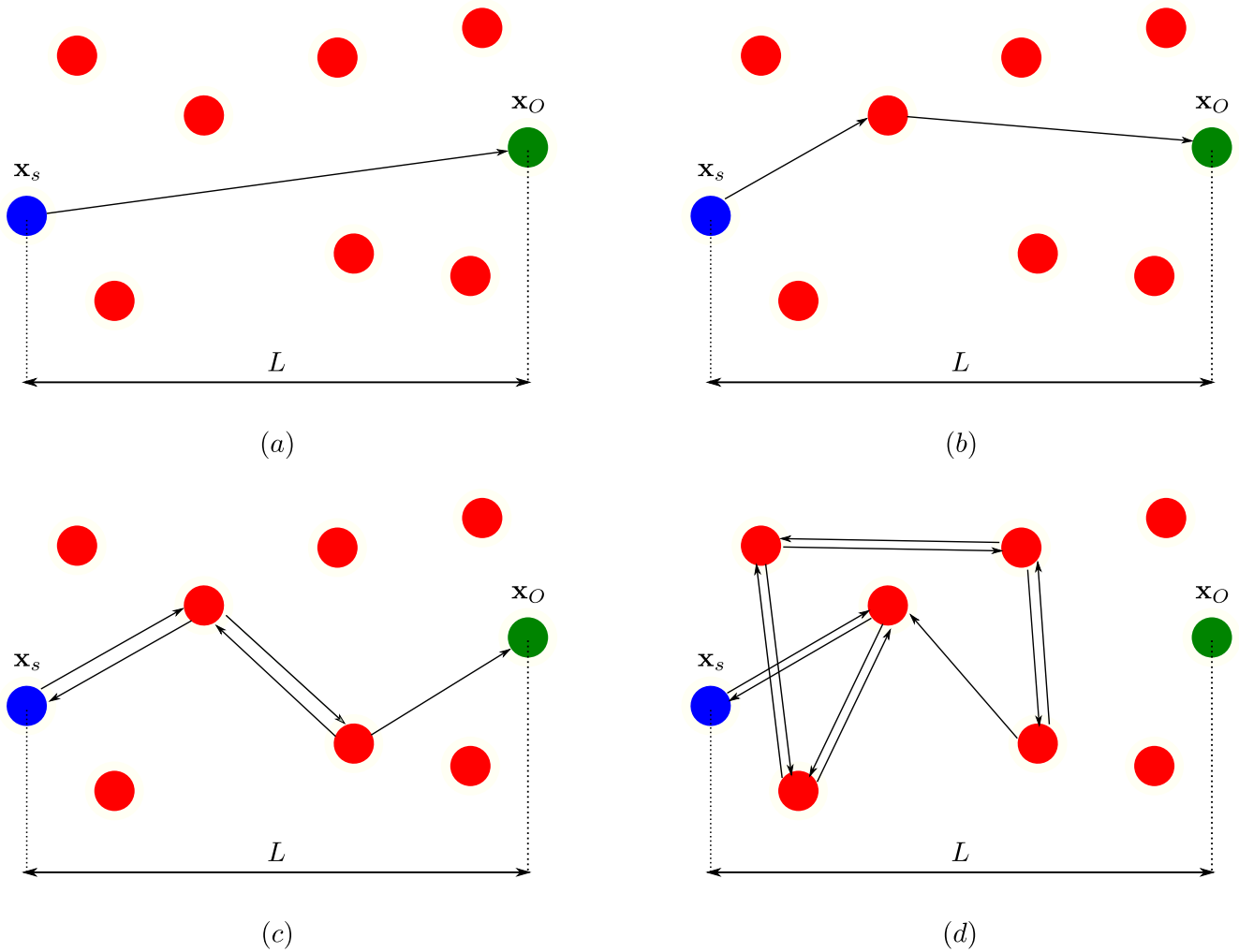


FIGURE 1 – Propagation d’une onde acoustique dans un milieu fluide hétérogène. Le disque bleu désigne la source placée en \mathbf{x}_s , le disque vert est affecté au point d’observation placé en \mathbf{x}_O et les disques rouges représentent les diffuseurs dans le milieu Ω_ε . (a) Trajectoire directe de l’onde acoustique. (b) Un seul événement de diffusion de l’onde acoustique. (c) Deux événements de diffusion et interactions multiples entre les diffuseurs et la source. (d) Diffusion multiple de l’onde acoustique ; l’onde ne se propage plus et se trouve piégée dans le désordre.

A l’opposé, lorsque la diffusion multiple est importante, l’approximation de Born au premier ordre n’est plus valable pour décrire la propagation des ondes dans le milieu. En effet, la localisation de défauts dans ce type de situation échoue car deux échos arrivant simultanément peuvent provenir de deux endroits différents, ce qui empêche d’utiliser la correspondance entre le temps et l’espace. La diffusion multiple arrive lorsqu’un compromis est établi

entre plusieurs longueurs caractéristiques : longueur d'onde, taille des hétérogénéités, et longueur d'absorption. Les chemins d'ordres élevés (voir les figures 1-c et 1-d) ont une trajectoire de plus en plus complexe et ce sont eux qui sont davantage affectés par la présence de l'absorption du milieu prospecté.

Il convient de noter que même si la diffusion multiple est considérée comme un obstacle pour les techniques d'imagerie classiques, son étude peut apporter des informations supplémentaires sur la structure de diffusion. En effet, plus l'onde se propage dans le milieu inspecté, plus elle explore ce dernier et plus elle transporte toutes sortes d'informations sur celui-ci [1].

L'approche classique pour la caractérisation des milieux hétérogènes aléatoires consiste à considérer un échantillon de diffusion comme une réalisation d'un processus aléatoire. L'étude porte donc sur les paramètres statistiques tels que la moyenne, la variance et la corrélation du champ [2, 3]. En plus de la longueur d'onde λ et de la taille typique L du milieu, plusieurs paramètres physiques sont pertinents pour caractériser la propagation des ondes dans celui-ci, parmi lesquels :

1. La longueur d'absorption l_a : distance typique après laquelle l'onde est significativement atténuée dans le milieu en absence de diffuseurs. Si l'absorption est nulle $l_a = \infty$.
2. Le libre parcours élastique moyen l_e : distance moyenne entre deux événements de diffusion.
3. Le libre parcours moyen de transport ou de diffusion l^* : distance à partir de laquelle l'onde perd la mémoire de sa direction de propagation incidente.

Les relations d'ordre entre ces longueurs peuvent donner lieu à des régimes de propagation très différents. D'un point de vue expérimental, ces paramètres peuvent être mesurés par diverses expériences. Certaines d'entre-elles impliquent des mesures du champ total moyenné, transmis à travers le milieu diffusant [4, 5, 6, 7]. D'autres étudient les variations de l'intensité moyenne [7, 8, 9, 10] et ajustent le résultat avec l'équation de transfert radiatif. L'effet de la rétrodiffusion cohérente¹ [11, 12, 13, 14] peut également être mis à profit pour mesurer le libre parcours moyen de transport l^* [15]. On peut ainsi délimiter trois principaux régimes de transport de l'énergie qui diffèrent par degrés de désordre croissant :

1. Lorsque nous excitons un milieu aléatoire avec une onde acoustique, les mesures expérimentales montrent qu'à l'endroit exact où l'onde a été émise nous observons que l'intensité (moyennée sur le temps et le nombre de réalisations) y est double (en comparaison à tout autre point). Ce phénomène s'appelle le cône de rétro-diffusion cohérente. L'étude de celui-ci permet de mesurer certains paramètres de matériaux afin de les caractériser.

1. Le régime propagatif à faible désordre (voir la figure 1-b) : la longueur d'onde λ est plus petite que la taille typique du milieu L , elle-même plus petite ou de l'ordre de grandeur du libre parcours moyen l . L'onde interagit une seule fois avec chaque objet, c'est le régime de validité de l'approximation de Born au premier ordre.
2. Le régime diffusif ou de localisation faible (voir la figure 1-c) : quand le libre parcours moyen l est plus petit que la taille de la structure L , les ondes interagissent de nombreuses fois avec les diffuseurs du milieu. L'onde incidente est très atténuée, voire invisible et l'enregistrement est dominé par des arrivées successives d'ondes diffuses. Les méthodes d'imagerie basées sur la correspondance entre le temps d'arrivée d'un écho et la profondeur de la cible au sein du milieu ne sont donc plus utilisables.
3. La localisation forte (voir la figure 1-d) : si le libre parcours moyen diminue encore pour s'approcher de la longueur d'onde, les ondes deviennent prisonnières du désordre et ne se propagent plus. Ce phénomène, découvert en 1958 par P. W. Anderson dans un contexte de mécanique quantique [16] a également été observé pour les ultrasons [17].

Il est extrêmement compliqué de mettre en œuvre une méthode d'imagerie efficace dans le régime de la localisation forte car si l'onde est emprisonnée dans le désordre, la collecte d'informations sur le milieu est impossible. Ainsi, ce travail de recherche se focalise uniquement sur l'étude des méthodes d'imagerie adaptées aux deux premiers régimes.

Caractérisation et imagerie des milieux hétérogènes

Le problème d'identification et de localisation des défauts dans un milieu hétérogène désordonné a fait l'objet d'une certaine attention par le passé. En optique, les techniques les plus puissantes reposent sur la variation de l'intensité du champ du milieu, sondé par un ou plusieurs capteurs [18, 19, 20, 21]. Toutefois, ces techniques sont inapplicables aux milieux solides. D'autres auteurs ont proposé d'interpréter les variations des formes dans la coda² en termes de variations en temps et en espace ou de différences de phase [22, 23]. Cette approche s'est avérée très utile pour détecter de petits défauts mais donne peu d'informations sur leur position.

2. Dans le domaine de la géophysique par exemple, l'étude de la propagation des ondes dans la croûte terrestre revêt une importance capitale. La croûte terrestre est un milieu fortement hétérogène à différentes échelles. Les ondes mécaniques peuvent être simplement ou multiplement diffusées entre leur émission (séisme) et leur mesure. N'importe quel exemple de sismogramme généré par un séisme fait clairement apparaître les arrivées directes des ondes de compression et de cisaillement, puis une série décroissante d'arrivées tardives qui forment la coda. Le terme "coda" a été choisi pour décrire la partie tardive des sismogrammes, située après les arrivées des ondes de volume.

L'acoustique n'apporte aucun nouveau concept théorique à l'étude de la diffusion multiple aléatoire, mais apporte des possibilités originales. De nos jours, un réseau ultrasonique typique se compose de 128 éléments programmables pouvant jouer alternativement le rôle d'émetteur ou de récepteur d'ondes acoustiques dans une large bande de fréquences. Les formes d'ondes à transmettre peuvent être programmées via une interface informatique. En ce qui concerne les champs d'ondes mesurés, les éléments du réseau piézoélectrique sont capables d'enregistrer le champ lui-même (mesure de l'amplitude et de la phase) et non seulement son intensité. Une telle facilité d'utilisation permet un certain nombre d'applications. A titre d'exemple, il a conduit au développement des Miroirs à Retournement Temporel (MRT), appareils capables de mesurer et de rétropropager des ondes dans un milieu donné.

Dans les milieux faiblement hétérogènes, les diffuseurs sont très éloignés et les effets de couplage entre ces derniers sont négligeables. Se rajoutent aux techniques basées sur l'équivalence entre le temps et l'espace d'autres techniques qui utilisent les sondes ultrasonores multi-éléments pour former un faisceau cohérent à l'émission et à la réception. L'idée est de focaliser l'onde transmise au point souhaité en appliquant des retards appropriés à chaque transducteur de la sonde. A la réception du champ transmis, les mêmes retards sont appliqués aux signaux reçus avant leur sommation. Les signaux issus d'une diffusion simple à cause d'un défaut situé dans le milieu s'additionnent de manière cohérente, tandis que la sommation est incohérente pour les signaux issus de la diffusion multiple arrivant au même moment. En imagerie médicale, où la diffusion multiple est généralement faible aux fréquences ultrasonores standards, cette opération est généralement suffisante pour reproduire correctement l'image du milieu. Une autre méthode nommée Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel (DORT) fait elle aussi intervenir les MRT. Elle repose principalement sur l'analyse spectrale de l'opérateur de retournement temporel dont le nombre de valeurs propres significatives est égal au nombre d'obstacles dans le milieu. Les vecteurs propres associés aux valeurs propres permettent de générer des ondes focalisant sélectivement sur les diffuseurs [24].

A l'échelle microscopique, la réversibilité des équations de la mécanique classique est un fait établi. A l'opposé, les observations quotidiennes montrent que les phénomènes physiques macroscopiques sont irréversibles. La raison de cette irréversibilité trouve son explication dans le nombre extrêmement élevé de particules que contiennent les systèmes macroscopiques. Dans un esprit métaphorique, imaginons que vous teniez un vase antique d'une valeur inestimable à la main et que dans un instant d'inattention vous le lâchiez. La collision du vase avec le sol éclatera ce dernier en mille morceaux qui s'éparpilleront dans toutes les directions. Supposons désormais que vous disposiez d'un pouvoir qui vous permette de figer le temps. Dans l'espoir de remédier à la situation, vous inventeriez une

machine en mesure de reconstituer l'état initial du vase en imposant de nouvelles conditions initiales sur tous les morceaux de vase suspendus dans l'air. En réalité même si vous étiez capable pour une quelconque raison de figer le temps, vous ne serez jamais en mesure de reconstruire l'état initial du vase. En effet, pour réaliser une telle expérience, il faudrait mesurer les positions et vitesses de chaque particule avec une précision essentiellement infinie. Cela nécessiterait une quantité infinie d'informations et sera donc impossible avec un dispositif expérimental réel.

En physique des ondes, cependant, la quantité d'informations requise pour décrire un champ d'ondes sans ambiguïté est limitée et dépend de la longueur d'onde la plus courte du champ. Ainsi, il est possible et plus facile de faire des expériences d'inversion de temps avec des ondes plutôt qu'avec des particules. Parmi toutes les sortes d'ondes possibles, les ondes acoustiques s'avèrent très appropriées pour étudier la réversibilité des phénomènes désordonnés transitoires. On pourrait plutôt penser à l'utilisation d'ondes électromagnétiques à la place. En effet, au cours des dernières années, des techniques optiques telles que la conjugaison de phases ont été appliquées avec succès aux ondes acoustiques. Cependant, la conjugaison de phase est fondamentalement une technique monochromatique. Pour étendre ce concept aux signaux à larges bandes et aux phénomènes transitoires, il faut utiliser un système d'inversion du temps, c'est-à-dire un dispositif capable d'enregistrer une forme d'onde (amplitude et phase). Ceci est facilement réalisable pour les ondes acoustiques car contrairement aux détecteurs optiques, les transducteurs piézoélectriques peuvent suivre en temps réel l'évolution d'une onde ultrasonore et également être utilisés comme émetteurs de celle-ci.

Depuis la publication des premiers papiers sur le retournement temporel en acoustique et la conception des MRT par M. Fink et ses collègues [25, 26, 27], plusieurs travaux visant à détecter des défauts dans des milieux hétérogènes désordonnés ont vu le jour. Le principe du retournement temporel est d'exploiter la réversibilité de l'équation des ondes en milieu non dissipatif pour rétropropager la réponse de celui-ci afin d'en obtenir des informations. Sans aller jusqu'à une caractérisation complète du milieu, il s'agit le plus souvent de localiser des défauts ou des cibles enfouies dans le milieu [1].

D'autres travaux ont été publiés afin de caractériser les milieux désordonnés [2, 3]. Le point qui a suscité notre intérêt dans ces articles est leur expérience physique. Celle-ci consiste à émettre une onde impulsionnelle dans le milieu (une population de tiges d'acier immergées dans l'eau) et de mesurer le champ d'onde transmis avec un MRT. Le champ d'ondes transmis est retourné temporellement avant d'être rétropropagé dans le milieu aléatoire. Même dans un régime de diffusion aussi élevé, le retournement temporel du champ d'ondes transmis focalise l'onde vers

la position de la source impulsionnelle avec une résolution spatiale nettement meilleure que la limite de diffraction. Ce sujet de recherche visant à générer une onde focalisante sur une cible de position inconnue a ouvert la voie à d'autres pistes de recherche exploitant le concept de super-résolution [28, 29]. Le contenu de ces travaux nous permet d'apprendre que la résolution spatiale dépend notamment de la taille du MRT. Dans un milieu hétérogène, il apparaît qu'en moyenne la qualité de la focalisation est améliorée par rapport au milieu homogène; c'est le phénomène de super-résolution. Ce résultat est rendu possible grâce aux réflexions multiples qui ont lieu dans le milieu hétérogène et qui permettent au MRT d'obtenir plus d'informations sur le champ d'ondes dans le milieu.

Dans leur publication [30] A. Aubrey et *al.* présentent une technique d'imagerie adaptée à la détection d'une cible incorporée dans un environnement fortement diffusif. Le dispositif expérimental employé dans cette démarche comprend une barrette ultrasonore de 125 transducteurs indépendants placés en vis-à-vis du milieu d'intérêt. Ce dernier est une collection de tiges d'acier de 0.8 mm de diamètre distribuées aléatoirement. L'épaisseur du milieu aléatoire est de trois fois le libre parcours moyen de la diffusion, et le défaut recherché est un cylindre en acier de 15 mm de diamètre placé derrière celui-ci. L'expérience physique consiste à émettre un signal impulsionnel par l'élément i et à mesurer l'onde rétrodiffusée par le milieu avec l'élément j . Cette opération est réalisée pour tous les couples émetteurs/récepteurs possibles. L'ensemble des réponses N^2 forme une matrice de réponse globale du milieu nommée \mathbf{K} . Toute l'information disponible sur le milieu inspecté est contenue dans cette matrice. Le cœur de la méthode consiste à appliquer un certain nombre d'opérations de traitement du signal visant à séparer l'écho de la diffusion simple induit par la cible de la coda de diffusion multiple. Ceci est possible grâce à une cohérence déterministe le long des antidiagonaux de la matrice \mathbf{K} quelle que soit la distribution des diffuseurs, ce qui est typique de la diffusion simple. Cette caractéristique particulière peut être utilisée pour extraire les ondes de diffusion simple même si la diffusion multiple prédomine. Une fois cette opération effectuée, la détection de la cible est obtenue en appliquant la méthode DORT. Notons qu'à cause de la diffusion multiple la méthode DORT à elle seule est inefficace pour détecter la cible sans le traitement préalable de la matrice \mathbf{K} . A. Aubrey et *al.* utilisent ensuite la théorie des matrices aléatoires [31] dans le but de définir un critère de détection appliqué à la première valeur singulière λ_1 de la matrice \mathbf{K} pour décider si une cible est détectée ou non. L'approche étayée dans cet article combine un filtre de diffusion simple avec la méthode DORT et améliore significativement les performances de DORT pour détecter et localiser des défauts enfouis dans un milieu très hétérogène. Les auteurs ont transposé la même méthode pour imager les tissus du corps humain dans [32].

Les articles [33, 34] présentent une technique d'imagerie nommée LOCADIF permettant de détecter une perturbation locale dans un milieu hétérogène comme le béton. La technique LOCADIF utilise simultanément les informations véhiculées par la phase et l'amplitude d'un champ d'ondes et compare les formes d'ondes pour toutes les paires émetteurs/récepteurs possibles, avant et après l'introduction du défaut. Sur la base de la décorrélation spatio-temporelle des ondes de la coda, la technique d'inversion des données présentée dans [33, 34] est en mesure de localiser le défaut introduit dans le bloc de béton entre deux acquisitions. Notons que la taille du défaut est comparable à la taille des hétérogénéités constituant l'échantillon et qu'un tel défaut est difficilement détectable par les méthodes conventionnelles. L'image résultante de la LOCADIF est une carte tridimensionnelle représentant la probabilité de l'emplacement du défaut.

L'article [35] présente une méthode de localisation active d'une perturbation locale dans un milieu fortement diffusant à l'aide d'un ensemble de capteurs disposés aléatoirement dans le milieu d'étude. La perturbation peut être l'introduction ou la suppression d'un diffuseur ou la modification de la position de celui-ci dans le milieu inspecté. L'approche présentée dans le papier ne nécessite que de connaître les propriétés du milieu contenant les diffuseurs, ainsi que la position de chaque capteur. Le principe de la méthode repose sur la comparaison des réponses du milieu avant et après l'introduction de la perturbation dans le milieu. La différence des signaux issus des deux états supprime la grande partie de la contribution de diffusion multiple et fait apparaître l'onde balistique du défaut et ses interactions manquantes avec le milieu. À partir de cette considération, la localisation de la perturbation est obtenue en inversant les données à l'aide d'un modèle de diffusion simple construit à partir d'un modèle de champ libre entre la source et la perturbation, et entre la perturbation et le récepteur. L'essentiel de la méthode repose sur le fait que la signature de la diffusion simple induite par la perturbation est clairement identifiable dans le champ soustrait. Par conséquent, l'efficacité de l'approche diminue pour les milieux très diffusifs car la signature de la diffusion simple risque d'être "noyée" dans la coda.

Les travaux cités dans cette section s'intéressent tous à la caractérisation ou à l'imagerie des milieux hétérogènes aléatoires. Nous nous sommes inspirés de certaines méthodes étayées dans ces articles pour mieux répondre à nos besoins et objectifs de ce travail de recherche. Ces derniers s'inscrivent dans une logique visant à développer des méthodes d'imagerie ultrasonores adaptées aux milieux hétérogènes. Nous nous intéresserons en particulier aux milieux hétérogènes réguliers à l'image des Cristaux Phononiques (CP). Les CP étudiés dans ce travail sont constitués de diffuseurs solides immergés dans une matrice hôte fluide. Le diamètre des diffuseurs est trois fois inférieur à la

longueur d’onde à fréquence centrale dans l’eau λ_{fc} , et le libre parcours moyen l est plus petit que la taille de la structure. Les images (dans le plan bidimensionnel) de réflectivité du milieu sont obtenues suite à une seule excitation active de ce dernier grâce à un MRT. Les méthodes employées pour l’imagerie de ces milieux s’apparentent à la résolution des problèmes inverses. Si elles sont délicates à traiter, ces méthodes non conventionnelles sont néanmoins susceptibles de fournir des informations plus riches sur la région explorée.

Organisation du manuscrit

Le premier chapitre de cette thèse constituera un fondement théorique utile au reste de ce manuscrit. C’est pour cette raison que nous nous attacherons dans un premier temps à la compréhension du formalisme mathématique qui décrit la résolution de problèmes inverses. Nous veillerons à comparer et à mettre en évidence les points communs entre l’Optimisation Topologique (OT) et la Full Waveform Inversion (FWI); deux méthodes de résolution des problèmes inverses adaptées à des problèmes de nature différente. Toutefois, nous démontrerons que sous certaines conditions les sensibilités des fonctions coûts (ou gradients) des deux méthodes peuvent être exprimées explicitement comme une fonction de deux champs ondulatoires calculés dans le milieu de référence (virtuel).

Une étude bibliographique concernant l’Imagerie Topologique (IT) sera présentée dans le deuxième chapitre de ce manuscrit. Tout d’abord, nous définirons le concept de l’IT, ensuite nous démontrerons comment celle-ci peut être considérée comme une généralisation des méthodes d’imagerie classiques s’appuyant sur le principe de retard-sommation. Le deuxième chapitre abordera également la physique des ondes dans les milieux continus et répertoriera les méthodes numériques nécessaires aux calculs des solutions des problèmes de propagation d’ondes dans ces milieux. Dans cette optique, des études numériques seront dédiées à la mise en œuvre de l’IT pour l’inspection en réflexion de milieux faiblement hétérogènes (régime propagatif à faible désordre). Cette partie du manuscrit sera enrichie par des études de performance de la méthode face à certaines sources d’erreurs. Les limites inhérentes à l’IT seront prédites et discutées à la fin de ce chapitre.

Dans le troisième chapitre de ce manuscrit, un état d’art sera dressé autour des Cristaux Phononiques (CP) et leurs applications industrielles. En se basant sur l’IT, nous définirons une autre méthode d’imagerie qualitative pour l’inspection en réflexion de CP créés par des inclusions cylindriques fortement échogènes immergées dans une matrice fluide (régime diffusif ou de localisation faible). Etant donné que l’IT est une méthode qui repose sur la

modélisation de l'expérience physique dans un milieu virtuel (milieu de référence), nous veillerons à décrire en détail la démarche adoptée dans ce travail pour reproduire des simulations numériques fidèles aux expérimentations réalisées en laboratoire. Ce chapitre proposera également de confronter les résultats obtenus pour chaque méthode afin de tirer des conclusions sur la meilleure d'entre elles en fonction du type de défaut. Les simulations numériques correspondantes à certains cas d'étude seront étayées par des essais expérimentaux concluants.

Le dernier chapitre du manuscrit témoignera d'un changement de paradigme dans la configuration d'inspection. En partant d'une disposition de transducteurs favorable à l'imagerie ultrasonore en transmission, l'IT sera adaptée à la détection et à la localisation de défauts dans des milieux homogènes. Nous développerons au cours de ce travail de recherche, suite à des résultats insatisfaisants, une nouvelle méthode d'imagerie mieux adaptée aux configurations d'inspection en transmission. Finalement, bien que les études réalisées dans ce chapitre soient préliminaires, la méthode que nous proposerons fournira des résultats plus précis que l'IT dans ce type de situation. Ce constat laissera entrevoir des perspectives séduisantes pour une possible incorporation de la méthode dans des systèmes de contrôle de santé des structures.

Bibliographie

- [1] Arnaud Derode, Philippe Roux, and Mathias Fink. Robust acoustic time reversal with high-order multiple scattering. *Physical Review Letters*, 75(23) :4206–4209, 1995.
- [2] Arnaud Derode, Arnaud Tourin, and Mathias Fink. Random multiple scattering of ultrasound. I. Coherent and ballistic waves. *Physical Review E*, 64(3) :036605, 2001.
- [3] Arnaud Derode, Arnaud Tourin, and Mathias Fink. Random multiple scattering of ultrasound . II . Is time reversal a self-averaging process? *Physical Review E*, 64 :036606, 2001.
- [4] Z Q Zhang, I P Jones, H P Schriemer, J H Page, D A Weitz, and Ping Sheng. Wave transport in random media : The ballistic to diffusive transition. *Physical Review E*, 60(4) :4843–4850, 1999.
- [5] John A Scales and Kasper Van Wijk. Tunable multiple-scattering system. *Applied Physics Letters*, 79 :2294, 2001.
- [6] John A Scales and Alison E Malcolm. Laser characterization of ultrasonic wave propagation in random media. *Physical review E*, 67 :046618, 2003.
- [7] Matthew M Haney, Kasper Van Wijk, and Roel Snieder. Radiative transfer in layered media and its connection to the O Doherty-Anstey formula. *Geophysics*, 70(1) :1–11, 2005.
- [8] S E Skipetrov and B A Van Tiggelen. Dynamics of Weakly Localized Waves. *Physical Review Letters*, 92 :113901, 2004.
- [9] Peter Gross, Christof M Aegerter, and Georg Maret. Observation of the Critical Regime Near Anderson Localization of Light. *Physical Review Letters*, 96 :063904, 2006.
- [10] Ludovic Margerin, Michel Campillo, and Bart Van Tiggelen. Radiative transfer and diffusion of waves in a layered medium : new insight into coda Q. *Geophysical Journal International*, 134(2) :596–612, 1998.
- [11] E. Akkermans, P. E. Wolf, and R. Maynard. Coherent Backscattering of Light by Disordered Media : Analysis of the Peak Line Shape. *Physical review letters*, 56(14) :1471–1474, 1986.

- [12] Pierre-Etienne Wolf and Georg Maret. Weak Localization and Coherent Backscattering of Photons in Disordered Media. *Physical Review Letters*, 55(24) :2696–2699, 1985.
- [13] G Labeyrie, F De Tomasi, J Bernard, C A Müller, C Miniatura, and R Kaiser. Coherent Backscattering of Light by Cold Atoms. *Physical Review Letters*, 83 :5266–5269, 1999.
- [14] Richard L Weaver and Oleg I Lobkis. Enhanced Backscattering and Modal Echo of Reverberant Elastic Waves. *Physical Review Letters*, 84 :4942, 2000.
- [15] Arnaud Tourin, Arnaud Derode, and Mathias Fink. Transport parameters for an ultrasonic pulsed wave propagating in a multiple scattering medium. In *IEEE Ultrasonics Symposium. Proceedings. International Symposium*, volume 1, pages 711–714, 1999.
- [16] P. W. Anderson. Absence of Diffusion in Certain Random Lattices. *Physical Review*, 109 :1492, 1958.
- [17] J. H. Page, P. Sheng, H. P. Schriemer, I. Jones, X. Jing, and D. A. Weitz. Group velocity in strongly scattering media. *Science*, 271 :634–637, 1996.
- [18] D. J. Pine, D. A. Weitz, P. M. Chaikin, and E. Herbolzheimer. Diffusing-wave spectroscopy. *Physical Review Letters*, 60(12) :1134–1137, 1988.
- [19] C Vanneste, S. Feng, and D. Sornette. Non-Destructive Evaluations in Multiple-Scattering Media. *Europhysics Letters*, 24 :339–344, 1993.
- [20] C. Vanneste, S. Feng, and D. Sornette. Non-Destructive Evaluations in Multiple-Scattering Media. *Europhysics letters*, 24 :339–344, 1993.
- [21] M. C. W. van Rossum and Th. M. Nieuwenhuizen. Multiple scattering of classical waves : microscopy, mesoscopy, and diffusion. *Reviews of Modern Physics*, 71(1) :313–371, 1999.
- [22] Carlos Pacheco and Roel Snieder. Time-lapse travel time change of multiply scattered acoustic waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118 :1300–1310, 2005.
- [23] M L Cowan, J H Page, and D A Weitz. Velocity Fluctuations in Fluidized Suspensions Probed by Ultrasonic Correlation Spectroscopy. *Physical Review Letters*, 85 :453–456, 2000.

- [24] Claire Prada and Mathias Fink. Eigenmodes of the time reversal operator : A solution to selective focusing in multiple-target media. *Wave Motion*, 20(94) :151–163, 1994.
- [25] M Fink. Time reversal of ultrasonic fields. I. Basic principles. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 39(5) :555–566, 1992.
- [26] F Wu, J L Thomas, and M Fink. Time reversal of ultrasonic fields. II. Experimental results. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 39(5) :567–578, 1992.
- [27] Didier Cassereau and Mathias Fink. Time-Reversal of ultrasonic fields-part III : theory of the closed Time-Reversal cavity. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 39 :579–592, 1992.
- [28] J De Rosny and M Fink. Overcoming the Diffraction Limit in Wave Physics Using a Time-Reversal Mirror and a Novel Acoustic Sink. *Physical Review Letters*, 89 :124301, 2002.
- [29] Geoffroy Lerosey, Julien De Rosny, Arnaud Tourin, and Mathias Fink. Focusing Beyond the Diffraction Limit with Far-Field Time Reversal. Technical Report 5815, 2007.
- [30] Alexandre Aubry and Arnaud Derode. Detection and imaging in a random medium : A matrix method to overcome multiple scattering and aberration. *Journal of Applied Physics*, 106 :044903, 2009.
- [31] A. M. Sengupta and P. P. Mitra. Distributions of Singular Values for Some Random Matrices. *Physical review. E*, 60 :3389–92, 1999.
- [32] Alexandre Aubry and Arnaud Derode. Multiple scattering of ultrasound in weakly inhomogeneous media : Application to human soft tissues. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 129(2011) :225–233, 2011.
- [33] Eric Larose, Thomas Planes, Vincent Rossetto, and Ludovic Margerin. Locating a small change in a multiple scattering environment. *Applied Physics Letters*, 96(2010) :204101, 2010.
- [34] Thomas Planès, Eric Larose, Vincent Rossetto, and Ludovic Margerin. LOCADIFF : Locating a weak change with diffuse ultrasound. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1511, pages 405–411, 2013.
- [35] S. T. Rakotonarivo, S. C. Walker, W. a. Kuperman, and P. Roux. Localization of a small change in a multiple scattering environment without modeling of the actual medium. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 130(6) :3566–3573, 2011.

Chapitre 1

Exploration des structures enfouies et identification d'objets : Full Waveform Inversion et Optimisation Topologique

1.1 Généralités

L'objet de cette introduction est de dépeindre le sens de la recherche autour des problèmes inverses, de préciser le type de problèmes inverses sur lesquels porte l'étude de cette thèse, et d'en souligner les motivations.

1.1.1 Introduction

Sachant que l'accès direct à l'intérieur d'un domaine quelconque n'est *a priori* pas possible, comment voir ce qui est invisible à l'œil nu ? A l'exemple du domaine médical, comment imager les cellules biologiques afin de mieux comprendre leur fonctionnement ? Plus particulièrement, comment diagnostiquer les tumeurs cancéreuses au sein de l'organe d'un patient ? Traitant d'autres domaines comme celui de l'aéronautique ou de l'aérospatial, comment contrôler leurs structures et leurs pièces ? Comment localiser des défauts d'assemblage ou des fissures susceptibles de se propager ? D'autres questionnements émergent également face à l'explosion de la population mondiale. En effet,

comment assouvir les besoins croissants de l'humanité en termes de ressources naturelles stratégiques telles que le pétrole (enfoui dans des réservoirs à plusieurs centaines de mètres sous terre), les métaux rares (indispensables à la fabrication des batteries, des téléphones portables et ordinateurs), ou encore comment repérer des nappes phréatiques ? Dans un scénario dramatique, est-il possible d'anticiper des risques naturels majeurs comme les séismes dévastateurs, les volcans et leurs éruptions ? C'est notamment l'objet de la sismologie où l'étude et la compréhension de la structure de la Terre du noyau jusqu'au manteau, peut permettre à l'homme de prédire certaines de ces catastrophes naturelles, afin de mieux s'y préparer.

Voilà donc une liste non exhaustive de défis auxquels est confronté le monde de la recherche. Notons que l'échelle varie selon les problématiques, de l'ordre du micromètre (pour l'inspection de cellules vivantes), à des milliers de kilomètres (pour l'exploration des structures géologiques de la Terre). Malgré les différences d'échelles, tous les sujets de recherche mentionnés ci-dessus font partie de la famille des problèmes inverses. Dans un problème inverse, le scientifique tente de déterminer les causes d'un phénomène à partir des observations expérimentales de ses effets. Cette démarche de mesure indirecte est notamment utilisée dans le cas où il n'existe pas d'accès immédiat à l'intérieur du milieu à inspecter, ou lorsqu'il s'agit de préserver l'intégrité du milieu (comme en médecine, en aéronautique, ou en aérospatial).

Une question fondamentale se pose alors. Étant donné que l'observation sensorielle n'est pas à même de permettre l'inspection et l'étude de ces milieux, comment peut-on les caractériser ? La réponse à cette question réside essentiellement dans la physique des ondes. En effet, la propagation des ondes est à la base de différentes technologies d'imagerie, où la longueur d'onde est adaptée à la taille de la structure étudiée. Cela peut aller de quelques fractions de microns, générées par effet thermoélastique lors de l'inspection de cellules vivantes, à quelques centaines de mètres, voire kilomètres, pour l'inspection de structures géologiques terrestres. Pour la décrire brièvement, la physique des ondes repose sur la sollicitation du milieu à inspecter pour une source donnée. Lorsque cette onde traverse le milieu d'intérêt, elle emmagasine plusieurs informations telles que la nature, la composition, la densité ou la viscosité du milieu. L'enjeu étant par la suite de comprendre et d'analyser ces informations afin de les faire parler.

Désormais, se pose une nouvelle question : comment tirer profit du rôle que jouent ces ondes pour caractériser les milieux où elles se propagent et construire des cartes les représentant ? Depuis les années 1980, la communauté scientifique porte d'ailleurs une attention croissante sur ces activités de recherche. Celles-ci sont également promues

depuis l'accroissement des performances calculatoires des machines, permettant de faire fructifier plusieurs méthodes, techniques et algorithmes, conçus dans le but de résoudre ce type de problèmes inverses. Bien entendu, la littérature concernant ces problèmes étant très abondante et variée, nous n'avons nullement la prétention d'être exhaustif. Nous focaliserons notre attention exclusivement sur l'élaboration de méthodes d'imagerie ultrasonores des milieux hétérogènes. Les prochains paragraphes nous permettrons donc d'aborder les quelques stratégies populaires utilisées par diverses communautés pour résoudre ces problèmes inverses. Avant que nous procédions aux détails explicatifs de celles-ci, tâchons tout d'abord de définir de façon formelle ce qu'est un problème inverse.

1.1.2 Positionnement du problème

Dans cette section, l'objectif est de décrire de façon générale et simplifiée le problème physique de la figure 1.1. Considérons tout d'abord un milieu non dissipatif Ω_ε (sans échange d'énergie ou de matière avec l'environnement) contenant un objet ε dont les caractéristiques physiques et mécaniques diffèrent de celles du milieu environnant. Sur le bord Γ_m de Ω_ε , considérons un système d'émission et de réception placé en S_m . Il est tout à fait possible d'envisager une surface de mesure dédiée à l'émission différente de celle consacrée à la réception des ondes. Dans ce travail, on se restreint au cas particulier où les zones d'émission et de réception sont partagées. Dans un premier temps, appelé phase d'émission, la sonde placée en S_m excite le milieu grâce à un signal connu généré par le système d'émission. Le champ induit est diffracté par l'inhomogénéité ε . Dans un second temps, la réponse du milieu est mesurée par le système de réception placé en S_m . Finalement, la troisième et ultime phase, est celle de la résolution du problème inverse à partir des données enregistrées.

De cette brève description, il faut retenir que les deux premières étapes sont communes à tous les problèmes inverses puisqu'il s'agit des étapes d'apprentissage. En revanche, la troisième étape dépend de la méthode que l'on souhaite utiliser. Nous pouvons recenser à ce titre, une triple classification des méthodes de résolution de problèmes inverses : les méthodes de décomposition, les méthodes d'échantillonnage et les méthodes itératives d'imagerie quantitative.

Concernant les méthodes de décomposition, nous pouvons citer celle de la Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel, ou méthode DORT ainsi que celle de l'algorithme MUSIC (*MULTiple SInal Classification*) [1]. La méthode DORT a été décrite pour la première fois par les physiciens C. Prada et M. Fink dans [2]. Elle est issue de l'étude du phénomène de retournement temporel menée par M. Fink et ses collègues au début des années

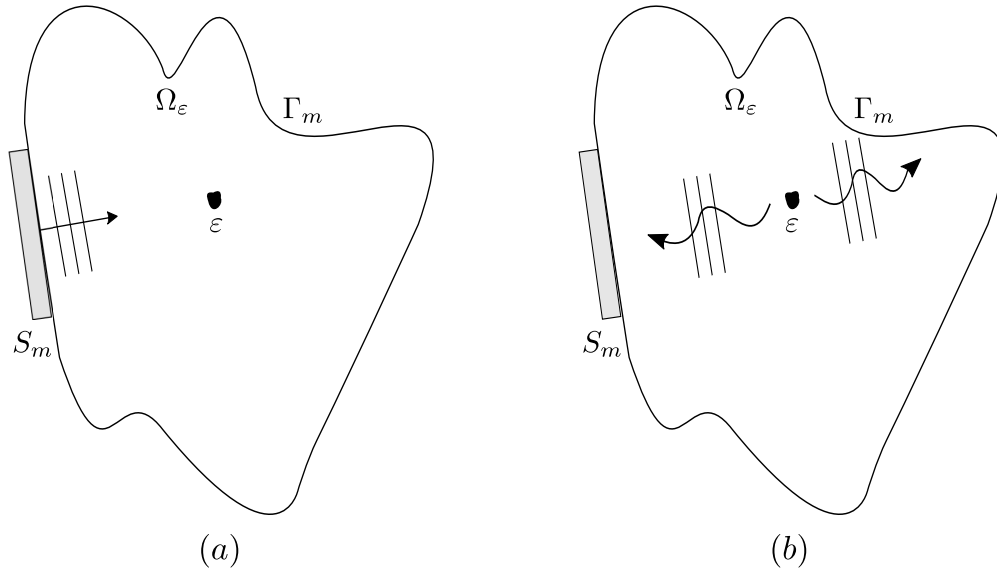


FIGURE 1.1 – Inspection ultrasonore du milieu Ω_ε délimité par la surface Γ_m avec la sonde placée en S_m . (a) : émission et propagation. (b) : diffraction par le défaut ε , propagation et mesure.

1990 [3, 4, 5]. Le principe est de déterminer les invariants de l'opérateur de retournement temporel qui s'inspire notamment du procédé d'algèbre linéaire de décomposition en valeurs singulières ou *Singular Value Decomposition* (SVD) de la matrice de transfert \mathbf{K} . La matrice de transfert \mathbf{K} relie la réponse d'un milieu enregistrée par un réseau à une émission du même réseau. L'algorithme MUSIC est un outil de traitement du signal proche de la méthode DORT qui permet d'analyser individuellement les fréquences d'un signal multi-harmonique. Dans les deux approches, les valeurs propres significatives indiquent le nombre de diffuseurs dans le milieu sondé, tandis que les vecteurs propres associés aux valeurs propres sont affectés à la diffusion simple par les inclusions. La diffusion est dite simple lorsque l'onde incidente ne subit qu'une seule réflexion par le diffuseur du milieu avant de revenir vers le(s) capteur(s). On parle aussi d'onde balistique. Par la suite, ces remarques peuvent être exploitées pour localiser les inclusions contenues dans le milieu inspecté. Toutefois, dans la méthode DORT, on fait appel aux valeurs propres les plus prononcées, tandis que dans l'algorithme MUSIC, on utilise une fonctionnelle faisant intervenir les valeurs propres les moins significatives. Les deux méthodes se révèlent performantes dans des milieux dilués¹ contenant des inclusions petites devant la longueur d'onde.

1. Nous entendons par un milieu dilué une situation dans laquelle la plus petite distance entre deux diffuseurs est un multiple de la longueur d'onde.

Dans la catégorie des méthodes d'échantillonnage introduites par D. Colton et A. Kirsch [6], la méthode *Linear Sampling Method* (méthode d'échantillonnage linéaire) est en général introduite dans le domaine fréquentiel. C'est le cas notamment pour l'équation de Helmholtz. La méthode d'échantillonnage linéaire cherche à trouver la forme d'un objet à partir de mesures d'ondes diffractées par ce dernier. Elle se révèle rapide (une seule itération peu coûteuse). De plus, elle n'a *a priori* pas besoin d'informations sur l'objet sondé. En revanche, son caractère peu précis est un handicap lorsque des phénomènes de multi-diffusion rentrent en jeu.

Pour terminer, la catégorie à laquelle nous nous référerons dans le cadre de ce chapitre et de façon plus globale dans cette thèse, est la classe des méthodes itératives d'imagerie quantitative. Pour le reste de ce chapitre, notre attention se focalisera sur la méthode *Full Waveform Inversion* (FWI) et la méthode d'Optimisation Topologique (OT). Les méthodes itératives sont plus précises que les méthodes de décomposition ou d'échantillonnage et permettent d'obtenir des informations quantitatives du milieu sondé au prix d'un temps de calcul plus élevé. Le but de la FWI est de reconstruire les paramètres continus du milieu d'intérêt comme la célérité ou la densité, tandis que l'OT s'oriente vers la localisation et l'estimation de la forme des inhomogénéités dans le milieu inspecté. Malgré la différence conceptuelle des deux méthodes, la stratégie de résolution de ces deux problèmes inverses est la même à l'exception de quelques subtilités que nous mettrons en lumière.

L'organisation de ce chapitre se présente de la façon suivante. Dans un premier temps, nous commencerons par décrire les outils théoriques sous-jacents à la résolution des problèmes inverses de type FWI et OT. Dans un second temps, nous présenterons le cadre mathématique de chaque méthode tout en restant le plus général possible. Pour cela, nous baserons les définitions sur la référence [7] où est décrite la théorie au sujet de la FWI, et sur la référence [8] pour ce qui est de l'OT. A ce titre, nous respecterons les notations propres à chaque publication tout en veillant à signifier le sens de chaque variable lors de la présentation des formalismes mathématiques. L'originalité de ce chapitre réside dans un troisième temps où nous mettrons en évidence comment deux méthodes *a priori* distinctes convergent vers des résultats similaires sous certaines conditions.

1.2 Full WaveForm Inversion (FWI)

La Full Waveform Inversion (FWI) est une méthode d'inversion quantitative qui permet de caractériser les propriétés physiques du milieu inspecté. Le but est de reconstruire une carte qui soit la plus précise possible et qui outre la localisation des réflecteurs, donne des informations sur la valeur des différents paramètres du milieu. L'inversion repose le plus souvent sur la minimisation d'une fonctionnelle qui évalue la distance entre les données observées et les données calculées (synthétiques). Se pose alors la question de savoir comment minimiser cette fonctionnelle. Si le problème est posé comme la recherche du minimum d'une série de problèmes linéarisés, il est alors nécessaire de calculer les dérivées de Fréchet (ou matrice jacobienne), ce qui génère une charge de calcul très élevée. En revanche, si l'on voit le problème comme un problème d'optimisation non linéaire, on se limite au calcul du gradient de la fonctionnelle, lequel ne nécessite pas d'avoir recours aux dérivées de Fréchet. C'est le point de vue adopté par la FWI qui utilise la méthode de l'état adjoint, reconnue pour son efficacité depuis les années 70. Cette technique est très intéressante car elle se limite à l'inversion d'un système linéaire. Nous renvoyons le lecteur à [7] pour plus de détails sur cette méthode ainsi qu'à [9] pour une introduction de la méthode de l'état adjoint dans un contexte géophysique.

1.2.1 Le problème physique

Le problème direct

Le problème direct est au centre de la méthode numérique utilisée pour reconstruire un milieu à partir de données de mesure. Ici, les paramètres du milieu sont donnés et on va produire des données synthétiques en simulant le champ d'ondes qui se propage dans le milieu. Ces données, notées \mathbf{d}_{obs} , correspondent aux enregistrements du champ d'ondes au niveau d'un ensemble de capteurs dont on connaît la position. On note \mathbf{m} l'ensemble des paramètres caractérisant le milieu de propagation et \mathbf{u} le champ adjoint. Le problème direct se formule donc de la façon suivante : trouver \mathbf{u} solution de :

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}(\mathbf{m}), \mathbf{m}) = \mathbf{0}. \quad (1.1)$$

La résolution du problème direct permet alors d'obtenir le champ d'ondes complet constitué des ondes incidentes, réfléchies et multiples réfléchies. Le calcul du champ \mathbf{u} au niveau des capteurs permet de construire un ensemble

de données synthétiques. Ces dernières seront ensuite comparées aux données observées dans le but de construire une suite minimisante qui converge vers le modèle exploré. Dans la FWI, la paramétrisation \mathbf{m} joue un rôle clé dans le procédé de minimisation. Par exemple, dans un milieu élastodynamique isotrope multicouches, le milieu sera caractérisé comme :

$$\mathbf{m} = [V_p, V_s, \rho], \quad (1.2)$$

où V_p et V_s désignent respectivement les vitesses des ondes de compression et de cisaillement, tandis que ρ désigne la masse volumique.

Le problème inverse

Le problème inverse a pour objectif de reconstruire le jeu de paramètres \mathbf{m} à partir des données observées \mathbf{d}_{obs} . La dépendance aux paramètres est en général non linéaire. De plus, le champ d'ondes, solution du problème direct, ne dépend pas continûment des paramètres. Le problème inverse est donc mal posé [10]. C'est une motivation pour utiliser des algorithmes numériques qui vont s'affranchir de ces difficultés en proposant des chemins plus ou moins efficaces pour obtenir une solution au problème inverse. Dans le cas de la FWI, on va minimiser l'écart entre les données observées et les données synthétiques, ce qui évite de résoudre le problème inverse en tant que tel.

Il est important de noter que les observations expérimentales sont en général bruitées, rien ne garantit que de telles mesures proviennent de la théorie. Ceci pose de grandes difficultés car les méthodes numériques ne sont pas toujours robustes au bruit. En pratique, on essaie de pré-traiter les données expérimentales mais du bruit demeure et peut perturber le procédé de minimisation.

1.2.2 La fonction coût

Ce paragraphe a pour but d'introduire le concept de la fonction coût. Le premier objet mathématique utilisé est le résidu $\Delta \mathbf{d}$. Il représente la différence entre les données observées \mathbf{d}_{obs} et les données calculées que nous notons $\mathbf{d}(\mathbf{u}, \mathbf{m})$ ou plus simplement $\mathbf{d}(\mathbf{m})$. Ainsi, le résidu s'écrit :

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{obs}. \quad (1.3)$$

La minimisation ne s'opère pas directement sur le résidu mais sur sa norme qui est le plus souvent le carré de la norme L^2 . Le choix de la norme n'est pas arbitraire car il a une influence sur la convergence de la méthode de minimisation et détermine également l'influence du bruit mesuré par les capteurs dans l'inversion. Le plus souvent, c'est la norme L^2 qui est choisie. Dernièrement, une nouvelle fonction coût a été proposée pour l'exploration géophysique. Elle repose sur l'utilisation de capteurs de type dual-sensor et s'avère beaucoup plus robuste que la fonction coût de type L^2 [11]. L'intérêt de considérer une norme du résidu est de se ramener à la minimisation d'une quantité scalaire alors que le résidu est par définition une quantité vectorielle dont le nombre de composantes est égal au nombre de données mesurées. Ainsi, une fonction coût classique est donnée par :

$$C(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{N_{obs}} | \mathbf{d}_i(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{i,obs}(\mathbf{m}) |^2, \quad (1.4)$$

où N_{obs} est le nombre de capteurs utilisés pour la mesure de la réponse du milieu. On peut aussi considérer des estimateurs à poids tenant compte des appareils de mesure. Par exemple, dans le domaine fréquentiel, on peut utiliser la fonction coût suivante :

$$C(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^\dagger \mathbf{C}_D^{-1} \Delta \mathbf{d}. \quad (1.5)$$

Dans cette expression, \dagger est l'opérateur de transposition conjugaison. \mathbf{C}_D est la matrice de covariance du vecteur de données (c'est-à-dire un opérateur modulant les données réelles mesurées via le système d'acquisition). Sur sa diagonale, on retrouve la sensibilité de chaque capteur indépendamment des autres. Les termes extradiagonaux non nuls représentent le couplage entre les capteurs du système d'acquisition. Si les capteurs du système d'acquisition ne sont pas couplés et que le bruit enregistré par chaque capteur n'est pas corrélé avec le bruit mesuré par les autres capteurs, la matrice \mathbf{C}_D est diagonale. De plus, si l'énergie des résidus est la même quel que soit le capteur, $\mathbf{C}_D = \mathbf{I}$. La fonction coût est alors donnée par :

$$C(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^\dagger \Delta \mathbf{d}. \quad (1.6)$$

Maintenant que la fonction coût a été introduite, la prochaine étape consiste à la minimiser grâce à une méthode d'optimisation. Nous avons opté pour le choix de la méthode du gradient à pas optimal ou *Steepest Descent Method* (SDM).

1.2.3 Minimisation de la fonction coût

L'objectif ici est de trouver le minimum global de la fonction coût. Cela revient à trouver le modèle qui, parmi tous les modèles possibles, permet l'obtention de la valeur la plus faible de la fonction coût. Une des solutions simplistes est de calculer autant de problèmes directs que de nombre de paramètres m du problème direct afin de trouver celui qui minimise le plus la fonction coût. En revanche, le coût du temps de calcul d'une telle opération est très onéreux. Pour minimiser la fonction coût, on utilise le plus souvent un algorithme d'optimisation itératif dont la convergence n'est pas toujours très rapide. Plus important, la fonction coût définie pour inverser des problèmes d'ondes n'est pas convexe ce qui signifie que l'algorithme de minimisation peut converger vers un minimum local ou un point col² qui est potentiellement très différent du minimum global, solution recherchée (voir par exemple [12] ou [7]). Dans la communauté, ce problème est connu comme le phénomène de saut de cycle³. Dans ce cas, les algorithmes d'optimisation ne convergeront pas vers le minimum global si le modèle initial ne se trouve pas à plus ou moins de la moitié de la période fondamentale de l'onde. Fort de ce constat, il est primordial de disposer d'un modèle initial assez proche du modèle optimal afin que le minimum local le plus proche corresponde au minimum global.

Il existe plusieurs approches permettant d'obtenir un modèle initial, nous citons parmi elles l'approche basée sur les temps d'arrivées des réflexions [13]. Toutefois, les modèles initiaux restent imprécis et il n'existe pas à notre connaissance de technique infaillible permettant d'éviter un minimum local par uniquement le choix du modèle initial. Une technique qui est très fréquemment utilisée, et qui s'apparente à une méthode de régularisation du problème inverse, consiste à changer de fréquence au cours du procédé en commençant par les fréquences les plus basses. On parle d'approche hiérarchique par fréquence [14, 15]. L'intérêt de cette démarche est d'éviter le plus possible l'effet de saut de cycle car plus la fréquence est basse, plus la fonction coût est lisse et le nombre de minima locaux se trouve amoindri.

2. L'expression "point col" illustre bien ce qui se passe géométriquement. Lorsqu'on est à un col, on passe d'une vallée à une autre, et dans la direction vallée vers vallée, on est à une altitude maximum. Maintenant, dans la direction perpendiculaire, on monte pour aller au sommet de la montagne. Ainsi, en un point col, il existe une direction où la fonction va croître, et une direction où la fonction va décroître. La terminologie "point selle" fait elle référence à une selle de cheval, et non à une selle de vélo!

3. Si on compare deux fonctions ondulatoires séparées par plus de la moitié de la période de la phase dominante, le phénomène de saut de cycle survient et la fonction coût de norme L^2 présente les mêmes oscillations que le résidu. Notamment, deux minima locaux sont observés de part et d'autre du minimum global.

Méthode de gradient à pas optimal ou *Steepest Descent Method*

Revenons à la fonction coût $C(\mathbf{m})$ et considérons un modèle \mathbf{m} dont on définit une petite perturbation dans une direction \mathbf{p} donnée. On définit ainsi un modèle perturbé $\mathbf{m} + \alpha\mathbf{p}$ et en supposant α assez petit, on peut alors estimer la différence entre $C(\mathbf{m} + \alpha\mathbf{p})$ et $C(\mathbf{m})$:

$$C(\mathbf{m} + \alpha\mathbf{p}) = C(\mathbf{m}) + \alpha\mathbf{p}^T \nabla_{\mathbf{m}} C(\mathbf{m}) + O(\alpha). \quad (1.7)$$

La direction \mathbf{p} est une direction de descente si on a $C(\mathbf{m} + \alpha\mathbf{p}) < C(\mathbf{m})$. On voit donc que si \mathbf{p} est une direction de descente, on a :

$$\mathbf{p}^T \nabla_{\mathbf{m}} C(\mathbf{m}) < 0, \quad (1.8)$$

et on définit la direction de descente $\mathbf{p} = -\nabla_{\mathbf{m}} C(\mathbf{m})$ pour définir la méthode de gradient optimal ou la MSD. A chaque itération i , après avoir défini la direction de descente $\mathbf{p}^i = -\nabla_{\mathbf{m}} C(\mathbf{m}^i)$, on met à jour le modèle :

$$\mathbf{m}^{i+1} = \mathbf{m}^i + \alpha^i \mathbf{p}^i. \quad (1.9)$$

Où α^i désigne le pas (strictement positif) de descente qui doit être choisi assez petit, en général de façon empirique. Pour calculer l'expression du gradient de la fonction coût, nous utilisons dans ce travail la méthode de l'état adjoint, qui fera l'objet du paragraphe suivant.

1.2.4 Etude de la sensibilité de la fonction coût

Rappel général sur la méthode du Lagrangien

Pour mettre en œuvre la MSD, nous avons vu que l'on doit calculer le gradient de la fonction coût, les dérivées étant estimées par rapport aux paramètres du modèle. Un calcul direct peut s'avérer coûteux, notamment quand le vecteur des données est de grande taille et que le nombre de paramètres est élevé. La méthode de l'état adjoint permet de contourner cette difficulté en proposant une alternative au calcul direct du gradient.

La méthode de l'état adjoint est une méthode d'optimisation numérique qui permet de calculer le gradient d'une fonction, ou d'un opérateur, dans un problème d'optimisation sous contraintes. Par opposition au calcul direct de

la matrice Jacobienne, le point fort de la méthode adjointe est que le nombre de calculs est indépendant du nombre de paramètres du problème inverse. Considérons le problème de minimisation sous contrainte suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mathbf{m}^* \text{ tel que } f(\mathbf{m}^*) = \min f(\mathbf{m}), \\ \text{sous la contrainte } g(\mathbf{m}) = \text{cte}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

On peut formuler ce problème via un lagrangien qui permet d'intégrer la contrainte de manière faible dans le problème de minimisation :

$$\mathcal{L}(\mathbf{m}, \gamma) = f(\mathbf{m}) - \gamma(g(\mathbf{m}) - \text{cte}). \tag{1.11}$$

Où γ est multiplicateur de Lagrange. Si le problème à résoudre n'a qu'une seule contrainte, γ est un scalaire, sinon c'est un vecteur. La dérivée totale du Lagrangien conduit à un système de $N + 1$, où N est le nombre de paramètres. On a alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{m}} = \nabla f(\mathbf{m}) - \gamma \nabla g(\mathbf{m}), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = g(\mathbf{m}) - \text{cte}. \end{cases} \tag{1.12}$$

En annulant le système Lagrangien, nous obtenons :

$$\nabla \mathcal{L} = \begin{bmatrix} \nabla_m f(\mathbf{m}) - \gamma \nabla_m g(\mathbf{m}) \\ g(\mathbf{m}) - \text{cte} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{1.13}$$

Dans cette équation, la première composante de la dérivée totale du Lagrangien désigne la dérivée par rapport au vecteur des paramètres à reconstruire (les deux gradients sont colinéaires), tandis que la deuxième composante désigne la dérivée par rapport au multiplicateur de Lagrange (vérification de la contrainte).

La représentation graphique dans le plan $(O, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$ est donnée dans la figure 1.2. Ici, nous traçons en bleu l'allure de la fonction $f(\mathbf{m})$ et en rouge l'allure de la contrainte. Pour respecter la contrainte $g(\mathbf{m}) = \text{cte}$, il faut chercher le point pour lequel la fonction $f(\mathbf{m})$ est minimale tout en restant sur la courbe rouge. Cette condition est vérifiée uniquement sur le point d'intersection noir \mathbf{m}^* de la courbe rouge avec la courbe jaune. Ainsi, les gradients respectifs $\nabla f(\mathbf{m})$ et $\nabla g(\mathbf{m})$ des fonctions $f(\mathbf{m})$ et $g(\mathbf{m})$ sont colinéaires à la courbe de niveau.

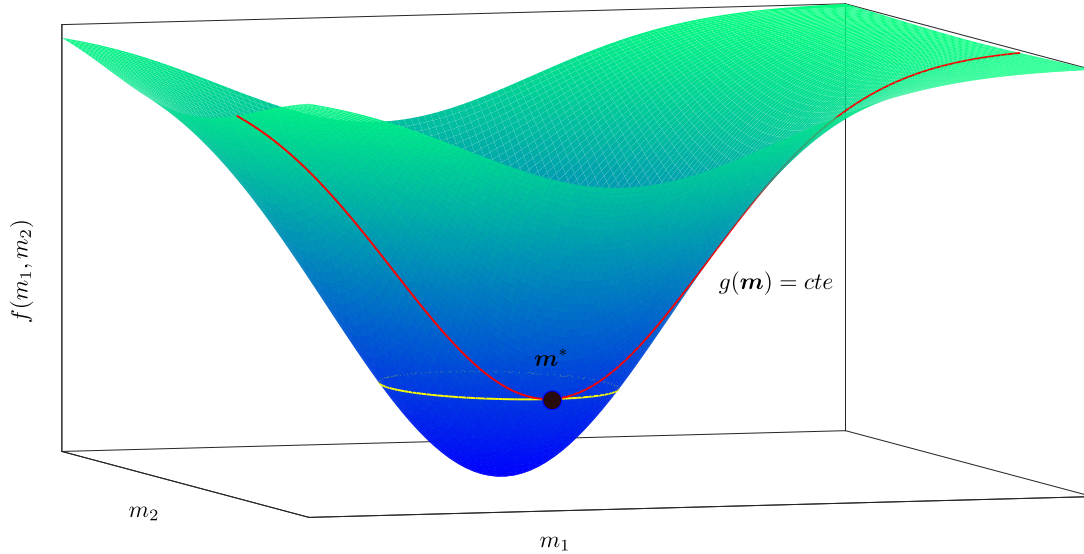


FIGURE 1.2 – Représentation géométrique tridimensionnelle de la méthode du Lagrangien. L’allure de la fonction $f(\mathbf{m})$ est représentée en bleue. La courbe rouge est affectée à la contrainte à respecter $g(\mathbf{m}) = cte$. La courbe jaune désigne l’ensemble des minima de $f(\mathbf{m})$ qui sont au même niveau que la contrainte $g(\mathbf{m}) = cte$. Le point noir \mathbf{m}^* est le minimum recherché (intersection des deux courbes).

Calcul du gradient de la fonction coût avec la méthode de l’état adjoint

Pour obtenir l’expression explicite du gradient de la fonction coût, nous utilisons la méthode du Lagrangien, introduite dans le dernier paragraphe. La fonction coût à minimiser est $C(\mathbf{u}, \mathbf{m})$, l’équation (1.1) se réfère au problème direct (la contrainte à respecter) dont la solution est le champ noté \mathbf{u} . Le Lagrangien prend alors la forme suivante [7] :

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}, \mathbf{m}) = C(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{m}) - \langle \mathbf{v}, \mathcal{F}(\mathbf{m})\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{s} \rangle, \quad (1.14)$$

Dans l’équation (1.14), la variable d’état $\tilde{\mathbf{u}}$ est introduite pour la distinguer du champ \mathbf{u} solution du problème direct [9]. La variable \mathbf{v} désigne le multiplicateur de Lagrange dont la dimension est celle du champ d’ondes \mathbf{u} . Les états

respectant les contraintes sont obtenus aux points stationnaires du Lagrangien \mathcal{L} selon l'équation :

$$\nabla \mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Le problème direct $\mathcal{F}(\mathbf{m})\mathbf{u} = \mathbf{s}$ est obtenu via la première condition $[\partial \mathcal{L} / \partial \mathbf{v}]_{\tilde{\mathbf{u}}=cte, \mathbf{m}=cte} = \mathbf{0}$. L'équation du problème adjoint est obtenue grâce à la deuxième condition $[\partial \mathcal{L} / \partial \tilde{\mathbf{u}}]_{\mathbf{v}=cte, \mathbf{m}=cte} = \mathbf{0}$. Pour aboutir à l'expression finale du problème adjoint nous utilisons la définition de l'adjoint d'un opérateur défini à partir du produit scalaire $\langle \mathbf{v}, \mathcal{F}(\mathbf{m})\tilde{\mathbf{u}} \rangle = \langle \mathcal{F}^\dagger(\mathbf{m})\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle$ et la source \mathbf{s} ne dépend pas du champ $\tilde{\mathbf{u}}$. En choisissant $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$ (\mathbf{m}_0 le modèle initial) et $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}(\mathbf{m}_0)$ dans la deuxième condition de (1.15) nous obtenons le problème adjoint donné par :

$$\mathcal{F}^\dagger(\mathbf{m}_0)\mathbf{v} = \mathcal{P}(\Delta \mathbf{d}_0), \quad (1.16)$$

où \mathcal{P} est un opérateur de modulation qui rajoute des zéros au vecteur résidu afin de respecter les dimensions dans l'équation (1.16). Le gradient de la fonction coût est obtenu à travers la troisième condition $[\partial \mathcal{L} / \partial \mathbf{m}]_{\tilde{\mathbf{u}}=cte, \mathbf{v}=cte} = \mathbf{0}$, nous obtenons donc :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}, \mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} = \frac{\partial C}{\partial \mathbf{m}} - \left\langle \mathbf{v} \mid \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} \tilde{\mathbf{u}} \right\rangle. \quad (1.17)$$

Pour n'importe quelle réalisation du problème direct \mathbf{u} , $\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{m}) = C(\mathbf{m})$. Donc l'équation (1.17) fournit le gradient de la fonction coût lorsque $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$:

$$\frac{\partial C}{\partial \mathbf{m}} = \left\langle \mathbf{v} \mid \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} \mathbf{u} \right\rangle. \quad (1.18)$$

L'insertion de l'expression du champ \mathbf{v}^* (déduite à partir de l'équation (1.16)) dans l'équation (1.18) pour $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$ fournit la formule du gradient de $C(\mathbf{u}, \mathbf{m})$:

$$\frac{\partial C(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}} = \mathbf{u}^t(\mathbf{m}_0) \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}} \mathbf{v}^*(\mathbf{m}_0), \quad (1.19)$$

où $\mathbf{v}^*(\mathbf{m}_0) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{m}_0)\mathcal{P}(\Delta \mathbf{d}_0)^*$ est le conjugué du champ adjoint.

Il est intéressant de remarquer, qu'à travers la méthode adjointe, le problème direct apparaît deux fois :

1. Lors de la construction de la fonction coût restreinte à la zone de mesure.
2. Lors de l'introduction de la méthode adjointe qui fait le lien entre la fonction coût définie sur une portion du bord du domaine d'intérêt et le champ dans tout le milieu.

Pour résumer, la procédure suivante peut être utilisée pour obtenir le gradient de la fonction coût par rapport aux paramètres d'inversion :

1. Définir le problème direct $\mathcal{F}(\mathbf{u}(\mathbf{m}), \mathbf{m}) = \mathbf{0}$.
2. Définir une fonction coût $C(\mathbf{u}, \mathbf{m})$.
3. Définir le problème adjoint $\mathcal{F}^\dagger(\mathbf{m}_0)\mathbf{v} = \mathcal{P}(\Delta\mathbf{d}_0)$.
4. Construire l'expression du gradient de la fonction coût : $\frac{\partial C}{\partial \mathbf{m}} = \left\langle \mathbf{v} \mid \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} \mathbf{u} \right\rangle$ à partir de \mathbf{u} et \mathbf{v} .

En conclusion, la méthode adjointe permet d'obtenir le gradient de la fonction coût en résolvant deux systèmes d'équations aux dérivées partielles : un système pour la variable d'état et un système pour la variable adjointe. Une fois celles-ci connues, le gradient de la fonction coût peut être calculé par leur produit scalaire. Comme les deux problèmes direct et adjoint se ressemblent (à l'exception de leurs sources respectives), le coût du calcul du gradient est habituellement de l'ordre de deux fois le coût du problème direct.

1.3 Optimisation Topologique (OT)

L'OT est une technique utilisée pour la fabrication de pièces industrielles dont on cherche à optimiser la forme avec le plus souvent, une motivation économique. Comme pour la FWI, elle repose sur une fonction coût dont on étudie les variations après avoir introduit un défaut dans le domaine (la pièce) d'étude. Si la FWI donne des informations sur les paramètres physiques du milieu étudié, l'OT donne des informations sur la localisation des défauts. Ces deux méthodes sont donc différentes même si leur mise en œuvre fait appel aux mêmes objets mathématiques, à savoir la résolution du problème direct et de son problème adjoint. Il existe de nombreuses références sur le sujet, citons par exemple A. Schumacher qui a été le pionnier sur le sujet [16, 17]. M. Masmoudi et ses collaborateurs ont obtenu de nombreux résultats d'inversion en appliquant cette méthode [18]. Plus récemment, des travaux ont adapté cette approche pour des problèmes d'ondes acoustiques [19] et élastiques [8].

1.3.1 Le problème physique

Soit Ω^{true} un solide élastique délimité dans \mathbb{R}^d ($d=2$ ou 3) par le bord S et caractérisé par le module de cisaillement μ , le coefficient de poisson ν ; et la masse volumique ρ et contenant un défaut B^{true} délimité par la surface fermée Γ^{true} . Parallèlement, on définit le solide de référence Ω sans défaut, tel que $\Omega^{true} = \Omega \setminus B^{true}$. La détection du défaut repose sur l'accès à des données collectées à la surface S sous la forme d'une mesure (potentiellement bruitée) \mathbf{u}^{obs} sur une portion de la surface $S_{obs} \subset S$. Lors de l'application d'une traction \mathbf{p} en régime harmonique sur S avec une pulsation ω , le champ élastodynamique \mathbf{u}^{true} satisfait l'équation d'ondes et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}^{true}) &= -\rho \omega^2 \mathbf{u}^{true} \quad (\xi \in \Omega^{true}), \\ \mathbf{t}^{true} &= \mathbf{p} \quad (\xi \in S_N), \\ \mathbf{t}^{true} &= 0 \quad (\xi \in \Gamma^{true}), \\ \mathbf{u}^{true} &= 0 \quad (\xi \in S_D), \end{aligned} \tag{1.20}$$

où ξ désigne le vecteur position. S_N (excitation du milieu) et S_D représentent des parties de S où sont imposées des conditions de Neumann et de Dirichlet. Le vecteur traction $\mathbf{t}^{true} \equiv \boldsymbol{\sigma}^{true} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}^{true}) \cdot \mathbf{n}$ est associé au champ de déplacement \mathbf{u}^{true} et à la normale \mathbf{n} à travers le tenseur \mathbf{C} du quatrième ordre donné par :

$$\mathbf{C} = 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_4^{sym} \right], \tag{1.21}$$

tel que \mathbf{I}_2 et \mathbf{I}_4^{sym} symbolisent respectivement les tenseurs d'identité d'ordres 2 et 4. La trace de \mathbf{u}^{true} sur S est supposée être disponible sur la région de mesure $S^{obs} \subset S_N$. Dans ce qui suit, ces mesures seront notées par \mathbf{u}^{obs} , $\mathbf{u}^{obs}(\xi, \omega) = \mathbf{u}^{true}(\xi, \omega)$, $\xi \in S^{obs}$.

La variable \mathbf{u}^ε désigne le champ direct pour la même excitation \mathbf{p} donnée et une cavité d'essai B_ε de contour Γ_ε . En conséquence, la solution directe \mathbf{u}^ε est définie dans Ω_ε , à travers les équations :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}^\varepsilon) &= -\rho\omega^2 \mathbf{u}^\varepsilon \quad (\xi \in \Omega_\varepsilon), \\ \mathbf{t}^\varepsilon &= \mathbf{p} \quad (\xi \in S_N), \\ \mathbf{t}^\varepsilon &= 0 \quad (\xi \in \Gamma_\varepsilon), \\ \mathbf{u}^\varepsilon &= 0 \quad (\xi \in S_D),\end{aligned}\tag{1.22}$$

où \mathbf{t}^ε est le vecteur traction associé à \mathbf{u}^ε .

1.3.2 La fonction coût

On introduit la fonction coût qui mesure l'écart entre Ω^{true} et un domaine test Ω^{test} . Cette fonction coût est définie pour un problème d'OT, du même sens physique que celle définie en (1.5) pour la FWI :

$$\mathcal{J}(\Omega_\varepsilon; \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \int_{S^{obs}} \overline{(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^{obs}(\xi))} \mathbf{W}(\xi) (\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^{obs}(\xi)) d\Gamma_\xi.\tag{1.23}$$

La quantité $\mathbf{W}(\xi)$ est la matrice pondération symétrique et positive. Elle porte le même sens physique que la matrice de covariance définie à travers l'équation (1.5). En général, (1.23) peut être considérée comme un cas particulier de la classe des fonctions coût s'écrivant de la façon suivante :

$$\mathcal{J}(\Omega_\varepsilon; \mathbf{p}) = \int_{S^{obs}} \varphi(\mathbf{u}^\varepsilon(\xi), \xi) d\Gamma_\xi,\tag{1.24}$$

où φ mesure typiquement un écart au sens des moindres carrés :

$$\varphi(\mathbf{w}, \xi) = \frac{1}{2} \overline{(\mathbf{w}(\xi) - \mathbf{u}^{obs}(\xi))} \mathbf{W}(\xi) (\mathbf{w}(\xi) - \mathbf{u}^{obs}(\xi)).\tag{1.25}$$

1.3.3 Etude de la sensibilité de la fonction coût

La résolution du problème inverse par minimisation de \mathcal{J} fait habituellement appel à une procédure itérative dont le résultat est susceptible de dépendre fortement du choix des conditions initiales (nombre d'obstacles, emplacements

et formes initiales). Ce choix va être facilité par le calcul du gradient topologique de la fonction \mathcal{J} , un concept initialement introduit dans le contexte de l'Optimisation Topologique de structures. Soit un défaut test infinitésimal $B_\varepsilon = \mathbf{x}^0 + \varepsilon\mathcal{B}$ centré en \mathbf{x}^0 et caractérisé par la forme du domaine unitaire $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$, où $\varepsilon > 0$ se réfère à la taille du défaut. Ce paramètre adimensionnel est supposé petit. Ce défaut est inclus dans un milieu solide $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus B^\varepsilon$, la dérivée topologique $\mathcal{T}(\mathbf{x}^0, \omega)$ de \mathcal{J} est définie à travers le développement asymptotique :

$$\mathcal{J}(\Omega_\varepsilon; \mathbf{p}) = \mathcal{J}(\Omega; \mathbf{p}) + \eta(\varepsilon) |\mathcal{B}| \mathcal{T}(\mathbf{x}^0, \omega) + O(\varepsilon^3), \quad (1.26)$$

où $|\mathcal{B}|$ est la mesure du volume de \mathcal{B} et $\eta(\varepsilon)$ est une fonction strictement positive qui dépend de la forme de la cavité de telle sorte que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(\varepsilon) = 0$.

Le comportement asymptotique va déterminer un des résultats importants de cette analyse. On notera qu'en général, la valeur de \mathcal{T} dépend de la forme de \mathcal{B} . Afin d'évaluer $\mathcal{T}(\mathbf{x}^0)$, il est *a priori* nécessaire de calculer $\mathcal{J}(\Omega_\varepsilon; \mathbf{p})$ et donc de résoudre le problème (1.22) dans lequel B^{true} est remplacé par $B^\varepsilon(\mathbf{x}^0)$.

1.3.4 La méthode adjointe

Dans ce paragraphe, nous présenterons la formulation de la dérivée topologique élastodynamique pour un système borné à l'aide de la méthode adjointe définie dans [8]. Nous montrerons que l'application de cette méthode à l'équation adjointe conduit à une formule compacte et élégante de l'expression du gradient topologique. La solution de (1.22) notée \mathbf{u}^ε (le champ de déplacement élastodynamique du milieu Ω^ε) peut être décomposée sous la forme :

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon, \quad (1.27)$$

où \mathbf{u} est la réponse du problème direct dans le milieu de référence sain Ω donnée par :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}) &= -\rho\omega^2 \mathbf{u} \quad (\xi \in \Omega), \\ \mathbf{t} &= \mathbf{p} \quad (\xi \in S_N), \\ \mathbf{u} &= 0 \quad (\xi \in S_N), \end{aligned} \quad (1.28)$$

tandis que $\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon$ est le champ de déplacement diffracté par la présence du défaut infinitésimal d'essai $B^\varepsilon(\mathbf{x}^0)$, donné par le système suivant :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{C} : \nabla \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon) &= -\rho\omega^2 \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon \quad (\xi \in \Omega_\varepsilon), \\ \tilde{\mathbf{t}}^\varepsilon &= \mathbf{0} \quad (\xi \in S_N), \\ \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon &= \mathbf{0} \quad (\xi \in S_D), \\ \tilde{\mathbf{t}}^\varepsilon &= -\sigma \cdot \mathbf{n} \quad (\xi \in \Gamma_\varepsilon).\end{aligned}\tag{1.29}$$

La dérivée topologique peut être retrouvée via le passage aux limites suivantes :

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}^0; \omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\eta(\varepsilon) |\mathcal{B}|} \int_{s^{obs}} \Re \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}(\xi), \xi) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon(\xi) \right) d\Gamma_\xi,\tag{1.30}$$

L'analyse asymptotique de (1.30) permet de montrer que la dérivée topologique $\mathcal{T}(\mathbf{x}^0; \omega)$ de $\mathcal{J}(\Omega_\varepsilon; \mathbf{p})$ pour un trou de type Neumann est donnée par [8] :

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}^0, \omega) = Re[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^*(\mathbf{v}) : \mathcal{A} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \rho\omega^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}](\mathbf{x}^0, \omega),\tag{1.31}$$

où $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^*$ et \mathbf{v} correspondent respectivement aux champs de contraintes et de déplacements du problème adjoint. Le terme \mathcal{A}_{ijkl} est quant à lui le tenseur de polarisation dépendant de la nature et de la forme du défaut. Dans le cas où le défaut est de type Dirichlet, cette formulation avec le tenseur de polarisation ne sera plus valide et il faudra reprendre les calculs depuis le début. En revanche, si le défaut correspond à une inclusion sphérique de type Neumann le tenseur \mathcal{A}_{ijkl} s'écrira :

$$\mathcal{A}_{ijkl} = \frac{1}{2\mu} \left\{ I_{ijkl} - \frac{v}{1+v} \delta_{ij} \delta_{kl} \right\} - \frac{1}{|\beta|} \int_{\zeta} \mathcal{U}_i^{kl}(\bar{\xi}) \mathbf{n}_j(\bar{\xi}) d\theta_{\bar{\xi}},\tag{1.32}$$

avec \mathbf{v} la solution du problème adjoint régit par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{v}) &= -\rho\omega^2 \mathbf{v} \quad (\xi \in \Omega), \\ \tilde{\mathbf{t}} &= \tilde{\mathbf{p}} \quad (\xi \in S_N), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{0} \quad (\xi \in S_N),\end{aligned}\tag{1.33}$$

où \mathbf{p}^* est le résidu (source de problème adjoint) donné par :

$$\mathbf{p}^* = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}(\xi), \xi) = \overline{\mathbf{u} - \mathbf{u}^{obs}}, \quad \xi \in \Gamma^{obs} \subset S_N. \quad (1.34)$$

1.4 Interprétation physique des gradients de la FWI et de l'OT : points communs aux deux méthodes

Comme mentionné dans l'introduction de ce chapitre la FWI et l'OT sont des méthodes itératives de résolution de problèmes inverses, dont le but est de construire des images quantitatives des milieux à inspecter. En partant d'un milieu initial ou d'un milieu de référence Ω_0 , et d'une fonction coût \mathcal{J} de norme L^2 , les démarches des méthodes de la FWI et de l'OT peuvent être résumées dans l'algorithme suivant :

1. $i = 0$. Où i est le numéro de l'itération.
2. Tant que $\mathcal{J}(\Omega_i) < \mathcal{J}(\Omega_{i-1})$:
 - La solution du problème direct i est calculée dans le milieu reconstruit Ω_i ,
 - La solution du problème adjoint i est calculée dans le milieu reconstruit Ω_i ,
 - Le gradient est calculé à partir du produit des deux solutions,
 - Le milieu est modifié Ω_{i+1} ,
 - Le compteur est incrémenté $i = i + 1$.

Le gradient de la fonction coût de la FWI dépend de l'équation d'ondes étudiée (équation d'ondes dans un milieu élastodynamique, équation d'ondes dans un milieu viscoélastique...) et du jeu de paramètres à reconstruire. De manière similaire, l'expression du gradient de l'OT dépend de l'équation d'ondes et de la nature de l'inclusion, autrement dit du type de conditions aux limites sur la frontière du défaut. Le point commun aux gradients de la fonction coût (1.19) et (1.31) est qu'ils font intervenir le produit de deux champs :

1. Le champ direct \mathbf{u} qui correspond à la propagation du champ incident dans le milieu Ω_i .
2. Le champ adjoint \mathbf{v} , dont le sens physique correspond à la rétropropagation des résidus à partir des points d'acquisitions dans Ω_i .

Comparons les deux méthodes sur un exemple simple. Soit Ω un milieu fluide de référence homogène. La propagation d'ondes dans le domaine fréquentiel est décrit par l'équation :

$$\nabla^2 p + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p = s, \quad (1.35)$$

où c désigne la célérité du milieu et s la source acoustique. Donc :

$$\mathcal{F} = \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (1.36)$$

Si on cherche d'une part à reconstruire le paramètre $m = \frac{1}{c^2}$ à l'aide du gradient de la FWI défini dans l'équation (1.19), nous obtenons :

$$\nabla C\left(\frac{1}{c^2}\right) = \omega^2 \Re(\mathbf{u}^t \mathbf{v}^*), \quad (1.37)$$

D'autre part, si on cherche à localiser un défaut tridimensionnel de type Dirichlet dans un milieu homogène, le gradient est donné par [19] :

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}^0, \omega) = 4\pi\varepsilon \Re(\mathbf{u}\mathbf{v}^*)(\mathbf{x}^0, \omega). \quad (1.38)$$

où ε est la forme de l'inclusion. Malgré les différences des deux approches, cet exemple illustratif montre que les équations (1.37) et (1.38) fournissent à un facteur près le même résultat. Le principe d'imagerie de la FWI est analogue au principe d'imagerie utilisé en migration ou *Reverse Time Migration* (RTM). Imaginée par A. Tarantola, cette méthode tente de retrouver les coefficients élastiques d'un sous-sol inspecté par une onde acoustique. La différence entre les deux approches réside dans le fait que la FWI retourne temporellement les résidus alors que la RTM retourne temporellement les ondes (réfléchies et diffractées par les hétérogénéités du sous-sol) mesurées par les récepteurs placés à la surface du milieu. Anisi, si le milieu initial de la FWI est un milieu homogène non borné, la première itération de la FWI est identique à une migration par retournement temporel.

Dans la première itération de l'OT, le problème adjoint correspond au retournement temporel [3, 4, 5] du résidu calculé à partir de la réponse du milieu réel et de la réponse du milieu de référence supposé sain. Dans ce cas, le champ direct joue le rôle de révélateur en intersectant le champ adjoint qui focalise le résidu aux endroits d'éventuels défauts. Ce constat est très utile pour former des images qualitatives du milieu inspecté, et ce même si on s'éloigne

du cadre mathématique rigoureux de la FWI et l'OT.

Notons que les méthodes présentées ici sont développées dans l'hypothèse d'une modification locale et unique dans le milieu initial. En effet, la présence de plusieurs modifications simultanées induit des interactions multiples entre ces dernières que nous ne prenons pas en compte dans l'étude de la sensibilité au premier ordre de la fonction coût à une perturbation donnée.

1.5 Conclusion

Les méthodes de FWI et d'OT sont des méthodes itératives d'inversion quantitatives. Elles permettent d'évaluer certaines propriétés physiques, ou la topologie du milieu inspecté. D'une part, la FWI tente de reconstruire les variations locales des paramètres continus dans le milieu inspecté. D'autre part, l'OT traite des problèmes de diffraction d'ondes par de petits défauts (cavités de type Dirichlet [19], Neumann [8], ou pénétrables [20]) petits devant la longueur d'onde dans le milieu d'étude.

Le principe de ces deux méthodes est de minimiser la fonction coût qui mesure la discordance entre les observations expérimentales (issues de l'inspection du milieu réel) et les données numériques (issues de la simulation de l'expérience dans le milieu de référence). La minimisation de la fonction coût passe par une analyse asymptotique qui fait apparaître un terme non constant appelé gradient de la fonction coût. Dans le cas de l'OT, le gradient de la fonction coût est un indicateur local qui atteint des valeurs négatives prononcées là où une modification infinitésimale du milieu de référence induirait la plus forte décroissance de la fonction coût.

Dans la section 4 de ce chapitre un exemple d'illustration montre que ces deux approches *a priori* différentes peuvent fournir le même résultat. De façon générale, le gradient de la fonction coût fait intervenir le produit de deux champs numériques. Ces deux champs correspondent aux solutions des problèmes direct et adjoint calculés dans le milieu de référence. Ils se trouvent être similaires à l'exception de leur source respective : le signal d'excitation expérimental pour le problème direct et le résidu retourné temporellement pour le problème adjoint. Par conséquent le temps de calcul du gradient est de deux fois le temps de calcul du problème direct.

Si on s'éloigne du cadre mathématique rigoureux, nous pouvons définir la notion d'Imagerie Topologique (IT) à partir de la première itération de l'OT. L'IT est une méthode d'imagerie qualitative très intéressante pour identifier et localiser des défauts. Elle permet de produire des images de réflectivité des milieux les plus complexes à condition

de prendre en compte leur hétérogénéité et leurs caractéristiques géométriques lors de la modélisation du milieu de référence. L'IT fera l'objet du prochain chapitre, elle sera abordée plus en détails et appliquée sur des cas concrets pour évaluer son efficacité et ses performances.

Bibliographie

- [1] Aj Devaney. Super-resolution processing of multi-static data using time reversal and MUSIC. *Journal of the Acoustical Society of America*, pages 1–25, 2000.
- [2] Claire Prada and Mathias Fink. Eigenmodes of the time reversal operator : A solution to selective focusing in multiple-target media. *Wave Motion*, 20(94) :151–163, 1994.
- [3] M Fink. Time reversal of ultrasonic fields. I. Basic principles. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 39(5) :555–566, 1992.
- [4] F Wu, J L Thomas, and M Fink. Time reversal of ultrasonic fields. II. Experimental results. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 39(5) :567–578, 1992.
- [5] Didier Cassereau and Mathias Fink. Time-Reversal of ultrasonic fields-part III : theory of the closed Time-Reversal cavity. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 39 :579–592, 1992.
- [6] D Colton and A Kirsch. Simple Method for Solving Inverse Scattering Problems in the Resonance Region. *Inverse Problems*, 12 :383–393, 1996.
- [7] J Virieux and S Operto. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. *Geophysics*, 74(6) :127–152, 2009.
- [8] Marc Bonnet and Bojan B Guzina. Sounding of finite solid bodies by way of topological derivative. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61 :2344–2373, 2004.
- [9] R Plessix. A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications. *Geophysical Journal International*, 67 :495–503, 2006.
- [10] M Hadamard. Les problèmes aux limites dans la théorie des équations aux dérivées partielles. *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 6(1) :202–241, 1907.
- [11] Florian Faucher. *Contributions to Seismic Full Waveform Inversion for Time Harmonic Wave Equations : Stability Estimates , Convergence Analysis , Numerical Experiments involving Large Scale Optimization Algorithms* . Thèse, Université de Pau et des pays de l’Adour, 2017.

- [12] Albert Tarantola and Bernard Valette. Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Reviews of Geophysics and Space physics*, 20(2) :219–232, 1982.
- [13] Marta Jo Woodward, Dave Nichols, Olga Zdraveva, Phil Whitfield, and Tony Johns. A decade of tomography. *Geophysics*, 73(5) :5–11, 2008.
- [14] F. M. Saleck, C. Bunks, S. Zaleski, and G. Chavent. Multiscale seismic waveform inversion. *Geophysics*, 60(5) :1457–1473, 1995.
- [15] Laurent Sirgue and R. Gerhard Pratt. Efficient waveform inversion and imaging : A strategy for selecting temporal frequencies. *Geophysics*, 69(1) :231–248, 2004.
- [16] A. Schumacher. *Topologieoptimierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Topchpositionierungskriterien*. Phd thesis, Universität Gesamthochschule-Siegen, 1995.
- [17] H.A. Eschenauer, V.V. Kobelev, and A. Schumacher. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization*, 8(1994) :42–51, 1994.
- [18] Bessem Samet, Samuel Amstutz, and Mohamed Masmoudi. The topological asymptotic for the Helmholtz equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(5) :1523–1544, 2003.
- [19] Julien Pommier and Bessem Samet. The topological asymptotic for the Helmholtz equation with Dirichlet condition on the boundary of an arbitrarily shaped Hole. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(3) :899–921, 2004.
- [20] Marc Bonnet, Ivan Chikichev, and Bojan Guzina. Topological derivative for wave-based identification of penetrable scatterers. In *7eme Colloque National de Calcul des Structures, vol. 1*, pages 449–454, Giens, France., 2005.

Chapitre 2

Imagerie Topologique : interprétation physique et mise en œuvre

Lorsque l'on interroge un milieu hétérogène avec une onde ultrasonore, celle-ci se voit réfléchi par les inclusions contenues dans le milieu inspecté et revient vers le dispositif d'acquisition. L'interaction de l'onde incidente avec les inclusions se traduit par des signaux captés par les récepteurs qui contiennent alors deux contributions :

1. Une contribution de diffusion simple suite à une seule réflexion par l'inclusion avant de revenir vers les récepteurs. Le temps d'arrivée de l'écho t est directement relié à la distance parcourue d par l'onde entre l'émetteur, l'inclusion et le récepteur par la relation $t = d/c$, où c est la célérité du milieu d'intérêt. Cette équivalence entre le temps et l'espace est le principe fondateur des méthodes d'imagerie classiques qui reposent sur le principe de retard-sommation.
2. Une contribution de diffusion multiple induite par plusieurs événements de réflexions successives entre les inclusions du milieu. Ce phénomène de réflexion multiple est d'autant plus accentué lorsque la concentration des inclusions est élevée ou lorsque celles-ci sont très échogènes. Dans ce contexte, il n'y a plus d'équivalence entre le temps d'arrivée d'un écho et la distance séparant le capteur des inclusions. Par conséquent, les méthodes d'imagerie classiques échouent à reproduire des images de réflectivité de ce milieu malgré la richesse de l'information contenue dans les signaux mesurés.

La question qui se pose alors est : comment tirer profit de cette complexité du signal mesuré par les récepteurs pour reconstituer des images du milieu ? Dans le but d'imager le milieu en question, il existe dans la littérature plusieurs méthodes d'imagerie capables d'exploiter ce signal complexe¹ afin d'en tirer des informations qualitatives voire quantitatives. Ce chapitre a pour vocation de mettre en œuvre l'une des méthodes d'imagerie les plus exploitées dans ce sens, à savoir la méthode d'Imagerie Topologique (IT).

La première section de ce chapitre se focalisera sur le concept de l'IT et sur son interprétation physique. Dans la même section, un lien sera établi entre cette approche et les méthodes d'imagerie classiques fondées sur le principe de retard-sommation. L'IT sera appliquée à l'inspection en réflexion d'un milieu hétérogène régulier dans un régime de propagation à faible désordre. Le milieu en question présente un couplage entre un milieu fluide et un milieu solide. La compréhension de la physique des ondes dans ces milieux fera donc l'objet de la section 2. Les solutions analytiques du problème de propagation d'ondes dans le milieu d'intérêt étant inexistantes, l'étude des méthodes de résolution numériques prendra alors tout son sens dans la section 3. La dernière section étaiera le protocole de la formation de l'image du milieu. Une étude des performances de l'IT au regard de certaines sources d'erreurs sera également effectuée afin de tirer des conclusions sur les avantages et limites de la méthode.

2.1 Imagerie Topologique et méthodes d'imagerie classiques

2.1.1 L'Imagerie Topologique à partir du processus d'Optimisation Topologique

Les méthodes itératives telles que la FWI et l'OT permettent d'établir certains paramètres de milieux au départ inconnus à partir d'un ensemble de données expérimentales [1]. Si elles permettent d'obtenir des informations quantitatives sur les milieux d'intérêt ; elles sont toutefois coûteuses en temps de calcul et en ressources en mémoire. Bien que nous allons nous éloigner du cadre mathématique rigoureux des deux méthodes, nous allons démontrer que la première itération (l'IT) donne généralement des résultats satisfaisants d'un point de vue qualitatif. Ainsi, le temps de calcul nécessaire à la formation de l'image se trouve considérablement réduit. Nous allons donc rappeler en quelques lignes la démarche de l'IT.

1. Les méthodes DORT et MUSIC par exemple sont des méthodes de traitement de données qui peuvent être utilisées à des fins d'imagerie.

Comme vu dans le chapitre 1, le problème inverse consiste à établir une fonction coût positive, de norme L^2 , qui évalue l'écart entre les mesures expérimentales et les mesures simulées. Le développement asymptotique au premier ordre de la fonction coût par rapport à l'introduction d'un trou infinitésimal fait apparaître le gradient topologique. Ce dernier est une fonction spatiale qui prend des valeurs d'amplitudes négatives très prononcées aux endroits où l'ajout d'un trou diminue la fonction coût. La formule du gradient topologique dépend du type de conditions aux limites sur la frontière du défaut et de la nature du milieu inspecté. Pour trois défauts distincts de la même géométrie dans le même milieu, avec des conditions aux bords de types Dirichlet [2], Neumann [3], ou avec des conditions pénétrables [4], les formules des gradients associées à chaque défaut sont différentes. Quelle que soit la formule du gradient topologique, celle-ci fait intervenir au moins deux champs numériques \mathbf{u} et \mathbf{v} . Les champs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont respectivement les solutions des problèmes direct et adjoint. Ces deux problèmes diffèrent seulement sur leur source respective et sont résolus dans le même domaine de calcul.

La source du problème direct est la simulation de la source de l'expérience réelle, tandis que la source du problème adjoint est le retourné temporel du résidu. Le problème direct revient à simuler l'expérience physique dans le milieu de référence sans défaut. Le problème adjoint consiste à focaliser le résidu à l'endroit d'éventuels défauts dans le même milieu. Le milieu de référence où sont posés les problèmes direct et adjoint doit correspondre au plus près du milieu réel en l'absence de(s) défaut(s). Une connaissance des propriétés physiques et géométriques de ce dernier est donc exigée. Une fois les champs direct et adjoint obtenus, le gradient pour un défaut de type Dirichlet par exemple, est simplement la somme cumulée des produits des deux champs au cours du temps.

Rigoureusement, la fonction d'imagerie correspond à l'enveloppe du gradient topologique obtenue analytiquement. Pour des raisons de simplicité et de représentation, cette étude propose d'utiliser le même gradient topologique quel que soit le type de défaut. Ce dernier combine la focalisation par retournement temporel (conséquence de la rétropropagation du résidu dans le problème adjoint) et la corrélation spatio-temporelle. Par conséquent, il n'est pas nécessaire de rechercher les maxima spatio-temporels du champ d'ondes rétropropagé. Cela rend cette méthode potentiellement avantageuse pour des techniques, nécessitant une fréquence d'images élevée, telle que l'écho *Particle Image Velocimetry* PIV [5]. Un intérêt pratique de la méthode d'IT est que l'opération de retournement temporel ne se fait pas expérimentalement mais numériquement. De plus, le temps de calcul de la méthode dépend uniquement du coût des calculs des champs direct et adjoint. Celui-ci se trouve être deux fois le temps de calcul du problème

direct. Même en présence de plusieurs défauts, la mise en oeuvre expérimentale de l'IT a montré que la résolution obtenue avec une seule excitation du milieu est comparable à celle obtenue avec des méthodes de CND standards [6]. Cet avantage peut s'expliquer par le lien entre la solution du problème adjoint et le principe de retournement temporel [7, 8, 9] présenté par N. Dominguez et *al.* dans [10].

Dans la littérature, on trouve une variante de la méthode d'IT nommée *Time Domain Topological Energy* TDTE. Le développement mathématique est exactement le même sauf que la fonction d'imagerie n'est pas le produit des champs direct et adjoint, mais le produit de leurs énergies respectives. Ceci a pour conséquence de minimiser l'influence des oscillations, alternativement positives et négatives, à la position du défaut sur l'image (voir chapitre 2 de [11]). La première application expérimentale de la méthode TDTE a été utilisée pour des essais non destructifs de matériaux composites [6]. En utilisant un seul transducteur piézoélectrique, la capacité de la TDTE à localiser des défauts dans un guide d'ondes a été validée numériquement dans le domaine temporel avec la méthode des différences finies. L'approche numérique a été appuyée par des essais expérimentaux, sur des matériaux composites, et a montré une très bonne robustesse vis-à-vis du bruit expérimental (électronique et structurel) [12]. La méthode a été reprise également dans le domaine de l'imagerie médicale afin d'inspecter des tissus biologiques [13]. Un papier récent au sujet de la TEM (*Topological Energy Method*) [14] applique la même méthode sur des structures de soudure. Dans de tels milieux, l'image de l'énergie topologique conventionnelle montre des artéfacts qui résultent des réflexions multiples des ondes avec les bords du milieu inspecté. L'article [14] décrit une méthode pour traiter ces artéfacts grâce à des champs directs et adjoints particuliers en termes de conditions aux limites. Ainsi, les réflexions multiples sont éliminées dans une large mesure avec pour conséquence, l'élimination de la plupart des artéfacts présents sur l'image. L'approche étayée dans [14] est appuyée par des simulations numériques et des essais expérimentaux visant à détecter des fentes fabriquées dans des structures de soudure.

Dans l'article [15], les auteurs décrivent une méthode d'imagerie fondée sur la sensibilité topologique. Les simulations numériques des problèmes de propagation d'ondes sont obtenues avec une méthode semi-analytique sans compromettre la qualité de l'image. Les calculs semi-analytiques couplent les signaux d'excitation avec les diagrammes de rayonnement de chaque transducteur pour le cas élastodynamique. Les diagrammes de rayonnement ont été obtenus avec un modèle par éléments finis avec des intégrations semi-analytiques pour le cas acoustique. Les calculs numériques sont effectués dans le domaine des fréquences afin de compresser les données inutiles du

domaine temporel. L'efficacité de la méthode d'IT rapide a été vérifiée expérimentalement pour les ondes élastiques dans un milieu solide orthotrope et pour les ondes acoustiques dans un milieu fluide. Avec une seule excitation par onde plane, les résolutions latérales et axiales expérimentales sont, respectivement, inférieures à 2,5 et 1,25 fois la longueur d'onde.

L'application de l'IT aux milieux fluides [16] présente une alternative à la PIV. La PIV est une technique expérimentale développée avec des dispositifs optiques. Elle consiste à mesurer le champ de vitesse de l'écoulement d'un fluide. Ce dernier estensemencé de petites particules pour pouvoir suivre le flux de déplacement dans le fluide. La zone d'intérêt est éclairée par un laser et une caméra à cadence élevée qui prend des images successives. Les images sont ensuite traitées avec de multiples corrélations croisées pour que l'écoulement du fluide puisse être déduit à partir du déplacement des particules. L'écho PIV est une technique fondée sur les mêmes principes, où les dispositifs optiques sont remplacés par un système d'émission / réception ultrasonore. Les travaux dans le document [16] présentent une étude expérimentale du flux de vortex et de la propagation des ondes de surface dans l'eau. Le champ de vitesse instantané de l'écoulement en rotation a été mesuré à une cadence de 500 Hz grâce aux corrélations croisées par image vélocimétrique. L'IT combinée avec la technique Echo-PIV permet d'obtenir une image pour chaque éclairage obtenant ainsi un film du déplacement des particules.

L'article [17] présente l'IT bidimensionnelle d'une plaque d'aluminium. Avec une seule excitation monomodale (onde de Lamb de type S_0) et en combinant la théorie modale à l'analyse de Fourier, l'inspection est effectuée de manière rapide et précise. Malgré une très forte dispersion du mode S_0 , les diffuseurs sont localisés avec précision avec une résolution spatiale égale à environ une longueur d'onde. La même étude a été reproduite, mais cette fois-ci sur un guide d'ondes anisotrope en utilisant simultanément deux modes. Une preuve de l'efficacité de la méthode d'IT, même dans les situations les plus complexes, est illustrée dans [18]. Le milieu d'intérêt est une plaque d'aluminium bornée, conçue de telle sorte qu'il n'existe pas de trajet de propagation d'ondes direct entre le transducteur (émetteur/récepteur) et les défauts dans la plaque. Le problème étudié est donc l'inspection d'un milieu fortement réverbérant avec un seul transducteur. Ce problème est équivalent à l'inspection d'un domaine non borné avec un très grand nombre de capteurs entourant les diffuseurs. Le défi réside dans le bon traitement du signal acquis résultant de centaines de réflexions. En utilisant un vélocimètre laser Doppler, un étalonnage préliminaire consiste à mesurer la réponse impulsionnelle du transducteur dans la zone d'intérêt avant la présence de tout objet

ou défaut. Les résultats expérimentaux obtenus avec cette méthode montrent l'emplacement précis d'un seul petit défaut et de plusieurs petits défauts avec un pouvoir de résolution proche de la moitié de la longueur d'onde.

Les publications citées plus haut mettent en évidence le potentiel de la méthode d'IT pour couvrir une large gamme des problèmes de CND. Elles démontrent également que ces méthodes sont adaptées à l'inspection des milieux les plus complexes à condition de bien prendre en compte leur complexité dans la modélisation du milieu de référence. Le prochain paragraphe de cette section vise à démontrer que l'IT peut être également vue comme une généralisation des méthodes classiques fondées sur le principe de retard-sommation.

2.1.2 L'Imagerie Topologique : une généralisation des méthodes d'imagerie classiques

Pour inspecter un milieu par ultrasons, un ou plusieurs capteurs émettent des ondes dans celui-ci. Les ondes se trouvent réfléchies par les inhomogénéités du milieu. Les ondes diffusées sont mesurées par les mêmes ou d'autres capteurs. Si le milieu à inspecter est faiblement hétérogène, l'onde difusée contient uniquement la contribution de diffusion simple. Celle-ci est utilisée dans les techniques d'imagerie classiques basées sur le principe de retard-sommation telles les méthodes *Synthetic Aperture Focusing Technique* (SAFT) [19, 20] et TFM [21]. Finalement, les images sont construites à partir des combinaisons linéaires des signaux mesurés et retardés. Dans ce paragraphe, il est démontré que sous certaines hypothèses, la fonction d'imagerie de retard-sommation peut être déduite de l'application de la méthode d'IT à un milieu homogène infini.

Considérons un problème de propagation d'ondes scalaires dans un milieu homogène infini de célérité c dans le plan $(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Le dispositif d'acquisition de N transducteurs est localisé aux coordonnées \mathbf{t}_i sur l'axe \mathbf{x}_1 avec $1 \leq i \leq N$. Les signaux d'émission et de réception sont notés respectivement $e(t)$ et $s_i(t)$. Soulignons que dans le cas d'un milieu homogène infini, le résidu est directement obtenu à partir du signal mesuré. Soit $h(\mathbf{t}_e, \mathbf{x}, t)$ la réponse impulsionnelle entre la source localisée en \mathbf{t}_e et n'importe quel point \mathbf{x} . Selon le type d'insonification la distance aller d_f parcourue par l'onde pour arriver au point \mathbf{x} est donnée par :

1. $d_f = \|\mathbf{x} - \mathbf{t}_e\|$ si un seul émetteur est utilisé pour éclairer le milieu.
2. $d_f = \|\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}\|$ si l'onde plane excitatrice est portée par la direction \mathbf{n} . Notons qu'il est possible de déterminer l'inclinaison du front d'onde en appliquant des lois de retard appropriées.

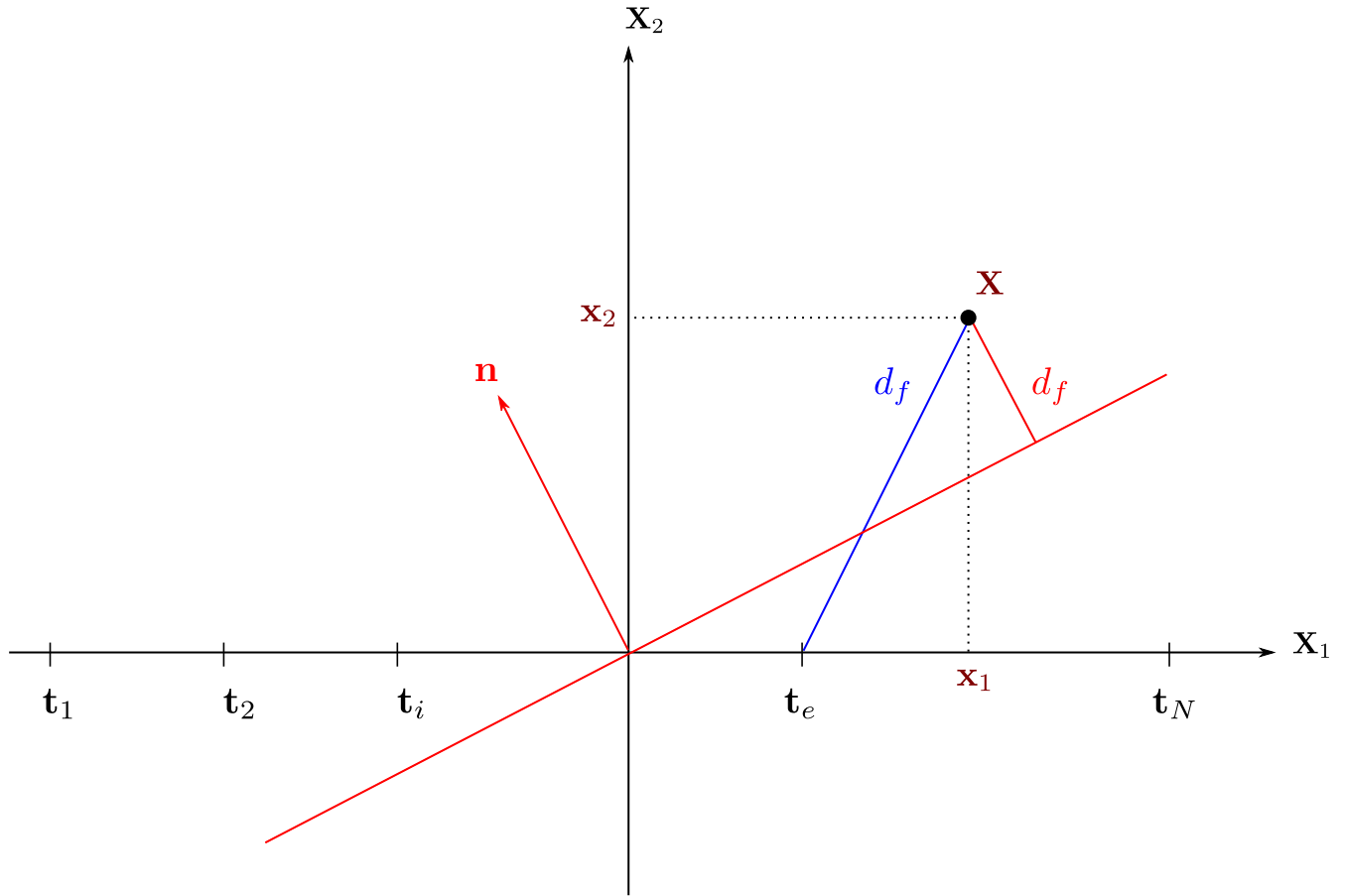


FIGURE 2.1 – Représentation schématique du type d'excitation utilisé pour inspecter le milieu. La couleur rouge représente l'émission d'un front d'onde plan de normale \mathbf{n} par plusieurs transducteurs positionnés sur \mathbf{t}_i avec $1 \leq i \leq N$. La couleur bleue représente l'excitation par un seul transducteur positionné en \mathbf{t}_e .

La figure 2.1 schématise le problème décrit ci-dessus. La fonction d'IT est définie comme $\text{Env}(\mathcal{I}(\mathbf{x}))$ où Env désigne l'enveloppe spatiale de la fonction $\mathcal{I}(\mathbf{x})$ qui s'écrit comme :

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, -t) dt, \quad (2.1)$$

où \mathbf{u} et \mathbf{v} sont, respectivement, les champs solutions des problèmes direct et adjoint. Le champ adjoint est donné

par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_r} [s_i^* * h(\mathbf{t}_i, \mathbf{x}, \bullet)](t), \quad (2.2)$$

où $s_i^*(t) = s_i(-t)$ est le signal retourné temporellement. En fonction du type d'insonification, le champ direct prend l'une des deux formes suivantes :

1. Un émetteur localisé en \mathbf{t}_e :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = [e * h(\mathbf{t}_e, \mathbf{x}, \bullet)](t), \quad (2.3)$$

2. Un front d'onde plan se propageant dans la direction \mathbf{n} :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \left[e * \delta \left(\bullet - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c} \right) \right](t). \quad (2.4)$$

Dans l'hypothèse de propagation en lancer de rayon, la réponse impulsionnelle est approximée par : $h(\mathbf{t}_e, \mathbf{x}, t) = \delta \left(t - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_e\|}{c} \right)$ indépendamment de la taille ou de la forme de la source. Par conséquent, les champs \mathbf{u} et \mathbf{v} s'expriment respectivement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \left[e * \delta \left(\bullet - \frac{d_f}{c} \right) \right](t) \\ &= e \left(t - \frac{d_f}{c} \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_r} \left[s_i^* * \delta \left(\bullet - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\|}{c} \right) \right](t). \quad (2.6)$$

Le champ adjoint retourné temporellement s'écrit comme :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, -t) = \sum_{i=1}^{N_r} \left[s_i \left(-t - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\|}{c} \right) \right]. \quad (2.7)$$

L'insertion des équations (2.5) et (2.7) dans l'équation (2.1) permet de réécrire la fonction d'imagerie de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\mathbf{x}) &= \int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, -t) dt \\
&= \int e \left(t - \frac{d_f}{c} \right) \sum_{i=1}^{N_r} \left[s_i \left(-t - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\|}{c} \right) \right] dt \\
&= \int e(\tau) \sum_{i=1}^{N_r} \left[s_i \left(-\tau - \frac{d_f + \|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\|}{c} \right) \right] d\tau,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

avec $\tau = t - \frac{d_f}{c}$. Finalement supposons que le signal d'émission est une impulsion de Dirac $e(t) = \delta(t)$, et donc :

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_r} s_i \left(\frac{d_f + \|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\|}{c} \right), \tag{2.9}$$

Ainsi, $\text{Env}(\mathcal{I}(\mathbf{x}))$ correspond à la définition de la fonction d'imagerie de la méthode de retard-sommation [22]. Ce résultat peut être facilement généralisé à n'importe quelle excitation de plusieurs émetteurs localisés en \mathbf{x}_j avec le retard relatif β , dans ce cas la fonction d'imagerie est donnée par :

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \sum_{i,j} s_i \left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_j\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\|}{c} + \beta \right). \tag{2.10}$$

Contrairement aux méthodes d'imagerie classiques, l'IT implique un traitement séparé des signaux émis et mesurés. En effet, les calculs explicites des rayons entre les émetteurs, les défauts potentiels et les récepteurs ne sont pas effectués. Ils sont pris en compte dans les deux calculs des champs d'ondes direct et adjoint effectués dans le milieu de référence. Par conséquent, si la propagation des ondes simulée est fidèle à la propagation des ondes dans le milieu réel, ce dernier peut être imagé avec précision quelle que soit sa complexité. Pour conclure, l'IT d'un milieu homogène infini est équivalente aux méthodes d'imagerie classiques fondées sur le principe de retard-sommation. L'IT d'un milieu complexe peut être vue comme une généralisation des méthodes d'imagerie classiques.

2.2 Physique des ondes dans des milieux homogènes continus

2.2.1 Propagation des ondes dans des milieux fluides

L'objet de ce paragraphe est d'établir les équations décrivant la dynamique des fluides en mouvement. La modélisation est faite dans un cadre de pensée où la matière est modélisée par des particules de petites dimensions afin de relever l'analyse mathématique, mais assez grandes par rapport aux molécules pour pouvoir exploiter des fonctions continues. Ainsi, le mouvement d'un fluide est un écoulement où il y a déformation continue du fluide. Pour décrire le mouvement d'un fluide newtonien, les équations de Navier-Stokes sont utilisées. La conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement, ainsi que l'équation d'état du fluide, sont à la base de la formulation des équations de Navier-Stokes. Commençons par loi de la conservation de la masse qui s'écrit comme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = R, \quad (2.11)$$

où ρ et \mathbf{V} sont respectivement la masse volumique et la vitesse du fluide, tandis que R désigne la densité volumique de taux de matière reçu par le fluide venant de l'extérieur. Soit \mathbf{F} le vecteur des efforts extérieurs par unité de volume et $\boldsymbol{\sigma}$ les contraintes dans le fluide tel que $\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^v$ (P représente le champ de pression dans le fluide et $\boldsymbol{\sigma}^v$ le champ de contrainte issu de la viscosité du fluide). La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = \mathbf{F} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}). \quad (2.12)$$

L'injection de la formule de Green $\operatorname{div}(\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = \mathbf{V} \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ dans l'équation (2.12) implique que :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + \mathbf{V} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) \right) = \mathbf{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.13)$$

en introduisant les équations (2.11) et (2.12) dans l'équation (2.13), on obtient :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + \mathbf{V} R = \mathbf{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.14)$$

Les équations exposées jusqu'à maintenant sont universelles et applicables à n'importe quel fluide. Dans le cas d'un fluide Newtonien, les équations précédentes se simplifient conséquemment. En effet, dans l'hypothèse de solutions régulières et de petites fluctuations du mouvement de l'écoulement, le fluide est considéré peu perturbé par rapport à son repos. L'état du fluide à un instant donné t est représenté par la somme de l'état du fluide au repos indicé 0 et l'écoulement d'une petite particule localisée en \mathbf{x} .

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \rho(\mathbf{x}, t), \\ P(\mathbf{x}, t) = P_0 + p(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = 0 + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \\ R(\mathbf{x}, t) = 0 + r(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = 0 + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Ainsi, les équations de la conservation de la masse et de la conservation de la quantité de mouvement après élimination des termes du deuxième ordre deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = r, \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla p = \mathbf{f}. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Les compressions et décompressions du fluide s'effectuent dans un intervalle de temps court par rapport au temps de diffusion de la chaleur. Les pertes d'énergie par transformation de l'énergie mécanique en chaleur sont petites ; il est donc valable de supposer une transformation adiabatique. Comme $PV = cte$, le coefficient de compressibilité χ_s et la vitesse du son c s'écrivent, respectivement, sous la forme :

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s \quad (2.17)$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s} \quad (2.18)$$

où c est appelé célérité du son isentropique du fluide au repos et est uniforme pour un mouvement isotherme. T_0 est la température à l'état de référence dans le fluide au repos. En dérivant l'équation (2.16-a) par rapport au

temps et en insérant l'équation (2.16-b) dans l'expression retrouvée nous pouvons exprimer l'équation d'ondes dans les fluides par :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{\partial r}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{f}. \quad (2.19)$$

L'équation (2.19) est l'équation fondamentale de la propagation d'ondes scalaires dans un milieu fluide élastique linéaire. Maintenant que l'équation d'onde dans un milieu fluide est établie, nous allons regarder ce qu'il en est dans un milieu solide.

2.2.2 Propagation des ondes dans des milieux solides

Problème tridimensionnel : déformations et contraintes

Un solide est qualifié d'élastique lorsqu'il se déforme sous l'effet d'une sollicitation quelconque et qu'il reprend sa forme initiale à l'arrêt de cette sollicitation. L'hypothèse de petites perturbations pour laquelle le solide s'écarte peu de sa configuration de référence induit un champ de déplacement et un champ de déformation petits. Cette hypothèse permet de linéariser le problème de propagation d'ondes dans des milieux continus autour de la configuration au repos, c'est-à-dire libre de contraintes. Les composantes du tenseur des déformations sont alors exprimées en fonction des composantes du champ de déplacement par la relation suivante :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.20)$$

Lorsqu'un solide est déformé, des contraintes apparaissent afin de ramener le solide dans son état au repos. En général, la loi de comportement d'un matériau se présente comme une relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations exprimable de la façon suivante :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (2.21)$$

où le terme C_{ijkl} représente les composantes du tenseur d'élasticité (tenseur d'ordre 4). Les tenseurs des déformations et des contraintes étant symétriques, le tenseur d'élasticité vérifie les égalités suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}. \quad (2.22)$$

Compte tenu de ces égalités et de l'expression des composantes du tenseur des déformations, la loi de comportement (2.21) peut être mise sous la forme :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}. \quad (2.23)$$

Le tenseur d'élasticité, compte tenu des égalités (2.22), comporte au maximum 21 composantes indépendantes. Si les propriétés physiques du milieu d'intérêt sont équivalentes dans toutes les directions de l'espace, la matrice d'élasticité est indépendante du repère choisi et le matériau est dit isotrope. Pour un tel matériau les coefficients du tenseur d'élasticité vérifient la relation suivante :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.24)$$

où λ et μ sont appelés les coefficients de Lamé. Le tenseur des contraintes peut alors être exprimé en fonction du tenseur des déformations par la relation :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.25)$$

Découplage de l'équation de propagation

Dans les solides homogènes et isotropes, le déplacement élastique \mathbf{u} est solution de l'équation du mouvement donnée par le principe fondamental de la dynamique :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}, \quad (2.26)$$

où ρ est la masse volumique du solide et $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$ est une force volumique. La résolution analytique du problème d'élasticité (2.26) postule *a priori* une forme particulière pour la solution, puis la vérification de toutes les équations. Si la solution supposée vérifie bien les équations du problème (2.26), le théorème d'unicité pour un problème régulier assure que la solution supposée est bien la solution du problème. De plus, si la résolution du problème part du champ de déplacement $u_i(\mathbf{x}, t)$, le tenseur des déformations est calculé à partir de (2.20), et le tenseur des contraintes par la loi de comportement (2.25). Le problème (2.26) est achevé par la vérification des conditions aux limites (de types déplacement et effort normaux) et les conditions initiales. Sachant que la divergence

du tenseur des contraintes a pour expression :

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = (\lambda + \mu) \mathbf{grad}(\mathbf{div} \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (2.27)$$

l'équation de propagation (2.26) en l'absence de source, *i.e.* $\mathbf{F} = 0$, peut être mise sous la forme :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \mathbf{grad}(\mathbf{div} \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u}. \quad (2.28)$$

Sachant que le laplacien d'un vecteur se décompose de la manière suivante :

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{grad}(\mathbf{div} \mathbf{A}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{A}), \quad (2.29)$$

l'équation du mouvement (2.26) peut alors être mise sous la forme :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \mathbf{grad}(\mathbf{div} \mathbf{u}) - \mu \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}), \quad (2.30)$$

Cette équation décrit la propagation de deux types d'ondes se propageant à des vitesses différentes : les ondes longitudinales et transverses. La divergence représente une variation de volume, un mouvement de compression ou de traction, alors que le rotationnel représente une déformation sans variation de volume, donc un cisaillement. Le champ de déplacement est recherché en faisant usage de la décomposition de Helmholtz :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_L + \mathbf{u}_T. \quad (2.31)$$

Les deux composantes \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_T sont respectivement les composantes longitudinales et transverses du champ de déplacement. Puisqu'elles sont respectivement à rotationnel et à divergence nulle, elles dérivent respectivement d'un potentiel scalaire φ et d'un potentiel vecteur $\boldsymbol{\psi}$ comme le traduisent les équations suivantes :

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{grad} \varphi, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{u}_T = \mathbf{rot} \psi. \quad (2.33)$$

Ainsi, l'équation du mouvement (2.30) peut se mettre sous la forme :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_L}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{u}_L) - \mu \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}_T). \quad (2.34)$$

L'application, d'une part, du rotationnel, et d'autre part, de la divergence à cette équation, conduit aux deux équations de propagation suivantes :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_L}{\partial t^2} - c_L^2 \mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{u}_L) = \mathbf{0}, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial t^2} + c_T^2 \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}_T) = \mathbf{0}, \quad (2.36)$$

où les célérités des ondes longitudinales c_L et transverses c_T sont définies par les relations :

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (2.37)$$

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2.38)$$

Les propriétés des champs \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_T permettent ensuite d'écrire :

$$\mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{u}_L) = \Delta \mathbf{u}_L, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}_T) = -\Delta \mathbf{u}_T, \quad (2.40)$$

conduisant alors aux équations d'Alembert pour les déplacements \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_T :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_L}{\partial t^2} - c_L^2 \Delta \mathbf{u}_L = \mathbf{0}, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial t^2} - c_T^2 \Delta \mathbf{u}_T = \mathbf{0}. \quad (2.42)$$

En utilisant la définition des champs \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_T en fonction des potentiels φ et ψ , ces dernières équations vectorielles peuvent également être remplacées par les équations :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_L^2 \Delta \varphi = 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c_T^2 \Delta \psi = \mathbf{0}. \quad (2.44)$$

L'équation de propagation vectorielle à trois inconnues (les trois composantes du champ de déplacement \mathbf{u}) (2.26) a été remplacée par une équation scalaire à une inconnue (le potentiel φ) et une équation vectorielle à trois inconnues (les trois composantes du potentiel ψ). Ces équations sont appelées équations de Navier. Elles traduisent les équations d'équilibre pour le champ des déplacements dans un milieu continu tridimensionnel. Dans certaines situations le problème de propagation d'ondes tridimensionnel décrit dans ce paragraphe peut être considérablement simplifié. Le prochain paragraphe vise à mettre en lumière ce type de situation.

Problème plan en élasticité

Les essais expérimentaux réalisés dans cette étude sont en 3D. Leurs simulations numériques requièrent un temps de calcul important et des ressources en mémoire conséquentes. Toutefois, le problème de propagation d'ondes étudié dans ce travail est invariant dans la direction \mathbf{x}_3 et les sollicitations sont essentiellement dans le plan $(\mathbf{O}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Il est donc plus judicieux de simplifier le problème de propagation d'ondes en un problème d'élasticité plane. Les équations de la théorie d'élasticité se simplifient considérablement dans le cas particulièrement fréquent où tous les vecteurs contraintes sont parallèles à un même plan. Ce cas se rencontre dans deux types de problèmes nettement distincts : le problème de contraintes planes et le problème de déformations planes. Dans cette section, notre attention se focalisera sur le problème de déformations planes. La déformation plane est pertinente lorsque le modèle 2D peut être considéré comme une coupe à travers un système long dans la direction hors plan. Dans un

grand nombre de situations, on peut supposer les déformations planes avec le champ de déplacement suivant :

$$u_1 = f(x_1, x_2), \quad u_2 = g(x_1, x_2), \quad u_3 = 0. \quad (2.45)$$

On en déduit que le tenseur des déformations est donné par la forme suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

On constate bien que les déformations sont données exclusivement dans le plan orthogonal à \mathbf{x}_3 . Il suffit de connaître les déformations dans une section droite pour les connaître en tout point du domaine étudié. Par l'intermédiaire de la loi de comportement, il est possible de définir les composantes du tenseur des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= (\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33}))/E, \\ \varepsilon_{22} &= (\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33}))/E, \\ \varepsilon_{12} &= ((1 + \nu)\sigma_{12})/E. \end{aligned} \quad (2.48)$$

La contrainte normale σ_{33} dans la direction \mathbf{x}_3 n'est pas nulle car elle est liée aux autres contraintes normales par la relation :

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (2.49)$$

En reportant dans (2.48-a) et (2.48-b), il vient :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= ((1 - \nu^2)\sigma_{11} - \nu(1 + \nu)\sigma_{22})/E, \\
 \varepsilon_{22} &= ((1 - \nu^2)\sigma_{22} - \nu(1 + \nu)\sigma_{11})/E, \\
 \varepsilon_{12} &= ((1 + \nu)\sigma_{12})/E.
 \end{aligned}
 \tag{2.50}$$

Le champ de contraintes est donc, comme les champs de déplacement et de déformation, indépendant de \mathbf{x}_3 . On ne pourra donc être dans un état de déformations planes que si l'ensemble du problème est invariant pour toute translation parallèle à l'axe \mathbf{x}_3 . Ceci impose particulièrement que le système sollicité soit de longueur infinie dans la direction \mathbf{x}_3 (situation irréaliste). Par approximation, les inclusions utilisées dans la démarche expérimentale ont une grande longueur dans la direction perpendiculaire au plan $(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ et sont donc en état de déformations planes.

2.2.3 Les conditions aux limites

Les contraintes imposées sur les valeurs que prennent les solutions des équations aux dérivées partielles au niveau de la frontière Γ_m d'un domaine Ω définissent les conditions aux limites du problème. En fonction de la nature de l'équation, de la formulation du problème, ainsi que du nombre de variables en jeu, la nature de la condition aux limites change. Pour un problème de propagation d'ondes, les conditions possibles sont :

1. Dirichlet - valeurs aux bords : on parle de condition de Dirichlet imposée à une structure, lorsque l'on spécifie des valeurs que la solution doit vérifier sur tout ou une partie de la frontière du domaine. Pour les fluides on impose $p|_{\Gamma_m}$, pour les solides on impose $\mathbf{u}|_{\Gamma_m}$.
2. Neumann - gradient aux bords : on parle de condition de Neumann imposée à une structure, lorsque l'on spécifie les valeurs des dérivées que la solution doit vérifier sur la frontière du domaine (flux, contraintes...). Pour les fluides on impose $\partial_n p|_{\Gamma_m}$, pour les solides on impose $\partial_n \mathbf{u}|_{\Gamma_m}$.
3. Robin - relation gradient/valeurs sur le bord : on parle de condition de Robin, ou condition de Fourier, lorsqu'on veut simuler une impédance de parois en acoustique $f(\partial_n p, p) = 0$, $g(\partial_n \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$.
4. Condition aux limites dynamiques ($a(x, t)\partial_t p + \partial_n p = h(x, t)$ avec $\mathbf{x} \in \Gamma_m$ et $t > 0$) : on parle de condition aux limites dynamiques imposée à une structure, lorsque l'on spécifie une combinaison linéaire entre la dérivée

temporelle et la dérivée normale que la solution doit vérifier sur tout ou partie de la frontière du domaine, où $a(x, t)$ est une fonction définie sur Γ_m .

La propagation d'ondes dans un milieu où coexistent des structures mécaniques solides dans un environnement fluide fait intervenir un couplage de la physique des ondes dans ces deux milieux. Le couplage comprend la charge de fluide sur la structure et l'accélération structurelle vue par le fluide. Dans une interface fluide/solide, il faut écrire la continuité de l'effort normal et du déplacement normal de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{fluide}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} &= \boldsymbol{\sigma}_{solide}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_m, \\ \mathbf{u}_{fluide}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{u}_{solide}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_m,\end{aligned}\tag{2.51}$$

où \mathbf{n}^2 est la normale à la surface Γ_m . Si la viscosité du fluide est prise en compte, les conditions aux frontières sont les mêmes que celles à l'interface entre deux solides. Si le fluide est Newtonien, par exemple l'eau, les contraintes tangentielles sont nulles. Par conséquent, le tenseur des contraintes est un tenseur diagonal dont les coefficients de la diagonale sont l'opposé de la pression acoustique.

Généralement, la propagation d'ondes dans des milieux hétérogènes complexes est difficile à calculer analytiquement, d'où l'intérêt des méthodes numériques susceptibles de calculer des solutions approchées. La prochaine section décrit les méthodes numériques les plus utilisées dans le calcul des solutions d'équations aux dérivées partielles. Nous choisirons la plus adaptée au problème étudié dans cette thèse.

2.3 Les méthodes numériques

2.3.1 Généralités sur les méthodes numériques

Dans notre étude, le rapport entre la taille du milieu (ou la distance parcourue par l'onde pendant la durée de la simulation en régime temporel) et la longueur d'onde est important. Bien que les formes élémentaires du milieu étudié seront simples, la géométrie globale de tout le domaine est assez particulière. Se rajoutent aux contraintes de la taille du milieu et de sa topologie, les contraintes de l'hétérogénéité et du couplage entre la propagation dans les milieux fluides et solides. Les solutions analytiques de la propagation d'ondes dans ce milieu étant inexistantes,

2. L'orientation vers l'un ou l'autre des milieux est sans importance.

une approche alternative s'impose. Celle-ci consiste à chercher des solutions approchées au moyen de méthodes numériques.

Les méthodes numériques résolvent des problèmes continus (systèmes d'équations aux dérivées partielles) après les avoir substitués par un problème discret afin d'obtenir des solutions numériques approchées. Il existe plusieurs méthodes numériques. Parmi les plus célèbres, on trouve la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, la méthode des éléments finis de frontière et la méthode des volumes finis. Chacune de ces méthodes se révèle performante et adaptée à certaines configurations, mais peut être beaucoup moins intéressante dans d'autres. Quelle que soit la méthode numérique, l'un des plus grands enjeux lors de son utilisation est la maîtrise des phénomènes liés à l'erreur de discrétisation, l'approximation, ou encore l'inversion du système d'équations. Afin de comprendre ces phénomènes et de trouver la solution numérique approchée suffisamment fiable, il est nécessaire d'étudier les méthodes numériques avant de les utiliser. Malgré son importance, ce point ne fera pas l'objet de nos études. Nous proposons uniquement de brèves descriptions des méthodes communément utilisées dans le but de choisir la plus adaptée à nos objectifs.

La méthode des différences finies est une expression discrète des dérivées continues. Elle engendre des grilles de calculs cartésiennes conditionnées uniquement par le pas spatial de discrétisation (définition en pixels du domaine de calcul). La résolution numérique est donc totalement explicite, facile à implémenter, et rapide en termes de calculs. Le principe de discrétisation de la méthode fait qu'elle ne peut tenir en compte de manière précise des géométries complexes ou irrégulières.

Par analogie au principe des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus, la *Finite Element Method* (FEM) et la *Boundary Element Method* (BEM) font intervenir une intégration de l'équation aux dérivées partielles contre une fonction test régulière. On parle alors de formulation variationnelle de l'équation, ou formulation faible. C'est cette expression intégrale qui est alors mise sous la forme de sommes discrètes. Une conséquence intéressante de l'approche d'intégration par la FEM et la BEM est la faculté de décrire très finement les formes et les contours des géométries les plus complexes. Pour la FEM, la conséquence de l'approche d'intégration est de mailler tout le domaine de calcul avec des éléments géométriques. Ceci donne lieu à des schémas numériques impliquant la résolution d'un système linéaire à chaque pas de temps ou de fréquence. Cependant, la FEM ne conduit pas directement à un schéma explicite car elle fait apparaître une matrice de masse. Cette difficulté peut être résolue en approchant cette matrice par une matrice diagonale (condensation de masse); ce qui est possible en utilisant des formules

de quadrature adéquates. De l'autre côté, la BEM conduit à un problème posé uniquement sur les frontières du domaine. Seuls les contours des défauts et du domaine sont maillés. Par conséquent, l'effort de maillage et le nombre de degrés de liberté est fortement réduit par rapport à la FEM, ce qui rend ces méthodes très efficaces et rapides pour des configurations avec peu de défauts. De plus, elle est particulièrement intéressante lorsqu'il est question de domaines infinis car elle a la particularité de traiter de façon précise les conditions aux limites de radiation (ou de Sommerfeld). Cependant, la présence de nombreux défauts fait rapidement croître le nombre d'inconnues du problème et par conséquent le temps de calcul. Pour finir, la BEM nécessite la connaissance de la fonction de Green du milieu environnant qui n'est pas toujours accessible.

Tout comme la FEM et la BEM, les méthodes des volumes finis exploitent des approximations d'intégrales. A une différence près, elle se basent directement sur la forme dite forte de l'équation à résoudre. La méthode des volumes finis a été initiée pour des lois de conservation hyperboliques et ensuite généralisée pour des équations elliptiques et paraboliques. Elle s'avère être conservatrice, et donc parfaitement adaptée à la résolution de lois de conservation. Dans les méthodes des volumes finis, le domaine d'étude est subdivisé en petits volumes (en 3D, des surfaces en 2D, des segments en 1D) non structurés. En matière de discrétisation des lois de conservation, la formulation ne tient pas en compte de la complexité du maillage. En revanche, les caractéristiques géométriques du maillage peuvent jouer un rôle prépondérant lorsque des flux diffusifs entrent en jeu.

Dans le cadre de notre étude, il nous a semblé approprié d'opter pour la méthode des éléments finis. Ce choix jouit d'une bonne adéquation entre nos besoins et les capacités du modèle. De plus, le marché est riche de logiciels de calculs basés sur l'approche de la FEM présentant l'avantage d'automatiser les étapes un peu fastidieuses comme le maillage par exemple.

2.3.2 L'approche des éléments finis

Il est commun de distinguer deux types de problèmes associés à la propagation d'ondes dans des milieux élastiques : les problèmes en temps (ou problèmes transitoires) et les problèmes en fréquence (ou problèmes harmoniques). Dans le premier cas, le temps fait explicitement partie des variables de l'inconnue du problème et l'on s'intéresse alors à un problème d'évolution. Dans le second cas, la dépendance en temps est imposée *a priori* par l'intermédiaire de la source par exemple. Elle est supposée périodique en temps, et même harmonique : on cherche une solution proportionnelle à $e^{-i\omega t}$, où $\omega > 0$ désigne la pulsation (on parle aussi de fréquence car $\omega = 2\pi f$). Le

temps n'intervient alors plus que par l'intermédiaire de cette fréquence, qui joue le rôle de paramètre, et l'inconnue recherchée est une fonction des seules variables spatiales. Ainsi, l'équation des ondes scalaires donne naissance à l'équation de Helmholtz.

Ce paragraphe consiste à présenter la démarche de la méthode des éléments finis sur un modèle simple, à savoir le modèle scalaire de l'équation d'onde acoustique. Malgré la simplicité de ce modèle, il permet d'aborder les principales notions communes à tous les modèles, même les plus complexes, et d'en comprendre les propriétés essentielles. Nous supposons que l'onde est harmonique avec une dépendance en temps de la forme $e^{-i\omega t}$. L'équation des ondes se transforme en l'équation elliptique de Helmholtz qui décrit le comportement du système. Considérons une portion de l'espace notée Ω , dont la frontière est notée Γ_m . Le but ici est de déterminer p , défini sur Ω , solution de l'équation aux dérivées partielles (2.52), tout en satisfaisant les contraintes exercées sur le système. Les contraintes en question sont des conditions aux limites imposées sur la frontière du domaine Γ_m (source surfacique) :

$$\begin{cases} \Delta p + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = q \text{ sur } \Gamma_m. \end{cases} \quad (2.52)$$

Nous supposons que sur la frontière du domaine Ω s'exerce une condition aux limites de type Neumann $\frac{\partial p}{\partial n} = q$ (où $q = i\omega\rho\mathbf{V}_n$, avec \mathbf{V}_n la vitesse normale). Comme souligné plus haut, la méthode des éléments conduit à une formulation variationnelle ou formulation faible de l'équation physique. Soit v^* une fonction test, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta p + k^2 p)v^* dx &= 0, \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial n} v^* ds + \int_{\Omega} (-\nabla v^* \nabla p + k^2 p v^*) dx &= 0, \\ \int_{\Omega} (\nabla v^* \nabla p - k^2 p v^*) dx &= \int_{\partial\Omega} q v^* ds. \end{aligned} \quad (2.53)$$

La discrétisation revient à redéfinir la géométrie du domaine Ω . En effet, Ω est découpé selon un maillage. En général, les mailles sont carrées ou triangulaires. Le maillage peut aussi être irrégulier en particulier autour des endroits d'intérêt où la solution risque de fortement varier. Toutefois, il est important d'avoir des éléments faiblement distordus. Notons que plus le maillage est resserré, mieux la solution numérique reflète la solution exacte du

problème. La discrétisation consiste à écrire les approximations :

$$p(x) \approx \sum_{j=1}^{j=N} p_j N_j(x), \quad (2.54)$$

et

$$v(x) \approx \sum_{j=1}^{j=N} v_j N_j(x). \quad (2.55)$$

Dans ces dernières équations, les $N_j(x)$ sont les fonctions d'approximation. On appelle "élément" la donnée d'une géométrie (souvent polygonale en 2D ou polyédrique en 3D) décrite par une fonction de base. Dans le cas unidimensionnel, le maillage est une subdivision de l'intervalle étudié, soit :

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n. \quad (2.56)$$

Chaque intervalle (x_{i-1}, x_i) , $i = 1 : N$ est un élément fini. La formulation faible est résolue aux nœuds du maillage, c'est-à-dire que la solution calculée est la liste des coefficients p_j devant les fonctions d'approximations $N_j(x)$. Plusieurs choix sont alors possibles. En général, les fonctions de base utilisées pour les éléments finis sont interpolantes, c'est-à-dire que les valeurs nodales sont les valeurs des grandeurs inconnues aux nœuds. Le plus simple et le plus répandu est l'usage des polynômes de Lagrange. Dans cette méthode, les fonctions de base valent 1 à un nœud du maillage, et 0 à tous les autres. Ainsi, il y a autant de fonctions de base par élément que de nombre de nœuds.

A partir de ces fonctions d'interpolation, on peut construire une approximation de la fonction inconnue par les formules (2.54) et (2.55). Il faut un minimum de nœuds par longueur d'onde. Le critère de Shannon imposerait 2 nœuds par longueur d'onde, en pratique on en prend plutôt entre 5 et 10. Dans un volume V , il faut ainsi environ

$N = \frac{V}{(\lambda/5)^3}$ nœuds pour effectuer un maillage correct. Le système discret est ensuite obtenu par :

$$\int_{\Omega} (\nabla v^* \nabla p - k^2 p v^*) dx = \int_{\partial\Omega} q v^* ds$$

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{i=N} v_i^* \nabla N_i(x) \sum_{j=1}^{j=N} p_j \nabla N_j(x) - k^2 \sum_{i=1}^{i=N} v_i^* N_i(x) \sum_{j=1}^{j=N} p_j N_j(x) \right) dx = \int_{\partial\Omega} q \sum_{i=1}^{i=N} v_i^* N_i(s) ds \quad (2.57)$$

$$\sum_{i=1}^{i=N} \sum_{j=1}^{j=N} K_{ij} v_i^* p_j - k^2 \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{j=1}^{j=N} M_{ij} v_i^* p_j = \sum_{i=1}^{i=N} v_i^* Q_i,$$

avec $K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla N_i(x) \nabla N_j(x) dx$, $M_{ij} = \int_{\Omega} N_i(x) N_j(x) dx$ et $Q_i = \int_{\partial\Omega} q_0 N_i(s) ds$. Nous obtenons finalement le système suivant :

$$\sum_{j=1}^{j=N} K_{ij} p_j - k^2 \sum_{j=1}^{j=N} M_{ij} p_j = Q_i, \quad (2.58)$$

$$(\mathbf{K} - k^2 \mathbf{M}) \mathbf{P} = \mathbf{Q},$$

où \mathbf{P} et \mathbf{Q} sont, respectivement, les vecteurs des valeurs nodales de la pression et de la source. Les matrices \mathbf{K} (à différentiel de la matrice de transfert \mathbf{K} vue pour la méthode DORT) et \mathbf{M} sont creuses, ce qui diminue l'effort de calcul pour la résolution du système. La résolution peut être directe ou obtenue dans un premier temps par le calcul des modes propres du domaine puis par projection de la solution sur les modes. On obtient alors une solution approchée tel que :

$$p(x) = \sum_{j=1}^{j=N} p_j N_j(x). \quad (2.59)$$

L'équation (2.58) est le système à inverser pour chaque pas de fréquence. Pour conclure, les méthodes numériques remplacent la géométrie continue par une géométrie discrète. Les solutions de l'équation aux dérivées partielles sont interpolées entre les points du maillage. Plus les points sont espacés, plus la fonction d'interpolation risque de s'écarter de la solution et réduire le coût calcul des opérations numériques. A l'inverse, un maillage trop fin conduit à une solution plus proche de la solution exacte, mais les temps de calculs sont longs et cela nécessite par ailleurs une importante capacité de mémoire. Il faut donc trouver un compromis entre coût calcul et précision des résultats.

2.4 Imagerie Topologique d'un milieu hétérogène dans un régime propagatif à faible désordre

L'objectif de cette section est de détecter et de localiser une perturbation locale dans un milieu périodique borné immergé dans une matrice fluide semi-infinie. Cette étude numérique est appuyée par une évaluation de la sensibilité de l'IT face aux éventuelles sources d'erreurs susceptibles de se produire lors des expériences réelles. Le choix du domaine du calcul a été en faveur du domaine fréquentiel. Ce dernier permet de s'affranchir des données inutiles en se restreignant à la bande passante d'intérêt. De plus, le calcul dans l'espace de fréquence permet d'obtenir la fonction de transfert entre l'émetteur et le champ rayonné, et de laisser le choix à l'utilisateur de convoluer avec n'importe quel type de signal *a posteriori*. Pour des raisons pédagogiques et de clarté, les interprétations physiques et les discussions seront menées dans le domaine temporel.

La mise en oeuvre numérique de l'IT nécessite la simulation numérique de l'expérience physique. Cette dernière comprend la modélisation des propriétés géométriques et physiques du milieu ainsi que la simulation du défaut. La simulation du problème réel inclut également la modélisation de la source émise par le dispositif expérimental. Basé sur la méthode des éléments finis, le logiciel COMSOL Multiphysics³ a été exploité pour effectuer les simulations numériques.

Equation et données d'entrée

Le calcul des solutions des problèmes direct et adjoint sur COMSOL nécessite la définition des équations à résoudre dans chaque domaine du milieu global, ainsi que la définition des conditions aux limites du problème. Pour ce qui est des conditions de continuité des grandeurs physiques à une interface fluide/solide (2.51), le module Multiphysics du logiciel COMSOL traite automatiquement le couplage inhérent aux interactions fluide/solide.

En pratique, les expériences réelles sont en 3D, mais de telles modélisations requièrent des ressources en mémoire et des temps de calculs bien supérieurs aux moyens techniques disponibles au laboratoire. Il est plus judicieux de simplifier le problème de propagation d'ondes en un problème d'élasticité plane. Compte tenu du dimensionnement du milieu périodique et des arguments avancés dans le paragraphe (2.2.2), le modèle bidimensionnel offre un bon compromis entre rapidité de calcul et représentativité des configurations expérimentales réelles. Le paramétrage des

3. <https://www.comsol.com/comsol-multiphysics>. Consulté le 27/12/2018.

modèles numériques concerne également les données d'entrée : la géométrie du modèle, les caractéristiques physiques et mécaniques des milieux continus, ainsi que les informations relatives à la source et au signal d'émission.

Le maillage

Pour décrire de manière fidèle les variations spatiales de la géométrie et rendre compte correctement des phénomènes de propagation d'ondes, un maillage d'éléments triangulaires quadratiques est réalisé pour des fonctions d'interpolation polynomiale d'ordre 2. Chaque longueur d'onde comprend au moins 4 mailles. Ce choix conditionne l'échantillonnage spatial Δx de la façon suivante :

$$\Delta x \leq \frac{\lambda_{min}}{4}, \quad (2.60)$$

où λ_{min} est la plus petite longueur d'onde (reliée à la plus haute fréquence et la plus petite célérité) se propageant dans le milieu. Elle se trouve être celle des ondes de pression dans l'eau. Ainsi, toutes les oscillations du signal sont prises en compte et la dispersion numérique qui résulte d'une déformation artificielle de la forme d'onde est minimisée.

Calcul numérique dans un domaine borné

Les problèmes étudiés au cours de cette thèse se posent en milieux non bornés ou du moins très grands par rapport à la zone d'intérêt. Pour des raisons pratiques évidentes, les calculs effectifs sont réduits à un domaine borné en espace. Se pose alors le problème du traitement d'une frontière simulant un milieu de propagation semi-infini. C'est ce qui amène à introduire les notions de conditions aux limites absorbantes (conditions aux limites qui sont censées laisser échapper les ondes du domaine de calcul en minimisant les réflexions) ou de couches absorbantes *Perfectly Matched Layer* (PML). La méthode de PML entoure le domaine de calcul par de petites bandes, qui d'un point de vue physique peuvent être interprétées comme une couche absorbante (sans réflexion) des ondes venant du domaine de calcul.

Représentation des résultats

Dans notre étude, le problème de propagation d'ondes est posé dans un solide élastique (avec des variables associées au déplacement \mathbf{u}) et un fluide compressible (avec des variables associées à la pression P). Dans le but de représenter un défaut quelconque en utilisant une seule image, une grandeur physique commune aux deux milieux doit être choisie. La variable choisie dans cette étude est la pression isostatique σ_{iso} définie comme étant l'opposé de la pression hydrostatique dans le fluide, et comme étant la demie trace du tenseur de contrainte dans le solide pour un problème en 2D :

$$\sigma_{iso} = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (2.61)$$

Ainsi, la fonction d'imagerie $\mathcal{I}(\mathbf{x})$ est obtenue à partir de la superposition de l'image obtenue dans le fluide et de celle obtenue dans le solide telle que :

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \int \sigma_{iso,d}(\mathbf{x}, -t)\sigma_{iso,a}(\mathbf{x}, t)dt = \begin{cases} \int P_d(\mathbf{x}, -t)P_a(\mathbf{x}, t)dt, & \text{si } \mathbf{x} \in \text{Fluide,} \\ \frac{1}{4} \int \text{tr}\sigma_d(\mathbf{x}, -t)\text{tr}\sigma_a(\mathbf{x}, t)dt, & \text{si } \mathbf{x} \in \text{Solide,} \end{cases} \quad (2.62)$$

où P_d et P_a sont respectivement les pressions dans le fluide des problèmes direct et adjoint. $\sigma_d(\mathbf{x}, -t)$ et $\sigma_a(\mathbf{x}, t)$ sont respectivement les pressions isostatiques dans le solide des problèmes direct et adjoint. De plus, les images sont pondérées par rapport à la valeur d'amplitude maximale présente dans celles-ci (en excluant les régions absorbantes). Pour les reconstructions de l'IT, la quantité affichée est :

$$\text{Env}(\mathcal{I}(\mathbf{x}))/\text{maximum}(\text{Env}(\mathcal{I}(\mathbf{x}))). \quad (2.63)$$

Ainsi, nous concluons la description de la démarche numérique. La description du protocole des simulations numériques, interprétations physiques et leurs résultats associés, feront l'objet des paragraphes suivants.

2.4.1 Simulation du problème réel

Le milieu de référence Ω est formé par un réseau périodique de 35 tiges (7 colonnes et 5 rangées) d'acier de 1 mm de diamètre et de 25 cm de longueur. L'espace inter-tiges est de 11.9 mm dans la direction \mathbf{x}_1 et de 9.6 mm dans la direction \mathbf{x}_2 . Les propriétés mécaniques de l'acier simulées sont : $E_{acier} = 279.10^9$ Pa pour le module

de Young, $\rho_{acier} = 7900 \text{ kg/m}^3$ pour la densité, $c_{acier} = 5942.8 \text{ m/s}$ pour la célérité des ondes longitudinales et de $\nu_{acier} = 0.33$ pour le coefficient de poisson. Le milieu périodique est immergé dans l'eau de masse volumique $\rho_{eau} = 1000 \text{ kg/m}^3$ et de célérité d'onde longitudinale $c_{eau} = 1482 \text{ m/s}$ (voir figure 2.2-a). Grâce à ces informations, nous pouvons donc déduire que la concentration surfacique du réseau de tiges est de $C \simeq 0.7 \%$. La perturbation introduite dans ce milieu consiste à supprimer volontairement l'une des inclusions du réseau périodique. L'inclusion éliminée est localisée au niveau de la ligne 3 et de la colonne 4 du réseau périodique. Le défaut est donc défini comme étant l'absence de la tige centrale du réseau périodique. Le milieu réel noté Ω_ε est le milieu de référence auquel la tige centrale du réseau périodique est enlevée (voir figure 2.2-b). L'inspection du milieu Ω_ε est réalisée dans une configuration d'émission/réflexion, grâce à une sonde Γ_m constituée de 128 éléments surfaciques. La sonde Γ_m est centrée et parallèle au réseau périodique.

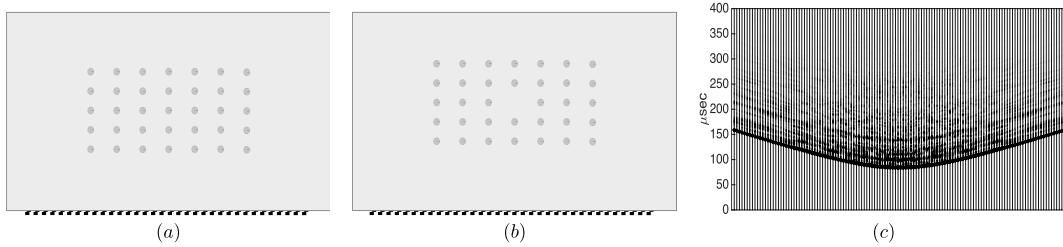


FIGURE 2.2 – Localisation de l'absence de la tige placée au centre du milieu périodique (de cinq rangées et de sept colonnes). Le diamètre des tiges est d'un millimètre. L'espace inter-rangs est de 9,6 mm et l'espace inter-colonnes est de 11,9 mm. Les points noirs schématisés au bord du milieu représentent la barrette ultrasonore de 128 transducteurs qui génère un front d'onde plan dans la bande de fréquences de [200-800] kHz. La longueur d'onde à fréquence centrale dans l'eau est de 3 mm. (a) milieu de référence (toutes les tiges sont présentes). (b) milieu réel inspecté (une tige est manquante). (c) résidu obtenu à partir des réponses ultrasonores des deux états du milieu.

2.4.2 Étude du champ direct

La première étape du calcul du gradient topologique est la simulation du problème direct $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et le calcul de sa solution en tout point du milieu de référence noté Ω pour chaque pas de temps. Le problème direct s'écrit donc comme :

$$\begin{cases} \mathcal{F}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \text{ avec } \in [0, T], \\ \mathbf{V}_n(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x}_2 = s(t), \forall \mathbf{x} \text{ sur } \Gamma_m, \end{cases} \quad (2.64)$$

où $s(t)$ est la source du problème direct (une seule insonification par une onde plane générée par une sonde placée sur Γ_m), \mathcal{F} est un opérateur de propagation d'ondes qui dépend de la nature du milieu élastique et des conditions aux limites, tandis que T est le temps de la simulation du problème. Dans un premier temps, il faudra modéliser le milieu de référence et utiliser comme source du problème direct le signal d'excitation expérimental.

Modélisation du milieu de référence

Le milieu de référence Ω est modélisé en se basant sur la connaissance du milieu réel. Il est défini spatialement en fonction des paramètres physiques et géométriques du problème réel (qui sont supposés connus), tels que la masse volumique et la célérité des ondes de compression dans l'eau, ainsi que les propriétés mécaniques de l'acier. Dans le cas présent, le milieu de référence est la réplique exacte du milieu réel avec toutes les tiges du réseau périodique. Compte tenu de la bande de fréquence et des matériaux utilisés dans ce travail, l'absorption est négligée.

Le signal source

Le signal source du problème direct doit être fidèle à celui du problème physique réel. Il est donc important d'adopter le même échantillonnage spatial du réseau de transducteurs Γ_m . Le champ de pression dans le milieu fluide est engendré par la vitesse normale rentrante appliquée sur toutes les surfaces élémentaires de la sonde.

Analyse de la propagation

L'onde incidente se propage dans l'eau sous forme d'onde plane jusqu'à la première rangée de tiges. D'une part, chaque inclusion prise indépendamment diffracte l'onde incidente. D'autre part, la somme des champs de pression diffractés par toutes les tiges conduit à un champ total complexe. Ce dernier contient la contribution simple de l'interaction de l'onde incidente avec la tige et la contribution multiple induite par les interactions réciproques des tiges. Au fur et à mesure que l'onde incidente pénètre dans le milieu périodique, elle perd sa nature plane. Le champ total diffracté se propage dans le milieu dans toutes les directions et seule une partie de celui-ci est mesurée par la sonde.

2.4.3 Etude du champ adjoint

Le deuxième champ nécessaire au calcul du gradient topologique est la solution du problème adjoint \mathbf{v} pour chaque pas de temps et en tout point du milieu de référence Ω . Le problème adjoint s'écrit donc comme :

$$\begin{cases} \mathcal{F}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_m, \forall t \in [0, T], \\ \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{x}_2 = (\mathbf{u}|_{\Gamma_m} - \mathbf{u}_{exp})(\mathbf{x}, T - t), \forall \mathbf{x} \text{ sur } \Gamma_m. \end{cases} \quad (2.65)$$

Le problème adjoint est sensiblement différent du problème direct, car sa source est le résidu retourné temporellement à partir de la portion de l'espace Γ_m . Ce dernier point met en évidence l'analogie entre le retournement temporel et le problème adjoint qui fait parcourir (numériquement) aux échos provenant des contours du défaut le chemin inverse à celui qu'ils avaient emprunté lors de la simulation du problème direct. La figure 2.2-c illustre le résidu $(\mathbf{u}|_{\Gamma_m} - \mathbf{u}_{exp})(\mathbf{x}, T - t)$ calculé dans le cas présent. Il est composé de 128 signaux et contient l'onde balistique relative à la tige manquante dans le milieu réel (le défaut). On peut remarquer également une trainée de signaux associée aux interactions multiples (entre le défaut et le reste du réseau périodique) manquantes dans le milieu réel.

2.4.4 Construction de l'image

La construction de l'image repose sur le calcul du gradient topologique, ce dernier est obtenu via le produit du champ direct par le champ adjoint pour chaque pas de temps dans l'intervalle $[0, T]$. Le champ adjoint focalise le résidu à l'éventuelle position du défaut dans le milieu de référence Ω , tandis que le champ direct joue le rôle du révélateur à l'instant noté t_ε (l'instant du croisement des deux champs). Dans la pratique, les champs direct et adjoint se présentent sous la forme d'une matrice tridimensionnelle dépendant de l'espace et du temps (ou de la fréquence). Dans le cas présent, la construction de l'image tient compte du couplage entre la propagation d'ondes dans le fluide et la propagation d'ondes dans le solide. Ainsi, la fonction d'imagerie requiert quatre matrices : deux matrices (pression dans le fluide et contrainte dans le solide) associées aux champs directs, et deux matrices (pression dans le fluide et contrainte dans le solide) affectées aux champs adjoints. Finalement, le gradient topologique est défini comme dans l'équation (2.62-b).

En utilisant une seule insonification, les simulations numériques sont effectuées dans la gamme de fréquence $[200, 800]$ kHz avec un pas de fréquence de 2 kHz. La durée totale de la simulation est de 500 μs . Les champs

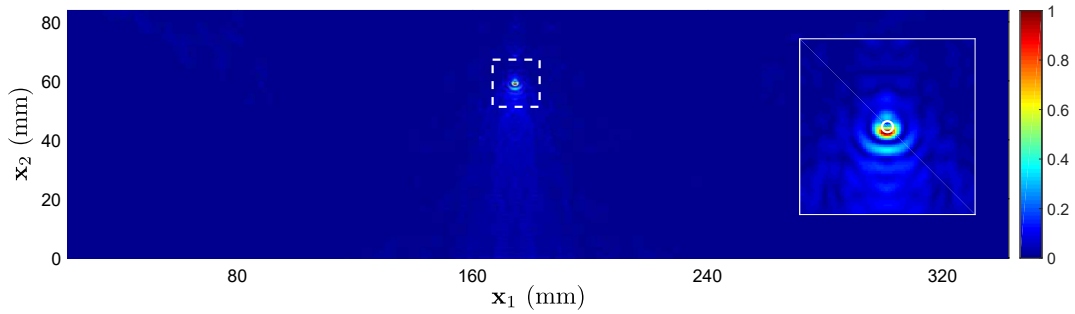


FIGURE 2.3 – IT du milieu périodique (réseau de 35 tiges d’acier) plongé dans l’eau. Le défaut imagé (la tache en surbrillance) est l’absence de la tige positionnée sur la quatrième colonne de la troisième rangée du réseau (cercle blanc dans le cadrant du zoom). L’image est obtenue grâce à la fonction d’imagerie (2.62-b).

direct et adjoint sont obtenus par un signal d’excitation sinusoïdal fenêtré de 3 périodes. La figure 2.3 présente l’IT du problème étudié dans cette section. La tache lumineuse d’une largeur de $1/3\lambda_{fc}$ (λ_{fc} est la longueur d’onde à fréquence centrale dans l’eau) est centrée sur le bord de la tige car le front d’onde de l’excitation voit en premier lieu le contour externe de la tige.

Le résultat numérique présenté dans ce chapitre confirme la capacité de l’IT à reconstituer des images qualitatives des milieux hétérogènes, à condition de bien prendre en compte leur complexité dans la modélisation du milieu de référence. Pour la mise en oeuvre de cette approche, il est d’une importance capitale de :

1. Bien caractériser le milieu réel en termes de propriétés physiques et mécaniques des milieux élastiques.
2. Bien connaître la position de la barrette ultrasonore par rapport au milieu périodique, et en tenir compte dans la modélisation du milieu de référence.

En pratique, ces exigences sont difficiles à satisfaire. Des erreurs sont susceptibles de dégrader la qualité du résultat final. Sous l’hypothèse d’une parfaite maîtrise des propriétés physiques et mécaniques des milieux élastiques, la plus grande source d’erreur provient de la position de la sonde par rapport au milieu périodique. Si la position de la barrette n’est pas identique à celle de l’expérience, le résidu est fatalement erroné. La rétropropagation de ce dernier à travers le problème adjoint focalisera les ondes de pression à des endroits où il n’existe pas de défaut, et engendrera des faux positifs sur l’image en particulier lorsque le milieu est diffusif. Dans le prochain paragraphe, nous proposons quelques études afin d’évaluer la robustesse de la méthode vis-à-vis d’une erreur de positionnement de la barrette par rapport au milieu périodique et ce dans les deux directions de l’espace.

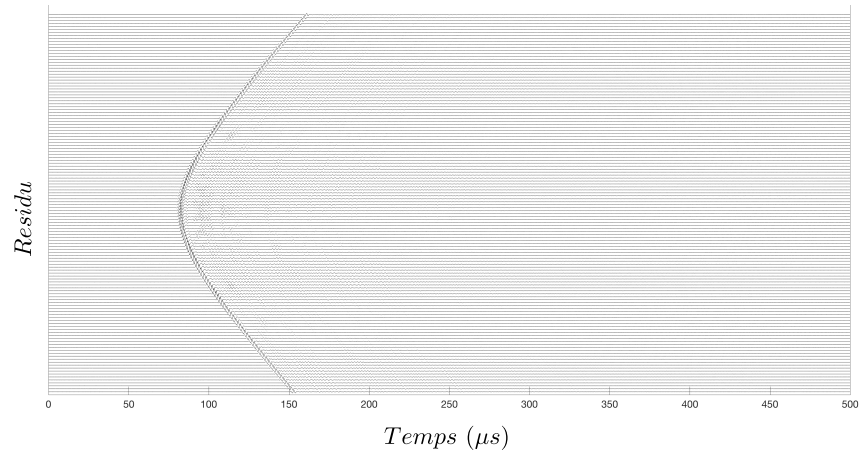
2.4.5 Sensibilité de l'Imagerie Topologique vis-à-vis d'une erreur de positionnement de la barrette ultrasonore

Dans le but d'évaluer la sensibilité de l'IT vis-à-vis d'une erreur de positionnement de la sonde, ce paragraphe étudie quelques cas tests où une erreur sur son positionnement par rapport au milieu périodique est introduite. Reprenons ici le problème décrit dans cette section qui consiste à localiser l'absence d'une tige dans un milieu périodique plongé dans l'eau. Dans une expérience physique réelle, il est tout à fait envisageable de commettre une erreur sur la position de la sonde dans le milieu inspecté. L'erreur du positionnement de la sonde par rapport au milieu périodique peut être commise dans les deux directions de l'espace, la question qui se pose à ce niveau est : quel est l'impact d'une telle erreur sur l'image ?

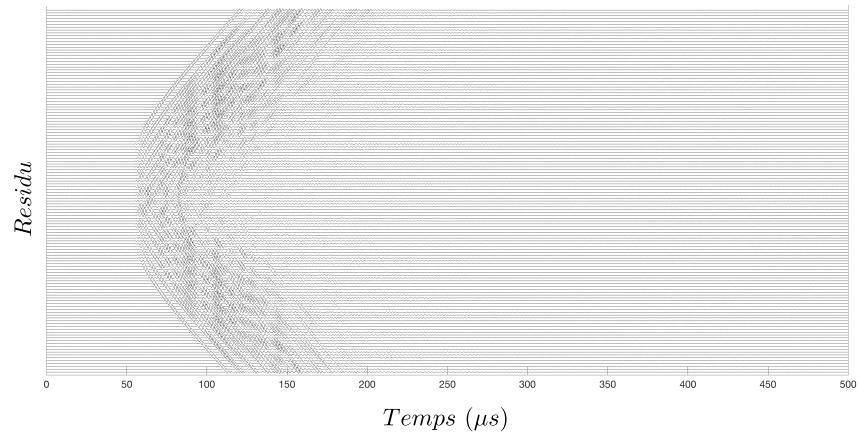
Dans un premier temps, supposons que la position du réseau de transducteurs est décalée (dans la direction \mathbf{x}_1) de $\lambda_{fc}/5$ par rapport à sa véritable position dans le problème réel. Par définition, le résidu représente la différence entre l'expérience physique et le problème direct simulé. Lorsque le milieu de référence est fidèle au milieu réel en l'absence du défaut (comme au paragraphe 1.4.1) le résidu se manifeste par un champ de pression divergent en partant de la position du défaut (voir 2.4-a). Dans le cas présent la différence entre le milieu réel et le milieu de référence n'est plus uniquement l'absence de la tige mais également les positions de toutes les autres tiges du milieu périodique. La figure 2.4-b montre la conséquence du décalage de la sonde ($\lambda_{fc}/5$ dans la direction \mathbf{x}_1) sur le résidu. La figure 2.5 illustre l'IT du problème dans une situation où l'erreur de positionnement de la sonde est introduite dans la direction \mathbf{x}_1 . La figure (2.5-b) illustre l'effet lorsque l'erreur est commise dans la direction \mathbf{x}_2 .

La figure 2.5 montre à quel point la méthode de l'IT est sensible à l'erreur liée à la position de la sonde par rapport au milieu périodique. A l'opposé du résultat présenté sur la figure 2.3, l'information relative à l'absence de la tige n'est plus symbolisée par une tache lumineuse, mais se trouve noyée dans un amas de faux positifs. Le résultat de l'IT se trouve davantage dégradé lorsque l'erreur est commise dans la direction \mathbf{x}_2 à cause de la rétropropagation du résidu qui croise le champ direct plusieurs fois au voisinage de chaque tige [10]. Ce phénomène est équivalent à l'effet d'une mauvaise évaluation de la vitesse du son dans l'eau. Ces résultats révèlent une grande sensibilité de l'IT vis-à-vis de la géométrie du milieu de référence et attire l'attention sur un point particulièrement intéressant.

Dans les expériences réelles, il serait plus judicieux de remplacer le milieu de référence virtuel par un milieu de référence expérimental. Ainsi, le résidu obtenu est purement expérimental. Il sera donc défini à partir de la



(a)



(b)

FIGURE 2.4 – Comparaison des résidus synthétiques normalisés de deux états différents. (a) Résidu exact. (b) Résidu obtenu suite à un décalage de $\lambda_{fc}/5$ (dans la direction \mathbf{x}_1) de la position de la sonde par rapport au milieu périodique.

réponse du milieu réel, avant et après l'introduction de la perturbation. Cette astuce, lorsqu'elle est applicable, affranchit l'expérimentateur de l'erreur liée à la position du réseau de transducteurs par rapport à la position du milieu périodique pour la calcul du résidu. Elle sera adoptée dans toutes les démarches expérimentales présentées par la suite dans cette thèse. Même si le résidu calculé avec cette approche est exact, il est toujours possible de commettre une erreur sur la position de la sonde dans la modélisation du milieu de référence servant à calculer les

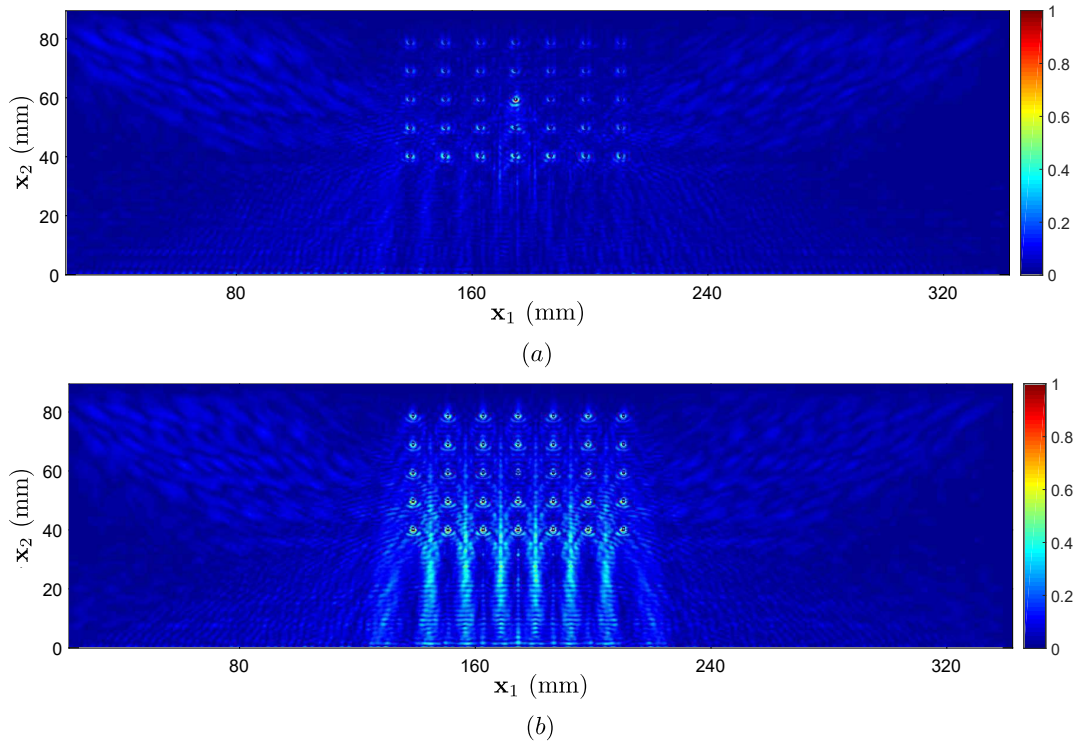


FIGURE 2.5 – IT (avec la fonction d'imagerie 2.62) du milieu périodique avec des résidus erronés. La barrette ultrasonore est décalée par rapport au milieu périodique dans la modélisation du milieu de référence. (a) Décalage de $\lambda_{fc}/5$ dans la direction \mathbf{x}_1 . (b) Décalage de $\lambda_{fc}/5$ dans la direction \mathbf{x}_2 .

problèmes direct et adjoint. D'une part, la figure 2.6 montre l'effet de l'erreur dans la direction \mathbf{x}_1 pour les décalages $(\lambda_{fc}/5, \lambda_{fc}/2, \lambda_{fc})$; on observe un effet d'étalement de la tache d'autant plus important que l'erreur est grande. D'autre part, la figure 2.6 montre l'effet de l'erreur dans la direction \mathbf{x}_2 pour les mêmes décalages. L'effet constaté cette fois-ci est un dédoublement de la tache indiquant la position du défaut (d'autant plus accrue que l'erreur est importante).

Ces figures montrent que lorsque le résidu est exact, une erreur de positionnement de la barrette ultrasonore dans la modélisation du milieu de référence induit beaucoup moins d'artéfacts que dans la figure (2.5). En revanche, la position du défaut indiquée sur l'image est décalée par rapport à sa véritable position d'une distance comparable à celle commise dans l'erreur de positionnement de la sonde.

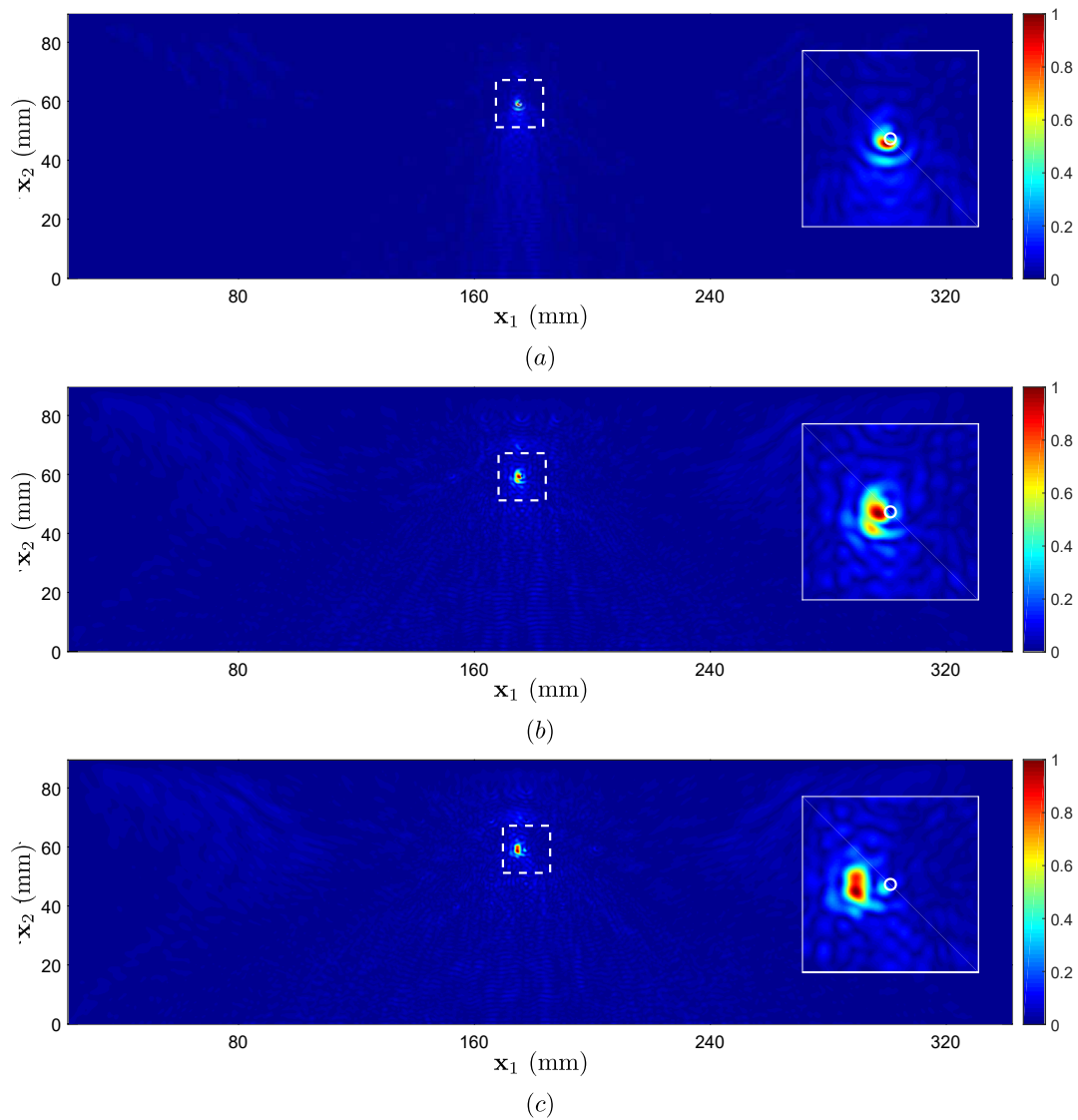


FIGURE 2.6 – IT (avec la fonction d'imagerie 2.62) résultante du résidu exact. Les champs direct et adjoint sont calculés dans un milieu de référence où la sonde est décalée par rapport au milieu périodique dans la direction \mathbf{x}_1 . (a) Décalage de $\lambda_{fc}/5$. (b) Décalage de $\lambda_{fc}/2$. (c) Décalage de λ .

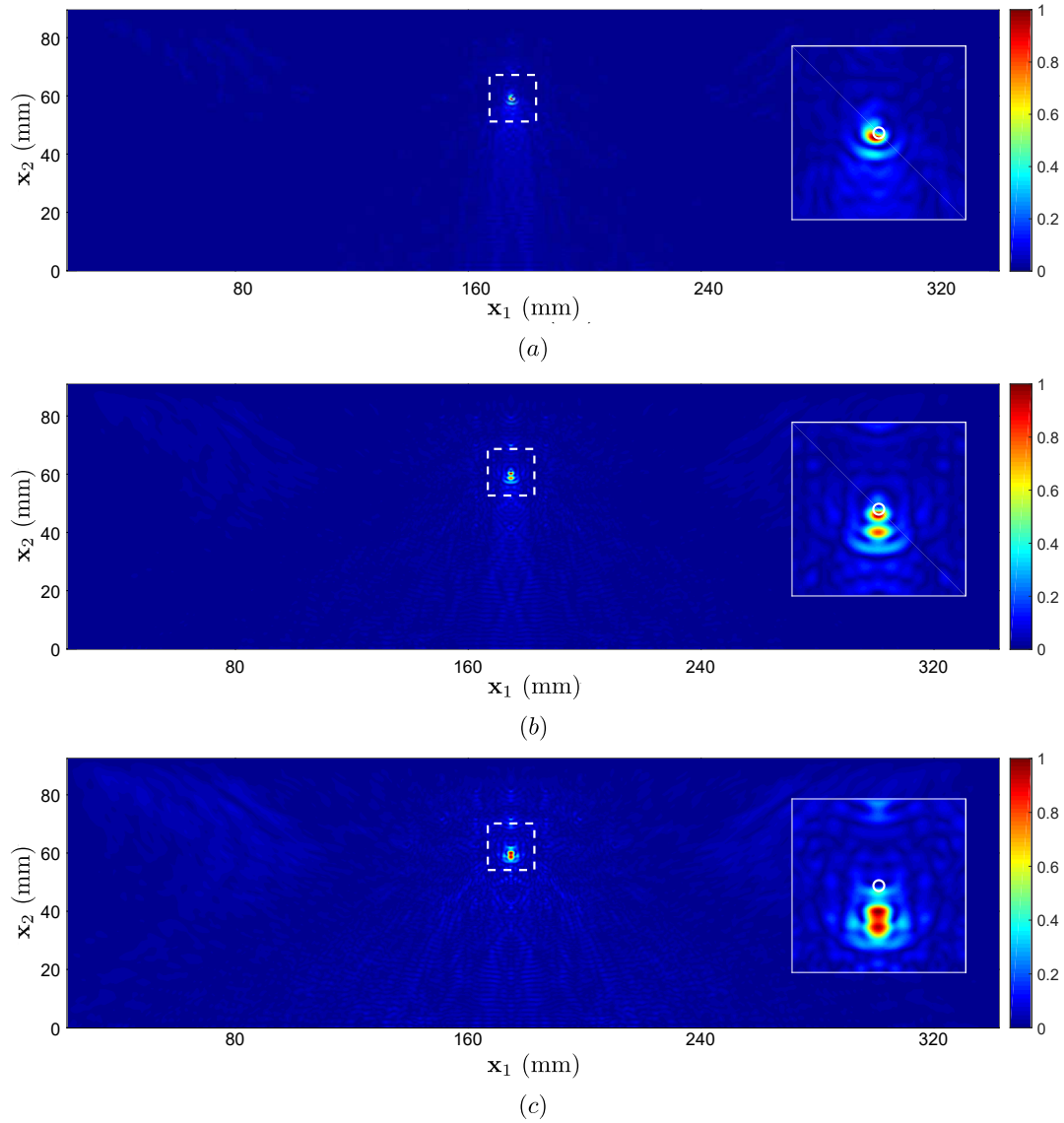


FIGURE 2.7 – IT (avec la fonction d'imagerie 2.62) résultante du résidu exact. Les champs direct et adjoint sont calculés dans un milieu de référence où la sonde est décalée par rapport au milieu périodique dans la direction \mathbf{x}_2 . (a) Décalage de $\lambda_{fc}/5$. (b) Décalage de $\lambda_{fc}/2$. (c) Décalage de λ .

2.5 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre nous avons mis en évidence l'équivalence entre les méthodes d'imagerie classiques et l'IT dans un milieu homogène infini. Nous avons souligné comment cette dernière peut être vue comme une généralisation des méthodes d'imagerie classiques en milieux plus complexes.

En se basant sur des données synthétiques, l'IT a été appliquée pour l'inspection en réflexion d'un réseau périodique de tiges d'acier immergées dans l'eau. A partir d'une seule excitation sous forme d'ondes planes, les résolutions axiale et latérale sont de l'ordre de $1/3\lambda_{fc}$. Nous avons donc pu conclure que l'IT est une méthode efficace pour détecter et localiser des défauts même dans les milieux les plus complexes à condition de bien prendre en compte leur complexité dans la modélisation du milieu de référence.

La méthode nécessite deux mesures effectuées dans les mêmes conditions (dont l'une est une mesure de référence). Nous avons donc proposé d'évaluer la sensibilité de l'IT face à des erreurs de positionnement de la sonde lors de la modélisation du problème direct. Les résultats ont montré qu'une erreur dans la disposition des capteurs engendre des faux positifs, ce qui est très pénalisant pour une méthode de CND. Ces erreurs peuvent être contenues, entre autres, dans la description géométrique du milieu ou dans les constantes d'élasticité.

Afin de contourner la contrainte liée à la connaissance de la position exacte de la sonde, nous avons proposé de calculer le résidu de manière purement "expérimentale", en comparant les réponses du milieu avant et après l'introduction de la perturbation. Cette solution réduit considérablement le nombre d'artéfacts sur l'image et sera adoptée dans toute la suite de ce travail. Le prochain chapitre vise à valider la performance de l'IT, pour détecter et localiser des défauts dans des milieux hétérogènes situés dans des régimes propagatif de localisation faible.

Bibliographie

- [1] B B Guzina and M Bonnet. Topological derivative for the inverse scattering of elastic waves. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 57(2) :161–179, 2004.
- [2] Julien Pommier and Bessem Samet. The topological asymptotic for the Helmholtz equation with Dirichlet condition on the boundary of an arbitrarily shaped Hole. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(3) :899–921, 2004.
- [3] Marc Bonnet and Bojan B. Guzina. Sounding of finite solid bodies by way of topological derivative. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(December 2003) :2344–2373, 2004.
- [4] Marc Bonnet, Ivan Chikichev, and Bojan Guzina. Topological derivative for wave-based identification of penetrable scatterers. In *7e Colloque national en calcul des structures*, pages 449–454, Giens, France., 2005.
- [5] H. B. Kim, J. R. Hertzberg, and R. Shandas. Development and validation of echo PIV. *Experiments in Fluids*, 36(3) :455–462, 2004.
- [6] N Dominguez and V Gibiat. Non-destructive imaging using the time domain topological energy method. *Ultrasonics*, 50(3) :367–372, 2010.
- [7] M Fink. Time reversal of ultrasonic fields. I. Basic principles. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 39(5) :555–566, 1992.
- [8] F Wu, J L Thomas, and M Fink. Time reversal of ultrasonic fields. II. Experimental results. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 39(5) :567–578, 1992.
- [9] Didier Cassereau and Mathias Fink. Time-Reversal of ultrasonic fields-part III : theory of the closed Time-Reversal cavity. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 39 :579–592, 1992.
- [10] N. Dominguez, V. Gibiat, and Y. Esquerre. Time domain topological gradient and time reversal analogy : an inverse method for ultrasonic target detection. *Wave Motion*, 42(1) :31–52, 2005.

- [11] Nicolas Dominguez. *Modélisation de la propagation ultrasonore en milieu complexe - Application au contrôle non destructif et à la caractérisation de la porosité dans les matériaux composite stratifiés*. Thèse, L'Université de Toulouse III - Paul Sabatier, 2006.
- [12] V Gibiat, P Sahuguet, and A Chouippe. Wave guide imaging through time domain topological energy. *Physics Procedia*, 3(2) :523–531, 2010.
- [13] Perrine Sahuguet, Agathe Chouippe, and Vincent Gibiat. Biological tissues imaging with time domain topological energy. *Physics Procedia*, 3(1) :677–683, 2010.
- [14] Emma Lubeigt, Serge Mensah, Sandrine Rakotonarivo, Jean-François Chaix, François Baqué, and Gilles Gobillot. Topological imaging in bounded elastic media. *Ultrasonics*, 76 :145–153, 2017.
- [15] Samuel Rodriguez, Perrine Sahuguet, Vincent Gibiat, and Xavier Jacob. Fast topological imaging. *Ultrasonics*, 52(8) :1010–1018, 2012.
- [16] Samuel Rodriguez, Xavier Jacob, and Vincent Gibiat. Plane wave echo particle image velocimetry. In *Acoustical Society of America*, volume 19, pages 030116–030116, Toulouse, France, 2013.
- [17] S Rodriguez, M Deschamps, M Castaings, and E Ducasse. Guided wave topological imaging of isotropic plates. *Ultrasonics*, 54(7) :1880–1890, 2014.
- [18] S. Rodriguez, M. Veidt, M. Castaings, Eric Ducasse, and M. Deschamps. One channel defect imaging in a reverberating medium. *Applied Physics Letters*, 105(24) :244107, dec 2014.
- [19] J.L. Busse. Three-dimensional imaging using a frequency- domain synthetic aperture focusing technique. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 39(2) :174–179, 1992.
- [20] Martin Spies and Winfried Jager. Synthetic aperture focusing for defect reconstruction in anisotropic media. *Ultrasonics*, 41(2) :125–131, 2003.
- [21] Caroline Holmes, Bruce W Drinkwater, and Paul D Wilcox. Post-processing of the full matrix of ultrasonic transmit – receive array data for non-destructive evaluation. *NDT & E International*, 38 :701–711, 2005.
- [22] Jeong-Beom Ihn and Fu-Kuo Chang. Pitch-catch Active Sensing Methods in Structural Health Monitoring for Aircraft Structures. *Structural Health Monitoring : An International Journal*, 7(1) :5–19, 2008.

Chapitre 3

Imagerie Topologique des Cristaux Phononiques

Ce chapitre a pour vocation :

1. De définir le concept des milieux périodiques et de retracer l'émergence des Cristaux Phononiques (CP) jusqu'à l'invention des métamatériaux acoustiques. A ce titre, nous présentons une synthèse non exhaustive des travaux de recherche antérieurs. Ces références serviront de point d'ancrage relatif aux principales découvertes (théoriques et expérimentales) dans le domaine de la propagation d'ondes acoustiques dans des structures périodiques.
2. D'utiliser des méthodes d'imagerie qualitatives dans le but de détecter et de localiser des défauts de différents types dans un CP. Les méthodes en question sont des dérivées de la méthode d'IT décrite dans le chapitre 2. Les simulations numériques des différentes situations sont détaillées et commentées et dans certain cas validées par des essais expérimentaux.

L'organisation de ce chapitre se présentera de la façon suivante : la première section présentera une étude bibliographique non exhaustive autour de la thématique des CP. La deuxième section portera sur la description du dispositif expérimental exploité au cours de ce travail et sur la démarche adoptée pour reproduire des simulations numériques fidèles aux essais expérimentaux. La troisième section abordera la mise en œuvre numérique et expéri-

mentale des procédures d'inspections du CP étudié dans ce travail. Une conclusion autour des points abordés dans ce chapitre clôturera cette partie du manuscrit.

3.1 Généralités sur les CP et moyens de Contrôle Non Destructif

3.1.1 Généralités et bibliographie

L'intérêt des CP découle de leurs propriétés acoustiques remarquables. Ils sont dotés d'une architecture périodique composée de matériaux aux propriétés diverses. Il est communément admis que le type d'ondes et leurs interactions avec le milieu périodique régissent la conception du CP. Le caractère dispersif des CP est conditionné par ses matériaux constitutifs, l'agencement, et la distance entre ses éléments. Outre la faculté de dispersion des ondes, l'apport majeur des CP est la possibilité de créer des intervalles de fréquences (appelés bandes interdites phononiques) qui agissent comme barrières aux ondes acoustiques. Cette appellation résulte de la comparaison aux bandes interdites des électrons dans les semi-conducteurs ou encore celles des cristaux photoniques.

L'étude de la propagation des ondes en milieu quelconque est menée en grande partie pour cerner leur comportement et analyser la relation dite de dispersion. Cette dernière décrit le lien entre la fréquence f ou la pulsation (avec $\omega = 2\pi f$) et le nombre d'ondes k . Elle dépend intrinsèquement des propriétés du milieu de propagation et de sa structure. La relation de dispersion d'un milieu élastique homogène infini est simple. Elle se présente sous la forme d'une fonction linéaire qui s'exprime par $k = \omega/c$ (avec c constante représentant la vitesse de phase de l'onde dans le milieu). A *contrario*, lorsque le milieu est dispersif la vitesse de phase dépend de la fréquence, de sa structure et de sa composition.

Dans les milieux périodiques la relation de dispersion dépend de la direction de l'espace. Dans ce cas, les courbes de dispersion sont appelées structures de bandes phononiques. La représentation des structures de bandes dans un milieu périodique repose sur le théorème de Bloch. Celui-ci tire profit de la périodicité du CP et postule que la solution de l'équation de propagation dans un tel milieu s'écrit sous la forme d'un produit d'une onde plane par une fonction périodique. Ce théorème permet de restreindre le calcul de la structure de bande en une zone réduite du CP appelée zone de Brillouin. Les CP ouvrent de bandes interdites (définies sur un intervalle de fréquence) où il n'existe pas de lien défini entre la fréquence et le nombre d'ondes au niveau de la structure de bande.

L'un des objectifs des études menées sur les CP visait à comprendre le phénomène des bandes interdites. Une littérature foisonnante s'est donc multipliée sur l'ouverture de bandes interdites via le mécanisme de Bragg dans divers systèmes phononiques. Les premiers à avoir mis en lumière ce phénomène sont les chercheurs S. Tamura et *al.* en 1988 [1]. Leur contribution démontre théoriquement la possibilité de créer une barrière pour les modes longitudinaux et transverses dans des intervalles de fréquences bien déterminés. Le CP imaginé par les auteurs réfléchit la totalité de l'onde acoustique. Les ondes transmises dans le CP sont exclusivement évanessantes et fortement atténuées dans ces intervalles. Parallèlement, l'étude des ondes de volume a été menée dans des structures phononiques périodiques dans les directions \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 (les inclusions étant infiniment longues dans la direction de \mathbf{x}_3). Ces inclusions de forme cylindrique ont d'abord été étudiées en 1993 par M. S. Kushwaha et al [2, 3]. Ils ont montré l'existence d'une bande interdite pour les ondes acoustiques dans un CP bidimensionnel. Puis le corps de chercheurs s'est intéressé à différents types de CP à l'exemple des inclusions solides dans une matrice solide [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10], ou encore d'inclusions solides dans une matrice fluide [11, 12].

Pour donner suite à cela, d'autres travaux ont émergé sur la propagation des ondes de volume dans des CP tridimensionnels [13, 14]. Le comportement des ondes de Lamb dans un milieu élastique périodique a été appréhendé dans des plaques bornées [4, 15, 16]. M. M. Sigalas et E. N. Economou [4] ont montré en 1994 qu'en jouant sur l'épaisseur de la plaque, ils pouvaient créer une bande interdite complète pour les ondes de Lamb. Cela a suscité de nouvelles études sur les arrangements périodiques de cylindres disposés sur une plaque [17, 18, 19].

Compte tenu de la progression des outils de calcul numérique, les 30 dernières années témoignent du progrès qu'a connu l'étude théorique des CP, creusant l'écart avec les études expérimentales faute de moyens technologiques. En 1998, M. M. Sigalas [5, 6] met en place un premier guide d'ondes linéaire pour les ondes élastiques utilisant un CP [6]. Un guide d'ondes phononique est un CP avec des défauts de périodicité introduits pour ouvrir un espace continu entre les motifs de périodicité. Il a montré qu'un tel défaut permettait de générer des ondes localisées dans une bande normalement interdite. Ces bandes interdites phononiques ont par la suite été exploitées afin de confiner des ondes élastiques ou de les guider dans des structures phononiques présentant un défaut ponctuel, linéaire ou coudé [7, 8, 9, 10, 18]. Un autre apport, concerne celui de C. Qui et *al.* [11] qui ont montré qu'à certaines fréquences les CP pouvaient présenter des directions préférentielles de propagation des ondes acoustiques.

Les années 2000 laissent place à la création de nouvelles structures phononiques artificielles dotées de comportements physiques inhabituels. Elles sont conçues pour des études sur la propagation et la diffusion d'ondes

acoustiques dans une structure périodique où la longueur d'onde est grande comparée au motif de périodicité. C'est le cas notamment avec la création du Cristal Phononique à Résonance Locale (CPRL) introduit par Z. Liu et *al.* [13] en 2000. Les CPRL ont la capacité d'ouvrir des bandes interdites dans le régime sonore en utilisant une périodicité largement inférieure aux longueurs d'ondes qui s'y propagent. Ces CP intègrent alors la catégorie des métamatériaux acoustiques qui se comportent comme des milieux ayant une constante élastique effective négative. Ces matériaux ont par la suite motivé plusieurs études [17, 14, 20] mettant à jour de nouvelles découvertes, comme le phénomène de réfraction négative des ondes acoustiques par un CP [21, 22, 12], initialement mis en évidence en 2000 par J. B. Pendry [23].

Pour résumer, la plupart des études menées sur les CP ont abordé les interactions des ondes de volume, de surface ou de Lamb avec la périodicité des structures phononiques. Cependant, si les études menées sur les CP et les métamatériaux acoustiques ont été majoritairement théoriques, des réalisations expérimentales sont également menées dans la perspective de corroborer la théorie et de développer d'éventuelles utilisations des CP au regard de leurs propriétés.

Depuis la mise en évidence de la propriété de barrière d'onde acoustique que créent les CP en 1988, les chercheurs ont exploré les possibilités de réalisation de guides d'ondes acoustiques performants en exploitant les bandes interdites. Nous pouvons citer parmi les plus mentionnés dans la littérature le guide d'ondes linéaire et le guide d'ondes coudé. Dans l'article [24], une démarche expérimentale met en évidence le guidage des ondes acoustiques dans un CP carré présentant une bande interdite dans une direction bien déterminée. L'introduction d'un défaut linéaire (suppression d'une rangée d'éléments) dans la même direction que la bande interdite permet la transmission de l'onde à travers le défaut pour des modes de propagation dont les fréquences sont dans la bande interdite.

Par ailleurs, A. Khelif et *al.* [8, 25, 26] ont pu construire des guides d'ondes capables de confiner l'énergie acoustique (à travers un défaut linéaire ou coudé dans le CP) avec un minimum de perte à cause de l'onde transmise. Ce dispositif a pu être réalisé en utilisant un CP constitué d'un arrangement carré de cylindres en acier immergés dans l'eau. L'introduction d'un défaut ponctuel (en enlevant un élément de périodicité) crée des états d'énergie très localisés dans la bande interdite. Ils ont également pu montrer que l'introduction d'un ou plusieurs défauts au guide d'onde linéaire peut altérer voire annuler la propagation de l'onde, et ce à cause du couplage entre les modes guidés et les modes de résonances localisés produits par le(s) défaut(s) ponctuel(s) [8, 25, 26].

X. Hu et C. T. Chan [27] proposent une lentille phononique qui focalise les vagues afin de convertir leur énergie mécanique en énergie électrique. Il est donc possible d’imaginer des systèmes phononiques exploitant le mécanisme de Bragg pour atténuer les ondes sismiques ou les vagues de la mer en prévention de tsunamis. Un autre domaine d’applications est envisageable au niveau microscopique, notamment en télécommunication, où les domaines de fréquences des bandes interdites s’apprêtent mieux à ces technologies, en particulier grâce à l’avancée de la technologie en matière de micro et de nano fabrication où les CP sont facilement intégrables à des dispositifs de différentes natures. En résumé, les CP sont des matériaux artificiels qui offrent des solutions très convoitées dans l’ingénierie. Les applications des CP couvrent le domaine des hautes fréquences tels que les filtres et les capteurs, ainsi que celui des basses fréquences à l’image des systèmes d’isolation acoustique ou des systèmes anti-sismiques.

3.1.2 Imagerie Topologique Standard et Imagerie Topologique Hybride pour le Contrôle Non Destructif des CP

Dans certaines situations, l’introduction de(s) défaut(s) dans un milieu périodique peut changer ses propriétés. Ce type de démarche est nécessaire pour avoir des modes autorisés dans les bandes interdites afin de concevoir des filtres ou des guides d’ondes. Dans cette étude nous visons une autre classe de problèmes. En effet, suite à une fabrication défectueuse du matériau ou à la fatigue durant son utilisation, le milieu périodique peut contenir des perturbations locales sous forme de ruptures géométriques ou de fissures. Le CND peut donc présenter une solution pour vérifier l’existence ou non de tels défauts. Mathématiquement, cette démarche se traduit par un problème inverse qui peut être résolu par les méthodes abordées dans les deux premiers chapitres. Le but de ce présent chapitre est de détecter et de localiser des perturbations locales dans un CP (considéré infiniment long dans la direction \mathbf{x}_3). En réalité, les CP ne sont pas infiniment périodiques et longs, mais leurs dimensions sont choisies afin de répondre aux hypothèses des problèmes d’élasticité plane et du dispositif expérimental utilisé.

Le milieu étudié dans ce chapitre est formé par un réseau périodique de 275 tiges (25 colonnes et 11 rangées) d’acier de 1 mm de diamètre et de 25 cm de longueur. L’espace inter-tiges est de 11.9 mm dans la direction \mathbf{x}_1 et de 9.6 mm dans la direction \mathbf{x}_2 . D’après ces données, il est facile de déduire que le réseau de tiges est si dilué dans l’eau (concentration surfacique de $C \simeq 0.7\%$) que la dispersion dans le CP est faible au regard de la bande de fréquences utilisée dans ce travail. Pour espérer mettre en évidence des bandes interdites dans un tel CP, il faut que la concentration surfacique du réseau de tiges soit de l’ordre de 40 %. Le cadre de cette étude

est donc très loin des situations mettant en jeux des bandes interdites pour l'intervalle de fréquence utilisé. La configuration de l'inspection du milieu est une mesure en réflexion induite par un front d'onde plan généré par les 128 transducteurs piézoélectriques d'une barrette ultrasonore. Le CP est placé à quelques longueurs d'ondes de la sonde afin de récupérer le maximum d'informations face à l'insonification. Les 128 signaux sont soit simulés (pour les expériences numériques) soit numérisés par le système de mesures multi-voies LECOEUR ELECTRONIQUE¹ (pour les expériences réelles).

Le premier apport de ce chapitre est d'utiliser des méthodes d'imagerie adaptées au CND des CP. L'autre apport est de comparer les performances de ces méthodes en fonction de la nature du défaut dans le CP. La première méthode d'imagerie est l'Imagerie Topologique (IT). Comme évoqué dans le chapitre 2, elle nécessite la modélisation du milieu de référence qui intervient lors des trois étapes suivantes : le calcul du problème direct, le calcul du résidu et le calcul du problème adjoint. Du fait de l'hétérogénéité du CP inspecté dans ce chapitre, il est évident que le résultat de l'imagerie du CP dépend du milieu de référence utilisé pour la formation de l'image. D'une part, nous avons l'IT Homogène qui ne prend pas en compte l'hétérogénéité du milieu réel dans la modélisation du milieu de référence. Ainsi, le milieu servant à calculer le problème direct, le résidu et le problème adjoint, est un milieu homogène semi-infini. D'autre part, nous avons l'IT Hétérogène qui prend en compte l'hétérogénéité du milieu réel dans la modélisation du milieu de référence. La deuxième méthode est l'IT Hybride qui propose d'utiliser deux milieux de références différents. Le premier est un milieu de référence hétérogène qui sert à mesurer le résidu afin d'obtenir la signature des défauts. Tandis que le second milieu de référence est un milieu homogène dans lequel les problèmes direct et adjoint sont calculés.

Pour comprendre le sens de l'IT Hybride, il faut rappeler la définition formelle de l'IT. L'IT exige le calcul des résidus à partir des signaux expérimentaux et numériques obtenus à partir du problème direct. Dans les expériences par ultrasons, l'utilisation d'un réseau de transducteurs piézoélectriques implique la mesure de signaux électriques assez compliqués à étalonner. En effet, ces signaux peuvent difficilement être comparés à des signaux numériques sans l'étalonnage de l'ensemble du dispositif expérimental en accord avec la modélisation. De plus, l'IT Hétérogène est extrêmement sensible à la position du réseau de transducteurs ultrasonores par rapport au CP. Dans un régime propagatif à faible désordre, il a été démontré (cf. section 4 du chapitre 2) qu'une faible erreur de l'emplacement de la sonde par rapport au milieu périodique, et ce dans les deux directions \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 , était suffisante pour créer

1. <http://www.lecoeur-electronique.net>. Consulté le 20/12/2018.


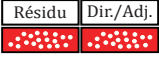

	Milieu de référence		Fonctions d'imageries	Légende	
	Pour le résidu	Pour les calculs numériques			
IT Homogène	homogène	homogène	$\int P_d(\mathbf{x}, -t)P_a(\mathbf{x}, t)dt$		
IT Hétérogène	hétérogène	hétérogène	$\frac{1}{4} \int \text{tr}\sigma_{iso,d}(\mathbf{x}, -t)\text{tr}\sigma_{iso,a}(\mathbf{x}, t)dt$		
IT Hybride	hétérogène	homogène	$\int P_d(\mathbf{x}, -t)P_a(\mathbf{x}, t)dt$		

TABLE 3.1 – Ce tableau décrit le protocole de la formation de l'image en fonction de la méthode d'imagerie. Il présente le milieu de référence utilisé pour le calcul du résidu et des champs direct et adjoint, ainsi que la fonction d'imagerie et la légende correspondante.

plusieurs artéfacts sur l'image obtenue par l'IT Hétérogène. Afin de contourner ces deux exigences (étalonnage du signal électrique et emplacement de la sonde par rapport au milieu périodique), nous proposons dans l'IT Hybride une solution qui consiste à remplacer le milieu de référence virtuel par un milieu de référence expérimental pour le calcul du résidu. Ainsi, le résidu obtenu est purement expérimental, et compare les signaux expérimentaux issus de la structure non perturbée (milieu de référence expérimental) et ceux issus de la structure après perturbation (milieu réel).

Intuitivement, ce dernier contient la signature du défaut et son interaction avec les éléments constituant le milieu périodique. L'IT Hybride exploite le résidu purement expérimental comme source du problème adjoint calculé au même titre que le problème direct dans un milieu de référence homogène. Dans un milieu périodique très dilué (concentration surfacique des tiges de $C \simeq 0.7\%$) cela semble être une hypothèse acceptable. En effet, dans un milieu hétérogène faiblement concentré, l'onde balistique associée au défaut dans le CP ne risque pas d'être noyée dans la signature des interactions multiples du défaut avec le reste du milieu.

Pour résumer, l'image produite par l'IT Hybride repose sur deux milieux de référence différents : un milieu hétérogène pour le calcul des résidus et un milieu homogène pour le calcul des problèmes direct et adjoint. Cette méthode présente certaines similitudes avec celle utilisée dans les milieux aléatoires dans [28], où le résidu est obtenu de manière purement expérimentale et où l'hypothèse de milieu homogène est faite pour la construction de l'image. Le tableau 3.1 résume le contenu de ce paragraphe en précisant le milieu de référence et la fonction d'imagerie employés pour chaque méthode.

3.2 Dispositif expérimental et modélisation de l'expérience

3.2.1 Description du dispositif expérimental

La figure 3.1 est une illustration du dispositif expérimental utilisé pour l'inspection du CP formé par les tiges d'acier. Les tiges y sont maintenues à leurs extrémités grâce à deux fines plaques d'acier percées. Chacune d'entre elle est prise en étau à l'aide de deux plaques en PVC pour donner plus de rigidité et de stabilité aux plaques d'acier. L'ensemble des éléments précédemment décrits forme alors un cube suspendu grâce à un bras coulissant appartenant à une structure en aluminium que nous avons fabriquée pour l'expérience. La figure 3.2 représente un schéma simplifié du cube contenant le CP.

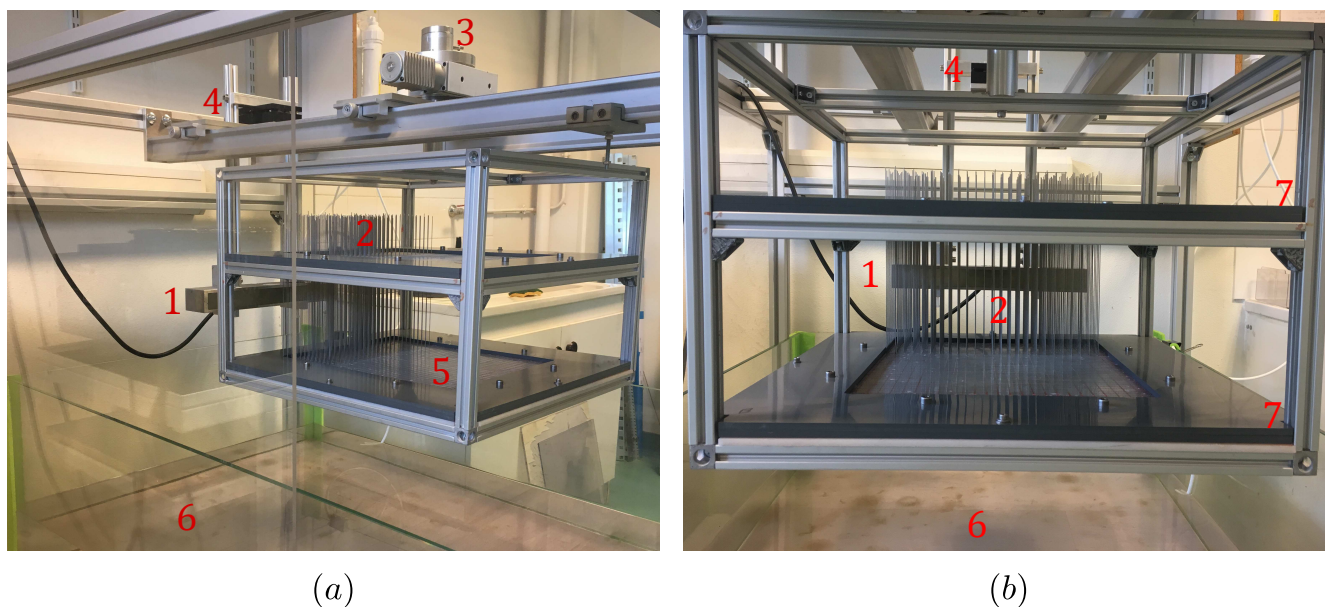


FIGURE 3.1 – Le dispositif expérimental utilisé pour l'inspection ultrasonore du CP. (a) Vue de profil. (b) Vue d'en face. (1) La barrette ultrasonore Imasonic. (2) Le réseau de tiges d'acier. (3) Le goniomètre. (4) Le contrôleur de l'orientation de la barrette. (5) La plaque d'acier trouée. (6) La cuve. (7) Les plaques de PVC.

Parallèlement au bras coulissant, il existe un autre support équipé d'un goniomètre qui sert à porter la barrette ultrasonore multi-éléments. Ce goniomètre est utilisé pour jouer sur la déviation horizontale et verticale de la barrette par rapport au cube, et ainsi pouvoir sonder le milieu sous différents angles en cas de besoin. En dessous de la structure porteuse du cube et de la barrette se trouve une table verticalement coulissante qui porte un bassin

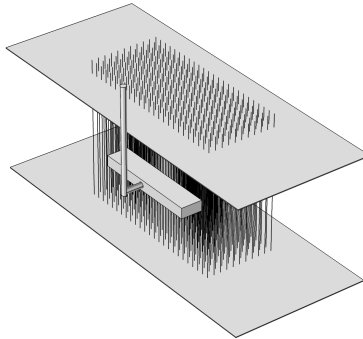


FIGURE 3.2 – Schéma simplifié du réseau périodique de tiges d'acier et de la barrette ultrasonore utilisée pour son inspection.

rempli d'eau. Il est donc possible d'y plonger le cube et la barrette ultrasonore pour pouvoir effectuer diverses expériences de propagation d'ondes ultrasonores.

Pour sonder le milieu dans une configuration en réflexion, une barrette ultrasonore multi-éléments Imasonic² est utilisée. Cette barrette ultrasonore est d'une forme parallélépipédique, vêtue d'une couche d'acier inoxydable. Ses dimensions sont de 350 mm en longueur, de 42 mm en largeur et de 60 mm en hauteur. Elle est munie d'un câble de sortie centré sur le dessus avec presse étoupe. Pour ce qui est des caractéristiques acoustiques, elle est composée de 128 transducteurs piézo-électriques. Le pas élémentaire est de 2.5 mm et l'espace inter-éléments est de 0.5 mm, ce qui fait une longueur active totale de 319.5 mm. La fréquence centrale est de $500 \text{ kHz} \pm 10$ et l'adaptation acoustique (en plexiglas) a une valeur de 3.2 MRayl.

La barrette ultrasonore est connectée au système électronique de mesure multi-voies : LECOEUR ELECTRONIQUE. Cette machine contient 128 cartes électroniques permettant de contrôler indépendamment les transducteurs de la sonde. Le système de mesure multi-voies est pilotable à l'aide d'une interface programmée sur Matlab. Ainsi, il est possible de : définir le signal électrique d'excitation et d'utiliser l'ensemble (ou un nombre restreint) des transducteurs de la sonde pour l'émission et la réception des signaux. De plus, il est possible d'appliquer des lois de retard sur l'émission et la réception des signaux pour focaliser en un point en particulier, de faire varier le gain

2. <http://www.imasonic.fr/Company/TeamF.php>. Consulté le 20/12/2018.

en réception du signal électrique, d'effectuer des moyennes d'acquisition et bien d'autres fonctionnalités. Le signal électrique d'émission vient exciter le piézo qui va à son tour générer une onde dans le matériau. Se pose alors la question de l'identification du signal réellement généré par le système d'émission.

3.2.2 Modélisation fidèle de l'expérience

Dans le but de construire un champ direct fidèle à l'expérience physique il est important, d'une part, de modéliser un milieu de référence qui ressemble au maximum au milieu réel (en absence de défaut) en termes de propriétés physiques et géométriques; et d'autre part, d'identifier le signal d'excitation à la sortie de chaque transducteur piézoélectrique de la sonde. Dans une expérience d'inspection ultrasonore il est tout à fait possible de déterminer le signal électrique généré par le système électronique de mesure multi-voies. En pratique, il se trouve que celui-ci n'est pas le même à la sortie des éléments de la barrette. En effet, à cause de leurs légères différences physiques et géométriques, les transducteurs piézoélectriques d'une sonde ultrasonore ne sont pas parfaitement identiques et ont leur propre fonction de transfert. Par conséquent, l'identification du signal d'excitation ne peut se faire à partir du signal électrique généré par le système de mesure multi-voies, mais à travers le champ de pression émis au niveau de la surface active de la sonde.

Afin d'identifier le signal d'excitation de l'expérience, la démarche relatée dans ce paragraphe vise à faire correspondre les signaux calculés numériquement à ceux obtenus via l'expérience physique. Dans un premier temps, on mesure la réponse expérimentale du CP à une seule insonification en onde plane générée par tous les éléments de la sonde. Ainsi, nous obtenons la réponse expérimentale sous forme d'une matrice de 128 lignes (nombre d'éléments de la sonde) et 8000 colonnes (nombre d'échantillons). La représentation de la réponse expérimentale dans le domaine temporel fait apparaître le signal d'excitation saturé et le paquet d'ondes correspondant à la réponse du CP. L'annulation des premiers instants de la réponse expérimentale fait disparaître la zone morte du signal et ne garde que le champ de pression diffracté par le CP. Dans un second temps, nous effectuons une simulation numérique (dans le domaine fréquentiel) qui reproduit au mieux l'expérience physique dans une gamme de fréquence de [0.2-0,8] MHz. Notons que le temps de simulation doit être assez long pour prendre en compte les interactions multiples entre les hétérogénéités du milieu. Dans le cas présent le pas fréquentiel est de 400 Hz ce qui correspond à un temps de simulation de 2500 μs .

La simulation numérique fournit une matrice de transfert $H(\omega)$ définie sur une grille de points dans le plan $(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ pour chaque pas de fréquence. Ainsi, la matrice de transfert $H(\omega)$ obtenue est de 128 lignes et de 1501 colonnes (nombre de pas de fréquence). Cette dernière est ensuite convoluée à un signal d'excitation synthétique. La zone morte qui correspond au signal d'excitation synthétique à l'émission est ensuite annulée. Finalement, une transformée de Fourier du résultat permet de trouver la matrice de transfert modifiée $H_{mod}(\omega)$. La matrice $H_{mod}(\omega)$ correspond à la FFT de la réponse impulsionnelle entre l'émetteur et le récepteur (ici le même transducteur) dont les premiers instants ont été mis à zéro. Le calcul effectué à travers la simulation numérique correspond au produit $H_{mod}(\omega) \cdot S_{inc}(\omega)$. En l'identifiant à l'expérience physique $M_{exp}(\omega)$, on obtient :

$$S_{inc}(\omega) = \frac{M_{exp}(\omega)}{H_{mod}(\omega)} \quad (3.1)$$

Une fois le signal d'excitation expérimental obtenu, une transformée de Fourier inverse permet de le retrouver dans le domaine temporel. Il correspond au signal de pression réellement généré par la barrette. Ce dernier sera utilisé dans tous les essais expérimentaux effectués dans ce travail. En toute rigueur, la démarche décrite plus haut doit être réalisée pour chaque transducteur de la barrette ultrasonore. Cependant, nous avons choisi de généraliser le résultat obtenu avec l'élément 64 de la sonde à tout les autres éléments. Cela a permis d'obtenir des résultats satisfaisants de notre point de vue. La prochaine section est dédiée à évaluer les résultats numériques et expérimentaux obtenus par chacune des méthodes précédemment citées.

3.3 Mises en œuvre numérique et expérimentale des méthodes d'imagerie pour la localisation de défauts ponctuels ou étendus

3.3.1 Tige manquante

Cette sous-section est dédiée à la mise en œuvre des simulations numériques et expériences physiques visant à identifier et à localiser un défaut ponctuel dans le CP décrit plus haut. Notons que le présent cas de figure est la seule configuration appuyée par des essais expérimentaux. Les autres situations étudiées dans ce chapitre sont uniquement basées sur des simulations numériques. Un autre intérêt de cette étude est d'évaluer les performances

de chaque méthode (IT Homogène, IT Hétérogène, et IT Hybride) pour détecter et localiser une perturbation locale dans un milieu périodique borné immergé dans une matrice fluide semi-infinie. La perturbation introduite dans ce milieu consiste à supprimer volontairement l'une des inclusions du réseau périodique. L'inclusion éliminée est localisée au niveau de la 13^{ème} colonne de la 10^{ème} rangée du réseau périodique. Le défaut est donc défini comme étant l'absence de cette tige dans ce dernier.

La première étape du protocole expérimental consiste à bien positionner la barrette ultrasonore par rapport au réseau de tiges. Afin de récupérer un maximum d'informations face à une excitation donnée, il est conseillé de placer la sonde dans un champ proche du réseau périodique. Dans cette étude, nous avons constaté qu'une distance de 4 cm ($\simeq 13.5\lambda_{fc}$) entre la surface active de la sonde et la première rangée du réseau périodique présentait une distance optimale. Parallèlement, et afin de faciliter la modélisation de l'expérience physique dans le problème direct, nous avons choisi de centrer la barrette ultrasonore par rapport au CP. Si la sonde est bien centrée et parallèle à la 1^{ère} rangée, les signaux mesurés par le transducteur 1 et le transducteur 128 coïncident parfaitement, car ils parcourent le même trajet d'aller-retour entre ces transducteurs et le CP.

La deuxième étape du protocole est d'effectuer des acquisitions expérimentales nécessaires aux calculs des résidus. La barrette ultrasonore sonde le milieu avec une onde plane générée par l'excitation simultanée des transducteurs de la barrette avec un signal électrique sinusoïdal de 4 périodes à une fréquence centrale de 542 kHz. La première acquisition consiste à mesurer la réponse du milieu sain (CP parfait). La deuxième acquisition est effectuée après la suppression de la tige localisée au niveau de la 13^{ème} colonne de la 10^{ème} rangée du CP. En plus de ces acquisitions, une mesure de la température de l'eau est effectuée pour pouvoir évaluer la célérité des ondes longitudinales au moment de l'expérience. Ainsi, la température relevée est de 19.8°C, ce qui induit une célérité de 1477 m/s dans l'eau et une masse volumique ρ d'environ 998 kg/m³.

La réponse ultrasonore du milieu périodique plongé dans l'eau est complexe puisqu'elle mêle à la fois la contribution de diffusion simple de chaque tige et la contribution de diffusion multiple. La figure 3.3 est une représentation de la réponse temporelle mesurée expérimentalement au niveau de l'élément 64 de la sonde. Nous constatons que la première partie du signal est saturée à l'émission (200 V à l'émission contre quelques mV à la réception); d'où l'intérêt de mesurer le signal d'émission à la sortie des transducteurs (cf. paragraphe 3.2.2 du chapitre 3). Le deuxième paquet d'ondes sur la figure est associé au temps de vol du chemin le plus court entre la sonde et la première rangée du CP, respectant le principe de Fermat. Cette arrivée directe précède un long signal (la coda) issu de la

superposition des ondes partielles (provenant de toutes les directions) qui peuvent avoir parcourues une distance très grande devant la distance source-diffuseur. Plus l'onde arrive tard, plus elle a subi de diffusions et plus elle a exploré le milieu.

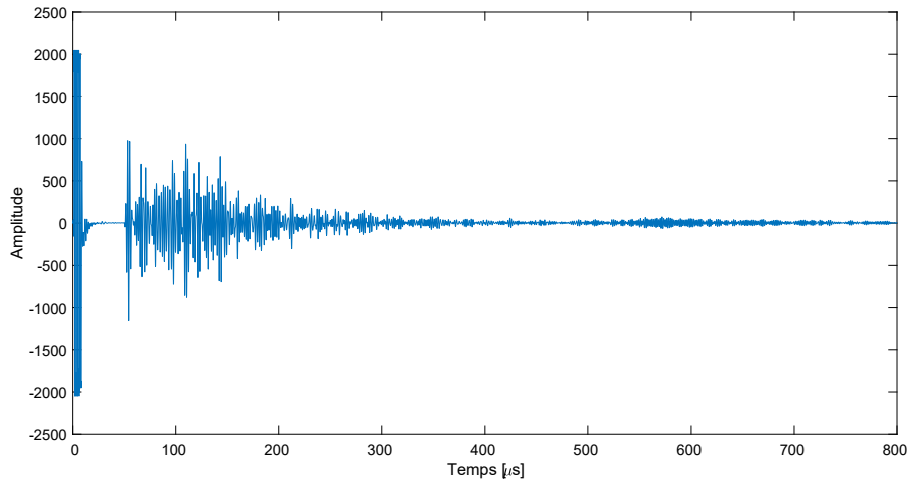


FIGURE 3.3 – Représentation de la réponse expérimentale du CP (mesurée par le transducteur 64 de la barrette ultrasonore) en fonction du temps. Sur cette figure on peut identifier l'arrivée des ondes balistiques de la première rangée du CP vers $54 \mu s$. Dans cet exemple la coda commence vers $370 \mu s$.

Tige manquante : Imagerie Topologique Homogène

La modélisation du milieu de référence L'IT Homogène construit l'image du milieu d'étude sans se soucier de son hétérogénéité ou de sa complexité. En effet, la modélisation du milieu de référence repose uniquement sur la connaissance des propriétés élastiques de la matrice hôte du CP. Au moment de l'expérience, la température du fluide était de $19.8^\circ C$. Ceci implique une célérité des ondes longitudinales dans l'eau de $c_{eau} = 1477 \text{ m/s}$ et une masse volumique de $\rho_{eau} \simeq 998 \text{ kg/m}^3$. De plus, la position de la barrette ultrasonore dans le milieu de référence importe peu. En revanche, il est primordial de respecter le même échantillonnage spatial de la sonde, et de tenir compte de la largeur de sa surface active, afin d'engendrer le même champ de pression que l'expérience réelle.

Le problème direct Le problème direct est calculé dans le milieu de référence homogène décrit plus haut. L'onde plane générée par la sonde se propage dans le milieu de référence jusqu'à ce qu'elle disparaisse entièrement à cause

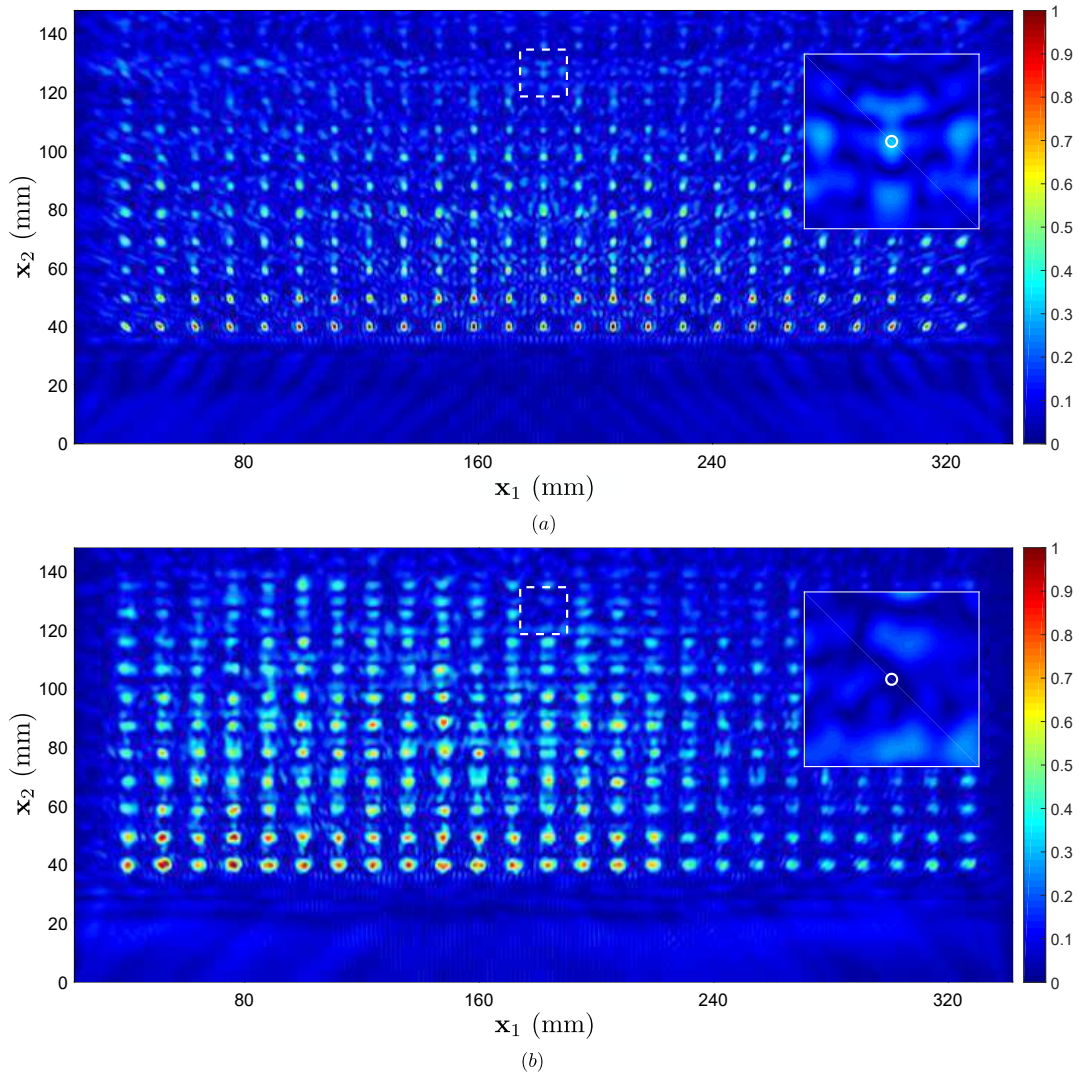
des régions absorbantes. La représentation du signal mesuré en temps (après convolution de la matrice de transfert avec le signal d'excitation expérimental) par n'importe quel élément de la sonde fait seulement apparaître le signal d'excitation.

Le problème adjoint Tout comme le problème direct, le problème adjoint est calculé dans le milieu de référence homogène. Dans le cadre de l'IT Homogène la source du problème adjoint peut être obtenue en mettant à zéro le début du signal associé à la zone temporelle morte afin d'éviter la présence de la saturation sur l'image de réflectivité du milieu.

Formation de l'image Les calculs numériques des problèmes direct et adjoint dans un milieu homogène semi-infini impliquent que la fonction d'imagerie se réduit à la première équation dans le tableau 3.1. L'image est donc formée à partir de la somme cumulée du produit des champs de pression direct et adjoint au cours du temps. Le champ adjoint concentre le champ de pression diffracté par chaque tige à sa position dans le milieu réel, tandis que le champ direct lu à l'envers, croise le champ adjoint au point de focalisation de ce dernier.

La figure 3.4 montre les résultats des simulations numériques 3.4-a et des essais expérimentaux 3.4-b de ce cas de figure. Étant donné que le résidu contient le champ de pression diffracté par le CP perturbé, les taches lumineuses sur l'image indiquent la présence des tiges. Il est donc légitime de penser qu'au niveau de la 13^{ème} colonne de la 10^{ème} rangée la tache serait absente. En réalité, cette pensée n'est pas corroborée par l'observation des résultats numériques et expérimentaux. En effet, au fur et à mesure que l'onde incidente pénètre en profondeur dans le CP, elle subit de plus en plus de réflexions multiples, perdant ainsi sa direction principale. Puisque le milieu de référence ne tient pas compte de l'hétérogénéité du milieu réel, les problèmes direct et adjoint ne tirent pas profit de la richesse de l'information contenue dans le résidu pour concentrer l'énergie au bon endroit. De plus, les taches sur l'image obtenue par essais expérimentaux sont plus larges que celles de l'image obtenue par simulations numériques. En effet, le signal d'excitation dans l'expérience physique est de 4 périodes tandis que le signal utilisé pour la convolution de la matrice de transfert des simulations numériques est de 3 périodes. Concernant le résultat expérimental, les taches présentent une forte variation d'intensité (même au niveau d'une même rangée), ce qui est en très grande partie dû aux fluctuations de gain du système de mesure multi-voies qui souffre d'une distribution de gain non uniforme sur les cartes électroniques.

Malgré l'échec constaté à travers ces résultats, l'IT Homogène peut se révéler intéressante pour l'imagerie des



Résidu	Dir./Adj.

FIGURE 3.4 – IT Homogène du CP - absence d'une seule tige enfouie en profondeur du réseau périodique. (a) IT Homogène par approche numérique. (b) IT Homogène par approche expérimentale.

milieux hétérogènes dont le régime de transport de l'énergie est un régime propagatif à faible désordre. Pour finir, il aurait été tout à fait possible de calculer les solutions du problème direct et adjoint de ce cas avec une méthode semi-analytique. Une telle démarche présenterait un gain de temps conséquent (quelques secondes pour le calcul des problèmes direct et adjoint) car la solution de la propagation d'ondes dans un milieu homogène est parfaitement

connue.

Tige manquante : Imagerie Topologique dans un milieu hétérogène

La modélisation du milieu de référence Le réseau de tiges est agencé en 25 colonnes et 11 rangées de telle sorte que l'espace inter-tiges est de 11.9 mm dans la direction \mathbf{x}_1 et de 9.6 mm dans la direction \mathbf{x}_2 . Les propriétés mécaniques de l'acier sont de : $E_{acier} = 279.10^9$ Pa pour le module de Young, $\rho_{acier} = 7900$ kg/m³ pour la densité, $c_{acier} = 5942.8$ m/s pour la célérité des ondes longitudinales, et de $\nu_{acier} = 0.33$ pour le coefficient de poisson. Les propriétés élastiques de l'acier sont quasiment insensibles aux faibles variations de température, par conséquent leurs valeurs sont les mêmes pour les simulations purement numériques ou les essais expérimentaux. En revanche, le milieu périodique est immergé dans l'eau dont la célérité dépend de la température. Lors des essais expérimentaux, la température relevée est de 19.8°C ce qui correspond à une masse volumique d'environ 998 kg/m³ et une célérité de 1477 m/s.

Le problème direct A l'inverse de l'IT Homogène, l'IT Hétérogène tient compte de la complexité du milieu réel dans la simulation du milieu de référence. Elle nécessite donc une bonne évaluation de la célérité des ondes dans l'eau, la connaissance des propriétés physiques et mécaniques des tiges d'acier, ainsi que leur disposition dans le milieu. L'IT Hétérogène est extrêmement sensible à la position de la sonde par rapport au milieu périodique (cf section 4 du chapitre 2). Une petite erreur d'évaluation de la position de la sonde dans la modélisation du milieu de référence est susceptible de dégrader fortement la qualité de l'image et de donner lieu à des artefacts, en particulier pour un milieu aussi diffusant que le CP étudié dans ce paragraphe. Afin de simplifier la modélisation du milieu de référence la sonde est centrée par rapport au milieu périodique en plus d'être parallèle à sa première rangée. Pour le problème direct relatif aux essais expérimentaux, le signal d'excitation utilisé est le même que celui défini dans le paragraphe 3.2.2.

Le problème adjoint Pour le calcul du résidu deux acquisitions sont effectuées, l'une sur le CP parfaitement périodique et l'autre sur le CP perturbé par la suppression de la tige localisée à la 13^{ème} colonne de la 10^{ème} rangée. La figure 3.5 montre le résidu normalisé mesuré à partir des réponses expérimentales des deux états du CP. Le front d'onde sous forme d'arc sur l'image représente le front d'onde balistique relatif à la tige manquante dans le milieu réel. Les oscillations derrière le front d'onde balistique résultent des interactions multiples manquantes du défaut

avec le reste des éléments constitutifs du réseau périodique. Ce résidu est retourné temporellement avant d'être utilisé comme source du problème adjoint dont la solution est calculée dans le même milieu de référence que celui du problème direct.

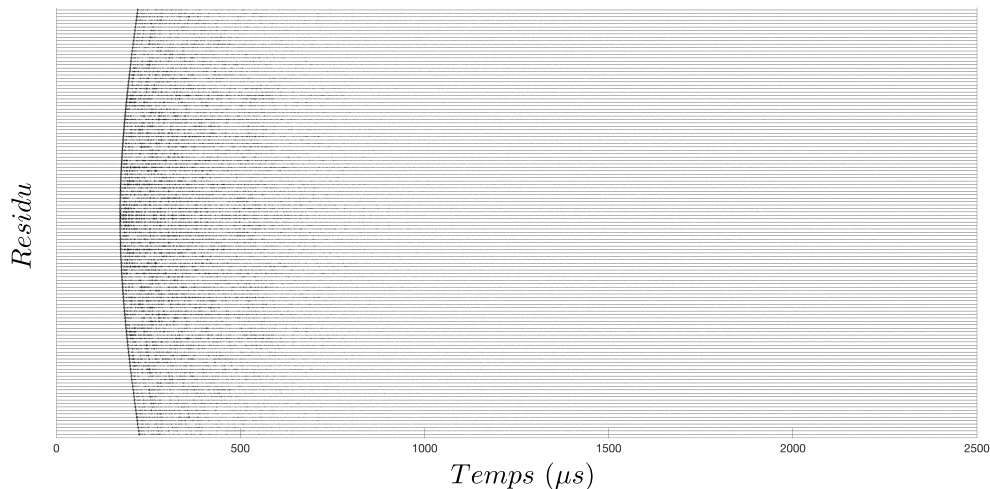
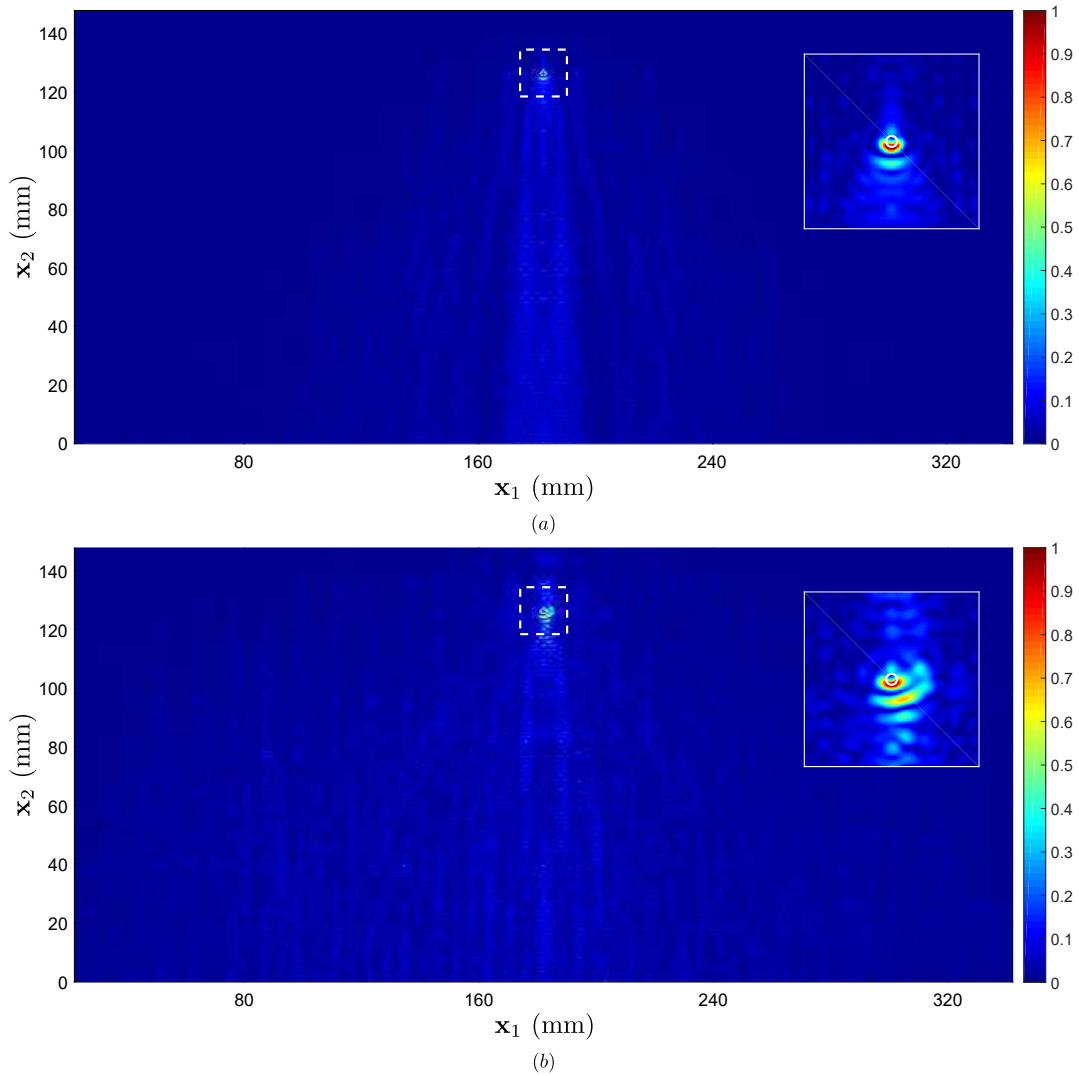


FIGURE 3.5 – Représentation temporelle du résidu expérimental normalisé - absence d'une tige dans le CP.

Formation de l'image Dans le cas présent, le problème de propagation d'ondes est posé dans un environnement qui présente un couplage entre le milieu solide et le milieu fluide. Dans le but de représenter le défaut dans le milieu périodique en utilisant une seule image, nous nous référons à la fonction d'imagerie affectée à ce cas de figure dans le tableau 3.1. La figure 3.6 présente les résultats numériques et expérimentaux de l'IT Hétérogène. La tache lumineuse représente l'absence de la tige à cet endroit. Sur le cadran du zoom le cercle blanc indique la véritable position de la tige manquante dans le CP. La figure 3.6 illustre le succès de notre démarche pour localiser un défaut enfoui dans un milieu hétérogène complexe avec une bonne précision. Dans le cadre de l'IT Hétérogène, les calculs numériques se trouvent être relativement longs. En effet, le diamètre des tiges est trois fois inférieur à la longueur d'onde à fréquence centrale λ_{fc} , ce qui conduit à un maillage plus fin à proximité des tiges que celui dans le milieu fluide. Le prix d'un tel raffinement de maillage est un plus grand nombre de degrés de liberté et par la même occasion un temps de calcul plus long.



Résidu	Dir./Adj.

FIGURE 3.6 – IT Hétérogène du CP - absence d'une seule tige enfouie en profondeur du réseau périodique. (a) IT Hétérogène par approche numérique. (b) IT Hétérogène par approche expérimentale.

Tige manquante : Imagerie Topologique Hybride

Les deux milieux de référence L'IT Hybride utilise deux milieux de références : un milieu de référence hétérogène (réel) pour le calcul du résidu et un milieu homogène (virtuel) pour calculer les problèmes direct et adjoint. En effet, la comparaison des réponses du milieu avant et après la perturbation du CP permet d'obtenir le résidu

purement expérimental qui contient la signature directe du défaut et les interactions manquantes de la tige avec le reste du milieu. L'IT Hybride jouit donc à la fois du point fort de l'IT Hétérogène, qui réside dans le retournement temporel du champ de pression induit par le défaut en prenant en compte la complexité du milieu, et des avantages de l'IT Homogène, qui se manifestent par l'économie en temps de calcul.

Le problème direct Le problème direct de l'IT Hybride est semblable en tout point à celui utilisé pour l'IT Homogène. Par conséquent, dans le traitement des données visant à former l'image du milieu, on se sert du même champ direct.

Le problème adjoint Le champ adjoint de l'IT Hybride revient à effectuer un retournement temporel sur le résidu expérimental. La rétropropagation de ce dernier fait que les interactions du défaut avec les autres éléments constituant le milieu périodique partiront en premier de la sonde, suivies par le front d'onde balistique qui focalisera vers de la position du défaut dans le milieu.

La formation de l'image La fonction d'imagerie de l'IT Hybride est la même que celle de l'IT Homogène (voir le tableau 3.1), c'est-à-dire la somme cumulée des produits du champ de pression direct par le champ de pression adjoint pour chaque pas de temps. La figure 3.6 illustre les résultats numériques et expérimentaux de la méthode. La tache lumineuse sur l'image révèle la position du défaut qui se trouve être plus large que la tache visualisée sur l'image obtenue par l'IT Hétérogène. La prise en compte de la complexité du milieu dans l'IT Hétérogène favorise une meilleure focalisation vers la position effective du défaut. Ce constat est très intéressant et corrobore les résultats démontrés dans [29]. En effet, A. Derode et *al.* ont prouvé à travers une démarche expérimentale la réversibilité des ondes acoustiques dans un milieu aléatoire où la diffusion multiple est très importante.

Leur expérience consiste à générer une onde qui se propage à travers une population de 2000 tiges d'acier immergées dans l'eau. Les tiges ont un diamètre de 0.8 mm et sont disposées de façon aléatoire avec un espacement moyen de 2.5 mm. Lorsqu'une onde de courte impulsion traverse un tel milieu (longueur d'onde à fréquence centrale de $\lambda_{fc} = 0.43$ mm) elle subit de nombreux événements de diffusion (jusqu'à 180 dans leur échantillon). L'onde transmise à la sortie du milieu aléatoire est mesurée par un MRT (sonde de 96 transducteurs à fréquence centrale de 3.5 MHz). Le retournement temporel et la rétropropagation de celle-ci fait converger l'onde transmise vers la

source et lui permettent de retrouver sa forme originale, malgré le degré élevé de diffusion multiple. Étonnamment, la résolution latérale observée était d'un sixième de la limite théorique de l'ouverture du MRT donnée par la relation $R_{lat} = \lambda_{fc}L/D$, où L est la distance entre le défaut et la sonde, et D sa largeur. Ceci est en effet surprenant car, dans un tel régime diffusif, le moindre erreur de mesures pourrait empêcher les ondes de retrouver leur chemin vers la source. Cette sensibilité aux conditions initiales, qui conduit au chaos, est bien connue en physique des particules. Pourtant, lorsqu'il s'agit du retournement temporel des ondes celui-ci s'avère très robuste et capable de reconstruire l'impulsion initiale à partir de la rétropropagation de l'onde transmise par le milieu aléatoire.

Par définition, un CP est un milieu ordonné. Toutefois, il est possible de faire l'analogie avec le travail présenté dans [29] en considérant la sonde comme une source active et le défaut dans le CP (absence de la tige) comme une source passive. L'objectif consiste à rétropropager le résidu (signature de l'absence de la tige) à travers un milieu de référence hétérogène (IT Hétérogène) ou à travers un milieu homogène (IT Hybride) pour retrouver la position du défaut. Comme l'illustrent les figures 3.6 et 3.7 l'imagerie du défaut par les méthodes d'IT Hétérogène et d'IT Hybride fournit des résultats satisfaisants. La question qui se pose désormais est : avec quelle précision la sonde peut-elle concentrer le résidu sur la position du défaut ? Pour l'IT Hybride, la largeur de la tache à mi-hauteur est d'environ $0.66\lambda_{fc}$ pour les résultats numériques et d'environ $1.56\lambda_{fc}$ pour les essais expérimentaux. Parallèlement, la largeur à mi-hauteur dans le cas de l'IT Hétérogène est d'environ $0.59\lambda_{fc}$ pour les simulations numériques et d'environ $0.7\lambda_{fc}$ pour les essais expérimentaux. Ces résultats montrent qu'en présence d'une diffusion multiple, la focalisation du résidu par retournement temporel à travers le problème adjoint dans un milieu hétérogène est nettement améliorée.

Sur la figure 3.7, plusieurs artéfacts sont visibles derrière la tache résultante du défaut. Ces artéfacts sont la manifestation des interactions multiples manquantes (à cause du défaut) avec le milieu périodique. Le problème adjoint tel qu'il est défini rétropropage le résidu, renvoyant ainsi la signature des interactions du défaut avec le milieu périodique avant la signature directe du défaut. C'est pour cette raison que les artéfacts sont localisés derrière la tache indiquant la position du défaut. Pour appuyer ce raisonnement, considérons une tige dans un milieu homogène semi-infini placée au même endroit que le défaut dans le CP. Autrement dit, le problème ici revient à localiser une inclusion dans un milieu homogène. Dans ce cas, l'IT Hybride et l'IT Hétérogène sont identiques et conduisent au résultat présenté dans la figure 3.8. Dans le cas présent, la tige n'interagit avec aucune autre inclusion ; ainsi l'image révèle uniquement la position de la tige dans le milieu sans qu'il n'y ait d'autres artéfacts.

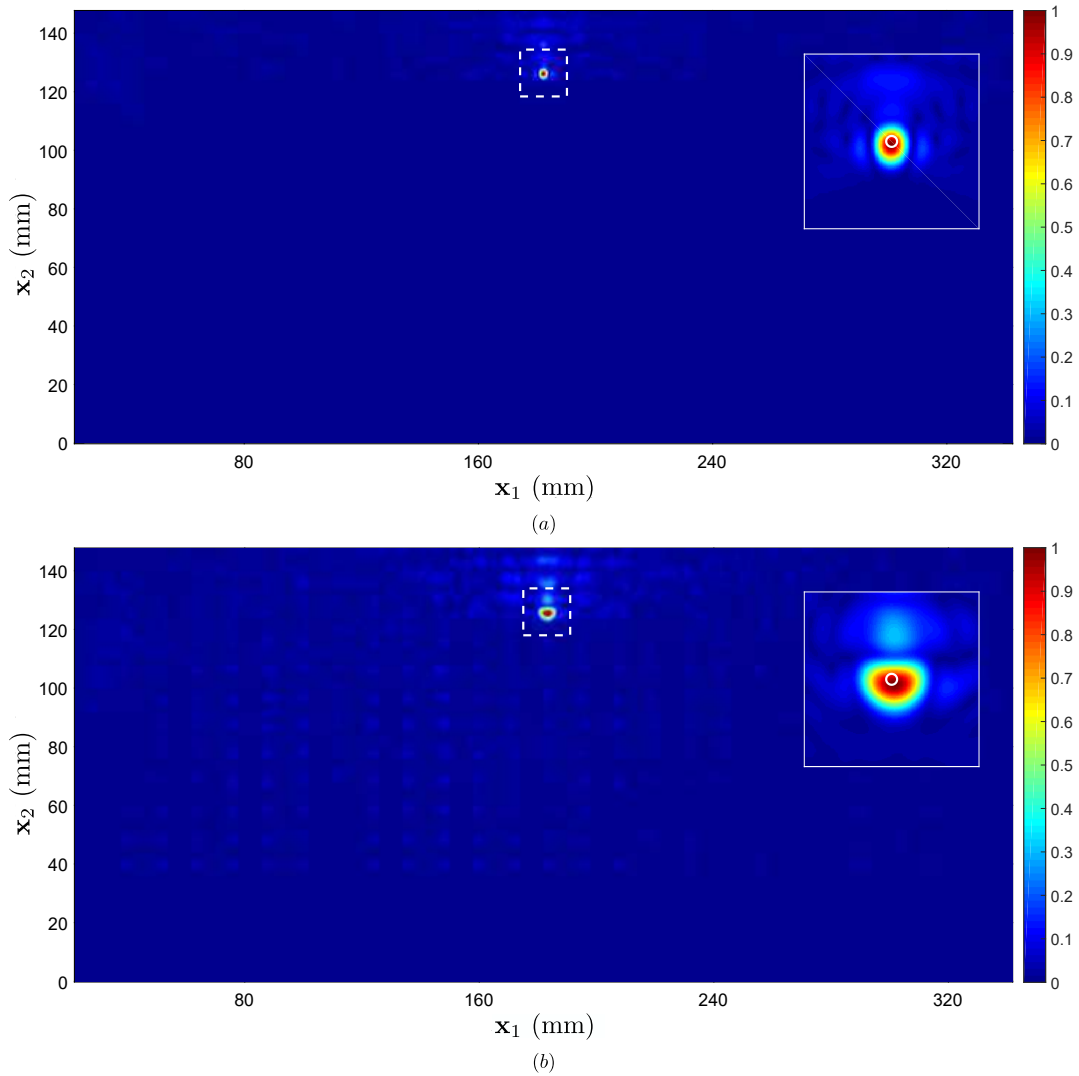




FIGURE 3.7 –

Résidu	Dir./Adj.
	

 IT Hybride du CP - absence d'une seule tige enfouie en profondeur du réseau périodique. (a) IT Hybride par approche numérique. (b) IT Hybride par approche expérimentale.

3.3.2 Tige déplacée : Imagerie Topologique Hétérogène

Dans la catégorie des défauts ponctuels, nous proposons dans cette sous-section d'évaluer les performances des méthodes d'imagerie présentées dans ce chapitre, non pour détecter l'absence de la tige positionnée au niveau de la 13^{ème} colonne de la 10^{ème} rangée du réseau périodique, mais pour localiser la même tige après avoir changé son

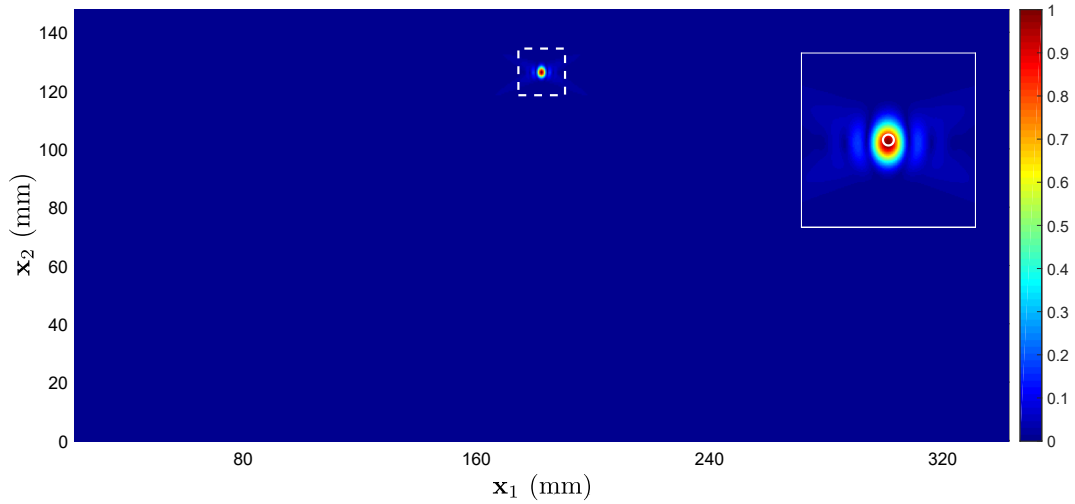


FIGURE 3.8 –

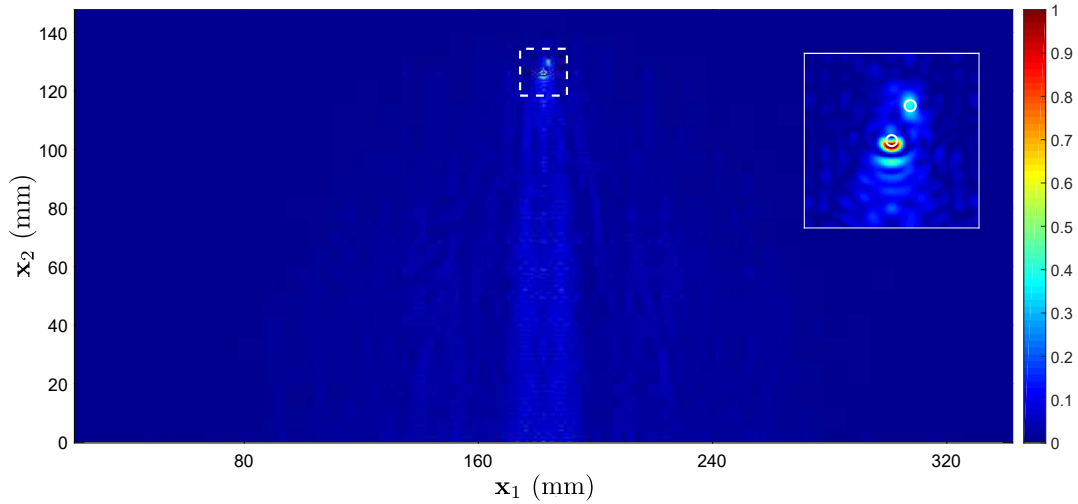
Résidu	Dir./Adj.

 Localisation d'une tige d'acier dans un milieu homogène semi-infini.

emplacement. En effet, les tiges du réseau périodique sont maintenues à leurs extrémités grâce à deux plaques fines d'acier trouées. Ces dernières sont perforées périodiquement (configuration à trous de 60°) avec un pas de 1.7 mm dans la direction \mathbf{x}_1 et un second pas de 3.2 mm dans la direction \mathbf{x}_2 . La perturbation introduite dans cette sous section est une translation de la tige localisée au niveau de la 13^{ème} colonne de la 10^{ème} rangée d'un seul pas dans les directions \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 . Ainsi, le CP contient deux défauts : le premier est l'absence de la tige localisée au niveau de la 13^{ème} colonne de la 10^{ème} rangée, le second est la tige à son nouvel emplacement. Au regard des résultats obtenus dans le paragraphe 3.3.1 l'IT Homogène ne sera pas utilisée car les deux défauts sont enfouis en profondeur dans le CP.

Compte tenu de l'hétérogénéité du milieu de référence, l'équation 2 du tableau 3.1 est utilisée pour représenter le résultat de l'IT Hétérogène dans la figure 3.9. Dans l'image globale du milieu, deux points en surbrillance sont visibles à l'intérieur du carré en pointillés. A première vue, ce résultat est satisfaisant et répond aux prédictions théoriques étant donné que chaque point lumineux doit correspondre au défaut qui lui est associé. Le premier point

lumineux dans le sens positif de x_2 est associé à la suppression de la tige positionnée en (colonne 13, ligne 10), tandis que le second est la signature de la tige translaturée. Toutefois, il est intéressant de remarquer que les deux taches ne sont pas de la même intensité comme on peut le voir sur la cadran du zoom situé à gauche de l'image. En effet, le rapport de l'intensité des deux taches est de 2.5 alors qu'on pouvait s'attendre à ce que ces intensités soient égales. Le rapport de la largeur à mi-hauteur des deux taches est de 0.66.

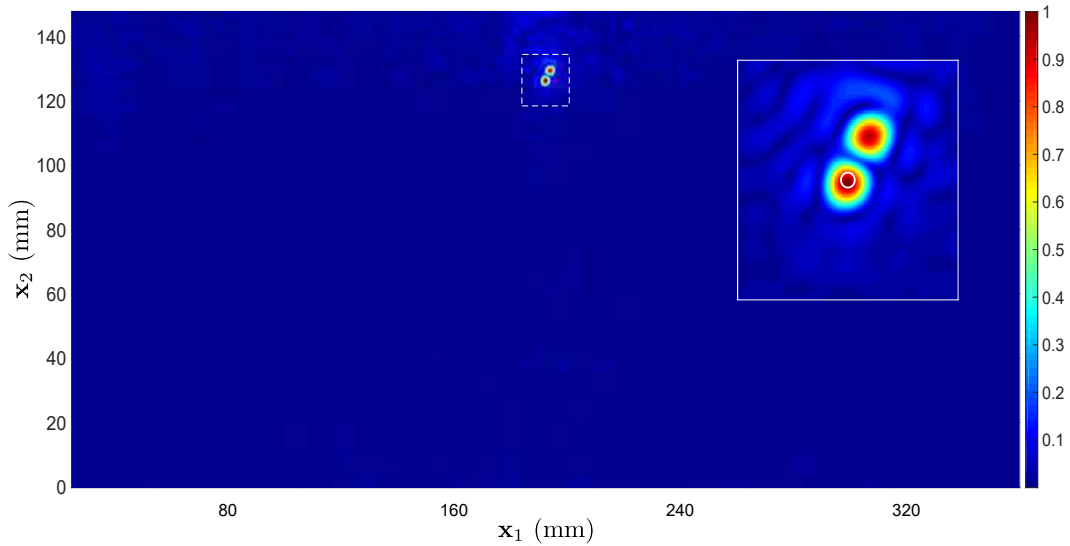


Résidu	Dir./Adj.

FIGURE 3.9 – IT Hétérogène du CP - Tige déplacée. La tige localisée au niveau de la 13^{ème} colonne de la 10^{ème} rangée est décalée par rapport à sa véritable position d'une distance de 1.7 mm dans la direction x_1 et d'une distance de 3.2 mm dans la direction x_2 .

3.3.3 Tige déplacée : Imagerie Topologique Hybride

La figure 3.10 est le résultat obtenu par IT Hybride en utilisant la fonction d'imagerie 3 du tableau 3.1. Dans l'image globale du milieu, deux points *a priori* de la même forme et de la même luminosité sont clairement visibles. Ce soupçon a été confirmé par les mesures, l'intensité et la largeur à mi-hauteur des deux taches sont égales. Il semble que l'IT Hybride est plus efficace que l'IT Hétérogène dans ce cas de figure.



Résidu	Dir./Adj.
•••••	•••••

FIGURE 3.10 – IT Hybride du CP - Tige déplacée. La tige localisée au niveau de la 13^{ème} colonne de la 10^{ème} rangée est décalée par rapport à sa véritable position d’une distance de 1.7 mm dans la direction x_1 et d’une distance de 3.2 mm dans la direction x_2 .

3.3.4 Défaut étendu : Imagerie Topologique dans un milieu homogène

L’objectif de ce paragraphe est d’exploiter les méthodes d’imagerie évoquées dans ce chapitre pour détecter un défaut étendu (grand devant λ_{fc}) introduit dans le CP. Le défaut en question est une lame d’acier en forme d’éclair d’épaisseur λ_{fc} et de longueur $12\lambda_{fc}$ placée approximativement au milieu du CP. Le problème réel correspond donc au CP perturbé (lame d’acier introduite), tandis que le milieu de référence correspond au CP sain.

La figure 3.11 montre la capacité de l’IT Homogène à détecter et à localiser le défaut en question dans le CP. Bien que l’IT Homogène soit définie à partir de la première itération du processus d’Optimisation Topologique, la forme du défaut est bien décrite. Pour des raisons de directivité, la zone du défaut parallèle à la sonde est plus intense que les autres mais un éclairage sous plusieurs angles peut permettre de mieux voir les contours du défaut sur l’image. La forte réflectivité du défaut étendu fait que l’intensité des taches (indiquant la présence des tiges) au niveau des premières rangées est plus faible que celle retrouvée dans la figure 3.4. De plus, le défaut étendu joue un effet écran sur les tiges situées derrière lui.

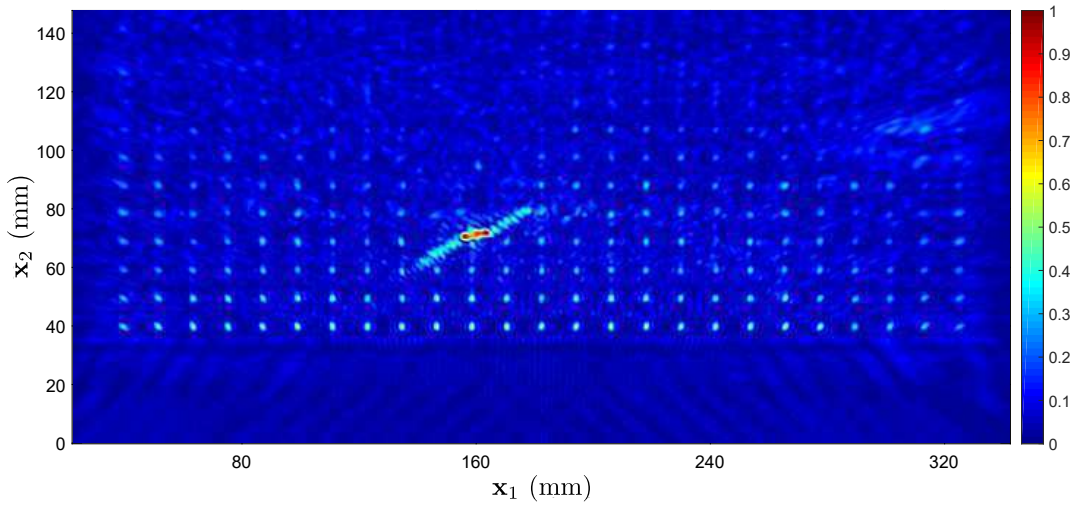


FIGURE 3.11 –

Résidu	Dir./Adj.

 IT Homogène du CP - Défaut étendu placé dans le milieu.

3.3.5 Défaut étendu : Imagerie Topologique dans un milieu hétérogène

Le résultat de l'imagerie par IT Hétérogène fait l'objet de la figure (3.12). L'introduction d'un tel défaut dans le CP revient à trop s'éloigner du milieu de référence. En effet, le défaut est grand comparé à λ_{fc} , et le fort contraste d'impédance augmente considérablement l'effet des interactions multiples. Ces dernières se manifestent par plusieurs artefacts qui dégradent fortement la qualité de l'image.

3.3.6 Défaut étendu : Imagerie Topologique Hybride

La figure (3.13) illustre le résultat de l'IT Hybride pour localiser le défaut étendu dans le CP. On retrouve une certaine similitude avec l'IT Homogène concernant la reconstruction de la forme du défaut. Sachant que l'IT Hybride utilise un milieu de référence hétérogène pour calculer le résidu, les taches visualisées sur la figure (3.13) représentent les signatures du défaut étendu et de certaines tiges situées derrière lui qui n'ont pas été supprimées lors du calcul du résidu.

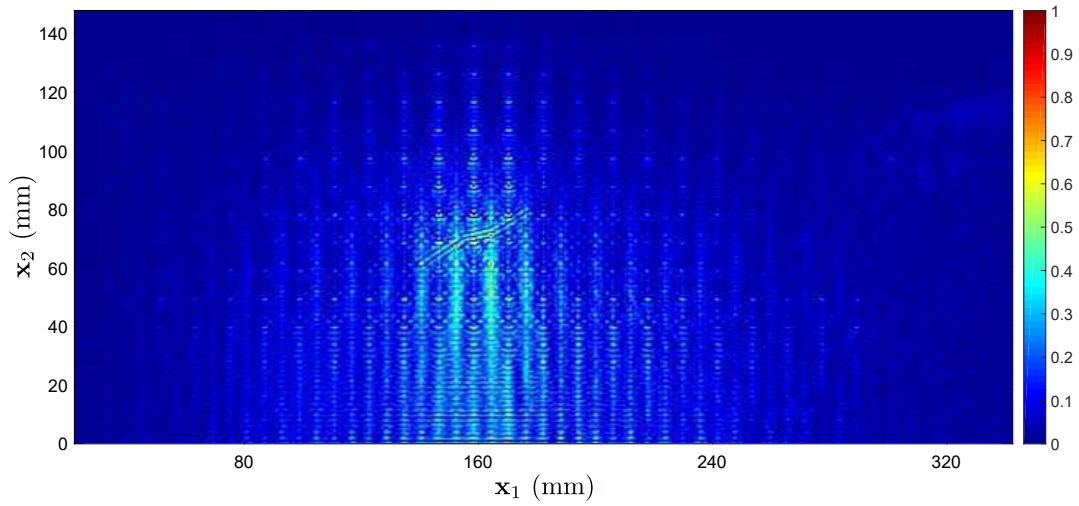




FIGURE 3.12 –

Résidu	Dir./Adj.
	

 IT Hétérogène du CP - Défaut étendu placé dans le milieu.

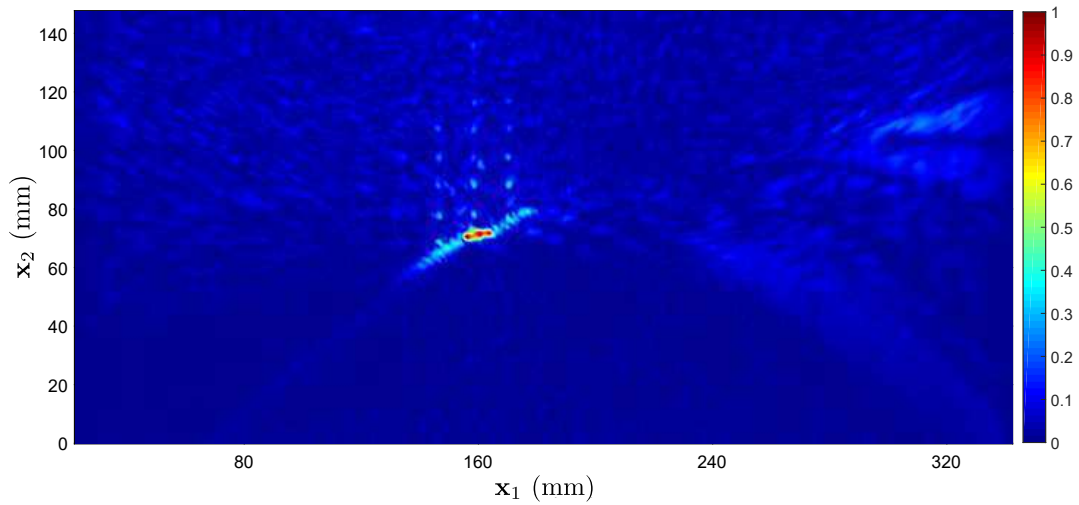




FIGURE 3.13 –

Résidu	Dir./Adj.
	

 IT Hybride du CP - Défaut étendu placé dans le milieu.

3.4 Conclusion

Dans un premier temps, nous avons présenté quelques généralités sur les CP. Nous avons également passé en revue quelques travaux autour de la découverte et de la mise en évidence théorique et expérimentale de plusieurs

comportements manifestés pas ces cristaux. Dans un second temps, nous avons entrepris de mettre en œuvre des méthodes de CND adaptées à ce type de milieux. En se basant sur le concept d'IT introduit dans le chapitre 2, nous avons testé la performance de l'IT dans deux situations distinctes. L'une prend en compte l'hétérogénéité du CP dans la modélisation du milieu de référence et l'autre l'ignore. Parallèlement, nous avons mis en œuvre une deuxième méthode d'imagerie appelée IT Hybride qui utilise deux milieux de références pour la formation de l'image du milieu. Le premier milieu de référence est un milieu hétérogène utilisé pour comparer la réponse du milieu réel avant et après l'introduction du défaut. Le second milieu est un milieu de référence homogène semi-infini qui sert à calculer les champs direct et adjoint. Une fois les deux méthodes d'imagerie bien établies, deux questions se posent alors : faut-il prendre en compte l'hétérogénéité du milieu de référence ? Si oui, quand faut-il la prendre en compte ?

Dans le cas d'un défaut ponctuel dans un CP fortement dilué, l'évaluation des performances de chaque méthode a montré que :

1. L'IT Homogène est inefficace pour détecter ou localiser un défaut ponctuel enfoui en profondeur du CP, car la complexité de la propagation d'ondes en son sein n'est pas prise en compte dans la modélisation du milieu de référence. Toutefois, l'IT Homogène peut se révéler intéressante lorsque le milieu inspecté se situe dans un régime propagatif à faible désordre.
2. L'IT Hétérogène est capable de prendre en compte l'hétérogénéité du CP et permet une bonne focalisation du champ adjoint autour de la position du défaut. Les solutions analytiques du problème de propagation d'ondes vues dans ce chapitre étant indisponibles, le recours à des méthodes de calculs numériques comme celle des éléments finis peut conduire à des problèmes relativement longs à résoudre numériquement.
3. L'IT Hybride permet de détecter le défaut dans le CP sans l'effort de modélisation de l'hétérogénéité du milieu de référence. De plus, le calcul des problèmes direct et adjoint dans un milieu de référence homogène offre la possibilité d'effectuer les calculs par des méthodes analytiques ou semi-analytiques donnant ainsi des images rapides mais moins résolues comparées à celles obtenues par l'IT Hétérogène.

Dans le cas d'une perturbation étendue (défaut grand devant la longueur d'onde à fréquence centrale) dans un CP fortement dilué, l'évaluation des performances de chaque méthode a montré que :

1. L'IT Hétérogène n'est pas la meilleure solution à adopter dans ce type de situation. L'introduction d'un défaut grand devant λ_{f_c} la longueur d'onde à fréquence centrale éloigne beaucoup le milieu réel du milieu de

référence et accroît l'effet des interactions multiples donnant lieu à des artefacts sur l'image formée par cette méthode. Il serait plus judicieux de se tourner vers le processus itératif de l'OT afin de retrouver la position et la forme du défaut.

2. L'IT Homogène et l'IT Hybride semblent offrir plus de possibilités dans ce cas. En effet, même si la forme du défaut n'est pas retrouvée, elles permettent néanmoins de le localiser.

Parallèlement à ces constats, nous avons mis en évidence qu'il est plus important de tenir compte de la complexité du milieu dans le calcul du résidu que dans la modélisation du milieu de référence. Dans la situation d'une perturbation locale (absence d'une tige dans le CP) l'approche expérimentale détaillée dans ce chapitre valide avec un succès remarquable l'efficacité de la méthode.

Ce chapitre clôture l'imagerie des milieux hétérogènes dans une configuration d'inspection par réflexion. Le prochain chapitre est quant à lui dédié à la détection et à la localisation de défauts dans une configuration en transmission.

Bibliographie

- [1] S. Tamura, D. C. Hurley, and J. P. Wolfe. Acoustic-phonon propagation in superlattices. *Physical Review B*, 38(2) :1427–1449, 1988.
- [2] M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani. Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Physical Review Letters*, 71(13) :2022–2025, 1993.
- [3] M. S. Kushwaha, P. Halevi, and G. Martínez. Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites. *Physical Review B*, 49(4) :2313–2322, 1994.
- [4] M. M. Sigalas and E. N. Economou. Elastic waves in plates with periodically placed inclusions. *Journal of Applied Physics*, 75(6) :2845–2850, 1994.
- [5] Mihail M. Sigalas. Elastic wave band gaps and defect states in two-dimensional composites. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 101(3) :1256–1261, 1997.
- [6] M. M. Sigalas. Defect states of acoustic waves in a two-dimensional lattice of solid cylinders. *Journal of Applied Physics*, 84(6) :3026–3030, 1998.
- [7] A. Khelif, B. Djafari-Rouhani, V. Laude, and M. Solal. Coupling characteristics of localized phonons in photonic crystal fibers. *Journal of Applied Physics*, 94(12) :7944–7946, 2003.
- [8] A. Khelif, A. Choujaa, S. Benchabane, B. Djafari-Rouhani, and V. Laude. Guiding and bending of acoustic waves in highly confined phononic crystal waveguides. *Applied Physics Letters*, 84(22) :4400–4402, 2004.
- [9] A. Khelif, M. Wilm, V. Laude, S. Ballandras, and B Djafari-Rouhani. Guided elastic waves along a rod defect of a two-dimensional phononic crystal. *Physical Review E*, 69(6) :067601, 2004.
- [10] Y. Pennec, B. Djafari-Rouhani, J. O. Vasseur, H. Larabi, A. Khelif, A. Choujaa, S. Benchabane, and V. Laude. Acoustic channel drop tunneling in a phononic crystal. *Applied Physics Letters*, 87(26) :261912, 2005.
- [11] Chunyin Qiu and Zhengyou Liu. Acoustic directional radiation and enhancement caused by band-edge states of two-dimensional phononic crystals. *Applied Physics Letters*, 89(6) :063106, 2006.

- [12] Manzhu Ke, Zhengyou Liu, Chunyin Qiu, Wengang Wang, and Jing Shi. Negative-refraction imaging with two-dimensional phononic crystals. *Physical Review B*, 72(6) :064306, 2005.
- [13] Zhengyou Liu, Xixiang Zhang, Yiwei Mao, Y. Y. Zhu, Zhiyu Yang, C. T. Chan, and Ping Sheng. Locally resonant sonic materials. Technical Report 5485, New York, 2000.
- [14] Zhengyou Liu, C. T. Chan, and Ping Sheng. Analytic model of phononic crystals with local resonances. *Physical Review B*, 71(1) :014103, 2005.
- [15] Mikaël Wilm, Sylvain Ballandras, Vincent Laude, and Thomas Pastureau. A full 3D plane-wave-expansion model for 1-3 piezoelectric composite structures. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 112(3) :943–952, 2002.
- [16] A. Khelif, B. Aoubiza, S. Mohammadi, A. Adibi, and V. Laude. Complete band gaps in two-dimensional phononic crystal slabs. *Physical Review E*, 74(4) :046610, 2006.
- [17] Jensen Li and C. T. Chan. Double-negative acoustic metamaterial. *Physical Review E*, 70(5) :055602, 2004.
- [18] Tzung Chen Wu, Tsung Tsong Wu, and Jin Chen Hsu. Waveguiding and frequency selection of Lamb waves in a plate with a periodic stubbed surface. *Physical Review B*, 79(10) :104306, 2009.
- [19] Y. Pennec, B. Djafari-Rouhani, H. Larabi, J. O. Vasseur, and A. C. Hladky-Hennion. Low-frequency gaps in a phononic crystal constituted of cylindrical dots deposited on a thin homogeneous plate. *Physical Review B*, 78(10) :104105, 2008.
- [20] Yiqun Ding, Zhengyou Liu, Chunyin Qiu, and Jing Shi. Metamaterial with simultaneously negative bulk modulus and mass density. *Physical Review Letters*, 99(9) :093904, 2007.
- [21] Suxia Yang, J. H. Page, Zhengyou Liu, M. L. Cowan, C. T. Chan, and Ping Sheng. Focusing of sound in a 3D phononic crystal. *Physical Review Letters*, 93(2) :024301, 2004.
- [22] K. Imamura and S. Tamura. Negative refraction of phonons and acoustic lensing effect of a crystalline slab. *Physical Review B*, 70(17) :174308, 2004.
- [23] J. B. Pendry. Negative refraction makes a perfect lens. *Physical Review Letters*, 85(18) :3966–3969, 2000.

- [24] M. Torres, De Espinosa, F. R. Montero, G. P. García-Pablos, and N. García. Sonic band gaps in finite elastic media : Surface states and localization phenomena in linear and point defects. *Physical Review Letters*, 82(15) :3054–3057, 1999.
- [25] A. Khelif, A. Choujaa, B. Djafari-Rouhani, M. Wilm, S. Ballandras, and V. Laude. Trapping and guiding of acoustic waves by defect modes in a full-band-gap ultrasonic crystal. *Physical Review B*, 68(21) :214301, 2003.
- [26] S. Benchabane, A. Khelif, A. Choujaa, B. Djafari-Rouhani, and V. Laude. Interaction of waveguide and localized modes in a phononic crystal. *Europhysics Letters*, 71(4) :570–575, 2005.
- [27] Xinhua Hu and C. T. Chan. Refraction of water waves by periodic cylinder arrays. *Physical Review Letters*, 95(15) :154501, 2005.
- [28] S. T. Rakotonarivo, S. C. Walker, W. a. Kuperman, and P. Roux. Localization of a small change in a multiple scattering environment without modeling of the actual medium. *Journal of the Acoustical Society of America*, 130(6) :3566–3573, 2011.
- [29] Arnaud Derode, Philippe Roux, and Mathias Fink. Robust acoustic time reversal with high-order multiple scattering. *Physical Review Letters*, 75(23) :4206–4209, 1995.

Chapitre 4

Imagerie en transmission

4.1 Généralités et bibliographie

Ce dernier chapitre témoigne d'un changement de paradigme dans les approches d'imagerie étayées jusqu'à présent. Il s'inscrit dans le contexte du Contrôle de Santé Intégré (CSI ou SHM pour *Structural Health Monitoring*) et se donne pour objectif de mettre en œuvre des méthodes d'imagerie adaptées aux inspections ultrasonores dans une configuration *Pitch-Catch*. Dans un premier temps, une revue de la littérature non exhaustive autour des méthodes de CND et de SHM sera présentée. Dans un deuxième temps nous adapterons la méthode d'IT à des configurations d'inspections ultrasonores en transmission tout en proposant une nouvelle méthode mieux adaptée à ce type de problèmes. Nous achèverons la présentation de ce chapitre par une conclusion et un ensemble de perspectives de recherche.

L'une des missions primordiales après la conception de pièces mécaniques (pour l'industrie automobile, aéronautique, aérospatiale etc.) est le contrôle de qualité visant à établir des critères de résistance des matériaux et des déformations admissibles. Les essais de traction ou de flexion sont des exemples de méthodes empiriques adaptées à ce type de test. Néanmoins, ces méthodes ne peuvent être utilisées pour évaluer les caractéristiques d'une pièce en cours d'utilisation sans la détruire. Les constructions des industries aéronautique, aérospatiale, nucléaire, et automobile sont en permanence sollicitées par divers facteurs externes qui les dégradent au cours du temps.

La dégradation peut être liée aux propriétés mécaniques, physiques ou chimiques des matériaux et engendrer des défaillances non-contrôlées causant ainsi des accidents ou des pertes financières conséquentes. A titre d'exemple, le 2 Mai 1953, l'avion G-ALYV s'est désintégré dans une tempête à 10 000 pieds durant la phase ascensionnelle de son vol de Calcutta vers Delhi. Des études par pressurisation sur le fuselage du Comet en conditions de vol ont prouvé que la rupture du fuselage par fatigue (à partir de fissures amorcées au coin des hublots carrés) était la cause d'accident de cet avion. Dans ce sens, la maintenance et le contrôle des structures revêtent une importance capitale aussi bien du point de vue sécuritaire que financier.

4.1.1 Le Contrôle Non Destructif (CND)

Le CND englobe un ensemble de méthodes susceptibles d'ausculter l'intégrité d'une structure sans la dégrader. Il peut être utilisé pour tester sa conformité en cours de production ou après sa mise en service afin de suivre son évolution. Les méthodes de CND peuvent être catégorisées en deux grandes classes en fonction du type de défaillances recherchées dans la structure :

1. Les méthodes de surfaces : la magnétoscopie, le contrôle d'étanchéité (pour la détection de fuites dans des canalisations en utilisant un gaz traceur), le ressuage, les courants de Foucault ou les méthodes optiques (comme l'interférométrie holographique).
2. Les méthodes de volume : comme les techniques d'inspection par ultrasons émis au moyen de capteurs fonctionnant le plus souvent par effet piézoélectrique (ils peuvent également être utilisés pour la détection de défauts en surface), à l'image de l'Emission Acoustique (EA). Cette méthode consiste à localiser les sources et à analyser la propagation d'ondes mécaniques dans un matériau afin de surveiller les dommages microscopiques en son sein. Toutefois, la quantification et la caractérisation des défauts ne peuvent être effectuées avec l'EA. La thomographie, les rayons X et les terahertz sont également des techniques que l'on retrouve dans cette classe de méthodes.

Ces méthodes permettent dans une large mesure de détecter et de localiser des défauts dans la structure. Certaines de ces méthodes (comme la FWI ou l'OT) vont jusqu'à l'identification de la nature du défaut et de sa dimension (voire même l'évaluation de sa dangerosité). Cependant, l'inconvénient majeur du CND est l'indisponibilité qu'il entraîne par la mise hors service de la structure lors du contrôle (démontage de la pièce à inspecter). De plus, la

géométrie parfois complexe de certaines structures rend difficile l'inspection de certaines zones réduisant la fiabilité du contrôle. En outre, il arrive parfois qu'un endommagement surgisse entre deux inspections et cause des coûts importants qui auraient pu être évités si l'endommagement avait été identifié en temps réel.

4.1.2 Le Contrôle de Santé Intégré

Le SHM couvre des domaines d'applications très larges. Les deux plus grands congrès dédiés au SHM sont l'*International Workshop on Structural Health Monitoring* (toutes les années impaires à Stanford-Californie) et l'*European Workshop on Structural Health Monitoring* ayant lieu toutes les années paires dans une ville différente (Cachan-2002, Munich-2004, Grenade-2006, Cracovie-2008, Sorrente-2010, Dresde-2012, Nantes-2014, Bilbao-2016, Manchester-2018). Les méthodes SHM sont des processus de traçage des performances d'une structure en temps réel grâce à des capteurs déployés en surface de la structure [1], ou enfouis au sein de celle-ci [2]. Pour prétendre être efficace, un système SHM efficace doit automatiser et intégrer différents niveaux d'information sur le défaut. Il doit idéalement être en mesure de le détecter, et de le localiser, d'identifier sa nature, d'évaluer sa taille et sa géométrie, et enfin de fournir une prédiction sur la santé de la structure.

Le pronostic fait partie intégrante de la démarche de déploiement d'un système SHM car il est en lien direct avec la stratégie de maintenance. Cette dernière peut être prévisionnelle, en anticipant les anomalies dans la structure, ce qui présente un réel intérêt au niveau logistique (acheminement optimal des pièces de rechange). A défaut, elle peut être conditionnelle en déclenchant un système d'alarme chaque fois qu'un défaut ressurgit au sein de la structure. Initialement actives, les méthodes de SHM se servent désormais des énergies ambiantes (vent, pluie, secousses sismiques etc.) pour exciter le milieu d'intérêt. Il convient donc de faire la distinction entre deux types d'identification qui conditionnent le type de contrôle appliqué à une structure. Lorsque la source d'excitation est contrôlée par l'utilisateur, on parle d'identification active. Si la source d'excitation provient des conditions ambiantes également appelées bruit ambiant¹, l'identification est dite passive. En géophysique par exemple, le recours à la dynamite pour la production des sources élastodynamiques servant à inspecter les couches terrestres est un contrôle actif. Parallèlement, relever les sismogrammes induits par un séisme revient à faire un contrôle passif.

1. On appelle bruit ambiant toute source non contrôlée excitant un milieu. Par exemple, le vent, la pluie, le trafic routier, le passage d'un train, sont des sources de bruit ambiant pour un pont. Un avion est soumis à diverses sources de bruit ambiant tel que le bruit des moteurs.

Un système SHM intégré nécessite d'être léger, de présenter un faible encombrement² et idéalement d'être le moins coûteux possible. Ainsi, la masse due à l'intrusion des composantes du dispositif d'inspection fait que le nombre de capteurs à embarquer est souvent limité. Par conséquent, une bonne méthode de SHM doit être susceptible d'effectuer le contrôle escompté avec un minimum de sources d'informations, d'où la nécessité d'utiliser des capteurs performants et de les déployer avec soin autour des zones critiques.

En règle générale, les méthodes SHM s'inspirent de celles du CND, il est donc naturel de constater qu'une grande partie des fonctionnalités et des outils d'inspection sont similaires. Toutefois, les techniques SHM permettent d'inspecter des zones qui seraient inaccessibles avec des méthodes de CND classiques (pièces nécessitant que la structure soit démontée puis remontée pour y accéder, ce qui par ailleurs pourrait entraîner des fragilisations). L'apport du SHM est notamment économique, car il limite l'intervention humaine et optimise la conception des structures sans sacrifier les performances ou la sécurité. De plus, les systèmes SHM passifs présentent une économie d'énergie non négligeable, les sources actives étant remplacées par les vibrations ambiantes. La précision des méthodes SHM étant souvent limitée, ces dernières peuvent être utilisées comme annonciatrices de la nécessité d'une inspection plus précise avec les méthodes du CND.

4.1.3 Les types de défauts industriels

Au cours de sa vie opérationnelle les défauts de corrosion et de délaminage ou encore les fissures dégradent la qualité de la structure et précipitent son usure. L'apparition de ces défauts peut être instantanée suite à un impact par exemple, ou s'établir sur la durée comme les fissures de fatigue et les attaques de corrosion. Sur les panneaux d'aluminium, les fissures ont été particulièrement étudiées dans les travaux [3, 4, 5]. Les défauts récurrents dans les composites sont les délaminages [6, 7]. Les structures collées ont fait également l'objet de plusieurs études : avec des raidisseurs [8], ou des panneaux collés entre eux [9]. Il est clairement établi que les défauts d'adhésion diffractent fortement les ondes guidées [10]. Dans la communauté scientifique, plusieurs études ont été menées afin d'extraire l'information à des fins de détection ou d'imagerie à travers différents algorithmes [3, 4, 8, 7, 10]. Pour des configurations favorables à des inspections en *Pitch-Catch*, la caractérisation du défaut passe par la définition d'un indice d'endommagement. Celui-ci est souvent défini comme un rapport d'amplitude entre le mode incident

². Ces deux critères sont primordiaux dans l'aéronautique et l'aérospatiale mais, ils le sont beaucoup moins dans le secteur du génie civil.

et le ou les modes transmis [9, 5], ou alors défini à partir du coefficient de réflexion des ondes émises [11]. Dans le prochain paragraphe nous proposons un état des lieux sur les méthodes les plus utilisées en SHM.

4.1.4 Méthodes actives

Inspection localisée par les méthodes d'impédance

Dans la classe des méthodes d'inspection en mode actif pour le SHM, la technique la plus communément utilisée est la technique d'impédance utilisant les PZT. Le choix des PZT réside dans le fait que ces capteurs sont légers, très économiques, et peuvent prendre différentes formes : rectangle, disque... Quelles que soient leurs dimensions latérales (de l'ordre du centimètre parfois), ils sont toujours de faible épaisseur (de l'ordre du micron au millimètre).

Sous l'action d'une excitation électrique, ces capteurs convertissent l'énergie électrique en une onde mécanique de hautes fréquences (selon la performance du capteur et le signal électrique). Les défauts éventuels de la structure auscultée sont identifiés en contrôlant les variations de l'impédance structurelle mesurée par les PZT. Cette démarche se révèle efficace pour identifier des défauts dans les milieux complexes. Toutefois, la sensibilité des PZT aux fluctuations ambiantes (température à titre d'exemple) peut engendrer de fausses alarmes. A ce titre, les auteurs de [12, 13] ont effectué des études visant à réduire l'effet des variations de température en contrôlant la bande fréquentielle d'excitation. Il est possible de trouver des techniques de contrôle par SHM utilisant d'autres matériaux piézoélectriques que le PZT. On peut citer à titre d'exemple les capteurs PVDF (*PolyVinylidene Fluoride*) constitués d'un film polymère, ou d'autres capteurs plus atypiques tels que les piézo-composites comme le MFC (*Macro Fiber Composite*) crée par W. Wilkie à partir d'un film flexible en polymère avec des fibres piézocéramiques [14].

Suivi des caractéristiques vibratoires

D'autres approches pour la surveillance de la santé d'une structure en mode actif reposent sur les méthodes fréquentielles. La fonction de transfert de la structure est calculée à partir du rapport entre la réponse de la structure et la transformée de Fourier du signal d'excitation $H = \frac{\text{réponse}}{\text{excitation}}$. Le contenu fréquentiel fournit plusieurs informations sur la structure, notamment ses caractéristiques vibratoires (les déformées modales) et les fréquences propres indépendamment du signal d'excitation source. Toute anomalie dans la structure induit une modification

dans les propriétés modales ou dans la réponse fréquentielle du système révélant ainsi la présence d'un défaut [15]. Par contre, le placement des capteurs peut influencer ces paramètres.

K. Diamanti fait état de quelques manières d'arranger un réseau de PZT [16]. Le réseau peut entourer tout le périmètre du milieu et chercher à détecter un défaut qui apparaît à l'intérieur de ce réseau, ou alors les capteurs peuvent être regroupés afin de sonder la structure dans une direction donnée. Le choix de la configuration optimale de capteurs pour l'identification modale et l'évaluation des paramètres structurels a fait l'objet de plusieurs études. En partant d'une connaissance antérieure des positions des défauts dans une structure, M. Azarbajani et *al* [17] présentent une approche probabiliste pour trouver l'emplacement optimal des capteurs pour le SHM.

Inspection par ondes guidées

Lorsqu'il est question du contrôle de structures simples telles que les plaques et les poutres, les techniques SHM les plus courantes sont celles qui reposent sur les Ondes Guidées (OG) ultrasonores. La géométrie bornée des plaques limite la propagation des ondes par les surfaces supérieures et inférieures du milieu donnant naissance à un type spécifique d'ondes, appelées ondes de Lamb. Ces dernières sont susceptibles de se propager sur de longues distances et permettent par exemple de remonter aux variations d'épaisseur en étudiant leur caractère dispersif. Les techniques SHM utilisant les ondes de Lamb reposent sur la connaissance de la propagation de ces ondes dans un milieu de référence sain. Cette dernière est comparée à celle de la structure en service à travers une soustraction des signaux des deux états. La triangulation par temps de vol peut ensuite être utilisée pour localiser le défaut [18]. Si la structure contrôlée est effectivement défectueuse, il s'opère des phénomènes de conversion des modes de propagation au voisinage du défaut [19, 20].

Ce genre de techniques est peu robuste face aux variations de température, vieillissement des capteurs, ou autres conditions environnementales. Ceci peut engendrer de fausses alarmes ou faux positifs, ce qui est très pénalisant pour un système SHM [18]. Pour dépasser ces limites, certains travaux préconisent de dilater les signaux afin de minimiser certains effets dus aux variations de température. D'autres travaux proposent de construire une base de données d'états sains [21], ou encore des méthodes de séparation de sources afin de dissocier dans les signaux, les variations venant du défaut de celles qui découlent des conditions ambiantes. Malgré ces efforts, toutes ces

méthodes sont peu performantes en dehors du laboratoire, certaines sont même irréalisables dans des situations réelles. A notre connaissance, aucune méthode SHM par OG s'affranchissant de l'état de référence n'a émergée dans le secteur industriel.

Les méthodes de tomographie par Ondes Guidées

La tomographie par ondes guidées permet d'imager de manière quantitative une partie d'une structure jugée suffisamment critique pour qu'il soit décidé de la contrôler. Cette inspection se fait à l'aide de transducteurs situés autour de la zone critique qui émettent et reçoivent des OG sous forme de signaux généralement complexes. Ces signaux constituent les données d'entrées des algorithmes de tomographie qui résolvent un problème inverse visant à produire une cartographie de la zone inspectée. Les algorithmes de tomographie par OG les plus simples (mais aussi les plus robustes au bruit) sont les algorithmes basés sur le temps de vol. Ils sont fondés sur des modèles rayon et l'hypothèse de propagation géométrique des OG. Si le paramètre à reconstruire est la célérité des ondes acoustiques dans la structure, la seule donnée d'entrée requise pour établir ce genre d'algorithme est le temps de vol des paquets d'ondes entre les différentes paires émetteur/récepteur. Ces algorithmes peuvent être scindés en deux catégories :

1. Modèle de propagation selon une ligne droite -*Straight-Ray Tomography* [22] : qui fait l'hypothèse que le champ de vitesse est quasiment uniforme, négligeant ainsi la réfraction. Les algorithmes les plus connus de cette classe sont : *Algebraic Reconstruction Technique* (ART), *Simultaneous Iterative Reconstructive Technique* (SIRT), et *Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique* (SART). Si le lecteur est intéressé, une description du modèle de propagation et bien d'autres détails sont disponibles dans le chapitre 1 de [23]. Ces algorithmes sont très peu intéressants en pratique, car ils sont inefficaces pour imager des défauts réalistes [24]. En effet, ces algorithmes ne prennent pas en compte les trajectoires complexes induites par un défaut réel. Par conséquent, le champ de vitesse et l'épaisseur du défaut reconstruit se trouvent biaisés.
2. Modèle de propagation selon un rayon courbé *Bent Ray Tomography* ou *Fast Marching Method Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique* (FMM SART) [25] : qui prend en compte la modélisation des phénomènes de réfraction lorsque le champ de vitesse dans la structure est non uniforme, ou bien lorsque la dimension du défaut devient suffisamment conséquente pour affecter de façon significative les temps de vols des rayons le traversant.

D'autres algorithmes utilisant les OG pour la reconstruction d'images topographiques de petits défauts comme la tomographie par diffraction classique et le *Beamforming* sont connus dans la littérature. La tomographie par diffraction classique est optimale car elle découle des formulations mathématiques rigoureuses [26]. L'algorithme de focalisation *Beamforming* [27, 28] quant à lui est fondé sur des arguments heuristiques. L'idée est qu'un défaut ponctuel localisé en \mathbf{x} induit un signal diffusé dont le retard correspond à la différence de parcours pour chaque paire émetteur/récepteur. Sur chaque point de mesure les signaux sont retournés temporellement puis sommés sur toutes les paires émetteur/récepteur. Si la plaque est défectueuse, il apparaît sur l'image la position du défaut induite par les interférences constructives, sinon l'image contient uniquement des fluctuations aléatoires. Les deux algorithmes sont établis dans le cadre d'approximations de Born et prennent comme données d'entrées le signal complet (informations liées à l'amplitude et la phase). Le lecteur intéressé peut se référer à [27] où un lien entre *Beamforming* et la tomographie par diffraction classique est établi.

Dans sa thèse [29], P. Huthwaite a mis au point une troisième approche nommée d'*Hybrid Algorithm for Robust Breast Ultrasound Tomography* (HARBUT) aussi efficace pour imager les gros défauts réfractants que les petits défauts diffusants. Cet algorithme combine à la fois les avantages du modèle de rayon et du modèle ondulatoire. Il a été initié pour la tomographie par ultrasons dans le domaine médical [28], puis étendu à sa forme itérative pour son application au cas des OG [38]. Dans le document [30] J. Rao et *al* proposent de se servir de la FWI pour prédire la diffusion des OG à travers un défaut de corrosion dans une plaque. L'avantage majeur de la FWI est la prise en compte de la diffusion d'ordre élevé car elle ne se base pas sur l'approximation de Born.

4.1.5 Méthodes passives

Certaines méthodes de SHM effectuent le contrôle en se basant sur la réponse de la structure induite par le bruit ambiant. L'intercorrélacion entre deux récepteurs arbitraires de l'appareil de mesure est analogue à la configuration : source impulsive en un point et récepteur en un autre point. Notons que le lien entre la fonction de Green et la corrélation d'un champ ambiant change en fonction des hypothèses et des conditions d'application. Certaines publications postulent que la fonction de Green est liée à la dérivée temporelle de la fonction de corrélation [21, 31], tandis que d'autres relient directement la fonction de Green à la fonction de corrélation [32, 33]. La situation idéale pour l'application de ce type de techniques est une cavité ergodique. En effet, dans ce type de structures, le champ est uniforme spatialement et temporellement, il est dit parfaitement diffus. Autrement dit, le champ réverbéré est

le même quelle que soit la position dans le volume [34]. Ainsi, la corrélation entre les signaux acoustiques prélevés simultanément en deux points converge vers la fonction de Green entre ces deux points [31], car elle ne dépend que des propriétés structurelles du milieu.

En 1986 F. Claerbout [35] a été le premier à mettre en évidence ce principe qui a été souvent repris dans les méthodes de contrôle par SHM [36] et en géophysique pour reconstruire les cartes de vitesse de propagation [37, 38]. En réalité, il est extrêmement rare d'obtenir un champ parfaitement diffus. Le bruit ambiant a des propriétés difficiles à cerner et les caractéristiques des sources acoustiques peuvent varier d'une acquisition à l'autre. Ainsi, l'extraction de la fonction de Green à partir des corrélations des champs ambiants reste très difficile. De plus, la fonction de Green permet de caractériser en particulier le chemin entre deux capteurs, ainsi l'identification de défauts se positionnant loin de ce chemin n'est pas garantie.

Les réseaux de Bragg sur fibre optique *Fiber Bragg Gratings* (FBG) [39] présentent une solution prometteuse dans le sens où ils multiplient les points de mesure des OG sans augmenter l'intrusivité du système. Les (FBG) sont une technologie émergente qui laisse entendre que dans un avenir proche, il serait possible d'utiliser simultanément quelque dizaines de réseaux sans alourdir l'instrumentation et ce même dans des environnements contraignants (hautes températures et milieux radioactifs). Cependant, les (FBG) ne sont pas en mesure d'émettre des OG comme les PZT mais uniquement de les capter (via la mesure des déformations locales dans l'axe de la fibre). Leur utilisation se limite à un usage purement passif et laisse présager la possibilité de développer des méthodes passives fondées sur le champs diffus naturellement présent dans la structure. Pendant les vols, les structures aéronautiques sont soumises à d'intenses sources de bruit acoustique qui peuvent être exploitées pour mettre au point beaucoup d'applications intéressantes de type SHM fondées sur les FBG. A. Duroux [40] a exploité cette idée pour obtenir des cartographies de la structure à partir de deux algorithmes différents. Toutefois, ces travaux se basent toujours sur un nombre limité de capteurs et exploitent un état de référence. Le couplage FBG/exploitation du bruit ambiant constitue une réelle originalité qui offre une voie nouvelle pour le développement de solutions SHM par OG sans état de référence grâce à la grande densité de points de mesure qu'offrent les FBG.

A travers l'état d'art introduit en début de ce chapitre, un système SHM robuste doit être en mesure d'automatiser le processus d'identification et de localisation des défauts, et d'estimer la durée de vie résiduelle de la structure. L'objectif de ce chapitre est d'apporter deux premières briques au développement d'une méthode SHM mettant en œuvre des méthodes d'imagerie qualitatives actives pour le contrôle des structures simples telles que les plaques de

faible épaisseur. Les méthodes proposées dans ce chapitre reposent sur un état de référence pour la comparaison des signaux réels et synthétiques ainsi que pour la formation de l'image et utilisent des capteurs déployés en surface de la structure.

Dans cette étude, l'inspection du milieu vise à localiser des défauts placés à l'intérieur de la zone d'intérêt délimitée par deux réseaux linéaires de transducteurs. L'un des enjeux auxquels nous nous attachons est d'évaluer l'influence du nombre de transducteurs sur la résolution de l'image. En pratique, les technologies SHM sont embarquées dans des structures solides telles que les plaques homogènes ou composites en utilisant un nombre d'émetteurs/récepteurs limité. Afin de simplifier le problème et de s'affranchir des effets dispersifs de l'onde dans une plaque, nous focalisons notre attention sur des problèmes de propagation d'ondes scalaires. Les méthodes d'imagerie exposées dans ce chapitre sont appliquées à des milieux fluides homogènes pour détecter des défauts académiques de type inclusions solides dans une matrice fluide. L'étude effectuée dans ce chapitre est entièrement fondée sur des données synthétiques et des simulations numériques effectuées dans le domaine fréquentiel. Les paramètres des simulations numériques à savoir les équations d'entrées, le maillage, le traitement des frontières du milieu, ainsi que la représentation des résultats obéissent (sauf mention contraire) aux mêmes règles établies que la section 4 du chapitre 2.

4.2 Imagerie ultrasonore des milieux homogènes : configuration d'inspection en transmission

4.2.1 Éclairage avec un front d'onde plan

Dans cette section, l'objectif est de détecter et de localiser un défaut dans un milieu homogène infini. Dans un premier temps, l'image du milieu sera obtenue en adaptant la méthode d'IT introduite dans le chapitre 2 à une configuration d'inspection en transmission. Dans un second temps, nous proposerons une deuxième méthode d'imagerie qui s'inspire beaucoup de l'IT et du retournement temporel mais qui semble être mieux adaptée à une inspection ultrasonore en transmission.

Considérons un milieu fluide homogène infini Ω_{ε_1} dans le plan $(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ (voir la figure 4.1). Ce dernier est entièrement entouré par des couches absorbantes en gris sur la figure 4.1 et contient un objet solide en acier ε_1 placé

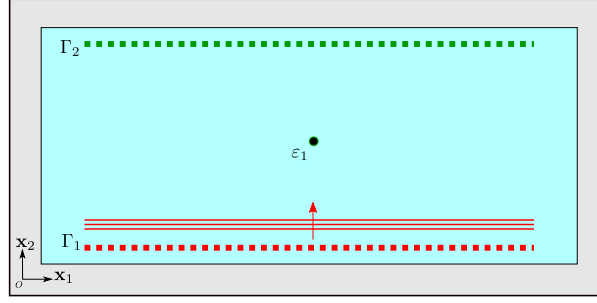


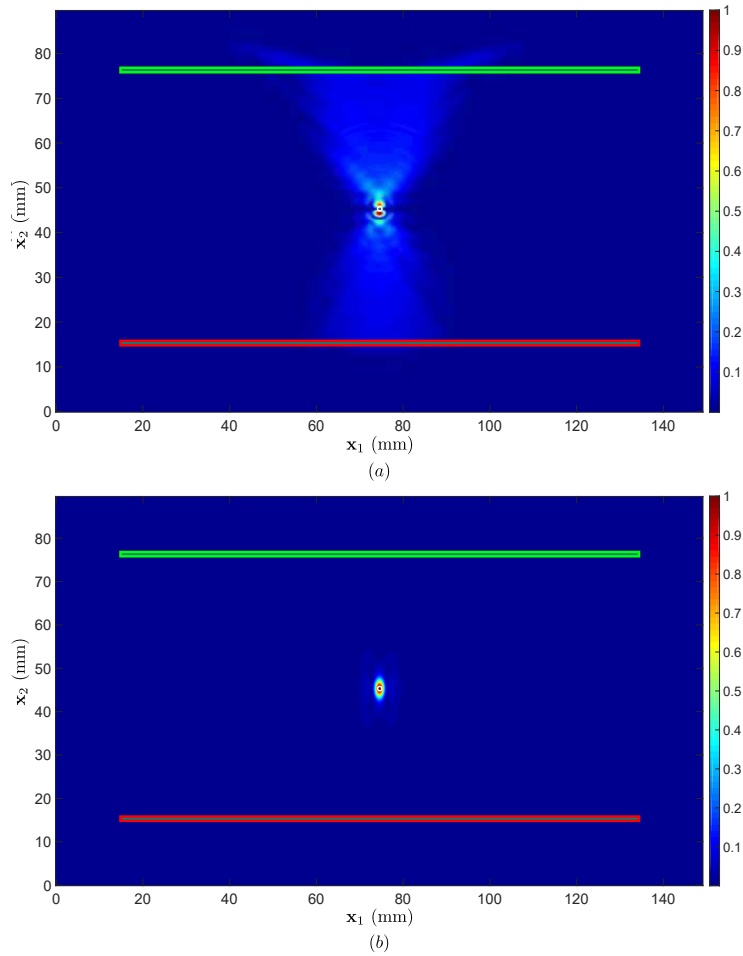
FIGURE 4.1 – Schéma descriptif de l’inspection ultrasonore en transmission du milieu Ω_{ε_1} . Le trait rouge correspond à l’ensemble des capteurs ayant servis à l’émission du front d’onde plan et à la réception de l’onde réfléchie. Le trait vert hachuré représente les capteurs de mesure de l’onde transmise. La zone grise est associée aux régions absorbantes.

en son centre, à mi-chemin entre deux sondes identiques ($\Gamma_{m_1}, \Gamma_{m_2}$) de 120 transducteurs chacune. La simulation de l’expérience physique consiste à sonder le milieu Ω_{ε_1} avec un front d’onde plan généré par la sonde Γ_{m_1} . Le défaut ε_1 diffracte l’onde incidente en une onde réfléchie mesurée par la sonde Γ_{m_1} et une onde transmise mesurée par la sonde Γ_{m_2} . Parallèlement à la simulation de l’expérience physique, une deuxième simulation numérique reproduit à l’identique le même problème de propagation d’ondes dans un milieu de référence sans défaut noté Ω . La mesure de la discordance entre la réponse du milieu réel Ω_{ε_1} et du milieu de référence Ω est faite à deux endroits différents.

Cette discordance correspond au résidu de l’IT. Dans notre problème le résidu est calculé à deux endroits différents. Le premier résidu contenant l’information relative à l’onde réfléchie est calculé au niveau de Γ_{m_1} , tandis que le second contient l’information associée à l’onde transmise et est calculé au niveau de Γ_{m_2} . Le champ adjoint de l’IT est décomposé en deux champs adjoints, chacun correspondant aux résidus définis plus tôt. Ainsi, pour ce problème physique, nous disposons d’un problème direct et de deux problèmes adjoints. Le milieu de référence étant homogène, la fonction d’imagerie de ce milieu fait intervenir le produit du champ de pression direct par la somme des deux champs de pression adjoints, que nous pouvons traduire par l’équation :

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \int_0^T P_d(\mathbf{x}, -t) \cdot (P_{a1}(\mathbf{x}, t) + P_{a2}(\mathbf{x}, t)) dt. \quad (4.1)$$

La figure 4.2 représente l’image du milieu Ω_{ε_1} (les couches absorbantes incluses) en utilisant la fonction d’imagerie (4.1). Les traits rouges correspondent à l’ensemble des transducteurs servant à l’émission du front d’ondes plan et



Résidu	Dir./Adj.
•••••	■

FIGURE 4.2 – Imagerie ultrasonore en transmission du milieu Ω_{ε_1} . Le trait rouge correspond au réseau de transducteurs Γ_{m_1} . Le trait vert est affecté au réseau de transducteurs Γ_{m_2} . (a) Formation d’image par IT en Transmission. (b) Formation d’image par ICCA.

à la réception de l’onde réfléchi. Les traits verts sont affectés aux transducteurs dédiés à la mesure de l’onde transmise. Le cercle blanc en plein milieu de chaque image est la véritable position de ε_1 dans Ω_{ε_1} . Sur la figure 4.2-a la signature du défaut est dédoublée, les deux taches sont de la même forme et leurs maxima sont espacés d’un millimètre dans la direction \mathbf{x}_2 . Ce dédoublement provient du fait que les résidus rétropropagés à travers les problèmes adjoints se focalisent sur la frontière de ε_1 . Étant donné que l’excitation de Ω_{ε_1} est effectuée avec la sonde Γ_{m_1} , le maximum de l’énergie renvoyée par ε_1 se trouve contenue dans l’onde réfléchi, il est donc naturel

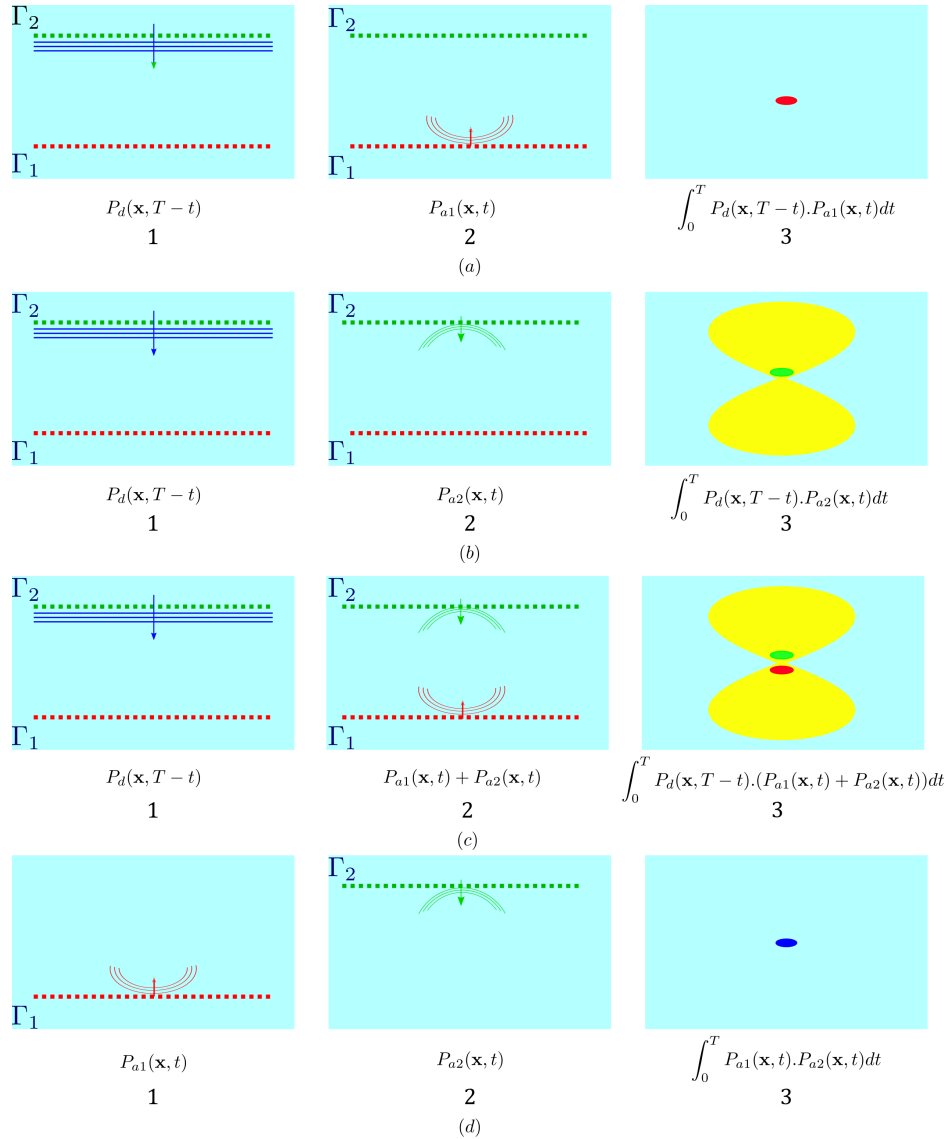


FIGURE 4.3 – Schéma descriptif de la contribution des fonctions d'imagerie. (a) Représentation de la contribution du terme A de la fonction d'imagerie. (b) Représentation de la contribution du terme B de la fonction d'imagerie. (c) Représentation de la fonction d'imagerie 4.1. (d) Représentation de la fonction d'imagerie 4.2.

de constater que la première tache dans la direction \mathbf{x}_2 est légèrement plus intense que la seconde. La largeur à mi-hauteur des deux taches est de $1/2\lambda_{fc}$ pour la tache la plus intense et de $0.42\lambda_{fc}$ pour la seconde. L'IT en transmission fournit un résultat acceptable en termes de résolution et de qualité de focalisation. Toutefois, la figure

4.2-a, illustre clairement un artéfact en forme de sablier. Cet anomalie trouve son explication dans la manière d'écrire le gradient topologique (fonction d'imagerie) et le concept de la limite de diffraction.

Pour mieux comprendre l'origine des artéfacts visualisés sur la figure 4.2-a, commençons tout d'abord par décomposer la fonction d'imagerie (4.1) de la façon suivante :

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = A + B, \quad (4.2)$$

avec $A = \int_0^T P_d(\mathbf{x}, -t) \cdot P_{a1}(\mathbf{x}, t) dt$ et $B = \int_0^T P_d(\mathbf{x}, -t) \cdot P_{a2}(\mathbf{x}, t) dt$. Nous renvoyons le lecteur à la figure 4.3 afin de visualiser le comportement des champs d'ondes et leurs effets sur les images construites.

Sur les figures 4.3 les traits rouges en pointillés sont affectés au réseau de transducteurs Γ_{m_1} . Les traits verts en pointillés sont associés au réseau de transducteurs Γ_{m_2} . Les traits continus en bleu représentent le champ direct lu à l'envers. Les arcs rouges représentent les résidus retournés temporellement et rétropropagés depuis Γ_{m_1} . Les arcs verts illustrent les résidus retournés temporellement et rétropropagés depuis Γ_{m_2} . Les figures placées sur la première colonne en partant de la droite représentent l'image correspondante à chaque situation.

La figure 4.3-a illustre la contribution du terme A dans la fonction d'imagerie (4.2). Le croisement du champ direct lu à l'envers avec le champ adjoint ayant comme source le résidu mesuré au niveau de Γ_{m_1} s'opère uniquement autour de la position du défaut et fait apparaître une seule tache. Ce comportement est analogue en tout point avec celui de la fonction d'imagerie (2.62) établie dans le chapitre 2 pour des configurations d'inspections en réflexion. La figure 4.3-b représente quant à elle la contribution du terme B dans la fonction d'imagerie (4.2). Pour chaque pas de temps dans l'intervalle $[0, T]$ le champ direct lu à l'envers est multiplié par le champ adjoint associé au réseau Γ_{m_2} . L'évolution de ces deux champs en temps montre que ces derniers se suivent tout au long du temps de la simulation. Ainsi, le terme B est non nul sur tous les points d'intersection et *a fortiori* autour de la position du défaut ε_1 dans Ω_{ε_1} . La figure 4.3-c représente l'allure de la somme des deux contributions (A et B) qui se trouve être vraisemblable au résultat fourni dans la figure 4.2-a. Pour résumer, l'IT adaptée à une inspection en transmission fait apparaître pour chaque défaut deux taches séparées (dans la même direction de l'onde d'excitation) d'une distance du même ordre de grandeur que le diamètre du défaut. Les deux signatures sont noyées dans un artéfact qui peut être pénalisant pour une méthode de CND ou SHM en particulier si le milieu d'intérêt contient d'autres inclusions moins échogènes que ε_1 placées sur la zone de l'artéfact.

Afin de contourner le problème d'artéfact, il est utile de rappeler le rôle du problème direct dans le processus d'IT. Dans un problème d'OT ou d'IT le problème direct a deux fonctions :

1. D'une part, il sert à mesurer la discordance au niveau des points de mesures entre l'expérience physique et la simulation numérique calculées dans le milieu de référence : le résidu.
2. D'autre part, il joue le rôle de révélateur de la position du défaut dans le milieu en croisant le champ adjoint à l'endroit où est placé le défaut.

La première fonction du problème direct (calcul du résidu) est incontournable car elle est à la base de tout problème d'OT dont découle la notion d'Imagerie Topologique. En revanche, le rôle de révélateur que joue le champ direct dans le processus d'IT en transmission peut être délaissé. En effet, en voyant la démarche d'imagerie comme une opération de croisement de deux ou plusieurs champs, il est plus judicieux de se servir de l'information contenue dans les résidus mesurés au niveau des deux réseaux de capteurs pour croiser les deux champs adjoints correspondants comme le montre la figure 4.3-d. A notre connaissance, aucune approche vraisemblable à celle qu'on vient de proposer n'existe déjà dans la littérature. Nous appelons cette méthode Imagerie par Croisement des Champs Adjoints ICCA dont la fonctions d'imagerie est :

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \int_0^T P_{a1}(\mathbf{x}, t) \cdot P_{a2}(\mathbf{x}, t) dt. \quad (4.3)$$

La figure 4.2-b représente l'image du milieu Ω_{ε_1} en utilisant l'équation (4.3). La tache brillante sur la figure 4.2-b révèle la position du défaut ε_1 dans le milieu. Elle est parfaitement centrée autour du cercle blanc qui indique la véritable position du défaut dans le milieu Ω_{ε_1} et sa largeur à mi-hauteur est de $1/2\lambda_{fc}$. La méthode que nous proposons pour imager le milieu dans une configuration d'inspection en transmission est nettement meilleure en termes de résolution que l'IT en transmission.

Dans ce paragraphe nous avons adapté la méthode d'IT à une configuration d'inspection en transmission en utilisant deux réseaux de transducteurs parallèles pour générer un front d'onde plan. Le cas de figure examiné a permis de mieux cerner les limites de l'IT en transmission et d'introduire une nouvelle méthode d'imagerie nommée ICCA mieux adaptée aux inspections ultrasonores en transmission. Toutefois, l'excitation du milieu par un champ d'ondes directif est peu intéressante car cela implique l'usage de dispositifs électroniques très difficiles à embarquer dans des structures aéronautiques par exemple. Notre prochain objectif est de réduire le nombre de transducteurs

afin de vérifier la robustesse des deux méthodes face à une diminution de la quantité d'informations.

4.2.2 Éclairage avec plusieurs transducteurs

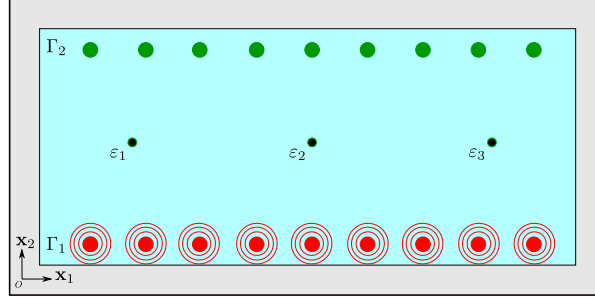
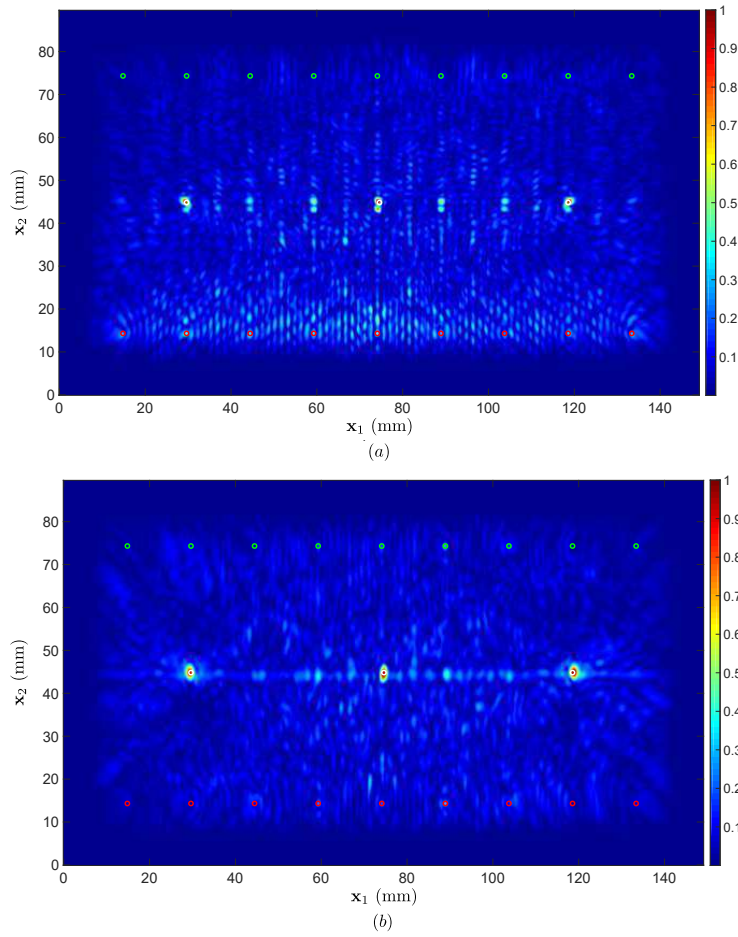


FIGURE 4.4 – Schéma descriptif de l'inspection ultrasonore en transmission du milieu Ω_{ε_1} . Les points rouges correspondent à l'ensemble des capteurs ayant servi à l'émission du front d'onde plan et à la réception de l'onde réfléchi. Les points verts représentent les capteurs de mesure de l'onde transmise. La zone grise est associée aux régions absorbantes.

Dans ce paragraphe nous allons évaluer les performances de la méthode d'ITT et d'ICCA après avoir réduit conséquemment le nombre de transducteurs et multiplié le nombre de défauts. Considérons un milieu fluide homogène semi-infini Ω_{ε} dans le plan $(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ (voir la figure 4.4). Le milieu Ω_{ε} contient trois défauts en acier (de 1mm de diamètre) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ alignés dans la direction \mathbf{x}_1 et placés à mi-chemin entre deux réseaux identiques de 9 capteurs ($\Gamma_{m_1}, \Gamma_{m_2}$). Les capteurs sont circulaires (5 mm de diamètre) et espacés de $5\lambda_{fc}$ de centre à centre.

Dans la simulation de l'expérience physique, les transducteurs de Γ_{m_1} sont tous actionnés pour sonder le milieu. Le champ d'ondes réfléchi par les défauts $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ est mesuré par le même réseau, tandis que le champ d'ondes transmis est mesuré par le réseau Γ_{m_2} . Parallèlement, la simulation du problème direct est calculée dans le milieu de référence sain Ω . Comme dans le cas d'éclairage par front d'onde plan, les deux résidus sont mesurés au niveau de Γ_{m_1} et Γ_{m_2} afin de calculer les problèmes adjoints correspondants dans le milieu de référence Ω .

Sur la figure 4.5-a le résultat d'IT en transmission est représenté en utilisant la fonction d'imagerie (4.1). Les cercles rouges sur l'image désignent le réseau de transducteurs Γ_{m_1} , tandis que les cercles verts sont affectés au réseau de transducteurs Γ_{m_2} . Trois cercles blancs sont représentés pour indiquer les vraies positions des défauts dans le milieu réel. Sur la figure 4.5-a les taches surbrillantes correspondent aux signatures des défauts. Sur la même ligne où sont localisés les trois défauts, nous remarquons des faux positifs dispersés de manière périodique ce qui



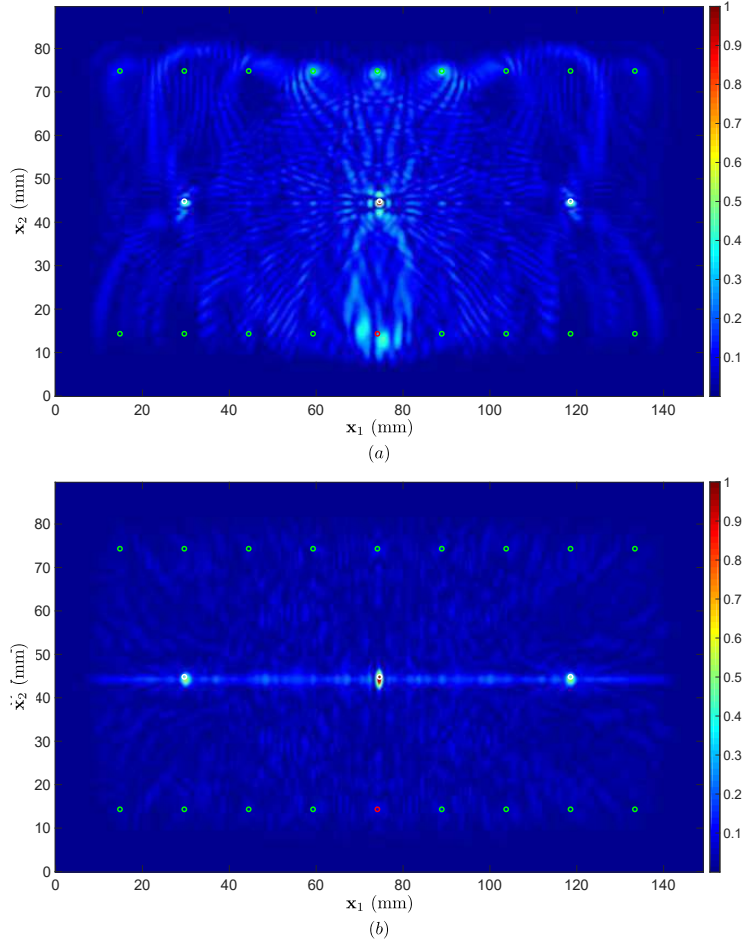
Résidu	Dir./Adj.
•••••	■

FIGURE 4.5 – Imagerie ultrasonore en transmission du milieu Ω_ε . Les cercles rouges correspondent au réseau de transducteurs Γ_{m_1} servant à l'émission des ondes excitatrices et à la réception des ondes réfléchies par les défauts. Les cercles verts sont affectés au réseau Γ_{m_2} utilisé pour mesurer l'onde transmise. Les cercles blancs au voisinage des taches lumineuses indiquent les positions des défauts dans le milieu réel. (a) Formation d'image par ITT. (b) Formation d'image par CCA.

semble être un repliement spatial, conséquence du sous échantillonnage spatial. En effet, le critère de Shannon est non respecté dans cet exemple car l'espace inter-éléments entre les capteurs des réseaux (Γ_{m_1} Γ_{m_2}) est cinq fois la longueur d'onde à fréquence centrale dans l'eau. Sur la même figure nous remarquons plusieurs artéfacts autour de la zone où sont disposés les capteurs du réseau Γ_{m_1} . A la différence du problème traité dans le paragraphe 4.2.1, l'excitation du milieu Ω_ε dans celui-ci n'est pas directive, les capteurs du réseau Γ_{m_1} rayonnent dans toutes les

directions de l'espace (voir la figure (4.4)). Lors de la rétropropagation du résidu mesuré en Γ_{m_1} , une grande partie de ce dernier se focalise autour des défauts, alors qu'une petite partie se propage dans la direction \mathbf{x}_1 . Celle-ci rase le champ direct au moment où il atteint la zone où sont disposés les capteurs de Γ_{m_1} donnant naissance à des interférences qui se manifestent par des artéfacts sur l'image finale. La figure 4.5-b illustre l'image du même milieu obtenue par l'équation (4.3). La position des défauts est clairement plus précise sur la figure 4.5-b, les artéfacts autour des capteurs ayant servis à l'émission ont disparus et les faux positifs sont beaucoup moins prononcés que sur la figure 4.5-a.

Nous proposons de reprendre le même problème qu'étudié dans ce paragraphe en utilisant uniquement le 5ème transducteur de Γ_{m_1} pour l'excitation du milieu. Sur la figure 4.6-a il est intéressant de remarquer que, d'une part, les fantômes visualisés sur la figure 4.5-a et les artéfacts engendrés par le couplage de transducteurs semblent avoir disparus pour laisser place à un motif assez particulier en termes de géométrie. D'autre part, la signature du défaut placé au centre du milieu est plus intense que les signatures des défauts latéraux pour des raisons de proximité de la source. Dans cet exemple, plus le défaut est loin de la source excitatrice, moins l'énergie qu'il renvoie est importante et moins il sera visible sur l'image. La figure 4.6-b est une démonstration de performance supplémentaire en faveur de l'ICCA. La signature du défaut central est plus intense que les autres pour les mêmes raisons évoquées qu'auparavant et la résolution est nettement améliorée par rapport à celui de la figure 4.5-a. L'utilisation d'un seul transducteur pour l'excitation du milieu à l'avantage de réduire la présence des artéfacts et d'économiser de l'énergie en particulier pour des techniques SHM embarquées



Résidu	Dir./Adj.

FIGURE 4.6 – Imagerie ultrasonore en transmission du milieu Ω_ε . Le cercle rouge correspond au transducteur de Γ_{m_1} ayant servi à sonder le milieu. Les cercles verts sont affectés aux capteurs utilisés pour la mesure de l'onde transmise. Les cercles blancs au voisinage des taches lumineuses indiquent les positions des défauts dans le milieu réel. (a) Formation d'image par ITT. (b) Formation d'image par CCA.

4.3 Conclusion

L'apport de ce chapitre est d'adapter la méthode d'IT à une configuration d'inspection en transmission et à la mise en œuvre d'une nouvelle méthode d'imagerie nommée ICCA. Le problème étudié dans ce chapitre consiste premièrement, à sonder un milieu homogène défectueux avec un ou plusieurs transducteurs du réseau dédié à l'émission et à la réception des signaux, tandis qu'un deuxième réseau de transducteurs est utilisé pour la mesure du champ d'ondes transmis à travers le milieu inspecté. Deuxièmement, une simulation de l'expérience physique est effectuée dans un état de référence sans défaut pour comparer la discordance entre les deux états au niveau des points de mesures.

En éclairant le milieu avec un front d'onde plan, l'IT adaptée à ce problème fait intervenir le problème direct calculé dans le milieu de référence en plus de deux problèmes adjoints. Chaque problème adjoint dispose comme source, le résidu rétropropagé depuis le réseau ayant servi à le mesurer. La formation d'image dans le cadre de l'IT fait appel à la somme des deux champs adjoints multipliée par le champ direct lu à l'envers. La multiplication du champs adjoint ayant comme source le résidu mesuré au niveau de Γ_2 par le champ direct implique que ces deux se croisent pour chaque pas de temps dans l'intervalle $[0, T]$ (avec T le temps de la simulation). Cette opération de multiplication combinée au phénomène de limite de diffraction engendre des artéfacts qui dégradent significativement la qualité de l'image du milieu.

Afin de pallier à ce problème, nous proposons de modifier la fonction d'imagerie. Dans la démarche de l'ICCA, l'idée sous-jacente est d'exploiter le retournement temporel des deux résidus pour révéler la position des défauts à travers la multiplication des deux champs adjoints. Ainsi, le point fort de l'ICCA est la connaissance de la position du réseau de transducteurs ayant servis à la mesure du champ d'ondes transmis. Plusieurs exemples présentés dans ce chapitre démontrent clairement la robustesse de notre démarche vis-à-vis de l'IT en transmission.

L'aspect intégré des technologies SHM se doit d'être économique et léger car la masse due à l'intrusion des composantes du dispositif d'inspection fait que le nombre de capteurs à embarquer est souvent limité. Nous avons donc réétudier le même problème après avoir réduit significativement le nombre de transducteurs de chaque réseau. Dans ce cas de figure, nous avons constaté à travers les simulations numériques que la meilleure solution résidait dans le fait d'actionner un seul transducteur pour l'excitation du milieu et d'utiliser le reste des transducteurs pour la réception des signaux. Nous avons pu démontrer également que l'échantillonnage spatial du réseau jouait

grandement sur l'apparition de faux positifs. L'étude menée dans ce chapitre concernait uniquement des problèmes synthétiques visant à l'inspection des milieux fluides, une perspective à court terme consiste à transposer le problème sur des structures plaque ou guide d'ondes pour détecter des défauts plus réalistes comme des fissures ou des cavités.

Bibliographie

- [1] Mikael Carmona. *Identification passive des milieux de propagation élastiques. Application à la reconstruction géométrique des réseaux de capteurs et au diagnostic des structures*. Thèse, Université de Grenoble, 2012.
- [2] Céline Hadziioannou, Eric Larose, Olivier Coutant, Philippe Roux, and Michel Campillo. Stability of monitoring weak changes in multiply scattering media with ambient noise correlation : laboratory experiments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 125 :3688, 2009.
- [3] Chun H Wang, James T Rose, and Fu-Kuo Chang. A synthetic time-reversal imaging method for structural health monitoring. *Smart Materials and Structures*, 13(2) :415–423, 2004.
- [4] Xiaoliang Zhao, Huidong Gao, Guangfan Zhang, Bulent Ayhan, Fei Yan, Chiman Kwan, and Joseph L Rose. Active health monitoring of an aircraft wing with embedded piezoelectric sensor/actuator network : I. Defect detection, localization and growth monitoring. *Smart Materials and Structures*, 16(4) :1208–1217, 2007.
- [5] Jeong-beom Ihn and Fu-kuo Chang. Detection and monitoring of hidden fatigue crack growth using a built-in piezoelectric sensor/actuator network : II. Validation using riveted joints and repair patches. *Smart Materials and Structures*, 13(April 2016) :621–630, 2004.
- [6] Zhongqing Su, Xiaoming Wang, Zhiping Chen, Lin Ye, and Dong Wang. A built-in active sensor network for health monitoring of composite structures. *Smart Materials and Structures*, 15(6) :1939–1949, 2006.
- [7] Seth S Kessler, S Mark Spearing, and Constantinos Soutis. Damage detection in composite materials using Lamb wave methods. *Smart Materials and Structures Damage*, 11 :269, 2002.
- [8] Jeong Beom Ihn and Fu Kuo Chang. Pitch-catch Active Sensing Methods in Structural Health Monitoring for Aircraft Structures. *Structural Health Monitoring*, 7(1) :5–19, 2008.
- [9] N. Quaegebeur, P. Micheau, P. Masson, and M. Castaings. Methodology for optimal configuration in structural health monitoring of composite bonded joints. *Smart Materials and Structures*, 21(10) :105001, 2012.
- [10] Xudong Yu, Zheng Fan, Sreedhar Puliyakote, and Michel Castaings. Remote monitoring of bond line defects between a composite panel and a stiffener using distributed piezoelectric sensors. *Smart Materials and Structures*, 27(3) :1–15, 2018.

- [11] V. Memmolo, E. Monaco, N. D. Boffa, L. Maio, and F. Ricci. Guided wave propagation and scattering for structural health monitoring of stiffened composites. *Composite Structures*, 184(September 2017) :568–580, 2018.
- [12] Fabricio G. Baptista, Danilo E. Budoya, Vinicius A.D. de Almeida, and Jose Alfredo C. Ulson. An experimental study on the effect of temperature on piezoelectric sensors for impedance-based structural health monitoring. *Sensors*, 14(1) :1208–1227, 2014.
- [13] Ki Young Koo, Seunghee Park, Jong Jae Lee, and Chung Bang Yun. Automated impedance-based structural health monitoring incorporating effective frequency shift for compensating temperature effects. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 20(4) :367–377, 2009.
- [14] William K. Wilkie, Robert G. Bryant, James W. High, Robert L. Fox, Richard F. Hellbaum, Anthony Jalink, Jr., Bruce D. Little, and Paul H. Mirick. Low-cost piezocomposite actuator for structural control applications. In *Proceedings of SPIE, Smart Structures and Materials 2000*, number June 2000, pages 323–334, 2000.
- [15] S.W. Doebling, C.R. Farrar, M.B. Prime, and D.W. Shevitz. Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics : A literature review. Technical Report May 2014, 1996.
- [16] K. Diamanti, C. Soutis, and J. M. Hodgkinson. Piezoelectric transducer arrangement for the inspection of large composite structures. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 38(4) :1121–1130, 2007.
- [17] M. Azarbayejani, A. I. El-Osery, K. K. Choi, and M. M. Reda Taha. A probabilistic approach for optimal sensor allocation in structural health monitoring. *Smart Materials and Structures*, 17(5) :055019, 2008.
- [18] T. Kijewski and A. Kareem. Wavelet transforms for system identification in civil engineering. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 18(5) :339–355, 2003.
- [19] David N. Alleyne and Peter Cawley. The Interaction of Lamb Waves with defects. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 39(3) :381–396, 1992.
- [20] Yoluiho Clio. Estimation of ultrasonic guided wave mode conversion in a plate with thickness variation. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 47(3) :591–603, 2000.

- [21] Karim G Sabra, Philippe Roux, and W A Kuperman. Emergence rate of the time-domain Green's function from the ambient noise cross-correlation function. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118(6) :3524–3531, 2005.
- [22] J. C. P. McKeon and M. Hinders. Parallel projection and crosshole Lamb wave contact scanning tomography. *The Journal of the Acoustical Society of*, 106(5) :2568–2577, 1999.
- [23] Tom Druet. *Tomographie Passive par Ondes Guidées pour des Applications de Contrôle Santé Intégré*. Thèse, Université Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2017.
- [24] P. Belanger and P. Cawley. Feasibility of low-frequency straight-ray guided wave tomography. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1096, pages 153–160, 2009.
- [25] Shengying Li, Marcel Jackowski, Donald P. Dione, Trond Varslot, Lawrence H. Staib, and Klaus Mueller. Refraction corrected transmission ultrasound computed tomography for application in breast imaging. *Medical Physics*, 37(5) :2233–2246, 2010.
- [26] Pierre Belanger, Peter Cawley, and Francesco Simonetti. Guided Wave Diffraction Tomography Within the Born Approximation. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 57(6) :1405–1418, 2010.
- [27] F Simonetti and L Huang. From beamforming to diffraction tomography. *Journal of Applied Physics*, 103(10) :103110, 2008.
- [28] P Huthwaite and F Simonetti. High-resolution imaging without iteration : a fast and robust method for breast ultrasound tomography. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 130(3) :1721–1734, 2011.
- [29] P.E. Huthwaite. *Quantitative Imaging with Mechanical Waves*. Thèse, Imperial College London, 2012.
- [30] Jing Rao, Madis Ratassepp, and Zheng Fan. Guided Wave Tomography Based on Full Waveform Inversion. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 63(5) :737–745, 2016.
- [31] Oleg I Lobkis and Richard L Weaver. On the emergence of the Green's function in the correlations of a diffuse field. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110(6) :3011–3017, 2001.

- [32] Arnaud Derode, Eric Larose, Mickael Tanter, Julien de Rosny, Arnaud Tourin, Michel Campillo, and Mathias Fink. Recovering the Green's function from field-field correlations in an open scattering medium (L). *The Journal of the Acoustical Society of America*, 113(6) :2973, 2003.
- [33] Arnaud Derode, Eric Larose, Michel Campillo, and Mathias Fink. How to estimate the Green's function of a heterogeneous medium between two passive sensors? Application to acoustic waves. *Applied Physics Letters*, 83(15) :3054–3056, 2003.
- [34] N Tsingos. *Simulation de champs sonores de haute qualité pour des applications graphiques interactives*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1998.
- [35] Jon F. Claerbout. Synthesis of a layered medium from its acoustic transmission response. *Geophysics*, 33(2) :264–269, 1968.
- [36] Emmanuel Moulin, Najib Abou Leyla, Jamal Assaad, and Sebastien Grondel. Applicability of acoustic noise correlation for structural health monitoring in nondiffuse field conditions. *Applied Physics Letters*, 95(9) :094104, 2009.
- [37] Javier A Ruiz, David Baumont, Pascal Bernard, and Catherine Berge-Thierry. Combining a kinematic fractal source model with hybrid Green's functions to model broadband strong ground motion. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 103(6) :3115–3130, 2013.
- [38] P Dublanchet, P Bernard, and P Favreau. Creep modulation of Omori law generated by a Coulomb stress perturbation in a 3-D rate-and-state asperity model. *Journal of Geophysical Research E : Planets*, 118(9) :4774–4793, 2013.
- [39] C Betz Daniel, Thursby Graham, Culshaw Brian, and J Staszewski Wieslaw. Acousto-ultrasonic sensing using fiber Bragg gratings. *Smart Materials and Structures*, 12(1) :122–128, 2003.
- [40] Adelaide Duroux, Karim G Sabra, James Ayers, and Massimo Ruzzene. Extracting guided waves from cross-correlations of elastic diffuse fields : Applications to remote structural health monitoring. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 127(1) :3311–3314, 2010.

Conclusion générale

Depuis fort longtemps, la propagation des ondes en milieux hétérogènes fait l'objet de nombreuses études théoriques et expérimentales et ce dans plusieurs domaines tels que le CND ou la géophysique. Cette thèse s'est principalement articulée autour des méthodes d'imagerie ultrasonore des milieux hétérogènes réguliers à l'image des Cristaux Phononiques (CP), fabriqués à partir d'inclusions solides immergées dans une matrice fluide. Elle a été l'occasion de travaux porteurs de solutions pour cette problématique, mais plus largement des thématiques voisines ont été explorées donnant lieu au développement d'une nouvelle méthode d'imagerie adaptée aux inspections ultrasonores en transmission.

Dans le premier chapitre de ce manuscrit, nous avons vu que les méthodes d'OT et de FWI se rattachent à la résolution de problèmes inverses. Ces deux méthodes non conventionnelles se distinguent des méthodes d'imagerie classiques par leur modélisation générale des problèmes qu'elles résolvent. Dans le but de construire une image de réflectivité du milieu prospecté, ces techniques reposent sur un état de référence virtuel aussi proche que possible du milieu réel. Le milieu de référence est modifié de manière itérative jusqu'à ce que les données numériques concordent le mieux possible avec les observations expérimentales. La stratégie de l'OT repose sur :

1. La définition d'une fonction coût qui quantifie la discordance entre les données expérimentales et les données synthétiques,
2. L'analyse de sensibilité de cette fonction coût vis-à-vis de l'introduction de trous infinitésimaux.

L'étude de la sensibilité de la fonction coût se traduit par un développement asymptotique de la fonction coût par rapport à la variable topologique. Le premier ordre de ce développement fait apparaître un terme non constant appelé gradient topologique qui est fonction de la seule variable spatiale. Ce dernier est un indicateur local qui atteint des valeurs négatives significatives là où l'insertion d'un trou infinitésimal dans le milieu de référence induirait la plus forte décroissance de la fonction coût.

La FWI est une méthode voisine de l'OT, même si les deux méthodes sont différentes au regard des problèmes auxquels elles sont dédiées. En effet, alors que l'OT traite des problèmes de diffraction par des petits défauts (cavité de type Dirichlet, Neumann, ou défaut pénétrable) devant la longueur d'onde, la FWI reconstruit les paramètres continus dans le milieu inspecté. . Nous avons mis en évidence que les stratégies d'inversion de données sont étonnement similaires. Sous certaines conditions, les gradients des fonctions coûts des deux méthodes sont équivalents. Ces derniers s'expriment sous une forme élégante qui fait appel à deux champs ondulatoires. Ils correspondent aux solutions des problèmes direct et adjoint calculés dans le milieu de référence (virtuel). La différence entre ces deux problèmes réside dans leur source respective, ainsi le temps de construction du gradient est de deux fois le temps de calcul du problème direct.

Dans le deuxième chapitre, nous avons mis en évidence que l'IT est définie à partir de la première itération du gradient de l'OT. Son processus de construction de l'image de réflectivité du milieu se résume en cinq étapes :

1. Réalisation de l'expérience physique et acquisition des observations expérimentales.
2. Modélisation fidèle de l'expérience physique : résolution du problème direct dans le milieu de référence.
3. Calcul du résidu à partir des réponses de l'état perturbé et de l'état sain.
4. Rétropropagation du résidu à partir de la surface de mesure via le problème adjoint (calculé dans le milieu de référence).
5. Construction de l'image du milieu grâce à la somme cumulée du produit du champ direct par le champ adjoint pour chaque pas de fréquence/temps. Le champ direct lu à l'envers croise le champ adjoint qui focalise le résidu vers la position du défaut révélant ainsi sa position sur l'image.

Les points forts de l'IT sont :

1. La prise en compte de la complexité du milieu à travers la modélisation numérique.
2. L'opération de retournement temporel est effectuée numériquement à travers le problème adjoint.

Si la simulation de l'expérience physique à travers le problème direct est fidèle à l'inspection physique du milieu, ce dernier peut être imagé avec précision quelle que soit sa complexité. Dans le même chapitre, nous avons d'une part, mis en évidence l'équivalence entre les méthodes d'imagerie classiques fondées sur le principe de retard-sommation et l'IT dans un milieu homogène infini ; et d'autre part, souligné que l'IT peut être vue comme une généralisation des méthodes d'imagerie classiques des milieux hétérogènes.

L'IT a été appliquée pour l'inspection en réflexion d'un milieu hétérogène régulier dans un régime propagatif à faible désordre. Le défaut a été défini comme étant l'absence d'une tige dans le réseau périodique. Les simulations numériques confirment la robustesse de la méthode pour identifier le défaut sur l'image avec une résolution axiale et latérale de l'ordre de $1/3\lambda_{fc}$ à partir d'une seule excitation sous forme d'onde plane.

En principe, l'IT requiert une mesure expérimentale et une modélisation de l'expérience physique pour calculer le résidu. Dans le but d'évaluer la sensibilité de l'IT face à des erreurs de positionnement de la sonde, des études numériques ont été effectuées. Elles ont permis de conclure qu'un écart entre la position de la sonde, dans la simulation virtuelle, par rapport à l'expérience physique engendre des faux positifs d'autant plus importants que l'erreur est grande. Ces erreurs peuvent être contenues, entre autres, dans la description géométrique du milieu ou dans les constantes d'élasticité. Afin de simplifier l'accès aux informations affectées au résidu, nous avons proposé d'obtenir le résidu de manière purement expérimentale, en comparant les réponses du milieu avant et après l'introduction de la perturbation.

Dans le troisième chapitre de la thèse, nous nous sommes inspirés de l'IT et des travaux publiés dans [1] afin de mettre en œuvre une nouvelle méthode d'imagerie appelée IT Hybride. Cette méthode utilise deux milieux de référence distincts dans son processus de formation de l'image. Le premier est un milieu de référence hétérogène (expérimental), qui sert à calculer le résidu. Le second est un milieu de référence homogène où sont calculés les problèmes direct et adjoint. Disposant désormais de trois manières différentes pour construire l'image d'un milieu donné (IT en utilisant un milieu de référence homogène, IT en utilisant un milieu de référence hétérogène, et IT Hybride), nous avons mené une étude comparative pour détecter et localiser différents types de défauts dans un

milieu hétérogène régulier. Le régime de transport de l'énergie du milieu est un régime diffusif ou de localisation faible. Ce dernier est un CP crée par un agencement de 275 tiges d'acier d'un millimètre de diamètre immergées dans l'eau. Le libre parcours moyen l_e dans le milieu est un multiple de la longueur d'onde à fréquence centrale dans l'eau λ_{fc} et la concentration surfacique du réseau de tiges est inférieure à 1%.

Lorsqu'il est question de détecter et de localiser un défaut ponctuel (diamètre du défaut inférieur à λ_{fc}), nous avons pu conclure que :

1. L'IT Homogène est inefficace pour identifier un défaut enfoui au-delà du libre parcours moyen de transport l^* du milieu. Dans ce type de situation, le résidu perd la mémoire de sa direction de propagation incidente car les informations relatives aux positions des inclusions sont ignorées lors de la modélisation du milieu de référence. Toutefois, l'IT Homogène peut être une solution appréciable lorsque le régime propagatif est à faible désordre. Ce cas de figure correspond à un milieu où le nombre d'inclusions est petit ou lorsque celles-ci sont faiblement échogènes.
2. L'IT Hétérogène fournit un bon résultat pour détecter le défaut quelle que soit sa position dans le CP. La prise en compte de l'hétérogénéité du CP dans la modélisation du milieu de référence fournit des informations complémentaires pour focaliser le résidu avec une précision remarquable. Sous l'effet d'une seule excitation en front d'onde plan, la résolution latérale est de l'ordre de $2/3\lambda_{fc}$. Toutefois, quelques difficultés demeurent quant à la mise en œuvre de la méthode. Premièrement, la connaissance, *a priori*, quasi-exacte du milieu inspecté est nécessaire à la construction du milieu de référence. Deuxièmement, la connaissance de la position précise de la barrette ultrasonore par rapport au réseau périodique des tiges est également importante. Selon la configuration expérimentale, l'obtention de cette information peut s'avérer plus au moins compliquée. Troisièmement, le temps nécessaire à la formation de l'image est relativement long, car elle requiert deux calculs distincts. Ce facteur limite l'applicabilité immédiate de la méthode dans le secteur industriel.
3. L'IT Hybride est très efficace lorsqu'il est question de défauts petits devant la longueur d'onde dans des milieux dilués comme le CP étudié dans ce travail. La résolutions axiales et latérales sont comparables ou un peu moins bonnes à celles de l'IT hétérogène tout en réduisant considérablement le temps de calcul. De plus, étant donné que les problèmes direct et adjoint sont posés dans un milieu homogène, les difficultés liées au positionnement du dispositif d'acquisition disparaissent.

Notons enfin que les résultats issus des expériences synthétiques sont en accord avec ceux issus des expériences réelles pour le problème de détection de l'absence d'une tige dans un CP. D'un autre côté, l'inspection des CP contenant des défauts étendus avec les méthodes évoquées plus haut montre que :

1. L'IT Hétérogène se révèle moins performante pour l'imagerie des défauts étendus. Cela est dû en partie à la déviation et à la division des faisceaux ultrasonores des champs direct et adjoint qui perturbent leur cohérence spatiale et temporelle au niveau du corps du défaut. En effet, l'introduction d'un défaut grand en comparaison de λ_{fc} dans le milieu réel éloigne celui-ci de manière significative du milieu de référence. Cela implique que les multiples interactions entre le défaut et le réseau de tiges sont importantes. Dans ce cas de figure particulier, nous pensons que la reconstruction du milieu de manière itérative est nécessaire.
2. L'IT Homogène et l'IT Hybride semblent fournir de meilleurs résultats dans ce cas. En effet, le défaut étendu est localisé avec plus de précision qu'avec l'IT Hétérogène et sa forme est plus proche de la réalité.

Pour finir avec les conclusions tirées du chapitre 3, nous avons pu constater à travers les divers exemples étudiés dans celui-ci qu'il est plus important de tenir compte de la complexité du milieu dans le calcul du résidu que dans le calcul des champs direct et adjoint.

Dans le dernier chapitre du manuscrit, nous nous sommes attachés à développer des méthodes d'imagerie ultrasonore adaptées au SHM. En toute rigueur, une telle étude devrait être menée sur des problèmes de propagation d'ondes dans des milieux solides, toutefois nous avons jugé bon de traiter un problème scalaire pour des raisons de simplicité. La configuration expérimentale sur laquelle nous nous sommes penchés correspond à un milieu fluide homogène infini dans lequel nous avons placé un certain nombre d'inclusions. Deux réseaux de transducteurs identiques sont disposés en vis-à-vis à l'intérieur du milieu de telle sorte que les inclusions soient placées entre les deux sondes. Dans un premier temps, nous avons entrepris d'adapter l'IT à cette configuration d'inspection en variant la nature de l'onde excitatrice et le nombre de capteurs actionnés pour sonder le milieu. Nous avons pu conclure que l'IT n'est pas la meilleure option pour détecter et localiser des défauts dans une configuration expérimentale en transmission. Dans un second temps, nous avons mis au point une nouvelle méthode d'imagerie qui semble être mieux adaptée à cette configuration. En interprétant l'IT comme un processus d'interférence de deux champs ondulatoires à l'endroit du défaut, nous avons eu l'idée de tirer profit de la disposition des capteurs pour calculer deux résidus au niveau de chaque réseau de transducteurs. Après avoir retourner temporellement les deux résidus,

la rétropropagation de ces derniers à travers leur problème adjoint respectif assure le croisement des deux champs adjoints à la position exacte du défaut dans le milieu sans avoir recours au problème direct.

Quant aux perspectives de recherche dans le prolongement de cette thèse, plusieurs points peuvent être envisagés. Le calcul de la solution de propagation d'ondes dans le milieu couplant (la matrice fluide) pourrait être effectué par un code semi-analytique, le modèle numérique aux éléments finis prendrait le relais pour la propagation dans le réseau périodique. Une autre solution envisageable trouve son origine dans les travaux [2, 3, 4] qui étudient le calcul de la solution des ondes dans des milieux périodiques composés de quelques cellules de périodicité à l'intérieur d'un milieu homogène non borné. Le code résultant de l'implémentation des formules dans ces travaux bénéficierait à la fois de la rapidité de la méthode semi-analytique, et de la capacité de la méthode numérique à prendre en compte des milieux complexes. L'approfondissement de la recherche dans ce sens pourrait ouvrir la voie à de l'imagerie 3D qui est jusqu'à ce jour assez peu explorée en raison des ressources de calcul qu'elle exige. Nous pouvons imaginer un autre sujet de recherche qui consisterait à imager des CP avec une excitation dont la gamme de fréquence se situe dans la bande interdite du CP. Il serait intéressant de tester la robustesse de l'IT dans des régimes de transport de l'énergie de localisation forte [5] également. Si le système de mesure multi-voies est fiable, il serait appréciable de confronter les études numériques présentées dans le chapitre 3 (en particulier pour les défauts étendus) avec des essais expérimentaux. Le dispositif expérimental décrit dans le même chapitre a été conçu pour effectuer des inspections avec différents angles d'incidences, et/ou différentes orientations (dans la direction verticale) du réseau des transducteurs par rapport au milieu inspecté. De telles expériences permettront d'obtenir une meilleure description volumique des défauts ou autres inclusions dans le milieu.

Concernant l'imagerie ultrasonore en transmission, il convient de souligner que le travail présenté dans le chapitre 4 est une étude préliminaire. La prochaine étape devrait appliquer les méthodes abordées dans ce chapitre à l'inspection des guides d'ondes.

Bibliographie

- [1] S. T. Rakotonarivo, S. C. Walker, W. a. Kuperman, and P. Roux. Localization of a small change in a multiple scattering environment without modeling of the actual medium. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 130(6) :3566–3573, 2011.
- [2] Lijun Yuan and Ya Yan Lu. An efficient bidirectional propagation method based on Dirichlet-to-Neumann maps. *IEEE Photonics Technology Letters*, 18(18) :1967–1969, 2006.
- [3] Lijun Yuan and Ya Yan Lu. A Recursive-doubling Dirichlet-to-Neumann-map method for periodic waveguides. *Journal of Lightwave Technology*, 25(11) :3649–3656, 2007.
- [4] Matthias Ehrhardt, Houde Han, and Chunxiong Zheng. Numerical simulation of waves in periodic structures. *Communications in Computational Physics*, 5(5) :849–870, 2009.
- [5] J. H. Page, P. Sheng, H. P. Schriemer, I. Jones, X. Jing, and D. A. Weitz. Group velocity in strongly scattering media. *Science*, 271 :634–637, 1996.