



HAL
open science

Solutions lagrangiennes ou singulières des équations de Vlasov-Poisson et d'Euler : existence, unicité, interactions et collisions

Evelyne Miot

► **To cite this version:**

Evelyne Miot. Solutions lagrangiennes ou singulières des équations de Vlasov-Poisson et d'Euler : existence, unicité, interactions et collisions. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Grenoble Alpes, 2019. tel-02419493

HAL Id: tel-02419493

<https://theses.hal.science/tel-02419493v1>

Submitted on 19 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

**Solutions lagrangiennes ou singulières
des équations de Vlasov-Poisson et d'Euler :
existence, unicité, interactions et collisions**

Présenté par

Evelyne Miot

Soutenu publiquement le 12 décembre 2019, après avis de

Pierre-Emmanuel Jabin, Professeur, Université du Maryland

Frédéric Rousset, Professeur, Université Paris-Sud

Luis Vega, Professeur, Basque Center for Applied Mathematics

devant le jury composé de

Rémi Carles, Directeur de Recherches CNRS, Université de Rennes

Isabelle Gallagher, Professeure, ENS Paris

Thierry Gallay, Professeur, Université Grenoble Alpes

Frédéric Rousset, Professeur, Université Paris-Sud

Laure Saint-Raymond, Professeure, ENS Lyon

Didier Smets, Professeur, Université Paris-Sorbonne

Remerciements

J'adresse en premier lieu tous mes remerciements au CNRS pour la confiance, l'autonomie et la liberté immenses qui m'ont été accordées depuis mon recrutement.

C'est un honneur pour moi que Pierre-Emmanuel Jabin, Frédéric Rousset et Luis Vega aient accepté de rédiger un rapport ; je les connais depuis mes tout débuts de chercheuse et j'ai toujours été fortement impressionnée par leurs exposés ou mini-cours. Je leur suis sincèrement reconnaissante d'avoir relu ce mémoire aussi attentivement. Je remercie chaleureusement Rémi Carles, Isabelle Gallagher, Thierry Gallay, Laure Saint-Raymond et Didier Smets d'être membres du jury du soutenance ; l'ampleur de leurs travaux et de leur culture sont des sources constantes d'admiration pour moi.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude envers Patrick Gérard et Thierry Gallay qui se sont intéressés à mon travail et m'ont guidée, conseillée ou soutenue en de nombreuses occasions au cours de ces dernières années.

Un grand merci à Didier Smets de m'avoir lancée sur d'aussi beaux sujets de recherche pendant ma thèse ! Et pour les échanges que nous avons eus depuis.

Au gré de mes différentes affectations, j'ai toujours travaillé dans d'excellents environnements et j'en remercie mes collègues passés et actuels : du Dipartimento di matematica de la Sapienza à Rome, puis du Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, puis du Centre de mathématiques Laurent-Schwartz, et enfin de l'Institut Fourier. Je remercie particulièrement Mario Pulvirenti, Patrick Gérard, Yvan Martel et Thierry Gallay pour leur accueil chaleureux au sein de ces départements, ainsi que les membres des équipes administratives pour leur efficacité et leur gentillesse. Je remercie également mes collègues de Mathdoc pour la bonne ambiance qui y règne et pour leur formidable travail au service de la recherche. Numdam m'a été bien souvent indispensable pendant la rédaction de ce mémoire ! Enfin, je profite de ces pages pour remercier Jean-Pierre Demailly de sa disponibilité pendant le parcours du dossier d'habilitation.

Il va de soi que ce travail doit énormément à mes collaboratrices et collaborateurs : Valeria Banica, Raphaël Côte, Silvia Caprino, Gianluca Crippa, Laurent Desvillettes, Erwan Faou, Daniel Han-Kwan, Thomas Holding, Radu Ignat, Christophe Lacave, Carlo Marchioro, Ayman Moussa, Ivan Moyano, Milton Lopes Filho, Helena Nussenzveig Lopes, Mario Pulvirenti, Chiara Saffirio, Chao Wang. Je les remercie pour leur indulgence, leurs idées fructueuses et pour les passionnantes séances de travail. Parmi eux, une mention spéciale est destinée à Christophe et à Valeria pour avoir relu une partie de ce mémoire et pour leur soutien vraiment précieux.

Les mobilités, conférences, projets ANR, voyages et séminaires furent autant d'occasions d'établir ou de maintenir des interactions remarquables, mathématiques et souvent annexes. J'en remercie David Gérard-Varet, Claudio Munoz et Jean-Claude Saut ; Franck Sueur, Olivier Glass ; Maya De Buhan, Hélène Eynard-Bontemps ; Jean-Yves Chemin, Raphaël Danchin ; et les "grelous" Éric Dumas, Romain Joly, Damien Gayet, Martin Deraux, Erwan Lanneau...

Un immense merci enfin à mes amis et aux membres de ma famille, actuels et à venir, qui partagent ma vie et me rendent heureuse. En particulier à Julien qui m'a (re)donné l'envie d'aller voir plus loin et plus haut... et celle d'engager !

Table des matières

Remerciements	3
Liste des travaux présentés	7
Introduction générale	9
1 Existence et unicité pour l'équation d'Euler 2D en présence de singularités	23
1.1 Introduction	23
1.2 Domaines singuliers	26
1.3 Singularités liées aux tourbillons ponctuels	28
1.3.1 Le système Euler-points vortex avec vorticité non bornée	29
1.3.2 Le système Euler-points vortex avec effet gyroscopique	34
1.3.3 Perspectives	37
2 Existence et unicité pour le système de Vlasov-Poisson avec ou sans singularités	39
2.1 Introduction	40
2.2 Unicité pour Vlasov-Poisson avec densité non bornée	42
2.3 Stabilité pour Vlasov-Poisson dans des espaces d'Orlicz	44
2.4 Le système de Vlasov-Poisson avec des charges ponctuelles	48
2.4.1 Problème de Cauchy en dimension trois et interaction répulsive.	49
2.4.2 Propagation des moments en dimension trois et interaction répulsive.	50
2.4.3 Existence globale en dimension deux et interaction attractive	53
2.5 Quelques perspectives	54
3 De Vlasov-Poisson (avec charge) vers Euler (avec tourbillon)	57
3.1 Introduction	57
3.2 Limite gyrocinétique dans le cadre classique	59
3.3 Limite gyrocinétique avec une charge ponctuelle	62
3.4 Quelques perspectives	65
4 Unicité pour un modèle couplé cinétique/fluide	67
4.1 Introduction	67
4.2 Idées de preuve	69
4.3 Perspectives	71

5	Dynamique des filaments de tourbillon	73
5.1	Introduction	73
5.2	Existence en temps grand de filaments	80
5.3	Collisions de filaments	81
5.4	Perspectives	85
6	Parois de Néel en micromagnétisme	87
6.1	Introduction	87
6.2	Formation des parois de Néel : étude stationnaire	91
6.3	Étude dynamique	92
6.4	Perspectives	95
7	Annexe : quelques outils	97
7.1	Propriétés de la formule de Biot-Savart	97
7.2	Inégalités en équations cinétiques	98
	Bibliographie	101

Liste des travaux de recherche

Travaux présentés dans ce mémoire

- [157] C. LACAVE ET E. MIOT, *The vortex-wave system with gyroscopic effects*, accepté pour publication dans *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* (2019).
- [191] E. MIOT, *The gyrokinetic limit for the Vlasov-Poisson system with a point charge*, *Nonlinearity* **32** (2) (2019), 654–677.
- [121] D. HAN-KWAN, E. MIOT, A. MOUSSA ET I. MOYANO, *Uniqueness of the solution to the 2D Vlasov-Navier-Stokes system*, à paraître dans *Riv. Iberam*.
- [189] E. MIOT, *On the gyrokinetic limit for the two-dimensional Vlasov-Poisson system*, accepté pour publication dans *Kinetic and related models*, en révision, 2016.
- [130] T. HOLDING ET E. MIOT, *Uniqueness and stability for the Vlasov-Poisson system with spatial density in Orlicz spaces*, *Communication in Contemporary Mathematics* (2017).
- [11] V. BANICA, E. FAOU ET E. MIOT, *Collisions of almost parallel vortex filaments*, *Comm. Pure Appl. Math.* **70** (2017), 378–405.
- [188] E. MIOT, *A uniqueness criterion for unbounded solutions to the Vlasov-Poisson system*, *Comm. Math. Phys.* **346** (2) (2016), 469–482.
- [69] G. CRIPPA, M. C. LOPES FILHO, E. MIOT ET H. J. NUSSENZVEIG LOPES, *Flows of vector fields with point singularities and the vortex-wave system*, *Discrete and continuous dynamical systems* **5** (2016), 2405–2417.
- [80] L. DESVILLETES, E. MIOT ET C. SAFFIRIO, *Polynomial propagation of moments and global existence for a Vlasov-Poisson system with a point charge*, *Annales de l’IHP Analyse Non Linéaire* **32** (2) (2015), 373–400.
- [10] V. BANICA, E. FAOU ET E. MIOT, *Collisions of vortex filaments pairs*, *Journal of Nonlinear Science* **24** (6) (2014), 1262–1284.
- [64] R. CÔTE, R. IGNAT ET E. MIOT, *A thin-film limit in the Landau-Lifshitz-Gilbert equation relevant for the formation of Néel walls*, *J. Fixed Point Theory Appl.* **15** (1) (2014), 241–272.
- [159] C. LACAVE, E. MIOT ET C. WANG, *Uniqueness for the 2-D Euler equations on domains with corners*, *Indiana Univ. Math. J.* **63** (6) (2014), 1725–1756.
- [13] V. BANICA ET E. MIOT, *Evolution, interaction and collisions of vortex filaments*, *Differential*

and Integral Equations **26** (2013), 355–388.

[12] V. BANICA ET E. MIOT, *Global existence and collisions for certain configurations of nearly parallel vortex filaments*, Annales de l'IHP Analyse Non Linéaire **29** (2012), 813–832.

[55] S. CAPRINO, C. MARCHIORO, E. MIOT ET M. PULVIRENTI, *On the 2D attractive plasma-charge model*, Comm. Partial Differential Equations **37** (7) (2012), 1237–1272.

[175] C. MARCHIORO, E. MIOT ET M. PULVIRENTI, *The Cauchy problem for the three-dimensional Vlasov-Poisson equation with point charges*, Arch. Ration. Mech. Anal **201** (1) (2011), 1–26.

Autres textes ou articles non présentés dans ce mémoire

Les * désignent les articles issus directement de la thèse de doctorat.

[190] E. MIOT, *Le flot binormal, l'équation de Schrödinger et les tourbillons filamentaires* (d'après V. Banica et L. Vega), Séminaire Bourbaki, Juin 2016.

E. MIOT, *Existence globale et propagation des moments pour une équation de Vlasov-Poisson avec une charge ponctuelle*, Séminaire Laurent-Schwartz (Polytechnique) (2013).

[171] * M. C. LOPES FILHO, E. MIOT ET H. J. NUSSENZVEIG LOPES, *Existence of a weak solution in L^p to the vortex-wave system*, J. Nonlinear Science **21** (5) (2011), 685–703.

E. MIOT, M. PULVIRENTI ET C. SAFFIRIO, *On the Kac model for the Landau equation*, Kinetic and related models **4** (1) (2011), 333–344.

[187] * E. MIOT, *Two existence results for the vortex-wave system*, Acte de la conférence "Hyperbolic conservation laws and fluid dynamics" (2010), Riv. Univ. Parma **3** (1) (2012).

E. MIOT, *Dynamique des points vortex dans une équation de Ginzburg-Landau complexe*, Séminaire X-EDP (Polytechnique) (2009-2010), Exp. no. 21, 13 p.

E. MIOT, *Le système dynamique de N tourbillons ponctuels*, dans "Des problèmes à N corps aux Tokamaks" (X-UPS 2015), Journées mathématiques X-UPS 2015, Les Éditions de l'École polytechnique.

[158] * C. LACAVE ET E. MIOT, *Uniqueness for the vortex-wave system when the vorticity is initially constant near the point vortex*, SIAM J. Math Analysis **41** (3) (2009), 1138–1163.

[186] * E. MIOT, *Dynamics of vortices for a complex Ginzburg-Landau equation*, Analysis & PDE **2** (2) (2009), 159–186.

E. MIOT *, *Damped wave-like dynamics for a complex Ginzburg-Landau equation with law dissipation*, prépublication, 2009.

Introduction générale

Préambule

Ce mémoire est un résumé de mon travail de recherche, dont le fil conducteur est l'étude de solutions comportant des singularités dans différentes équations de la physique mathématique. Selon le contexte, ces singularités correspondent à des tourbillons ponctuels ou filamenteux (pour les fluides, décrits par l'équation d'Euler), à des charges ponctuelles électriques (pour les plasmas, décrits par l'équation de Vlasov-Poisson), à des parois de Néel (dans des matériaux ferromagnétiques, décrits par l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert). On s'intéresse à la dynamique de ces singularités en tant que telles, ou bien lorsqu'elles interagissent avec une partie plus régulière de la solution (généralement bornée). Enfin, une partie de ce mémoire concerne le passage de Vlasov-Poisson vers Euler dans un régime asymptotique où la solution exhibe de telles singularités ponctuelles. En bref, les résultats obtenus après le doctorat s'articulent principalement autour des axes suivants :

- **Premier axe** : équation d'Euler incompressible en dimension deux, particulièrement en présence de tourbillons ponctuels (appelés aussi points vortex).
- **Deuxième axe** : équation de Vlasov-Poisson en dimensions deux et trois, en présence ou non de charges ponctuelles.
- **Troisième axe** : filaments de tourbillon dans les fluides incompressibles en dimension trois.

Ces axes révèlent des analogies nombreuses, c'est pourquoi l'on retrouve souvent des problématiques similaires. Premièrement, l'existence et l'unicité de solutions faibles (disons bornées) en présence de singularités. Ensuite, la possibilité de représenter de telles solutions faibles sous forme lagrangienne, c'est-à-dire comme constantes le long des courbes intégrales du flot associé au champ de vitesse total (qui diverge au voisinage des singularités). Enfin, la survenue de collisions en temps fini parmi les trajectoires des singularités et celles du flot. L'étude de ces questions communes fait appel à des outils d'analyse parfois différents et propres au chapitre envisagé.

Présentation succincte des résultats

La suite de cette introduction a pour but d'apporter un panorama des résultats obtenus avant qu'ils ne soient développés dans les chapitres ultérieurs.

• **Chapitre 1. Existence et unicité pour l'équation d'Euler en présence de tourbillons ponctuels ou dans des domaines singuliers.**

* **Existence et unicité en dimension deux : un tour d'horizon des résultats connus.**

La première partie de ce mémoire porte sur l'équation d'Euler qui décrit l'évolution de fluides parfaits incompressibles en dimension deux :

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (1)$$

où $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ désigne le champ de vitesse du fluide et le scalaire $p : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la pression. On étudie plus spécifiquement des **écoulements tourbillonnaires**, dont le comportement est bien caractérisé par la fonction tourbillon (ou vorticité) $\omega = \operatorname{rot}(u)$. L'équation pour la fonction tourbillon s'écrit

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (2)$$

où u est retrouvé explicitement en fonction de ω par la loi de Biot-Savart : $u = K * \omega$, avec $K(x) = x^\perp / (2\pi|x|^2)$. L'existence et l'unicité de solutions régulières et globales à l'équation d'Euler est connue depuis les années trente [226, 129]. Ce mémoire concerne plutôt le cadre des solutions faibles de (2). Yudovich [230] a démontré l'existence globale et l'unicité de la solution $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ pour toute donnée initiale uniformément bornée et intégrable. À l'instar des solutions régulières, la solution de Yudovich est constante le long des courbes intégrales du flot de u : on parle de **solution lagrangienne**. Nous verrons plus loin qu'il est encore possible de définir une notion large de flot lorsque le champ de vitesse est peu régulier.

Des résultats d'existence globale de solutions faibles à vorticité non bornée ont été établis ultérieurement dans [84, 85, 77, 214, 206] et seront davantage détaillés au Chapitre 1. Ils incluent en particulier le cas de solutions mesures de (2). Les résultats présentés ici s'inscrivent aussi dans un tel cadre, puisqu'ils impliquent principalement des vorticités s'écrivant comme la superposition (6) d'une composante bornée et de masses de Dirac.

En ce qui concerne l'unicité pour (1), le résultat de Yudovich ne s'applique qu'à des solutions dont la vorticité est bornée¹. En effet, d'une part, la méthode d'énergie pour établir l'unicité (voir [230, 173]) est basée sur une estimation de Gronwall pour la norme L^2 des champs de vitesse et repose crucialement sur l'inégalité de Calderón-Zygmund [173] :

$$\|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq Cp \|\omega(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall 2 \leq p < +\infty, \quad (3)$$

ce qui permet de laisser tendre p vers l'infini dans le cas d'une vorticité bornée. D'autre part, la méthode lagrangienne (voir [179]) réside dans une estimation de Gronwall **log-Lipschitz** pour une distance de type Wasserstein entre deux solutions :

$$|u(t, x) - u(t, y)| \leq C(\|\omega(t, \cdot)\|_{L^1} + \|\omega(t, \cdot)\|_{L^\infty}) |x - y|(1 + |\ln|x - y||), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (4)$$

Nous verrons toutefois au Chapitre 1 des extensions du résultat d'unicité pour (2) au cas de solutions de la forme (6) dont on suppose pour tout temps que la composante bornée est constante au voisinage des singularités.

* **Unicité pour l'équation d'Euler dans un domaine avec singularités.** Ce paragraphe concerne l'article [159], écrit en collaboration avec C. Lacave et C. Wang. Ici, les singularités

1. En fait presque bornée, en vertu de l'amélioration [231] du résultat d'unicité de [230].

correspondent à celles du bord du domaine considéré, régulier sauf en un nombre fini de coins, dont la définition précise sera donnée au Chapitre 1.

Un résultat récent de Gérard-Varet et Lacave [100] y assure l'existence d'une solution globale avec vorticité bornée (et traite en réalité d'une classe plus large de domaines). Bardos, Di Plinio et Temam [21] ont démontré l'unicité dans le cas particulier d'un domaine rectangulaire. Notre résultat est le suivant :

*Pour un domaine Ω borné, simplement connexe et régulier sauf en un nombre fini de coins formant des angles **aigus**, il existe une unique solution faible à l'équation d'Euler (2) dont la vorticité est bornée.*

Notre stratégie de preuve n'est pas celle d'estimation d'énergie mentionnée ci-dessus. En effet, l'inégalité de Calderón-Zygmund

$$\|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p, \Omega) \|\omega(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall 1 \leq p < +\infty \quad (5)$$

est certes encore vraie en présence d'angles, mais il n'était pas connu, au moment de notre étude, que le comportement de $C(p, \Omega)$ soit linéaire en p lorsque $p \rightarrow +\infty$.

C'est pourquoi nous avons utilisé la méthode lagrangienne, en nous ramenant au cas du disque unité D via un biholomorphisme de Ω vers D , ce qui permet l'utilisation de formules explicites. Peu de temps après la finalisation de notre article [159], l'inégalité (5) avec $C(p, \Omega) = C(\Omega)p$ a été établie par Di Plinio et Temam [81], ce qui rend en fin de compte possible la preuve d'unicité par estimation d'énergie.

* **Le système Euler-points vortex.** Il s'agit d'étudier des écoulements de fluides comportant des tourbillons ponctuels (appelés aussi points vortex). Ces singularités se traduisent par des masses de Dirac dans la fonction tourbillon : celle-ci est proche, en un certain sens, d'une superposition de la forme

$$\text{rot}(u(t, \cdot)) = \omega(t, \cdot) + \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k \delta_{z_k(t)}, \quad (6)$$

où $\omega(t, \cdot)$ est une partie plus régulière, et où les coefficients γ_k sont appelés intensités (ou circulations) des points vortex. Conformément à la loi de Biot-Savart, le champ de vitesse correspondant s'écrit

$$u(t, \cdot) = K * \left(\omega(t, \cdot) + \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k \delta_{z_k(t)} \right) = v(t, \cdot) + \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k K(\cdot - z_k(t)). \quad (7)$$

On s'intéresse au système qui résulte formellement de l'équation d'Euler (2) dans cette situation. Il s'agit d'un couplage d'une EDP pour l'évolution de la partie régulière $\omega(t, \cdot)$ et des EDO pour la dynamique des tourbillons ponctuels. Ce **système Euler-points vortex** a été introduit et étudié indépendamment par Marchioro et Pulvirenti [177, 179] et par Starovoitov [217, 218] :

$$\begin{cases} \partial_t \omega + \left(v + \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k K(\cdot - z_k) \right) \cdot \nabla \omega = 0, \\ \frac{dz_k}{dt} = v(t, z_k) + \sum_{j \neq k} \gamma_j K(z_k - z_j), \quad 1 \leq k \leq \ell \end{cases} \quad (8)$$

où $v = K * \omega$ est le champ de vitesse induit par le tourbillon ω . En particulier, on retrouve le système des points vortex (ou loi de Kirchhoff) lorsque $\omega = 0$:

$$\frac{dz_k}{dt} = \sum_{j \neq k} \gamma_j K(z_k - z_j), \quad 1 \leq k \leq \ell. \quad (9)$$

Starovoitov a démontré l'existence globale d'une solution pour (8) avec tourbillon höldérien dans le cas d'un seul point ; Marchioro et Pulvirenti l'existence globale d'une solution avec tourbillon $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ lorsque les intensités γ_k sont toutes de même signe. Cette condition de signe garantit, pour (8) comme pour (9), que les trajectoires des points vortex n'entrent pas en collision. La question de l'unicité dans le cas général constitue un problème ouvert. Elle a été résolue dans le cas où le tourbillon est constant au voisinage des tourbillons ponctuels par Marchioro et Pulvirenti [177], puis par Lacave et Miot [158]² par des techniques différentes. L'unicité dans la classe des tourbillons lipschitziens avait également été démontrée par Starovoitov [218].

Comme déjà évoqué, des questions importantes dans ce cadre sont celles

- d'une part de l'existence et de l'unicité d'un flot correspondant au champ de vitesse total u défini par (7),
- d'autre part de savoir si toute solution de l'équation de transport donnée par la première ligne de (8) est nécessairement lagrangienne, comme dans le cas sans tourbillon ponctuel.

Les équations de transport linéaires avec champ peu régulier ont suscité une recherche prolifique. Pionniers du domaine, DiPerna et Lions [83] ont établi des conditions suffisantes de régularité spatiale faible pour un champ de vitesse garantissant l'existence et l'unicité d'une certaine notion de flot associé à ce champ de vitesse. Ce flot est appelé désormais **flot régulier lagrangien**. Des travaux d'Ambrosio [3] sont depuis venus étoffer la théorie, dont [6] dresse un état de l'art récent. Pour le système Euler-points vortex (8) avec tourbillon borné, le champ total donné par (7) est loin d'avoir la régularité requise par les résultats de [83, 3]. Nous avons donc du mener dans [158]² une étude ad hoc afin de montrer que toute solution faible est bien lagrangienne, avec un flot continu en temps et en espace, dont les trajectoires n'entrent pas en collision avec celles des tourbillons ponctuels.

Nous nous sommes ensuite intéressés au système (8) avec tourbillon dans L^p pour un certain $2 < p < \infty$; le champ de vitesse qui lui est associé n'est plus alors log-Lipschitz comme dans (4), mais seulement uniformément borné et höldérien. Dans [171]², nous avons démontré comme première étape l'existence d'une solution faible de (8). Ensuite, l'objectif de l'article [69] en collaboration avec G. Crippa, M. C. Lopes Filho et H. J. Nussenzweig Lopes a été de répondre de manière positive aux questions formulées ci-dessus dans un tel cadre. Nous avons en fait considéré le cas d'un seul point vortex et le cas plus général d'un champ de vitesse de la forme

$$u = v + \gamma K(\cdot - z),$$

avec v appartenant à un espace de type $L^\infty(W_{\text{loc}}^{1,p})$, à divergence nulle, et satisfaisant à de bonnes conditions à l'infini, et z une trajectoire lipschitzienne quelconque. Nous avons démontré le théorème :

2. Article issu du doctorat.

Si u est un champ de vitesse de la forme ci-dessus, il existe un unique flot régulier lagrangien, au sens d'Ambrosio [3], qui préserve la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 . De plus, toute solution de l'équation de transport associée

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, \quad \omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^2))$$

est lagrangienne, i.e. constante le long des courbes intégrales du flot³. Enfin, **génériquement**, les trajectoires du flot n'entrent pas en collision avec la trajectoire du tourbillon ponctuel.

La seconde partie de [69] propose une méthode de construction du flot régulier lagrangien par régularisation du champ u dans L^1_{loc} , avec un taux de convergence explicite.

La preuve du théorème repose sur l'utilisation de la connection bien connue [83, 3] entre les propriétés d'existence et d'unicité au niveau de l'équation de transport et les propriétés d'existence et d'unicité au niveau du flot. Pour la construction du flot par approximation, nous nous sommes placés dans le cadre des travaux de Crippa et de Lellis [67] qui permettent d'étudier les propriétés du flot régulier lagrangien (associé à des champs à régularité spatiale de type Sobolev) en s'affranchissant totalement du lien EDP-EDO. A posteriori, on observe que le flot régulier lagrangien que nous obtenons s'avère être plus régulier en temps que celui de [67] puisque dans notre cas le champ de vitesse v est continu en temps et en espace.

* **Le système Euler-points vortex massiques.** Il s'agit d'un travail plus récent [157], en collaboration avec C. Lacave. Nous y étudions le caractère bien posé du système couplé

$$\begin{cases} \partial_t \omega + \left(v + \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k K(x - z_k) \right) \cdot \nabla \omega = 0, \\ m_k \ddot{z}_k = \gamma_k \left(\dot{z}_k - v(t, z_k) - \sum_{j \neq k} \gamma_j K(z_k - z_j) \right)^\perp, \quad 1 \leq k \leq \ell, \end{cases} \quad (10)$$

où, à nouveau, $v = K * \omega$. Les points z_k sont dénommés points vortex massiques, affectés de masses strictement positives m_k et de circulations de signe quelconque γ_k . D'un point de vue physique, ce système apparaît comme un système limite d'évolution pour un fluide de vorticité ω évoluant à l'extérieur d'un nombre fini de petits solides, centrés autour des z_k , dont la taille tend vers zéro à masse m_k et circulation γ_k constantes. Le terme de force gyroscopique \dot{z}_k^\perp apparaissant dans (10) est réminiscent de la force dite de Kutta-Jukowski due à l'interaction fluide/solide, voir par exemple [220, 160]. L'obtention rigoureuse du système (10) dans cette asymptotique, pour un seul point vortex massique, a été prouvée par Glass, Lacave et Sueur [104]. Une conséquence immédiate en est l'existence globale d'une solution faible, avec $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$. Lorsque $\ell > 1$, il n'existe pas de résultat rigoureux d'asymptotique de petits solides. En particulier, la question de l'existence ne peut pas être résolue de cette manière.

Remarquons que le système (10) donne immédiatement le système Euler-points vortex lorsque les masses sont toutes nulles. Et en effet, toujours pour $\ell = 1$, Glass, Lacave et Sueur [105] ont établi l'asymptotique de l'interaction fluide/solide dans la limite de petit solide et de masse évanescence.

3. Puisque le flot préserve la mesure de Lebesgue, cela revient dire que $\omega(t, \cdot)$ est le poussé en avant de $\omega(0, \cdot)$ par le flot.

Le système (10) peut enfin être vu comme un modèle d'interaction fluide/cinétique. En effet, la limite de champ moyen de (10) où $\gamma_k = 1/\ell = m_k$ avec $\ell \rightarrow \infty$ donne formellement un couplage fluide/cinétique, apparaissant par exemple dans la description des sprays en dimension deux :

$$\begin{cases} \partial_t \omega + \operatorname{div} \left[(u + K * \rho) \omega \right] = 0, & u = K * \omega, \\ \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + (v^\perp - u^\perp) \cdot \nabla_v f = 0, & (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (11)$$

Ici, $f = f(t, x, v)$ représente une densité microscopique de particules évoluant dans un fluide à vortacité ω et correspond à la limite faible étoile de la mesure empirique $f_\ell(t) = \frac{1}{\ell} \sum_k \delta_{(z_k(t), \dot{z}_k(t))}$ quand $\ell \rightarrow +\infty$, et $\rho = \rho(t, x)$ est la densité spatiale définie par $\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x, v) dv$. La limite de champ moyen de (10) vers (11) a été établie par Moussa et Sueur [195] dans le cas d'un noyau K lipschitzien et borné, le cas du vrai noyau $K(x) = x^\perp / (2\pi|x|^2)$ étant encore ouvert. Nous reviendrons plus tard sur un autre exemple de couplage fluide/cinétique au Chapitre 4.

Dans [157], nous avons établi les analogues des principaux résultats connus pour le système Euler-points vortex, à savoir :

*Supposons que tous les γ_k sont de même signe. Alors il existe une solution faible globale avec vortacité uniformément bornée au système (10). Pour toute telle solution, la vortacité est constante le long des courbes intégrales du flot associé au champ de vitesse total. **Génériquement**, les trajectoires du flot n'entrent pas en collision avec les trajectoires des points vortex massiques. Si **de plus** la vortacité est initialement constante au voisinage de chacun des points vortex massiques, la solution faible est unique.*

Les preuves utilisent les mêmes ressorts que celles de [158] pour le système Euler-points vortex. L'ingrédient essentiel qui rend possible cette adaptation est l'introduction d'une nouvelle fonctionnelle d'énergie locale, permettant de contrôler les distances entre les trajectoires du flot régulier lagrangien et celles des points vortex. Cette approche pour contrôler les collisions à l'aide d'une fonctionnelle d'énergie bien choisie avait été utilisée par Marchioro [174] dans le cas d'un point vortex fixe et par Lacave [156] pour les domaines singuliers dans le cadre des équations d'Euler. Elle sera de nouveau utilisée très largement pour des problèmes analogues à propos de l'équation de Vlasov-Poisson au Chapitre 2.

• Chapitre 2. Existence et unicité pour le système de Vlasov-Poisson.

Mon post-doctorat avec M. Pulvirenti a été le point de départ d'une partie de ce chapitre. On y étudie l'équation de Vlasov-Poisson, un modèle pour décrire les plasmas à l'aide d'une densité de probabilité de particules électriques $f(t, x, v)$, avec $x, v \in \mathbb{R}^d$ où $d = 2$ ou $d = 3$, et dont l'évolution est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = 0. \quad (12)$$

Ici, $E = E(t, x)$ est le champ électrique, donné par la formule de convolution $E = x/|x|^d * \rho$, où $\rho = \rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) dv$ désigne la densité macroscopique de particules.

L'existence globale et l'unicité de solutions classiques et **à support compact en vitesses** ont été établies par Ukai et Osabe [198] pour $d = 2$ et par Pfaffelmoser [203] pour $d = 3$. Adoptant

une approche eulérienne, Lions et Perthame [168] ont établi l’existence globale de solutions faibles propageant des moments en vitesse d’ordre supérieur à trois :

$$\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |v|^k f(t, x, v) dx dv < +\infty, \quad k > 3.$$

L’unicité de telles solutions a lieu sous des hypothèses de régularité supplémentaires pour les données initiales et de finitude des moments d’ordres au moins égaux à six.

Par la méthode lagrangienne expliquée au début de cette introduction, associée à des propriétés de transport optimal, Loeper [169] a ensuite démontré l’unicité pour (12) dans la classe des solutions qui vérifient $\sup_{t \in [0, T]} \|\rho(t, \cdot)\|_{L^\infty} < +\infty$. Tant la compacité du support en vitesses que la condition de Loeper assurent que le champ électrique est uniformément borné et de régularité log-Lipschitz (voir (4) pour l’équation d’Euler). Ici encore, de part les structures très semblables des équations de Vlasov-Poisson et d’Euler, c’est sur cette estimation log-Lipschitz que repose la preuve d’unicité pour (12) avec la méthode lagrangienne.

* **Unicité et stabilité pour l’équation de Vlasov-Poisson.** Je me suis intéressée à la généralisation de la condition d’unicité de Loeper dans l’article [188] : j’ai établi l’unicité pour le système de Vlasov-Poisson en dimensions deux et trois sur un intervalle $[0, T]$ parmi les solutions mesures telles que

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{p \geq 1} \frac{\|\rho(t, \cdot)\|_{L^p}}{p} < +\infty.$$

Cette condition autorise notamment les solutions qui divergent de façon logarithmique. La preuve se fonde sur la formulation lagrangienne de l’équation de Vlasov-Poisson, en introduisant une distance liée à la distance de Monge-Kantorovich. Elle exploite de façon essentielle le fait que les caractéristiques associées à (12) satisfont à une EDO **d’ordre deux**. Par conséquent, il est possible de généraliser le lemme de Gronwall à des champs pas tout à fait log-Lipschitz :

$$|E(t, x) - E(t, y)| \leq C \sup_{p \geq 1} (\|\rho(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} / p) |x - y| (1 + |\ln |x - y||)^2.$$

Nous insistons sur le fait que cette régularité ”log²-Lipschitz” serait insuffisante pour l’équation d’Euler, pour laquelle les caractéristiques vérifient une EDO d’ordre un.

L’article [188] comporte par ailleurs des exemples explicites de données initiales non bornées qui donnent lieu à des solutions vérifiant le critère d’unicité. Dans le cas gravitationnel en dimension deux, ces données s’avèrent être reliées à une classe d’états stationnaires à symétrie sphérique.

Dans l’article [130], écrit en collaboration avec T. Holding, nous généralisons la condition apparaissant dans [188] aux solutions dont la densité macroscopique appartient aux espaces d’Orlicz, c’est-à-dire de norme $\|\cdot\|_\alpha$ finie, où

$$\|\rho\|_\alpha = \sup_{p \geq \alpha} \frac{\|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}}{p^{1/\alpha}}, \quad 1 \leq \alpha \leq +\infty.$$

En particulier, avec $\alpha = 1$ on retrouve l’espace de [158] et avec $\alpha = +\infty$ celui de Loeper (L^∞). De plus, nous établissons des estimations de stabilité explicites en fonction du temps entre deux solutions dont les densités macroscopiques appartiennent à un espace d’Orlicz. La distance

considérée est celle de Monge-Kantorovitch, dans l'esprit des estimations de Dobrushin [86] pour des équations de type champ moyen avec champs lipschitziens.

* **Le système de Vlasov-Poisson avec des charges ponctuelles.** Cet axe de recherche, qui a abouti aux travaux [80, 55, 175], concerne l'existence et l'unicité de la solution du système de Vlasov-Poisson en dimensions deux ou trois dans un contexte analogue au système Euler-points vortex. Il s'agit de l'interaction entre une densité bornée f de plasma et un nombre fini de charges ponctuelles ξ_k , de vitesse η_k , et de charge q_k , modélisée par un système couplé EDP-EDO :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \left(E + \sum_{k=1}^{\ell} q_k \frac{x - \xi_k}{|x - \xi_k|^d} \right) \cdot \nabla_v f = 0, \\ \dot{\xi}_k = \eta_k, \quad \dot{\eta}_k = q_k E(t, \xi_k) + \sum_{j \neq k} q_k q_j \frac{\xi_k - \xi_j}{|\xi_k - \xi_j|^d}, \quad 1 \leq k \leq \ell. \end{cases} \quad (13)$$

En particulier, on retrouve bien le système de Vlasov-Poisson (12) en l'absence de charges ($q_k = 0$). Lorsque $q_k \neq 0$, de même que les points vortex dans l'équation d'Euler, les charges ponctuelles sont à l'origine d'une composante singulière dans le champ électrique total. Ce système a été introduit et étudié pour $d = 2$ par Caprino et Marchioro [54].

En collaboration avec C. Marchioro et M. Pulvirenti [175], nous avons montré :

*Pour $d = 3$ et pour une **interaction répulsive** entre plasma et charges, si la densité initiale de plasma s'annule dans un voisinage des charges, il existe une unique solution globale avec densité macroscopique ρ uniformément bornée. De plus, la densité f est constante le long des courbes intégrales du flot associé au champ électrique total. Pour tout temps, la densité est nulle dans un voisinage des charges.*

Notre preuve est une adaptation de celle de Pfaffelmoser [203]. Elle nécessite une analyse détaillée du comportement de type diffusif des trajectoires du flot au voisinage des charges, à cause du champ singulier créé par celles-ci. Une notion clé est celle d'énergie microscopique locale, définie dans (2.23), qui permet de contrôler à la fois les grandes vitesses et les distances entre les trajectoires.

L'article [80], en collaboration avec L. Desvillettes et C. Saffirio, correspond à l'étape naturelle suivante de l'étude de (13). Il s'agit de traiter une classe de densités qui peuvent ne pas s'annuler au voisinage des charges ponctuelles mais qui ont des moments en énergie finis (ces moments sont définis au Paragraphe 2.4.2). Ceci amène à nous placer dans le même contexte que Lions et Perthame [168]. Dans le cas d'une seule charge ponctuelle et sous une hypothèse de petitesse de masse de la densité de plasma, notre résultat principal est le suivant :

Si la donnée initiale admet des moments en énergie finis d'ordre supérieur à six, il existe une solution faible globale correspondant, propageant les moments d'ordre inférieur à sept.

Soulignons que même si ce résultat permet de considérer des densités non nulles au voisinage de la charge, elles doivent y décroître dans un certain sens. La condition de moment d'ordre strictement plus grand que six exclut par exemple les densités macroscopiques qui sont à symétrie sphérique et constantes autour de la charge.

Dans l'article [55], en collaboration avec S. Caprino, C. Marchioro et M. Pulvirenti, nous nous intéressons cette fois pour (13) au cas d'une **interaction attractive** entre le plasma et les

charges i.e. $q_k < 0$. Nous nous plaçons en dimension deux car l'analyse y est, y compris pour le cas sans charge, beaucoup moins délicate qu'en dimension trois. Nous supposons qu'initialement, la densité de plasma est distribuée de sorte que l'énergie microscopique locale (voir la définition (2.29)) au voisinage de chaque charge soit majorée au voisinage de chacune des charges. Le résultat d'existence obtenu est le suivant :

*Il existe une solution globale telle que le champ électrique E est uniformément borné mais telle que la densité macroscopique ρ diverge de façon au plus logarithmique au voisinage des charges. De plus, la densité f est constante le long des courbes intégrales du flot régulier lagrangien associé au champ électrique total. **Génériquement**, les trajectoires du flot n'entrent pas en collision avec les charges ponctuelles.*

Il est à noter que, en raison de la nature attractive de l'interaction, l'énergie microscopique n'est plus une quantité coercive. Ainsi, on autorise des données initiales pour lesquelles la densité de plasma est non nulle au voisinage des charges. Notons enfin l'analogie de ce résultat d'existence de flot avec non collision générique avec celui établi pour le système Euler-points vortex dans [69].

• Chapitre 3. De Vlasov-Poisson (avec charges) vers Euler (avec points vortex).

Dans [48], Brenier a étudié un régime asymptotique pour l'équation de Vlasov-Poisson en dimension deux, appelé limite gyrocinétique, dans lequel les solutions convergent vers une solution de l'équation d'Euler incompressible. La limite de Vlasov-Poisson vers Euler avait été également établie dans des régimes similaires par Grenier [113], par Golse et Saint-Raymond [107], puis par Saint-Raymond [211]. De nombreux autres régimes pour des équations de type Vlasov, linéaires ou non linéaires, ont été par ailleurs analysés ces dernières années. La limite gyrocinétique que nous étudions revient à appliquer un champ magnétique de large intensité, constant et orthogonal à un ensemble bidimensionnel de particules chargées et sur une échelle de temps ralentie. À remise à l'échelle près, nous sommes ramenés à étudier le comportement asymptotique du système suivant lorsque ε tend vers zéro :

$$\begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + \frac{v}{\varepsilon} \cdot \nabla_x f_\varepsilon + \left(\frac{E_\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{v^\perp}{\varepsilon^2} \right) \cdot \nabla_v f_\varepsilon = 0, & (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ E_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^2} \rho_\varepsilon(t, y) dy, & \rho_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon(t, x, v) dv. \end{cases} \quad (14)$$

Dans ce système (14), le champ magnétique intense se trouve représenté par le terme $v^\perp = (v_1, v_2)^\perp = (-v_2, v_1)$.

Dans la prépublication [189], j'ai démontré que

*Si les données initiales f_ε^0 satisfont à des bornes uniformes en énergie et en masse, et si de plus les normes L^∞ n'explorent pas trop vite : $\varepsilon^2 \|f_\varepsilon^0\|_{L^\infty} \ln \|f_\varepsilon^0\|_{L^\infty} \rightarrow 0$, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, alors la suite des densités macroscopiques converge (à sous-suite près, faiblement-étoile) vers une mesure qui est une solution **nappe de tourbillon** de l'équation d'Euler.*

Autrement dit, la densité limite est une mesure de Radon positive appartenant à $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ et elle joue le rôle de la vortacité ω comme solution de (2) en un sens élargi formulé par Delort [77] ou Schochet [214]. Ce résultat est comparable à celui de [211], dans lequel les données initiales sont supposées vérifier des bornes uniformes en énergie et moment mais également la convergence $\varepsilon \|f_\varepsilon^0\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. À la différence des techniques de [107, 211], qui reposent sur une

nouvelle formulation EDP du système (14), notre preuve repose de façon fondamentale sur l'EDO vérifiée par une combinaison judicieuse des caractéristiques, appelée **gyro-coordonnée**, qui avait déjà été utilisée dans [101, 128] pour une équation de Vlasov linéaire.

Dans l'article [191], j'ai examiné la même problématique dans le cadre de l'équation de Vlasov-Poisson **en présence d'une charge ponctuelle**. J'ai établi le résultat suivant concernant la limite gyrocinétique de (13) avec une seule charge ponctuelle $q \neq 0$ et des données initiales vérifiant des hypothèses analogues à celles de [189] :

À sous-suite près, la suite de densités macroscopiques converge vers une nappe de tourbillon ρ , la suite des trajectoires de la charge converge localement uniformément vers une trajectoire höldérienne ξ , et la mesure totale $\rho + q\delta_\xi$ vérifie l'équation d'Euler avec une mesure de défaut.

Plus précisément, la mesure totale limite est solution de l'équation d'Euler (2) selon la formulation généralisée de Poupaud [206], qui se ramène essentiellement à celle déjà mentionnée de Schochet [214] lorsque la mesure de défaut est nulle. Il s'avère aussi que si l'on suppose davantage de régularité pour la densité ρ limite, l'équation limite se découple en une EDP pour ρ et une EDO pour ξ qui n'est autre que le système Euler-point vortex (8), où ρ joue le rôle de ω , E^\perp celui de la vitesse v , et ξ celui du point vortex.

Les preuves de [191] rassemblent différents ingrédients. En particulier, on utilise une nouvelle formulation faible vérifiée par la mesure $\rho_\varepsilon + q\delta_{\xi_\varepsilon}$ qui s'appuie sur celle de [107] d'une part, et sur l'EDO vérifiée par la combinaison $\xi_\varepsilon + \varepsilon\eta_\varepsilon^\perp$ d'autre part. La notion de gyro-coordonnée de [189] ne permet pas dans ce contexte d'obtenir le résultat de convergence, à cause de la singularité du champ créé par la charge.

• Chapitre 4. Un couplage fluide/cinétique.

Ce chapitre présente l'article [121], en collaboration avec D. Han-Kwan, I. Moyano et A. Moussa, qui se situe à l'interface entre équations cinétiques et équations de la mécanique des fluides. On y étudie le système de Vlasov-Navier-Stokes bidimensionnel, utilisé par exemple comme modèle pour la dynamique des aérosols dans les poumons. Il s'agit de décrire l'interaction entre un fluide visqueux incompressible avec vitesse $u = u(t, x)$ et un nuage de particules de densité $f = f(t, x, v)$:

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p = j - \rho u, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v [f(u - v)] = 0, \end{cases} \quad (15)$$

où $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^2$ (avec Ω le tore bidimensionnel ou le plan) et où

$$\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x, v) dv, \quad j(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} v f(t, x, v) dv.$$

On reconnaît l'équation de Navier-Stokes (avec terme source dépendant de f) pour le fluide et une équation de Vlasov amortie pour les particules. La question de l'existence globale d'une solution faible d'énergie finie pour (15) avait été résolue dans [44, 229, 224, 46]. Dans [121], nous avons démontré :

Pour une donnée initiale admissible (u_0, f_0) , il existe au plus une solution faible (u, f) correspondante au système de Vlasov-Navier-Stokes.

Par donnée admissible, on entend un couple (u_0, f_0) vérifiant les conditions usuelles pour l'existence globale (en particulier, l'énergie doit être finie) et dont la densité f_0 vérifie une condition particulière - à première vue un peu obscure - sur les deux premiers moments en vitesse (voir (4.5)). Celle-ci est satisfaite lorsque, par exemple, f_0 décroît assez vite en vitesse, uniformément en x . Cette condition a pour but d'assurer que toute solution faible a ses premiers moments $\rho = \int f dv$, $j = \int v f dv$, et $\int |v|^2 f dv$ uniformément bornés sur Ω à temps positif. On retrouve ici une condition analogue au critère d'unicité de Loeper [169] pour le système de Vlasov-Poisson. Notre démonstration utilise une méthode d'énergie pour la partie fluide et une méthode lagrangienne pour la partie cinétique, avec des estimations sur la fonction maximale du gradient de la différence des vitesses qui permettent de prendre en compte le couplage.

• **Chapitre 5. Filaments tourbillonnaires dans les fluides en dimension trois.**

Ce thème a été l'objet d'une collaboration avec V. Banica [12, 13] puis avec V. Banica et E. Faou [10, 11]. Il s'agit de la dynamique des tourbillons filamentaires dans les fluides incompressibles en dimension trois. Ces tourbillons filamentaires sont le pendant tridimensionnel des tourbillons ponctuels (points vortex) des chapitres précédents : ils représentent le support de la vorticité, assimil e à une masse de Dirac le long d'une courbe de l'espace et de direction donn e par le vecteur tangent de la courbe.

Selon l'approximation dite LIA ⁴ propos e par Da Rios [71], la dynamique d'un seul tourbillon filamentaire peut être décrite par le flot par courbure binormale :

$$\partial_t \chi = \frac{\partial_s \chi \times \partial_{ss} \chi}{|\partial_s \chi|^3},$$

où $\chi(t, s) \in \mathbb{R}^3$ (avec $s \in \mathbb{R}$) désigne un certain paramétrage de la courbe. Des solutions particulières sont donn es par les anneaux se propageant à vitesse constante, les hélices, ou encore les lignes droites. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement au cas de ℓ filaments **trous presque parallèles**   l'axe $(0z)$. En notant $\psi_j(t, s) \in \mathbb{C}$ la position du filament à la hauteur s ⁵, Klein, Majda et Damodaran [151] obtiennent un système d'équations simplifi es pour les ψ_j :

$$i\partial_t \psi_j + \alpha_j \gamma_j \partial_{ss} \psi_j + \sum_{k \neq j} \gamma_k \frac{\psi_j - \psi_k}{|\psi_j - \psi_k|^2} = 0, \quad 1 \leq j \leq \ell. \quad (16)$$

Les γ_j représentent les circulations des filaments et les $\alpha_j > 0$ sont des paramètres reliés aux structures des filaments. Ce système combine d'une part l'auto-interaction de chaque filament, caract ris e par l'opérateur de Schrödinger libre et provenant du flot binormal (linéarisé), et d'autre part l'interaction avec les autres filaments. Notons que des solutions particulières sont donn es par les collections de **filaments droits et parallèles** : $\psi_j(t, s) = z_j(t)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, pour lesquelles on retrouve alors le système des tourbillons ponctuels (9) d j   mentionné :

$$i\dot{z}_j + \sum_{k \neq j} \gamma_k \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|^2} = 0, \quad 1 \leq j \leq \ell.$$

En premier lieu se pose la question de l'existence de solutions pour le système (16), ce qui va de pair avec celle de collisions en temps fini entre plusieurs d'entre eux. Le premier résultat

4. "Local Induction Approximation".

5. Après remise à l'échelle en temps et en espace.

mathématique dans cette direction, de Kenig, Ponce et Vega [148], établit l'existence globale d'une solution pour des perturbations de filaments droits formant soit une paire quelconque, soit un triangle équilatéral en rotation uniforme.

Dans notre premier article [12], nous obtenons plusieurs résultats d'existence globale ou en temps grand de filaments. En particulier, nous considérons le cas d'un nombre quelconque de filaments lorsque $\{\psi_j\}$ est une perturbation symétrique, assez petite, d'un polygone régulier $\{z_j\}$ en rotation :

$$\psi_j(t, s) = z_j(t)\Phi(t, s), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Nous montrons que :

Si $\Phi(0, \cdot)$ est assez petite dans un certain espace d'énergie, il existe Φ unique telle que $\Phi - \Phi(0, \cdot)$ appartient à $C(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}))$ et telle que la collection $\{\psi_j\}$ définie comme ci-dessus est solution du système (16).

L'énergie dont il est question est définie par

$$E(\Phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|\partial_s \Phi|^2 + \Omega(-\ln |\Phi|^2 + |\Phi|^2 - 1)) ds,$$

où Ω est la vitesse de rotation du polygone ; c'est une quantité coercive lorsque $\Omega > 0$. De ce fait, petite énergie implique module proche de un. Cette énergie est le Hamiltonien associé à l'équation que nous trouvons pour la perturbation :

$$i\partial_t \Phi + \partial_{ss} \Phi + \Omega \frac{\Phi}{|\Phi|^2} (1 - |\Phi|^2) = 0. \quad (17)$$

Cette équation présente une dynamique riche dont nous étudions plusieurs aspects dans [12].

La seconde partie de notre étude des filaments presque parallèles est consacrée à démontrer l'existence d'une collection de filaments symétriques présentant une **collision en temps fini**. Cette problématique est à l'origine des articles [13, 10, 11]. Une piste naturelle consiste à chercher une solution de (17) avec un point d'annulation, ce qui est simple lorsque $\Omega = 0$. En suivant cette idée, nous détaillons dans notre article [13] différents exemples explicites de collisions. Lorsque $\Omega \neq 0$, la question est plus difficile. Comme première étape, nous avons réalisé dans [10] une étude à la fois théorique et numérique du système obtenu pour la paire de filaments avec des circulations de signe opposé. En suivant une suggestion de Zhakarov [232], nous construisons une **collision autosimilaire** à un temps arbitraire à la position $s = 0$. En revanche, de tels filaments ont un comportement linéaire à l'infini et sortent donc du cadre des filaments droits à l'infini.

Dans l'article [11], nous revenons au cadre des filaments droits à l'infini pour remédier à la restriction ci-dessus : $\psi_j(t, s) \rightarrow z_j(t)$ lorsque $s \rightarrow \pm\infty$, où $\{z_j\}$ désigne une solution du système des tourbillons ponctuels (9). Nous nous restreignons à deux cas : (ψ_1, ψ_2) est une paire de filaments avec circulations opposées et symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (cadre de [10]) ; $\{\psi_j\}$ est une collection d'un nombre arbitraire de filaments avec même circulation et avec symétrie polygonale (cadre de [12]). Notre théorème principal peut s'énoncer ainsi :

Pour t_0 assez petit, il existe une solution du système (16) sur $[0, t_0)$ dont les filaments sont droits à l'infini et telle que tous les filaments entrent en collision si et seulement si $t = 0$ et $s = 0$.

Notre démonstration met en oeuvre une méthode de point fixe dans un espace de Banach convenablement choisi et nécessite des estimations fines de type Strichartz localisées près de l'origine. Elle exploite largement la forme explicite du profil des solutions autosimilaires construit dans [10], en les renormalisant à l'infini, ce qui confère une silhouette chromosomique à la solution ainsi construite.

• **Chapitre 6. Dynamique des parois de Néel dans les films ferromagnétiques minces.**

Ce dernier chapitre est issu d'un article joint avec R. Côte et R. Ignat [64]. Nous étudions un modèle pour des films ferromagnétiques minces, décrits par une fonction aimantation dépendant du temps $m = m(t, x) : [0, +\infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$, où Ω , correspondant à la section transverse du film, est un domaine bidimensionnel et périodique dans une direction.

Notre travail est motivé par des observations physiques prédisant que l'état fondamental correspond à la minimisation d'une certaine énergie libre $E_{\varepsilon, \delta}(m_{\varepsilon, \delta})$ faisant intervenir des petits paramètres ε et δ reliés aux caractéristiques du matériau. Il est aussi observé que la compétition des différents termes de l'énergie, dans certains régimes asymptotiques où ε et δ tendent vers zéro, favorisent l'émergence de structures singulières :

- des singularités de type ligne, ou paroi de Néel, pour lesquelles l'aimantation connecte deux états constants en effectuant un saut le long d'une ligne ;
- des singularités de type vortex, ou paroi de Bloch, correspondant à une échelle d'énergie supérieure aux parois de Néel.

Une première partie de [64] est dédiée au cas stationnaire ; nous établissons rigoureusement la compacité des aimantations dans le régime énergétique compatible avec l'apparition des parois de Néel mais excluant les vortex. Nous établissons aussi l'optimalité des parois de Néel et montrons que toute famille d'aimantations **bien préparées**, c'est-à-dire d'énergie asymptotiquement quasi-minimale, converge (à sous-suite près) vers une paroi de Néel.

Ce résultat fait suite aux travaux de Ignat et Otto [138, 139] pour des régimes d'énergie différents ou des aimantations à valeurs dans \mathbb{S}^1 .

Nous nous intéressons en second lieu à la **dynamique asymptotique de l'aimantation** dans le régime considéré ci-dessus. Nous considérons comme modèle d'évolution l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert [102, 161], une interpolation d'un modèle hamiltonien (type "Schödinger map") et d'un modèle dissipatif (type "application harmonique"). Dans un premier temps, nous étudions le problème de Cauchy et nous construisons des solutions faibles globales, d'énergie finie, pour tous $\varepsilon, \delta > 0$ fixés. Puis, nous établissons que pour un certain choix des paramètres de l'équation, la dynamique limite de toute suite de solutions est triviale : les parois de Néel sont stationnaires.

Chapitre 1

Existence et unicité pour l'équation d'Euler 2D en présence de singularités

Sommaire

1.1	Introduction	23
1.2	Domaines singuliers	26
1.3	Singularités liées aux tourbillons ponctuels	28
1.3.1	Le système Euler-points vortex avec vorticité non bornée	29
1.3.2	Le système Euler-points vortex avec effet gyroscopique	34
1.3.3	Perspectives	37

Résumé

Ce premier chapitre concerne des résultats d'existence ou d'unicité au sujet de l'équation d'Euler en dimension deux.

L'article [159], en collaboration avec C. Lacave et C. Wang, traite de l'unicité de la solution bornée de l'équation d'Euler posée dans une certaine classe de domaines singuliers, comportant des angles aigus.

On présente ensuite l'article [69], en collaboration avec G. Crippa, M. C. Lopes Filho et H. J. Nussenzveig Filho, à propos de l'existence d'une solution lagrangienne pour le système Euler-points vortex avec vorticité non bornée.

Enfin, on résume des résultats similaires pour le système Euler-points vortex massiques, obtenus dans l'article [157] avec C. Lacave.

1.1 Introduction

L'équation d'Euler. Ce chapitre a trait à l'équation d'Euler en dimension deux, introduite par Euler [89] en 1757 afin de décrire l'évolution d'un fluide parfait incompressible. Lorsque

le fluide occupe tout le plan, en notant $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le champ de vitesse du fluide et $p : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la pression, l'équation s'écrit

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0. \quad (1.1)$$

Les problèmes mathématiques d'existence et d'unicité pour cette équation, en dimensions deux ou trois, ont suscité depuis un nombre immense de travaux dans la littérature. Un panorama en est donné par exemple dans l'ouvrage de Majda et Bertozzi [173].

Dans ce mémoire, on privilégie l'étude de certains écoulements tourbillonnaires mieux décrits à l'aide de la fonction tourbillon (ou vorticité) $\omega = \operatorname{rot}(u)$. De façon remarquable, l'équation pour le tourbillon est en dimension deux une équation de transport :

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, \quad \operatorname{div} u = 0. \quad (1.2)$$

En appliquant la méthode des caractéristiques lorsque u et ω sont réguliers, on a donc $\omega(t, X(t, x)) = \omega(0, x)$, où X est le flot associé à u : pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, la courbe $t \mapsto X(t, x)$ est définie par

$$\frac{d}{dt} X(t, x) = u(t, X(t, x)), \quad X(0, x) = x.$$

On introduira au Paragraphe 1.3 ci-dessous une notion plus générale de flot associé à des champs de régularité spatiale moindre.

Il est utile d'observer que l'on peut reconstituer la vitesse u explicitement à partir de son rotationnel ω , si l'on ajoute des conditions de nullité à l'infini. En effet, la condition d'incompressibilité ($\operatorname{div} u = 0$) permet d'écrire $u = \nabla^\perp \psi$, où la fonction courant ψ est solution de l'équation de Poisson $\Delta \psi = \omega$ dans \mathbb{R}^2 , avec $\psi \rightarrow 0$ à l'infini. En introduisant $G(x) = (1/2\pi) \ln |x|$ la solution fondamentale du Laplacien sur \mathbb{R}^2 , il en découle que $u = \nabla^\perp G * \omega$ ce qui donne la **loi de Biot-Savart**

$$u = K * \omega, \quad K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}.$$

Quelques propriétés de cette formule sont rassemblées en Section 7.1 de l'annexe.

Existence et unicité. L'existence de solutions régulières et globales en temps à l'équation d'Euler a été établie dès les années trente par Wolibner [226] et par Hölder [129]¹. Ici, on s'intéresse plutôt à la formulation faible de (1.2), pour laquelle le théorème de Yudovich [230] assure l'existence globale et l'unicité de la solution $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ associée à toute donnée initiale ω_0 dans $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Comme pour le cas régulier, toute solution faible est bien encore lagrangienne c'est-à-dire constante le long des courbes intégrales du flot de u .

L'existence globale de solutions de (1.2) est également connue dans certaines classes de fonctions non bornées, au prix de la perte éventuelle de l'unicité. On renvoie par exemple à Di Perna et Majda [84] (pour ω_0 dans $L^1 \cap L^p, 2 < p < \infty$), Chae [85] (pour ω_0 dans $L \operatorname{Log} L(\mathbb{R}^2)$ et à support compact), Delort [77] (pour ω_0 mesure de Radon signée appartenant à $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$, voir aussi Schochet [214] pour une approche similaire). Par ailleurs, Poupaud [206] a établi l'existence de solutions mesures de Radon signées, satisfaisant l'équation d'Euler avec une mesure de défaut. Dans ces derniers travaux, le caractère singulier des solutions considérées nécessite de trouver une

1. Ce travail comporte aussi tous les éléments permettant de démontrer également l'unicité, ainsi que le souligne Székelyhidi dans la note [147].

nouvelle formulation de (1.2), obtenue par symétrisation du noyau de Biot-Savart [77, 214, 206]. Nous reviendrons à cette formulation au Chapitre 3. Enfin, un travail récent de Bohun, Bouchut et Crippa [32] montre l'existence d'une solution à vorticité seulement dans L^1 , obtenue comme superposition avec le flot régulier lagrangien correspondant.

On s'intéressera particulièrement au cas où la vorticité est donnée par la superposition d'une composante bornée et de masses de Dirac, ce qui constitue une interpolation des cadres consid er es par Yudovich et Poupaud.

En ce qui concerne l'unicité, l'hypothèse de vorticité bornée (ou "presque bornée", voir [231]) semble inévitable pour appliquer les deux principales méthodes connues. Rappelons brièvement ces deux angles d'attaque :

– **La méthode d'énergie**, utilisée par Yudovich [230] et r ecrite par exemple dans l'ouvrage de Majda-Bertozzi [173]. Celle-ci consiste établir une estimation de Gronwall pour la norme L^2 de la différence de deux vitesses solutions de (1.1) avec même donnée initiale :

$$\mathcal{D}(t) \equiv \|u_1(t, \cdot) - u_2(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Un des piliers de cette preuve est l'inégalité de Calderón-Zygmund, vérifiée par les champs u_1 et u_2 , qui exprime le caractère presque lipschitzien du champ de vitesse :

$$\|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C \left(p + \frac{1}{p-1} \right) \|\omega(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall 1 < p < +\infty. \quad (1.3)$$

– **La méthode lagrangienne**, détaillée par exemple dans le livre de Marchioro et Pulvirenti [179], passe par une estimation de Gronwall pour une quantité liée à la distance de Wasserstein entre deux solutions :

$$\mathcal{D}(t) = \int_{\mathbb{R}^2} |X_1(t, x) - X_2(t, x)| |\omega_0(x)| dx, \quad (1.4)$$

où X_1 et X_2 sont les flots associ es aux deux solutions. L'argument clé est ensuite la régularité log-Lipschitz en espace et uniforme en temps du champ de vitesse :

$$|u(t, x) - u(t, y)| \leq C(\|\omega(t, \cdot)\|_{L^1} + \|\omega(t, \cdot)\|_{L^\infty}) |x - y|(1 + |\ln |x - y||), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.5)$$

La condition $\omega \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty)$ – automatiquement satisfaite dès lors que $\omega(0, \cdot) \in L^1 \cap L^\infty$, puisque les normes du tourbillon sont conservées au cours du temps – permet d'aboutir à une inégalité de la forme $\mathcal{D}(t) \leq Cp \int_0^t \mathcal{D}(s)^{1-1/p} ds$ pour la première méthode, ou bien $\mathcal{D}(t) \leq C \int_0^t \mathcal{D}(s)(1 + |\ln \mathcal{D}(s)|) ds$ pour la seconde, en notant que la première estimation entra ene la seconde par choix de $p = |\ln \mathcal{D}(s)|$. Puisque $\mathcal{D}(0) = 0$ cela entra ene que \mathcal{D} est nulle, d'après le lemme de Gronwall log-Lipschitz bien connu (une version du lemme d'Osgood) que nous rappelons ci-dessous :

Lemme 1. *Soient $a > 0$, $0 \leq b < 1$, et $T > 0$ tels que $b^{e^{-aT}} \exp(2(1 - e^{-aT})) < 1$. Soit $u \in C^1([0, T])$ avec $u \geq 0$ sur $[0, T]$. Supposons que $\dot{u} \leq a\varphi(u)$, avec $u(0) = b$, où $\varphi(r) = r(2 + |\ln r|)$ si $0 \leq r \leq 1$, $\varphi(r) = 2$ si $r \geq 1$. Alors u vérifie l'inégalité $u(t) \leq b^{e^{-at}} \exp(2(1 - e^{-at}))$, pour tout $t \in [0, T]$.*

Mentionnons finalement que des travaux ultérieurs, tels que ceux de Yudovich [231], de Vishik [223] ou de Bernicot et Keraani [27] ont permis de montrer l'unicité dans des espaces de fonctions

non bornées. En effet, il existe de tels espaces (par exemple, l'espace de Besov défini dans [223], les espaces de Morrey-Campanato LBMO (voir [27]) ou L_{mo}^α (voir [26])) pour lesquels le champ de vitesse correspondant satisfait encore à une estimation similaire à (1.5), qui est suffisante pour clore l'inégalité de Gronwall.

1.2 Domaines singuliers

L'objectif de cette section est d'étendre le résultat d'unicité de Yudovich pour l'équation d'Euler posée dans un domaine comportant des angles aigus.

Contexte d'étude. Les résultats d'existence et d'unicité de solutions régulières ou de solutions faibles avec vorticité bornée restent vrais pour l'équation d'Euler posée dans un domaine Ω connexe et régulier (de classe $C^{1,1}$). Dans ce cas, la condition de nullité de la vitesse à l'infini est remplacée par une condition de tangence au bord $\partial\Omega$. On peut ensuite reconstituer u par la loi de Biot-Savart ad hoc :

$$u(t, x) = \int_{\Omega} K_{\Omega}(x, y)\omega(t, y) dy = \int_{\Omega} \nabla_x^{\perp} G_{\Omega}(x, y)\omega(t, y) dy, \quad (1.6)$$

où le noyau de Green $G_{\Omega} : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par

$$\begin{aligned} G_{\Omega}(x, y) &= G_{\Omega}(y, x), \quad \Delta_x G_{\Omega}(x, y) = \delta_{x-y}, \quad \forall (x, y) \in \Omega \times \Omega; \\ G_{\Omega}(x, y) &= 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega \times \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier du disque $\Omega = B(0, 1) = \mathbb{D}$, les formules sont explicites :

$$G_{\mathbb{D}}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{|x-y|}{|x-y^*||y|} \right), \quad \text{où } y^* = \frac{y}{|y|^2}. \quad (1.7)$$

Les propriétés de continuité pour une solution u avec vorticité ω bornée, qui sont énoncées en annexe, s'appliquent encore pour les domaines bornés réguliers. En particulier, la condition de tangence est à entendre au sens classique.

On souhaite considérer désormais des domaines ouverts, bornés, simplement connexes, mais pas nécessairement partout réguliers. On formule la condition de tangence au sens faible :

$$\int_{\Omega} u \cdot h = 0 \quad \text{pour tout } h \in \{w \in L^2(\Omega) : w = \nabla p, \text{ pour un certain } p \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)\}$$

(voir [100]). Pour les domaines ouverts bornés et satisfaisant à la seule condition géométrique de convexité, Taylor [219] a démontré l'existence globale d'une solution à vorticité bornée. Dans [100], Gérard-Varet et Lacave établissent également l'existence globale pour une large classe de domaines singuliers. Cette classe inclue les domaines pour lesquels nous étudions ci-dessous l'unicité.

L'unicité semble inaccessible pour des domaines ouverts, bornés et simplement connexes généraux. En effet, les preuves connues rappelées au Paragraphe 1.1 exploitent crucialement la régularité du champ de vitesse $u = \nabla^{\perp}\psi$ obtenu par résolution de l'équation de Poisson dans le domaine :

$$\Delta\psi = \omega \text{ dans } \Omega, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.8)$$

Or, Jerison et Kenig [88] produisent un exemple de domaine de classe seulement C^1 et une fonction ω régulière tels que $u = \nabla^\perp \Delta^{-1} \omega$ ne soit même pas de gradient intégrable.

Ceci étant, il existe une classe de domaines non réguliers qui a été amplement étudiée dans la littérature des problèmes elliptiques, voir Grisvard [114], Kozlov, Mazya et Rossmann [153], Borsuk et Kondratiev [36]. Il s'agit de domaines dont le bord est $C^{1,1}$ sauf en un nombre fini de points x_k , $k = 1, \dots, N$, en lesquels $\partial\Omega$ forme un coin d'angle $\theta_k \in (0, 2\pi)$. Le comportement de la solution de (1.8), pour $\omega \in L^\infty$ donné, est bien connu au voisinage des points [114]. Le champ de vitesse $u = \nabla^\perp \psi$ n'est pas borné au voisinage de x_k si $\theta_k > \pi$. Si $\theta_k > \pi/2$, u n'appartient pas à $\bigcap_{p < \infty} W^{1,p}(\Omega)$, son comportement est trop singulier au voisinage des coins. En revanche, lorsque $\theta_k \leq \pi/2$, u appartient bien à $\bigcap_{p < \infty} W^{1,p}(\Omega)$. Grisvard [114] obtient de plus l'inégalité de Calderón-Zygmund :

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p, \Omega) \|\omega\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall 2 \leq p < +\infty, \quad (1.9)$$

pour une constante $C(p, \Omega)$ dépendant seulement de p et de Ω . Ceci laisse présager la possibilité d'établir l'unicité. Malheureusement, comme observé par Bardos, Di Plinio and Temam [21], la preuve de Grisvard permet d'aboutir à une borne seulement quadratique $C(p, \Omega) = C(\Omega)p^2$ qui est insuffisante pour appliquer la méthode d'énergie.

Dans le cas des **angles tous obtus** ($\theta_k > \pi/2$), l'obstacle à l'unicité lié au possible comportement singulier de la vitesse au voisinage des coins a été surmonté par Lacave [156]. Pour cela, [156] suppose de plus que le support de la vorticité reste toujours disjoint des coins. Ainsi, le champ de vitesse est plus régulier que prévu. La condition sur le support est elle-même assurée par une hypothèse supplémentaire de signe fixe sur la vorticité.

Dans le cas où Ω est un **carré**, ou bien est convexe avec des angles tous de la forme $\theta_k = \pi/m_k$, $m_k \in \mathbb{N}$, $m_k \geq 2$, Bardos, Di Plinio et Temam [21] ont utilis e des arguments de symétrie pour obtenir une nouvelle estimation BMO impliquant l'estimation (1.9) avec $C(p, \Omega) = C(\Omega)p$ et donc l'unicité.

Unicité pour les domaines à angles aigus. Le cas des domaines à angles tous aigus fait l'objet de notre travail [159]. Plus précisément, ces domaines sont définis par :

(H) Ω est un ouvert born e, simplement connexe de \mathbb{R}^2 , tel que $\partial\Omega$ est de classe $C^{2,\alpha}$ ($\alpha > 0$) sauf en un nombre fini de points x_k , $k = 1, \dots, N$, en lesquels $\partial\Omega$ forme un coin d'angle $\theta_k \in (0, \pi/2]$. Plus précisément, dans un voisinage des x_k , Ω est param etr e par $\{z = x_k + re^{i\theta}, 0 < \theta < \theta_k, 0 < r < r_0\}$ pour $r_0 > 0$.

Remarque 1.   la lumière des résultats connus, il serait plus naturel de supposer seulement $\partial\Omega \in C^{1,1}$ en dehors des coins. L'hypothèse de régularité $C^{2,\alpha}$ entre en jeu au niveau de l'application du théorème de Kellogg-Warschawski, comme expliqu e dans la preuve ci-dessous.

Théorème 2 (D'après [159], Theorem 1.1). *Supposons que Ω vérifie (H). Soit $\omega_0 \in L^\infty(\Omega)$. Il existe au plus une solution faible correspondante à l'équation d'Euler telle que $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$.*

Puisque nous ne disposons pas alors de l'estimation linéaire $C(p, \Omega) = C(\Omega)p$ dans l'inégalité de Calderón-Zygmund, nous avons utilis e l'approche lagrangienne pour démontrer ce résultat. Peu après la finalisation de [159], Di Plinio et Temam [81] ont montr e que l'estimation linéaire pour $C(p, \Omega)$ a bien lieu, complétant ainsi l'état de l'art d'une nouvelle preuve d'unicité par estimation d'énergie.

Éléments de preuve du Théorème 2. Le point de départ est le théorème de l'application conforme² : il existe un biholomorphisme \mathcal{T} qui envoie Ω sur le disque unité \mathbb{D} et $\partial\Omega$ sur $\partial\mathbb{D}$. Si \mathcal{T} n'est en général pas explicite, le grand intérêt de cette démarche est de se ramener à la formule de Biot-Savart dans le disque, qui, elle, est explicite (voir (1.6)- (1.7)). En effet, on a $G_\Omega(x, y) = G_\mathbb{D}(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y))$, puis³

$$K_\Omega(x, y) = \frac{1}{2\pi} D\mathcal{T}^T(x) \left(\frac{(\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y))^\perp}{|\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y)|^2} - \frac{(\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y))^*^\perp}{|\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y)^*|^2} \right) = D\mathcal{T}^T(x) K_\mathbb{D}(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)).$$

Par changement de variables, la loi de Biot-Savart se réécrit finalement pour $y \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} & u(t, \mathcal{T}^{-1}(y)) \\ &= \frac{1}{2\pi} D\mathcal{T}^T(\mathcal{T}^{-1}(y)) \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{(y - z)^\perp}{|y - z|^2} - \frac{(y - z^*)^\perp}{|y - z^*|^2} \right) \omega(t, \mathcal{T}^{-1}(z)) \det(D\mathcal{T}^{-1}(z)) dz. \end{aligned} \quad (1.10)$$

L'obtention d'estimations pour u se ramène de la sorte en grande partie à la connaissance du comportement de \mathcal{T} et de ses dérivées ou inverses. Cette idée a été mise en œuvre dans plusieurs problèmes reliés à l'équation d'Euler posée dans des domaines (extérieurs, perforés, de taille évanescence...), notamment par Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes [131], Lacave [155, 156], Bonnaillie-Noël, Lacave et Masmoudi [35].

Ici, la formule (1.10) suggère de considérer le push-forward de u résultant de la transformation conforme : $U(t, y) = D\mathcal{T}(\mathcal{T}^{-1}(y))u(t, \mathcal{T}^{-1}(y))$, pour $y \in \mathbb{D}$. Dans [159, Prop. 3.2, Prop. 3.3], nous montrons que ce champ $U(t, \cdot)$ est **uniformément borné et log-Lipschitz** lorsque $\omega(t, \cdot)$ appartient à L^∞ , alors que nous ne sommes pas capables de démontrer cette propriété pour le champ de vitesse $u(t, \cdot)$ original. Cette régularité repose de façon essentielle sur des bornes explicites pour \mathcal{T} , \mathcal{T}^{-1} ainsi que pour leurs dérivées au voisinage des coins. Ces estimations sont obtenues dans [159, Prop. 2.1]. En particulier, les dérivées jusqu'à l'ordre deux de \mathcal{T} sont bornées lorsque les angles sont aigus, mais $D\mathcal{T}^{-1}$ diverge éventuellement. Cependant, cette divergence dans (1.10) est compensée par les bornes pour $D\mathcal{T}$.

En simplifiant au cas d'un seul coin en x_1 , ce comportement provient du fait que la fonction obtenue en composant \mathcal{T}^{-1} par $\varphi : z \mapsto (z - x_1)^{\pi/\theta_1}$ est de classe $C^{2,\alpha}$ et envoie \mathbb{D} sur le demi-plan. Le théorème de Kellogg-Warschawski (voir [204, Theo. 3.6]) implique que cette application est de classe C^2 dans \mathbb{D} . C'est ici qu'intervient l'hypothèse de régularité $C^{2,\alpha}$, que nous avons discutée en Remarque 1.

Grâce à la régularité de U ainsi prouvée, l'unicité est finalement établie en établissant une inégalité de Gronwall pour la fonction

$$\mathcal{D}(t) = \int_0^t \int_\Omega |\mathcal{T}(X_1(s, x)) - \mathcal{T}(X_2(s, x))| dx ds,$$

où X_1 et X_2 sont les flots associés à deux solutions u_1 et u_2 ayant même donnée initiale.

1.3 Singularités liées aux tourbillons ponctuels

On présente ici les articles [69] et [157], dont le but est d'approfondir l'étude du système Euler-points vortex ou d'une variante de celui-ci incluant des effets gyroscopiques.

2. Dans ce qui suit, on identifie \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} .

3. On calcule $D\mathcal{T}$ en voyant \mathcal{T} comme une application de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 .

1.3.1 Le système Euler-points vortex avec vorticité non bornée

On étudie dans ce paragraphe l'existence de solutions lagrangiennes pour le système Euler-points vortex :

$$\begin{cases} \partial_t \omega + \left(v + \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k K(\cdot - z_k) \right) \cdot \nabla \omega = 0, & v = K * \omega, \\ \frac{dz_k}{dt} = v(t, z_k) + \sum_{j \neq k} \gamma_j K(z_k - z_j), & 1 \leq k \leq \ell. \end{cases} \quad (1.11)$$

La justification de ce modèle asymptotique décrivant l'interaction d'une vorticité uniformément bornée avec des masses de Dirac a été apportée par Marchioro et Pulvirenti [178]. Très récemment, Nguyen et Nguyen [197] ont aussi obtenu le système Euler-points vortex dans le cadre de la limite non visqueuse de l'équation de Navier-Stokes.

Comme on l'a vu dans l'introduction, ce système admet une **solution lagrangienne** avec vorticité $\omega(t, \cdot)$ uniformément bornée pour tout $t \geq 0$ (qui est unique si de plus $\omega(0, \cdot)$ est constante au voisinage des points vortex [177, 179, 158]). Pour chaque $2 < p < \infty$, il existe aussi une **solution faible** avec $\omega(t, \cdot)$ dans $L^1 \cap L^p$ [170]. De telles solutions sont globales en temps si les circulations γ_k sont toutes de même signe, afin d'exclure les collisions entre les trajectoires des points vortex. Enfin, dans [187], l'existence d'une solution globale pour $\ell = 1$ a été établie lorsque $\omega(t, \cdot)$ est une nappe de tourbillon (mesure de Radon appartenant à H^{-1}) de signe constant et de même signe que γ_1 . Le sens donné à (1.11) dans ce cadre est en fait celui donné par Poupaud [206] pour les solutions à valeurs mesures à l'équation d'Euler. Le résultat de [187] étend donc celui de Delort [77] pour les solutions nappes de tourbillon de l'équation d'Euler. La notion de solution mesure à l'équation d'Euler sera précisée au Chapitre 3.

Suite aux résultats de [187, 170], la question naturelle à l'origine de [69] était de déterminer si de telles solutions faibles étaient également lagrangiennes. En effet, s'il découle facilement des propriétés du flot qu'une solution lagrangienne est bien une solution faible, la réciproque est plus délicate pour des champs de vitesse peu réguliers.

Équations de transport avec champs peu réguliers. Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $T > 0$ et $u = u(t, x)$ un champ continu sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ et appartenant à $L^1([0, T], W^{1, \infty}(\mathbb{R}^d))$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité de la solution $\gamma \in C^1([0, T])$ à l'EDO

$$\dot{\gamma}(t) = u(t, \gamma(t)), \quad \gamma(0) = x, \quad t \in [0, T].$$

Lorsque u n'est pas lipschitzien en espace, l'unicité de la courbe γ peut être perdue. C'est le cas pour l'exemple classique, détaillé dans [6], du champ autonome $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \sqrt{|y|}$, qui engendre plusieurs familles de trajectoires avec même donnée initiale. Cependant, DiPerna et Lions [83] ont étudié le cas où u admet une certaine régularité spatiale faible avec intégrabilité en temps. Ils ont démontré qu'il est en fait possible de sélectionner une unique courbe intégrale **pour presque toute donnée initiale** de sorte à produire un flot unique et stable par rapport aux régularisations du champ de vitesse. Ce flot a été étudié par la suite dans de nombreux articles et est désormais appelé **flot régulier lagrangien**. Il est défini dans [3, 4, 67, 69] de la façon suivante :

Définition 3. Soient $T > 0$ et $u \in L^1_{\text{loc}}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$. On dit que $X : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ est un flot régulier lagrangien associé à u si

- Pour presque tout⁴ $x \in \mathbb{R}^d$, l'application $t \mapsto X(t, x)$ est une solution absolument continue de l'EDO $\frac{d}{dt}X(t, x) = u(t, X(t, x))$ avec $X(0, x) = x$;
- Il existe $L > 0$ tel que $X(t, \cdot) \# \mathcal{L}^d \leq L\mathcal{L}^d$, pour tout $t \in [0, T]$, c'est-à-dire : $\mathcal{L}^d(X(t, \cdot)^{-1}(A)) \leq L\mathcal{L}^d(A)$ pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout A borélien de \mathbb{R}^d .

La plus petite constante L vérifiant la seconde propriété est appelée constante de compressibilité du flot. Dans le cas régulier, on peut choisir $L = \exp(\int_0^T \|\text{div } u(t, \cdot)\|_{L^\infty} dt)$. Cette seconde hypothèse imposant la non concentration du flot est essentielle afin de sélectionner les "bonnes trajectoires" pour presque toute donnée initiale.

Le point de départ de la théorie de DiPerna et Lions consiste à rattacher de façon systématique les questions d'existence et d'unicité du flot à celles d'existence, d'unicité et de stabilité pour l'équation de transport linéaire associée :

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, \quad \omega(0, \cdot) = \omega_0 \quad \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^d. \quad (1.12)$$

Les champs considérés vérifient des conditions de divergence bornée et de décroissance à l'infini :

$$(H_1) \quad \text{div } u \in L^1([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^d)),$$

$$(H_2) \quad \frac{u}{1 + |x|} \in L^1([0, T], L^1(\mathbb{R}^d)) + L^1([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^d)).$$

Dans ce cadre, DiPerna et Lions s'intéressent aux solutions renormalisées de (1.12) : ce sont les solutions faibles ω pour lesquelles $\beta(\omega)$ est aussi solution faible, pour toute fonction $\beta \in C^1(\mathbb{R})$. Ceci est bien sûr le cas de toute solution régulière ω , car il suffit alors de multiplier l'équation (1.12) par $\beta'(\omega)$ et d'utiliser la règle de la chaîne. La motivation de cette notion est le fait que si u vérifie les conditions (H_1) et (H_2) , il existe au plus une solution renormalisée $\omega \in L^\infty([0, T], L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d))$. Lorsque toute solution faible est renormalisée, on dit que u a la propriété de renormalisation. La propriété de renormalisation implique donc l'unicité de la solution faible de l'équation de transport⁵. En découlent l'existence et l'unicité du flot régulier lagrangien⁶ (il s'agit du second volet des résultats de [83]). L'unique solution ω est alors bien constante le long des courbes intégrales du flot.

Ambrosio [3] a formulé ce principe de façon plus abstraite : il existe un unique flot régulier lagrangien dès lors que l'EDP a la propriété d'existence et d'unicité. C'est en particulier le cas pour un champ qui a la propriété de renormalisation.

La littérature depuis [83] s'attache par conséquent à trouver des conditions pour lesquelles le champ de vitesse a la propriété de renormalisation. DiPerna et Lions ont démontré que c'est le cas sous des hypothèses de régularité spatiale faible :

$$(H_3) \quad u \in L^1([0, T], W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^d)).$$

Ambrosio [3] a par la suite étendu la propriété de renormalisation à des champs de régularité spatiale BV . En deux dimensions et dans le cas autonome, il existe aussi des résultats requérant

4. Par rapport à la mesure de Lebesgue \mathcal{L}^d sur \mathbb{R}^d .

5. Ainsi que la stabilité par rapport à des régularisations du champ de vitesse.

6. La définition de flot dans [83] diffère légèrement de la Définition 3 mais peut être retrouvée à partir de cette dernière.

moins de régularité pour u sous des conditions portant sur la direction locale du champ (reliées à la structure des points critiques du Hamiltonien correspondant), voir [42, 125]. De façon générale, des informations supplémentaires sur la structure du champ de vitesse permettent d'abaisser la régularité (ou bien de n'exiger de la régularité que par rapport à certaines variables) pour obtenir la propriété de renormalisation. Ce principe est développé par Lebris et Lions [163] et par Bohun, Bouchut et Crippa [31] avec des applications dans [68] au système de Vlasov-Poisson, dont la structure remarquable est une motivation pour cette étude.

Une approche introduite plus récemment consiste à étudier les propriétés du flot de façon totalement indépendante de l'équation de transport : voir Hauray, Lebris et Lions [127] pour une preuve d'unicité dans le cas d'un champ de vitesse autonome, Crippa et de Lellis [67] pour une preuve d'existence et d'unicité dans le même contexte de régularité spatiale que [83]. La méthode de Crippa et de Lellis a été réutilisée dans [58, 41, 31, 68] pour obtenir de nouveaux résultats d'existence du flot régulier lagrangien.

Résultats. Revenons au système (1.11) sur un intervalle $[0, T]$, en nous restreignant pour simplifier au cas d'un seul point vortex. Cependant, les théorèmes de ce paragraphe peuvent s'étendre sans difficulté au cas de plusieurs points vortex sans collision :

$$\min_{j \neq k} \min_{t \in [0, T]} |z_k(t) - z_j(t)| > 0.$$

Dans le cadre de mon article [187], le champ de vitesse associé à la nappe de tourbillon $\omega(t, \cdot)$ appartient à $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, a priori sans régularité spatiale supplémentaire. La théorie ne permet donc pas de lui associer un flot régulier lagrangien, et encore moins de donner un sens à l'EDO de (1.11) pour toute donnée initiale $z(0)$.

Dans le cadre de notre article [69] avec tourbillon ω dans $L^\infty(L^1 \cap L^p)$, $p > 2$, le champ de vitesse $v = K * \omega$ qui lui est associé appartient à $L^1_{\text{loc}}(W^{1,p}_{\text{loc}})$. Il est même pour tout temps höldérien en espace et uniformément borné, en vertu de la Proposition 50 en annexe. Cependant, le champ singulier additionnel créé par le point vortex n'est pas BV , on ne peut donc pas appliquer directement les résultats connus à propos de l'existence et de l'unicité du flot régulier lagrangien. Dans [69], nous résolvons ce problème pour une classe plus générale où le champ de vitesse total s'écrit

$$u(t, \cdot) = v(t, \cdot) + \gamma K(\cdot - z(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1.13)$$

avec v vérifiant les conditions $(H_1) - (H_2) - (H_3)$, K le noyau de Biot-Savart, γ un réel non nul, et $z \in W^{1,\infty}([0, T], \mathbb{R}^2)$ une trajectoire quelconque. On suppose également que

$$(H_4) \quad v \in L^\infty([0, T], L^q(\mathbb{R}^2)) \quad \text{pour un certain } 2 < q \leq +\infty$$

(c'est bien le cas de $v = K * \omega$ avec ω comme dans [171]).

Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 4 ([69], Theorem 2). *Soit u un champ de vitesse donné par (1.13), où v vérifie $(H_1) - (H_2) - (H_3) - (H_4)$. Il existe un unique flot régulier lagrangien X pour u . De plus, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$X(t, x) \neq z(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Enfin, toute solution faible de l'équation de transport linéaire associée est constante le long des courbes intégrales du flot.

On remarque que par définition du flot, la condition $X(t, \cdot)_{\#} \mathcal{L}^2 \leq L\mathcal{L}^2$ implique que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^2$ on a $X(t, x) \neq z(t)$ **pour presque tout** $t \in [0, T]$. Ainsi, l'apport important du Théorème 4 est le fait que les collisions entre les trajectoires du flot et le point vortex ne se produisent **jamais**. Pour le système Euler-points vortex avec tourbillon uniformément borné, cette propriété de non collision est directement assurée par la régularité log-Lipschitz (1.5) de v , comme cela est noté dans [177].

Notre second résultat fournit une méthode effective de construction du flot par un argument d'approximation, avec un taux quantitatif de convergence. On impose des conditions légèrement plus restrictives que précédemment mais qui sont bien vérifiées pour $v = K * \omega$ avec $\omega \in L^\infty(L^1 \cap L^p)$ et $2 < p \leq +\infty$. :

$$\begin{aligned} (H'_1) \quad & \operatorname{div} v \in L^1([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^2)), \\ (H'_2) \quad & v \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2), \\ (H'_3) \quad & \nabla v \in L^1([0, T], L^p(\mathbb{R}^2)) \quad \text{pour un certain } 1 < p \leq +\infty. \end{aligned}$$

On définit une suite de champs réguliers u_n qui approche u dans L^1_{loc} , de la façon suivante :

$$u_n(t, x) = v_n(t, x) + \gamma K_n(x - z(t)),$$

où $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité, $v_n = \rho_n * v$ et $K_n(x) = x^\perp / (2\pi(|x|^2 + n^{-2}))$. On note X_n l'unique flot (au sens classique) associé à u_n .

Théorème 5 ([69], Theorem 3). *Soit v vérifiant $(H'_1) - (H'_2) - (H'_3)$. Soit $R > 0$. Il existe \tilde{R} et C , dépendant de $R, T, \|v\|_{L^\infty(L^\infty)}, \|\operatorname{div} v\|_{L^1(L^\infty)}, \|\nabla v\|_{L^1(L^p)}$, et $\|z\|_{W^{1,\infty}}$, tels que*

$$\int_{B_R} \sup_{t \in [0, T]} |X_n(t, x) - X_m(t, x)| dx \leq C \left(|\ln \|u_n - u_m\|_{L^1([0, T] \times B_{\tilde{R}}})| \right)^{-1/3}.$$

En particulier, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2, L^\infty([0, T]))$, et converge vers X dans cet espace, où X est le flot régulier lagrangien associé à u , trouvé au Théorème 4.

Remarque 2. Soient v_1 et v_2 des champs vérifiant $(H'_1) - (H'_2) - (H'_3)$ et X_1 et X_2 des flots associés à $u_1 = v_1 + \gamma K(\cdot - z)$ et $u_2 = v_2 + \gamma K(\cdot - z)$. Alors l'estimation du Théorème 5 a lieu, avec $X_n - X_m$ remplacé par $X_1 - X_2$ et $u_n - u_m$ par $v_1 - v_2$. En particulier, avec $v_1 = v_2$, ceci donne après le Théorème 4 une deuxième preuve de l'unicité du flot.

Éléments de preuve des Théorèmes 4 et 5. La preuve du Théorème 4 repose sur le résultat abstrait d'Ambrosio évoqué ci-dessus : pour montrer l'existence et l'unicité du flot, il suffit de montrer l'existence et l'unicité au niveau de l'équation de transport. Par conséquent, comme première étape, on démontre comme dans [83] ou [158] la propriété :

Proposition 6 ([158, 69]). *Si v vérifie (H_3) et $v \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$, le champ $u = v + \gamma K(\cdot - z)$ admet la propriété de renormalisation.*

Puis, en ajoutant les conditions $(H_1) - (H_2)$, on en déduit que l'équation de transport correspondante admet bien une unique solution faible, qui est alors nécessairement lagrangienne.

Afin de démontrer la deuxième partie du Théorème 4, il faut encore s'assurer que les collisions de se produisent pas, pour presque toute donnée initiale. C'est une conséquence de la

Proposition 7 ([69], Proposition 7). *Pour $0 < \varepsilon < 1$ et $R > 0$, soit*

$$P(\varepsilon, R) = \left\{ x \in B_R \quad \text{tel que} \quad \min_{t \in [0, T]} |X(t, x) - z(t)| < \varepsilon \right\}.$$

Alors

$$\mathcal{L}^2(P(\varepsilon, R)) \leq C(T, L_R, \|v\|_{L^\infty(L^q)} + \|\dot{z}\|_{L^\infty}) \varepsilon^{1-2/q}.$$

Il suffit alors de laisser tendre ε vers zéro pour obtenir le résultat. La preuve de la Proposition 7 adapte des arguments introduits dans [55] pour le système de Vlasov-Poisson, qui seront aussi présentés au Chapitre 2 dans le Lemme 21. Il s'agit d'une part d'utiliser le caractère höldérien en temps de $t \mapsto |X(t, x) - z(t)|$ pour presque tout x appartenant à un ensemble de "grande mesure" (même si v n'est pas uniformément borné). Et d'autre part d'utiliser la deuxième propriété de la définition du flot : $X(t, \cdot) \# \mathcal{L}^2 \leq L\mathcal{L}^2$.

La preuve du Théorème 5 est quant à elle uniquement basée sur des estimations pour les flots sans passer par le lien avec les équations de transport. Elle adapte à notre cadre singulier les estimations obtenues par Crippa et DeLellis [67, Theorem 2.9] : si v_1 et v_2 vérifient les hypothèses ci-dessus et X_1 et X_2 sont des flots correspondants avec constantes de compressibilité L_1 et L_2 , alors pour tout $t \in [0, T]$,

$$\|X_1(t, \cdot) - X_2(t, \cdot)\|_{L^1(B_R)} \leq C \left| \ln \left(\|v_1 - v_2\|_{L^1([0, t] \times B_{\tilde{R}})} \right) \right|^{-1}, \quad (1.14)$$

où $\tilde{R} = R + T\|v_1\|_{L^\infty}$ et où C ne dépend que de $T, R, \|v_1\|_{L^\infty}, \|v_2\|_{L^\infty}, L_1, L_2$ et $\|\nabla v_1\|_{L^1(L^p)}$. Voici une esquisse de la preuve de l'estimation (1.14) par Crippa et De Lellis. Le point de départ est la fonction

$$g(t) = \int_{B_R(0)} \ln \left(1 + \frac{|X_1(t, x) - X_2(t, x)|}{\delta} \right) dx,$$

où $\delta = \|v_1 - v_2\|_{L^1([0, t] \times B_{\tilde{R}})}$. Par calcul de $g'(t)$, il vient :

$$\begin{aligned} g'(t) &\leq \int_{B_R} \frac{|v_1(t, X_1(t, x)) - v_2(t, X_2(t, x))|}{|X_1(t, x) - X_2(t, x)| + \delta} dx \\ &\leq \frac{1}{\delta} \int_{B_R} |v_1(t, X_2(t, x)) - v_2(t, X_2(t, x))| dx + \int_{B_R} \frac{|v_1(t, X_1(t, x)) - v_1(t, X_2(t, x))|}{|X_1(t, x) - X_2(t, x)| + \delta} dx. \end{aligned}$$

Le premier terme est majoré par définition de δ . Pour le second terme, une estimation essentielle est utilisée, reposant sur la notion de fonction maximale (voir [67, Lemma A.3]). Il s'agit d'une version faible de l'inégalité des accroissements finis : si $v \in BV(\mathbb{R}^d)$, pour tout $\lambda > 0$ on a pour presque tous x, y tels que $|x - y| \leq \lambda$,

$$|v(x) - v(y)| \leq c|x - y|(M_\lambda Dv(x) + M_\lambda Dv(y)), \quad (1.15)$$

où

$$M_\lambda f(x) := \sup_{0 < r < \lambda} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y) dy.$$

Crippa et de Lellis montrent ainsi que $g'(t)$ est majorée par les constantes de ci-dessus, ce qui implique une borne pour $g(t)$. Nous utiliserons à nouveau l'estimation (1.15) au Chapitre 4.

Pour adapter cette méthode au Théorème 5, nous devons tenir compte du fait que l'estimation (1.15) ne s'applique pas au champ singulier $K(\cdot - z)$. Étant donné $\varepsilon > 0$, nous pouvons décomposer grâce au Lemme 8 dans [69] : $B_R = [B_R \setminus P_\varepsilon] \cup P_\varepsilon$, où $u_n(t, X_n(t, \cdot))$ et $u_m(t, X_m(t, \cdot))$ sont réguliers sur $B_R \setminus P_\varepsilon$ et où P_ε est de mesure inférieure à $C\varepsilon$. Plus précisément,

$$P_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{t.q.} \quad \min_{t \in [0, T]} |X_n(t, x) - z(t)| < \varepsilon \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{t.q.} \quad \min_{t \in [0, T]} |X_m(t, x) - z(t)| < \varepsilon \right\}.$$

Sur l'ensemble $B_R(0) \setminus P_\varepsilon$, on procède exactement comme dans [67] (avec des estimations qui divergent lorsque ε tend vers zéro); sur l'ensemble P_ε , l'intégrale est petite. Il faut ensuite optimiser le choix de ε . Pour cette raison, on obtient finalement une estimation moins précise que dans (1.14) (à savoir $|\ln|^{-1/3}$ au lieu de $|\ln|^{-1}$).

1.3.2 Le système Euler-points vortex avec effet gyroscopique

Résultats. Dans ce paragraphe, on présente les résultats d'existence et d'unicité obtenus dans [157] pour le système couplé suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \omega + \left(v + \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k K(x - z_k) \right) \cdot \nabla \omega = 0, & v = K * \omega, \\ m_k \ddot{z}_k = \gamma_k \left(\dot{z}_k - v(t, z_k) - \sum_{j \neq k} \gamma_j K(z_k - z_j) \right)^\perp, & 1 \leq k \leq \ell. \end{cases} \quad (1.16)$$

Comme on l'a vu dans l'introduction, ce système avec points vortex massiques se réduit au système Euler-points vortex lorsque $m_k = 0$, le passage de l'un à l'autre ayant été établi rigoureusement par Glass, Lacave et Sueur [105] lorsque $\ell = 1$. En particulier, ceci implique existence globale d'une solution faible de (1.16) avec tourbillon uniformément borné et intégrable pour tout temps. En revanche, un tel résultat de convergence (qui impliquerait donc l'existence d'une solution) n'est pas disponible pour $\ell > 1$.

On considère dans la suite une donnée initiale de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \omega(0, \cdot) &= \omega_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \text{ à support compact dans } B(0, R_0), \\ (z_k, \dot{z}_k)(0) &= (z_{k,0}, h_{k,0}) \text{ pour } k = 1, \dots, \ell, \text{ avec } z_{k,0} \text{ distincts deux à deux.} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Concernant l'existence, nous avons un premier résultat :

Théorème 8. *Soit une donnée initiale comme dans (1.17). Il existe $T_* > 0$ tel que pour tout $T \in (0, T_*)$, il existe une solution faible $(\omega, \{z_k\})$ de (1.16) sur $[0, T]$. De plus, si on suppose que tous les γ_k sont de même signe, alors $T_* = +\infty$. Pour cette solution, les quantités suivantes sont conservées :*

— L'énergie

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln|x-y| \omega(t, y) \omega(t, x) dx dy + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k \int_{\mathbb{R}^2} \ln|x-z_k(t)| \omega(t, x) dx \\ &+ \sum_{j \neq k} \frac{\gamma_k \gamma_j}{2\pi} \ln|z_k(t) - z_j(t)| - \sum_{k=1}^{\ell} m_k |\dot{z}_k(t)|^2. \end{aligned}$$

— *Le moment*

$$\mathcal{I}_0 = \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \omega(t, x) dx + \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k |z_k(t)|^2 - 2 \sum_{k=1}^{\ell} m_k z_k(t)^\perp \cdot \dot{z}_k(t).$$

Remarque 3. Par solution faible de (1.16) sur $[0, T]$, on entend : $\omega \in L^\infty([0, T], L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)) \cap C([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^2) - w^*)$ satisfait l'EDP au sens des distributions, $z_k \in C^2([0, T])$ pour $k = 1, \dots, \ell$ satisfait le système d'ODE au sens classique. On peut alors montrer que $\omega(t, \cdot)$ reste à support compact pour tout $t \in [0, T]$.

Remarque 4. Le temps d'existence maximal du théorème précédent correspond au premier temps de collision entre deux au moins des points vortex massiques. La conservation de l'énergie et du moment permettent directement de déduire une borne inférieure pour les distances si tous les γ_k sont de même signe : $\min_{t \in [0, T]} |z_j(t) - z_k(t)| > d_T > 0$ pour tout $T > 0$. Ainsi il y a existence globale, comme c'est également le cas pour le système Euler-points vortex.

Remarque 5. Si ω_0 est seulement supposé appartenir à $L^p(\mathbb{R}^2)$ pour un certain $p > 2$ au lieu de $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, on peut encore montrer l'existence globale d'une solution, globale en temps si tous les γ_k sont de même signe, cf le résultat de [170] pour le système Euler-points vortex. En revanche dans ce cas aucun résultat d'unicité n'est connu (ni attendu).

Notre deuxième résultat affirme que toute solution faible comme au Théorème 8 est constante le long des trajectoires du flot régulier lagrangien relatif au champ de vitesse total. On se place désormais dans un cadre plus général : pour $T > 0$, on se donne une **famille quelconque de trajectoires sans collisions**, c'est-à-dire z_k appartient à $W^{2,\infty}([0, T]; \mathbb{R}^2)$ pour $1 \leq k \leq \ell$ et vérifie

$$\min_{k \neq p} \min_{t \in [0, T]} |z_k(t) - z_p(t)| \geq d > 0.$$

Théorème 9. Soit $\omega_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ à support compact dans $B(0, R_0)$ et soit ω une solution faible sur $[0, T]$ de

$$\partial_t \omega + \left(v + \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k K(x - z_k) \right) \cdot \nabla \omega = 0, \quad v = K * \omega.$$

Alors il existe un unique flot régulier lagrangien (au sens de la Définition 3) relatif au champ de vitesse

$$u = v + \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k K(\cdot - z_k),$$

et ω est transporté par ce flot : $\omega(t, \cdot) = X(t, \cdot)_\# \omega_0$.

De plus, il n'y a pas de collisions : pour presque tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a

$$X(t, x) \neq z_k(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall k = 1, \dots, \ell.$$

Enfin, le tourbillon $\omega(t, \cdot)$ est à support compact dans $B(0, R_T)$ pour tout $t \in [0, T]$, où R_T dépend de T et des données initiales : $\|\omega_0\|_{L^\infty}$, $\|z_k\|_{W^{2,\infty}([0, T])}$, et R_0 .

On montre aussi la propriété suivante, fondamentale pour l'unicité :

Théorème 10. *Avec les mêmes hypothèses que précédemment, on suppose de plus que*

$$\omega_0 = \alpha_k \quad \text{dans } B(z_k(0), \delta_0), \quad \forall k = 1, \dots, \ell \quad (1.18)$$

pour des réels $\alpha_k \in \mathbb{R}$ et $\delta_0 > 0$. Alors il existe $\delta_T > 0$, dépendant seulement de T , δ_0 , $\|\omega_0\|_{L^\infty}$, $\|z_k\|_{W^{2,\infty}([0,T])}$ et R_0 , tel que

$$\omega(t, \cdot) = \alpha_k \quad \text{dans } B(z_k(t), \delta), \quad \forall t \in [0, T].$$

Quant à l'unicité, nous démontrons qu'elle a bien lieu sous l'hypothèse précédente pour le tourbillon au voisinage des points vortex massiques. Il s'agit de la même condition additionnelle que pour le système Euler-points vortex.

Théorème 11. *Soient ω_0 et $(\{z_{k,0}\}, \{h_{k,0}\})$ comme dans (1.17), tels que de plus (1.18) a lieu. Alors pour tout $T > 0$, il existe au plus une solution faible $(\omega, \{z_k\})$ du système (1.16) sur $[0, T]$ avec cette donnée initiale.*

Éléments de preuve. La preuve du Théorème 8 se fonde sur un argument classique de compacité à partir d'une suite de solutions $(\omega_n, \{z_{k,n}\})$ d'un schéma itératif. En particulier, lorsque toutes les circulations ont même signe, on établit une borne uniforme en n pour une quantité liée à l'énergie totale : pour tout $T > 0$, $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \max_{t \in [0, T]} |\mathcal{H}_n(t)| \leq C$, où

$$\mathcal{H}_n(t) = \sum_{j \neq k} \frac{\gamma_j \gamma_k}{2\pi} \ln |z_{j,n}(t) - z_{k,n}(t)| - \sum_{k=1}^{\ell} m_k |\dot{z}_{k,n}(t)|^2.$$

De cette borne alliée à l'hypothèse de signe sur les circulations découlent des bornes inférieures uniformes en n :

$$\inf_{n \in \mathbb{N}^*} \min_{j \neq k} \min_{t \in [0, T]} |z_{j,n}(t) - z_{k,n}(t)| > 0.$$

Pour le Théorème 9, l'existence et l'unicité du flot s'obtiennent exactement de la même façon que pour le système Euler-points vortex, en rappelant que le champ de vitesse total a la propriété de renormalisation et en invoquant le résultat abstrait d'Ambrosio [3] (voir le Paragraphe 1.3.1). La partie nouvelle à démontrer est celle qui affirme que les collisions entre les trajectoires de fluide et les points vortex ne peuvent pas se produire. Cette propriété repose crucialement sur l'introduction d'une **énergie locale** définie comme suit. Pour presque tout x tel que $X(t, x) \neq z_j(t)$ pour tout $j = 1, \dots, \ell$ sur un intervalle de temps maximal $[0, T(x))$,

$$F_k(t) = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\gamma_j}{2\pi} \ln |X(t, x) - z_j(t)| + \varphi(t, X(t, x)) + \langle X(t, x), \dot{z}_k^\perp(t) \rangle - 1,$$

où φ désigne la fonction courant ($v = \nabla^\perp \varphi$). Pour le système Euler-points vortex, la quantité jouant un rôle analogue est définie dans [177] par

$$F(t) = \sum_{j=1}^{\ell} |X(t, x) - z_j(t)|^{-2}. \quad (1.19)$$

La définition de F_k est motivée par l'observation que les termes les plus singuliers s'annulent par calcul de la dérivée, ce qui donne, en utilisant les autres bornes sur $\partial_t \varphi$ (voir [157])

$$|F'_k(t)| \leq C_T(|x| + \sum_{j \neq k} |X(t, x) - h_j(t)|^{-1}).$$

On en déduit que ou bien $X(t, x)$ est toujours éloigné de tous les points vortex, ou bien il existe k tel que $X(t, x)$ reste proche de $z_k(t)$ pour tout $t \in [0, T]$, ce qui permet de se ramener au cas d'un seul point vortex ; d'autre part, on en déduit une borne inférieure de la forme

$$c_T|x - z_k(0)| \leq |X(t, x) - z_k(t)|, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.20)$$

En particulier, les collisions sont donc exclues sur tout $[0, T]$.

Enfin, le fait que le tourbillon reste constant au voisinage des points vortex pour tout temps est une conséquence de la propriété (1.20) et de la décomposition $\omega(t, \cdot) = \sum_k X(t, \cdot) \# \omega_{0,k} + X(t, \cdot) \# \omega_{0,r}$, avec $\omega_{0,k} = \omega_0 \mathbf{1}_{B(z_k, 0, \delta_0)}$ et $\omega_{0,r}$ à support dans $\mathbb{R}^2 \setminus \cup_k B(z_k, 0, \delta_0)$.

On insiste sur le fait que les calculs sur l'énergie locale qui permettent d'établir l'absence de collision **ne dépendent pas de la dynamique explicite des points vortex** : la seule hypothèse dont on se sert est la régularité en temps de ces trajectoires. Ceci n'est pas le cas pour le système Euler-points vortex, dans lequel les EDO explicites des points vortex sont nécessaires afin d'estimer $F(t)$ définie par (1.19).

Finalement, la preuve de l'unicité (Théorème 11), basée sur la méthode d'énergie, suit exactement les mêmes lignes que celle de [158] pour le système Euler-points vortex. Ici encore, la clef de voûte est la propriété d'harmonicité de la différence des deux vitesses associées à deux solutions au voisinage des points vortex, due au fait que les tourbillons sont constants et de même valeur dans ce voisinage.

1.3.3 Perspectives

Il serait intéressant d'étudier la combinaison des systèmes (1.11) et (1.16) c'est-à-dire de coupler l'interaction de N points vortex classiques z_j et de ℓ points vortex massiques h_j avec un tourbillon uniformément borné :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \omega + \left(v + \sum_{j=1}^N d_j K(x - z_j(t)) + \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_j K(x - h_j(t)) \right) \cdot \nabla \omega = 0, \quad v = K * \omega, \\ \dot{z}_k(t) = v(t, z_k(t)) + \sum_{j=1}^N d_j K(z_k(t) - z_j(t)) + \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_j K(z_k(t) - h_j(t)), \quad k = 1, \dots, N \\ m_k \ddot{h}_k(t) = \gamma_k \left(\dot{h}_k(t) - v(t, h_k(t)) - \sum_{j=1}^N d_j K(h_k(t) - z_j(t)) - \sum_{j \neq k} \gamma_j K(h_k(t) - h_j(t)) \right)^\perp, \\ k = 1, \dots, \ell, \end{array} \right.$$

où d_1, \dots, d_N sont les intensités associées aux points vortex classiques et $\gamma_1, \dots, \gamma_\ell$ celles associées aux points vortex massiques. Il serait envisageable d'obtenir l'analogie des résultats d'existence et

d'unicité précédents, en considérant une combinaison appropriée de l'énergie locale au voisinage des points vortex massiques et de la distance aux points vortex classiques.

D'autre part, la question de l'unicité pour les systèmes Euler-points vortex classiques ou-massiques dans le cas général est toujours ouverte. Une première étape de généralisation de la condition (1.18) pourrait consister à démontrer l'unicité pour un seul point vortex, lorsque la vorticité est initialement **radiale et régulière** dans un voisinage de ce point. Le problème se rapporterait donc à analyser le comportement de la **norme du flot** au voisinage du point vortex. Il serait envisageable de démontrer une propriété de propagation de la régularité, qui serait utile pour l'unicité, en observant que le comportement de la norme est moins singulier que celui du flot.

Chapitre 2

Existence et unicité pour le système de Vlasov-Poisson avec ou sans singularités

Sommaire

2.1	Introduction	40
2.2	Unicité pour Vlasov-Poisson avec densité non bornée	42
2.3	Stabilité pour Vlasov-Poisson dans des espaces d'Orlicz	44
2.4	Le système de Vlasov-Poisson avec des charges ponctuelles	48
2.4.1	Problème de Cauchy en dimension trois et interaction répulsive.	49
2.4.2	Propagation des moments en dimension trois et interaction répulsive.	50
2.4.3	Existence globale en dimension deux et interaction attractive	53
2.5	Quelques perspectives	54

Résumé

Le sujet de ce chapitre est le système de Vlasov-Poisson en dimensions deux ou trois.

On se penche d'abord sur l'unicité de la solution lorsque la densité macroscopique appartient à certains espaces d'Orlicz : il s'agit des travaux [188] et [130]. Dans ce dernier, en collaboration avec T. Holding, on obtient de plus une estimation de stabilité de la solution par rapport à la donnée initiale.

Puis, on étudie le système de Vlasov-Poisson en présence de charges ponctuelles. On détaille plusieurs résultats d'existence voire d'unicité qui ont été obtenus dans [175], en collaboration avec C. Marchioro et M. Pulvirenti, dans [80], en collaboration avec L. Desvillettes et C. Saffirio, et dans [55], en collaboration avec S. Caprino, C. Marchioro et M. Pulvirenti.

2.1 Introduction

Le système de Vlasov-Poisson. On considère dans ce chapitre le système de Vlasov-Poisson en dimensions $d = 2$ ou $d = 3$:

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = 0, & (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \\ E(t, x) = \gamma \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x-y}{|x-y|^d} \rho(t, y) dy \\ \rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) dv, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\gamma = \pm 1$. Il s'agit d'une équation cinétique de type champ moyen : l'évolution d'un grand nombre de particules, dont l'interaction est de type longue portée sans collisions, est globalement décrite par le comportement d'une seule inconnue $f = f(t, x, v) \geq 0$. Cette fonction f représente la densité microscopique de ces particules. La fonction $\rho = \rho(t, x)$ est appelée densité macroscopique (ou spatiale) et le champ correspondant $E = E(t, x) = c(d) \nabla \Delta^{-1} \rho$ est appelé champ de force.

Lorsque $\gamma = -1$, le système (2.1) est utilisé en astrophysique pour modéliser la dynamique des galaxies : dans ce cas, les particules sont des étoiles et l'interaction est de nature gravitationnelle. Lorsque $\gamma = 1$, on décrit l'évolution des plasmas : dans ce cas, les particules sont des particules électriques (ions, électrons) et l'interaction est coulombienne. On renvoie aux monographies [43, 106] pour une étude approfondie de ce modèle cinétique ou de modèles reliés.

D'un point de vue formel, la solution de (2.1) vérifie la conservation de la masse $\iint f(t, x, v) dx dv$, des normes $\|f(t, \cdot, \cdot)\|_{L^p}$, pour $1 \leq p \leq +\infty$, et de l'énergie

$$\mathcal{E}(f(t)) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |v|^2 f(t, x, v) dx dv + \frac{\gamma}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \rho(t, x) \Phi(t, x) dx,$$

où $\Phi = -\ln * \rho$ pour $d = 2$, $\Phi = (1/|x|) * \rho$ pour $d = 3$, de sorte que $E = -\nabla \Phi$. Notons que lorsque $E \in L^2$, le second terme de l'énergie se réécrit comme $\gamma/(4\pi(d-1)) \int |E|^2$.

Toujours formellement, la densité est constante le long des caractéristiques :

$$f(t, X(t, x, v), V(t, x, v)) = f(0, x, v), \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.2)$$

où

$$\begin{cases} \dot{X}(t, x, v) = V(t, x, v), & X(0, x, v) = x \\ \dot{V}(t, x, v) = E(t, X(t, x, v)), & V(0, x, v) = v, \end{cases} \quad (2.3)$$

et de plus, le flot $(X(t, \cdot, \cdot), V(t, \cdot, \cdot))$ préserve la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Problème de Cauchy. De nombreux articles sont dédiés à la théorie de Cauchy pour le système de Vlasov-Poisson. En toute dimension, l'existence globale d'une solution faible, bornée, de masse et d'énergie finies est un résultat d'Arsenev [9] ; l'existence globale d'une solution faible renormalisée, de masse, d'énergie et d'entropie finies a été établie par Di Perna et Lions [82]. Récemment, Bohun, Bouchut et Crippa [33] ont montré l'existence globale d'une solution **lagrangienne**, de masse et d'énergie finie, dans le cas répulsif. Des extensions ont aussi été apportées quant à l'existence de solutions faibles globales de masse ou d'énergie infinie, voir par exemple [53, 61].

Pour ce qui concerne les solutions classiques (régulières et décroissant suffisamment vite à l'infini), l'existence globale et l'unicité ont été établies par Iordanskii [140] en dimension un, par

Ukai et Okabe [198] en dimension deux, par Bardos et Degond [20] pour des petites données en dimension trois. Le cas général en dimension trois, plus délicat, a été résolu ultérieurement par Pfaffelmoser [203] : existence et unicité globale de solutions classiques, qui propagent la régularité de la donnée initiale, et qui sont **à support compact en vitesse** :

$$\forall T > 0, \quad \sup_{t \in [0, T]} P(t) < +\infty, \quad (2.4)$$

où

$$P(t) = \sup \{|v| \mid (x, v) \in \text{supp}(f(t, \cdot, \cdot))\} < +\infty. \quad (2.5)$$

Schaeffer [213] puis Wollman [228] ont par la suite simplifié la preuve de [203] et amélioré les bornes sur la croissance de $P(t)$ en fonction de t . La stratégie de Pfaffelmoser est basée sur des estimations précises pour les vitesses $V(t, \cdot, \cdot)$ des caractéristiques associées à (2.3) afin de contrôler la croissance de $P(t)$ en fonction de t . Il s'agit donc d'une approche purement lagrangienne.

En parallèle et de façon complémentaire, Lions et Perthame [168] ont montré l'existence globale de solutions faibles qui propagent certains moments en vitesse. Plus précisément, si la densité initiale vérifie

$$f_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |v|^m f_0(x, v) dx dv < \infty \quad \text{pour un certain } m > 3,$$

alors il existe une solution faible correspondante $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ telle que

$$\forall T > 0, \quad \sup_{t \in [0, T]} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |v|^m f(t, x, v) dx dv < \infty.$$

De plus, si $m > 6$, le champ de force correspondant est uniformément borné. Pour davantage de résultats concernant l'existence globale de solutions faibles avec propagation de moments (en vitesse ou par rapport à la variable d'espace), on renvoie aux articles de Castella [57], Gasser, Jabin et Perthame [98], Salort [212]. Enfin, Pallard [201, 202] combine les approches eulérienne et lagrangienne pour démontrer la propagation des moments d'ordre strictement plus grand que deux.

Critères d'unicité. Trouver des critères suffisants d'unicité des solutions faibles a aussi été la motivation de nombreux travaux. Comme on l'a vu ci-dessus, il y a unicité des solutions classiques à support compact en vitesse. Mieux, Robert [209] a démontré l'unicité dans une classe de solutions faibles (i.e. $f \in L^\infty(L^1 \cap L^\infty)$) vérifiant (2.4). Plus récemment, Loeper [169] a démontré l'unicité dans la classe de solutions faibles (à valeurs mesure) dont la densité macroscopique est uniformément bornée :

$$\forall T > 0, \quad \rho \in L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^d)). \quad (2.6)$$

La définition précise de solutions mesures est donnée dans [169, Definition 1.1]. On note qu'une telle définition a un sens dès que l'on suppose en plus que $\rho \in L^\infty([0, T], L^p(\mathbb{R}^d))$ pour un p assez grand. En outre, au vu de la régularité du champ de force correspondant (voir Proposition 53 en annexe), la théorie de Di Perna et Lions¹ assure qu'il existe alors un flot régulier lagrangien tel que (2.2)-(2.3) aient lieu.

1. Voir le Paragraphe 1.3 du Chapitre 1.

L'hypothèse (2.4) implique bien (2.6), en vertu de la Proposition 52 en annexe. Le point de départ des preuves de Robert et de Loeper est le fait qu'une densité macroscopique uniformément bornée implique de la régularité pour le champ de force, au même titre qu'une vorticité uniformément born e implique de la régularité pour le champ de vitesse dans l'équation d'Euler, comme le rappelle la Proposition 53. En particulier on retrouve bien sûr l'estimation log-Lipschitz :

$$|E(t, x) - E(t, y)| \leq C(\|\rho(t, \cdot)\|_{L^1} + \|\rho(t, \cdot)\|_{L^\infty})|x - y|(1 + \ln|x - y|). \quad (2.7)$$

Ceci permet d'appliquer l'une ou l'autre des méthodes d'unicité expliqu es dans l'introduction : méthode d'énergie (reposant sur l'inégalité de Cald ron-Zygmund) dans [209], méthode lagrangienne (reposant sur le caractère log-Lipschitz du champ de force, combin e à la théorie du transport optimal, dont il sera question dans la Section 2.3 ci-dessous) dans [169].

Ceci étant, contrairement à l'équation d'Euler qui conserve les normes de la vorticité, il ne suffit pas de supposer que la densité macroscopique soit initialement uniformément born e pour que (2.6) ait lieu à temps positif. Ainsi, une autre facette de l'étude de l'unicité pour Vlasov-Poisson consiste à déterminer des conditions sur la donn e initiale f_0 qui assurent le critère d'unicité. Dans [168, Corollary 3] (voir aussi [201, Theo. 2]), il est ainsi observé que l'hypothèse supplémentaire (en dimension trois)

$$\begin{aligned} \forall R > 0, \quad \forall T > 0, \\ \sup \{f_0(y - tv, w) \mid |y - x| \leq Rt^2, \quad |w - v| \leq Rt\} \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}_x^3, L^1(\mathbb{R}_v^3)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

garantit bien le critère de Loeper. La condition (2.8) est satisfaite par des donn es mesurables f_0   décroissance suffisamment rapide en vitesse, par exemple

$$f_0(x, v) \leq \frac{C}{1 + |v|^{3+\varepsilon}}, \quad \forall (x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \quad (2.9)$$

2.2 Unicité pour Vlasov-Poisson avec densité non born e

Dans l'article [188], j'ai étendu la condition d'unicité pour (2.1)   des densités non born es :

Théorème 12 ([188], Theorem 1.1). *Soit $f_0 \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ une mesure de Radon positive born e. Soit $T > 0$. Il existe au plus une solution faible $f \in C([0, T], \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) - w^*)$ du système de Vlasov-Poisson sur $[0, T]$ avec $f(0) = f_0$ et telle que*

$$\sup_{[0, T]} \sup_{p \geq 1} \frac{\|\rho(t, \cdot)\|_{L^p}}{p} < +\infty. \quad (2.10)$$

Par exemple, la condition (2.10) est remplie par toute densité satisfaisant ²

$$\forall t \in [0, T], \quad \rho(t, x) \leq C(1 + \ln_- |x - \xi(t)|) \quad (2.11)$$

pour un certain $\xi(t) \in \mathbb{R}^d$. En dimension deux, la divergence (au plus) logarithmique au niveau de la densité est naturelle. Elle appar it dans l'article [55], exposé au Théorème 20 ci-dessous,

2. On pose $\ln_- |x| = \max(0, -\ln|x|)$.

pour un système relié à (2.1). Elle correspond aussi au comportement d'une classe de solutions stationnaires dans le cas gravitationnel. En effet, Dolbeault, Fernández et Sánchez [87, Theo. 1, Theo. 22] obtiennent une solution stationnaire $\bar{f} \in L^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ de la forme

$$\bar{f}(x, v) = \varphi \left(\frac{|v|^2}{2} + U(x) \right),$$

où $U = \frac{1}{2\pi} \ln * (\int \bar{f} dv)$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est à support dans $] -\infty, M]$, décroissante, non bornée. De plus, $\bar{\rho} = \int \bar{f} dv$ est radiale, à support dans $B(0, 1)$, donc U a la forme simple suivante [87, Lemma 12] :

$$U(x) = \ln |x| \left(\int_{|y| \leq |x|} \bar{\rho}(|y|) dy \right) + \int_{|y| > |x|} \ln |y| \bar{\rho}(|y|) dy.$$

En observant que

$$U(x) \geq -(\ln_- |x|) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \bar{\rho}(y) dy \right),$$

on trouve donc d'après la définition de \bar{f} que $\bar{\rho}(x) \leq C(1 + \ln_- |x|)$ (voir [188, Paragraphe 4.3]).

Notre second résultat énonce une condition suffisante sur la donnée initiale pour que toute solution faible correspondante vérifie le critère d'unicité du Théorème 12. De même que dans les travaux [168, 201, 202] précédents, on a besoin de conditions au niveau microscopique afin de contrôler la densité macroscopique aux temps positifs. Ayant à l'esprit que les moments en vitesse contrôlent les normes L^p de la densité (voir la Proposition 54 en annexe), nous exprimons notre condition de la façon suivante :

Théorème 13 ([188], Theorem 1.2). *Soit $f_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, positive, telle que*

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |v|^m f_0(x, v) dx dv < +\infty$$

pour un certain $m > d^2 - d$. Pour $T > 0$, soit $f \in C([0, T], \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) - w^) \cap L^\infty([0, T], L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$ une solution faible correspondante produite par [168, Theo. 1]. Si f_0 vérifie*

$$\forall k \geq 1, \quad \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |v|^k f_0(x, v) dx dv \leq (C_0 k)^{k/d}, \quad (2.12)$$

pour une constante C_0 , alors f satisfait la condition d'unicité (2.10).

Typiquement, ce théorème s'applique à des données à support compact en vitesse ; à des distributions de Maxwell-Boltzmann ou à des perturbations de ces dernières :

$$f_0(x, v) = e^{-|v|^p} |v|^p h_0(x, v), \quad p \geq 0, \quad h_0 \in L^1 \cap L^\infty \cap L_v^\infty(L_x^1).$$

Il existe aussi des données à densité macroscopique non bornée et vérifiant les hypothèses du Théorème 13, voir [188, Theo 1.3]. Les conditions (2.8) et (2.12) concernent donc des ensembles sans lien d'inclusion et d'intersection non vide.

Éléments de preuve. La démonstration du Théorème 12 suit la méthode lagrangienne expliquée en introduction du Chapitre 1 : pour deux solutions avec même donnée initiale f_0 et

flots (X_j, V_j) , $j = 1, 2$ correspondants, on introduit une quantité analogue à la distance définie dans (1.4) pour l'équation d'Euler :

$$\mathcal{D}(t) = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |X_1(t, x, v) - X_2(t, x, v)| f_0(x, v) dx dv, \quad \mathcal{D}(0) = 0. \quad (2.13)$$

On montre alors la propriété suivante issue de [188, Prop 2.1] : pour tout $t \in [0, T]$, si les densités vérifient la condition d'unicité, on a

$$\mathcal{D}(t) \leq C \int_0^t \int_0^s \mathcal{D}(\tau) (1 + |\ln \mathcal{D}(\tau)|^2) d\tau ds.$$

Cette inégalité découle d'une estimation de type Hölder pour des intégrales singulières établie au [188, Lemma 2.2] : les champs de force vérifient

$$|E_j(t, x) - E_j(t, y)| \leq Cp(\|\rho_j(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\rho_j(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)})|x - y|^{1-d/p}$$

d'où, lorsque les ρ_j vérifient la condition (2.10) (en posant $p = |\ln |x - y||$),

$$|E_j(t, x) - E_j(t, y)| \leq C|x - y|(1 + \ln |x - y|^2). \quad (2.14)$$

L'argument clé nous permettant finalement de conclure est l'extension suivante du lemme de Gronwall aux inégalités différentielles **d'ordre deux**, que nous avons prouvée auparavant dans [55] :

Lemme 14 ([55], Lemma 4). *Soient $a > 0$, $0 < b < 1$, et $T > 0$ tels que $b < \exp(1 - e^{2T\sqrt{a}})$. Soit $u \in C^2([0, T])$ avec $u \geq 0$ et $\dot{u} \geq 0$ sur $[0, T]$. Supposons que*

$$\ddot{u} \leq a\gamma(u), \quad u(0) = b, \quad \dot{u}(0) = 0,$$

où $\gamma(r) = r(2 + |\ln r|)^2$ si $0 \leq r \leq 1$, $\gamma(r) = 4$ si $r \geq 1$. Alors

$$u(t) \leq \exp(1 - e^{2T\sqrt{a}})b^{\exp(-2T\sqrt{a})}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Il est utile de comparer ce **lemme de Gronwall log²-Lipschitz** au lemme 1 déjà mentionné dans l'introduction et au Chapitre 1.

2.3 Stabilité pour Vlasov-Poisson dans des espaces d'Orlicz

Contexte. On résume ici le contenu de [130], écrit en collaboration avec T. Holding. D'une part, cet article généralise le résultat d'unicité présenté précédemment. D'autre part, il contient une estimation de stabilité pour le système de Vlasov-Poisson par rapport à la donnée initiale. Cette notion de stabilité est exprimée à l'aide de la distance de Wasserstein W_1 ³. Cette distance est définie de la façon suivante (voir par exemple [5]) : pour μ, ν appartenant à l'espace des mesures positives bornées $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)$, de même variation totale et ayant un moment d'ordre un fini,

$$W_1(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x - y| d\pi(x, y),$$

3. Ou distance de Monge-Kantorovich.

où $\Pi(\mu, \nu)$ désigne l'ensemble des couplages de μ et ν , c'est-à-dire les mesures de $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ qui ont comme marginales μ et ν respectivement. En général, la distance de Wasserstein est définie sur l'ensemble des mesures de probabilité avec moment d'ordre un fini et métrise la topologie faible $*$ sur cet espace. Ceci est encore vrai sur l'espace des mesures $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)$ à variation totale $m > 0$ fixée (avec premier moment fini).

La stabilité des solutions mesures pour des équations de champ moyen avec noyau de convolution régulier (c'est-à-dire l'équation (2.1) avec $E = H * \rho$, où $H \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$) a été étudiée par Dobrushin [86], qui a obtenu l'estimation $W_1(f_1(t), f_2(t)) \leq W_1(f_1(0), f_2(0)) \exp(Ct \|\nabla H\|_{L^\infty})$. En adoptant la même approche, Moussa et Sueur [195] ont établi une estimation similaire pour le système couplé (11) mentionné dans l'introduction. Hauray et Jabin [126] ont traité le cas de noyaux plus singuliers, voir aussi le travail récent de Lazarovici et Pickl [162] ainsi que les références qu'il contient. En revanche, un tel résultat de stabilité pour des solutions mesures de (2.1), correspondant au noyau singulier $H(x) = x/|x|^d$, n'est pas disponible dans la littérature.

Ici, nous allons pouvoir traiter ce cas grâce au fait que, contrairement aux travaux mentionnés ci-dessus, les solutions mesures considérées ont une régularité supplémentaire : elles appartiennent à un certain espace d'Orlicz pour tout temps. On renvoie à [207] pour une exposition détaillée des propriétés de ces espaces, dont on rappelle la définition : une fonction $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est appelée fonction d'Orlicz si elle est continue, convexe, avec $\phi(\tau) > 0$ pour $\tau > 0$ et si elle satisfait $\lim_{\tau \rightarrow 0} \phi(\tau)/\tau = 0$ et $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi(\tau)/\tau = \infty$. On définit l'espace correspondant $L_\phi(\mathbb{R}^d)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ dont la norme de jauge (dite norme de Luxembourg) est finie, où $\|f\|_{L_\phi(\mathbb{R}^d)} = \inf \{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^d} \phi(|f(x)|/\lambda) dx < 1 \}$. On se focalise sur des espaces d'Orlicz exponentiels, associés aux fonctions d'Orlicz $\phi_\alpha(\tau) = \exp(\tau^\alpha) - 1$, pour $\alpha \in [1, +\infty)$. On peut vérifier que l'espace $L_{\phi_\alpha}(\mathbb{R}^d)$ correspond à l'ensemble des fonctions g appartenant à L^p pour tout $p \in [\alpha, \infty)$ et dont la norme suivante est finie :

$$\|g\|_{\phi_\alpha} = \sup_{p \geq \alpha} p^{-1/\alpha} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Par convention, on pose $L_{\phi_\infty} = L^\infty$. Donc, avec cette convention, L_{ϕ_α} interpole les espaces considérés pour la densité dans [169] (pour $\alpha = +\infty$) et dans [188] (pour $\alpha = 1$).

Résultats. Soit $\alpha \in [1, \infty]$. On considère des solutions faibles du système de Vlasov-Poisson sur $[0, T]$ dont les densités macroscopiques appartiennent à L_{ϕ_α} :

$$\rho \in L^\infty([0, T]; L_{\phi_\alpha}(\mathbb{R}^d)). \quad (2.15)$$

Par exemple, la condition (2.15) est remplie par toute densité satisfaisant $\rho(t, x) \leq C(1 + (\ln_- |x|)^{1/\alpha})$ sur $[0, T]$. Notre résultat principal fournit une estimation quantitative pour la distance entre ces solutions au cours du temps :

Théorème 15 (D'après [130], Theorem 1.9). *Soient $f_1, f_2 \in C([0, T], \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) - w^*)$ deux solutions de (2.1) avec même masse⁴ et avec premier moment fini, telles que ρ_1 et ρ_2 vérifient (2.15). Si $W_1(f_1(0), f_2(0))$ est assez petit⁵, on a pour $t \in [0, T^*]$:*

— Si $\alpha = 1$ alors

$$W_1(f_1(t), f_2(t)) \leq CW_1(f_1(0), f_2(0))^{\exp(-Ct)} (1 + t |\ln W_1(f_1(0), f_2(0))|^2).$$

4. Je remercie Laure Saint-Raymond d'avoir relevé une coquille dans l'énoncé de la version imprimée du mémoire, qui mentionnait "variation totale" au lieu de "masse".

5. Essentiellement inférieur à C/T , voir [130].

— Si $\alpha > 1$ alors

$$W_1(f_1(t), f_2(t)) \leq CW_1(f_1(0), f_2(0))^{1/\beta} \exp(Ct^\beta) \left(1 + t |\ln W_1(f_1(0), f_2(0))|^{1+(1/\alpha)}\right),$$

où

$$\beta = \frac{2}{1 - (1/\alpha)} \in [2, +\infty),$$

et où une borne inférieure pour T^* est donnée par

$$T^* \geq \begin{cases} C' \ln |\ln W_1(f_1(0), f_2(0))| & \text{si } \alpha = 1, \\ C' \beta |\ln W_1(f_1(0), f_2(0))|^{1/\beta} & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

(on pose $T^* = T$ quand le terme de droite est supérieur à T). Les constantes C et C' dépendent uniquement des normes de ρ_1, ρ_2 dans (2.15).

Le temps T^* correspond au premier temps pour lequel la borne de droite devient supérieur à 1. Notons que les estimations sont exposées ici de manière à dégager un comportement clair de la distance pour des grands temps - ou de petites valeurs de $W_1(f_1(0), f_2(0))$; elles ne sont pas optimales lorsque t tend vers zéro (ceci requiert une analyse soignée des preuves, qui n'est pas déployée ici). Comme conséquence de la singularité du noyau, la croissance de $W_1(f_1(t), f_2(t))$ n'est pas linéairement bornée par rapport à $W_1(f_1(0), f_2(0))$.

On remarque que lorsque $\alpha = +\infty$, l'estimation du Théorème 15 s'écrit

$$W_1(f_1(t), f_2(t)) \leq CW_1(f_1(0), f_2(0))^{1/2} \exp(Ct^2) (1 + t |\ln W_1(f_1(0), f_2(0))|), \quad (2.16)$$

et est valide jusqu'à des temps d'ordre $|\ln W_1(f_1(0), f_2(0))|^{1/2}$. Comme on l'a déjà observé, le cas $\alpha = +\infty$ correspond au cadre de régularité des solutions de Loeper [169]. Bien que la stabilité ne soit pas explicitement étudiée dans [169], les estimations mettent en jeu une inégalité de Gronwall "log-lipschitz" pour la distance de Wasserstein quadratique W_2 et permettraient donc d'obtenir (au vu du Lemme 1)

$$W_2(f_1(t), f_2(t)) \leq CW_2(f_1(0), f_2(0))^{\exp(-Ct)}. \quad (2.17)$$

Par conséquent, à temps fixé, l'estimation (2.16) améliore l'estimation (2.17) lorsque la distance initiale est petite. Cette amélioration est due au fait que nous exploitons la structure d'ordre deux du système d'ODE (2.3) au travers d'une variante du Lemme 14, dans le même esprit que la preuve d'unicité de [188].

Un deuxième aspect de notre travail vise à trouver des conditions suffisantes pour la donnée initiale qui assurent que la densité appartient bien à un espace d'Orlicz à temps positif.

Proposition 16 ([130], Proposition 1.14). *Soit $\alpha \in [1, \infty)$. Soit $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ positive telle que*

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f_0(x, v) e^{c\langle v \rangle^{d\alpha}} dx dv < \infty,$$

pour un $c > 0$, où $\langle v \rangle = \sqrt{1 + |v|^2}$. Soit $T > 0$. Soit $f \in C([0, T], \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) - w^*) \cap L^\infty([0, T], L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$ une solution faible de (2.1) avec cette donnée initiale, produite par [168, Theo. 1]⁶ Alors on a

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\rho(t, \cdot)\|_{L^{\phi_\alpha}} < \infty.$$

6. Notons qu'une telle donnée f_0 a des moments en vitesse d'ordre arbitraire, ainsi le résultat d'existence de Lions et Perthame s'applique effectivement.

En particulier, le critère d'unicité du Théorème 15 s'applique.

Un exemple de donnée initiale vérifiant une telle condition est (pour $d = 2$) $f_0(x, v) = \varphi(|v|^2 - (\ln_- |x|)^{1/\alpha})$, où $\varphi = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}$. Notons qu'en posant $\alpha = 1$ dans la Proposition 16, on retrouve bien la condition obtenue au Théorème 13 qui garantit que (2.10) ait lieu.

Éléments de preuve. La démonstration du Théorème 15 combine les arguments de Dobrushin [86] avec des estimations adéquates pour le noyau de convolution. L'enjeu est de parvenir à une bonne estimation pour

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{\pi_0}(t) &= \int_{\mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d}} |X_1(t, x, v) - X_2(t, y, w)| d\pi_0(x, v, y, w), \\ \mathcal{V}_{\pi_0}(t) &= \int_{\mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d}} |V_1(t, x, v) - V_2(t, y, w)| d\pi_0(x, v, y, w),\end{aligned}$$

pour $t \in [0, T]$, où $\pi_0 \in \Pi(f_{10}, f_{20})$ désigne un couplage quelconque de f_{10} et f_{20} . Noter le parallèle (et les différences) avec la distance définie dans (2.13). Ce qui nous motive à introduire ces quantités est le fait que

$$W_1(f_1(t), f_2(t)) \leq \inf_{\pi_0 \in \Pi(f_{10}, f_{20})} (\mathcal{X}_{\pi_0}(t) + \mathcal{V}_{\pi_0}(t)).$$

En effet, (2.2) implique que la mesure $\pi_t = ((X_1(t), V_1(t)); (X_2(t), V_2(t)))_{\#} \pi_0$ appartient bien à $\Pi(f_1(t), f_2(t))$. Et d'un autre côté, on a initialement une inégalité inverse :

$$\inf_{\pi_0 \in \Pi(f_{10}, f_{20})} (\mathcal{X}_{\pi_0}(0) + \mathcal{V}_{\pi_0}(0)) \leq \sqrt{2}W_1(f_{1,0}, f_{2,0}).$$

En revanche, la quantité adaptée qui permettrait de montrer l'estimation (2.17) pour la distance de Wasserstein quadratique dans [169] serait plutôt

$$\mathcal{D}_{\pi_0}(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d}} (|X_1(t, x, v) - X_2(t, y, w)|^2 + |V_1(t, x, v) - V_2(t, y, w)|^2) d\pi_0(x, v, y, w) \right)^{1/2}$$

pour tous couplages π_0 de f_{10} et f_{20} .

On peut estimer les dérivées de $\mathcal{X}_{\pi_0}(t)$ et $\mathcal{V}_{\pi_0}(t)$ à partir des EDO pour les caractéristiques en procédant aux mêmes manipulations astucieuses que Dobrushin [86]. La nouveauté est qu'il faut désormais chercher des estimations pour les intégrales singulières définissant le champ de force lorsque la densité est dans un espace d'Orlicz. Il s'agit d'une estimation "log^{1+1/α}-Lipschitz", une interpolation des estimations (2.7) (cas classique $\alpha = +\infty$) et (2.14) (cas $\alpha = 1$, prouvée dans [188]) que nous établissons dans [130, Lemma 2.1] :

$$|E_j(t, x) - E_j(t, y)| \leq C(\|\rho_j(t, \cdot)\|_{L_{\phi_\alpha}} + \|\rho_j(t, \cdot)\|_{L^1})|x - y| \ln |x - y|^{1+1/\alpha}.$$

2.4 Le système de Vlasov-Poisson avec des charges ponctuelles

Cette section examine les questions d'existence et d'unicité en dimension $d = 2$ ou $d = 3$ pour un système de Vlasov-Poisson modifié :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + (E + F) \cdot \nabla_v f = 0 \\ E(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x - y}{|x - y|^d} \rho(t, y) dy, \quad \rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) dv \\ F(t, x) = \sum_{k=1}^{\ell} q_k \frac{x - \xi_k}{|x - \xi_k|^d}, \\ \dot{\xi}_k = \eta_k, \quad \dot{\eta}_k = q_k E(t, \xi_k) + \sum_{j \neq k} q_k q_j \frac{\xi_k - \xi_j}{|\xi_k - \xi_j|^d}, \quad 1 \leq k \leq \ell. \end{cases} \quad (2.18)$$

Formellement, un tel système peut être vu comme un modèle de champ moyen pour l'évolution d'un grand nombre N de particules électriques légères (un nuage d'électrons, masses $1/N$), faiblement chargées (charge $1/N$), dont la densité est représentée par f lorsque $N \rightarrow +\infty$, et de ℓ particules lourdes (protons ou noyaux, masses d'ordre 1), de charges q_k , situées en les positions ξ_k . On parle alors d'**interaction plasma-charges**.

Lorsque $q_k = 0$ pour tout k , le système (2.18) se réduit naturellement au système de Vlasov-Poisson. Le cas $q_k \neq 0$ revient à considérer le système de Vlasov-Poisson pour une densité totale comportant une densité f bornée et des masses de Dirac $\delta_{(\xi_k(t), \eta_k(t))}$. La théorie de Cauchy classique n'est plus valable puisqu'il faut tenir compte d'un champ supplémentaire singulier au voisinage des charges. On est ainsi amené à des problématiques vraiment analogues à celles du système Euler-points vortex du Chapitre 1, à traiter avec des techniques de nature cinétique.

La solution du système (2.18) conserve formellement l'énergie définie pour $d = 3$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f(t, x, v) dx dv + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\ell} |\eta_k(t)|^2 \\ &+ \sum_{k=1}^{\ell} q_k \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(t, x)}{|x - \xi_k(t)|} dx + \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{\rho(t, x) \rho(t, y)}{|x - y|} dx dy + \frac{1}{2} \sum_{k \neq m} \frac{q_k q_m}{|\xi_k(t) - \xi_m(t)|} \end{aligned}$$

et pour $d = 2$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} |v|^2 f(t, x, v) dx dv + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\ell} |\eta_k(t)|^2 - \sum_{k=1}^{\ell} q_k \int_{\mathbb{R}^2} \rho(t, x) \ln |x - \xi_k(t)| dx \\ &- \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \rho(t, x) \rho(t, y) \ln |x - y| dx dy - \frac{1}{2} \sum_{k \neq m} q_k q_m \ln |\xi_k(t) - \xi_m(t)|. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Une conséquence directe de cette définition est le fait que les trajectoires $\xi_k(t)$ n'entrent pas en collision si les q_k sont tous de même signe et si l'énergie est initialement finie.

Le système (2.18) a été introduit par Caprino et Marchioro [54] en dimension $d = 2$ dans la situation d'une **interaction répulsive** : $q_k > 0$ pour tout k . Il existe alors une unique solution globale dont la densité est uniformément bornée.

2.4.1 Problème de Cauchy en dimension trois et interaction répulsive.

Résultats. En dimension $d = 3$ et en interaction répulsive ($q_k > 0$ pour tout k), nous avons étudié l'existence globale et l'unicité dans l'article [175]. En nous restreignant au cas d'une seule charge avec $q = 1$ pour davantage de lisibilité, le système devient

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + (E + F) \cdot \nabla_v f = 0, \\ E(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x - y}{|x - y|^3} \rho(t, y) dy, & \rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv, \\ F(t, x) = \frac{x - \xi(t)}{|x - \xi(t)|^3}, \\ \dot{\xi}(t) = \eta(t), & \dot{\eta}(t) = E(t, \xi(t)). \end{cases} \quad (2.20)$$

Notre théorème étend celui de Pfaffelmoser de la manière suivante :

Théorème 17 ([175], Theorem 1). *Soit $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ une mesure de probabilité à support compact. Soit $(\xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. On suppose qu'il existe R_0 tel que*

$$f_0(x, v) = 0, \quad \forall (x, v) \in B(\xi_0, R_0) \times \mathbb{R}^3.$$

*Alors il existe une unique solution **lagrangienne** globale au système (2.20) correspondante, telle que $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$, $\xi \in C^2(\mathbb{R}_+)$, et $\rho \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, L^\infty(\mathbb{R}^3))$.*

Grâce au caractère répulsif de l'interaction, la solution construite vérifie alors nécessairement

$$f(t, x, v) = 0, \quad \forall (x, v) \in B(\xi(t), R(t)) \times \mathbb{R}^3, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.21)$$

pour un $R(t) > 0$, ce qui assure que le terme $F \cdot \nabla_v f$ est (au moins) aussi régulier que $E \cdot \nabla_v f$.

Dans un travail récent, Li et Zhang [164] étendent ce résultat à des données initiales dont le support en vitesse n'est pas nécessairement compact :

$$\sup \{|v - x/\gamma| : (x, v) \in \text{supp} f_0\} < \infty \quad (2.22)$$

pour un certain $\gamma > 0$, et ils montrent que cette propriété reste vraie à $t > 0$. En particulier, l'énergie cinétique peut être infinie mais peut être remplacée par un moment mixte d'ordre deux, comme cela avait été fait auparavant dans [61] pour le cas sans charge.

Esquisse de preuve. Nous adaptons les techniques de la démonstration de Wollman [228] qui simplifie celle de Pfaffelmoser. Dans ces preuves, il s'agit de contrôler l'évolution des vitesses des caractéristiques définies dans (2.3). En effet, nous savons que la quantité $P(t)$ définie dans (2.5) contrôle la norme uniforme pour la densité et apporte de la régularité pour le champ de force (voir la Section 7.2 de l'annexe). Une première estimation grossière utilisant les estimations statiques des Propositions 52, 53 (avec $d = 3, q = 5/3$) et 54 (avec $k = 2, d = 3$, puisque le moment d'ordre deux est borné grâce à la borne pour l'énergie totale) donne :

$$|\dot{V}(t, x, v)| \leq C \|E(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C \|\rho(t, \cdot)\|_{L^{5/3}}^{5/9} \|\rho(t, \cdot)\|_{L^\infty}^{4/9} \leq CP(t)^{4/3}.$$

En prenant le supremum, on arrive donc à $\dot{P}(t) \leq CP(t)^{4/3}$ qui est insuffisant pour boucler une estimation de Gronwall. Pfaffelmoser puis Wollman proposent alors une analyse fine reposant sur

un découpage très ajusté des **moyennes temporelles** $\int |E(s, X(s, x, v))| ds$. Ceci leur permet d'arriver à une inégalité souslinéaire par rapport à $P(t)$.

En présence d'une charge ponctuelle, les vitesses ne peuvent plus être contrôlées au voisinage de la charge ponctuelle. Afin d'adapter la stratégie précédente, notre idée est de remplacer les vitesses par l'énergie microscopique

$$h(t, x, v) = \frac{|v - \eta(t)|^2}{2} + \frac{1}{|x - \xi(t)|}, \quad (2.23)$$

et de chercher une estimation non pas pour $P(t)$ mais pour la quantité

$$Q(t) = \sup \left\{ \sqrt{h}(t, x, v) \mid (x, v) \in \text{supp} f(t, \cdot, \cdot) \right\}.$$

Les hypothèses sur le support de la densité initiale assurent bien que $Q(0)$ est finie. L'intérêt de cette notion est double : d'une part, \sqrt{h} contrôle à la fois les vitesses des caractéristiques et leurs distances à la charge ponctuelle. D'autre part, on s'aperçoit que la dérivée de \sqrt{h} vérifie

$$\left| \frac{d}{dt} \sqrt{h}(t, X(t, x, v), V(t, x, v)) \right| \leq |E(t, X(t, x, v))| + |E(t, \xi(t))|, \quad (2.24)$$

estimation qui s'apparente au comportement de l'accélération d'une caractéristique dans le cas sans charge. Afin de suivre la preuve de Pfaffelmoser, il faut encore traiter des termes additionnels singuliers. Par exemple, l'intégrale temporelle $\int |E(s, \xi(s))| ds$ conduit à l'intégrale

$$\int \frac{1}{|X(s, x, v) - \xi(s)|^2} ds.$$

Nous bornons cette dernière grâce à la **diffusion plasma-charge** montrée dans [175, Lemma 4] : lorsque la vitesse d'une trajectoire $X(\cdot, x, v)$ est assez grande, le temps qu'elle passe dans un δ -voisinage de ξ est petit (avec une estimation quantitative en fonction de δ). Cette propriété est elle-même démontrée grâce à un théorème du viriel, auquel on recourra de nouveau dans [80] (voir (2.27)). Finalement, nous obtenons l'estimation $Q(t) \leq C \exp(Ct)$, qui conduit à toutes les autres propriétés énoncées au Théorème 17. Notamment, la propriété de support (2.21) en est une conséquence immédiate.

2.4.2 Propagation des moments en dimension trois et interaction répulsive.

Résultats. Dans l'article [80], en collaboration avec L. Desvillettes et C. Saffirio, nous poursuivons notre étude du Système (2.20) pour une classe de densités qui ne sont pas nécessairement nulles au voisinage de la charge ponctuelle. L'énergie microscopique définie dans (2.23) diverge sur le support de telles données, ce qui fait achopper la stratégie précédente. On adopte donc plutôt le point de vue de Lions et Perthame, en remplaçant les moments en vitesse par les moments en énergie :

Théorème 18 ([80], D'après Theorem 1.1). *Soit $f_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ positive telle que $\iint f_0 < 1$ et $(\xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. On suppose qu'il existe $m_0 > 6$ tel que pour tout $m \leq m_0$*

$$H_m(f_0) \equiv \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \left(|v|^2 + \frac{1}{|x - \xi_0|} \right)^{m/2} f_0(x, v) dx dv < +\infty.$$

Alors il existe une solution faible globale correspondante au système (2.20) telle que $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ et $\xi \in C^2(\mathbb{R}_+)$.

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $m \leq m_0$ tel que $m < 7$,

$$\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \left(|v|^2 + \frac{1}{|x - \xi(t)|} \right)^{m/2} f(t, x, v) dx dv \leq C(1+t)^c,$$

où C et c dépendent uniquement des quantités $\|f_0\|_{L^1}, \|f_0\|_{L^\infty}$ et $H_m(f_0)$, $m \leq m_0$.

En vertu de [168, Corollary 2], le fait que la solution ait des moments en vitesse d'ordre plus élevé que six garantit que E appartient en fait à $C(\mathbb{R}_+, C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3))$ pour un certain $0 < \alpha < 1$. Ainsi, l'équation différentielle ordinaire pour ξ est bien vérifiée au sens classique.

Si l'on supposait seulement que $3 < m_0 < 6$ dans le Théorème 18, il se pourrait que E ne soit pas continu ce qui poserait un problème dans la définition de la trajectoire ξ pour toute donnée initiale ξ_0 . En revanche, si l'on considère le système de Vlasov-Poisson ci-dessus avec **charge ponctuelle fixe** :

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + (E + F_*) \cdot \nabla_v f = 0, \\ E(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x - y}{|x - y|^3} \rho(t, y) dy, \\ \rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv, \\ F_* = q \frac{x - \xi_*}{|x - \xi_*|^3}, \quad q \geq 0, \end{cases} \quad (2.25)$$

le résultat correspondant est le suivant :

Théorème 19 ([80], D'après Proposition 1.2). Soient $f_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ une densité positive et $\xi_* \in \mathbb{R}^3$ tels qu'il existe $m_0 > 3$ tel que pour tout $m \leq m_0$,

$$H_m(f_0) \equiv \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \left(|v|^2 + \frac{1}{|x - \xi_*|} \right)^{m/2} f_0(x, v) dx dv < +\infty.$$

Alors il existe une solution faible globale correspondante au système (2.25) telle que $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$.

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $m \leq m_0$ tel que $m < 7$,

$$\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \left(|v|^2 + \frac{1}{|x - \xi_*|} \right)^{m/2} f(t, x, v) dx dv \leq C(1+t)^c,$$

où C et c dépendent uniquement des quantités $\|f_0\|_{L^1}, \|f_0\|_{L^\infty}$ et $H_m(f_0)$, $m \leq m_0$.

En posant $q = 0$ dans les théorèmes précédents on retrouve comme cas particulier le résultat de propagation des moments établi dans [168], avec en amélioration une dépendance polynomiale que l'on peut rendre explicite.

Même si le Théorème 18 permet de considérer des densités initiales non nulles au voisinage de ξ_0 , elles doivent y décroître dans un certain sens. L'hypothèse $m_0 > 6$ exclut par exemple les densités macroscopiques qui sont à symétrie sphériques et constantes autour de ξ_0 . De telles données sont en revanche prises en compte au Théorème 19. Quelques remarques sur les hypothèses : la

restriction $m < 7$ apparaît lorsque l'on boucle l'estimation du terme de droite à partir de (2.26). Il s'agit sans doute d'une limitation purement technique, non nécessaire. L'hypothèse quant à la petitesse de la masse de f_0 est utilisée uniquement au travers d'une identité virielle qui sera détaillée ci-dessous. Une condition similaire apparaît aussi au Chapitre 3. Nous ne savons pas dans quelle mesure il est possible de s'en affranchir.

La solution construite aux théorèmes précédents est une solution faible. Depuis, Crippa, Ligabue et Saffirio [68] ont montré l'existence d'une solution lagrangienne, pour toute donnée initiale (f_0, ξ_0) comme au Théorème 18. Leur preuve fonctionne par compacité, à partir d'estimations pour des flots associés à des champs de régularité anisotropique qui sont issues de [31] et, de façon plus lointaine, inspirées de [67]. Ainsi, ce résultat et les techniques mises en jeu sont les pendents du résultat de [69] pour le système Euler-point vortex avec vorticités non bornées (voir la preuve du Théorème 5 au Chapitre 1), à ceci près qu'ici, il n'est pas clair que **toute solution** du Théorème 18 soit nécessairement une solution lagrangienne.

Le Théorème 18 a été étendu récemment par Li et Zhang [164] au cas de données initiales ayant des moments finis par rapport à une énergie microscopique modifiée, où la vitesse v est remplacée par $v - x/\gamma$ (cf (2.22)).

Éléments de preuve. On raisonne par compacité à partir de bornes uniformes pour une suite de solutions régulières de (2.20), qui sont obtenues par régularisation et troncature du support de la densité initiale au voisinage de la charge et application du Théorème 17. Nous avons vu que les normes de la densité macroscopique et du champ de force sont contrôlées par les moments (voir Propositions 53 et 54). On cherche donc des estimations a priori pour les moments en énergie

$$H_k(t) = \sup_{s \in [0, t]} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} h(s, x, v)^{k/2} f(s, x, v) dx dv,$$

où l'on rappelle la définition de l'énergie microscopique dans (2.23). Ces moments sont donc les équivalents des moments en vitesse d'ordre k définis par Lions et Perthame [168]. Afin de montrer qu'ils restent bornés pour tout temps, nous suivons le cheminement de la preuve de [168] en l'adaptant quand cela est nécessaire à la présence de la charge ponctuelle.

Grâce à l'estimation (2.24) pour la dérivée de h , on obtient une première estimation :

$$H_k(t) \leq C(k) \left\{ H_k(0) + \left(\int_0^t \left\{ \|E(s, \cdot)\|_{L^{k+3}(\mathbb{R}^3)} + |E(s, \xi(s))| \right\} ds \right)^{k+3} \right\}. \quad (2.26)$$

L'étape suivante consiste à estimer le terme de droite de (2.26) en fonction d'une puissance au plus linéaire de $H_k(t)$.

– Pour le premier terme $\int \|E\|_{L^{k+3}} ds$, on se réfère à [168] : on exprime d'abord ρ puis E grâce à la formule de Duhamel en choisissant un terme source approprié dans l'équation vérifiée par f . Afin d'estimer les normes spatiales du champ de force, on adapte ensuite les inégalités de [168], qui reposent notamment sur des mélanges (d'intégration) dans l'espace des phases via un changement de variable judicieux. Ce processus de mélange se traduit par un effet de dispersion que l'on peut exploiter grâce aux moyennes temporelles. Les indices de normes et les exposants obtenus dans ces calculs souvent techniques doivent être ajustés de façon optimale.

– Pour le second terme du membre de droite de (2.26), nous obtenons dans [80, Prop 2.9] :

$$\int_0^t |E(s, \xi(s))| ds + \int_0^t \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{f(s, x, v)}{|x - \xi(s)|^2} dx dv ds \leq C(1 + t).$$

Il s'agit du seul endroit qui fait appel à l'hypothèse de petitesse pour $\iint f_0$. Cette inégalité repose sur une identité virielle :

$$\frac{1}{|X(s, x, v) - \xi(s)|^2} \leq \frac{d^2}{ds^2} |X(s, x, v) - \xi(s)| + |E(s, X(s, x, v))| + |E(s, \xi(s))|, \quad (2.27)$$

et il suffit ensuite d'intégrer dans l'espace des phases.

2.4.3 Existence globale en dimension deux et interaction attractive

Ce paragraphe donne un aperçu des résultats de [55] à propos de la dimension deux avec **interaction attractive** entre le plasma et les charges : $q_k < 0$ pour tout k . Pour plus de lisibilité, on expose le résultat d'existence pour une seule charge avec $q = -1$. Il s'étend au cas de plusieurs charges en utilisant la conservation de l'énergie (impliquant l'absence de collisions entre les charges en temps fini). Le système étudié devient

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + (E + F) \cdot \nabla_v f = 0, \\ E(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x - y}{|x - y|^2} \rho(t, y) dy, \\ \rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x, v) dv, \\ F(t, x) = -\frac{x - \xi(t)}{|x - \xi(t)|^2}, \\ \dot{\xi}(t) = \eta(t) \\ \dot{\eta}(t) = -E(t, \xi(t)). \end{cases} \quad (2.28)$$

L'énergie microscopique correspondante est maintenant définie par

$$h(t, x, v) = \frac{1}{2} |v - \eta(t)|^2 + \ln |x - \xi(t)|. \quad (2.29)$$

Contrairement à l'énergie (2.23), il ne s'agit pas d'une quantité positive permettant de minorer les distances ou de majorer les vitesses. Pourtant, nous verrons qu'une borne pour cette quantité implique des estimations satisfaisantes pour la densité macroscopique ou le champ électrique.

On considère des données initiales (f_0, ξ_0, η_0) qui vérifient :

$$\text{supp } f_0 \subset S_0 = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : x \in B(0, \alpha_0), h(0, x, v) \leq C_0\} \quad (2.30)$$

pour des constantes α_0, C_0 strictement positives.

Théorème 20 ([55], D'après Theorem 1). *Soient $f_0 \in L^\infty \cap L^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ positive et (ξ_0, η_0) vérifiant (2.30). Alors pour tout $T > 0$, il existe une solution (f, ξ, η) au système (2.28), avec $f \in L^\infty([0, T], L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2))$ et $\xi \in C^2([0, T])$. De plus, cette solution est **lagrangienne**. On a*

$$\sup_{[0, T]} \mathcal{H}(t) < +\infty,$$

où

$$\mathcal{H}(t) = \sup \{h(t, x, v) \mid (x, v) \in \text{supp } f(t, \cdot, \cdot)\}.$$

Enfin,

$$|\rho(t, x)| \leq C (1 + \ln_- |x - \xi(t)|).$$

Ainsi, ce résultat d'existence inclut des densités qui ne s'annulent pas nécessairement au voisinage de la charge (ce qui implique alors que les vitesses ne soient pas bornées).

Ébauche de démonstration. On raisonne encore par compacité à partir d'une suite de solutions lagrangiennes régulières sur $[0, T]$, en se focalisant sur des estimations a priori pour $\mathcal{H}(t)$. En effet, on remarque qu'une borne pour $\mathcal{H}(t)$ implique une divergence au plus logarithmique pour $\rho(t, \cdot)$, puisque les vitesses du support de la densité vérifient $|v|^2 \leq \mathcal{H}(t) + C(1 + |\ln|x - \xi(t)||)$. Puis, on remarque aussi dans [55, Coro 2] que ce comportement implique de la régularité \log^2 -Lipschitz pour le champ électrique (voir (2.14)). Or, d'après notre lemme de Gronwall 14 prouvé dans [55, Lemma 4], ceci suffit à définir des courbes intégrales d'ordre deux de façon unique. De plus, la borne pour $\mathcal{H}(t)$ permet d'obtenir de la compacité dans $L^\infty([0, T], L^1(S_0))$ pour la suite de flots grâce à l'argument suivant : l'ensemble des données initiales dont les trajectoires s'approchent de la charge pour un certain temps est de mesure petite. Et sur le complémentaire de cet ensemble, le champ $E + F$ est lipschitzien. Ceci est mieux quantifié ci-dessous :

Lemme 21 ([55], Lemma 3). *Soit $\delta > 0$ et*

$$S(\delta) = \{(x, v) \in S_0 : \min_{t \in [0, T]} |X(t, x, v) - \xi(t)| < \delta\}.$$

Alors

$$|S(\delta)| \leq C\delta |\ln \delta|^{3/2}.$$

Ce lemme a été réutilisé pour le système Euler-points vortex, comme on l'a vu au Chapitre 1 (Proposition 7).

Quant à la borne $\sup_{t \in [0, T]} \mathcal{H}(t) < +\infty$, elle s'obtient par différentes recombinaisons adéquates puis majorations des quantités apparaissant dans l'expression

$$\frac{d}{dt} h(t, X(t, x, v), V(t, x, v)) = (V(t, x, v) - \eta(t)) \cdot (E(t, X(t, x, v)) + E(t, \xi(t))).$$

2.5 Quelques perspectives

Nos questions à propos du système de Vlasov-Poisson concernent surtout le cadre de l'interaction plasma-charges. Dans le cas répulsif en dimension trois, l'unicité dans une classe de solutions telles que le support spatial de la densité peut contenir la ou les charges ponctuelles est ouverte et semble un problème très difficile (tout comme la question analogue pour le système Euler-points vortex dans le cas général) : de nouvelles idées sont nécessaires afin de traiter la forte divergence du champ électrique total au voisinage des charges. Le même problème d'unicité de la solution du Théorème 20 en dimension deux n'est pas non plus élucidé.

Dans la poursuite de l'article [80], il est important de comprendre si toute solution faible du Théorème 18 est nécessairement lagrangienne. Comme on l'a vu au Chapitre 1, ceci a été établi pour le système Euler-points vortex dans [158, 69] grâce à la forme explicite du champ singulier créé par les points vortex.

Il serait par ailleurs intéressant de construire une solution globale à symétrie sphérique (dans l'esprit par exemple des solutions symétriques de [24, 227] pour le cas sans charge) correspondant à une densité initiale à symétrie sphérique et vérifiant les hypothèses du Théorème 18 avec $(\xi_0, \eta_0) = (0, 0)$ (resp. Théorème 19 avec $\xi_* = 0$).

Il serait bien sûr naturel d'étendre le Théorème 18 au cas de plusieurs charges ponctuelles $q_k > 0$, puisque la conservation de l'énergie (2.19) exclut la possibilité de collision en temps fini entre les charges ponctuelles. Cependant, notre méthode ne semble pas s'y prêter très directement, à cause notamment de la difficulté à établir l'équivalent de (2.27) dans ce cas.

Enfin, mentionnons la question ouverte de l'existence d'une solution globale pour une interaction plasma-charge attractive en dimension trois, qui est un modèle probablement plus pertinent d'un point de vue physique.

Chapitre 3

De Vlasov-Poisson (avec charge) vers Euler (avec tourbillon)

Sommaire

3.1	Introduction	57
3.2	Limite gyrocinétique dans le cadre classique	59
3.3	Limite gyrocinétique avec une charge ponctuelle	62
3.4	Quelques perspectives	65

Résumé

On présente les articles [189] et [191] à propos de la limite gyrocinétique pour le système de Vlasov-Poisson vers l'équation d'Euler incompressible : d'abord pour le système de Vlasov-Poisson classique, puis en présence d'une charge ponctuelle. Dans ce dernier cas, une mesure de défaut apparaît dans l'équation d'Euler limite.

3.1 Introduction

L'analyse de différents régimes asymptotiques pour le système de Vlasov-Poisson est à l'origine d'une vaste littérature mathématique et physique. Par exemple, la limite quasineutre, qui mène à l'équation d'Euler incompressible pour des données presque monocinétiques¹, a été étudiée dans [49, 111, 112, 48, 108, 120]. Citons aussi pour ce sujet [123] et les références qui s'y trouvent.

Dans ce chapitre, on se focalise sur un régime appelé limite gyrocinétique ou limite de champ magnétique intense. Ce régime provient par exemple de recherches menées à des fins de production d'énergie par fusion nucléaire, telles que le projet ITER en France : il s'agit de confiner un plasma tridimensionnel dans une boîte toroïdale, loin des frontières de la boîte, en lui appliquant un champ magnétique de large intensité ($1/\varepsilon$) et de direction constante. Le mouvement de chaque particule de plasma² soumise à ce champ magnétique B et au champ électrique E auto-induit

1. On dit que f est monocinétique si elle est de la forme $f(t, x, v) = \rho(t, x)\delta_{v=u(t, x)}$.

2. De masse $m = 1$ et de charge $q = 1$ pour simplifier.

se décompose en un mouvement parallèle (i.e. dans la direction de B) et un mouvement dans le plan orthogonal. Le mouvement parallèle est celui d'une particule d'accélération $(E \cdot B)B/|B|^2$. Lorsque l'on néglige au premier ordre le champ électrique, le mouvement plan est une rotation de fréquence proportionnelle à $|B|$ (appelée fréquence cyclotron) et de rayon proportionnel à $1/|B|$ (appelé rayon de Larmor). La particule évolue donc selon un mouvement hélicoïdal de rayon $\sim \varepsilon$: il y a bien confinement du plasma. En assimilant le mouvement de la particule à celui de son centre instantané de rotation (approximation centre-guide, qui revient à faire la moyenne sur une période d'oscillation), on obtient un mouvement de translation parallèle à B .

Quant au champ électrique, il engendre une vitesse de dérive dans le plan orthogonal donnée par $E \wedge B/|B|^2$, qui est beaucoup plus petite que l'effet du champ magnétique dans l'échelle de temps originale. En revanche, si l'on se place sur une échelle de temps plus grande, l'effet de dérive pour le mouvement dans le plan est tangible. On renvoie à l'introduction de [119, Paragraphe 1.2.2] ou à [211] pour une explication heuristique détaillée des différents effets observés.

La limite gyrocinétique **dans l'échelle de temps simple** a été étudiée en dimension trois par Frénod et Sonnendrücker [93] et par Golse et Saint-Raymond [107] ; l'équation limite obtenue est une équation de transport unidirectionnelle dans la direction du champ magnétique ce qui est une justification de l'approximation centre-guide pour l'équation cinétique complète, où les mouvements de l'ensemble des particules doivent être pris en compte.

Différentes autres limites de champ magnétique intense pour le système de Vlasov-Poisson ou pour des équations reliées ont été analysées dans [94, 107, 211, 37, 118, 39, 128, 101, 22]. On renvoie à l'introduction de [92] et aux références qui s'y trouvent pour un panorama des résultats existants. En particulier, le régime considéré par Brenier [48] aboutit à l'équation d'Euler incompressible comme modèle limite ; celui de Bostan, Finot et Hauray [40] à une équation de transport non linéaire explicite. Enfin, les travaux récents de Degond et Filbet [75], Filbet et Rodrigues [92] et de Bostan [38] traitent le cas d'un champ magnétique non uniforme stationnaire.

On mentionne aussi les travaux de Filbet et Rodrigues [90, 91] à propos de la construction de schémas numériques adaptés aux approximations gyrocinétiques.

Dans ce chapitre, on considère le régime de champ magnétique intense dans une **échelle de temps longue** afin d'observer l'effet de dérive pour le mouvement bidimensionnel. En écrivant le champ magnétique sous la forme $B = e_3/\varepsilon$ (où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de \mathbb{R}^3), l'échelle de temps que nous considérons est d'ordre $1/\varepsilon$. Ceci donne lieu au système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + \frac{v}{\varepsilon} \cdot \nabla_x f_\varepsilon + \left(\frac{E_\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{v^\perp}{\varepsilon^2} \right) \cdot \nabla_v f_\varepsilon = 0, & (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ E_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^2} \rho_\varepsilon(t, y) dy, & \rho_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon(t, x, v) dv, \\ f_\varepsilon(0, x, v) = f_\varepsilon^0(x, v). \end{cases} \quad (3.1)$$

Golse et Saint-Raymond [107, Theo. A & Theo. B] puis Saint-Raymond [210], [211, Theo. 1.1] ont établi que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, les densités macroscopiques ρ_ε convergent faiblement³ vers une solution faible ρ de l'équation d'Euler incompressible. On précisera à la Définition 23 ci-dessous le sens donné ici à ces solutions. Ces résultats s'appliquent à des données satisfaisant des bornes naturelles pour l'énergie et la masse. Une mesure de défaut additionnelle apparaît dans le premier article [107], mais [210, 211] démontrent ensuite que l'équation limite est bien la vraie équation d'Euler.

3. Á sous-suite près.

De plus, sous des hypothèses de régularité supplémentaire des données initiales, une équation cinétique est obtenue de façon formelle pour la densité microscopique limite (après filtrage des oscillations temporelles dues au champ magnétique).

3.2 Limite gyrocinétique dans le cadre classique

Résultats. Dans l'article [189], j'ai considéré le régime asymptotique (3.1) pour des hypothèses similaires à celles de [107, 211] avec des techniques différentes. Les suites de données initiales f_ε^0 vérifient ici :

$$f_\varepsilon^0 \in L^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2), \quad f_\varepsilon^0 \geq 0, \quad f_\varepsilon^0 \text{ à support compact}, \quad (3.2)$$

ainsi que

$$\sup_{\varepsilon > 0} \left(\|f_\varepsilon^0\|_{L^1} + \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho_\varepsilon^0(x) dx \right) < +\infty, \quad \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{E}(f_\varepsilon^0) < +\infty, \quad (3.3)$$

où l'on définit l'énergie de $f \in L^1$ par⁴

$$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} |v|^2 f(x, v) dx dv - \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \ln |x - y| \rho(x) \rho(y) dx dy.$$

Enfin,

$$\varepsilon^2 \|f_\varepsilon^0\|_{L^\infty} \ln(\|f_\varepsilon^0\|_{L^\infty} + 2) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

En adaptant la théorie de Cauchy pour le système de Vlasov-Poisson standard (cf. Chapitre 2), on obtient une unique solution faible globale f_ε de (2.1) appartenant à $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2))$, à support compact pour tout temps, avec donnée initiale f_ε^0 , dont les normes L^p ($1 \leq p \leq +\infty$) et l'énergie sont conservées au cours du temps⁵.

Théorème 22 ([189]). *Il existe une sous-suite $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ telle que $(\rho_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ρ dans⁶ $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2) - w^*)$. De plus, ρ appartient à $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\mathbb{R}^2))$ et est une solution globale de l'équation d'Euler*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + E^\perp \cdot \nabla \rho = 0 \\ E^\perp = 2\pi \nabla^\perp \Delta^{-1} \rho. \end{cases} \quad (3.5)$$

Dans ce théorème, la définition de (3.5) est celle de Schochet [214], inspirée par la formulation introduite par Delort [77] afin de donner un sens au produit $E^\perp \rho$ pour des données **nappes de tourbillons** (des mesures positives appartenant à H^{-1}) :

4. Cf. la définition de l'énergie au Chapitre 2.

5. [189] mentionne des inégalités, mais en utilisant la régularité de la solution il est en effet possible de montrer que ces quantités sont constantes.

6. Ici, $\rho \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2) - w^*)$ signifie que $\rho(t) \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et de plus, $t \mapsto \int \phi(x) d\rho(t, x)$ est continue, pour tout $\phi \in C_c(\mathbb{R}^2)$.

Définition 23 (D'après [77, 214]). Soit $\rho_0 \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2) \cap H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ à support compact. On dit que $\rho \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2) - w^*) \cap L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\mathbb{R}^2))$ est une solution globale de (3.5) avec cette donnée initiale si pour toute $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(t, x) d\rho(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(0, x) d\rho_0(x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \partial_s \Phi(s, x) d\rho(s, x) ds \\ &\quad + \int_0^t \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} H_{\Phi(s, \cdot)}(x, y) d\rho(s, x) d\rho(s, y) ds, \end{aligned}$$

où

$$H_\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \frac{(x - y)^\perp}{|x - y|^2} \cdot (\nabla \Phi(x) - \nabla \Phi(y)).$$

Le théorème de Delort [77] assure l'existence de telles solutions (voir aussi [214]). La formulation de la Définition 23 est motivée par l'observation que pour ρ assez régulière, on a

$$\langle \text{div}(E^\perp \rho), \Phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = - \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} H_\Phi(x, y) \rho(x) \rho(y) dx dy. \quad (3.6)$$

De plus, H_Φ est définie et continue en dehors de la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}^2\}$ et bornée sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, puisque $\|H_\Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)} \leq \|\Phi\|_{W^{2, \infty}}$. Donc l'expression (3.6) a encore du sens pour ρ comme dans la Définition 23, car le support atomique d'une mesure positive appartenant à H^{-1} est vide [77].

Le Théorème 22 est similaire (avec une légère amélioration) à celui de [211], qui traite des données initiales satisfaisant (3.2) (sans hypothèse de compacité du support), (3.3) et (3.7) :

$$\varepsilon \|f_\varepsilon^0\|_{L^\infty} \rightarrow 0, \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

Notre résultat permet ainsi de traiter des données initiales proches de profils monocinétiques :

$$f_\varepsilon^0(x, v) = \rho_0(x) \frac{1}{\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|^\beta} F\left(\frac{v - u_\varepsilon(x)}{\varepsilon |\ln \varepsilon|^{\beta/2}}\right) \chi(x, v),$$

pour $\beta > 1$, $\chi \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ à support compact, $u_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $F \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Notons que si l'on remplace (3.4) par la borne uniforme

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|f_\varepsilon^0\|_{L^\infty} < +\infty, \quad (3.8)$$

alors toute valeur d'adhérence est une **vraie solution faible** de l'équation d'Euler :

Théorème 24 ([189]). Soit f_ε^0 vérifiant (3.2), (3.3) et (3.8) et soit f_ε la solution correspondante de (3.1). Il existe une sous-suite $\varepsilon_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ telle que $(\rho_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ρ dans $C(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^2) - w)$. De plus, $(E_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $E = (x/|x|^2) * \rho$ dans $C(\mathbb{R}_+, L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2))$, et ρ est solution de (3.5) au sens des distributions.

Stratégies de preuve. Les articles que nous avons cités à propos de la limite gyrocinétique font appel à deux types d'approches.

- **Techniques EDP.** Les résultats de [107, 211] sont basés sur des techniques de compacité et de convergence faible dans une équation particulière satisfaite par la suite de densités. Cette équation est obtenue dans [107, Lemma 3.2] :

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \operatorname{div}_v (E_\varepsilon^\perp \rho_\varepsilon) = \operatorname{div}_x \left(\left[\operatorname{div}_x \int_{\mathbb{R}^2} v \otimes v f_\varepsilon dv \right]^\perp \right) + \varepsilon \operatorname{div}_x \left(\partial_t \int_{\mathbb{R}^2} v^\perp f_\varepsilon dv \right). \quad (3.9)$$

Lorsque les ρ_ε ont pour valeur d'adhérence ρ pour la topologie faible $*$, on montre que le terme de gauche converge bien vers $\partial_t \rho + \operatorname{div}(E^\perp \rho)$ selon des arguments classiques [77, 214], où l'on donne le sens (3.6) au terme non linéaire. C'est donc le premier terme du membre de droite (a priori seulement borné dans le dual de $W^{2,\infty}$) qui donne à la limite une mesure de défaut. Ensuite, la preuve de [211, Theo. 1.1] utilise en plus une EDP pour la densité obtenue par troncature des grandes vitesses.

Le passage à la limite à partir de l'équation (3.9) sera utilisé au paragraphe suivant, dans le cadre de la limite gyrocinétique pour l'interaction plasma et charges.

- **Techniques lagrangiennes.** Afin de démontrer les Théorèmes 22 et 24, nous introduisons une combinaison adaptée des caractéristiques $(X_\varepsilon, V_\varepsilon)$ associées à (3.1) :

$$Z_\varepsilon(t, x, v) = X_\varepsilon(t, x, v) + \varepsilon V_\varepsilon^\perp(t, x, v).$$

Ceci revient à obtenir l'équation pour la densité calculée en les nouvelles coordonnées $(x - \varepsilon v^\perp, v)$. Cette notion de gyrocoordonnée a aussi été employée dans d'autres régimes par [101, 128, 40]. L'intérêt est de se débarrasser des termes les plus divergents lorsque ε tend vers zéro, puisque

$$\dot{Z}_\varepsilon(t, x, v) = E_\varepsilon^\perp(t, X_\varepsilon(t, x, v)).$$

Cette ODE est semblable à l'équation des caractéristiques pour l'équation d'Euler de champ de vitesse E_ε^\perp . On trouve ainsi une nouvelle formulation faible pour la densité macroscopique :

Proposition 25. *Pour tout $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, on a*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(t, x) \Phi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon^0(x) \Phi(x) dx - \int_0^t \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} H_\Phi(x, y) \rho_\varepsilon(s, x) \rho_\varepsilon(s, y) dx dy ds \\ = R_\varepsilon(t), \end{aligned}$$

où le reste vérifie

$$|R_\varepsilon(t)| \leq \int_0^t \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} f_\varepsilon(s, x, v) |\nabla \Phi(x + \varepsilon v^\perp) - \nabla \Phi(x)| |E_\varepsilon(s, x)| dx dv ds + o_\varepsilon(1).$$

Puis, les bornes uniformes dont on dispose garantissent qu'il existe bien une valeur d'adhérence pour la topologie faible étoile. Le terme de gauche dans la Proposition 25 passe alors à la limite par les arguments de [77, 214]. En particulier, la convergence du terme non linéaire utilise cruciallement la positivité de ρ_ε ainsi que des bornes uniformes dans $L_{\text{loc}}^\infty(H^{-1})$, ce qui assure qu'il n'y a pas de point de concentration à la limite. Il suffit donc de montrer que le reste tend vers zéro. Un emploi naïf mais fructueux de l'inégalité des accroissements finis nous amène à estimer des termes tels

que⁷

$$\begin{aligned} \varepsilon \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} f_\varepsilon |v| |E_\varepsilon| dx dv &\leq \varepsilon \left\| \int |v| f_\varepsilon dv \right\|_{L^{p'}} \|E_\varepsilon\|_{L^p} \\ &\leq C\varepsilon \sqrt{p} \left\| \int |v| f_\varepsilon dv \right\|_{L^{p'}} \|\nabla E_\varepsilon\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ensuite on optimise par rapport à $p \rightarrow \infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$ grâce à des estimations explicites par rapport à $\|f_\varepsilon\|_{L^\infty}$ pour les différentes quantités qui apparaissent :

$$\begin{aligned} \|\nabla E_\varepsilon\|_{L^2} &\leq C \|\rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C \|f_\varepsilon^0\|_{L^\infty}^{1/2} \left(\iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} |v|^2 f_\varepsilon(t, x, v) dx dv \right)^{1/2}, \\ \left\| \int_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon(t, \cdot, v) |v| dv \right\|_{L^{4/3}} &\leq C \|f_\varepsilon^0\|_{L^\infty}^{1/4} \left(\iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} |v|^2 f_\varepsilon(t, x, v) dx dv \right)^{3/4}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

C'est dans cette dernière étape que joue l'hypothèse (3.4).

3.3 Limite gyrocinétique avec une charge ponctuelle

Résultats. Ce paragraphe est un condensé de l'article [191] au sujet de la limite gyrocinétique pour le système de Vlasov-Poisson en présence d'une singularité ponctuelle (de charge notée $q > 0$), selon le modèle d'interaction étudié au Chapitre 2. L'ensemble plasma-charge est soumis de nouveau à un champ magnétique intense dont on étudie l'effet sur une échelle de temps longue :

$$\begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + \frac{v}{\varepsilon} \cdot \nabla_x f_\varepsilon + \left(\frac{v^\perp}{\varepsilon^2} + \frac{E_\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{q}{\varepsilon} \frac{x - \xi_\varepsilon}{|x - \xi_\varepsilon|^2} \right) \cdot \nabla_v f_\varepsilon = 0, & (x, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ E_\varepsilon = \frac{x}{|x|^2} * \rho_\varepsilon, & \text{où } \rho_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon(t, x, v) dv \\ \dot{\xi}_\varepsilon(t) = \frac{\eta_\varepsilon(t)}{\varepsilon}, \\ \dot{\eta}_\varepsilon(t) = q \left(\frac{\eta_\varepsilon^\perp(t)}{\varepsilon^2} + \frac{E_\varepsilon(t, \xi_\varepsilon(t))}{\varepsilon} \right). \end{cases} \quad (3.12)$$

Notre question est de déterminer si la présence de la charge ponctuelle est maintenue dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$; si oui, retrouve-t-on le système Euler-point vortex étudié au Chapitre 1 ?

Voici nos hypothèses pour les suites de données initiales (comparables aux hypothèses (3.2)-(3.3)-(3.4)) : on suppose déjà que pour chaque $\varepsilon > 0$, f_ε^0 est à support compact et s'annule dans un voisinage de ξ_ε^0 afin que le résultat d'existence et d'unicité du Chapitre 2 s'applique (à petite modification près) : il existe une unique solution faible $(f_\varepsilon, \xi_\varepsilon)$ à (3.12) correspondante. Puis,

$$\begin{aligned} \sup_{0 < \varepsilon < 1} \left(\|f_\varepsilon^0\|_{L^1} + \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \rho_\varepsilon^0(x) dx + |\xi_\varepsilon^0| \right) &< +\infty, \\ \sup_{0 < \varepsilon < 1} \mathcal{E}(f_\varepsilon^0, \xi_\varepsilon^0, \eta_\varepsilon^0) &< +\infty, \end{aligned} \quad (3.13)$$

7. On remplace en fait E_ε par $E_\varepsilon - \tilde{E}_\varepsilon$, où \tilde{E}_ε est régulier stationnaire de sorte que $E_\varepsilon - \tilde{E}_\varepsilon$ appartient à L^2 .

où l'énergie $\mathcal{E}(f, \xi, \eta)$ associée à (3.12), qui est conservée, est définie dans (2.19) au Chapitre 2. De plus,

$$\varepsilon^2 \|f_\varepsilon^0\|_{L^\infty} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.14)$$

Enfin, on ajoute la condition :

$$\sup_{0 < \varepsilon < 1} \|f_\varepsilon^0\|_{L^1} < 1. \quad (3.15)$$

Cette hypothèse de petitesse est apparue au Chapitre 2 afin d'estimer le champ électrique en la charge ponctuelle dans l'inégalité (2.27). Un argument semblable est utilisé à l'estimation (3.17) ci-dessous dans le même but.

Théorème 26 ([191], Theorem 1.4). *Il existe une sous-suite $\varepsilon_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ telle que*
— *(ρ_{ε_n}) converge vers ρ dans $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2) - w^*)$, avec $\rho \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\mathbb{R}^2))$; et (ξ_{ε_n}) converge vers ξ dans $C^{1/2}([0, T], \mathbb{R}^2)$ pour tout $T > 0$;*
— *Il existe une mesure de défaut $\nu \in [L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}(\mathbb{R}^2))]^4$ telle que pour tout $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$,*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x) d(\rho(t, \cdot) + q\delta_{\xi(t)})(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x) d(\rho(0, \cdot) + q\delta_{\xi(0)})(x) \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \partial_s \Phi(s, x) d(\rho(t, \cdot) + q\delta_{\xi(t)})(x) \\ & + \int_0^t \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} H_{\Phi(s, \cdot)}(x, y) d(\rho + q\delta_\xi)(s, x) d(\rho + q\delta_\xi)(s, y) ds + \int_{\mathbb{R}^2} D\nabla^\perp \Phi(x) : d\nu(t, x). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ici, la fonction H_Φ est définie comme dans la Définition 23 avec en plus une valeur assignée sur la diagonale : $H_\Phi(x, x) = 0$, pour $x \in \mathbb{R}^2$. Ceci permet de donner un sens à (3.16) en tant qu'équation d'Euler incompressible ayant pour solution la **mesure totale** $\omega = \rho + q\delta_\xi$, même si celle-ci n'est pas une nappe de tourbillon (puisque une mesure de Dirac n'appartient pas à $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$). La notion de solution mesure de l'équation d'Euler, incluant une mesure de défaut comme dans (3.16), a été introduite par Poupaud [206] qui a démontré l'existence globale pour toute donnée initiale appartenant à $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2)$. L'article [187] a établi ensuite l'existence globale d'une solution de la forme prescrite $\omega = \rho + \gamma\delta_\xi$.

Comme on l'espérait, il existe des cas dans lesquels l'équation limite de (3.12) est bien le système Euler-point vortex :

Théorème 27 ([191], Theorem 1.6). *Soit (ρ, ξ) une valeur d'adhérence donnée par le Théorème 26 telle que ν est nulle⁸. Si de plus $\rho \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^2))$ pour un certain $p > 2$ et $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$, alors (ρ, ξ) satisfait le système Euler-point vortex*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \left(E^\perp + q \frac{(x - \xi)^\perp}{|x - \xi|^2} \right) \cdot \nabla \rho = 0, & E = \frac{x}{|x|^2} * \rho \\ \dot{\xi}(t) = E^\perp(t, \xi(t)), & t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

En ce qui concerne la mesure de défaut, on peut en préciser la structure de la manière suivante :

8. Ou que son effet soit invisible dans (3.16).

Théorème 28 ([191], Theorem 1.5). *Sous les mêmes hypothèses,*

— *Il existe $\nu_0 = \nu_0(t, x, \theta) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1))$ et il existe $(\alpha, \beta) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ tels que*

$$\nu = \int_{\mathbb{S}^1} \theta \otimes \theta \, d\nu_0(\theta) + \begin{pmatrix} -\beta\delta_\xi & \alpha\delta_\xi \\ \alpha\delta_\xi & \beta\delta_\xi \end{pmatrix}.$$

— *La suite (f_{ε_n}) converge vers $f = f(t, x, |v|)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2))$ faiblement étoile et $\rho = \int f \, dv$. De plus, pour toute Φ continue sur \mathbb{S}^1 , on a la convergence*

$$\int_{\mathbb{R}^2} (f_{\varepsilon_n}(t, x, v) - f(t, x, |v|)) \Phi\left(\frac{v}{|v|}\right) |v|^2 \, dv \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}^1} \Phi(\theta) \, d\nu_0(\theta)$$

au sens des distributions dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$.

La mesure de défaut apparaît au niveau de la limite (au sens des distributions) de la suite $\int v \otimes v (f_{\varepsilon_n}(t, x, v) + q\delta_{\xi_{\varepsilon_n}} \otimes \delta_{\eta_{\varepsilon_n}}) \, dv$. Comme on l'a mentionné, une mesure de défaut apparaît dans l'article [107, Theo. A] dédié au cas sans charge $q = 0$, qui montre que cette mesure a la structure de ci-dessus (en posant $\alpha = \beta = 0$). En particulier, les auteurs constatent que si ν_0 est **invariante par rotation**⁹, l'effet de la mesure de défaut sur l'équation limite est nul. Le [107, Theo. D] a alors pour but d'énoncer des conditions suffisantes sur la solution pour assurer l'invariance par rotation.

Stratégie de preuve. On ne raisonne pas avec la technique lagrangienne du Paragraphe 3.2. En effet, d'après (3.10), on aurait besoin pour cela d'estimations pour les normes L^p (avec $p \rightarrow \infty$) du champ électrique total $E_\varepsilon + q(x - \xi_\varepsilon)/|x - \xi_\varepsilon|^2$ ce qui est bien sûr inaccessible. C'est pourquoi on revient à la technique EDP qui est le point de départ de [107] : on utilise des estimations uniformes en ε afin de trouver une valeur d'adhérence pour ρ_ε et ξ_ε pour les topologies évoquées au Théorème 26 ; et on passe à la limite dans une EDP bien choisie pour $\rho_\varepsilon + q\delta_\varepsilon$. Dans le contexte présent, l'équation (3.9) devient

$$\begin{aligned} & \partial_t \rho_\varepsilon + \operatorname{div}_x \left((E_\varepsilon^\perp + q \frac{(x - \xi_\varepsilon)^\perp}{|x - \xi_\varepsilon|^2}) \rho_\varepsilon \right) \\ &= \operatorname{div}_x \left(\left[\operatorname{div}_x \int_{\mathbb{R}^2} v \otimes v f_\varepsilon \, dv \right]^\perp \right) + \varepsilon \operatorname{div}_x \partial_t \int_{\mathbb{R}^2} v^\perp f_\varepsilon \, dv. \end{aligned}$$

Afin de passer à la limite dans le terme le plus singulier ci-dessus, à savoir $\rho_\varepsilon(x - \xi_\varepsilon)^\perp/|x - \xi_\varepsilon|^2$, on symétrise le terme non linéaire dans l'esprit de la formulation (3.6). Ceci suppose de considérer la mesure totale $\rho_\varepsilon + \gamma\delta_{\xi_\varepsilon}$.

9. Au sens que ν_0 est invariante par toute transformation de la forme $(t, x, \theta) \mapsto (t, x, \mathcal{R}\theta)$, où \mathcal{R} transformation orthogonale de \mathbb{R}^2 .

Proposition 29. *Soit $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, on a pour $t \geq 0$*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x) \rho_\varepsilon(t, x) dx + q\Phi(\xi_\varepsilon(t)) - \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x) \rho_\varepsilon(0, x) dx - q\Phi(\xi_\varepsilon(0)) \\ &= \int_0^t \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} H_\Phi(x, y) d(\rho_\varepsilon + q\delta_{\xi_\varepsilon})(s, x) d(\rho_\varepsilon + q\delta_{\xi_\varepsilon})(s, y) ds \\ & - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \left(D\nabla^\perp \Phi(x) : \int_{\mathbb{R}^2} v \otimes v f_\varepsilon(s, x, v) dv \right) dx ds \\ & - \int_0^t \eta_\varepsilon(s) \cdot (D\nabla^\perp \Phi(\xi_\varepsilon(s)) \eta_\varepsilon(s)) ds + R_\varepsilon(t), \end{aligned}$$

où $|R_\varepsilon(t)| \leq C \|\Phi\|_{W^{3,\infty}(\mathbb{R}^2)} (1+t)\varepsilon$.

On peut ensuite passer à la limite pour obtenir l'équation (3.16) avec mesure de défaut par adaptation des arguments de compacité de [107, 206]. La preuve de la Proposition 29 s'articule autour de la dynamique explicite de ξ_ε et de différentes estimations à partir des bornes disponibles (énergie, masse, normes L^∞). On utilise en particulier un contrôle sur les moyennes temporelles du champ électrique :

$$\int_s^t |E_\varepsilon(\tau, \xi_\varepsilon(\tau))| d\tau \leq C\varepsilon + \frac{C}{\varepsilon}(t-s), \quad (3.17)$$

qui s'obtient par théorème du viriel et qui repose sur l'hypothèse de petitesse de masse $\sup_\varepsilon \|f_\varepsilon\| < 1$.

3.4 Quelques perspectives

Une première piste de travail serait d'étendre le Théorème 22 à des données initiales vérifiant uniquement des bornes uniformes naturelles vis-à-vis du système de Vlasov-Poisson : masse, énergie et moment d'ordre deux en espace (c'est-à-dire supprimer (3.4)). Ceci semble délicat par les méthodes utilisées qui reposent souvent sur des estimations en borne uniforme pour f_ε .

En ce qui concerne la limite gyrocinétique avec la charge ponctuelle, les résultats du Paragraphe 3.3 ne sont pas complètement satisfaisants à plusieurs égards. D'une part, on souhaiterait évidemment supprimer l'effet de la mesure de défaut dans le Théorème 26. En présence du champ singulier créé par la charge ponctuelle, nous ne sommes pas capables d'étendre le [107, Theo. D] donnant des conditions pour que la mesure de défaut soit invariante par rotation. Si l'on pouvait démontrer en première étape que l'effet de la composante ν_0 est nul, il serait peut-être possible de s'inspirer du résultat de [214, Theo. 6.1] et de la régularité $C^{1/2}$ de ξ afin d'établir que l'effet de la partie atomique de ν est également invisible dans l'équation (3.16). D'un autre côté, la preuve de [211, Theo. 1.1], qui permet de montrer la convergence vers la vraie équation d'Euler dans le cas sans charge par troncature des densités pour des vitesses inférieures à $\varepsilon^{-\alpha}$, pour α bien choisi, n'est pas non plus adaptable au cas présent. En effet, cela nécessiterait de contrôler des termes de la forme $\iint_{|v| \leq C\varepsilon^{-\alpha/2}} f_\varepsilon |v|^2 |x - \xi_\varepsilon|^{-1} dx dv$ dans des espaces de Lebesgue.

D'autre part, nous avons mené cette étude dans l'optique d'obtenir asymptotiquement le système Euler-point vortex, ce qui n'est que partiellement obtenu dans le Théorème 27. Il serait intéressant de comprendre quelle préparation des données initiales $(f_\varepsilon^0, \xi_\varepsilon^0, \eta_\varepsilon^0)$ assure à la limite suffisamment de régularité à (ρ, ξ) pour que l'on puisse découpler l'équation (3.16).

Il serait tentant d'étendre les résultats du Paragraphe 3.3 au cas de plusieurs charges ponctuelles. La question semble abordable, même si l'on retrouverait entre autres la difficulté évoquée au Chapitre 2 au sujet de l'extension de l'inégalité (3.17).

Enfin, nous avons considéré le cas d'une interaction plasma-charge répulsive, afin d'assurer l'existence globale de la solution et des bornes uniformes pour différentes normes, découlant de la conservation de l'énergie et des moments. Ces bornes ne seraient pas directement accessibles avec $q < 0$, mais il serait naturel d'étudier cette question.

Chapitre 4

Unicité pour un modèle couplé cinétique/fluide

Sommaire

4.1	Introduction	67
4.2	Idées de preuve	69
4.3	Perspectives	71

Résumé

On s'intéresse au système de Vlasov-Navier-Stokes, un modèle mixte fluide/cinétique pour l'évolution d'une densité de particules dans un fluide visqueux incompressible. On présente l'article [121], en collaboration avec D. Han-Kwan, A. Moussa et I. Moyano, qui établit l'unicité de la solution faible de ce système sous des hypothèses pour les moments en vitesse de la densité initiale.

4.1 Introduction

Dans ce court chapitre, on considère le problème d'unicité pour le système de Vlasov-Navier-Stokes en dimension deux :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p = j - \rho u, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v [f(u - v)] = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

avec $(t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^2$, où Ω désigne soit le tore \mathbb{T}^2 soit l'espace \mathbb{R}^2 en entier. Ci-dessus, les quantités j et ρ sont définies par

$$\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x, v) dv, \quad j(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} v f(t, x, v) dv.$$

Il s'agit d'un modèle couplé fluide/cinétique décrivant l'interaction de deux phases : un fluide incompressible visqueux (de viscosité égale ici à un), décrit par sa vitesse (une quantité macroscopique) $u = u(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, et une densité de particules, décrite par sa densité (microscopique) $f = f(t, x, v) : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$. Ce couplage intervient comme modèle simplifié pour comprendre la dynamique des aérosols dans les poumons, où l'on cherche à décrire le transport des particules vaporisées au sein des voies pulmonaires. Il est issu des travaux de Williams [225] et de O'Rourke [200], voir aussi les mémoires [193, 194] ou [45] pour la motivation physique. D'autres types de couplages mêlant une équation de la mécanique des fluides et une équation cinétique peuvent être également étudiés, voir par exemple [103] pour une introduction à ces modèles.

D'un point de vue mathématique, le système de Vlasov-Navier-Stokes pose une grande variété de problèmes théoriques : comportement en temps grand des solutions [62, 103, 122], limites hydrodynamiques [109], contrôlabilité [196], existence. Plus précisément pour cette dernière question, l'existence globale d'une solution faible d'énergie finie est démontrée dans l'article de Boudin, Desvillettes, Grandmont et Moussa [44] pour des conditions de bord périodiques, dans [229, 224] pour des domaines bornés avec différentes conditions de bord, dans [46] pour des domaines dépendant du temps. Un résultat d'existence et d'unicité de solutions fortes à petites données initiales a aussi été établi dans [196]. La question de l'unicité des solutions faibles n'a à notre connaissance pas été abordée rigoureusement¹ avant notre travail [121]. Bien sûr, il y a peu d'espoir de la résoudre en dimension trois (puisqu'on ne saurait même pas le faire pour l'équation de Navier-Stokes). Il semble plus raisonnable de l'obtenir en dimension deux, dimension pour laquelle chacune des deux équations séparées : Navier-Stokes pour la première, obtenue en posant $f = 0$, et équation de Vlasov linéaire amortie pour la seconde, en posant $u = 0$, est bien posée. Il s'agit du théorème de Leray pour l'équation de Navier-Stokes (cf. [47, Theo. V.1.4]) et d'un résultat aisé pour l'équation linéaire de Vlasov amortie. Toutefois, le fort couplage entre ces deux équations nécessite de faire appel ici à des arguments différents.

On considère dans la suite des données initiales (u_0, f_0) qui vérifient

$$u_0 \in L^2(\Omega), \quad \operatorname{div} u_0 = 0, \quad (4.2)$$

$$0 \leq f_0 \in L^1 \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^2), \quad (4.3)$$

$$(x, v) \mapsto f_0(x, v)|v|^2 \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}^2), \quad (4.4)$$

ce qui est le cadre usuel des données initiales pour la construction de solution faible de (4.1), d'après [44]. Pour l'unicité, on se focalise sur des **données admissibles** : en plus de (4.2) – (4.4), elles vérifient

$$\forall R > 0, \quad \Gamma_R(f_0) : (t, v) \mapsto (1 + |v|^2) \sup_{C_{t,v}^R} f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^2)), \quad (4.5)$$

où $C_{t,v}^R := \Omega \times B(e^t v, R)$.

Cette condition fait écho à celle qui garantit l'unicité pour l'équation de Vlasov-Poisson, introduite par Lions et Perthame [168] (voir (2.8) au Chapitre 2). La condition (4.5) est assurée lorsque, par exemple,

$$\exists q > 4 \quad \text{tel que} \quad f_0(x, v) \leq \frac{C}{1 + |v|^q}, \quad \forall (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$$

1. L'article [229] nous semble contenir une erreur.

(cf. (2.9) pour la condition (2.8)). Nous verrons ci-dessous qu'elle a bien pour but d'assurer que la densité (et même, ici, les moments supérieurs) soient uniformément bornés.

On dit que (f, u) est une solution faible globale de (4.1) avec donnée initiale (f_0, u_0) vérifiant (4.2)–(4.4) si

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega)) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\Omega)), \\ f &\in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1 \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^2)), \quad j \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega), \quad \rho \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega), \end{aligned}$$

et si les équations de (4.1) sont vérifiées au sens des distributions. On note qu'en dimension deux, toute solution faible conserve l'énergie $\mathcal{E}(f(t))$, où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f(t)) &= \frac{1}{2} \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds + \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} |v|^2 f(t, x, v) dx dv \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x, v) |v - u(t, x)|^2 dx dv ds. \end{aligned}$$

On reconnaît dans les deux premiers termes du membre de droite l'énergie

$$\frac{1}{2} \|u(t, \cdot)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u(s, \cdot)\|_2^2 ds,$$

qui est notoirement conservée par la solution faible de l'équation de Navier-Stokes en 2D. Le terme

$$M_2(f(t)) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} |v|^2 f(t, x, v) dx dv$$

est l'énergie cinétique produite par la densité. Comme on l'a vu aux Chapitres 2 et 3, une borne uniforme pour l'énergie cinétique apporte de l'intégrabilité supplémentaire pour la densité ρ et le courant j (voir par exemple (3.11)). Enfin, le dernier terme dans l'énergie ci-dessus est un terme de dissipation, issu du couplage entre f et u , qui intervient dans l'étude en temps grand dans [122] en étant associé à une notion d'énergie modulée.

Théorème 30. *Soit (u_0, f_0) une donnée initiale admissible. Alors il existe une unique solution faible correspondante au système de Vlasov-Navier-Stokes.*

4.2 Idées de preuve

On présente ici le cas $\Omega = \mathbb{R}^2$ dans un souci de simplification. La démonstration se déroule en plusieurs étapes.

Régularité et conséquences. Dans un premier temps, on démontre qu'une solution faible avec donnée initiale admissible satisfait davantage de régularité que prévu, en exploitant l'effet régularisant de l'équation de Navier-Stokes.

Lemme 31 ([121], Lemma 3, Lemma 4). *Toute solution faible (u, f) du système de Vlasov-Navier-Stokes sur $[0, T]$ vérifie*

1. $u \in L^2([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}^2)).$

2. Il existe une fonction $\gamma \in L^1([0, T], \mathbb{R}_+)$ telle que

$$|u(t, x) - u(t, y)| \leq \gamma(t)|x - y|(1 + |\ln|x - y||).$$

Le premier item provient du résultat de Chemin et Gallagher [59, Theo. 3], le second du résultat de Chemin et Lerner [60]. Ces articles s'appliquent pour une solution faible de l'équation de Navier-Stokes sans terme source ou avec terme source appartenant à $L^2([0, T], L^2)$. Ainsi, nous devons d'abord établir que c'est le cas pour notre terme source $F = j - \rho u$. Ceci passe par différentes étapes en bootstrap : régularité a priori pour ρ et j ; propriétés de l'opérateur de Stokes; ...

Au cours de la démonstration, l'intégrabilité supplémentaire obtenue pour u permet d'établir une propriété supplémentaire pour les premiers moments. C'est ici que l'hypothèse sur la donnée initiale trouve son origine. En effet, en posant $m_k f(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} |v|^k f(t, x, v) dv$, on montre que pour $t \in [0, T]$:

$$\|m_0 f(t, \cdot)\|_{L^\infty} + \|m_1 f(t, \cdot)\|_{L^\infty} + \|m_2 f(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq e^{2T} \sup_{[0, T]} \|\Gamma_R(f_0)(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}, \quad (4.6)$$

où $\Gamma_R(f_0)$ est définie dans (4.5) et où $R = e^T \|u\|_{L^1([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}^2))}$.

En particulier, (4.6) signifie que la densité $\rho = m_0(f)$ et le courant $j = m_1(f)$ sont uniformément bornés. Ceci est crucial dans notre preuve d'unicité pour (4.1), au même titre que l'estimation uniforme pour ρ est cruciale dans la preuve d'unicité de Loeper pour le système de Vlasov-Poisson.

Un premier corollaire de la régularité log-Lipschitz pour u , établie au Lemme 31, est le fait que l'on peut définir de manière classique les caractéristiques comme solutions à l'EDO $\dot{X}(t, x, v) = V(t, x, v)$, $\dot{V}(t, x, v) = u(t, X(t, x, v)) - V(t, x, v)$, avec $(X, V)(0, x, v) = (x, v)$. On a alors

$$f(t, X(t, x, v), V(t, x, v)) = e^{2t} f_0(x, v).$$

Estimation de Gronwall. Dans un second temps, on combine la méthode d'énergie (pour la partie Navier-Stokes) et la méthode lagrangienne (pour la partie cinétique). Dans cette optique, on cherche une inégalité de Gronwall pour une fonctionnelle mixte mesurant la différence entre deux solutions faibles (u_1, f_1) et (f_2, f_2) (de flots associés (X_1, V_1) et (X_2, V_2)) :

$$\mathcal{D}(t) = \|u_1(t, \cdot) - u_2(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \mathcal{Q}(t),$$

où

$$\mathcal{Q}(t) = \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} (|X_1(t, x, v) - X_2(t, x, v)|^2 + |V_1(t, x, v) - V_2(t, x, v)|^2) f_0(x, v) dx dv.$$

La quantité $\mathcal{Q}^{1/2}(t)$ majore la distance de Wasserstein quadratique. Comme on l'a vu au Chapitre 2 (voir (2.17)), elle joue un rôle dans les démonstrations d'unicité pour le système de Vlasov-Poisson avec des méthodes lagrangiennes ou de transport optimal. Par des arguments très semblables à ceux de [188], reposant sur les estimations uniformes pour les densités et sur les régularités log-Lipschitz des champs de vitesse, on montre une première estimation de Gronwall pour $\mathcal{Q}(t)$.

Pour estimer le premier terme de $\mathcal{D}(t)$, on utilise la méthode d'énergie classique pour Navier-Stokes, elle-même reposant sur l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg. Cependant, il reste bien sûr un terme additionnel à estimer, issu du couplage avec la partie cinétique :

$$A(t) = \int_{\mathbb{R}^2} (\rho_2 - \rho_1) u_2 \cdot (u_1 - u_2) dx + \int_{\mathbb{R}^2} (j_1 - j_2) \cdot (u_1 - u_2) dx.$$

Après reformulation avec les caractéristiques et réorganisation de $A(t)$, il ressort un terme délicat à estimer :

$$\tilde{A}(t) = \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} f_0(x, v) [w(X_1) - w(X_2)] \cdot (V_2 - u_2(X_2)) dv dx,$$

où l'on a posé $w = u_1 - u_2$. On fait alors appel à la notion de **fonction maximale** pour la fonction $w(t, \cdot)$ (qui appartient à H^1). On rappelle l'estimation (1.15), démontrée dans [1, Lemma 3] :

Proposition 32. *Si $w \in H^1(\mathbb{R}^2)$ alors pour presque tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ on a*

$$|w(x) - w(y)| \leq C|x - y|(M|\nabla w|(x) + M|\nabla w|(y)).$$

À l'aide de cette inégalité, on obtient

$$|\tilde{A}(t)| \leq C \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} f_0(x, v) |X_1 - X_2| |V_2 - u_2(X_2)| \times \left[M|\nabla w|(X_1) + M|\nabla w|(X_2) \right] dv dx.$$

On peut finalement ajuster les différents termes du membre de droite : on combine l'inégalité de Cauchy-Schwartz, les bornes uniformes sur $m_2(f_2)$, en se souvenant aussi qu'une petite portion de $\|\nabla w(t, \cdot)\|_2^2$ peut être absorbée grâce au terme de dissipation de Navier-Stokes. Ceci permet enfin de boucler l'estimation de Gronwall pour $\mathcal{D}(t)$.

4.3 Perspectives

Il serait intéressant de parvenir au même résultat d'unicité que pour le système de Vlasov-Poisson : borne uniforme pour le moment d'ordre zéro (donc, seulement pour la densité) plutôt qu'une borne jusqu'à l'ordre deux. Voire, de considérer des densités dans des espaces de Orlicz comme ceux considérés au Chapitre 2. Pour cela, nous devons comprendre si le couplage avec la partie fluide rend cette hypothèse indispensable.

En ce qui concerne la dimension trois, il semble envisageable d'étudier l'unicité dans une classe plus restreinte de solutions régulières, telle que la classe de fonctions dont le comportement asymptotique est étudié dans [122].

Chapitre 5

Dynamique des filaments de tourbillon

Sommaire

5.1	Introduction	73
5.2	Existence en temps grand de filaments	80
5.3	Collisions de filaments	81
5.4	Perspectives	85

Résumé

Ce chapitre a pour but de résumer les articles [12, 13] (en collaboration avec V. Banica) et [10, 11] (en collaboration avec V. Banica et E. Faou) à propos de la dynamique de plusieurs tourbillons filamentaires dans les fluides incompressibles en dimension trois. Nous nous focalisons sur des configurations particulières de tourbillons **presque droits et presque parallèles**, pour lesquelles nous étudions l'existence globale et démontrons l'existence de configurations initiales menant à la collision de tous les filaments en temps fini.

5.1 Introduction

Dynamique d'un tourbillon filamentaire : le flot par courbure binormale. Le cadre de ce chapitre est celui des fluides incompressibles en dimension trois, à viscosité faible ou nulle. On s'intéresse aux écoulements tourbillonnaires, analogues tridimensionnels des tourbillons ponctuels étudiés au Chapitre 1. De tels écoulements sont observés par exemple dans le sillage des ailes d'avion, dans des éruptions volcaniques ou ronds de fumée. On parle d'écoulement tourbillonnaire (ou de filament de tourbillon)¹ lorsque la vorticité est pour tout temps essentiellement concentr e à l'intérieur d'un tube de longueur infinie ou fermé, de section transverse très petite, et de direction parallèle à celle du tube, de sorte que la circulation γ du champ de vitesse autour du tube ne dépend ni du temps (théorème de Kelvin, [173, Prop. 1.11]), ni de la section. Lorsque la section

1. Ou de tourbillon filamentaire...

du tube tend vers zéro, on assimile le tube à une courbe $\Gamma(t)$ de l'espace, que l'on paramètre au temps t par une fonction $\chi(t, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, avec I intervalle ouvert de \mathbb{R} . Mathématiquement, on exprime la concentration du tourbillon sur la courbe de la façon suivante :

$$\forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) \cdot d\omega(t, x) = \gamma \int_I \varphi(\chi(t, s)) \cdot \partial_s \chi(t, s) ds.$$

Partant de l'hypothèse que le tourbillon reste bien ainsi concentré pour tout temps, on souhaite déterminer sa dynamique. Dans le cadre des fluides parfaits incompressibles, une solution régulière ω de l'équation d'Euler en dimension trois vérifie

$$\omega(t, X(t, x)) = \nabla X(t, x)\omega(0, x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (5.1)$$

(voir [173, Prop 1.8]), où X est le flot du champ de vitesse créé par le tourbillon. En extrapolant (5.1) au cas d'une solution qui est mesure de Dirac concentrée le long de la courbe $\Gamma(t)$, on s'attend donc à ce qu'un paramétrage de $\Gamma(t)$ soit $\chi(t, s) = X(t, \chi(0, s))$ pour $s \in I$ et que par conséquent, l'évolution de la courbe soit donnée par

$$\partial_t \chi(t, s) = \frac{d}{dt} X(t, \chi(0, s)) = u(t, X(t, \chi(0, s))).$$

En poursuivant dans cette voie, on est amené à calculer le champ de vitesse créé par le filament en un point de la courbe. Or, rappelons que ce champ de vitesse est donné par la loi de Biot-Savart

$$u(t, x) = \frac{\gamma}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x - y}{|x - y|^3} \wedge d\omega(t, y),$$

donc il est singulier sur la courbe. En conclusion, deux types de difficultés surgissent :

- Persistance du filament : montrer que si le tourbillon est initialement concentré le long d'une courbe, il reste concentré le long d'une courbe à temps positif;
- Dynamique du filament : calculer le champ de vitesse en un point de la courbe (ou dans un très proche voisinage).

La première question est ouverte dans le cas général, alors que le problème correspondant en dimension deux est bien compris, comme nous l'avons évoqué au Chapitre 1 : d'après [178], si la vorticité est initialement asymptotiquement concentr e au voisinage d'un nombre fini de points distincts (typiquement, une somme de fonctions caractéristiques pond r es autour de ces points) alors la solution de l'équation d'Euler **bidimensionnelle** reste concentr e autour de points qui évoluent selon le système des points vortex (9). On renvoie aussi à [222] pour le cas d'un point en domaine borné. Cette propriété de persistance a également été d montr e récemment pour l'équation des lacs (un modèle proche de l'équation d'Euler 2D) par Dekeyser et Van Schaftingen [76]. En dimension trois, la question de la persistance du filament n'a à notre connaissance été résolue que pour des flots axisymétriques sans swirl concentrés autour d'un anneau [25, 176].

Dès 1906, Da Rios [71] a répondu de façon formelle à la seconde question en introduisant le concept d'approximation LIA (Local Induction Approximation) qui consiste à ne tenir compte que des effets locaux dans la formule de Biot-Savart. Après remise à l'échelle par rapport à la variable temporelle, le développement asymptotique de Da Rios donne comme terme de premier ordre pour le champ de vitesse² :

$$u(t, \chi(t, s)) = \frac{\partial_s \chi(t, s) \times \partial_{ss} \chi(t, s)}{|\partial_s \chi(t, s)|^3}.$$

2.   constante numérique près.

Finalement, on arrive à l'équation du flot par courbure binormale :

$$\partial_t \chi = \frac{\partial_s \chi \times \partial_{ss} \chi}{|\partial_s \chi|^3}. \quad (5.2)$$

Après avoir suscité l'engouement de ses contemporains, l'équation de Da Rios fut oubliée pendant quelques décennies. Puis elle fut redécouverte de façon indépendante à partir des années soixante dans une série de travaux reposant aussi sur des développements asymptotiques formels et des troncatures : Arms et Hama [8], Betchov [28], Bachelor [23]. Citons aussi Moore et Saffman [192], puis Callegari et Ting [51] et Ting et Klein [221] pour des fluides faiblement visqueux. On renvoie à l'article de revue de Ricca [208] pour une présentation et mise en perspective de l'article de Da Rios, ainsi qu'au livre de Majda et Bertozzi [173] pour une présentation générale du sujet.

Récemment, l'équation (5.2) a été obtenue rigoureusement par Jerrard et Seis [142] pour des tourbillons concentrés en un sens faible autour d'une courbe fermée et non nécessairement régulière. S'il ne répond pas à la question de persistance du filament, leur résultat permet de traiter des tourbillons plus généraux que ceux des travaux précédents, qui ne se comportent pas nécessairement comme des prototypes idéalisés de filaments.

En notant $c(t, \cdot)$ la courbure et $(T(t, \cdot), n(t, \cdot), b(t, \cdot))$ le repère de Serret-Frenet associés à la courbe $\chi(t, \cdot)$, de sorte que $T = \partial_s \chi / |\partial_s \chi|$, on remarque que l'équation du flot binormal s'écrit sous une forme plus condensée d'où provient son nom : $\partial_t \chi = c b$.

Enfin, (5.2) donne aussi une équation remarquable pour le vecteur tangent uniquement, appelée application de Schrödinger de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{S}^2 ³ :

$$\partial_t T = T \wedge \partial_{ss} T.$$

Il existe aussi des modèles d'évolution permettant d'inclure des effets d'auto-étirement du filament à l'origine de l'enroulement, entortillement, ou de la formation de structures de formes d'épingles. Ces effets ne sont pas pris en compte dans (5.2), alors qu'ils sont mis en évidence par des simulations numériques [63, 216]. Par exemple, Fukumoto et Miyazaki [95] traduisent l'auto-étirement par l'ajout d'un terme non local, de plus petit ordre, au membre de droite de (5.2)⁴ :

$$\partial_t \chi = \partial_s \chi \times \partial_{ss} \chi + \alpha \left(\partial_{sss} \chi + \frac{3}{2} \partial_{ss} \chi \times (\partial_s \chi \times \partial_{ss} \chi) \right), \quad (5.3)$$

où α est un paramètre lié au flot axial. On renvoie aussi au modèle introduit par Klein et Majda dans les articles [149, 150].

L'équation du flot par courbure binormale (5.2) admet des solutions explicites et simples :

– Les droites de \mathbb{R}^3 (solutions stationnaires), qui sont l'équivalent d'un seul tourbillon ponctuel fixe dans \mathbb{R}^2 , solution stationnaire de (9) ;

– Les cercles (ou ronds de fumée⁵) se propageant en translation uniforme dans la direction perpendiculaire au plan contenant le cercle, à vitesse proportionnelle à l'inverse du rayon du cercle ; ces solutions sont l'équivalent d'une paire de tourbillons ponctuels de circulations opposées, en translation uniforme dans \mathbb{R}^2 , solution bien connue de (9).

– Les courbes qui forment des hélices.

3. "Schrödinger map equation".

4. Ici χ est paramétrée par longueur d'arc.

5. "Vortex rings".

Des solutions remarquables sont aussi données par les courbes autosimilaires de la forme

$$\chi(t, x) = \sqrt{t}G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

où G est régulière. De telles solutions forment une famille à un paramètre a , dont la courbure et la torsion en (t, x) valent a/\sqrt{t} et $x/2t$ respectivement. Elles sont régulières à $t > 0$ mais développent une singularité de type coin à $t = 0$: elles convergent uniformément vers la réunion de deux demi-droites. Le comportement précis de ces solutions au voisinage de la formation de la singularité a été décrit par Gutiérrez, Rivas et Vega [117]. Dans une série d'articles, Banica et Vega [14, 15, 16, 17, 18] ont étudié la stabilité de la dynamique singulière de ces solutions, à savoir la persistance de la formation de la singularité pour leurs perturbations. De plus, ils ont pu dans ce cadre prolonger la solution au delà du temps de formation de la singularité.

Il s'agit dans les exemples cités ci-dessus de solutions régulières (au moins à $t > 0$), mais on peut aussi s'intéresser à des solutions faibles à valeurs dans des espaces de Sobolev : on pourra consulter [143, § 1.2] pour un exposé des résultats existants.

L'évolution de courbes encore moins régulières, comportant par exemple des coins, a aussi été considérée. Jerrard et Smets [144] ont introduit une formulation généralisée de (5.2) avec la notion de courants, permettant de traiter des filaments avec des auto-intersections. Banica et Vega [18] ont démontré le caractère bien posé de (5.2) dont la donnée initiale comporte une (seule) singularité coin, ce qui inclut une classe de perturbations des réunions de demi-droites mentionnées ci-dessus.

Quant au cas de plusieurs coins, l'évolution de courbes issues de polygones réguliers a été étudiée d'un point de vue théorique et numérique par De la Hoz et Vega [72, 73], avec une mise en évidence d'un phénomène d'intermittence lié à l'effet Talbot pour l'équation de Schrödinger non linéaire cubique. Des simulations numériques pour l'évolution à partir d'un filament carré ont également été réalisées dans [144]. Enfin, l'existence et l'unicité d'une solution régulière de (5.2) dont la donnée initiale est un certain type de ligne brisée a été prouvée dans [19].

Vers l'équation de Schrödinger. Il existe une transformation remarquable, due à Hasimoto [124], permettant de donner une nouvelle forme à l'équation du flot par courbure binormale. En supposant que χ est une solution assez régulière de (5.2) dont la courbure ne s'annule pas, Hasimoto remarque que la **fonction filament** définie par

$$\psi(t, s) = c(t, s) \exp\left(i \int_0^s \tau(t, y) dy\right), \quad (5.5)$$

vérifie l'équation de Schrödinger non linéaire cubique

$$i\partial_t\psi + \partial_{ss}\psi + \frac{\psi}{2}(|\psi|^2 - A(t)) = 0,$$

où $A(t)$ est définie explicitement en fonction de $c(t, 0)$ et $\tau(t, 0)$. Donc, en posant $\Psi = \psi \exp\left(\frac{i}{2} \int_0^t A\right)$, on est ramené à l'équation de Schrödinger cubique classique

$$i\partial_t\Psi + \partial_{ss}\Psi + \frac{1}{2}\Psi|\Psi|^2 = 0.$$

Cette correspondance formelle est à la source de l'analyse de Banica et Vega, via une reformulation systématique des problématiques étudiées pour le flot binormal (existence, stabilité) en des

problématiques analogues pour l'équation de Schrödinger (existence, stabilité, complétude asymptotique). À noter que la transformation de Hasimoto transforme l'équation (5.3) en l'équation de Hirota

$$i\partial_t\psi + \partial_{ss}\psi + \frac{1}{2}\psi|\psi|^2 - i\alpha\partial_{sss}\psi + \frac{3}{2}|\psi|^2\partial_s\psi = 0,$$

qui est en lien avec l'équation de Korteweg-de Vries modifiée.

Un autre passage célèbre entre le domaine de la mécanique des fluides et celui des équations dispersives a été révélé par Madelung [172]. Le point de départ est l'équation de Gross-Pitaevskii qui régit la dynamique des fluides quantiques :

$$i\partial_t\psi + \frac{1}{2}\Delta\psi + \psi(1 - |\psi|^2) = 0, \quad \psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, \quad d \in \{2, 3\}. \quad (5.6)$$

La transformation de Madelung associe à une solution ψ la densité $\rho = |\psi|^2$ et le vecteur $v = \nabla \arg(\psi)$. Alors les variables ρ et v satisfont à un système d'Euler compressible avec pression quantique :

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \\ \partial_tv + (v \cdot \nabla)v + \nabla(1 - \rho) = \nabla \left(\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\rho}} \right). \end{cases} \quad (5.7)$$

Ce système est appelé **forme hydrodynamique** de (5.6), voir à ce sujet l'article de revue de Carles, Danchin et Saut [56]. La transformation de Hasimoto peut donc être vue comme la transformation inverse à celle de Madelung, en posant $\rho = c^2$ et $v = 2\tau$.

Formellement, pour des solutions de (5.6) dont le module $|\psi|$ est proche de un, (5.7) donne l'équation d'Euler incompressible. Or, c'est à partir de cette dernière qu'est obtenue l'équation du flot par courbure binormale. Et en effet, il est conjecturé que le flot binormal soit un modèle limite pertinent dans certains régimes asymptotiques de l'équation de Gross-Pitaevskii⁶ favorisant l'émergence de structures tourbillonnaires singulières dans un fluide quantique. Cette conjecture a été prouvée par Jerrard [141] dans le cas du cercle. Le cas de plusieurs cercles concentriques a été traité par Jerrard et Smets [145] ; il faut alors tenir compte de termes d'interaction entre les cercles donnant lieu à un mouvement "de saute-mouton" (voir la Section 5.4 ci-après).

Enfin, on aboutit à l'équation de Schrödinger **linéaire** unidimensionnelle par linéarisation de (5.2) autour d'un filament droit (voir [173, Chap 7.1]) : si une solution de (5.2) s'écrit comme une perturbation

$$\chi(t, s) = (x_1 + \varepsilon\psi^1(t, s), x_2 + \varepsilon\psi^2(t, s), s), \quad s \in \mathbb{R},$$

pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ fixé et ε un petit paramètre, alors au premier ordre en ε la fonction à valeurs complexes $\psi = \psi^1 + i\psi^2$ vérifie

$$\partial_t\psi + i\partial_{ss}\psi = 0.$$

Comme on le verra à la Section 5.4, il existe aussi des modèles non linéaires plus précis pour l'évolution de la perturbation ψ .

Interaction de plusieurs filaments presque droits et presque parallèles. Nous nous intéressons à présent à l'interaction d'un nombre fini de filaments **presque droits et presque**

6. Après changement d'échelle en temps et en espace.

parallèles à l'axe e_3 , selon un certain régime asymptotique proposé par Klein, Majda et Damodaran [151]. Dans ce régime, les filaments sont paramétrés par des fonctions $\chi_j^\varepsilon(t, s)$, pour $1 \leq j \leq \ell$, où ε est un petit paramètre et où les χ_j^ε s'écrivent

$$\chi_j^\varepsilon(t, s) = se_3 + \varepsilon^2 \psi_j \left(\frac{t}{\varepsilon^4}, \frac{s}{\varepsilon} \right) + o(\varepsilon^2), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (5.8)$$

où $\psi_j \cdot e_3 = 0$, de sorte que l'on peut supposer $\psi_j \in \mathbb{R}^2$ identifié à \mathbb{C} . Ceci signifie que les filaments sont des perturbations de petite ampleur et petite longueur d'onde du filament droit passant par l'origine et dirigé par e_3 . Dans l'asymptotique $\varepsilon \rightarrow 0$, Klein, Majada et Damodaran obtiennent par des expansions asymptotiques formelles un système d'équations pour les positions des profils ψ_j :

$$i\partial_t \psi_j + \alpha_j \gamma_j \partial_{ss} \psi_j + \sum_{k \neq j} \gamma_k \frac{\psi_j - \psi_k}{|\psi_j - \psi_k|^2} = 0, \quad 1 \leq j \leq \ell. \quad (5.9)$$

Les $\gamma_j \in \mathbb{R}$ sont les circulations des filaments et les $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$ sont des paramètres reliés aux structures des filaments. Ce système combine d'une part l'auto-induction de chaque filament, caractérisée par l'opérateur de Schrödinger libre et provenant du flot binormal (linéarisé) comme on l'a vu ci-dessus, et d'autre part l'interaction avec les autres filaments.

Des solutions particulières de (5.9) sont données par les collections de **filaments droits** $\psi_j(t, s) = z_j(t)$, $s \in \mathbb{R}$, pour lesquelles on retrouve alors le système des tourbillons ponctuels (9) déjà mentionné et dont les propriétés sont étudiées par exemple dans [7, 199] :

$$i\dot{z}_j + \sum_{k \neq j} \gamma_k \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|^2} = 0, \quad 1 \leq j \leq \ell. \quad (5.10)$$

Il est utile pour la suite de rappeler quelques solutions particulières de ce système d'EDO :

- Pour $\ell = 2$, la distance $|z_1(t) - z_2(t)|$ est constante, la dynamique est un mouvement de rotation uniforme autour du centre d'inertie si $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 0$ et un mouvement de translation uniforme dans la direction orthogonale à $z_1 - z_2$ si $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$.
- Pour $\ell = 3$, le système (5.10) est intégrable. Il existe des exemples explicites de collision en temps fini des trois tourbillons, alors nécessairement autosimilaire (voir [179, Chap. 4]).
- Pour $\ell \geq 3$, (5.10) admet des équilibres relatifs, formés par des configurations de ℓ tourbillons de circulations γ identiques placés aux extrémités d'un polygone régulier, en rotation uniforme de vitesse angulaire $\omega = \gamma(\ell - 1)/(2R^2)$, où R est la taille du polygone. On obtient une autre solution en rotation uniforme en ajoutant à cette configuration un point de circulation γ_0 arbitraire au centre du polygone, auquel cas la vitesse angulaire est $\omega = (\gamma(\ell - 1) + 2\gamma_0)/(2R^2)$. En particulier, il est possible d'obtenir une solution stationnaire pour une certaine valeur de γ_0 .

Le système des filaments (5.9) conserve quant à lui les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_j \alpha_j \gamma_j^2 \int_{\mathbb{R}} |\partial_s \psi_j|^2 ds - \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \gamma_j \gamma_k \int_{\mathbb{R}} \ln |\psi_j - \psi_k|^2 ds; \\ I &= \int_{\mathbb{R}} \sum_j \gamma_j |\psi_j|^2 ds; \quad c = \int_{\mathbb{R}} \sum_j \gamma_j \psi_j ds; \\ T &= \sum_{j \neq k} \gamma_j \gamma_k \int_{\mathbb{R}} |\psi_j - \psi_k|^2 ds \quad \text{si } \alpha_j \gamma_j \equiv \alpha \gamma, \forall j. \end{aligned}$$

Nous verrons ci-dessous un cadre de solutions dans lequel ces quantités n'ont pas de sens (même formel), ce qui amène à en considérer une version modifiée. Ce sont les questions d'existence et d'unicité de solutions pour le système (5.9) - et, de façon inévitable, celle de collisions entre les filaments - qui motivent les articles présentés dans ce chapitre. D'emblée, ces questions sont délicates, puisque même le système plus simple d'ODE (9) avec $\ell = 3$ peut produire des collisions.

Les références [205, 13, 173] donnent un aperçu des résultats d'existence et d'unicité pour le système des filaments, que l'on résume ici. Les premiers résultats rigoureux sont obtenus par Klein, Majda et Damodaran dans le cas de deux filaments avec $\alpha_1 = \alpha_2$: le système (5.9) est linéairement stable si et seulement si $\gamma_1\gamma_2 > 0$. De plus, les auteurs présentent des simulations numériques indiquant existence globale si $\gamma_1\gamma_2 > 0$ et collision en temps fini sinon. Nous reviendrons ci-dessous sur la question de la nature de la collision (puis de la reconnection) entre filaments avec circulations de signes opposés.

L'étape suivante est franchie par Kenig, Ponce et Vega [148], qui cherchent des solutions de (5.9) sous la forme perturbative

$$\psi_j(t, s) = z_j(t) + u_j(t, s), \quad \text{avec } u_j \in C(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R})), \quad (5.11)$$

où $\{z_j\}$ est une solution exacte du système (9) sans collision, et où $\|u_j(0, \cdot)\|_{H^1}$ n'est pas trop grande par rapport à la distance entre les tourbillons ponctuels. En vertu de l'injection continue de $H^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$, ceci garantit que les filaments sont initialement bien séparés. Le résultat principal de [148] établit l'existence globale d'une solution de la forme (5.11) lorsque les z_j forment soit une paire quelconque ($\ell = 2$), soit un triangle équilatéral en rotation uniforme ($\ell = 3$).

Un élément important de la preuve est l'énergie de la configuration de filaments $\{\psi_j\}$, solution du système (5.9), par rapport à la configuration de filaments droits $\{z_j\}$, solution du système (5.10) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_R(t) &= \frac{1}{2} \sum_j \alpha_j \gamma_j^2 \int_{\mathbb{R}} |\partial_s \psi_j(t, s)|^2 ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j \neq k} \gamma_j \gamma_k \left(-\ln \left(\frac{|\psi_j(t, s) - \psi_k(t, s)|^2}{|z_j(t) - z_k(t)|^2} \right) + \frac{|\psi_j(t, s) - \psi_k(t, s)|^2}{|z_j(t) - z_k(t)|^2} - 1 \right) ds. \end{aligned} \quad (5.12)$$

L'intérêt de cette quantité, qui a bien un sens avec l'hypothèse (5.11), est qu'elle est coercive. En effet, l'estimation suivante montre que "petite énergie" implique "absence de collisions" :

$$\left\| \frac{|\psi_j(t, \cdot) - \psi_k(t, \cdot)|^2}{|z_j(t) - z_k(t)|^2} - 1 \right\|_{L^\infty}^2 \leq C \mathcal{E}_R(t). \quad (5.13)$$

De plus, si $\{z_j\}$ est un triangle équilatéral, toutes les distances $|z_j - z_k|$ sont égales entre elles et constantes. L'énergie est alors obtenue par combinaison des quantités H , I et T donc est elle-même conservée. La petitesse des perturbations initiales garantit donc l'absence de collisions pour tout temps. Cette méthode ne fonctionne en revanche pas pour un nombre supérieur de points.

Dans un contexte différent, Lions et Majda [167] ont introduit une formulation faible de (5.9) autorisant la possibilité de collision et ont démontré l'existence (sans l'unicité) de solutions correspondantes. Enfin, récemment, des solutions périodiques en temps et en espace (donc non

droites à l'infini) ont été construites par Craig et García-Azpeitia [65] comme bifurcations à partir de solutions particulières (5.10) avec des techniques relevant de la théorie KAM. Voir aussi [97, 66, 96]. Contrairement au cadre étudié par [148], il s'agit de perturbations de filaments droits qui ne sont pas droites à l'infini.

5.2 Existence en temps grand de filaments

Résultats pour quatre filaments. L'article [12] se place dans le contexte de [148]. On y étudie d'abord l'extension du résultat d'existence de perturbations du triangle au cas du carré. Soit donc $\{z_j\}$, avec $j = 1, \dots, 4$, la solution du système des tourbillons ponctuels formée par un carré en rotation uniforme, avec circulations égales à un. Considérons les données initiales $\psi_{j,0} = z_j(0) + u_{j,0}$, où les $u_{j,0}$ appartiennent à $H^1(\mathbb{R})$. Soit

$$\tilde{\mathcal{E}}_0 = \max \left\{ \mathcal{E}_R(0); \|u_{1,0} + u_{3,0}\|_{L^2}^2 + \|u_{2,0} + u_{4,0}\|_{L^2}^2 \right\}.$$

Théorème 33 ([12], Theorem 1.2). *Si $\tilde{\mathcal{E}}_0$ est plus petite qu'une constante universelle, il existe une unique solution du système des filaments sous la forme (5.11) sur $[0, T]$, où*

$$T \geq C \min \left\{ \tilde{\mathcal{E}}_0^{-1/4} \max_{j \neq k} \|u_{j,0} - u_{k,0}\|_{L^2}^{-1/2}; \tilde{\mathcal{E}}_0^{-1/3} \right\}.$$

De plus, si la perturbation est initialement un parallélogramme : $u_{1,0} + u_{3,0} = u_{2,0} + u_{4,0} = 0$, alors la solution est globale.

La preuve exploite les quantités conservées : par le même argument de coercivité que dans [148], la solution existe tant que l'énergie (5.12) ne devient pas trop grande. On définit des quantités renormalisées par rapport à la configuration $\{z_j\}$ qui sont conservées au cours du temps :

$$\begin{aligned} H_R &= \frac{1}{2} \sum_j \alpha_j \gamma_j^2 \int_{\mathbb{R}} |\partial_s \psi_j|^2 ds - \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \gamma_j \gamma_k \int_{\mathbb{R}} \ln \left(\frac{|\psi_j - \psi_k|^2}{|z_j - z_k|^2} \right) ds \\ I_R &= \int_{\mathbb{R}} \sum_j \gamma_j (|\psi_j|^2 - |z_j|^2) ds \\ T_R &= \sum_{j \neq k} \gamma_j \gamma_k \int_{\mathbb{R}} (|\psi_j - \psi_k|^2 - |z_j - z_k|^2) ds. \end{aligned}$$

Dans le cas du carré, des calculs montrent que

$$\mathcal{E}_R(t) = H_R + \frac{1}{2} T_R - I_R + \frac{\|(u_1 + u_3)(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|(u_2 + u_4)(t, \cdot)\|_{L^2}^2}{2}.$$

En particulier, l'énergie est constante dans le cas d'un parallélogramme pour lequel $u_1 + u_3 = u_2 + u_4 = 0$. D'un autre côté, la croissance de $\|(u_1 + u_3)(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|(u_2 + u_4)(t, \cdot)\|_{L^2}^2$ peut être contrôlée par des calculs reposant sur les propriétés de symétrie du carré.

Le cas de $\ell \geq 4$ filaments. Le cas d'un nombre supérieur de filaments impose encore davantage de symétrie pour la collection de filaments. On considère désormais $\{z_j\}$, $j = 1, \dots, \ell$

la solution du système des tourbillons ponctuels formée par un polygone régulier en rotation uniforme de vitesse angulaire ω et centré en l'origine. On cherche alors une collection de filaments presque parallèles $\{\psi_j\}$, solution de (5.9), de la forme $\psi_j(t, s) = z_j(t)\Phi(t, s)$, où $|\Phi|$ est proche de un. Ainsi une telle solution forme aussi un polygone régulier pour tout (t, s) . On observe dans [12] que Φ est solution d'une nouvelle équation de Schrödinger non linéaire :

$$i\partial_t\Phi + \partial_{ss}\Phi + \omega\frac{\Phi}{|\Phi|^2}(1 - |\Phi|^2) = 0, \quad (5.14)$$

dont le Hamiltonien est

$$\mathcal{E}(\Phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\partial_s\Phi|^2 ds + \frac{\omega}{2} \int_{\mathbb{R}} (|\Phi|^2 - 1 - \ln|\Phi|^2) ds.$$

Dans notre contexte, puisque l'on veut $|\Phi| \simeq 1$, on constate que (5.14) se rapproche de l'équation de Gross-Pitaevskii déjà mentionnée

$$i\partial_t\Phi + \partial_{ss}\Phi + \omega\Phi(1 - |\Phi|^2) = 0,$$

avec Hamiltonien donné par

$$\mathcal{E}_{GP}(\Phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\partial_s\Phi|^2 ds + \frac{\omega}{4} \int_{\mathbb{R}} (|\Phi|^2 - 1)^2 ds.$$

Cette comparaison formelle s'avère pertinente et utile dans notre étude des propriétés de (5.14) : problème de Cauchy, solutions remarquables...

Théorème 34 ([12], Theorem 1.1). *Si $\omega > 0$ et si $\mathcal{E}(\Phi_0)$ est assez petite, l'équation (5.14) admet une unique solution telle que $\mathcal{E}(\Phi(t)) = \mathcal{E}(\Phi_0)$ et $\Phi - \Phi_0 \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$. En particulier, si $\Phi_0(s) \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} 1$ alors pour tout temps $\Psi_j(t, s) \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} z_j(t)$, donc les filaments $\{\psi_j\}$ sont parallèles à l'infini.*

La preuve fonctionne par adaptation des arguments de Zhidkov [234] (voir aussi Gérard [99]) pour l'équation de Gross-Pitaevskii. Le principal enjeu est de contrôler la nonlinéarité en vérifiant que $|\Phi|$ reste proche de un. Ceci passe une fois de plus par la propriété de coercivité de l'énergie lorsque $\omega > 0$, qui s'exprime ici par $\| |\Phi(t)|^2 - 1 \|_{L^\infty}^2 \leq C\mathcal{E}(\Phi)$.

D'un autre côté, nous établissons dans [12] l'existence d'ondes progressives pour (5.14), de module proche de un et pour toute vitesse assez proche et inférieure à $\sqrt{2\omega}$. Leur comportement asymptotique est également décrit. Il s'agit des objets analogues aux solitons gris pour l'équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle, et nous nous appuyons sur l'approche de Maris [180] et de Gravejat [110] au sujet de cette dernière. De plus, notre nonlinéarité entre dans le cadre étudié par Lin [166], qui démontre que ces ondes sont orbitalement stables.

5.3 Collisions de filaments

Cette partie concerne la recherche de solution du système des filaments (5.9) amenant à une collision en temps fini $t = t_0$. Par exemple, de telles collisions peuvent être construites à partir de l'équation (5.14) en cherchant une solution avec un point d'annulation. Ceci est aisé lorsque $\omega = 0$.

D'autres exemples simples de collisions de différentes natures sont explicités dans notre deuxième article [13]. Lorsque $\omega \neq 0$, la question est plus délicate. Par changement de variable, cela revient à construire une solution pour une certaine équation dispersive qui explose ponctuellement lorsque $t \rightarrow t_0$. Ce phénomène d'explosion⁷ a été étudié par Bona, Ponce, Saut et Sparber [34] pour une classe d'équations de Schrödinger non linéaires qui ne contient pas (5.14). Merle et Zaag [185] analysent le problème analogue dit de "quenching" pour l'équation de la chaleur non linéaire : ils obtiennent une solution avec un point d'annulation. Dans ce cadre, ce comportement décrit la reconnection d'un vortex avec le bord dans un matériau supraconducteur.

Collisions de paires de filaments. L'instabilité de Crow, analysée pour la première fois dans [70], est un phénomène observé en aéronautique lorsque des paires de filaments droits anti-parallèles (i.e. $\gamma_1 = -\gamma_2$) subissent de petites perturbations périodiques et symétriques. L'instabilité se manifeste par l'amplification des petites perturbations jusqu'à collision des filaments puis reconnection en une chaîne d'anneaux de vorticités.

Les mécanismes de collision voire de reconnection de filaments anti-parallèles (et plus généralement de circulation de signes opposés) sont étudiés numériquement ou expérimentalement dans plusieurs travaux, voir par exemple [74, 151, 235] et les références qui s'y trouvent. En particulier, Klein, Majda et Damodaran obtiennent numériquement différents scénarii de collisions pour une série de valeurs de γ_1/γ_2 et des perturbations initiales symétriques qui sont construites à partir des modes instables du système linéarisé.

De plus, les simulations numériques ainsi que des arguments d'échelle [151, 232] suggèrent que la distance minimale entre deux filaments, au voisinage du temps de collision t_0 (avant et après reconnection), se comporterait comme $|t - t_0|^{1/2}$. Enfin, la collision serait localement de nature autosimilaire.

Dans l'article [10], nous nous intéressons aux collisions pour les paires de filaments anti-parallèles d'un point de vue numérique et théorique. Dans la première situation, les paramètres vérifient $\alpha_1 = -\alpha_2$ (ce cas est toutefois non pertinent physiquement, puisque le modèle de Klein, Majda et Damodaran impose la positivité des paramètres). On obtient alors l'existence d'une solution de (5.9), globalement définie, qui collisionne ponctuellement à un temps arbitrairement prescrit, et qui est initialement une perturbation gaussienne anti-symétrique (c'est-à-dire $\psi_1 = -\overline{\psi_2}$) d'une paire de filaments droits. Dans le cas $\alpha_1 = \alpha_2$, nous effectuons des simulations numériques par un algorithme de splitting. Ces simulations mettent en évidence la survenue de collision ponctuelle en temps fini pour plusieurs classes de données initiales incluant les perturbations gaussiennes considérées dans le cas précédent (ou d'autres perturbations sans imposer nécessairement une hypothèse supplémentaire de symétrie). La figure 5.3 illustre quelques résultats obtenus. Le même type de comportement numérique se produit dans le cas $\alpha_1 = -\alpha_2$, mais nous n'avons pas de preuve mathématique de cela.

Dans la seconde partie de [10], nous démontrons l'existence d'une collision en temps fini pour des filaments anti-parallèles et de **comportement linéaire à l'infini**. Nous recherchons des solutions de (5.9) anti-symétriques (symétriques par rapport à l'axe des ordonnées) : $\psi_1 = -\overline{\psi_2}$. Cette symétrie est préservée pour tout temps par le système (5.9). Ainsi, le problème de collision se ramène à montrer qu'il existe une solution de

$$i\partial_t\psi_1 + \partial_{ss}\psi_1 - \frac{1}{\text{Re}(\psi_1)} = 0 \tag{5.15}$$

7. "Finite-time dispersive blow-up".

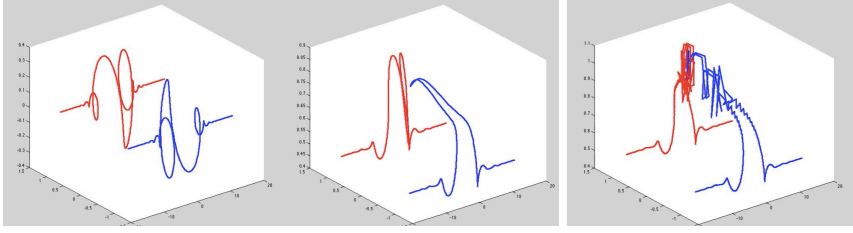


FIGURE 5.1 – Collision dans le cas $\alpha_1 = -\alpha_2 = 1$, $\psi_1(0, \sigma) = 1 - G(\sigma)$, $\psi_2(0, \sigma) = -1 + G(\sigma)$, où $G(\sigma) = e^{-i\Delta}e^{-\sigma^2}$.

qui vérifie $\text{Re}(\psi_1)(t_0, 0) = 0$. Pour simplifier, posons $t_0 = 0$. En suivant l'intuition de Zhakarov [232], nous recherchons une **solution autosimilaire** :

$$\psi_1(t, s) = \sqrt{t} \varphi \left(\frac{s}{\sqrt{t}} \right).$$

Ici, le profil φ est une fonction paire qui vérifie

$$\varphi(x) \sim \alpha|x| \quad \text{lorsque } |x| \rightarrow +\infty, \quad \varphi(0) = 1,$$

pour un certain α complexe tel que $\text{Re}(\alpha) > 0$.

Théorème 35 (D'après [10], Theorem 3.1). *Si la partie réelle de α est supérieure à une certaine constante numérique, il existe une unique solution à (5.15) de la forme ci-dessus dans un certain espace fonctionnel, telle que φ est lipschitzienne sur \mathbb{R} et φ' est continue sur \mathbb{R}^* . De plus,*

$$\text{Re}(\varphi(x)) \geq \frac{1}{2}(1 + \alpha|x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cette solution présente bien une collision à temps $t = 0$ en l'origine, puisque $\text{Re}(\psi_1(t, 0)) = \sqrt{t}$. De plus les bornes inférieures du théorème assurent que seul $(t, s) = (0, 0)$ est point de collision.

La démonstration peut être résumée ainsi : on récrit (5.15) sous la forme d'une équation pour φ qui elle-même se ramène à

$$\begin{cases} \varphi - x\varphi' = f \\ f' = -\frac{1}{2}ixf - \frac{x}{\text{Re}(\varphi)}. \end{cases} \quad (5.16)$$

On considère

$$E = \left\{ w \in C^1(\mathbb{R}), w(0) = w'(0) = 0, w \text{ paire}, \|w\|_{L^\infty} + \||x|^{-1}w'\|_{L^\infty} \leq \frac{\text{Re}(\alpha)}{4} \right\},$$

muni de la distance $d(w_1, w_2) = \|w_1 - w_2\|_{L^\infty} + \||x|^{-1}(w_1' - w_2')\|_{L^\infty}$. Ensuite, on cherche $f \in 1 + E$ comme point fixe associé à la seconde équation de (5.16), où le terme non linéaire s'exprime en fonction de f par résolution de la première ligne :

$$\varphi(f)(x) = 1 + |x| \left(\alpha + \int_{|x|}^{+\infty} \frac{f(y) - 1}{y^2} dy \right).$$

La méthode de point fixe peut être utilisée en observant en particulier que si $f - 1 \in E$ alors

$$\operatorname{Re}(\varphi(f)(x)) \geq 1 + \frac{x\operatorname{Re}(\alpha)}{2} > 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Au passage, on remarque que puisque $\int_0^{+\infty} |f - 1|/y^2 dy \leq \operatorname{Re}(\alpha)/2$, la fonction $\varphi'(f)$ a un saut en $x = 0$ avec $\varphi(f)'(0)^+ = -\varphi(f)'(0)^- = \alpha + \int_0^{+\infty} (f - 1)/y^2 dy \neq 0$. Les filaments obtenus forment donc une singularité de type coin à l'origine.

Collisions de filaments droits à l'infini. Au paragraphe précédent, nous avons construit une solution qui a un comportement linéaire à l'infini. Dans l'article [11], nous revenons au cadre des filaments qui sont des perturbations de filaments droits à l'infini :

$$\psi_j(t, s) \rightarrow z_j(t) \quad \text{lorsque } s \rightarrow \pm\infty, \quad (5.17)$$

où $\{z_j\}$ désigne une solution du système des tourbillons ponctuels (5.10). Nous nous focalisons sur deux cas présentant des simplifications dues aux symétries :

- $\ell = 2$, $\gamma_1 = -\gamma_2$, (z_1, z_2) paire de filaments droits en translation uniforme et (ψ_1, ψ_2) solution de (5.9) vérifiant $\psi_1 = -\overline{\psi_2}$; alors ψ_1 vérifie (5.15).
- $\ell \geq 3$, $\gamma_j = \gamma \forall j$, $\{z_j\}$ polygone régulier en rotation uniforme de vitesse angulaire ω et $\{\psi_j\}$ solution de (5.9) à symétrie polygonale⁸ :

$$\psi_j = e^{i(j-1)\frac{2\pi}{\ell}} \psi_1, \quad \forall 1 \leq j \leq \ell;$$

alors ψ_1 vérifie

$$i\partial_t \psi_1 + \partial_{ss} \psi_1 + \omega \frac{\psi_1}{|\psi_1|^2} = 0. \quad (5.18)$$

Les mêmes arguments que ceux de [10] permettent de construire une solution autosimilaire de (5.18) telle que $\psi_1(0, 0) = 0$ et de comportement linéaire à l'infini.

Afin d'obtenir le comportement (5.17), l'idée de [11] consiste à renormaliser ces solutions autosimilaires à l'infini : par exemple, dans le premier cas, on cherche une solution de la forme

$$\psi_1(t, \sigma) = z_1(t) + \left(\frac{\sqrt{t}\varphi(s/\sqrt{t})}{1 + \chi(\alpha|s|)} - 1 \right) + r(t, s),$$

où $r(0, \cdot) = 0$ et où χ est une fonction de troncature régulière croissante sur \mathbb{R}_+ , fixée, telle que $\chi(t) = 0$ pour $t \in [0, 1]$ et $\chi(t) = t$ pour $t \in [2, +\infty)$. Pour simplifier, on se ramène (ce qui est toujours possible) au cas α réel.

Théorème 36 (D'après [11], Theorem 1.2). *Si $\alpha > 0$ est assez grand, il existe $t^* \in (0, 1)$ et une unique solution à (5.15) (respectivement à (5.18)) de la forme ci-dessus sur $(0, t^*]$, où $r \in C([0, t^*], H^1(\mathbb{R}))$ appartient à un certain espace fonctionnel impliquant que $\|r(t)\|_{L^\infty(I)} < \sqrt{t}/4$, avec $I = (-\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\alpha})$ intervalle centré en zéro.*

8. Cette symétrie est préservée au cours du temps pour (5.9).

Grâce aux estimations explicites pour φ du Théorème 35, on peut même établir que la solution ainsi trouvée vérifie $\operatorname{Re}(\psi_1(t, s)) \geq C(\sqrt{t} + \alpha|s|)$ si $\alpha|s| \leq 1/2$ et $\operatorname{Re}(\psi_1(t, s)) \geq C > 0$ sinon.

Le Théorème 36 se démontre avec une méthode de point fixe dans un certain espace X pour l'équation

$$i\partial_t r + \partial_{ss} r = a(r) + b, \quad (5.19)$$

où b est un terme source explicite et où

$$a(r)(t, s) = \frac{1}{\operatorname{Re}\left(r + \frac{\sqrt{t}\varphi(s/\sqrt{t})}{1+\alpha|s|}\right)} - 1 - \frac{1}{1+\alpha|s|} \frac{1}{\operatorname{Re}(\sqrt{t}\varphi(s/\sqrt{t}))}.$$

Notons que $a(r)(t, \cdot)$ tend vers zéro à l'infini avec des estimations explicites, et même $a(r)(t, \cdot)$ appartient à $H^1(\mathbb{R})$. Pour un paramètre $0 < \gamma < 1/4$ à déterminer, on introduit l'espace

$$X = \left\{ r \in C([0, t^*], H^1(\mathbb{R})) \mid \|r\|_X \leq \frac{1}{8} \right\},$$

avec

$$\|r\|_X = \sup_{t \in (0, t^*)} \left(\frac{\|r\|_{L^\infty((0, t), L^2)}}{t^{3/4}} + \frac{\|\partial_s r\|_{L^\infty((0, t), L^2)}}{t^\gamma} + \frac{\|r\|_{L^\infty((0, t) \times I)}}{t^{1/2}} \right).$$

Notons qu'un élément de X vérifie en particulier des estimations dans $L^\infty(I)$ et dans $L^\infty(\mathbb{R} \setminus I)$ qui sont intéressantes pour notre problème. Le crux dans la méthode de point fixe est une estimation de Strichartz localisée :

Lemme 37 ([11], Lemma 2.1). *On a pour $F \in L^1_{\text{loc}}((0, t^*) \times \mathbb{R})$*

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t e^{i(t-\tau)\partial_{ss}} F(\tau, s) d\tau \right\|_X \\ & \leq Ct^{-\frac{3}{4}} \|F\|_{L^1((0, t), L^2)} + Ct^{-\gamma} \left(\|\partial_s F\|_{L^{\frac{4}{3}}((0, t), L^1(I))} + \|\partial_s F\|_{L^1((0, t), L^2(\mathbb{R} \setminus I))} \right) \\ & + Ct^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \|F(\tau, \cdot)\|_{L^1(\frac{-1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau + Ct^{-\frac{1}{2}} \int_0^t (\alpha^{\frac{3}{2}} \|F(\tau, \cdot)\|_{L^2} + \alpha^{\frac{1}{2}} \|\partial_s F(\tau, \cdot)\|_{L^2}) (t-\tau)^{\frac{1}{2}} d\tau. \end{aligned}$$

Appliqué successivement à $F = a(r)$, $F = b$, $F = a(r_1) - a(r_2)$, ce lemme implique finalement la propriété de contraction si α est assez grand et t^* assez petit, et la conclusion s'ensuit.

5.4 Perspectives

En plus de celle de la persistance des structures filamenteuses au cours du temps, de nombreuses questions liées à l'interaction de plusieurs filaments restent en suspens. L'une d'entre elles serait par exemple de résoudre le système (5.9) avec $\ell = 3$ pour une perturbation quelconque de n'importe quelle solution du système des points vortex, en utilisant les propriétés d'intégrabilité de ce dernier lorsque $\ell = 3$.

Dans [10], nous avons obtenu un profil de collision qui a un saut en l'origine ; ainsi, la solution construite admet une singularité de type coin pour tout temps précédant l'instant de collision. Ceci n'est pas en accord avec les observations numériques ou expérimentales, qui prédisent plutôt un comportement régulier pour les courbes des filaments avant la collision. Rappelons aussi le

comportement des solutions autosimilaires (5.4) du flot par courbure binormale, régulières à temps non nul. Nous souhaiterions donc construire une collision en temps fini pour les filaments avec une régularité conforme aux observations. Peut-être conviendrait-il dans ce cas de comprendre comment (et s'il est nécessaire de) modifier le système de Klein, Majda et Damodaran au voisinage d'une collision. En effet, l'obtention de ce système est basée sur l'hypothèse que la distance entre les filaments est grande devant la taille de la perturbation, voir (5.8), qui n'est donc plus valable si deux filaments se rencontrent.

Une autre perspective concerne un travail en cours avec T. Alazard et V. Banica, à propos d'un modèle introduit par Zhakarov [233] pour la dynamique d'un filament infini de faible intensité au voisinage d'un filament droit, stationnaire, de forte intensité $\gamma \in \mathbb{R}$. Ce modèle concerne des filaments qui peuvent se paramétrer sous la forme $s \mapsto (\psi(t, s), s)$ pour tout temps. Le faible filament n'étant pas considéré comme perturbation d'un filament droit, on conserve cette fois la partie non linéaire du flot binormal, ce qui donne :

$$i\partial_t\psi + \partial_s \left(\frac{\partial_s\psi}{\sqrt{1 + |\partial_s\psi|^2}} \right) - \frac{\gamma}{\psi} = 0.$$

Il s'agit d'une équation hamiltonienne, avec

$$\mathcal{E}(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{2|\partial_s\psi|^2}{\sqrt{1 + |\partial_s\psi|^2}} + \gamma(-\ln|\psi|^2 + |\psi|^2 - 1) \right) ds,$$

pour laquelle il est intéressant d'étudier les principales propriétés d'existence, d'unicité, de collision. Une première étape inévitable sera de mieux comprendre le comportement de cette équation (à commencer par le problème de Cauchy) lorsque $\gamma = 0$.

Dans ce chapitre, nous avons principalement considéré l'interaction de filaments infinis et presque droits ; il est également naturel de s'intéresser à l'interaction de filaments presque annulaires (c'est-à-dire des perturbations des ronds de fumée décrits plus haut comme solutions exactes du flot par courbure binormale). Pour des filaments exactement annulaires et concentriques, la dynamique a été obtenue de façon rigoureuse dans le cas d'un seul anneau et de façon formelle pour plusieurs anneaux par Marchioro et Negrini [176] : les positions des anneaux sont repérées, après une remise à l'échelle convenable, par des points $z_j(t)$ qui satisfont au système d'équations différentielles ordinaires

$$\dot{z}_j = \sum_{k \neq j} \gamma_k \frac{(z_j - z_k)^\perp}{|z_j - z_k|^2} + C\gamma_j e_3, \quad 1 \leq j \leq \ell,$$

où e_3 dirige l'axe le long duquel les anneaux se propagent. Ce système ressemble au système des tourbillons ponctuels, à ceci près qu'il implique un terme supplémentaire de translation le long de l'axe qui provient de la courbure des filaments. La dynamique associée est appelée sautemouton. Avec P. Gravejat et D. Smets, nous avons tenté de démontrer que si le tourbillon est initialement concentré sur un nombre fini d'anneaux concentriques et possède des propriétés de symétrie, alors la solution de l'équation d'Euler axisymétrique satisfait la même propriété pour tout temps et les anneaux se propagent bien selon un système comme ci-dessus. Le problème analogue pour les filaments annulaires dans les **superfluides**, dont l'évolution est décrite par l'équation de Gross-Pitaevskii, a été récemment résolu par Jerrard et Smets [145].

Chapitre 6

Parois de Néel en micromagnétisme

Sommaire

6.1	Introduction	87
6.2	Formation des parois de Néel : étude stationnaire	91
6.3	Étude dynamique	92
6.4	Perspectives	95

Résumé

Ce dernier chapitre est issu de l'article [64] avec R. Côte et R. Ignat. Nous y considérons un certain régime asymptotique d'énergie pour un matériau ferromagnétique mince en deux dimensions. Ce régime favorise la formation de couches de transition appelées parois de Néel. D'une part, nous établissons la compacité des aimantations dans ce régime, en caractérisant les possibles valeurs d'adhérence, et nous montrons l'optimalité des parois de Néel. D'autre part, nous étudions le problème dépendant du temps c'est-à-dire l'asymptotique de l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert dans ce régime.

6.1 Introduction

Un modèle bidimensionnel pour les films minces. Nous considérons des matériaux ferromagnétiques, dont le comportement physique peut être décrit de manière satisfaisante par la **fonction aimantation**, une fonction dépendant du temps et à valeurs dans \mathbb{S}^2 (voir Brown [50]). Plus précisément, nous nous intéressons à des films ferromagnétiques **ultra minces** et de section transverse bidimensionnelle Ω . Cette section est supposée infinie dans une direction et périodique dans l'autre : $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, avec $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Nous noterons dans la suite l'aimantation $m = (m', m_3) : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$, avec $m' = (m_1, m_2)$. Afin de forcer un phénomène de transition, on supposera que l'aimantation connecte deux états

distincts :

$$m(x_1, x_2) = \begin{cases} m_{-\infty} & \text{pour } x_1 \leq -1, \\ m_{+\infty} & \text{pour } x_1 \geq 1, \end{cases} \quad \text{où } m_{\pm\infty} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1 - m_{1,\infty}^2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Notre étude a pour objet le comportement asymptotique d'une certaine énergie libre, dont les minimiseurs décrivent les configurations physiquement admissibles du matériau. Pour notre modèle de film ultra mince et en l'absence d'anisotropie et de champ magnétique extérieur, cette énergie prend la forme suivante (voir par exemple [78, 152]) :

$$E_{\varepsilon,\delta}(m) = \int_{\Omega} \left(|\nabla m|^2 + \frac{1}{\delta} |h(m')|^2 + \frac{m_3^2}{\varepsilon^2} \right) dx, \quad (6.2)$$

où ε et δ sont des petits paramètres reliés aux caractéristiques physiques du matériau, destinés à tendre vers zéro. Dans cette expression, le premier terme est appelé énergie d'échange, il pénalise les variations de l'aimantation et tend à créer un champ d'aimantations parallèles. Les deux autres termes sont des termes d'énergie démagnétisante. Ils sont liés aux champs magnétiques créés par les charges volumiques à l'intérieur du matériau (pour le second terme) et par les charges surfaciques du matériau (pour le troisième terme). En particulier, le champ démagnétisant $h(m')$ est déterminé à partir de l'équation de Maxwell stationnaire et sa norme quadratique est comparable à la norme homogène $\dot{H}^{-1/2}$ de $\operatorname{div} m'$ (voir (6.6) ci-dessous). Ainsi, dans la limite où ε et δ tendent vers zéro, les deux termes d'énergie démagnétisante pénalisent la divergence de m' et la troisième composante de l'aimantation.

Asymptotiquement, l'aimantation tend à se comporter de sorte à satisfaire ces contraintes simultanément et sous la contrainte non convexe $|m| = 1$. Selon le régime considéré, différentes structures singulières peuvent dominer dans la compétition entre les termes de l'énergie : on observe ainsi l'émergence de parois de Néel ou de vortex micromagnétiques (appelés parois de Bloch dans le contexte du micromagnétisme). On en expose ci-dessous les principales caractéristiques et comparons les énergies qui leur correspondent, en renvoyant à l'article de DeSimone, Kohn, Müller et Otto [79] pour plus de détails.

Parois de Néel. Il s'agit de zones de transition rapide de l'aimantation, observées spécifiquement dans les films minces. Les parois de Néel connectent ainsi deux directions de l'aimantation par une rotation planaire de l'aimantation, incluse dans le plan perpendiculaire à la paroi (c'est-à-dire dans la section transverse du film mince). Mathématiquement, pour le cas \mathbb{S}^1 , ces couches de transitions sont décrites par une aimantation $m = (m_1, m_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ qui minimise l'énergie avec la contrainte au bord (6.1) :

$$E_{\delta}(m) = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{dm}{dx_1} \right|^2 dx_1 + \frac{1}{2\delta} \int_{\mathbb{R}} \left| \left| \frac{d}{dx_1} \right|^{1/2} m_1 \right|^2 dx_1.$$

À paramètre δ fixé, le comportement du minimiseur est bien connu, d'après [181, 182, 133]. Il s'agit d'un objet à deux échelles : un petit cœur à variation rapide, de taille $|x_1| = O(\delta)$ (à correction près par un terme d'ordre inférieur), et deux queues à décroissance logarithmique, de taille $|x_1| = O(1)$. L'énergie correspondante¹ admet l'expansion suivante :

$$E_{\delta}(\text{Paroi de Néel}) = \frac{\pi(1 - m_{1,\infty})^2 + o(1)}{2\delta |\ln \delta|} \quad \text{lorsque } \delta \rightarrow 0,$$

1. Par unité de longueur.

voir par exemple [79, 133]. Lorsque δ tend vers zéro, ces aimantations convergent vers une application constante par morceaux appelée paroi de Néel droite :

$$m^*(x_1, x_2) = \begin{cases} m_{-\infty} & \text{pour } x_1 < x_1^*, \\ m_{+\infty} & \text{pour } x_1 > x_1^*, \end{cases} \quad \text{pour un certain } x_1^* \in [-1, 1]. \quad (6.3)$$

Comme on le montrera au Théorème 40 ci-dessous, les parois de Néel droites sont bien, pour le cas \mathbb{S}^2 , les uniques minimiseurs asymptotiques pour l'énergie $\delta |\ln \delta| E_\delta$ avec les conditions de bord considérées dans ce chapitre.

L'étude des concaténations de parois de Néel est plus récente. En dimension un, Ignat et Moser [135] ont déterminé l'expansion asymptotique aux ordres supérieurs de l'énergie pour des configurations de plusieurs parois centrées en des points prescrits. Dans les articles ultérieurs [136, 137], l'existence de minimiseurs à degré prescrit supérieur à deux a été démontrée. Comme attendu, ces minimiseurs présentent bien une allure de multi-parois de Néel.

Les calculs de [135] permettent notamment d'identifier une quantité décrivant l'interaction entre les parois, appelée **énergie renormalisée**. Il est attendu d'une part que la minimisation de cette énergie puisse renseigner sur les configurations d'équilibre du matériau. D'autre part, que l'évolution des parois au cours du temps puisse être décrite comme asymptotique du flot de l'équation de Landau-Lishitz-Gilbert associée à cette énergie. Des problématiques similaires ont été examinées dans le cadre des configurations de vortex pour l'énergie de Ginzburg-Landau, qui présente certaines analogies avec l'énergie considérée ici (voir par exemple [29] pour le cas stationnaire, et [215, 30, 146] pour l'étude dynamique dans le cas du flot gradient).

Vortex micromagnétiques (parois de Bloch). Une paroi de Bloch correspond à une zone de transition permettant à l'aimantation de connecter deux états constants par une rotation dans le plan de la paroi (c'est-à-dire perpendiculaire à la section). Ainsi, l'aimantation pointe hors de la section Ω du matériau. Le prototype d'un vortex micromagnétique est donné par un champ de vecteur défini sur la boule unité $\Omega = B$ de \mathbb{R}^2 , qui satisfait à

$$\operatorname{div} m' = 0 \text{ dans } B \quad \text{et} \quad m'(x) = x^\perp \text{ dans } \partial B,$$

et qui minimise l'énergie (6.2)²

$$E_\delta(m) = \int_B |\nabla m|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_B m_3^2 dx.$$

Au vu des conditions de bord, l'aimantation vérifie $\deg(m', \partial\Omega) = 1$. Ceci implique que m' s'annule dans Ω donc $|m_3| = 1$: l'aimantation est orthogonale à la section du film. De plus, des arguments d'échelle indiquent que la zone où $|m'|$ est petite est de rayon d'ordre ε . On remarque que l'énergie E_δ contrôle l'énergie de Ginzburg-Landau :

$$E_\delta(m) \geq \int_B \mathbf{e}_\varepsilon(m') dx, \quad \text{où } \mathbf{e}_\varepsilon(m') = |\nabla m'|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - |m'|^2)^2,$$

puisque $|\nabla(m', m_3)|^2 \geq |\nabla m'|^2$ et $m_3^2 \geq m_3^4 = (1 - |m'|^2)^2$. L'étude du comportement des minimiseurs de l'énergie de Ginzburg-Landau, qui exhibent des singularités appelées points vortex, a été menée dans le livre de Bethuel, Brezis and Hélein [29]. De l'analogie avec le contexte de

2. Dans notre modèle, le paramètre $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ est relié à δ via le régime (6.4) ci-dessous.

Ginzburg-Landau résulte en particulier que le coût énergétique d'une paroi de Bloch admet le développement asymptotique (voir [132])

$$E_\delta(\text{Vortex}) = 2\pi |\ln \varepsilon| + O(1), \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Régime considéré. On se focalise ici sur un régime d'énergie compatible avec les parois de Néel mais excluant les vortex : $\delta \rightarrow 0$ et $\varepsilon = \varepsilon(\delta) \rightarrow 0$ avec

$$\frac{1}{\delta |\ln \delta|} = o(|\ln \varepsilon|). \quad (6.4)$$

En outre, les familles d'aimantations $\{m_\delta\}_{0 < \delta < 1}$ considérées vérifient l'estimation

$$\sup_{0 < \delta < 1} \delta |\ln \delta| E_\delta(m_\delta) < +\infty, \quad (6.5)$$

où on pose pour simplifier $E_\delta = E_{\varepsilon(\delta), \delta}$, énergie définie dans (6.2). Il découle en particulier de (6.4) que la taille ε du cœur d'un vortex est très petite devant la taille δ d'une paroi de Néel.

À propos du champ démagnétisant. On donne ici la définition mathématique du champ démagnétisant $h(m')$. Il s'agit de l'application appartenant à $L^2(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ telle que

$$h(m') = \nabla_{x,z} U(m'), \quad (6.6)$$

où $U(m')$ est l'unique solution dans $H^1(\Omega \times \mathbb{R})$ de l'équation de Maxwell stationnaire au sens faible :

$$\begin{cases} -\Delta_{x,z} U(m') = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}, \\ \partial_z U(m') = \operatorname{div} m' & \text{sur } \Omega \times \{0\}, \\ U(m') = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Cela revient à dire que $h(m')$ est la projection de Helmholtz de la mesure $m' \mathcal{H}^2 \llcorner \Omega \times \{0\}$ sur les champs de gradients dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R})$. Le système précédent se résout explicitement, par exemple à l'aide de la transformée de Fourier \mathcal{F} généralisée aux fonctions définies sur $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, voir [64, 134], et l'on trouve

$$\mathcal{F}(U(m')(\cdot, z))(\xi) = -\frac{1}{2|\xi|} e^{-|\xi||z|} \mathcal{F}(\operatorname{div} m')(\xi), \quad \xi \neq 0, \quad z \in \mathbb{R}.$$

En particulier, par application de Fourier-Plancherel il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times \mathbb{R}} |h(m')|^2 dx dz &= \int_{\Omega \times \mathbb{R}} |\nabla_{x,z} U(m')|^2 dx dz = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{|\xi|} |\mathcal{F}(\operatorname{div} m')(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla\|^{1/2} \mathcal{H}(m')\|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla\|^{-1/2} \operatorname{div} m'\|^2 dx, \end{aligned} \quad (6.7)$$

où $\mathcal{H}(m') = -\nabla(-\Delta)^{-1} \operatorname{div} m'$.

6.2 Formation des parois de Néel : étude stationnaire

Compacité des parois de Néel. Notre premier résultat confirme que le régime énergétique (6.4) - (6.5) est bien favorable à la formation des parois de Néel sous les contraintes au bord choisies. Il s'agit d'un résultat de compacité pour les aimantations, dans la suite des résultats de compacité d'Ignat et Otto [138, 139].

Théorème 38 ([64], Theorem 1). *Considérons le régime (6.4). Soit $m_\delta \in H_{\text{loc}}^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ vérifiant (6.1) et (6.5). Alors $\{m_\delta\}$ est relativement compacte dans $L_{\text{loc}}^2(\Omega)$, et toute valeur d'adhérence $m : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$ vérifie (6.1). De plus, on a $|m'| = 1$ (donc $m_3 = 0$), et enfin $\text{div } m' = 0$ au sens des distributions dans Ω .*

Le principal argument de la preuve repose sur la possibilité d'approcher les aimantations m_δ par des aimantations M_δ à valeurs dans \mathbb{S}^1 , dont l'énergie satisfait aux mêmes bornes. On est alors en mesure d'appliquer le résultat d'Ignat et Otto [138, Theo 4] dans le cas \mathbb{S}^1 qui prouve la compacité de M_δ et par conséquent de m_δ . Cette approximation est l'objet du résultat suivant, qui procure des estimations explicites en fonction de l'énergie :

Théorème 39 ([64], Theorem 5). *Soit $\beta \in (0, 1)$. Soit $m_\delta = (m'_\delta, m_{3,\delta}) \in H_{\text{loc}}^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ satisfaisant à (6.1) et (6.5) dans le régime (6.4). Alors il existe $M_\delta \in H_{\text{loc}}^1(\Omega, \mathbb{S}^1)$ vérifiant (6.1) et les estimations :*

1. $\|M_\delta - m'_\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\varepsilon^{2\beta} E_\delta(m_\delta)$ et $\|\nabla M_\delta - \nabla m'_\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq CE_\delta(m_\delta)$,
2. $\left\| |\nabla|^{-1/2} \text{div } M_\delta - |\nabla|^{-1/2} \text{div } m'_\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\varepsilon^\beta E_\delta(m_\delta)$,
3. $E_\delta(M_\delta) \leq E_\delta(m_\delta) \left(1 + C \left(\frac{1}{\delta |\ln \delta| |\ln \varepsilon|} \right)^{\frac{1}{6}-} \right)$, où $1/6-$ désigne un nombre fixé positif et inférieur strictement à $1/6$.
4. Pour tout carré $T(x, r_\delta)$ centré en x de côté $2r_\delta$ avec $\varepsilon^\beta / r_\delta \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$, on a

$$\int_{T(x, r_\delta - 2\varepsilon^\beta)} |\nabla M_\delta|^2 dx \leq \left(1 + C \left(\frac{1}{\delta |\ln \delta| |\ln \varepsilon|} \right) \right) \int_{T(x, r)} \left(|\nabla m'_\delta|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} m_{3,\delta}^2 \right) dx.$$

À noter que le régime (6.4) garantit bien que $(\delta |\ln \delta| |\ln \varepsilon|)^{-1} \rightarrow 0$ lorsque $\delta \rightarrow 0$. La démonstration du Théorème 39 utilise la minimisation de l'énergie de Ginzburg-Landau sur des petites cellules carrées de longueur ε^β partitionnant le domaine avec condition au bord donnée par la valeur de m'_δ au bord. Ces cellules sont choisies de sorte que $|m'_\delta| \geq 1/2$ à l'intérieur et que le degré topologique de m'_δ par rapport au contour soit nul. Ceci est possible dans le régime d'énergie (6.4)-(6.5), qui exclut justement la présence de singularités de type vortex. Une fois le minimiseur ainsi trouvé sur chaque cellule, il suffit de le normaliser, de recoller les morceaux, et de vérifier que l'application M_δ ainsi obtenue vérifie les estimations voulues.

Optimalité des parois de Néel. Notre second résultat met en scène la notion de densité d'énergie associée à une aimantation :

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}} \zeta d\mu_\delta(m) := \frac{2}{\pi} \delta |\ln \delta| \left(\int_{\Omega} \zeta(x, 0) \left(|\nabla m|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} m_3^2 \right) dx + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega \times \mathbb{R}} \zeta |h(m')|^2 dx dz \right),$$

pour toute fonction $\zeta = \zeta(x, z) \in C_c(\Omega \times \mathbb{R})$, où $h(m')$ est le champ démagnétisant correspondant à m' via (6.6).

Nous établissons l'optimalité énergétique des parois de Néel parmi les aimantations qui vérifient les conditions de bord (6.1), ainsi que la concentration asymptotique des densités d'énergie le long d'une ligne dans la direction x_2 , correspondant à la ligne de saut de la paroi de Néel droite. Le même résultat avait été obtenu par Ignat et Otto [138] pour le cas des aimantations à valeurs dans \mathbb{S}^1 . De façon similaire au paragraphe précédent, c'est le résultat d'approximation du Théorème 39 qui permet d'aboutir au cas \mathbb{S}^2 .

Théorème 40 ([64], Theorem 2). *On considère le régime (6.4). Soit $m_\delta \in H_{\text{loc}}^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ vérifiant (6.1) et la borne*

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \delta |\ln \delta| E_\delta(m_\delta) \leq \frac{\pi}{2} (1 - m_{1,\infty})^2.$$

Il existe une sous-suite $\delta_n \rightarrow 0$ telle que $m_{\delta_n} \rightarrow m^$ dans $L_{\text{loc}}^2(\Omega)$, où m^* est une paroi de Néel droite donnée par (6.3). De plus, on a la convergence des mesures $\mu_{\delta_n}(m_{\delta_n})$ sur la ligne de saut de m^* :*

$$\mu_{\delta_n}(m_{\delta_n}) \rightharpoonup (1 - m_{1,\infty})^2 \mathcal{H}^1 \llcorner \{x_1^*\} \times \mathbb{T} \times \{0\} \quad \text{faiblement } * \text{ dans } \mathcal{M}(\Omega \times \mathbb{R}).$$

Comme corollaire immédiat, nous obtenons une borne inférieure pour l'énergie des suites d'aimantations vérifiant les conditions de bord (6.1) :

Corollaire 41 ([64], Corollary 1). *Soit $m_\delta \in H_{\text{loc}}^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ une suite d'aimantations vérifiant (6.1) dans le régime (6.4). Alors*

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \delta |\ln \delta| E_\delta(m_\delta) \geq \frac{\pi}{2} (1 - m_{1,\infty})^2.$$

6.3 Étude dynamique

L'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert. On étudie à présent l'évolution du matériau au cours du temps dans l'optique de déterminer le mouvement des parois de Néel. Selon les modèles proposés par [102, 161], la dynamique de l'aimantation est régie par l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert

$$\partial_t m + \alpha m \times \partial_t m + \beta m \times \nabla E_\delta(m) = 0, \quad (6.8)$$

où $\nabla E_\delta(m)$ est le gradient de la fonctionnelle d'énergie (6.2) définie ci-dessus :

$$\nabla E_\delta(m) = -2\Delta m + \left(\frac{1}{\delta} (-\Delta)^{1/2} \mathcal{H}(m'), \frac{2m_3}{\varepsilon^2} \right). \quad (6.9)$$

Les paramètres $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ dépendent de δ et ε selon une loi qui sera précisée plus tard. Puisque $|m| = 1$, (6.8) se réécrit sous la forme

$$\partial_t m = \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha^2} m \times (m \times \nabla E_\delta(m)) - \frac{\beta}{1 + \alpha^2} m \times \nabla E_\delta(m). \quad (6.10)$$

Le coefficient α est appelé facteur d'amortissement de Gilbert et est responsable de la forme dissipative de l'équation (6.8). Lorsque $\alpha = 0$, on obtient en revanche une équation hamiltonienne.

Si de plus l'on considère plutôt l'énergie de Dirichlet

$$E(m) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla m|^2 dx,$$

cette équation n'est autre que l'équation des applications de Schrödinger

$$\partial_t m = -\beta m \times \Delta m,$$

déjà mentionnée au Chapitre 5 et qui a fait l'objet d'une imposante recherche.

Dans notre travail, nous nous focalisons sur une forme plus générale de l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert, récemment étudiée dans [154] :

$$\partial_t m + \alpha m \times \partial_t m + \beta m \times \nabla E_{\delta}(m) + (v \cdot \nabla)m = m \times (v \cdot \nabla)m, \quad (6.11)$$

où v représente la direction d'un courant polarisé appliqué. Incluant des termes supplémentaires de type transport, cette équation n'a plus la propriété de dissiper l'énergie.

Puisque le flot de (6.11) ne préserve a priori pas la condition (6.1), on va **imposer** cette condition pour tout temps en cherchant des solutions $m = m(t, x) : [0, +\infty) \times \omega \rightarrow \mathbb{S}^2$, définies sur le domaine réduit $\omega := (-1, 1) \times \mathbb{T}$. Le fait de considérer le domaine borné ω plutôt que Ω requiert d'étendre la définition des opérateurs différentiels mis en jeu dans l'énergie (6.2). On renvoie à [64] pour les détails, et l'on note $|\nabla|^{-2s} := [(-\Delta)^{-1}]^s$ pour $s = 1/2$ et pour $s = 1/4$. Ce faisant, l'énergie à considérer désormais est

$$E_{\delta}(m) = \int_{\omega} \left(|\nabla m|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} m_3^2 \right) dx + \frac{1}{2\delta} \int_{\omega} ||\nabla|^{-1/2} \operatorname{div} m'|^2 dx.$$

Elle est bien définie pour toute application $m \in H^1(\omega; \mathbb{S}^2)$ et possède les mêmes propriétés de compacité et d'optimalité que l'énergie définie dans (6.2), en particulier les Théorèmes 38 et 40 demeurent valides. Alors

$$\nabla E_{\delta}(m) = -2\Delta m + \left(\frac{1}{\delta} \mathcal{P}(m'), \frac{2m_3}{\varepsilon^2} \right),$$

où on a défini³ l'opérateur \mathcal{P} sur $H^1(\omega; \mathbb{R}^2)$ par $\mathcal{P}(m') := -\nabla|\nabla|^{-1} \operatorname{div} m'$. De la sorte, comme dans (6.7), on a

$$\int_{\omega} ||\nabla|^{-1/2} \mathcal{P}(m')|^2 dx = \int_{\omega} ||\nabla|^{-1/2} \operatorname{div} m'|^2 dx.$$

Problème de Cauchy. Notre analyse débute par l'étude de l'existence de solutions faibles pour (6.11), à δ et ε fixés, qui sont d'énergie finie pour tout $t \geq 0$. Rappelons que l'énergie peut croître au cours du temps, contrairement à ce qui se produit pour l'équation dissipative (6.8).

Définition 42. On dit que m est solution faible globale de (6.11) si

$$m \in L_{\text{loc}}^{\infty}([0, +\infty), H^1(\omega; \mathbb{S}^2)) \cap \dot{H}_{\text{loc}}^1([0, +\infty), L^2(\omega; \mathbb{S}^2)) \quad (6.12)$$

et si m satisfait (6.11) au sens des distributions.

3. En observant que le terme non local de (6.9) peut être écrit comme $(-\Delta)^{1/2} \mathcal{H}(m') = -\nabla|\nabla|^{-1} \operatorname{div} m'$.

On observe que la régularité de (6.12) permet bien de définir tous les termes de (6.11) au sens des distributions, puisque $m \times \Delta m = \sum_j \partial_j(m \times \partial_j m)$. En revanche, une partie de ces termes ne sont pas bornés dans la limite $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$.

Le problème de Cauchy pour (6.8) avec énergie de Dirichlet a été étudié par Alouges et Soyeur [2] (solutions faibles en dimension trois dans l'espace d'énergie en domaine borné), par De Laire et Gutiérrez dans [115] (existence de solutions autosimilaires sur toute la droite réelle, régulières à temps strictement positif) et dans [116] (existence et unicité pour des données initiales bornées et de petite norme BMO dans tout \mathbb{R}^N en toute dimension N), par Melcher [184] et par Lin, Lai et Wang [165] (existence et unicité de solutions en dimension $N \geq 3$ avec hypothèse de petitesse pour la donnée initiale dans $L^N(\mathbb{R}^N)$ et dans l'espace de Morrey $M^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ respectivement). L'équation plus générale (6.11) avec énergie de type Ginzburg-Landau a été traitée par Kurzke, Melcher et Moser [154] (existence de solutions faibles globales, régulières en dehors de singularités isolées en espace-temps ("bubbles")).

Pour l'équation (6.11) avec l'énergie (6.2), nous avons établi le résultat suivant, à notre connaissance le premier traitant le terme non local dans l'énergie.

Théorème 43 ([64], Theorem 3). *Soient $m^0 \in H^1(\omega; \mathbb{S}^2)$ et $v \in L^\infty([0, +\infty) \times \omega; \mathbb{R}^2)$ donnés. Il existe une solution faible globale de (6.11) avec donnée initiale m^0 et qui vérifie la condition de bord pour tout $t \geq 0$:*

$$m(t, x_1, x_2) = m^0(x_1, x_2) \quad \text{si } x_1 = \pm 1 \text{ et pour tout } x_2 \in \mathbb{T}.$$

De plus, on a pour tout $t \geq 0$,

$$E_\delta(m(t, \cdot)) + \frac{\alpha}{2\beta} \int_0^t \|\partial_t m(\tau, \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2 d\tau \leq E_\delta(m^0) \exp\left(\frac{4}{\alpha\beta} \int_0^t \|v(\tau, \cdot)\|_{L^\infty(\omega)}^2 d\tau\right). \quad (6.13)$$

Notons que lorsque $v = 0$ on retrouve bien une inégalité de dissipation, qui est une égalité pour les solutions régulières de (6.8). Nous démontrons le Théorème 43 en annexe de [64] via une discrétisation en espace s'inspirant de la méthode de Alouges et Soyeur [2] qui permet de tenir compte de la spécificité de nos contraintes de bord. Par rapport au problème de Cauchy pour (6.11) ou (6.8), le terme non local dans l'énergie apporte de nouvelles difficultés.

Régime considéré. La dynamique limite pour (6.8) a été obtenue par Capella, Melcher et Otto [52, Theo 1] (voir aussi Melcher [183]) dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ avec δ fixé. Il s'agit d'une équation des ondes amortie. D'un autre côté, la dynamique des points vortex dans un autre régime asymptotique ($\varepsilon \rightarrow 0$ et $\delta = +\infty$) pour l'équation plus générale (6.11) **en l'absence du terme non local de l'énergie** a été établie par Kurzke, Melcher et Moser [154]. Dans ces deux articles, le paramètre $\delta > 0$ est **soit fixé, soit grand**. En particulier, ces régimes procurent une borne H^1 uniforme sur les solutions via une borne sur l'énergie. Ceci n'est bien sûr pas le cas dans notre régime (6.4). C'est pourquoi, dans notre analyse de l'asymptotique de (6.11), nous devons procéder à une étude fine du comportement qualitatif de l'aimantation, qui est présentée aux Théorèmes 38 et 40.

On explicite ci-dessous nos hypothèses sur le régime asymptotique, le choix des paramètres et les données initiales.

(A1) Les données initiales $m_\delta^0 \in H^1(\omega; \mathbb{S}^2)$ vérifient (6.1) et $\sup_{\delta \rightarrow 0} \delta |\ln \delta| E_\delta(m_\delta^0) < +\infty$.

(A2) Le régime (6.4) a lieu lorsque $\delta \rightarrow 0$, et les paramètres sont donnés par $\alpha = \nu\varepsilon$, $\beta = \lambda\varepsilon$, où $\nu > 0$ est fixé et où $\lambda = o\left(\sqrt{\delta|\ln\delta|}\right)$.

(A3) Le courant de polarisation vérifie $\|v\|_{L^\infty([0,+\infty)\times\omega)}^2 \leq \alpha\beta$. En particulier, v tend vers zéro dans $L^\infty([0,+\infty)\times\omega)$ lorsque $\delta \rightarrow 0$.

En vertu de (6.13), l'hypothèse (A2) implique que la borne (A1) reste vraie à $t \geq 0$, la borne n'étant pas uniforme en temps. Le Théorème 38 assure donc que pour tout $t > 0$, la suite d'aimantations $\{m_\delta(t, \cdot)\}$ admet une valeur d'adhérence $(m'(t, \cdot), 0)$ dans $L^2(\omega)$. A priori, cette sous-suite dépend du temps, mais nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 44 ([64], Theorem 4). *Soit $\{m_\delta^0\}$ appartenant à $H^1(\omega; \mathbb{S}^2)$. Supposons les hypothèses (A1), (A2) et (A3) satisfaites. Soit $\{m_\delta\}$ une famille correspondante de solutions faibles de (6.11), données par le Théorème 43. Alors il existe une sous-suite $\delta_n \rightarrow 0$ telle que $m_{\delta_n}(t, \cdot)$ converge vers $m(t, \cdot)$ dans $L^2(\omega)$ pour tout $t \in [0, +\infty)$ lorsque $n \rightarrow \infty$, où $m = (m', 0) \in C([0, +\infty), L^2(\omega; \mathbb{S}^2))$ vérifie*

$$|m'(t, \cdot)| = 1, \quad \operatorname{div} m'(t, \cdot) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\omega), \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

De plus, la limite des aimantations est stationnaire : $\partial_t m' = 0$ au sens des distributions dans $[0, +\infty) \times \omega$.

Comme conséquence immédiate des Théorèmes 40 et 44, nous déduisons que l'aimantation limite reste une paroi de Néel droite lorsque les données initiales sont bien préparées :

Corollaire 45. *Sous les hypothèses du Théorème 44, supposons de plus que*

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \delta |\ln \delta| E_\delta(m_\delta^0) \leq \frac{\pi}{2} (1 - m_{1,\infty})^2.$$

Soit $x_1^* \in [-1, 1]$ tel que $m_{\delta_n}^0 \rightarrow m^*$ dans $L^2(\omega)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, où m^* est une paroi de Néel droite définie par (6.3). Alors $m_{\delta_n}(t, \cdot) \rightarrow m^*$ dans $L^2(\omega)$ pour tout $t \geq 0$.

La preuve du Théorème 44 repose d'une part sur le résultat de compacité du Théorème 38, et d'autre part sur (6.11) afin de trouver une borne pour les dérivées temporelles :

$$\|\partial_t m_\delta\|_{L^2([0,T], H^{-1}(\omega))} \leq C_T \left(\frac{\lambda}{\delta |\ln \delta|} \right)^{1/2} = o(1) \quad \text{lorsque } \delta \rightarrow 0, \quad \forall T > 0. \quad (6.14)$$

L'estimation (6.14) provient du choix des paramètres dans (A2) mais n'est pas directement fournie par l'estimation d'énergie.

6.4 Perspectives

Une première perspective naturelle consiste à comprendre quel ajustement de paramètres α et β permettrait d'obtenir une dynamique asymptotique non triviale. Comme on l'a mentionné, le fait que δ soit fixé dans [52] permet d'obtenir des bornes uniformes permettant de passer à la limite. Ici, au vu de (6.14), un choix possible serait de prendre $\lambda = O(\sqrt{\delta|\ln\delta|})$ plutôt que le régime (A2). En notant que $\{\lambda m_{3,\delta}/\varepsilon\}$ est bornée dans $L_{\text{loc}}^\infty(L^2(\omega))$, on obtiendrait comme équation limite $\partial_t m' = -w$ avec w une valeur d'adhérence de cette suite. Mais une nouvelle

difficulté serait alors de déterminer w , ce qui passerait par une analyse approfondie du système d'équations issu de (6.11) pour les composantes m'_δ et $m_{3,\delta}$.

Une autre perspective, à plus long terme, est celle de la dynamique limite de plusieurs parois. Ignat et Moser [135] ont calculé une expansion asymptotique de l'énergie minimale des configurations de plusieurs parois de Néel stationnaires en dimension un. Ils ont ainsi identifié une énergie d'interaction entre les parois, qui, par analogie avec la dynamique des vortex dans l'équation de Ginzburg-Landau, pourrait donner une indication de la dynamique limite des parois de Néel selon le flot de (6.11).

Chapitre 7

Annexe : quelques outils

Sommaire

7.1 Propriétés de la formule de Biot-Savart	97
7.2 Inégalités en équations cinétiques	98

7.1 Propriétés de la formule de Biot-Savart

Dans cette section, on rassemble quelques propriétés bien connues pour le noyau de Biot-Savart

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}, \quad \text{où } (x_1, x_2)^\perp = (-x_2, x_1).$$

Les énoncés et démonstrations se trouvent par exemple dans les ouvrages [173] ou [179].

Lemme 46. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on a $K(x) \cdot x = 0$, $K(x) = -K(-x)$.*

Lemme 47. *On a $|K(x)| \leq 1/|x|$ pour $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. De plus,*

$$|K(x) - K(y)| = \frac{1}{2\pi} \frac{|x - y|}{|x||y|}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

En particulier, $K \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $1 \leq p < 2$ et $K \in L^q(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega)$ pour tout $2 < q \leq +\infty$, pour tout ouvert Ω contenant l'origine.

Lemme 48. *Il existe une constante C telle que pour tout $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |K(x - z) - K(y - z)| |f(z)| dz \leq C(\|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^\infty})\varphi(|x - y|), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2,$$

où φ est la fonction continue, positive et croissante définie par

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \tau(1 - \ln(\tau)) & \text{si } 0 \leq \tau < 1 \\ 1 & \text{si } \tau \geq 1. \end{cases}$$

On en déduit les propriétés de régularité suivantes.

Proposition 49. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $g = K * f$:*

$$\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^{1/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{1/2}.$$

De plus, g est log-Lipschitz :

$$|g(x) - g(y)| \leq C (\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}, \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}) \varphi(|x - y|), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2,$$

où φ est la fonction continue, positive et croissante définie au Lemme 48.

Proposition 50. *Soit $p > 2$. Pour $f \in L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^2)$ et $g = K * f$, on a*

$$\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C(p) \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{1-p'/2} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^{p'/2},$$

où $C(p)$ dépend uniquement de p et où p' est l'exposant conjugué de p . De plus,

$$|g(x) - g(y)| \leq C (\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}) |x - y|^{1-2/p}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Remarque 6. Une estimation similaire a encore lieu pour $f \in L^p \cap L^q(\mathbb{R}^2)$ avec $p > 2$ et $q < 2$.

On rappelle enfin l'inégalité de Calderón-Zygmund :

Proposition 51. *Soient $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $g = K * f$. Pour tout $1 < p < +\infty$, on a*

$$\|\nabla g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C(p) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)},$$

où $C(p)$ est une constante dépendant de p . Lorsque $p \geq 2$, on peut supposer que $C(p) = Cp$, où C est une constante universelle.

En pratique, dans ce mémoire nous avons principalement $f = \omega(t, \cdot)$ et $g = K * \omega(t, \cdot) = v(t, \cdot)$, où $\omega \in L^\infty([0, T], L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^2))$ et $2 < p \leq +\infty$. Les estimations ci-dessus sont donc uniformes en temps.

7.2 Inégalités en équations cinétiques

Dans cette section, $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ est positive, et on note

$$\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, v) dv, \quad E(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x - y}{|x - y|^d} \rho(y) dy.$$

Proposition 52. *Supposons que f est à support compact en vitesse i.e. il existe $P > 0$ tel que $f(x, v) \neq 0$ implique $|v| \leq P$. Alors $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} P^d$ pour une constante $C > 0$.*

Les estimations ci-dessous sont standardes en théorie cinétique et sont par exemple rappelées dans [168]. Nous avons l'analogie des Propositions 49 et 50 :

Proposition 53. *Il existe une constante $C(q, d) > 0$ telle que pour tout $1 \leq q < d$ on a*

$$\|E\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C(q, d) \|\rho\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}^{q/d} \|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^{1-q/d}.$$

Plus généralement, pour tout $1 \leq q < d$ et $d < p \leq +\infty$,

$$\|E\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C(q, d) \|\rho\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}^{1+(\frac{q}{d}-1)\frac{p}{p-q}} \|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{(1-\frac{q}{d})\frac{p}{p-q}}.$$

Enfin, si $\rho \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$|E(x) - E(y)| \leq C(\|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}, \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}) \varphi(|x - y|), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d,$$

où φ est la fonction continue, positive et croissante définie au Lemme 48.

Proposition 54. *On a*

$$\forall k \geq 1, \quad \|\rho\|_{L^{\frac{k+d}{d}}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{L^\infty}^{\frac{k}{k+d}} \left(\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |v|^k f(x, v) dx dv \right)^{\frac{d}{k+d}},$$

où C ne dépend pas de k .

Bibliographie

- [1] E. ACERBI ET N. FUSCO, *An approximation lemma for $W^{1,p}$ functions*, in *Material instabilities in continuum mechanics* (Edinburgh, 1985–1986), Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1988, p. 1–5. 71
- [2] F. ALOUGES ET A. SOYEUR, *On global weak solutions for Landau-Lifshitz equations : Existence and nonuniqueness*, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 18 (1992), p. 1071–1084. 94
- [3] L. AMBROSIO, *Transport equation and Cauchy problem for non-smooth vector fields*, in *Calculus of variations and nonlinear partial differential equations*, vol. 1927 de *Lecture Notes in Math.*, Springer, Berlin, 2008, p. 1–41. 12, 13, 29, 30, 36
- [4] L. AMBROSIO, *Well posedness of ODE's and continuity equations with nonsmooth vector fields, and applications*, *Rev. Mat. Complut.*, 30 (2017), p. 427–450. 29
- [5] L. AMBROSIO, N. GIGLI ET G. SAVARE, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Birkhäuser Verlag, 2005. 44
- [6] L. AMBROSIO ET D. TREVISAN, *Lecture notes on the DiPerna-Lions theory in abstract measure spaces*, *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math.* (6), 26 (2017), p. 729–766. 12, 29
- [7] H. AREF, *Integrable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows*, *Annual Review of Fluid Mechanics* 15, (1983), p 345–389. 78
- [8] R. J. ARMS ET F. R. HAMA, *Localized-induction concept on a curved vortex and motion of an elliptic vortex ring*, *Phys. Fluids*, 8 (1965), p 553—560. 75
- [9] A. A. ARSEN'EV, *Global existence of a weak solution of Vlasov's system of equations*, *Sov. Math., Dokl.*, 14 (1973), p. 1763–1765. 40
- [10] V. BANICA, E. FAOU ET E. MIOT, *Collisions of vortex filament pairs*, *J. Nonlinear Sci.*, 24 (2014), p. 1263–1284. 7, 19, 20, 21, 73, 82, 83, 84, 85
- [11] V. BANICA, E. FAOU ET E. MIOT, *Collisions of almost parallel vortex filaments*, *Comm. Pure Appl. Math.*, (2017), p. 378–405. 7, 19, 20, 73, 84, 85
- [12] V. BANICA ET E. MIOT, *Global existence and collisions for symmetric configurations of nearly parallel vortex filaments*, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire*, 29 (2012), p. 813–832. 8, 19, 20, 73, 80, 81
- [13] ———, *Evolution, interaction and collisions of vortex filaments*, *Differ. Integral Equ.*, 26 (2013), p. 355–388. 7, 19, 20, 73, 79, 82
- [14] V. BANICA ET L. VEGA, *On the Dirac delta as initial condition for nonlinear Schrödinger equations*, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire*, 25 (2008), p. 697–711. 76

- [15] ———, *On the stability of a singular vortex dynamics*, Commun. Math. Phys., 286 (2009), p. 593–627. 76
- [16] V. BANICA ET L. VEGA, *Scattering for 1D cubic NLS and singular vortex dynamics*, J. Eur. Math. Soc., 14 (2012), p. 209–253. 76
- [17] ———, *Stability of the self-similar dynamics of a vortex filament*, Arch. Ration. Mech. Anal., 210 (2013), p. 673–712. 76
- [18] ———, *Évolution par le flot binormal de courbes à un coin*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 48 (2015), p. 1423–1455. 76
- [19] V. BANICA ET L. VEGA, *Evolution of polygonal lines by the binormal flow*, arXiv preprint arXiv :1807.06948, (2018). 76
- [20] C. BARDOS ET P. DEGOND, *Global existence for the Vlasov-Poisson equation in 3 space variables with small initial data*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, 2 (1985), p. 101–118. 41
- [21] C. BARDOS, F. DI PLINIO ET R. TEMAM, *The Euler equations in planar nonsmooth convex domains*, J. Math. Anal. Appl., 407 (1) (2013), p. 69–89. 11, 27
- [22] J. BARRÉ, D. CHIRON, T. GOUDON ET N. MASMOUDI, *From Vlasov–Poisson and Vlasov–Poisson–Fokker–Planck Systems to Incompressible Euler Equations : the case with finite charge*, J. Ec. polytech. Math., 2 (2015), p 247–296. 58
- [23] G. K. BATCHELOR, *An Introduction to the Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1967. 75
- [24] J. BATT, *Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics*, J. Differ. Equations, 25 (1977), p. 342–364. 54
- [25] D. BENEDETTO, E. CAGLIOTI ET C. MARCHIORO, *On the motion of a vortex ring with a sharply concentrated vorticity*, Math. Methods Appl. Sci., 23 (2000), p. 147–168. 74
- [26] F. BERNICOT ET T. HMIDI, *On the global well-posedness for Euler equations with unbounded vorticity*, Dyn. Partial Differ. Equ., 12 (2015), p. 127–155. 26
- [27] F. BERNICOT ET S. KERAANI, *Sur l’existence globale pour l’équation d’Euler bidimensionnelle avec des données dans un espace élargi de type Yudovich*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 47 (2014), p. 559–576. 25, 26
- [28] R. BETCHOV, *On the curvature and torsion of an isolated vortex filament*, J. Fluid Mech., 22 (1965), p 471–479. 75
- [29] F. BETHUEL, H. BRÉZIS ET F. HÉLEIN, *Ginzburg-Landau vortices*, vol. 13, Boston, MA : Birkhäuser, 1994. 89
- [30] F. BETHUEL, G. ORLANDI ET D. SMETS, *Dynamics of multiple degree Ginzburg-Landau vortices*, Commun. Math. Phys., 272 (2007), p. 229–261. 89
- [31] A. BOHUN, F. BOUCHUT ET G. CRIPPA, *Lagrangian flows for vector fields with anisotropic regularity*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, 33 (2016), p. 1409–1429. 31, 52
- [32] ———, *Lagrangian solutions to the 2D Euler system with L^1 vorticity and infinite energy*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods, 132 (2016), p. 160–172. 25
- [33] ———, *Lagrangian solutions to the Vlasov-Poisson system with L^1 density*, J. Differ. Equations, 260 (2016), p. 3576–3597. 40

- [34] J. L. BONA, G. PONCE, J.-C. SAUT ET C. SPARBER, *Dispersive blow-up for nonlinear Schrödinger equations revisited*, J. Math. Pures Appl. (9), 102 (2014), p. 782–811. 82
- [35] V. BONNAILLIE-NOËL, C. LACAVER ET N. MASMOUDI, *Permeability through a perforated domain for the incompressible 2D Euler equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, 32 (2015), p. 159–182. 28
- [36] M. BORSUK ET V. KONDRATIEV, *Elliptic boundary value problems of second order in piecewise smooth domains*, North-Holland Mathematical Library, 69. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006. 27
- [37] M. BOSTAN, *The Vlasov-Poisson system with strong external magnetic field. Finite Larmor radius regime*, Asymptotic Anal., 61 (2009), p. 91–123. 58
- [38] M. BOSTAN, *Asymptotic behavior for the Vlasov-Poisson equations with strong external magnetic field. Straight magnetic field lines*, HAL preprint hal-01683869, (2018). 58
- [39] M. BOSTAN ET A. FINOT, *The effective Vlasov-Poisson system for the finite Larmor radius regime*, Multiscale Model. Simul., 14 (2016), p. 1238–1275. 58
- [40] M. BOSTAN, A. FINOT ET M. HAURAY, *Le système de Vlasov-Poisson effectif pour les plasmas fortement magnétisés*, C. R., Math., Acad. Sci. Paris, 354 (2016), p. 771–777. 58, 61
- [41] F. BOUCHUT ET G. CRIPPA, *Lagrangian flows for vector fields with gradient given by a singular integral*, J. Hyperbolic Differ. Equ., 10 (2013), p. 235–282. 31
- [42] F. BOUCHUT ET L. DESVILLETES, *On two-dimensional Hamiltonian transport equations with continuous coefficients*, Differ. Integral Equ., 14 (2001), p. 1015–1024. 31
- [43] F. BOUCHUT, F. GOLSE ET M. PULVIRENTI, *Kinetic equations and asymptotic theory*. Ed. by Benoît Perthame and Laurent Desvillettes, Paris : Gauthier-Villars/ Elsevier, 2000. 40
- [44] L. BOUDIN, L. DESVILLETES, C. GRANDMONT ET A. MOUSSA, *Global existence of solutions for the coupled Vlasov and Navier-Stokes equations*, Differential Integral Equations, 22 (2009), p. 1247–1271. 18, 68
- [45] L. BOUDIN, C. GRANDMONT, A. LORZ ET A. MOUSSA, *Modelling and Numerics for Respiratory Aerosols*, Commun. Comput. Phys., 18 (2015), p. 723–756. 68
- [46] L. BOUDIN, C. GRANDMONT ET A. MOUSSA, *Global existence of solutions to the incompressible Navier–Stokes–Vlasov equations in a time-dependent domain*, J. Differential Equations, 262 (2017), p. 1317–1340. 18, 68
- [47] F. BOYER ET P. FABRIE, *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*, vol. 183 de Applied Mathematical Sciences, Springer, New York, 2013. 68
- [48] Y. BRENIER, *Convergence of the Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler equations*, Commun. Partial Differ. Equations, 25 (2000), p. 737–754. 17, 57, 58
- [49] Y. BRENIER ET E. GRENIER, *Limite singulière du système de Vlasov-Poisson dans le régime de quasi neutralité : Le cas indépendant du temps*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, 318 (1994), p. 121–124. 57
- [50] W. BROWN, *Theory of the approach to magnetic saturation*, Phys. Rev., 44 (1940), p 736–743. 87

- [51] A. J. CALLEGARI ET L. TING, *Motion of a curved vortex filament with decaying vortical core and axial velocity*, SIAM J. Appl. Math., 35 (1978), p. 148–175. 75
- [52] A. CAPELLA, C. MELCHER ET F. OTTO, *Effective dynamics in ferromagnetic thin films and the motion of Néel walls*, Nonlinearity, 20 (2007), p. 2519–2537. 94, 95
- [53] S. CAPRINO, G. CAVALLARO ET C. MARCHIORO, *The Vlasov-Poisson equation in \mathbb{R}^3 with infinite charge and velocities*, J. Hyperbolic Differ. Equ., 15 (2018), p. 407–442. 40
- [54] S. CAPRINO ET C. MARCHIORO, *On the plasma-charge model*, Kinet. Relat. Models, 3 (2010), p. 241–254. 16, 48
- [55] S. CAPRINO, C. MARCHIORO, E. MIOT ET M. PULVIRENTI, *On the attractive plasma-charge system in 2-d*, Commun. Partial Differ. Equations, 37 (2012), p. 1237–1272. 8, 16, 33, 39, 42, 44, 53, 54
- [56] R. CARLES, R. DANCHIN ET J.-C. SAUT, *Madelung, Gross-Pitaevskii and Korteweg*, Nonlinearity, 25 (2012), p. 2843–2873. 77
- [57] F. CASTELLA, *Propagation of space moments in the Vlasov-Poisson equation and further results*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, 16 (1999), p. 503–533. 41
- [58] N. CHAMPAGNAT ET P.-E. JABIN, *Well posedness in any dimension for Hamiltonian flows with non BV force terms*, Commun. Partial Differ. Equations, 35 (2010), p. 786–816. 31
- [59] J.-Y. CHEMIN ET I. GALLAGHER, *On the global wellposedness of the 3-D Navier-Stokes equations with large initial data*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 39 (2006), p. 679–698. 70
- [60] J.-Y. CHEMIN ET N. LERNER, *Flot de champs de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier-Stokes*, J. Differential Equations, 121 (1995), p. 314–328. 70
- [61] Z. CHEN ET X. ZHANG, *Global existence to the Vlasov-Poisson system and propagation of moments without assumption of finite kinetic energy*, Commun. Math. Phys., 343 (2016), p. 851–879. 40, 49
- [62] Y.-P. CHOI ET B. KWON, *Global well-posedness and large-time behavior for the inhomogeneous Vlasov-Navier-Stokes equations*, Nonlinearity, 28 (2015), p. 3309. 68
- [63] A. J. CHORIN, *The evolution of a turbulent vortex*, Commun. Math. Phys., 83 (1982), p. 517–535. 75
- [64] R. CÔTE, R. IGNAT ET E. MIOT, *A thin-film limit in the Landau-Lifshitz-Gilbert equation relevant for the formation of Néel walls*, J. Fixed Point Theory Appl., 15 (2014), p. 241–272. 7, 21, 87, 90, 91, 92, 93, 94, 95
- [65] W. CRAIG ET C. GARCÍA-AZPEITIA, *Standing waves of fixed period for $n + 1$ vortex filaments*, arXiv preprint arXiv :1903.08302, (2019). 80
- [66] W. CRAIG, C. GARCÍA-AZPEITIA ET C.-R. YANG, *Standing waves in near-parallel vortex filaments*, Commun. Math. Phys., 350 (2017), p. 175–203. 80
- [67] G. CRIPPA ET C. DE LELLIS, *Estimates and regularity results for the DiPerna-Lions flow*, J. Reine Angew. Math., 616 (2008), p. 15–46. 13, 29, 31, 33, 34, 52
- [68] G. CRIPPA, S. LIGABUE ET C. SAFFIRIO, *Lagrangian solutions to the Vlasov-Poisson system with a point charge*, Kinet. Relat. Models, 11 (2018), p. 1277–1299. 31, 52
- [69] G. CRIPPA, M. C. LOPES FILHO, E. MIOT ET H. J. NUSSENZVEIG LOPES, *Flows of vector fields with point singularities and the vortex-wave system*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 36 (2016), p. 2405–2417. 7, 12, 13, 17, 23, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 52, 54

- [70] S. C. CROW, *Stability theory for a pair of trailing vortices*, AIAA Journal, 8 (1970), p. 2172–2179. 82
- [71] L. DA RIOS, *Sul moto di un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque*, Palermo Rend., 22 (1906), p. 117–135. 19, 74
- [72] F. DE LA HOZ ET L. VEGA, *Vortex filament equation for a regular polygon*, Nonlinearity, 27 (2014), p. 3031–3057. 76
- [73] ———, *On the relationship between the one-corner problem and the M -corner problem for the vortex filament equation*, J. Nonlinear Sci., 28 (2018), p. 2275–2327. 76
- [74] A. T. A. M. DE WAELE ET R. G. K. M. AARTS, *Route to vortex reconnection*, Phys. Rev. Lett., 72 (1994), p. 482–485. 82
- [75] P. DEGOND ET F. FILBET, *On the asymptotic limit of the three dimensional Vlasov-Poisson system for large magnetic field : formal derivation*, J. Stat. Phys., 165 (2016), p. 765–784. 58
- [76] J. DEKEYSER ET J. V. SCHAFTINGEN, *Vortex motion for the lake equations*, preprint, (2019). 74
- [77] J.-M. DELORT, *Existence de nappes de tourbillon en dimension deux*, J. Am. Math. Soc., 4 (1991), p. 553–586. 10, 17, 24, 25, 29, 59, 60, 61
- [78] A. DESIMONE, R. V. KOHN, S. MÜLLER ET F. OTTO, *A reduced theory for thin-film micromagnetics*, Commun. Pure Appl. Math., 55 (2002), p. 1408–1460. 88
- [79] ———, *Recent analytical developments in micromagnetics*, in The science of hysteresis. Vol. II. Physical modeling, micromagnetics, and magnetization dynamics, Amsterdam : Elsevier/Academic Press, 2006, p. 269–381. 88, 89
- [80] L. DESVILLETES, E. MIOT ET C. SAFFIRIO, *Polynomial propagation of moments and global existence for a Vlasov-Poisson system with a point charge*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, 32 (2015), p. 373–400. 7, 16, 39, 50, 51, 52, 54
- [81] F. DI PLINIO ET R. TEMAM, *Grisvard’s Shift theorem near L^∞ and Yudovich theory on polygonal domains*, SIAM J. Math. Anal., 47 (1) (2015), p. 159–178. 11, 27
- [82] R. DIPERNA ET P.-L. LIONS, *Solutions globales d’équations du type Vlasov-Poisson. (Global solutions of Vlasov-Poisson type equations)*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, 307 (1988), p. 655–658. 40
- [83] R.-J. DIPERNA ET P.-L. LIONS, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math., 98 (1989), p. 511–547. 12, 13, 29, 30, 31, 32
- [84] R. J. DIPERNA ET A. J. MAJDA, *Concentrations in regularizations for 2-D incompressible flow*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 40 (1987), p. 301–345. 10, 24
- [85] ———, *Weak solutions of 2D Euler equations with initial vorticity in L^1L^1* , J. Diff. Eqs., 103 (1993), p. 323–337. 10, 24
- [86] R. L. DOBRUSHIN, *Vlasov equations*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., 13 (1979), p. 115–123. 16, 45, 47
- [87] J. DOLBEAULT, J. FERNÁNDEZ ET O. SÁNCHEZ, *Stability for the gravitational Vlasov-Poisson system in dimension two*, Commun. Partial Differ. Equations, 31 (2006), p. 1425–1449. 43

- [88] D. J. ET C. E. KENIG, *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., 130 (1995), p 161–219. 27
- [89] L. EULER, *Principes généraux du mouvement des fluides*, Mémoires de l'Académie royale des sciences et des belles lettres de Berlin, 1757. 23
- [90] F. FILBET ET L. M. RODRIGUES, *Asymptotically stable particle-in-cell methods for the Vlasov-Poisson system with a strong external magnetic field*, SIAM J. Numer. Anal., 54 (2016), p. 1120–1146. 58
- [91] ———, *Asymptotically preserving particle-in-cell methods for inhomogeneous strongly magnetized plasmas*, SIAM J. Numer. Anal., 55 (2017), p. 2416–2443. 58
- [92] F. FILBET ET L. M. RODRIGUES, *Asymptotics of the three dimensional Vlasov equation in the large magnetic field limit*, arXiv preprint arxiv :1811.09087, (2018). 58
- [93] E. FRÉNOT ET E. SONNENDRÜCKER, *Homogenization of the Vlasov equation and of the Vlasov-Poisson system with a strong external magnetic field*, Asymptotic Anal., 18 (1998), p. 193–213. 58
- [94] ———, *The finite Larmor radius approximation*, SIAM J. Math. Anal., 32 (2001), p. 1227–1247. 58
- [95] Y. FUKUMOTO ET T. MIYAZAKI, *Three dimensional distortions at a vortex filament with axial velocity*, J. Fluid Mech., 222 (1991), p. 396–416. 75
- [96] C. GARCÍA-AZPEITIA, *Standing waves in a counter-rotating vortex filament pair*, J. Differ. Equations, 264 (2018), p. 3918–3932. 80
- [97] C. GARCÍA-AZPEITIA ET J. IZE, *Bifurcation of periodic solutions from a ring configuration in the vortex and filament problems*, J. Differ. Equations, 252 (2012), p. 5662–5678. 80
- [98] I. GASSER, P.-E. JABIN ET B. PERTHAME, *Regularity and propagation of moments in some nonlinear Vlasov systems*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics, 130 (2000), p 1259–1273. 41
- [99] P. GÉRARD, *The Cauchy problem for the Gross–Pitaevskii equation*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, 23 (2006), p. 765–779. 81
- [100] D. GERARD–VARET ET C. LACAVER, *The two-dimensional Euler equations on singular domains*, Arch. Ration. Mech. Anal., 1 (2013), p. 131–170. 11, 26
- [101] P. GHENDRIH, M. HAURAY ET A. NOURI, *Derivation of a gyrokinetic model. Existence and uniqueness of specific stationary solution.*, Kinet. Relat. Models, 2 (2009), p. 707–725. 18, 58, 61
- [102] T. L. GILBERT, *A lagrangian formulation of gyrokinetic equation of the magnetization field*, Phys. Rev., 100 (1955), p 1243. 21, 92
- [103] O. GLASS, D. HAN-KWAN ET A. MOUSSA, *The Vlasov-Navier-Stokes system in a 2D pipe : existence and stability of regular equilibria*, arXiv preprint arXiv :1612.06808, (2016). 68
- [104] O. GLASS, C. LACAVER ET F. SUEUR, *On the motion of a small body immersed in a two-dimensional incompressible perfect fluid*, Bull. Soc. Math. France, 142 (2014), p. 489–536. 13
- [105] ———, *On the motion of a small light body immersed in a two dimensional incompressible perfect fluid with vorticity*, Comm. Math. Phys., 341 (2016), p. 1015–1065. 13, 34
- [106] R. T. GLASSEY, *The Cauchy problem in kinetic theory*, Philadelphia, PA : SIAM, 1996. 40

- [107] F. GOLSE ET L. SAINT-RAYMOND, *The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field*, J. Math. Pures Appl. (9), 78 (1999), p. 791–817. 17, 18, 58, 59, 61, 64, 65
- [108] F. GOLSE ET L. SAINT-RAYMOND, *The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field in quasineutral regime*, Math. Models Methods Appl. Sci., 13 (2003), p. 661–714. 57
- [109] T. GOUDON, P.-E. JABIN ET A. VASSEUR, *Hydrodynamic limit for the Vlasov-Navier-Stokes equations. I : Light particles regime. II : Fine particles regime*, Indiana Univ. Math. J., 53 (2004), p. 1495–1515. 68
- [110] P. GRAVEJAT, *Limit at infinity and nonexistence results for sonic travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation*, Differ. Integral Equ., 17 (2004), p. 1213–1232. 81
- [111] E. GRENIER, *Defect measures of the Vlasov-Poisson system in the quasineutral regime*, Commun. Partial Differ. Equations, 20 (1995), p. 1189–1215. 57
- [112] E. GRENIER, *Oscillations in quasineutral plasmas*, Commun. Partial Differ. Equations, 21 (1996), p. 363–394. 57
- [113] E. GRENIER, *Pseudo-differential energy estimates of singular perturbations*, Commun. Pure Appl. Math., 50 (1997), p. 821–865. 17
- [114] P. GRISVARD, *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Monographs and Studies in Mathematics, 24. Pitman Advanced Publishing Program. Boston-London-Melbourne : Pitman Publishing Inc. XIV, 410 p. (1985), 1985. 27
- [115] S. GUTIÉRREZ ET A. DE LAIRE, *Self-similar solutions of the one-dimensional Landau-Lifshitz-Gilbert equation*, Nonlinearity, 28 (2015), p. 1307–1350. 94
- [116] ———, *The Cauchy problem for the Landau-Lifshitz-Gilbert equation in BMO and self-similar solutions*, Nonlinearity, 32 (2019), p. 2522–2563. 94
- [117] S. GUTIÉRREZ, J. RIVAS ET L. VEGA, *Formation of singularities and self-similar vortex motion under the localized induction approximation*, Commun. Partial Differ. Equations, 28 (2003), p. 927–968. 76
- [118] D. HAN-KWAN, *The three-dimensional finite Larmor radius approximation*, Asymptotic Anal., 66 (2010), p. 9–33. 58
- [119] D. HAN-KWAN, *Contribution à l'étude mathématique des plasmas fortement magnétisés*, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, tel-00615169, (2011). 58
- [120] D. HAN-KWAN ET M. IACOBELLI, *Quasineutral limit for Vlasov-Poisson via Wasserstein stability estimates in higher dimension*, J. Differ. Equations, 263 (2017), p. 1–25. 57
- [121] D. HAN-KWAN, E. MIOT, A. MOUSSA ET I. MOYANO, *Uniqueness of the solution to the 2D Vlasov-Navier-Stokes system*, Rev. Mat. Iberoam. (à paraître). 7, 18, 67, 68, 69
- [122] D. HAN-KWAN, A. MOUSSA ET I. MOYANO, *Large time behavior of the Vlasov-Navier-Stokes system on the torus*, arXiv preprint arXiv :1902.03864, (2019). 68, 69, 71
- [123] D. HAN-KWAN ET F. ROUSSET, *Limite quasi neutre pour Vlasov-Poisson avec des données stables au sens de Penrose*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 49 (2016), p. 1445–1495. 57
- [124] H. HASIMOTO, *A soliton in a vortex filament*, J. Fluid Mech., 51 (1972), p 477—485. 76
- [125] M. HAURAY, *On two-dimensional Hamiltonian transport equations with \mathbb{L}_{loc}^p coefficients*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, 20 (2003), p. 625–644. 31

- [126] M. HAURAY ET P.-E. JABIN, *Approximation particulière des équations de Vlasov avec noyaux de force singuliers : la propagation du chaos*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 48 (2015), p. 891–940. 45
- [127] M. HAURAY, C. LE BRIS ET P.-L. LIONS, *Deux remarques sur les flots généralisés d'équations différentielles ordinaires*, C. R., Math., Acad. Sci. Paris, 344 (2007), p. 759–764. 31
- [128] M. HAURAY ET A. NOURI, *Well-posedness of a diffusive gyro-kinetic model*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, 28 (2011), p. 529–550. 18, 58, 61
- [129] E. HÖLDER, *Über die unbeschränkte fortsetzbarkeit einer stetigen ebenen bewegung in einer unbegrenzten inkompressiblen flüssigkeit*, Math. Z., 37 (1933), p. 727–738. 10, 24
- [130] T. HOLDING ET E. MIOT, *Uniqueness and stability for the Vlasov-Poisson system with spatial density in Orlicz spaces*, Contemporary Mathematics, Mathematical Analysis in Fluid Mechanics : Selected Recent Results, (2018), p. 145–162. 7, 15, 39, 44, 45, 46, 47
- [131] D. IFTIMIE, M. C. LOPES FILHO ET H. J. NUSSENZVEIG LOPES, *Incompressible flow around a small obstacle and the vanishing viscosity limit*, Commun. Math. Phys., 287 (2009), p. 99–115. 28
- [132] R. IGNAT, *A survey of some new results in ferromagnetic thin films*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, Éc. Polytech., Cent. Math. Laurent Schwartz, Palaiseau, 2007-2008 (2008). 90
- [133] ———, *A Γ -convergence result for Néel walls in micromagnetics*, Calc. Var. Partial Differ. Equ., 36 (2009), p. 285–316. 88, 89
- [134] R. IGNAT ET H. KNÜPFER, *Vortex energy and 360° Néel walls in thin-film micromagnetics*, Commun. Pure Appl. Math., 63 (2010), p. 1677–1724. 90
- [135] R. IGNAT ET R. MOSER, *Interaction energy of domain walls in a nonlocal Ginzburg-Landau type model from micromagnetics*, Arch. Ration. Mech. Anal., 221 (2016), p. 419–485. 89, 96
- [136] ———, *Néel walls with prescribed winding number and how a nonlocal term can change the energy landscape*, J. Differ. Equations, 263 (2017), p. 5846–5901. 89
- [137] ———, *Energy minimisers of prescribed winding number in an \mathbb{S}^1 -valued nonlocal Allen-Cahn type model*, preprint, (2018). 89
- [138] R. IGNAT ET F. OTTO, *A compactness result in thin-film micromagnetics and the optimality of the Néel wall*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 10 (2008), p. 909–956. 21, 91, 92
- [139] ———, *A compactness result for Landau state in thin-film micromagnetics*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, 28 (2011), p. 247–282. 21, 91
- [140] S. IORDANSKIJ, *The Cauchy problem for the kinetic equation of plasma*, Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc., 35 (1964), p. 351–363. 40
- [141] R. L. JERRARD, *Vortex filament dynamics for Gross-Pitaevsky type equations*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5), 1 (2002), p. 733–768. 77
- [142] R. L. JERRARD ET C. SEIS, *On the vortex filament conjecture for Euler flows*, Arch. Ration. Mech. Anal., 224 (2017), p. 135–172. 75
- [143] R. L. JERRARD ET D. SMETS, *À propos des Schrödinger maps de T^1 dans S^2* , Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 45 (2012), p. 637–680. 76

- [144] ———, *On the motion of a curve by its binormal curvature*, J. Eur. Math. Soc., 17 (2015), p. 1487–1515. 76
- [145] ———, *Leapfrogging vortex rings for the three dimensional Gross-Pitaevskii equation*, Ann. PDE, 4 (2018), p. 48. 77, 86
- [146] R. L. JERRARD ET H. M. SONER, *Dynamics of Ginzburg-Landau vortices*, Arch. Ration. Mech. Anal., 142 (1998), p. 99–125. 89
- [147] L. JUN. SZÉKELYHIDI, *Global solutions of the 2D Euler equations, starting with the work of Witold Wolibner*, Roczn. Pol. Tow. Mat., Ser. II, Wiadom. Mat., 48 (2012), p. 257–269. 24
- [148] C. E. KENIG, G. PONCE ET L. VEGA, *On the interaction of nearly parallel vortex filaments*, Commun. Math. Phys., 243 (2003), p. 471–483. 20, 79, 80
- [149] R. KLEIN ET A. J. MAJDA, *Self-stretching of a perturbed vortex filament. I : The asymptotic equation for deviations from a straight line*, Physica D, 49 (1991), p. 323–352. 75
- [150] ———, *Self-stretching of perturbed vortex filaments. II : Structure of solutions*, Physica D, 53 (1991), p. 267–294. 75
- [151] R. KLEIN, A. J. MAJDA ET K. DAMODARAN, *Simplified equations for the interaction of nearly parallel vortex filaments*, J. Fluid Mech., 288 (1995), p. 201–248. 19, 78, 82
- [152] R. V. KOHN ET V. V. SLASTIKOV, *Another thin-film limit of micromagnetics*, Arch. Ration. Mech. Anal., 178 (2005), p. 227–245. 88
- [153] V. A. KOZLOV, V. G. MAZYA ET J. ROSSMANN, *Spectral problems associated with corner singularities of solutions to elliptic equations*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, (2001). 27
- [154] M. KURZKE, C. MELCHER ET R. MOSER, *Vortex motion for the Landau-Lifshitz-Gilbert equation with spin-transfer torque*, SIAM J. Math. Anal., 43 (2011), p. 1099–1121. 93, 94
- [155] C. LACAVE, *Two dimensional incompressible ideal flow around a thin obstacle tending to a curve*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, 26 (2009), p. 1121–1148. 28
- [156] C. LACAVE, *Uniqueness for two-dimensional incompressible ideal flow on singular domains*, SIAM J. Math. Anal., 47 (2015), p. 1615–1664. 14, 27, 28
- [157] C. LACAVE ET E. MIOT, *The vortex-wave system with gyroscopic effects*, Annali della SNS di Pisa, Classe di Scienze (sous presse). 7, 13, 14, 23, 28, 34, 37
- [158] ———, *Uniqueness for the vortex-wave system when the vorticity is initially constant near the point vortex*, SIAM J. Math. Analysis, 41 (2009), p. 1138–1163. 8, 12, 14, 15, 29, 32, 37, 54
- [159] C. LACAVE, E. MIOT ET C. WANG, *Uniqueness for the two-dimensional Euler equations on domains with corners*, Indiana Univ. Math. J., 63 (2014), p. 1725–1756. 7, 10, 11, 23, 27, 28
- [160] H. LAMB, *Hydrodynamics*, Cambridge university press, 1993. 13
- [161] L. D. LANDAU ET E. LIFSHITZ, *On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies*, Phys. Z. Sovietunion, 8 (1935). 21, 92
- [162] D. LAZAROVICI ET P. PICKL, *A mean field limit for the Vlasov-Poisson system*, Arch. Ration. Mech. Anal., 225 (2017), p. 1201–1231. 45

- [163] C. LE BRIS ET P.-L. LIONS, *Renormalized solutions of some transport equations with partially $W^{1,1}$ velocities and applications*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 183 (2004), p. 97–130. 31
- [164] D. LI ET X. ZHANG, *On the 3-D Vlasov-Poisson system with point charges : global solutions with unbounded supports and propagation of velocity-spatial moments*, J. Differ. Equations, 263 (2017), p. 6231–6283. 49, 52
- [165] J. LIN, B. LAI ET C. WANG, *Global well-posedness of the Landau-Lifshitz-Gilbert equation for initial data in Morrey spaces*, Calc. Var. Partial Differ. Equ., 54 (2015), p. 665–692. 94
- [166] Z. LIN, *Stability and instability of traveling solitonic bubbles*, Adv. Differ. Equ., 7 (2002), p. 897–918. 81
- [167] P.-L. LIONS ET A. MAJDA, *Equilibrium statistical theory for nearly parallel vortex filaments*, Commun. Pure Appl. Math., 53 (2000), p. 76–142. 79
- [168] P. L. LIONS ET B. PERTHAME, *Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system*, Invent. Math., 105 (1991), p. 415–430. 15, 16, 41, 42, 43, 46, 51, 52, 68, 98
- [169] G. LOEPER, *Uniqueness of the solution to the Vlasov-Poisson system with bounded density*, J. Math. Pures Appl. (9), 86 (2006), p. 68–79. 15, 19, 41, 42, 45, 46, 47
- [170] M. C. LOPES FILHO, E. MIOT ET H. J. NUSSENZVEIG LOPES, *Existence of a weak solution in L^p to the vortex-wave system*, J. Nonlinear Sci., 21 (2011), p. 685–703. 29, 35
- [171] M. C. LOPES FILHO, E. MIOT ET H. J. NUSSENZVEIG LOPES, *Existence of a weak solution in L^p to the vortex-wave system*, J. Nonlinear Science, 21 (2011), p. 685–703. 8, 12, 31
- [172] E. MADELUNG, *Quantentheorie in Hydrodynamischer Form*, Zeit. F. Physik, 40 (1927), p 322–326. 77
- [173] A. J. MAJDA ET A. L. BERTOZZI, *Vorticity and incompressible flow*, vol. 27 de Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. 10, 24, 25, 73, 74, 75, 77, 79, 97
- [174] C. MARCHIORO, *On the Euler equations with a singular external velocity field*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, p. 61–69 (1991). 14
- [175] C. MARCHIORO, E. MIOT ET M. PULVIRENTI, *The Cauchy problem for the 3-D Vlasov-Poisson system with point charges*, Arch. Ration. Mech. Anal., 201 (2011), p. 1–26. 8, 16, 39, 49, 50
- [176] C. MARCHIORO ET P. NEGRINI, *On a dynamical system related to fluid mechanics*, NoDEA, Nonlinear Differ. Equ. Appl., 6 (1999), p. 473–499. 74, 86
- [177] C. MARCHIORO ET M. PULVIRENTI, *On the vortex-wave system*, in Mechanics, analysis and geometry : 200 years after Lagrange, North-Holland Delta Ser., North-Holland, Amsterdam, 1991, p. 79–95. 11, 12, 29, 32, 36
- [178] C. MARCHIORO ET M. PULVIRENTI, *Vortices and localization in Euler flows*, Commun. Math. Phys., 154 (1993), p. 49–61. 29, 74
- [179] C. MARCHIORO ET M. PULVIRENTI, *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*, vol. 96 de Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1994. 10, 11, 25, 29, 78, 97

- [180] M. MARIŞ, *Nonexistence of supersonic traveling waves for nonlinear Schrödinger equations with nonzero conditions at infinity*, SIAM J. Math. Anal., 40 (2008), p. 1076–1103. 81
- [181] C. MELCHER, *The logarithmic tail of Néel walls*, Arch. Ration. Mech. Anal., 168 (2003), p. 83–113. 88
- [182] ———, *Logarithmic lower bounds for Néel walls*, Calc. Var. Partial Differ. Equ., 21 (2004), p. 209–219. 88
- [183] ———, *Thin-film limits for Landau-Lifshitz-Gilbert equations*, SIAM J. Math. Anal., 42 (2010), p. 519–537. 94
- [184] C. MELCHER, *Global solvability of the Cauchy problem for the Landau-Lifshitz-Gilbert equation in higher dimensions*, Indiana Univ. Math. J., 61 (2012), p. 1175–1200. 94
- [185] F. MERLE ET H. ZAAG, *Reconnection of vortex with the boundary and finite time quenching*, Nonlinearity, 10 (1997), p. 1497–1550. 82
- [186] E. MIOT, *Dynamics of vortices for the complex Ginzburg-Landau equation*, Anal. PDE, 2 (2009), p. 159–186. 8
- [187] ———, *Two existence results for the vortex-wave system*, Riv. Mat. Univ. Parma (N.S.), 3 (2012), p. 131–146. 8, 29, 31, 63
- [188] ———, *A uniqueness criterion for unbounded solutions to the Vlasov-Poisson system*, Comm. Math. Phys., 346 (2016), p. 469–482. 7, 15, 39, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 70
- [189] E. MIOT, *On the gyrokinetic limit for the two-dimensional Vlasov-Poisson system*, preprint, (2016). 7, 17, 18, 57, 59, 60
- [190] E. MIOT, *Le flot binormal, l'équation de Schrödinger et les tourbillons filamentaires*, in Séminaire Bourbaki. Volume 2015/2016. Exposés 1104–1119. Avec table par noms d'auteurs de 1948/49 à 2015/16, Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2017, p. 427–451. 8
- [191] E. MIOT, *The gyrokinetic limit for the Vlasov-Poisson system with a point charge*, Nonlinearity, 32 (2019), p. 654–677. 7, 18, 57, 62, 63, 64
- [192] D. W. MOORE ET P. G. SAFFMAN, *The motion of a vortex filament with axial flow*, Philos. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A, 272 (1972), p. 403–429. 75
- [193] A. MOUSSA, *Étude mathématique et numérique du transport d'aérosols dans le poumon humain*, Thèse de l'École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, tel-00463970, (2009). 68
- [194] ———, *Étude mathématique de modèles cinétiques, fluides et paraboliques issus de la biologie*, HDR, Sorbonne Université - Laboratoire Jacques-Louis Lions. tel-02119758, (2018). 68
- [195] A. MOUSSA ET F. SUEUR, *On a Vlasov-Euler system for 2D sprays with gyroscopic effects*, Asymptot. Anal., 81 (2013), p. 53–91. 14, 45
- [196] I. MOYANO, *Local null-controllability of the 2-D Vlasov-Navier-Stokes system*, arXiv preprint arXiv :1607.05578, (2016). 68
- [197] T. T. NGUYEN ET T. T. NGUYEN, *The inviscid limit of navier-stokes equations for vortex-wave data on \mathbb{R}^2* , SIAM J. Math. Anal., (2019). To appear. 29
- [198] S. OKABE ET T. UKAI, *On classical solutions in the large in time of the two-dimensional Vlasov equation*, Osaka J. Math, (1978), p. 245–261. 14, 41
- [199] K. A. O'NEIL, *Stationary configurations of point vortices*, Trans. Am. Math. Soc., 302 (1987), p. 383–425. 78

- [200] P. J. O’ROURKE, *Collective drop effects on vaporizing liquid sprays*, Thèse doctorat, Los Alamos National Laboratory, 1981. 68
- [201] C. PALLARD, *Moment propagation for weak solutions to the Vlasov-Poisson system*, Commun. Partial Differ. Equations, 37 (2012), p. 1273–1285. 41, 42, 43
- [202] ———, *Space moments of the Vlasov-Poisson system : propagation and regularity*, SIAM J. Math. Anal., 46 (2014), p. 1754–1770. 41, 43
- [203] K. PFAFFELMOSE, *Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data*, Jour. Diff. Eq., (1992), p. 281–303. 14, 16, 41
- [204] C. POMMERENKE, *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer-Verlag, Berlin New-York, 1992. 28
- [205] G. PONCE, *On the stability of nearly parallel vortex filaments*, J. Dyn. Differ. Equations, 18 (2006), p. 551–575. 79
- [206] F. POUPAUD, *Diagonal defect measures, adhesion dynamics and Euler equation*, Methods and Appl. of Analysis, 4 (2002), p. 533–562. 10, 18, 24, 25, 29, 63, 65
- [207] M. M. RAO ET Z. D. REN, *Applications to Orlicz spaces*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, Taylor & Francis, 2002. 45
- [208] R. L. RICCA, *The contributions of Da Rios and Levi-Civita to asymptotic potential theory and vortex filament dynamics*, Fluid Dyn. Res., 18 (1996), p. 245–268. 75
- [209] R. ROBERT, *Unicité de la solution faible à support compact de l’équation de Vlasov-Poisson*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, 324 (1997), p. 873–877. 41, 42
- [210] L. SAINT-RAYMOND, *Contrôle des grandes vitesses dans l’approximation gyrocinétique*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math., 331 (2000), p. 791–796. 58
- [211] ———, *Control of large velocities in the two-dimensional gyrokinetic approximation*, J. Math. Pures Appl. (9), 81 (2002), p. 379–399. 17, 58, 59, 60, 61, 65
- [212] D. SALORT, *Transport equations with unbounded force fields and application to the Vlasov-Poisson equation*, Math. Models Methods Appl. Sci., 19 (2009), p. 199–228. 41
- [213] J. SCHAEFFER, *Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in three dimensions*, Commun. Partial Differ. Equations, 16 (1991), p. 1313–1335. 41
- [214] S. SCHOCHET, *The weak vorticity formulation of the 2-D Euler equations and concentration-cancellation*, Comm. Partial Differential Equations, 5-6 (1995), p. 1077–1104. 10, 17, 18, 24, 25, 59, 60, 61, 65
- [215] S. SERFATY, *Vortex collisions and energy-dissipation rates in the Ginzburg-Landau heat flow*, J. Eur. Math. Soc., 9 (2007), p. 383–426. 89
- [216] E. D. SIGGIA, *Collapse and amplification of a vortex filament*, Phys. Fluids, 28 (1985), p. 794–805. 75
- [217] V. N. STAROVOÏTOV, *Solvability of the problem of motion of concentrated vortices in an ideal fluid*, Dinamika Sploshn. Sredy, 85 (1988), p. 118–136. 11
- [218] ———, *Uniqueness of a solution to the problem of evolution of a point vortex*, Siberian Mathematical Journal, 35 (1994), p. 625–630. 11, 12
- [219] M. TAYLOR, *Incompressible fluid flows on rough domains. Semigroups of operators : theory and applications*, vol. 42 de Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Birkhäuser, Basel, 1998. 26

- [220] L. M. M. THOMSON, *Theoretical Hydrodynamics*, London, 1955. 13
- [221] L. TING ET R. KLEIN, *Viscous vortical flows*, vol. 374, Berlin etc. : Springer-Verlag, 1991. 75
- [222] B. TURKINGTON, *On the evolution of a concentrated vortex in an ideal fluid*, Arch. Ration. Mech. Anal., 97 (1987), p 75–87. 74
- [223] M. VISHIK, *Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline spaces of Besov type*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 32 (1999), p. 769–812. 25, 26
- [224] D. WANG ET C. YU, *Global weak solution to the inhomogeneous Navier–Stokes–Vlasov equations*, Journal of Differential Equations, 259 (2015), p. 3976–4008. 18, 68
- [225] F. A. WILLIAMS, *Combustion theory*, Second edition, Benjamin Cummings, 1985. 68
- [226] W. WOLIBNER, *Un théorème sur l’existence du mouvement plan d’un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long*, Mathematische Zeitschrift, 37 (1933), p. 698–726. 10, 24
- [227] S. WOLLMAN, *The spherically symmetric Vlasov–Poisson system*, J. Differ. Equations, 35 (1980), p. 30–35. 54
- [228] ———, *Global-in-time solutions to the three-dimensional Vlasov–Poisson system*, J. Math. Anal. Appl., 176 (1993), p. 76–91. 41, 49
- [229] C. YU, *Global weak solutions to the incompressible Navier–Stokes–Vlasov equations*, J. Math. Pures Appl. (9), 100 (2013), p. 275–293. 18, 68
- [230] V. I. YUDOVICH, *Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid*, Z. Vy cisl. Mat. i Mat. Fiz., 3 (1963), p. 1032–1066. 10, 24, 25
- [231] ———, *Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid*, Math. Res. Lett., 2 (1995), p. 27–38. 10, 25
- [232] V. E. ZAKHAROV, *Wave collapse*, Sov. Phys. Usp., (1988), p. 672–674. 20, 82, 83
- [233] V. E. ZAKHAROV, *Dynamics of vortex line in presence of stationary vortex*, Theor. Comput. Fluid Dyn., 24 (2010), p. 377–382. 86
- [234] P. E. ZHIDKOV, *Korteweg-de Vries and nonlinear Schrödinger equations : qualitative theory*, vol. 1756, Berlin : Springer, 2001. 81
- [235] S. ZUCCHER, M. CALIARI, A. W. BAGGALEY ET C. F. BARENGHI, *Quantum vortex reconnection*, Phys. Fluids, 24 (2012). 82