



**HAL**  
open science

# Méthodologie de réorganisation du trafic ferroviaire par analyse de sensibilité régionale : application à un incident sur infrastructure électrique

Soha Saad

► **To cite this version:**

Soha Saad. Méthodologie de réorganisation du trafic ferroviaire par analyse de sensibilité régionale : application à un incident sur infrastructure électrique. Autres [stat.ML]. Université Grenoble Alpes, 2019. Français. NNT : 2019GREAI057 . tel-02441342

**HAL Id: tel-02441342**

**<https://theses.hal.science/tel-02441342>**

Submitted on 15 Jan 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### **DOCTEUR DE LA COMMUNAUTE UNIVERSITE GRENOBLE ALPES**

Spécialité : **GI : Génie Industriel : conception et production**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

### **SOHA SAAD**

Thèse dirigée par **Jean BIGEON**, Directeur de recherches, CNRS, et  
codirigée par **Florence OSSART**, Professeure, Sorbonne Université

préparée au sein du **Laboratoire des Sciences pour la  
Conception, l'Optimisation et la Production de Grenoble** dans  
l'**Ecole Doctorale I-MEP2 – Ingénierie – Matériaux, Mécanique,  
Environnement, Energétique, Procédés, Production**

## **Méthodologie de réorganisation du trafic ferroviaire par analyse de sensibilité régionale : application à un incident sur infrastructure électrique**

Thèse soutenue publiquement le **9 octobre 2019**,  
devant le jury composé de :

**Monsieur Bruno SARENI**

Professeur, INP TOULOUSE, Président

**Monsieur Jean BIGEON**

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION ALPES, Directeur  
de thèse

**Monsieur Stéphane BRISSET**

Professeur, ECOLE CENTRALE LILLE, Rapporteur

**Madame Marie-Cécile PERA**

Professeure, UNIVERSITE DE FRANCHE-COMTE, Examineur

**Monsieur Jean-Marie FLAUS**

Professeur, UNIVERSITE GRENOBLE ALPES, Examineur

Invités :

**Madame Florence OSSART**

Professeure, SORBONNE UNIVERSITE, Co-directrice de thèse

**Monsieur Etienne Sourdille**

Chef de section CEDD1, SNCF RESEAU, Encadrant







# TABLE DES MATIÈRES

Remerciements .....	10
Résumé .....	11
Abstract .....	12
Terminologie utilisée par la SNCF .....	13
Notations .....	15
Introduction générale.....	16
Contexte et problématique.....	16
Démarche proposée et travaux réalisés .....	19
Organisation du manuscrit.....	20
Chapitre 1 .....	23
Généralités sur le réseau ferroviaire électrique .....	23
1.1. Transport Ferroviaire .....	23
1.1.1. Un peu d’histoire des chemins de fer .....	23
1.1.2. Histoire des systèmes d’électrification ferroviaire.....	24
1.1.3. Présentation du réseau ferroviaire en France .....	26
1.1.4. Principe des systèmes électriques ferroviaires .....	27
1.1.5. Trafic et missions des trains .....	29
1.1.6. La production ferroviaire .....	31
1.2. Simulateurs électriques ferroviaires .....	36
1.2.1. Principe de la simulation électrique ferroviaire .....	37
1.2.2. ESMERALDA NG, le simulateur développé par la SNCF .....	38
Chapitre 2 .....	41
Problématique de la gestion des incidents ferroviaires et proposition d’une méthodologie de résolution.....	41

2.1.	Gestion des incidents : état de l'art.....	41
2.1.1.	Introduction .....	41
2.1.2.	Les différents types d'incidents ferroviaires .....	41
2.1.3.	Réorganisation d'un trafic faiblement perturbé .....	45
2.1.4.	Réorganisation d'un trafic fortement perturbé .....	52
2.1.5.	Conclusion et positionnement de nos travaux.....	55
2.2.	Démarche proposée .....	56
2.2.1.	Conséquences d'une perte d'équipement électrique .....	56
2.2.2.	Actions d'ajustement du trafic possibles.....	57
2.2.3.	Démarche actuelle .....	57
2.2.4.	Démarche proposée .....	59
2.2.5.	Schéma général de l'approche.....	63
2.3.	Synthèse.....	65
Chapitre 3 .....		67
Analyse de sensibilité sur des modèles à entrées indépendantes et à sortie dynamique .....		67
3.1.	Introduction .....	67
3.2.	Analyse de sensibilité [95] .....	70
3.2.1.	Analyse de sensibilité locale .....	71
3.2.2.	Analyse de sensibilité globale .....	73
3.2.3.	Échantillonnage.....	74
3.3.	Analyse de sensibilité fondée sur la décomposition de la variance.....	78
3.3.1.	Vers les indices de Sobol .....	79
3.3.2.	Décomposition de Höfdding.....	80
3.3.3.	Indices de Sobol Généralisés [142].....	85
3.3.4.	Estimation des indices de Sobol par algorithme de Monte Carlo .....	87
3.3.5.	Estimation des indices de Sobol généralisés par la méthode Monte Carlo.....	91
3.3.6.	Caractéristiques .....	92

3.4.	Analyse de sensibilité fondée sur la distance entre distributions .....	92
3.4.1.	Introduction .....	92
3.4.2.	Définition de la distance-énergie.....	93
3.4.3.	Indices de sensibilité fondés sur la distance-énergie.....	95
3.4.4.	Estimation des indices .....	96
3.4.5.	Caractéristiques .....	99
3.5.	Analyse de sensibilité régionale .....	99
3.5.1.	Principe de la méthode .....	100
3.5.2.	Test de Kolmogorov-Smirnov.....	102
3.5.3.	Implémentation.....	105
3.5.4.	Caractéristiques de l'analyse de sensibilité régionale .....	105
3.6.	Application à notre problème .....	105
3.7.	Conclusion .....	107
Chapitre 4	.....	110
Application de la démarche sur un cas test simple	.....	110
4.1.	Introduction .....	110
4.2.	Contraintes opérationnelles .....	111
4.3.	Actions d'ajustement .....	113
4.3.1.	Ajustement des horaires .....	113
4.3.2.	Ajustement de la marche des trains.....	116
4.4.	Critères d'optimisation .....	119
4.5.	Mise en œuvre sur un cas-test.....	120
4.5.1.	Descriptif du cas-test.....	121
4.5.2.	Etape 1 : Spécification du problème d'ajustement du trafic .....	123
4.5.3.	Etape 2 : Echantillonnage.....	124
4.5.4.	Etape 3 : Simulations.....	125
4.5.5.	Etape 4 : Calcul des indices de sensibilité.....	125

4.5.6.	Critères de comparaison des méthodes .....	125
4.6.	Résultats et comparaison des méthodes.....	125
4.6.1.	Indices de Sobol généralisés .....	126
4.6.2.	Indices fondés sur la distance-énergie.....	128
4.6.3.	Analyse de sensibilité régionale.....	129
4.6.4.	Exploitation des résultats : post traitement et optimisation.....	134
4.7.	Discussion.....	135
4.8.	Conclusion .....	136
Chapitre 5	.....	138
Application de la méthodologie sur un ensemble de cas représentatifs	.....	138
5.1.	Introduction .....	138
5.2.	Présentation de l’outil.....	138
A-	Spécification du problème avec analyse de la grille de trafic.....	138
B-	Détermination et réalisation des scénarios d’ajustement .....	139
C-	Analyse de sensibilité régionale.....	139
D-	Post-traitement et optimisation .....	139
5.3.	Présentation des cas d’étude .....	140
Test 1 : axe Paris Le Mans – Paris Tours	.....	140
A-	Description de la géométrie .....	140
B-	Spécification du problème d’ajustement du trafic .....	142
C-	Phase d’analyse de sensibilité.....	144
D-	Post traitement et optimisation.....	144
	Optimisation méta-heuristique sans analyse de sensibilité.....	147
	Conclusion .....	148
Test 2 : axe Montparnasse - Versailles	.....	149
A-	Description de la géométrie .....	149
B-	Spécification du problème d’ajustement du trafic .....	150



C-	Phase d'analyse de sensibilité .....	153
D-	Post traitement et optimisation.....	154
	Optimisation méta-heuristique sans analyse de sensibilité.....	157
	Conclusion .....	158
Test 3:	axe Corbeil - Malesherbes .....	159
A-	Description de la géométrie .....	159
B-	Spécification du problème d'ajustement du trafic .....	160
C-	Phase d'analyse de sensibilité.....	162
D-	Post traitement et optimisation.....	162
Test 4:	axe Paris Nord .....	165
A-	Description de la géométrie .....	165
B-	Spécification du problème d'ajustement du trafic .....	167
C-	Phase d'analyse de sensibilité.....	168
D-	Post-traitement et optimisation .....	169
5.4.	Conclusion .....	171
Conclusions et Perspectives	.....	174
Conclusions	.....	174
Perspectives	.....	176
Bibliographie	.....	178
Annexes	.....	200
Annexe 1	.....	200
Annexe 2	.....	204
Annexe 3	.....	213
Annexe 4	.....	214
Table des figures	.....	217
Liste des tableaux	.....	220



*Au souvenir de mon père ...*

## Remerciements

Ce travail est le fruit d'une collaboration dans le cadre d'une thèse CIFRE entre le laboratoire des Sciences pour la conception, l'Optimisation et la Production de Grenoble, le laboratoire Génie électrique et électronique de Paris et la direction Ingénierie et Projets (I&P) de la SNCF.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements à mon directeur de thèse monsieur Jean Bigeon, directeur de recherche CNRS et ma co-directrice madame Florence Ossart, professeure à l'université de Sorbonne, pour ses conseils et ses encouragements au cours de ces années de thèse. Je les remercie pour m'avoir fait confiance et de m'avoir confié ce sujet de thèse. Je tiens sincèrement à les remercier pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Je tiens également à adresser mes remerciements à Monsieur Cristian Courtois, chef du département Ingénierie et projets à la SNCF et ses adjoints Monsieur Stéphane Marie et Monsieur Philippe Berthier, qui m'ont fait confiance et m'ont permis de rejoindre le secteur ferroviaire et pour leur aide liée à mon intégration.

Je remercie vivement Monsieur Bruno Sareni professeur à INP Toulouse, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Stéphane Brisset professeur à l'école Centrale de Lille, Madame Marie Cécile Pera, professeure à l'université de Franche-Comté et Monsieur Jean Marie Flaus, professeur à l'université Grenoble Alpes, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger mon travail.

Ce travail a été encadré par Monsieur Etienne Sourdille, Monsieur Gance Harold et Monsieur Olivier Bossi au sein de la SNCF. Je tiens à leur adresser mes sincères remerciements pour leur encadrement et leur disponibilité malgré leurs nombreuses autres responsabilités.

J'adresse mes remerciements à toute l'équipe de CES3, CES5 et CES2 avec qui j'ai travaillé pendant ces trois années de thèse, en particulier, Monsieur Hervé Caron et Karima Tioua.

Merci à toute ma famille qui m'a soutenu.

## Résumé

La qualité d'alimentation électrique d'un réseau ferroviaire peut être fortement affectée par l'indisponibilité d'un équipement électrique, que ce soit suite à un incident technique ou une opération de maintenance. Il est alors nécessaire de réduire le trafic prévu en ajustant les grilles horaires et les profils de vitesse, tout en conservant des performances d'exploitation optimales. Le but du travail présenté dans ce mémoire est de développer un outil d'aide à la décision pour assister les agents en charge de la réorganisation du trafic lors d'un incident sur infrastructure électrique. Le système étudié est complexe et son analyse repose sur des simulations coûteuses. Nous avons donc proposé une démarche en deux phases. Dans un premier temps, une analyse de sensibilité permet de détecter de manière efficace les variables d'ajustement du trafic les plus influentes. Après une analyse comparative entre différentes techniques, nous avons retenu l'analyse de sensibilité régionale par filtrage de Monte Carlo et test de KS, car cela permet de prendre en compte les contraintes opérationnelles, comme les niveaux de tension en ligne. La deuxième phase consiste à optimiser la solution en travaillant dans un espace de recherche de dimension réduite. Un ensemble de solutions Pareto optimales sont générées afin d'évaluer le meilleur compromis entre le critère principal qui est la densité de trafic et d'autres critères tels que les pertes ou les échauffements. Les techniques mises en œuvre ont abouti à la réalisation d'un prototype. Cet outil permet à l'ingénieur de définir les variables d'ajustement et les critères de performance du trafic. Il analyse ensuite l'influence des différentes variables d'ajustement et optimise le trafic par rapport aux critères définis. L'outil a été testé sur quatre cas d'étude correspondant à des portions de réseaux et à des trafics ferroviaires réels.

## **Abstract**

The power supply quality of a railway network can be strongly affected by the unavailability of electrical equipment, whether due to a technical incident or a maintenance operation. It is then necessary to reduce the expected traffic by adjusting the time schedules and speed profiles, while maintaining optimal operating performance. The purpose of the work presented in this thesis is to develop a decision support tool to assist the agents in charge of the reorganization of traffic during an incident on electrical infrastructure. The studied system is complex and its analysis is based on costly simulations. We therefore proposed a two-phase approach. As a first step, a sensitivity analysis can effectively detect the most influential traffic adjustment variables. After a comparative analysis between different techniques, we selected the regional sensitivity analysis by Monte Carlo filtering and KS test, because it allows us to take into account the operational constraints, like the tension levels in line. The second phase consists in optimizing the solution by working in a small research area. A set of Pareto-Optimal solutions are generated to evaluate the best trade-off between the main criterion "traffic density" and other criteria such as losses or overheating. The techniques implemented led to the production of a prototype. The tool allows the engineer to define traffic adjustment variables and traffic performance criteria. Then it analyzes the influence of the various adjustment variables and optimizes the traffic according to the defined criteria. The tool was tested on four case studies proposed by SNCF Réseau and corresponding to network segments and actual rail traffic.

# Terminologie utilisée par la SNCF

---

## Acronymes ferroviaires

TER : Transport Express Régional

RER : Réseau Express Régional

TGV : Trains à Grande Vitesse

LGV : Lignes à Grande Vitesse : infrastructure dédiée au TGV

IFTE : Infrastructures Fixes de Traction Électrique

AdC : Agent de Conduite

## Définitions ferroviaires de base

*Circulation* : ressource associant un matériel roulant (train, circulation, manœuvre) et une mission.

*Capacité ferroviaire* : nombre maximum de trains pouvant circuler dans le réseau, dans un intervalle de temps donné en tenant compte de la qualité de services.

*Cantonnement* : organisation de circulation qui permet d'en garantir la sécurité grâce à un découpage scrupuleux et précis des voies. Chaque tronçon de voie est ainsi en entrée et en sortie par un système de signaux symbolisant son occupation ou sa libération. Il s'agit en quelque sorte de bulles de sécurité qui séparent obligatoirement les trains entre eux.

*Canton* : section élémentaire d'infrastructure encadrée par deux signaux. Zones élémentaires pour le système de sécurité. Espaces de sécurité dans lesquels le train ne peut pénétrer que lorsque les signaux l'y autorisent.

*Infrastructure* : ressources fixes (voie ferrée, système de signalisation, caténaires ...).

*Intercités* : transports interrégionaux à moyens et longs parcours, comprenant aussi les intercités de nuit.

*Matériel roulant* : ensemble de ressources matérielles en mouvement (locomotives, automoteurs et autorails, wagons, voitures voyageurs ...).

*Mission* : succession des points d'arrêt commerciaux ou techniques (points de passage ou de service) et des temps de trajet entre ces points utiles pour la réalisation de plan de transport.

*Marche* : succession de consignes (par exemple, accélérer, freiner...) que le conducteur doit suivre tout au long du trajet.

*Plan de transport* : ensemble des dispositions destinées à organiser les ressources (sillons, matériels, agents, ...) mises en place pour transporter des biens ou des personnes par voie ferrée.

*Règles de sécurité* : respect de dispositions de sécurité pour assurer un bon fonctionnement du système ferroviaire : par exemple le respect des espacements de sécurité (sur le terrain, au moyen du cantonnement, ...).

*Signalisation* : un des éléments de base de la sécurité ferroviaire, destiné à renseigner le conducteur d'une circulation ferroviaire afin de régler la marche de son convoi et rouler en toute sécurité.

*Sillon* : ressource d'infrastructure ferroviaire requise par une circulation pendant une période donnée. Toute circulation de train s'inscrit dans le cadre de « sillons ».

*Système ferroviaire* : ensemble des ressources du monde ferroviaire (lignes de chemins de fer, de gares ...) et d'installations techniques diverses (atelier, dépôts, triages, ...) qui permettent la circulation de convois ferroviaire ou trains dans un ensemble géographique donné, région, pays, continent.

*Transilien* : équivalent de TER en Île-de-France.



## Notations

---

Les différents acronymes et abréviations utilisés sont :

$f$	modèle mathématique
$X, Y$	vecteur de variable aléatoire réelle
$X_i$	variable aléatoire réelle
$x_i$	réalisation de $X_i$ (une valeur de la variable aléatoire)
$Y_{pk}$ ou $Y(t)$	variable aléatoire réelle à une position $pk$ (ou à l'instant $t$ )
$y_{pk}$ ou $y(t)$	réalisation de la variable aléatoire $Y_{pk}$ (ou $Y(t)$ )
$E[X_i]$	espérance de $X_i$
$V(X_i)$ ou $V_i$	variance de $X_i$
$Cov(X_i, X_i')$	covariance de $X_i$ et $X_i'$
$f_X(\cdot)$	fonction de densité d'un variable aléatoire $X_i$
$S_i$	indice de sensibilité à la variable $X_i$
$S_{i1}, \dots, S_{ip}$	indice de sensibilité à l'interaction entre les variables $X_{i1}, \dots, X_{ip}$
$S_{Ti}$	indice de sensibilité total à la variable $X_i$
$N$	taille de l'échantillon (nombre d'échantillons ou nombre de scénarios d'ajustement)
$p$	nombre de variables d'ajustement
$m$	nombre de pas de temps ou position d'espace
$t$	instant de temps
$pk$	position en kilomètre

# Introduction générale

---

## Contexte et problématique

Le secteur ferroviaire se développe avec des évolutions profondes à travers le monde. Cela s'accompagne d'une évolution importante du secteur matérialisée par de nombreux investissements afin de développer de nouvelles infrastructures et améliorer la capacité des structures existantes. L'objectif est de promouvoir la qualité de service et la satisfaction des clients. De nouveaux outils informatiques sont nécessaires pour répondre à ces nouvelles problématiques notamment celles d'optimisation et d'aide à la décision.

En France, la demande en transport ferroviaire est en pleine croissance. Depuis 10 ans, le transport de voyageurs a augmenté de 50% pour les TER<sup>1</sup>, 40% pour le Transilien et 30% pour les TGV<sup>2</sup>. En 2017, cela a représenté un total de 100 milliards de voyageurs.km [1]. Des trains de voyageurs, ayant des caractéristiques et des missions<sup>3</sup> variées, partagent les voies avec des trains de marchandises (FRET). On parle alors de trafic hétérogène. Du fait de cette hétérogénéité et d'une densité croissante, la gestion du trafic présente de plus en plus de difficultés, d'où la nécessité de mettre au point des outils permettant d'optimiser la capacité ferroviaire du réseau, c'est-à-dire de maximiser le nombre de trains pouvant circuler sur le réseau dans un intervalle de temps donné.

De plus, pour des raisons économiques, environnementales et sociétales, la régularité du trafic et la consommation énergétique sont aujourd'hui déterminants dans le secteur ferroviaire. Le contexte concurrentiel, l'évolution et l'environnement des ingénieries ferroviaires et des besoins des clients nationaux et internationaux nécessitent des investissements lourds de la part de la SNCF. Il s'agit aussi d'améliorer ses services ferroviaires, ainsi que renforcer ses capacités d'adaptation et sa gamme de prestation face à un marché de plus en plus concurrentiel. Pour cela, la SNCF s'efforce de développer des outils d'optimisation et d'aide à la décision.

L'alimentation électrique des trains requiert des **Infrastructures Fixes de Traction Electrique** (IFTE) dont les principales sont les sous-stations et les caténaires. Ce sont des équipements

---

<sup>1</sup> Train Express Régional

<sup>2</sup> Trains à Grande Vitesse

<sup>3</sup> Itinéraire suivi par un train suivant les horaires du trajet

lourds (15 millions euros-Km pour construire la LGV Est, dont 4% représente le coût d'infrastructure électrique) dont la durée de vie est longue (30 ans). Il faut donc assurer une maintenance régulière sur toute la durée de vie et optimiser leur exploitation.

Les infrastructures sont gérées par le gestionnaire d'infrastructure SNCF Réseau. Deux problématiques essentielles se posent :

Problématique 1 : Pour faire face au vieillissement des équipements et à l'évolution du trafic, il est nécessaire de renouveler ou de reconfigurer les IFTE existantes. Les investissements à réaliser sont lourds et le problème est de dimensionner au mieux les IFTE compte tenu de la croissance attendue du trafic. Par ailleurs, certaines portions de ligne présentent des contraintes d'aménagement très fortes liées à la configuration des lieux (tunnels, milieu montagneux, milieu urbain dense, réseau public HT peu accessible ... par exemple).

Problématique 2 : Les équipements peuvent être temporairement indisponibles, soit dans le cadre d'un arrêt programmé pour maintenance, soit de manière fortuite suite à un incident. Quand cette situation se produit, le réseau peut subir une dégradation sensible de la qualité de l'alimentation électrique qui contraint l'exploitant à modifier la grille horaire des trains pour ne pas porter atteinte à l'intégrité de l'infrastructure électrique. En effet, une surcharge du réseau électrique peut provoquer des dégradations matérielles. Par exemple, la surchauffe d'un transformateur peut provoquer son explosion. L'impact d'un tel incident se situe au niveau du coût de remplacement, mais aussi au niveau de la durée d'indisponibilité de l'équipement (jusqu'à deux mois pour remplacer un transformateur de sous-station). L'enjeu est donc très important pour SNCF Réseau.

Notre travail se concentre sur cette deuxième problématique et porte sur la perturbation du trafic ferroviaire en cas de défaillance d'un élément de l'infrastructure électrique, comme par exemple une sous-station d'alimentation. La puissance transmissible par les caténaires est alors réduite et le trafic doit être adapté : il faut réduire le nombre de trains qui circulent en même temps et éventuellement les ralentir. Cela peut être géré en espaçant davantage les trains ou en réduisant leurs vitesses. Ces ajustements ont pour objectif d'aboutir à un trafic qui respecte les différentes contraintes opérationnelles du système. Parmi ces contraintes, la principale est que la tension à la caténaire doit toujours être supérieure à une certaine valeur définie par les normes. Les échauffements dans les transformateurs et les caténaires doivent également être acceptables.

La recherche de solutions s'appuie sur la simulation numérique du système, qui permet de déterminer l'ensemble des grandeurs physiques dans le système, pour un trafic donné. Le problème est alors d'ajuster les grilles horaires et la vitesse des trains, avec comme objectif que les grandeurs de sortie du modèle respectent les contraintes opérationnelles sur la tension et les échauffements.

En résumé, la réorganisation du trafic consiste à agir sur la circulation des trains de façon à obtenir un résultat « satisfaisant ». Actuellement, cette réorganisation du trafic est faite suivant une démarche itérative par essais/erreurs reposant surtout sur l'expertise de l'opérateur. Ce dernier, responsable de réorganiser le trafic, teste différents scénarios d'ajustement dans le but de rechercher une solution réalisable ou optimale.

Cette approche empirique est peu efficace compte tenu de la complexité des situations analysées, avec des problèmes de plus en plus contraints du fait de l'augmentation du trafic. Le nombre de variables d'ajustement à envisager est important, et la durée de simulation d'un scénario de trafic est longue (de quelques minutes à une demi-heure de calcul selon la taille du réseau et la durée de trafic simulé). Dans cette démarche par essais/erreurs la qualité des résultats est tributaire de l'expertise de l'opérateur et rien ne garantit l'optimalité des solutions obtenues. Par ailleurs, l'expertise nécessaire à ces études est longue à acquérir et se partage difficilement. Notons enfin que les périmètres d'études du trafic ferroviaire se sont récemment étendus jusqu'à atteindre des régions entières en France et que les contraintes sur la gestion du trafic sont de plus en plus nombreuses. Les études portent sur des problèmes de plus en plus grosses et complexes, avec par conséquent des calculs coûteux et des résultats de plus en plus difficiles à analyser. Par conséquent, il est nécessaire de développer des outils permettant d'analyser les résultats de simulation, afin d'optimiser le processus de réorganisation du trafic.

Notre travail s'inscrit donc dans le cadre de la régulation du trafic ferroviaire en situation perturbée, qui intervient dans la phase opérationnelle de circulation des trains. Ce travail doit déboucher sur des méthodes d'analyse et une application informatique efficace pour la prise en compte des infrastructures électriques lors de l'optimisation du trafic ferroviaire. Ces recherches visent à déterminer objectivement le trafic qui peut être alimenté par une configuration de puissance électrique donnée. Seules les contraintes liées aux installations électriques seront considérées. Les contraintes de signalisation ne sont pas prises en compte.

En résumé, l'objectif est de fournir aux concepteurs d'alimentation électrique un outil capable de proposer (par la simulation) automatiquement des solutions pour maximiser la capacité du trafic pour une infrastructure électrique donnée. Pour être utile aux utilisateurs, cet outil doit être efficace, robuste et fiable.

## **Démarche proposée et travaux réalisés**

Nous présentons maintenant les travaux réalisés et la démarche proposée pour réorganiser le trafic en cas d'incident sur une infrastructure électrique.

La première étape consiste à formuler le problème métier en un modèle mathématique d'ajustement du trafic. Les actions de réorganisation du trafic sont traduites sous la forme de variables d'ajustement. Par exemple, l'action qui consiste à espacer les départs de train se modélise par une variable « incrément de l'intervalle de temps entre deux départs successifs ». L'action de ralentissement se modélise par une variable « réduction de la vitesse limite entre deux points de la ligne ». Le cœur du modèle d'ajustement est le simulateur ferroviaire. Le modèle d'ajustement du trafic fait appel à celui-ci afin de connaître l'ensemble des grandeurs physiques dans le réseau pour un trafic donné. Le modèle d'ajustement détermine alors si le trafic respecte les contraintes opérationnelles et peut également calculer des indices de performances tels que le débit de trains, la consommation électrique, la durée des voyages.

Une fois le modèle d'ajustement défini, le problème consiste à explorer l'espace des variables d'ajustement afin de déterminer quels sont les trafics acceptables en termes de respect des contraintes opérationnelles, puis à déterminer parmi ceux-ci les trafics optimaux par rapport aux critères de performances définis par l'opérateur.

Le modèle d'ajustement du trafic est un modèle complexe en ce sens qu'il repose sur simulateur ferroviaire complexe (modèle électro-mécanique dynamique, comportement non linéaire, grand nombre de variables d'entrées, sorties dynamiques, temps de calcul élevé). Par ailleurs, les sorties du modèle sont des sorties dynamiques (milliers de pas de temps) et ne sont pas exploitables sans post-traitement.

Pour résoudre le problème d'ajustement du trafic, nous avons cherché une méthodologie adaptée. Les méthodes d'optimisation classiques et les méthodes de surfaces de réponses<sup>4</sup> ne conviennent pas du fait de la complexité du modèle.

Nous avons proposé une méthodologie en deux étapes. La première partie consiste à réaliser une analyse de sensibilité afin de déterminer quelles sont les variables d'ajustement les plus influentes, puis de réduire la dimension du problème. Pour cela, nous avons recherché une méthode d'analyse de sensibilité compatible avec la complexité du modèle étudié et l'objectif du problème. Après avoir réalisé une comparaison entre différentes méthodes d'analyse de sensibilité, nous avons conclu que l'analyse de sensibilité régionale par filtrage de Monte-Carlo est la plus adaptée à notre problème car elle prend en compte les contraintes sur la sortie qui définissent les solutions acceptables. De plus, cette méthode est la plus efficace en termes de ressources informatiques (temps de calcul, stockage, ...).

La deuxième étape consiste à rechercher les solutions les plus performantes dans l'espace des solutions réalisables. Différents critères de performances interviennent (densité de trafic, consommation électrique, échauffements) et une approximation d'un ensemble de solutions de Pareto optimales est générée, afin de présenter les meilleurs compromis entre ces critères. L'opérateur dispose alors d'éléments objectifs pour choisir la solution qui lui paraît la meilleure.

La démarche proposée a été mise en œuvre et a abouti à la réalisation d'un prototype d'outil de réorganisation du trafic. La démarche proposée a d'abord été testée sur un cas test simple, afin de vérifier sa faisabilité et sa pertinence. Puis, nous avons appliqué avec succès cette méthodologie à quatre cas-tests issus d'études réalisées par SNCF Réseau et représentatifs de la diversité des situations rencontrées.

## **Organisation du manuscrit**

Ce manuscrit comprend les chapitres suivants :

- 1) Généralités sur le réseau ferroviaire électrique** : Ce chapitre introduit le contexte des systèmes ferroviaires. Nous détaillons aussi dans ce chapitre, le simulateur électrique ferroviaire « ESMERALDA NG » utilisé dans notre travail.

---

<sup>4</sup> Modèles d'approximations (connus sous le nom de modèles de substitution « surrogate model » en anglais, modèles de surface de réponse, méta-modèles ou émulateurs) qui imitent le comportement du modèle aussi proche que possible

- 2) **Problématique de la gestion des incidents ferroviaires et proposition d'une méthodologie de résolution** : Ce chapitre introduit la problématique de la gestion des incidents ayant un impact sur la circulation des trains. Nous présentons également une étude bibliographique qui liste les techniques et les modèles employés en fonction du type d'incident. Cette bibliographie montre que les incidents sur infrastructure électrique (notre problématique) ne sont pas traités dans la littérature. Le chapitre présente alors la définition de la problématique de notre travail ainsi que la démarche proposée pour réorganiser le trafic en cas d'incident électrique.
- 3) **Analyse de sensibilité sur des modèles à entrées indépendantes et à sortie dynamique** – Ce chapitre est consacré à la présentation de différentes méthodes d'analyse de sensibilité adaptées aux modèles à entrées indépendantes et à sortie dynamique. Nous détaillons trois méthodes d'analyse de sensibilité globale et présentons leurs caractéristiques.
- 4) **Application de la méthodologie sur un cas-test simple** – dans ce chapitre nous appliquons la démarche proposée sur un test ferroviaire simple en exécutant les différentes méthodes d'analyse de sensibilité décrites dans le **chapitre 3**. Une comparaison des méthodes d'analyse de sensibilité appliquées par rapport aux différents critères en termes de ressources informatiques sera exposée.
- 5) **Application de la méthodologie sur un ensemble de cas représentatifs** – les tests expérimentaux réalisés avec notre méthodologie au niveau industriel seront présentés dans ce chapitre.





# Chapitre 1

## Généralités sur le réseau ferroviaire électrique

---

### 1.1. Transport Ferroviaire

Un réseau ferroviaire est constitué d'un ensemble de lignes de chemin de fer, de gares et d'installations techniques diverses qui permettent la circulation des trains dans une zone géographique (région, pays, continent) pour répondre au besoin de transport de voyageurs et de marchandises. Dans ce paragraphe nous résumerons un peu d'histoire du transport ferroviaire. Nous présenterons ensuite le principe des systèmes d'électrification installés sur ces réseaux. Nous développerons quelques concepts spécifiques à l'exploitation ferroviaire et décrirons une synthèse de production ferroviaire.

#### 1.1.1. Un peu d'histoire des chemins de fer

Le chemin de fer s'est développé lors du boom ferroviaire des années 1840 [2]. Néanmoins, plusieurs innovations avaient eu lieu au cours des siècles précédents. Le premier chemin de fer ouvert au public a été le Surrey Iron Railway en Angleterre. Il a été construit en 1802 et ouvert le 26 juillet 1803, au sud de Londres. Des chevaux tiraient les wagons. La première locomotive à vapeur à fonctionner sur des rails a été essayée en 1804 au Royaume-Uni, mais cette tentative ne fut pas couronnée de succès car la locomotive était trop lourde. Le Middleton Railway fut en 1812 le premier chemin de fer à utiliser la vapeur avec succès. En France, la première ligne de chemin de fer est construite par le gouvernement dans la région de Saint-Etienne, entre 1827 et 1830. Cette ligne permet le transport du charbon. La première ligne construite spécifiquement pour le transport de voyageurs était la ligne qui relie la capitale Paris à Saint-Germain (19 km) en 1837. Cette ligne connaît un énorme succès : 18000 voyageurs sont transportés le premier jour d'exploitation. La première grande ligne internationale européenne relie Strasbourg et Bâle (140 km) en 1841. En Europe et en Amérique du Nord, la période de plus grand développement de chemin de fer va de 1848 à 1914. Durant cette période, le chemin de fer dominait le marché des transports. Dans les années qui suivent la guerre mondiale, la domination des chemins de fer sur l'économie des transports stagne puis amorce une régression sous l'effet de moyens de

transport concurrents : l'automobile et l'avion. La crise pétrolière de 1973 marque le début du renouveau du chemin de fer [3] et la construction de nouvelles lignes parcourues par des trains à grande vitesse. Le développement des lignes de chemin de fer à grande vitesse commence en France au début des années 80 lorsque la ligne Paris-Lyon est ouverte (1983). Les développements français ont été suivis par d'autres en Allemagne, en Italie, et en Belgique. La première ligne à grande vitesse de chemin de fer espagnole (Madrid-Séville) a été ouverte en 1992. Le succès technique de cette ligne a encouragé le gouvernement espagnol à lancer de nouveaux projets : Madrid-Barcelone-frontière française (800 km).

### **1.1.2. Histoire des systèmes d'électrification ferroviaire**

L'évolution des infrastructures a été accompagnée par une évolution des systèmes d'alimentation et du matériel roulant.

Historiquement, les premières lignes sont parcourues par des locomotives à vapeur. Le premier train à traction électrique, construit par le Baron Von SIEMENS, a été présenté à l'exposition universelle de Berlin en 1879. L'énergie est fournie à volonté aux locomotives sous forme de puissance électrique par l'intermédiaire des caténaires et des rails. Les locomotives sont équipées de machines électriques.

Entre 1879 et 1900, différentes techniques d'alimentation électrique ont été testées, mais les travaux ont porté essentiellement sur deux modes d'alimentation : le courant continu en basse et moyenne tension et le courant alternatif en haute tension monophasé. En 1900, on compte 12000 km de lignes électrifiées aux États-Unis et 3000 km en Europe. Ce développement s'est poursuivi dans le monde au cours des années 1930 et généralisé après la 2ème guerre mondiale, lors de la reconstruction des réseaux et de leur électrification. La France a, quant à elle, décidé d'investir un peu plus dans l'industrie ferroviaire après la première guerre mondiale. Elle a décidé d'abord d'harmoniser le type d'électrification en choisissant une alimentation en 1500V continu. Le continu est caractérisé par sa simplicité de mise en œuvre et les avantages de la machine à courant continu : fort couple à basse vitesse, et pilotage simple de la vitesse. L'utilisation du courant monophasé à 50 Hz n'était pas possible à cause des technologies utilisées pour les moteurs de traction (machines dites universelles, dont le collecteur posait des problèmes de durabilité à cette fréquence). Le monophasé à 16 Hz 2/3 était par contre utilisable car la fréquence est plus basse, mais il nécessitait des équipements spécialisés de conversion, de production et de transport. Face à ces inconvénients, de nombreux pays ont choisi de

développer des réseaux électriques ferroviaires en continu, alors que d'autres dont l'Allemagne ont préféré investir dans le monophasé 16 Hz 2/3. En France, l'électrification des lignes s'est effectuée d'abord dans le sud du pays, laissant de côté le nord et l'est de la France du fait de réticences des autorités militaires. Les chemins de fer sont nationalisés en créant le 1<sup>er</sup> janvier 1938 la société nationale des chemins de fer français (SNCF) dont le but est de fusionner tous les réseaux en un. Après la seconde guerre mondiale, la SNCF doit de reconstruire le réseau. Les évolutions technologiques auraient permis l'utilisation du continu sous 3000 V, mais les économies réalisées par rapport au 1500 V n'ont pas été jugées suffisantes pour retenir cette solution. Profitant des progrès de l'électrotechnique (moteurs plus performants, redresseurs permettant la conversion en courant continu dans les locomotives ...) il fut décidé d'utiliser le courant monophasé à 50 Hz sous une tension de 25000 V sur une partie du réseau. Le Nord et l'Est autrefois délaissés par l'électrification ont été les premiers à bénéficier de cette technologie. Le monophasé a plusieurs avantages par rapport au continu. Il permet d'élever facilement la tension de ligne, et donc de réduire les pertes Joule. Il limite les phénomènes de corrosion et les courants vagabonds dans le sol. La haute tension permet de diminuer la taille des caténaires et d'espacer les points d'alimentation des caténaires.

Ces avantages conduisent les pays qui n'avaient pas encore commencé à électrifier à adopter cette solution technique.

Le terme de Grande Vitesse apparaît dans les années 60. Les lignes à très grande vitesse (LGV) nécessitent des puissances plus grandes que les lignes classiques. Les niveaux de puissance requis (6,4 MW pour le TGV Sud-Est) nécessitent de passer au système d'alimentation 2x25 kV 50 Hz. Le premier octobre 1964 est inauguré le premier train à grande vitesse du monde, le Tokaido Shinkansen entre Tokyo et Osaka (515 Kilomètres). La vitesse maximale était de 200 km/h, pour un temps de parcours de 4 heures. Le Japon a conservé le record de vitesse jusqu'en 1981, date à laquelle la France prend la première place avec une vitesse de 380 km/h [4].

Le système 2x25 kV entraîne des coûts supplémentaires par rapport au 1x25 kV. Cela implique en effet la pose d'un câble supplémentaire (Feeder), l'utilisation de poteaux caténaires spécifiques et l'installation d'autotransformateurs. L'ensemble donc revient à augmenter le coût de l'électrification par kilomètre. En revanche, il y a moins de sous-stations car l'espacement est plus grand, donc on réduit le coût des divers raccordements au réseau de transport d'énergie haute tension. Cette technologie a aussi l'avantage de limiter les perturbations électromagnétiques engendrées par la ligne. Cela permet ainsi de réduire les coûts des

protections des circuits de télécommunication proche des voies (toutefois, cet argument devient aujourd’hui caduque avec la généralisation des fibres optiques en télécommunication).

Système d’électrification	Tension nominale (V)	Puissance par train (MW)
1500 V DC	1500	5
25 kV 50Hz	25000	10
50 kV 50 Hz (2×25 kV 50 Hz)	25000	20

**Tableau 1: Les systèmes d’électrification utilisés en Europe**

Le **Tableau 1**, récapitule les principaux systèmes d’électrification et les puissances associées (hors réseaux urbains tels que métros et tramways). Le 1500 V DC est utilisé aujourd’hui par le Japon, la Suisse, le Mexique, et Chicago (Suburbain service)... Le 25 kV 50 Hz est utilisé en Afrique du Sud, Turquie, Australie, Chine, Inde, Iran, Malaisie, Tunisie... et le 50 kV 50 Hz est aussi utilisé en Etats-Unis et Afrique du Sud... L’Allemagne et les pays d’Europe du Nord utilisent encore le AC 16 2/3 Hz pour des raisons historiques, mais pour faciliter l’interopérabilité à l’échelle du continent, ces pays développent progressivement le 50 Hz. Toutefois, cela prend du temps car la durée de vie des IFTE est très grande.

### **1.1.3. Présentation du réseau ferroviaire en France**

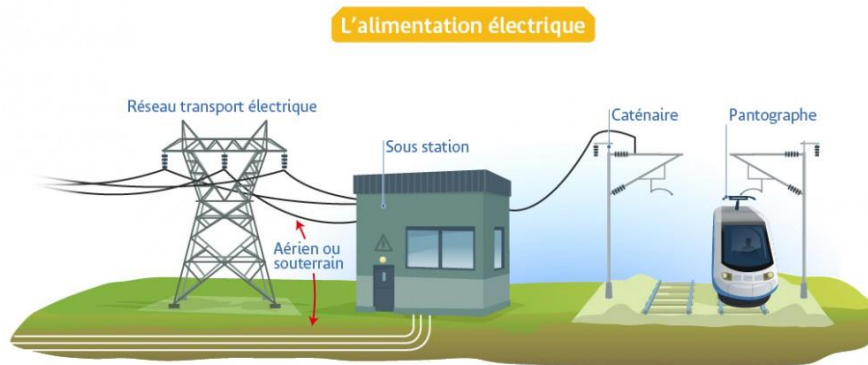
En France, le chemin de fer est un des moyens de transport très importants, avec 5 millions de voyageurs et 15 000 trains par jour. Le réseau ferroviaire s’étend sur une longueur totale de presque 30000 kilomètres, dont 15 687 km électrifiés, ce qui en fait le deuxième réseau ferroviaire d’Europe.

Un de ses points forts est sans doute son réseau de lignes à grande vitesse sophistiqué, avec près de 11000 km de lignes spécialement créées pour les trains à grande vitesse. Il joue aussi un rôle important dans le transport de marchandises (250000 tonnes de fret par jour). Ce réseau qui continue de se développer : plus de 1600 chantiers sont programmés et 5.7 Mrds euros seront investis dans le réseau en 2019 (1050 km de voies seront renouvelés et 500 aiguillages remplacés).

Actuellement, la moitié des lignes sont électrifiées, mais cela représente plus de 80% du trafic ferroviaire [5]. Pour les raisons historiques que nous avons évoquées, trois systèmes d'électrification coexistent sur l'ensemble du territoire : continu 1500 V, alternatif 1x25 kV 50 Hz et alternatif 2x25 kV 50 Hz. Par exemple, le TGV Paris-Lyon est alimenté successivement en 1500 V DC, 1x25 kV Hz puis 2x25 kV 50 Hz sur la portion grande vitesse. La diversité des types d'alimentation électrique, rend l'analyse du système ferroviaire complexe et nécessite des simulateurs capables de prendre en compte ces différents systèmes d'électrification.

#### 1.1.4. Principe des systèmes électriques ferroviaires

Un réseau électrique ferroviaire est composé des principaux éléments suivants (**Figure 1**):



**Figure 1: Les principaux équipements ferroviaires**

- ❖ Les **sous-stations** de traction sont réparties le long des lignes et permettent leur alimentation électrique. Chaque sous-station est connectée au réseau public haute tension 63 kV et alimente une section de ligne par l'intermédiaire d'un transformateur qui adapte le niveau de tension de l'énergie électrique fournie aux caténaires.
- ❖ Les **caténaires** transportent l'énergie électrique vers les trains. Elles sont composées de fil de contact en cuivre (ou alliage de cuivre) et de câbles porteurs (principalement en bronze ou en aluminium armé acier). L'énergie est transmise au train par un contact glissant au niveau du pantographe comme le montre la **Figure 2**.
- ❖ Les **rails**, dans ce contexte, assurent le retour du courant électrique vers les sous-stations. Une partie du courant de retour passe par le sol.
- ❖ Les **postes de sectionnement** assurent l'isolation électrique entre les secteurs alimentés par des sous-stations différentes.

- ❖ Dans le système 2x25 kV (**Figure 4**) utilisé pour les lignes à grande vitesse, il existe un troisième conducteur, appelé **feeder** -25 kV, en opposition de phase avec la caténaire. Associé à des **autotransformateurs** répartis le long de la ligne, le feeder assure le transport du courant de retour. Dans ce système, le train est alimenté en 25 kV, mais l'énergie électrique est transportée en 50 kV, ce qui limite les pertes et permet d'espacer les sous-stations.



Figure 2: Une caténaire est composée de câbles porteurs en bronze ou en aluminium, de ligne de contact et de câbles conducteurs en cuivre

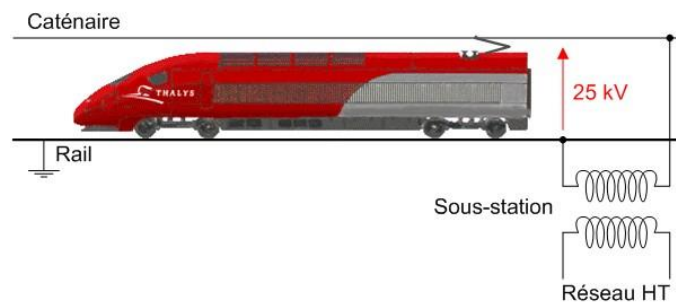


Figure 3: Le schéma général d'alimentation en 1x25 KV

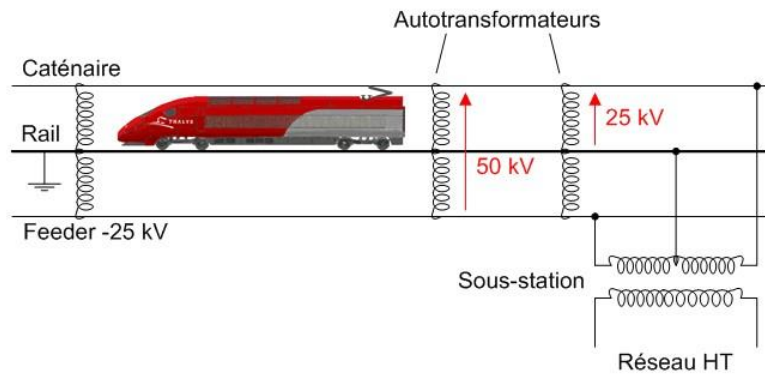


Figure 4: Le schéma général d'alimentation en 2x25 KV

### 1.1.5. Trafic et missions des trains

Le trafic ferroviaire est constitué de l'ensemble des trains qui circulent sur le réseau pendant un certain intervalle de temps. Vu de l'utilisateur du réseau, ce trafic se traduit par des grilles horaires, avec des heures de départ d'une gare et des heures d'arrivée à une autre gare. La construction de cette grille est faite très en amont et doit prendre en compte la disponibilité des différentes ressources nécessaires à la circulation des trains : matériel roulant, personnel navigant, quais, voies. Des marges de sécurité sont prévues afin d'absorber les inévitables aléas lors de la réalisation effective du trajet.

Vu du conducteur d'un train, un trajet donné se traduit par une « mission », définie comme une succession de points d'arrêt commerciaux ou techniques (points de passage ou de service nécessaires pour la réalisation du plan de transport) et des temps de trajet entre ces points. Cette mission se traduit par des consignes (accélérer par exemple) tout au long du trajet, et le conducteur doit atteindre et respecter les vitesses de consigne définies par sa feuille de route sans jamais les dépasser, et ce quelles que soient les contraintes extérieures : relief, courbes, conditions climatiques.

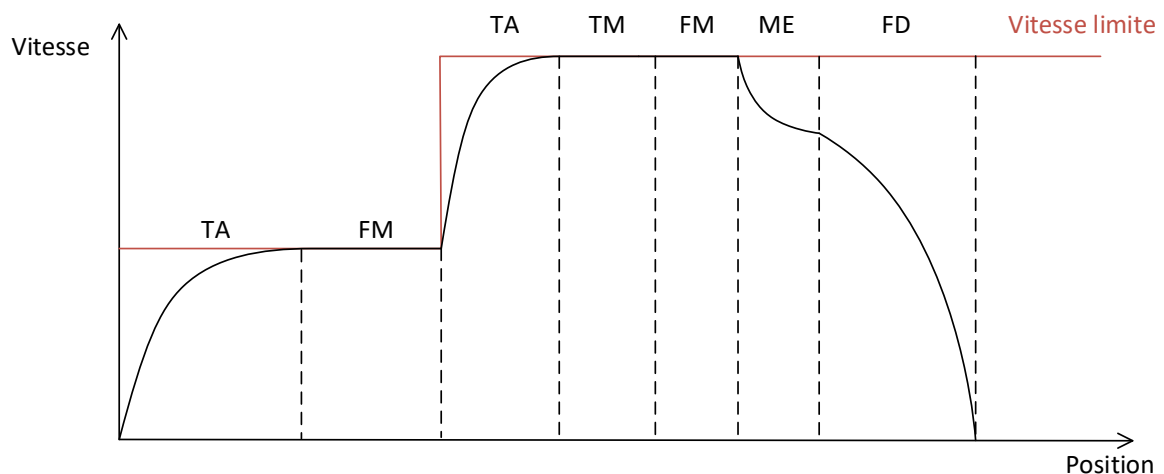
Pour accomplir sa mission, le conducteur de train peut tractionner, freiner, ou ne rien faire (roue libre). On distingue ainsi usuellement cinq modes de pilotage spécifiques SNCF, dont le séquençage permet de réaliser la mission :

- Traction Accélération (TA) : le conducteur du train accélère à pleine puissance pour atteindre au plus vite la vitesse de consigne.
- Traction Maintien (TM) : le conducteur ajuste la puissance afin de maintenir une vitesse constante.

- Marche sur l'Erre (ME) : le conducteur coupe la traction sans pour autant freiner, afin de profiter de l'inertie du train (roue libre).
- Freinage Maintien (FM) : ce freinage peut être nécessaire éviter d'accélérer en descente.
- Freinage Décélération (FD) : le conducteur freine pour respecter une consigne de vitesse à venir ou un arrêt en gare.

On appelle « marche » d'un train la succession de consignes que le conducteur doit suivre tout au long du trajet. Ces consignes portent à la fois sur le mode de pilotage et sur la vitesse de consigne.

La **Figure 5** donne un exemple de marche, où se succèdent les consignes suivantes : TA jusqu'à la vitesse  $V_1$ , FM à la vitesse  $V_1$  (on en déduit que le train est en descente), TA jusqu'à la vitesse  $V_2$ , TM à la vitesse  $V_2$ , FM à la vitesse  $V_2$ , ME, FD pour stopper le train à une position donnée.



**Figure 5: Marche-type d'un train**

Les marches sont calculées de façon à minimiser l'énergie mécanique déployée par le train pour réaliser son parcours, tout en respectant les contraintes de durée de la mission [6]. Les calculs intègrent une certaine flexibilité afin de permettre au conducteur de rattraper un éventuel retard, ou encore de placer les phases de traction aux meilleurs endroits de la ligne. Le trafic d'une ligne ferroviaire est constitué d'un certain nombre de trains qui circulent suivant des horaires préétablis, suivant leurs marches respectives. La mission d'un train sur une ligne constitue une « circulation » et l'ensemble des circulations peut être reporté sur un graphe de circulation qui représente la position de chaque train de la ligne en fonction du temps (**Figure 6**). La grille de circulation permet de visualiser l'espacement en temps et en espace entre les différentes



circulations. La trace correspondante à un train sur le graphe est appelée sillon, et définit un créneau espace-temps pendant lequel la voie doit être réservée pour le train considéré.

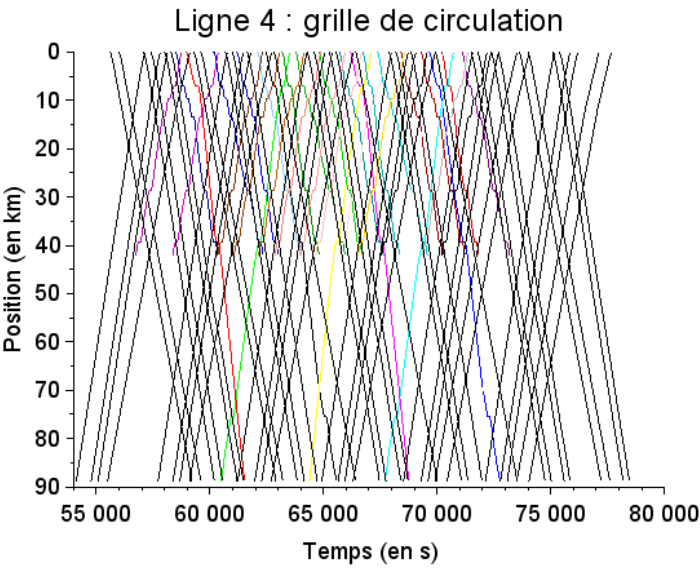


Figure 6: Exemple d'une grille de circulation

**1.1.6. La production ferroviaire**

La production ferroviaire représente l'ensemble des opérations permettant les circulations des trains dans un réseau. Cette production passe par plusieurs étapes qui commencent très en amont et se terminent par la gestion opérationnelle, consistant à s'assurer un bon fonctionnement des opérations en temps réel.

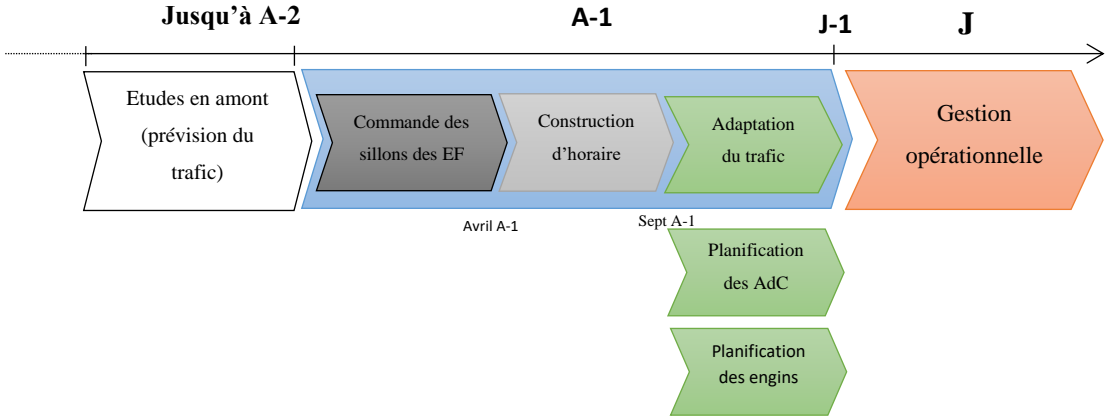


Figure 7: La chaîne de la production ferroviaire de la planification amont jusqu'à la gestion opérationnelle

La **Figure 7** représente les principales étapes de la production ferroviaire, que nous allons décrire rapidement dans la suite de cette section. Plus de détails sont disponibles dans les références [7] et [8].

#### *1.1.6.1. Etudes amont : capacité du réseau et prévision du trafic*

L'étape la plus en amont consiste à établir la capacité de transport du réseau ferroviaire, à différentes échelles. Ces études concernent les infrastructures.

La notion de capacité d'une ligne est définie comme le nombre maximum de trains pouvant circuler dans un intervalle de temps donné, tout cela dans les conditions pratiques d'exploitation, pour une structure de ligne, une structure d'horaire, et une qualité de service données respectant les contraintes de sécurité et les contraintes clients (temps de trajet, ...) [9]. Il s'agit par conséquent d'une notion complexe faisant intervenir de nombreux paramètres et facteurs tels que :

- La situation des différentes infrastructures (voies, signalisation, IFTE<sup>5</sup>),
- Les caractéristiques techniques liées aux missions des trains (vitesse, accélération, freinage, longueur de convoi, etc.),
- La qualité de l'exploitation (ou qualité de service gestionnaire) qui est assimilée à la stabilité de l'horaire vis-à-vis des perturbations ou des interruptions (travaux planifiés pour l'entretien, la maintenance ou la rénovation des installations, retards, grands incidents électriques, etc.),
- Le plan de transport (ordonnancement des trains, types des trains : TGV, TER, FRET, etc...).

Par ailleurs, la SNCF réalise des études prévisionnelles de trafic afin de déterminer s'il y a lieu de faire évoluer les infrastructures pour renforcer la capacité du réseau. A ce niveau, on est dans une phase d'anticipation du besoin à long terme.

#### *1.1.6.2. Répartition de capacité entre entreprises ferroviaires*

En parallèle, mais à plus court terme, les entreprises ferroviaires, dont SNCF Mobilités, expriment leurs besoins sous forme de demandes de sillons auprès de la Direction de l'Attribution des Capacités (DAC) de SNCF Réseau [10]. La DAC est en relation avec de

---

<sup>5</sup> Infrastructures Fixes de Traction Électrique

nombreux partenaires en raison de forts enjeux liés à la capacité dans la production ferroviaire. Son rôle est de centraliser l'ensemble des demandes de sillons de manière cohérente et de réaliser un arbitrage entre ces demandes quand c'est nécessaire. Ces études amont, qui assurent une mise en forme des besoins de sillons et une transparence entre les activités, sont faites au moins un an et demi à l'avance. Après réception des études amont, la Direction de l'Attribution des Capacités déclenche des études de faisabilité du trafic qui tiennent compte de l'ensemble des contraintes (travaux, évolutions de la grille de trafic) pour confirmer la compatibilité des besoins des entreprises ferroviaires avec la capacité du réseau.

### 1.1.6.3. Conception d'une grille horaire

La réponse à la demande de transport ferroviaire se traduit par l'élaboration d'une grille horaire, ou graphique de circulation. L'axe vertical correspond aux positions le long de la ligne, et l'axe horizontal représente le temps. Toutes les circulations des trains prévus sont représentées par leurs sillons, c'est-à-dire la succession de leur position dans le temps. La **Figure 8** montre un exemple de graphe de circulation entre Strasbourg et Colmar, entre 16h et 18h. Chaque ligne correspond au sillon d'un train, et on suit le déplacement du train au cours du temps. La pente représente la vitesse du train à la position considérée. Les arrêts correspondent donc à des segments horizontaux de longueur proportionnelle à la durée de l'arrêt. Les sillons dont la pente est grande correspondent à des trains rapides. Sur la section Strasbourg-Selestat, on repère clairement les trains omnibus qui font le trajet en 45 mn (sillons bleus) et les trains plus rapides qui font le même trajet en moins de 20 mn (sillons violet).

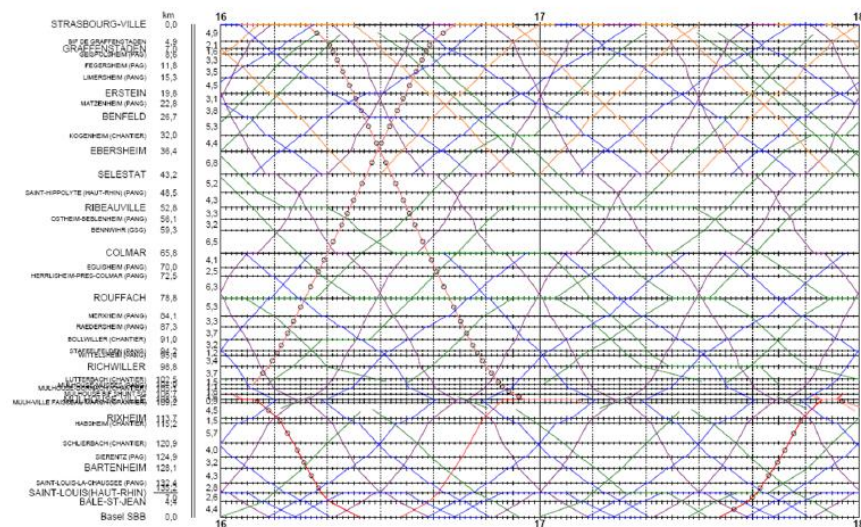


Figure 8: Exemple de graphique de circulation

Cette grille précise les heures de départ et d'arrivée des trains aux différentes stations de leur parcours. Elle définit également la réservation de l'infrastructure ferroviaire dans le temps et l'espace pour chaque circulation.

Le profil d'un sillon résulte de différents facteurs :

- Les caractéristiques de l'infrastructure : type de signalisation, profil de la ligne (rampes, pentes et rayons de courbure), alimentation électrique. . .
- les caractéristiques du convoi : courbe effort/vitesse du ou des engins moteurs, longueur, tonnage et résistance à l'avancement,
- le nombre, la localisation et la durée des arrêts,
- le niveau de densité et d'hétérogénéité des sillons environnants sur le graphique
- la présence de travaux.

Le travail des horairistes (agents chargés de l'élaboration du graphique de circulation) consiste à construire le graphique de circulation en positionnant les sillons demandés. Cet ordonnancement représente la façon dont les trains se succéderont effectivement sur l'infrastructure le jour J. Cette construction repose sur un ensemble de règles, de normes de tracé horaire et des contraintes métiers répertoriées dans le document de référence du Réseau Ferré National « Référentiel technique de tracé des sillons » [11]. Ce référentiel décrit pour chaque ligne la distance minimale entre deux sillons de même sens, et les particularités techniques à prendre en compte. Les informations sont régulièrement mises à jour en tenant compte des retours d'expérience, des évolutions de l'infrastructure et de l'exploitation, de l'environnement, et en règle générale de tout ce qui a une incidence sur le trafic.

La méthode de conception d'une grille horaire à la SNCF se base sur un modèle représentatif du réseau et du fonctionnement du système ferroviaire. La plupart des outils logiciels exploités à la SNCF pour le processus de planification reposent fortement sur l'expertise humaine et embarquent peu (voire pas) des modules d'optimisation et d'aide à la décision.

Jusqu'à présent le seul levier dont dispose la SNCF pour assurer la robustesse des horaires est la marge de régularité. La tendance naturelle est aujourd'hui de régler les problèmes de non robustesse du système ferroviaire par l'introduction, lors de la construction des horaires, de marges de régularité (temps supplémentaires). En augmentant les temps de parcours, ces marges ont un effet négatif sur la capacité du réseau, sur la pertinence des offres, voire sur la mobilisation des équipes. On peut retenir qu'il y a des optima pour les valeurs de ces marges :

- Trop faibles, ces dernières rendent l'exploitation tendue, donc plus fragile face aux perturbations,
- Trop élevées, elles conduisent à une sous-utilisation de la capacité et sont propices au relâchement de la précision des acteurs opérationnels qui perdent la notion de « tenir la minute ».

Il n'existe pas aujourd'hui à la SNCF d'indicateur de mesure de la robustesse de la conception [12].

#### **1.1.6.4. Planification à J-1**

Les grilles horaires sont établies plusieurs mois à l'avance. Il est cependant nécessaire de faire des ajustements de la veille pour le lendemain pour gérer d'éventuels imprévus ou pour répondre à des demandes de dernière minute compatibles avec la capacité résiduelle du réseau. C'est la phase d'adaptation du trafic.

C'est également à ce moment que l'affectation des ressources matérielles (type et nombre de rames ou de voitures, engins de traction) et humaines (agent de conduite, personnel de bord).

#### **1.1.6.5. Gestion opérationnelle :**

Cette phase s'intègre dans le processus de production au jour J. En gestion opérationnelle, le graphique de circulation constitue la référence pour la circulation des trains. Les agents s'engageant dans cette phase utilisent cette référence pour accomplir plusieurs missions dont les principales sont [13]:

- Assurer le suivi global du trafic (voyageurs et marchandises) en temps réel,
- Effectuer les demandes de dérogation aux règles établies concernant la gestion des correspondances entre trains, ou d'arrêts exceptionnels, de rétention, de suppression ou de mise en marche des trains,
- Identifier au plus tôt les risques de perturbations, en communiquant avec les autres agents à partir d'un système de messagerie,
- Evaluer l'ampleur et l'impact des éventuelles perturbations (identifier les trains touchés, analyser et évaluer les ruptures d'acheminement, comptabiliser le nombre de clients transportés), puis recueillir les informations utiles aux décisions d'adaptation du plan de transport...

- En cas d'interruption du trafic sur une voie ou d'incidents divers, organiser la prise en charge des voyageurs en concertation avec le chef régulateur pour utiliser des moyens de transport de substitution (autocars...) ...

La densification du trafic entraîne la quasi-saturation de l'infrastructure dans un certain nombre de zones critiques, ce qui rend les incidents plus fréquents et surtout leurs conséquences plus importantes et difficiles à gérer efficacement. La principale spécificité est liée à l'aspect temps réel de la gestion des circulations. Néanmoins le temps de calcul s'avère évidemment une limite opérationnelle forte. Donc à défaut d'avoir une solution optimale, il faut au minimum disposer d'une bonne solution réalisable rapidement.

La régulation ferroviaire nécessite donc de plus en plus d'outils d'optimisation et d'aide à la décision adaptés et la SNCF est impliquée activement dans le développement de tels outils [14] [15]. Par ailleurs, la SNCF réalise de nombreuses études en amont afin de préparer des solutions de secours en cas d'incident.

Notre thèse s'inscrit dans le cadre de la replanification du trafic dans la phase gestion opérationnelle, indépendamment des autres phases. On s'intéresse au cas particulier des incidents sur infrastructure électrique. Plus précisément, l'objectif de notre travail est de fournir un outil s'appuyant sur la simulation électrique du réseau pour proposer des solutions d'ajustement du trafic quand ce type de défaillance se produit. En pratique, les calculs requis sont longs, de sorte que l'outil sera utilisé pour préparer à l'avance un ensemble de scénarios de secours.

## **1.2. Simulateurs électriques ferroviaires**

Notre étude porte sur l'interaction entre trafic et alimentation électrique. Il faut donc disposer d'un modèle qui décrit correctement ces interactions. Comme nous l'avons vu précédemment, un réseau électrique ferroviaire est un système complexe qui met en jeu de très nombreux trains se déplaçant simultanément sur l'ensemble du réseau français, impliquant de nombreuses infrastructures. Par conséquent, l'étude de ce système repose sur l'utilisation de la simulation numérique.

### 1.2.1. Principe de la simulation électrique ferroviaire

Un simulateur électrique ferroviaire permet de déterminer les tensions et les courants dans l'ensemble du réseau électrique pour un trafic ferroviaire donné. Le trafic est défini par un ensemble de trains qui circulent suivant une certaine grille horaires, avec des instructions de vitesse définies par les marches. Le simulateur calcule également les profils de vitesse des trains effectivement réalisés à partir des consignes de vitesse. Par exemple, lors de la phase de démarrage, la consigne est d'accélérer jusqu'à une certaine vitesse. Le profil de vitesse effectivement réalisé dépend de la puissance des engins moteurs et de la capacité du réseau électrique à fournir la puissance appelée.

De manière générale, un simulateur électrique ferroviaire se compose de trois modules principaux. Le premier module contient les modèles de comportement électromécanique des locomotives (appelées « engins » dans le vocabulaire métier). Les variables d'entrées sont l'effort de traction demandé par le conducteur et la vitesse du train, et le modèle d'engin détermine les grandeurs électriques au niveau du pantographe, en prenant en compte la tension d'alimentation à ce niveau. En effet, si cette tension descend au-dessous d'un certain seuil, l'effort de traction est réduit de façon à limiter la puissance appelée par le train. Le deuxième module calcule les tensions et les courants dans l'ensemble du réseau électrique en fonction de la position des trains et de la puissance électrique appelée par chacun. Il s'agit d'un calcul de circuit classique, à ceci près que la topologie du réseau électrique dépend de la position des trains et évolue au cours de la simulation. Le troisième module couple les deux premiers et calcule pas à pas l'avancement des trains en fonction d'une part de l'effort développé par les engins moteurs à la demande des conducteurs, et d'autre part des diverses forces que l'environnement exerce sur les trains (résistance à l'avancement fonction de la vitesse, du profil de la voie, de la masse du train, ...). Au cours de ce calcul, il est nécessaire de prendre en compte l'évolution de la topologie du réseau électrique au fur et à mesure de l'avancement des trains.

Parmi les simulateurs électriques existants utilisés dans le monde on peut citer :

- **TPSS** [16] est un simulateur électrique développé et utilisé en Suède pour simuler le trafic des trains et son influence sur le système d'alimentation.
- **TrainOps** est développé par LTK engineering, un simulateur électrique pour tous les types de systèmes ferroviaires de réseau [17].

- **Fabel** est un logiciel de simulation de véhicules électriques et de réseaux d'alimentation électrique développé par ENOTRAC [18].
- **Sitras Sidytrac** est un logiciel de simulation pour les systèmes de traction électrique DC ou AC ou les deux. Il permet la conception du système et les divers calculs, développé par Siemens [19].
- **TracFeed** est développé par Balfour Beatty rail, est un programme informatique pour le calcul dynamique des systèmes de traction [20].
- **CATMOS** est développé par Balfour Beatty rail, simulateur utilisé pour l'optimisation et la simulation pour le développement de nouveaux systèmes de lignes et l'optimisation de modifications de conception spéciales aux installations fixes.
- **OpenPowerNet** [21] : est un logiciel de simulation d'alimentation en traction et de performance des trains dont la simulation opérationnelle est réalisée par OpenTrack [22] en co-simulation avec la simulation électrique, développé par l'Institut für Bahntechnik GmbH, BO Dresden.
- **RAILSIM X** [23] : simulateur développé par SYSTRA (Canada) pour la modélisation et la simulation du fonctionnement et la performance de tous les systèmes ferroviaires
- **µPAS** [24]: simulateur électrique développé par l'Allemagne et utilisé par la Suisse, Autriche et Suède.
- **ESMERALDA NG** : simulateur développé par l'ingénierie de la SNCF et détaillé dans le paragraphe suivant.

### 1.2.2. **ESMERALDA NG, le simulateur développé par la SNCF**

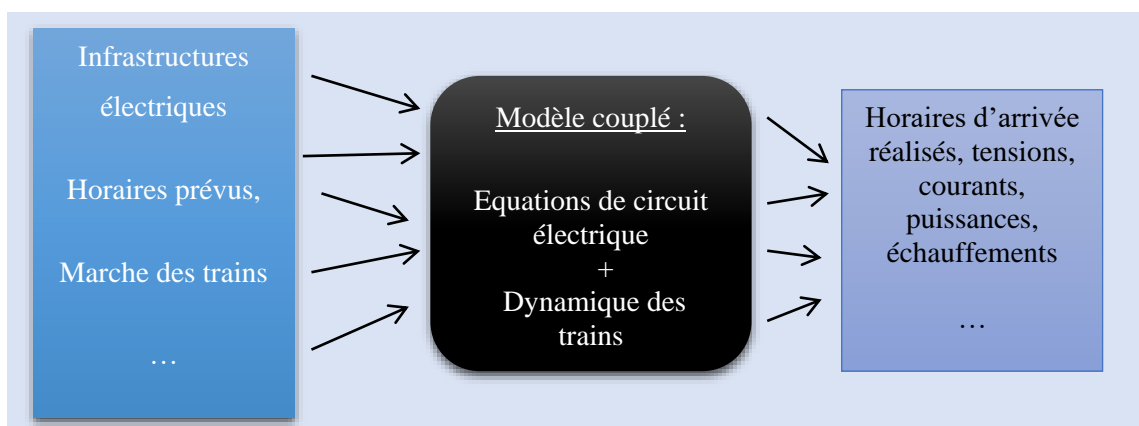
Le simulateur utilisé dans ce travail est **ESMERALDA NG**, la nouvelle version de **ESMERALDA©** (Etude par Simulation sur Modèles Electriques Représentatifs de l'Alimentation et des Locomotives pour le dimensionnement des Appareils) [25]. Il s'agit d'une suite logicielle développée au sein du service de dimensionnement de SNCF Réseau. Ce simulateur fait l'objet de plusieurs processus de qualification et de validation. Il met en œuvre un modèle multi-physique du réseau (mécanique/électrique/thermique). Les données d'entrée sont :

- Les caractéristiques mécaniques et électriques des voies et des IFTE,
- Les caractéristiques mécaniques et électriques des trains,



- Le trafic défini d'une part par les horaires des trains (heures de départ et de passage en différents points du trajet, et d'autre part par les marches-types des trains en circulation.

A partir de ces données, le simulateur réalise le calcul couplé de la dynamique des trains et des équations de circuit afin de déterminer l'évolution au cours du temps des grandeurs mécaniques des trains (accélérations, vitesses, positions, effort à la jante) ainsi que des grandeurs électriques (tensions, courant, puissances actives et réactives) des différents composants électriques du réseau (engins et infrastructures). Un calcul en post-traitement permet de déterminer les échauffements qui en résultent (**Figure 9**). Il s'agit d'un modèle numérique complexe, non linéaire, comportant un grand nombre d'entrées et de sorties dynamiques du fait du grand nombre de trains en circulation (des centaines de trains).



**Figure 9: Schéma de principe d'ESMERALDA NG**

Ce logiciel développé dans sa première version par [26] est devenu un outil interne à la SNCF. Il est reconnu comme une référence et est utilisé par différentes sociétés d'ingénierie ferroviaire francophones. Il permet d'analyser les systèmes 1500 V DC, 1x25 kV 50 Hz et 2x25 kV 50 Hz. Il est utilisé pour le dimensionnement des installations fixes de traction électrique. Ce dimensionnement consiste à déterminer les paramètres électriques nécessaires à la définition des éléments constitutifs de ces installations (type de caténaires, puissance de transformateurs...). Le dimensionnement se fait usuellement en simulant le trafic d'une ligne. Le principe est de choisir un trafic dimensionnant que l'on va faire rouler sur la ligne. On regarde ensuite la qualité de l'alimentation fournie aux trains ainsi que les paramètres des sous-stations pour dimensionner les installations.



## Chapitre 2

# Problématique de la gestion des incidents ferroviaires et proposition d'une méthodologie de résolution

---

### 2.1. Gestion des incidents : état de l'art

#### 2.1.1. Introduction

Les systèmes ferroviaires sont des systèmes très complexes (nombreuses lignes, trafic hétérogène, centaines des trains...). Par conséquent, les processus opérationnels comme la planification et la réorganisation du trafic sont des domaines riches en problème d'optimisation intéressants. Parmi les problèmes d'optimisation abordés dans la littérature nous mentionnons particulièrement :

- (i) La conception des grilles horaires,
- (ii) La gestion des incidents qui perturbent les circulations de trains

Notre problème concerne la gestion des incidents sur infrastructure électrique. Il s'agit d'un type d'incident particulier, qui limite l'énergie transmissible sur une certaine portion du réseau et affecte de ce fait sa capacité. La gestion de l'incident consiste à adapter au mieux le trafic à la puissance transmissible par le réseau. Avant d'exposer la démarche proposée pour résoudre ce problème, nous présentons dans cette partie une revue bibliographique des différentes méthodes utilisées pour la gestion des différents types d'incidents ferroviaires.

#### 2.1.2. Les différents types d'incidents ferroviaires

Les opérations d'un système ferroviaire sont inévitablement sujettes à des incidents non prévisibles, qui provoquent des retards : défaillances techniques, conditions météorologiques défavorables, ...). Dans un système très contraint, avec un trafic de plus en plus dense, le retard d'un seul train peut impacter la circulation de nombreux autres trains et empêcher la réalisation des plannings prévus. Pour les passagers, les conséquences sont des retards ou des annulations de trains, des correspondances non assurées, des trains bondés sans place assise. Les trains de marchandises sont également affectés, principalement sous la forme de retards ou de trains

déroutés. Les incidents perturbent le trafic et ont de nombreuses conséquences négatives pour les voyageurs (retard, inconfort) et les opérateurs (pertes financières) et il est nécessaire de rétablir le plus vite possible une situation normale, conforme aux grilles horaires prévues. La gestion des incidents ferroviaires consiste donc à limiter l'impact d'un incident sur le trafic, puis à rétablir au plus vite et dans les meilleures conditions une situation normale, conforme aux grilles horaires prévues.

Actuellement, les personnes en charge des modifications (les répartiteurs) prennent des décisions, principalement en fonction de leur expérience et de leur savoir-faire, sans soutien décisionnel intelligent. Cependant, un grand nombre de travaux de recherche récents ont eu pour objectif de développer des modèles mathématiques et des algorithmes de récupération d'une situation perturbée afin de soutenir les ingénieurs dans leur processus d'ajustement décisionnel.

Les auteurs de [27] définissent un incident dans le cadre d'opérations aériennes comme « un événement ou une série d'événements rendant les horaires prévus pour l'aéronef, l'équipage, etc. ... impossibles ». Dans notre document, nous utilisons la même définition pour les opérations ferroviaires, en remplaçant « aéronef » par « matériel roulant ». La gravité d'un incident, difficile à quantifier, est évaluée à partir de deux critères : durée nécessaire pour rétablir une situation normale et nombre de trains touchés.

La synthèse présentée dans [28] propose un aperçu des modèles et des algorithmes de récupération en temps réel d'une situation perturbée. Les incidents sont classés suivant leurs conséquences en termes de gestion des ressources.

- Une perturbation « légère » (disturbance) correspond à un incident qui perturbe la grille horaire mais peut être géré sans rééchelonner le planning des engins et des équipages. C'est typiquement le cas quand le léger retard d'un train affecte un grand nombre de trains par effet de cascade, mais que le retard de chaque train reste limité.
- Une perturbation « forte » (disruption) affecte la grille horaire, mais aussi le planning des matériels roulants et des équipages. Cela correspond souvent à une défaillance d'infrastructure ou de matériel roulant.

Par ailleurs, les approches sont classées en « vue macroscopique » et « vue microscopique » selon le niveau de modélisation du système. Une modélisation macroscopique est fondée sur une représentation très globale du système sous la forme d'un graphe dont les nœuds et les arcs

sont respectivement les stations et les lignes les reliant. Ces arcs sont caractérisés pas la capacité de transport de la ligne correspondant. La modélisation microscopique du système correspond à une description plus fine. Elle décrit précisément la topologie du réseau et intègre des informations telles que la position des signaux, le découpage des cantons, les pentes... Cette distinction microscopique/macrosopique s'applique également à la modélisation du trafic (flux global de trains, ou trains suivis individuellement).

Un dernier critère de classement porte sur les objectifs prioritaires lors de la gestion de la situation perturbée. On peut se focaliser sur les intérêts des opérateurs ferroviaires (limiter les retards et les trains annulés) ou sur ceux des passagers (temps total de voyage, nombre de correspondances).

Ces critères sont récapitulés dans le **Tableau 2** [29].

Critère		Description
Type d'incident	Perturbation	Un petit incident peut être géré en rééchelonnement la grille horaire seulement sans rééchelonner les autres ressources (tels que les équipages et le matériel roulant)
	Interruption	Un grand incident influençant fortement les horaires et exigeant de re-planifier et reporter les ressources (tels que les équipages et le matériel roulant)
Type de modèle	Infrastructure en vue microscopique	Représentation très précise de l'infrastructure ferroviaire afin de calculer les temps de parcours et les avancées entre les trains
	Infrastructure en vue macroscopique	Représentation de haut niveau d'une infrastructure ferroviaire, en considérant seulement les stations et les voies (les détails sur les signaux sont ignorés)
Modèle de trafic	Grille horaire en vue microscopique	Des informations détaillées sur les itinéraires et les systèmes de signalisation dans les stations sont déterminées
	Grille horaire en vue macroscopique	Détermine les heures d'arrivée et de départ de chaque train dans chaque station
Type d'objectif	La mise au point sur les opérations	Se concentrer sur la minimisation des effets négatifs liés aux compagnies ferroviaires, tels que les retards ou le nombre de trains annulés
	La mise au point sur les passagers	Se concentrer sur la minimisation des effets négatifs liés aux passagers, tels que le temps total de voyage ou le nombre de connexions

**Tableau 2: Les principaux critères pour classer les travaux concernant la replanification des horaires ferroviaires**

Les travaux portant sur la gestion des perturbations fortes sont moins nombreux que ceux qui traitent la gestion des perturbations faibles. Par ailleurs, on note que la plupart des recherches traitant les perturbations faibles s'appuient sur une représentation du système au niveau microscopique

Dans les sections nous présenterons les approches proposées dans la littérature pour la gestion des situations faiblement perturbées, puis des situations fortement perturbées. Nous distinguerons les méthodes dédiées aux critères mono-objectifs d'une part et multi-objectifs d'autre part.

### **2.1.3. Réorganisation d'un trafic faiblement perturbé**

Le problème de la replanification des horaires de trains en cas d'incident a reçu une grande attention dans la littérature scientifique récente, en particulier en cas de perturbations mineures.

Dans la plupart des travaux cités ci-dessous, le réseau ferroviaire est représenté au niveau microscopique (c'est-à-dire une modélisation fine du réseau, avec des informations précises telles que la position des signaux, le découpage des cantons...) plutôt qu'au niveau macroscopique. Dans la plupart de ces recherches, les problèmes ont été modélisés linéairement et formulés en programmation linéaire mixte en nombre entier (MILP), et résolus par CPLEX [30] soit avec des méthodes exactes soit avec des méthodes heuristiques pour accélérer la recherche. Dans ces recherches les contraintes prises en compte ont été formulées sous forme d'équations linéaires. Les modèles sont simples à résoudre, ne faisant pas appel à un simulateur physique non linéaire lourd. L'alimentation électrique étant dans ces cas supposée toujours suffisante il n'est pas besoin d'utiliser une simulation électrique de trains. De côté de l'objectif, la littérature de la réorganisation des perturbations se concentre particulièrement sur la réduction des retards.

Dans ce paragraphe, nous présentons les différentes méthodes utilisées pour résoudre la replanification de la grille horaire pendant une perturbation faible. Les travaux sont divisés en deux parties : (A) les travaux qui ont pris en compte un seul objectif d'optimisation et (B) les travaux qui ont pris en compte plusieurs objectifs d'optimisation.

#### ***(A). Travaux menés dans le cadre d'optimisation mono-objectif***

Dans [31], les auteurs utilisent une méthode itérative de replanification au niveau microscopique (« alternative graph formulation ») en temps réel qui génère une solution acceptable respectant les contraintes de signalisation et de sécurité dont l'objectif est de minimiser les retards consécutifs des trains durant les perturbations. L'approche itérative utilisée contient des méthodes exactes comme l'algorithme B&B « Branch and Bound ». Le même travail est repris dans [32], mais cette fois les auteurs ont ajouté l'idée d'une grille horaire

flexible en tant que politique efficace qui offre plus de liberté pour résoudre les conflits en améliorant la ponctualité sans diminuer la capacité des lignes. Cette gestion en temps réel aussi est abordé avec les mêmes auteurs dans [33], mais cette fois en utilisant un système appelé ROMA (Railway traffic optimization by means of alternative graphs) afin de récupérer automatiquement les perturbations. ROMA est capable de contrôler automatiquement le trafic, tout en tenant compte des distances minimales entre les trains consécutifs. Le système de ROMA est conçu comme un système d'aide à la décision pour les contrôleurs de trafic [34]. Une formulation à programmation en nombre entiers mixte (MIP) est présentée dans [35] pour le problème afin de trouver une nouvelle grille horaire après avoir des perturbations comme des retards pour certains trains. Dans l'objectif de minimiser le retard total, les auteurs ont proposé d'utiliser une approche fondée sur « local-branching-type cuts » [36].

Lorsque de telles des perturbations se produisent, le travail consiste à détecter et à résoudre les conflits significatifs. Le travail dans [37] aborde le problème de résoudre plusieurs conflits avec l'objectif de minimiser les retards totaux. Les auteurs ont utilisé un algorithme glouton afin de résoudre un seul conflit à chaque étape et d'obtenir la solution optimale visant uniquement le conflit actuel et indépendamment de tous les autres en même temps, jusqu'à ce que tous les conflits soient résolus. Ainsi, l'optimisation du problème avec une grande taille a été divisée en une séquence de problèmes de très petite taille et la solution a pu être obtenue rapidement.

Dans l'objectif de minimiser la somme des retards de tous les passagers, les auteurs de [38] ont formulés le problème en MILP au niveau microscopique du réseau prenant en compte les contraintes de capacités. Ils ont utilisé quatre approches heuristiques en temps réel pour résoudre le problème en fixant l'ordre des trains selon la grille horaire initiale.

Les auteurs de [39] ont utilisé un algorithme évolutionnaire fondée sur la permutation de trains, pour reconstruire la grille horaire en insérant des trains les uns après les autres dont l'objectif est de minimiser les retards accumulés. Cet algorithme peut être hybridé avec l'outil commercial de programmation mixte en nombres entiers (MIP) CPL d'ILOG : la méthode évolutionnaire permet d'obtenir rapidement une solution bonne mais sous-optimale et cette solution intermédiaire est affinée avec CPLEX.

Les problèmes qui constituent un nombre important de contraintes et de variables nécessitent un temps de calcul important. Pour cette raison les auteurs dans [40] et [41] ont utilisé un algorithme glouton pour s'assurer d'avoir rapidement (temps de calcul inférieur à 30 s) une



solution acceptable, indépendamment du type de scénario de perturbation. L'algorithme proposé possède trois phases. La phase 1 est la phase de prétraitement, la phase 2 est une recherche de parcours en profondeur (depth-first) afin de trouver rapidement une solution réalisable et suffisante en créant une première branche complète de l'arbre. Au cours de la phase 3, l'algorithme utilise le temps de calcul autorisé restant pour améliorer la solution existante en revenant aux nœuds potentiels dans l'arborescence existante et les branches pour trouver de solutions dont l'objectif est de minimiser les retards.

La SNCF aussi a étudié le problème de la replanification de la grille horaire durant les perturbations afin de minimiser les retards conséquents [42], ils ont formulé le problème sous forme d'un modèle mathématique au niveau microscopique et ils ont testé plusieurs algorithmes de résolution. Parmi ces algorithmes, ils ont utilisé de techniques de recherche opérationnelle, telles que la programmation linéaire (Branch and Cut algorithm) et les algorithmes évolutionnaires. Des techniques hybrides (programmation linéaire et algorithme évolutionnaire) ont été également testées. Pour le même objectif de minimisation des retards les auteurs de [43] ont défini un algorithme d'optimisation pour la gestion en temps réel d'un réseau ferroviaire complexe en utilisant l'algorithme exacte « Branch and Bound ».

Quelques auteurs ont utilisé des méta-heuristiques pour résoudre la replanification durant les petites perturbations. Dans [44], les algorithmes génétiques (AG) et le réseau de neurones artificiels (ANN Artificial Neural Networks) sont développés pour la replanification des trains, dont l'objectif est de minimiser les retards totaux dans les résolutions de conflit. L'ANN est utilisée pour évaluer les résultats de l'AG développé.

Dans [45], un modèle de programmation linéaire à nombres entiers mixte (MILP) a été formulé pour minimiser les retards. Cet article présente une approche appelé « modified shifting bottleneck » pour résoudre les problèmes de planification et de replanification des trains. C'est une méthode heuristique qui décompose le problème en plusieurs problèmes simples. Tandis que les auteurs de [46] ont introduit deux méthodes de « Distributed Model Predictive Control » (DMPC) pour résoudre leur modèle MILP. Dans chaque étape de DMPC des actions sont déterminés pour réduire les retards dans le réseau.

Les auteurs de [47] présentent un système d'aide à la décision pour la gestion en temps réel. Ce système utilise une approche de programmation mathématique adressant la replanification du trafic durant des perturbations inattendues dans un réseau hétérogène. Le système simule le

comportement du réseau à l'aide du modèle de programmation mathématique fondée sur la topologie et les contraintes du chemin de fer en utilisant des méthodes heuristiques dans le but est de minimiser les retards.

L'article [48] traite du problème de replanification des trains sur les lignes à double voie. Le problème de replanification est considéré comme une procédure de détection et de résolution de conflit. Cet article aborde le problème de replanification du train de manière différente en utilisant la théorie des réseaux de Petri (PN) afin de réduire les retards. Un réseau de Petri est un formalisme mathématique et un outil graphique pouvant être utilisé pour la modélisation, la conception et l'analyse de systèmes discrets, qui permettent de visualiser un système ferroviaire. Pour le même objectif de réduire les retards, les auteurs de [49] ont présenté un modèle qui permet de réagir non seulement en retardant le départ des trains, mais aussi en modifiant l'itinéraire de trains (rerouting). Pour cela, ils ont introduit l'origine et la destination des trains en tant qu'événements dans le réseau d'activité événementielle utilisé et ont connecté les décisions d'attente à un problème de plus court chemin dans le réseau résultant.

Pour traiter les petites perturbations aussi les auteurs de [50] présentent une approche pour la replanification des trains, fondée sur une approche de graphes de conflits de ressources (Resource Conflict Graph RCG), en prenant en compte les aspects d'efficacité énergétique dans les solutions. Ce modèle est développé pour les réseaux à trafic mixte très encombrés, où les opérations ferroviaires constituent différents services ferroviaires (Intercity, InterRegio...). Dans leur travail, la consommation d'énergie est considérée comme une contrainte afin d'améliorer les performances de l'algorithme et en même temps, d'obtenir une solution plus économe en énergie.

Certaines recherches ont traité le problème de replanification du point de vue des passagers. Les auteurs de [51] ont créé aussi un système de replanification de train qui cherche à minimiser les inconvénients pour les passagers. L'algorithme calcule une valeur qui quantifie l'inconvénient subi par le passager. Pour minimiser les retards des passagers, les auteurs de [52] ont fourni un modèle permettant d'inclure les contraintes de capacité dans la formulation du problème de gestion des retards au niveau microscopique. Ils ont utilisé deux heuristiques (FSFS : First-Scheduled-First-Served et B&B-OS : Branch & Bound including optimal-served) afin de trouver rapidement une solution optimale. Dans le cadre du travail de [53], les auteurs ont défini l'insatisfaction de tous les passagers de l'ensemble du réseau ferroviaire comme un critère et ont développé un algorithme qui cherche un plan de gestion des retards des trains qui

minimise l'insatisfaction des passagers. L'algorithme utilisé est une combinaison de simulation et d'optimisation. La partie simulation comprend un simulateur de trafic ferroviaire et un simulateur de flux de passagers qui fonctionnent en parallèle. Le simulateur de trafic ferroviaire prévoit les futurs schémas de trains en tenant compte de l'interaction dynamique entre les trains et les passagers. Le simulateur de flux de passagers trace le comportement de tous les passagers un par un et calcule le nombre de passagers qui montent / descendent à chaque station. L'insatisfaction des passagers est également estimée à partir des résultats de la simulation du flux de passagers. Dans la partie optimisation, ils ont utilisé l'algorithme de recherche tabou (tabu search). Une méta-heuristique a été utilisée dans [54] pour maximiser le nombre des passagers transportés pour améliorer la capacité de transport et minimiser le temps d'attente des passagers. Les auteurs ont utilisé l'optimisation par essais particuliers (PSO) pour la replanification des trains à grande vitesse d'un trafic à double voie en cas de perturbation. Les auteurs de [55] ont supposé que l'inconvénient subi par les passagers comprend le temps de trajet, le temps d'attente sur les quais et le nombre de correspondances. Ils ont présenté un algorithme de replanification fondée sur une formulation MIP (Mixed integer programming). Pareillement, pour satisfaire les passagers, les auteurs de [56], ont développé aussi un modèle de replanification des trains en temps réel afin de minimiser le temps de trajet du trafic, en formulant le problème en modèle de programmation linéaire au niveau microscopique.

Dans le but de minimiser l'écart total entre les horaires originaux et reprogrammés des trains, les auteurs de [57] ont utilisé la méthode de génération de colonnes qui exploite la séparabilité du problème. Ils ont montré que cette méthode heuristique est efficace pour réduire la taille de problème. Les auteurs de [58] ont présenté une approche pour résoudre le problème de replanification ferroviaire. Cette approche concerne la récupération d'un horaire ferroviaire perturbé de manière à minimiser la différence entre le plan initial et le nouveau plan provisoire. Ils ont utilisé une formulation mixte de programmation linéaire en nombres entiers (MIP) qui modélise leur problème. Vu le grand nombre de variables et de contraintes qui ne permet pas de résoudre ce problème efficacement en utilisant un solveur MIP standard, ils ont défini une nouvelle approche appelée SAPI (analyse statistique de la propagation des incidents) pour résoudre le problème. Le point clé de SAPI est d'estimer la probabilité qu'un événement, une étape de l'itinéraire d'un train, soit affecté par un ensemble d'incidents. En utilisant ces probabilités, l'espace de recherche est réduit, permettant d'obtenir de très bonnes solutions en peu de temps.

### ***(B). Travaux menés dans le cadre d'optimisation multi-objectif***

Une approche optimisation multi-objectif existe aussi dans ce domaine. L'article [59] traite la gestion du trafic pour différents scénarios de perturbations pour réduire à la fois les retards de trains et la consommation d'énergie au niveau microscopique en prenant en compte les contraintes de signalisation. Trois algorithmes ont été utilisés dans cet article : le premier algorithme est B&B (Branch and Bound), le deuxième algorithme simule la pratique de la gestion du trafic basée sur le système ARI décrit dans [60] et le troisième algorithme est « First In First Out » (FIFO). Le principal objectif des auteurs de [61] était de minimiser les délais en respectant les objectifs des sociétés d'exploitation des trains. La procédure de replanification des trains utilisée est itérative, basée sur l'algorithme B&B (Branch and Bound). Les auteurs de [62] ont aussi utilisé l'algorithme B&B pour résoudre le problème formulé sous la forme d'une programmation linéaire à nombres entiers mixte (MILP). Dans le but de minimiser les retards totaux des trains ainsi que le nombre de trains sérieusement affectés, les auteurs de [63] ont défini un modèle d'optimisation basée sur la logique floue pour gérer le replanification des trains à grande vitesse pendant la restriction de vitesse à cause des perturbations comme une forte tempête et de fort vent.

Le problème de replanification efficace en temps réel des trains après une perturbation n'est pas facile. Il devient plus compliqué par le fait qu'il peut être à la fois dynamique (le terme dynamique est défini quand les trains attendent d'être reportés, plus de trains arriveront avec des caractéristiques et des horaires différents, ce qui changera la nature du problème) et multi-objectifs. Un autre problème multi-objectif étudié dans la littérature est le compromis entre la minimisation des retards de train et la durée du trajet des passagers. L'article [64] cherche ce compromis en intégrant une replanification des trains dans une série de modèles et de méthodes de contrôle du trafic résolu par le solveur CPLEX.

L'article [65] présente une procédure de prise de décision par auto-apprentissage pour une replanification d'une grille horaire robuste en temps réel en cas de perturbations. Le modèle a été reformulé en problème de programmation linéaire en nombres entiers mixte visant à trouver le compromis optimal entre deux objectifs : la minimisation des retards des trains et la maximisation de la robustesse des horaires. La résolution a été intégrée à une procédure heuristique pour accélérer la procédure de replanification en temps réel.

L'article [66] présente une version améliorée de l'approche « Resource Conflict Graph » (RCG) développée par [67] pour résoudre le problème formulé sous un modèle linéaire mixte en nombre entiers (MILP). Ce travail prend en compte trois objectifs d'optimisation : minimiser le délai d'arrivée global aux gares, minimiser le nombre de trains annulés et minimiser la consommation d'énergie. L'article [68] examine le problème bi-objectif de la minimisation des retards des trains et la minimisation de nombre total de correspondances. Le problème a été formulé au niveau microscopique en prenant en compte le système de signalisation. Dans ce but deux nouveaux algorithmes heuristiques sont développés. Les résultats des tests appliqués ont montré l'efficacité de ces deux algorithmes pour approcher le front de Pareto dans un temps de calcul limité.

Pour modéliser les problèmes de replanification des trains en temps réel autour de sections de goulots d'étranglement, un modèle de programmation à nombres entiers mixte est présenté dans l'article [69]. Un algorithme amélioré (DE\_JRM) a été développé pour résoudre le problème de réduire les retards et satisfaire aux exigences des applications de contrôle du trafic en temps réel.

Les méthodes méta-heuristiques ont été les choix d'auteurs de l'article [70] pour résoudre les conflits du trafic durant les perturbations. Dans cet article, le problème a été traité en utilisant un processus itératif à deux niveaux. Le niveau supérieur traite les rencontres et les dépassements des trains sur les voies. Le niveau inférieur traite la détermination des heures de début et de fin pour chaque train et pour chaque section. Deux algorithmes ont été appliqués : « Recuit Simulé » et « Recherche tabou ». Ce problème a deux fonctions d'objectif différentes : une qui minimise le délai total pour les trains et un autre qui minimise les coûts totaux. L'objectif de l'article [71] est d'étudier l'algorithme de colonies de fourmis (ACO) dans le problème de replanification à une intersection (jonction) après une perturbation dans un environnement en mutation dynamique (problème de replanification de jonction ferroviaire dynamique). Dans [72], les auteurs ont étudié la capacité des algorithmes d'optimisation des colonies de fourmis à résoudre le problème de replanification ferroviaire dynamique et multi-objectif à la fois. Dont l'objectif était minimiser l'écart de la grille horaire et minimiser les coûts énergétiques supplémentaires. Les auteurs de [73] cherchent des bonnes solutions réalisables en cas de retard dans un trafic mixte (hétérogène). L'optimisation repose sur des algorithmes génétiques centralisés (GA) et le classement de Pareto. Les solutions sont évaluées dans cette recherche en fonction de trois objectifs : la satisfaction de la distance par rapport aux contraintes de la circulation, la distance par rapport aux objectifs et la ponctualité aux points critiques. De

plus, la réorganisation peut être autorisée en modifiant les contraintes du problème. Ces travaux s'appuient sur un outil de simulation développé par la SNCF et adapté à une étude de trafic mixte.

#### **2.1.4. Réorganisation d'un trafic fortement perturbé**

Inversement aux perturbations, les interruptions sont des incidents qui ont une grande gravité comme : indisponibilité d'une voie ferrée, panne de matériel roulant ..., sont classés comme des interruptions. La littérature qui a abordé le sujet d'ajustement des horaires lors de des interruptions est limitée. Ces problématiques ont suscitées un intérêt moindre du fait de leur plus faible occurrence par rapport aux perturbations faibles. Le plus souvent la situation d'un blocage de la voie est considérée d'un point de vue macroscopique. Nous présenterons dans ce paragraphe quelques recherches qui ont abordé le problème de la re planification des trains lors de blocage complet ou partiel d'une voie ou plusieurs voies du trafic. Les auteurs de [74] désignent par un blocage complet, la situation dans laquelle tous les cantons (section élémentaire d'infrastructure encadrée par deux signaux) d'un segment sont bloqués et aucun train ne peut être utilisé sur ce canton. Si seulement certains cantons sont bloqués, la situation est désignée comme un blocage partiel et un trafic limité est encore possible. En conséquence d'un blocage complet ou partiel, les trains ne peuvent plus être utilisés conformément la grille horaire normale et une autre grille reprogrammée doit être déterminée. Les mesures proposées lors d'une perturbation de blocage sont l'annulation des trains, le report des trains et le demi-tour des trains dans les stations adjacentes au blocage. Les travaux cités sont aussi divisés en deux parties : (A) les travaux qui ont pris en compte un seul objectif d'optimisation et (B) les travaux qui ont pris en compte plus qu'un objectif d'optimisation.

##### ***(A). Travaux menés dans le cadre d'optimisation mono-objectif***

Un problème de réorganisation est présenté dans [75] pour la situation dans laquelle une voie d'un segment à deux voies de directions opposées est fermée en raison d'un blocage ou en raison de travaux de construction. Le but est de minimiser le retard en appliquant une recherche locale.

Dans [76], les auteurs ont examiné l'efficacité de stratégies avancées intégrées dans l'algorithme recherche tabou, pour résoudre le problème de re planification des trains en temps réel dans le but de minimiser les retards consécutifs en cas de blocage de plusieurs voies. Les

stratégies proposées ont amélioré considérablement les performances de la version précédente de ROMA, tant en termes de qualité de la solution que de temps de calcul.

Les auteurs de [77] développent un modèle MILP qui détecte et résout les conflits provoqués par une perturbation qui bloque une partie d'une ligne à voie unique. Les mouvements des trains perturbés sont reprogrammés dans les deux directions de la ligne dans le but de minimiser le retard total de tous les trains.

Les auteurs de [78] considèrent les conditions de trafic sérieusement perturbées sur les lignes de chemin de fer à double voie où certaines sections de blocs d'une voie ne sont pas disponibles. Le problème formulé au niveau microscopique est résolu à la fois par des approches centralisées et distribuées dans le but de minimiser les retards. Dans une approche centralisée, les trains sont reprogrammés tous ensemble, tandis que dans une approche distribuée, les trains sont reprogrammés par des répartiteurs locaux avec un coordinateur gérant les interactions aux zones frontalières. Les expériences de calcul montrent que, les approches distribuées obtiennent de meilleures solutions que les approches centralisées.

### ***(B). Travaux menés dans le cadre d'optimisation multi-objectif***

La replanification des trains en temps réel est devenue un domaine intéressant pour les chercheurs dans le secteur ferroviaire. Toutefois, peu de travaux traitent la replanification des trains en temps réel en cas de fortes perturbations. Les auteurs de [79] présentent la replanification en temps réel du trafic ferroviaire sur une ligne de chemin de fer à grande vitesse en cas de blocage complet de l'infrastructure ferroviaire, où toutes les pistes d'un segment de chemin de fer sont en panne pendant un certain temps. Un modèle de programmation en nombres entiers mixte est formulé au niveau macroscopique (c'est-à-dire seules les horaires de départ et d'arrivée sont considérées, les informations de routes et de système de signalisation sont négligées). En recalculant, en réordonnant et en annulant les trains, l'objectif de leur travail est de minimiser le nombre de trains annulés et minimiser les retards des trains tout en respectant les contraintes de capacité en circulation et en gare. Les auteurs de [80] ont introduit aussi un modèle macroscopique de replanification dans le cas d'un blocage complet, formulé en MILP et implémenté sous Matlab dont l'objectif est de trouver le compromis entre l'annulation de certains services et les retards d'autres services. Les auteurs de [81] proposent une nouvelle approche de replanification des trains à grande vitesse en temps réel. Ils se sont concentrés sur la récupération du temps stochastique et ils ont proposé une approche « track-

backup », en reformulant le problème en modèle MIP, pour améliorer la flexibilité nécessaire pour gérer les perturbations et réduire les délais et les coûts. Ils ont formulé le problème en tant que modèle MIP.

Les auteurs de [82] ont proposé une approche d'optimisation du problème de la réorganisation du trafic ferroviaire hétérogène dans un réseau à n-voies lors d'une perturbation, où n est un nombre arbitraire de voies parallèles de telle sorte que les segments peuvent être simple-, double- ou à multiples voies. Le problème est formulé sous forme d'un modèle MILP dont le but est de minimiser le retard final total du trafic et minimiser le coût total associé aux retards. Le problème a été résolu en utilisant le logiciel CPLEX, avec sa procédure heuristique B&B.

L'article [83] étudie comment gérer un grand réseau, avec des lignes à double voie, dans le cas de l'indisponibilité d'un ensemble des sections d'une voie afin d'avoir un compromis entre minimiser les retards de tous les trains circulant sur le réseau et limiter l'annulation des services de trains perturbés en utilisant le logiciel ROMA pour étudier différents scénarios de résolution des perturbations au niveau microscopique.

Les auteurs de [74] gèrent les ajustements d'horaires à un niveau macroscopique en cas de blocage partiel ou complet. Un graphique événement-activité est utilisé pour exprimer le réseau ferroviaire et un modèle de programmation mixte en nombres entiers (MIP) est formulé. La fonction objectif utilisée dans ce travail est pondérée, qui minimise le nombre de trains annulés et les retards de trains, équilibre le nombre de trains dans les deux sens et répartit les trains exploités de manière uniforme dans le temps.

Le document [84] porte sur le problème de replanification des trains d'un point de vue macroscopique en cas de perturbations majeures entraînant l'indisponibilité d'une (ou plusieurs) piste(s) pendant une période de temps connue. L'originalité de cette recherche est l'intégration de trois objectifs pour générer une grille horaire réalisable : la satisfaction des passagers, les coûts opérationnels et les écarts par rapport à la grille horaire initiale. Les auteurs ont formulé le problème sous forme d'un programme linéaire en nombre entiers qui optimise le premier objectif et qui inclut les sigma-contraintes pour les deux autres. En résolvant le problème pour différentes valeurs de sigma, la frontière tridimensionnelle de Pareto peut être explorée pour comprendre les compromis entre les trois objectifs. Ce modèle comprend des mesures telles que l'annulation, le retard ou le réacheminement des trains.



La littérature axée sur la réduction des effets négatifs des retards pour les passagers s'est également développée, mais elle est beaucoup moins volumineuse. Le modèle formulé au niveau macroscopique dans [85] vise à aider les sociétés d'exploitation des trains à évaluer le compromis entre la faisabilité économique et la faisabilité infrastructurelle des programmes de récupération, d'une part et la satisfaction des passagers d'autre part à partir d'une formulation d'ordonnancement macroscopique. Ce modèle se concentre principalement sur les perturbations sévères comme l'indisponibilité d'une voie et propose plusieurs stratégies de récupération. L'évaluation des stratégies de récupération (par exemple : annulation partielle du train, annulation complète du train, ajout du train, remplacement du train) utilisée dans ce travail, repose sur un certain nombre d'indicateurs de satisfaction des passagers, notamment le temps de parcours total et le nombre de correspondances.

Dans la recherche [86] les auteurs ont abordé le problème de replanification d'un point de vue macroscopique, sans tenir compte de détails tels que le système de signalisation et les assignations de voies dans les gares, en cas de perturbations majeures, telles que l'indisponibilité des voies ferrées en raison d'événements imprévus. Ils cherchent un compromis entre les aspects suivants : l'écart par rapport à la grille horaire initiale, le faible coût d'exploitation et le service acceptable de passagers. Ils ont proposé un cadre heuristique qui quantifie ces aspects, dans lequel la grille est optimisée à l'aide d'une méta-heuristique « Adaptive Large Neighborhood search », et un modèle d'affectation de passagers pour évaluer l'horaire de manière itérative. Les stratégies de récupération utilisées sont : les annulations de trains, les retards, les réacheminements et les ajouts de bus ou de taxi.

### **2.1.5. Conclusion et positionnement de nos travaux**

Les travaux sur la gestion des incidents ferroviaires que nous avons identifiés dans la littérature s'intéressent aux conséquences d'un incident sur les grilles horaires, avec différentes approches selon le type d'incident considéré.

Le cas le plus simple correspond à la situation où l'incident est lié à un retard de train lié à une cause externe au système. Les infrastructures ne sont pas affectées par un incident matériel, mais le retard d'un train décale leur disponibilité dans le temps et provoque d'autres retards par effet domino. La situation se complique quand une infrastructure est totalement ou partiellement indisponible.

Dans l'un ou l'autre cas, la gestion de l'incident consiste à réaffecter au mieux les ressources disponibles (voies uniquement dans le cas d'une perturbation faible ; voies, matériel roulant, équipage dans le cas d'une perturbation forte) afin d'assurer la circulation ferroviaire. Les travaux de la littérature sont basés sur des méthodes de recherche opérationnelle et s'appuient sur des modèles de réseau simplifiés : les lignes sont caractérisées par des capacités (nombre maximal de trains par heure), des intervalles de temps minimaux entre trains, des vitesses moyennes, ... . Le trafic est défini par des horaires de départ et d'arrivée, et ce sont ces horaires qu'il faut déterminer de façon à optimiser des critères tels que le retard moyen des trains.

Le problème qui nous concerne est posé d'un point de vue très technique, au plus près des infrastructures : il s'agit d'évaluer les conséquences de la perte d'un équipement électrique sur la capacité d'une ligne. Pour dire les choses de manière simplifiée, on cherche à évaluer combien de trains peuvent continuer de circuler en même temps sur la ligne, et suivant quel profil de vitesse (marche du train). Dans ce travail, le problème est posé en termes d'adaptation du trafic prévu à la puissance effectivement transmissible par la caténaire. Il s'agit donc d'agir sur la grille horaire et sur la marche des trains, de façon que la puissance appelée par les trains soit toujours dans les limites de ce que le système électrique peut fournir en respectant les normes techniques en vigueur.

Une telle étude s'appuie nécessairement sur un simulateur ferroviaire électrique. Il s'agit d'un modèle numérique non linéaire beaucoup plus fin que les modèles utilisés classiquement pour la gestion des incidents, et comportant de très nombreuses variables. Son exécution nécessite des ressources informatiques importantes avec une durée d'exécution caractéristique d'une dizaine de minutes. De ce fait, les méthodes linéaires basées sur des modèles rapides d'exécution rencontrées dans la littérature ne sont pas envisageables. Nous n'avons trouvé aucune publication qui aborde cette problématique et le travail présenté dans la suite est entièrement original

## **2.2. Démarche proposée**

### **2.2.1. Conséquences d'une perte d'équipement électrique**

Pendant la durée d'une perte d'indisponibilité d'un équipement électrique, la puissance électrique transmissible par les caténaires diminue, ce qui ne permet plus d'alimenter le trafic prévu dans de bonnes conditions. Dans cette thèse nous cherchons comment ajuster au mieux le trafic afin de limiter les conséquences de cette perte de puissance. L'incident prioritaire étudié

dans notre travail est la perte totale d'une sous-station. Ce genre d'incident engendre une baisse de tension à la caténaire et donc une augmentation des courants dans l'ensemble du système. Le fonctionnement des motrices de trains est perturbé (diminution de performance, voir mise en sécurité par disjonction du train), et les transformateurs et les câbles peuvent être sollicités au-delà de leurs limites thermiques. Dans ces conditions et pour ne pas entraîner d'avaries au niveau des installations, les puissances appelées par les trains sont réduites, entraînant des retards et des perturbations du trafic.

En effet, chaque installation est soumise à des contraintes de respect des normes qui définissent, par exemple, les niveaux de tension à respecter le long des lignes, les courants admissibles ou les échauffements dans les différents composants. Toutes ces contraintes opérationnelles doivent impérativement être respectées pour que le trafic soit considéré comme acceptable (voir chapitre 4).

### **2.2.2. Actions d'ajustement du trafic possibles**

Quand le trafic n'est pas acceptable, il faut le réduire de façon à limiter les appels de puissance et respecter toutes les contraintes opérationnelles. Cet ajustement est fait par le biais de ce que nous appelons des actions d'ajustement. Le rôle de ces actions est de réduire les appels de puissance et de les étaler dans le temps. Les principaux leviers sont d'augmenter l'espacement entre les trains et/ou de réduire leur vitesse sur certaines portions critiques de la ligne. La définition et le choix des actions d'ajustements est issue de l'expertise métier, car il faut intégrer de nombreuses particularités sur la circulation des trains. Ce point sera détaillé dans le chapitre 4.

### **2.2.3. Démarche actuelle**

#### **2.2.3.1. *Acceptabilité du trafic***

Pour tester si la capacité d'alimentation électrique<sup>6</sup> d'une configuration d'un réseau donné est suffisante pour un trafic donné, l'opérateur lance une simulation avec les entrées nécessaires (IFTE, horaires, marches des trains,...) à l'aide d'ESMERALDA NG. Puis, il observe un ensemble de sorties dimensionnantes (tensions à la caténaire, échauffements des câbles, puissances et échauffements des sous-stations) afin de vérifier si les normes opérationnelles

---

<sup>6</sup> Puissance électrique disponible pour les consommateurs en conservant une qualité de fourniture compatible avec le bon fonctionnement des charges et du réseau.

sont respectées. Dans la suite du document, nous parlerons de trafic acceptable quand ces normes sont vérifiées.

### 2.2.3.2. Démarche par essais-erreurs

Lorsqu'un incident électrique survient (ou est envisagé au cours d'études prévisionnelles), l'opérateur responsable de réorganiser le trafic se base sur son expérience pour choisir des scénarios d'ajustement du trafic, puis il les teste avec ESMERALDA NG afin de trouver une solution acceptable, puis essayer de l'améliorer pour trouver une solution souvent qualifiée à tort d' « optimale ». Cette démarche est schématisée sur la **Figure 10**.

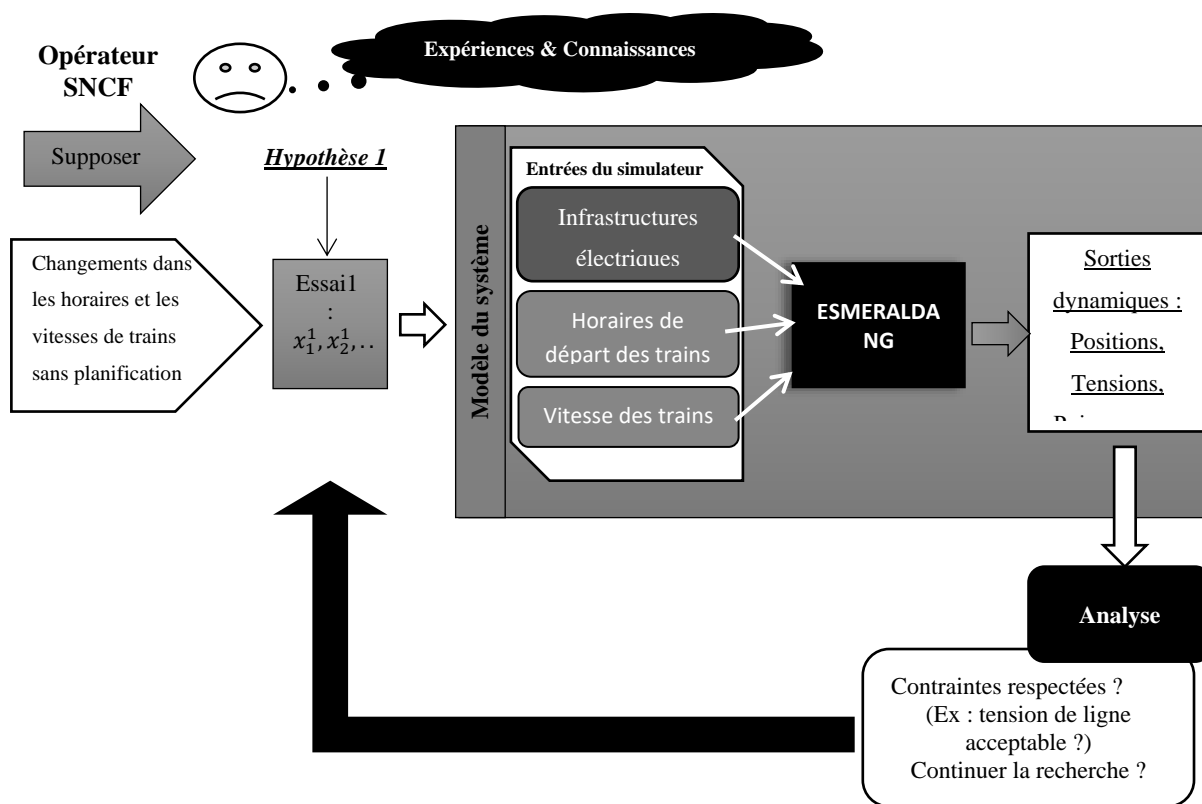


Figure 10: Actuellement : démarche manuelle (essais-erreurs)

La méthode suivie consiste à effectuer des essais de manière séquentielle en faisant varier les facteurs d'entrée du système étudié l'un après l'autre, comme par exemple les vitesses des trains, ou les horaires de départ des trains. Ce changement et le choix d'ajuster l'un ou l'autre des facteurs d'entrée se fait de manière empirique selon l'expertise des opérateurs, sans planification systématique de l'ensemble des essais à réaliser. La décision d'arrêter ou de continuer la recherche d'une solution repose sur la comparaison des résultats obtenus d'un essai à l'autre. Cette comparaison se fait sur la base du test d'acceptabilité pour vérifier si le scénario

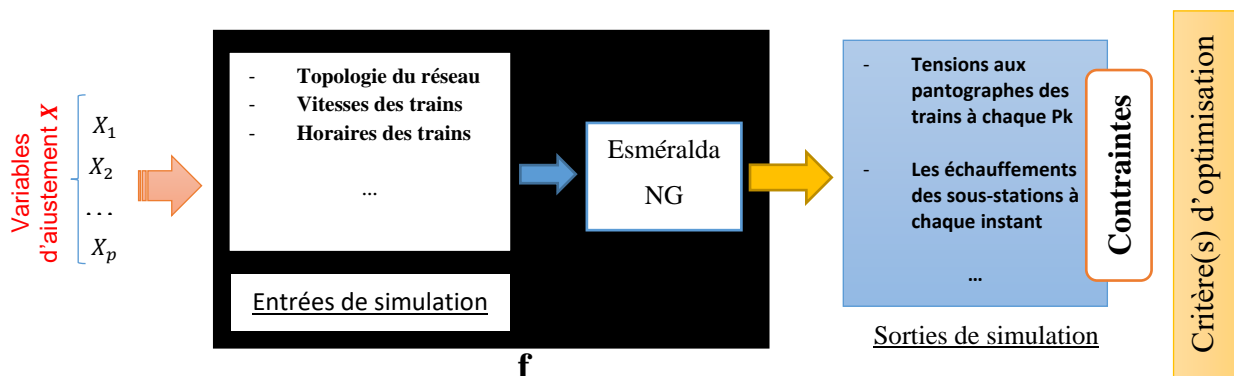
testé aboutit à des résultats conformes aux contraintes ou non. Ces tests sont très compliqués vu le grand nombre des sorties dynamiques : en effet, il faut tester la tension à la caténaire de chaque train tout au long de son déplacement et vérifier les échauffements dans tous les éléments du réseau (engins, sous-stations). Cela représente des centaines de sorties dynamiques à analyser. Par ailleurs, il y a de nombreux scénarios d'ajustement possibles et le temps de simulation d'un seul scénario est typiquement d'une dizaine de minutes. Ces contraintes limitent de fait le nombre d'essais effectivement réalisés par l'opérateur et la qualité du résultat dépendra beaucoup de l'expérience et des connaissances de l'opérateur. L'obtention des résultats acceptables est très coûteuse en temps (plusieurs jours et parfois une semaine), et l'obtention de solutions qualifiées d'optimales par abus de langage est presque impossible avec cette démarche manuelle.

## 2.2.4. Démarche proposée

La démarche que nous proposons vise à remplacer la démarche par essais-erreurs actuelle. Dans un premier temps, l'approche métier est formalisée mathématiquement et traduite en un modèle d'ajustement du trafic, auquel est associé un problème d'optimisation sous contrainte. Nous montrons ensuite que les méthodes d'optimisation classiques ne sont pas adaptées au problème considéré et proposons une démarche fondée sur l'analyse de sensibilité.

### 2.2.4.1. Formalisation mathématique du problème d'ajustement du trafic

En pratique, les opérateurs n'agissent pas sur le trafic train par train, mais à travers des actions globales qui préservent la régularité des horaires et des profils de vitesse des trains. Cela peut se traduire par des variables d'ajustement macroscopiques, à partir desquelles les fichiers d'entrée du simulateur sont modifiés, conduisant au modèle d'ajustement schématisé sur la **Figure 11**.



**Figure 11: Le modèle d'ajustement étudié**

Les actions d'ajustement du trafic sont modélisées par des variables d'ajustement, représentées par le vecteur  $X = (X_1, \dots, X_p)$ , où  $p$  est le nombre de variables. Par exemple, l'action qui consiste à espacer les départs de train se modélise par une variable « incrément de l'intervalle de temps entre deux départs successifs ». L'action de ralentissement se modélise par une variable « réduction de la vitesse limite entre deux points de la ligne ». En l'état actuel de nos travaux, les variables d'ajustement considérées sont continues, mais elles seront de type discret dès que l'on envisagera le cas de la suppression de certains trains.

Le cœur du modèle d'ajustement est le simulateur ferroviaire ESMERALDA NG. Il calcule toutes les grandeurs physiques dans le réseau ferroviaire pour un trafic donné, le trafic étant défini par :

- les missions des trains (horaire de départ, ligne, voie, point de départ)
- les marches des trains (consignes de vitesse)

La première partie du modèle d'ajustement consiste à modifier ces données d'entrées du simulateur, conformément aux actions définies par les variables d'ajustement.

Les sorties du modèle d'ajustement sont directement les sorties du simulateur. Il s'agit de sorties *multivariées* (tensions au pantographe de chaque train, puissances de chaque sous-stations, échauffements des différents câbles...) et *dynamiques* (séries temporelles ou spatiales). Le modèle d'ajustement comporte des contraintes sur ces sorties, et c'est le respect simultané de toutes ces contraintes qui définit l'ensemble des variables d'ajustement admissibles (réalisables).

Par ailleurs, le modèle d'ajustement comporte des critères de performance, calculés en post-traitement à partir des sorties du simulateur (densité de trafic, consommation des sous-stations ...).

En résumé, le modèle d'ajustement consiste à rechercher, dans l'espace des variables d'ajustement défini par l'opérateur, le sous-ensemble qui produit un trafic admissible, puis à choisir parmi ces solutions celles qui sont les plus performantes. Il s'agit d'un modèle d'optimisation sous contrainte, dans lequel les contraintes jouent un rôle très important.

#### **2.2.4.2. Inadéquation des méthodes d'optimisation classiques**

Le modèle d'ajustement est complexe, en sens qu'il repose sur un simulateur ferroviaire dont le comportement est *non linéaire*, de par la nature des circuits et composants simulés. Ce simulateur comporte un *nombre élevé* de variables, des sorties *dynamiques* et présente un coût calculatoire *élevé* (typiquement une dizaine de minutes pour la simulation de deux heures de trafic sur un réseau régional). Par exemple, supposons un trafic comportant 200 trains, alimenté par un réseau comportant 10 sous-stations. Le nombre des variables d'entrée du simulateur est supérieur à 1000. Le nombre des sorties est également important, avec des séries temporelles de dimensions élevées. Une heure de trafic simulé correspond à environ 5000 pas de temps, et il faut vérifier à chaque pas de temps que les contraintes opérationnelles sont vérifiées. Ces contraintes portent sur les trains (tensions aux pantographes en fonction de la position), les sous-stations (puissances et échauffements en fonction du temps) et les câbles (échauffements en fonction du temps).

Compte tenu des caractéristiques du problème d'ajustement du trafic, il n'est pas envisageable de faire une optimisation directe. Pour cela, nous avons choisi d'utiliser l'analyse de sensibilité afin de quantifier l'influence des différentes variables d'ajustement, en particulier sur le respect des contraintes sur la sortie. Dans la suite de cette section, nous justifions le choix de cette démarche après avoir passé en revue les principales méthodes d'optimisation proposées par la littérature.

En optimisation, il existe plusieurs catégories de méthodes : les méthodes d'optimisation sans contraintes (méthodes de descente, recherche linéaire, moindres carrés, méthodes sans gradient), les méthodes d'optimisation discrète, la programmation linéaire, les méta-heuristiques, et les méthodes d'optimisation avec contraintes (algorithme du simplexe, méthode du point intérieur, gradient projeté...), les techniques d'optimisation fonctionnelle... Une analyse de ces méthodes, résumée dans le **Tableau 3**, montre que notre problème ne rentre dans aucune de ces catégories.

Catégories	Limites par rapport au modèle d'ajustement du trafic	Conclusion
Les méthodes d'optimisation sans contraintes	Modèle contraint	Pas adapté
Les méthodes d'optimisation discrète	Limité aux variables discrètes	Pas adapté
Les méthodes d'optimisation avec contraintes	Modèle boîte noire et sorties dynamiques	Pas adapté
Les méthodes déterministes ou exactes	Non linéarités du modèle	Pas adapté
Les méta-heuristiques	Un grand nombre d'itérations + la présence de contraintes	Difficile

Tableau 3: Limites des méthodes d'optimisation vis-à-vis du problème d'ajustement du trafic

On distingue une deuxième catégorie fondée sur des méthodes d'approximation (méthodes de plans d'expériences (MPE), surface de réponses,...) qui servent à réduire le modèle afin de travailler sur un méta-modèle équivalent plus rapide d'exécution [87]. Ces méthodes ne sont pas applicables dans notre travail, compte tenu du grand nombre de sorties dynamiques soumises à des contraintes.

Une autre approche consiste à étudier le comportement du modèle grâce à l'analyse de sensibilité. Cela permet de (i) quantifier l'influence des différentes variables sur la variabilité de la réponse d'un modèle ; (ii) détecter des interactions entre les différentes entrées ; (iii) résumer un modèle complexe soit sous la forme d'un méta-modèle ou soit en éliminant les entrées non influentes [88].

Dans la section suivante, nous allons montrer comment l'analyse de sensibilité peut aider à la résolution de problèmes d'optimisation, en particulier pour le problème qui nous concerne ici.

#### **2.2.4.3. Utilisation de l'analyse de sensibilité**

L'optimisation de modèles complexes est un problème récurrent dans de nombreux domaines. Elle a souvent un coût inacceptable, car elle implique généralement un code informatique coûteux en temps de calcul et dans la majorité de cas un grand nombre de variables. Pour réduire le nombre d'appels au simulateur (ou le nombre d'itérations), un filtrage est nécessaire afin de sélectionner les paramètres importants du modèle [89]. Suite à cette étape, le problème d'optimisation peut être traité avec une dimension réduite de manière fine.



L'analyse de sensibilité a ainsi été utilisée pour faire de la réduction de modèles à des fins d'optimisation [90] dans différents domaines : domaine médical [91], ingénierie [92], écosystème [93],... Elle est particulièrement adaptée dans les cas suivants : modèle de type « boîte noire » ; code de calcul long ou coûteux ; nombreux paramètres continus ou discrets ; multiples variables de sortie dynamiques....

Face à notre problème d'optimisation, nous avons proposé une méthodologie en deux parties : la première partie (analyse de sensibilité) consiste à explorer l'espace de solutions admissibles et identifier les ajustements importants dans le processus de réorganisation du trafic. Puis la deuxième partie (post traitement et optimisation) sert à rechercher les solutions meilleures. Cela vient du fait que les sorties de modèle d'ajustement (tensions à la caténaire) qui sont soumises à des contraintes sont différentes du critère d'optimisation (densité du trafic).

Ainsi, pour résoudre la première partie du problème (déterminer l'espace des entrées admissibles et les ajustements importants), nous avons choisi de faire varier les entrées afin d'observer la variation des sorties. Cette phase d'analyse de sensibilité permet d'analyser le modèle d'ajustement du trafic, en étudiant l'impact de la variabilité des variables d'entrée sur la variabilité des sorties. On détermine ainsi les variables d'ajustement importantes, ce qui permet ensuite de réduire la dimension de problème en ne conservant que ces variables. Deuxièmement, l'analyse de sensibilité permet de réduire l'espace de recherche du problème d'optimisation, en se limitant à l'ensemble de solutions réalisables, c'est-à-dire pour lesquelles les sorties du modèle respectent toutes les contraintes physiques.

Une fois l'espace de recherche admissible défini, et les variables d'ajustement importantes identifiées, il est facile de rechercher les solutions qui répondent aux critères d'optimisation.

### **2.2.5. Schéma général de l'approche**

La démarche proposée comporte quatre étapes principales, qui sont (**Figure 12**) :

- I. **Spécification du problème** : définition des variables d'ajustement (intervalle entre trains, vitesses de consigne...) et de leur intervalle de variation ; définition des contraintes qui définissent l'acceptabilité des solutions ; définition des indicateurs de performances des solutions acceptables (densité du trafic, temps de trajet, ...)

- II. **Analyse de sensibilité** : calcul de la sensibilité du modèle à chaque variable d'ajustement à partir d'un échantillonnage de l'espace des variables d'ajustement ; filtrage de l'échantillon pour obtenir l'ensemble des solutions réalisables
- III. **Post traitement et optimisation** : recherche des solutions les plus performantes dans l'espace de solutions réalisables, selon les critères définis en I (par exemple, chercher le trafic le plus dense). Choix par l'opérateur de la solution qui lui paraît la meilleure.
- IV. **Réduction de l'espace de recherche** : nouvelle campagne de simulations au sein d'un espace de recherche réduit à l'entourage de la solution retenue en phase III afin de la raffiner. Pour cela, définition d'un nouveau paramétrage avec moins de variables d'ajustement (les actions non influentes sont mises à zéro).

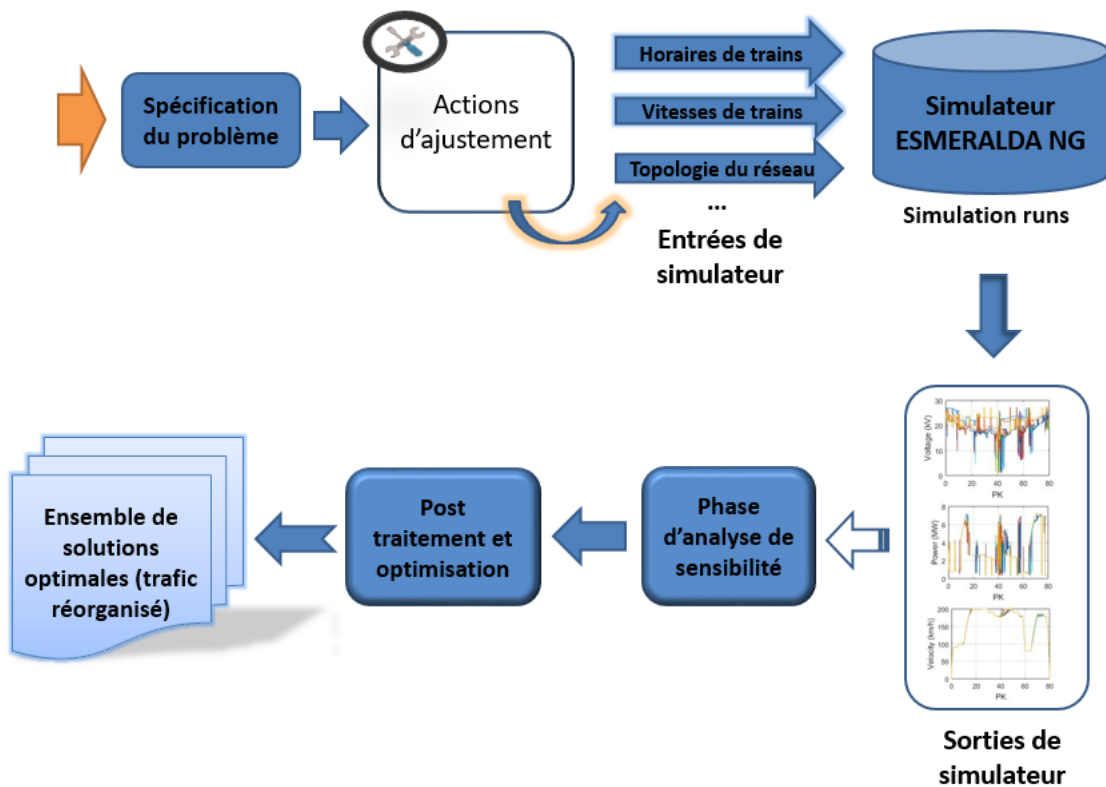


Figure 12: Démarche de l'outil

Le chapitre 3 va maintenant présenter différentes techniques d'analyse de sensibilité adaptées au modèle d'ajustement du trafic. Ces techniques seront ensuite mises en œuvre et évaluées sur un cas-test simple.

### **2.3. Synthèse**

Le transport ferroviaire est en expansion continue afin d'assurer une mobilité accessible à tout le monde. En revanche, ce système est susceptible de beaucoup d'incidents. Le problème de la réorganisation du trafic est ainsi un processus important dans le système ferroviaire. Les incidents étudiés dans notre travail sont des incidents sur les infrastructures électriques. Nous traitons la réorganisation du trafic en cas de diminution de la capacité électrique nécessaire pour faire circuler un trafic prévu.

La démarche actuelle utilisée pour agir pendant ce genre d'incident est empirique, coûteuse en temps et ne produit pas des solutions optimales. Le besoin d'un outil d'optimisation et d'aide à la prise de décision pour ajuster le trafic est nécessaire. L'analyse de sensibilité utilisée dans notre démarche permettra d'obtenir une planification préalable afin d'agir de manière efficace. Le chapitre 3 présentera un état de l'art d'un nombre de méthodes d'analyse de sensibilité globales, en particulier celles qui sont adaptés au modèle de notre problème en termes de critères définis (par exemple, le coût d'exécution, la prise en compte des contraintes...). Le chapitre 4 décrira le processus d'application détaillée de l'analyse de sensibilité sur un cas d'application simple mais représentatif des problèmes de la SNCF. Une analyse comparative des méthodes retenues à l'issue du chapitre 3 se réalisera dans le chapitre 4, afin de mettre en évidence celle qui sera la plus efficace dans le cas de problèmes réels. Le chapitre 5 illustrera l'approche proposée en détails et l'appliquera à des problèmes complexes, typiques de ceux que la SNCF doit traiter.



## Chapitre 3

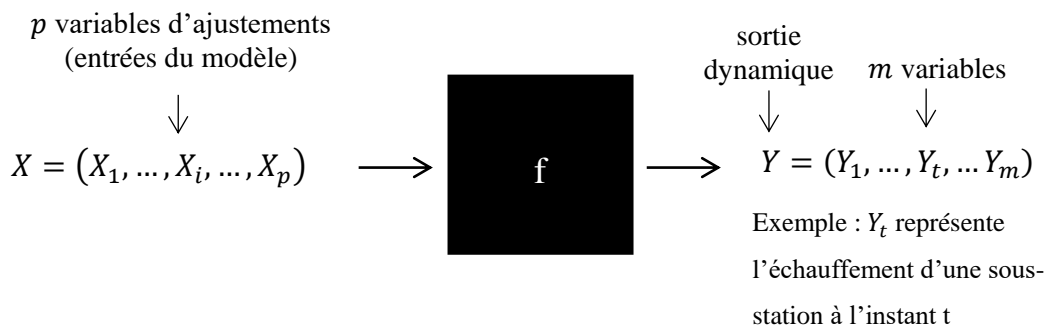
# Analyse de sensibilité sur des modèles à entrées indépendantes et à sortie dynamique

---

### 3.1. Introduction

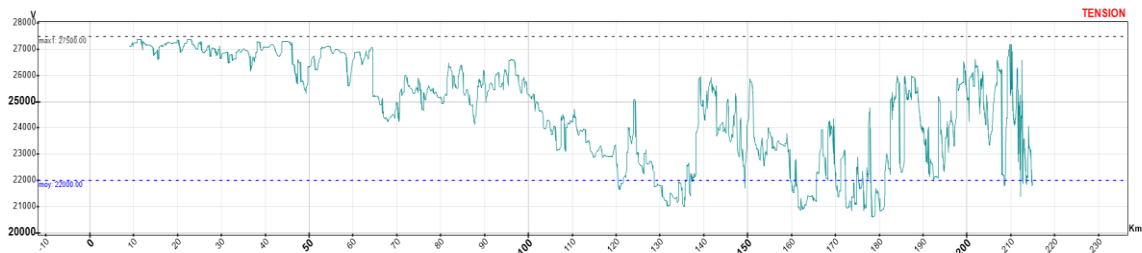
L'étude des systèmes complexes repose sur l'utilisation de modèles numériques comportant généralement de nombreuses variables d'entrées. L'analyse de sensibilité a pour objectif d'évaluer l'impact de ces variables d'entrée sur la sortie du modèle. De manière générale, l'analyse de sensibilité explore les relations entre les entrées et les sorties d'un système. Elle met en évidence comment les variations des entrées impactent les variations des sorties, dans le but de comprendre le processus modélisé et de trier les variables d'entrée selon leur influence. L'analyse de sensibilité peut également être utilisée pour construire des méta-modèles à des fins d'optimisation.

Dans notre travail, l'objectif de l'analyse de sensibilité est de mesurer l'impact des différentes variables d'entrée sur la sortie du modèle d'ajustement. Il s'agit plus précisément de classer les entrées en deux catégories (sensibles/peu sensibles). L'analyse de sensibilité peut également fournir des informations quantitatives (indices quantifiant l'influence de chaque variable), et/ou qualitatives (sens d'influence) sur les variables d'entrées.



**Figure 13: Modèle d'ajustement**

La **Figure 13** rappelle la forme du modèle d'ajustement du trafic et précise les notations qui seront utilisées dans la suite de ce travail. Le vecteur  $X = (X_1, \dots, X_i, \dots, X_p)$  regroupe les  $p$  variables d'ajustement, entrées du modèle. Le vecteur  $Y = (Y_1, \dots, Y_t, \dots, Y_m)$  représente une sortie dynamique : il s'agit de l'ensemble des valeurs qu'une certaine grandeur physique  $Y$  prend aux différents pas de temps (ou en différentes positions pour les trains). Par exemple,  $Y$  peut représenter la tension au pantographe d'un train le long de son parcours (**Figure 14**) ou l'échauffement d'une sous-station à chaque instant  $t$ . Dans le cas où  $Y$  ne contient qu'une seule variable,  $Y$  est considérée comme une variable scalaire.



**Figure 14: Exemple d'une sortie du modèle: Tension (V) en fonction de  $pk$  (km) pour un train donné**

Dans ce chapitre nous recherchons une méthode d'analyse de sensibilité adaptée au modèle d'ajustement du trafic étudié. Comme nous venons de le souligner, celui-ci se caractérise par des sorties dynamiques. Notons également que les entrées du modèle d'ajustement sont indépendantes.

Les approches conventionnelles de l'analyse de sensibilité ont été développées initialement pour des grandeurs de sortie scalaires [94]. Ces approches peuvent être appliquées au cas des sorties dynamiques et fournir des informations sur l'évolution de l'influence des variables d'entrée au cours du temps. Dans cette approche, on considère qu'une variable dynamique est un ensemble de variables scalaires  $Y_1; Y_2; \dots; Y_m$ , et l'analyse de sensibilité consiste en  $m$  analyses de sensibilité successives sur  $Y_1; Y_2; \dots; Y_m$ . Elle permet par conséquent d'observer l'évolution de l'influence des facteurs d'entrée au cours du temps.

Cette approche est réaliste si  $m$  est petit, mais dans notre cas,  $m$  est grand (des milliers de pas de temps) et le nombre d'indices de sensibilité n'est pas gérable. Par ailleurs, il y a une forte redondance d'information entre les valeurs d'une grandeur d'un pas de temps à l'autre. Il faut donc considérer des méthodes globales qui analysent l'ensemble de la série chronologique correspondant à une variable dynamique.

Il existe différentes méthodes d'analyse de sensibilité [88]. Toutes ont pour but d'étudier l'impact des entrées sur les sorties du modèle, mais elles utilisent différentes caractéristiques des entrées et des sorties pour calculer cet impact. Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux méthodes dites globales, et plus particulièrement à celles qui sont indépendantes de la forme du modèle (modèle en boîte noire). Nous présentons les différents indices de sensibilité, ainsi que leur méthode d'estimation pour les modèles non linéaires à entrées indépendantes et à sortie dynamique.

Nous étudierons trois catégories d'analyse de sensibilité globale. La première catégorie, fondée sur « la décomposition de la variance », étudie l'influence des entrées sur la variance de la sortie. La deuxième catégorie, fondée sur la notion de distance entre distributions statistiques, étudie aussi l'influence des entrées sur la distribution de la sortie mais avec une caractérisation plus globale que la première. La troisième catégorie, appelée « analyse de sensibilité régionale », complète les deux précédentes en se focalisant sur l'influence des entrées par rapport au fait que les sorties respectent ou non les contraintes opérationnelles (par exemple, le niveau des tensions est-il suffisant ?).

Ces trois méthodes seront exposées et détaillées en déterminant les points forts et les points faibles de chaque méthode. Nous déterminerons ainsi la méthode la plus appropriée en fonction de ce qui nous intéresse. En fin de chapitre, nous contextualisons les méthodes présentées par rapport à notre cas d'application.

### 3.2. Analyse de sensibilité [95]

Les méthodes d'analyse de sensibilité (AS) permettent de déterminer quelles sont les variables d'entrée d'un modèle qui contribuent le plus à une quantité d'intérêt calculée à l'aide de ce modèle. (Figure 15). Autrement dit, elles étudient comment les variations des entrées se répercutent sur celle de la sortie, en attribuant à chaque variable d'entrée sa contribution à la variation de la sortie. L'analyse de sensibilité peut aider à valider et simplifier le modèle. Cette approche a été utilisée dans de nombreux domaines tels que les modèles financiers, l'analyse de risque, les modèles environnementaux, la chimie, l'ingénierie nucléaire et la médecine [96], [97], [98], [99], [100], [101], [102].

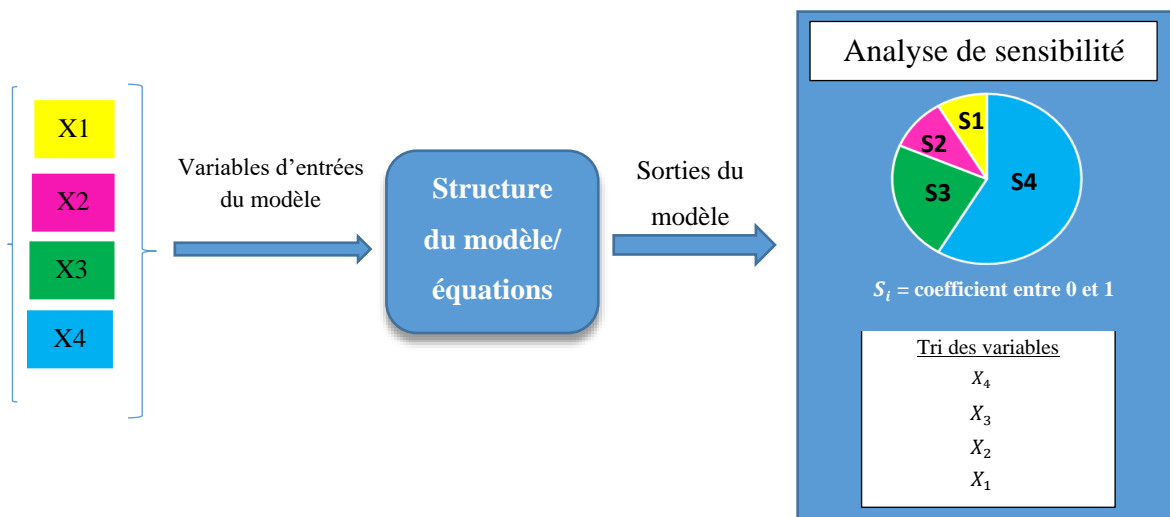


Figure 15: Principe de la répartition de la variation de la sortie d'un système entre différentes sources de variation

Nous pouvons résumer les différents objectifs de l'analyse de sensibilité comme suit :

- Améliorer la compréhension des relations entre les entrées et les sorties d'un système.
- Identifier et hiérarchiser les entrées les plus influentes sur une ou plusieurs sorties.
- Trouver des régions dans l'espace des entrées pour lesquelles la sortie du modèle répond à un certain critère de performance ou satisfait un certain nombre de contraintes.
- Calibrer des variables d'entrée du modèle par rapport à certaines informations disponibles (observations réelles de la sortie, contraintes) en se concentrant sur les paramètres sensibles.
- Simplifier le modèle (réduction de la dimension) en donnant ultérieurement une valeur (fixe) aux entrées qui n'ont pas d'effet ou très peu d'effet sur la sortie.
- Aider à la prise de décision en identifiant les variables décisionnelles les plus importantes pour avoir le résultat final souhaité.

Des revues des méthodes d'analyse de sensibilité ont été réalisées ([103], [104], [105]). Elles distinguent généralement deux catégories de méthodes. La première catégorie est l'analyse de



sensibilité locale. Elle étudie l'effet d'une petite perturbation autour de valeurs nominales et utilise souvent les dérivées partielles<sup>7</sup> du code de calcul (petite variation autour d'un point). La seconde est l'analyse de sensibilité globale, qui a pour but de mesurer l'effet des variations des entrées sur la totalité de leur plage de variation.

### 3.2.1. Analyse de sensibilité locale

Ce sont des méthodes inspirées du calcul différentiel [99]. Elles mesurent la sensibilité des variations de la sortie du modèle en ne faisant varier qu'une seule variable d'entrée alors que les autres sont fixées à leurs valeurs nominales. En supposant que la sortie est une variable unique  $Y$  (sortie scalaire), le modèle peut s'écrire sous la forme suivante, où  $p$  est le nombre de variables d'entrée.

$$f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X \rightarrow Y = f(X)$$

L'analyse de sensibilité locale étudie comment de petites perturbations autour d'une valeur de référence des entrées se répercutent sur la valeur de la sortie (**Figure 16**). La variation de la réponse est considérée par rapport à la variation d'un seul facteur d'entrée à la fois.

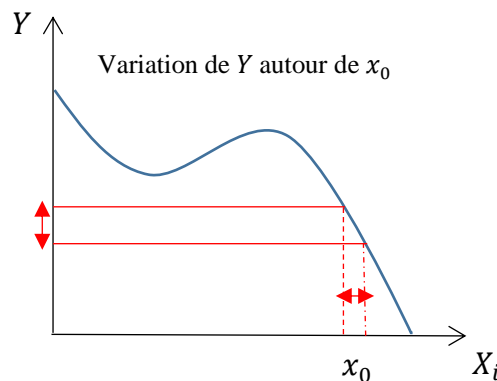


Figure 16: Analyse de sensibilité locale

La méthode d'analyse de sensibilité locale la plus classique est l'approche *One factor At a Time* (OAT), qui consiste à calculer ou estimer les indices de sensibilité définis ( $S_i$ ) par les dérivées partielles [106] :

<sup>7</sup> On ne pourrait jamais calculer les dérivées partielles de code de calcul dans notre application

$$S_i = \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{x=x_0}$$

Exprimant l'effet sur la valeur de la variable  $Y$  de perturber les valeurs des variables  $X_i$  autour d'un point de fonctionnement  $x_0$ .

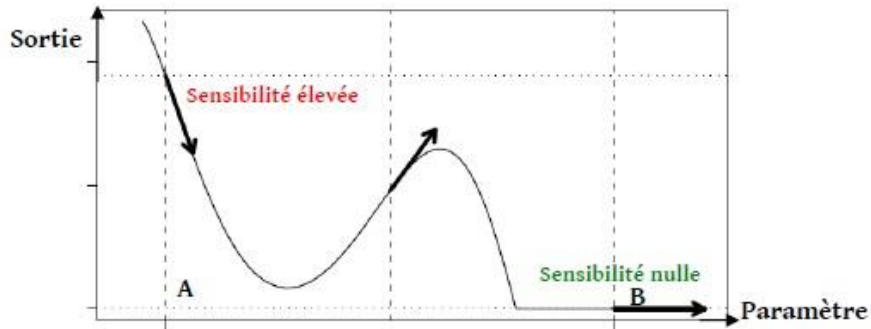


Figure 17: Principe de l'analyse de sensibilité locale

La **Figure 17** montre un exemple dans lequel la sortie est sensible aux variations du paramètre au point A, alors qu'elle ne l'est pas au point B. Avec l'analyse de sensibilité locale on pourra détecter les zones de l'espace d'entrée où la variation de la sortie du modèle est importante ou faible. Un nombre des recherches ont utilisé l'analyse de sensibilité en énergie des bâtiments [107], et en hydrologie [108], [109], [110].

Dans le cas où la sortie est dynamique, de la forme :  $Y = (Y_1, \dots, Y_t, \dots, Y_m)$ , on définit un indice de sensibilité par pas de temps :  $S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{im}$ .

Le grand avantage de cette méthode est que tout changement observé peut être attribué au changement de l'un des facteurs et à chaque pas de temps. Par contre, dans le cas d'un modèle ayant une sortie dynamique, ce calcul d'analyse de sensibilité devient coûteux en temps. En effet, notre modèle contient plusieurs variables d'entrée continues (variables d'ajustement) et un grand nombre de variables de sorties ( $m$  est de l'ordre de 1000, donc il faut faire 1000 analyse et que chaque simulation prends 10 minutes), ce qui rend cette méthode impossible en pratique.

Le principal problème est que l'analyse de sensibilité locale ne permet pas de réaliser une mesure de sensibilité globale sur un espace de variation des entrées. La sensibilité locale donne une information valable uniquement autour du point nominal où elle est calculée et ne réalise aucune exploration du reste de l'espace des variables d'entrée (indice par point du domaine d'entrée).

### 3.2.2. Analyse de sensibilité globale

Les méthodes d'analyse de sensibilité globale (GSA) [111] se caractérisent par la prise en compte de la totalité de l'espace des variables d'entrée et ont pour objectif de mesurer leur influence en analysant la variabilité de la sortie du modèle dans toute la plage de variation de variables (**Figure 18**). Les méthodes globales permettent de considérer les plages de variation des paramètres (dans l'intégralité de domaine de variation), en attribuant à chaque variable d'entrée sa contribution à la variabilité de la sortie [112]. Nous nous intéressons dans ce chapitre aux méthodes qui sont indépendantes de la nature du modèle (linéaire, non linéaire, monotone, non monotone, continu, discontinu,...). Après une époque marquée par des méthodes d'analyse de sensibilité locales inspirées du calcul différentiel [113], les méthodes globales font appel aux statistiques [114].

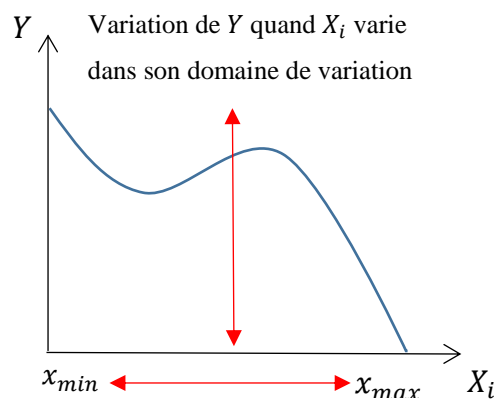


Figure 18: Analyse de sensibilité globale

Les principaux aspects pratiques qu'apporte l'analyse de sensibilité globale sont [115]:

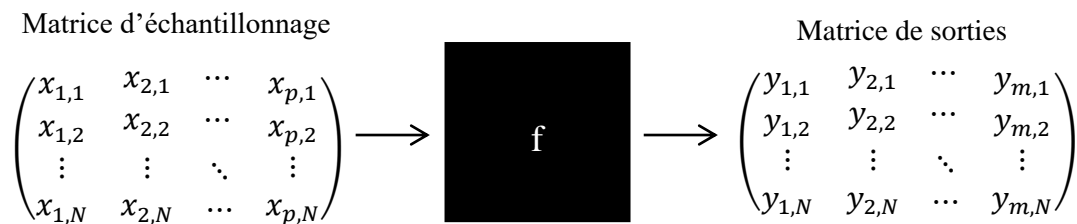
- I. Priorisation des facteurs (Factor Prioritization : FP) : le but est d'identifier les facteurs d'entrée les plus influents et de les classer selon leur influence sur la sortie.
- II. Fixation de facteurs (Factor Fixing : FF) : le but est d'identifier les variables d'entrée qui peuvent être fixées à leur valeur nominale, car elles ont une influence insignifiante sur la variation de la sortie. Cela permet de réduire la dimension du problème.
- III. Diminution de la variance (Variance Cutting : VC) : le but est de réduire la variation de la sortie à un niveau prédéterminé en fixant le moins de variables d'entrées possible (pour plus de détails voir [116]).
- IV. Cartographie de l'effet des facteurs (Factor Mapping : FM) : le but est d'étudier quelles valeurs des variables d'entrées conduisent à des réalisations du modèle dans une plage

donnée de la sortie. Dans notre étude, par exemple, nous avons besoin d'identifier l'ensemble des variables d'ajustement qui aboutissent à une sortie qui respecte les contraintes opérationnelles, en particulier sur la tension de la caténaire.

Les méthodes d'analyse de sensibilité globale diffèrent les unes des autres par la façon dont elles définissent et mesurent la sensibilité. Cependant, leur implémentation numérique comprend toujours les trois mêmes étapes de base : (1) échantillonnage de l'espace de variabilité des facteurs d'entrée, (2) évaluation du modèle et (3) post-traitement des échantillons entrée-sortie pour calculer les indices de sensibilité.

### 3.2.3. Échantillonnage

Les méthodes d'analyse de sensibilité globale sont des méthodes fondées sur un échantillonnage des variables d'entrée du modèle. Lors de la phase d'échantillonnage,  $N$  réalisations (ou tirages) des  $p$  variables d'entrée du modèle, sont générées :



La matrice d'échantillonnage est constituée d'un ensemble de  $N$  jeux de données d'entrées : chaque ligne de cette matrice représente un jeu de données tiré aléatoirement. Ces données sont utilisées pour mener  $N$  calculs déterministes et obtenir le jeu de variables de sorties. Chaque ligne de la matrice de sorties représente un vecteur de sortie associé à un jeu de donnée d'entrées. L'enjeu de l'analyse de sensibilité est alors de calculer des indices statistiques qui quantifient l'influence de chaque entrée sur les sorties. Pour être statistiquement significatifs, les indices doivent être calculés à partir d'un échantillonnage correct de l'espace des entrées. Il faut un nombre suffisant de points d'échantillonnage, et que ces points soient correctement repartis dans l'espace.

Dans la suite de cette section, nous présentons différentes techniques d'échantillonnage de variables indépendantes. L'échantillonnage aléatoire est la méthode de base mais est très gourmande (trop gourmande !) en nombre d'échantillons [117]. Trois alternatives ont été

proposées afin d'améliorer la convergence du calcul des indices : la méthode d'échantillonnage stratifié [118], la méthode hyper cube latin (LHS) [119] et la méthode de Quasi-Monte Carlo [120]. L'enjeu est d'obtenir un bon compromis entre des indices de sensibilité précis et des calculs pas trop coûteux. Pour cela, il faut arriver à couvrir le mieux possible l'espace des entrées, en évitant les points trop proches les uns des autres (clusters), ou les zones insuffisamment couvertes (gap).

A. Echantillonnage aléatoire (random sampling) [121]:

L'échantillon est réparti aléatoirement dans un intervalle défini selon une certaine distribution. Un échantillon aléatoire peut contenir des clusters et gaps. Cependant un nombre important des points est nécessaire pour obtenir une précision satisfaisante des statistiques associées au comportement global.

B. Méthode stratifié (stratified sampling) [118]:

Dans ce mode, le domaine de  $X_i$  est divisé en sous-intervalles. Chacun des sous-intervalles contient le même nombre de points d'échantillons. Ces points sont échantillonnés au hasard dans chaque sous-intervalle en utilisant un générateur de nombres pseudo-aléatoire. Cette méthode ne peut pas résoudre le problème de clusters et gaps lorsque le domaine d'intervalle des variables est grand (voir un exemple dans [122]).

C. Echantillonnage par hyper cube latin (Latin hypercube sampling LHS) [119] :

Cette technique consiste à répartir uniformément les points de l'échantillon sur toute l'étendue du domaine. Pour cela l'intervalle de chaque  $X_i$  est découpé simultanément en  $N$  segments de probabilité égale puis une valeur est tirée aléatoirement dans chacun de ceux-ci. Les  $N$  valeurs ainsi obtenues pour  $X_1$  sont combinées d'une manière aléatoire aux  $N$  valeurs obtenues pour  $X_2$  et forment ainsi une matrice de taille  $N \times 2$ . De même, les valeurs obtenues pour  $X_3$  sont accolées à cette matrice et ainsi de suite jusqu'à la  $p$ ème variable. Les  $N$   $p$  – *uplets* obtenus forment finalement une matrice échantillonnée par hyper cubes latins (voir exemple **Figure 19**). L'inconvénient de cette méthode qu'elle montre des clusters et gaps dans le cas où la taille de l'échantillon est trop petite pour générer un échantillon de densité uniforme dans tout l'espace des paramètres.

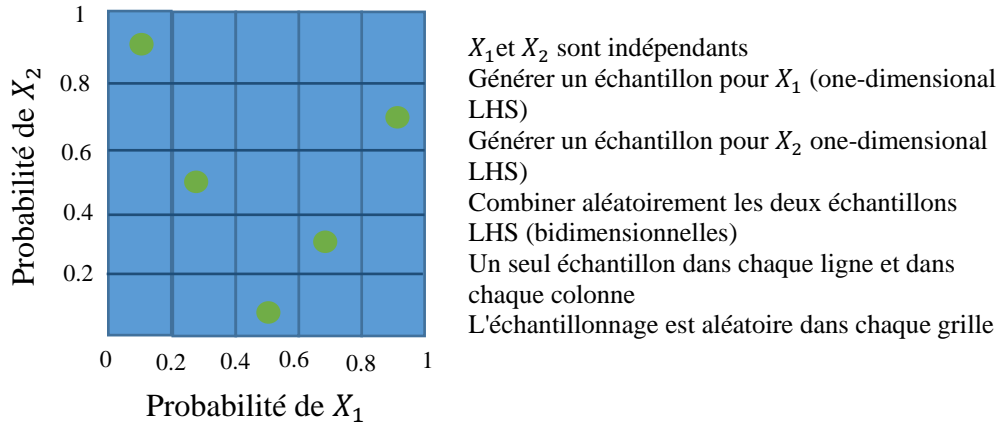


Figure 19: Exemple d'un échantillonnage LHS avec deux variables indépendants  $X_1$  et  $X_2$  pour  $N = 5$

D. Méthode fondée sur les séquences de Sobol (séquences quasi-aléatoires) [120]:

Les séquences Sobol appartiennent à la famille des séquences quasi-aléatoires qui sont conçues pour générer des échantillons répartis aussi uniformément que possible sur l'espace des paramètres multidimensionnels [122]. Les méthodes fondées sur les séquences de Sobol permettent une convergence (tendance vers la bonne réponse) plus rapide qu'avec LHS (voir [116]). La différence avec les autres méthodes est que les valeurs de l'échantillon sont choisies en tenant compte des points précédemment échantillonnés et évitant ainsi l'apparition de clusters et gaps. La **Figure 20** montre un exemple d'échantillonnage de deux dimensions avec deux méthodes : échantillonnage aléatoire et échantillonnage quasi-aléatoire.

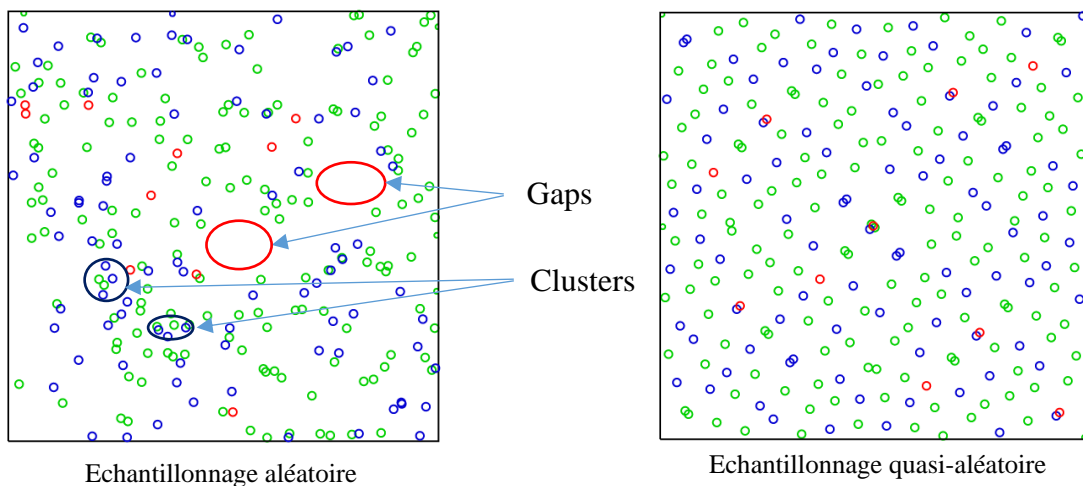


Figure 20: Figure montre la différence entre les deux méthodes : échantillonnage aléatoire (à gauche) et échantillonnage fondée sur les séquences de Sobol (à droite)

Nous résumerons ici les étapes principales de cette méthode (pour plus de détails voir [123] et [124]). Puis, pour clarifier ces étapes, nous ajoutons un petit exemple en fin de ce paragraphe.

Pour générer une séquence de Sobol (c'est-à-dire une dimension), nous choisissons un polynôme  $P(x)$  de degré  $d$  :

$$P(x) = x^d + a_1x^{d-1} + \dots + a_{d-1}x + 1$$

D'où les coefficients  $a_i$  sont 0 ou 1. Et nous choisissons des entiers impairs  $m_i$  ( $0 < i < N$ ) puis nous définissons  $N$  vecteurs direction  $c_i$  :

$$c_i = \frac{m_i}{2^i} = 0.c_{i1}c_{i2}c_{i3} \dots,$$

d'où  $c_{ij}$  indique « binary expansion<sup>8</sup> » de  $c_i$ .

Les coefficients  $a_i$  sont utilisés pour calculer chaque vecteur de direction  $c_i$  comme suit :

$$c_i = a_1c_{i-1} \oplus a_2c_{i-2} \oplus a_3c_{i-3} \oplus \dots \oplus a_{d-1}c_{i-d+1} \oplus c_{i-d} \oplus [c_{i-d} \gg d]$$

D'où  $\oplus$  est XOR (l'opérateur logique OU exclusif) et le dernier terme est  $c_{i-d}$  « right shifted » par  $d$  bits<sup>9</sup>

Donc une séquence unidimensionnelle  $x_1, x_2, \dots$  peut-être générée en basant sur l'ensemble de vecteurs de direction. Le  $n$ ième terme de cette séquence avec  $n = b_N b_{N-1} \dots b_2 b_1$  en binaire est calculée par:

$$x_n = b_1c_1 \oplus b_2c_2 \oplus \dots \oplus b_{N-1}c_{N-1} \oplus b_Nc_N$$

Etant donné que  $n + 1$  diffère par un seul bit de  $n$ ,  $x_{n+1}$  diffère de  $x_n$  par un seul vecteur de direction  $c_r$ .  $x_{n+1}$  donc peut être calculé en fonction de  $x_n$  comme suit:

$$x_{n+1} = x_n \oplus c_r$$

Exemple :

<sup>8</sup> Chaque nombre réel, dans une base  $b$ , peut être écrit sous la forme suivante :

$$x = a_0 + a_1.b + a_2.b^2 + \dots + a_nb^n + b_1b^{-1} + b_2b^{-2}$$

Les membres  $a_i$  et  $b_i$  sont des éléments dans  $\{0,1, \dots, b - 1\}$

Exemple : en choisissant la base 10, 16 peut être écrit comme suit :  $16 = 1.10 + 6.10^0$

<sup>9</sup>Binary digit, une unité de mesure en informatique

En choisissant le polynôme  $x^3 + x + 1$  de degré 3, avec les coefficients  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 1$ . Soient  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 3$ ,  $m_3 = 7$  avec  $c_i = \frac{m_i}{2^i}$  on obtient :  $c_1 = 0.1$ ,  $c_2 = 0.11$ ,  $c_3 = 0.111$ .

En calculant les vecteurs de direction, la séquence peut être générée. Les deux premiers points de cette séquence sont calculés en partant de conditions initiales  $x_0 = 0$  et  $n = 0$  :

$$x_1 = x_0 \oplus v_1 = 0.0 \oplus 0.1 = 0.1$$

$$x_2 = x_1 \oplus v_2 = 0.1 \oplus 0.11 = 0.01$$

Dans notre calcul, nous utilisons cette méthode pour générer une matrice de points (de séquence multidimensionnel) de dimension  $(N, p)$ , puis nous multiplions chaque point par le terme (borne supérieure de l'intervalle de variation de  $X_i$  – borne inférieure de l'intervalle de variation de  $X_i$ ) et nous additionnons la valeur obtenue avec la borne inférieure de l'intervalle de variation de  $X_i$ .

La taille de l'échantillon et la manière d'échantillonner jouent sur la précision et la rapidité de l'estimation des indices. Pour cela nous privilégions la méthode quasi-aléatoire qui, contrairement à d'autres méthodes, génère des nombres en remplissant l'hypercube multidimensionnel avec des points qui sont capables de mieux couvrir l'espace uniformément et donc de produire une convergence plus rapide et une meilleure précision.

### 3.3. Analyse de sensibilité fondée sur la décomposition de la variance

En analyse de sensibilité globale, dans le cadre général d'un modèle  $Y = f(X)$  scalaire non linéaire et non monotone, lorsque le modèle  $f$  se présente sous la forme d'une boîte noire, on définit des indices de sensibilité à partir d'une décomposition de la variance de  $Y$  [125]. La méthode la plus utilisée est la méthode de Sobol, initialement proposée en 1993 [126], puis adaptée en 1994 [127]. Une version récente de la méthode de Sobol a été présentée en 2002 dans [128]. Nous utilisons la formule de Sobol proposée dans la version récente parce qu'elle permet de calculer l'influence à partir d'un nombre d'échantillons plus réduit  $(N(k + 2))$  par rapport à la formule initiale de Sobol  $(N(2k + 2))$  [129].

La méthode de Sobol est une méthode d'analyse d'influence reposant sur une décomposition de la variance. Cette approche a été développée pour mener l'analyse de sensibilité de modèles de type boîte noire rapides d'exécution et ayant un nombre de paramètres d'entrée restreint. En



effet, elle nécessite de balayer de façon aléatoire toute la gamme de variation des facteurs d'entrée pour un calcul précis des indices. Elle s'appuie sur la décomposition de la variance de  $Y$  (sortie du modèle) en variances conditionnelles. De nombreux auteurs ont utilisé Sobol dans différents domaines [130], [131], [132], [133] et [134].

### 3.3.1. Vers les indices de Sobol

Les indices de Sobol ont d'abord été introduits dans le cas d'une sortie  $Y$  scalaire. Ces indices sont des grandeurs scalaires comprises entre 0 et 1 qui quantifient quelle proportion de la variance de la sortie du modèle est due à telle entrée ou tel groupe d'entrées [135]. Plus la valeur de l'indice est proche de 1, plus cette sortie est influencée par l'entrée associée. La connaissance des indices de Sobol permet d'ordonner les entrées suivant leur influence sur la sortie du modèle et donc de détecter les plus influentes. Il est également possible de détecter et de caractériser d'éventuelles interactions entre variables d'entrée.

De manière intuitive, une première manière d'estimer l'influence d'une variable d'entrée  $X_i$  sur la sortie  $Y$  est de fixer l'entrée  $X_i$  à une certaine valeur  $x_i$  et d'observer la variance de la sortie dans ces conditions, c'est-à-dire  $Var(Y|X_i = x_i)$ , la variance conditionnelle de  $Y$  sachant que  $X_i = x_i$  [136]. Plus cette variance est petite, plus la variable  $X_i$  est influente pour la valeur particulière  $x_i$ . Pour prendre en compte l'ensemble des valeurs possibles de  $X_i$ , il faut moyenner cette variance et considérer son espérance mathématique<sup>10</sup>  $E[Var(Y|X_i)]$ . Plus la variable  $X_i$  est influente vis-à-vis de la variance de  $Y$ , plus cette quantité est petite. Si la variance de  $Y$  est finie (ce qui est toujours le cas pour nous), alors d'après le théorème de la variance totale [137]:

$$Var(Y) = Var(E[Y/X]) + E[Var(Y/X)] \quad (1)$$

Un autre indicateur de la sensibilité de  $Y$  à  $X_i$  est alors la variance de l'espérance mathématique conditionnelle de  $Y$  sachant  $X_i$ , notée  $V_i$  et définie par :

$$V_i = Var(E(Y/X_i)) = Var(Y) - E(Var(Y/X_i)) \quad (2)$$

---

<sup>10</sup> Soit une variable aléatoire réelle continue  $X_i$ . Soit  $f_{X_i}$  la densité de probabilité de la variable aléatoire réelle de  $X_i$ . L'espérance de  $X_i$  est égale à  $\mathbb{E}[X_i] = \int_{\mathbb{R}} x f_{X_i}(x) dx$

La quantité  $Var(E[Y|X_i])$  est appelé l'effet principal de  $X_i$  sur  $Y$  et  $E[V(Y|X_i)]$  est le résidu. Plus la variable  $X_i$  est influente, plus  $V_i$  est grande. Afin d'utiliser un indicateur normalisé, l'indice de sensibilité de  $Y$  par rapport  $X_i$ , noté  $S_i$ , est finalement défini par :

$$S_i = \frac{Var(E[Y|X_i])}{Var(Y)} \quad (3)$$

L'indice de sensibilité exprimant la sensibilité de  $Y$  à  $X_i$  est défini par :

$$S_i = \frac{Var(E[Y|X_i])}{Var(Y)}$$

### 3.3.2. Décomposition de Höfdding

Les indices de Sobol peuvent être définis plus formellement à partir de la décomposition de Höfdding [138] dans le cadre de variables aléatoires indépendantes.

Soit  $f \in \mathbb{L}^2([0,1]^p)$ , le modèle étudié ( $f$  est déterministe<sup>11</sup>). On montre que  $f$  admet une décomposition en somme de fonctions élémentaires qui font intervenir un nombre croissant de variables, sous la forme suivante :

$$f(x) = f_0 + \sum_i^p f_i(X_i) + \sum_{i<j}^p f_{ij}(X_i, X_j) + \dots + f_{1,2,\dots,p}(X_1, X_2, \dots, X_p) \quad (4)$$

Dans cette décomposition,  $f_0$  est une fonction constante. Les fonctions  $f_i$  dépendent d'une seule variable, dont elles représentent les effets principaux. Les fonctions  $f_{ij}$  dépendent de deux variables, dont elles représentent les effets couplés. De manière générale, la décomposition comprend des fonctions qui représentent les effets couplés de  $k$  variables parmi  $p$ , pour  $k$  compris entre 1 et  $p$ . Le dernier terme de la somme est la fonction  $f_{12..p}$ .

La décomposition de Höfdding existe et est unique sous les conditions suivantes :

- $f$  est une fonction intégrable
- L'intégrale de chaque fonction de la décomposition, prise sur le domaine de variation des paramètres dont elle dépend, est nulle :

<sup>11</sup> Fonction qui pour le même argument renverra toujours le même résultat

$$\int_{[0,1]} f_{i_1, \dots, i_p} (x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) d_{x_{i_k}} = 0, 1 \leq k \leq p, \quad (5)$$

$$(i_1, \dots, i_p) \in D^p$$

Une première conséquence de (4) et (5) :

- les termes de la décomposition sont deux à deux orthogonaux [139]. Autrement dit, pour  $(k_1, \dots, k_p) \neq (l_1, \dots, l_p), (k_1, \dots, k_p) \in D^p, (l_1, \dots, l_p) \in D^p$  on a :

$$\int_{[0,1]} f_{k_1, \dots, k_p} (x_{k_1}, \dots, x_{k_p}) f_{l_1, \dots, l_p} (x_{l_1}, \dots, x_{l_p}) d_x = 0, \quad \text{car au moins un des indices } k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_p \text{ n'est pas répété et l'intégrale associée à cet indice vaut 0 d'après (3).}$$

Autres conséquences :

- $f_0 = E(Y) = \int_{[0,1]} f(x) dx$  qui n'est autre que la moyenne de  $f$ .
- $f_i(X_i) = E(Y|X_i) - f_0$
- $f_{i,j}(X_i, X_j) = E(Y|X_i, X_j) - f_i(X_i) - f_j(X_j) - f_0$
- ...

Dans le contexte de l'analyse de sensibilité, la décomposition de Höfdding sert à quantifier l'importance de chacun des termes issus de la décomposition sur la sortie  $Y$  du modèle. Si les entrées  $X_i$  sont aléatoires et indépendantes, l'équation (4) permet d'obtenir la décomposition de la variance globale ( $Var(Y)$ ) par orthogonalité (appelée aussi représentation ANOVA [140]) :

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^p Var(f_i) + \sum_{i < j} Var(f_{i,j}) + \dots + Var(f_{1,2,\dots,p}) \quad (6)$$

La variance de  $Y$  est ainsi mise sous forme de somme des contributions individuelles des différents facteurs et de leurs interactions [141] :

$$Var(Y) = \sum_i V_i + \sum_i \sum_{j>i} V_{i,j} + \dots + V_{1,2,\dots,p}$$

Où les termes  $V_i, V_{i,j}, \dots$  et  $V_{1,2,\dots,p}$  sont définis par :

$$V_i(Y) = Var(f_i) = Var[E(Y|X_i)]$$

$$V_{i,j}(Y) = Var(f_{i,j}) = Var[E(Y|X_i, X_j)] - V_i(Y) - V_j(Y)$$

...

Cette décomposition permet de définir tous les indices de sensibilité de Sobol [126] :

☞ Indices d'ordre 1 :

$$S_i = \frac{Var(f_i)}{Var(Y)} = \frac{Var[E(Y|X_i)]}{Var(Y)} \quad (7)$$

Ils quantifient la part de variance de  $Y$  expliquée par les variations de  $X_i$  indépendamment de la valeur des autres facteurs (contribution individuelle de  $X_i$  sur la variance de la sortie  $Y$ ).

☞ Indices d'ordre 2 :

$$S_{ij} = \frac{Var(f_{i,j})}{Var(Y)} = \frac{Var[E(Y|X_i, X_j)] - V_i(Y) - V_j(Y)}{Var(Y)} \quad (8)$$

Ils quantifient la part de variance de  $Y$  due aux variations de  $X_i$  et  $X_j$  non expliquée par la somme de leurs effets propres. Ils caractérisent donc les interactions entre  $X_i$  et  $X_j$ .

De la même manière, on peut définir des indices d'ordre supérieur. Un autre indice important est l'indice de sensibilité totale.

☞ Indices de sensibilité totale :

$$S_{Ti} = S_i + \sum_{i \neq j} S_{i,j} + \dots + S_{1,\dots,i,\dots,p} \quad (9)$$

Le nombre d'indices de sensibilité dépend de  $p$ , le nombre de variables d'entrée, et vaut  $2^p -$

1. Par exemple pour un modèle avec 3 paramètres, il y a  $(2^3 - 1) = 7$  indices de sensibilité :

- 3 indices de sensibilité d'ordre 1 :  $S_1, S_2, S_3$
- 3 indices de sensibilité d'ordre 2 :  $S_{12}, S_{23}, S_{13}$
- 1 indice de sensibilité d'ordre 3 :  $S_{123}$

Pour  $p = 10$ , il y a un total de 253 indices, mais on se limite en général aux indices d'ordre 1.

**Exemple d'application pour un modèle à deux variables d'entrée:**

Pour toute fonction  $Y = f(X_1, X_2)$ , il existe une décomposition orthogonale unique :

$$Y = f_0 + f_1(X_1) + f_2(X_2) + f_{1,2}(X_1, X_2) \quad (10)$$

D'un point de vue probabiliste, la moyenne générale  $f_0$  est l'espérance mathématique (la moyenne pondérée des valeurs que peut prendre une variable) de la réponse  $Y$ . Les autres composantes orthogonales de  $f$  s'expriment en fonction des espérances mathématiques conditionnelles de  $Y$ . Dans le cas de deux facteurs, on a :

$$f_0 = E(Y)$$

$$f_1(x_1) = E(Y/X_1 = x_1) - f_0$$

$$f_2(x_2) = E(Y/X_2 = x_2) - f_0$$

$$f_{1,2}(x_1, x_2) = E(Y/X_1 = x_1, X_2 = x_2) - (f_0 + f_1(x_1) + f_2(x_2))$$

La variance de  $Y$  s'exprime alors comme une somme de variances, que l'on normalise pour obtenir l'effet relatif des différents facteurs.

$$Var(Y) = Var(f_1) + Var(f_2) + Var(f_{1,2})$$

$$Var(Y) = Var(E(Y|X_1)) + Var(E(Y|X_2)) + Var(E(Y|X_1, X_2))$$

$$1 = \frac{Var(E(Y|X_1))}{Var(Y)} + \frac{Var(E(Y|X_2))}{Var(Y)} + \frac{Var(E(Y|X_1, X_2))}{Var(Y)}$$

On définit alors trois indices de Sobol : deux d'ordre 1 et un d'ordre 2. On note que, par construction, la somme des indices est égale à 1.

$$S_1 = \frac{Var(E(Y|X_1))}{Var(Y)} \text{ effet principal de } X_1$$

$$S_2 = \frac{Var(E(Y|X_2))}{Var(Y)} \text{ effet principal de } X_2$$

$$S_{1,2} = \frac{\text{Var}(E(Y|X_1, X_2))}{\text{Var}(Y)} \text{ effet d'interaction entre } X_1 \text{ et } X_2$$

$$1 = S_1 + S_2 + S_{1,2}$$

On peut également définir deux indices de sensibilité totale :

$$S_{T1} = S_{i1} + S_{i1,2} \text{ effet total de } X_1$$

$$S_{T2} = S_{i2} + S_{i1,2} \text{ effet total de } X_2$$

**Application** : Considérons le modèle  $Y = X_1 + X_2$  où  $X_1$  et  $X_2$  sont distribuées suivant des lois uniformes continues :  $X_1 \sim U(0,2)$  et  $X_2 \sim U(2,10)$ .

Les espérances mathématiques et les variances de  $X_1$ ,  $X_2$  et  $Y$  se calculent par des probabilités élémentaires et on obtient :

$$E(X_1) = 1 \qquad E(X_2) = 6 \qquad E(Y) = 7$$

On calcule la variance de chaque variable suivant la règle :

$$\text{Var}(X_i) = E(X_i)^2 - E^2(X_i) = \int_a^b p(X_i) x_i^2 dx_i - E^2(X_i) \text{ (} p(X_i) \text{ est la densité de probabilité)}$$

**Rappel** :

La densité de probabilité de la loi uniforme continue est une fonction porte sur l'intervalle  $[a, b]$  :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pour } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Var}(X_1) = \frac{1}{2} \int_0^2 X_1^2 dx_1 - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Var}(X_2) = \frac{1}{8} \int_2^{10} X_2^2 dx_2 - 36 = \frac{16}{3}$$

$$\text{Var}(Y) = \frac{17}{3}$$

Pour déterminer les indices de Sobol, il faut calculer les variances des espérances mathématiques conditionnelles  $\text{Var}(E(Y|X_1))$  et  $\text{Var}(E(Y|X_2))$ .

A  $X_1$  fixé,  $E(Y|X_1) = X_1 + E(X_2)$ . On fait ensuite varier  $X_1$ . La quantité  $E(X_2)$  est constante par rapport à ces variations, donc  $\text{Var}(E(Y|X_1)) = \text{Var}(X_1)$ .

De la même manière,  $Var(E(Y|X_2)) = Var(X_2)$ .

On obtient ainsi les deux indices d'ordre 1 :

$$S_1 = \frac{Var(E(Y|X_1))}{Var(Y)} = \frac{1}{17}$$

$$S_2 = \frac{Var(E(Y|X_2))}{Var(Y)} = \frac{16}{17}.$$

L'indice d'ordre 2 peut être calculé par la relation  $1 = S_1 + S_2 + S_{1,2}$ . On obtient  $S_{1,2} = 0$ , ce qui indique l'absence d'effets d'interaction entre  $X_1$  et  $X_2$ . Ce résultat est normal compte tenu de la forme additive du modèle et de l'indépendance des variables d'entrée. L'indice  $S_2$  est beaucoup plus grand que  $S_1$ . Cela traduit la forte influence de  $X_2$  sur les variations de la sortie, due au fait que l'intervalle de variation de  $X_2$  est quatre fois plus grand que celui de  $X_1$ .

Le calcul pratique des indices de Sobol nécessite la mise en œuvre d'estimateurs statistiques des différentes variances en jeu, par simulation de type Monte Carlo. Avant de détailler la méthode que nous avons utilisée, nous allons présenter la généralisation des indices de Sobol au cas de sorties vectorielles, et leur application au cas des sorties dynamiques.

### 3.3.3. Indices de Sobol Généralisés [142]

Les indices de Sobol ont été introduits dans le cas de variables de sortie scalaires. En général, un modèle a plusieurs grandeurs de sortie. Il est alors naturel de définir une série d'indices de Sobol par sortie. Cela paraît tout à fait justifié quand il s'agit de grandeurs physiques différentes, comme les tensions à la caténaire, les courants dans les câbles, les températures, ... La question devient plus délicate quand il s'agit de prendre en compte les différentes valeurs d'une grandeur physique au cours du temps, ou en différents points de l'espace.

Dans ses travaux [143], [144] Lamboni s'intéresse à des sorties dynamiques (séries temporelles). Il commence par définir des indices de Sobol fonctions du temps, ce qui lui permet d'analyser l'évolution temporelle de la sensibilité d'une certaine grandeur de sortie aux différentes variables d'entrée à partir du graphe temporel des indices de Sobol. Par la suite, il propose un indice de sensibilité global, défini sur l'ensemble du domaine temporel étudié. Par la suite, Gamboa et al ont repris et précisé mathématiquement ce concept d'indices généralisés [145], [146].

Dans le cas d'une sortie dynamique, le modèle est de la forme  $Y = f(X)$ , où  $X = (X_i)_{i=1,p} \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des paramètres d'entrée du modèle, et  $Y = (Y_t)_{t=1,m} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur qui contient la série temporelle de la grandeur de sortie étudiée. On s'intéresse à l'influence des  $X_i$  sur la série temporelle  $Y$ . La décomposition de Hoeffding peut s'écrire à chaque pas de temps comme suit :

$$Y_t = f_{0,t} + \sum_{i=1}^p f_{i,t}(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq p} f_{i,j,t}(X_i, X_j) + \dots + f_{1,2,\dots,p,t}(X_1, X_2, \dots, X_p) \quad (11)$$

À partir de cette forme, il est naturel de définir des séries temporelles d'indices de Sobol, d'ordre 1 et plus :

$$S_{i,t} = \frac{\text{var}(f_{i,t})}{\text{var}(Y_t)} \quad S_{i,j,t} = \frac{\text{var}(f_{i,j,t})}{\text{var}(Y_t)} \quad \dots$$

Les indices de Sobol définis au cours du temps donnent une information locale sur l'influence de chaque variable d'entrée à un instant donné. Pour avoir une information globale sur la durée de l'étude, on peut s'appuyer sur la matrice de covariance<sup>12</sup> de  $Y$ , qui caractérise toutes les interactions statistiques entre les valeurs de la sortie aux différents pas de temps. Cette matrice est définie par :

$$\text{Cov}(Y) = [\text{Cov}(Y_{t_1}, Y_{t_2})]_{\substack{1 \leq t_1 \leq m \\ 1 \leq t_2 \leq m}}$$

À partir de la décomposition de Hoeffding, la matrice de covariance de la sortie dynamique peut être partitionnée en une somme de matrices de covariance qui caractérisent les interactions entre les différents pas de temps :

$$\text{Cov}(Y) = \sum_{i=1}^p \text{Cov}(f_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq p} \text{Cov}(f_{i,j}) + \dots + \text{Cov}(f_{1,2,\dots,p}) \quad (12)$$

Cette relation matricielle est projetée dans l'espace des réels par l'opérateur Trace, noté  $\text{Tr}$  :

$$\text{Tr}[\text{Cov}(Y)] = \sum_{i=1}^p \text{Tr}[\text{Cov}(f_i)] + \sum_{1 \leq i < j \leq p} \text{Tr}[\text{Cov}(f_{i,j})] + \dots + \text{Tr}[\text{Cov}(f_{1,2,\dots,p})] \quad (13)$$

---

<sup>12</sup> La covariance est un paramètre en statistique et théorie des probabilités qui indique dans deux variables aléatoires la mesure dans laquelle ces deux variables aléatoires sont liées les unes aux autres. La covariance de deux variables aléatoires indépendantes est nulle, bien que la réciproque ne soit pas toujours vraie



L'opérateur trace fait la somme des termes diagonaux des matrices de covariance :

$$Tr[Cov(Y)] = \sum_{t=1}^m Cov(Y_t, Y_t) = \sum_{t=1}^m Var(Y_t)$$

$$Tr[Cov(f_i)] = \sum_{t=1}^m Cov(f_{i,t}, f_{i,t}) = \sum_{t=1}^m Var(f_{i,t})$$

Si  $Tr[Cov(Y)] \neq 0$ , on définit alors les indices de Sobol généralisés d'ordre 1 par [147]:

$$S_i(Y) = \frac{Tr[Cov(f_i)]}{Tr[Cov(Y)]} = \frac{\sum_{t=1}^m Var(f_{i,t})}{\sum_{t=1}^m Var(Y_t)} \quad (14)$$

$$\text{où } Var(f_i, t) = Var[E(Y_t|X_i)]$$

Le numérateur est la somme des effets de premier ordre de  $X_i$  sur la sortie du modèle aux différents pas de temps, et le dénominateur est la somme des variances de la sortie du modèle aux différents pas de temps. Les interactions entre les différents pas de temps n'interviennent pas du fait de la projection par l'opérateur Trace<sup>13</sup>. Dans le cas où  $m = 1$  (pas d'effet temporel) on retombe sur la formule classique.

On définit de la même manière les indices de sensibilité d'ordres supérieurs pour caractériser les effets croisés (les interactions) entre les différentes variables d'entrée, et des indices de sensibilité totale pour chacune des variables d'entrée.

### 3.3.4. Estimation des indices de Sobol par algorithme de Monte Carlo

Dans cette section nous décrivons la procédure numérique utilisée pour calculer l'ensemble complet des indices du premier ordre et de l'effet total pour un modèle donné [148]. Cette méthode estime les différentes variances qui apparaissent dans les indices de Sobol par un algorithme de Monte Carlo. La démarche a été proposée initialement par Sobol [126], et améliorée par Saltelli [128] en termes de temps de calcul.

Le principe du calcul numérique est le suivant. Les variances sont calculées à partir des espérances mathématiques selon la relation générale :  $Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$ , et les

---

<sup>13</sup> Etant donnée une matrice carrée  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , sa trace notée  $Tr(A)$ , est le scalaire somme des coefficients de sa diagonale principale :  $Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

espérances mathématiques sont approximées par l'estimateur de moyenne  $E(Y) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$ , où les  $y_i$  représentent  $N$  réalisations de la variable aléatoire  $Y$ .

**Estimation des indices d'ordre 1 :**

$$S_i = \frac{Var[E(Y|X_i)]}{Var(Y)} = \frac{E[E(Y|X_i)^2] - E[E(Y|X_i)]^2}{E(Y^2) - E(Y)^2}$$

Il y a donc quatre espérances mathématiques à estimer, dont deux conditionnelles à  $X_i$  donné. Les termes du dénominateur ne posent pas de difficulté particulière comme nous le verrons par la suite. En revanche, les termes du numérateur nécessitent de figer la variable d'entrée  $X_i$ . Pour cela, l'algorithme s'appuie sur deux échantillons de tailles identiques, selon la procédure décrite ci-dessous.

- 1) Générer deux échantillons de l'espace des  $p$  paramètres d'entrées, d'effectif  $N$ . Ces échantillons sont organisés sous forme de deux matrices de nombres quasi-aléatoires, notées  $A$  et  $B$ , de dimension  $(N, p)$  des nombres quasi-aléatoires, ( $p$  est le nombre des entrées).  $N$  est appelé un échantillon de base ; Chaque ligne des matrices correspond à un jeu de valeurs des paramètres d'entrée du modèle et chaque colonne correspond aux valeurs tirées aléatoirement pour une entrée donnée représente un jeu des valeurs pour une seule variable (par exemple, la première colonne représente un jeu des valeurs pour la variable d'ajustement  $X_1$ . Sobol recommande d'utiliser des séquences de nombre quasi-aléatoires.

$$A = \begin{bmatrix} x_{1,1}^{(A)} & \dots & x_{i,1}^{(A)} & \dots & x_{p,1}^{(A)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{1,N-1}^{(A)} & \dots & x_{i,N-1}^{(A)} & \dots & x_{p,N-1}^{(A)} \\ x_{1,N}^{(A)} & \dots & x_{i,N}^{(A)} & \dots & x_{p,N}^{(A)} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} x_{1,1}^{(B)} & \dots & x_{i,1}^{(B)} & \dots & x_{p,1}^{(B)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{1,N-1}^{(B)} & \dots & x_{i,N-1}^{(B)} & \dots & x_{p,N-1}^{(B)} \\ x_{1,N}^{(B)} & \dots & x_{i,N}^{(B)} & \dots & x_{p,N}^{(B)} \end{bmatrix}$$

- 2) Définir  $p$  matrices  $C_i$  (l'indice  $i$  est associé à  $X_i$ ) formées en remplaçant la  $i$ ème colonne de la matrice  $B$  par la  $i$ ème colonne de la matrice  $A$  :

$$C_i = \begin{bmatrix} x_{1,1}^{(B)} & \dots & x_{i,1}^{(A)} & \dots & x_{p,1}^{(B)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{1,N-1}^{(B)} & \dots & x_{i,N-1}^{(A)} & \dots & x_{p,N-1}^{(B)} \\ x_{1,N}^{(B)} & \dots & x_{i,N}^{(A)} & \dots & x_{p,N}^{(B)} \end{bmatrix}$$

- 3) Calculer la sortie du modèle pour chaque jeu de variables d'entrée des matrices d'échantillons  $A$ ,  $B$  et  $C_i$ . On obtient ainsi trois vecteurs colonnes de dimension  $N$ , contenant les sorties du modèle :

$$Y_A = f(A) = \begin{bmatrix} y_1^{(A)} \\ \vdots \\ y_{N-1}^{(A)} \\ y_N^{(A)} \end{bmatrix} \quad Y_B = f(B) = \begin{bmatrix} y_1^{(B)} \\ \vdots \\ y_{N-1}^{(B)} \\ y_N^{(B)} \end{bmatrix} \quad Y_{C_i} = f(C_i) = \begin{bmatrix} y_1^{(C_i)} \\ \vdots \\ y_{N-1}^{(C_i)} \\ y_N^{(C_i)} \end{bmatrix}$$

- 4) Calculer les estimateurs des espérances mathématiques. Les termes du dénominateur sont calculés de manière classique.

- $E(Y) \cong \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j^{(A)}$
- $E(Y^2) \cong \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [y_j^{(A)}]^2$

Les espérances mathématiques conditionnelles qui figurent au numérateur sont un peu plus délicates à traiter. Saltelli propose de les estimer en considérant les matrices des sorties  $Y_A$  et  $Y_{C_i}$ , où  $Y_{C_i}$  correspond aux sorties du modèle obtenues en ré-échantillonnant toutes les variables d'entrée sauf  $X_i$ . Les estimateurs proposés sont :

- $E[E(Y|X_i)] = E(Y) \cong \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N (y_j^{(A)} + y_j^{(C_i)})$
- $E[E(Y|X_i)^2] \cong \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j^{(A)} \cdot y_j^{(C_i)}$

On obtient ainsi l'expression :  $S_i \cong \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j^{(A)} \cdot y_j^{(C_i)} - \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j^{(A)} \right]^2}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [y_j^{(A)}]^2 - \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j^{(A)} \right]^2}$

### **Estimation des indices d'ordre 2 :**

- 5) Les indices d'interaction de second ordre sont estimés suivant le même principe :

$$S_{i,j} = \frac{\text{var}[E(Y|X_i, X_j)]}{\text{var}(Y)} - S_i - S_j$$

Avec  $\text{Var}[E(Y|X_i, X_j)] = E[E(Y|X_i, X_j)^2] - E[E(Y|X_i, X_j)]^2$

$$E[E(Y|X_i, X_j)^2] \cong \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j^{(A)} \cdot y_j^{(C_{i,j})}$$

$$E[E(Y|X_i, X_j)] \cong \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} (y_j^{(A)} + y_j^{(Ci,j)})$$

Où  $y_j^{(Ci,j)}$  correspond aux sorties du modèle obtenues en ré-échantillonnant toutes les variables d'entrée sauf  $X_i$  et  $X_j$ .

**Estimation des indices d'effet total :**

6) Un point intéressant est qu'il est facile d'estimer les indices d'effet total. En effet, par construction des indices, on a la relation :

$$1 = S_{Ti} + S_{\sim i}$$

Où  $S_{\sim i}$  représentent l'indice de sensibilité d'ordre  $p - 1$  d'interaction entre tous les paramètres d'entrée, à l'exclusion de  $X_i$ . Donc :

$$S_{Ti} = 1 - S_{\sim i}$$

Par ailleurs :  $S_{\sim i} = \frac{\text{var}[E(Y|X_{\sim i})]}{\text{var}(Y)}$

Avec  $[E(Y|X_{\sim i})]^2 = E[E(Y|X_{\sim i})^2] - E[E(Y|X_{\sim i})]^2$ .

Ces espérances mathématiques sont estimées en considérant les matrices  $B$  et  $C_i$ , qui ne diffèrent que par la variable  $X_i$ .

$$E[E(Y|X_{\sim i})^2] \cong \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j^{(B)} \cdot y_j^{(Ci)}$$

$$E[E(Y|X_{\sim i})] \cong \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} (y_j^{(B)} + y_j^{(Ci)})$$

Nous venons de voir comment les matrices d'échantillonnage  $A$ ,  $B$  et leurs combinaisons permettent de calculer une estimation de tous les indices de sensibilité de Sobol. Le principe est simple, mais on note l'explosion combinatoire qui se produit quand on veut estimer les indices d'interaction entre variables d'entrée.

Pour les indices d'ordre 1, le coût reste raisonnable :  $N$  calculs du modèle pour la matrice  $A$ ,  $p \times N$  calculs du modèle pour la matrice  $C_i$ . Pour obtenir les indices d'effet total, il suffit de rajouter le calcul des entrées pour la matrice  $B$ . Le coût total est alors de  $N \times (p + 2)$  évaluations du modèle.

Une autre technique pour estimer les indices fondés sur la décomposition de la variance est la méthode FAST. Tandis que cette méthode apporte des avantages en termes de calcul par rapport au Sobol, elle reste non suffisante pour être adaptée à notre problème (la sortie dynamique, les contraintes sur les sorties,...). Pour cette raison, elle n'a pas été implémentée dans notre travail.

### 3.3.5. Estimation des indices de Sobol généralisés par la méthode Monte Carlo

Les indices généralisés sont estimés exactement sur le même principe que les indices classiques. Dans notre cas, la sortie dynamique qui nous intéresse correspond à une série temporelle ou spatiale. Le modèle est de la forme  $Y = f(X)$ , où  $X = (X_i)_{i=1,p} \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des paramètres d'entrée du modèle, et  $Y = (Y_t)_{t=1,m} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur qui contient la série temporelle de la grandeur de sortie étudiée.

Les indices généralisés d'ordre 1 sont définis par :

$$S_i(Y) = \frac{\sum_{t=1}^m \text{Var}[E(Y_t|X_i)]}{\sum_{t=1}^m \text{Var}(Y_t)}$$

De même que pour les indices classiques, l'estimation nécessite deux matrices d'échantillonnage des entrées, notées  $A$  et  $B$ , et à partir desquelles on construit les matrices  $C_i$ .

Les sorties échantillonnées sont maintenant des matrices de dimension  $(N, m)$ . Sous forme développée  $f(A)$  s'écrit :

$$f(A) = \begin{pmatrix} y_{1,1}^{(A)} & y_{2,1}^{(A)} & \cdots & y_{m,1}^{(A)} \\ y_{1,2}^{(A)} & y_{2,2}^{(A)} & \cdots & y_{m,2}^{(A)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{1,N}^{(A)} & y_{2,N}^{(A)} & \cdots & y_{m,N}^{(A)} \end{pmatrix}$$

Les lignes correspondent à une évaluation du modèle pour un jeu de paramètres d'entrée, alors que les colonnes correspondent à l'ensemble des valeurs de la sortie à un instant donné.

L'estimation des indices de Sobol généralisés nécessitent l'estimation des variances de la sortie aux différents instants  $t$  :  $\text{Var}[E(Y_t|X_i)]$  et  $\text{Var}(Y_t)$ . Pour cela, il suffit d'appliquer à chaque instant les estimateurs définis dans le cas des indices simples dans le paragraphe 2.3.4.

On obtient ainsi l'estimateur suivant des indices de Sobol généralisés :

$$S_i = \frac{\sum_{t=1}^m \left[ \sum_{j=1}^N y_{t,j}^{(A)} \cdot y_{t,j}^{(Ci)} - \frac{1}{N} \left( \sum_{j=1}^N \frac{y_{t,j}^{(A)} + y_{t,j}^{(Ci)}}{2} \right)^2 \right]}{\sum_{t=1}^m \left[ \sum_{j=1}^N \frac{\left( y_{t,j}^{(A)} \right)^2 + \left( y_{t,j}^{(Ci)} \right)^2}{2} - \frac{1}{N} \left( \sum_{j=1}^N \frac{y_{t,j}^{(A)} + y_{t,j}^{(Ci)}}{2} \right)^2 \right]} \quad (15)$$

### 3.3.6. Caractéristiques

La méthode d'analyse de sensibilité proposée par Sobol permet de calculer tous les indices de sensibilité, y compris les indices d'interactions et les indices d'effet total des variables d'entrées. Mais ces indices de sensibilité sont fondés sur la variance des sorties (moment d'ordre 2). Ils partent de l'hypothèse implicite que cette variance est suffisante pour caractériser complètement les évolutions de la sortie, ce qui n'est généralement pas suffisant.

Le principal inconvénient des indices de Sobol est leur coût en termes de temps de calcul d'une part et de stockage des informations d'autre part. En effet, elle nécessite un grand nombre des échantillons pour obtenir un calcul précis (cf chapitre 4).

## 3.4. Analyse de sensibilité fondée sur la distance entre distributions

### 3.4.1. Introduction

L'analyse de sensibilité repose sur la comparaison des variations de la sortie dans deux situations : d'une part quand toutes les variables d'entrées sont libres, et d'autre part quand une variable d'entrée – celle dont on veut évaluer l'influence – est figée. Il s'agit donc de comparer les distributions statistiques de  $Y$  et  $Y/X_i$ , pour les différentes entrées  $X_i$ . La méthode de Sobol repose sur la comparaison des variances, ce qui suppose que cette grandeur est suffisante pour caractériser les distributions de la sortie. En général, ce n'est pas le cas et l'utilisation de ce seul indicateur conduit à une perte d'information [149] (sauf pour les distributions gaussiennes). Pour pallier cette limitation, des méthodes fondées sur l'ensemble de la distribution de sortie sont apparues récemment. Ces méthodes sont appelées « moment-independent methods » car elles considèrent la totalité de la distribution et pas seulement sa variance. Elles sont de ce fait plus générales. Elles sont fondées sur la notion de distance entre distributions et comparent soit les distributions cumulées (CDF), soit les densités de probabilité (PDF) [150].

Dans [151], les auteurs proposent une méthode fondée sur la densité pour une sortie scalaire. Dans [150], les auteurs généralisent cette approche pour une sortie dynamique en utilisant la densité de probabilité jointe (joint PDF) de la sortie dynamique. Leur approche est impossible à mettre en œuvre dans le cas d'une sortie dynamique de dimension élevée, parce que la formule utilisée peut subir la malédiction de la dimensionnalité<sup>14</sup> pour calculer une intégration de dimension élevée (intégrale multiple) et puisqu'il est difficile d'estimer la PDF jointe de sorties de dimension élevée.

Dans [152] les auteurs ont proposé une méthode fondée sur les distributions cumulées et sur le test de Kolmogorov Smirnov [153] pour calculer la distance entre la distribution de  $Y$  et celle de  $Y/X_i$ . Mais cette méthode n'est valable que pour les modèles à sortie scalaire.

Dans la suite de cette section, nous présentons une méthode fondée sur une distance particulière, la « distance-énergie », qui peut être appliquée dans le cas où la sortie est scalaire ou dynamique. De plus, cette méthode est compatible avec les sorties dynamiques de grande dimension (grand nombre de pas de temps).

### 3.4.2. Définition de la distance-énergie<sup>15</sup>

La distance-énergie est une distance définie entre deux distributions de probabilité et qui peut être utilisée pour tester si deux échantillons sont identiquement distribués. Cette distance est analogue à l'énergie potentielle entre des objets dans un espace gravitationnel [154].

Soit  $X$  et  $Y$  des vecteurs aléatoires indépendants dans  $\mathbb{R}^N$ . La distance-énergie entre ces deux vecteurs est définie par la formule (16) :

$$\mathcal{E}(X, Y) = 2E \| X - Y \|^2 - E \| X - X' \|^2 - E \| Y - Y' \|^2 \quad (16)$$

Où  $E$  désigne l'espérance mathématique,  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne,  $E \| X \|^2 < \infty$ ,  $E \| Y \|^2 < \infty$ ,  $X'$  désigne une copie indépendante et identiquement distribuée<sup>16</sup> (iid) de  $X$  et  $Y'$  désigne une copie iid de  $Y$ .

---

<sup>14</sup> La malédiction de la dimension (curse of dimensionality) est un terme inventé par Richard Bellman en 1961 pour désigner divers phénomènes qui ont lieu lorsque l'on cherche à analyser ou organiser des données dans des espaces de grande dimension alors qu'ils n'ont pas lieu dans des espaces de dimension moindre [204].

<sup>15</sup> Le terme « distance-énergie » provient de la traduction littérale du terme anglais « energy distance » utilisé dans la littérature.

<sup>16</sup> Deux variables aléatoires ou plus sont dites iid si elles sont mutuellement indépendantes et si chaque variable aléatoire a la même distribution de probabilité que les autres.

Une propriété capitale de la distance-énergie est que  $\mathcal{E}(X, Y) = 0$  si et seulement si  $X$  et  $Y$  sont distribués identiquement [155], c'est-à-dire que ce sont des échantillons qui proviennent de la même distribution de probabilité. Ainsi, la distance-énergie peut être utilisée pour tester l'égalité de deux distributions.

Il a été montré que la distance-énergie peut s'exprimer à partir des fonctions caractéristiques des distributions<sup>17</sup> [156]. Elle contient toutes les informations de la distribution des vecteurs aléatoires. Un autre avantage de la distance-énergie est qu'elle est indépendante de la forme de la distribution, et qu'elle peut donc caractériser de manière précise tout type de distribution (uniforme, normale, ...).

Sur un plan pratique, la distance-énergie entre deux échantillons s'exprime simplement à partir de moyennes arithmétiques. Les échantillons n'ont pas nécessairement le même effectif.

Soient  $x_1, \dots, x_{n_1}$  les échantillons de  $X$  et  $y_1, \dots, y_{n_2}$  échantillons de  $Y$ . Correspondant à l'équation (16), la distance-énergie peut être estimée sous la forme suivante :

$$\mathcal{E}_{n_1, n_2}(X, Y) = 2A - B - C \quad (17)$$

Où A, B et C sont simplement des moyennes de distance par paires :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \|x_i - y_j\| \\ B &= \frac{1}{n_1^2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} \|x_i - x_j\| \\ C &= \frac{1}{n_2^2} \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \|y_i - y_j\| \end{aligned} \quad (18)$$

La distance entre  $x_i$  et  $y_j$  est calculée à partir la norme euclidienne entre vecteurs (ou L2-norme).

Puisque la valeur de la distance-énergie n'a pas de borne supérieure, une distance-énergie normalisée  $\bar{\mathcal{E}}(X, Y)$  peut être obtenue comme suit :

---

<sup>17</sup> La fonction caractéristique d'une distribution est la transformée de Fourier de sa densité de probabilité.



$$\bar{\mathcal{E}}(X, Y) = \frac{2E \| X - Y \| - E \| X - X' \| - E \| Y - Y' \|}{2E \| X - Y \|}$$

Alors  $0 \leq \bar{\mathcal{E}}(X, Y) \leq 1$  avec  $\bar{\mathcal{E}}(X, Y) = 0$  si et seulement si  $X$  et  $Y$  sont identiquement distribués.

Dans la sous-section suivante, la distance-énergie normalisée est utilisée pour définir l'indice de sensibilité globale dynamique.

### 3.4.3. Indices de sensibilité fondés sur la distance-énergie

Rappelons la forme de notre modèle dynamique :  $Y = f(X)$ , où  $X = (X_i)_{i=1,p} \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des paramètres d'entrée du modèle, et  $Y = (Y_t)_{t=1,m} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur qui contient la série temporelle de la grandeur de sortie.

On note  $Y/X_i$  la sortie dynamique conditionnelle lorsqu'une variable d'entrée  $X_i$  est fixée à une certaine valeur. Le principe de l'analyse de sensibilité est de comparer les distributions  $Y$  et  $Y|X_i$ , afin de mesurer l'effet qu'a le fait de fixer  $X_i$  à une certaine valeur. Pour cela, on exprime la distance-énergie entre les deux vecteurs  $Y$  et  $Y/X_i$  comme suit [157]:

$$d(X_i) = \bar{\mathcal{E}}(Y, Y/X_i)$$

Sachant que  $X_i$  est une variable aléatoire de densité  $f_{X_i}(x_i)$ , l'effet moyen de  $X_i$  sur la sortie dynamique est décrit par l'espérance mathématique de  $d(X_i)$  comme suit :

$$E_{X_i}(d(X_i)) = \int d(X_i) f_{X_i}(x_i) dx_i$$

Ensuite, l'indice de sensibilité globale dynamique est défini par :

$$S_i = E_{X_i}(d(X_i))$$

$S_i$  désigne la distance moyenne entre les distributions de la sortie inconditionnelle  $Y$  et de la sortie conditionnelle  $Y$  lorsque  $X_i$  est fixée. Une grande valeur de  $S_i$  signifie que la variable d'entrée  $X_i$  a un effet important sur la sortie dynamique.

De même l'indice de sensibilité globale dynamique pour tout groupe de variables d'entrée  $(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip})$  peut également être défini comme suit [157](effet d'interactions):

$$\begin{aligned}
S_{i_1, i_2, \dots, i_p} &= E_{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_p}} \left( d \left( X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_p} \right) \right) \\
&= E_{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_p}} \left( \bar{\varepsilon} \left( Y, Y / \left( X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_p} \right) \right) \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \bar{\varepsilon} \left( Y, Y / \left( X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_p} \right) \right) f_{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_p}} \left( x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p} \right) dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_p}
\end{aligned}$$

### 3.4.4. Estimation des indices

Nous présentons maintenant l'algorithme utilisé pour estimer l'indice de sensibilité  $S_i$  à partir d'un seul échantillon d'entrées-sorties [157].

- I. Générer la matrice d'échantillonnage à partir des caractéristiques statistiques des variables d'entrées, puis calculer la matrice des sorties du modèle. La figure ci-dessous rappelle les notations utilisées.



Pour chaque variable  $X_i$  :

- II. Partitionner l'intervalle de variation de  $X_i$  en  $L$  sous-intervalles consécutifs disjoints  $A_l = [a_{l-1}, a_l], l = 1, 2, \dots, L$ .
- III. Partitionner les sorties du modèle en  $L$  sous-ensembles  $Y|X_i \in A_l$  correspondant à la partition de  $X_i$  :
$$Y|X_i \in A_l = \{ (y_{1,j}, y_{2,j} \dots y_{m,j}) \mid x_{i,j} \in A_l \}, \quad l = 1, 2, \dots, L$$
- IV. Pour chaque intervalle  $A_l$ : estimer  $\bar{\varepsilon}(Y, Y|X_i \in A_l)$ , la distance-énergie entre  $Y$  et  $Y|X_i \in A_l$ , par les équations (17) et (18).
- V. Estimer l'espérance mathématique de  $\bar{\varepsilon}(Y, Y|X_i)$  :  $\xi_i = \sum_{l=1}^L P_l \bar{\varepsilon}(Y, Y|X_i \in A_l)$ , où  $P_l = p(X_i \in A_l)$  désigne la probabilité que  $X_i$  appartienne à l'intervalle de  $A_l$ .

Pour atteindre un équilibre entre le nombre de sous-intervalles et le nombre d'échantillons dans chaque sous-intervalle, il est recommandé de choisir un nombre des sous-intervalles  $L = \sqrt{N}$  où  $N$  est la taille de la matrice d'échantillons [158].

Exemple simple pour illustrer les étapes mentionnées ci-dessus :

Considérons un modèle à deux variables d'entrée  $X_1$  et  $X_2$  qui suivent chacune une loi uniforme sur l'intervalle  $[0,15]$ . Nous allons voir quelles sont les étapes pour calculer la sensibilité du modèle par rapport à  $X_1$ .

Pour simplifier l'exposé, on choisit un échantillon de taille réduite  $N = 100$ . Les valeurs de  $X_1$  sont partitionnées en 10 sous-intervalles ( $L = \sqrt{N} = 10$ ) listés ci-dessous.

$$\begin{aligned} A_1 &= [0, 1.5] \\ &\vdots \\ A_9 &= [12, 13.5] \\ A_{10} &= [13.5, 15] \end{aligned}$$

**Étapes I et II :** échantillonnage dans le plan  $(X_1, X_2)$  et partition des échantillons suivant les intervalles  $A_1$  à  $A_{10}$ . La **Figure 21** montre le résultat de cette phase.

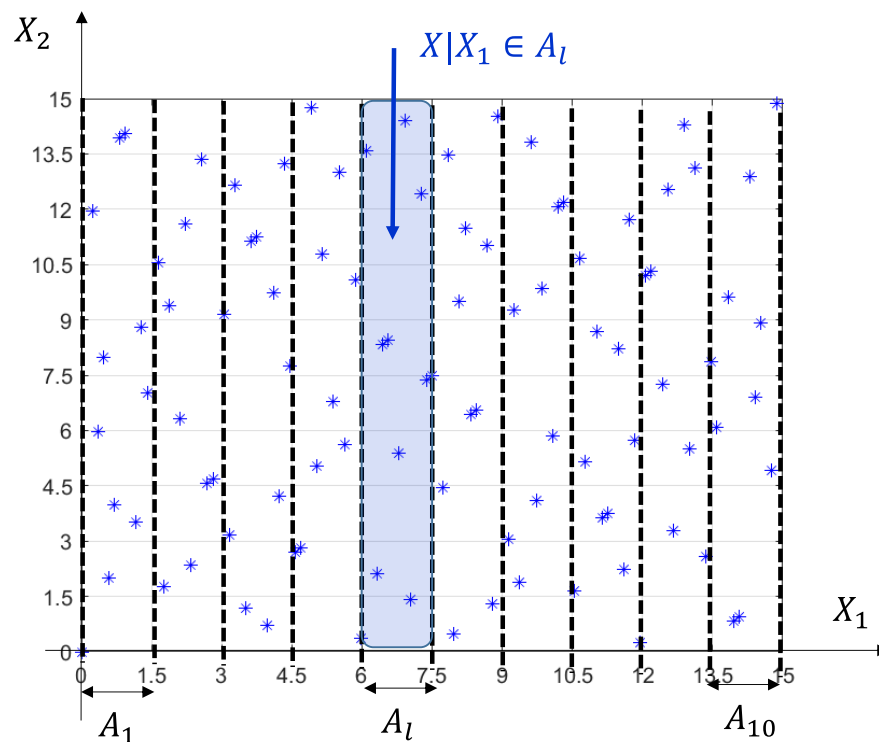


Figure 21: Échantillonnage de X et partition suivant  $X_1$

### Étape III :

À l'issue de la phase I, on dispose d'un ensemble de  $N$  sorties dynamiques, dont on peut représenter le graphe suivant le principe de la **Figure 22**. En réalité, les courbes sont très nombreuses et se superposent. La **Figure 22** n'est donc qu'une représentation de principe. L'étape III consiste à partitionner l'ensemble des sorties en  $L$  sous-ensembles, en fonction de l'intervalle d'appartenance de la variable d'entrée  $X_1$ .

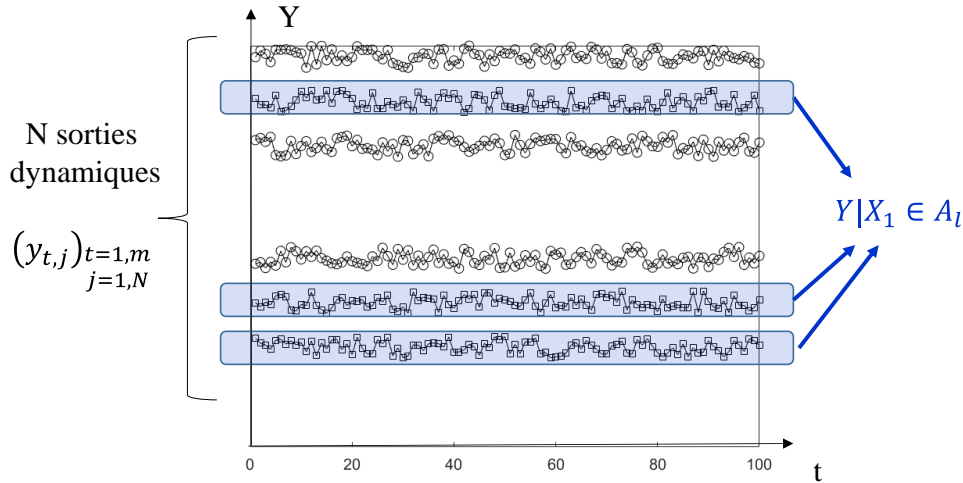


Figure 22: Représentation des sorties dynamiques  $Y$  et du sous-ensemble  $Y|X_1 \in A_l$

### Étape IV, à réaliser pour chaque intervalle $A_l$ :

Estimation de la distance-énergie entre  $Y$  et  $Y|X_1 \in A_l$  en appliquant les formules (17) et (18). Ces formules correspondent à des calculs de distance moyenne entre les sorties du modèle. La distance utilisée est la distance euclidienne entre deux séries de points. Considérons deux sorties quelconques parmi les  $N$  sorties du modèle, notées  $Y_i = (y_{t,i})_{t=1,m}$  et  $Y_j = (y_{t,j})_{t=1,m}$ . La distance euclidienne entre ces sorties est définie par :

$$\| Y_i - Y_j \| = \sqrt{(y_{1,i} - y_{1,j})^2 + (y_{2,i} - y_{2,j})^2 + \dots + (y_{m,i} - y_{m,j})^2}$$

### Étape V :

La dernière étape consiste à calculer la distance moyenne. Pour cela, on fait une somme pondérée de toutes les distances  $d(Y, Y|X_1 \in A_l)$  calculées à l'étape IV. Le coefficient de pondération affecté à chaque distance est la probabilité  $p(X_1 \in A_l)$ , obtenue simplement en

divisant l'effectif du sous-ensemble  $X_1 \in A_l$  par l'effectif total  $N$ . On obtient ainsi l'indice de sensibilité de  $X_1$ .

### 3.4.5. Caractéristiques

Les indices de sensibilité proposés dans cette partie ont l'intérêt de considérer la distribution de probabilité dans son ensemble. Ils sont donc porteurs de plus d'information que les indices fondés sur la seule variance. Ces indices peuvent être facilement estimés dans le cas des sorties dynamiques de grande dimension. Par ailleurs, le calcul de l'ensemble des indices de sensibilité ne nécessite qu'un seul échantillon d'entrées-sorties, alors qu'il en faut  $p + 1$  pour les indices de Sobol. Cet avantage se cumule avec une convergence plus rapide des indices, nécessitant une taille d'échantillon plus petite pour les méthodes fondées sur la variance (voir chapitre 4).

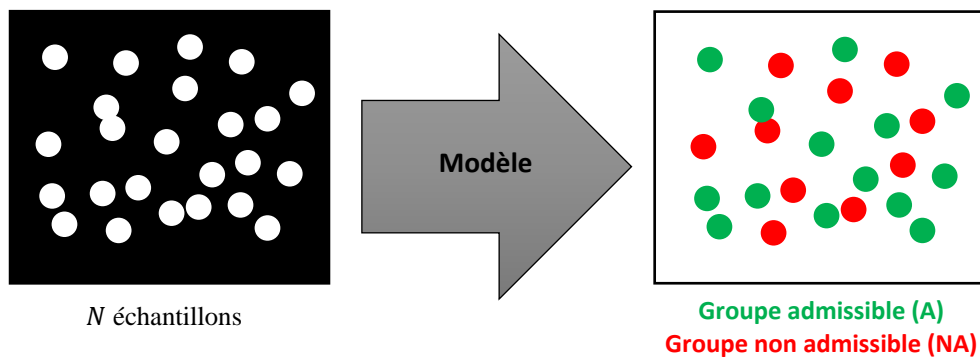
## 3.5. Analyse de sensibilité régionale

L'analyse de sensibilité régionale (RSA) est une méthode d'analyse de sensibilité globale fondée sur du Monte Carlo Filtering MCF [159] et qui répond aux questions suivantes : quelle variable ou groupe de variables permettent d'obtenir des sorties du modèle dans une région donnée de l'espace de sortie ? Comment le changement d'une variable d'entrée du modèle conduit la sortie à une bonne réalisation (solution acceptable) ou à une mauvaise réalisation (solution non acceptable) selon des critères définis ? Contrairement aux autres méthodes, le but de cette méthode est de mesurer l'influence des entrées sur la conduite du modèle dans la région désirée en prenant en compte les contraintes.

L'analyse de sensibilité régionale met l'accent sur la sensibilité du modèle dans la région défini par le critère d'acceptabilité de la sortie plutôt que sur l'ensemble du domaine exploré [160]. Autrement dit, elle appartient à la famille des méthodes visant à identifier des régions dans l'espace d'entrée correspondant à un ou plusieurs critères appliqués à la sortie. Ces méthodes peuvent être utilisées pour faire de la cartographie (Factor Mapping) [161]. Par conséquent, dans une analyse de sensibilité régionale, les paramètres d'entrée qui sont les plus responsables des variations de sortie selon les critères d'acceptabilité (contraintes sur les sorties) sont identifiés.

### 3.5.1. Principe de la méthode

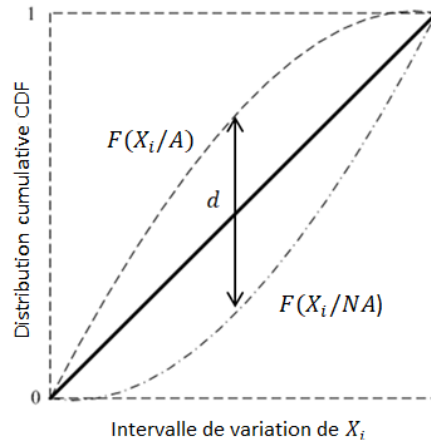
L'analyse de sensibilité régionale a d'abord été développée et appliquée dans les années 80 dans le domaine des études en sciences de l'environnement [162]. Elle est fondée sur la partition d'un échantillon de l'espace de variables d'entrée en deux groupes : 1- le sous-ensemble A (groupe admissible) contient les échantillons qui conduisent à de bonnes réalisations de sortie de modèle (solutions acceptables, qui respectent les critères ou les contraintes) ; 2- le sous-ensemble NA (groupe non admissible) contient les échantillons qui conduisent à des mauvaises réalisations de sortie du modèle (solutions non acceptables, qui ne respectent pas les contraintes ou les critères), comme le montre la **Figure 23**.



**Figure 23:** Partition de l'échantillon en un groupe satisfaisant un certain critère d'acceptabilité de la solution (A) et un groupe ne le satisfaisant pas (NA)

Suivant ce principe, les valeurs aléatoires prises par chaque variable d'entrée  $X_i$  peuvent être divisées en deux sous-groupes : le sous-groupe des valeurs aléatoires qui conduisent à des solutions acceptables, noté  $X_i/A$ , et le sous-groupe des valeurs aléatoires qui conduisent à des solutions non acceptables, noté  $X_i/NA$ .

Le but est ensuite de caractériser la distance entre les distributions de ces deux sous-groupes, soit par des méthodes graphiques (par exemple, comparaison des distributions cumulées, comme le montre la **Figure 24**, soit par des méthodes statistiques telles que le test de Kolmogorov-Smirnov [163].



**Figure 24: Fonctions de répartition des sous-groupes  $X_i/A$  et  $X_i/NA$  pour la variable  $X_i$**

La représentation graphique des distributions cumulées (CDF cumulative distribution function<sup>18</sup> en anglais) indique visuellement si l'entrée considérée a une influence sur le fait que la sortie respecte ou non le critère d'acceptabilité de la solution [164]. Des distributions cumulées peu différentes indiquent que le paramètre d'entrée est sans influence. La position relative des distributions cumulées de  $X_i/A$  et  $X_i/NA$  est porteuse d'information et indique si la variable d'entrée  $X_i$  a une influence positive ou négative sur la sortie du modèle. Plus précisément, si la courbe  $X_i/A$  est au-dessus de la courbe  $X_i/NA$  alors  $X_i$  a une influence négative, parce que dans ce cas, la probabilité d'avoir de solutions acceptables est plus grande quand  $X_i$  se rapproche de sa borne minimale. A l'inverse, si la courbe  $X_i/A$  est au-dessous de la courbe  $X_i/NA$  alors  $X_i$  a une influence positive, parce que dans ce cas, la probabilité d'avoir de solutions acceptables est plus grande pour les valeurs de  $X_i$  proches de sa borne maximale (**Figure 25**).

<sup>18</sup> La distribution cumulée d'une variable aléatoire réelle  $X_i$  est l'application  $F$  de  $\mathbb{R}$  dans  $[0,1]$  donnée par  $F_{X_i}(x) = P(X_i \leq x)$ . On parle également de fonction de répartition.

La plage de variation des entrées du modèle qui conduit statistiquement à une réalisation acceptable du modèle peut également être déterminée.

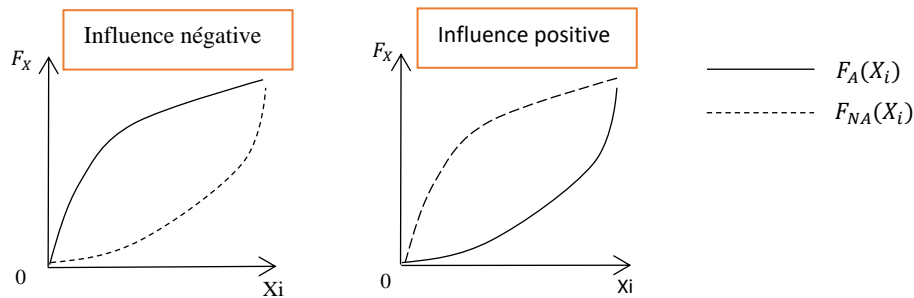


Figure 25: Sens d'influence de  $X_i$  selon la position des CDFs

### 3.5.2. Test de Kolmogorov-Smirnov

Le test de Kolmogorov-Smirnov [165] est une extension au test de Kolmogorov. Ce dernier compare la distribution observée d'un échantillon statistique à une distribution théorique. Le test de Kolmogorov-Smirnov compare la distribution de deux échantillons statistiques en se basant sur leurs distributions cumulées.

Dans notre travail, nous utilisons cette méthode pour quantifier la distance maximale ( $d$ ) entre les deux courbes de distributions cumulatives de sous-groupes  $X_i/A$  et  $X_i/NA$  [166].

#### 3.5.2.1. Principe

Pour construire un test d'homogénéité, on observe deux échantillons de taille respective  $n$  et  $m$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_m)$ . L'objectif est de tester si les deux échantillons sont issus d'une même loi (éventuellement inconnue). On note  $F$  la distribution cumulée de chacune des variables  $X_i$  et  $G$  la fonction de répartition<sup>19</sup> de chacune des variables  $Y_i$ . On veut tester l'hypothèse  $H_0 : F = G$  contre  $H_1 : F \neq G$ .

Notant que :

- L'hypothèse nulle notée  $H_0$  est l'hypothèse que l'on désire contrôler. Elle consiste à dire qu'il n'existe pas de différence entre les paramètres comparés.

<sup>19</sup> La fonction de répartition (cumulative distribution function en anglais) d'une variable aléatoire réelle caractérise la loi de probabilité de cette variable définie par  $F_X$ , qui à tout réel  $x$  associe  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$  où  $\mathbb{P}$  représente la probabilité que la variable aléatoire réelle  $X$  prenne une valeur inférieure ou égale à  $x$



- L'hypothèse alternative notée H1 est la négation de H0, elle est équivalente à dire « H0 est fausse ». La décision de rejeter H0 signifie que H1 est réalisée ou H1 est vraie.

Pour cela, on introduit la variable :

$$d_{m,n} = \sup |F_n(X) - G_m(Y)| \quad (19)$$

La question posée est la suivante : « A quel niveau de signification  $\alpha$ , la valeur calculée de  $d_{m,n}$ , détermine-t-elle le rejet de  $H_0$  ? » [167]. Un niveau bas implique une différence significative entre les deux échantillons, tandis qu'un niveau élevé supporte  $H_0$ .

Donc pour répondre à cette question, on introduit le théorème suivant :

**Théorème :**

Avec les hypothèses données ci-dessus et pour toute valeur de  $\alpha > 0$ , on a sous «  $H_0 : F = G$  » :

$$\mathbb{P} \left( \sqrt{\frac{nm}{n+m}} d_{m,n} \leq \alpha \right) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 \alpha^2)$$

La  $p - value = 1 - K \left( d_{m,n} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \right)$  où  $K = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 \alpha^2)$ , est la probabilité, sous  $H_0$ , d'obtenir une statistique aussi grande que la valeur observée  $d_{m,n}$  sur l'échantillon.

- Exemple 1 : si nous avons trouvé qu'on a 20 chances sur 100 de trouver du fait du hasard, une valeur supérieure à  $d_{m,n}$  pour  $n$  et  $m$ , nous concluons que l'écart  $d_{m,n}$  n'est pas significatif.
- exemple 2 : si nous avons trouvé qu'on a 93 chances sur 100 d'observer du fait du hasard, une valeur supérieure à  $d_{m,n}$ , nous concluons dans ce cas que l'écart  $d_{m,n}$  est significatif.

Ainsi, pour un seuil de significativité  $\alpha$  donné, on compare  $p - value$  et  $\alpha$ , afin d'accepter, ou de rejeter  $H_0$  [168]:

- Si  $p \leq \alpha$ , on va rejeter l'hypothèse  $H_0$  en faveur de  $H_1$
- Si  $p > \alpha$ , on va rejeter  $H_1$  en faveur de  $H_0$

On peut alors interpréter la  $p - value$  comme le petit seuil de significativité pour lequel l'hypothèse nulle est acceptée.

### 3.5.2.2. *Interprétation*

Nous utilisons le test Kolmogorov-Smirnov à deux échantillons [169] pour quantifier l'écart statistique entre les distributions des groupes  $A$  et  $NA$  pour une variable d'entrée donnée  $X_i$ . Ce test est basé sur la distance  $d$ -stat entre les fonctions de répartition  $F_{X_i|A}$  et  $F_{X_i|NA}$ , définie par (20).

- A.  $d$ -statistic ( $d_{m,n}$ ) : mesure le degré d'importance de la variable d'entrée  $X_i$  sur le modèle autour d'un critère :

$$d - stat = \max_{X_i} |F_{X_i|A}(X_i|y \in Y_A) - F_{X_i|NA}(X_i|y \in Y_{NA})| \quad (20)$$

$d$ -stat quantifie la distance maximale entre les deux fonctions de répartition  $F_{X_i|A}$  et  $F_{X_i|NA}$ . Plus la valeur de  $d - stat$  est grande, plus  $X_i$  est influente.

- B.  $p - value$ <sup>20</sup> : quantifie la significativité statistique des résultats, c'est-à-dire à quel niveau de signification les deux fonctions de répartition empiriques  $F_{X_i|A}$  et  $F_{X_i|NA}$  sont différentes (rejet de  $H_0$ ).

Pour calculer  $p$ -value, il faut choisir le niveau de signification  $\alpha$ , qui correspond à la probabilité de rejeter l'hypothèse  $H_0$  quand elle est vraie (c'est-à-dire de reconnaître un facteur comme important quand il ne l'est pas). Donc l'importance de chaque variable d'entrée est inversement liée à ce niveau de signification.

Dans [170], les auteurs ont suggéré d'utiliser les trois classes de sensibilité suivantes pour classer l'importance des variables d'entrée, en fonction du niveau de signification :

1. Critique ( $p < 0.01$ )
2. Important ( $0.01 < p < 0.1$ )
3. Insignifiant ( $p > 0.1$ )

---

<sup>20</sup> En anglais  $p$ -value pour probability value

### 3.5.3. Implémentation

1. La première étape consiste à échantillonner l'espace des entrées, c'est-à-dire générer une matrice de  $N$  lignes et  $p$  colonnes. Le nombre d'échantillon  $N$  doit être assez grand pour obtenir une analyse statistique significative.
2. Calculer la sortie pour chaque ligne de la matrice d'échantillons
3. Classer les sorties entre : sorties acceptables et sorties inacceptables selon un ou plusieurs critères
4. Effectuer le test Kolmogorov-Smirnov pour chaque facteur indépendamment.

$$d - stat = \max_{X_i} |F_{X_i|A}(X_i|y \in Y_A) - F_{X_i|NA}(X_i|y \in Y_{NA})| \quad (21)$$

$$p\_value = 1 - K \left( d_{m,n} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \right) \quad (22)$$

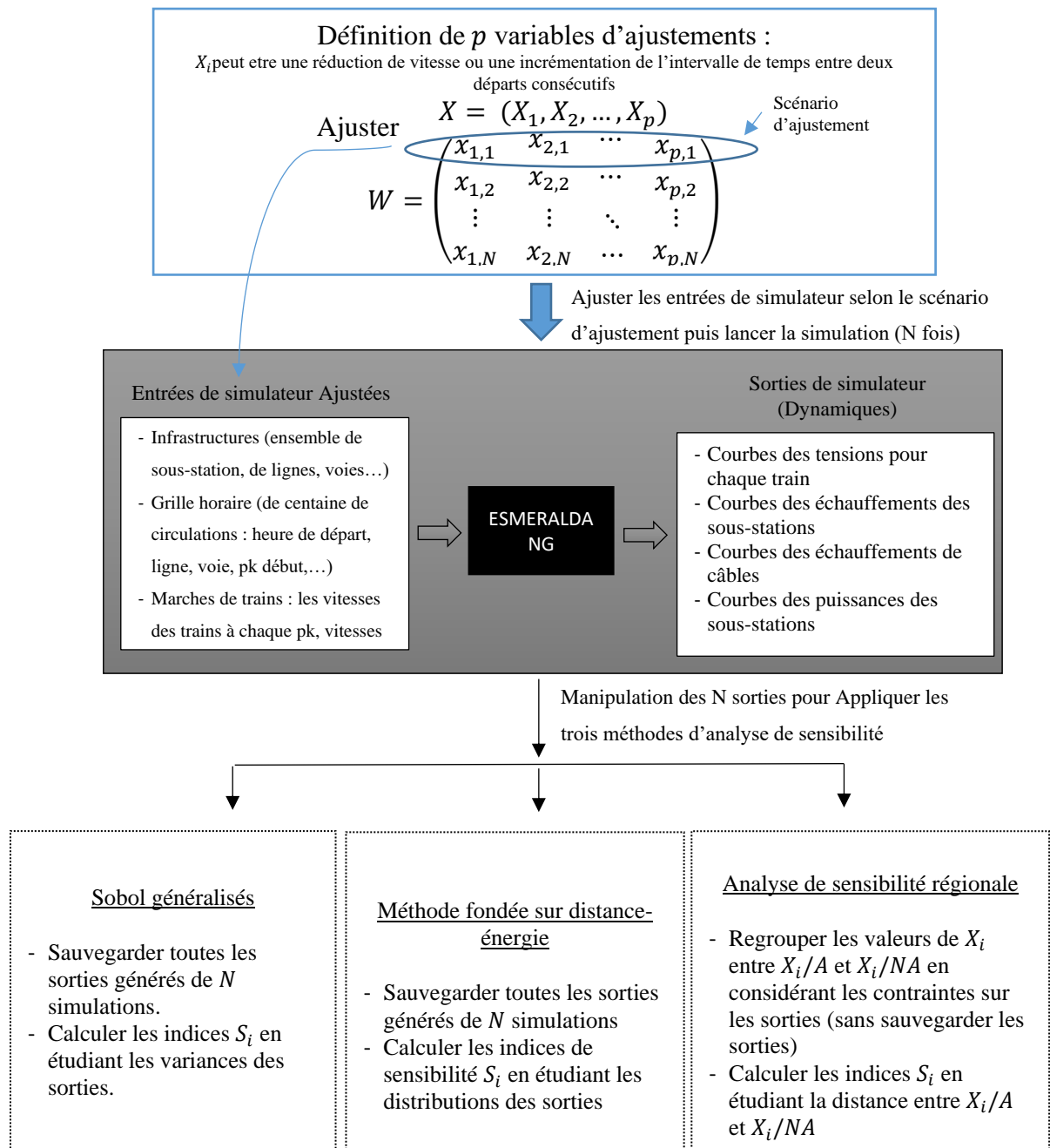
$$\text{où } K = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 \alpha^2),$$

### 3.5.4. Caractéristiques de l'analyse de sensibilité régionale

L'analyse de sensibilité régionale met l'accent sur la sensibilité régionale d'un modèle par rapport à un critère sur les sorties du modèle qui définit si une réalisation est acceptable ou pas. Cette méthode est simple à mettre en œuvre et offre des informations qualitatives sur l'influence des grandeurs d'entrée. Pourtant, ses interprétations qualitatives ignorent les interactions entre les variables d'entrées. Cette méthode peut s'appliquer à n'importe quel type de sortie du modèle. Dans notre étude, cette méthode va nous permettre d'analyser l'influence des actions d'ajustement du trafic par rapport aux contraintes opérationnelles, à commencer par les contraintes sur la tension à la caténaire.

### 3.6. Application à notre problème

Après avoir détaillé le principe des trois méthodes (indices de Sobol généralisés, distance-énergie, analyse de sensibilité régionale), nous présentons dans ce paragraphe l'application de ces méthodes à notre modèle d'ajustement. La **Figure 26** présente une synthèse du processus.



**Figure 26: Application de l'analyse de sensibilité sur notre modèle**

Les entrées du simulateur sont ajustées à partir des variables d'ajustement avant d'exécuter la simulation. Les variables d'ajustement sont les variables dont on cherche à étudier l'influence sur les sorties. Nous présenterons dans le chapitre 4 les différentes actions d'ajustements, et nous montrerons comment elles interviennent dans les entrées du simulateur.

Les sorties de  $N$  simulations sont : Une matrice  $(N, m)$  de tensions pour chaque train ( $N_{btrains} \times mat(N, m)$ ) ; une matrice  $(N, m)$  d'échauffement des sous-stations (pour les

sous-stations considérées dans l'étude) ; une matrice  $(N, m)$  d'échauffement de câbles (pour les secteurs des lignes considérées importantes) ; et une matrice  $(N, m)$  des puissances des sous-stations (considérées dans l'étude).

Ces sorties sont utilisées de manière différente pour effectuer le calcul d'analyse de sensibilité selon chaque méthode présentée dans ce chapitre. Les deux méthodes « indices de Sobol généralisés » et « distance-énergie » nécessitent de sauvegarder toutes les sorties à chaque itération  $i$  jusqu'à  $N$ , afin d'étudier ses variances ou ses distributions dans la phase d'analyse. Par contre la méthode de sensibilité régionale vérifie les contraintes opérationnelles sur les sorties à chaque itération, et détermine si la simulation associée est acceptable ou non, sans nécessiter de sauvegarder toutes ces sorties. Les contraintes sur les sorties sont calculées dans le post traitement de la méthode et non pas dans le simulateur.

### 3.7. Conclusion

L'analyse de sensibilité est le processus consistant à faire varier les paramètres d'entrée d'un modèle et à observer les variations des sorties qui en résultent. Elle est utilisée pour explorer comment les variations de sortie du modèle peuvent être qualitativement et quantitativement attribués aux différentes variations d'entrées. Les informations obtenues de l'analyse de sensibilité sont intéressantes pour guider et soutenir les gestionnaires au cours du processus décisionnel.

Dans ce chapitre, nous avons détaillé trois méthodes d'analyse de sensibilité globale appliquées aux modèles complexes à sortie dynamique et à entrées indépendantes : la méthode d'analyse de sensibilité fondée sur la décomposition de la variance ; la méthode d'analyse de sensibilité fondée sur la distance entre les distributions de la sortie ; et la méthode d'analyse de sensibilité régionale.

Toutes les méthodes étudient l'impact des entrées sur la sortie mais chacune utilise des informations différentes pour calculer l'impact :

- La méthode fondée sur la décomposition de la variance mesure l'influence des entrées sur la variance de sortie.
- La méthode fondée sur la distribution mesure l'influence des entrées sur la distribution de sortie.

- ☉ La méthode RSA mesure l'influence des entrées sur la performance de la sortie (sur la conduite du modèle à une région désirée)

Les deux premières méthodes ont exactement les mêmes objectifs, mais celle fondée sur la comparaison des distributions utilise plus d'informations que celle fondée sur la comparaison des variances.

La méthode régionale apporte une analyse sur l'influence des entrées sur la sortie en termes de respect d'une certaine contrainte de sortie. Elle est la plus adaptée à nos besoins et nos intérêts dans cette recherche. Elle nous permet de calculer l'influence des variables d'ajustement sur le respect des contraintes opérationnelles (tensions aux pantographes par exemple). Elle s'applique lorsqu'une définition qualitative du comportement « bon » ou « acceptable » d'un modèle peut être définie, par exemple via un ensemble des contraintes, seuils,... fondées sur les informations disponibles sur le système. Cette méthode est utile pour optimiser les performances du modèle en contrôlant les entrées du modèle dans la région donnant de bons résultats. Le seul inconvénient de cette méthode est qu'elle ne considère pas les effets d'interactions entre les variables sur la sortie. Les avantages et inconvénients des trois méthodes étudiées sont récapitulés dans le **Tableau 4**.

Méthode	Simplicité d'implémentation	Considérer les interactions	Signe d'influence	Prendre en compte les contraintes sur les sorties
fondée sur la variance	+	++	--	-
fondée sur la distribution	-	+	+	-
Régionale RSA	+	--	++	++

**Tableau 4:** résumé des caractéristiques des trois méthodes d'analyse de sensibilité globale expliquées dans ce travail

D'un point de vue théorique, la méthode d'analyse de sensibilité régionale est la plus adaptée à notre problématique. Nous verrons par la suite par expérimentation que cette méthode offre aussi les meilleures performances en pratique. Dans le chapitre 4, nous appliquerons ces trois méthodes sur un cas test simple. Nous allons comparer les résultats obtenus selon différents

critères (temps, CPU, stockage...) afin de confirmer l'intérêt que nous portons à la méthode d'analyse de sensibilité régionale en évaluant sa pertinence avec notre modèle en termes de ressources informatiques.

## Chapitre 4

### Application de la démarche sur un cas test simple

---

#### 4.1. Introduction

Les méthodes d'analyse de sensibilité présentées dans le chapitre 3 permettent d'estimer l'influence des variables d'entrées sur la (ou les) variable(s) de sortie d'un code de calcul. Nous allons maintenant les mettre en œuvre afin d'évaluer l'influence des différentes variables d'ajustement qui permettent de réorganiser le trafic ferroviaire en cas d'incident sur infrastructure électrique.

Le but de ce chapitre est de comparer et discuter les trois méthodes décrites dans le chapitre précédent : (1) méthode fondée sur l'analyse de la variance et les indices de Sobol; (2) méthode fondée sur l'estimation de la distance entre distributions (distance-énergie); (3) méthode d'analyse de sensibilité régionale (Kolmogorov-Smirnov-test) par rapport aux différents critères. Cette troisième méthode est à priori la plus appropriée à nos besoins, étant donné qu'on recherche les variables d'ajustement les plus importantes pour conduire le modèle à un bon comportement (respect des contraintes sur la sortie).

Compte tenu de la nature de notre problème en termes de taille et de complexité (temps de calcul élevé de quelques minutes et des centaines de variables), nous avons comparé les méthodes testées sur les critères suivants : temps du calcul, vitesse de convergence (tendance vers la bonne réponse) et espace nécessaire pour sauvegarder les sorties de simulateur.

Dans ce chapitre, nous présenterons l'étude d'un cas-test simple : il s'agit d'un réseau comportant une ligne à deux voies, alimenté par trois sous-stations. Dans un premier temps, nous détaillerons les contraintes opérationnelles essentielles dans le processus de réorganisation du trafic ferroviaire. Ensuite, nous expliquerons les différentes actions d'ajustement envisagées dans notre étude. Enfin, nous appliquerons les méthodes et commenterons les résultats.



## 4.2. Contraintes opérationnelles

Les installations ferroviaires sont soumises à des contraintes opérationnelles formalisées par différentes normes. Dans notre étude, cela se traduit par des contraintes mathématiques sur certaines sorties du modèle. La méthodologie que nous proposons prend en compte ces contraintes en définissant la notion de trafic « acceptable » ou « non acceptable » selon que les normes sont respectées ou pas. Nous présentons dans ce paragraphe trois critères principaux et importants dans la production ferroviaire.

### A. Tensions au niveau des pantographes des trains

Le premier critère porte sur la tension de ligne qui définit la qualité d'alimentation des trains : les tensions ne doivent pas descendre en dessous d'un certain seuil, défini en fonction du type d'alimentation par la norme EN 50 163. Par exemple, dans le cas du système d'alimentation AC 25 kV en conditions normales d'alimentation et de circulation, la tension aux pantographes doit être en permanence comprise entre 19 000 V et 29 000 V. En situation dégradée, la limite inférieure est de 17 500 V pendant deux minutes. Pour le système d'alimentation DC 1500 V, la tension aux pantographes doit être en permanence comprise entre 1000 V et 1800 V.

Une dégradation de la qualité d'alimentation pénalise la performance des circulations : les chutes de tension provoquent au mieux une perte de puissance et au pire une coupure de traction. Dans tous les cas, il y a un impact sur le temps de parcours pouvant aller au-delà de la marge de régularité.

Ce respect des normes se traduit par une contrainte sur les valeurs de sortie de modèle, à savoir sur les tensions aux pantographes de trains au long de parcours. Nous utilisons les valeurs de tensions moyennés sur un intervalle de temps de 10 secondes (vu la complexité du modèle, pour ignorer certains écarts de courte durée (inférieure à une seconde) qui peuvent apparaître dans les résultats de simulation mais ne sont pas significatifs dans notre cadre d'étude).

### B. Echauffements des groupes de tractions

Un autre critère important concerne les échauffements au niveau des groupes de traction. Conformément à la norme EN 50 329 et aux prescriptions des cahiers des charges techniques des transformateurs, la puissance apparente d'un groupe de traction moyennée sur 1 minute ( $P_n^{1min}$ ) ne doit pas excéder trois fois la puissance nominale  $P_n^{nom}$ ; celle moyennée sur 5

minutes ( $P_n^{5min}$ ) ne doit pas excéder deux fois la puissance nominale et celle moyennée sur 120 minutes ( $P_n^{120min}$ ) ne doit pas excéder deux fois 1,5 fois la puissance nominale. Ces trois contraintes peuvent être exprimées par le système suivant :

$$\begin{cases} P_n^{1min}(t) < P_n^{nom} \times 3 \\ P_n^{5min}(t) < P_n^{nom} \times 2 \\ P_n^{120min}(t) < P_n^{nom} \times 1,5 \end{cases}$$

Les échauffements calculés doivent alors être conformes à ceux définis dans les spécifications techniques du matériel, à savoir 75°C pour l'huile et 98°C pour les parties actives (cuivre).

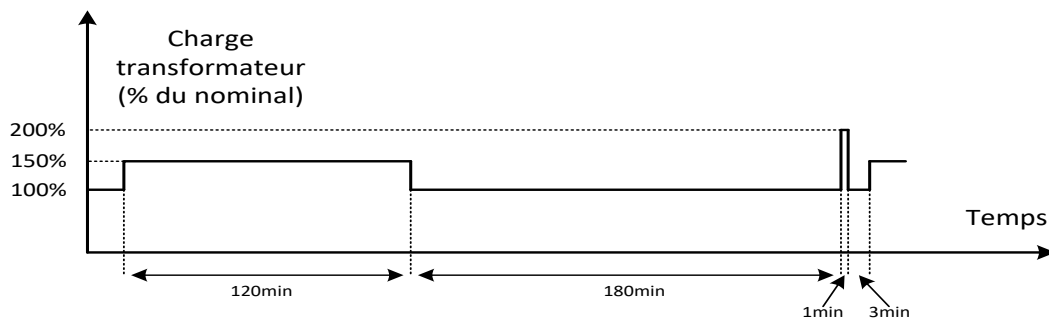


Figure 27: Indicateurs de performance - exemple de cycles de charges des groupes de traction

En cas de non-respect des normes, les échauffements excessifs diminuent la durée de vie du matériel, voire à une destruction par explosion, ce qui cause des pertes financières très importantes.

### C. Echauffements des câbles

Les caténaires sont également le siège d'échauffements d'autant plus importants que les courants appelés sont grands. L'élévation de la température modifie les caractéristiques mécaniques des câbles, qui se détendent. Par conséquent, le contact électrique entre les pantographes et les câbles sera de mauvaise qualité. Il peut alors être nécessaire d'interrompre le trafic, voire de changer les câbles.

Ces trois contraintes opérationnelles (tension de ligne, échauffement des groupes de traction, échauffement des lignes) se traduisent par des contraintes sur la sortie. Dans le paragraphe suivant, nous discuterons les différentes actions d'ajustement possibles pour alléger le trafic et obtenir des solutions réalisables, c'est-à-dire qui respectent les contraintes opérationnelles.

### **4.3. Actions d'ajustement**

La réorganisation du trafic lors d'un incident consiste à choisir des actions d'ajustement du trafic qui allège celui-ci, de façon que les contraintes opérationnelles soient respectées. L'opérateur responsable de réorganiser le trafic se pose alors les questions suivantes. Quelles sont les actions d'ajustement pertinentes ? Parmi celles-ci, quelles sont les plus influentes pour produire un trafic acceptable ? A l'inverse, y-a-t-il des actions d'ajustement qui n'ont aucune influence sur la qualité de la sortie, et dont l'application est sans bénéfice ? Ces questions sont les questions-clés pour conduire l'analyse de sensibilité et organiser une recherche de solution efficace.

Les actions d'ajustement portent soit sur la grille horaire des trains, soit sur les profils de vitesse des trains. L'implantation informatique de ces actions nécessite d'intervenir au sein des fichiers « horaires » et « marches » utilisés en entrées du simulateur ferroviaire ESMERALDA NG, comme nous allons l'expliquer ci-dessous.

#### **4.3.1. Ajustement des horaires**

Dans le simulateur ESMERALDA NG, les horaires des trains sont définis dans le fichier « H.dat », qui contient les heures de départ des différents trains sur les différentes lignes et voies du réseau. Les actions d'ajustement des horaires consistent à augmenter l'intervalle de temps entre les heures de départ des circulations successives, ce qui aboutit à une augmentation de l'espacement entre les sillons. Notant que le changement d'ordre des trains n'est pas autorisé. Il nous est donc nécessaire de calculer les horaires ajustés en prenant en compte la modification de l'intervalle pour pouvoir les transmettre au simulateur.

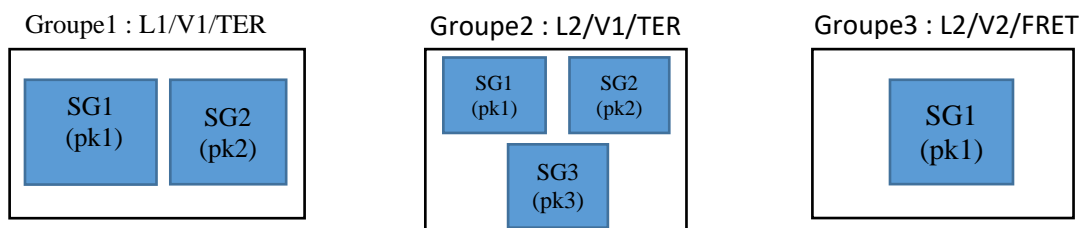
Le principe est simple à énoncer, mais plus délicat à mettre en œuvre du fait de l'hétérogénéité du trafic et de la multiplicité des lignes et des voies. En pratique, les circulations du fichier horaire sont regroupées en groupes et sous-groupes, selon des caractéristiques communes. Un groupe correspond à des circulations ayant comme critères communs: même ligne (L), même voie (V), même type de train (TGV, TER...). Ensuite, les sous-groupes (SG) correspondent à des points de départ identiques (même gare).

Une fois les circulations ainsi classées, on définit des actions d'ajustement des horaires sous la forme d'incrément de l'intervalle de temps entre deux départs successifs au sein d'un même

groupe : l'intervalle entre les départs des trains d'un groupe donné est augmenté de « k » minutes sous la forme suivante :

$$\Delta H_{ij} = \Delta H_{ij}^0 + I\Delta H$$

D'où  $\Delta H_{ij}$  l'intervalle de temps entre deux départs consécutifs d'un train i et d'un train j,  $I\Delta H$  est le temps ajouté (k minutes) et  $\Delta H_{ij}^0$  représente l'intervalle de temps initial (dans le fichier horaire initial) entre les deux départs de ces deux trains. La **Figure 28** montre un exemple de circulations organisées en trois groupes : les TER qui circulent sur la voie 1 de la ligne 1 (groupe 1), les TER qui circulent sur la voie 1 de la ligne 2 (groupe 2), et les trains de FRET qui circulent sur la voie 2 de la ligne 2 (groupe 3), puis en sous-groupe en fonction du  $pk$  de la gare de départ. Une action d'ajustement possible d'augmenter l'intervalle de temps entre les TER du groupe 1, au départ de la gare de CREIL.



**Figure 28:** exemple d'un regroupement d'un ensemble des circulations d'un trafic donné (L1 : ligne1 ; V1 : voie1 ; TER : type de train)

$\Delta H_{12} = \Delta H_{12}^0 + I\Delta H = 20 + 5 = 25 \text{ minutes}$ , l'intervalle de temps entre le premier train et le deuxième train est de 25 minutes, l'heure de départ de premier train est 15h :00, donc l'heure de deuxième train est 15h : 25.

$\Delta H_{23} = \Delta H_{23}^0 + I\Delta H = 30 + 5 = 35 \text{ minutes}$ , l'intervalle de temps entre le deuxième train et le troisième train est de 35 minutes, l'heure de départ de deuxième train est 15h25, donc l'heure de troisième train est 16 :00.

Le **Tableau 5** illustre ce principe sur un autre exemple : cas d'un trafic homogène (que des TGV). La partie gauche correspond aux horaires initiaux et indique les heures de départ des trains de type TGV circulant sur la ligne 1, voie 2. La partie droite montre les horaires ajustés suite à l'action qui consiste à augmenter les intervalles de temps entre deux départs de  $I\Delta H = 5 \text{ minutes}$ . L'heure de départ du premier train n'est pas modifiée, l'heure de départ de deuxième train est incrémentée de 5 minutes et celle de troisième train de 10 minutes.

Heure de départ	Ligne	Voie	pk(km)	N° Train
15 :00 :00	1	2	0	TGV1
15 :20 :00	1	2	0	TGV2
15 :50 :00	1	2	0	TGV3

Heure de départ	Ligne	Voie	pk(km)	N° Train
15 :00 :00	1	2	0	TGV1
15 :25 :00	1	2	0	TGV2
16 :00 :00	1	2	0	TGV3

**Tableau 5: Horaire initial à gauche, horaire ajusté avec une incrémentation des horaires de 5 minutes**

Le **Tableau 6** montre un dernier exemple, dans le cas d'un trafic hétérogène avec trois types de trains qui circulent sur le même réseau : TGV, TER et FRET. Trois groupes de circulation ont été définis, puis les intervalles de temps entre trains au sein de ces groupes ont été incrémentés de  $I\Delta H_{TGV} = 10 \text{ min}$  pour les TGV,  $I\Delta H_{TER} = 5 \text{ min}$  pour les TER et  $I\Delta H_{FRET} = 15 \text{ min}$  pour les FRET.

Heure de départ	Ligne	Voie	pk (km)	N° Train
08 :00 :00	9	2	0	TGV1
08 :10 :00	9	3	14.3	TER1
08 :15 :00	9	2	8.8	FRET1
08 :30 :00	9	2	0	TGV2
08 :22 :00	9	3	14.3	TER2
08 :20 :00	9	2	8.8	FRET2
08 :30 :00	9	2	8.8	FRET3
08 :40 :00	9	3	14.3	TER3
08 :50 :00	9	2	0	TGV3
08 :58 :00	9	3	92.2	TER4
09 :20 :00	9	3	92.2	TER5

Heure de départ	Ligne	Voie	pk (km)	N° Train
08 :00 :00	9	2	0	TGV1
08 :30 :00	9	2	0	TGV2
08 :50 :00	9	2	0	TGV3
08 :10 :00	9	3	14.3	TER1
08 :22 :00	9	3	14.3	TER2
08 :40 :00	9	3	14.3	TER3
08 :58 :00	9	3	92.2	TER4
09 :20 :00	9	3	92.2	TER5
08 :15 :00	9	2	8.8	FRET1
08 :20 :00	9	2	8.8	FRET2
08 :30 :00	9	2	8.8	FRET3

**Tableau 6: Horaire initial d'un réseau hétérogène à gauche; les circulations sont regroupées dans le fichier horaire à droite**

Heure de départ	Ligne	Voie	pk (km)	N° Train
08 :00 :00	9	2	0	TGV1
08 :40 :00	9	2	0	TGV2
09 :10 :00	9	2	0	TGV3
08 :10 :00	9	3	14.3	TER1
08 :27 :00	9	3	14.3	TER2
08 :50 :00	9	3	14.3	TER3
08 :58 :00	9	3	92.2	TER4
09 :25 :00	9	3	92.2	TER5
08 :15 :00	9	2	8.8	FRET1
08 :35 :00	9	2	8.8	FRET2
09 :00 :00	9	2	8.8	FRET3

**Tableau 7: Horaire après les ajustements ajoutés**

#### 4.3.2. Ajustement de la marche des trains

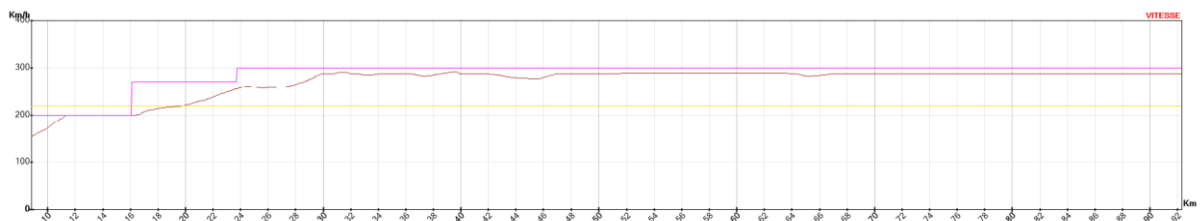
Le deuxième type d'action d'ajustement concerne les vitesses des trains. Il faut alors intervenir dans le fichier « M.dat », fichier d'entrée d'ESMERALDA dans lequel les marches des trains sont définies. Les actions d'ajustements consistent à réduire la vitesse de consigne des trains sur des portions de réseaux où le trafic est perturbé par le défaut d'alimentation électrique.

Le **Tableau 8** montre un exemple de fichier marche : la 1<sup>ère</sup> colonne indique le numéro de trains, la 2<sup>ème</sup> donne la vitesse limite de la voie à la position indiquée dans la 3<sup>ème</sup> colonne. Enfin, la 4<sup>ème</sup> colonne indique la consigne de vitesse donnée au conducteur. La consigne VL signifie « vitesse limite » et la consigne ME signifie « marche sur l'erre ». Les valeurs numériques correspondent à des consignes de vitesse inférieures à la vitesse limite.

Numéro	Vitesse limite (VL) km/h	pk (position en km)	consigne de vitesse (Vc)
8497	200	8.800	VL
8497	200	11.658	ME
8497	200	11.745	VL
8497	200	12.274	VL
8497	200	13.554	VL
8497	200	14.448	VL
8497	200	15.029	ME
8497	200	15.918	ME
8497	200	16.402	VL
8497	270	16.530	VL
8497	270	18.775	VL
8497	270	23.575	VL
8497	300	24.130	288
8497	300	30.719	ME
8497	300	31.931	288
8497	300	37.546	ME
8497	300	39.868	288
8497	300	51.923	ME
8497	300	52.292	288
8497	300	64.197	ME
8497	300	65.012	288
8497	300	92.298	288

**Tableau 8: Une portion du fichier Marche montre la marche d'engin numéro 8497**

La **Figure 29** montre le profil de vitesse réalisé par un train piloté suivant la marche décrite dans le **Tableau 8**. La courbe rose représente la vitesse limite le long de la voie. La courbe marron représente la vitesse effective du train. On repère les phases d'accélération, puis de maintien de la vitesse autour de sa valeur de consigne.



**Figure 29: Exemple d'une marche (engin numéro 8479)**

Le profil de vitesse effectivement réalisé dépend de la puissance que le réseau peut fournir au train. Si celle-ci est réduite à cause d'une panne d'équipement électrique, alors les accélérations seront réduites et le profil de vitesse du train sera affecté. Une action d'ajustement du trafic est

d'agir sur la marche des trains, en réduisant la vitesse limite sur les portions de ligne où on constate que la vitesse des trains est perturbée par la panne d'équipement électrique.

Supposons que l'opérateur veuille réduire la vitesse de  $\Delta V = 40 \text{ km/h}$  entre les *pk*s 15 et 30 (portion jaune). Le principe est de réduire la vitesse limite de  $\Delta V$ , puis d'adapter les vitesses de consigne pour qu'elles ne dépassent pas la vitesse limite. L'algorithme est le suivant :

1. Déterminer le maximum de la vitesse limite sur la portion de ligne considérée. Ce maximum est noté  $VL_{max}$ . Dans notre exemple :  $VL_{max} = 300 \text{ km/h}$ .
2. Réduire  $VL_{max}$  de la quantité  $\Delta V$  :  $VL_{max} = VL_{max} - \Delta V$ . Dans notre exemple :  $VL_{max \text{ new}} = 300 - 40 = 260 \text{ km/h}$
3. Pour chaque *pk* inclus dans la portion choisie :
  - a.  $VL = \min(VL, VL_{max})$
  - b.  $VC = \min(VC, VL)$

Le **Tableau 9** montre le résultat de l'algorithme d'ajustement de la marche de notre exemple.



Numéro	Vitesse limite (VL) km/h	<i>pk</i> (position en km)	Vitesse de consigne (VC)
8497	200	8.800	VL
8497	200	11.658	ME
8497	200	11.745	VL
8497	200	12.274	VL
8497	200	13.554	VL
8497	200	14.448	VL
8497	200	15.029	ME
8497	200	15.918	ME
8497	200	16.402	VL
8497	260	16.530	VL
8497	260	18.775	VL
8497	260	23.575	VL
8497	260	24.130	260
8497	260	30.719	ME
8497	300	31.931	288
8497	300	37.546	ME
8497	300	39.868	288
8497	300	51.923	ME
8497	300	52.292	288
8497	300	64.197	ME
8497	300	65.012	288
8497	300	92.298	288

**Tableau 9: marche ajustée**

Les actions d'ajustements proposées sur les horaires et la marche des trains permettent de respecter les habitudes des conducteurs de train (profil de vitesse aussi lisses que possible) ainsi que les contraintes de sécurité, telles que la distance de sécurité entre trains (par exemple environ 11 minutes entre deux TGV).

Mathématiquement, ces actions d'ajustement sont modélisées par des variables appelés variables d'ajustements.

#### **4.4. Critères d'optimisation**

Plusieurs critères d'optimisation peuvent être choisis pour rechercher de solutions optimales selon les préférences du décideur. Il existe deux types de recherche : recherche monocritère : recherche de solutions qui respectent un seul critère (solution unique au sens monoobjectif); recherche multicritère : recherche de solutions qui respectent deux ou plusieurs critères (un ensemble de solutions compromis appelés ensemble de Pareto, « Pareto set » en anglais) [171]. Dans le cas de recherche monocritère, nous recherchons parmi les solutions générées par le

déroulement de la phase d'analyse de sensibilité et parmi celles qui sont réalisables (respect de contraintes opérationnelles) la solution meilleure du point de vue d'un critère donné. Dans ce cas, la solution optimale est clairement définie, c'est celle qui a le coût optimal (minimal ou maximal). Dans le cas de recherche multicritère, nous utilisons aussi les solutions réalisables générées pendant la phase d'analyse de sensibilité pour calculer l'ensemble de solutions Pareto Optimales (Dans notre cas il s'agit d'une approximation). Dans ce cas, la solution optimale cherchée est un ensemble de points correspondant aux meilleurs compromis entre les différents objectifs [172].

Parmi les critères d'optimisation (fonction d'objectif), les plus intéressants dans notre travail nous citons :

- A. La densité du trafic (F1) : le nombre de trains pouvant circuler dans un intervalle de temps donné. Elle est calculée selon la formule suivante :

$$F1 = d = \frac{NT}{T_{df} - T_{dp}}$$

Où  $d$  représente la densité,  $NT$  est le nombre des trains ayant circulé et le dénominateur représente la différence entre l'heure de départ du dernier train et l'heure de départ du premier train.

- B. L'impact (retard) sur le temps de parcours des trains (F2) : Ne pouvant définir un critère par train, nous avons défini un critère fondé sur la notion de temps de parcours moyen de l'ensemble des trains.

Le temps de parcours total des trains est calculé par  $\sum_{i=1}^N (T_a - T_d)$ . Le temps de parcours moyen est calculé par  $\frac{\sum_{i=1}^N (T_{a_i} - T_{d_i})}{N}$ , où  $N$  est le nombre des trains,  $T_{a_i}$  est le temps d'arrivée,  $T_{d_i}$  est le temps de départ pour le train.

Dans notre étude, nous recherchons à maximiser F1 et minimiser F2 (bi-objectif).

#### 4.5. Mise en œuvre sur un cas-test

Dans ce paragraphe, nous appliquons l'analyse de sensibilité afin d'étudier l'influence des variables d'ajustement du trafic sur un exemple simple. Nous avons choisi à appliquer notre méthodologie premièrement avec une topologie simplifiée (peu complexe) afin de clarifier les étapes de la démarche.

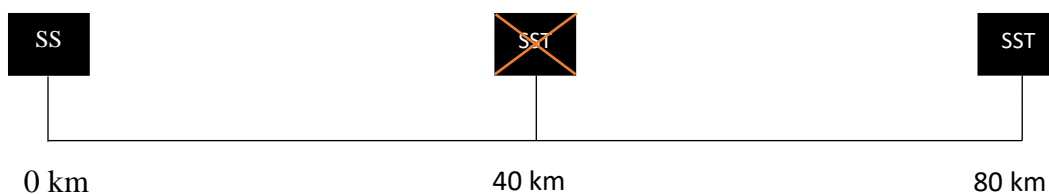
Nous commençons par décrire le cas d'étude, puis nous expliquons la mise en œuvre des trois méthodes d'analyse de sensibilité présentées dans le chapitre 3. Nous comparons ensuite leurs performances afin de dégager leurs avantages et leurs inconvénients respectifs.

#### 4.5.1. Descriptif du cas-test

Le cas-test correspond à une ligne à voie unique, longue de 80 km, alimentée en 25 kV AC par trois sous-stations (**Figure 30**). La ligne est parcourue par un dix TGV ayant tous les mêmes marches et dont les départs du  $pk0$  sont initialement espacés de 5 minutes.

Donc le modèle étudié comporte 10 missions et une marche, en tant qu'entrées de simulateur. Chaque mission s'agit d'une dizaine de variables (heure de départ, numéro de ligne, numéro de voie,  $pk$  début,  $pk$  fin, ...). De même, la marche contient 17 portions, chaque portion comporte un numéro, une vitesse limite, position en kilomètre ( $pk$ ) et une consigne de vitesse ( $vc$ ). Le nombre total des variables d'entrée de simulateur est supérieur à cent.

L'incident étudié est la perte totale de la sous-station située en milieu de la ligne.

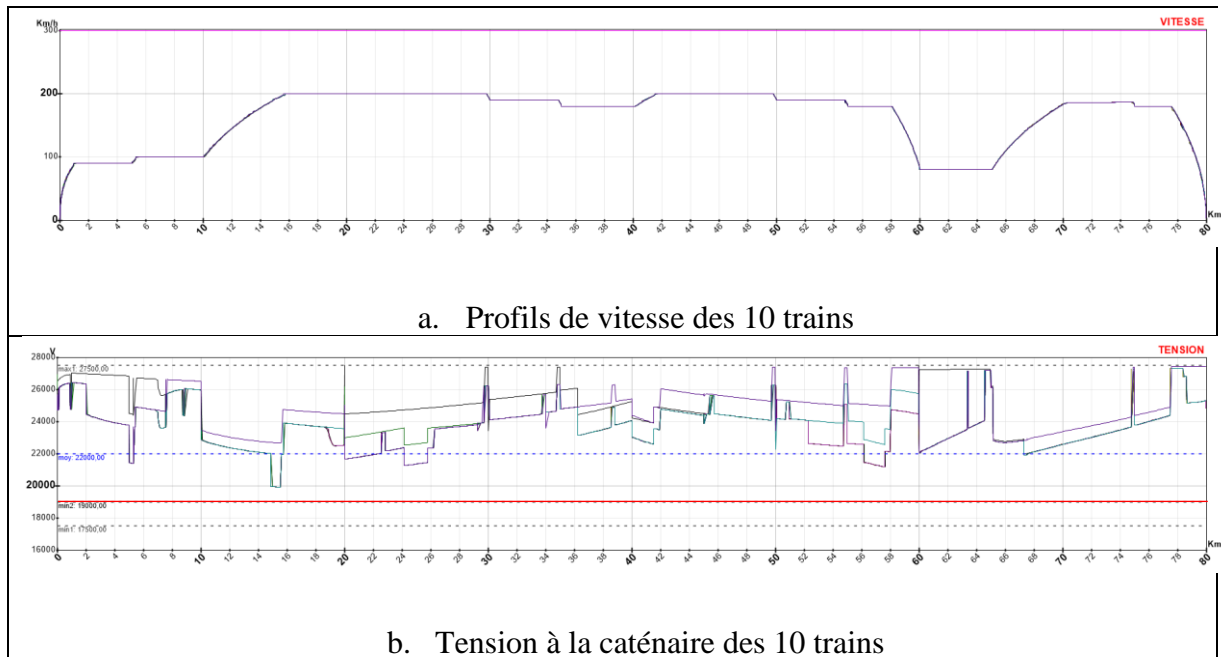


**Figure 30: Configuration électrique des infrastructures**

La **Figure 31** montre les résultats de simulation pour la situation normale. La courbe du haut représente les profils de vitesse des dix trains. Ces courbes se superposent parfaitement car les instructions sont les mêmes pour tous les trains, et que la puissance transmissible par la ligne est suffisante pour fournir à chaque train la puissance appelée.

La courbe du bas représente les profils de tension aux caténaires des trains et mérite qu'on s'y attarde un peu. Cette fois, les courbes ne se superposent pas toutes, car la tension à la caténaire d'un train à une position donnée dépend de la puissance appelée à cet instant par l'ensemble des trains. Typiquement, la tension d'alimentation du premier TGV sera supérieure à la tension d'alimentation des suivants. Pour comprendre la forme des courbes de tension, il faut les corréler au profil de vitesse : les phases d'accélération (par exemple  $pk10$  et  $pk15$ ) correspondent à de forts appels de puissance et se traduisent par une baisse de la tension à la

caténaire. Inversement, en phase de freinage (par exemple entre *pk 58 et pk 60*), une partie de l'énergie cinétique du train est renvoyée sur le réseau et la tension remontée fortement. Le profil de tension à la caténaire d'un train dépend de ses propres appels de puissance, mais aussi de ceux des trains voisins. La forme globale des courbes reflète également la position des sous-stations d'alimentation, avec une remontée de la tension au *pk 40*. Pour la situation considérée, la tension à la caténaire est toujours supérieure à 17,5 kV, donc l'alimentation électrique du trafic est satisfaisante.



**Figure 31: Résultats de simulation en configuration nominale**

Voyons maintenant la situation dégradée, quand la sous-station du milieu est neutralisée. La **Figure 32** présente les résultats de simulation pour le même trafic que précédemment. Les profils de vitesse montrent que le trafic est affecté lors des phases d'accélération, en particulier au niveau de la sous-station en panne. Les profils de tension à la caténaire mettent en évidence une forte baisse de tension, qui chute localement en dessous du seuil minimal (19 000 V). Outre la restriction de puissance fournie aux trains, cela génère des pertes et des échauffements importants, et donc des coûts d'exploitation supplémentaires. Ces résultats indiquent que le réseau électrique ne peut pas fournir la puissance nécessaire à la réalisation des consignes de vitesse. Il faut donc ajuster le trafic.

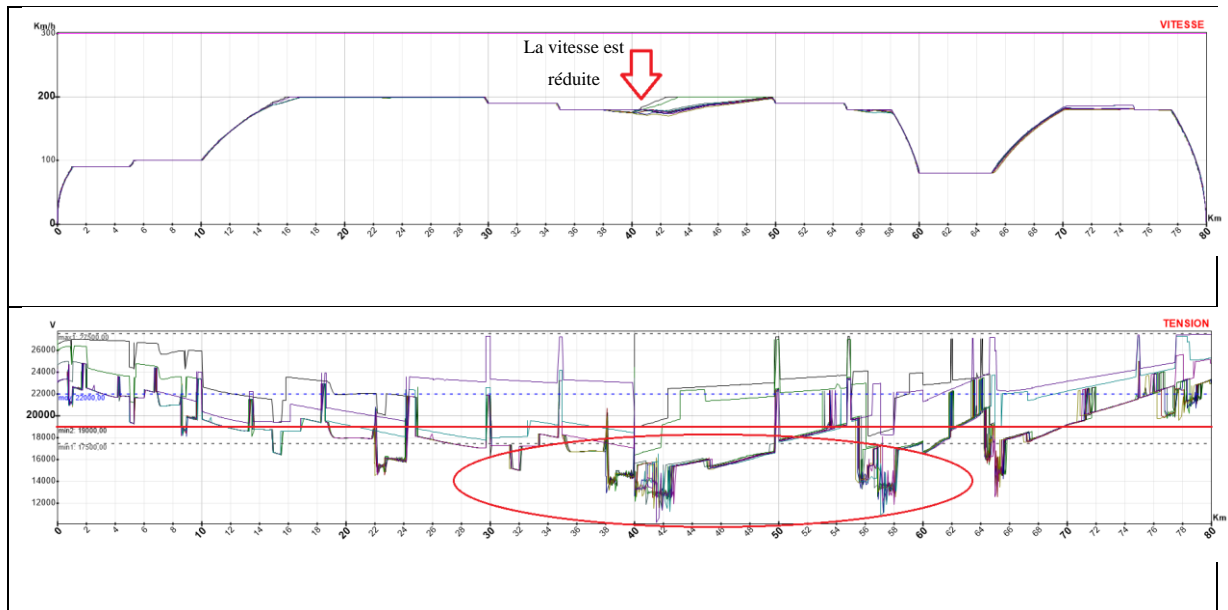


Figure 32: Mode dégradé

#### 4.5.2. Etape 1 : Spécification du problème d'ajustement du trafic

La première étape de réorganisation du trafic est une analyse métier. Sur la base de son expertise et des résultats de simulation, l'opérateur définit les variables d'ajustement dont il souhaite étudier l'influence, ainsi que les critères d'acceptabilité et de performances des solutions. Il s'agit donc d'élaborer le modèle d'ajustement du trafic, dont les entrées sont les variables d'ajustement et les sorties sont les grandeurs physiques à partir desquelles les performances du trafic et les contraintes sont définies.

##### 1. Définition des variables d'ajustement et de leurs intervalles de variation:

La comparaison des résultats de simulation du trafic dans le cas nominal et dans le cas dégradé oriente le choix des actions d'ajustement du trafic. Une première manière de diminuer la charge de la ligne est d'espacer les trains, en augmentant l'intervalle de temps entre deux départs successifs. Par ailleurs, les profils de tension et de vitesse indiquent que c'est entre les *pk* 40 et 60 que l'alimentation des trains est la plus perturbée. Nous avons donc choisi d'étudier l'influence d'une réduction de vitesse dans cette partie de la ligne.

Nous avons ainsi défini les cinq variables d'ajustement suivantes :

- $X1$  : Augmentation de l'intervalle entre les départs de trains ;  $X1 \in [0,20]$  min
- $X2$  : Réduction de vitesse entre *pk* 40 et *pk* 45 ;  $X2 \in [0,20]$  m/s)
- $X3$  : Réduction de vitesse entre *pk* 45 et *pk* 50 ;  $X3 \in [0,20]$  m/s)
- $X4$  : Réduction de vitesse entre *pk* 50 et *pk* 55 ;  $X4 \in [0,20]$  m/s)

- $X_5$  : Réduction de vitesse entre *pk 55* et *pk 60* ;  $X_5 \in [0,20] \text{ m/s}$ )

Une action d’ajustement peut agir sur un grand nombre de variables d’entrées du simulateur. Par exemple  $X_1$  agit sur toutes les heures de départ dans ce cas test.

## 2. Critère d’acceptabilité des solutions (contrainte sur la sortie):

La contrainte opérationnelle (critère d’acceptabilité) prise en compte dans cette étude porte sur les tensions aux pantographes des trains dont la moyenne glissante sur 10s doit toujours être comprise entre 19 kV et 27,5 kV .

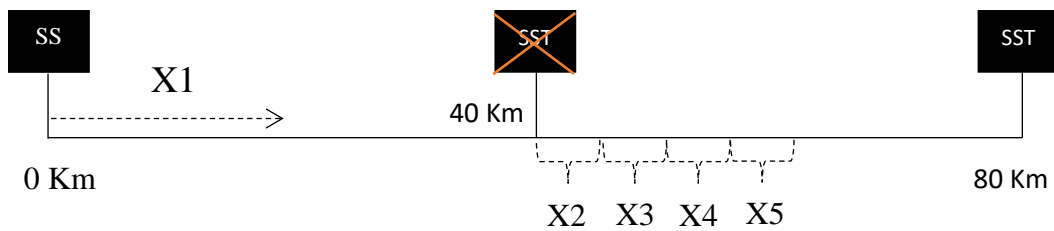


Figure 33: Récapitulatif des actions d’ajustement

### 4.5.3. Etape 2 : Echantillonnage

Pour conduire l’analyse de sensibilité, il faut construire la ou les matrices d’échantillonnage de dimension  $N \times p$ , où  $N$  est le nombre d’échantillons et  $p$  le nombre d’ajustements à tester (nombre de variables d’ajustement). Chaque ligne de la matrice correspond à un scénario d’ajustement à tester. Dans la suite du chapitre, nous étudierons l’influence de  $N$ .

✚ Méthode d’échantillonnage utilisée : Méthode fondée sur les séquences de Sobol

✚ Nombre de variables d’ajustement:  $p = 5$

Scénario d’ajustement n°1

$$Z = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & x_{3,1} & x_{4,1} & x_{5,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & x_{3,2} & x_{4,2} & x_{5,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1,N} & x_{2,N} & x_{3,N} & x_{4,N} & x_{5,N} \end{pmatrix}$$

Chaque ligne de la matrice représente un scénario d’ajustement, chaque scénario comporte 5 actions d’ajustements (variables d’entrées).

Pour calculer les indices de Sobol, il faut générer deux matrices d’échantillonnage, puis les combiner entre elles pour en former  $p$  autres (voir chapitre 3).

#### **4.5.4. Etape 3 : Simulations**

La campagne de calculs consiste ensuite à calculer les  $N$  réponses du code correspondant aux  $N$  scénarios d'ajustement contenus dans chaque matrice d'échantillonnage. On obtient alors autant de fichiers de sortie du simulateur que de scénarios simulés. Ces fichiers contiennent les grandeurs d'intérêt, à savoir les tensions à la caténaire le long du parcours des trains. Cette phase de l'analyse est la plus coûteuse en temps de calcul (quelques heures de calcul pour cet exemple simple).

#### **4.5.5. Etape 4 : Calcul des indices de sensibilité**

Le calcul des indices correspond à une phase de post-traitement des résultats de simulation. Il s'agit d'estimer l'influence des variables d'entrées du modèle d'ajustement sur les sorties dynamiques, à savoir les tensions aux caténaires des trains. Il y a autant de sorties dynamiques que de trains, avec une série d'indices pour chaque sortie.

Dans cette étude nous nous intéressons aux indices de premier ordre déterminés à l'aide des trois techniques retenues parce que la méthode d'analyse de sensibilité régionale ne considère pas les effets d'interaction.

#### **4.5.6. Critères de comparaison des méthodes**

Les méthodes sont comparées sur les trois critères suivants : temps du calcul global de la méthode (y compris le temps de calcul de simulations), vitesse de convergence du calcul des indices et espace mémoire nécessaire pour stocker les données nécessaires au calcul des indices. La vitesse de convergence correspond à la taille d'échantillon  $N$  nécessaire pour obtenir une bonne estimation statistique des indices de sensibilité (c'est-à-dire ajouter des échantillons ne créent plus de variation significative sur les indices calculés).

### **4.6. Résultats et comparaison des méthodes**

Les trois méthodes d'analyse de sensibilité vues précédemment (méthode 1 : Sobol généralisée ; méthode 2 : méthode fondée sur la distance-énergie ; méthode 3 : méthode régionale). Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus. L'analyse des résultats permet de classer les variables d'ajustement en deux groupes : les variables influentes et les variables non influentes. Les conclusions sont très proches pour les trois méthodes, mais le coût d'obtention est différent.

#### 4.6.1. Indices de Sobol généralisés

Les indices de Sobol généralisés d'ordre 1 ont été calculés pour chaque train (il y a 10 trains), et pour chaque variable d'ajustement (il y en a 5). Cela représente donc un total de 50 indices. Les résultats sont très similaires pour les différents trains, car il s'agit de TGV ayant tous la même marche. Nous ne présentons donc que les indices correspondant au TGV 3 dans la suite du texte. Cette méthode ne prend pas en compte les contraintes sur les sorties, donc les sorties de toutes les simulations ont été sauvegardées pour faire le calcul.

Les indices de Sobol ont été calculés pour une taille d'échantillon  $N$  croissante afin d'étudier l'influence de ce paramètre sur la qualité de l'estimation. Les résultats sont donnés dans le **Tableau 10**. La capacité mémoire requise pour le stockage des informations nécessaire au calcul des indices n'a pas permis d'aller au-delà de  $N = 3000$ . En effet, il faut sauvegarder les tensions à chaque  $pk$ , et ce pour tous les trains, Le volume de données à conserver en mémoire dynamique est proportionnel à la taille de l'échantillon et finit par saturer la mémoire vive du PC utilisé (DELL Latitude 7480, CPU : Intel Core i7-7600U (2 cœurs / 4 threads / 4Mo cache / 2.8GHz ), RAM : 16 Go).

Effectif de l'échantillon (N)	$S_{X_1}$	$S_{X_2}$	$S_{X_3}$	$S_{X_4}$	$S_{X_5}$
500	0.99	0.016	0.021	0.03	0.012
1000	0.73	0.016	0.036	0.03	0.018
2000	0.42	0.014	0.041	0.03	0.01
3000	0.7	0.012	0.037	0.02	0.01
4000	Dépassement de capacité mémoire				

Tableau 10: Indices de Sobol généralisés pour différentes valeurs de  $N$

La **Figure 34** montre l'évolution des différents indices en fonction de  $N$ , l'effectif de l'échantillon. On constate que même avec  $N = 3000$ , la valeur des indices ne semble pas avoir atteint la convergence. Ces indices ne sont donc pas précis. Toutefois, malgré l'erreur d'estimation des indices la tendance semble indiquer que la variable  $X_1$  a une influence prépondérante par rapport aux autres variables, et qu'à l'inverse  $X_4$  et  $X_5$  semblent avoir une influence très faible. Parmi les réductions de vitesse, la variable  $X_3$  semble se dégager un peu des autres.



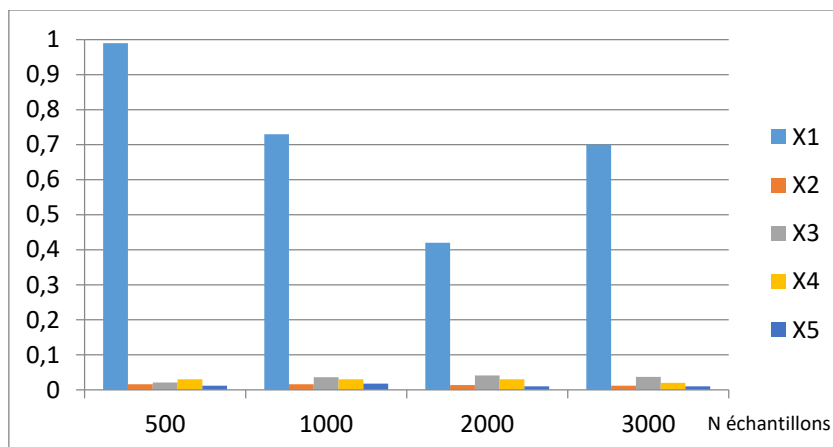


Figure 34: Indices de Sobol  $S_{X_i}$  en fonction de la taille d'échantillon  $N$

Le calcul des indices de Sobol d'ordre 1 nécessite  $N(p + 1)$  appels au simulateur, soit  $6N$  appels dans notre cas. Pour  $N = 3000$ , cela représente 18 000 appels au modèle, mais ce n'est pas suffisant pour une estimation correcte des indices. Ce grand nombre d'estimation du modèle se traduit par un coût de calcul très important (Tableau 11). Ainsi, pour  $N = 1000$  il ne faut pas moins de 15 heures pour réaliser les simulations et le calcul des indices !

Taille d'échantillon $N$	Temps de calcul	Espace de stockage (en Mo)
500	04h : 16 min : 29 sec	495
1000	15h : 01 min : 23 sec	907

Tableau 11: Temps de calcul et espace de stockage nécessaires pour exécuter Sobol

Conclusion : Pour le problème testé, la méthode des indices généralisés de Sobol ne semble pas avoir atteint la convergence compte tenu du coût de simulation en termes de temps de calcul et de mémoire. Au-delà d'un effectif d'échantillon de 3000, la mémoire disponible est trop petite. De manière générale, pour les problèmes qui comportent un grand nombre de variables, le calcul des indices de Sobol nécessite un grand nombre d'évaluations de fonctions pour obtenir une convergence raisonnable [173]. Cela oriente l'usage de ce type de méthode pour des modèles rapides, c'est-à-dire dont la durée d'exécution est inférieure à la minute. Pour ces raisons (temps de calcul élevé, mémoire critique), la méthode de Sobol ne sera plus utilisée dans la suite de cette étude.

#### 4.6.2. Indices fondés sur la distance-énergie

Cette technique détermine les indices de sensibilité à partir de la distance entre la distribution de la sortie  $Y$  quand toutes les entrées varient et la distribution de la sortie  $Y/X_i$  quand  $X_i$  est fixé.

Le **Tableau 12** montre les indices de sensibilité calculés à partir de cette méthode, pour différentes tailles d'échantillon. Comme dans la section précédente, il s'agit des indices relatifs au TGV 3.

Taille d'échantillon ( $N$ )	$S_{X_1}$	$S_{X_2}$	$S_{X_3}$	$S_{X_4}$	$S_{X_5}$
100	0.204	0.042	0.04	0.044	0.034
500	0.206	0.024	0.024	0.021	0.017
1000	0.208	0.021	0.021	0.021	0.013
2000	0.21	0.02	0.019	0.016	0.01
3000	0.21	0.0195	0.018	0.016	0.0095
4000	0.21	0.0187	0.0172	0.0152	0.0084

Tableau 12: Indices fondés sur la distance pour différentes valeurs de  $N$

Les résultats de cette méthode montrent que l'espace ( $X_1$ ) est la variable la plus influente sur la sortie. Les valeurs de  $X_2, X_3$  et  $X_4$  sont très proches pour tout  $N$ . La variable  $X_5$  est la moins influente.

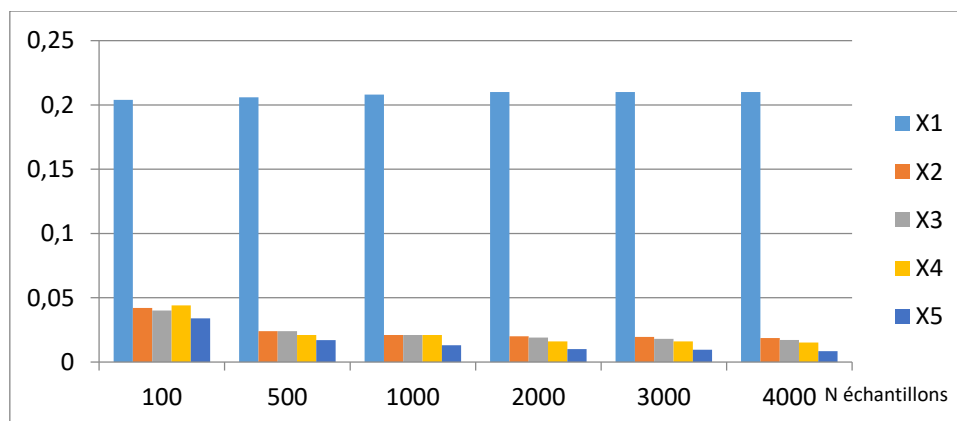


Figure 35: Indices fondés sur la distance en fonction de la taille d'échantillon  $N$

Dans cette méthode, une seule matrice d'échantillons est nécessaire pour calculer tous les indices. Il n'y a donc que  $N$  appels au simulateur au lieu de  $6N$  pour Sobol. Le temps de calcul est réduit d'autant (voir **Tableau 13**, 2 heures et 30 minutes pour 1000 échantillons). Toutefois, le temps de calcul des distances et des indices eux-mêmes (phase de post-traitement) augmente rapidement avec le nombre de variables d'ajustement.

Taille d'échantillon N	Temps de calcul	Espace de stockage (en Mo)
500	00h : 40 min : 02 sec	340
1000	02h : 30 min : 18 sec	611

Tableau 13: Temps de calcul et espace de stockage nécessaires pour exécuter la méthode fondée sur la distance

La **Figure 36** montre que cette méthode converge vite, avec des résultats stables à partir d'un échantillon de 500 points. Le gain est évident par rapport à la méthode de Sobol, même si la méthode reste coûteuse pour l'utilisation sur les cas d'étude réalistes que nous envisageons.

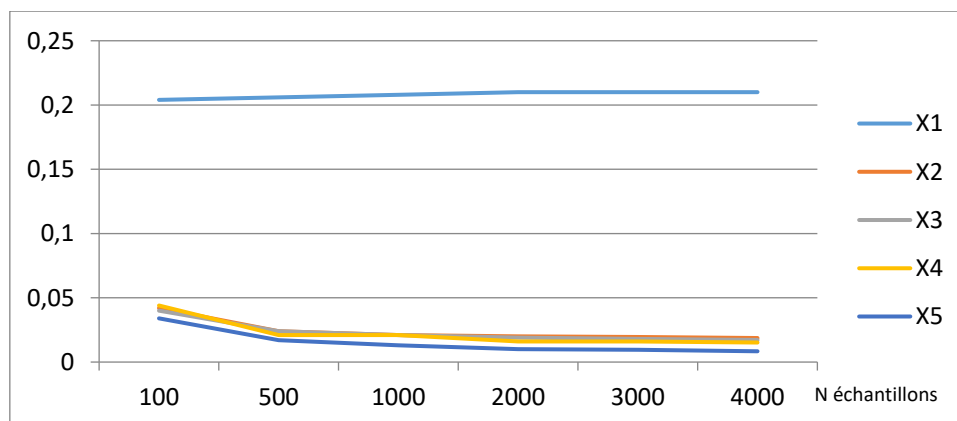


Figure 36: Influence des variables pour  $N$  simulations pour la méthode fondée sur la distribution

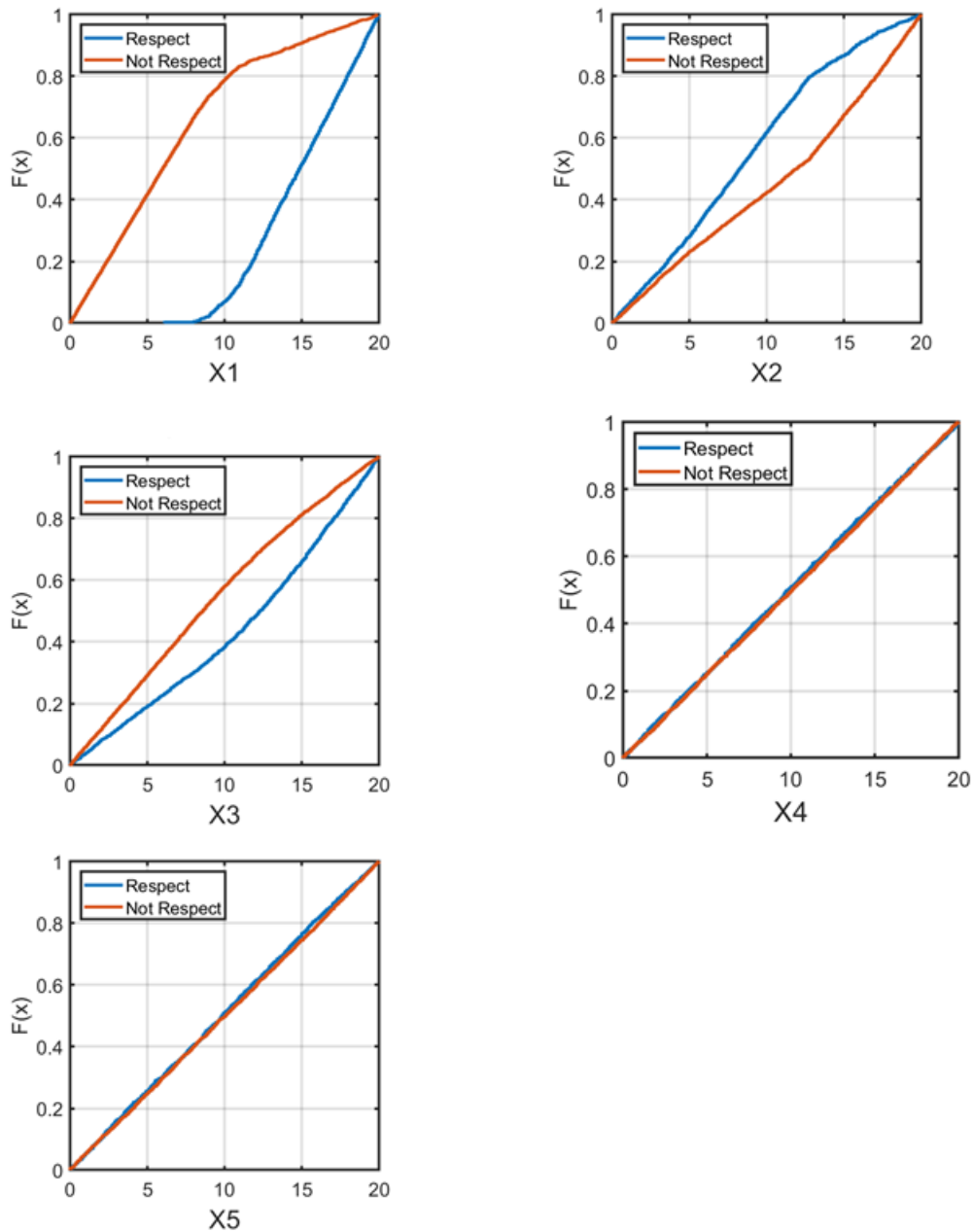
#### 4.6.3. Analyse de sensibilité régionale

La dernière méthode utilisée, l'analyse de sensibilité régionale, se focalise sur l'influence des variables d'ajustement par rapport au respect de la contrainte d'intervalle sur la tension à la caténaire des trains. Cette contrainte stipule que les tensions aux pantographes de tous les trains doivent rester entre 19 kV et 27,5 kV tout au long du trajet des trains.

La mise en œuvre de la méthode consiste à partitionner l'échantillon en deux groupes, notés  $A$  et  $\bar{A}$ , selon que la contrainte sur les sorties du modèle (les tensions) est respectée ou non. On construit ensuite  $F(X_i|A)$  et  $F(X_i|\bar{A})$  les densités de probabilité cumulées des variables d'entrée

au sein de chaque groupe. La distance maximale entre ces fonctions constitue un indicateur statistique de l'influence de chaque variable d'entrée sur le fait de respecter ou non la contrainte.

La **Figure 37** représente les graphes des fonctions  $F(X_i|A)$  et  $F(X_i|\bar{A})$  pour les cinq variables (pour 1000 échantillons). Ces représentations montrent que c'est pour  $X_1$  que la distance entre  $F(X_i|A)$  et  $F(X_i|\bar{A})$  est la plus grande. On retrouve donc le fait que  $X_1$  est la variable la plus influente. A l'inverse, l'influence de  $X_4$  et  $X_5$  est négligeable. On peut remarquer que pour des valeurs de  $X_1$  inférieures à 6 minutes, aucune solution n'est acceptable. Les graphiques illustrent également le sens d'influence de chaque variable: Les variables  $X_1$  et  $X_3$  influent positivement sur la sortie, c'est-à-dire que les augmenter est favorable au respect de la contrainte sur la tension. En revanche, la variable  $X_2$  a une influence négative : réduire la vitesse sur le tronçon 40-45 km n'est pas favorable car cela provoque un rapprochement des trains sur une portion de ligne ou l'alimentation électrique est faible.



**Figure 37:** Graphes de densités cumulées  $F(X_i|A)$  et  $F(X_i|\bar{A})$   $X_1, X_2, X_3, X_4$  et  $X_5$

Le test de Kolmogorov Smirnov à deux échantillons fournit une mesure de la différence entre les distributions  $F(X_i|A)$  et  $F(X_i|\bar{A})$ . Le **Tableau 14** présente les indices de sensibilité calculés par le test de Kolmogorov-Smirnov pour différentes tailles d'échantillon. Le **Tableau 15** reporte les valeurs de significativité statistique (P-values).

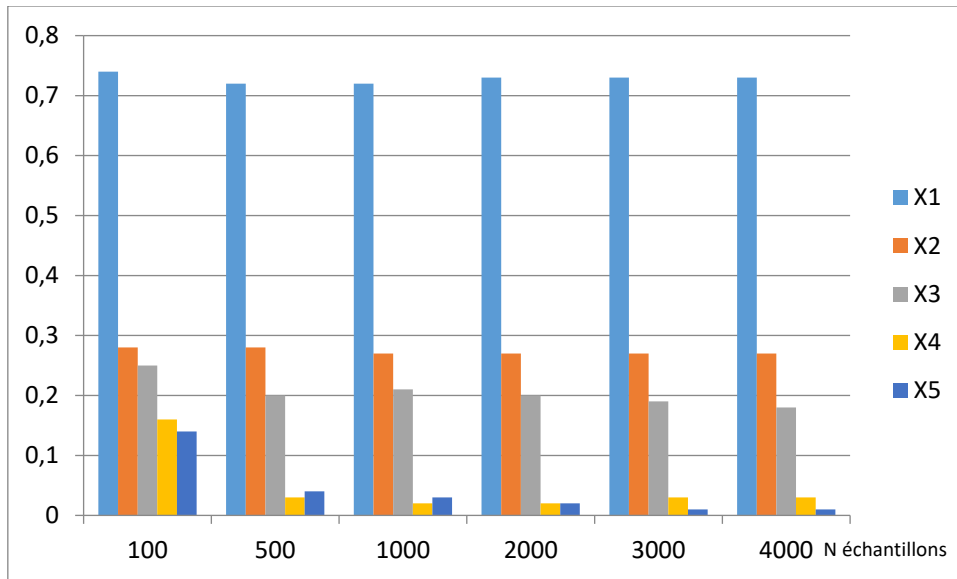
Taille d'échantillon (N)	$d_{X_1}$	$d_{X_2}$	$d_{X_3}$	$d_{X_4}$	$d_{X_5}$
100	0.74	0.28	0.25	0.16	0.14
500	0.72	0.28	0.2	0.03	0.04
1000	0.72	0.27	0.21	0.02	0.03
2000	0.73	0.27	0.2	0.02	0.02
3000	0.73	0.27	0.19	0.03	0.01
4000	0.73	0.27	0.18	0.03	0.01

Tableau 14: Indices de sensibilité (d-stat) des différentes variables d'ajustement

Taille d'échantillon (N)	$P_{X_1}$	$P_{X_2}$	$P_{X_3}$	$P_{X_4}$	$P_{X_5}$
100	0.0	0.05	0.09	0.59	0.7
500	0.0	0.0	0.0	1.0	0.99
1000	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0
2000	0.0	0.0	0.0	0.98	1.0
3000	0.0	0.0	0.0	0.7	1.0
4000	0.0	0.0	0.0	0.57	1.0

Tableau 15: P-values correspondant aux indices du Tableau 14

La **Figure 38** visualise les résultats de cette méthode. À nouveau, on observe que  $X_1$  (espacement entre trains) est la plus influente des actions d'ajustement. Les deux variables  $X_2$  et  $X_3$  sont influentes par rapport au respect de la contrainte de sortie, tandis que les réductions de vitesse  $X_4$  et  $X_5$  sont peu influentes. Les résultats du **Tableau 15** confirment l'importance des variables  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  ( $P < 0.1$ ), et l'insignifiance des variables  $X_4$  et  $X_5$  ( $P > 0.1$ ).



**Figure 38: Indices de sensibilité par rapport à  $X_i$  en fonction de la taille d'échantillon**

Pour cette méthode, une seule matrice d'échantillonnage suffit pour calculer tous les indices. Le nombre d'appels au simulateur est le même que pour la méthode fondée sur la distance, mais le calcul des indices est moins coûteux, d'où un temps de calcul global plus favorable (**Tableau 16**). La différence de temps de calcul entre ces méthodes augmente notablement avec le nombre de variables d'entrée.

Taille d'échantillon N	Temps de calcul	Espace de stockage (en Mo)
<b>500</b>	00h : 35 min : 23	280
<b>1000</b>	02h : 01 min : 20	547

**Tableau 16: Le temps de calcul et l'espace de stockage nécessaires pour exécuter la méthode régionale**

La **Figure 39** montre que cette méthode converge vite, avec des résultats satisfaisants dès 500 points d'échantillonnage.

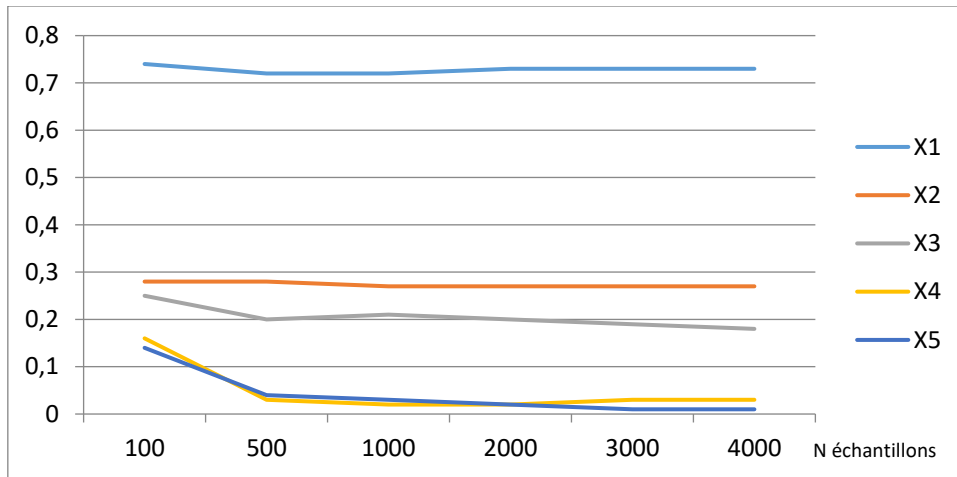


Figure 39: Influence pour  $N$  simulations pour la méthode régionale

#### 4.6.4. Exploitation des résultats : post traitement et optimisation

Dans ce paragraphe, nous utilisons les résultats de simulation des 2000 scénarios d'ajustement (échantillons), pour but de chercher des solutions optimales parmi les solutions acceptables générées à partir de la méthode sensibilité régionale, selon les deux objectifs d'optimisation suivants :

- ✓ F1 : la densité du trafic
- ✓ F2 : le temps de parcours de trains

Nous recherchons à maximiser F1 et minimiser F2. La **Figure 40** montre l'ensemble de solutions de Pareto optimales. Les points bleus représentent les solutions réalisables (qui respectent les contraintes). Les points rouges représentent les solutions compromis. Plus la solution est dense, plus les trains sont ralentis.



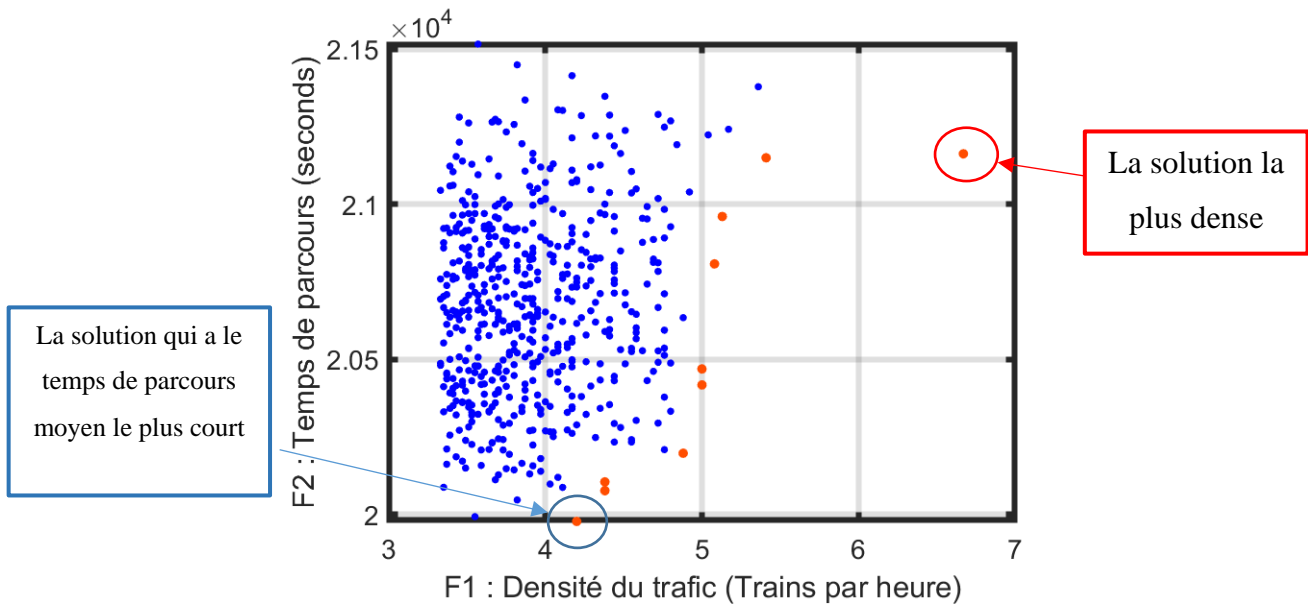


Figure 40: Un ensemble de solutions acceptables dans le plan (F1, F2) : les points rouges représentent les solutions non dominées (approximate pareto set); les points bleus représentent les solutions réalisables dominées.

#### 4.7. Discussion

Le **Tableau 17** compare les trois méthodes étudiées sur la base de trois critères : coût de calcul, vitesse de convergence et espace mémoire nécessaire. Par rapport à ces critères, la méthode régionale est la meilleure.

La méthode de Sobol généralisée est coûteuse en temps de calcul (--). Elle exige une grande taille d'échantillon  $N$  pour atteindre la convergence, ainsi qu'un nombre d'évaluations du modèle qui augmente avec le nombre de variables d'entrée. Cela se répercute sur le temps de calcul et sur l'espace mémoire nécessaire au calcul des indices. Cette méthode sera impossible à mettre en œuvre pour des cas d'étude réalistes.

La méthode fondée sur la distance entre distributions (énergie-distance) est moins coûteuse en temps du calcul par rapport au Sobol généralisée, elle nécessite moins d'évaluations du modèle, elle converge plus rapide avec un coût de mémoire moindre. Toutefois, elle reste coûteuse pour le cas d'étude complexe.

	Critères		
	Temps du calcul	Vitesse de convergence	Espace de stockage
<b>Sobol généralisé</b>	--	-	--
<b>distance-énergie</b>	+	++	-
<b>Méthode régionale</b>	++	+	++

Tableau 17: Évaluation des méthodes selon trois critères, selon trois niveaux (-), (+), (++)

En termes d'interprétation physique, quelle que soit la méthode d'analyse de sensibilité utilisée, les résultats sont cohérents. L'espacement entre les trains ressort toujours comme étant une variable largement plus influente que les autres. Les réductions de vitesse, elles, sont d'autant plus influentes qu'elles sont proches de la sous-station en panne. Ceci est normal, puisque c'est dans la partie centrale de la ligne que l'alimentation est la plus critique. La faible influence du paramètre réduction de vitesse des trains s'explique par le fait que cette réduction ne modifie pas l'accélération des trains, mais la durée de la phase d'accélération. Or, ce sont les phases d'accélération qui sont à l'origine des appels de puissance les plus forts, et donc des chutes de tension les plus marquées. En réduisant la vitesse limite, on agit sur la durée de ces phases, mais pas sur leur intensité.

#### 4.8. Conclusion

Ce chapitre nous a présenté les principales étapes pour appliquer une méthode d'analyse de sensibilité. Dans notre étude, nous avons mis en œuvre trois méthodes fondées sur des principes différents: indices de Sobol généralisés, méthode fondée sur la distance entre distributions et analyse de sensibilité régionale (RSA). Cette dernière méthode a la particularité de prendre en compte des contraintes sur la sortie du modèle.

Nous avons appliqué les trois méthodes et interprété leurs résultats sur un cas test très simple, avec une ligne à une voie et un trafic homogène. Les résultats sont cohérents en termes d'interprétation physique. Nous avons comparé les trois méthodes selon trois critères : temps du calcul, vitesse de convergence et espace de stockage. La comparaison de ces trois méthodes montre que la méthode régionale est la plus appropriée à notre objectif. Elle est la plus adaptée à notre modèle complexe en termes de coût de calcul et de stockage. Les deux méthodes « Sobol généralisé » et « Energy distance » sont gourmandes en espace de stockage et « Sobol généralisé » est coûteuse en nombre d'évaluations du modèle.

Dans le chapitre 5, nous allons considérer quatre tests ferroviaires réels. De plus, nous nous intéresserons à l'optimisation du trafic à partir des résultats d'analyse de sensibilité.

## Chapitre 5

# Application de la méthodologie sur un ensemble de cas représentatifs

---

### 5.1. Introduction

Ce chapitre vise à appliquer la méthodologie proposée dans cette étude, pour la réorganisation du trafic ferroviaire en cas d'incident électrique, l'incident traité dans notre étude étant la perte totale d'une sous-station d'alimentation électrique. Pour commencer, nous allons décrire le prototype de l'outil développé en concertation avec les équipes de dimensionnement du département Traction Electrique de l'ingénierie de SNCF Réseau (DGII-TE-CES5), à qui la méthodologie s'adresse. Dans un deuxième temps, nous allons étudier quatre cas d'étude réels correspondant à différentes topologies de réseau et de différents types d'alimentation et présenter leurs résultats. En plus, pour positionner les résultats de l'outil réalisé par rapport aux résultats d'une méthode d'optimisation classique, nous présenterons les résultats d'une méthode d'optimisation méta-heuristique (PSO, voir Annexe 4) à deux des cas tests étudiés.

### 5.2. Présentation de l'outil

La mise en œuvre de la présente méthodologie et les tests réalisés ont abouti à un premier prototype de l'outil de réorganisation, qui sera utilisé par les ingénieurs au sein de département Traction Electrique de l'ingénierie de SNCF Réseau. Le développement de ce prototype a été réalisé dans l'objectif d'en faire un outil industriel, sous la forme d'un exécutable (.exe en java) autonome et offrant la meilleure généricité possible.

Ce prototype comporte les étapes suivantes :

#### A- Spécification du problème avec analyse de la grille de trafic

Dans cette phase l'outil regroupe les trains. Des critères basés sur l'itinéraire parcouru (ligne, voie, point de départ), le matériel moteur utilisé et la catégorie de mission (TGV, TER, RER,

marchandise...) sont utilisés. L'utilisateur peut modifier ce regroupement proposé par l'outil en rassemblant certain sous-groupes comme il l'entend. Puis l'utilisateur choisit les ajustements appliqués avec un ordre de priorité et il détermine les intervalles de variation de chaque action d'ajustement choisi [*min*, *max*].

## B- Détermination et réalisation des scénarios d'ajustement

L'outil génère *N* scénarios d'ajustement à l'aide de la méthode d'échantillonnage « méthode fondée sur les séquences de Sobol ». Puis il fait une édition des entrées de simulateur et il lance la simulation pour *N* scénarios.

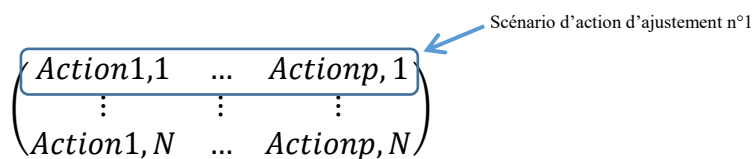


Figure 41: échantillon de *N* scénarii d'ajustement

## C- Analyse de sensibilité régionale

L'analyse de sensibilité régionale sert premièrement à explorer l'espace de solutions réalisables (Détermination du domaine admissible (solutions acceptables) à partir des contraintes opérationnelles (critères de dimensionnement)). Deuxièmement à réduire la dimension du problème en éliminant les ajustements qui ne servent à rien, afin de faciliter la recherche de la solution meilleure pendant la phase d'optimisation. Avoir moins de variables dans un problème d'optimisation implique un volume de recherche plus petit, donc moins d'appels au modèle pour atteindre un optimum.

## D- Post-traitement et optimisation

L'outil recherche les meilleures solutions (grilles) dans l'espace de solutions réalisables selon certain critère d'optimisation. Puis il détermine l'ensemble de solutions Pareto optimales à partir des premières simulations. Puis il recherche à raffiner les solutions trouvées en recherchant à l'entourage de solutions trouvées en lançant une nouvelle campagne en dimension réduite (que les actions d'ajustement influentes).

### 5.3. Présentation des cas d'étude

Quatre cas tests représentatifs en termes de complexité et de topologie des besoins des équipes de dimensionnement ont été étudiés. Ces cas sont :

- **Test 1 axe Paris Le Mans - Paris Tours** : un trafic en multi-ligne de TGV alimenté en AC.
- **Test 2 axe Paris Montparnasse - Versailles** : un trafic en multi-ligne de TER, TGV, FRET alimenté en DC.
- **Test 3 axe Corbeil - Malesherbes** : un trafic en multi-ligne de RER alimenté en DC.
- **Test 4 axe Paris Nord** : un trafic en multi-ligne de TER, FRET et TGV alimenté en AC.

Les tests réalisés sont de différents types d'alimentation : deux tests en AC et deux autres en DC. Nous avons commencé à tester l'outil avec le test axe « Paris Le Mans – Paris Tours », un test qui reste relativement simple topologiquement: deux lignes et un trafic homogène. Mais un trafic qui est considéré assez important avec une centaine de TGV. Ensuite nous avons testé des cas avec différentes types de circulations (trafic hétérogène) et dense (test2). Le test 3 est plus dense que le test 2. Le dernier test axe « Paris Nord » est le plus complexe, cette zone ayant le trafic le plus chargé d'Europe. Les tests 3 et 4 correspondent en plus à des demandes des études pour lesquelles l'équipe d'ingénierie souhaite avoir un aperçu des résultats fournis par la méthode (demande métiers).

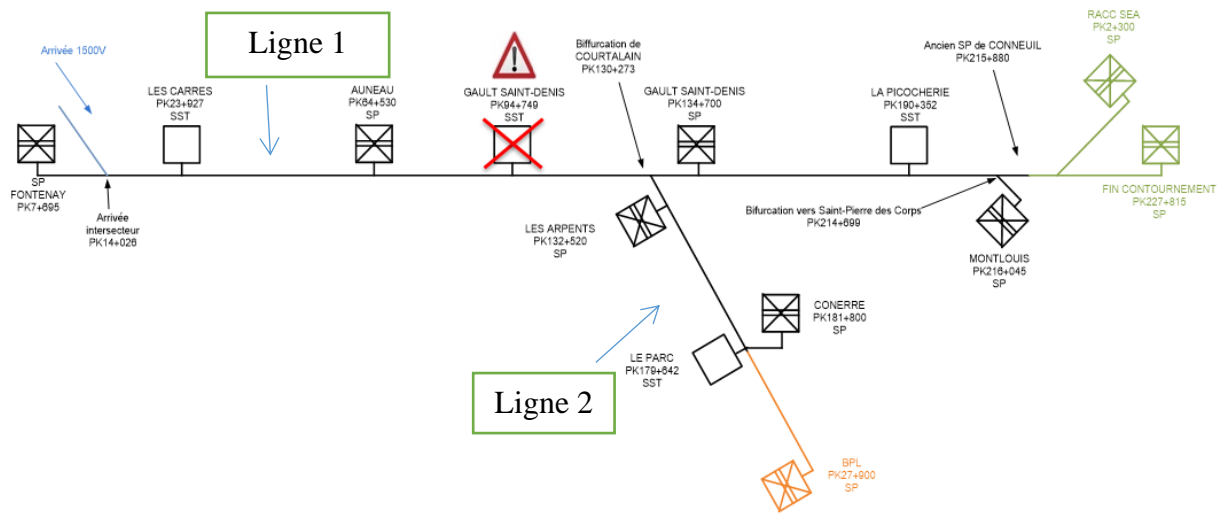
Nous notons que nous avons utilisé la même méthode d'échantillonnage « Méthode fondée sur les séquences de Sobol » pour créer une campagne de 1000 échantillons (scénario d'ajustements) dans les 4 tests. Nous notons également que nous avons appliqué la méthode d'optimisation par essais particuliers (PSO) aux Test 1 et Test 2, dont l'objectif est de comparer les résultats de notre méthodologie et ceux de cette méthode méta-heuristique (voir Annexe 4 ).

#### **Test 1 : axe Paris Le Mans – Paris Tours**

##### **A- Description de la géométrie**

Le cas test correspond à plusieurs lignes, alimentées en **25000 V AC**, par 4 sous-stations et parcourue par un trafic homogène (103 circulations de TGV).

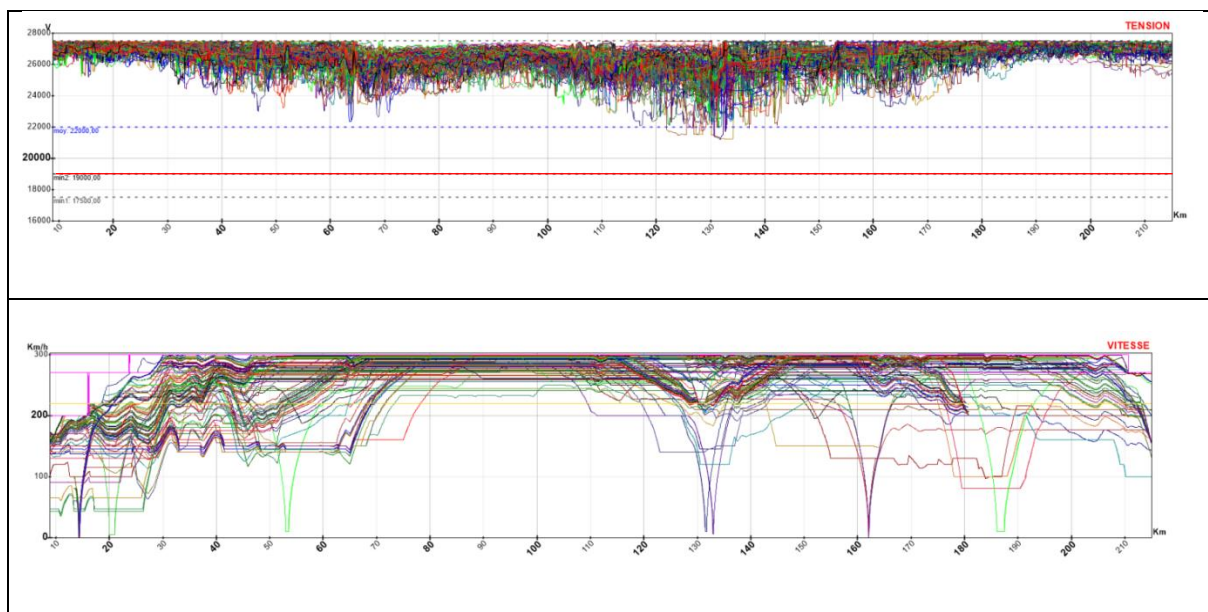
L'incident étudié est la perte totale de la sous-station « GAULT SAINT-DENIS » située à  $pk = 94.749$ , alimentant la ligne 1 comme montre la **Figure 42**.



**Figure 42: Configuration électrique du réseau axe Paris Le Mans – Paris Tours**

La **Figure 43** et la **Figure 44** montrent les résultats de simulation de la grille initiale dans le cas normal puis dans le cas dégradé.

Dans le cas dégradé (**Figure 44**), la tension caténaire chute en dessous du seuil minimal (ligne rouge), et le profil de vitesse indique que le réseau électrique ne peut pas fournir la puissance nécessaire à la réalisation des consignes de vitesse sur la ligne 1. Il faut ajuster le trafic.



**Figure 43: La qualité d'alimentation et la vitesse des trains sur la ligne 1 en mode nominal**

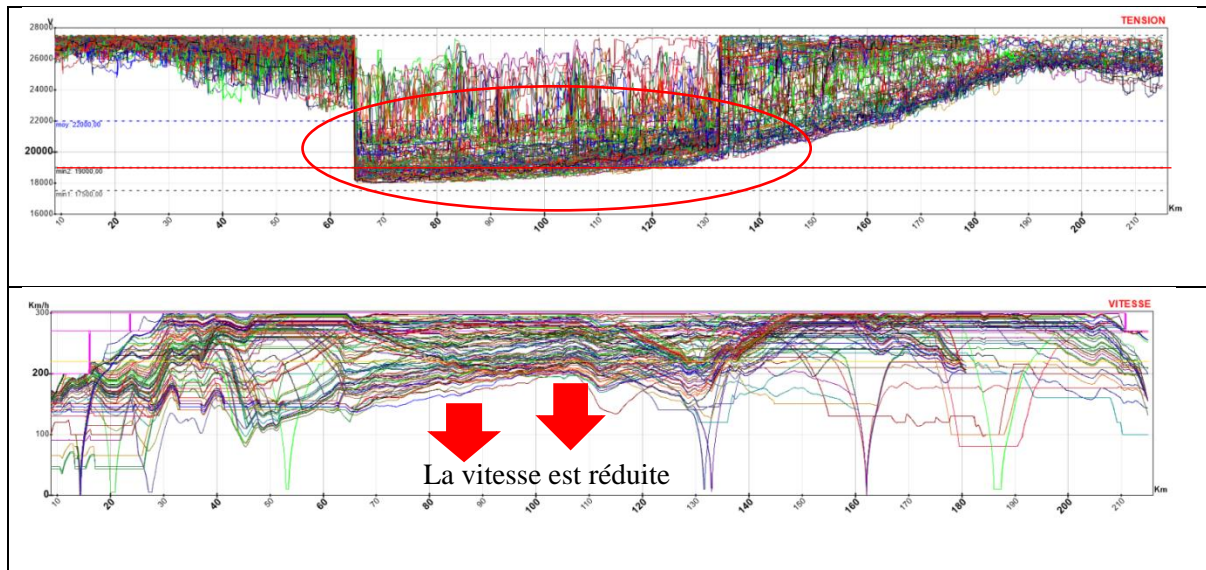


Figure 44: La qualité d'alimentation et la vitesse des trains sur la ligne 1 en mode dégradé

## B- Spécification du problème d'ajustement du trafic

### 3. Définition des actions d'ajustement et des intervalles de variation :

Les profils de tension et de vitesse semblent indiquer que c'est entre les *pk 60 et pk 130* que l'alimentation des trains est la plus perturbée. Outre l'espacement entre trains, nous avons donc proposé d'étudier l'influence d'une réduction de vitesse dans cette région. Nous avons alors défini les actions d'ajustement suivantes :

- 1) *Action 1* : Augmentation de l'intervalle entre les départs des trains TGV sur la ligne 1
- 2) *Action 2* : Réduction de vitesse sur la ligne 1 entre *pk 70 et pk 90*.
- 3) *Action 3* : Réduction de vitesse sur la ligne 1 entre *pk 90 et pk 110*.
- 4) *Action 4* : Réduction de vitesse sur la ligne 1 entre *pk 110 et pk 130*.

### 4. Regroupement automatique et reformulation d'ajustements :

L'outil regroupe les circulations selon leurs missions (Ligne/voie/départ/type), et affecte une action d'ajustement pour chaque groupe comme montre le **Tableau 18**.



Action d'ajustement H <sup>21</sup>	Groupe des circulations	
<b>Action 1</b>	Groupe 1 (TGV) (les circulations en bleu)	L1/V2/pkdebut = 215
<b>Action 2</b>	Groupe 2 (TGV) (les circulations en rose)	L1/V1/ pkdebut = 14.300
		L1/V1/ pkdebut = 92.200
		L1/V1/ L1/V1-L2/V1 pkdebut = 8.800
		L1/V1/ pkdebut = 14.376
<b>Action 3</b>	Groupe 3 (TGV) (les circulations en jaune)	L2/V2-L1/V2 pkdebut = 180.800

Tableau 18: Liste des actions d'ajustement reformulées effectuées dans le fichier horaire H.DAT (L : Ligne ; V : Voie)

Action d'ajustement M <sup>22</sup>	Portion en km (pk)
<b>Action 4</b>	70-90
<b>Action 5</b>	90-110
<b>Action 6</b>	110-130

Tableau 19: Liste des actions d'ajustement effectuées dans le fichier marche M.DAT

Donc après avoir reformulé les actions, nous avons obtenu 6 variables d'ajustement à effectuer dans ce test (**Figure 45**) :  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ , d'où  $X_1 \in [0,15]$  min associé à *Action1* ;  $X_2 \in [0,15]$  min associé à *Action2* ; ( $X_3 \in [0,15]$  min) associé à *Action3* ;  $X_4 \in [0,20]$  m/s associé à *Action4* ;  $X_5 \in [0,20]$  m/s associé à *Action5* ;  $X_6 \in [0,20]$  m/s associé à *Action6*.

<sup>21</sup> Décalage des horaires

<sup>22</sup> Réduction de vitesse dans les marches des trains

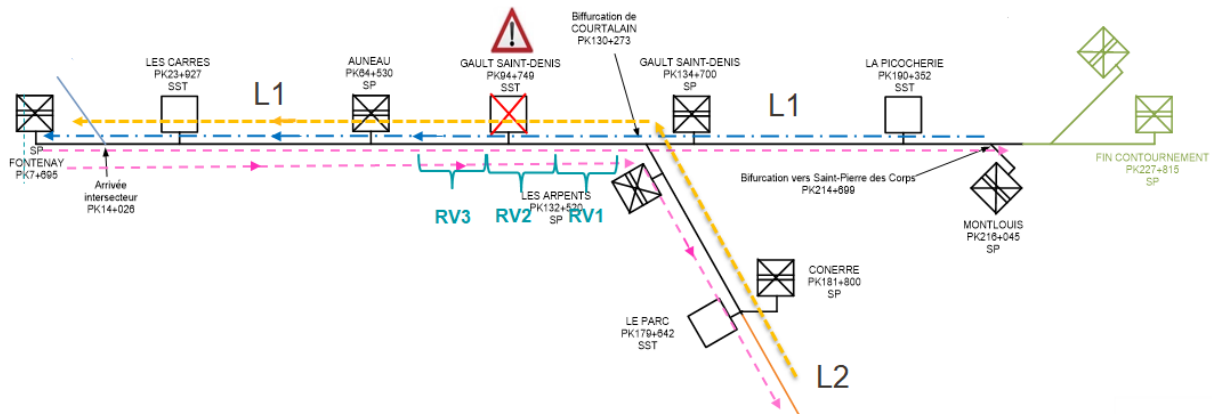


Figure 45: Les différents ajustements du réseau

### C- Phase d'analyse de sensibilité

Les résultats de l'analyse de sensibilité reportés dans le **Tableau 20** font ressortir trois actions importantes, et trois actions peu importantes.

Action d'ajustement	D-stat	P-value	signification
<i>Action1</i>	0.44	0.0	Importante
<i>Action2</i>	0.45	0.0	Importante
<i>Action3</i>	0.51	0.0	Importante
<i>Action4</i>	0.07	0.78	Non importante
<i>Action5</i>	0.12	0.2	Non importante
<i>Action6</i>	0.07	0.8	Non importante

Tableau 20: D-stat (le degré de l'importance) et P-value (les valeurs de la significativité statistique) calculés à partir de 1000 échantillons

Pour ce cas-test, les actions importantes dans le processus de réorganisation et l'obtention de solutions acceptables sont celles qui concernent l'espacement entre les départs de train. Par contre jouer sur les réductions de vitesse n'apporte pas de bénéfices pour le processus.

### D- Post traitement et optimisation

Nous recherchons parmi les solutions acceptables des solutions optimales par rapport aux différents objectifs choisis par l'ingénieur. Dans le cas présent, deux objectifs d'optimisation ont été considérés : F1 = « densité du trafic » ; F2 = « temps moyen de parcours des trains ».

La densité du trafic : est le nombre des trains pouvant circuler pendant un intervalle de temps donné. Elle est calculée selon la formule suivante :

$$F1 = d = \frac{NT}{T_{df} - T_{dp}}$$

Où  $d$  représente la densité,  $NT$  est le nombre des trains ayant circulé et le dénominateur représente la différence entre l'heure de départ du dernier train et l'heure de départ du premier train.

Nous nous sommes d'abord intéressés au problème mono-objectif « maximiser F1 », puis au problème bi-objectif « maximiser F1 et minimiser F2 ».

(1) Problème mono-objectif « maximiser F1 »

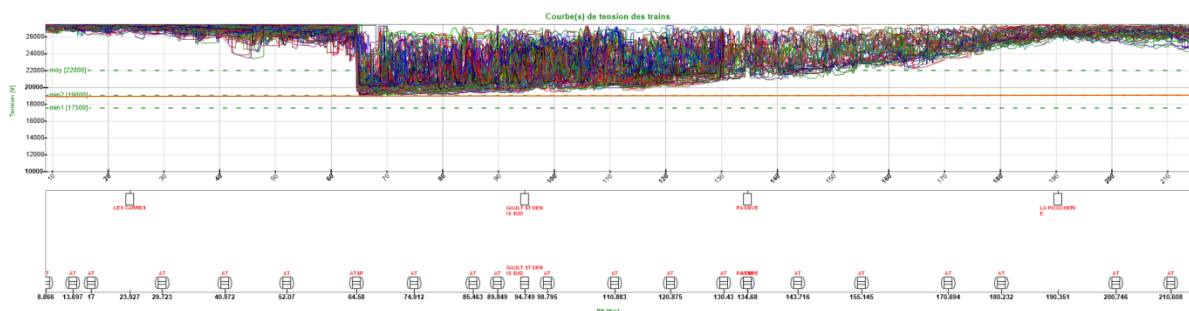
Nous noterons que la densité initiale est égale à 20 trains par heure.

Solution la plus dense trouvée parmi les solutions réalisables :

- Densité = 13.6 trains par heure
- Le scénario d'ajustement associé consiste à effectuer les actions d'ajustement présentées dans le **Tableau 21**.

Action d'ajustement	Valeur
Action1	9 min
Action2	6 min
Action3	10 min
Action4	8 km/h
Action5	46 km/h
Action6	40 km/h

**Tableau 21: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense**



**Figure 46: Le critère sur les tensions générées par la solution la plus dense est respecté**

❖ Réduction de paramétrage et raffinement de solutions

L'ingénieur peut se contenter des solutions réalisables trouvées dans le post traitement au cours de l'analyse de sensibilité. Cependant, il peut exister de meilleures solutions plus raffinées. Cela passe par une réalisation d'une nouvelle campagne des échantillons avec un nouveau paramétrage.

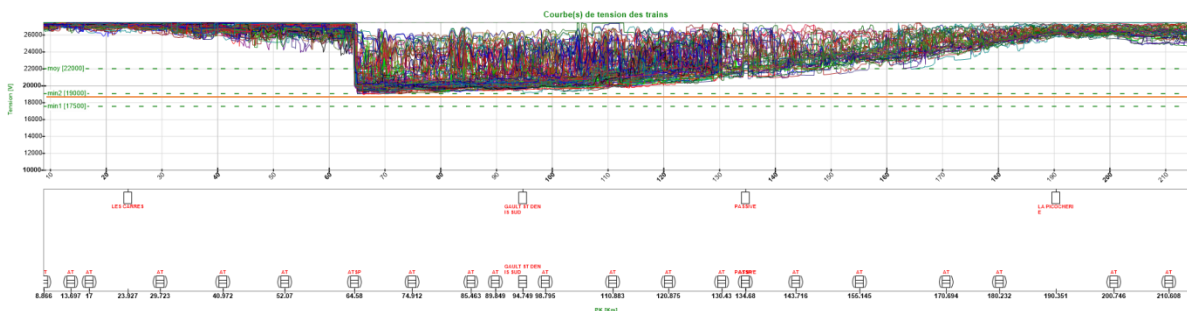
Pour cela, sur la base de l'analyse de sensibilité, les variables non importantes sont figées à zéro, et la recherche sera effectuée dans un espace de dimension inférieure, ne comportant que les actions importantes (*Action1, Action2, Action3*). Une nouvelle campagne de 500 échantillons générés au voisinage de la solution optimale obtenue précédemment a été réalisée.

Mono-objectif : nouvelle solution la plus dense (raffinée):

- Densité = 14.17 trains par heure
- Le scénario d'ajustement associé à cette solution consiste à effectuer les actions d'ajustement présentées dans le **Tableau 22**.

Action d'ajustement	Valeur
Action1	8.8 min
Action2	5 min
Action3	9 min
Action4	0 km/h
Action11	0 km/h
Action12	0 km/h

**Tableau 22: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense**



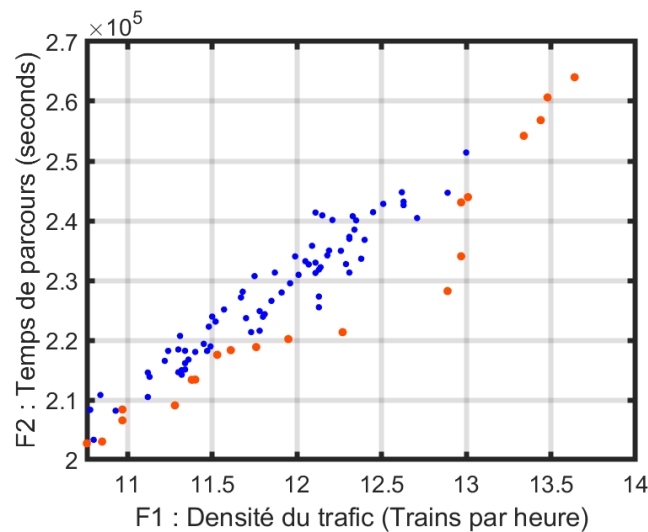
**Figure 47: Le critère sur les tensions générées par la solution la plus dense raffinée est respecté**

Cette solution est plus raffinée que la solution obtenue précédemment, elle est plus dense. Elle contient moins d'ajustement dans le trafic. Elle ne comporte pas les actions d'ajustement sur

les vitesses (*Action4, Action5, Action6*) qui n'apportent aucun intérêt pour le plan de réorganisation et qui se repercutent négativement sur les voyageurs.

(2) Problème multi-objectif « maximiser F1 et minimiser F2 ».

Plus le trafic est dense, plus les trains sont ralentis. Les ingénieurs s'intéressent à avoir de compromis entre les deux critères F1 et F2 : avoir une solution dense mais qui ne ralentit pas beaucoup les trains. Ainsi, la **Figure 48** montre l'ensemble des solutions acceptables dans le plan (F1, F2). L'ensemble des points rouges constituent une approximation de front Pareto.



**Figure 48:** Un ensemble de solutions acceptables dans le plan (F1, F2) : les points rouges représentent les solutions non dominées (approximate pareto set); les points bleus représentent les solutions réalisables dominées.

### Optimisation méta-heuristique sans analyse de sensibilité

Dans cette section, nous présentons le travail réalisé en appliquant une méthode d'optimisation méta-heuristique PSO (Particle Swarm Optimization) afin de comparer les résultats d'une méta-heuristique et ceux de notre méthodologie.

#### Résultats

Nous avons appliqué cette méthode sur la même configuration électrique du réseau « Réseau axe Paris Le Mans – Paris Tours » avec le même nombre d'échantillons exploité dans le calcul précédent (1500 échantillons = 20 particules \* 75 itérations).

#### Solution la plus dense trouvée:

- Densité = 12.8 trains par heure

- Le scénario d'ajustement associé consiste à effectuer les actions d'ajustement présentées dans le **Tableau 23**.

Action d'ajustement	Valeur
Action1	14 minutes
Action2	12 minutes
Action3	14 minutes
Action4	16 km/h
Action5	40 km/h
Action6	72 km/h

**Tableau 23: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense**

La solution trouvée est obtenue avec une convergence très prématurée à l'itération n°3 (la recherche d'une solution optimale n'évolue plus, la solution trouvée aux premières itérations ne s'améliore pas beaucoup au fil de recherche).

## Conclusion

Nous avons présenté dans cette sous-partie, un cas d'étude d'un trafic multi-ligne homogène (TGV) alimenté en mode AC.

Nous avons appliqué notre approche, qui constitue à réaliser une phase d'analyse de sensibilité en pré-étude afin de réduire la dimension de problème. Trois actions d'ajustement qui concernent la réduction de vitesse ont été identifiées non influentes et ont été éliminées. A partir de cette approche, nous avons obtenu des solutions réalisables et des solutions optimales locales dans la phase post traitement, puis des solutions mieux raffinées après avoir appliqué une phase d'optimisation en dimension réduite.

Nous avons ensuite appliqué une méthode d'optimisation méta-heuristique (PSO) sur le même test et nous avons présenté les résultats. Nous avons obtenu une solution optimale locale avec une convergence prématurée dès l'itération n°3 dont le nombre total d'itérations est 75. Avec cette méthode, les trois actions d'ajustements sur les vitesses des trains, qui ont été identifiés non influentes selon l'analyse de sensibilité utilisée dans notre méthodologie, ont été utilisés même si leur application se répercute négativement sur les voyageurs.

## Test 2 : axe Montparnasse - Versailles

### A- Description de la géométrie

Le cas test correspond à plusieurs lignes, alimentées en **1500 V DC**, par 100 sous-stations et parcourue par un trafic hétérogène (plus que deux cent circulations de TGV, TER, FRET). Ce trafic comporte aussi des circulations composées compliquées (circulations comportant plusieurs missions par exemple : une circulation qui comporte trois missions, la première s'agit de se déplacer sur la ligne 9, voie 3 de pk début = 0.400 jusqu'au pk fin = 32.605, puis une deuxième mission qui s'agit de se déplacer sur la ligne 9, voie 1, pk début = 32.605 jusqu'au pk fin = 47.800 puis une troisième mission ...) ce qui rend plus difficile le processus de réorganisation.

L'incident étudié est la perte totale de deux sous-stations « Epernon » située à  $pk = 60.760$  et « Maintenon » située à  $pk = 69.159$ , alimentant la ligne 9 comme le montre la **Figure 49**.

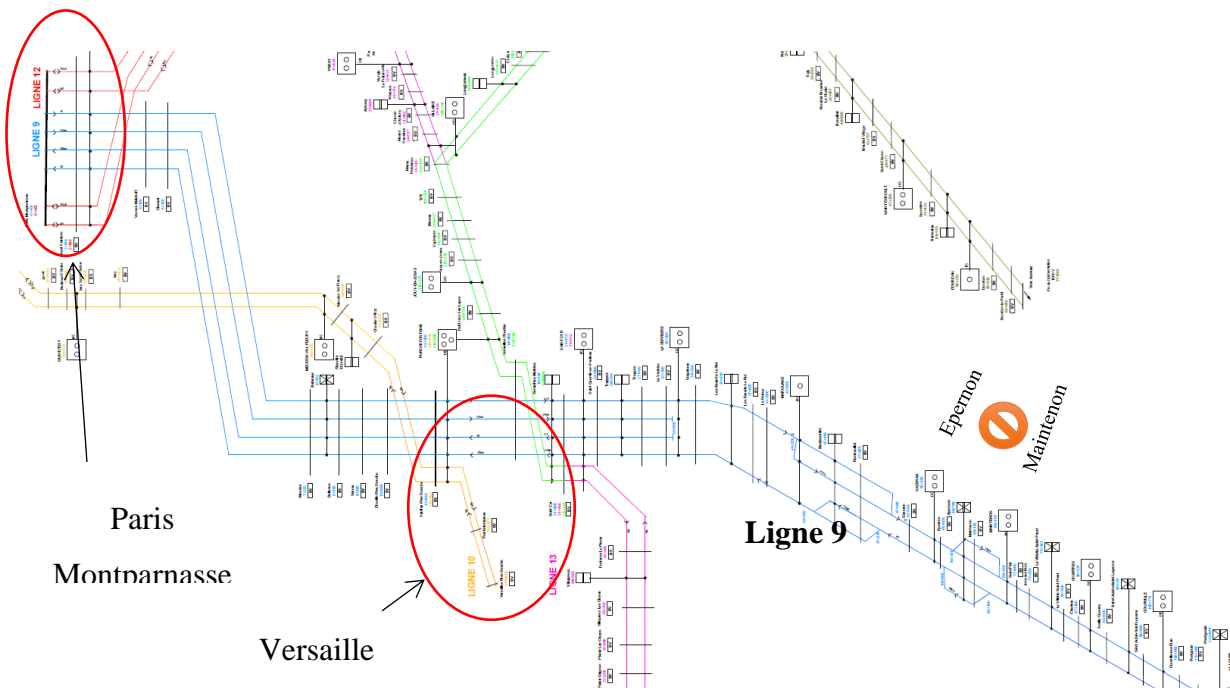


Figure 49: Configuration électrique du réseau axe Montparnasse-Versailles

La **Figure 50** et la **Figure 51** montrent les résultats de simulation dans le cas normal et dans le cas dégradé.

Dans le cas dégradé (**Figure 51**), la tension caténaire chute en dessous du seuil minimal (ligne rouge), et le profil de vitesse indique que le réseau électrique ne peut pas fournir la puissance nécessaire à la réalisation des consignes de vitesse sur la ligne 9. Il faut ajuster le trafic.

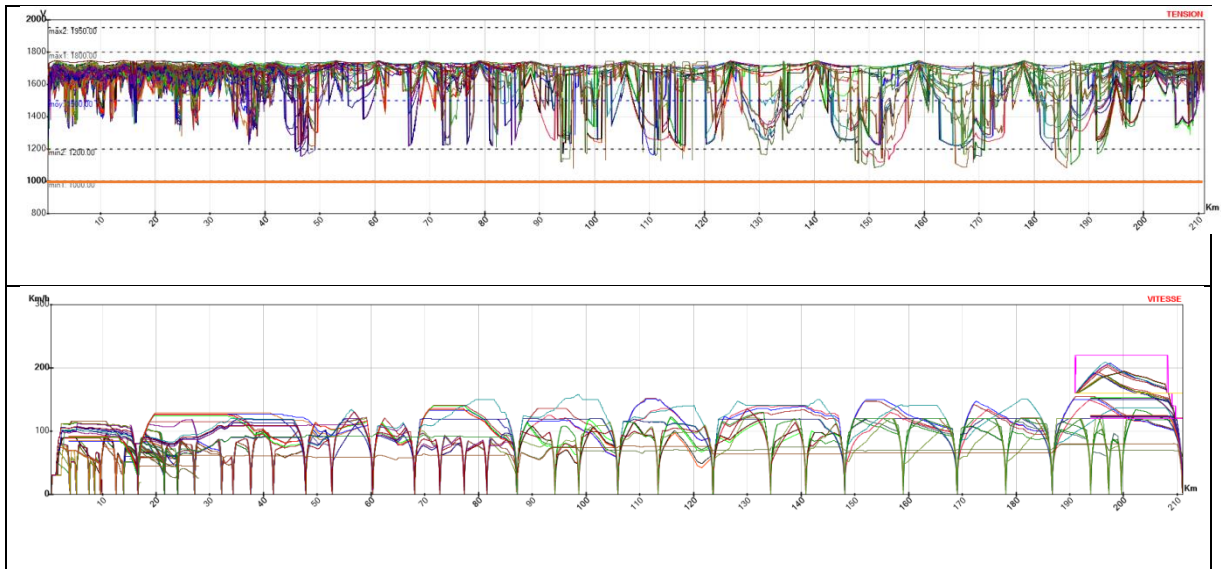


Figure 50: La qualité d'alimentation et la vitesse des trains sur la ligne 9 en mode nominal

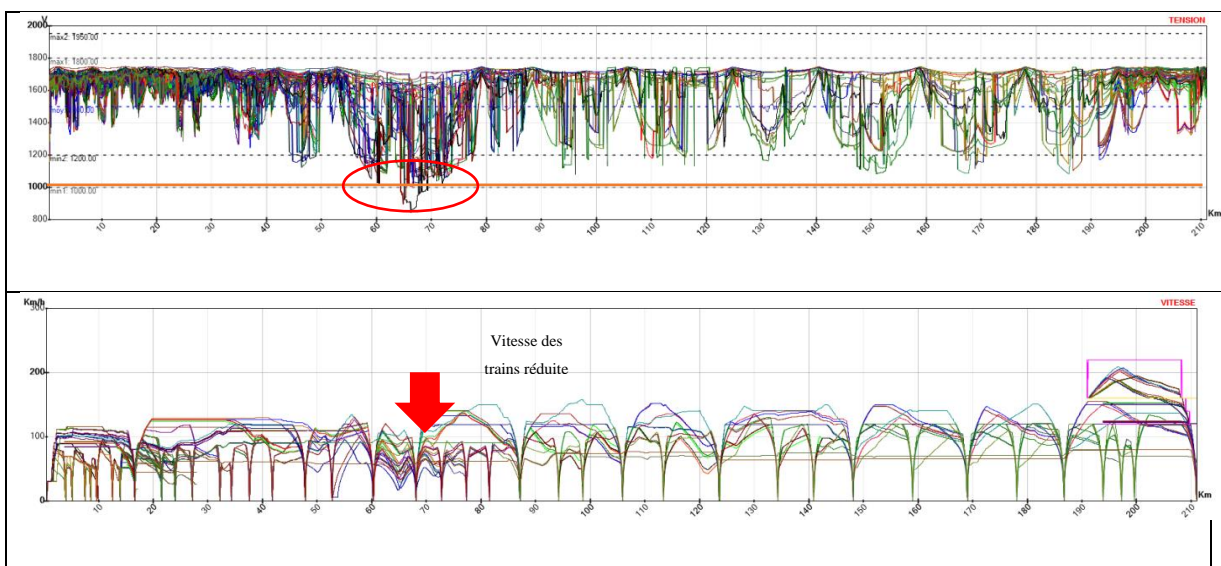


Figure 51: La qualité d'alimentation et la vitesse des trains sur la ligne 9 en mode dégradé

## B- Spécification du problème d'ajustement du trafic

### 5. Définition des actions d'ajustement et des intervalles de variation :

Les profils de tension et de vitesse semblent indiquer que c'est entre les *pk 60 et pk 80* que l'alimentation des trains est la plus perturbée. Outre l'espacement entre



trains, nous avons donc proposé d'étudier l'influence d'une réduction de vitesse dans cette région. Nous avons alors défini les actions d'ajustement suivantes :

- 1) *Action1* : Augmentation de l'intervalle entre les départs des trains TGV, TER, FRET sur la ligne 9.
- 2) *Action2* : Réduction de vitesse sur la ligne 9 entre *pk* 60 et *pk* 70.
- 3) *Action3* : Réduction de vitesse sur la ligne 9 entre *pk* 70 et *pk* 80.

6. Regroupement automatique et reformulation d'ajustements :

L'outil regroupe les circulations selon leurs missions (Ligne/voie/départ/type), et affecte une action d'ajustement pour chaque groupe comme montre le **Tableau 24**.

Action d'ajustement H	Groupe des circulations	
<b>Action 1</b>	Groupe 1 (TER)	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V3-L9/V1-L9/V3</li> <li>○ L9/V3-L13/V1</li> <li>○ L9/V3</li> </ul> (pkdebut = 400)
		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V3</li> </ul> (pkdebut = 15100)
		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V3</li> </ul> (pkdebut = 13900)
<b>Action 2</b>	Groupe 2 (TER)	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V1-L9/V3-L9/V1-L9/V3</li> </ul> (pkdebut = 400)
		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V1</li> </ul> (pkdebut = 148100)
		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V1-L9/V3</li> </ul> (pkdebut = 16600)
		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V1</li> </ul> (pkdebut = 87100)
<b>Action 3</b>	Groupe 3 (TGV)	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V1</li> </ul> (pkdebut = 190900)
<b>Action 4</b>	Groupe 4 (TER)	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V2</li> </ul> (pkdebut = 148100)
		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V2</li> <li>○ L9/V2-L9/V4</li> </ul> (pkdebut = 47800)
		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V2</li> </ul> (pkdebut = 27800)
		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V2</li> </ul> (pkdebut = 211000)
		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V2</li> </ul> (pkdebut = 27900)
		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V2</li> </ul> (pkdebut = 87100)
<b>Action 5</b>	Groupe 5 (TGV)	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V2</li> </ul> (pkdebut = 211000)
<b>Action 6</b>	Groupe 6 (FRET)	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V2</li> </ul> (pkdebut = 211000)
<b>Action 7</b>	Groupe 7 (TER)	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V4</li> </ul> (pkdebut = 24000)
		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V4</li> </ul> (pkdebut = 9942)
		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L9/V4</li> </ul> (pkdebut = 32200)
<b>Action 8</b>	Groupe 8 (TER)	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L13/V2-L9/V2-L9/V4</li> </ul> (pkdebut = 32200)
		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ L13/V2-L9/V2</li> </ul> (pkdebut = 33500)

		○ L13/V2-L9/V2 (pkdebut = 31500)
<b>Action 9</b>	Groupe 9 (TER)	○ L12/V3-L9/V1 (pkdebut = 400)
		○ L12/V3 (pkdebut = 0)
<b>Action 10</b>	Groupe 10 (TGV)	○ L12/V3 (pkdebut = 0)

**Tableau 24:** Liste des actions d'ajustement reformulées effectuées dans le fichier horaire H.DAT (L : Ligne ; V : Voie)

Action d'ajustement M	Portion en km
<b>Action 11</b>	60-70
<b>Action 12</b>	70-80

**Tableau 25:** Liste des actions d'ajustement effectuées dans le fichier marche M.DAT

Donc après avoir reformulé les actions, nous avons obtenu 12 variables d'ajustement à effectuer pour ajuster les entrées de simulateur =  $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12})$ .

### C- Phase d'analyse de sensibilité

Les résultats de l'analyse de sensibilité reportés dans le **Tableau 26** font ressortir quatre actions d'ajustement importantes et huit actions non importantes.

Action d'ajustement	D-stat	P-value	signification
Action1	0.07	0.48	Non importante
Action2	0.14	0.01	Importante
Action3	0.04	0.97	Non importante
Action4	0.14	0.01	Importante
Action5	0.05	0.92	Non importante
Action6	0.06	0.67	Non importante
Action7	0.07	0.51	Non importante
Action8	0.1	0.18	Non importante
Action9	0.43	0	Importante
Action10	0.06	0.79	Non importante
Action11	0.16	0	Importante
Action12	0.08	0.41	Non importante

**Tableau 26: D-stat (le degré de l'importance) et P-value (les valeurs de la significativité statistique) calculés à partir de 1000 échantillons**

Pour ce cas-test, à partir des résultats d'analyse de sensibilité, nous constatons que parmi les deux ajustements sur les vitesses des trains proposés, la réduction de vitesse (*Action11*) est influente sur les résultats. Et les trois actions (*Action2, Action4, Action9*) qui concernent l'espacement entre les départs de train sont aussi des actions importantes. Donc jouer sur ces quatre actions sensibles, apporte un bénéfice pour produire des solutions acceptables qui respectent les contraintes (le seuil de tensions, les échauffements,...).

## **D- Post traitement et optimisation**

Nous recherchons parmi les solutions acceptables générées par le déroulement de la phase d'analyse de sensibilité des solutions optimales par rapport aux différents objectifs choisis par l'ingénieur. Dans le cas présent, deux objectifs d'optimisation ont été considérés : F1 = « densité du trafic » ; F2 = « échauffements des sous-stations ».

Nous nous sommes d'abord intéressés au problème mono-objectif « maximiser F1 », puis au problème bi-objectif « maximiser F1 et minimiser F2 ».

### *(1) Mono-objectif « maximiser F1 »*

Nous noterons que la densité nominale est égale à 72.9 trains par heure.

Solution la plus dense trouvée parmi les solutions réalisables:

- Densité = 61.59 trains par heure
- Le scénario d'ajustement associé consiste à effectuer les actions d'ajustement présentées dans le **Tableau 27**.

Action d'ajustement	Valeur
Action1	0 min
Action2	8 min
Action3	2 min
Action4	11 min
Action5	7 min
Action6	3 min
Action7	2 min
Action8	11 min
Action9	4 min
Action10	7 min
Action11	11 km/h
Action12	34 km/h

Tableau 27: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense

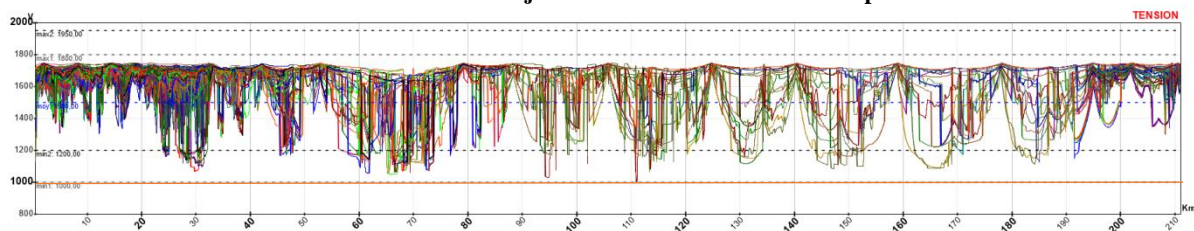
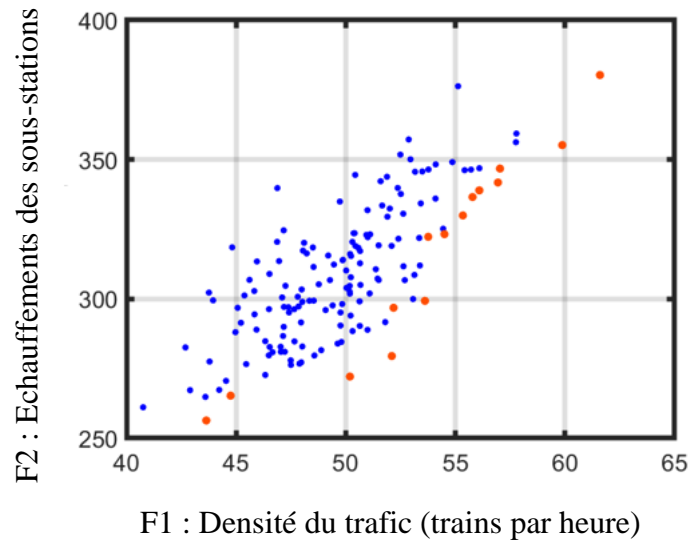


Figure 52: Le critère sur les tensions générées par la solution la plus dense est respecté

(2) multi-objectif « maximiser F1 et minimiser F2 ».

Plus le trafic est dense, plus les sous-stations s'échauffent. Les ingénieurs s'intéressent à avoir de compromis entre les deux critères : avoir une solution dense mais en minimisant les échauffements des sous-stations. Ainsi, la **Figure 53** montre l'ensemble des solutions acceptables dans le plan (F1, F2). L'ensemble des points rouges constitue une approximation de front Pareto.



**Figure 53:** Un ensemble de solutions acceptables dans le plan (F1, F2) : les points rouges représentent les solutions non dominées (approximate pareto set); les points bleus représentent les solutions réalisables dominées.

❖ Réduction de paramétrage et amélioration de solutions

L'ingénieur peut se contenter des solutions réalisables trouvées dans le post traitement au cours de l'analyse de sensibilité. Cependant, il peut exister de meilleures solutions plus raffinées. Cela passe par une réalisation d'une nouvelle campagne des échantillons avec un nouveau paramétrage.

Pour cela, sur la base de l'analyse de sensibilité, les variables non importantes sont figées à zéro, et la recherche sera effectuée dans un espace de dimension inférieure, ne comportant que les actions importantes (*Action2, Action4, Action9, Action11*). Une nouvelle campagne de 500 échantillons générés au voisinage de la solution optimale obtenue précédemment a été réalisée.

Mono-objectif : nouvelle solution la plus dense (raffinée):

- Densité = 67.5 trains par heure
- Le scénario d'ajustement associé à cette solution consiste à effectuer les actions d'ajustement présentées dans le **Tableau 28**.

Action d'ajustement	Valeur
Action1	0 min
Action2	6.5 min
Action3	0 min
Action4	9.5 min
Action5	0 min
Action6	0 min
Action7	0 min
Action8	0 min
Action9	2 min
Action10	0 min
Action11	12 km/h
Action12	0 km/h

Tableau 28: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense

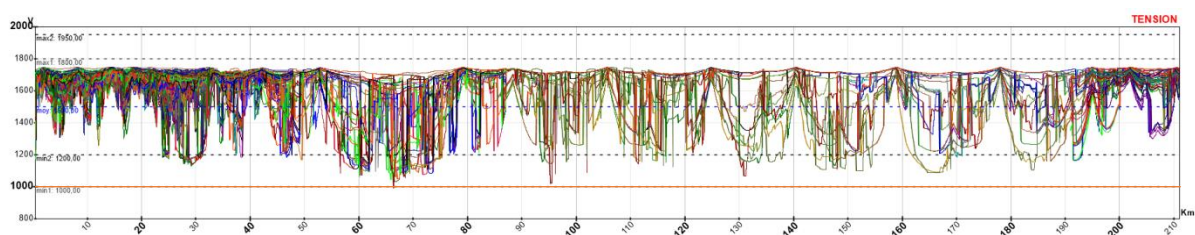


Figure 54: Le critère sur les tensions générées par la solution la plus dense raffinée est respecté

Cette solution est plus raffinée que la solution obtenue précédemment, elle est plus dense. Elle contient moins d'ajustement dans le trafic. Sauf les quatre actions d'ajustements (*Action2*, *Action4*, *Action9*, *Action11*) qui apportent des améliorations pour le plan de réorganisation ont été utilisées. Les autres actions non importantes n'ont été pas utilisées parce qu'ils se répercutent négativement sur les voyageurs.

### Optimisation méta-heuristique sans analyse de sensibilité

Dans cette section, nous présentons le travail réalisé en appliquant une méthode d'optimisation méta-heuristique PSO (Particle Swarm Optimization) afin de comparer les résultats d'une méta-heuristique et ceux de notre méthodologie.

## Résultats

Nous avons appliqué le même test « Réseau axe Montparnasse Versailles » avec le même nombre d'échantillons exploité dans le calcul précédent (1500 échantillons = 20 particules \* 75 itérations).

### Solution la plus dense trouvée:

- Densité = 62.5 trains par heure
- Le scénario d'ajustement associé consiste à effectuer les actions d'ajustement présentées dans le **Tableau 29**.

Action d'ajustement	Valeur
Action1	2 min
Action2	1 min
Action3	6 min
Action4	11 min
Action5	6.5 min
Action6	1 min
Action7	0 min
Action8	5.5 min
Action9	5 min
Action10	10 min
Action11	18 km/h
Action12	4 km/h

**Tableau 29: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense**

La solution trouvée est obtenue avec une convergence prématurée à l'itération n°34.

## **Conclusion**

Nous avons appliqué ce cas d'étude d'un trafic multi-ligne hétérogène (TER, TGV et FRET) alimenté en mode DC.

Nous avons appliqué notre approche de réorganisation, qui constitue à réaliser une phase d'analyse de sensibilité en pré-étude afin de réduire la dimension de problème. Huit actions d'ajustement ont été identifiées non influentes et ont été éliminées. Nous avons obtenu des



solutions réalisables et des solutions optimales locales dans la phase post traitement, puis des solutions mieux raffinées après avoir appliqué une phase d'optimisation.

Nous avons ensuite appliqué une méthode d'optimisation méta-heuristique (PSO) sur le même test et nous avons présenté les résultats. Nous avons obtenu une solution optimale locale avec une convergence prématurée dès l'itération n°34 dont le nombre total d'itérations est 75. Avec cette méthode nous ne pouvons pas savoir si les ajustements implémentés ont un rôle ou non dans le processus de réorganisation, et par conséquent les huit actions non influentes n'ont pas été éliminées. Par contre, à l'aide de notre méthode ces huit actions ont été supprimées afin d'avoir de solutions raffinées.

### Test 3: axe Corbeil - Malesherbes

#### A- Description de la géométrie

Le cas test correspond à plusieurs lignes, alimentées en **1500 V DC**, par 83 sous-stations et parcourue par un trafic homogène (plus que 300 circulations de RER). Ce trafic comporte aussi des circulations composées compliquées.

L'incident étudié est la perte totale de la sous-station « GRIAULT » située à pk = 65.174, alimentant la ligne 5 comme montre la **Figure 55**.

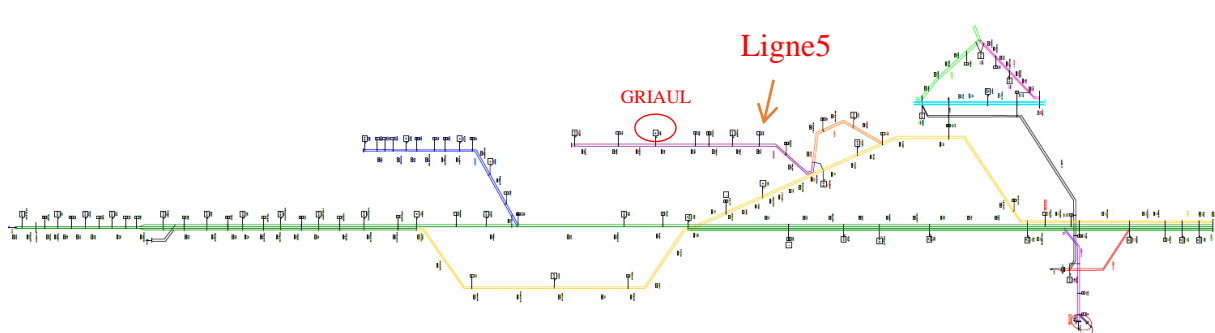


Figure 55: Configuration électrique du réseau axe Corbeil-Malesherbes

La **Figure 56** et la **Figure 57** montrent les résultats de simulation dans le cas normal et dans le cas dégradé.

Dans le cas dégradé (**Figure 57**), la tension caténaire chute en dessous du seuil minimal (ligne rouge), et le profil de vitesse indique que le réseau électrique ne peut pas fournir la puissance nécessaire à la réalisation des consignes de vitesse sur la ligne 9. Il faut ajuster le trafic.

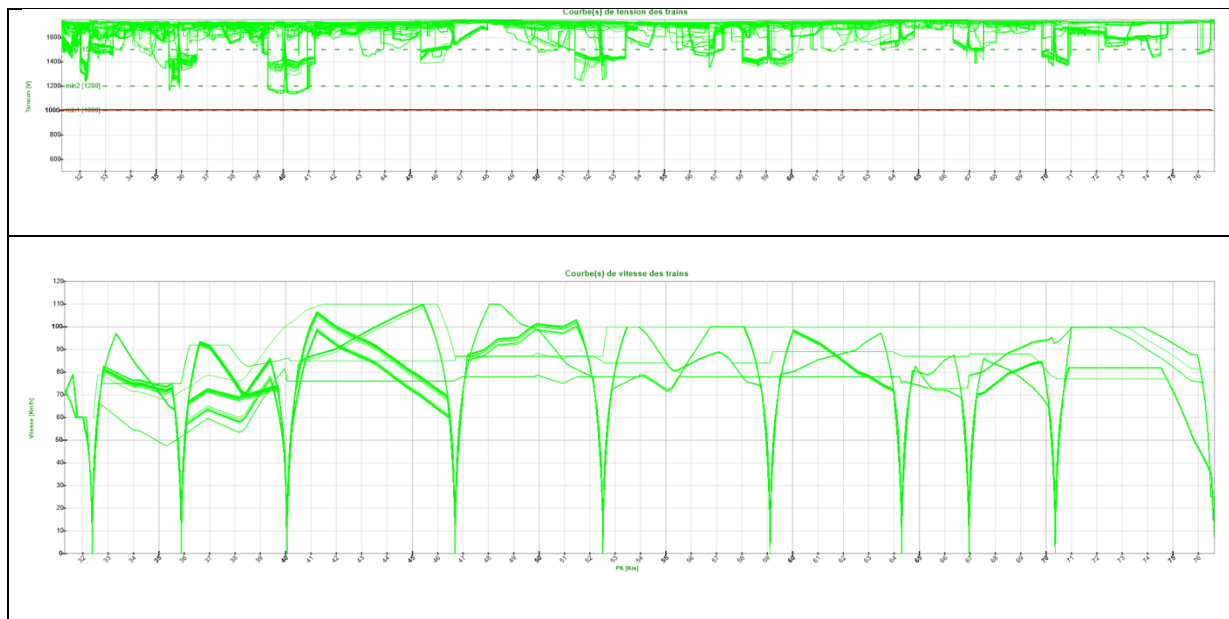


Figure 56: La qualité d'alimentation et la vitesse des trains sur la ligne 5 en mode nominal

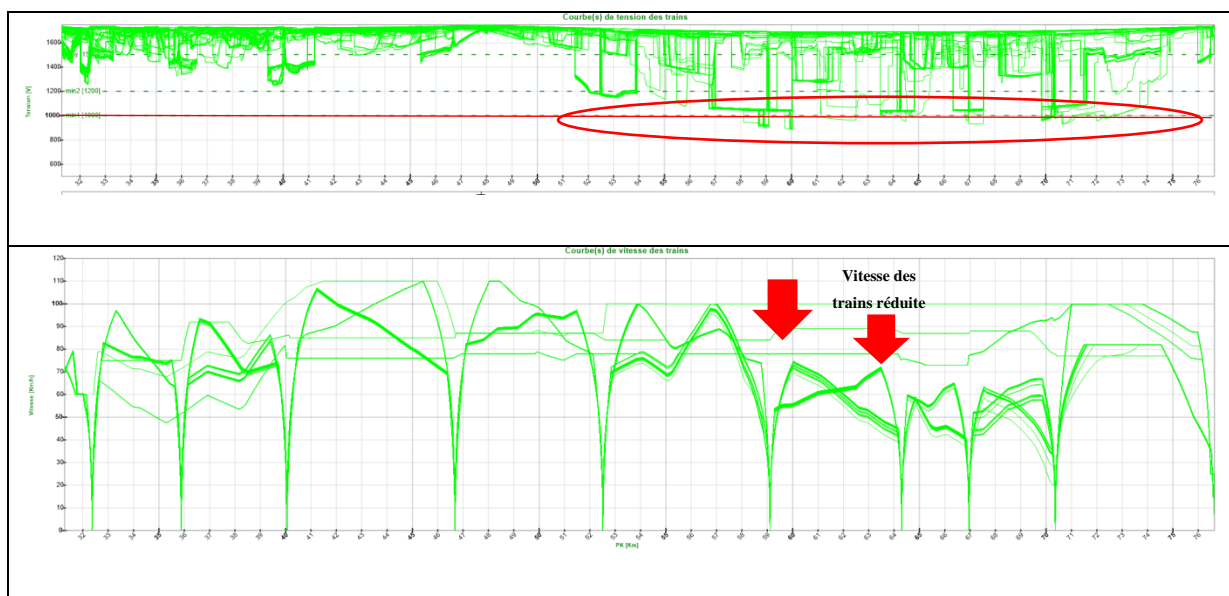


Figure 57: La qualité d'alimentation et la vitesse des trains sur la ligne 5 en mode dégradé

## B- Spécification du problème d'ajustement du trafic

### 1. Définition des actions d'ajustement et des intervalles de variation :

Les profils de tension et de vitesse semblent indiquer que c'est entre les pk50 et pk70 que l'alimentation des trains est la plus perturbée. Outre l'espacement entre trains, nous avons donc proposé d'étudier l'influence d'une réduction de vitesse dans cette région. Nous avons alors défini les actions d'ajustement suivantes :

- 1) *Action1* : Augmentation de l'intervalle entre les départs des trains RER sur la ligne 5.
- 2) *Action2* : Réduction de vitesse (RV1) sur la ligne 5 entre *pk* 60 et *pk* 70.
- 3) *Action3* : Réduction de vitesse (RV2) sur la ligne 5 entre *pk* 70 et *pk* 80.

## 2. Regroupement automatique et reformulation d'ajustements :

L'outil regroupe les circulations de type RERD selon leurs missions (Ligne/voie/départ/type), et affecte une action d'ajustement pour chaque groupe comme montre le **Tableau 30**.

Action d'ajustement H	Groupe des circulations	
<b>Action 1</b>	Groupe 1 (RERD)	L5/V1/pkdebut= 32368
<b>Action 2</b>	Groupe 2 (RERD)	L5/V2/pkdebut= 32368 -L4V2-L3V2-L1V4
<b>Action 3</b>	Groupe 3 (RERD)	L5/V2/pkdebut = 76644 -L3V2
<b>Action 4</b>	Groupe 4 (RERD)	L3/V1/pkdebut=21129 -L5V1
<b>Action 5</b>	Groupe 5 (RERD)	L3/V1/pkdebut = 52375
<b>Action 6</b>	Groupe 6 (RERD)	L3/V1/pkdebut=32368
<b>Action 7</b>	Groupe 7 (RERD)	L1/V3/pkdebut = 00150 -L3V1-L4V1-L5V1
<b>Action 8</b>	Groupe 8 (RERD)	L3/V2/pkdebut=32368 -L1V4
<b>Action 9</b>	Groupe 9 (RERD)	L3/V2/pkdebut=52375

**Tableau 30:** Liste des actions d'ajustement reformulées effectuées dans le fichier horaire H.DAT (L : Ligne ; V : Voie)

Action d'ajustement M	Portion en km
<b>Action 10</b>	50-60
<b>Action 11</b>	60-70

**Tableau 31:** Liste des actions d'ajustement effectuées dans le fichier marche M.DAT

Donc après avoir reformulé les actions, nous avons obtenu 11 variables d'ajustement  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11})$  d'où  $X_i$  est associé à *Action i*.

## C- Phase d'analyse de sensibilité

Les résultats de l'analyse de sensibilité reportés dans le **Tableau 32** font ressortir cinq actions d'ajustement importantes et six actions non importantes.

Action d'ajustement	D-stat	P-value	signification
Action1	0.16	0.0	Importante
Action2	0.05	0.58	Non Importante
Action3	0.33	0.0	Importante
Action4	0.46	0.0	Importante
Action5	0.03	1.0	Non importante
Action6	0.04	0.78	Non importante
Action7	0.04	0.88	Non importante
Action8	0.04	0.8	Non importante
Action9	0.04	0.86	Non Importante
Action10	0.18	0.0	Importante
Action11	0.11	0.01	Importante

**Tableau 32: D-stat (le degré de l'importance) et P-value (les valeurs de la significativité statistique) calculés à partir de 1000 échantillons**

Pour ce cas-test, à partir des résultats d'analyse de sensibilité, nous constatons que seules trois actions d'ajustement (*Action1, Action3, Action4*) qui concernent l'espacement entre les départs de trains, et les deux actions d'ajustement (*Action10, Action11*) qui concernent la réduction de vitesse, sont importantes dans le processus de réorganisation. Jouer sur ces actions sensibles, apporte un bénéfice pour produire des solutions acceptables qui respectent les contraintes (le seuil de tensions, les échauffements,...).

## D- Post traitement et optimisation

Nous recherchons parmi les solutions acceptables générées par le déroulement de la phase d'analyse de sensibilité des solutions optimales par rapport aux différents objectifs choisis par l'ingénieur. Dans le cas présent, deux objectifs d'optimisation ont été considérés : F1 = « densité du trafic » ; F2 = « échauffements des sous-stations ».

Nous nous sommes d'abord intéressés au problème mono-objectif « maximiser F1 », puis au problème bi-objectif « maximiser F1 et minimiser F2 ».

### Mono-objectif maximiser F1

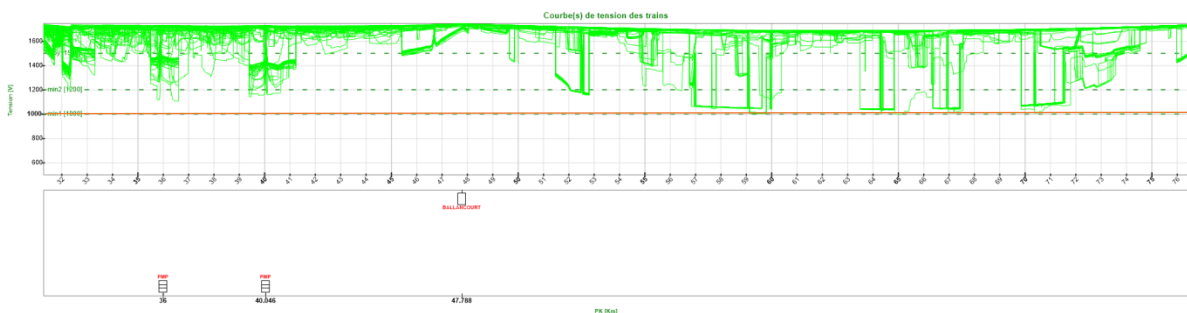
Nous Noterons que la densité nominale est égale à 26.97 trains par heure.

Solution la plus dense trouvée parmi les solutions réalisables:

- Densité = 23.209 trains par heure
- Le scénario d'ajustement associé consiste à effectuer les actions d'ajustement présentées dans le **Tableau 33**.

Action d'ajustement	Valeur
Action1	1.5 minutes
Action2	3 minutes
Action3	8 minutes
Action4	5 minutes
Action5	4 minutes
Action6	6 minutes
Action7	1 minute
Action8	3 minutes
Action9	1.5 minutes
Action10	41 km/h
Action11	48 km/h

**Tableau 33: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense**



**Figure 58: Le critère sur les tensions générées par la solution la plus dense est respecté**

#### ❖ Réduction de paramétrage

L'ingénieur peut se contenter des solutions réalisables trouvées dans le post traitement au cours de l'analyse de sensibilité. Cependant, il peut exister de meilleures solutions plus raffinées. Cela passe par une réalisation d'une nouvelle campagne des échantillons avec un nouveau paramétrage.

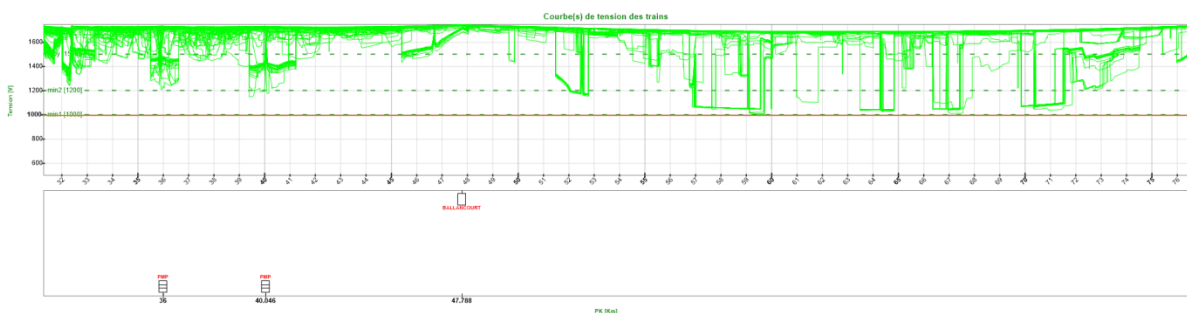
Pour cela, sur la base de l'analyse de sensibilité, les variables non importantes sont figées à zéro, et la recherche sera effectuée dans un espace de dimension inférieure, ne comportant que les actions importantes (*Action1, Action3, Action4, Action10, Action11*). Une nouvelle campagne de 500 échantillons générés au voisinage de la solution optimale obtenue précédemment a été réalisée.

Mono-objectif : nouvelle solution la plus dense (raffinée):

- Densité = 25.67 trains par heure
- Le scénario d'ajustement associé à cette solution consiste à effectuer les actions d'ajustement présentées dans le **Tableau 34**.

Action d'ajustement	Valeur
Action1	0 min
Action2	0 min
Action3	8 min
Action4	5 min
Action5	0 min
Action6	0 min
Action7	0 min
Action8	0 min
Action9	0 min
Action10	41 km/h
Action11	50 km/h

**Tableau 34: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense**

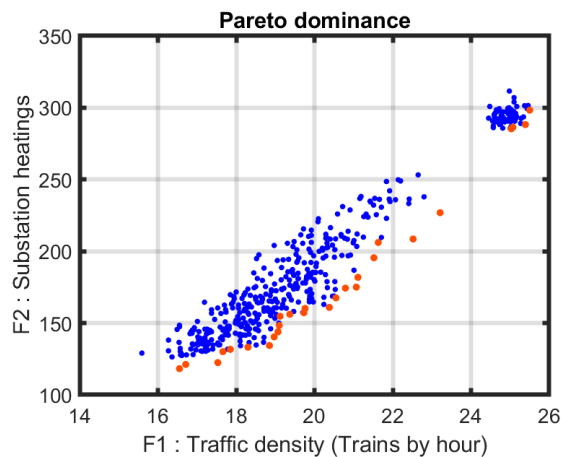


**Figure 59: Le critère sur les tensions générées par la solution la plus dense raffinée est respecté**

Cette solution est plus raffinée que la solution obtenue précédemment, elle est plus dense. Elle contient moins d'ajustement dans le trafic. Toutes les actions d'ajustements qui ont été identifiées comme « non importante » dans la phase d'analyse ont été éliminées.

(1) multi-objectif « maximiser F1 et minimiser F2 ».

Plus le trafic est dense, plus les sous-stations s'échauffent. Les ingénieurs s'intéressent à avoir de compromis entre les deux critères : avoir une solution dense mais en minimisant les échauffements des sous-stations. Ainsi, la **Figure 60** montre l'ensemble des solutions acceptables dans le plan (F1, F2). L'ensemble des points rouges constituent une approximation de front Pareto.



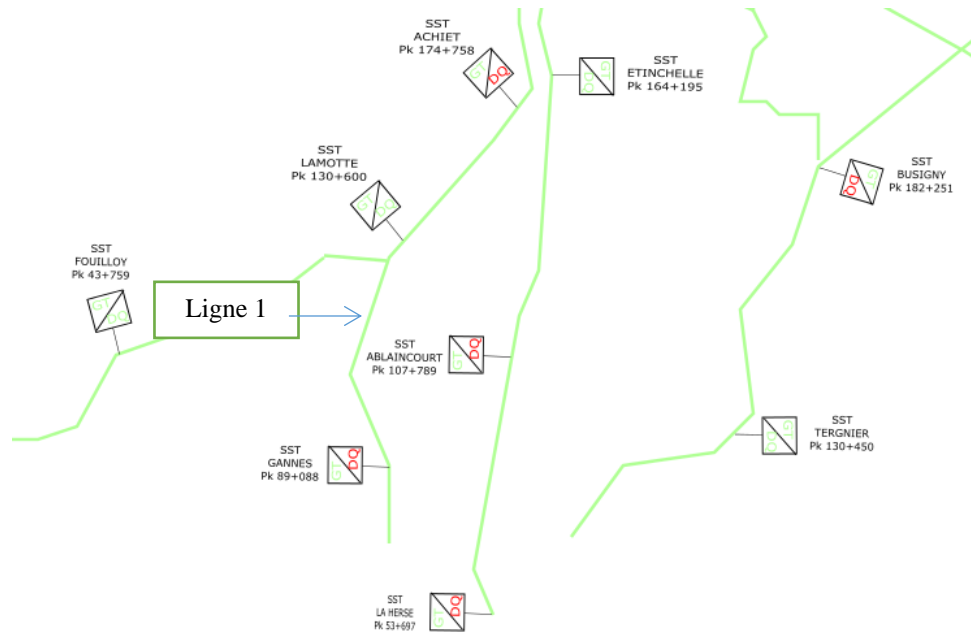
**Figure 60:** Un ensemble de solutions acceptables dans le plan (F1, F2) : les points rouges représentent les solutions non dominées (approximate pareto set); les points bleus représentent les solutions réalisables dominées.

## Test 4: axe Paris Nord

### A- Description de la géométrie

Le cas test correspond à plusieurs lignes, alimentées en **25000 V AC**, par 83 sous-stations et parcourue par un trafic hétérogène (TGV, FRET, TER). Ce trafic est dense et encombré, d'où la grille horaire contient plus que 3000 trains dont 408 trains circulent sur la ligne 1.

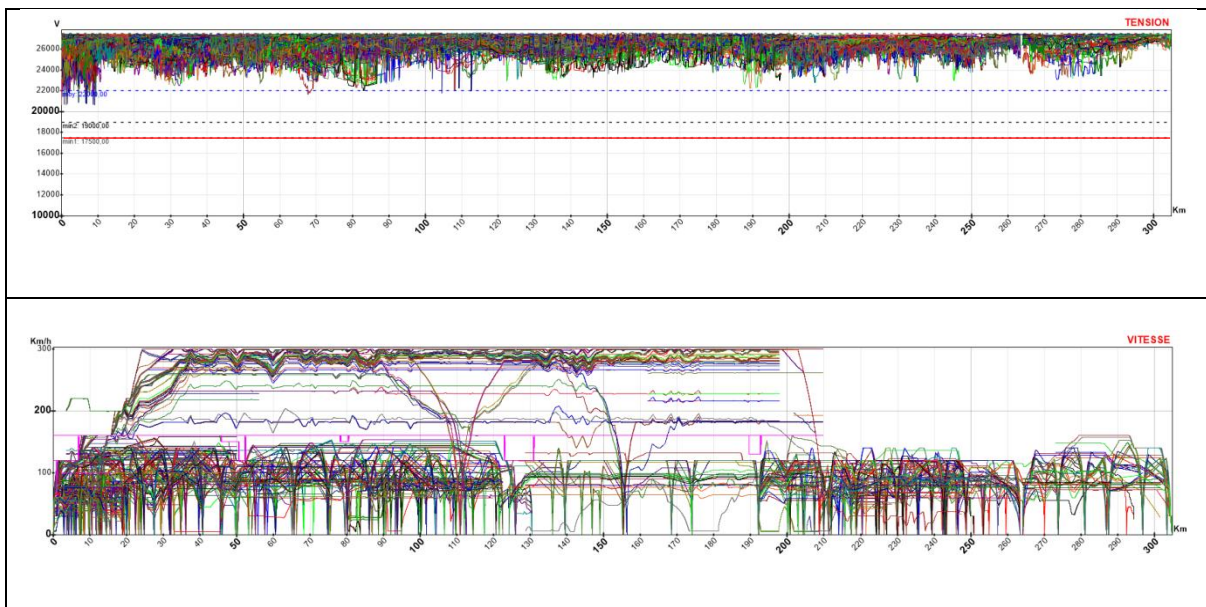
L'incident étudié est la perte totale de la sous-station « GANNES » située à Pk = 89.088, alimentant la ligne 1 comme la montre la **Figure 61**.



**Figure 61: Configuration électrique du réseau axe Paris Nord**

La **Figure 62** et la **Figure 63** montrent les résultats de simulation dans le cas normal et dans le cas dégradé.

Dans le cas dégradé (**Figure 63**), la tension caténaire chute fortement en dessous du seuil minimal (ligne rouge) sur la ligne 1. Il faut ajuster le trafic.



**Figure 62: La qualité d'alimentation et la vitesse des trains sur la ligne 1 en mode nominal**



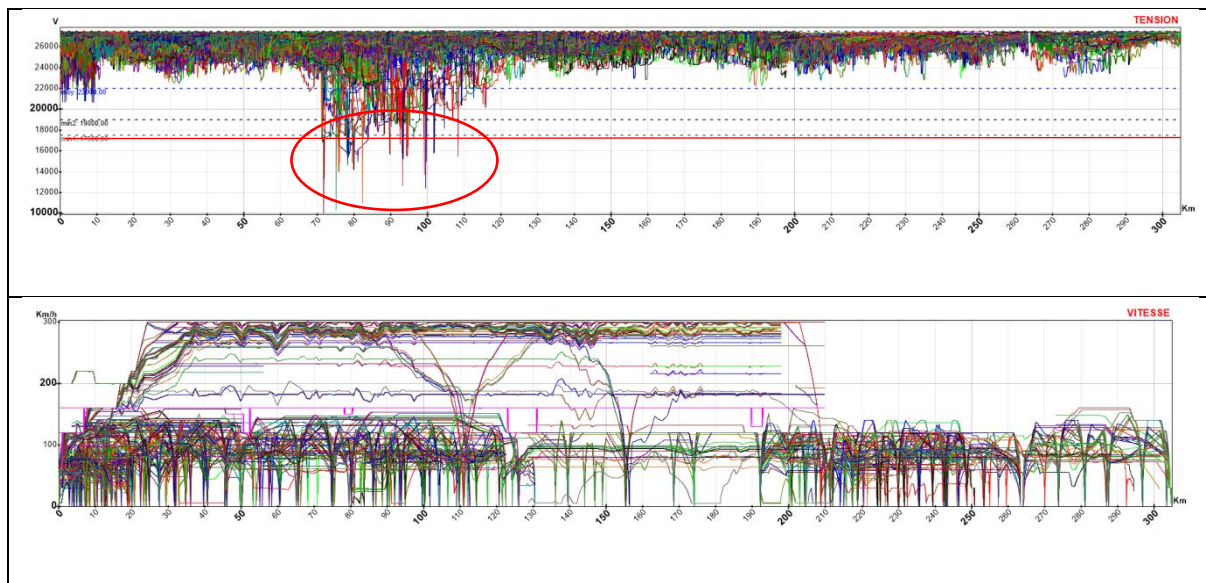


Figure 63: La qualité d'alimentation et la vitesse des trains sur la ligne 1 en mode dégradé

## B- Spécification du problème d'ajustement du trafic

### 1. Définition des actions d'ajustement et des intervalles de variation :

Dans ce cas test, nous avons choisi d'augmenter l'intervalle de départ entre les trains, sans faire de réduction de vitesse (besoins métiers). Nous définissons donc les actions d'ajustement suivantes:

- 1) *Action 1* : Augmentation de l'intervalle de départ entre les trains TER sur la ligne 1.
- 2) *Action 2* : Augmentation de l'intervalle de départ entre les trains FRET sur la ligne 1.
- 3) *Action 3* : Augmentation de l'intervalle de départ entre les trains TGV sur la ligne 1.

### 2. Regroupement automatique et reformulation d'ajustements :

L'outil regroupe les circulations selon leurs missions (Ligne/voie/départ/type), et affecte une action d'ajustement pour chaque groupe comme montre le **Tableau 35**.

Action d'ajustement H	Groupe des circulations	
<b>Action 1</b>	Groupe 1 (TER) L1/V2	23 sous-groupes, chaque sous-groupe ayant un pk début différent
<b>Action 2</b>	Groupe 2 (FRET) L1/V2	6 sous-groupes, chaque sous-groupe ayant un pk début différent
<b>Action 3</b>	Groupe 3 (TGV)	Un seul sous-groupe: L1/V2/pkdebut = 15781
<b>Action 4</b>	Groupe 4 (TER) L1/V1	19 sous-groupes, chaque sous-groupe ayant un pk début différent
<b>Action 5</b>	Groupe 5 (TER) L1/V1	5 sous-groupes, chaque sous-groupe ayant un pk début différent
<b>Action 6</b>	Groupe 6 (TGV)	Sous-groupe1: L1/V1/pkdebut = 0 Sous-groupe2 : L1/V1/pkdebut = 14592

Tableau 35: Liste des actions d'ajustement reformulées effectuées dans le fichier horaire H.DAT (L : Ligne ; V : Voie)

### C- Phase d'analyse de sensibilité

Les résultats d'analyse classifient les six actions d'ajustement entre action « Importante » et action « Non importante » comme les montre le **Tableau 36**.

Action d'ajustement	D-stat	P-value	signification
<b>Action1</b>	0.41	0.0	Importante
<b>Action2</b>	0.07	0.69	Non Importante
<b>Action3</b>	0.08	0.61	Non Importante
<b>Action4</b>	0.41	0.0	Importante
<b>Action5</b>	0.09	0.48	Non importante
<b>Action6</b>	0.05	0.97	Non importante

Tableau 36: D-stat (le degré de l'importance) et P-value (les valeurs de significativité) calculés à partir de 1000 échantillons

A partir des résultats d'analyse de sensibilité, nous constatons que sauf deux actions d'ajustement (*Action1* et *Action4*) sont importantes dans le processus de réorganisation dans

ce test cas. Jouer sur ces actions sensibles apporte un bénéfice pour produire des solutions acceptables qui respectent les contraintes (le seuil de tensions, les échauffements,...). Tandis que jouer sur les autres actions qui sont non sensibles n'apporte pas des améliorations pour le processus. Cependant leur application se répercute négativement sur les voyageurs.

## D- Post-traitement et optimisation

Nous recherchons parmi les solutions acceptables générées par le déroulement de la phase d'analyse de sensibilité des solutions optimales par rapport aux différents objectifs choisis par l'ingénieur. Dans le cas présent, deux objectifs d'optimisation ont été considérés : F1 = « densité du trafic » ; F2 = « temps moyen de parcours des trains ».

Nous nous sommes d'abord intéressés au problème mono-objectif « maximiser F1 », puis au problème bi-objectif « maximiser F1 et minimiser F2 ».

### (1) *Mono-objectif « maximiser F1 »*

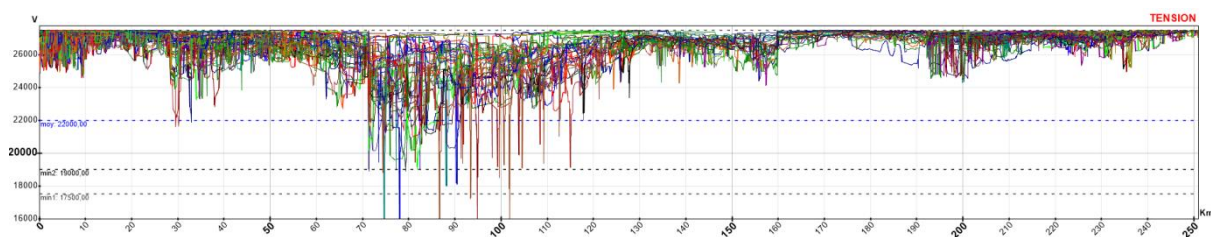
Nous noterons que la densité nominale est égale à 140.6 trains par heure.

Solution la plus dense trouvée parmi les solutions réalisables:

- Densité = 89.6 trains par heure
- Le scénario d'ajustement associé consiste à effectuer les actions d'ajustement présentées dans le **Tableau 37**.

Action d'ajustement	Valeur
Action1	5 min
Action2	21 min
Action3	8 min
Action4	24 min
Action5	17 min
Action6	11 min

**Tableau 37: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense**



**Figure 64: Le critère sur les tensions générées par la solution la plus dense est respecté**

### ❖ Réduction de paramétrage et amélioration de solutions

L'ingénieur peut se contenter des solutions réalisables trouvées dans le post traitement au cours de l'analyse de sensibilité. Cependant, il peut exister de solutions meilleures plus raffinées. Cela passe par une réalisation d'une nouvelle campagne d'échantillonnage avec un nouveau paramétrage.

Pour cela, sur la base de l'analyse de sensibilité, les variables non importantes sont figées à zéro, et la recherche sera effectuée dans un espace de dimension inférieure, ne comportant que les actions importantes (*Action1, Action4*). Une nouvelle campagne de 500 échantillons générés au voisinage de la solution optimale obtenue précédemment a été réalisée.

#### Mono-objectif : nouvelle solution la plus dense (raffinée):

- Densité = 103 trains par heure
- Le scénario d'ajustement associé à cette solution consiste à effectuer les actions d'ajustement présentées dans le **Tableau 38**.

Action d'ajustement	Valeur
Action1	3 min
Action2	0 min
Action3	0 min
Action4	22 min
Action5	0 min
Action6	0 min

Tableau 38: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense

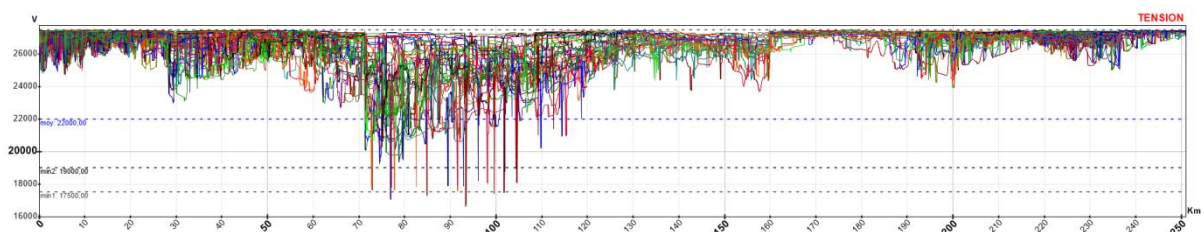
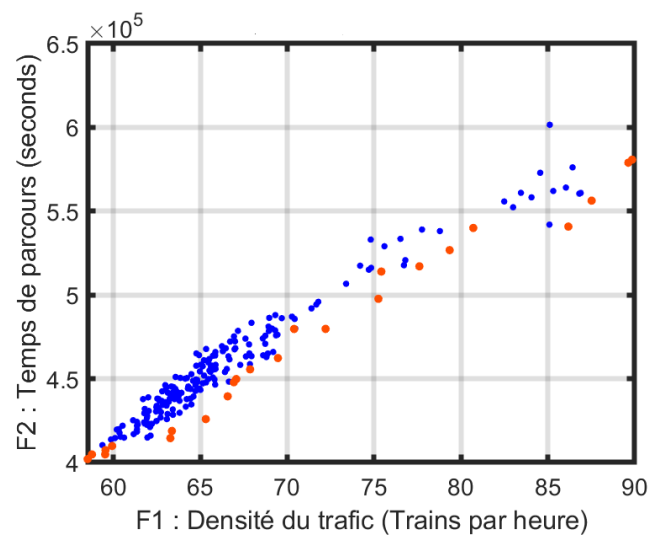


Figure 65: Le critère sur les tensions générées par la solution la plus dense raffinée est respecté

Cette solution est plus raffinée que la solution obtenue précédemment, elle est plus dense. Elle contient moins d'ajustement dans le trafic. Les ajustements qui ne servent à rien et qui se répercutent négativement au plan de réorganisation ont été éliminés.

(2) multi-objectif « maximiser F1 et minimiser F2 ».

Plus le trafic est dense, plus les trains sont ralentis. Les ingénieurs s'intéressent à avoir de compromis entre les deux critères : avoir une solution dense mais qui ralentit pas beaucoup les trains. Ainsi, la **Figure 66** montre l'ensemble des solutions acceptables dans le plan (F1, F2). L'ensemble des points rouges constituent une approximation de front Pareto.



**Figure 66:** Un ensemble de solutions acceptables dans le plan (F1, F2) : les points rouges représentent les solutions non dominées (approximate pareto set); les points bleus représentent les solutions réalisables dominées.

## 5.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons détaillé la démarche proposée pour réorganiser le trafic pendant un incident sur un équipement d'alimentation de lignes électrifiés.

La méthode proposée a été appliquée à quatre cas tests basés sur des données réelles et couvrant différentes topologies. Les résultats obtenus montrent l'efficacité de notre méthodologie pour déterminer une nouvelle grille de trafic dans le cas de la perte totale d'une sous-station d'alimentation électrique.

Suivant les résultats de cas tests, nous n'avons pas obtenu des règles générales pour la réorganisation, chaque cas nécessitant d'agir différemment de par la diversité de ceux-ci. Ce qui justifie le développement d'un outil qui va être applicable pour chaque nouveau problème.

Les quatre cas tests étudiés sont de différents type d'alimentation (AC et DC). Le premier test « axe Paris Le Mans- Paris Tours », est le plus simple parmi ces quatre tests, il s'agit d'un réseau en AC comportant deux lignes et un trafic homogène de TGV. Six actions d'ajustement ont été reformulées pour ce cas-test, à l'aide des résultats d'analyse de sensibilité, nous avons supprimé trois qui sont considérées non importantes. Dans le deuxième test « axe Montparnasse-Versailles », nous avons étudié un trafic hétérogène (TER, FRET, TGV) circulant sur plusieurs lignes (5 lignes) en DC. Le troisième test « axe Corbeil-Malesherbes », qui s'agit d'un trafic de RER alimenté en DC est plus dense que les deux premiers tests. Le dernier test étudié « axe Paris Nord » est le plus complexe, d'où le trafic alimenté en AC est considéré le plus dense en Europe.

Les résultats de ces tests montrent que la phase d'analyse de sensibilité joue un rôle important dans le processus en réduisant la dimension du problème et découvrant l'espace de solutions réalisables. A l'aide de la méthode d'analyse de sensibilité régionale, les ajustements qui ne servent à rien, et qui à l'opposé provoquent de perte parce que leur mise en place coûte cher sans apporter des améliorations pour la réorganisation du trafic peuvent être identifiés et éliminés. Prenons l'exemple d'une action d'ajustement qui consiste à réduire la vitesse de trains de voyageurs sur une portion de ligne, mais l'analyse montre que cette action ne présente aucune amélioration sur le plan de réorganisation. Mettre en place cette action, cela peut être traduit par ralentir les trains et impacter négativement les voyageurs. Un autre exemple sur une action d'ajustement qui consiste à supprimer certaines circulations. Les résultats d'analyse de sensibilité montrent que cette action ne joue aucun rôle dans le processus de réorganisation. Par contre, la mise en place de cette action se répercute négativement sur les voyageurs et l'entreprise. Donc, en conclusion, savoir l'influence des actions d'ajustement est une tâche importante dans le plan de réorganisation.

Dans la phase d'optimisation, l'outil recherche les solutions réalisables, puis il lance une nouvelle campagne de simulations à l'entourage de la solution meilleure trouvée parmi ces solutions réalisables, afin de rechercher une solution raffinée en utilisant que les actions d'ajustement importantes. Pour les quatre cas étudiés, la méthode a trouvé un ensemble de solutions meilleures que le premier ensemble déterminé, vis-à-vis du critère d'optimisation. L'utilisateur peut choisir une de ces solutions, celle qui lui paraît la convenable dans une situation donnée.

Nous avons appliqué la méthode méta-heuristique (PSO) à deux cas tests (Test1 et Test 2). Les résultats de PSO montrent que la méthode converge vite et la solution reste bloquée. A partir d'une méthode d'optimisation, l'influence des ajustements est inconnue, ce qui ne permet pas de supprimer les ajustements qui n'ont aucun profit dans la réorganisation. A l'aide de notre méthodologie, l'intégration de l'analyse de sensibilité guide la recherche de la solution afin de se concentrer sur les dimensions de l'espace de décision les plus prometteuses. Elle permet d'éliminer les ajustements qui n'ont pas impact, ce qui permet ainsi d'améliorer la qualité de la recherche.

# Conclusions et Perspectives

---

## Conclusions

Au cours de cette thèse, nous avons proposé une méthodologie de réorganisation du trafic ferroviaire en cas d'incident sur une infrastructure électrique. Elle permet de répondre à la problématique d'une capacité électrique réduite du réseau empêchant la réalisation d'un trafic nominal, nécessitant donc une réorganisation de celui-ci.

L'objectif du travail est de rechercher un nouveau trafic avec un grand nombre de trains qui circulent en respectant les contraintes opérationnelles. Le système étudié constitue un problème de grandes dimensions. Son étude implique un code de simulation informatique complexe, coûteux en temps de calcul et comportant un grand nombre de variables. Nous avons proposé une procédure de réorganisation adaptée à ces caractéristiques. Elle comprend deux phases principales : une phase d'analyse de sensibilité et une phase d'optimisation.

Le manuscrit de cette thèse était organisé comme suit :

Dans **le chapitre 1** de la thèse nous nous sommes attachés à mieux définir les besoins inhérents à notre projet, et notamment à positionner notre problème au regard de la bibliographie disponible sur le sujet spécifique de la réorganisation du trafic. L'étude bibliographique nous a révélé que plusieurs techniques ont été appliquées pour aborder la gestion des incidents pendant une faible perturbation (impact limité aux grilles horaires) ou pendant une forte perturbation (impact sur les grilles horaires et sur les plannings des matériels et des équipages). Toutefois, les études impliquant des incidents sur les infrastructures ne considèrent pas les causes physiques des réductions de capacité d'une ligne, mais seulement la réduction de la capacité, supposée connue. Dans notre cas, le problème à traiter est celui de la réorganisation du trafic en cas d'incident électrique (panne d'une sous-station) qui conduit à une diminution de la capacité électrique du réseau. La réduction de capacité de transport provoquée par la perte de l'infrastructure électrique n'est pas une donnée du problème, mais sera de fait le résultat de l'optimisation. Les méthodes de la littérature se sont donc révélées inadaptées, nécessitant le développement d'une nouvelle méthode.



Par la suite, dans le **chapitre 2**, nous avons présenté le modèle numérique du réseau électrique ferroviaire. C'est un modèle contraint, de coût calculatoire élevé, avec un grand nombre de variables et des sorties de grande dimension. Sur la base de cette présentation, nous avons conclu que notre problème ne rentre dans aucune de méthodes d'optimisation classiques. A cet égard, nous avons choisi d'utiliser l'analyse de sensibilité.

Dans le **chapitre 3**, nous avons présenté en détails trois méthodes d'analyse de sensibilité et sélectionné celle étant la plus adaptée à notre problème:

1. La méthode de Sobol généralisé, qui est fondée sur la décomposition de la covariance de la sortie sur l'ensemble de domaine (sans prendre en compte les contraintes sur les sorties). Cette méthode permet de calculer tous les indices de sensibilité, y compris les indices d'interactions et les indices d'effet total des variables d'entrées. Cependant, cette méthode nécessite (Nombre des variables + 1) échantillons pour calculer tous les indices (gourmandes en nombre de simulations).
2. La méthode fondée sur la distance entre distribution. Nous avons utilisé la distance-énergie pour calculer la distance entre les distributions des sorties sur l'ensemble de domaine (sans prendre en compte les contraintes sur les sorties). Ces indices peuvent être facilement estimés dans le cas de sorties dynamiques de grande dimension. Par ailleurs, le calcul de l'ensemble des indices de sensibilité ne nécessite qu'un seul échantillon d'entrées-sorties.
3. La méthode d'analyse de sensibilité régionale, qui prend en compte les contraintes sur les sorties et calcule la distance entre les distributions des entrées en utilisant le test Kolmogorov-Smirnov.

Après avoir étudié théoriquement ces trois méthodes, nous avons conclu que la méthode d'analyse de sensibilité régionale est la plus adaptée à notre problématique, étant donné qu'elle apporte une analyse sur l'influence des entrées sur la sortie après avoir considéré les contraintes.

Dans le **chapitre 4**, nous avons comparé ces trois méthodes d'un point de vue pratique afin de confirmer l'intérêt d'utiliser l'analyse de sensibilité régionale. Nous avons appliqué notre méthodologie à un test simple pour clarifier les différentes étapes de la démarche, en utilisant les trois méthodes d'analyse de sensibilité présentées dans le **chapitre 3**. Les résultats confirment l'intérêt de la méthode d'analyse de sensibilité régionale. Elle est la plus adaptée à notre modèle complexe, elle est la moins coûteuse en termes de coût de calcul et de stockage.

Dans le **chapitre 5**, nous avons étudiés quatre tests réels de différents types d'alimentation électrique (AC et DC) et de différentes topologies. Ces tests comportent un trafic dense et multi-ligne. Les résultats de ces tests montrent l'efficacité de notre prototype et l'importance de l'analyse de sensibilité dans l'amélioration de la qualité de solutions. En conclusion générale, les résultats montrent que nous ne pouvons pas tirer des règles et procédures générales, qui pourraient être conformes en cas d'incident sur une infrastructure électrique. Pour chaque cas-test, il faut agir différemment, ce qui justifie la nécessité d'un outil d'analyse et d'aide à la décision, qui peut être applicable pour chaque nouveau problème.

## **Perspectives**

Les travaux présentés dans notre projet ont abouti à un premier prototype de l'outil de réorganisation du trafic en cas d'incident sur un équipement d'alimentation de lignes électrifiées. Les perspectives identifiées concernant quatre objectifs importants dans le cadre de la gestion opérationnelle et de l'optimisation des opérations ferroviaires, au sein de l'ingénierie de SNCF Réseau (DGII-TE-CES5).

Premièrement, les résultats de la méthode que nous avons proposée dans le cadre de cette thèse ont suscité un fort intérêt des équipes de l'ingénierie. Nous envisageons donc de donner une suite immédiate à nos travaux par une phase d'industrialisation du prototype développé. Des fonctionnalités supplémentaires seront ajoutées et l'ergonomie améliorée avant de livrer l'outil aux équipes de CES5 pour leurs études.

Nous envisageons également d'appliquer la méthodologie pour déterminer la capacité résiduelle d'une infrastructure dans son état nominal. En effet, il est possible d'appliquer celle-ci pour déterminer la densité de trafic maximale offerte par une configuration électrique.

Nous proposons également d'étendre l'analyse de sensibilité proposée par notre méthode à d'autres problèmes rencontrés par l'ingénierie. Celle-ci peut en effet être appliquée pour étudier la sensibilité d'une infrastructure aux aléas de trafic. On pourrait alors évaluer la robustesse des infrastructures contre les aléas en déterminant les points faibles de l'infrastructure.

Enfin, il serait possible d'aller plus loin vers la création d'outils permettant de déterminer automatiquement quelle est l'infrastructure la plus robuste (vis-à-vis des aléas de circulation) pour répondre à une grille de circulation donnée (c'est-à-dire inverser le problème par rapport à la thématique de nos travaux).



## Bibliographie

- [1] «Chiffres clés du transport - Edition 2019,» Publié le 24/04/2019. [En ligne]. Available: <https://www.statistiques.developpement-durable.gouv.fr/chiffres-cles-du-transport-edition-2019>. [Accès le 21 7 2019].
- [2] Wikipedia, «Histoire des chemins de fer,» 9 aout 2018. [En ligne]. Available: [https://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire\\_des\\_chemins\\_de\\_fer](https://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_des_chemins_de_fer). [Accès le 21 10 2018].
- [3] S. Bill, «Historique du chemin de fer,» 17 aout 2018. [En ligne]. Available: <http://billsergeconseil.com/historique-4/>. [Accès le 21 10 2018].
- [4] C. Raynard , F. Vielliard et D. Auverlot, «Le train à grande vitesse dans le monde,» chez *Perspectives d'avenir*, Centre d'analyse stratégique, Octobre 2011.
- [5] SNCF, Documentation interne SNCF.
- [6] D. Lancien et M. Fontaine, Calcul de marches de train économisant l'énergie de traction. Le programme MARECO, Revue Générale des chemins de fer, 1981.
- [7] F. Benhizia, Optimisation du lpan de transport par planification intégrée des ressources, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2012.
- [8] C. Morvant, Le processus de répartition des capacités sur le réseau ferré français: quelle place pour le fret ?, Université Parris-Est, 2015.
- [9] P. Hachemane, Evaluation de la capacité de réseaux ferroviaires, Ecole Polytechnique, Fédérale de Lausanne: Thèse 1632, 1997.
- [10] Document d'organistion de la Direction Attribution Capacité, Document interne SNCF Réseau, 2018.
- [11] Direction de la capacité et des sillons, Normes de tracé horaire sur les lignes nationales pour le SA 2019, Document interne SNCF Réseau, 2018.

- [12] J. DAMAS, N. DE SAINT-PULGENT, B. GAZEAU, V. LUCAS, Y. PUTALLAZ, Y. RAMETTE et A. THAUVETTE, A la reconquête de la robustesse des services ferroviaires, Document interne SNCF, 7 juillet 2017.
- [13] Direction Grandes Lignes, Gestion opérationnelle des trafics voyageurs, Document interne SNCF, 1999.
- [14] G. Dessagne, Module de régulation: Spécification fonctionnelle du prototype; spécification des algorithmes d'optimisation, Note interne SNCF, Projet LIPARI, 2003.
- [15] G. Laurent, «Modélisation et optimisation de la gestion opérationnelle du trafic ferroviaire en cas d'aléas,» Université de Bordeaux, 2010.
- [16] L. Abrahamsson, «Railway power supply models and methods for long-term investment analysis,» Sweden, 2008.
- [17] «TRAINOPS OPERATIONS, TRACTION POWER, TRAIN CONTROL & TRAFFIC MODELING,» [En ligne]. Available: <https://www.ltk.com/capabilities/train-ops>. [Accès le 08 02 2019].
- [18] «SOFTWARE FOR THE SIMULATION OF ELECTRIC VEHICLES AND POWER SUPPLY NETWORKS,» [En ligne]. Available: <http://www.enotrac.com/en/software-tools/fabel.php>. [Accès le 08 02 2019].
- [19] «Siemens Rail Technology - Integrated Mobility Solutions,» [En ligne]. Available: <https://www.siemens.com/us/en/home/company/topic-areas/intelligent-transportation.html>. [Accès le 13 02 2019].
- [20] «Balfour Beatty Rail,» [En ligne]. Available: <http://www.bbrail.de/de/home.html>. [Accès le 12 02 2019].
- [21] «OpenPowerNet - Simulation software for railway power supply systems,» [En ligne]. Available: <http://www.openpowernet.de/>. [Accès le 14 02 2019].

- [22] «OpenTrack Railway Technology,» [En ligne]. Available: [http://www.opentrack.ch/opentrack/opentrack\\_e/opentrack\\_e.html](http://www.opentrack.ch/opentrack/opentrack_e/opentrack_e.html). [Accès le 14 02 2019].
- [23] «Systra Canada,» [En ligne]. Available: <https://www.systracanada.com/en/services-expertise/tools/article/railsim-x-r>. [Accès le 15 02 2019].
- [24] «Produkte für 3ph. Netze,» [En ligne]. Available: <http://proleitec.ch/produkte-f%C3%BCr-3ph.-netze>. [Accès le 10 06 2019].
- [25] B. Desjouis, G. Remy, F. Ossart, C. Marchand, J. Bigeon et E. Sourdille, «A new generic problem formulation dedicated to electrified railway systems,» chez *in International Conference on Electrical Systems for Aircraft, Railway, Ship Propulsion and Road Vehicles*, Germany, 2015.
- [26] B. Desjouis, «Réalisation d'un simulateur évolutif, système multi-agents et approche dirigée par les modèles: application à la simulation électrique ferroviaire,» Grenoble Alpes, 2016.
- [27] J. Jespersen-Groth, D. Potthoff, J. Clausen, D. Huisman, L. Kroon, G. Maroti et M. N. Nielsen, *Disruption management in Passenger railway transportation*, Springer Link, 2009.
- [28] V. Cacchiani, D. Huisman, M. Kidd, L. Kroon, P. Toth, L. Veelenturf et J. Wagenaar, «An overview of recovery models and algorithms for real-time railway rescheduling,» *TRansportation Research Part B*, pp. 15-37, 2014.
- [29] S. Binder, Y. Maknoon et M. Bierlaire, «The multi-objective railway timetable rescheduling problem,» *Transportation research part C*, pp. 78-94, 2017.
- [30] «CPLEX Optimizer | IBM,» [En ligne]. Available: <https://www.ibm.com/analytics/cplex-optimizer>. [Accès le 11 06 2019].

- [31] A. D'Adriano, M. Pranzo et I. A. Hansen, «Conflict Resolution and train speed coordination for solving real-time timetable perturbations,» *IEEE Transactions on intelligent transportation systems*, vol. 8, n° % 12, pp. 208-222, June 2007.
- [32] A. D'Adriano, D. Pacciarelli et M. Pranzo, «Assessment of flexible timetables in real-time traffic management of a railway bottleneck,» *Transportation research part C*, vol. 16, n° % 12, pp. 232-245, 2008.
- [33] A. D'Adriano et M. Pranzo, «AN Advanced Real-time train dispatching system for minimizing the propagation of delays in a Dispatching Area Under Severe Disturbances,» *Networks and spatial economics*, vol. 9, n° % 11, pp. 63-84, 2009.
- [34] F. Corman, A. D'Ariano, M. Pranzo et I. Hansen, «Effectiveness of dynamic reordering and rerouting of trains in a complicated and densely occupied station area,» *Transportation Planning and Technology*, vol. 4, pp. 341-362, 2011.
- [35] R. Acuna-Agost, P. Michelon, D. Feillet et S. Gueye, «A MIP-based local search method for the railway rescheduling problem,» *Networks*, vol. 1, pp. 69-86, 2011.
- [36] W. Rei, M. Gendreau et P. Soriano, «Local branching cuts for the 0-1 Integer L-Shaped Algorithm,» Department of Computer Science and Operations Research of the Université de Montréal, 2007.
- [37] Z. He, «Research on improved greedy algorithm for train rescheduling,» chez *2011 seventh international conference on computational intelligence and security*, Hainan, China, 2011.
- [38] M. Schachtebeck et A. Schobel, «To wait or Not wait - And who goes first ? delay management with priority decisions,» *Transportation science*, vol. 44, n° % 13, pp. 307-321, August 2010.
- [39] Y. Semet et M. Schoenauer, «An efficient Memetic, Permutation-Based Evolutionary Algorithm for Real-World Train Timetabling,» *2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, vol. 3, pp. 2752-2759, 2005.

- [40] J. Krasemann, «Greedy algorithm for railway traffic re-scheduling during disturbances: A swedish case,» *IET intelligent transport systems*, vol. 4, n° 14, pp. 375-386, 2010.
- [41] J. T. Krasemann, «Design of an effective algorithm for fast response to the re-scheduling of railway traffic during disturbances,» *Transportation Research Part C*, vol. 20, pp. 62-78, 2012.
- [42] L. Gély, G. Dessagne et C. Lérin, «Modelling Train Re-scheduling with optimization and operational research techniques: Results and Applications at SNCF,» chez *In: Proceedings of WCRR*, Montréal, 2006.
- [43] A. D'Adriano, D. Pacciarelli et M. Pranzo, «A branch and bound algorithm for scheduling trains in a railway network,» *European journal of operational research*, vol. 183, pp. 643-657, 2007.
- [44] S. Dunder et I. Sahin, «Train re-scheduling with genetic algorithms and artificial neural networks for single-track railways,» *Transportation Research Part C*, vol. 27, pp. 1-15, 2013.
- [45] K. Banafsheh, J. A. Bennell et C. N. Potts, «Train Scheduling and Rescheduling in the UK with a Modified Shifting Bottleneck Procedure,» *12th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportations Modelling, Optimization, and systems*, pp. 120-131, 2012.
- [46] B. Kersbergen, T. v. d. Boom et B. De Schutter, «Distributed model predictive control for rescheduling of railway traffic,» *2014 IEEE 17th International conference on intelligent transportation systems (ITSC)*, 2014.
- [47] M. Dotoli, N. Epicoco, M. Falagario, B. Turchiano, G. Cavone et A. Convertini, «A decision support system for real-time rescheduling of railways,» *2014 European Control Conference (ECC)*, pp. 696-701, 2014.
- [48] P. Wang, L. Ma, R. Goverde et Q. Wang, «Rescheduling Trains using petri nets and heuristic search,» *IEEE Transactions on intelligent transportation systems*, vol. 17, n° 13, 2016.



- [49] T. Dollevoet, D. Huisman, M. Schmidt et A. Schobel, «Delay Management with rerouting of passengers,» *Transportation science*, vol. 46, n° 11, pp. 74-89, February 2012.
- [50] A. Toletti, V. De Martinis et U. A. Weidmann, «Enhancing energy efficiency in railway operation through RCG-based rescheduling,» *IEEE industrial and commercial power systems europe (IEEEIC / I & CPS Europe)*, 2017.
- [51] K. Kumazawa, K. Hara et T. Koseki, «A novel train rescheduling algorithm for correcting disrupted train operations in a dense urban environment,» *WIT Press*, vol. 103, pp. 565-574, 2010.
- [52] A. Scobel, «Capacity constraints in delay management,» *Public Transport*, vol. 1, pp. 135-154, 2009.
- [53] S. Kanai, K. Shiina, S. Harada et N. Tomii, «An optimal delay management algorithm from passengers' viewpoints considering the whole railway network,» *Journal of Rail Transport Planning and Management*, vol. 1, pp. 25-37, 2011.
- [54] J. Li, W. Wei et Y. He, «Optimization of online timetable re-scheduling in high-speed train services based on PSO,» chez *Proceedings 2011 International Conference on Transportation, Mechanical, and Electrical Engineering (TMEE)*, Changchun, China, 2011.
- [55] K. Sato, K. Tamura et N. Tomii, «A MIP-based timetable rescheduling formulation and algorithm minimizing further inconvenience to passengers,» *Journal of Rail Transport Planning & Management*, vol. 3, pp. 38-53, 2013.
- [56] F. Donzella, M. del Cacho Estil-les et C. Bersani, «Train scheduling and rescheduling model based on customer satisfaction. Application to Genoa railway network,» chez *13th annual conference on system of systems engineering (SOSE)*, Paris, 2018.
- [57] Y.-H. Min, M.-J. Park, S.-P. Hong et S.-H. Hong, «An appraisal of a column-generation-based algorithm for centralized train-conflict resolution on a metropolitan railway network,» *Transportation Research Part B*, vol. 45, pp. 409-429, 2011.

- [58] R. Acuna-Agost, P. Michelon, D. Feillet et S. Gueye, «SAPI: Statistical Analysis of propagation of incidents. A new approach for resceduling trains after disruptions,» *European journal of operational research*, vol. 215, pp. 227-243, 2011.
- [59] F. Corman, A. D'Adriano, D. Pacciarelli et M. Pranzo, «Evaluation of green wave policy in real-time railway traffic management,» *Transportation Research Part C*, vol. 17, pp. 607-616, 2009.
- [60] N. Berends et N. Ouburg, Beschrijving ARI-functionaliteit, Utrecht, the Netherlands: ProRail Internal Specification, 2005.
- [61] F. Corman, A. D'Ariano, I. A. Hansen et D. Pacciarelli, «Optimal multi-class rescheduling of railway traffic,» *Journal of Rail Transport PLanning and Management*, vol. 1, pp. 14-24, 2011.
- [62] E. Joelianto, A. Setiawan et D. Chaerani, «Hardware in the loop simulation of railway traffic re-scheduling by means of MILP algorithm,» chez *2011 2nd International Conference on Instrumentation Control and Automation*, Bandung, Indonesia, 2011.
- [63] Y. Qin, L. Wang, H. Lian, X. Meng, X. Li, F. Shi et L. Jia, «Fuzzy optimization model based tolerance approach to timetable rescheduling for high speed railway in china,» chez *2011 IEEE international conference on fuzzy systems*, Taipei, Taiwan, 2011.
- [64] A. D'Ariano, D. Pacciarelli, M. Sama et F. Corman, «Microscopic delay management: Minimizing train delays and passenger travel times during real-time railway traffic control,» chez *2017 5th IEEE International Conference on Models and technologies for intelligent transportation systems (MT-ITS)*, Naples, Italy, 2017.
- [65] G. Cavone, M. Dotoli, N. Epicoco et C. Seatzu, «A decision making procedure for robust train rescheduling based on mixed integer linear programmeing and data envelopment analysis,» *Applied Mathematical Modelling*, vol. 52, pp. 255-273, 2017.
- [66] A. Toletti, V. De Martins et U. Weidmann, «Energy savings in mixed rail traffic rescheduling: an RCG approach,» chez *2016 IEEE 19th International Conference on Intelligent Transportation Systems*, Rio de Janeiro, Brazil, 2016.

- [67] G. Caimi, M. Fuchsberger, M. Laumanns et M. Luthi, «A model predictive control approach for discrete-time rescheduling in complex central railway station areas,» *Computers and Operations Research*, vol. 39, pp. 2578-2593, 2012.
- [68] F. Corman, A. D'Ariano, D. Pacciarelli et M. Pranzo, «Bi-objective conflict detection and resolution in railway traffic management,» *Transportation Research Part C*, vol. 20, pp. 79-94, 2012.
- [69] L. Chen, C. Roberts, F. Schmid et E. Stewart, «Modeling and solving real-time train rescheduling problems in railway bottleneck sections,» *IEEE Transactions on intelligent transportation systems*, vol. 16, n° 14, August 2015.
- [70] J. Tornquist et J. A. Persson, «Train Traffic Deviation Handling Using Tabu Search and Simulated Annealing,» chez *Proceedings of the 38th Hawaii International Conference on system Sciences*, 2005.
- [71] J. Eaton et S. Yang, «Dynamic railway junction rescheduling using population based ant colony optimisation,» *2014 14th UK Workshop on Computational Intelligence (UKCI)*, pp. 1-8, 2014.
- [72] J. Eaton , S. Yang et M. Gongora, «Ant colony optimization for simulated dynamic multi-objective railway junction rescheduling,» *IEEE Transactions on Intelligent Transportation systems*, vol. 99, pp. 1-13, 2017.
- [73] J. Pochet, S. Baro et G. Sandou, «Supervision and rescheduling of a mixed CBTC traffic on a suburban railway line,» *2016 IEEE International conference on Intelligent rail transportation (ICIRT)*, pp. 32-38, 2016.
- [74] I. Louwse et D. Huisman, «Adjusting a railway timetable in case of partial or complete blockades,» *European journal of operational research*, vol. 235, n° 13, pp. 583-593, 2014.
- [75] P. Brucker, S. Heitmann et S. Knust, «Scheduling railway traffic at a construction site,» *OR Spectrum*, pp. 19-30, 2002.

- [76] F. Corman, A. D'Adriano, D. Pacciarelli et M. Pranzo, «A tabu search algorithm for rerouting trains during rail operations,» *Transportation research part B*, vol. 44, n° %11, pp. 175-192, 2010.
- [77] S. Narayanaswami et N. Rangaraj, «Modelling disruptions and resolving conflicts optimally in a railway schedule,» *Computers & industrial engineering*, vol. 64, n° %11, pp. 469-481, 2013.
- [78] F. Corman, A. D'Ariano, I. A. Hansen, D. Pacciarelli et M. Pranzo, «Dispatching trains during seriously disrupted traffic situations,» chez *International conference on networking, sensing and control*, Delft, the Netherlands, 2011.
- [79] S. Zhan, L. G. Kroon, L. Veelenturf et J. C. Wagenaar, «Real-time high-speed train rescheduling in case of a complete blockage,» *Transportation research Part B*, vol. 78, pp. 182-201, 2015.
- [80] N. Ghaemi, R. M. Goverde et O. Cats, «Railway disruption timetable: Short-turnings in case of complete blockage,» chez *IEEE international conference on intelligent rail transportation (ICIRT)*, 2016.
- [81] X. Li, B. Shou et D. Ralescu, «Train rescheduling with stochastic recovery time: A new Track-Backup approach,» *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics: systems*, vol. 44, n° %19, pp. 1216-1233, 2014.
- [82] J. Tornquist et J. A. Persson, «N-tracked railway traffic re-scheduling during disturbances,» *Transportation research part B*, vol. 41, n° %13, pp. 342-362, 2007.
- [83] F. Corman, A. D'Ariano et I. A. Hansen, «Disruption handling in large railway networks,» *WIT Transactions on the built environment*, vol. 114, pp. 1743-3509, 2010.
- [84] S. Binder, Y. Maknoon et M. Bierlaire, «The multi-objective railway timetable rescheduling problem,» *Transportation research part C*, vol. 78, pp. 78-94, 2017.

- [85] s. Binder, J. Chen et M. Bierlaire, «Generation and evaluation of passenger-oriented railway disposition timetables,» chez *14th Swiss Transport research conference*, Monte verita / Ascona, 2014.
- [86] S. Binder, Y. Maknoon et M. Bierlaire, «Efficient exploration of the multiple objectives of the railway timetable rescheduling problem,» chez *17th Swiss transport research conference*, Monte Vertia / Ascona, 2017.
- [87] J. Goupy, «Les plans d'expériences,» *Revue Modulad*, n° %134, 2006.
- [88] J. Jacques, «Pratique de l'analyse de sensibilité: comment évaluer l'impact des entrées aléatoires sur la sortie d'un modèle mathématiques,» *PUB.IRMA*, vol. 71, n° %13, 2011.
- [89] P. Loubiere , «Amélioration des métaheuristiques d'optimisation à l'aide de l'analyse de sensibilité,» Université Paris-Est, 2016.
- [90] S. L. Avila, A. C. Lisboa, L. Krahenbuhl, W. P. Carpes, J. A. Vasconcelos, R. R. Saldanha et R. H. Takahashi, «Sensitivity analysis applied to decision making in multiobjective evolutionary optimization,» *IEEE Transactions on magnetics*, vol. 42, n° %14, 2006.
- [91] D. Ojeda, «Analyse et estimation des modèles pour le traitement de l'insuffisance cardiaque,» *Laboratoire traitement du signal et de l'image - LTSI INSERM U-1099*, 4 Novembre 2014.
- [92] A. Spagnol, R. Le riche et S. Da Veiga, «Global sensitivity analysis for optimization with variable selection,» *SIAM/ASA Journal on uncertainty quantification*, 2018.
- [93] T. Rougier, «Calibration de mon modèle à partir de données observées avec probablement une méthode ABC d'optimisation,» chez *Séminaire Mexico, La Rochelle*, 4-6 novembre 2014.

- [94] O. Garcia-Cabrejo et A. Valocchi, «Global Sensitivity analysis for multivariate output using polynomial chaos expansion,» *Reliability engineering and system safety*, vol. 126, pp. 25-36, 2014.
- [95] B. Iooss et A. Saltelli, «Introduction: Sensitivity Analysis,» chez *Handbook of uncertainty quantification*, 2017, pp. 1103-1122.
- [96] N. Saint-Geours, C. Lavergne, J.-S. Bailly et F. Grelot, «Analyse de sensibilité globale d'un modèle spatialisé pour l'évaluation économique du risque d'inondation,» *Journal de la société française de statistique*, vol. 152, n° 11, 2011.
- [97] A. A. Mahamat, «Analyse de sensibilité dans un contexte de prévision du prix des métaux,» Ecole polytechnique de montréal, 2011.
- [98] L. Viry, *Analyse de sensibilité globale. Application à un modèle d'écosystème marin*, 23 juin 2016.
- [99] M. Pettelet, «Analyse de sensibilité globale de modèles thermomécaniques de simulation numérique de soudage,» Bourgogne, 2007.
- [100] B. Iooss, *Analyses d'incertitudes et de sensibilité de modèles complexes- Applications dans des problèmes d'ingénierie*, CEA Cadarache: Direction de l'ingénierie nucléaire, 2009.
- [101] L. Blaise, M. Olivier, P. Jean-Philippe et L. Franck, «Analyse de sensibilité appliquée à une installation de rafraîchissement solaire,» chez *XXXeme Rencontres AUGC-IBPSA*, Chambéry, Savoie, 6-8 juin 2012.
- [102] C. Bielza, S. Rios-Insua, M. Gomez et J. A. Fernandez del Pozo, «Sensitivity analysis in Ictneo,» chez *International symposium on sensitivity analysis of model output*, Madrid (Espagne), 2001.
- [103] J. P. Kleijnen, «Design and analysis of simulation experiments,» *Statistics and Simulation*, vol. 231, pp. 3-22, 2015.

- [104] B. Iooss, «Revue sur l'analyse de sensibilité globale de modèles numériques,» *Journal de la société française de statistique*, vol. 152, n° 11, 2011.
- [105] J. C. Helton, J. D. Johnson, C. J. Sallaberry et C. B. Storlie, «Survey of sampling-based methods for uncertainty and sensitivity analysis,» *Reliability engineering and system safety*, vol. 91, pp. 1175-1209, 2006.
- [106] T. Turanyi, «Sensitivity analysis of complex kinetic systems. Tools and applications,» *Journal of mathematical chemistry*, n° 15, pp. 203-248, 1990.
- [107] C. Spitz, L. Mora, A. Jay et E. Wurtz, «Analyse de sensibilité et d'incertitude du comportement thermique d'un logement».
- [108] M. A. Nearing, L. Deer-Ascough et J. M. Laflen, «Sensitivity analysis of the Wepp hillslope profile erosion model,» *American society of agricultural engineers*, vol. 33, n° 13, 1990.
- [109] M. M. Hantush et L. Kalin, «Uncertainty and sensitivity analysis of runoff and sediment yield in a small agricultural watershed with KINEROS2,» *Hydrological sciences-Journal des sciences hydrologiques*, vol. 50, n° 16, 2005.
- [110] H. Wei, M. A. Nearing et J. J. Stone, «A comprehensive sensitivity analysis framework for model evaluation and improvement using a case study of the rangeland hydrology and erosion model,» *American society of agricultural and biological engineers ISSN 0001-2351*, vol. 50, n° 13, pp. 945-953, 2007.
- [111] B. Iooss et P. Lemaitre, «A review on global sensitivity analysis methods,» *Uncertainty management in simulation-optimization of complex systems: algorithms and applications*, Springer, 2015.
- [112] B. Iooss, «Revue sur l'analyse de sensibilité globale de modèles numériques,» *Journal de la société française de statistique*, vol. 152, n° 11, 2011.
- [113] J. Morio, «Global and local sensitivity analysis methods for a physical system,» *European journal of physics*, vol. 32, n° 16, October 2011.

- [114] M. Petelet, «Analyse de sensibilité globale de modèles thermomécaniques de simulation numérique du soudage,» Université de Bourgogne, 2007.
- [115] A. Saltelli, M. Ratto, S. Tarantola et F. Campolongo, «Sensitivity analysis practices: Strategies for model-based inference,» *Reliability Engineering and System Safety*, n° %191, pp. 1109-1125, 2006.
- [116] M. Ratto, F. Campolongo, D. Gatelli, M. Saisana, A. Saltelli, T. Andres, J. Cariboni et S. Tarantola, Global sensitivity analysis. The primer, Wiley Online Library, 2007, p. 312.
- [117] H. Yang, «Quasi Random sampling for operations management,» *Seoul journal of business*, vol. 12, n° %11, June 2006.
- [118] J. Dudovskiy, «Stratified Sampling,» [En ligne]. Available: <https://research-methodology.net/sampling-in-primary-data-collection/stratified-sampling/>. [Accès le 07 05 2019].
- [119] M. D. Mckay, R. J. Beckman et W. J. Conover, «Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code,» *Technometrics*, vol. 21, n° %12, pp. 239-245, 1979.
- [120] D. L. Ishaan, S. Deian et H. G. Jared, «Low discrepancy sequences for Monte Carlo simulations on reconfigurable platforms,» *The cooper union for the advancement of Science and Art*, New York.
- [121] I. A. Macdonald, «Comparison of sampling techniques on the performance of monte-carlo based sensitivity analysis,» *Eleventh International IBPSA Conference*, 27-30 July 2009.
- [122] S. Burhenne, D. Jacob et G. Henze, «Sampling based on sobol' sequences for monte carlo techniques applied to building simulations,» chez *12th conference of international building performance simulation association*, Sydney, 2011.
- [123] J. Stephen et K. Y. Frances, Notes on generating Sobol' sequences, August 2008.



- [124] P. Bratley et B. L. Fox, «Algorithm 659: Implementing Sobol's quasirandom sequence generator,» *ACM Transactions on mathematical software (TOMS)*, vol. 14, n° 11, pp. 88-100, 1988.
- [125] U. Reuter et M. Liebscher, *Global sensitivity analysis in view of nonlinear structural behavior*, Bamberg, 2008.
- [126] I. M. SOBOL, «Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models,» *M. V. Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow*, 1993.
- [127] T. Homma et A. Saltelli, «Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models,» *Reliability Engineering and system Safety*, vol. 52, pp. 1-17, 1996.
- [128] A. Saltelli, «Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices,» *Computer Physics Communications*, vol. 145, n° 12, pp. 280-297, 2002.
- [129] H. Monod, «Analyse de sensibilité: mesure de l'importance des facteurs par décomposition de la variance,» *INRA - unité MIA de Jouy-en-Josas*, 9 Juin 2010.
- [130] L. Gilquin, *Echantillonnages Monte Carlo et quasi-Monte Carlo pour l'estimation des indices de Sobol. Application à un modèle transport-urbanisme*, Ecole des Mines de Saint Etienne, 2016.
- [131] H. Wan, J. Xia, L. Zhang, D. She, Y. Xiao et L. Zou, «Sensitivity and Interaction Analysis based on Sobol' Method and its application in a distributed Flood Forecasting Model,» *Water (Switzerland)*, pp. 2924-2951, 2015.
- [132] S. Dobre, T. Bastogne, M. Barberi-heyob, F. Guillemin et A. Richard, «Conception assistée par une analyse de sensibilité globale d'une plate-forme dédiée à la recherche en thérapie photodynamique,» *Journal de la société Française de Statistique*, vol. 152, n° 11, 2011.
- [133] A. Janon, *Analyse de sensibilité et réduction de dimension. Application à l'océanographie*, Université de Grenoble, 2012.

- [134] M. Matieyendou, Analyse de sensibilité pour les modèles dynamiques utilisés en agronomie et environnement, AgroParisTech: Mathématiques, 2009.
- [135] I. M. Sobol et S. S. Kucherenko, «Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models. Review,» *Wilmott*, January 2005.
- [136] F. N. Essono, «Approche géomatique de la variabilité spatio-temporelle de la contamination microbienne des eaux récréatives,» Université de Sherbrooke, 2017.
- [137] A. Saltelli, P. Annoni, I. Azzini, F. Campolongo, M. Ratto et S. Tarantola, «Variance based sensitivity analysis of model output. Design and estimator for the total sensitivity index,» *Computer physics communications*, vol. 181, pp. 259-270, 2010.
- [138] W. Hoeffding, «A class of statistics with asymptotically normal distributions,» *Annals of Mathematical statistics*, pp. 293-325.
- [139] L. Gilquin, «Echantillonnages Monte Carlo et quasi-Monte Carlo pour l'estimation des indices de Sobol': application à un modèle transport-urbanisme,» Analyse numérique, Université Grenoble Alpes, 2016.
- [140] I. M. Sobol, «Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates,» *Mathematics and Computers in simulation* 55, pp. 271-280, 2001.
- [141] J. Cariboni, D. Gatelli, R. Liska et A. Saltelli, «The role of sensitivity analysis in ecological modelling,» *Ecological Modelling*, vol. 203, pp. 167-182, 2007.
- [142] A. B. Owen, «Variance components and generalized Sobol' indices,» Stanford University, DOI:10.1137/120876782, April 2012.
- [143] M. Lamboni, D. Makowski, S. Lehuger, B. Gabrielle et H. Monod, «Multivariate global sensitivity analysis for dynamic crop models,» *Field Crops Research*, vol. 113, n° 13, pp. 312-320, 2009.

- [144] M. Lamboni, H. Monod et D. Makowski, «Multivariate sensitivity analysis to measure global contribution of input factors in dynamic models,» *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 96, n° 14, pp. 450-459, avril 2011.
- [145] F. Gamboa, A. Janon, T. Klein et A. Lagnoux, «Sensitivity indices for multivariate outputs Indices de sensibilité pour sorties multivariées,» *Comptes rendus mathématique*, vol. 351, pp. 307-310, 2013.
- [146] F. Gamboa, A. Janon, T. Klein et A. Lagnoux, «Sensitivity analysis for multidimensional and functional outputs,» *Electron, J.statist*, vol. 8, n° 11, pp. 575-603, 2014.
- [147] L. Gilquin, T. Capelle, E. Arnaud et C. Prieur, «Analyse de sensibilité et optimisation pour le calage d'un modèle transport-urbanisme».
- [148] I. Dimov et R. Georgieva, «Monte Carlo algorithms for evaluating Sobol sensitivity indices,» *Mathematics and computers in simulation*, vol. 81, pp. 506-514, 2010.
- [149] J. C. Helton et F. J. Davis, «Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems,» *Reliability Engineering and System Safety*, n° 181, pp. 23-69, 2003.
- [150] C. Lijie, R. Bo et L. Ze, «Importance measures of basic variable under multiple failure modes and their solutions,» chez *IEEE Chinese guidance, navigation and control conference*, Nanjing, China, 2016.
- [151] G. Greegar et C. S. Manohar, «Global response sensitivity analysis using probability distance measures and generalization of Sobol's analysis,» *Probabilistic engineering mechanics*, vol. 41, pp. 21-33, 2015.
- [152] F. Pianosi et T. Wagener, «A simple and efficient method for global sensitivity analysis based on cumulative distribution functions,» *Environmental modelling & Software*, pp. 1-11, 2015.
- [153] G. Baudart, P. Chatelain et T. Rieutord, Test de Kolmogorov-Smirnov, 28 avril 2010.

- [154] M. Rizzo et G. Székely, «Energy distance,» *Wiley Interdisciplinary reviews: Computational statistics*, vol. 8, pp. 27-38, 2016.
- [155] G. J. Székely et M. L. Rizzo, «Energy statistics: A class of statistics based on distances,» *Journal of statistical planning and inference*, vol. 143, pp. 1249-1272, 2013.
- [156] G. J. Székely et M. L. Rizzo, «A new test for multivariate normality,» *Journal of multivariate normality*, vol. 93, n° %11, pp. 58-80, 2005.
- [157] S. Xiao, L. Zhenzhou et P. Wang, «Multivariate globale sensitivity analysis for dynamic models based on energy distance,» *Structural and multidisciplinary optimization*, July 2017.
- [158] L. C. Mahadevan, «An efficient modularized sample-based method to estimate the first-order Sobol' index,» *Reliab Eng Syst Saf*, vol. 153, n° %1doi: 10.1016/j.ress.2016.04.012, pp. 110-121, 2016.
- [159] Z. Wu, X. Yang et X. Sun, «Application of monte carlo filtering method in regional sensitivity analysis of AASHTOware Pavement ME design,» *Journal of traffic and transportation engineering*, vol. 4, n° %12, pp. 185-197, 2017.
- [160] T. Wagener, D. P. Boyle, M. J. Lees, H. S. Wheater et H. V. Gupta, «A framework for development and application of hydrological models,» *Hydrology and Earth System Sciences Discussions, European Geosciences Union*, pp. 13-26, 2001.
- [161] A. Sieber et S. Uhlenbrook, «Sensitivity analyses of a distributed catchment model to verify the model structure,» *Journal of Hydrology*, pp. 216-235, 2005.
- [162] G. M. Hornberger et R. Spear, «An Approach to the Preliminary Analysis of Environmental Systems,» *Journal of Environmental Management*, vol. 12, pp. 7-18, 1981.
- [163] P. FERIGNAC, «Test de Kolmogorov-Smirnov sur la validité d'une fonction de distribution,» *Revue de statistique appliquée*, n° %14, pp. 13-32, 1962.

- [164] M. Ratto, A. Pagano et P. Young, «Factor Mapping and metamodelling,» *JRC scientific and technical reports*, 2007.
- [165] J. Baudot, «test de Kolmogorov-Smirnov - Statistiques et autres techniques pour la ...,» [En ligne]. Available: <http://www.jybaudot.fr/Inferentielle/kolmogorov.html>.
- [166] N. Smirnov et N. Smirnov, «On the estimation of the discrepancy between empirical curves of distribution for two independent samples,» *Bul math de l'univ de Moscou*, 1939.
- [167] K. Pearson, «Probable in a correlated system of variables,» Universié collège, London, 1900.
- [168] J. D. Gibbons et J. W. Pratt, «P-values: Interpretation and methodology,» *The American statistician*, vol. 29, n° 11, pp. 20-25, 1975.
- [169] R. C. Spear et G. M. Hornberger, «Eutrophication in peel inlet\_II. Identification of critical uncertainties via generalized sensitivity analysis,» *Water research*, vol. 14, pp. 43-49, 1980.
- [170] A. Saltelli, S. Tarantola, F. Campolongo et M. Ratto, «sensitivity analysis in practice: a guide to assessing scientific models,» *Wiley*, 2004.
- [171] C. Audet, J. Bigeon , D. Cartier, S. Le Digabel et L. Salomon, Performance indicators in multiobjective optimization, Montréal, Canada: Technical Report, les cahiers du Gerard G-2018-90, October 2018.
- [172] I. SAAD et M. Benrejeb, «Optimisation multicritère par Pareto-optimalité de problèmes d'ordonnancement en tenant compte du cout de la production,» 2019.
- [173] S. Kucherenko et S. Song, «Different numerical estimators for main effect global sensitivity indices,» London.

- [174] R. Cukier, C. Fortuin, K. Shuler, A. Petschek et J. Schaibly, «Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients,» *Journal of chemical physics*, vol. 59, pp. 3873-3878, 1973.
- [175] R. I. Cukier, H. B. Levine et K. E. Shuler, «Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems,» *Journal of computational physics*, vol. 26, n° 11, pp. 1-42, 1978.
- [176] J. Jacques, «Contributions à l'analyse de sensibilité et à l'analyse discriminante généralisée,» *HAL Id: tel-00011169*, 2 Janvier 2006.
- [177] A. Saltelli, S. Tarantola et K. Chan, «A quantitative model-independent method for global sensitivity analysis of model output,» *American Statistical Association and the American society for quality Technometrics*, vol. 41, n° 11, 1999.
- [178] J.-Y. Tissot et C. Prieur, «Variance-based sensitivity analysis using harmonic analysis,» <hal-00680725>, 20 Mars 2012.
- [179] T. A. Mara, «Extension of the RBD-FAST method to the computation of global sensitivity indices,» *Reliability engineering and system safety*, vol. 94, pp. 1274-1281, 2009.
- [180] C. H. Yu, «The application of Parseval's theorem to integral problems,» *Applied mathematics and physics*, vol. 2, pp. 4-9, 2014.
- [181] A. Saltelli et R. Bolado, «An alternative way to compute fourier amplitude sensitivity test (fast),» *Computational Statistics Data Analysis*, n° 126, pp. 445-460, 1998.
- [182] S. Tarantola, D. Gatelli et T. A. Mara, «Random balance designs for the estimation of first-order sensitivity indices,» *Reliability Engineering and System Safety*, pp. 717-727, 2006.
- [183] T. A. Mara., «Extension of the rbd-fast method to the computation of global sensitivity indices,» *Reliability Engineering and system safety*, pp. 1274-1281, 2009.

- [184] S. Nanty, «Quantification des incertitudes et analyse de sensibilité pour codes de calcul à entrées fonctionnelles et dépendantes,» *Statistiques*, 17 Novembre 2015.
- [185] M. Grandjacques, Analyse de sensibilité pour des modèles stochastiques à entrées dépendantes: application en énergétique du bâtiment, Université Grenoble alpes, 2006.
- [186] E. Volkova, B. IOOS et F. Van Dorpe, «Global sensitivity analysis for a numerical model of radionuclide migration from the RRC "Kurchatov Institute" radwaste diposal site,» *Stoch Environ Res Risk Assess*, pp. 17-31, 2008.
- [187] A. Marrel, B. IOOSS, F. Van Dorpe et E. Volkova, «An efficient methodology for modeling complex computer codes with Gaussian processes,» *Computational Statistics and Data Analysis*, pp. 4731-4744, 2008.
- [188] M. Marseguerra, R. Masini, E. Zio et G. Cojazzi, «Variance decomposition-based sensitivity analysis via neural networks,» *Reliability Engineering and System Safety*, pp. 229-238, 2003.
- [189] D. XIU et G. Em Karniadakis, «The Wiener-Askey Polynomial chaos for stochastic differential equations,» *Society for industrial and Applied mathematics*, vol. 24, n° %12, pp. 619-644, 2002.
- [190] T. Crestaux, «Méthode adaptative d'intégration multi-dimensionnelle et sélection d'une base de polynomes de chaos,» Université de Paris, 2011.
- [191] N. Fajraoui, «Analyse de sensibilité globale et polynomes de chaos pour l'estimation des paramètres: application aux transferts en milieu poreux,» Université de Strasbourg, 2014.
- [192] M. Berveiller, B. Sudret et M. Lemaire, «Stochastic finite element: a non intrusive approach by regression,» *Revue européenne de mécanique numérique*, vol. 15, pp. 81-92, 2006.
- [193] G. Blatman et B. Sudret, Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression, 2010.

- [194] N. El Mocayd, «La décomposition en polynômes du chaos pour l'amélioration de l'assimilation de données ensembliste en hydraulique fluviale,» Institut national polytechnique de Toulouse , 2017.
- [195] M. Baudin et J.-M. Martinez, «Introduction to polynomial chaos with NISP,» 2013.
- [196] D. Xiu et G. Em Karniadakis, «Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos,» *Journal of computational physics*, vol. 187, pp. 137-167, 2003.
- [197] M. A. Ben souf, «Approche stochastique à base de modes d'ongles: théorie et applications en moyennes et hautes fréquences,» Ecole centrale de Lyon, 2012.
- [198] B. Sudret, «Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models- Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods,» Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France, 2007.
- [199] M. Rousseau, «Propagation d'incertitudes et analyse de sensibilité pour la modélisation de l'infiltration et de l'érosion,» Mathématiques générales, Université Paris-Est, 2012.
- [200] E. H. Sandoval, F. A. Collin et M. Basset, «Sensitivity study of dynamic systems using polynomial chaos,» *Reliability Engineering and system safety*, vol. 104, pp. 15-26, 2012.
- [201] N. Jozefowicz, «Optimisation combinatoire multi-objectif: des méthodes aux problèmes, de la Terre à (presque) la Lune,» Automatique/ Robotique, Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse), 2013.
- [202] M. ZemZami, N. Elhami, A. Makhloufi, M. Itmi et N. Hmina, «Application d'un modèle parallèle de la méthode PSO au problème de transport d'électricité,» *OpenScience - ISTE Science Publishing*, 2016.
- [203] M. Lamboni, «Analyse de sensibilité pour les modèles dynamiques utilisés en agronomie et environnement,» L'institut des sciences et industries du vivant et de l'environnement , Paris Tech, 2009.



[204] «Fléau de la dimension,» 29 mars 2019. [En ligne]. Available:

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Fl%C3%A9au\\_de\\_la\\_dimension](https://fr.wikipedia.org/wiki/Fl%C3%A9au_de_la_dimension). [Accès le 05 06 2019].

# Annexes

---

## Annexe 1

### FAST

La méthode FAST (acronyme de Fourier Amplitude Sensitivity Test) a été introduite par Cukier [174] pour la première fois dans les années 70's. La méthode a été initialement développée pour étudier la cinétique des réactions chimiques. Elle consiste à décomposer la variance du modèle en variances partielles par l'utilisation de la transformée de Fourier [175].

Considérons le modèle suivant :

$$Y = f(X_1, \dots, X_p)$$

Où  $Y$  est un scalaire et  $X = (X_1, \dots, X_p)$  suit une loi uniforme sur  $[0,1]^p$ .

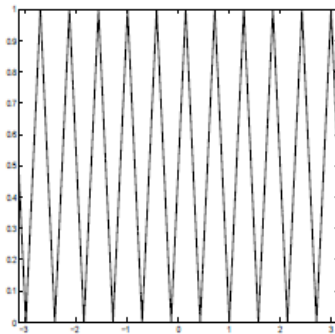
Cette méthode appartient à la famille de méthodes d'analyse de sensibilité fondée sur la variance. Cukier montre qu'il est possible d'obtenir une décomposition de la variance de  $Y$ , semblable à la décomposition de Sobol, en utilisant la transformée de Fourier multi-dimensionnelle de  $f$ . Le calcul d'une telle décomposition multi-dimensionnelle étant trop complexe pour être réalisé en pratique, l'idée de la méthode FAST est de remplacer les décompositions multi-dimensionnelles par des décompositions uni-dimensionnelles le long d'une courbe parcourant l'espace  $[0,1]^p$ . Cette courbe est définie par un ensemble d'équations paramétriques (voir un exemple détaillé dans [176]).

Plus clairement, cette méthode est fondée sur la sélection de  $N$  points de conception (échantillon) sur une courbe de remplissage d'espace d'entrée  $p$ -dimensionnel, construit de manière à explorer chaque facteur avec une fréquence (entière) différente  $(w_1, \dots, w_p)$ . Un algorithme assez complexe est utilisé pour définir les fréquences de manière à ce qu'elles soient exemptes d'interférences jusqu'à un ordre donné  $M$  ( $M = 6$  est généralement considéré comme suffisant). Le modèle de calcul est exécuté à chaque point de conception (échantillon) et le spectre de Fourier est calculé sur la sortie du modèle à des fréquences spécifiques  $(w_i, 2w_i, \dots, Mw_i)$  pour estimer l'indice de sensibilité du facteur  $X_i$ .

A cet effet, les points de conception (c'est-à-dire les valeurs de facteur ou les échantillons) sont échantillonnées à partir d'une courbe périodique avec une fréquence différente de  $w_i$  attribué à chaque facteur comme suit :

$$X_i(s_j) = g_i(\sin(w_i s_j)) \text{ Pour } i = 1, \dots, p, \text{ pour } j = 1, 2, \dots, N$$

Où  $X_i$  est un facteur d'entrée,  $g_i$  sont des fonctions de transformation à déterminer, sont choisis selon le pdf (probability distribution function) de  $X_i$ , permettant un recouvrement uniforme de  $[0,1]^p$ ,  $(w_1, \dots, w_p) \in \mathbb{N}^{*p}$  est un ensemble de fréquences entières linéairement indépendantes [177] et où  $s_j$  est la variable paramétrique variant en  $[-\pi, \pi]$  qui est échantillonnée sur sa plage de variation en utilisant  $N$  points [178]. La **Figure 67** représente l'allure de la courbe  $g_1(\sin(w_1 s))$  pour  $w_1 = 11$ .



**Figure 67 : Fonction  $g_1$  pour  $w_1 = 11$**

La variance d'un facteur est obtenue à partir des coefficients de Fourier [179]. FAST exploite la relation de Parseval pour décomposer la variance d'une réponse du modèle dans l'espace des fréquences.

Alors la moyenne de  $Y$  ou l'espérance peut être écrite sous la forme suivante :

$$f_0 = E[Y] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(X(s)) ds.$$

$$\text{Où } f(X(s)) = f(g_1(\sin(w_1 s)), \dots, g_p(\sin(w_p s)))$$

Si on applique ces idées au calcul de la variance  $V$  du modèle  $Y$  on obtient :

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(X(s)) ds - f_0^2$$

En appliquant la formule de Parseval [180] on obtient

$$V \simeq \sum_{j=-\infty}^{\infty} (A_j^2 + B_j^2) - (A_0^2 + B_0^2)$$

$$\simeq 2 \sum_{j=1}^{\infty} (A_j^2 + B_j^2)$$

Où  $A_j$  et  $B_j$  sont les coefficients de Fourier définis par :

$$A_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(X(s)) \cos(js) ds,$$

$$B_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(X(s)) \sin(js) ds.$$

La part de la variance due à une variable  $X_i$  est la somme des carrés des coefficients de Fourier  $A_j$  et  $B_j$  attribués à la fréquence  $w_i$  relative à  $X_i$  et à ses harmoniques est définie par :

$$V_i = 2 \sum_{p=1}^{\infty} (A_{p w_i}^2 + B_{p w_i}^2)$$

Fast estime l'indice de sensibilité  $S_i = Var(Y_u|X_i)/Var(Y)$  alors par :

$$S_i = \frac{\sum_{p=1}^{\infty} (A_{p w_i}^2 + B_{p w_i}^2)}{\sum_{j=1}^{\infty} (A_j^2 + B_j^2)}$$

La méthode FAST ne permet pas de calculer les indices de sensibilité totaux. Pour cela les auteurs de [181] ont introduit la méthode Extended FAST, qui est une extension de cette méthode aux indices de sensibilité totaux. En évaluant la part de variance due à toutes les variables sauf  $X_i$  comme la somme des carrés des coefficients de Fourier  $A_j$  et  $B_j$  attribués à toutes les fréquences  $w_{\sim i}$  autre que  $w_i$  et ses harmoniques :

$$V_{\sim i} = 2 \sum_{p=1}^{\infty} (A_{p w_{\sim i}}^2 + B_{p w_{\sim i}}^2)$$

L'indice de sensibilité total est donné par :

$$S_{Ti} = 1 - \frac{\sum_{p=1}^{\infty} (A_{pw\sim i}^2 + B_{pw\sim i}^2)}{\sum_{j=1}^{\infty} (A_j^2 + B_j^2)}$$

Estimation FAST des indices de sensibilité :

L'estimation des indices de sensibilité nécessite de définir les fonctions  $g_i$  et les fréquences  $w_i$  utilisées. Une borne  $M$  pour l'évaluation des sommes doit aussi être choisie, les sommes infinies n'étant numériquement pas évaluables. En effet les indices de sensibilité de premier ordre et totaux seront estimés de la façon suivante :

$$\widehat{S}_i = \frac{\sum_{p=1}^M (A_{pwi}^2 + B_{pwi}^2)}{\sum_{j=1}^M (A_j^2 + B_j^2)} \quad \text{et} \quad \widehat{S}_{Ti} = 1 - \frac{\sum_{p=1}^M (A_{pw\sim i}^2 + B_{pw\sim i}^2)}{\sum_{j=1}^M (A_j^2 + B_j^2)}$$

Où  $M$  harmonique maximum considéré, est évalué en fonction des propriétés suivantes :

- Plus  $M$  est grand, mieux les indices reflètent l'effet des variables,
- Plus  $M$  est grand, plus le nombre de simulations sera élevé.

Le choix de  $M$  revient à faire un compromis entre la qualité des indices et le coût de leur estimation. Cukier et al. [174] ont déterminé de façon empirique que le meilleur compromis pour  $M$  était 4 ou 6, et ce quel que soit la dimension du modèle.

Les auteurs de [181] ont conclu que FAST est parfois sujette à un biais dans le choix des fréquences. Pour contourner cette difficulté liée au choix des fréquences, Tarantola et al 2006 [182] ont hybridé Fast avec la méthode RBD (Random balanced design), ce qui a donné la méthode RBD-FAST. La méthode RBD a ensuite été étendue par Mara (2009) [183] au calcul des indices totaux. Aussi, Tissot et Prieur (2012) montrent que les indices calculés avec cette méthode sont biaisés et proposent une méthode pour corriger ce biais [184].

Un des avantages de la méthode FAST est que les indices de sensibilité peuvent être calculés indépendamment les uns les autres, à partir d'un même échantillon de simulations, ce que ne permet pas la méthode de Sobol qui nécessite deux échantillons.

## Annexe 2

### Métamodèles et polynômes de chaos

L'idée de métamodèle est de remplacer le modèle initial par un modèle approché appelé souvent métamodèle (ou en anglais surrogate model). Il s'agit d'un modèle approchant le modèle numérique de départ, qui nécessite un temps de calcul nettement diminué par rapport au modèle original. Il est utilisé pour effectuer une SA fondée sur la variance pour les modèles informatiques consommant du temps [185]. En conséquent, certains auteurs proposent d'approcher le code informatique, à partir d'une conception initiale d'échantillonnage de petite taille, par une fonction mathématique souvent appelée surface de réponse ou métamodèle [186].

Dans le cas où les paramètres d'entrée et de sortie du code sont scalaires, de très nombreuses méthodes de construction de métamodèles ont été proposées, parmi lesquelles on peut citer les modèles de régression linéaire généralisée, de régression non-paramétrique, les modèles additifs généralisés, les processus gaussiens [187], les réseaux de neurones [188], les polynômes de chaos [189]etc.

Les méthodes fondées sur l'émulation sont parmi les méthodes exclues dans notre travail, dans l'intérêt de maintenir la même forme analytique de notre simulateur.

Nous parlerons dans ce paragraphe d'un type d'émulateur : les Polynômes de Chaos.

### Estimation des indices de sensibilité par Polynôme de chaos

Le développement en polynôme de chaos (PC) est une décomposition spectrale polynomiale de variables aléatoires sur une base de polynômes orthogonaux. Ces polynômes sont orthogonaux par rapport à la mesure d'un vecteur de variables aléatoires indépendantes [190].

Les réponses calculées par le code sont approchées par un développement polynomial dont les coefficients sont calculés à partir de la spécification puis de la réalisation d'un plan d'expériences numériques [191].

Les coefficients sont alors obtenus par intégration multidimensionnelle à partir de la réalisation d'un plan d'expériences. Les polynômes de chaos sont des modèles linéaires et donc leurs coefficients peuvent également être calculés par les méthodes classiques de construction de métamodèles comme par exemple les moindres carrés.

Les auteurs de [192] montrent que toute variable aléatoire possédant une variance finie peut se décomposer en une somme de PC.

On considère le modèle suivant :  $Y = f(X_1, \dots, X_p)$  où  $Y \in \mathbb{R}$  est la réponse scalaire du modèle d'une fonction  $f$  connue et  $X_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, p$ , les  $p$  paramètres d'entrées indépendantes du modèle. En supposant que la sortie  $Y$  du modèle possède une variance finie, elle peut s'approximer par un développement en PC [193]:

$$Y = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \psi_j(X_1, \dots, X_p)$$

Avec les coefficients déterministes  $a_j$  qui sont inconnus et qu'on cherche à estimer,  $\psi_j$  des polynômes multi variables qui dépendent de  $X_1, \dots, X_p$  et qui résultent du produit tensoriel des polynômes unidimensionnels  $\phi_{a_k^j}(x_k)$  :

$$\psi_j(X_1, \dots, X_p) = \prod_{k=1}^p \phi_{a_k^j}(X_k)$$

A la distribution des paramètres  $X_i$  est associée une famille de polynômes  $\phi_{a_k^j}(X_k)$ , afin de former une base orthogonale, assurant ainsi l'unicité de la décomposition [194]. Par exemple, si  $X_i$  suit une loi normale, les  $\phi_{a_k^j}$  sont des polynômes de Hermite. Si  $X_i$  suit une loi uniforme, les  $\phi_{a_k^j}$  sont des polynômes de Legendre, ... voir **Tableau 39**.

Loi	Polynôme
Normale	Hermite
Uniforme	Legendre
Beta	Jacobi
Exponentielle	Laguerre

Tableau 39: les différents polynômes relatifs à différents loi de distribution [195]

Le terme  $a_k^j$  représente le degré des polynômes  $\phi_{a_k^j}(X_k)$ . Le degré  $a_k^j$  du polynôme  $\psi_j$  n'excède pas le degré  $p$  souhaité de telle sorte que la relation suivante soit vérifiée, pour  $j$  donné :

$$\alpha^j = \sum_{k=1}^n a_k^j \leq p$$

En pratique, le développement est tronqué à l'ordre  $M$  qui est fini noté  $Y^M$ :

$$Y \approx Y^M = \sum_{j=0}^M a_j \psi_j(X_1, \dots, X_p)$$

Le nombre de coefficients  $a_j$  à déterminer est  $M + 1$ . Il dépend du nombre  $n$  des variables  $x_k$  et du degré  $p$  des polynômes :  $M + 1 = \frac{(n+p)!}{n!p!}$ , qui augmente avec l'augmentation de  $n$  et  $p$ .

On illustre la dépendance de  $(M + 1)$  avec  $n$  et  $p$  dans le **Tableau 40**.

	n					
p	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	6	10	15	21	28
3	4	10	20	35	56	84
4	5	15	35	70	126	210
5	6	21	56	126	252	462
6	7	28	84	210	462	924

**Tableau 40:** Nombre de termes  $M+1$  dans le développement en PC tronqué à l'ordre  $n$  et pour  $p$  variables aléatoires

Nous distinguons deux approches pour le calcul des coefficients de polynômes de chaos l'une est dite « intrusive » [196] et l'autre est « non intrusive ».

Nous présentons l'utilisation des polynômes de chaos uniquement en mode non intrusif, c'est-à-dire sans modification du code de calcul. Elle considère le modèle comme une boîte noire. Parce que nous n'envisageons pas à modifier dans le code industriel de référence (ESMERALDA NG simulateur de la SNCF).

### Approche non intrusive

Les méthodes non-intrusives se basent sur un ensemble d'évaluations (réalisations) déterministes du modèle afin d'estimer les coefficients polynomiaux. Autrement dit, on utilise



le modèle comme une boîte noire afin d'associer à chaque réalisation de  $X$  sa valeur correspondante de  $Y(X)$ .

Pour cette approche, il existe deux méthodes de calcul, la première est dite « par régression » fondée sur l'échantillonnage et de trouver les coefficients en minimisant l'erreur quadratique entre le modèle exacte et l'approximation. La deuxième est « par projection » qui consiste à projeter la solution sur la base du chaos [197]. Nous présentons uniquement la méthode « par régression » qui est fondée sur l'échantillonnage, parce qu'un de nos buts est d'explorer l'espace des variables d'entrée par échantillonnage [198].

### **Méthode de régression**

Soient  $B$  le vecteur des coefficients  $a_j, j = 0, \dots, M$ , à déterminer,  $Y$  le vecteur contenant les  $N$  échantillons de la sortie et  $Q$  la matrice contenant les polynômes  $\psi_j$  :

$$Q = \begin{pmatrix} \psi_0(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) & \dots & \psi_M(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_0(x_1^{(N)}, \dots, x_n^{(N)}) & \dots & \psi_M(x_1^{(N)}, \dots, x_n^{(N)}) \end{pmatrix}$$

Avec  $x_k^{(i)}$  représente le  $i$ ème échantillon de  $x_k$ .

Le vecteur de sortie  $Y$  est donné par  $Y = QB$ . L'estimateur du vecteur  $B$ , noté  $\hat{B}$ , est donné par la méthode des moindres carrés [199]:

$$\hat{B} = (Q^T Q)^{-1} Q^T Y \quad (1)$$

Par la solution du problème de minimisation de la somme des carrés des résidus, la sortie estimée  $\hat{Y} = (\hat{y}^{(1)} \dots \hat{y}^{(N)})^T$  est ainsi donnée par l'expression suivante :

$$\hat{Y} = Q\hat{B}$$

### **Estimation des indices de sensibilité :**

Après la détermination des coefficients de PC, il est possible de réordonner les différents termes du polynôme obtenu sous la forme suivante :

$$Y \approx a_0 + \sum_{k=1}^p \sum_{j \in \Gamma_k} a_j \psi_j(X_k) + \sum_{1 \leq k_1 \leq k_2 \leq p} \sum_{j \in \Gamma_{k_1, k_2}} a_j \psi_j(X_{k_1}, X_{k_2}) + \dots$$

$$+ \sum_{1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_s \leq p} \sum_{j \in \Gamma_{k_1, \dots, k_s}} a_j \psi_j(X_{k_1}, \dots, X_{k_s}) + \dots + \sum_{j \in \Gamma_{1, \dots, M}} a_j \psi_j(X_{k_1}, \dots, X_{k_p})$$

Avec  $\Gamma_{k_1, \dots, k_s}$  l'ensemble des multi-indices  $j$  qui correspond aux polynômes dépendant uniquement des variables  $x_{k_1}, \dots, x_{k_s}$ . D'où la moyenne  $E[Y] = a_0$  et la variance de  $Y$  est donnée par :  $V[Y] = \sum_1^{p-1} a_j^2$ .

Donc l'estimée de l'indice de sensibilité du premier ordre  $\hat{S}_i$  est donnée par :

$$\hat{S}_i = \frac{\sum_{j \in \Gamma_i} \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(X_i))}{\sum_{j=1}^M \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(X_1, \dots, X_p))}$$

Où  $\hat{a}_j$  sont les coefficients estimés par (30) et l'ensemble  $\Gamma_i$  correspond aux polynômes  $\psi_j$  dépendant uniquement de  $X_i$ .

De la même façon, l'estimation de l'indice de sensibilité  $\hat{S}_{il}$  dû à l'interaction entre les variables  $X_i$  et  $X_l$  est donnée par :

$$\hat{S}_{il} = \frac{\sum_{j \in \Gamma_{il}} \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(X_i, X_l))}{\sum_{j=1}^M \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(X_1, \dots, X_p))}$$

Par ailleurs, l'indice de sensibilité estimé  $\hat{S}_{Ti}$  total est écrit sous cette forme :

$$\hat{S}_{Ti} = \frac{\sum_{j \in \Gamma_{i+}} \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(X_i))}{\sum_{j=1}^M \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(X_1, \dots, X_p))}$$

En général, les principales étapes suivies pour calculer les indices de sensibilité à partir de PC sont résumés par la suite:

1. Choix du groupe de variables stochastiques  $X = (X_1, \dots, X_p)$
2. Spécification d'un échantillon sur le groupe de variables stochastiques (n –échantillon)
3. Réalisation du plan d'expériences numériques par appel au modèle numérique  $y_i = f(X^i) \quad i = 1, \dots, n$

4. Construction du polynôme de chaos généralisé basé sur le groupe de variables stochastiques
5. Calcul des coefficients du polynôme de chaos par intégration numérique ou par régression linéaire
6. Analyse de sensibilité et statistiques effectués sur le chaos polynomial

### **Exemple**

On considère un polynôme de chaos de degré 3 en fonction de 3 variables :  $X_1, X_2$  et  $X_3$

Le nombre de coefficients à chercher :  $M + 1 = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20$  *coefficients*

Le modèle approché par le chaos est sous la forme suivante :

$$Y(X_1, X_2, X_3) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 3} a_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \psi_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(X_1, X_2, X_3)$$

$a_{(\alpha1,\alpha2,\alpha3)}$			Contribution
$\alpha1$	$\alpha2$	$\alpha3$	
0	0	0	Moyenne
1	0	0	Variance apportée par la variable 1
2	0	0	
3	0	0	
0	1	0	Variance apportée par la variable 2
0	2	0	
0	3	0	
0	0	1	Variance apportée par la variable 3
0	0	2	
0	0	3	
1	1	0	Variance apportée par l'interaction entre les variables 1 et 2
2	1	0	
1	2	0	
1	0	1	Variance apportée par l'interaction entre les variables 1 et 3
2	0	1	
1	0	2	
0	1	1	Variance apportée par l'interaction entre les variables 2 et 3
0	2	1	
0	1	2	
1	1	1	Variance apportée par l'interaction entre les variables 1, 2 et 3

**Tableau 41: Exemple de polynômes de PC de 3 degré**

En référençant au **Tableau 41**, le développement en PC s'écrit :

$$\begin{aligned}
Y \approx & a_0\psi_0 + a_1\psi_1(X_1) + a_2\psi_1(X_2) + a_3\psi_1(X_3) + a_{11}\psi_2(X_1) + a_{21}\psi_1(X_2)\psi_1(X_1) \\
& + a_{22}\psi_2(X_2) + a_{31}\psi_1(X_3)\psi_1(X_1) + a_{32}\psi_1(X_3)\psi_1(X_2) + a_{33}\psi_3(X_3) \\
& + a_{111}\psi_3(X_1) + a_{211}\psi_1(X_2)\psi_2(X_1) + a_{221}\psi_2(X_2)\psi_1(X_1) + a_{222}\psi_3(X_2) \\
& + \dots + a_{1111}\psi_4(X_1) \dots
\end{aligned}$$

### **Estimation des indices de sensibilité pour des modèles à sorties dynamiques par PC**

La solution  $Y = f(X, t)$  correspondant à la sortie du modèle à sortie dynamique, peut être décomposée en somme de dimension croissante, à chaque instant [200]:

$$Y(t, X) = f_0(t) + \sum_{i=1}^p f_i(t, X_i) + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{i < j}^p f_{ij}(t, X_i, X_j) + \dots + f_{1\dots p}(t, X_1, \dots, X_p)$$

Où  $Y(t, X)$  est la sortie dynamique du modèle est assumée dérivative et carré-intégrable (converge vers une constante). Le terme  $f_0(t)$  est la valeur moyenne de la sortie à chaque instant.

En supposant que les paramètres sont indépendants,  $Y(t, X)$  peut aussi être décomposé en PC à chaque instant t :

$$Y(t, X) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(t) \psi_j(X_1, \dots, X_p)$$

Avec les coefficients déterministes  $a_j(t)$  qui sont inconnus, à estimer,  $\psi_j$  des polynômes multi variables qui dépendent de  $X_1, \dots, X_p$  et qui résultent du produit tensoriel des polynômes unidimensionnels  $\phi_{a_k^j}(X_k)$  :

$$\psi_j(X_1, \dots, X_p) = \prod_{k=1}^n \phi_{a_k^j}(X_k)$$

Une fois la structure de PC obtenue pour la sortie du modèle, les coefficients doivent être calculés. Comme on a déjà mentionné, il existe deux types de méthodes pour cela : intrusives et non intrusives.

Après la détermination des coefficients de PC, il est possible de réordonner les différents termes du polynôme obtenu sous la forme suivante pour estimer les indices de sensibilité :

$$\begin{aligned} Y(t, X) \approx & a_0(t) + \sum_{k=1}^p \sum_{j \in \Gamma_k} a_j(t) \psi_j(X_k) + \sum_{1 \leq k_1 \leq k_2 \leq p} \sum_{j \in \Gamma_{k_1, k_2}} a_j \psi_j(X_{k_1}, X_{k_2}) + \dots \\ & + \sum_{1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_s \leq p} \sum_{j \in \Gamma_{k_1, \dots, k_s}} a_j \psi_j(X_{k_1}, \dots, X_{k_s}) + \dots + \sum_{j \in \Gamma_{1, \dots, M}} a_j \psi_j(X_{k_1}, \dots, X_{k_p}) \end{aligned}$$

La fonction de sensibilité du premier ordre peut être obtenue comme suit :

$$\hat{S}_i(t) = \frac{\sum_{j \in \Gamma_i} \hat{a}_j^2(t) E(\psi_j^2(X_i))}{\sum_{j=1}^M \hat{a}_j^2(t) E(\psi_j^2(X_1, \dots, X_p))}$$

Les fonctions de sensibilité estimées d'un ordre supérieur, reflétant l'effet des interactions, peuvent être obtenues de la même manière :

$$\hat{S}_{il}(t) = \frac{\sum_{j \in \Gamma_{il}} \hat{\alpha}_j^2(t) E(\psi_j^2(X_i, X_l))}{\sum_{j=1}^M \hat{\alpha}_j^2(t) E(\psi_j^2(X_1, \dots, X_p))}$$

Enfin, la fonction de sensibilité totale estimée est donnée par :

$$\hat{S}_{Ti}(t) = \frac{\sum_{j \in \Gamma_{i+}} \hat{\alpha}_j^2(t) E(\psi_j^2(X_i))}{\sum_{j=1}^M \hat{\alpha}_j^2(t) E(\psi_j^2(X_1, \dots, X_{np}))}$$

## **Conclusion**

Avant de parler des avantages et des inconvénients, la première cause qui nous a empêchés d'utiliser la méthode de polynômes de chaos, est qu'elle est fondée sur l'émulation.

Le principal avantage de cette méthode est qu'elle ne base pas sur les simulations de Monte Carlo, qui dans certaines applications, le dernier peut nécessiter un nombre élevé d'évaluations du modèle, ce qui rend l'approche coûteuse en temps de calcul. Le polynôme de chaos peut pallier ce problème qui le remplace par une approximation analytique. Les indices sont alors obtenus directement à partir de l'expression des coefficients de la décomposition polynomiale. Alors elle est considérée une alternative efficace à la simulation de Monte Carlo. En plus elle peut être utilisé pour des modèles de type boîte noire car elle ne nécessite pas la connaissance de la structure du modèle. Malgré ses avantages, le chaos de polynomial ne peut gérer qu'un nombre limité d'entrées. Il devient coûteux en calcul lorsque le nombre de variables augmente. La cause de ce coût exponentiel par rapport à la dimension est liée à la malédiction de la dimension : la taille de la base polynomiale complète augmente de manière exponentielle par rapport à la dimension et au degré  $M + 1 = \frac{(dim+deg)!}{dim!deg!}$ . Ce coût augmente avec l'augmentation du nombre de pas de temps dans le cas où le modèle est dynamique.

Appliquer cette méthode dans notre travail, c'est compliqué, supposant que nous avons choisi 10 ajustements afin de réorganiser un trafic, c'est-à-dire 10 variables d'entrées, donc la dimension est égale à 10. Dans ce cas nous avons besoin au minimum 184756 coefficients ( $20!/10! \times 10!$ ) inconnus à calculer. Par conséquent, au minimum nous avons besoin d'appeler le modèle 184756 fois.

## Annexe 3

### Optimisation multi-objectif: Termes et définitions

Dans la plupart des problèmes d'optimisation, il ne s'agit pas d'optimiser seulement un seul critère mais plutôt d'optimiser simultanément plusieurs critères et qui sont généralement conflictuels. La solution d'un problème d'optimisation multi-objectif consiste réellement en trois étapes à savoir la mesure, la recherche et la décision. Contrairement à un problème mono-objectif, la solution n'est pas unique mais constitué d'un ensemble de solutions dites de Pareto optimales.

La formulation mathématique d'un problème d'optimisation multi-objectif se présente sous la forme suivante :

$$PO\_Multi: \text{minimiser}_{X \in D} F(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X))$$

Où  $\{f_1, \dots, f_n\}$  Est l'ensemble de fonctions objectif, avec  $n \geq 2$  le nombre de fonctions objectif,  $X = (X_1, X_2, \dots, X_r)$  un vecteur de variables de décision ou solution,  $D$  est l'ensemble des solutions réalisables et  $F(X)$  est le vecteur objectif. L'ensemble  $O = F(D)$  correspond aux images des solutions réalisables dans l'espace des objectifs, et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , avec  $y_i = f_i(x)$  est le point de l'espace des objectifs correspondant à la solution  $x$ .

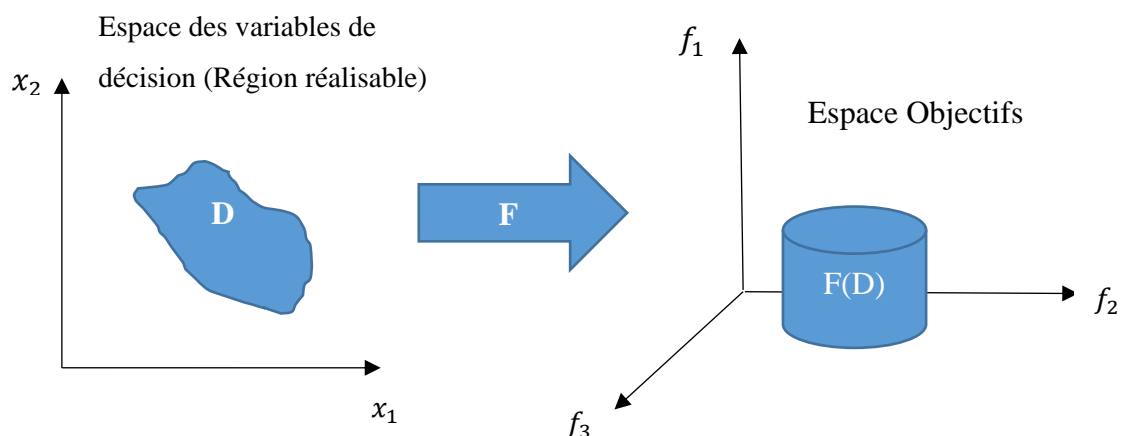


Figure 68: Exemple d'un problème d'optimisation multi-objectif (2 variables de décision et 3 fonctions objectifs)

La principale différence avec l'optimisation mono-objective vient de la définition d'optimalité. Il s'agit de l'optimalité de Pareto qui est définie par la dominance de Pareto définie par:

Dominance de Pareto : Une solution  $x$  domine ( $\preceq$ ) au sens de Pareto une solution  $z$  si et seulement si  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, f_i(x) \leq f_i(z)$  et  $\exists i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $f_i(x) < f_i(z)$  [201].

Une solution réalisable dominée par aucune autre solution réalisable est dite Pareto-optimal. Son image dans l'espace des solutions est qualifiée de non-dominée.

L'ensemble des solutions Pareto-optimal s'appelle Pareto-set. L'image de Pareto-set dans l'espace des objectifs s'appelle Pareto-front [171].

Notons que dans notre travail, l'ensemble des solutions s'agit d'une approximation (approximate pareto set), et l'image de cet ensemble dans l'espace des objectifs s'agit d'une approximation (approximate Pareto front).

## Annexe 4

### Optimisation par essais particuliers PSO

Les méta-heuristiques, sont des méthodes d'optimisation permettant d'obtenir une valeur approchée de la solution optimale en un temps raisonnable. PSO est fondée sur les « interactions sociales » entre des « agents » appelés « particules », dont le but est d'atteindre un objectif donné dans un espace de recherche commun où chaque particule a une certaine capacité de mémoriser et traiter l'information. Ces algorithmes sont inspirés du comportement de groupes d'individus, et une particule se comporte comme un oiseau au sein d'un vol d'oiseaux migrateurs qui cherchent le déplacement optimum pour parcourir des longues distances.

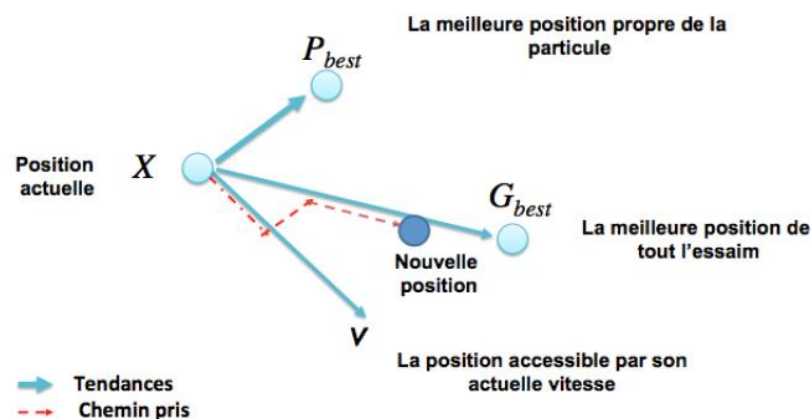


Figure 69: Déplacement d'une particule [202]

### Paramétrage



Dans notre travail, la méthode de PSO a été appliquée avec le paramétrage dans sa version initiale. Deux contraintes ont été ajoutées : une contrainte sur la sortie et une autre contrainte d'intervalle sur les entrées. Notons que la méthode d'échantillonnage utilisée pour générer l'essaim initial à l'itération n°1 est « la méthode fondée sur les séquences de Sobol ».

Pour appliquer la PSO, il faut définir un espace de recherche qui sera parcouru par les particules et une fonction objective à optimiser. Nous nous intéressons dans ce calcul à chercher la solution qui présente le trafic le plus dense. La taille de l'essaim choisie dans notre test est égale à 20 particules. Le principe de l'algorithme est de déplacer ces particules afin qu'elles trouvent l'optimum. Une particule  $i$  de l'essaim est caractérisée à l'instant  $t$ , par (**Figure 69**):

- $x$  : sa position dans l'espace de recherche
- $v$  : sa vitesse
- $Pb$  : la position de la meilleure solution laquelle elle est passée
- $Pg$  : la position de la meilleure solution connue dans l'essaim
- $F(Pb)$  : la valeur de fitness de sa meilleure solution (ici, la valeur de densité du trafic)
- $F(Pg)$  : la valeur de fitness de la meilleure solution connue dans l'essaim

Le déplacement de la particule  $i$  entre les itérations  $t$  et  $t + 1$  se fait selon les deux équations suivantes :

$$v(t + 1) = wv(t) + c1r1(Pb(t) - x(t)) + c2r2(Pg(t) - x(t))$$

$$x(t + 1) = x(t) + v(t + 1)$$

- $c1$  et  $c2$  : deux constantes qui représentent les coefficients d'accélération, elles sont mises à 2 dans notre test ( $c1 = 2$  ;  $c2 = 2$ ).
- $r1$  et  $r2$  : deux nombre aléatoires tirés de l'intervalle  $[0,1]$
- $w$  appelé coefficient d'inertie  $w = w\_upper - (t/max\_iteration) * (w\_upper - w\_lower)$ , dont  $w\_upper = 1$  et  $w\_lower = 0$
- Pour gérer les contraintes sur les intervalles de variation pour chaque variable  $[lower, upper]$  :

$$Si x(t + 1) < lower \rightarrow x(t + 1) = lower + random(0,2)$$

$$Si x(t + 1) > upper \rightarrow x(t + 1) = upper - random(0,2)$$

- Pour gérer les contraintes sur la sortie (par exemple respecter les contraintes sur les tensions) :

*Si (respect) alors fitness = F(objectif)*

*Si (non respect) alors fitness = 0*

## Table des figures

Figure 1: Les principaux équipements ferroviaires.....	27
Figure 2: Une caténaire est composée de câbles porteurs en bronze ou en aluminium, de ligne de contact et de câbles conducteurs en cuivre.....	28
Figure 3: Le schéma général d'alimentation en 1x25 KV .....	28
Figure 4: Le schéma général d'alimentation en 2x25 KV .....	29
Figure 5: Marche-type d'un train.....	30
Figure 6: Exemple d'une grille de circulation .....	31
Figure 7: La chaîne de la production ferroviaire de la planification amont jusqu'à la gestion opérationnelle.....	31
Figure 8: Exemple de graphique de circulation .....	33
Figure 9: Schéma de principe d'ESMERALDA NG.....	39
Figure 10: Actuellement : démarche manuelle (essais-erreurs).....	58
Figure 11: Le modèle d'ajustement étudié.....	59
Figure 12: Démarche de l'outil.....	64
Figure 13: Modèle d'ajustement.....	68
Figure 14: Exemple d'une sortie du modèle: Tension (V) en fonction de $pk$ (km) pour un train donné.....	68
Figure 15: Principe de la répartition de la variation de la sortie d'un système entre différentes sources de variation.....	70
Figure 16: Analyse de sensibilité locale.....	71
Figure 17: Principe de l'analyse de sensibilité locale.....	72
Figure 18: Analyse de sensibilité globale .....	73
Figure 19: Exemple d'un échantillonnage LHS avec deux variables indépendants $X1$ et $X2$ pour $N = 5$ .....	76
Figure 20: Figure montre la différence entre les deux méthodes : échantillonnage aléatoire (à gauche) et échantillonnage fondée sur les séquences de Sobol (à droite).....	76
Figure 21: Échantillonnage de X et partition suivant $X1$ .....	97
Figure 22: Représentation des sorties dynamiques Y et du sous-ensemble $Y Xi \in A$ .....	98
Figure 24: Partition de l'échantillon en un groupe satisfaisant un certain critère d'acceptabilité de la solution (A) et un groupe ne le satisfaisant pas (NA).....	100
Figure 25: Fonctions de répartition des sous-groupes $Xi/A$ et $Xi/NA$ pour la variable $Xi$ .	101

Figure 26: Sens d'influence de $X_i$ selon la position des CDFs.....	102
Figure 27: Application de l'analyse de sensibilité sur notre modèle .....	106
Figure 28: Indicateurs de performance - exemple de cycles de charges des groupes de traction .....	112
Figure 29: exemple d'un regroupement d'un ensemble des circulations d'un trafic donné (L1 : ligne1 ; V1 : voie1 ; TER : type de train).....	114
Figure 30: Exemple d'une marche (engin numéro 8479) .....	117
Figure 31: Configuration électrique des infrastructures.....	121
Figure 32: Résultats de simulation en configuration nominale.....	122
Figure 33: Mode dégradé .....	123
Figure 34: Récapitulatif des actions d'ajustement .....	124
Figure 35: Indices de Sobol $SXi$ en fonction de la taille d'échantillon N .....	127
<b>Figure 36: Indices fondés sur la distance en fonction de la taille d'échantillon N .....</b>	<b>128</b>
Figure 37: Influence des variables pour $N$ simulations pour la méthode fondée sur la distribution .....	129
Figure 38: Graphes de densités cumulées $FXi A$ et $FXi A \ X1, X2, X3, X4 \text{ et } X5$ .....	131
Figure 39: Indices de sensibilité par rapport à $Xi$ en fonction de la taille d'échantillon .....	133
Figure 40: Influence pour $N$ simulations pour la méthode régionale.....	134
Figure 41: L'ensemble de solutions de Pareto optimales: en bleu, les solutions réalisables, en rouge les solutions compromis .....	135
Figure 42: échantillon de N scénarii d'ajustement.....	139
Figure 43: Configuration électrique du réseau axe Paris Le Mans – Paris Tours.....	141
Figure 44: La qualité d'alimentation et la vitesse des trains sur la ligne 1 en mode nominal	141
Figure 45: La qualité d'alimentation et la vitesse des trains sur la ligne 1 en mode dégradé	142
Figure 46: Les différents ajustements du réseau .....	144
Figure 47: Le critère sur les tensions générées par la solution la plus dense est respecté .....	145
Figure 48: Le critère sur les tensions générées par la solution la plus dense raffinée est respecté.....	146
Figure 49: Un ensemble de solutions Pareto-optimales; les points rouges représentent les solutions non dominées (compromis); les solutions bleues représentent les solutions réalisables dominées.....	147
Figure 50: Configuration électrique du réseau axe Montparnasse-Versailles.....	149
Figure 51: La qualité d'alimentation et la vitesse des trains sur la ligne 9 en mode nominal	150
Figure 52: La qualité d'alimentation et la vitesse des trains sur la ligne 9 en mode dégradé	150

Figure 53: Le critère sur les tensions générées par la solution la plus dense est respecté .....	155
Figure 54: Un ensemble de solutions Pareto-optimales; les points rouges représentent les solutions non dominées (compromis); les solutions bleues représentent les solutions réalisables dominées.....	156
Figure 55: Le critère sur les tensions générées par la solution la plus dense raffinée est respecté.....	157
Figure 56: Configuration électrique du réseau axe Corbeil-Malesherbes.....	159
Figure 57: La qualité d'alimentation et la vitesse des trains sur la ligne 5 en mode nominal	160
Figure 58: La qualité d'alimentation et la vitesse des trains sur la ligne 5 en mode dégradé	160
Figure 59: Le critère sur les tensions générées par la solution la plus dense est respecté .....	163
Figure 60: Le critère sur les tensions générées par la solution la plus dense raffinée est respecté.....	164
Figure 61: Un ensemble de solutions Pareto-optimales; les points rouges représentent les solutions non dominées (compromis); les solutions bleues représentent les solutions réalisables dominées.....	165
Figure 62: Configuration électrique du réseau axe Paris Nord .....	166
Figure 63: La qualité d'alimentation et la vitesse des trains sur la ligne 1 en mode nominal	166
Figure 64: La qualité d'alimentation et la vitesse des trains sur la ligne 1 en mode dégradé	167
Figure 65: Le critère sur les tensions générées par la solution la plus dense est respecté .....	169
Figure 66: Le critère sur les tensions générées par la solution la plus dense raffinée est respecté.....	170
Figure 67: Un ensemble de solutions Pareto-optimales; les points rouges représentent les solutions non dominées (compromis); les solutions bleues représentent les solutions réalisables dominées.....	171
Figure 68 : Fonction $g_1$ pour $w_1 = \mathbf{11}$ .....	201
Figure 69: Exemple d'un problème d'optimisation multi-objectif (2 variables de décision et 3 fonctions objectifs).....	213
Figure 70: Déplacement d'une particule [204] .....	214

## Liste des tableaux

Tableau 1: Les systèmes d'électrification utilisés en Europe .....	26
Tableau 2: Les principaux critères pour classier les travaux concernant la replanification des horaires ferroviaires.....	44
Tableau 3: Limites des méthodes d'optimisation vis-à-vis du problème d'ajustement du trafic .....	62
Tableau 4: résumé des caractéristiques des trois méthodes d'analyse de sensibilité globale expliquées dans ce travail.....	108
Tableau 5: Horaire initial à gauche, horaire ajusté avec une incrémentation des horaires de 5 minutes .....	115
Tableau 6: Horaire initial d'un réseau hétérogène à gauche; les circulations sont regroupées dans le fichier horaire à droite.....	115
Tableau 7: Horaire après les ajustements ajoutés.....	116
Tableau 8: Une portion du fichier Marche montre la marche d'engin numéro 8497.....	117
Tableau 9: marche ajustée .....	119
Tableau 10: Indices de Sobol généralisés pour différentes valeurs de $N$ .....	126
Tableau 11: Temps de calcul et espace de stockage nécessaires pour exécuter Sobol .....	127
Tableau 12: Indices fondés sur la distance pour différentes valeurs de $N$ .....	128
Tableau 13: Temps de calcul et espace de stockage nécessaires pour exécuter la méthode fondée sur la distance .....	129
Tableau 14: Indices de sensibilité (d-stat) des différentes variables d'ajustement .....	132
Tableau 15: P-values correspondant aux indices du Tableau 10 .....	132
Tableau 16: Le temps de calcul et l'espace de stockage nécessaires pour exécuter la méthode régionale .....	133
Tableau 17: Évaluation des méthodes selon trois critères, selon trois niveaux (-), (+), (++)	136
Tableau 18: Liste des actions d'ajustement reformulées effectuées dans le fichier horaire H.DAT (L : Ligne ; V : Voie) .....	143
Tableau 19: Liste des actions d'ajustement effectuées dans le fichier marche M.DAT .....	143
Tableau 20: D-stat (le degré de l'importance) et P-value (les valeurs de significativité) calculés à partir de 1000 échantillons .....	144

Tableau 21: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense.....	145
Tableau 22: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense.....	146
Tableau 23: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense.....	148
Tableau 24: Liste des actions d'ajustement reformulées effectuées dans le fichier horaire H.DAT (L : Ligne ; V : Voie) .....	153
Tableau 25: Liste des actions d'ajustement effectuées dans le fichier marche M.DAT .....	153
Tableau 26: D-stat (le degré de l'importance) et P-value (les valeurs de significativité) calculés à partir de 1000 échantillons .....	154
Tableau 27: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense.....	155
Tableau 28: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense.....	157
Tableau 29: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense.....	158
Tableau 30: Liste des actions d'ajustement reformulées effectuées dans le fichier horaire H.DAT (L : Ligne ; V : Voie) .....	161
Tableau 31: Liste des actions d'ajustement effectuées dans le fichier marche M.DAT .....	161
Tableau 32: D-stat (le degré de l'importance) et P-value (les valeurs de significativité) calculés à partir de 1000 échantillons .....	162
Tableau 33: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense.....	163
Tableau 34: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense.....	164
Tableau 35: Liste des actions d'ajustement reformulées effectuées dans le fichier horaire H.DAT (L : Ligne ; V : Voie) .....	168
Tableau 36: D-stat (le degré de l'importance) et P-value (les valeurs de significativité) calculés à partir de 1000 échantillons .....	168
Tableau 37: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense.....	169
Tableau 38: Le scénario d'ajustement associé à la solution la plus dense.....	170
Tableau 39: les différents polynômes relatifs à différents loi de distribution [197] .....	205
Tableau 40: Nombre de termes M+1 dans le développement en PC tronqué à l'ordre n et pour p variables aléatoires .....	206
Tableau 41: Exemple de polynômes de PC de 3 degré .....	210

