



**HAL**  
open science

# Couplage AIG/MEG pour l'analyse de détails structuraux par une approche non intrusive et certifiée

Marie Tirvaudey

## ► To cite this version:

Marie Tirvaudey. Couplage AIG/MEG pour l'analyse de détails structuraux par une approche non intrusive et certifiée. Mécanique [physics.med-ph]. INSA de Toulouse, 2019. Français. NNT : 2019ISAT0016 . tel-02443232

**HAL Id: tel-02443232**

**<https://theses.hal.science/tel-02443232>**

Submitted on 17 Jan 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

En vue de l'obtention du

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

Délivré par :

*l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA de Toulouse)*

---

---

Présentée et soutenue le *27 septembre 2019* par :

**MARIE TIRVAUDEY**

**Couplage AIG/MEF pour l'analyse de détails structuraux par une  
approche non-intrusive et certifiée.**

---

---

## JURY

|                       |                            |                       |
|-----------------------|----------------------------|-----------------------|
| THOMAS ELGUEDJ        | Professeur des Universités | Rapporteur            |
| ERIC FLORENTIN        | Professeur des Universités | Rapporteur            |
| MICKAËL ABBAS         | Ingénieur de Recherche     | Examineur             |
| SERGE PRUDHOMME       | Professeur                 | Président             |
| VALENTINE REY         | Maître de Conférences      | Examinatrice          |
| STÉPHANE GUINARD      | Ingénieur de Recherche     | Invité                |
| ROBIN BOUCLIER        | Maître de conférences      | Encadrant de thèse    |
| LUDOVIC CHAMOIN       | Professeur des Universités | Co-Directeur de thèse |
| JEAN-CHARLES PASSIEUX | Professeur des Universités | Directeur de thèse    |

---

### École doctorale et spécialité :

*MEGEP : Génie mécanique, mécanique des matériaux*

### Unité de Recherche :

*Institut Clément Ader (UMR 312) - Laboratoire de Mécanique et Technologie (UMR 8535)*

### Directeur(s) de Thèse :

*Jean-Charles PASSIEUX et Ludovic CHAMOIN*

### Rapporteurs :

*Eric FLORENTIN et Thomas ELGUEDJ*

---

## Remerciements

---

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse Jean-Charles Passieux et Ludovic Chamoin d'avoir monter un beau projet en collaboration entre deux laboratoires de part et d'autre de la France. Merci d'avoir été présent pendant ces trois années aussi bien au niveau scientifique qu'humain. Je souhaite aussi énormément remercier mon encadrant de thèse Robin Bouclier qui m'a accordé beaucoup de temps durant cette thèse, merci d'avoir passé des après-midi à coder avec moi. Un très grand merci à vous trois, cette thèse n'aurait sûrement pas été celle qu'elle a été sans votre soutien et votre motivation.

Je remercie Serge Prudhomme d'avoir présidé, pour une première fois avec brio, mon jury de thèse. Merci aux deux rapporteurs Thomas Elguedj et Eric Florentin d'avoir lu attentivement mon manuscrit pendant leur vacances et pour les nombreuses remarques et discussions qui ont pu en découler. Merci aussi aux autres membres du jury : Valentine Rey, Mickaël Abbas et Stéphane Guinard pour les nombreux échanges qui ont suivis ma présentation et pour l'intérêt montré par l'industrie sur mes travaux de recherche.

Je souhaite remercier l'intégralité du personnel : permanents, gestionnaires et techniciens des deux laboratoires (ICA à Toulouse et LMT à Cachan) pour leur accueil chaleureux. Mais surtout une pensée particulière pour l'ensemble des doctorants et post-doctorants avec lesquels j'ai partagé de très bon moments aussi bien en pause café, en travaillant au Centre de Calcul ou même hors de la vie du laboratoire.

Une pensée toute particulière pour mes camarades de piscine à Cachan : Boubou, Frisou, PB et Richou qui m'ont bien occupé mes soirées du lundi quand la motivation était au rendez vous.

Parmi tous les doctorants que j'ai rencontré, je souhaite remercier particulièrement Stéphane Nachar, collègue de longue date à l'ENS, qui m'a motivé à venir travailler chaque journée et qui m'a très largement aidé pour résoudre mes petites soucis de codes ("codé avec les pieds") ainsi que Guillaume Colantonio mon co-bureau de Toulouse avec lequel j'ai partagé pleins de bons moments malheureusement toujours trop courts.

Un grand merci à toute la team d'amis de Cachan (ça serait trop long de tous vous citer), mes copines Aurore, Lucie, Sophie et Mathilde, qui ont été là durant toutes mes années d'ENS et encore après pendant la thèse pour partager de super moments, vous êtes des amis géniaux sur qui je sais que je peux compter.

Pleins de pensées pour ma famille, en particulier mes parents et mes sœurs, qui m'ont rapidement laissé faire ce que je souhaitais en me rendant très indépendante mais tout en gardant un œil sur moi.

Le mot de la fin, pour Hugo, mon compagnon depuis quelques années déjà, qui outre ravitailler mes soirées de bonnes bières a été et est encore un pilier dans ma vie au quotidien.

**AIG** Analyse IsoGéométrique

**CAO** Conception Assistée par Ordinateur

**EF** Éléments Finis

**ERC** Erreur en Relation de Comportement

**IG** IsoGéométrique

**MEF** Méthode des Éléments Finis

**NURBS** Non-Uniform Rational B-Splines

|  |  |           |
|--|--|-----------|
| <b>Introduction</b>  |  | <b>7</b>  |
| <b>I État de l’art</b>   |  | <b>10</b> |
| <b>1 Analyse isogéométrique : définition et comparaison avec la méthode des éléments finis</b> |  | <b>11</b> |
| 1.1 Introduction à l’analyse isogéométrique . . . . .  |  | 12        |
| 1.1.1 Bases de l’analyse isogéométrique . . . . .  |  | 12        |
| 1.1.1.1 Vecteurs noeuds et B-Splines . . . . .   |  | 12        |
| 1.1.1.2 Fonctions Non-Uniform Rational B-Splines . . . . .                                     |  | 14        |
| 1.1.1.3 Méthodes de raffinement . . . . .  |  | 14        |
| 1.1.2 Analyse isogéométrique versus méthode des éléments finis . . . . .                       |  | 15        |
| 1.1.3 Exemple d’une résolution isogéométrique . . . . .  |  | 16        |
| 1.2 Lien entre l’analyse isogéométrique et la méthode des éléments finis . . . . .             |  | 18        |
| 1.2.1 Décomposition de Bézier . . . . .  |  | 18        |
| 1.2.2 Fonctions de Bernstein . . . . .   |  | 18        |
| 1.2.3 Opérateur d’extraction de Bézier . . . . .   |  | 20        |
| <b>2 Approches multi-échelles</b>  |  | <b>22</b> |
| 2.1 Etat de l’art des méthodes de calcul multi-échelles . . . . .                              |  | 23        |
| 2.1.1 Méthodes multi-échelles micro/macro . . . . .  |  | 23        |
| 2.1.2 Méthodes de couplage avec transfert d’information à l’interface . . . . .                |  | 24        |
| 2.1.3 Méthodes non-intrusives . . . . .  |  | 25        |
| 2.2 Principe des méthodes de couplage . . . . .  |  | 27        |
| 2.2.1 Problème de référence . . . . .  |  | 28        |
| 2.2.2 Résolution couplée classique . . . . .   |  | 28        |
| 2.2.3 Résolution couplée non-intrusive . . . . .   |  | 31        |
| <b>3 Évaluation de la qualité d’une solution couplée</b>                                       |  | <b>34</b> |
| 3.1 Estimation de l’erreur pour les calculs multi-échelles . . . . .                           |  | 35        |
| 3.1.1 Introduction à la notion d’erreur . . . . .  |  | 35        |
| 3.1.2 État de l’art des méthodes de certification des méthodes multi-échelles . . . . .        |  | 35        |
| 3.1.3 Estimation d’erreur de couplage non-intrusif . . . . .                                   |  | 36        |

|  |  |           |
|--|--|-----------|
| 3.2  | Technique d'estimation d'erreur en quantité d'intérêt . . . . .                                    | 37        |
| 3.2.1  | Quantité d'intérêt et problème adjoint . . . . .   | 38        |
| 3.2.2  | Estimation de l'erreur en quantité d'intérêt par la méthode des résidus . .                        | 38        |
| 3.2.3  | Estimation de l'erreur en quantité d'intérêt par l'erreur en relation de<br>comportement . . . . . | 40        |
| 3.2.3.1  | Fonctionnelle ERC . . . . .  | 40        |
| 3.2.3.2  | Application de l'ERC sur une quantité d'intérêt . . . . .  | 40        |
| <b>II Couplage entre l'analyse isogéométrique et la méthode des éléments<br/>finis</b> |  | <b>43</b> |
| <b>4</b>   | <b>Implémentation de l'analyse isogéométrique dans un code éléments finis</b>                      | <b>44</b> |
| 4.1  | Extraction de Lagrange . . . . .   | 45        |
| 4.1.1  | Des polynômes de Lagrange aux polynômes de Bernstein . . . . .                                     | 45        |
| 4.1.2  | Lien direct entre les fonctions Lagrange et B-Splines . . . . .                                    | 46        |
| 4.1.3  | Extraction dans le cas des Non-Uniform Rational B-Splines . . . . .                                | 47        |
| 4.1.4  | Implémentation de l'extraction de Lagrange . . . . .   | 47        |
| 4.1.4.1  | Dans le cas NURBS . . . . .  | 48        |
| 4.1.4.2  | Dans le cas B-Spline . . . . .   | 48        |
| 4.2  | Stratégie non-intrusive développée . . . . .   | 49        |
| 4.2.1  | Principe . . . . .   | 49        |
| 4.2.2  | Approximation simple . . . . .   | 50        |
| 4.2.3  | Autres approximations possibles . . . . .  | 52        |
| 4.2.4  | Limite de la méthode . . . . .   | 55        |
| 4.3  | Implémentation non-intrusive dans le cas non-linéaire . . . . .                                    | 55        |
| <b>5</b>   | <b>Résultats numériques de l'implémentation</b>  | <b>57</b> |
| 5.1  | Cas-test linéaires . . . . .   | 58        |
| 5.1.1  | Arc circulaire en dimension 2 . . . . .  | 58        |
| 5.1.2  | Coque 3D . . . . .   | 60        |
| 5.1.2.1  | Cylindre pincé . . . . .   | 60        |
| 5.1.2.2  | Hémisphère pincé . . . . .   | 61        |
| 5.1.3  | Pièce massive 3D . . . . .   | 62        |
| 5.2  | Cas-test non-linéaire . . . . .  | 64        |
| 5.2.1  | Besoins pour l'implémentation dans <i>Code_Aster</i> . . . . .                                     | 64        |
| 5.2.2  | Application à l'élasto-plasticité . . . . .  | 65        |
| <b>6</b>   | <b>Vers un couplage AIG/MEF automatique</b>  | <b>69</b> |
| 6.1  | Utilisation du lien AIG/MEF pour le couplage . . . . .   | 70        |
| 6.1.1  | Séparation global-local . . . . .  | 70        |
| 6.1.2  | Formulation du couplage et des opérateurs de Mortar . . . . .                                      | 72        |
| 6.2  | Exemple d'application du couplage IG/EF . . . . .  | 73        |
| <b>III Certification et pilotage des stratégies de couplage non-intrusif</b>           |  | <b>78</b> |
| <b>7</b>   | <b>Outils de vérification basés sur les résidus d'équilibre pondérés</b>                           | <b>79</b> |
| 7.1  | Méthode des résidus pondérés dans le cadre du couplage non-intrusif . . . . .                      | 80        |
| 7.1.1  | Formulation faible du couplage pour l'estimation d'erreur . . . . .                                | 80        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 7.1.2    | Estimateur d'erreur en résidus pour un problème couplé . . . . .                   | 80         |
| 7.2      | Stratégie d'adaptation . . . . .   | 81         |
| 7.2.1    | Définition des indicateurs d'erreur . . . . .                                      | 81         |
| 7.2.2    | Implémentation des indicateurs d'erreur . . . . .                                  | 82         |
| 7.2.3    | Procédure d'adaptation . . . . .   | 83         |
| <b>8</b> | <b>Application numérique de l'erreur en résidus</b>                                | <b>85</b>  |
| 8.1      | Poutre en traction en dimension 1 . . . . .  | 86         |
| 8.1.1    | Définition des problèmes primal et adjoint . . . . .                               | 86         |
| 8.1.2    | Estimation de l'erreur globale de couplage . . . . .                               | 87         |
| 8.1.3    | Procédure d'adaptation . . . . .   | 89         |
| 8.1.3.1  | Déplacement moyen en bout de poutre . . . . .                                      | 89         |
| 8.1.3.2  | Autres quantités d'intérêt . . . . .   | 89         |
| 8.2      | Plaque en traction avec inclusion locale d'affaiblissements . . . . .              | 91         |
| 8.2.1    | Variation homogène du Module de Young . . . . .                                    | 92         |
| 8.2.1.1  | Affaiblissement faible . . . . .   | 92         |
| 8.2.1.2  | Affaiblissement fort . . . . .   | 94         |
| 8.2.2    | Variation hétérogène du Module de Young . . . . .                                  | 95         |
| 8.3      | Plaque trouée en flexion . . . . .   | 96         |
| 8.3.1    | Quantité d'intérêt en déplacement . . . . .  | 99         |
| 8.3.2    | Quantité d'intérêt en contrainte . . . . .   | 101        |
| <b>9</b> | <b>Vers une procédure d'adaptation basée sur l'erreur en relation de comporte-</b> | <b>103</b> |
|          | <b>ment</b>  |            |
| 9.1      | Principe de l'erreur en relation de comportement pour un couplage non-intrusif .   | 104        |
| 9.1.1    | Construction d'une famille de solutions approchées . . . . .                       | 104        |
| 9.1.2    | Estimation d'erreur basée sur l'ERC pour un couplage non-intrusif . . . .          | 105        |
| 9.1.3    | Indicateurs d'erreur basés sur l'ERC et adaptation . . . . .                       | 106        |
| 9.1.4    | Modification de la procédure d'équilibrage avec un couplage non-intrusif .         | 108        |
| 9.2      | Application de l'adaptation basée sur l'ERC . . . . .                              | 109        |
| 9.2.1    | Comportement linéaire dans la zone locale . . . . .                                | 109        |
| 9.2.2    | Comportement non-linéaire dans la zone locale . . . . .                            | 111        |
|          | <b>Conclusion</b>  | <b>115</b> |
|          | <b>Annexe : ERC en non-linéaire</b>  | <b>118</b> |

La conception de structures complexes dans l'industrie aéronautique, aérospatiale, ou automobile nécessite actuellement une grande quantité d'essais mécaniques expérimentaux afin de comprendre leur comportement et leur tenue en service ; ces essais mécaniques sont très coûteux. Une des tendances actuelles vise à remplacer une partie des essais par des simulations numériques (Virtual Testing) afin de réduire les coûts et temps de développement de nouveaux produits.

Dans ce contexte, on observe une évolution de l'intérêt pour les nouvelles méthodes de calcul numérique. Parmi les méthodes les plus avancées, l'Analyse IsoGéométrique (AIG) constitue une alternative intéressante car elle permet d'utiliser les fonctions de la Conception Assistée par Ordinateur (CAO) directement pour faire le calcul (voir Figure 1). Cette méthode est performante car elle offre une meilleure précision et robustesse par degré de liberté comparée à la Méthode des Éléments Finis (MEF) classiquement utilisée.

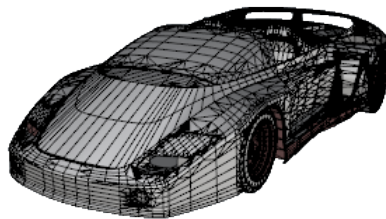


FIGURE 1 – CAO d'une voiture sous Rhinocéros [142] ; description à l'aide de fonctions Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS), base de l'AIG.

Malgré l'engouement de la communauté scientifique pour cette méthode, son développement dans des codes industriels reste à ce jour assez limité et est encore intrusif ce qui en limite son utilisation massive dans le domaine industriel. En effet, les fonctions de forme NURBS utilisées dans l'AIG ne sont pas compatibles avec la structure élémentaire des codes Eléments Finis (EF) classiques.

Par ailleurs, l'AIG capture difficilement les phénomènes physiques localisés (telles que de la plasticité, du contact ou encore de l'endommagement), à cause de la mise en place complexe du remaillage local, et ne permet pas de représenter parfaitement des solutions singulières. D'autre part, une approche naturelle pour prendre en compte les phénomènes localisés, en optimisant le temps de calcul, est de limiter la modélisation complexe dans une zone d'intérêt et de considérer des modèles plus simples loin du phénomène d'intérêt. Parmi les nombreuses méthodes multi-échelles développées, le couplage local-global non-intrusif est un outil performant qui permet de réaliser des modifications locales dans le modèle existant (en terme de raffinement de maillage, introduction de phénomène local lié à la géométrie ou au comportement matériau...) sans modifier les opérateurs globaux initiaux (voir Figure 2).

Comme toutes les méthodes de calcul numérique, le couplage local-global non-intrusif est



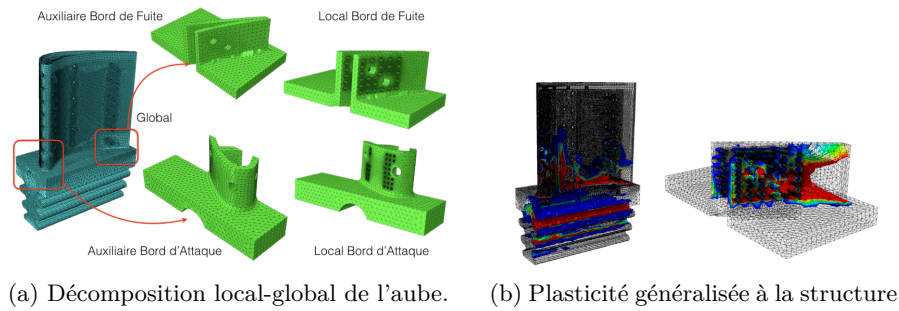


FIGURE 2 – Couplage local-global non-intrusif sur une aube de moteur d’avion afin de simuler la plasticité [20].

impacté par des erreurs venant de différentes sources (discrétisation, modèle, stratégie de calcul) qui doivent être contrôlées afin de garantir la précision de la prédiction. Cela est nécessaire pour permettre son utilisation industrielle sur des designs complexes.

Dans ce contexte, l’objectif de la thèse est de coupler l’AIG et la MEF, via des codes industriels existants, pour l’analyse de détails structuraux à l’aide d’une approche non-intrusive et certifiée. L’un des objectifs majeurs initial de cette thèse est d’arriver à résoudre des analyses isogéométriques dans des codes Eléments Finis industriels sans venir modifier la structure du code. Pour cela, nous allons mettre en place un lien IsoGéométrique (IG)-EF à partir de la construction d’opérateurs globaux entre les fonctions NURBS, utilisées pour l’AIG, et les polynômes de Lagrange classiquement rencontrés dans la MEF. Ce lien permet de créer un maillage classique EF où chaque élément possède sa propre paramétrisation à partir de la paramétrisation NURBS initiale compatible avec l’analyse et directement extraite de la CAO. Dans un second temps, ce maillage créé sert de maillage d’entrée dans un code EF industriel existant, considéré ainsi comme une boîte noire pour réaliser l’analyse souhaitée.

Pour limiter le coût de calcul et outrepasser les difficultés de remaillage local en IG et considérer des cas à fort gradient pour lesquels l’AIG n’apporte rien de plus que la MEF, nous avons choisi dans cette thèse d’utiliser la méthode de couplage local-global non-intrusif. Ce couplage est réalisé entre un modèle global IG, qui permet de bien décrire la géométrie globale de la structure, et un modèle local EF comprenant la complexité du problème pour lequel de nombreux modèles EF existent déjà dans les codes industriels. Nous montrons qu’en se basant sur le précédent lien IG-EF il est possible de simplifier l’implémentation des opérateurs de couplage.

Afin d’optimiser le choix du couplage local-global, des outils de vérification sont mis en place dans un dernier temps. Ainsi en séparant les différentes sources d’erreur existantes (modèle, discrétisation, convergence de l’algorithme de couplage), il est possible de déterminer un couplage optimal en terme de positionnement de la zone locale, de raffinement du maillage de cette zone et d’itérations de la stratégie de couplage non-intrusif. Les indicateurs d’erreur sont déterminés vis-à-vis d’une quantité d’intérêt donnée (déplacement, contrainte ou déformation) dans une certaine zone à l’aide de la méthode des résidus pondérés, ou à l’aide des techniques d’erreur en relation de comportement.

Dans ce manuscrit, les travaux de thèse sont répartis en trois parties organisées de la façon suivante. Dans la première partie, on réalise un état de l’art sur la méthode de résolution isogéométrique, les méthodes de calcul multi-échelle et l’évaluation de la qualité d’une solution. Cette partie est ainsi divisée en trois chapitres :

- le chapitre 1 introduit les éléments nécessaires à la compréhension de l’analyse isogéométrique. Cette méthode est comparée avec la résolution classique Eléments Finis et un

- premier lien entre ces deux méthodes est explicité ;
- le chapitre 2 fait le bilan des différentes techniques de calcul multi-échelles. Le principe de la méthode de couplage local-global non-intrusif, choisie comme méthode de résolution dans cette thèse, est aussi développé ;
- le chapitre 3 expose les différentes méthodes d'évaluation de la qualité d'une solution de couplage multi-échelles basées sur des calculs d'erreur.

Dans la seconde partie, nous proposons un lien direct entre l'AIG et la MEF permettant de réaliser des analyses isogéométriques dans un code industriel EF sans venir modifier ce dernier. Cette partie s'articule autour de trois chapitres :

- le chapitre 4 développe la démarche et la création des différents opérateurs nécessaires à la construction d'un lien global direct entre les méthodes IG et EF, pour des résolutions linéaires ou non ;
- le chapitre 5 permet de valider la méthode proposée sur un certain nombre d'exemples, de dimension 2 et 3, linéaires ou non-linéaires en utilisant le code industriel *Code\_Aster* développé par EDF R&D ;
- le chapitre 6 est dédié à l'utilisation du lien IG-EF créé afin de faciliter un couplage local-global non-intrusif automatique entre ces deux méthodes.

La troisième partie se focalise sur la mise en place des différentes méthodes d'estimation d'erreur d'un problème couplé afin d'optimiser la définition de ce couplage.

- le chapitre 7 explicite la démarche de l'estimation d'erreur sur une quantité d'intérêt pour un problème couplé et la séparation des différentes sources d'erreur par la méthode des résidus pondérés. Un algorithme d'adaptation basé sur les différentes sources d'erreur est défini pour optimiser le couplage local-global ;
- le chapitre 8 détaille la mise en place de cette procédure d'adaptation basée sur l'estimation des erreurs pour diverses quantités d'intérêt sur des couplages local-global linéaires ;
- le chapitre 9 est dédié à une extension de la procédure d'adaptation du couplage local-global non-intrusif avec des bornes d'erreur garanties par l'estimation d'Erreur en Relation de Comportement (ERC).

Première partie

État de l'art

---

## Analyse isogéométrique : définition et comparaison avec la méthode des éléments finis

---

### Sommaire

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>1.1</b> | <b>Introduction à l'analyse isogéométrique . . . . .</b>                    | <b>12</b> |
| 1.1.1      | Bases de l'analyse isogéométrique . . . . .                                 | 12        |
| 1.1.2      | Analyse isogéométrique versus méthode des éléments finis . . . . .          | 15        |
| 1.1.3      | Exemple d'une résolution isogéométrique . . . . .                           | 16        |
| <b>1.2</b> | <b>Lien entre l'analyse isogéométrique et la méthode des éléments finis</b> | <b>18</b> |
| 1.2.1      | Décomposition de Bézier . . . . .   | 18        |
| 1.2.2      | Fonctions de Bernstein . . . . .  | 18        |
| 1.2.3      | Opérateur d'extraction de Bézier . . . . .                                  | 20        |

---

Dans ce chapitre nous faisons une courte introduction à la méthode d'analyse isogéométrique, en insistant sur ses analogies et différences avec la MEF. Nous présentons aussi les premiers travaux permettant de lier ces deux méthodes afin de faciliter l'implémentation de l'AIG dans les codes industriels actuels.

## 1.1 Introduction à l'analyse isogéométrique

Dans cette partie, un ensemble d'informations sur l'analyse isogéométrique nécessaire pour la compréhension de la suite du manuscrit est rappelé. Plus de détails sont disponibles dans [44,82]. Dans cette thèse, les paramétrisations B-Splines et NURBS des exemples traités sont considérées comme connues ; pour aller directement de la CAO à une représentation adaptée à une analyse par l'AIG se référer par exemple à [3].

### 1.1.1 Bases de l'analyse isogéométrique

#### 1.1.1.1 Vecteurs noeuds et B-Splines

Les fonctions B-Splines sont définies à l'aide d'un vecteur-noeud  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ . Ce dernier est constitué de coordonnées paramétriques  $\xi_i$  rangées dans l'ordre croissant,  $p$  étant le degré polynomial de la B-Spline et  $n$  le nombre de fonctions associées. Les noeuds  $\xi_i$  divisent l'espace paramétrique en éléments (ou "knot-span" en terminologie IG) et l'intervalle  $[\xi_1; \xi_{n+p+1}]$  forme le patch isogéométrique. Par ailleurs, le vecteur-noeud est dit uniforme quand tous les noeuds sont uniformément espacés. Si le premier et le dernier noeud ont une multiplicité de  $p+1$ , alors le vecteur-noeud est dit ouvert. Dans ce cas, les fonctions sont interpolantes aux bords du patch IG ce qui facilite l'application des conditions aux limites. C'est pour cette raison que dans l'utilisation courante de l'AIG et dans la suite de nos travaux, seuls des vecteurs noeuds ouverts sont utilisés.

La  $i$ -ème fonction de base B-Spline de degré  $p$  est définie par  $N_{i,p}$  de façon récursive en utilisant la formule de Cox-de Boor [42] :

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \text{ pour } p = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$N_{i,p} = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \text{ pour } p = 1 : n.$$

La Figure 1.1 montre l'allure des fonctions de forme d'ordre 0, 1 et 2.

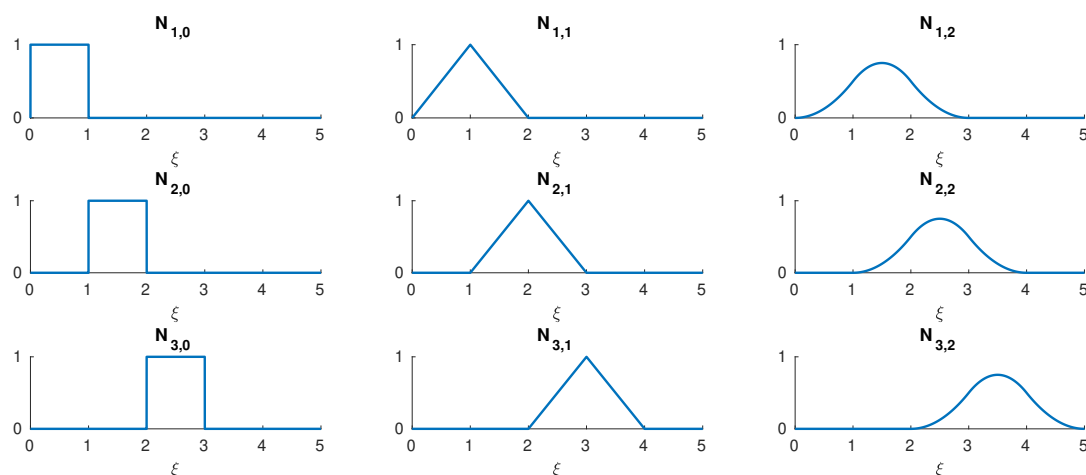


FIGURE 1.1 – Exemple de fonctions de forme de degré 0, 1, 2 (de gauche à droite).

Les cas étudiés sont principalement de degré  $p$  supérieur ou égal à 2 afin que les fonctions de forme se différencient de celles des éléments finis classiques. En général, une fonction de degré  $p$

aura  $p - 1$  dérivées continues aux différents noeuds. Par ailleurs, si un noeud  $\xi_i$  a une multiplicité  $m_i$ , alors le nombre de dérivées continues diminue de  $m_i$ .

Cette dépendance de la multiplicité d'un noeud à la continuité est mise en évidence sur la Figure 1.2 où se trouvent les courbes de degré 4 pour le vecteur  $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5\}$  avec différents niveaux de continuité aux bords des éléments [44].

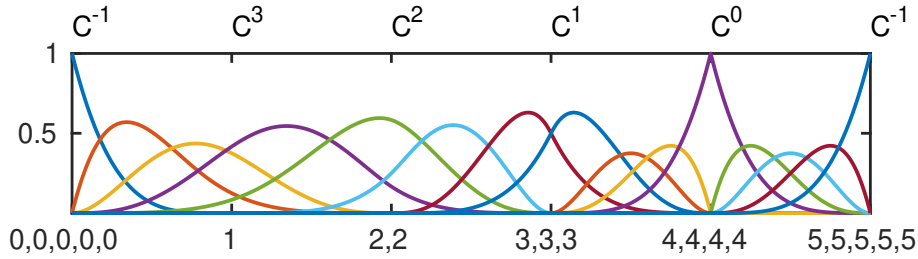


FIGURE 1.2 – Fonction de forme de degré 4.

Les courbes B-Splines,  $\mathcal{C}^{BS}$  peuvent ainsi être construites comme suit :

$$\mathcal{C}^{BS} = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) P_i = \mathbf{P}^{BS^T} \mathbf{N}(\xi), \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{P}^{BS} = \begin{bmatrix} x_1^1 \dots x_1^d \\ \dots \\ x_n^1 \dots x_n^d \end{bmatrix}$  est une matrice qui comprend les positions des points de contrôle et

$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ \dots \\ N_n \end{bmatrix}$  est un vecteur de fonctions de forme B-Spline. Ces notations sont en adéquation

avec [21, 148] :  $d$  est le nombre de dimensions spatiales et  $\mathbf{P}^{BS}$  est une matrice de taille  $n \times d$ . L'interpolation linéaire par morceaux entre les points de contrôle forme le maillage de contrôle. Sur la Figure 1.3, un exemple de courbe B-Spline est donné. Celle-ci est formée à l'aide de 7 points de contrôle (cercles noirs), le maillage de contrôle de cette courbe est l'interpolation linéaire entre chacun de ces points.

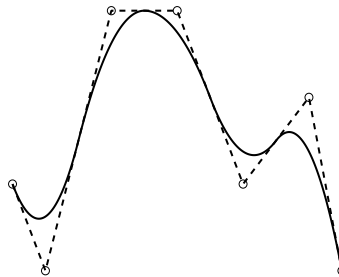


FIGURE 1.3 – Courbe B-Spline (ligne continue noire) associé à 7 points de contrôle (cercles noirs). Le maillage de contrôle, interpolation linéaire entre les points de contrôle, est tracé en pointillés noirs.

Pour les espaces multi-dimensionnels, les fonctions de forme B-Splines sont déterminées par

produit tensoriel de fonctions 1D, ce qui donne en dimension 3 :

$$N_A = N_{i,p}(\xi) \times N_{j,q}(\eta) \times N_{k,r}(\zeta), \quad (1.3)$$

pour le point de contrôle  $P_A$  qui correspond au  $i^{\text{ème}}$ ,  $j^{\text{ème}}$ ,  $k^{\text{ème}}$  point de contrôle dans chaque direction.

### 1.1.1.2 Fonctions Non-Uniform Rational B-Splines

L'ensemble des fonctions NURBS :  $\mathbf{R}^{AIG} = \{R_A^{AIG}\}_{A=1}^{n_A}$  est défini à partir des fonctions B-Splines  $\{N_A\}_{A=1}^{n_A}$ . Pour ce faire, il faut introduire les poids  $\{w_A^{AIG}\}_{A=1}^{n_A}$  associés à chacun des points de contrôle  $\mathbf{P}^{AIG} = \{P_A^{AIG}\}_{A=1}^{n_A}$ . Les fonctions rationnelles s'écrivent ainsi :

$$R_A^{AIG} = \frac{N_A w_A^{AIG}}{W^{AIG}}, \quad \text{avec} \quad W^{AIG} = \sum_{A=1}^{n_A} N_A w_A^{AIG}. \quad (1.4)$$

De la même façon que pour la définition des entités B-Splines (1.2), les objets NURBS sont définis de telle sorte que :

$$\mathcal{V}^{AIG} = \sum_{A=1}^{n_A} R_A^{AIG} P_A^{AIG} = \mathbf{P}^{AIG^T} \mathbf{R}^{AIG}. \quad (1.5)$$

Un exemple de surface NURBS, associée aux points de contrôle (points bleus), et dont le maillage de contrôle est en pointillés bleus, est donné sur la Figure 1.4. Les fonctions NURBS permettent de décrire exactement la géométrie d'une section conique. Les positions optimales et les poids des points de contrôle peuvent être déterminés en utilisant des logiciels CAO appropriés comme par exemple Rhino [81, 142].

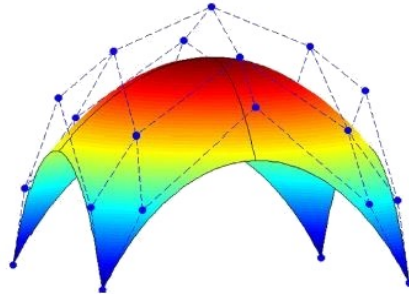


FIGURE 1.4 – Surface NURBS et points de contrôle [82].

### 1.1.1.3 Méthodes de raffinement

Grâce à l'analyse isogéométrique, il est facile de raffiner globalement le maillage tout en conservant la géométrie de départ. La supériorité de l'approche par rapport aux EF traditionnels s'explique en majeure partie grâce à cette propriété.

Il existe deux techniques de raffinement qui ne modifient pas la géométrie et la paramétrisation initiales :

- L'élévation de degré : le degré des fonctions de forme utilisé pour décrire la géométrie est augmenté ce qui entraîne, afin de conserver la régularité de l'espace initial, l'augmentation de la multiplicité de chaque nœud. Cette technique de raffinement s'apparente à celle du  $p$ -raffinement éléments finis permettant l'élévation de degré de fonctions  $\mathcal{C}^0$ . Un exemple d'élévation d'ordre est donné par le passage de la Figure 1.5a à la Figure 1.5b ;

- L'insertion de nœud : un ou plusieurs nœuds sont insérés dans le vecteur nœud initial. La continuité au niveau du nœud inséré est  $\mathcal{C}^{p-1}$  s'il est n'inséré qu'une seule fois. Cette technique de raffinement s'apparente à celle du  $h$ -raffinement éléments finis si le nœud est inséré suffisamment de fois de sorte que la régularité des fonctions soit  $\mathcal{C}^0$  en ce nœud. L'influence de ce raffinement sur les fonctions de forme B-Splines est illustré par le passage de la Figure 1.5b à la Figure 1.5c où le nœud  $\bar{\xi} = 0.5$  est inséré dans le vecteur nœud initial.

Une type de raffinement supplémentaire émerge de ces deux précédentes techniques et est couramment appelée le  $k$ -raffinement. Il consiste en l'élévation de degré de  $p$  à  $q$  sur l'ensemble de la géométrie (grossière), puis en l'insertion d'un nœud interne  $\bar{\xi}$  une seule fois qui aura ainsi  $q - 1$  dérivées continues. Ce raffinement est illustré par le passage direct entre la Figure 1.5a et la Figure 1.5c. Ce type de raffinement n'a aucune équivalence en éléments finis : il permet d'augmenter la régularité de l'espace d'approximation.

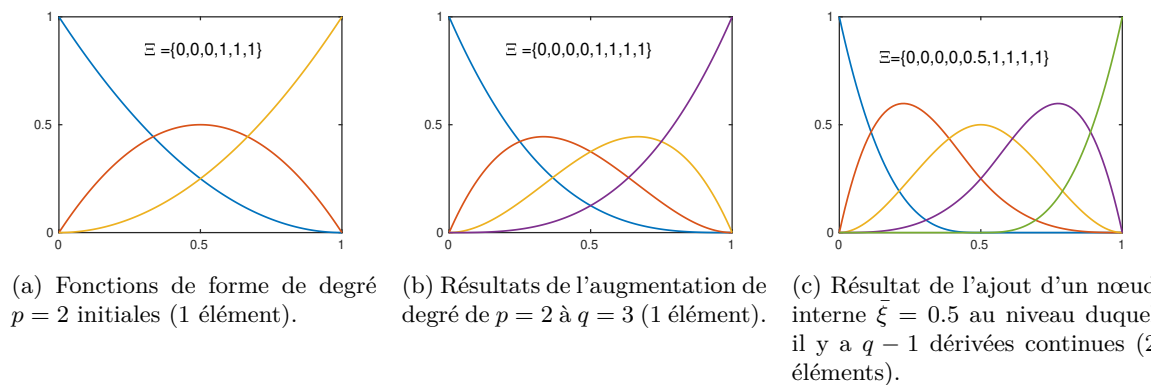


FIGURE 1.5 – Influence de la succession d'une élévation de degré et de l'ajout d'un nœud  $\bar{\xi}$  ( $k$ -raffinement) sur les fonctions de forme B-Splines associées au vecteur-nœud  $[0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1]$ .

**Remarque 1** Les fonctions de base multi-dimensionnelles sont définies par un produit tensoriel pour des géométries de dimension supérieure à deux. Ainsi il n'est pas possible de raffiner un seul élément de l'espace paramétrique sans propager ce raffinement à l'ensemble du maillage. Des techniques se basant sur les fonctions B-Splines mais qui ne sont pas définies par produit tensoriel dans l'espace considéré ont été développées. Parmi elles on trouve les B-Splines hiérarchiques [54, 76, 145, 151], les LRB-Splines [49] ou encore les T-Splines [36, 57].

### 1.1.2 Analyse isogométrique versus méthode des éléments finis

L'idée principale de l'analyse isogométrique est de modéliser exactement la géométrie avec des fonctions qui servent à approximer la solution. La Figure 1.6 montre la différence majeure entre les deux méthodes : pour la MEF la base d'approximation donne la géométrie tandis qu'avec l'AIG la base d'approximation découle directement de la géométrie.

Même si la philosophie du calcul reste similaire à une étude éléments finis, des modifications conséquentes sont à prévoir dans la routine même du code en particulier car les points de contrôle analogues aux nœuds ne sont pas forcément interpolants et les fonctions de forme NURBS sont définies de façon globale (support élargi). Afin de mettre en parallèle l'AIG et la MEF, les caractéristiques principales de ces deux méthodes sont résumées dans le tableau de la Figure 1.6.



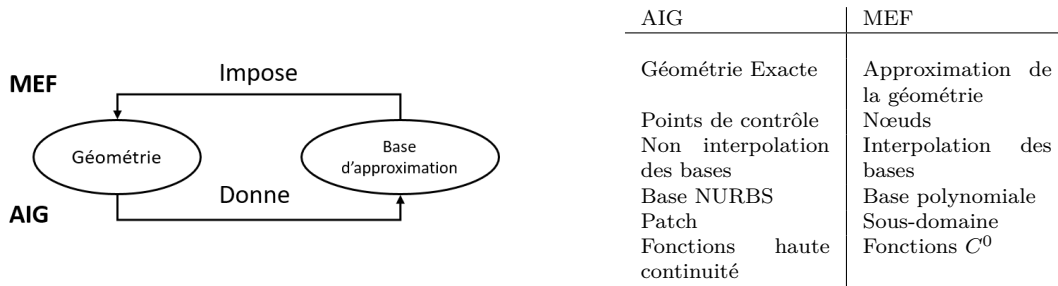


FIGURE 1.6 – Différences entre l’AIG et la MEF.

La Figure 1.7 résume la démarche de l’analyse isogéométrique en mettant en évidence les différents espaces à considérer lors de l’utilisation de B-splines ou NURBS : les espaces indiciel, paramétrique, physique et l’élément parent.

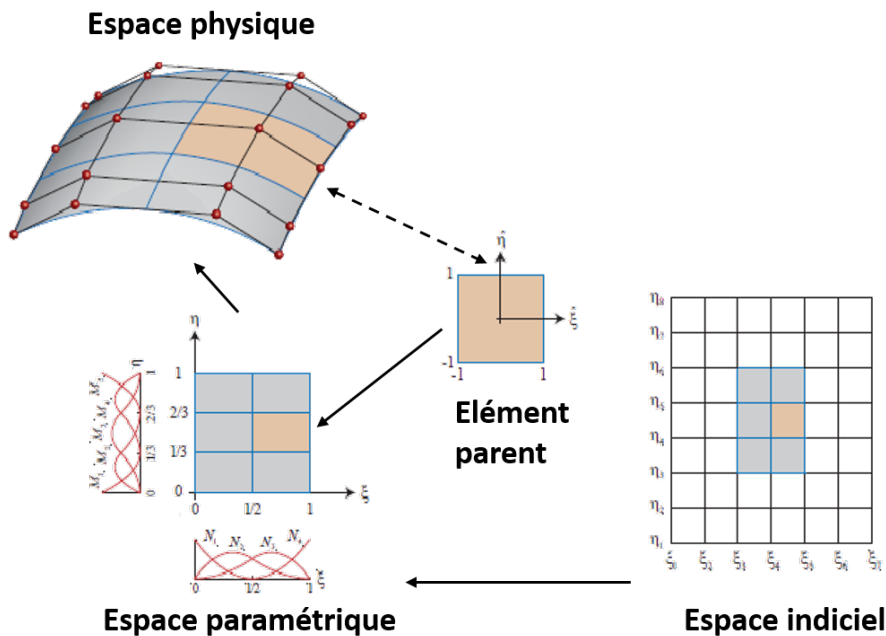


FIGURE 1.7 – Les différents espaces intervenant dans l’AIG pour un maillage constitué de 2x3 éléments quadratiques (inspiré de [82]). L’espace indiciel est l’espace de définition des vecteurs nœuds tandis que les fonctions B-Splines sont définies dans l’espace paramétrique localisé sur l’ensemble du patch. L’intégration est réalisée sur un élément parent puis transmise dans le domaine physique.

### 1.1.3 Exemple d’une résolution isogéométrique

Afin d’expliquer rapidement le principe de l’analyse isogéométrique, on étudie une poutre circulaire avec deux éléments dans la direction de l’arc et seulement un élément dans l’autre direction. Cet exemple est utilisé dans la suite du manuscrit pour expliquer notre approche pour relier l’AIG et la MEF.

La paramétrisation NURBS de la géométrie est basée sur deux vecteurs nœuds d’ordre 2  $\xi = [0000.5111]$  et  $\eta = [000111]$ , ainsi qu’un ensemble de points de contrôle  $\mathbf{P}^{AIG}$  qui sont représentés par des cercles sur la Figure 1.8. Ces points de contrôle associés aux fonctions de

forme NURBS permettent de définir la géométrie (voir la Figure 1.8).

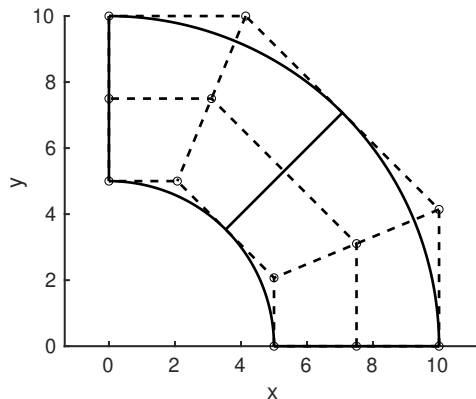


FIGURE 1.8 – Points de contrôle NURBS et géométrie associée de la poutre circulaire. Les points de contrôle (cercles noirs) forment le maillage de contrôle en pointillés. Une fois associés aux fonctions de forme NURBS, ils créent la géométrie physique en noir.

La méthode de résolution IG est similaire à celle des éléments finis. Cependant, comme il est montré sur la Figure 1.7, la définition des fonctions de forme se faisant dans le domaine paramétrique qui recouvre tout le domaine et pas seulement un élément, la quadrature de Gauss est faite dans l'espace parent ce qui ajoute une transformation entre l'espace paramétrique et l'espace parent. L'assemblage des opérateurs se fait alors en utilisant la table de connectivité NURBS, communément appelé IEN (Internal entry number), qui est directement établie à l'aide des vecteurs nœuds et de l'ordre des polynômes. Cette table associe à un élément le numéro des fonctions globales IG non-nulles sur celui-ci.

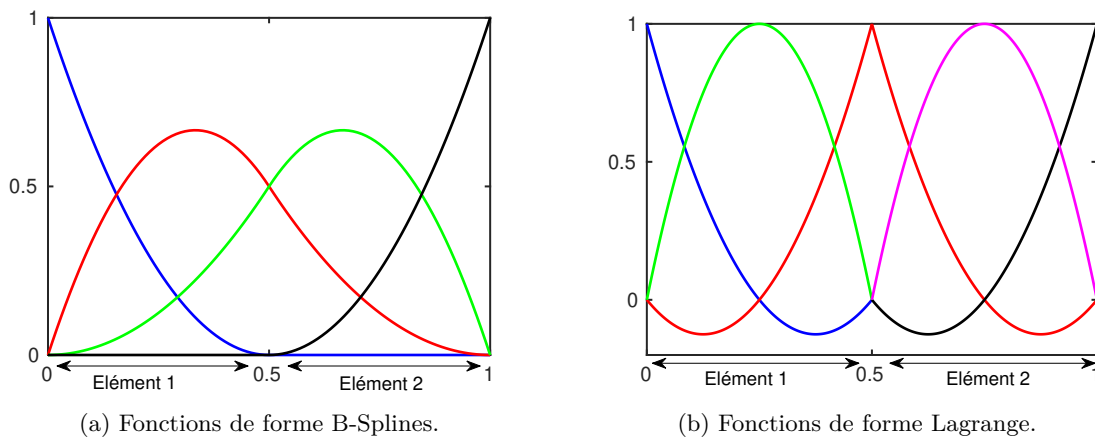


FIGURE 1.9 – Fonctions de forme quadratiques uni-dimensionnelles B-Splines (a) et Lagrange (b) pour un maillage à deux éléments. Les figures sont réalisées dans l'espace paramétrique ( $\xi \in [0; 1]$ ).

Les fonctions de forme B-Splines (resp. Lagrange) uni-dimensionnelles pour cet exemple à deux éléments dans la direction radiale sont tracées sur la Figure 1.9a (resp. 1.9b) et permettent de mettre en évidence le caractère non-élémentaire des fonctions B-Splines. En effet, quatre fonctions B-Splines sont définies sur les deux éléments tandis que pour une modélisation EF, trois polynômes de Lagrange sont créés localement et utilisés sur chacun des éléments ce qui

donne ici cinq fonctions Lagrange globales pour deux éléments.

**Remarque 2** *Bien que dans la cadre d'une implémentation standard l'AIG apparaisse intéressante vis-à-vis de la MEF en terme de ratio entre précision et coût calcul, il est à noter que de nombreux travaux consistant à réduire d'avantage ce coût de calcul ont vu le jour depuis l'avènement de cette technologie. En fait, il apparaît que prendre  $p + 1$  points de Gauss pour un élément AIG de degré  $p$  n'est pas nécessaire pour calculer l'opérateur de rigidité compte tenu de la régularité supérieure des fonctions splines. De ce fait, des nouvelles règles d'intégration plus ou moins liées au patch AIG entier peuvent être considérées [6, 84, 147]. Dans la même idée, lorsqu'on monte vers de hauts degrés, on peut préférer implémenter des méthodes de collocation AIG [5, 146] pour plus d'efficacité. Enfin, il est apparu tout récemment dans la cadre des méthodes Galerkin standards qu'une revisite des procédures d'assemblage classiques élément par élément peut donner à l'AIG toute sa puissance en terme de coût de calcul [28].*

## 1.2 Lien entre l'analyse isogéométrique et la méthode des éléments finis

Malgré un fort intérêt de l'AIG dans la communauté scientifique, son implémentation dans des codes éléments finis industriels reste encore assez limitée. On peut citer quelques bibliothèques EF qui permettent son implémentation telles que LS-Dyna [16, 37, 74, 75], Abaqus [51, 55, 101] ou Radioss [117] mais cela reste peu. En particulier, quelques travaux ont été initiés afin de rapprocher l'AIG de la MEF. Ceux-ci sont majoritairement basés sur les travaux de Borden *et al.* [21], que nous allons reprendre sur le développement présenté dans la partie II.

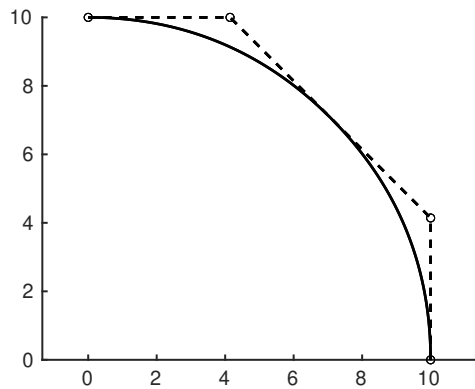
### 1.2.1 Décomposition de Bézier

L'obtention d'une structure  $C^0$  à partir d'un maillage régulier B-Spline se fait par répétition des nœuds internes  $\xi_i$  du vecteur nœud  $\Xi$  jusqu'à ce qu'ils atteignent une multiplicité  $p$ . En effet, comme il a été décrit dans la présentation du  $h$ -raffinement (voir 1.1.1.3), l'ajout d'un nœud fait diminuer la continuité à l'endroit où se trouve ce nœud. Afin de conserver la géométrie B-Spline initiale, les positions des points de contrôle sont recalculées automatiquement. Sur la Figure 1.10, une courbe quadratique B-Spline est utilisée pour illustrer le principe de la décomposition. Après répétition de plusieurs nœuds, la géométrie reste inchangée mais est décrite par un ensemble de fonctions Bernstein  $C^0$ .

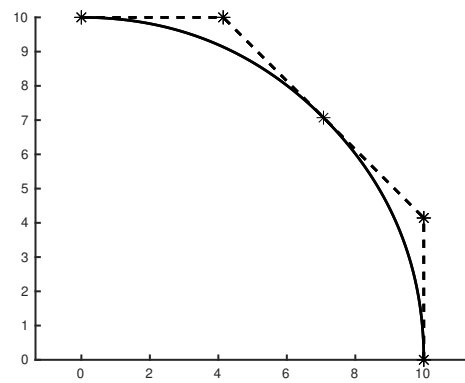
Il est à noter que la géométrie générée n'est pas, à ce stade, celle d'une poutre circulaire car aucune fonction rationnelle n'est utilisée. C'est une simple approximation par des fonctions polynomiales. Dans la suite, le passage de fonctions Bernstein (voir la Figure 1.10d) à des fonctions B-Splines (voir la Figure 1.10c) est expliqué. L'avantage des fonctions Bernstein est qu'elles disposent d'une structure élémentaire similaire à celle des éléments finis (voir Figure 1.10d en rapport avec 1.9b).

### 1.2.2 Fonctions de Bernstein

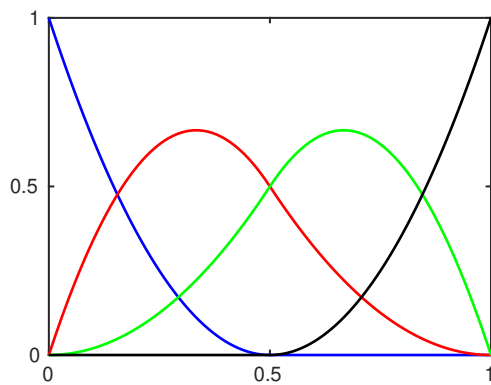
La transformation de Bézier repose sur la définition des courbes de Bézier [27] et des fonctions de Bernstein. Une courbe de Bézier d'ordre  $p$  est une combinaison linéaire de  $p + 1$  fonctions de Bernstein  $\mathbf{B}(\tilde{\xi}) = \{B_{i,p}(\tilde{\xi})\}_{i=1}^{p+1}$  associées à des points de contrôle  $\mathbf{P}^{BER} = \{P_{i,p}\}_{i=1}^{p+1}$ . Les fonctions de Bernstein sont directement définies dans l'élément de référence car chaque élément Bernstein a sa propre paramétrisation.



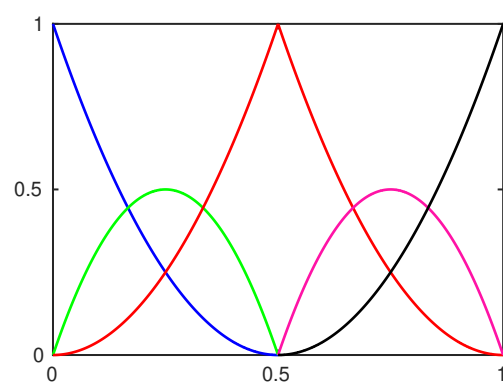
(a) Maillage de contrôle et géométrie construits à partir de fonctions B-Splines  $C^1$ .



(b) Maillage de contrôle et géométrie construits à partir de fonctions Bernstein  $C^0$ .



(c) Fonctions de forme B-Spline.



(d) Fonctions de forme Bernstein.

FIGURE 1.10 – Décomposition de Bézier d'une courbe B-Spline à deux éléments. Pour la discrétisation B-Spline, il y a quatre points de contrôle associés à quatre fonctions globales B-Splines. Pour la discrétisation Bernstein, un point de contrôle est ajouté avec la décomposition de Bézier et chaque élément possède trois fonctions de forme Bernstein locales.

Les polynômes de Bernstein sont construits par récurrence pour  $\tilde{\xi} \in [-1, 1]$  :

$$\begin{cases} B_{i,p}(\tilde{\xi}) = \frac{1}{2}(1 - \tilde{\xi})B_{i,p-1}(\tilde{\xi}) + \frac{1}{2}(1 + \tilde{\xi})B_{i-1,p-1}, \\ B_{1,0} \equiv 1, \\ B_{i,p}(\tilde{\xi}) \equiv 0 \quad \text{si } i < 1 \text{ ou } i > p + 1. \end{cases} \quad (1.6)$$

De la même manière que pour les fonctions B-Splines, les fonctions Bernstein multi-dimensionnelles sont construites par produit tensoriel entre fonctions uni-dimensionnelles. Les fonctions Bernstein pour un élément 2D quadratique à 9 nœuds avec  $\tilde{\xi}$  et  $\tilde{\eta}$  sur  $[-1, 1]$  sont données à titre indicatif dans le tableau 1.1.

TABLE 1.1 – Fonctions de forme quadratiques de Bernstein pour  $\tilde{\xi}$  et  $\tilde{\eta} \in [-1, 1]$ .

|   |  |
|---|--|
| 1 | $(1 - \tilde{\eta})^2(1 - \tilde{\xi}^2)/16$ |
| 2 | $(1 - \tilde{\eta})^2(1 - \tilde{\xi}^2)/8$  |
| 3 | $(1 - \tilde{\eta})^2(1 + \tilde{\xi})^2/16$ |
| 4 | $(1 - \tilde{\eta}^2)(1 - \tilde{\xi})^2/8$  |
| 5 | $(1 - \tilde{\eta}^2)(1 - \tilde{\xi}^2)/4$  |
| 6 | $(1 - \tilde{\eta}^2)(1 + \tilde{\xi})^2/8$  |
| 7 | $(1 + \tilde{\eta})^2(1 - \tilde{\xi})^2/16$ |
| 8 | $(1 + \tilde{\eta})^2(1 - \tilde{\xi}^2)/8$  |
| 9 | $(1 + \tilde{\eta})^2(1 + \tilde{\xi})^2/16$ |

Dans la suite, nous utilisons les notations  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{P}^{BER}$  pour parler des fonctions et des points de contrôle d'un maillage Bernstein multi-dimensionnel composé de plusieurs éléments.

### 1.2.3 Opérateur d'extraction de Bézier

Pour chaque nouveau nœud  $\tilde{\xi}_j$  ajouté, un terme  $\alpha_i^j$  (avec  $i = 1, 2, \dots, n + j$ ) est créé de la façon suivante :

$$\alpha_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i \leq k - p, \\ \frac{\tilde{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} & \text{si } k - p + 1 \leq i \leq k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Ce paramètre  $\alpha_i^j$  permet la création de l'opérateur d'extraction de Bézier défini en 1D comme suit :

$$\mathbf{C}^j = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 - \alpha_2 & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 - \alpha_3 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 1 - \alpha_4 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & & & 0 & \alpha_{n+j-1} & 1 - \alpha_{n+j} \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Une fois l'ensemble des nœuds inséré, l'opérateur  $\mathbf{C}$  permet de faire le lien entre les fonctions B-Splines et les fonctions de Bernstein comme suit :

$$\mathbf{N} = \mathbf{C}\mathbf{B}. \quad (1.9)$$

Il est important de noter que la création de cet opérateur dépend uniquement du vecteur nœud. Afin de déterminer la position des points de contrôle de Bernstein, l'égalité entre l'expression des courbes de Bernstein et B-Splines (1.5) est utilisée. Il est ainsi montré que  $\mathbf{P}^{BER} = \mathbf{C}^T \mathbf{P}^{BS}$ .

Plus de détails et d'exemples sur la construction de cet extracteur sont donnés dans [21].

**Remarque 3** *L'extracteur de Bézier peut aussi être défini de façon élémentaire afin de faire le lien entre les fonctions Bernstein élémentaires  $\mathbf{B}^e$  et celles B-Splines élémentaires  $\mathbf{N}^e$ . En pratique, ce sont les opérateurs élémentaires qui sont construits en premier. Ils peuvent être assemblés dans la suite si un opérateur global est nécessaire.*

Initialement introduit pour des fonctions B-Splines et NURBS [21], le concept a été généralisé pour diverses splines tels que les T-Splines [149], les NURBS et B-Splines hiérarchiques [54, 76, 145], les T-Splines hiérarchiques [36, 57] et les LR B-Splines [49].

**Bilan** : L'AIG est une technique numérique performante grâce à son lien direct avec la CAO et de par la plus grande régularité des fonctions splines qui sont utilisées. Ses avantages amènent aussi des inconvénients car ils vont avec une structure de données qui limite l'implémentation massive de l'AIG dans les codes industriels. Les premiers travaux, basés sur l'extraction de Bézier, pour lier l'AIG et la MEF serviront de base pour la construction de l'opérateur permettant une implémentation non-intrusive de l'AIG dans un code EF présentée dans le chapitre 4.

### Sommaire

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Etat de l'art des méthodes de calcul multi-échelles . . . . .</b>      | <b>23</b> |
| 2.1.1      | Méthodes multi-échelles micro/macro . . . . .                             | 23        |
| 2.1.2      | Méthodes de couplage avec transfert d'information à l'interface . . . . . | 24        |
| 2.1.3      | Méthodes non-intrusives . . . . .   | 25        |
| <b>2.2</b> | <b>Principe des méthodes de couplage . . . . .</b>                        | <b>27</b> |
| 2.2.1      | Problème de référence . . . . .   | 28        |
| 2.2.2      | Résolution couplée classique . . . . .                                    | 28        |
| 2.2.3      | Résolution couplée non-intrusive . . . . .                                | 31        |

---

Dans ce chapitre, nous présentons quelques méthodes numériques de la littérature qui permettent de résoudre des problèmes multi-échelles complexes à un coût raisonnable. Parmi ces méthodes, le principe du couplage global-local non-intrusif est détaillé.

## 2.1 Etat de l'art des méthodes de calcul multi-échelles

Afin d'optimiser la résolution de problèmes à grande échelle, très coûteuse numériquement, des méthodes de type multi-échelles ou multi-modèles ont été développées. Elles se décomposent en deux grandes catégories : les méthodes d'analyse multi-échelles micro/macro et celles de couplage avec échange d'information à l'interface.

### 2.1.1 Méthodes multi-échelles micro/macro

Ces méthodes reposent sur l'enrichissement des modèles avec des espaces d'approximation augmentés (maillage plus fin ou fonctions d'enrichissement obtenues analytiquement ou numériquement) et la superposition des solutions micro et macro.

Parmi toutes ces méthodes, nous pouvons citer les suivantes :

- les méthodes d'enrichissement local basées sur la Partition d'Unité (PUM) [111] : la Méthode des Éléments Finis Généralisés (GFEM) [7, 50, 71, 152], ou encore la Méthode des Éléments Finis Étendus (XFEM) [115]. Le principe de ces méthodes est d'enrichir l'espace d'approximation dans lequel la solution est recherchée à l'aide de fonctions spécifiques qui proviennent de développements asymptotiques ou de solutions EF pré-calculées ;
- les méthodes éléments finis avec adaptation localisée (MsFEM) dans laquelle des fonctions de forme particulières décrivent des détails fins de la solution [33, 80] ;
- les méthodes avec des corrections locales, qui prennent en compte de façon itérative la contribution du modèle local sur le modèle global en assurant l'égalité des inconnues (déplacement, force, contrainte, déformation) à l'interface. On compte par exemple la méthode variationnelle Multi-échelle (VMS) [83], la méthode des modèles hiérarchiques (HDPM) [122] pour les modèles très hétérogènes, ou la méthode *bridging scale* [162] ;
- les méthodes multi-grilles [126, 138] qui consistent à utiliser successivement des grilles (ou maillages) de différentes tailles, de manière à obtenir une solution détaillée dans les hautes fréquences, tout en assurant une relaxation rapide des basses fréquences ;
- les méthodes de zoom numérique qui utilisent des patches d'éléments finis [65, 105, 129]. La solution d'un problème est calculée sur un maillage grossier. L'imprécision venant du maillage grossier est outrepassée en ajoutant des patches locaux simples et avec un maillage raffiné. Les maillages locaux et globaux n'ont pas besoin d'être compatibles à l'interface. Cette méthode permet d'éviter le raffinement local classique en plaçant un ou plusieurs patches sur le domaine global. La convergence de la méthode dépend du ratio entre la taille du maillage du patch et celle du maillage global. Un exemple de patch local recouvrant une partie du domaine global est montré sur la Figure 2.1.

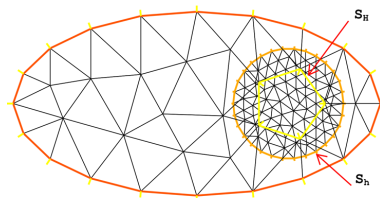


FIGURE 2.1 – Maillage local fin  $\Omega_h$  recouvrant le maillage grossier  $\Omega_H$  [105].

Néanmoins toutes ces méthodes peuvent difficilement être utilisées dans des simulations multi-échelles industrielles à cause de leur haut niveau d'intrusivité dans les codes utilisés. En effet ces méthodes reposent sur des corrections afin de définir l'intégralité des échelles dans un seul modèle ce qui n'est pas facile à mettre en place dans les codes industriels.



### 2.1.2 Méthodes de couplage avec transfert d'information à l'interface

La deuxième catégorie de méthodes qui a émergé pour la résolution de simulation multi-échelles est celle des méthodes de couplage de modèles avec transfert d'information à l'interface. Ces méthodes sont particulièrement intéressantes dans le contexte industriel actuel où les différents modèles (venant potentiellement de différents logiciels) peuvent être résolus indépendamment, voire en parallèle sur les clusters modernes.

La méthode la plus répandue actuellement dans l'industrie reste la méthode de zoom structural (approche descendante ou réanalyse locale) [86, 161] qui consiste en la résolution d'un problème global linéaire suivie de celle d'un "zoom" local non-linéaire centré sur la zone d'intérêt et pilotée par le déplacement global. Ces méthodes sont limitées par le fait que le transfert se fait dans un seul sens et ne prend pas en compte l'impact du modèle local sur le modèle global. Elles peuvent être combinées avec de la condensation statique [62, 78, 109] pour éliminer les erreurs dues à l'approximation des conditions aux limites locales.

En ce qui concerne la connexion des domaines local et global, de nombreuses méthodes ont été développées. En fonction de la discrétisation de chacun des domaines sur l'interface  $\Gamma$ , on distingue plusieurs configurations de couplage qu'on nomme (en se basant sur [25, 70]) dans la suite ainsi :

- le couplage compatible pour lequel l'interface  $\Gamma$  est alignée avec les bords des éléments et les noeuds des deux domaines coïncident sur cette interface (voir Figure 2.2 en haut à gauche) ;
- le couplage incompatible pour lequel l'interface  $\Gamma$  est alignée avec les bords des éléments mais les noeuds des deux domaines sont décalés (voir Figure 2.2 en haut à droite) ; dans ce cas, il y a deux situations : maillages imbriqués ou non imbriqués ;
- le couplage non-conforme géométriquement pour lequel l'interface  $\Gamma$  n'est pas alignée avec les bords des éléments grossiers (voir Figure 2.2 en bas à gauche) ;
- le couplage non-conforme géométriquement et topologiquement pour lequel l'interface  $\Gamma$  n'est pas alignée avec les bords des éléments grossiers et les modèles local et global n'ont pas la même topologie sur  $\Gamma$  (voir Figure 2.2 en bas à droite).

Parmi ces méthodes, la méthode surfacique Mortar [11, 17] permet de coupler des discrétisations de différents types sur différents sous-domaines sans recouvrement. La méthode repose sur la construction d'un espace discret ; des espaces de discrétisations sont définis sur chacun des sous domaines et les opérateurs de Mortar sont définis à l'intersection.

Ces opérateurs sont construits afin de garantir l'égalité faible à l'interface de couplage via des multiplicateurs de Lagrange. Par exemple, sur le couplage incompatible entre deux domaines de la Figure 2.3, l'opérateur de couplage est défini ainsi :

$$\mathbb{C}_{ij} = \int_0^{0.5} N_j(x)N_i(2x+1)\partial x + \int_{0.5}^1 N_j(x)N_i(2x-1)\partial x. \quad (2.1)$$

On peut aussi citer la méthode surfacique de Nitsche [23, 73], et des méthodes volumiques telles que la méthode Arlequin qui est une méthode avec recouvrement et couplage en énergie [13, 15] ou la méthode Chimère [26]. Ces solutions qui utilisent un maillage de transition pour résoudre les changements topologiques entre les modèles [68–70] permettent de gérer les non-conformités topologiques.

De plus, les méthodes de décomposition de domaine : FETI [59], BDD [108], FETI-DP [58] ou la LATIN mixte [46, 96] basée sur un algorithme de Schwarz [104] sont aussi des méthodes de couplage qui sont largement utilisées dans le domaine industriel. Des algorithmes de relocalisation non-linéaires peuvent être appliqués à ces méthodes pour résoudre des problèmes non linéaires [8, 45, 128].

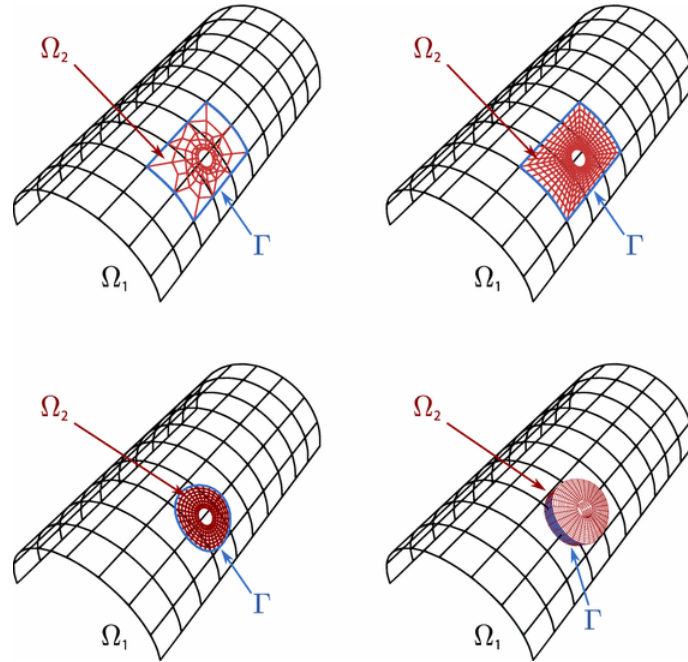


FIGURE 2.2 – Différentes configurations de couplage : maillages compatibles (haut à gauche) ; maillages non-compatibles (haut à droite) ; maillages non-conformes géométriquement (bas à gauche) et maillages non-conformes géométriquement et topologiquement [70].

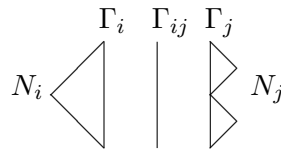


FIGURE 2.3 – Construction de l'opérateur Mortar de couplage entre deux domaines  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ , d'interface  $\Gamma_{ij}$ . Les maillages sont compatibles géométriquement à l'interface, seul le raffinement est différent.

Une fois encore ces méthodes, s'avèrent être assez intrusives car elles nécessitent des modifications importantes dans les solveurs EF et un temps important dans la phase de maillage ce qui n'est pas toujours possible dans l'industrie.

### 2.1.3 Méthodes non-intrusives

Malgré le développement de nombreuses méthodes de calcul d'un point de vue académique, leur implémentation dans un code commercial adapté aux besoins des industriels est assez limitée. Dans la suite de cette thèse, nous utiliserons le terme non-intrusif pour définir des méthodes qui implémentent des techniques dans des codes industriels en les utilisant comme des boîtes noires c'est-à-dire sans en toucher la structure même mais uniquement en communiquant avec ce dernier et qui utilisent les entrées et sorties standards des logiciels industriels modernes.

Dans le cas des méthodes de couplage, la méthode de couplage non-intrusif local-global est apparue [63] suivant les idées développées dans [163]. Elle consiste en une approche de substitution via un solveur itératif de type Schwarz, qui permet de réaliser des modifications locales dans le modèle éléments finis existant (en terme de raffinement de maillage, introduction de phénomène local lié à la géométrie ou au comportement matériau...) sans modifier les opérateurs initiaux.

Dans cette méthode, un modèle global grossier est défini sur l'intégralité du domaine physique où la géométrie, la connectivité, les opérateurs et le solveur sont fixés (la matrice initiale factorisée est donc conservée durant tout la procédure de couplage itératif), tandis que l'évolution du phénomène local est prédite par un modèle séparé défini sur une zone locale ou un patch. Les données d'interface sont quant à elles transférées de façon itérative entre les deux modèles (voir Figure 2.4).

Ainsi cette technique permet d'obtenir une grande flexibilité sans besoin de remaillage global et de séparer les solveurs globaux et locaux.

L'indépendance des solveurs est un avantage pour coupler un logiciel commercial avec n'importe quel autre code dédié à la modélisation de phénomènes locaux; du fait qu'aucune modification n'est à réaliser dans le logiciel commercial, seules des données d'entrée/sortie sont à transmettre.

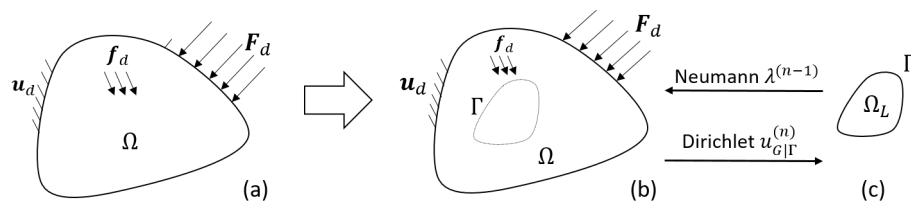


FIGURE 2.4 – Principe du couplage global-local non-intrusif : séparation du problème de référence (a) en un problème global (b) et un problème local (c). Le transfert des informations est réalisé sur l'interface  $\Gamma$ .

Cette méthode de couplage local-global a été largement appliquée ces dernières années dans de nombreuses situations industrielles comportant des phénomènes locaux complexes. Parmi ces applications, nous pouvons relever les suivantes :

- les problèmes de plasticité locale [53, 63] dans lesquels la non-linéarité due à la plasticité est uniquement présente dans le problème local tandis que le problème global est élastique; des techniques d'accélération basées sur des algorithmes Quasi-Newton et Newton tangent sont utilisées pour accélérer la convergence vers la solution élasto-plastique.
- les problèmes de propagation de fissures [53, 71, 127] pour lesquels la zone locale évolue au cours du temps avec la propagation de la fissure; sur la Figure 2.5c, la solution à l'évolution 31 de la propagation de la fissure est reconstruite en déplacement, entre celle du problème global résolu avec un calcul élastique et celle du modèle local résolu avec une alternative à la méthode X-FEM. Cela permet d'estimer directement le facteur d'intensité de contrainte. L'évolution de la zone locale, facilement gérée par le côté non-intrusif du couplage, est visible entre l'étape initiale (voir Figure 2.5a) et après la propagation 31 (voir Figure 2.5b) pour lesquelles les courbes précédentes sont données.
- l'analyse d'incertitudes locales à partir d'un opérateur global déterministe [38, 116].
- les couplages 2D/3D dans de fins panneaux composites avec des concentrations locales de contraintes et du délaminage [68–70]; dans les zones critiques (près des bords, des trous ou des défauts) où le modèle global plaque n'est pas adapté, un modèle local 3D est utilisé. La transition du modèle 3D au 2D est basé sur les distributions des contraintes et déplacements associées à des problèmes de Saint-Venant pré-calculés sur un domaine 3D.
- les problèmes incluant une définition NURBS de la forme du domaine avec des détails géométriques locaux, des fissures ou du raffinement de maillage [24]. La non-modification de la géométrie NURBS globale même en cas de modification de la zone locale grâce à la stratégie non-intrusive limite le coût important de la procédure de re-paramétrisation. Du

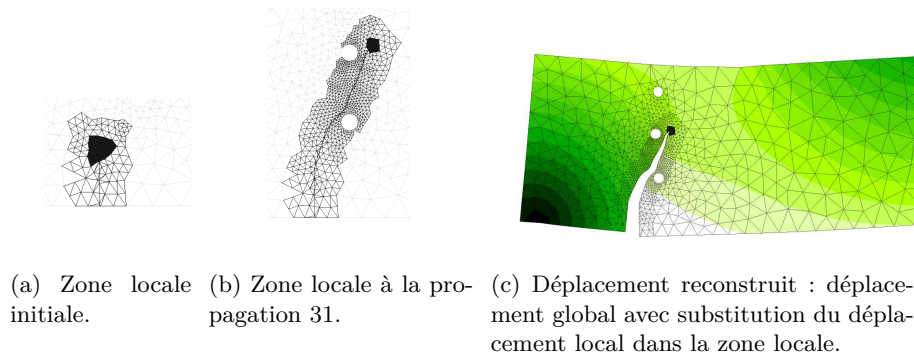


FIGURE 2.5 – Évolution de la zone locale d’un problème de propagation de fissure et état du déplacement reconstruit après 31 étapes de propagation de fissure [127].

fait de la définition particulière des fonctions NURBS, une règle de quadrature adaptée doit être mise en place pour évaluer et transmettre les réactions d’interface. Une définition du couplage non-intrusif basée sur une méthode de Nitsche a aussi été développée pour ces problèmes isogéométriques [23].

- les problèmes de dynamique transitoire [18, 19, 34] pour lesquels seule la zone locale est raffinée en temps et en espace. Le caractère non-intrusif et explicite de la méthode permet de calculer une seule fois le problème global par pas de temps et de limiter le processus itératif au problème local.
- l’utilisation d’estimateurs d’erreur pour de l’adaptation de raffinement de maillage dans le cas d’un couplage non-intrusif [52].

La méthode de couplage non-intrusive étant une méthode itérative, le nombre d’itérations de son solveur impacte le temps de calcul. Classiquement, une norme du résidu à l’interface est utilisée comme indicateur de convergence et critère d’arrêt. Néanmoins, les techniques d’accélération de convergence peuvent être utilisées avec cette méthode, comme la relaxation [38], la relaxation dynamique de Aiken [85], le gradient conjugué non-linéaire [66] ou la mise à jour de l’opérateur global (sans le refactoriser) par un opérateur symétrique de rang un (SR1) [43] en utilisant la formule de Sherman-Morison et Woodbury [63]. Ces techniques ne seront pas implémentées dans la suite, une étude comparative est proposée dans [53].

Généralement, le couplage local-global non-intrusif est seulement vu comme une substitution de comportement sur  $\Omega_L$  (un zoom numérique) venant d’un comportement initial régulier défini sur tout le domaine  $\Omega$ . Nous choisissons dans la suite un autre point de vue, où le problème couplé dérive d’un modèle de référence initial dans lequel un comportement complexe est introduit partout sur  $\Omega$ . Cela permet d’avoir une définition consistante de la solution de référence pour laquelle les mesures d’erreur sont définies dans la suite.

## 2.2 Principe des méthodes de couplage

Nous présentons dans cette section la version classique du couplage global-local sans recouvrement avec multiplicateur de Lagrange ; sa version non-intrusive est aussi détaillée.

### 2.2.1 Problème de référence

Nous nous intéressons à un problème mécanique défini sur un domaine  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  (avec  $d=1, 2$  ou  $3$  selon la dimension du problème), délimité par  $\partial\Omega$ . Nous séparons les limites du domaine en deux parties. Sur la première,  $\partial_u\Omega \subset \partial\Omega$ , un déplacement  $\mathbf{u}_d$  est appliqué. Sur le complémentaire  $\partial_F\Omega \subset \partial\Omega$ , défini tel que  $\partial_u\Omega \cap \partial_F\Omega = \emptyset$  et  $\overline{\partial_u\Omega} \cup \overline{\partial_F\Omega} = \partial\Omega$ , un effort de traction  $\mathbf{F}_D$  est appliqué. Le domaine  $\Omega$  peut aussi être soumis à un effort réparti  $\mathbf{f}_d$ . Dans la suite, nous utilisons un déplacement donné  $\mathbf{u}_d = 0$ , ce qui constitue des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, sans que cela ne représente une limite théorique. De plus, nous considérons une évolution isotherme quasi-statique avec un régime de petites perturbations.

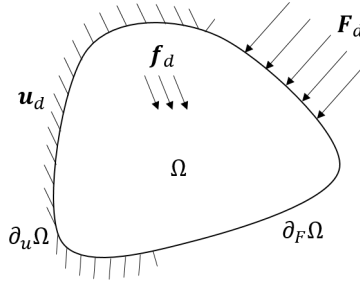


FIGURE 2.6 – Problème de référence et ses conditions aux limites.

Le problème mécanique, tel que décrit sur la Figure 2.6, se résume à trouver le couple déplacement-contrainte  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  qui vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial_u\Omega \quad (\text{liaisons cinématiques}), \\ \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_d = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{F}_d \quad \text{sur } \partial_F\Omega \end{array} \right. \end{cases}, \quad (2.2)$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial_F\Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (\text{équations d'équilibre}), \\ \boldsymbol{\sigma}_t &= \mathcal{C}(\dot{\mathbf{u}}|_{\tau}, \tau \leq t) \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{relation de comportement}), \end{aligned}$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal sortant unitaire,  $\mathcal{C}$  est un opérateur général qui définit le comportement (complexe) du matériau,  $\boldsymbol{\epsilon}$  est le tenseur des déformations linéarisé, et  $\mathcal{V}$  est un espace fonctionnel approprié dans lequel les déplacements sont cherchés (typiquement  $[H_0^1(\Omega)]^d$ ).

Dans l'intégralité de la suite, nous utilisons deux comportements possibles :

- l'élasticité linéaire hétérogène (avec des variations rapides des propriétés matériaux) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}); \quad (2.3)$$

- l'élasto-plasticité avec ou sans adoucissement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{G}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), \mathbf{X}). \quad (2.4)$$

Pour simplifier les notations, le principe de couplage est explicité dans le cas d'un couplage entre un tenseur de Hooke hétérogène local et un autre homogénéisé global.

### 2.2.2 Résolution couplée classique

Il est possible de considérer que les phénomènes intéressants décrits dans le problème précédent (voir Figure 2.6) peuvent être localisés dans l'espace. Ainsi, une approche naturelle pour réduire les efforts d'implémentation consiste à sous-structurer intelligemment le domaine afin

de restreindre l'utilisation de modèles complexes dans une sous-partie de  $\Omega$  et de prendre en compte un modèle plus simple, aussi bien au niveau des propriétés matériaux qu'en taille de maillage, dans la partie complémentaire.

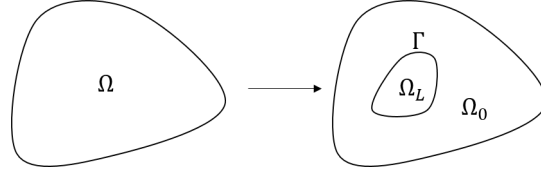


FIGURE 2.7 – Décomposition de la géométrie en une zone locale et une zone globale.

Le domaine initial  $\Omega$  est donc naturellement séparé en deux parties sans recouvrement (voir Figure 2.7) :

- une zone locale  $\Omega_L \in \Omega$ , qui englobe le support du phénomène d'intérêt à analyser. Dans cette zone  $\Omega_L$ , un modèle basé sur la loi de comportement initiale complexe est conservé. Bien qu'une définition plus large du couplage puisse impliquer une redéfinition du domaine  $\Omega$  [53], ici, le domaine local est strictement inclus dans  $\Omega$  ;
- la zone complémentaire  $\Omega_0 = \Omega/\Omega_L$  dans laquelle un modèle plus grossier est pris en compte. Il est défini en remplaçant le comportement initial par un comportement linéaire élastique homogène, avec une loi de Hooke  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{K}_0 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$ .

**Remarque 4** Nous considérons, dans ce chapitre, que la position de la zone locale  $\Omega_L$  est connue à priori à partir des phénomènes d'intérêt. Si toutefois ces phénomènes ne sont pas au préalable connus, il est possible d'utiliser un modèle grossier sur tout le domaine  $\Omega$  et d'analyser les zones critiques (par l'utilisation d'estimateurs d'erreur) afin de déterminer la position initiale du patch  $\Omega_L$  [52, 129].

L'interface entre les deux domaines  $\Omega_0$  et  $\Omega_L$  est notée  $\Gamma$ . Le problème de couplage revient donc à déterminer un champ de déplacement global  $\mathbf{u}_G$  sur  $\Omega_0$ , un champ de déplacement local  $\mathbf{u}_L$  sur  $\Omega_L$  et un champ de multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda} \in M$  (représentant les efforts de réaction sur  $\Gamma$ ), vérifiant :

- un problème global sur  $\Omega_0$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_G &\in \mathcal{V}_0, \text{ restriction de } \mathcal{V} \text{ sur } \Omega_0, \\ \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma}_G : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}_G \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V}_0, \\ \boldsymbol{\sigma}_G &= \mathcal{K}_0 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_G); \end{aligned} \quad (2.5)$$

- un problème local sur  $\Omega_L$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_L &\in \mathcal{V}_L, \text{ restriction de } \mathcal{V} \text{ sur } \Omega_L, \\ \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}_L : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_L) &= \int_{\Omega_L} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_L + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}_L \quad \forall \mathbf{v}_L \in \mathcal{V}_L, \\ \boldsymbol{\sigma}_L &= \mathcal{K} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_L); \end{aligned} \quad (2.6)$$

- une condition de continuité sur  $\Gamma$  :

$$\mathbf{u}_L|_{\Gamma} = \mathbf{u}_G|_{\Gamma} \quad (\text{ou } \int_{\Gamma} (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_G) \cdot \boldsymbol{\mu} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}). \quad (2.7)$$

Cette formulation assure ainsi la concordance entre les déplacements et les efforts globaux et locaux au niveau de l'interface  $\Gamma$ .

En considérant une méthode de discrétisation, par exemple EF ou IG, la formulation algébrique du problème devient donc :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_0 & 0 & \mathbb{C}_G^T \\ 0 & \mathbb{K}_L & -\mathbb{C}_L^T \\ \mathbb{C}_G & -\mathbb{C}_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_G \\ \mathbf{U}_L \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{U}_G$ ,  $\mathbf{U}_L$ , et  $\boldsymbol{\Lambda}$  sont, respectivement, des vecteurs de valeurs nodales des champs discrétisés  $\mathbf{u}_G^H$  (défini sur le maillage  $\tau^H$ ),  $\mathbf{u}_L^h$  (défini sur le maillage  $\tau^h$ ), et  $\boldsymbol{\lambda}^h$ .  $\mathbb{K}_0$  et  $\mathbb{K}_L$  sont, respectivement, les matrices de rigidité dans  $\Omega_0$  et  $\Omega_L$ .  $\mathbb{C}_G$  et  $\mathbb{C}_L$  sont les opérateurs Mortar de couplage.

**Remarque 5** *Il faut noter qu'une attention particulière doit être portée sur le choix de l'espace des multiplicateurs de Lagrange  $\mathcal{M}$ . En effet, si le choix de cet espace n'est pas adapté, les opérateurs de Mortar peuvent conduire à des oscillations indésirables du champ de déplacement. Un choix pertinent (voir [53]), que nous suivrons dans cette thèse, est d'utiliser l'espace de définition des fonctions de forme du domaine local sur l'interface pour les multiplicateurs de Lagrange. Ce choix permet de rendre la matrice  $\mathbb{C}_L$  carrée inversible et donc de ne pas avoir besoin d'utiliser une méthode des moindres carrés pour faire la projection des champs à l'interface. D'autres choix d'espaces d'évaluation des efforts d'interface sont proposés dans la littérature [47].*

En pratique et conformément aux méthodes utilisées en décomposition de domaine et calculs parallèles, le problème couplé ((2.5)-(2.6)-(2.7)) n'est pas résolu de façon monolithique mais plutôt en utilisant un solveur itératif Dirichlet-Neumann. Pour ce faire, un algorithme local-global itératif non-symétrique est introduit avec un transfert alterné de données à l'interface. Après avoir initialisé  $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \mathbf{0}$  (réaction d'interface nulle), le problème continu à l'itération  $n$  revient à trouver l'ensemble  $(\mathbf{u}_G^{(n)}, \mathbf{u}_L^{(n)}, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_L \times \mathcal{M}$  qui vérifie :

- un problème global sur  $\Omega_0$ , avec des conditions aux limites de Neumann données sur  $\Gamma$ , qui donne  $\mathbf{u}_G^{(n)}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma}_G^{(n)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^{(n-1)} \cdot \mathbf{v}_G \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V}_0, \\ \boldsymbol{\sigma}_G^{(n)} &= \mathcal{K}_0 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_G^{(n)}); \end{aligned} \quad (2.9)$$

- un problème local sur  $\Omega_L$ , avec des conditions aux limites de Dirichlet données sur  $\Gamma$ , pour déterminer  $(\mathbf{u}_L^{(n)}, \boldsymbol{\lambda}^{(n)})$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{L|\Gamma}^{(n)} &= \mathbf{u}_{G|\Gamma}^{(n)}, \\ \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}_L^{(n)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_L) - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^{(n)} \cdot \mathbf{v}_L &= \int_{\Omega_L} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_L \quad \forall \mathbf{v}_L \in \mathcal{V}_L, \\ \boldsymbol{\sigma}_L^{(n)} &= \mathcal{K} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_L^{(n)}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

La formulation algébrique équivalente s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_0 \mathbf{U}_G^{(n)} &= \mathbf{F}_0 - \mathbb{C}_G^T \boldsymbol{\Lambda}^{(n-1)}, \\ \begin{bmatrix} \mathbb{K}_L & -\mathbb{C}_L^T \\ -\mathbb{C}_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_L^{(n)} \\ \boldsymbol{\Lambda}^{(n)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_L \\ -\mathbb{C}_G^T \mathbf{U}_G^{(n)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dans la suite, nous considérons que les maillages  $\tau^H$  et  $\tau^h$  sont géométriquement conformes, compatibles ou non, à l'interface  $\Gamma$ .

### 2.2.3 Résolution couplée non-intrusive

L'inconvénient de la méthode décrite dans la partie 2.2.2 précédente est que la matrice de rigidité  $\mathbb{K}_0$ , dépendant de la définition géométrique de  $\Omega_0$ , doit être recalculée pour chaque configuration de la zone locale  $\Omega_L$ . Cela nécessite la construction d'un maillage global cohérent avec la géométrie potentiellement complexe de  $\Omega_0$ . Par ailleurs, le remaillage et la nouvelle factorisation de  $\mathbb{K}_0$  sont nécessaires chaque fois que la localisation ou la forme de la zone locale  $\Omega_L$  est modifiée. Cela peut s'avérer très coûteux en temps de calcul surtout pour des grands domaines avec de nombreux degrés de libertés. Pour outrepasser cette difficulté, et conserver l'efficacité numérique, l'idée principale du couplage non-intrusif est de modifier le problème global en définissant le support de sa solution  $\mathbf{u}_G$  sur l'intégralité du domaine  $\Omega$ . Le problème local (2.10) reste quant à lui inchangé.

Dans le but de déterminer le nouveau problème global, le comportement homogène est virtuellement étendu sur  $\Omega_L$ . En utilisant l'additivité des problèmes sur  $\Omega_0 \cup \Omega_L$ , le problème global initial se ré-écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_G &\in \mathcal{V}, \\ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_G : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}_G : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V} \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\Gamma} [\boldsymbol{\sigma}_{G|\Omega_L} \mathbf{n}_{\Omega_L} - \boldsymbol{\lambda}] \cdot \mathbf{v}_G \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (2.12)$$

en utilisant l'équilibre sur  $\Omega_L$ ,

$$\boldsymbol{\sigma}_G = \mathcal{K}_0 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_G).$$

Le déplacement global  $\mathbf{u}_G$ , bien que décrit sur tout le domaine  $\Omega$ , est généralement incorrect sur  $\Omega_L$  et non pertinent pour étudier les phénomènes d'intérêt de la bonne manière. En utilisant le nouvel espace de discrétisation  $\mathcal{V}^H$ , obtenu à partir d'un maillage grossier  $\tau^H$  défini sur tout le domaine  $\Omega$ , la méthode de couplage non-intrusive entraîne les changements suivants sur la formulation du problème global :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_0 \mathbf{U}_G &= \mathbf{F}_0 - \mathbf{C}_G^T \boldsymbol{\Lambda} \\ \implies \mathbb{K}_{0\Omega} \mathbf{U}_G &= \mathbf{F}_0 - \mathbf{C}_G^T \boldsymbol{\Lambda} + \mathbb{K}_{0L} \mathbf{U}_G = \mathbf{F}_{0\Omega} - \mathbf{C}_G^T \boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{R}_{LG}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

avec  $\mathbb{K}_{0\Omega}$  (resp.  $\mathbb{K}_{0L}$ ) la matrice de rigidité dans le domaine global  $\Omega$  (resp. dans le sous-domaine  $\Omega_L$ ) utilisant un opérateur linéaire homogène  $\mathcal{K}_0$ , tandis que  $\mathbf{R}_{LG} = \mathbb{K}_{0L} \mathbf{U}_G - \mathbf{F}_{0L}$  est le résidu discrétisé des efforts de réaction sur  $\Gamma$  venant du modèle global, calculé en pratique à l'aide d'une intégrale volumique.

En utilisant, une fois encore, un schéma de résolution de type Dirichlet-Neumann (méthode de point fixe), la méthode de couplage local-global consiste à déterminer, à chaque itération  $n$  de l'algorithme et après avoir initialisé  $\mathbf{u}_G^{(0)} = \mathbf{0}$  et  $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \mathbf{0}$ , l'ensemble  $(\mathbf{u}_G^{(n)}, \mathbf{u}_L^{(n)}, \boldsymbol{\lambda}^{(n)}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}_L \times \mathcal{M}$  vérifiant :

— un problème global sur  $\Omega$  en connaissant les efforts de réactions internes sur  $\Gamma$ , qui donne  $\mathbf{u}_G^{(n)}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_G^{(n)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^{(n-1)} \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}_G^{(n-1)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V} \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\Gamma} [\boldsymbol{\sigma}_{G|\Omega_L}^{(n-1)} \mathbf{n}_{\Omega_L} - \boldsymbol{\lambda}^{(n-1)}] \cdot \mathbf{v}_G \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_G^{(n)} = \mathcal{K}_0 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_G^{(n)});$$

— le problème local (2.10).



La formulation algébrique correspondante est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{0\Omega} \mathbf{U}_G^{(n)} &= \mathbf{F}_0 - \mathbb{C}_G^T \boldsymbol{\Lambda}^{(n-1)} + \mathbb{K}_{0L} \mathbf{U}_G^{(n-1)} = \mathbf{F}_{0\Omega} - \mathbb{C}_G^T \boldsymbol{\Lambda}^{(n-1)} + \mathbf{R}_{LG}^{(n-1)}, \\ \begin{bmatrix} \mathbb{K}_L & -\mathbb{C}_L^T \\ -\mathbb{C}_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_L^{(n)} \\ \boldsymbol{\Lambda}^{(n)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_L \\ -\mathbb{C}_G^T \mathbf{U}_G^{(n)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

**Remarque 6** *En pratique, pour réduire le degré d'intrusivité, la résolution du problème local du couplage non-intrusif est plutôt écrite sous la forme : résoudre  $\mathbb{K}_L \mathbf{U}_L^{(n)} = \mathbf{F}_L$  sous la condition  $\mathbf{U}_L^{(n)} = \mathbb{C}_L^{-1} \mathbb{C}_G \mathbf{U}_G^{(n)}$  ce qui fait apparaître l'opérateur de projection  $\mathcal{P} = \mathbb{C}_L^{-1} \mathbb{C}_G$  introduit dans [53].*

Notons que la matrice de rigidité globale  $\mathbb{K}_{0\Omega}$  ainsi que le vecteur force global  $\mathbf{F}_{0\Omega}$  sont fixés indépendamment des paramètres de la zone locale (position et forme de  $\Omega_L$ , taille de maille sur  $\tau^h$ ). Ces opérateurs sont calculés au préalable en considérant un comportement homogène sur l'intégralité de la structure, c'est-à-dire sans analyse de phénomènes locaux complexes et en utilisant un maillage grossier. La matrice de rigidité globale est ainsi assemblée et factorisée une seule fois et le problème global reste bien conditionné quel que soit le couplage envisagé. Cela permet notamment d'envisager cet algorithme pour l'optimisation [23].

La technique de couplage non-intrusive consiste essentiellement en une alternance entre une résolution sur  $\Omega_L$  qui permet de déterminer la réaction  $\boldsymbol{\Lambda}$  à l'interface de couplage et une correction globale sur  $\Omega$  qui inclut des efforts internes de correction (c'est-à-dire en terme de résidu d'équilibre, l'image du décalage des efforts de réaction) afin de réduire le déséquilibre entre modèles concurrents. Ainsi deux codes différents peuvent être utilisés pour résoudre les calculs global et local.

Le schéma de la Figure 2.8a résume le principe du couplage avec transfert d'information aux interfaces. L'algorithme de Newton associé à ce couplage est schématisé sur la Figure 2.8b.

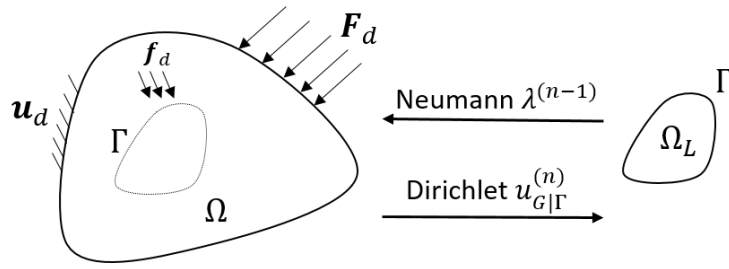
Il est possible de montrer que sous certaines conditions (i.e. un problème multi-échelles elliptique ou un modèle local moins rigide que le modèle global, ce qui est généralement le cas dans les applications pratiques), la solution du système ((2.12)-(2.10)) converge vers la solution du problème de couplage initial ((2.5)-(2.6)-(2.7)). Une revue de ces différents aspects se trouve dans [38, 53, 63] et est basée sur une reformulation globale de la stratégie de couplage local-global non-intrusive vue comme un algorithme de type quasi-Newton sur l'équilibre des efforts de réaction.

**Remarque 7** *Un cas limite de l'utilisation d'un couplage local-global est l'analyse des détails géométriques tels que les percages ou trous dans les structures. Dans ce cas particulier, en définissant  $\Omega_L$  à partir de la géométrie du trou, le modèle local correspond à du vide avec des limites libres sur  $\Gamma$ , et seulement le problème global doit être résolu. Après avoir prolongé virtuellement et en continu le comportement du matériau et le champ de solution sur  $\Omega_L$ , et en débutant avec n'importe quelle estimation initiale de  $\mathbf{u}_G^{(0)} \in \mathcal{V}$ , le schéma itératif de la solution du couplage non-intrusif créé à partir d'un problème de type Neumann s'écrit :*

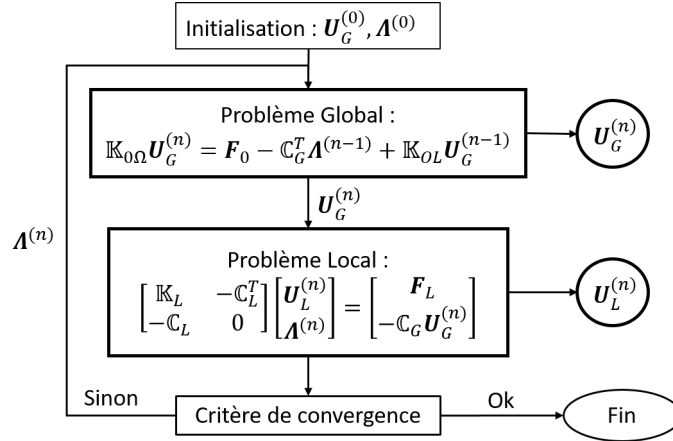
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_G^{(n)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_{F\Omega}} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}_G^{(n-1)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V}, \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_{F\Omega}} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}_{G|\Omega_L}^{(n-1)} \mathbf{n}_{\Omega_L} \cdot \mathbf{v}_G \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V}, \\ \boldsymbol{\sigma}_G^{(n)} &= \mathcal{K}_0 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_G^{(n)}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

ou sous forme algébrique :

$$\mathbb{K}_{0\Omega} \mathbf{U}_G^{(n)} = \mathbf{F}_0 + \mathbb{K}_{0L} \mathbf{U}_G^{(n-1)}. \quad (2.17)$$



(a) Principe du couplage non-intrusif.



(b) Algorithme de couplage non-intrusif.

FIGURE 2.8 – Résumé du principe et de l’algorithme de couplage non-intrusif.

La matrice de rigidité  $\mathbb{K}_{0\Omega}$  est construite à partir de la structure dans laquelle le trou a été supprimé [24].

**Bilan** : Parmi toutes les méthodes multi-échelles existantes et présentées dans ce chapitre, une attention particulière est portée sur la méthode de couplage global-local non-intrusive. En effet, cette méthode permet de séparer un modèle complexe en un modèle global grossier simple et un modèle local fin représentant la complexité. Son caractère non-intrusif repose sur le fait que cette séparation est totale, c’est-à-dire que les deux modèles sont indépendants, seuls des informations transitent à l’interface. Nous avons fait le choix de ce type de couplage pour cette raison, nous pouvons ainsi résoudre un problème dont les informations proviennent de deux codes, ou deux méthodes de résolution différentes, comme développé dans le cas d’un couplage AIG-MEF dans le chapitre 6. Le concept non-intrusif est aussi considéré au sens large dans cette thèse, c’est-à-dire pour toute technique qui permet d’implémenter d’une méthode numérique particulière en prenant comme contrainte d’utiliser un code industriel sans en modifier les routines de base. En ce sens, les chapitres 4 et 5 proposent également une implémentation non-intrusive de l’AIG dans un code industriel.

---

Évaluation de la qualité d'une solution couplée

---

## Sommaire

---

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>3.1</b> | <b>Estimation de l'erreur pour les calculs multi-échelles . . . . .</b>                            | <b>35</b> |
| 3.1.1      | Introduction à la notion d'erreur . . . . .  | 35        |
| 3.1.2      | État de l'art des méthodes de certification des méthodes multi-échelles .                          | 35        |
| 3.1.3      | Estimation d'erreur de couplage non-intrusif . . . . .   | 36        |
| <b>3.2</b> | <b>Technique d'estimation d'erreur en quantité d'intérêt . . . . .</b>                             | <b>37</b> |
| 3.2.1      | Quantité d'intérêt et problème adjoint . . . . .   | 38        |
| 3.2.2      | Estimation de l'erreur en quantité d'intérêt par la méthode des résidus .                          | 38        |
| 3.2.3      | Estimation de l'erreur en quantité d'intérêt par l'erreur en relation de<br>comportement . . . . . | 40        |

---

Un des enjeux majeurs de l'ingénierie basée sur la simulation, identifié dans un rapport de la NSF [118], est la certification des modèles simulés et des méthodes associées. Toutes les méthodes numériques, telles que les méthodes multi-échelles, sont impactées par des erreurs venant de sources diverses (discrétisation, modèle, itération de la stratégie de résolution) qui doivent être contrôlées afin de garantir l'exactitude de ces méthodes. Cela permet ainsi le transfert des méthodes et leur déploiement massif dans le domaine industriel. Après avoir présenté les méthodes d'estimation d'erreur existantes pour le calcul multi-échelles, nous développons en particulier l'estimation d'erreur sur une quantité d'intérêt basée soit sur la méthode des résidus soit sur l'erreur en relation de comportement.

### 3.1 Estimation de l'erreur pour les calculs multi-échelles

#### 3.1.1 Introduction à la notion d'erreur

L'erreur permet de faire la différence entre une solution exacte, référence issue du problème initial (équations aux dérivées partielles), par exemple un déplacement  $\mathbf{u}$  et sa solution approchée  $\mathbf{u}_{app}$  par une méthode de type éléments finis ou isogéométrique. Cette erreur d'approximation peut se mesurer de la façon suivante :

$$e_h = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{app}\|, \quad (3.1)$$

où  $\|\cdot\|$  est une norme choisie. Parmi les normes disponibles, la norme énergétique est couramment utilisée. Elle est préférée par rapport aux autres normes globales car elle est en lien avec les propriétés du modèle de référence.

A partir de cette définition de l'erreur, on détermine deux classes d'estimation d'erreur : *a priori* et *a posteriori*. Les estimations d'erreur *a priori* sont incomplètes et ne permettent pas d'évaluer l'erreur faite sur une solution EF car elles utilisent en grande partie la solution exacte  $\mathbf{u}$  qui n'est généralement pas connue. Dans cette thèse, nous nous intéressons aux estimations *a posteriori* qui permettent quant à elles d'évaluer quantitativement après calcul l'écart de la solution approchée à celle de référence. Les approches classiques de vérification de modèles ont été très largement étudiées et implémentées pour de l'estimation *a posteriori* de l'erreur de discrétisation et l'adaptation de maillage dans le cadre de la méthode des éléments finis [2, 31, 99, 159]. Parmi les différentes méthodes *a posteriori*, nous nous focalisons sur deux méthodes : la méthode des résidus et la méthode d'estimation d'erreur en relation de comportement en notant qu'une autre méthode de lissage des champs (ZZ) peut aussi être utilisée [167].

#### 3.1.2 État de l'art des méthodes de certification des méthodes multi-échelles

Parmi les outils de vérification de modèles, les outils basés sur la méthode des résidus sont largement utilisés pour les problèmes multi-échelles. Ces outils qui nécessitent peu d'effort d'implémentation sont des extensions de ceux développés dans [119] pour l'estimation d'erreur de modèle. Ils ont été initialement appliqués sur des matériaux hétérogènes pour des couplages de modèles hiérarchiques [121, 122, 158] avant d'être implémentés dans un contexte multi-échelles [120, 168]. Parmi ces applications, on peut citer l'application aux solides hétérogènes [143, 144], aux couplages atomistiques [14, 133, 134], aux problèmes de diffusion [30] ou aux couplages stochastiques [165]. Par exemple, dans le cas d'un modèle multi-échelles avec description à l'échelle particulière résolu par la méthode Arlequin [134], un algorithme d'adaptation basé sur de l'estimation d'erreur de modèle permet de déterminer la zone optimale de recouvrement entre les modèles particulière et continu vis-à-vis d'une quantité d'intérêt choisie. Un des exemples montre la procédure d'adaptation dans le cas d'un effort appliqué sur une particule du bord si on s'intéresse au déplacement vertical où cet effort est appliqué. Sur le maillage initial carré (15x15 éléments) où chaque élément contient 5x5 particules, la configuration initiale du problème Arlequin est donnée sur la Figure 3.1a. Suite à la mise en place de l'algorithme d'adaptation, la définition du problème Arlequin est modifiée et devient celle décrite sur la Figure 3.1b ce qui permet de réduire l'erreur relative sur le déplacement vertical au point d'application de la force de 13 à 2%.

En résumé, la vérification de modèle pour les couplages multi-échelles de modèles est essentiellement basée sur les méthodes de résidus explicites [1, 103, 153, 164] ou celle des résidus pondérés introduite dans [119] et ciblée sur des quantité d'intérêt. Cette dernière approche a été largement étudiée pour divers problèmes dans [1, 33, 41, 77, 87, 102, 103, 124, 137, 141, 153, 164].

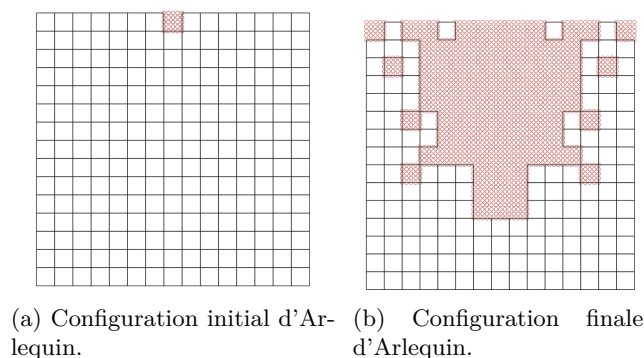


FIGURE 3.1 – Évolution de la définition du couplage d'Arlequin à l'aide de l'estimation d'erreur sur une quantité d'intérêt [134].

Cette famille de méthodes aboutit à des bornes d'erreur qui sont généralement non garanties (en particulier dans les cas de modèles non-linéaires) et qui sont exactes seulement si une hypothèse de saturation est vérifiée.

D'autres outils de vérification permettent d'obtenir des bornes exactes et garanties d'erreur en utilisant un modèle linéaire ou non-linéaire. Ils sont basés sur la dualité et le concept d'erreur en relation de comportement (ERC). Ce concept, dont la notion principale est la satisfaction de l'équilibre mécanique, a été initialement introduite pour des modèles EF [96–98] utilisant des arguments thermodynamiques et des propriétés de convexité. Un résumé des nombreuses applications du concept ERC peut être trouvé dans [92, 94, 99]. L'ingrédient principal est la reconstruction des champs de contraintes/flux équilibrés, qui est en effet le seul moyen d'obtenir des bornes d'erreur garanties [29, 48, 56, 61, 106, 113]. Le concept ERC peut être associé à l'estimation d'erreur en quantité d'intérêt [32, 90].

### 3.1.3 Estimation d'erreur de couplage non-intrusif

En ce qui concerne l'estimation d'erreur et l'adaptation pour des couplages non-intrusifs local-global, les travaux sont assez limités. Les travaux récents dans [52] sont les plus avancés sur ce thème. La méthode des résidus explicites y est utilisée afin de construire un estimateur d'erreur *a posteriori* peu coûteux et grossier (i.e. en norme énergétique). Cet estimateur permet de contrôler les erreurs de discrétisation et de convergence. Il peut être utilisé en pratique pour piloter l'adaptation de maillage dans la zone locale (supposée avoir une définition fixe dans [52]) ainsi que l'arrêt des itérations. Par exemple, sur l'exemple donné sur la Figure 3.2, il peut être décidé que la solution calculée soit acceptable dès que l'erreur venant de la convergence est suffisamment faible, soit après 10 itérations dans l'exemple présenté. Néanmoins, les outils proposés sont très incomplets et peu robustes car difficilement applicables en dehors des modèles linéaires et ne prenant pas en compte l'erreur de modèle.

En effet, pour un problème de couplage non-intrusif, les sources d'erreurs sont classifiables en trois catégories :

- *l'erreur de modèle* due à l'utilisation d'un modèle de substitution dans  $\Omega_0$ , associé à un opérateur régulier  $\mathcal{K}_0$  et à un maillage grossier  $\tau^H$  fixé (i.e. non adapté). Cela peut engendrer des effets de pollution quand on s'intéresse à l'exactitude de la quantité d'intérêt définie dans  $\Omega_L$ . L'amplitude de cette erreur peut être réduite en augmentant la taille de la zone critique  $\Omega_L$  et tend vers zéro quand  $\Omega_L$  tend vers  $\Omega$  ;
- *l'erreur de discrétisation* due à l'utilisation d'un maillage  $\tau^h$  afin d'approximer la solution du problème local (2.10). L'amplitude de cette source d'erreur est réduite en diminuant

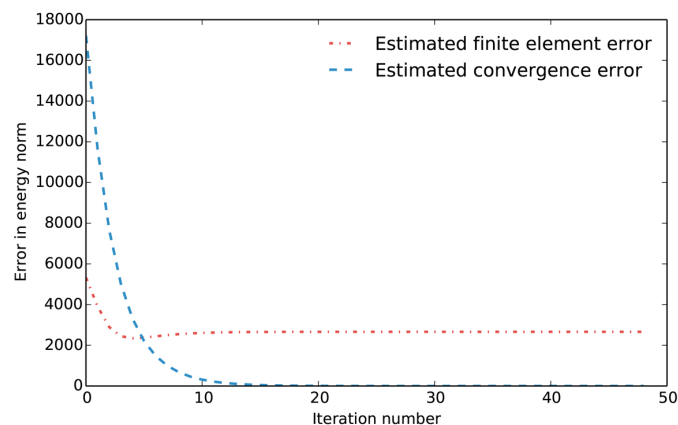


FIGURE 3.2 – Comparaison entre l'erreur éléments finis et l'erreur de convergence d'un problème de couplage non-intrusif afin d'évaluer le nombre d'itérations nécessaires (issu de [52]).

- la taille  $h$  du maillage dans  $\tau^h$ ; elle devient nulle quand  $h$  tend vers zéro;
- l'erreur de convergence due à l'utilisation d'un algorithme local-global itératif. L'amplitude de cette source d'erreur diminue quand le nombre d'itérations augmente, elle s'annule quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Dans les applications pratiques des méthodes de couplage non-intrusif,  $\Omega_L$  et  $\tau^h$  sont définis de façon empirique à partir de l'expérience *a priori* de l'utilisateur sans évaluation quantitative des erreurs de modèle et de discrétisation associées. De plus, la convergence de l'algorithme itératif de couplage local-global est classiquement contrôlée en utilisant un critère d'arrêt (ou un indicateur de convergence) basé sur l'amplitude de la norme du résidu d'équilibre. Cette procédure peut être très pessimiste et mobiliser inutilement des ressources de calcul vu que :

- la tolérance fixée sur la donnée d'intérêt peut être atteinte même si la solution local-global n'a pas convergé, si bien que l'algorithme de couplage peut être arrêté plus tôt sans dégrader l'exactitude de cette donnée;
- l'erreur de convergence, bien qu'importante, peut rapidement devenir négligeable face à d'autres sources d'erreurs, si bien que les itérations supplémentaires deviennent inutiles pour diminuer l'erreur globale ou locale.

Par conséquent, il est pertinent de créer des outils permettant d'évaluer quantitativement des mesures d'erreur ainsi que les contributions individuelles de chaque source d'erreur. De tels outils sont la base d'un algorithme d'adaptation automatique qui permet d'optimiser la définition de  $\Omega_L$ , de  $\tau^h$ , et du nombre d'itérations requises (pour une tolérance d'erreur fixée). Un tel algorithme d'adaptation permet d'utiliser les ressources numériques de façon efficace.

### 3.2 Technique d'estimation d'erreur en quantité d'intérêt

Dans un soucis d'explication et d'illustration simples, on se base sur le problème de référence (2.2). Il peut être reformulé sous forme faible, vu le comportement matériau choisi, de la façon suivante : trouver  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  tel que :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (3.2)$$

avec

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathcal{K} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \quad ; \quad l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}. \quad (3.3)$$

**Remarque 8** Dans un contexte non-linéaire, la formulation faible devient  $a(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = l(\mathbf{v})$  pour tout  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  où “;” indique la non-linéarité de la forme  $a$  vis-à-vis de  $\mathbf{u}$ .

Avant d'expliciter la démarche de l'estimation d'erreur sur une quantité d'intérêt dans le cas de la méthode des résidus et de la méthode d'erreur en relation de comportement, nous explicitons la définition du problème adjoint nécessaire à la définition des divers estimateurs.

### 3.2.1 Quantité d'intérêt et problème adjoint

L'estimation de l'erreur en quantité d'intérêt est définie en utilisant un scalaire quantité d'intérêt  $Q(\mathbf{u})$  qui est une composante particulière de la solution  $\mathbf{u}$ . Nous considérons ici que la fonctionnelle  $Q : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  est linéaire même si une quantité d'intérêt non-linéaire peut être utilisée en prenant en compte quelques changements mineurs.

Nous développons la méthode d'estimation d'erreur *goal-oriented*, c'est-à-dire sur une quantité d'intérêt, d'une façon similaire à ce qui est fait dans [119, 121] et qui se base sur la définition d'un problème adjoint.

On définit le problème adjoint du problème de référence (voir (3.2)) associé à une quantité d'intérêt  $Q$  en se référant aux travaux de [10, 125, 135]. Il consiste à trouver  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$  tel que :

$$a(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{u}}) = a^*(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = Q(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (3.4)$$

$a^*$  étant l'opérateur adjoint de  $a$ . Dans le cas étudié, l'opérateur est auto-adjoint si bien que  $a^* = a$ .

La quantité d'intérêt est usuellement définie de façon globale en utilisant des fonctions d'extractions. Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$Q(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_{\Sigma} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}_{\Sigma} \cdot \mathbf{u}) + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_{\Sigma} \cdot \mathbf{u} + \int_{\partial_u \Omega} \mathbf{u}_{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}, \quad (3.5)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_{\Sigma}$ ,  $\mathbf{f}_{\Sigma}$ ,  $\mathbf{F}_{\Sigma}$ , et  $\mathbf{u}_{\Sigma}$  sont des extracteurs. Ils sont définis explicitement ou implicitement (en fonction de la quantité  $Q$ ) et peuvent être mécaniquement interprétés respectivement comme des pré-contraintes, des efforts volumiques, des forces de traction et des pré-déplacements dans le problème adjoint.

**Remarque 9** Si on s'intéresse à une forme non-linéaire pour  $a$  et/ou à une quantité d'intérêt non-linéaire  $Q$ , le problème adjoint devient :

$$a'(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{u}}) = Q'(\mathbf{u}; \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (3.6)$$

où  $a'(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{u}}) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta^{-1} [a(\mathbf{u} + \theta \mathbf{v}; \tilde{\mathbf{u}}) - a(\mathbf{u}; \tilde{\mathbf{u}})]$  et  $Q'(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta^{-1} [Q(\mathbf{u} + \theta \mathbf{v}) - Q(\mathbf{u})]$  sont les dérivées de Gateaux dans la direction  $\mathbf{v}$ . On observe ainsi que le problème adjoint : (i) dépend dorénavant de  $\mathbf{u}$  ; (ii) est défini à l'aide de l'opérateur tangent ; (iii) reste linéaire dans tous les cas. Comme  $\mathbf{u}$  est inconnu, ce champ est en pratique remplacé par une approximation  $\mathbf{u}_{app}$  afin de rendre le problème adjoint résoluble.

### 3.2.2 Estimation de l'erreur en quantité d'intérêt par la méthode des résidus

La fonctionnelle des résidus  $R : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est utilisée pour calculer les estimateurs avec cette méthode est définie ainsi :

$$R(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) - a(\mathbf{w}, \mathbf{v}). \quad (3.7)$$

La propriété (3.2) donne directement  $R(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$  pour tout  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  (propriété d'orthogonalité).

A partir de la solution adjointe  $\tilde{\mathbf{u}}$ , il est explicite que pour toute approximation  $\mathbf{u}_{app} \in \mathcal{V}$  de  $\mathbf{u}$ , l'erreur  $Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{app})$  peut être représentée comme suit :

$$Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{app}) = Q(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{app}) = a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{app}, \tilde{\mathbf{u}}) = R(\mathbf{u}_{app}, \tilde{\mathbf{u}}). \quad (3.8)$$

En introduisant une approximation quelconque  $\tilde{\mathbf{u}}_{app} \in \mathcal{V}$  de la solution adjointe  $\tilde{\mathbf{u}}$ , la représentation de l'erreur s'évalue aussi sous la forme :

$$Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{app}) = R(\mathbf{u}_{app}, \tilde{\mathbf{u}}_{app}) + R(\mathbf{u}_{app}, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_{app}). \quad (3.9)$$

Afin de calculer le second membre de (3.8), la solution adjointe  $\tilde{\mathbf{u}}$  doit être remplacée par une solution approchée  $\tilde{\mathbf{u}}_{app}$  comme décrit dans (3.9). Une approximation pertinente doit toutefois être utilisée pour que le terme  $R(\mathbf{u}_{app}, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_{app})$  puisse être négligé. C'est l'hypothèse de saturation. En pratique, cela signifie qu'afin d'estimer rigoureusement les différentes sources d'erreur, l'espace d'approximation utilisé pour calculer  $\tilde{\mathbf{u}}_{app}$  doit être plus riche que celui utilisé pour  $\mathbf{u}_{app}$ . En prenant  $\tilde{\mathbf{u}}_{app}$  dans le même espace que  $\mathbf{u}_{app}$ , l'estimation d'erreur sur  $Q$  sera donc pauvre.

Par ailleurs, dans ce cas particulier où la solution approchée  $\mathbf{u}_{app}$  est seulement obtenue après discrétisation du problème initial (erreur de discrétisation seulement), elle devient la solution de la forme faible suivante (sans changement de l'opérateur  $a$ ) :

$$a(\mathbf{u}_{app}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{app}, \quad (3.10)$$

où  $\mathcal{V}_{app} \subset \mathcal{V}$  est l'espace EF. Cela conduit à l'orthogonalité de Galerkin bien connue  $R(\mathbf{u}_{app}, \mathbf{v}) = 0$  pour tout  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{app}$ , et illustre le fait que l'estimateur  $R(\mathbf{u}_{app}, \tilde{\mathbf{u}}_{app})$  est insignifiant quand  $\tilde{\mathbf{u}}_{app}$  est cherché dans  $\mathcal{V}_{app}$ . En conséquence, un espace plus riche (ou espace enrichi) avec un maillage plus fin  $\mathcal{V}_{app}^+ \subset \mathcal{V}$  doit être utilisé pour calculer une solution approchée de l'adjoint  $\tilde{\mathbf{u}}_{app}^+$ . Il est ainsi facile de montrer que :

$$R(\mathbf{u}_{app}, \tilde{\mathbf{u}}_{app}^+) = Q(\mathbf{u}_{app}^+) - Q(\mathbf{u}_{app}), \quad (3.11)$$

où  $\mathbf{u}_{app}^+$  est obtenu en approchant  $\mathbf{u}$  dans  $\mathcal{V}_{app}^+$ , si bien que l'estimateur  $R(\mathbf{u}_{app}, \tilde{\mathbf{u}}_{app}^+)$  comprend toute l'erreur  $Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{app})$  sauf la partie  $Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{app}^+)$  qui est orthogonale à l'espace d'approximation enrichi  $\mathcal{V}_{app}^+$ .

**Remarque 10** Dans le cas non-linéaire, pour n'importe quelle approximation  $\tilde{\mathbf{u}}_{app}$  de la solution adjointe  $\tilde{\mathbf{u}}$  de (3.6) et en introduisant les champs d'erreur  $\mathbf{e}_{app} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{app}$  et  $\tilde{\mathbf{e}}_{app} = \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_{app}$ , la représentation de l'erreur (3.8) s'étend [119] :

$$Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{app}) = R(\mathbf{u}_{app}; \tilde{\mathbf{u}}_{app}) + R(\mathbf{u}_{app}; \tilde{\mathbf{e}}_{app}) + \Delta, \quad (3.12)$$

où  $\Delta$  est un terme résiduel de haut degré des erreurs  $\mathbf{e}_{app}$  et  $\tilde{\mathbf{e}}_{app}$ . Quand  $a$  et  $Q$  sont trois fois différentiables, ce terme s'explique de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{2} \int_0^1 [a''(\mathbf{u}_{app} + s\mathbf{e}_{app}; \mathbf{e}_{app}, \mathbf{e}_{app}, \tilde{\mathbf{u}}_{app} + s\tilde{\mathbf{e}}_{app}) - Q''(\mathbf{u}_{app} + s\mathbf{e}_{app}; \mathbf{e}_{app}, \mathbf{e}_{app})] ds \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 [Q'''(\mathbf{u}_{app} + s\mathbf{e}_{app}; \mathbf{e}_{app}, \mathbf{e}_{app}, \mathbf{e}_{app}) - 3a'''(\mathbf{u}_{app} + s\mathbf{e}_{app}; \mathbf{e}_{app}, \mathbf{e}_{app}, \tilde{\mathbf{e}}_{app}) \\ & - a'''(\mathbf{u}_{app} + s\mathbf{e}_{app}; \mathbf{e}_{app}, \mathbf{e}_{app}, \tilde{\mathbf{u}}_{app} + s\tilde{\mathbf{e}}_{app})](s-1) s ds. \end{aligned} \quad (3.13)$$



### 3.2.3 Estimation de l'erreur en quantité d'intérêt par l'erreur en relation de comportement

#### 3.2.3.1 Fonctionnelle ERC

Pour le problème considéré avec la relation de comportement (2.3), le concept ERC est appliqué à une solution dite admissible  $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{S}$  satisfaisant les conditions aux limites et les équations d'équilibre du problème (2.2). L'espace fonctionnel  $\mathcal{S}$  est défini ainsi :

$$\mathcal{S} = \left\{ \boldsymbol{\tau} \in H(\mathbf{div}, \Omega), \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \right\}, \quad (3.14)$$

avec  $H(\mathbf{div}, \Omega) = \{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^{d(d+1)/2}, \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^d \}$ . Seule la relation de comportement (2.3) est relâchée pour un tel couple admissible  $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}})$ .

La mesure  $E_{ERC}$  de l'ERC calculée à partir de  $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}})$  est ainsi une représentation globale du résidu de la loi de comportement ; elle est définie comme suit :

$$E_{ERC}^2(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \int_{\Omega} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}})) : \mathcal{K}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}})) = \|\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}})\|_{\sigma}^2, \quad (3.15)$$

où  $\|\cdot\|_{\sigma}$  est la norme énergétique sur les champs de contrainte sur  $\Omega$ . Il en découle que :

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \operatorname{argmin}_{(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{S}} E_{ERC}^2(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}). \quad (3.16)$$

De plus, l'égalité de Prager-Synge [132] lie la mesure ERC à une mesure globale de l'erreur (en norme énergétique) entre  $\mathbf{u}$  et le champ admissible  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$  considéré. On obtient alors :

$$E_{ERC}^2(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \|\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\|_{\sigma}^2 + \|\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}})\|_{\sigma}^2 \geq \|\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}})\|_{\sigma}^2 = \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\|^2. \quad (3.17)$$

Ainsi, en considérant n'importe quelle approximation  $\mathbf{u}_{app} \in \mathcal{V}$  de  $\mathbf{u}$  comme champ de déplacement admissible, et sous réserve de disponibilité d'un champ de contrainte  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{S}$ , la mesure ERC permet de définir une borne garantie et entièrement calculable de l'erreur globale  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{app}\|$ .

Par ailleurs, en considérant le champ moyen de contrainte  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^* = \frac{1}{2}[\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}})]$ , on peut obtenir une variante de l'équation de Prager-Synge (connue sous le nom du théorème de l'hyper-cercle) :

$$E_{ERC}^2(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) = 4\|\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^*\|_{\sigma}^2, \quad (3.18)$$

qui est en pratique utilisée pour l'estimation d'erreur en quantité d'intérêt.

#### 3.2.3.2 Application de l'ERC sur une quantité d'intérêt

L'ERC donne une évaluation globale de l'erreur, elle peut être utilisée pour borner l'erreur sur une quantité d'intérêt en utilisant une fois encore un problème adjoint (3.4). D'autres techniques permettent d'obtenir des estimations d'erreur locales sur des contraintes sans problème adjoint mais sont restreintes [60].

Après avoir calculé une solution approchée du problème adjoint  $\tilde{\mathbf{u}}_{app} \in \mathcal{V}$ , puis reconstruit un champ de contrainte admissible  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \tilde{\mathcal{S}}$  vérifiant les équations d'équilibre de l'adjoint :

$$\int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) = Q(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (3.19)$$

il est possible de définir les bornes d'erreur sur la quantité d'intérêt  $Q$ .

Il est ainsi direct de montrer la propriété :

$$\begin{aligned}
 Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{app}) &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{app}, \tilde{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{app}) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\
 &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{app}) : \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \in \tilde{\mathcal{S}}) \\
 &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{app}) : (\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_{app})) + \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{app}) : \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_{app}) \\
 &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{app}) : (\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_{app})) + \int_{\Omega} (\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{app})) : \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_{app}) \quad (\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \in \mathcal{S}) \\
 &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{app})) : \mathcal{K}^{-1}(\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_{app})) + Q_{corr,1},
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

où  $Q_{corr,1} = \int_{\Omega} (\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{app})) : \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_{app})$  est une correction du terme  $Q(\mathbf{u}_{app})$  entièrement calculable.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec (3.17) et (3.20), une borne garantie est donc :

$$\begin{aligned}
 |Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{app}) - Q_{corr,1}| &\leq \|\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{app})\|_{\sigma} \cdot \|\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_{app})\|_{\sigma} \\
 &\leq E_{ERC}(\mathbf{u}_{app}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot E_{ERC}(\tilde{\mathbf{u}}_{app}, \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}).
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Un encadrement plus précis peut être obtenu en introduisant les moyennes des champs de contrainte  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^* = \frac{1}{2}[\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{app})]$  et  $\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^* = \frac{1}{2}[\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} + \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_{app})]$ .

Ainsi, (3.20) peut se réécrire :

$$Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{app}) - Q_{corr,1} = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^*) : \mathcal{K}^{-1}(\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_{app})) + \int_{\Omega} (\hat{\boldsymbol{\sigma}}^* - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{app})) : \mathcal{K}^{-1}(\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_{app})), \tag{3.22}$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec (3.18), une borne améliorée est obtenue par :

$$|Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{app}) - Q_{corr,2}| \leq \|\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^*\|_{\sigma} \cdot \|\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_{app})\|_{\sigma} = \frac{1}{2} E_{ERC}(\mathbf{u}_{app}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot E_{ERC}(\tilde{\mathbf{u}}_{app}, \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}). \tag{3.23}$$

avec  $Q_{corr,2} = Q_{corr,1} + \int_{\Omega} (\hat{\boldsymbol{\sigma}}^* - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{app})) : \mathcal{K}^{-1}(\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_{app})) = \int_{\Omega} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{app})) : \mathcal{K}^{-1}\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^*$ . Cela permet de définir un encadrement calculable de la valeur exacte  $Q(\mathbf{u})$  de la quantité d'intérêt sous la forme :

$$Q^- \leq Q(\mathbf{u}) \leq Q^+, \tag{3.24}$$

avec

$$\begin{aligned}
 Q^- &= Q(\mathbf{u}_{app}) + Q_{corr,2} - \frac{1}{2} E_{ERC}(\mathbf{u}_{app}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot E_{ERC}(\tilde{\mathbf{u}}_{app}, \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}), \\
 Q^+ &= Q(\mathbf{u}_{app}) + Q_{corr,2} + \frac{1}{2} E_{ERC}(\mathbf{u}_{app}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot E_{ERC}(\tilde{\mathbf{u}}_{app}, \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}).
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

En pratique, les bornes exactes  $Q^-$  et  $Q^+$  sont obtenues par enrichissement de la solution adjointe, si bien que  $E_{ERC}(\tilde{\mathbf{u}}_{app}, \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}})$  tend vers 0 et  $Q_{corr,2}$  tend vers  $Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{app})$ .

En notant que le chargement de l'adjoint  $(\boldsymbol{\sigma}_{\Sigma}, \mathbf{f}_{\Sigma}, \mathbf{F}_{\Sigma}, \mathbf{u}_{\Sigma})$  est généralement appliqué sur un sous-domaine local de  $\Omega$ , et par conséquent engendre une solution adjointe avec des hauts gradients localisés (principe de Saint-Venant), l'idée est d'utiliser l'enrichissement local à proximité de la région d'intérêt où la quantité  $Q$  est définie. Cet enrichissement peut facilement être réalisé à l'aide de la démarche de couplage non-intrusif (voir chapitre 9).

**Remarque 11** Une extension des bornes (3.25) pour l'estimation d'erreur en quantité d'intérêt pour des modèles non-linéaires est détaillée dans [90, 91].

**Bilan** : Les méthodes d'estimation d'erreur, largement utilisées pour les calculs multi-échelles, sont peu répandues pour le couplage global-local non-intrusif. Les bases des techniques d'estimation d'erreur sur une quantité d'intérêt basées sur la méthode des résidus ou l'erreur en relation de comportement ont été développées dans ce chapitre. Elles serviront dans la suite pour définir l'estimation d'erreur en quantité d'intérêt du couplage non-intrusif basé sur la méthode des résidus dans les chapitres 7 et 8 et l'erreur globale en relation de comportement dans le chapitre 9.

## Deuxième partie

# Couplage entre l'analyse isogéométrique et la méthode des éléments finis

---

 Implémentation de l'analyse isogéométrique dans un code éléments finis
 

---

## Sommaire

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>4.1</b> | <b>Extraction de Lagrange</b> . . . . .                                | <b>45</b> |
| 4.1.1      | Des polynômes de Lagrange aux polynômes de Bernstein . . . . .         | 45        |
| 4.1.2      | Lien direct entre les fonctions Lagrange et B-Splines . . . . .        | 46        |
| 4.1.3      | Extraction dans le cas des Non-Uniform Rational B-Splines . . . . .    | 47        |
| 4.1.4      | Implémentation de l'extraction de Lagrange . . . . .                   | 47        |
| <b>4.2</b> | <b>Stratégie non-intrusive développée</b> . . . . .                    | <b>49</b> |
| 4.2.1      | Principe . . . . .   | 49        |
| 4.2.2      | Approximation simple . . . . .   | 50        |
| 4.2.3      | Autres approximations possibles . . . . .                              | 52        |
| 4.2.4      | Limite de la méthode . . . . .   | 55        |
| <b>4.3</b> | <b>Implémentation non-intrusive dans le cas non-linéaire</b> . . . . . | <b>55</b> |

---

Le but de notre démarche est d'implémenter la méthode isogéométrique dans un code EF existant de la façon la moins intrusive possible. L'avantage de l'extraction de Lagrange pour l'implémentation de l'AIG a été mise en évidence dans [148]. En particulier, dans le cas de géométrie définie par des B-Splines, une stratégie peu intrusive a été développée. Toutefois, la question de l'implémentation des NURBS avec un niveau minimum d'intrusivité reste encore à traiter et il est à noter que seul le potentiel de l'extraction de Lagrange a été souligné dans [148], sans réelle application numérique à partir d'un code EF disponible.

Après avoir expliqué l'implémentation actuelle de l'AIG dans un code EF, une nouvelle procédure d'implémentation est proposée dans ce chapitre. Celle-ci a fait l'objet de l'article [156]. Il est à noter que parallèlement à ce développement, un travail relativement proche a été réalisé concernant l'implémentation dans le code EF open-source FEniCS [88]. La clé de notre approche est d'adopter un point de vue global ; un lien global approché entre les fonctions NURBS et les polynômes de Lagrange est défini afin de construire la matrice de rigidité et le second membre IG sans modifier les routines EF existantes durant le calcul. Cela permet d'implémenter facilement l'AIG dans un code industriel EF pour réaliser des calculs linéaires et non-linéaires.

## 4.1 Extraction de Lagrange

L'opérateur d'extraction de Lagrange permet de faire le lien direct entre une base Lagrange et une base B-Spline. Ce nouvel opérateur permet une implémentation différente de l'opération d'extraction de Bézier basée sur la propriété interpolante des fonctions de forme nodales. Afin de mieux comprendre ce lien, nous rappelons dans un premier temps le lien existant entre les fonctions Bernstein et Lagrange avant de présenter la construction de l'extracteur de Lagrange.

### 4.1.1 Des polynômes de Lagrange aux polynômes de Bernstein

En notant  $\mathbf{L}$  les fonctions de forme Lagrange classiquement utilisées dans la MEF, on s'intéresse à l'opérateur  $\mathbf{D}_{LB}$  qui satisfait :

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_{LB}\mathbf{L}. \quad (4.1)$$

Cette équation est cohérente car les fonctions de forme Bernstein et Lagrange de même degré  $p$  définissent toutes les deux le même espace polynomial. L'opérateur  $\mathbf{D}_{LB}$  est construit à partir d'un opérateur élémentaire  $\mathbf{D}_{LB}^e$  qui est identique pour tous les éléments. L'allure des fonctions de forme uni-dimensionnelles Bernstein et Lagrange est donnée sur la Figure 4.1, respectivement en lignes pointillées et pleines.

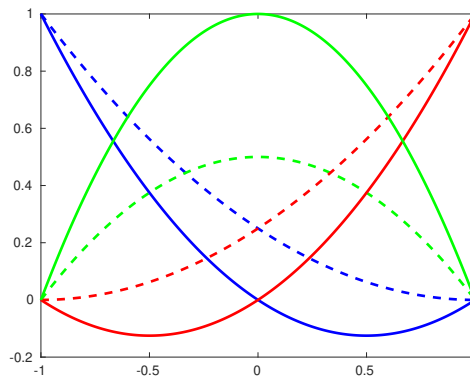


FIGURE 4.1 – Fonctions de forme Bernstein et Lagrange. Ces fonctions sont formulées dans l'espace de référence avec  $\tilde{\xi} \in [-1, 1]$ .

Afin de construire l'opérateur  $\mathbf{D}_{LB}^e$ , il suffit d'exprimer les fonctions Bernstein comme une combinaison linéaire des polynômes de Lagrange en certains points interpolants. La propriété d'interpolation des polynômes de Lagrange permet de créer cet opérateur en évaluant simplement les fonctions Bernstein aux nœuds associés aux polynômes de Lagrange. Pour les fonctions uni-dimensionnelles, en s'intéressant donc aux points  $\tilde{\xi}_i$  égaux à -1, 0 et 1 (*i.e* tel que  $L_i(\tilde{\xi}_j) = \delta_{i,j}$ ), on obtient directement :

$$D_{1D}^e = \begin{bmatrix} B_1(-1) & B_1(0) & B_1(1) \\ B_2(-1) & B_2(0) & B_2(1) \\ B_3(-1) & B_3(0) & B_3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Les opérateurs bi- ou tri- dimensionnels sont obtenus par produit de Kronecker entre opérateurs uni-dimensionnels (comme pour l'opérateur d'extraction de Bézier).

Une fois l'opérateur  $\mathbf{D}_{LB}$  créé, la construction des nœuds EF à partir du maillage de Bernstein se fait comme avec l'opérateur de Bézier, c'est-à-dire  $\mathbf{P}^{EF} = \mathbf{D}_{LB}^T \mathbf{P}^{BER}$ . Les nœuds ainsi

construits peuvent être utilisés comme maillage d'entrée dans des codes éléments finis classiques. Évidemment ces nœuds interpolent la géométrie. Les différents maillages de contrôle qui permettent de générer une poutre quasi-circulaire à deux éléments B-Splines quadratiques sont tracés sur la Figure 4.2. Cette géométrie est identique à celle de la Figure 1.10. Comme prévu, les points de contrôle Bernstein sont plus loin de la géométrie que les nœuds de Lagrange qui eux sont interpolants.

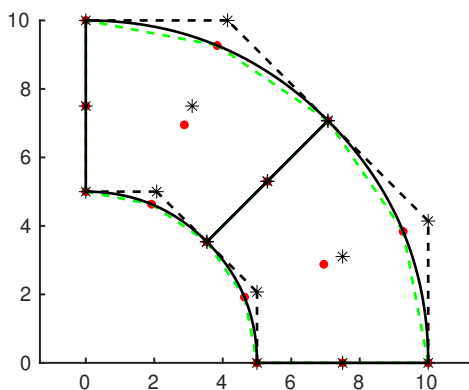


FIGURE 4.2 – D'un maillage Bernstein à un maillage EF pour une poutre à deux éléments (en noir). Le maillage de contrôle Bernstein (en pointillés noirs) est une interpolation linéaire entre quinze points de contrôle parmi lesquels quatre ne sont pas interpolants. Le maillage de contrôle Lagrange (en pointillés verts) est une interpolation linéaire entre quinze nœuds (en rouge), tous interpolent la géométrie initiale (en noir).

#### 4.1.2 Lien direct entre les fonctions Lagrange et B-Splines

Dans les parties précédentes, deux opérateurs  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}_{LB}$  ont été construits. Afin de faire le lien direct entre les fonctions Lagrange et B-Splines, on définit naturellement un opérateur  $\mathbf{D}$  tel que :

$$\mathbf{N} = \mathbf{D}\mathbf{L} \quad \text{avec} \quad \mathbf{D} = \mathbf{C}\mathbf{D}_{LB}. \quad (4.3)$$

Néanmoins, l'opérateur d'extraction de Lagrange n'est jamais calculé de cette façon pour une meilleure efficacité de calcul. En effet, une procédure identique à la création de l'opérateur Lagrange-Bernstein  $\mathbf{D}_{LB}$  peut être directement appliquée à l'extracteur Lagrange  $\mathbf{D}$ ; il suffit d'exprimer les fonctions de forme B-Splines aux noeuds. Un algorithme performant pour faire cela a été développé dans [148]. La Figure 4.3 permet de résumer les différents opérateurs en lien avec l'extraction de Lagrange. A ce stade, il faut préciser que tous ces liens sont exacts car ils transforment des polynômes en d'autres qui sont de même degré et de régularité croissante.

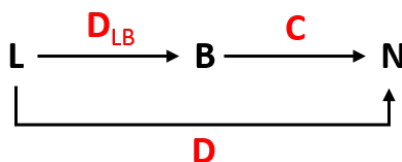


FIGURE 4.3 – Illustration des opérateurs d'extraction nécessaires pour passer d'une base nodale  $\mathcal{C}^0$  Lagrange à une base B-Spline plus régulière.

### 4.1.3 Extraction dans le cas des Non-Uniform Rational B-Splines

Le lien entre l'AIG et la MEF est pour le moment restreint aux géométries basées sur des polynômes. Cependant, dans une grande majorité des cas, la discrétisation spline nécessite des fonctions rationnelles qui prennent en compte les poids associés aux points de contrôle. L'extraction de Lagrange peut s'étendre aux cas NURBS. Cela revient à faire un lien direct entre les fonctions NURBS et les fonctions Lagrange rationnelles, comme précisé dans [148].

On peut déduire de (1.4) et (4.3) que :

$$\mathbf{R}^{IGA} = \frac{\mathbf{W}^{IGA}\mathbf{D}\mathbf{L}}{W^{IGA}}, \quad (4.4)$$

où  $\mathbf{W}^{IGA}$  est la matrice diagonale des poids NURBS et  $W^{IGA} = \sum_{A=1}^{n_A} w_A^{IGA} N_A$  est la fonction poids NURBS.

La fonction poids NURBS peut être réécrite à l'aide des fonctions Lagrange :

$$\begin{aligned} W^{IGA} &= \sum_{A=1}^{n_A} w_A^{IGA} N_A = (\mathbf{w}^{IGA})^T \mathbf{N} = (\mathbf{w}^{IGA})^T \mathbf{D}\mathbf{L} \\ &= (\mathbf{D}^T \mathbf{w}^{IGA})^T \mathbf{L} = (\mathbf{w}^{LAG})^T \mathbf{D} = W^{LAG}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

où les poids associés aux points de contrôle rationnels Lagrange sont :

$$\mathbf{w}^{LAG} = \mathbf{D}^T \mathbf{w}^{IGA}. \quad (4.6)$$

Il est ainsi possible de définir les fonctions de Lagrange rationnelles comme suit :

$$\mathbf{R}^{LAG} = \frac{\mathbf{W}^{LAG}\mathbf{L}}{W^{LAG}}, \quad (4.7)$$

où  $\mathbf{W}^{LAG}$  est la matrice diagonale des poids Lagrange.

Le lien entre les fonctions NURBS et les fonctions Lagrange rationnelles est donc déduit en utilisant (4.7) et (4.5) dans (4.4). Un nouveau extracteur  $\mathbf{D}_W$  est ainsi créé :

$$\mathbf{R}^{IGA} = \mathbf{W}^{IGA}\mathbf{D}(\mathbf{W}^{LAG})^{-1}\mathbf{R}^{LAG} = \mathbf{D}_W\mathbf{R}^{LAG}. \quad (4.8)$$

De la même manière que précédemment, les positions des points de contrôle Lagrange rationnels dépendent des positions des points de contrôle NURBS :  $\mathbf{P}^{LAG} = (\mathbf{D}_W)^T \mathbf{P}^{IGA}$ .

Ce lien entre les fonctions Lagrange rationnelles et les fonctions NURBS est exact car les deux bases sont rationnelles et les NURBS sont de régularité supérieure. Par contre, la mise en place de telles fonctions rationnelles Lagrange à partir des polynômes de Lagrange classiques, nécessite la prise en compte des poids des points de Lagrange  $\mathbf{W}^{LAG}$  et de la fonction poids associée  $W^{LAG}$ . Cette prise en compte des poids n'est pas disponible dans les codes éléments finis classiques où les fonctions sont seulement polynomiales. Nous développons dans la suite un opérateur supplémentaire pour faire le lien entre les fonctions polynomiales Lagrange, disponibles dans les codes EF, et les fonctions NURBS.

### 4.1.4 Implémentation de l'extraction de Lagrange

Comme il a été montré précédemment, pour l'extraction de Lagrange, il faut distinguer les cas NURBS et B-Spline. Nous montrons en premier l'approche dans le cas des NURBS et illustrons l'intrusivité de celle-ci. Ensuite, on explique l'amélioration en terme de non-intrusivité qui peut être réalisée dans le cas spécifique B-Spline.



#### 4.1.4.1 Dans le cas NURBS

Les fonctions rationnelles Lagrange ont été créées à partir de  $\mathbf{D}_W$  comme une structure élémentaire pour faciliter l'implémentation dans un code EF. Le schéma d'implémentation et la communication entre le maillage initial NURBS et le maillage rationnel Lagrange créé sont résumés sur la Figure 4.4. Les données utiles sont indiquées sur les branches, par exemple l'opérateur d'extraction Lagrange global et local  $\mathbf{D}_W$  et  $\mathbf{D}_W^e$  ou encore les fonctions de forme NURBS ou Lagrange rationnelles  $\mathbf{R}^{IGA}$  et  $\mathbf{R}^{LAG}$ . De plus, la table de connectivité utile à l'assemblage des matrices est précisée. Avec une telle procédure, les modifications à réaliser dans un code EF peuvent être listées ainsi :

1. Modifier les fonctions de forme standards EF pour prendre en compte les poids Lagrange et la fonction poids. Construire les fonctions de forme Lagrange rationnelles à partir des polynômes de Lagrange comme exprimé dans (4.7) ;
2. Appliquer l'extraction sur chacun des éléments en utilisant l'opérateur  $\mathbf{D}_W^e$  ;
3. Changer la table de connectivité pour faire un assemblage IG.

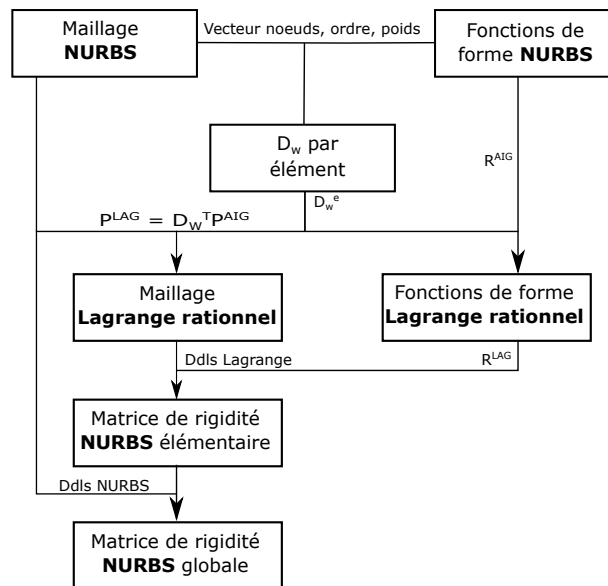


FIGURE 4.4 – Procédure d'implémentation classique utilisant l'extraction de Lagrange pour les NURBS : de la définition NURBS de la géométrie à l'aide de la création de l'opérateur  $\mathbf{D}_W$ , une représentation Lagrange rationnelle de la géométrie est faite. En modifiant la routine des fonctions de forme pour utiliser les fonctions Lagrange rationnelles, la matrice de rigidité IG élémentaire est calculée. Il reste ensuite à modifier la routine d'assemblage de matrice pour permettre l'utilisation des degrés de liberté NURBS afin d'obtenir la matrice de rigidité NURBS globale.

#### 4.1.4.2 Dans le cas B-Spline

Si on restreint l'implémentation aux géométries définies par des fonctions B-Splines (fonctions non rationnelles), la routine EF n'est pas modifiée au niveau élémentaire. Le point 1 précédent n'a pu lieu d'être. Une fois les matrices de rigidité EF élémentaires  $\mathbf{K}^{eEF}$  déterminées, de simples produits matriciels permettent de trouver la matrice de rigidité AIG élémentaire correspondante  $\mathbf{K}^{eIGA}$  :

$$\mathbf{K}^{eIGA} = \mathbf{D}^e \mathbf{K}^{eEF} \mathbf{D}^{eT}. \quad (4.9)$$

Cela est possible car il existe un lien direct entre les polynômes de Lagrange, présents dans les codes EF classiques, et les fonctions B-Splines. Notre travail dans la suite consiste donc à trouver un lien direct entre les NURBS et les polynômes de Lagrange pour atteindre le même niveau de non-intrusivité dans le cas des NURBS.

## 4.2 Stratégie non-intrusive développée

Comme expliqué plus haut, nous ne souhaitons pas réaliser de modification des routines EF, c'est-à-dire les modifications des fonctions de forme (point 1) et de l'assemblage (point 3) doivent être supprimées.

### 4.2.1 Principe

Nous adoptons, tout d'abord, un point de vue global pour les extracteurs comme représenté sur la Figure 4.5. Le chemin commençant par un maillage B-Spline est exact et revient à appliquer la procédure [148] mais d'un point de vue global. Le chemin concernant les NURBS nécessite la création d'un opérateur supplémentaire pour passer des fonctions polynomiales à des fonctions rationnelles. Cette étape ne peut pas être exacte car c'est l'espace des fonctions rationnelles qui inclut les fonctions polynomiales associées et non l'inverse. Une projection est donc nécessaire. Pour plus de simplicité d'implémentation et d'efficacité d'approximation, nous réalisons la projection au niveau des polynômes de Lagrange c'est-à-dire que la discrétisation en fonctions rationnelles Lagrange est projetée sur un espace polynomial lagrangien. L'opérateur  $\mathbf{D}_{LL}$  est donc introduit tel que :

$$\mathbf{R}^{LAG} = \mathbf{D}_{LL}\mathbf{L}, \quad (4.10)$$

et sa construction est expliquée dans le paragraphe suivant.

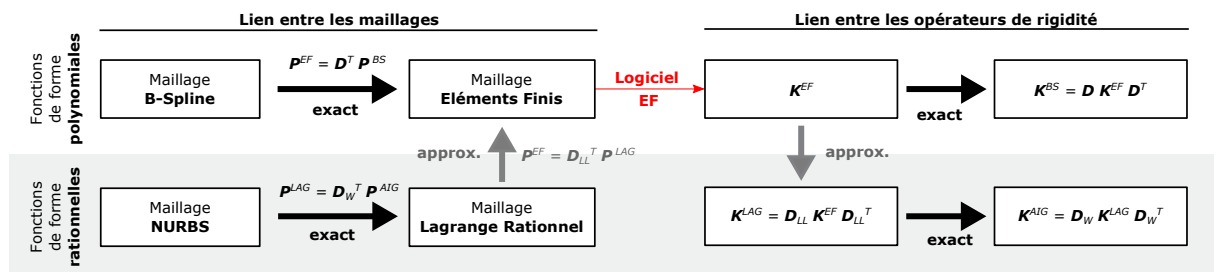


FIGURE 4.5 – Approche pour relier un maillage NURBS à un maillage EF en utilisant différents opérateurs. Ces opérateurs sont ensuite utilisés pour récupérer la matrice de rigidité NURBS à partir de celle EF calculée à l'aide d'un code EF classique utilisé comme une boîte noire. Les flèches noires représentent un lien exact et les flèches grises une approximation.

Une fois que le maillage éléments finis est créé à partir d'un maillage IG, lors d'une étape de pré-traitement, il est utilisé comme maillage d'entrée dans un code EF classique afin d'en calculer la matrice de rigidité EF. Des transformations successives, avec les opérateurs créés, sont réalisées pour obtenir la matrice de rigidité IG finale comme suit :

$$\mathbf{K}^{AIG} = \mathbf{D}_W \mathbf{D}_{LL} \mathbf{K}^{EF} \mathbf{D}_{LL}^T \mathbf{D}_W^T. \quad (4.11)$$

Cette transformation est aussi appliquée au second membre :

$$\mathbf{F}^{AIG} = \mathbf{D}_W \mathbf{D}_{LL} \mathbf{F}^{EF}. \quad (4.12)$$

Ainsi le système  $\mathbf{K}^{AIG} \mathbf{U}^{AIG} = \mathbf{F}^{AIG}$  peut être résolu pour trouver le déplacement  $\mathbf{U}^{AIG}$ .

Finalement, le déplacement IG peut être reconverti en terme de déplacement nodal :

$$\mathbf{U}^{EF} = \mathbf{D}_{LL}^T \mathbf{D}_W^T \mathbf{U}^{AIG}, \quad (4.13)$$

afin de pouvoir utiliser le code EF pour le post-traitement.

**Remarque 12** *Nous pouvons remarquer que (4.12) et (4.13) peuvent être interprétées comme des projections du système EF sur une base isogéométrique. Ainsi le pont algébrique ( $\mathbf{D}_w \mathbf{D}_{LL}$ ) donne un nouveau point de vue sur la relation IG/EF : AIG peut être interprétée comme une projection de la MEF sur une base réduite spécifique plus régulière.*

**Remarque 13** *Bien que les travaux présentés sont restreints à l'étude des NURBS, la méthode pourrait être étendue à d'autres types de discrétisation splines, tels que les T-Splines (voir [149, 150] pour l'extraction dans ces cas).*

### 4.2.2 Approximation simple

En intervenant au niveau des polynômes de Lagrange pour faire la projection entre les espaces rationnels et polynomiaux associés, il est possible de suivre une stratégie pragmatique et précise. En effet, il faut noter que les points de contrôle Lagrange rationnels interpolent la géométrie. Il est naturel alors de considérer que la position  $\mathbf{P}^{EF}$  des nœuds EF est exactement la même que celle  $\mathbf{P}^{LAG}$  des points de contrôle Lagrange rationnels. Dans ce cas,  $\mathbf{D}_{LL}$  se traduit simplement par un opérateur identité (noté  $\mathbf{I}_D$  dans la suite). Ainsi, aucune étape supplémentaire n'est nécessaire par rapport à la méthode présentée.

A titre d'exemple, la Figure 4.6 étudie l'effet d'une telle approximation sur une poutre courbe composée d'un ou deux éléments quadratiques (voir respectivement Figures 4.6a et 4.6b). Sur cette géométrie NURBS typique et très souvent utilisée, l'approximation s'avère être déjà très précise avec un seul élément. Bien évidemment, dès qu'un raffinement est effectué dans la direction de l'arc de cercle, cette approximation est améliorée grâce à l'insertion de points de contrôle supplémentaires. Afin de mieux évaluer l'approximation faite, l'écart relatif entre le rayon externe exact et celui approximé est tracé en fonction de l'angle sur la Figure 4.6c, on retrouve bien le fait que l'écart est globalement plus faible avec plus d'éléments.

En considérant cette haute précision, nous pouvons considérer que l'erreur venant de l'approximation  $\mathbf{D}_{LL} = \mathbf{I}_D$  est négligeable devant l'erreur de la résolution EF du problème mécanique sous-jacent. D'autres exemples numériques permettant de justifier cette approximation sont réalisés dans la suite (voir Chapitre 5).

Une explication alternative peut être donnée grâce à l'étude des poids des points de contrôle. En effet, l'approximation simple revient à considérer les poids des points de contrôle des fonctions de Lagrange rationnelles tous égaux à un. En reprenant l'exemple du quart de cercle, l'approximation peut être expliquée comme indiqué sur la Figure 4.6d. Comme expliqué dans la base des NURBS [44, 130], le poids du point milieu d'un quart de cercle à un élément est égal au cosinus du demi-angle porté par l'arc (le poids des deux points de contrôle aux extrémités étant de 1). Nous notons ainsi  $\alpha$  l'angle d'intérêt (voir Figure 4.6d). En utilisant (4.6), puis en exprimant l'opérateur  $\mathbf{D}$  avec (4.3), et en utilisant finalement  $\mathbf{C} = \mathbf{I}_D$  dans le cas d'un maillage NURBS à un seul élément (composé de vecteur nœud ouvert), nous pouvons déterminer le poids associé aux points de contrôle Lagrange rationnels comme suit :

$$\mathbf{w}^{LAG} = \left( \mathbf{D}_{LB}^{e1D} \right)^T \mathbf{w}^{AIG}. \quad (4.14)$$

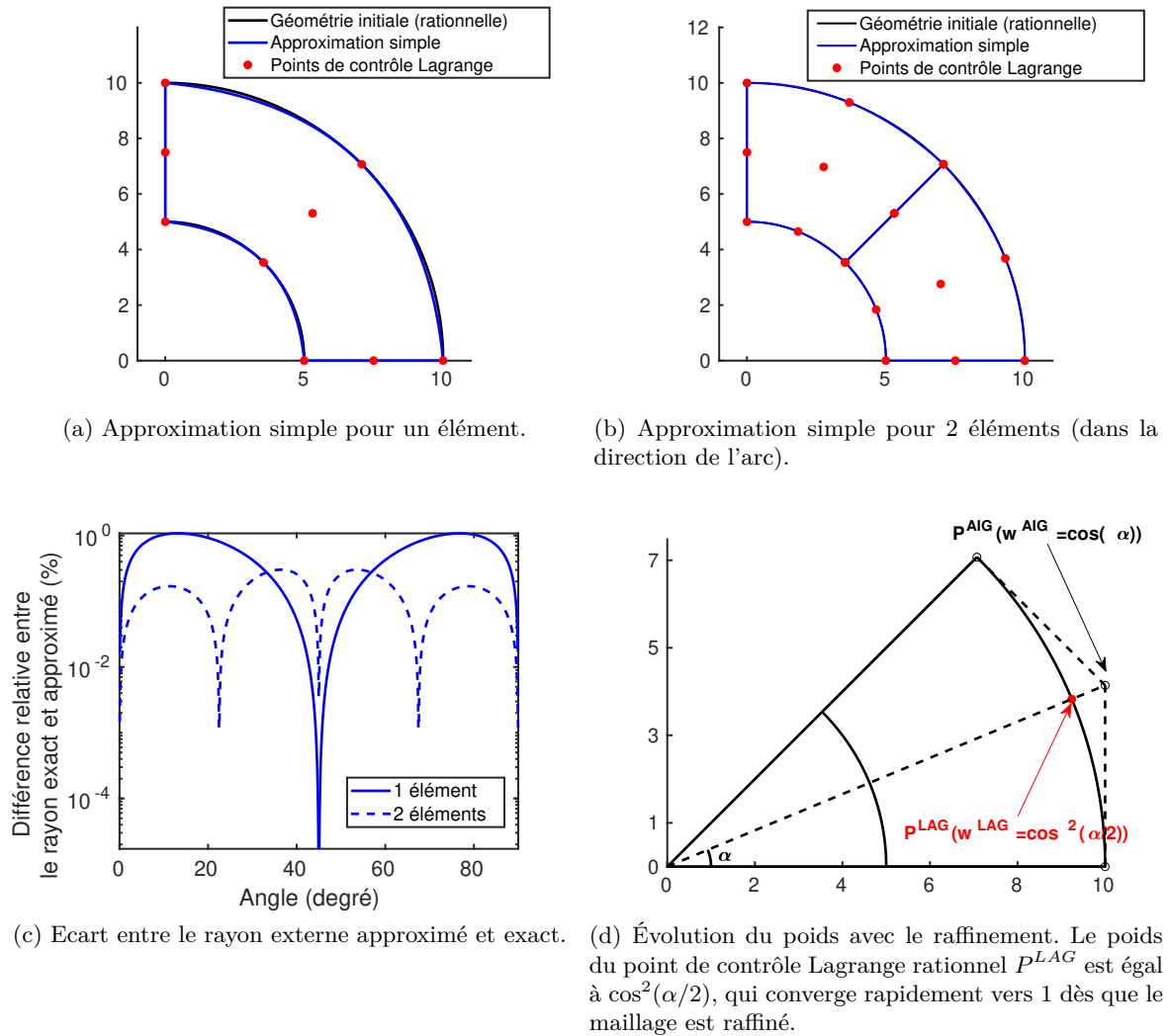


FIGURE 4.6 – Approximation simple dans le cas d'un quart de cercle. La différence sur la géométrie disparaît rapidement avec le raffinement.

Avec  $\mathbf{w}^{AIG} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(\alpha) \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{D}_{LB}^{e^{1D}}$  exprimé comme dans (4.2), on aboutit au poids :

$$w^{LAG} = \frac{1}{2}(1 + \cos(\alpha)) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (4.15)$$

pour le point milieu de la paramétrisation Lagrange rationnelle. Par conséquent, l'exactitude de l'approximation simple peut être visible : pour un élément, on obtient  $\alpha = \pi/4$  ce qui donne  $w^{LAG} = 0.8536$  qui est très proche de un. L'expression :  $w^{LAG} = \cos^2(\alpha/2)$  permet aussi d'étudier la convergence de la stratégie en fonction du raffinement : plus le maillage est raffiné, plus  $\alpha$  diminue et ainsi  $\cos^2(\alpha/2)$  tend vers un.

Au final, nous pouvons remarquer que cette approximation est plus précise quand elle est réalisée au niveau des fonctions de Lagrange. En effet pour passer des fonctions polynomiales Bernstein aux fonctions rationnelles Bernstein de la même manière, la vitesse de convergence serait de l'ordre de  $\cos(\alpha)$ , et le passage direct des polynômes B-Splines aux fonctions NURBS serait quant à lui encore plus lent.

### 4.2.3 Autres approximations possibles

Une autre approche, mathématiquement plus rigoureuse, consiste à faire la projection en utilisant la norme  $L^2$  pour approximer les fonctions Lagrange rationnelles comme des combinaisons linéaires de polynômes de Lagrange. Nous limitons la présentation aux cas 2D bien qu'elle puisse être étendue au cas 3D.

Avec la structure locale des fonctions rationnelles Lagrange et de ces polynômes, l'opérateur  $\mathbf{D}_{LL}$  est construit élément par élément, ce qui permet de diminuer le coût de calcul et qui est plus simple à mettre en place. Notons que des travaux similaires ont été réalisés dans des contextes relativement proches, tel que la projection d'une discrétisation  $C^0$  sur des bases plus régulières (voir, *e.g.*, [155] et [148] qui construisent respectivement les projections de Bézier et de Lagrange).

Dans notre cas, la méthode simple suivante est appliquée. Pour commencer, nous choisissons de prendre les noeuds sommets de l'élément Lagrange considéré égaux à ceux de l'élément Lagrange rationnel associé. De plus, pour être compatibles avec les éléments voisins, nous formulons la projection en écrivant la méthode des moindres carrés sur chaque bord de l'élément. Il en résulte que la méthode proposée ne nécessite pas d'étape d'assemblage commune dans les procédures moindres carrés locales (voir, *e.g.*, [67, 112, 155]) afin de combiner, d'une certaine manière, les différentes valeurs obtenues sur différents éléments au même point. De façon plus précise, on considère une géométrie Lagrange rationnelle élémentaire exprimée de façon similaire à (1.2) et (1.5) :

$$\mathcal{S}^{e^{LAG}} = \mathbf{P}^{e^{LAGT}} \mathbf{R}^{e^{LAG}}, \quad (4.16)$$

où  $\mathbf{P}^{e^{LAG}}$  est la matrice qui contient la position des points de contrôle reliés à l'élément Lagrange rationnel considéré et  $\mathbf{R}^{e^{LAG}}$  est le vecteur des fonctions Lagrange rationnelles élémentaires.

L'objectif est de déterminer la position des noeuds de Lagrange  $\mathbf{P}^{e^{EF}}$  qui donne une approximation exacte de la géométrie Lagrange rationnelle initiale  $\mathcal{S}^{e^{LAG}}$ . Si on s'intéresse à un bord de l'élément défini par la même deuxième coordonnée  $\tilde{\eta}$  dans l'espace parent, on cherche à minimiser la fonctionnelle quadratique  $J$  :

$$J = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\xi}=-1}^1 \left( c^{e^{LAG}}(\tilde{\xi}) - c^{e^{EF}}(\tilde{\xi}) \right)^2, \quad (4.17)$$

pour calculer les nœuds de Lagrange équivalents reliés au bord considéré. Notons que les courbes  $\mathcal{C}^{eLAG}(\tilde{\xi})$  et  $\mathcal{C}^{eEF}(\tilde{\xi})$  ne prennent en compte respectivement que les fonctions Lagrange rationnelles et les polynômes de Lagrange de dimension un. Après différentiation, on obtient le système linéaire suivant qui relie les coordonnées spatiales des nœuds Lagrange du bord ( $X^{eEF}$ ) à celle des points de contrôle Lagrange rationnels du bord ( $X^{eLAG}$ ) :

$$\mathbf{M}_{1D}^e X^{eEF} = \mathbf{M}_R^e X^{eLAG}, \quad (4.18)$$

où  $\mathbf{M}_{1D}^e$  est simplement la matrice de masse élémentaire (pour une densité unitaire) des polynômes de Lagrange 1D et  $\mathbf{M}_R^e$  s'exprime de la façon suivante :

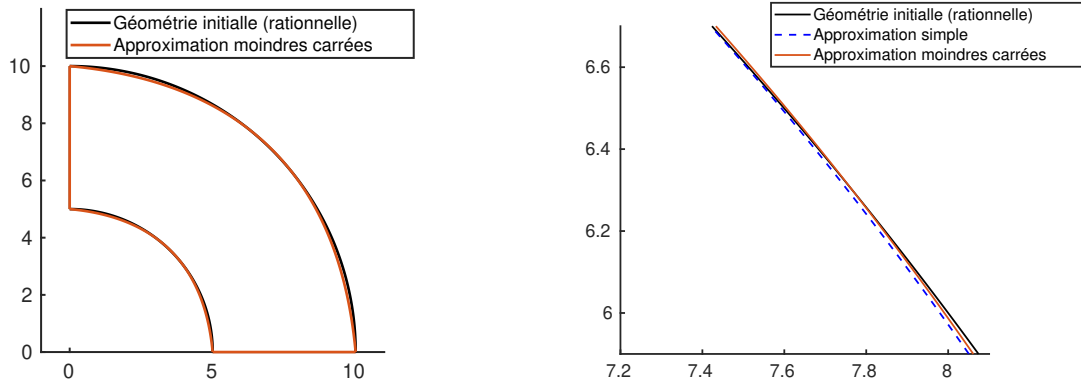
$$\begin{bmatrix} \int_{\tilde{\xi}=-1}^1 L_1(\tilde{\xi}) R_1^{LAG}(\tilde{\xi}) & \int_{\tilde{\xi}=-1}^1 L_1(\tilde{\xi}) R_2^{LAG}(\tilde{\xi}) & \int_{\tilde{\xi}=-1}^1 L_1(\tilde{\xi}) R_3^{LAG}(\tilde{\xi}) \\ \int_{\tilde{\xi}=-1}^1 L_2(\tilde{\xi}) R_1^{LAG}(\tilde{\xi}) & \int_{\tilde{\xi}=-1}^1 L_2(\tilde{\xi}) R_2^{LAG}(\tilde{\xi}) & \int_{\tilde{\xi}=-1}^1 L_2(\tilde{\xi}) R_3^{LAG}(\tilde{\xi}) \\ \int_{\tilde{\xi}=-1}^1 L_3(\tilde{\xi}) R_1^{LAG}(\tilde{\xi}) & \int_{\tilde{\xi}=-1}^1 L_3(\tilde{\xi}) R_2^{LAG}(\tilde{\xi}) & \int_{\tilde{\xi}=-1}^1 L_3(\tilde{\xi}) R_3^{LAG}(\tilde{\xi}) \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Du système (4.18), on ne garde en fait que la position du point Lagrange milieu car comme précisé plus haut les nœuds sommets sont les mêmes que les points de contrôle Lagrange sommets. La procédure est ainsi répétée pour chacun des bords de l'élément. Contrairement à  $\mathbf{D}_{LB}^e$ ,  $\mathbf{D}_{LL}^e$  n'est pas le même pour tous les éléments car il dépend du poids des points de contrôle de l'élément Lagrange rationnel considéré. Par contre, ces poids n'apparaissent que dans le second membre du problème moindre carré local (à travers  $\mathbf{M}_R^e$ , voir (4.19)). Cela permet de calculer analytiquement  $\mathbf{M}_{1D}^e$  et de l'inverser une seule fois pour tous les éléments :

$$(\mathbf{M}_{1D}^e)^{-1} = \begin{bmatrix} 9/2 & -3/4 & 3/2 \\ -3/4 & 9/8 & -3/4 \\ 3/2 & -3/4 & 9/2 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

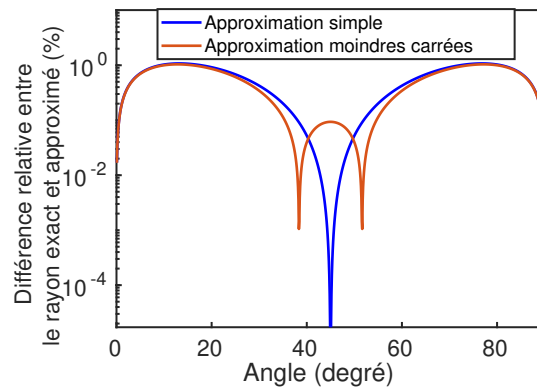
L'unique pré-requis de cette méthode est de pouvoir calculer  $\mathbf{M}_R^e$  sur chaque élément c'est-à-dire, de faire une intégration numérique dans le domaine parent du bord de l'élément. Cela est direct en utilisant les bibliothèques classiques d'analyse numérique. Ainsi, la projection est réalisée à l'aide de deux produits matrice-vecteur de petite taille. L'effort de calcul à ajouter par rapport à la projection simple apparaît donc comme assez faible.

En utilisant toujours l'exemple du quart de cercle, la Figure 4.7 montre la différence en terme de géométrie en utilisant la méthode des moindres carrés sur une géométrie à un seul élément. La géométrie obtenue par projection simple est aussi ajoutée à des fins comparatives. D'un point de vue assez global, cette méthode plus rigoureuse semble donner des résultats similaires (au moins d'un point de vue géométrique) à la stratégie plus pragmatique qui considère tous les poids égaux à un. Cela permet de valider la performance de la méthode précédente pour des applications pratiques (ingénierie). La légère amélioration de la méthode des moindres carrés se voit sur la partie zoomée (voir Figure 4.7b) ; la courbe des moindres carrés démarre sous la courbe de référence et va au-dessus au milieu de l'élément. L'écart relatif entre le rayon externe exact et ceux calculés avec l'approximation simple ou l'approximation moindres carrés est tracé sur la Figure 4.7c et permet de mettre en évidence la différence entre les deux méthodes au niveau du milieu de l'arc de cercle. Notons que nous avons supprimé l'adjectif *local* dans la dénomination de la méthode des moindres carrés locaux sur la Figure 4.7. Nous procédons de la même manière dans la suite pour alléger les notations.



(a) Approximation des moindres carrés locaux pour un élément.

(b) Zoom sur la fenêtre.



(c) Ecart entre le rayon externe approximé et exact.

FIGURE 4.7 – Approximation moindres carrés local pour un quart de poutre circulaire. Cela consiste en une projection au niveau de l'élément qui détermine la meilleure position des nœuds Lagrange qui génèrent une géométrie proche de celle des Lagrange rationnels.

#### 4.2.4 Limite de la méthode

Les éléments EF créés à partir d'un maillage NURBS (d'ordre 2) sont de type quadratiques à 9 nœuds et sont notés Q9 (respectivement Hexa 27 en 3D). Or ces éléments ne sont pas disponibles dans tous les codes éléments finis industriels. Certains codes peuvent en effet se restreindre à des éléments quadratiques à 8 nœuds notés Q8 (ou Hexa 20 en 3D). L'espace engendré par les fonctions B-Splines n'étant pas inclus dans celui généré par les polynômes de Lagrange Q8 (resp. Hexa20), il n'est pas possible de faire un lien direct comme avec les fonctions de l'élément Q9. Il est en effet nécessaire de conserver la structure produit tensoriel. La méthode décrite précédemment se limite donc aux codes de calcul, assez nombreux, possédant les fonctions polynômes de Lagrange pour les Q9 (resp. Hexa 27). D'autre part, les travaux présentés dans cette thèse sont restreints aux fonctions quadratiques car la grande majorité des codes EF industriels ne vont pas au-delà des éléments finis de degré 2. Néanmoins, la méthode développée peut être directement appliquée à des fonctions B-Splines de degré plus élevé sous réserve que le code EF dispose d'éléments finis de haut degré.

### 4.3 Implémentation non-intrusive dans le cas non-linéaire

Les parties les plus complexes et optimisées des codes éléments finis sont sans conteste l'implémentation de comportements mécaniques non-linéaires. Ainsi, rendre l'AIG plus accessible aux codes éléments finis implique de ne pas toucher à ces routines. Afin de mettre en évidence la performance et le potentiel de notre méthode, nous présentons dans la suite un problème non-linéaire. Comme montré précédemment la méthode nécessite un niveau réduit d'intrusivité. Dans ce cas, aucune modification du solveur non-linéaire n'est apportée. Un seul pré-requis est nécessaire pour cette méthode : il faut être capable de récupérer la matrice tangente et le second membre à chaque itération du solveur.

D'un point de vue théorique, l'extension de cette méthode est directe. La seule différence est le fait que la résolution du problème global tangent est réalisée au sein du solveur non-linéaire (basé sur la méthode de Newton). La résolution de ce problème doit encore être faite par le code éléments finis pour des raisons d'optimisation de code expliquées plus tôt. Ce choix permet en plus à l'utilisateur de choisir toutes les options du solveur non-linéaire disponibles dans le code EF. En pratique, cela nécessite en plus quelques fonctionnalités dans le code et notamment de pouvoir stopper la résolution du solveur non-linéaire afin de pouvoir externaliser la résolution du système tangent global, d'y réinjecter le déplacement solution trouvé et finalement de relancer la résolution non-linéaire sans autre traitement externe.

La Figure 4.8 montre en détails la stratégie d'implémentation de notre méthode dans un cas non-linéaire. Le détail de l'implémentation dans le cas particulier du code EF *Code\_Aster* est donné dans la suite (voir la Section 5.2).



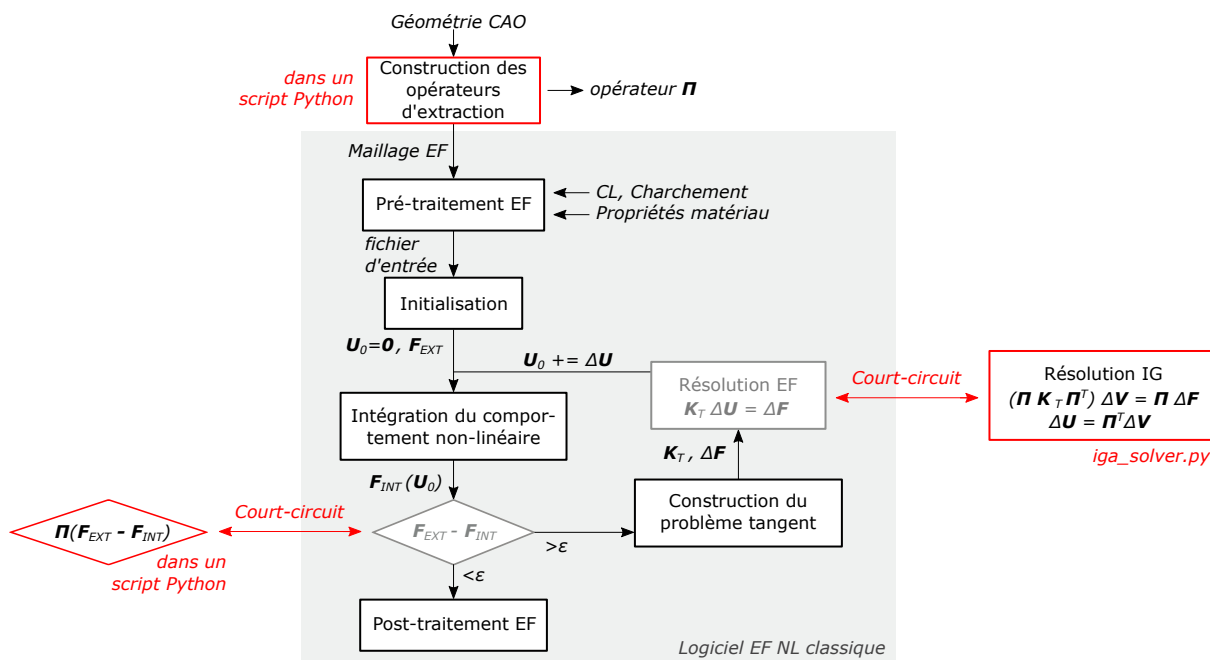


FIGURE 4.8 – Schéma de l’implémentation non-intrusive et non-linéaire dans un code EF utilisé comme une boîte noire. Un opérateur  $\Pi$  est introduit pour définir le passage direct entre AIG et MEF (*i.e.*  $\mathbf{D}$  pour les B-Splines ou  $\mathbf{D}_W \mathbf{D}_{LL}$  pour les NURBS).

**Bilan** : Au cours de ce chapitre, nous avons mis en place une stratégie permettant de résoudre des problèmes isogéométriques dans un code EF industriel existant de façon non-intrusive, c’est-à-dire sans modifier l’ensemble des routines du code EF. Un opérateur global approché a été créé afin de faire le lien entre les fonctions de forme NURBS, utilisées dans l’AIG, et les fonctions standards Lagrange, utilisées dans la MEF. Cet opérateur permet de déterminer un maillage EF permettant de retrouver la solution IG. Ce maillage sert de maillage d’entrée dans un code EF qui est utilisé comme une boîte noire. Les caractéristiques EF peuvent ainsi être calculées et re-projetées, à l’aide de l’opérateur mis en place, pour obtenir les caractéristiques IG. Cette procédure s’adapte pour les cas non-linéaires où le code EF permet de construire la matrice tangente. La performance de la méthode est testée sur différents cas-tests linéaires ou non dans le chapitre 5. L’avantage de notre méthode pour l’implémentation d’un couplage multi-échelle global-local AIG-MEF est mis en avant dans le chapitre 6.

---

## Résultats numériques de l'implémentation

---

### Sommaire

---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>5.1 Cas-test linéaires</b> . . . . .                              | <b>58</b> |
| 5.1.1 Arc circulaire en dimension 2 . . . . .                        | 58        |
| 5.1.2 Coque 3D . . . . .   | 60        |
| 5.1.3 Pièce massive 3D . . . . .                                     | 62        |
| <b>5.2 Cas-test non-linéaire</b> . . . . .                           | <b>64</b> |
| 5.2.1 Besoins pour l'implémentation dans <i>Code_Aster</i> . . . . . | 64        |
| 5.2.2 Application à l'élasto-plasticité . . . . .                    | 65        |

---

Dans ce chapitre, nous implémentons et testons le lien AIG-MEF créé dans le chapitre 4 pour résoudre des problèmes linéaires et non-linéaires. Nous souhaitons vérifier que les résultats obtenus par une résolution directe IG et ceux obtenus par l'utilisation de notre opérateur global combiné à un code EF existant sont bien similaires. L'influence de l'approximation faite entre les fonctions rationnelles Lagrange et les polynômes de Lagrange sur la solution finale est évaluée.

## 5.1 Cas-test linéaires

Dans un premier temps, il est choisi de réaliser des calculs en élasticité linéaire afin de valider les résultats pouvant être obtenus avec la transformation développée par rapport à des références bibliographiques aussi bien en AIG qu'en MEF. Dans cette partie, la méthode proposée de récupération du système IG à partir du système EF via une projection est nommée "AIG projetée". De plus, nous ajoutons les adjectifs "simple" ou "moindres carrés" si une approximation simple (cf. 4.2.2) ou au sens des moindres carrés est utilisée (cf. 4.2.3).

### 5.1.1 Arc circulaire en dimension 2

L'exemple choisi ici est une poutre circulaire en cisaillement comme illustré sur la Figure 5.1. Les propriétés élastiques du matériau sont les suivantes : module de Young  $E = 10000$  et coefficient de Poisson  $\nu = 0,25$ . Un déplacement constant  $u_0 = 0,01$  est appliqué sur le bord inférieur de la poutre. Une solution analytique de ce problème se trouve dans la littérature [166].

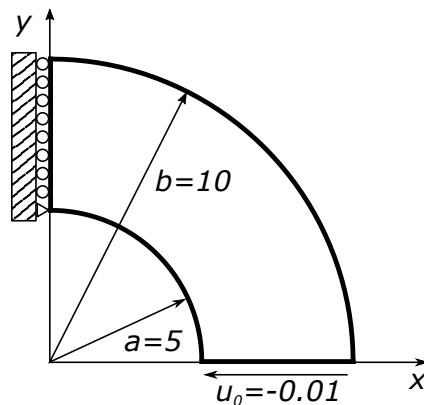


FIGURE 5.1 – Description du problème de la poutre circulaire.

Sur la Figure 5.2 sont tracés les différents maillages dans le cas d'une discrétisation à deux éléments dans la direction de l'arc. En pointillés noirs, le maillage de contrôle NURBS est une interpolation linéaire entre les points de contrôle NURBS (les cercles). En vert, c'est le maillage EF obtenu à l'aide de la projection "simple" ou "moindres carrés" (la différence entre les deux maillages n'étant pas visible ici à l'œil nu). On observe bien que les points de contrôle Lagrange, ou nœuds, indiqués en rouge sont bien interpolants par rapport à la géométrie de départ NURBS.

L'évolution de l'erreur en énergie de déformation en fonction du nombre de degrés de liberté est tracée sur la Figure 5.3. L'erreur relative est calculée de la façon suivante :

$$\frac{|E_d^{ex} - E_d^{fe}|}{|E_d^{ex}|}, \quad (5.1)$$

où  $E_d^{ex}$  fait référence à l'énergie de déformation exacte et  $E_d^{fe}$  l'énergie de déformation du modèle discret.

Nous pouvons noter que les résultats pour un élément à 9 nœuds, créé avec une projection simple ou au sens des moindres carrés, sont identiques. Ce comportement était attendu ; comme il a été montré d'un point de vue géométrique plus haut, la projection simple est efficace et ce même dans le cas d'un seul élément dans la direction de l'arc de cercle. Avec le premier raffinement, il y a déjà ici 6 éléments dans la direction de l'arc. Ainsi l'erreur liée à l'approximation  $\mathbf{D}_{LL} = \mathbf{I}_D$  est très largement insignifiante comparée à l'erreur associée aux EF. Les résolutions faites sur des

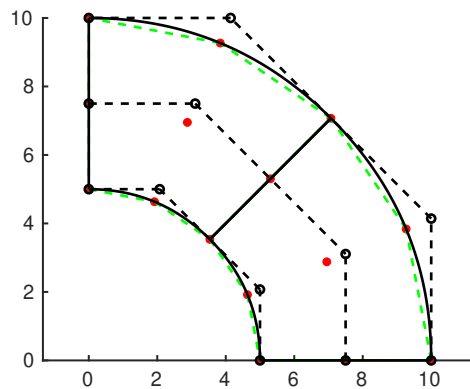


FIGURE 5.2 – Différents maillages de la géométrie NURBS initiale (en noir) avec deux éléments dans la direction de l'arc. En vert, le maillage EF obtenu à l'aide de la projection "simple" ou "moindres carrés" (la différence entre les maillages n'étant pas visible à l'œil nu). Les noeuds de Lagrange (points rouges) sont interpolants par rapport à la géométrie initiale, ce qui n'est pas le cas des points de contrôle NURBS (cercles noirs).

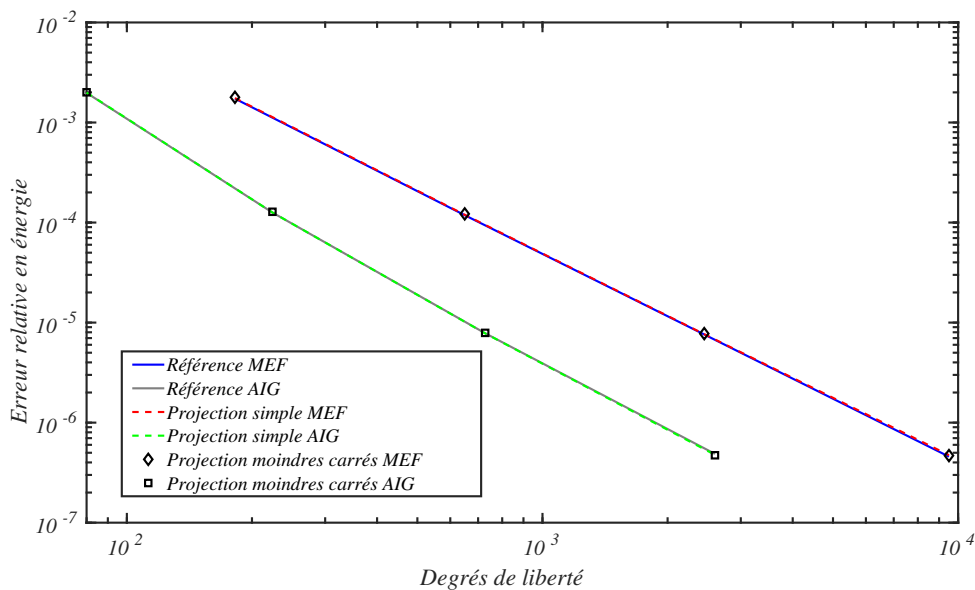


FIGURE 5.3 – Évolution de l'erreur relative en énergie de la poutre circulaire. Les résolutions entièrement EF [166] et IG sont utilisées comme références. D'une part l'erreur est calculée en utilisant une approximation simple entre les fonctions rationnelles Lagrange et les polynômes de Lagrange pour le problème EF résultant (courbe "Projection simple MEF") et pour le problème AIG re-projeté (courbe "Projection simple AIG"). D'autre part, l'erreur est calculée en utilisant une approximation au sens des moindres carrés entre les fonctions rationnelles Lagrange et les polynômes de Lagrange; les courbes correspondantes sont celles notées "Projection moindres carrés MEF et AIG".

maillages EF, créés par les deux méthodes d'approximation, donnent une évolution de l'erreur similaire à celle de la référence EF [166].

Afin d'obtenir la matrice de rigidité IG, et ainsi récupérer les résultats IG, la matrice de rigidité EF est re-projetée en utilisant les opérateurs globaux créés précédemment (cf. (4.11)). Les

erreurs IG trouvées avec une projection simple ou au sens des moindres carrés sont très proches de celle de la résolution de référence IG. Cela permet de conclure sur la performance de notre méthode dans le cas de l'utilisation de NURBS. Les détails des erreurs pour chaque raffinement sont donnés dans le Tableau 5.1 pour un cas entièrement IG et un cas IG à partir d'EF par projection simple. Par ailleurs, on peut observer sur la Figure 5.3 que pour un raffinement donné le niveau d'erreur est approximativement le même entre la MEF et l'AIG. La différence principale est que le nombre de degrés de liberté est significativement diminué quand une résolution IG est faite. La différence entre les deux courbes correspond à la meilleure précision par degré de liberté de l'AIG qui est ainsi retrouvée à travers la méthode proposée.

TABLE 5.1 – Comparaison de l'erreur en énergie de déformation entre un calcul entièrement isogéométrique et un calcul AGI projeté.

| Maillage | AGI            |           | AGI projeté    |           |
|----------|----------------|-----------|----------------|-----------|
|          | Nombre de ddls | Erreur    | Nombre de ddls | Erreur    |
| 6x3      | 80             | 1,978e-03 | 80             | 1,990e-03 |
| 12x6     | 224            | 1,259e-04 | 224            | 1,260e-04 |
| 24x12    | 728            | 7,823e-06 | 728            | 7,798e-06 |
| 48x24    | 2600           | 4,869e-07 | 2600           | 4,767e-07 |

### 5.1.2 Coque 3D

Dans cette partie, des exemples de problèmes coques sont présentés. Pour la modélisation nous utilisons des éléments coques classiques [22], ce qui revient à considérer une seule couche d'éléments 3D dans l'épaisseur. Contrairement aux cas 2D où le maillage EF est constitué d'éléments quadratiques à 9 nœuds, le maillage EF est ici composé d'éléments hexaédriques à 27 nœuds.

#### 5.1.2.1 Cylindre pincé

Pour commencer, le fameux exemple du cylindre pincé, introduit par Belytschko *et al.* [12] et McNeal et Harder [107], est considéré. Le cylindre est supporté par deux diaphragmes à chaque extrémité. Deux forces opposées sont appliquées au niveau de la section médiane du cylindre. À l'aide des symétries du problème, seulement un huitième du cylindre peut être modélisé. La géométrie et les conditions aux limites sont détaillées sur la Figure 5.4. La valeur du rayon moyen est  $R = 300$  et l'épaisseur du cylindre est égale à 3. La longueur du cylindre est  $L = 600$ . Les propriétés matériaux sont les suivantes : module de Young  $E = 3.10^6$  et coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ . La force soumise sur le huitième de cylindre vaut  $F = -0,25$ . La solution de référence s'exprime en terme de déplacement suivant la direction  $z$  au point d'application de la force. Sa valeur est  $u_{ref} = 1,8248.10^{-5}$ . L'implémentation de cet exemple a été réalisée avec le logiciel industriel *Code\_Aster*. En suivant la procédure décrite sur la Figure 4.5, *Code\_Aster* a été utilisé comme une boîte noire permettant de déterminer la matrice de rigidité EF globale ainsi que le second membre à partir d'un maillage EF construit lors du pré-traitement grâce au lien global entre l'AIG et la MEF.

Sur la Figure 5.5a, l'évolution du déplacement d'intérêt en fonction du nombre de degrés de liberté est tracée. Seule la projection simple de la Section 4.2.2 a été implémentée dans ce cas. À chaque raffinement, la valeur du déplacement obtenue par calcul entièrement isogéométrique

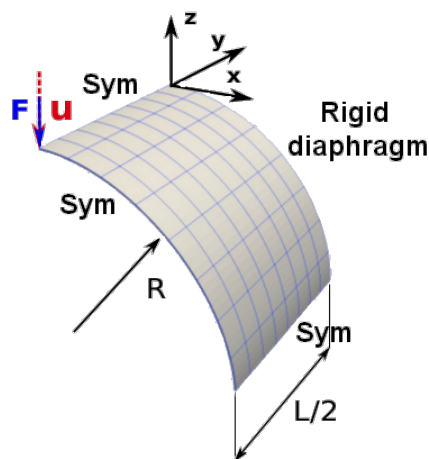
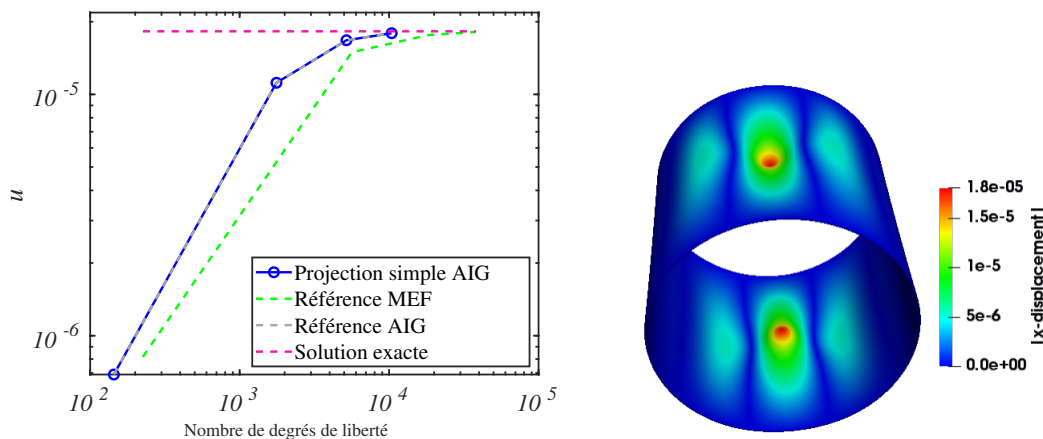


FIGURE 5.4 – Description du problème du cylindre pincé [22].

est quasi-identique à celle issue de notre procédure de calcul. Cela permet de confirmer la performance du lien AIG/MEF développé même avec une approximation simple. A convergence, la solution de référence est atteinte avec les deux méthodes. Comme dans l'exemple précédent, les avantages de l'AIG peuvent être mis en évidence : pour le même raffinement de maillage, le nombre de degrés de liberté de la MEF est supérieur à celui de l'AIG (ou, de façon équivalente, de notre méthode). De plus, comme nous pouvons le voir en s'intéressant au déplacement dans la direction  $x$  sur la Figure 5.5b, une solution exacte régulière est obtenue avec notre méthode d'implémentation de l'AIG.



(a) Évolution du déplacement d'intérêt. Pour différents niveaux de raffinement, le déplacement obtenu est comparé aux références IG et EF. La solution de référence coque [12, 107] est aussi tracée.

(b) Valeur absolue du déplacement dans la direction  $x$  du cylindre pincé en configuration déformée (projection AIG simple).

FIGURE 5.5 – Résultats en terme de déplacement et de contrainte pour le cylindre pincé.

### 5.1.2.2 Hémisphère pincé

Le deuxième exemple choisi est un hémisphère pincé avec un trou sur la surface haute de l'hémisphère. L'intérêt de ce cas-test est de présenter une géométrie doublement incurvée, ce qui va permettre de mettre en évidence la précision ou non de notre stratégie avec une projection

simple pour ce type de géométrie. Les symétries du problème permettent de restreindre l'étude à un quart de l'hémisphère. Les données géométriques ainsi que les conditions aux limites sont indiquées sur la Figure 5.6. La valeur du rayon moyen est  $R = 10$  et l'épaisseur de l'hémisphère est égale à  $0,04$ . Les propriétés matériaux sont les suivantes : module de Young  $E = 6,825 \cdot 10^7$  et coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ . Au niveau du point  $C$ , le déplacement vertical (suivant la direction  $z$ ) est bloqué afin de supprimer le dernier mouvement de corps rigide. La solution de référence est le déplacement au point d'application de la force  $F$ , sa valeur est  $u^{ref} = 0,094$ .

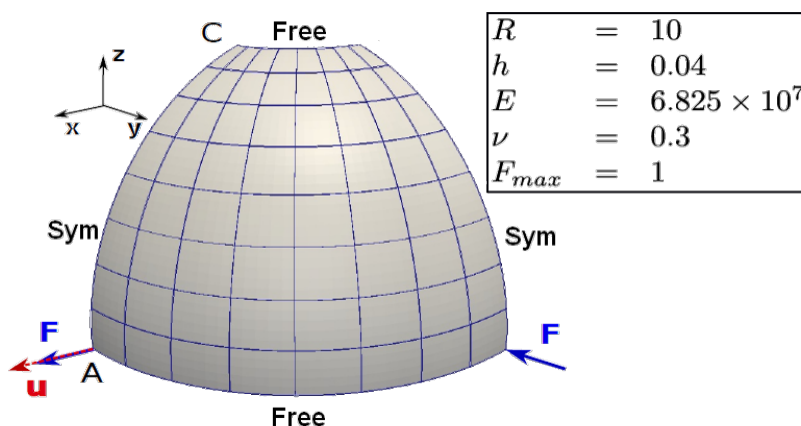


FIGURE 5.6 – Description du problème sur l'hémisphère pincé avec un trou [22].

Le déplacement d'intérêt est donné sur la Figure 5.7a en fonction du nombre de degrés de liberté. La solution IG trouvée en utilisant un code EF classique, *Code\_Aster*, pour calculer la matrice de rigidité est identique pour chaque raffinement au déplacement obtenu avec un code faisant un calcul entièrement IG. Une référence dans un code EF classique est aussi indiquée. Toutes les méthodes convergent vers la solution de référence dès que le maillage est suffisamment fin. On peut voir que le déplacement convergé est obtenu pour le troisième raffinement en EF, comme en AIG, sauf que le nombre de degrés de liberté afin d'obtenir un tel résultat est cinq fois supérieur à celui requis pour l'AIG. Le déplacement suivant la direction  $x$  de l'hémisphère entier est tracé sur la Figure 5.7b afin de mettre en évidence la zone pincée.

### 5.1.3 Pièce massive 3D

Dans cette partie, un solide nommé "fer à cheval" soumis à deux forces contraires sur ses surfaces hautes sert d'exemple (voir, *e.g.*, [82] pour un exemple similaire). La géométrie et le maillage NURBS associés au fer à cheval sont décrits sur la Figure 5.8a. Il faut noter que cette géométrie nécessite un modèle multi-patch, ce qui peut être facilement pris en compte dans notre méthode. Le maillage NURBS utilisé pour le calcul est composé de 1152 éléments de degré 2 avec 7020 degrés de liberté. Les propriétés matériaux sont les suivantes : module de Young  $E = 3 \cdot 10^7$  et coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ .

Un déplacement initial  $u_0 = y$  est appliqué sur la surface haute gauche et un déplacement similaire  $u_0 = -y$  est appliqué sur la surface haute droite. De plus, les déplacements des surfaces hautes suivant la direction  $x$  sont bloqués. Pour le déplacement suivant  $z$ , seuls les points situés au coin opposé de la courbe arrondie de chaque surface sont bloqués. Un tel choix de conditions aux limites rend le chargement non-symétrique.

En utilisant le passage global développé, un maillage EF associé est construit ; il est composé de 33507 degrés de liberté. Afin de visualiser le passage de la géométrie NURBS à celle éléments finis, le maillage EF obtenu est donné sur la Figure 5.8b. Ce maillage est constitué d'éléments

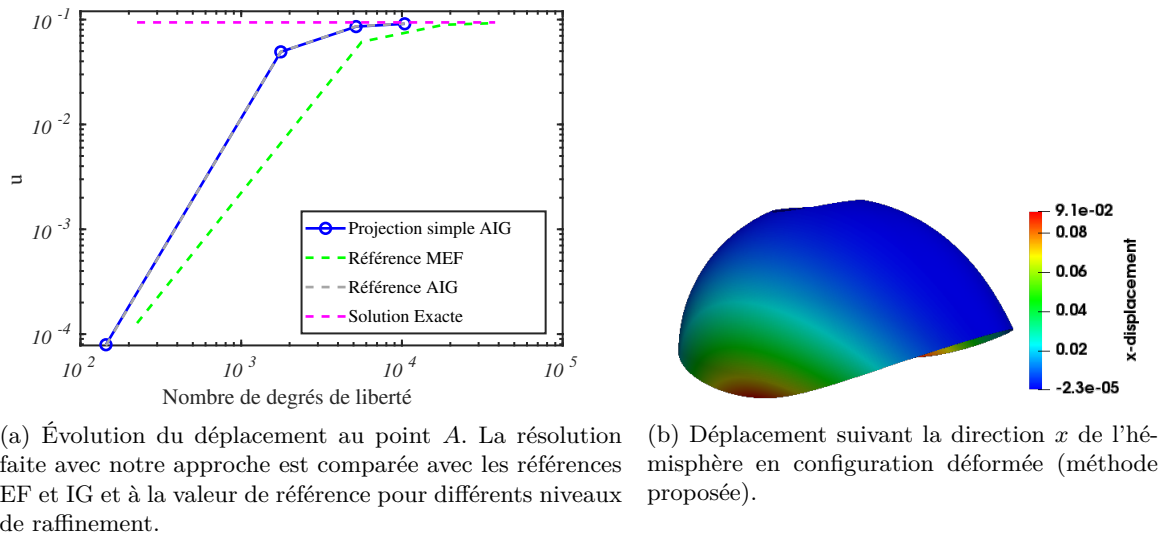


FIGURE 5.7 – Résultats de l'hémisphère pincé avec un trou.

hexahédriques à 27 noeuds. Il est utilisé comme un maillage d'entrée pour un logiciel industriel EF. Après avoir obtenu et résolu le système IG linéaire à partir de celui EF créé via *Code\_Aster*, le champ de déplacement IG trouvé est reconverti en déplacement nodal (voir (4.13)). Les routines de post-traitement EF peuvent ainsi être réutilisées afin de tracer les contraintes NURBS comme sur la Figure 5.9a. Un zoom sur la zone de concentration de contrainte  $\sigma_{yy}$ , due au chargement dissymétrique, est fait sur la Figure 5.9b. Les résultats sont réguliers et en adéquation avec les résultats des simulations IG [82].

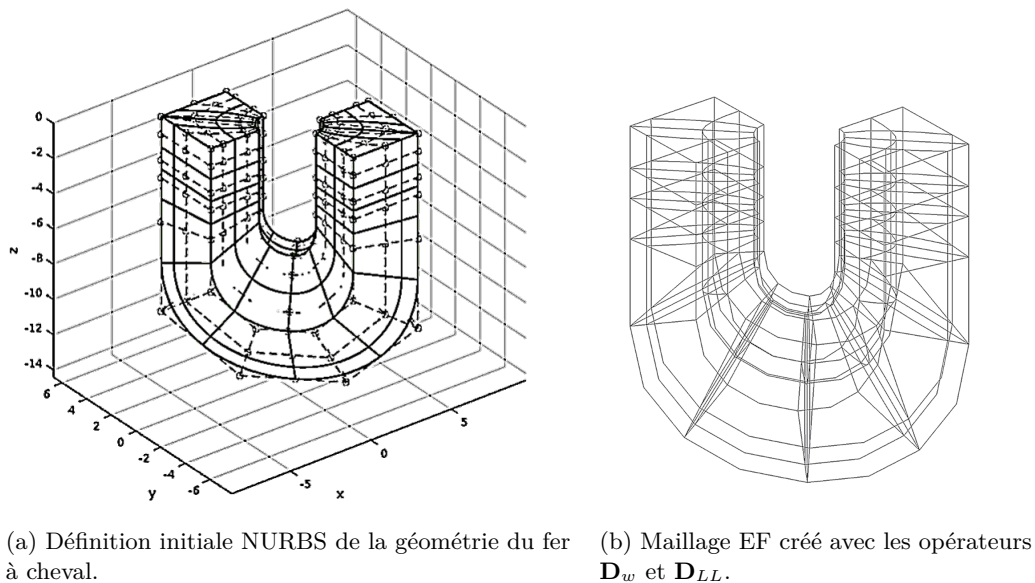
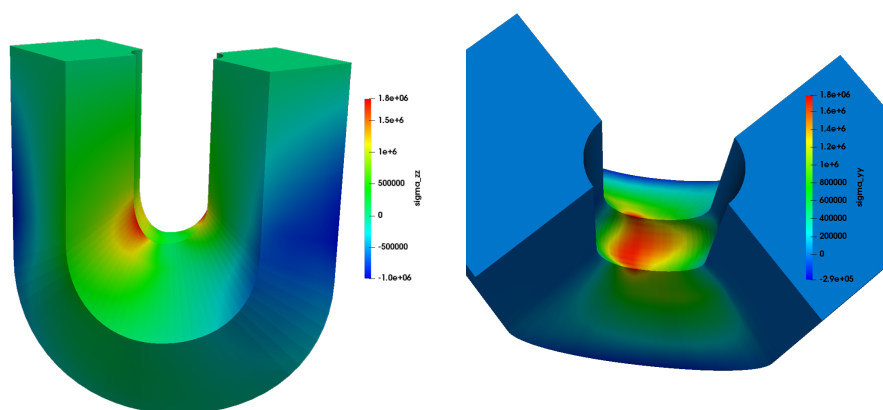


FIGURE 5.8 – Géométrie et maillage du fer à cheval.





(a) Contrainte  $\sigma_{zz}$  sur toute la géométrie. Bien que de plus petite dimension, l'espace IG permet encore de trouver une solution quasi-identique à celle EF. Ce résultat est en concordance avec l'interprétation de l'AIG comme une projection de la MEF sur une base réduite spécifique plus régulière.

(b) Détail de la localisation de la contrainte  $\sigma_{yy}$  à cause du chargement non-symétrique.

FIGURE 5.9 – Contour des contraintes pour le fer à cheval (méthode proposée).

## 5.2 Cas-test non-linéaire

### 5.2.1 Besoins pour l'implémentation dans *Code\_Aster*

Comme indiqué dans le chapitre précédent (voir 4.3), l'implémentation de la méthode pour un problème non-linéaire est assez directe. La méthode est implémentée dans *Code\_Aster*. L'implémentation de la méthode est permise grâce à l'utilisation de routines Python (pseudo-dépendantes du code) et du solveur non-linéaire *STAT\_NON\_LINE en commande éclatée*.

Après le pré-traitement, qui ne change pas par rapport à un cas élastique, le solveur *STAT\_NON\_LINE en commande éclatée* rentre dans la boucle de Newton (se référer de nouveau à la Figure 4.8).

Le comportement non-linéaire est intégré à l'aide des fonctions Fortran optimisées de *Code\_Aster*. Le problème tangent EF est aussi assemblé (en utilisant encore les routines Fortran de *Code\_Aster*). Par contre la résolution du système tangent est remplacée par une routine Python. Cette dernière consiste à résoudre le problème IG qui a été récupéré grâce à la projection avec l'opérateur  $\mathbf{\Pi}$  faisant le lien direct AIG-MEF. Une fois que la résolution est faite, le vecteur déplacement isogéométrique obtenu est transféré dans l'espace éléments finis afin qu'il puisse être réintroduit dans *Code\_Aster* pour mettre à jour le comportement. Il faut noter qu'une très courte deuxième routine Python est nécessaire pour calculer le résidu IG à partir de celui EF.

Le détail des routines est donné ci-dessous dans le cas de l'implémentation dans *Code\_Aster*.

La routine `iga_solver.py` est globalement construite comme suit :

- récupérer le concept *Aster* qui correspond à la matrice de rigidité et le second membre pour le convertir en tableau numpy :
 

```
Kef = sparse.csr_matrix(STIFF.EXTR_MATR())
Fef = FORCE.EXTR_COMP().valeurs
```
- projection du système global et résolution :
 

```
Uiga = scipy.sparse.linalg.spsolve(Pi.T.dot(K.dot(Pi)),Pi.T.dot(F))
```
- reconstruction du vecteur solution EF :

```
Uef = Pi.dot(Uiga)
```

Cette subroutine Python est appelée dans le fichier de commande COMM de *Code\_Aster* en utilisant les commandes suivantes :

```
from iga_solver import *
Uef=iga_solver(STIFF,FORCE)
```

Finalement, dans le fichier COMM, un concept Aster doit être construit à partir du déplacement *Uef* en utilisant les fonctions `CREA_TABLE(...)` et `CREA_CHAMP(...)`.

**Remarque 14** *L’interface de programmation de Code\_Aster étant Python, il est possible dans ce cas particulier d’éviter de lire ou écrire les opérateurs linéaires sur le disque dur, comme cela peut être le cas avec d’autres codes industriels. Les opérateurs sont conservés dans la mémoire vive au format sparse. L’algorithme nécessite seulement de projeter le système EF tangent et le résidu EF sur une base réduite spéciale. Cette opération peut être effectuée de façon efficace grâce à la librairie Scipy.Sparse. Ces techniques de projection sont classiquement utilisées pour les modèles d’ordre réduit (POD, bases réduites, voir par exemple [39, 89, 136]).*

### 5.2.2 Application à l’élasto-plasticité

Dans le but d’illustrer notre méthode, nous nous intéressons à une section d’éprouvette 3D en forme d’os en tension. Un tel test est usuellement utilisé pour caractériser la dureté des matériaux métalliques [110]. L’éprouvette fait 100 mm de long, le ligament est large de 5 mm et l’épaisseur vaut 2,5 mm comme résumé sur la Figure 5.10 (haut). Un comportement élasto-plastique est considéré avec un écrouissage mixte de Von Mises (voir Figure 5.10 (bas)). Les paramètres linéaires sont les suivants : module de Young  $E = 22,13$  GPa et coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ . La constante de Prager est définie à 2200 MPa et l’écrouissage suit la courbe contrainte-déformation donnée sur la Figure 5.10. L’éprouvette est soumise à une tension seule : le chargement va de  $p = 0$  MPa à  $p = 80$  MPa avec des incréments (non-uniformes) de 10. De tels paramètres permettent que la non-linéarité soit rapidement captée numériquement en quelques itérations du solveur de Newton pour chaque pas de chargement.

**Remarque 15** *Pour appliquer des conditions aux limites de type Dirichlet, Code\_Aster utilise une méthode à doubles multiplicateurs de Lagrange (voir [35]) pour éviter de perdre le caractère défini positif de l’opérateur. Les multiplicateurs de Lagrange sont utilisés dans le solveur non-linéaire de Code\_Aster pour actualiser le comportement. Bien que cela ne présente pas une limite théorique, nous utilisons, pour plus de simplicité d’implémentation, un problème aux conditions aux limites de Neumann afin que les multiplicateurs de Lagrange soient nuls.*

Le maillage EF, à droite de la Figure 5.11, est créé à partir d’un maillage NURBS initial, à gauche de la Figure 5.11, comme décrit dans le chapitre 4. Même si, dans ce cas, seulement un élément à été pris en compte dans l’épaisseur de l’éprouvette, le nombre de degrés de liberté est bien réduit : 6561 pour l’AIG contre 23409 pour le maillage EF associé.

La composante longitudinale du déplacement est représentée sur la Figure 5.12a. La contrainte de Von Mises obtenue avec une méthode AIG non-intrusive (`STAT_NON_LINE` en commande éclatée + routines Python) est aussi présentée sur la Figure 5.12b. On peut voir que, dans la région la plus fine, le champ a des valeurs au-dessus de la limite d’élasticité ( $\approx 200$ MPa) ce qui indique qu’en son centre l’éprouvette a subi une déformation plastique. Le champ de contrainte IG est comparé au champ de contrainte de Von Mises en utilisant le maillage EF d’entrée et le solveur non-linéaire de *Code\_Aster* (`STAT_NON_LINE`) avec le même maillage. En ce qui concerne la vitesse de convergence de l’algorithme non-linéaire, aucune différence n’a été observée entre l’AIG et la MEF.

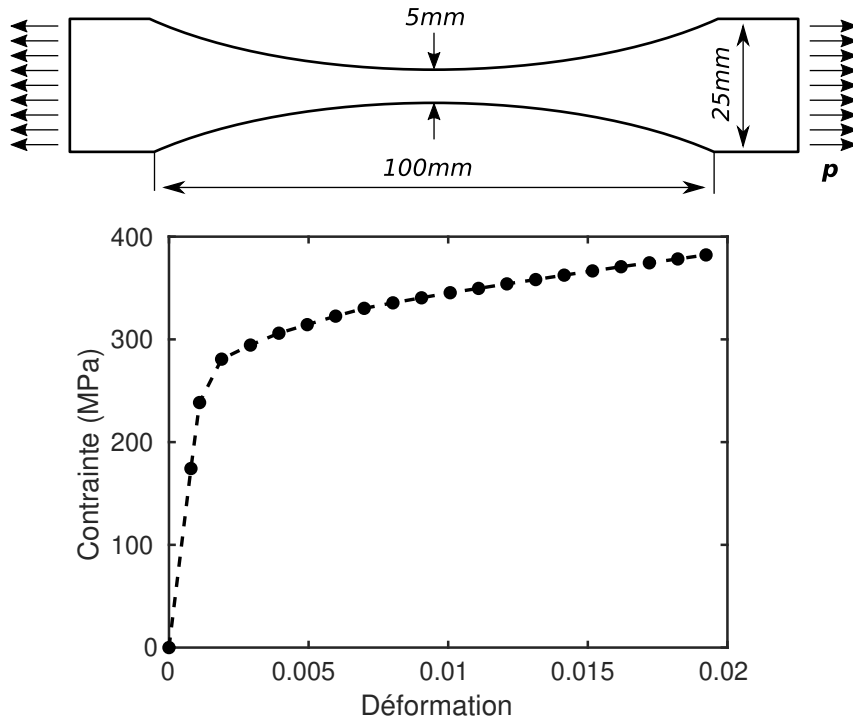


FIGURE 5.10 – Description du problème d'élasto-plasticité de l'éprouvette en forme d'os en tension.

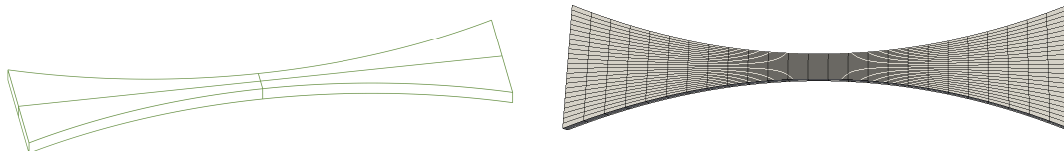


FIGURE 5.11 – Maillage initial NURBS (gauche) et maillage EF raffiné automatiquement créé (droite).

Vu que les solutions sont très proches, l'écart relatif entre les solutions IG et EF est tracé sur la Figure 5.12c. Malgré une réduction de l'ordre de 70% du nombre de degrés de liberté, les solutions sont quasi-identiques (moins de 2% d'écart localement). Cela nous permet de confirmer l'efficacité de la méthode, déjà vu dans le cas de l'élasticité, pour des cas non-linéaires.

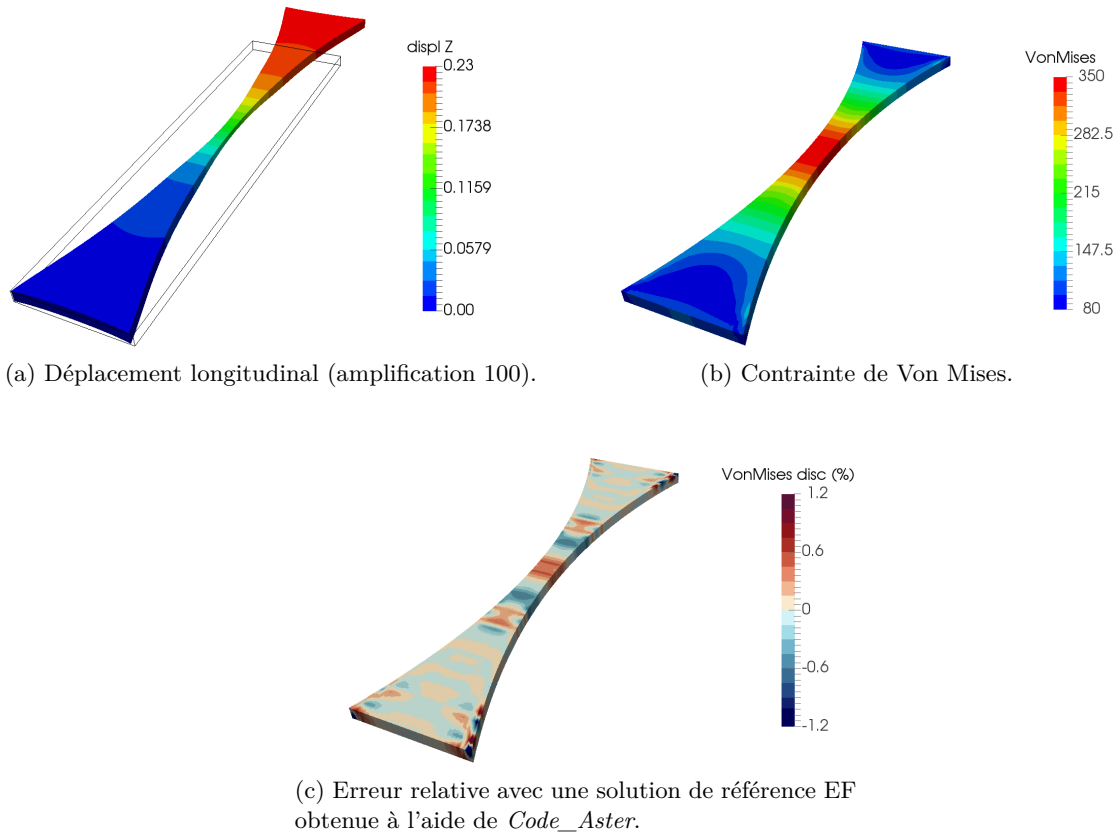


FIGURE 5.12 – Efficacité de l'implémentation non-intrusive de l'AIG : déplacement longitudinal (a)); contrainte de Von Mises (b)); erreur relative avec une solution de référence EF obtenue à l'aide de *Code\_Aster* (c). Le septième incrément de chargement, correspondant à  $p = 70$  MPa, est considéré pour les tracés.

Afin d'évaluer qualitativement la méthode IG non-intrusive proposée par rapport aux éléments finis, la courbe force-déplacement est finalement tracée sur la Figure 5.13. Une fois encore, on peut noter que malgré une dimension plus petite, l'espace IG permet de récupérer une solution quasi-identique à celle générée par un code EF. Ce résultat est en corrélation avec l'interprétation de l'AIG comme une projection de EF sur une base réduite particulière (voir Remarque 12).

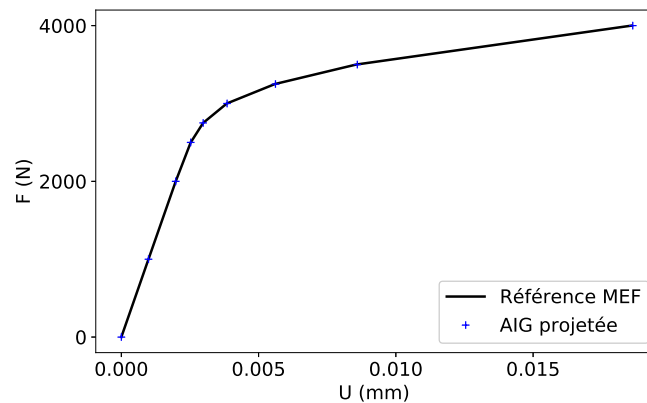


FIGURE 5.13 – Courbe Force-Déplacement. Comparaison entre la solution EF de référence *Code\_Aster* (ligne continue en noir) et la solution IG non-intrusive (croix bleues).

**Bilan :** Dans ce chapitre, un grand nombre d'exemples nous a permis de valider le lien global AIG-MEF mis en place. Comme avancé théoriquement dans le chapitre 4, nous avons montré que l'approximation faite entre les fonctions rationnelles Lagrange et les polynômes de Lagrange n'impacte pas le résultat final si la géométrie initiale n'est pas excessivement grossière ce qui est le cas pour calculer le modèle mécanique sous-jacent (voir 5.1.1). La procédure appliquée à des modèles solide-coques (voir 5.1.2) ou entièrement 3D (voir 5.1.3) dans le code industriel EF *Code\_Aster* permet d'obtenir des résultats en adéquation avec ceux d'une résolution entièrement IG. Afin de confirmer le potentiel de notre stratégie, un exemple non-linéaire iso-géométrique d'élasto-plasticité a aussi été résolu dans *Code\_Aster* (voir 5.2.2) et montre des résultats cohérents. La stratégie de résolution non-intrusive ainsi validée dans ce chapitre est utilisée afin d'automatiser l'implémentation du couplage multi-échelle global-local AIG-MEF dans le chapitre 6 pour la prise en compte de phénomènes locaux complexes dans un modèle IG.

---

 Vers un couplage AIG/MEF automatique
 

---

## Sommaire

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>6.1</b> | <b>Utilisation du lien AIG/MEF pour le couplage</b> | <b>70</b> |
| 6.1.1      | Séparation global-local                             | 70        |
| 6.1.2      | Formulation du couplage et des opérateurs de Mortar | 72        |
| <b>6.2</b> | <b>Exemple d'application du couplage IG/EF</b>      | <b>73</b> |

---

L'objectif des travaux de cette thèse est de pouvoir résoudre des problèmes avec détails structuraux par l'analyse isogéométrique. Afin d'outrepasser les difficultés de raffinement local de la méthode IG et de limiter le temps de calcul de ce genre de problème complexe avec phénomènes locaux, une stratégie de couplage global-local, comme présentée dans le chapitre 2, est utilisée.

L'AIG est adaptée pour définir le modèle global car elle est performante pour décrire des champs réguliers et pour représenter facilement les géométries complexes. Bien qu'un modèle IG puisse être utilisé pour la définition du problème local [23], nous choisissons ici d'utiliser un modèle local EF qui peut paraître plus adapté pour décrire des phénomènes locaux, moins réguliers. Les modèles EF sont, en effet, largement développés dans les codes industriels actuels pour décrire des phénomènes non-linéaire ou de localisation (ex : endommagement, fissuration...).

On souhaite ainsi coupler un modèle IG global et un modèle EF local. Mais la complexité des opérateurs de couplage entre les fonctions IG et EF oblige d'intégrer sur l'interface des fonctions IG et EF [24], ce qui peut rendre ce couplage difficile à mettre en place d'un point de vue pratique.

Pour automatiser et simplifier l'implémentation de ce couplage, nous proposons dans ce chapitre une démarche permettant de générer les maillages IG et EF multi-échelles ainsi que les opérateurs de couplage de façon semi-automatique à partir d'opérateurs EF en s'appuyant sur le lien créé dans le chapitre 4.

## 6.1 Utilisation du lien AIG/MEF pour le couplage

Dans cette section, les maillages IG et EF multi-échelles ainsi que les opérateurs de couplage sont explicités. A titre d'illustration, le couplage AIG/MEF est donné sur un exemple de poutre circulaire à 3 éléments dans les deux directions.

### 6.1.1 Séparation global-local

Le maillage global est initialement le maillage IG grossier de la géométrie visible sur la Figure 6.1.

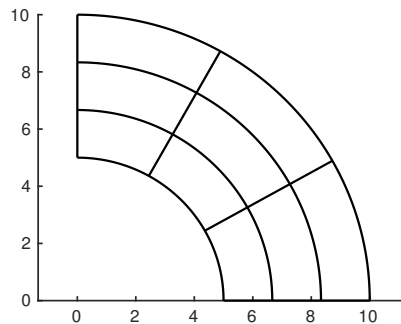


FIGURE 6.1 – Maillage NURBS grossier de la poutre circulaire (3 éléments dans chaque direction).

Sur cette géométrie on définit :

- la matrice de position des points de contrôle :  $\mathbf{P}_0^{AIG}$  ;
- la matrice des fonctions de forme NURBS :  $\mathbf{R}_0^{AIG}$  ;
- la matrice de rigidité IG :  $\mathbb{K}_{0\Omega}^{AIG}$ .

**Remarque 16** Notons par ailleurs que la matrice de rigidité IG  $\mathbb{K}_{0\Omega}^{AIG}$  peut être calculée (estimée) par son équivalent EF de façon non-intrusive en suivant la procédure décrite dans le chapitre 4.

La zone locale est constituée d'un ou plusieurs éléments de la géométrie NURBS initiale. La zone locale choisie ici est délimitée par son interface avec la zone globale,  $\Gamma$ , en rouge (voir Figure 6.2). A partir de cette zone locale, il est possible de construire l'opérateur  $\mathbb{K}_{0L}^{AIG}$ .

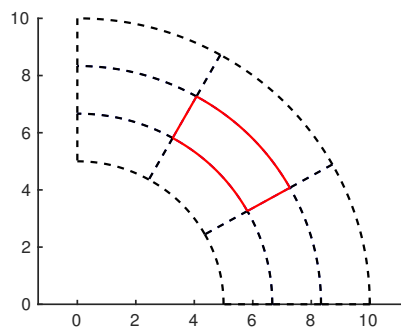


FIGURE 6.2 – Positionnement de la zone locale sur le maillage initial NURBS. La limite  $\Gamma$  de la zone locale est tracée en rouge.

On commence tout d'abord par raffiner globalement toute la géométrie NURBS à l'aide de l'opérateur de raffinement IG  $\mathbf{D}_{raf}$ . On obtient ainsi la géométrie donnée sur la Figure 6.3a, la position de la zone locale dans ce cas est donnée sur la Figure 6.3b, elle comprend dorénavant plus d'un élément IG raffiné.

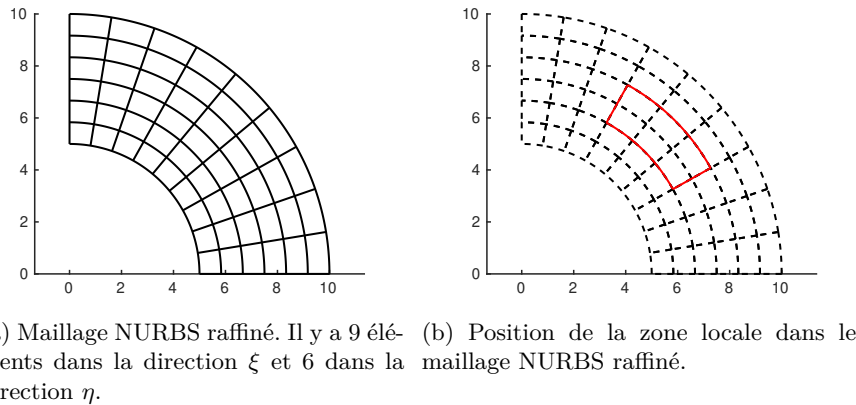


FIGURE 6.3 – Raffinement global du maillage NURBS initial et position de la zone locale.

Nous rappelons que conformément aux notations introduites dans le chapitre 4, les relations entre les fonctions globales et locales isogéométriques (resp.  $\mathbf{R}_0^{AIG}$  et  $\mathbf{R}_L^{AIG}$ ) et leurs points de contrôle (resp.  $\mathbf{P}_0^{AIG}$  et  $\mathbf{P}_L^{AIG}$ ) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} - \mathbf{R}_0^{AIG} &= \mathbf{D}_{raf} \mathbf{R}_L^{AIG}; \\ - \mathbf{P}_L^{AIG} &= \mathbf{D}_{raf}^T \mathbf{P}_0^{AIG}. \end{aligned}$$

A partir de cette géométrie NURBS raffinée et de l'opérateur AIG/EF  $\mathbf{D}_l$ , il est possible de déterminer le maillage EF associé (voir Figure 6.4).

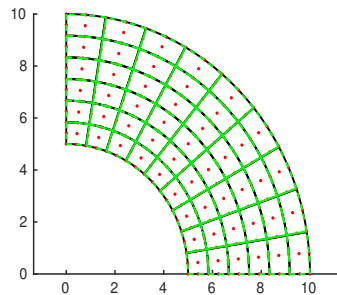


FIGURE 6.4 – Maillage fin EF en vert (dont les noeuds sont les points rouges) créé à partir du maillage fin NURBS en noir.

On se retrouve ainsi avec :

$$\begin{aligned} - \mathbf{R}_L^{AIG} &= \mathbf{D}_l \mathbf{L}_L^{EF}; \\ - \mathbf{P}_L^{EF} &= \mathbf{D}_l^T \mathbf{P}_L^{AIG}. \end{aligned}$$

**Remarque 17** Il est important de noter que dans le cas d'une géométrie définie à l'aide de fonctions NURBS, il y a une approximation entre l'AIG et la MEF. L'interface  $\Gamma$  n'est donc pas exactement la même entre la Figure 6.4 et 6.3. Le maillage NURBS utilisé pour définir le maillage EF étant suffisamment fin cette approximation est quasi-négligeable. Une approche plus rigoureuse s'appuyant sur la transformation AIG aurait également pu être utilisée [79].



On souhaite uniquement récupérer de cette géométrie les informations sur l'interface  $\Gamma$ . On crée donc un opérateur noté  $\mathbf{D}_{res}$  qui permet de restreindre l'information à l'interface  $\Gamma$  dans le maillage EF. La géométrie locale et les noeuds de bord récupérés sont tracés sur la Figure 6.5. On détermine ainsi les fonctions de Lagrange restreintes sur l'interface par  $\mathbf{L}_{L,\Gamma}^{EF} = \mathbf{D}_{res}\mathbf{L}_L^{EF}$ .

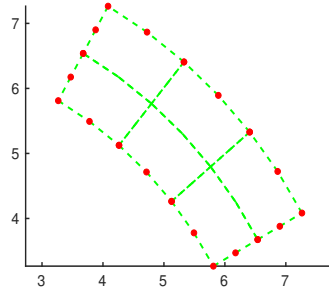


FIGURE 6.5 – Maillage fin EF local en vert (dont les noeuds de bord sont les points rouges) obtenu par restriction du maillage global fin EF via l'opérateur  $\mathbf{D}_{res}$ .

Les informations ainsi récupérées sur l'interface servent de données d'entrée dans un mailleur tel que GMSH, afin de définir un maillage EF indépendant de la zone locale. En plus d'être associé à un modèle de comportement plus complexe, un détail géométrique (trou, fissure...) peut être inclus dans cette zone si besoin.

A partir de cette géométrie GMSH, dont les fonctions de Lagrange utilisées sont notées  $\mathbf{L}_L^{EF,GMSH}$ , on peut résoudre le problème local (pouvant avoir un comportement complexe) en utilisant un code industriel EF existant et ainsi récupérer la matrice de rigidité  $\mathbb{K}_L^{EF,GMSH}$ . Il est aussi possible de définir les fonctions à l'interface  $\mathbf{L}_{L,\Gamma}^{EF}$  à partir des fonctions Lagrange de GMSH  $\mathbf{L}_L^{EF,GMSH}$  via l'opérateur de restriction  $\mathbf{D}_{res}^{GMSH}$ .

Les différentes étapes décrites précédemment sont résumées sur le schéma de la Figure 6.6.

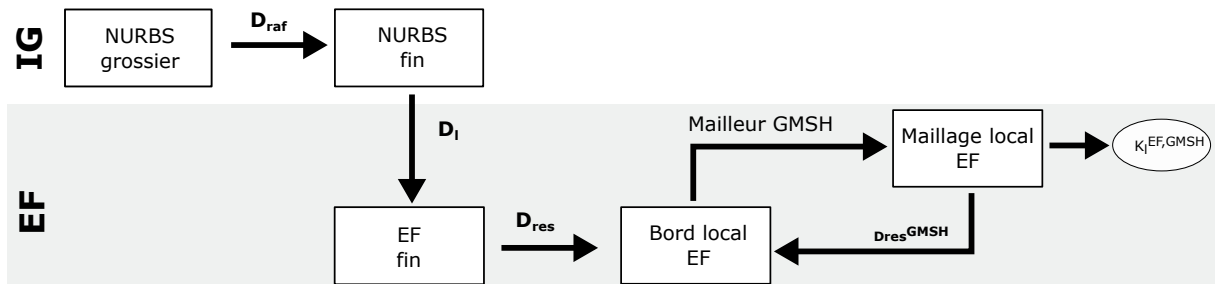


FIGURE 6.6 – Principe de construction des maillages IG/EF multiéchelles et des opérateurs de couplage.

### 6.1.2 Formulation du couplage et des opérateurs de Mortar

A l'aide des différentes géométries et opérateurs créés, le problème de couplage initial (voir Équation (2.8)) peut se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_0^{AIG} & 0 & \mathbf{C}_G^T \\ 0 & \mathbb{K}_L^{EF,GMSH} & -\mathbf{C}_L^T \\ \mathbf{C}_G & -\mathbf{C}_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_G \\ \mathbf{U}_L \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_L \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

La matrice de  $\mathbb{K}_0^{AIG}$  est la matrice de rigidité définie sur le complémentaire de la zone locale (voir notations du chapitre 2) ; elle est obtenue par le code IG. La matrice  $\mathbb{K}_L^{EF,GMSH}$  est obtenue par le code EF.  $\mathbb{C}_G$  et  $\mathbb{C}_L$  désignent les opérateurs de Mortar qui permettent de passer des fonctions de forme IG à celle EF de GMSH. Comme dans le reste de la thèse, l'espace de discrétisation des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  est choisi comme la trace sur  $\Gamma$  des fonctions EF,GMSH [53].

L'opérateur  $\mathbb{C}_l$  s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_L &= \int_{\Gamma} \mathbf{L}_{L,\Gamma}^{EF} \mathbf{L}_L^{EF,GMSH^T} \partial\Gamma \\ &= \mathbf{D}_{res}^{GMSH} \int_{\Gamma} \mathbf{L}_L^{EF,GMSH} \mathbf{L}_L^{EF,GMSH^T} \partial\Gamma \\ &= \mathbf{D}_{res}^{GMSH} \mathbf{M}_{\Gamma}^{EF,GMSH},\end{aligned}\tag{6.2}$$

où  $\mathbf{M}_{\Gamma}^{EF,GMSH}$  est une matrice de masse unitaire classique de bord EF.

L'opérateur  $\mathbb{C}_g$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_G &= \int_{\Gamma} \mathbf{L}_{L,\Gamma}^{EF} \mathbf{R}_0^{AIG^T} \partial\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \mathbf{L}_{L,\Gamma}^{EF} \mathbf{L}_L^{EF^T} \partial\Gamma \mathbf{D}_l^T \mathbf{D}_{raf}^T \\ &= \mathbf{D}_{res} \int_{\Gamma} \mathbf{L}_L^{EF} \mathbf{L}_L^{EF^T} \partial\Gamma \mathbf{D}_l^T \mathbf{D}_{raf}^T \\ &= \mathbf{D}_{res} \mathbf{M}_{\Gamma}^{EF} \mathbf{D}_l^T \mathbf{D}_{raf}^T,\end{aligned}\tag{6.3}$$

où  $\mathbf{M}_{\Gamma}^{EF}$  est une matrice de masse unitaire classique de bord EF qui est donc identique à  $\mathbf{M}_{\Gamma}^{EF,GMSH}$ .

**Remarque 18** *Les opérateurs de couplage sont définis de façon générale dans (6.2) et (6.3). Dans le cas de couplage entre des maillages compatibles, les intégrations pour obtenir les matrices de rigidité ne sont pas nécessaires et sont seulement des opérateurs de trace (matrices remplies de 1 et de 0) entre les deux bords. Dans les maillages incompatibles, leur formulation est aussi directe vu que les maillages sont imbriqués. Ainsi, dans la suite du manuscrit, la construction des opérateurs de Mortar est uniquement basée sur des produits matriciels entre les différents opérateurs créés et des matrices de connectivité ; aucun effort de calcul d'intégrale est nécessaire.*

Avec le point de vue non-intrusif, la formulation du couplage (6.1) peut s'écrire comme deux problèmes global et local distincts (se référer au chapitre 2). En considérant le cas d'un maillage compatible (voir remarque 18), le problème peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_{0\Omega}^{AIG} \mathbf{U}_G^{(n)} &= \mathbf{F}_0 - (\mathbf{D}_{res} \mathbf{D}_l^T \mathbf{D}_{raf}^T)^T \mathbf{\Lambda}^{(n-1)} + \mathbb{K}_{0L}^{AIG} \mathbf{U}_G^{(n-1)}, \\ \mathbb{K}_L^{EF,GMSH} \mathbf{U}_L^{(n)} &= \mathbf{F}_L \text{ sous la condition } \mathbf{U}_L^{(n)} = (\mathbf{D}_{res}^{GMSH})^{-1} \mathbf{D}_{res} \mathbf{D}_l^T \mathbf{D}_{raf}^T \mathbf{U}_G^{(n)}.\end{aligned}\tag{6.4}$$

## 6.2 Exemple d'application du couplage IG/EF

Afin de mettre en place la méthode de couplage expliquée précédemment, on étudie l'exemple d'une poutre circulaire possédant des détails locaux (trous et fissures). Les dimensions et les conditions aux limites sont résumées sur la Figure 6.7. Les données matériaux qui seront utilisées

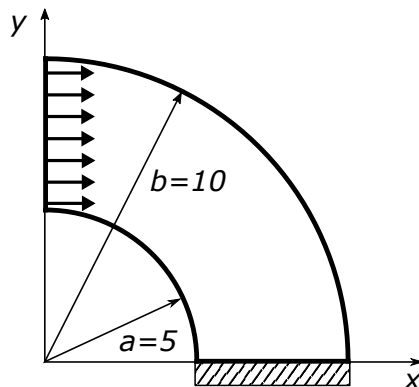


FIGURE 6.7 – Définition du problème et de ses conditions aux limites.

aussi bien dans le modèle global que dans le modèle local sont les suivantes : module de Young  $E = 100.10^3$  et coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ .

Le maillage initial NURBS qui est déjà raffiné (l'opérateur  $\mathbf{D}_{raf}$  ne sera donc pas utilisé) comporte 24 éléments dans la direction  $\xi$  et 16 dans la direction  $\eta$ . La zone locale choisie est un ensemble d'éléments internes à la géométrie. Le bord de la géométrie locale EF créé grâce à l'opérateur  $\mathbf{D}_l$  puis extrait grâce à  $\mathbf{D}_{res}$  est utilisé comme bord du maillage dans GMSH. Des détails géométriques, comme des trous et des fissures, y sont ajoutés. La géométrie de la zone locale avec les détails géométriques est donnée sur la Figure 6.8.

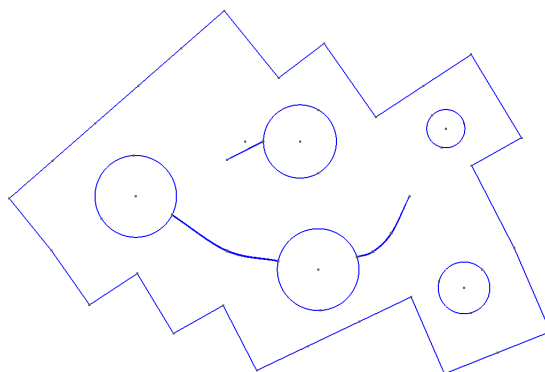


FIGURE 6.8 – Zone locale extraite de la géométrie globale avec ajout de détails géométriques.

A partir de cette géométrie, le maillage local fin EF est créé comme sur la Figure 6.9a. On observe ainsi l'avantage d'utiliser des EF, car cela permet de raffiner très localement en particulier en pointe de fissure comme on peut le voir sur la Figure 6.9b.

Le lien de cette zone locale avec le maillage global IG via un certain nombre de noeuds créant l'interface  $\Gamma$  est représenté sur la Figure 6.10. L'approximation (Rationnelle - polynôme) de la géométrie de  $\Gamma$  n'est pas visible car le maillage initial est assez fin (voir Remarque 17).

L'application de l'effort sur le bord vertical tandis que le bord horizontal est encasté entraîne la déformation du maillage comme on peut le voir de façon globale sur la Figure 6.11a et plus localement sur la Figure 6.11b. On observe bien l'ouverture des fissures dans la zone locale et la distorsion des trous.

Les résultats en terme de déplacements sur le maillage déformé sont donnés sur la Figure 6.12. On remarque que la continuité des déplacements entre les modèles local et global à l'interface

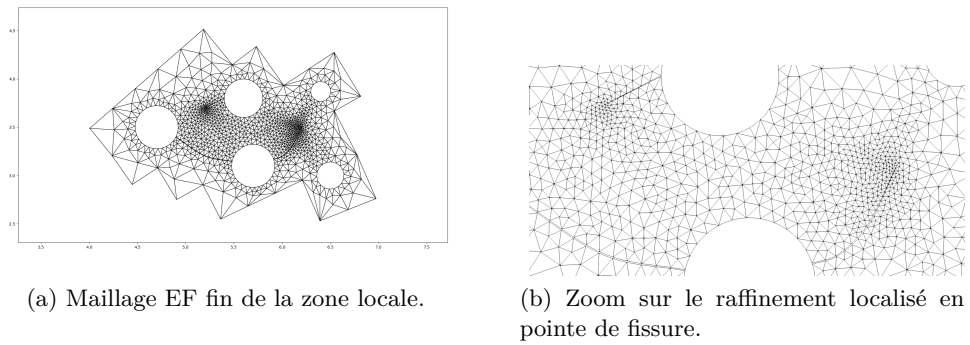


FIGURE 6.9 – Maillage fin de la zone locale.

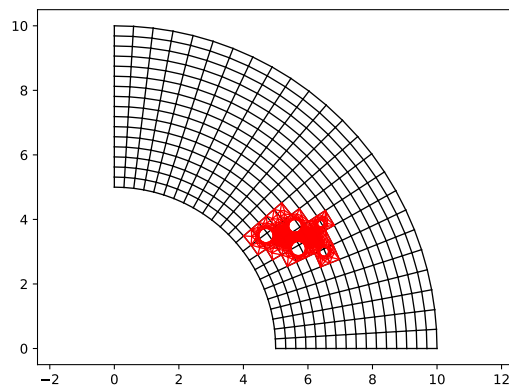


FIGURE 6.10 – Lien entre la géométrie globale et le maillage fin local.

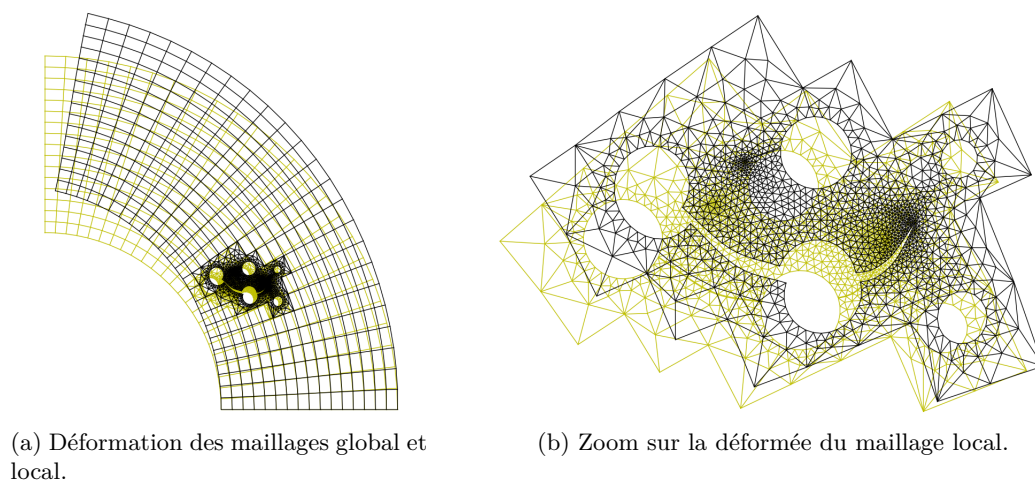


FIGURE 6.11 – Influence des conditions aux limites et des détails géométriques sur les déformées du maillage (*amplification 10*).

est bien assurée grâce aux opérateurs de Mortar créés.

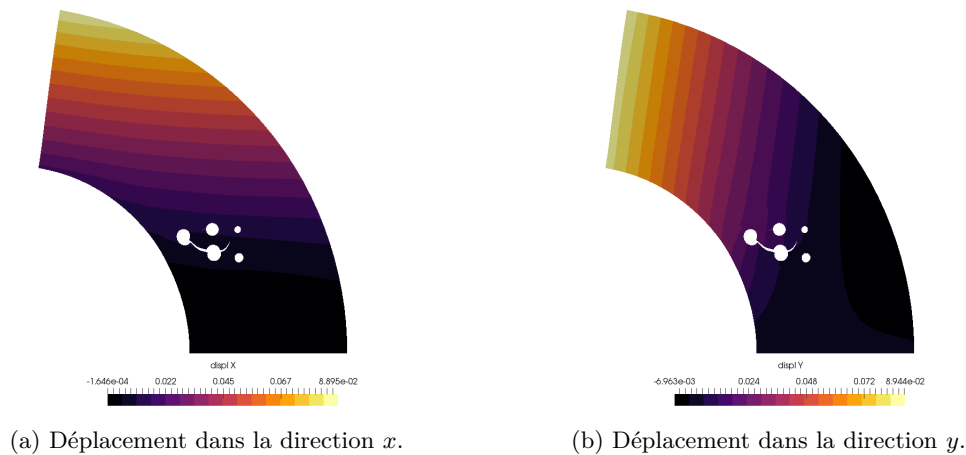


FIGURE 6.12 – Déplacements reconstruits global-local sur le maillage déformé.

Les résultats en déformation sont donnés sur la Figure 6.13. La Figure 6.13a donne la répartition de la déformation  $\varepsilon_{yy,g}$  globale issue du calcul IG tandis que la Figure 6.13b représente la déformation  $\varepsilon_{yy,l}$  locale issue d'un calcul EF. On observe bien une concentration de la déformation globale là où la zone locale est incluse et qui n'est pas physique. La solution du problème globale est bien régulière. Dans la zone locale, l'utilisation d'un maillage fin EF permet de mettre en évidence les concentrations de déformation autour des trous et en pointe de fissure. La déformation reconstruite à partir des deux déformations  $\varepsilon_{yy,g}$  et  $\varepsilon_{yy,l}$  est tracée sur la Figure 6.13c. Ce type de reconstruction permet d'obtenir la solution dite "composite" car la solution  $\mathbf{U}_{GL}$  n'est pas physique. De même la déformation  $\varepsilon_{xx}$  reconstruite est donnée sur la Figure 6.13d.

**Remarque 19** *Les champs de déformation sont discontinus aux frontières des éléments finis. Pour la visualisation, nous avons interpolé les valeurs des points de Gauss aux noeuds du maillage EF. Cette opération est faite indépendamment sur les domaines global et local, ce qui explique qu'il peut subsister une discontinuité des champs de déformation au passage de l'interface.*

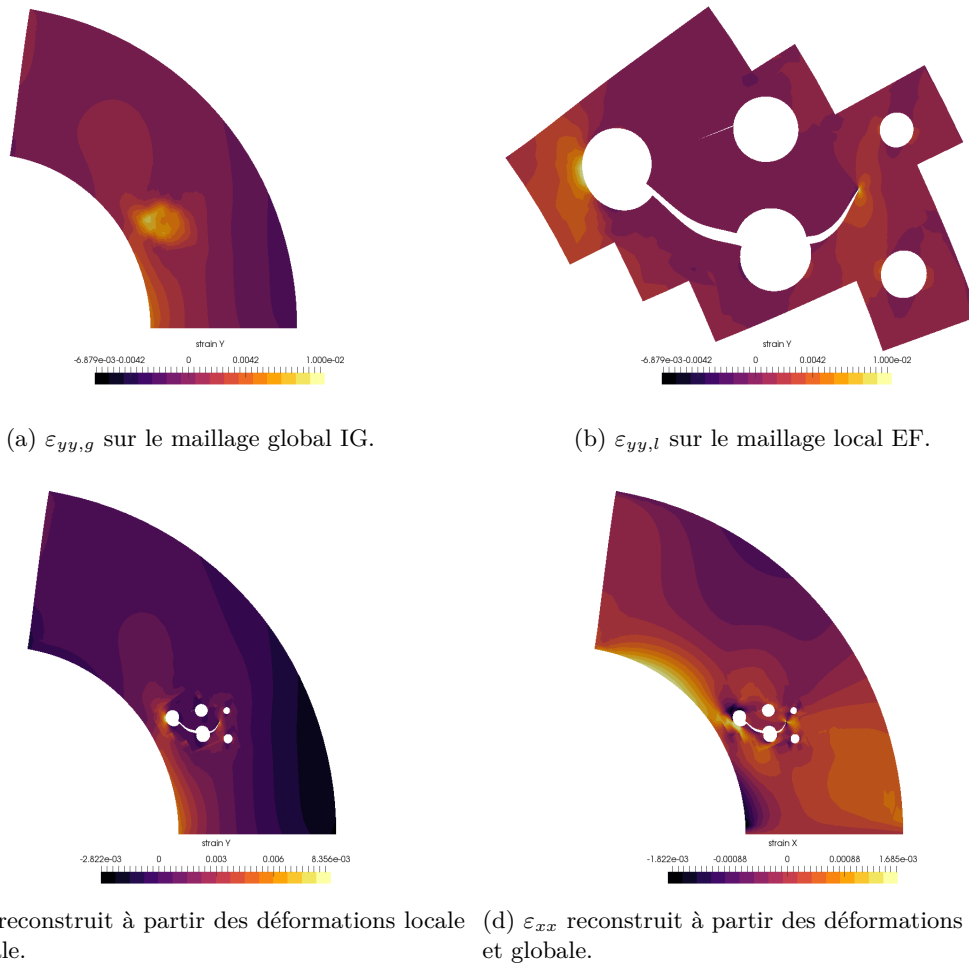


FIGURE 6.13 – Les déformations  $\varepsilon_{yy}$  et  $\varepsilon_{xx}$  globales, locales et reconstruites sur les maillages déformés.

**Bilan** : Dans ce chapitre nous avons utilisé le lien entre l'AIG et la MEF, défini dans le chapitre 4, afin de faciliter la définition et la mise en œuvre d'un couplage global-local entre ces deux méthodes. Les maillages IG global et EF local ainsi que les opérateurs de couplage de Mortar peuvent ainsi être implémentés facilement et automatiquement. Cette procédure de couplage semi-automatique a permis de résoudre des problèmes isogéométriques comportant des détails structuraux (trous, fissures...). Les paramètres du couplage global-local IG/EF non-intrusif (taille du domaine local, finesse du maillage local, nombre d'itérations de couplage, etc.) sont actuellement définis de façon arbitraire en fonction du problème étudié. Afin de certifier la qualité numérique du problème de couplage, et définir les paramètres de couplage au mieux, des méthodes d'estimations d'erreur vont être développées dans la partie III.

## Troisième partie

# Certification et pilotage des stratégies de couplage non-intrusif

---

Outils de vérification basés sur les résidus d'équilibre pondérés

---

## Sommaire

---

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>7.1</b> | <b>Méthode des résidus pondérés dans le cadre du couplage non-intrusif</b> | <b>80</b> |
| 7.1.1      | Formulation faible du couplage pour l'estimation d'erreur . . . . .        | 80        |
| 7.1.2      | Estimateur d'erreur en résidus pour un problème couplé . . . . .           | 80        |
| <b>7.2</b> | <b>Stratégie d'adaptation</b> . . . . .                                    | <b>81</b> |
| 7.2.1      | Définition des indicateurs d'erreur . . . . .                              | 81        |
| 7.2.2      | Implémentation des indicateurs d'erreur . . . . .                          | 82        |
| 7.2.3      | Procédure d'adaptation . . . . .   | 83        |

---

Dans ce chapitre, nous établissons l'estimation d'erreur sur une quantité d'intérêt (introduite dans le chapitre 3) à partir de la méthode des résidus d'équilibre pondérés pour le couplage global-local non-intrusif. Nous montrons qu'il est possible de séparer l'estimateur d'erreur en plusieurs indicateurs d'erreur permettant de mettre en évidence les erreurs venant du modèle grossier choisi pour le couplage, du raffinement des maillages et du nombre d'itérations afin d'adapter la définition du couplage vis-à-vis d'une quantité d'intérêt, ce qui permet de calculer juste au juste coût. En outre, nous montrons l'utilisation d'un couplage non-intrusif s'avère être bénéfique pour le calcul des différents indicateurs d'erreur. Ces travaux font l'objet de l'article [157].



## 7.1 Méthode des résidus pondérés dans le cadre du couplage non-intrusif

### 7.1.1 Formulation faible du couplage pour l'estimation d'erreur

Sur l'exemple des notations introduites pour le problème de référence dans (3.2) et (3.3), nous introduisons les notations suivantes dans le cas d'un problème couplé :

$$\begin{aligned} a_L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_L} \mathcal{K} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \quad ; \quad a_{0\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathcal{K}_0 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \quad ; \\ a_{0L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_L} \mathcal{K}_0 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \quad ; \\ b_{\Gamma}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) &= \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u} \quad ; \quad l_L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_L} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} \quad ; \quad l_0(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

En prenant en compte le schéma de résolution par point fixe, la formulation faible à l'itération  $n$  découlant de (2.14-2.10) s'écrit :

trouver  $(\mathbf{u}_G^{H(n)}, \mathbf{u}_L^{h(n)}, \boldsymbol{\lambda}^{h(n)}) \in \mathcal{V}^H \times \mathcal{V}_L^h \times \mathcal{M}^h$  tel que

$$\begin{aligned} &a_{0\Omega}(\mathbf{u}_G^{H(n)}, \mathbf{v}_G^H) + a_L(\mathbf{u}_L^{h(n)}, \mathbf{v}_L^h) - b_{\Gamma}(\boldsymbol{\lambda}^{h(n)}, \mathbf{v}_L^h) + b_{\Gamma}(\boldsymbol{\mu}^h, \mathbf{u}_L^{h(n)} - \mathbf{u}_G^{H(n)}) \\ &= l_0(\mathbf{v}_G^H) + l_L(\mathbf{v}_L^h) + a_{0L}(\mathbf{u}_G^{H(n-1)}, \mathbf{v}_G^H) - b_{\Gamma}(\boldsymbol{\lambda}^{h(n-1)}, \mathbf{v}_G^H) \\ &\quad \forall (\mathbf{v}_G^H, \mathbf{v}_L^h, \boldsymbol{\mu}^h) \in \mathcal{V}^H \times \mathcal{V}_L^h \times \mathcal{M}^h, \end{aligned} \quad (7.2)$$

où  $\mathcal{V}^H, \mathcal{V}_L^h$  et  $\mathcal{M}^h$ , sont les espaces EF associés respectivement aux maillages  $\tau^H$  sur  $\Omega$  et  $\tau^h$  sur  $\Omega_L$ .

Cette formulation faible à l'itération  $n$  peut être réécrite de façon condensée comme suit :

$$\begin{aligned} &a_{LG}^{(n)} \left( (\mathbf{u}_G^{H(n)}, \mathbf{u}_L^{h(n)}, \boldsymbol{\lambda}^{h(n)}), (\mathbf{v}_G^H, \mathbf{v}_L^h, \boldsymbol{\mu}^h) \right) = l_{LG}^{(n)}(\mathbf{v}_G^H, \mathbf{v}_L^h, \boldsymbol{\mu}^h) \\ &\quad \forall (\mathbf{v}_G^H, \mathbf{v}_L^h, \boldsymbol{\mu}^h) \in \mathcal{V}^H \times \mathcal{V}_L^h \times \mathcal{M}^h. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Cela permet de déterminer la solution approchée de type Dirichlet  $\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)} \in \mathcal{V}$  disponible dans le calcul et définie ainsi :

$$\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)} = \begin{cases} \mathbf{u}_L^{h(n)} & \text{in } \Omega_L \\ \mathbf{u}_G^{H(n)} & \text{in } \Omega_0 \end{cases}. \quad (7.4)$$

### 7.1.2 Estimateur d'erreur en résidus pour un problème couplé

La méthode des résidus pondérés sur une quantité d'intérêt nous amène à étudier l'erreur  $Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)})$  (mesure locale). En utilisant la représentation précédente de l'erreur (3.8-3.9), on développe ici un estimateur d'erreur sur  $Q(\mathbf{u})$  calculable. On commence par écrire :

$$Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}) = R(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}, \tilde{\mathbf{u}}). \quad (7.5)$$

Dans le cas d'un couplage local-global, l'enrichissement de l'espace d'approximation du problème adjoint permettant de calculer le second terme de (7.5) se traduit par :

- une zone locale  $\Omega_L$  suffisamment large dans laquelle le modèle haute-fidélité initial est préservé (cet enrichissement est noté avec l'exposant " $L^+$ " dans la suite) ;
- une maillage  $\tau^h$  suffisamment raffiné dans cette zone (cet enrichissement est noté avec l'exposant " $h^+$ " dans la suite) ;

- une quasi-convergence de l'algorithme de couplage itératif (noté avec l'exposant " $\infty$ " dans la suite).

**Remarque 20** *Généralement, le couplage local-global non-intrusif est seulement vu comme une substitution de comportement sur  $\Omega_L$  (un zoom numérique) venant d'un comportement initial régulier défini sur tout le domaine  $\Omega$ . Nous choisissons dans la suite un autre point de vue, où le problème couplé dérive d'un modèle de référence initial dans lequel un comportement complexe est introduit partout sur  $\Omega$ . Cela permet d'avoir une définition consistante de la solution de référence pour laquelle les mesures d'erreur sont définies dans la suite.*

Ainsi, après avoir calculé  $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{h+H(\infty)} \in \mathcal{V}$  avec une zone locale  $\tilde{\mathbf{u}}_{L+}^{h+H(\infty)} \in \mathcal{V}_{L+}^{h+}$ , un estimateur global d'erreur sur  $Q$  et intégralement calculable est :

$$\eta_{Q,res}^{tot} = R(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{h+H(\infty)}). \quad (7.6)$$

Vu que le chargement spécifique du problème adjoint est concentré à l'intérieur de  $\Omega_L$ , on s'attend à ce que l'algorithme itératif converge assez rapidement quand on cherche à calculer  $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{h+H(\infty)}$ .

**Remarque 21** *Dans le cas non-linéaire, la définition du problème adjoint permettant d'obtenir  $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{h+H(\infty)}$  nécessite de projeter la solution primale disponible  $\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}$  sur un espace enrichi  $\mathcal{V}^H \times \mathcal{V}_{L+}^{h+}$ .*

Par ailleurs, afin de réduire encore plus le coût de calcul sans trop dégrader la qualité de l'estimateur d'erreur, il est possible d'approximer la fonctionnelle des résidus  $R$  (initialement définie à partir du modèle de référence) en considérant l'espace d'approximation enrichi utilisé pour résoudre le problème adjoint. Néanmoins, une telle approximation ne permet pas d'éliminer les projections entre les maillages afin de calculer  $R(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{h+H(\infty)})$ . Cette alternative ne sera pas étudiée dans cette thèse.

## 7.2 Stratégie d'adaptation

### 7.2.1 Définition des indicateurs d'erreur

L'estimateur (7.6) comprend les différentes sources d'erreur. Comme décrit dans la section 3.1.2, elles sont au nombre de trois : le modèle, la discrétisation et la convergence de l'algorithme local-global. En effet, l'erreur sur  $Q$  peut être séparée de la façon suivante :

$$Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}) = \underbrace{[Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{LG}^H)]}_{\Delta_Q^{mod}} + \underbrace{[Q(\mathbf{u}_{LG}^H) - Q(\mathbf{u}_{LG}^{hH})]}_{\Delta_Q^{dis}} + \underbrace{[Q(\mathbf{u}_{LG}^{hH}) - Q(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)})]}_{\Delta_Q^{conv}}, \quad (7.7)$$

où  $\mathbf{u}_{LG}^H$  est la solution du couplage dans lequel le local n'est pas discrétisé tandis que  $\mathbf{u}_{LG}^{hH}$  est celle du couplage avec les deux modèles local et global discrétisés.  $\Delta_Q^{mod}$ ,  $\Delta_Q^{dis}$ , et  $\Delta_Q^{conv}$  correspondent, respectivement, aux sources d'erreur de modèle, de discrétisation et de convergence. Les indicateurs de ces sources d'erreur sont définis de la façon suivante :

- l'indicateur sur l'erreur de convergence, noté  $\eta_{Q,res}^{conv}$ , est construit à partir d'une solution adjointe approchée convergée  $\tilde{\mathbf{u}}_{LG}^{hH(\infty)} \in \mathcal{V}$  sans enrichissement en terme de maillage  $\tau^h$  et la zone locale  $\Omega_L$  est utilisée. On le calcule comme suit :

$$\eta_{Q,res}^{conv} = R_{LG}(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_{LG}^{hH(\infty)}), \quad (7.8)$$

où le résidu  $R_{LG}$  est défini comme suit :

$$\begin{aligned} R_{LG}(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_{LG}^{hH(\infty)}) &= l_0(\tilde{\mathbf{u}}_G^{H(\infty)}) + l_L(\tilde{\mathbf{u}}_L^{h(\infty)}) \\ &\quad - a_{0\Omega}(\mathbf{u}_G^{H(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_G^{H(\infty)}) + a_{0L}(\mathbf{u}_G^{H(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_G^{H(\infty)}) \\ &\quad - a_L(\mathbf{u}_L^{h(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_L^{h(\infty)}). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Cet indicateur est tel que  $\eta_{Q,res}^{conv} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Il donne une indication quantitative de l'erreur de convergence  $\Delta_Q^{conv}$ , permettant ainsi de déterminer un critère d'arrêt adéquat pour le solveur itératif local-global.

- l'indicateur sur l'erreur de discrétisation, noté  $\eta_{Q,res}^{dis}$ , est construit à partir d'une solution approchée convergée  $\tilde{\mathbf{u}}_{LG}^{h^+H(\infty)} \in \mathcal{V}$  calculée avec un maillage local plus fin  $\tau^{h^+}$ , tandis que la forme de la zone locale  $\Omega_L$  reste inchangée par rapport à celle utilisée pour calculer  $\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}$ . On le calcule comme suit :

$$\eta_{Q,res}^{dis} = R_{LG}(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_{LG}^{h^+H(\infty)}) - \eta_{Q,res}^{conv}, \quad (7.10)$$

et est tel que  $\eta_{Q,res}^{dis} \xrightarrow{h \rightarrow h^+} \approx 0$ . Il permet de donner une indication quantitative pertinente de l'erreur de discrétisation  $\Delta_Q^{dis}$  sous réserve que  $h^+$  soit assez petit.

- finalement, l'indicateur d'erreur de modèle, noté  $\eta_{Q,res}^{mod}$ , est construit à partir de la solution approchée convergée  $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{hH(\infty)} \in \mathcal{V}$  calculée avec une zone locale plus large  $\Omega_{L+}$ , tandis que le maillage  $\tau^h$  reste inchangé par rapport à celui utilisé pour calculer  $\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}$ . On le calcule comme suit :

$$\eta_{Q,res}^{mod} = R(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}, \tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{hH(\infty)}) - \eta_{Q,res}^{conv}, \quad (7.11)$$

et est tel que  $\eta_{Q,res}^{mod} \xrightarrow{\Omega_L \rightarrow \Omega_{L+}} \approx 0$ . Il donne une indication quantitative appropriée de l'erreur de modèle  $\Delta_Q^{mod}$  à condition que  $\Omega_{L+}$  soit assez large.

Une façon alternative de calculer l'indicateur  $\eta_{Q,res}^{mod}$ , donnant en pratique des valeurs légèrement différentes en diminuant le nombre de solutions adjointes, découle de la définition suivante :

$$\eta_{Q,res}^{mod} = \eta_{Q,res}^{tot} - \eta_{Q,res}^{conv} - \eta_{Q,res}^{dis}. \quad (7.12)$$

## 7.2.2 Implémentation des indicateurs d'erreur

D'un point de vue de l'implémentation numérique, le calcul de l'estimateur  $\eta_{Q,res}^{tot}$  ainsi que des indicateurs  $\eta_{Q,res}^{dis}$  et  $\eta_{Q,res}^{mod}$  est en adéquation avec l'utilisation d'un couplage non-intrusif. En effet la définition des espaces enrichis pour calculer les solutions approchées  $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{h^+H(\infty)}$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_{LG}^{h^+H(\infty)}$ , et  $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{hH(\infty)}$  nécessite seulement des modifications de  $\mathcal{V}_L^h$  tandis que  $\mathcal{V}^H$  reste inchangé.

Par ailleurs comme déterminé précédemment, le calcul de l'indicateur de modèle peut s'avérer assez coûteux, nous calculons donc en premier l'estimateur  $\eta_{Q,res}^{tot}$  ainsi que des indicateurs  $\eta_{Q,res}^{dis}$  et  $\eta_{Q,res}^{conv}$  afin de déterminer  $\eta_{Q,res}^{mod}$  en se référant à (7.12).

Mais le calcul de l'estimateur d'erreur globale calculé à partir de la solution  $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{h+H(\infty)}$  nécessite lui aussi un important coût de calcul car la zone locale doit être la plus large possible et avec un maillage fin partout. En pratique, en utilisant l'aspect non-intrusif du couplage dans lequel le problème global reste inchangé même si le problème local change, cet estimateur peut être facilement évalué en additionnant les contributions d'erreur d'un ensemble de problèmes adjoints dont la zone locale se déplace sur tout le domaine.

De plus, en faisant varier la position de la zone locale  $\Omega_L$  sur le domaine, il est possible de déterminer les zones qui influencent le plus la quantité d'intérêt choisie même si ces zones sont loin de la quantité d'intérêt (effet de pollution). L'évolution spatiale de l'erreur sert dans la suite pour améliorer l'exactitude du modèle.

Les solutions des problèmes primal et adjoint définies suite à un algorithme local-global doivent être reconstruites afin d'obtenir les solutions sur tout le domaine (voir (9.1)). Afin de simplifier la reconstruction de ces champs (et dans la suite leur communication lors des calculs des résidus) qui peuvent être de tailles différentes (dû à un maillage plus large ou plus fin), ils sont tous projetés sur une grille très fine. Les fonctions de forme EF classiques et leurs dérivées sont évaluées aux points de Gauss de cette grille ce qui permettra de calculer les déformations  $\epsilon(\mathbf{u})$  et  $\epsilon(\tilde{\mathbf{u}})$ .

D'un point de vue purement numérique, ces différents estimateur et indicateurs sont calculés comme suit :

- l'estimateur d'erreur global s'exprime comme :

$$- \epsilon(\tilde{\mathbf{u}})^T \mathbb{K} \epsilon(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{U}}_G^T \mathbf{F}, \quad (7.13)$$

où  $\mathbb{K}$  et  $\mathbf{F}$  sont les opérateurs du problème de référence.

- l'indicateur d'erreur de convergence, pour lequel les solutions primale et adjointe sont définies sur des espaces similaires donc pour lequel la projection sur la grille fine n'est pas nécessaire, s'exprime comme :

$$\tilde{\mathbf{U}}_G^T (\mathbf{F}_0 - \mathbb{K}_{0\Omega} \mathbf{U}_G) + \sum_{n_{patch}} \tilde{\mathbf{U}}_G^T \mathbb{K}_{0L} \mathbf{U}_G + \tilde{\mathbf{U}}_L^T (\mathbf{F}_L - \mathbb{K}_L \mathbf{U}_L), \quad (7.14)$$

où  $n_{patch}$  est le nombre de patches constituant la zone locale  $\Omega_L$ .

- l'indicateur d'erreur de discrétisation, qui lui nécessite une projection sur la grille fine car les zones locales des problèmes primal et adjoint n'ont pas le même raffinement, est défini comme :

$$\epsilon(\tilde{\mathbf{u}})^T (-\mathbb{K}_{0\Omega} + \mathbb{K}_{0L}) \epsilon(\mathbf{u}) - \epsilon(\tilde{\mathbf{u}}_L)^T \mathbb{K}_L \epsilon(\mathbf{u}_L) + \tilde{\mathbf{U}}_G^T \mathbf{F}_0 + \tilde{\mathbf{U}}_L^T \mathbf{F}_L. \quad (7.15)$$

### 7.2.3 Procédure d'adaptation

A l'aide de l'estimateur d'erreur  $\eta_{Q,res}^{tot}$  et des indicateurs  $(\eta_{Q,res}^{conv}, \eta_{Q,res}^{dis}, \eta_{Q,res}^{mod})$  précédemment explicités, on définit un algorithme d'adaptation. Nous proposons ici un algorithme glouton relativement proche de ceux proposés dans [9, 120, 121, 134, 144, 158, 165] (dénommé algorithme GOALS). La méthode a pour but d'automatiquement améliorer les paramètres de la méthode de couplage local-global (forme de  $\Omega_L$ , taille du maillage dans  $\tau^h$ , nombre d'itérations local-global) afin de prédire la quantité d'intérêt  $Q$  dans une tolérance prédéfinie  $\gamma_{tol}$  tout en optimisant le coût de calcul. Cela est atteint en générant une séquence de solutions approchées  $(\mathbf{u}_{app}^{(k)}, \tilde{\mathbf{u}}_{app}^{(k)})$  si bien que pour un entier  $k_0$ , la solution globale sur  $Q$  vérifie :

$$|Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{app}^{(k_0)})| \leq \gamma_{tol} \cdot |Q(\mathbf{u}_{app}^{(k_0)})|. \quad (7.16)$$

A chaque étape du processus d'adaptation, et avant de stopper l'intégralité de l'algorithme quand la tolérance d'erreur est atteinte (information quantitative donnée par  $\eta_{Q,res}^{tot} \leq \gamma_{tol} \cdot |Q(\mathbf{u}_{app}^{(k_0)})|$ ), le but est de réduire la source d'erreur majoritaire qui est identifiée en comparant les différents indicateurs  $\eta_{Q,res}^{conv}$ ,  $\eta_{Q,res}^{dis}$  et  $\eta_{Q,res}^{mod}$ . Les adaptations de discrétisation et de modèle sont réalisées de façon locale après avoir décomposé ces indicateurs sur chaque sous-domaine prédéfini dans  $\Omega_L$  et  $\Omega_0$ , respectivement. Les sous-domaines de  $\Omega_L$  sont des éléments de  $\tau^h$ , tandis que ceux de  $\Omega_0$  peuvent être définis à partir des éléments du maillage grossier  $\tau^H$  (même si des sous-domaines plus larges sont utilisés). Cette décomposition est possible en observant que les indicateurs  $\eta_{Q,res}^{dis}$  et  $\eta_{Q,res}^{mod}$  sont des termes de résidus définis à partir d'une intégration spatiale.

Après avoir initialisé  $\Omega_L$  (comme la zone proche de l'endroit où la quantité d'intérêt est définie) et  $\tau^h$ , et après avoir spécifié une certaine tolérance d'erreur  $\gamma_{tol}$  pour la quantité d'intérêt, l'algorithme d'adaptation se déroule comme suit :

0. Calculer la solution adjointe  $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{h+H(\infty)}$  (en utilisant des espaces enrichis appropriés);
1. Définir  $n = 1$ ;
2. Résoudre le problème primal initial pour déterminer  $\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)}$ ;
3. Calculer l'estimateur  $\eta_{Q,res}^{tot}$ ;
4. Si  $|\eta_{Q,res}^{tot}/Q(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)})| \leq \gamma_{tol}$  alors STOP. Sinon aller à l'étape 5;
5. Calculer les solutions adjointes  $\tilde{\mathbf{u}}_L^{hH(\infty)}$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_{L+G}^{hH(\infty)}$ , et  $\tilde{\mathbf{u}}_{LG}^{h+H(\infty)}$  afin de déterminer les indicateurs  $\eta_{Q,res}^{conv}$ ,  $\eta_{Q,res}^{dis}$ , et  $\eta_{Q,res}^{mod}$  :
  - si  $\max(|\eta_{Q,res}^{conv}|, |\eta_{Q,res}^{dis}|, |\eta_{Q,res}^{mod}|) = |\eta_{Q,res}^{conv}|$ , augmenter  $n+1 \rightarrow n$  et retourner à l'étape 2;
  - si  $\max(|\eta_{Q,res}^{conv}|, |\eta_{Q,res}^{dis}|, |\eta_{Q,res}^{mod}|) = |\eta_{Q,res}^{dis}|$ , décomposer  $\eta_{Q,res}^{dis}$  et raffiner localement  $\tau^h$  jusqu'à atteindre  $|\eta_{Q,res}^{dis}/Q(\mathbf{u}_{LG,N}^{hH(n)})| \leq \gamma_{tol}/3$ , puis retourner à l'étape 0;
  - si  $\max(|\eta_{Q,res}^{conv}|, |\eta_{Q,res}^{dis}|, |\eta_{Q,res}^{mod}|) = |\eta_{Q,res}^{mod}|$ , décomposer  $\eta_{Q,res}^{mod}$  et agrandir localement  $\Omega_L$  jusqu'à atteindre  $|\eta_{Q,res}^{mod}/Q(\mathbf{u}_{LG,N}^{hH(n)})| \leq \gamma_{tol}/3$ , puis retourner à l'étape 0.

Cet algorithme d'adaptation évite des itérations local-global inutiles dans le problème primal (quand l'erreur de discrétisation ou de modèle est supérieure à celle de convergence). Il indique aussi, à la fin de la procédure d'adaptation, la définition adaptée de  $\Omega_L$  et  $\tau^h$  pour atteindre la tolérance d'erreur.

**Bilan** : Dans ce chapitre, nous avons reformulé l'expression de l'erreur en résidus dans le cas particulier d'un couplage non-intrusif. L'erreur globale faite sur ce couplage vis-à-vis d'une quantité d'intérêt (déplacement, contrainte...) a été séparée en trois sources d'erreur : l'erreur de modèle, l'erreur d'itération et l'erreur de discrétisation. Un algorithme glouton a été mis en place à partir des indicateurs d'erreur correspondants afin d'adapter le couplage pour lui certifier une certaine exactitude vis-à-vis d'une quantité d'intérêt. Le caractère non-intrusif du couplage permet d'évaluer localement l'impact des contributions d'erreur (en ajoutant des patches locaux dans le problème adjoint). La solution du problème adjoint ne nécessite donc pas de ressources de calcul supplémentaires mais simplement la définition de problèmes individuels et contrôlés qui peuvent être résolus en parallèle. L'évaluation des différents indicateurs d'erreur de couplage et la mise en place d'un algorithme adaptatif est développé dans le chapitre 8 sur différents exemples.

---

 Application numérique de l'erreur en résidus
 

---

## Sommaire

---

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>8.1</b> | <b>Poutre en traction en dimension 1</b>                           | <b>86</b> |
| 8.1.1      | Définition des problèmes primal et adjoint                         | 86        |
| 8.1.2      | Estimation de l'erreur globale de couplage                         | 87        |
| 8.1.3      | Procédure d'adaptation   | 89        |
| <b>8.2</b> | <b>Plaque en traction avec inclusion locale d'affaiblissements</b> | <b>91</b> |
| 8.2.1      | Variation homogène du Module de Young                              | 92        |
| 8.2.2      | Variation hétérogène du Module de Young                            | 95        |
| <b>8.3</b> | <b>Plaque trouée en flexion</b>                                    | <b>96</b> |
| 8.3.1      | Quantité d'intérêt en déplacement                                  | 99        |
| 8.3.2      | Quantité d'intérêt en contrainte                                   | 101       |

---

Dans ce chapitre, le but est de présenter les calculs de l'estimateur d'erreur global et des différents indicateurs ainsi que leur utilisation pour adapter le problème vis-à-vis d'une quantité d'intérêt choisie au préalable. Un exemple élastique en dimension 1 permet de mettre en place les différentes erreurs et d'appréhender le processus d'adaptation. Des exemples élastiques, en dimension deux, plus complexes mettront en évidence la performance de la méthode.

## 8.1 Poutre en traction en dimension 1

Le premier exemple est une simple structure élancée en traction. Le but est d'illustrer, sur cet exemple simple, la séparation des différentes sources d'erreur et la procédure d'adaptation. Cette structure poutre de longueur  $L = 1$  et d'épaisseur  $b$  est encastée du côté gauche et un effort de traction uniforme  $F = 1$  est appliqué sur sa partie droite (voir Figure 8.1).

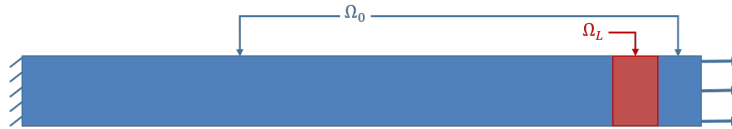


FIGURE 8.1 – Configuration initiale du couplage et conditions aux limites du problème.

La poutre est constituée d'un matériau élastique isotrope, et le module de Young est choisi comme variable suivant la coordonnée longitudinale  $x$ . Sa valeur nominal  $E_0 = 1$  est ainsi affaiblie dans certaines zones afin de mettre en évidence un phénomène local qui nécessitera sûrement d'être pris en compte en utilisant un couplage local-global. Les affaiblissements locaux du module de Young sont définis à l'aide de fonctions de Gauss. Les deux configurations pour l'évolution de  $E(x)$  sont décrites sur la Figure 8.2. Afin de simplifier les notations dans la suite, Cas 1 et Cas 2 se réfèrent respectivement aux configurations des Figures 8.2a et 8.2b.

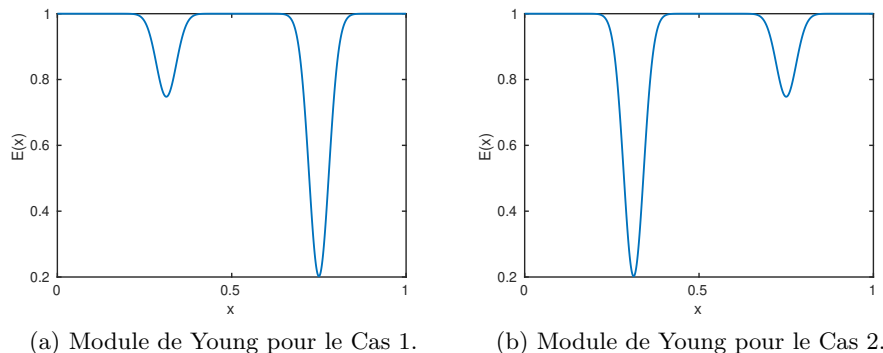


FIGURE 8.2 – Deux évolutions du module de Young le long de la poutre

Le coefficient de Poisson est constant et fixé tel que  $\nu = 0$ , on n'a alors qu'un effet 1D dans ce problème.

Au niveau de la géométrie, le maillage global  $\tau^H$  est constitué de 16 éléments quadratiques répartis le long de la poutre (la longueur de chaque élément est donc de  $1/16$ ) et l'épaisseur de chaque élément est identique à celle de la poutre (i.e. il n'y a qu'un seul élément dans l'épaisseur pour le maillage associé au modèle global). La même taille de maillage transversal (un élément dans l'épaisseur) est appliqué au maillage local  $\tau^h$ .

### 8.1.1 Définition des problèmes primal et adjoint

La solution du problème de référence est déterminée à l'aide d'un algorithme de couplage non-intrusif qui fait communiquer, tel que décrit précédemment dans la section 2.2 :

- un modèle global défini sur toute la structure  $\Omega$  où le module de Young est constant :  $E_0 = 1$ ;

- un modèle local défini sur le sous-domaine  $\Omega_L$  qui correspond à un ensemble d'éléments macro de  $\tau^H$ , et dans lequel la variation du module de Young est prise en compte. Un maillage plus fin  $\tau^h$  peut aussi être utilisé dans cette zone si nécessaire.

Un exemple de la configuration de couplage associé est présenté sur la Figure 8.1. La zone d'intérêt  $\omega_Q$  se situe en fin de poutre, dans la zone  $\frac{13}{16} \leq x \leq \frac{15}{16}$ . Plusieurs types de quantité d'intérêt (déplacement, contrainte, déformation...) peuvent être choisis.

En pratique et de façon générale, le choix d'une quantité d'intérêt impacte la création du second membre du problème adjoint associé, ainsi pour une quantité d'intérêt telle que :

- le déplacement moyen sur  $\omega_Q$ , le problème adjoint est soumis à un effort réparti  $f_\Sigma = \frac{\delta}{b}$  horizontal si on s'intéresse respectivement à  $u_x$  ;
- la contrainte moyenne  $\sigma_{xx}$  sur  $\omega_Q$ , le problème adjoint est soumis à une pré-contrainte :

$$\sigma_\Sigma = \frac{1}{|\omega_Q|} \mathcal{K} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{|\omega_Q|} \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}, \quad (8.1)$$

dans  $\omega_Q$ . De façon équivalente, le problème adjoint est soumis à un effort volumique  $\mathbf{f}_{Sigma} = -\mathbf{div}(\sigma_\Sigma)$  dans  $\omega_Q$  et une traction  $\sigma_\Sigma \mathbf{n}$  sur la frontière  $\partial\omega_Q$  de  $\omega_Q$  ;

- la déformation moyenne  $\varepsilon_{xx}$  sur  $\omega_Q$ , le problème adjoint est soumis à une pré-contrainte :

$$\sigma_\Sigma = \frac{1}{|\omega_Q|} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8.2)$$

dans  $\omega_Q$ . De façon équivalente le problème adjoint est soumis à une traction  $\sigma_\Sigma \mathbf{n}$  sur la frontière  $\partial\omega_Q$  de  $\omega_Q$ .

Les problèmes adjoints seront aussi résolus grâce à une stratégie de couplage non-intrusif. L'avantage d'utiliser cette méthode de couplage est la facilité avec laquelle la zone locale pourra être modifiée sans besoin de recalculer la partie globale (identique pour le problème primal et les problèmes adjoints). Dans la suite, cela permet une grande flexibilité dans la définition des calculs, ainsi qu'une rapidité des calculs ainsi parallélisables.

### 8.1.2 Estimation de l'erreur globale de couplage

D'après le chapitre 7, l'estimateur d'erreur global nécessite la solution d'un problème adjoint à convergence dont la zone locale serait plus grande et plus raffinée que celle du problème primal. En pratique, afin de réduire le coût de calcul, ce problème adjoint est remplacé par un ensemble de problèmes adjoints avec des zones locales plus petites. A l'aide de la méthode de couplage non-intrusif, chacun de ces problèmes adjoints peut être calculé en parallèle. Bien que la combinaison résultante des différentes solutions adjointes correspondantes ne coïncide pas exactement avec celle obtenue par une approche monolithique, cela mène quand même à des résultats similaires en terme d'estimation d'erreur dû aux propriétés d'orthogonalité.

Ainsi dans le cas de la poutre en 1D, un ensemble de problèmes adjoints est défini. Chaque zone locale comprend un premier patch situé au niveau de la quantité d'intérêt, soit l'intervalle  $[13/16-15/16]$  et un second situé dans une des zones suivantes :  $[1/16-3/16]$ ,  $[3/16-5/16]$ ,  $[5/16-7/16]$ ,  $[7/16-9/16]$ ,  $[9/16-11/16]$ ,  $[11/16-13/16]$  (voir leurs positions sur la Figure 8.3).

La zone locale du problème adjoint, ensemble de deux patches, est prise assez raffinée et l'algorithme de couplage est mené jusqu'à convergence.

A partir de la configuration initiale du problème primal (une itération dans l'algorithme de couplage, un raffinement macro et la zone locale P0), il est possible de tracer l'évolution de l'erreur globale en fonction de la position du second patch de la zone locale. La répartition de l'erreur globale pour une quantité d'intérêt en déplacement dans le Cas 1 (resp. Cas 2) est tracée sur la Figure 8.4a (resp. 8.5a). On observe que dans le Cas 1, l'erreur globale est plus





FIGURE 8.3 – Différentes positions du second patch de la zone locale, le premier se trouvant toujours au niveau de P0. Un patch est constitué de deux éléments macro.

importante dans la zone  $[11/16 - 13/16]$  tandis que pour le Cas 2, l'erreur maximale est située dans la partie  $[3/16 - 7/16]$ . Cela est en bonne adéquation avec les répartitions respectives du module de Young ; en effet vu que la zone locale est initialement dans l'intervalle  $[13/16 - 15/16]$  (en gardant  $E_0$  dans tout le reste de la poutre), l'erreur est importante dans les zones où la valeur exacte de  $E$  est loin de  $E_0$  et impacte ainsi la quantité d'intérêt.

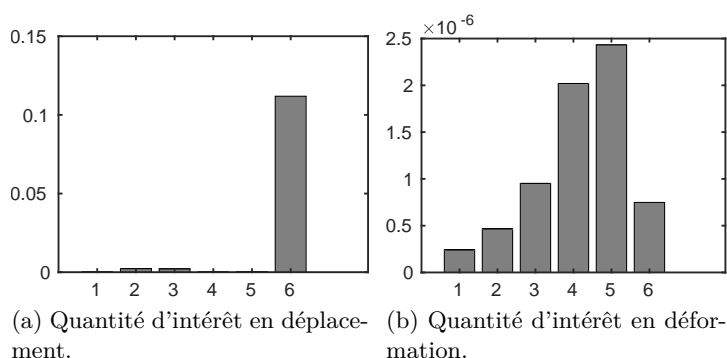


FIGURE 8.4 – Erreur globale en fonction de la position du patch local pour le Cas 1 (voir Figure 8.2a) pour différentes quantités d'intérêt.

La répartition de l'erreur globale pour une quantité d'intérêt en déformation dans le Cas 1 (resp. Cas 2) est tracée sur la Figure 8.4b (resp. 8.5b). Dans ces deux cas la répartition de l'erreur est plus étalée sur toute la poutre mais sa valeur est très faible, de l'ordre de  $10^{-6}$ .

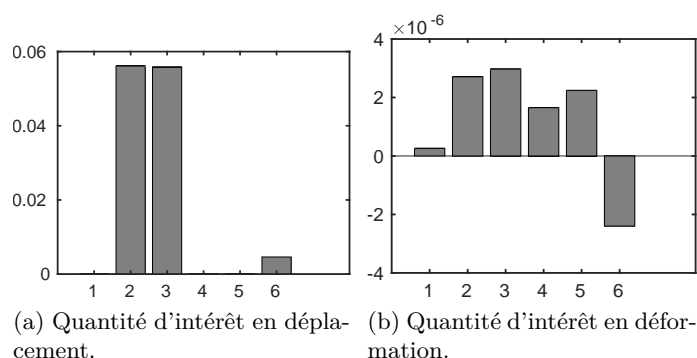


FIGURE 8.5 – Erreur globale en fonction de la position du patch local pour le Cas 2 (voir Figure 8.2b) pour différentes quantités d'intérêt.

Les solutions du problème adjoint étant calculées à convergence et avec une zone locale bien raffinée, les Figures 8.4 et 8.5 peuvent aussi être interprétées comme la répartition de l'erreur de modèle le long de la poutre. Elles servent ainsi à déterminer quel patch doit être ajouté dans la zone locale du problème primal quand l'erreur de modèle est la plus importante.

En sommant les différentes contributions d'erreur on obtient l'erreur globale sur toute la structure. Cette erreur est identique à celle qu'on aurait obtenu en prenant une solution de problème adjoint à zone locale sur toute la longueur de la poutre, soit sur l'intervalle  $[1/16 - 15/16]$ .

### 8.1.3 Procédure d'adaptation

Dans cette partie, nous présentons l'ensemble des résultats obtenus pour la structure poutre en traction avec deux répartitions du module de Young. La procédure d'adaptation (voir 7.2.3) est mise en place.

#### 8.1.3.1 Déplacement moyen en bout de poutre

On s'intéresse tout d'abord à la quantité d'intérêt qu'est le déplacement moyen sur  $\omega_Q = [13/16 - 15/16]$ . La zone locale initiale comprend le patch support de la quantité d'intérêt, soit  $\Omega_L = \omega_Q$ . La tolérance d'erreur relative est fixée à 5%.

L'estimateur d'erreur  $\eta_Q^{tot}$  et les différents indicateurs d'erreur  $\eta_{Q,res}^{conv}$ ,  $\eta_{Q,res}^{dis}$ , et  $\eta_{Q,res}^{mod}$  sont calculés à chaque pas d'adaptation.

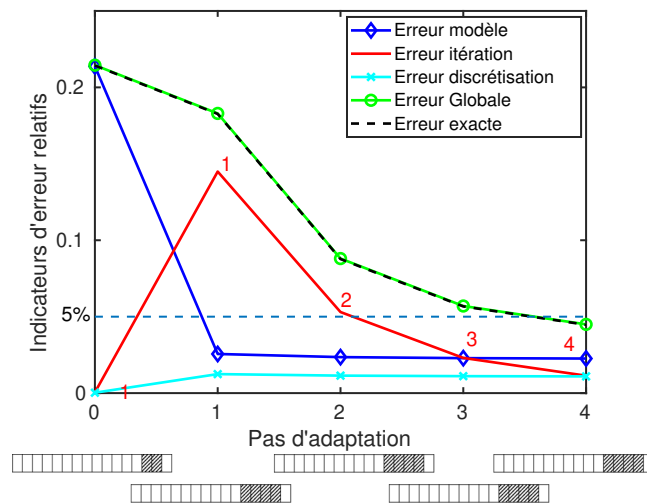
Les résultats de la Figure 8.6 montrent l'évolution de ces valeurs normalisées par la valeur de la quantité d'intérêt (i.e. sous la forme  $./Q(\mathbf{u}_{LG}^{hH(n)})$ ), à chaque pas d'adaptation. Le nombre d'itérations  $n$  dans l'algorithme de couplage local-global est indiqué sur les graphes (numéro rouge). L'évolution de la zone locale  $\Omega_L$  du problème primal est donnée en dessous du graphe. Cette représentation montre bien que lorsque l'indicateur sur l'erreur de modèle  $\eta_{Q,res}^{mod}$  est le plus grand, la zone locale  $\Omega_L$  est élargie (e.g. un nouveau patch est ajouté dans la zone locale). Pour les exemples choisis, l'erreur de discrétisation dans  $\Omega_L$  est faible et impacte donc peu la quantité d'intérêt. De plus, on peut noter que pour une tolérance de 5%, il n'est pas nécessaire de modéliser le faible affaiblissement du module de Young ; seul le plus grand pic des Figures 8.4 et 8.5 est considéré.

- En conclusion, les configurations idéales de couplage pour ces exemples sont les suivantes :
- pour le Cas 1 : une zone locale  $\Omega_L$  définie par un seul patch dans la zone  $[11/16 - 15/16]$ , sans raffinement spécifique de  $\tau^h$  et 4 itérations ( $n = 4$ ) dans l'algorithme de couplage, en se référant à la Figure 8.6a ;
  - pour le Cas 2 : une zone locale  $\Omega_L$  définie par des patches dans la zone  $[3/16 - 7/16]$  et  $[13/16 - 15/16]$ , sans raffinement spécifique de  $\tau^h$  et 3 itérations ( $n = 3$ ) dans l'algorithme de couplage, en se référant à la Figure 8.6b.

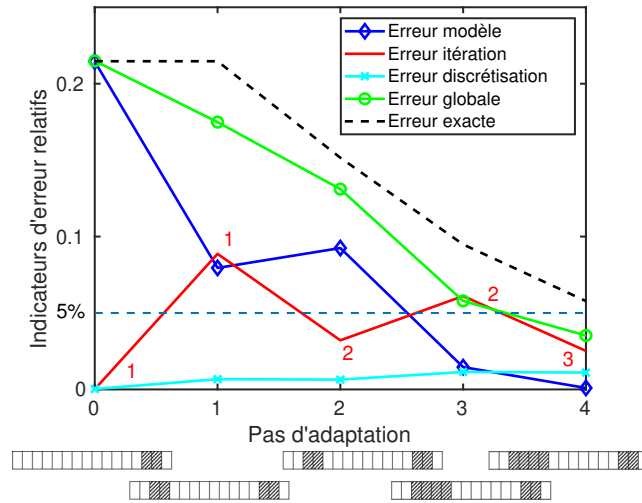
Des travaux supplémentaires pour une tolérance fixée à 1%, donnent l'évolution des erreurs comme indiqués sur la Figure 8.7. Dans ces cas, le petit affaiblissement du module de Young est inclus dans la zone locale.

#### 8.1.3.2 Autres quantités d'intérêt

D'autres quantités d'intérêt peuvent être étudiées. Les études ont été menées sur la contrainte moyenne  $\sigma_{xx}$  et la déformation moyenne  $\varepsilon_{xx}$  dans la zone  $\omega_Q = [13/16; 15/16]$ . La définition de l'effort du problème adjoint associé pour ces cas est donné dans les Équations (8.1) et (8.2). Dans ces deux cas, l'algorithme indique qu'aucun pas d'adaptation n'est nécessaire (que la tolérance soit de 5% ou 1%). En effet, les champs de contrainte et de déformation dépendent peu de la configuration en amont. Ainsi, la quantité d'intérêt peut être calculée de façon très précise avec très peu d'efforts numériques.



(a) Adaptation pour le Cas 1.



(b) Adaptation pour le Cas 2.

FIGURE 8.6 – Différents estimateurs d'erreur en fonction des pas d'adaptation pour les deux configurations du module de Young.

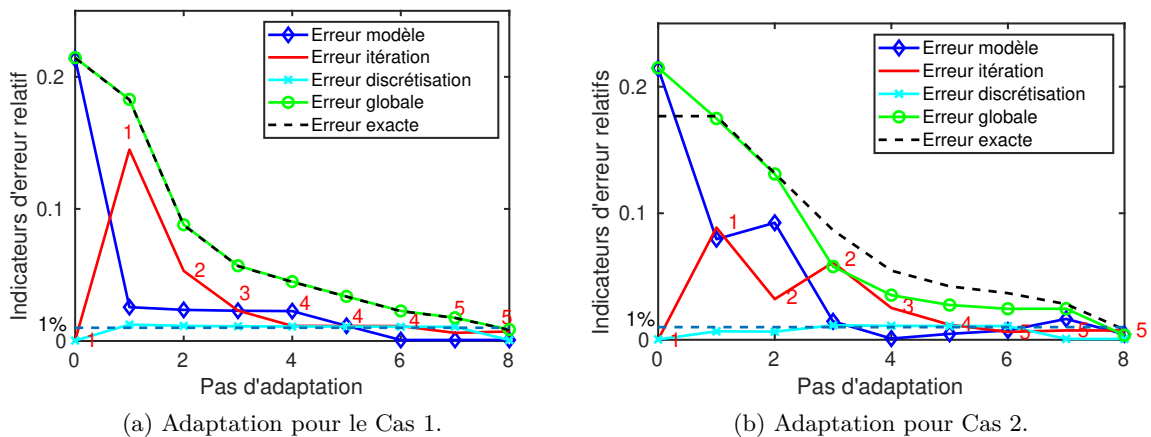


FIGURE 8.7 – Différents estimateurs d'erreur en fonction des pas d'adaptation pour les deux configurations du module de Young.

## 8.2 Plaque en traction avec inclusion locale d'affaiblissements

Dans cette partie, nous étudions une plaque carrée (taille  $L \times L$  avec  $L = 1$ ) dans laquelle des affaiblissements locaux du module de Young sont considérés. La structure représentée sur la Figure 8.8 est encastrée sur son bord gauche tandis que le bord droit est soumis à un effort de traction uniforme. Les autres bords de la plaque sont libres. Le maillage global  $\tau^H$  est constitué de 100 (10x10) éléments quadratiques d'ordre 1.

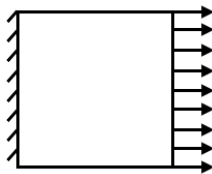


FIGURE 8.8 – Problème de référence de la plaque carrée en traction.

Les variations locales du module de Young  $E(x, y)$  sont présentes dans cinq zones et jouent ainsi le rôle d'inclusions dans le matériau, dans lesquelles le module de Young est plus faible que sa valeur nominale  $E_0 = 1$ .

Dans les deux premiers exemples, les zones impactées par un affaiblissement de  $E$  sont incluses dans un élément macro. L'affaiblissement de  $E$  dans ces zones est soit fort :  $E_{min} = 0,0026$  soit faible :  $E_{min} = 0,45$ .

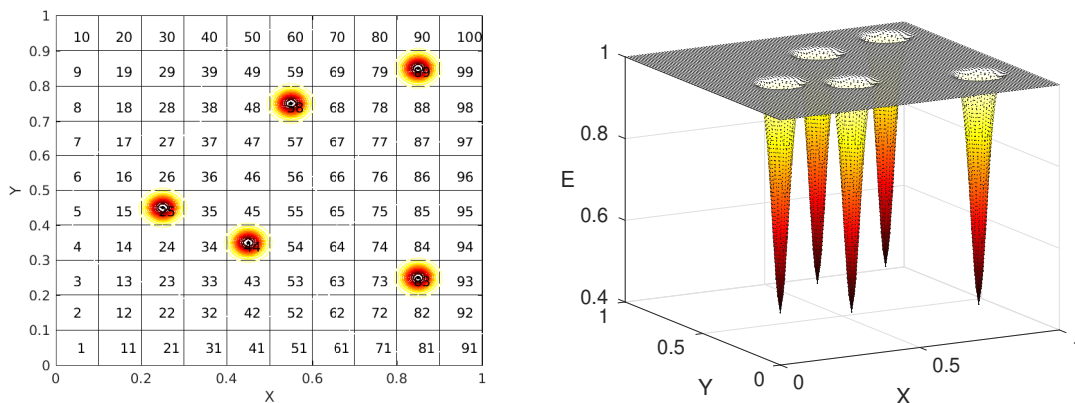
Le dernier exemple a un affaiblissement faible du module de Young ( $E_{min} = 0.45$ ) mais une des zones impactées est plus large qu'un élément macro.

Dans tous les cas le coefficient de Poisson vaut  $\nu = 0,3$ .

La quantité d'intérêt étudiée est dans chacun de ces exemples, sauf indication contraire, un déplacement moyen sur le bord droit où l'effort de traction est appliqué. Le but de l'algorithme d'adaptation est de trouver la configuration optimale du problème couplé vis-à-vis de cette quantité d'intérêt et en respectant une certaine tolérance sur l'erreur. Sauf indication contraire, la tolérance est fixée à 0,5% afin de pouvoir déterminer l'impact même faible du module de Young modifié sur la quantité d'intérêt.

### 8.2.1 Variation homogène du Module de Young

Les éléments impactés par la variation homogène du Module de Young sont présentés sur la Figure 8.9a, tandis que l'évolution de  $E(x, y)$  pour un affaiblissement fort est tracée sur la Figure 8.9b. Les numéros des éléments impactés sont donc les suivants : 25, 44, 58, 83, 89.



(a) Position des éléments impactés (n° 25, 44, 58, 83 et 89). (b) Évolution du module de Young dans la plaque avec affaiblissements faibles.

FIGURE 8.9 – Évolution du module de Young dans la plaque et éléments impactés.

Vu que la quantité d'intérêt choisie est le déplacement moyen sur le bord droit, la zone locale du problème couplé est initialement composée des éléments 91 à 100 supports de la quantité d'intérêt.

La discrétisation de la zone locale est identique à celle du maillage globale (i.e.  $\tau^h = \tau^H$ ), et une seule itération est réalisée dans l'algorithme de couplage.

Nous montrons donc dans cette partie les résultats de la procédure d'adaptation pour des variations homogènes, faibles ou fortes, du module de Young.

#### 8.2.1.1 Affaiblissement faible

La solution de référence du problème à faible affaiblissement, en terme de champ de déformation  $\varepsilon_{xx}$ , est tracée sur la Figure 8.10a. En parallèle sur la Figure 8.10b, la solution du problème couplé tel que défini initialement est donnée. On observe que les modifications du module de Young ne sont initialement pas prises en compte car la zone locale initiale n'est pas constituée d'éléments impactés. Ainsi la solution est identique à la solution d'une poutre en traction avec un module de Young égal à 1 partout. De plus, au niveau des éléments limites du bord gauche, on observe l'effet de l'encastrement car un maillage grossier est utilisé dans cette zone.

Sur la Figure 8.11a, les différents estimateurs et indicateurs d'erreurs relatives (c.à.d. normalisés par rapport à la valeur approchée de la quantité d'intérêt) sont donnés pour chaque pas d'adaptation. Ce sont les termes  $|\eta_{Q,res}^{tot}/Q(\mathbf{u}_{LG,N}^{hH(n)})|$ ,  $|\eta_{Q,res}^{conv}/Q(\mathbf{u}_{LG,N}^{hH(n)})|$ ,  $|\eta_{Q,res}^{dis}/Q(\mathbf{u}_{LG,N}^{hH(n)})|$  et  $|\eta_{Q,res}^{mod}/Q(\mathbf{u}_{LG,N}^{hH(n)})|$ , définis précédemment.

Trois pas d'adaptation sont réalisés : deux se réfèrent à de l'adaptation de modèle par ajout des éléments 83 et 89 dans la zone locale du problème primal et le dernier augmente d'une itération l'algorithme de couplage. La tolérance d'erreur est atteinte après le quatrième pas d'adaptation et la solution du problème couplé à cette étape est montrée sur la Figure 8.11b. Dans cette configuration finale, on a :

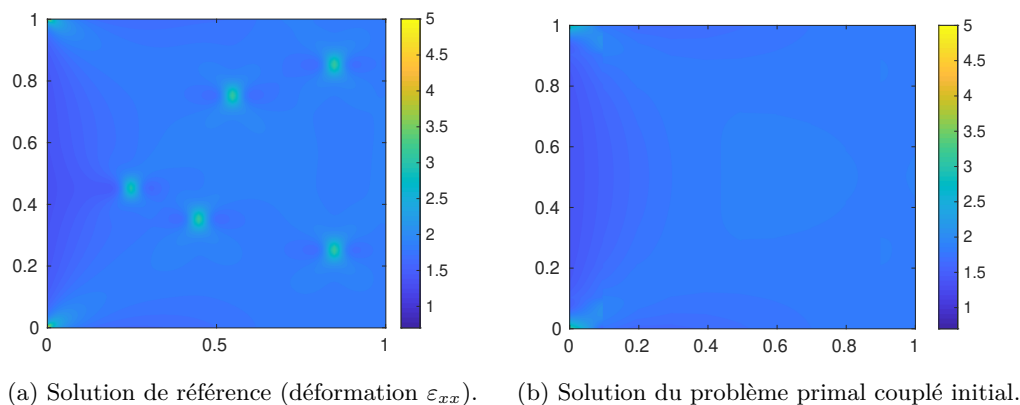


FIGURE 8.10 – Champ  $\varepsilon_{xx}$  du problème de référence (a) et du problème primal avec le couplage initial non optimisé (b).

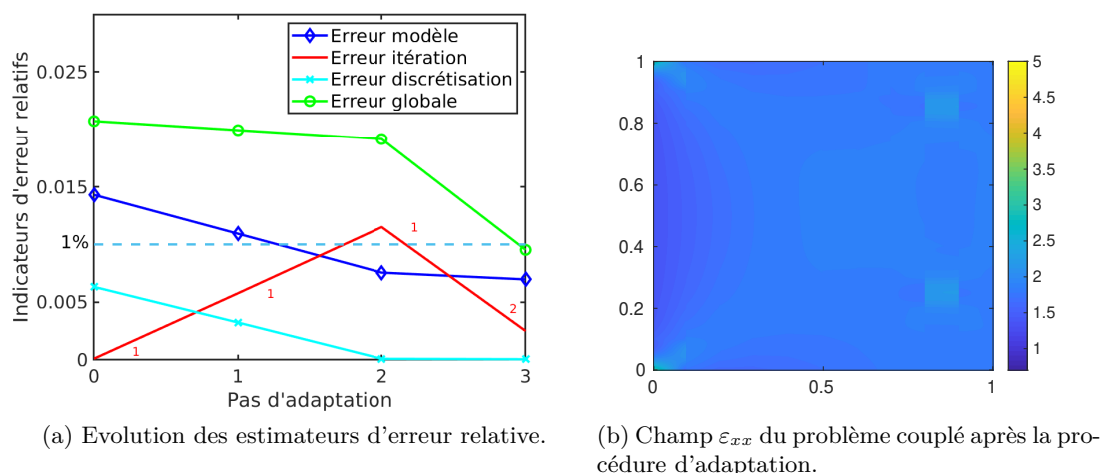


FIGURE 8.11 – Résultats pour une variation locale faible du module de Young. (a) est l'évolution des différents indicateurs d'erreur à chaque pas d'adaptation, (b) est le champ  $\varepsilon_{xx}$  du problème couplé à la fin de l'adaptation.

- ajout de seulement deux éléments (83 et 89) dans la zone locale du problème primal. Ces éléments sont impactés par une modification de  $E$  et sont les plus proches du bord droit où se trouve la quantité d'intérêt,
- deux itérations dans l'algorithme de couplage non-intrusive global-local,
- aucun raffinement dans la zone locale.

Bien que la solution du problème en configuration finale (voir Fig. 8.11b) est assez éloignée de la solution de référence (voir Figure 8.10a), cette configuration est suffisante pour approximer la solution vis-à-vis de la quantité d'intérêt choisie. En particulier, certaines variations locales du module de Young n'ont pas d'impact sur le déplacement moyen du bord droit et ne nécessitent donc pas d'être représentées (éléments 25, 44 et 58).

**Remarque 22** Une étude similaire a été réalisée avec un contraste plus faible du module de Young ( $E = 0.8$ ). Dans ce cas, la procédure d'adaptation montre que l'erreur majoritaire, qui est une erreur de modèle, se situe au niveau des éléments 1 et 10. Ces éléments se situent dans les angles où les conditions aux limites de Dirichlet sont appliquées et donc où on trouve un fort

gradient (concentration de contrainte). Deux patches raffinés doivent ainsi être placés dans cette zone afin de diminuer l'erreur sur la quantité d'intérêt.

### 8.2.1.2 Affaiblissement fort

**Quantité d'intérêt en déplacement** Dans ce cas, les éléments impactés sont les mêmes que ceux présentés sur la Figure 8.9a et l'évolution du module de Young dans la plaque est donnée sur la Figure 8.12a. La solution de référence (déformation  $\varepsilon_{xx}$ ) est tracée sur la Figure 8.12b. La solution du problème couplé initial est identique à celle de la Figure 8.10b car la configuration initiale est similaire.

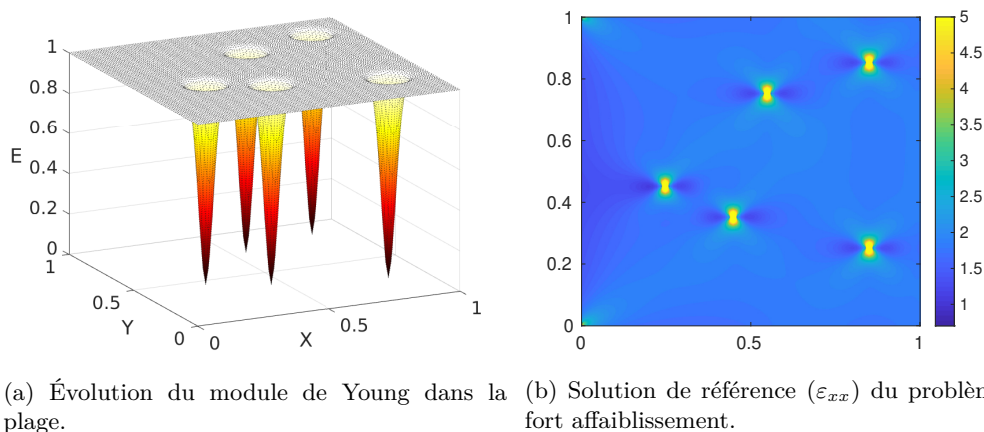


FIGURE 8.12 – Influence de l'évolution du module de Young à fort affaiblissement (a) sur la solution de référence (b).

Les résultats de la procédure d'adaptation dans ce cas sont donnés sur la Figure 8.13. L'évolution des différents indicateurs relatifs est donnée pour chaque pas d'adaptation sur la Figure 8.13a. On observe dorénavant que 7 pas d'adaptation sont nécessaires pour atteindre la tolérance; cinq sont des adaptations de modèles afin d'ajouter tous les éléments avec une variation de  $E$  dans la zone locale du problème primal et les deux autres pas d'adaptation sont des ajouts d'itérations dans l'algorithme de couplage.

Durant les trois premières étapes de la procédure d'adaptation, l'erreur est globalement due à l'erreur de modèle si bien que les éléments 89, 83 et 58 sont ajoutés successivement dans la zone locale du problème primal. Les deux autres éléments (44 et 32) sont quant à eux ajoutés lors des pas 5 et 7 respectivement. Dans ce cas, l'algorithme d'adaptation montre que la zone locale du problème primal doit recouvrir l'intégralité des éléments où le module de Young est modifié afin d'atteindre la tolérance d'erreur sur la quantité d'intérêt. Néanmoins, la modification du module de Young n'a pas besoin d'être décrite précisément comme aucun raffinement n'est nécessaire dans la zone locale. Nous pouvons noter par ailleurs, en se référant aux erreurs à l'étape 8 sur la Figure 8.13a, que le raffinement du maillage serait l'étape suivante si une tolérance plus basse était choisie.

Bien que l'approximation de la solution obtenue à la fin de l'adaptation (voir Figure 8.13b) est une approximation assez grossière du champ de déformation, elle est suffisante pour prédire correctement la quantité d'intérêt.

**Quantité d'intérêt en déformation** On s'intéresse dorénavant à une quantité d'intérêt en déformation sur un élément voisin d'un trou. La zone locale  $\Omega_L$  est donc constituée des éléments

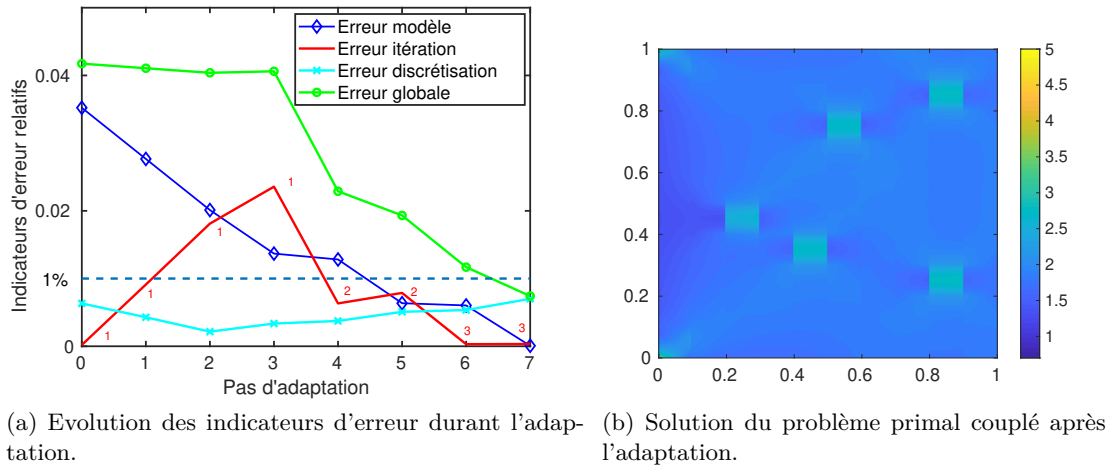


FIGURE 8.13 – Résultats pour une variation locale forte du module de Young. (a) est l'évolution des différents indicateurs d'erreur à chaque pas d'adaptation, (b) est le champ  $\varepsilon_{xx}$  du problème couplé à la fin de l'adaptation.

macro 58 et 68 (là où se situe l'affaiblissement et la quantité d'intérêt). Si on ne place pas initialement l'élément macro 58 comprenant le trou dans la zone locale, une erreur de modèle est initialement prédominante et nécessitera de rajouter cet élément dans la zone locale du problème primal.

Afin de mettre en évidence d'autres phénomènes, cet élément est au préalable inclus dans la zone locale. En effet, en appliquant la procédure d'adaptation pour cette quantité, on montre que les erreurs sont principalement dues à l'itération et la discrétisation. Ainsi le maillage  $\tau^h$  doit être raffiné dans la zone locale  $\Omega_L$  afin d'atteindre la tolérance d'erreur  $\gamma_{tol} = 2\%$ . Cette tolérance atteinte après 4 pas d'adaptation nécessite aussi  $n = 3$  itérations local-global mais pas d'extension supplémentaire de  $\Omega_L$ .

Sur la Figure 8.14, nous montrons quelques caractéristiques de l'erreur sur une quantité d'intérêt; la solution du problème adjoint (qui met en évidence de forts gradients localisés à proximité de la région d'intérêt) est donnée sur la Figure 8.14a, l'évolution de l'estimateur d'erreur et des indicateurs durant la procédure d'adaptation est tracée sur la Figure 8.14b, tandis que le maillage local  $\tau^h$  et la configuration finale de la solution approchée couplée sont présentés respectivement sur les Figures 8.14c et 8.14d.

## 8.2.2 Variation hétérogène du Module de Young

Dans cette partie, on considère que la variation du module de Young de l'élément 58 impacte plus d'un élément comme on peut le voir sur la Figure 8.15a. L'évolution du module de Young dans la plaque prend alors l'allure décrite sur la Figure 8.15b. On s'intéresse toujours à la quantité d'intérêt qu'est le déplacement moyen sur le bord droit.

La solution de référence pour cette variation de  $E$  est donnée sur la Figure 8.16a. La procédure d'adaptation, dont l'évolution des erreurs est représentée sur la Figure 8.16b, aboutit à une solution du problème primal en Figure 8.16c. Onze pas d'adaptation sont nécessaires pour atteindre une tolérance d'erreur de 1% et obtenir la configuration optimale du couplage.

Afin de détailler la procédure d'adaptation, la distribution spatiale de l'erreur de modèle par élément macro est évaluée à chaque pas d'adaptation (voir Figure 8.17). La position du patch local est en gris tandis que les nouveaux éléments ajoutés à la zone locale pour un pas d'adaptation donné sont en noir. A la fin de la procédure d'adaptation, on aboutit au couplage



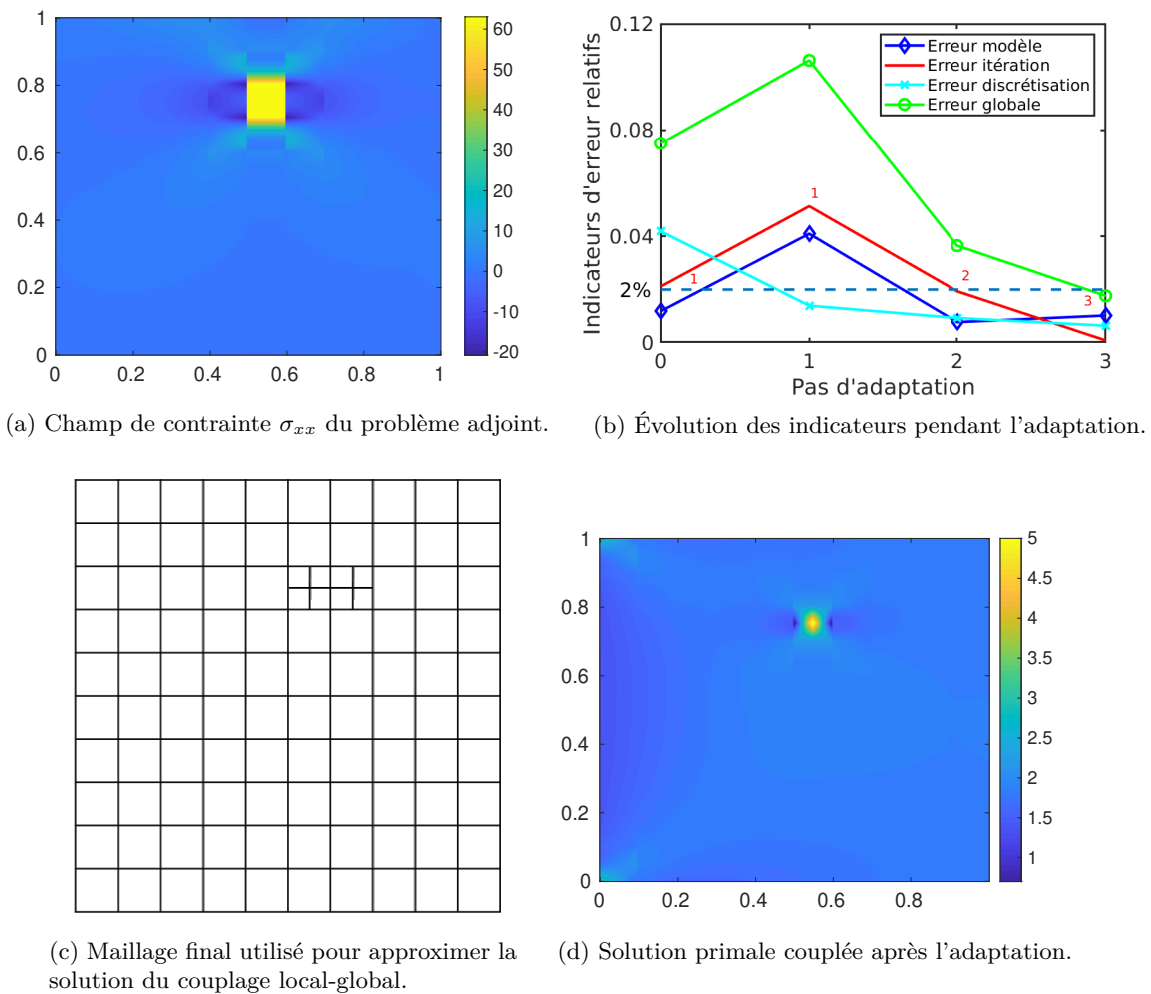


FIGURE 8.14 – Influence d'une variation hétérogène de  $E$  sur les éléments impactés et sa variation.

suivant :

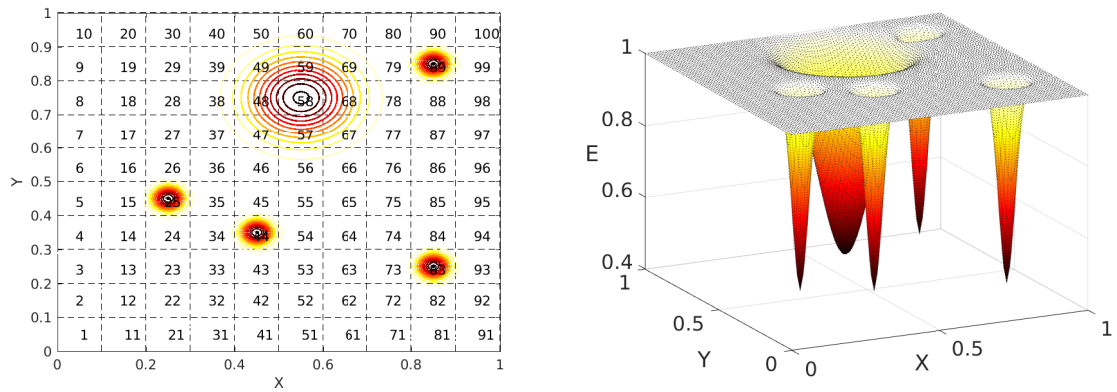
- zone locale avec l'ensemble des éléments suivants :  $\{91-100,58,59,57,25,83,68,48,89\}$  (apparition dans l'ordre d'ajout des éléments),
- 3 itérations de l'algorithme de couplage global-local,
- pas de raffinement local nécessaire.

### 8.3 Plaque trouée en flexion

La dernière application est une plaque avec une distribution régulière (périodique) de 160 trous, de rayon  $r = 0,15$ , soumise à un effort de flexion. Les conditions aux limites et les dimensions de la plaque sont données sur la Figure 8.18a. Le module de Young est  $E = 1$ .

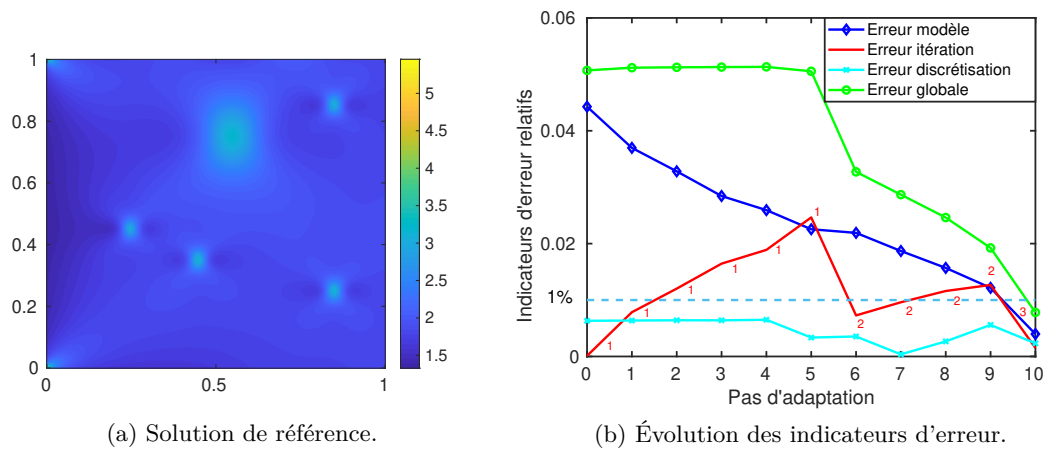
En utilisant un point de vue local-global, la solution est approchée en considérant :

- un modèle global de la plaque sans trous avec un module de Young moyen  $E_0 = (1 - \pi r^2)E$ . Le maillage global utilisé est composé de  $8 \times 20$  éléments quadratiques d'ordre 1.
- un modèle local constitué d'un ensemble de patches. Chaque patch représente un trou (voir Figure 8.18b). La taille d'un patch est de  $1 \times 1$ , le module de Young vaut 1, et un



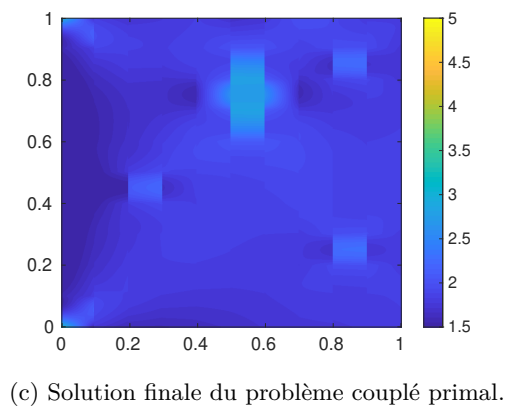
(a) Éléments impactés dans le cas où la variation de  $E$  est plus large. (b) Evolution du module de Young dans la plaque.

FIGURE 8.15 – Influence d'une variation hétérogène de  $E$  sur les éléments impactés et sa variation.



(a) Solution de référence.

(b) Évolution des indicateurs d'erreur.



(c) Solution finale du problème couplé primal.

FIGURE 8.16 – Résultats pour une variation locale forte du module de Young. (a) et (c) représentent respectivement les champs  $\varepsilon_{xx}$  du problème de référence et du problème couplé à la fin de l'adaptation, (b) est l'évolution des différents indicateurs d'erreur à chaque pas d'adaptation.

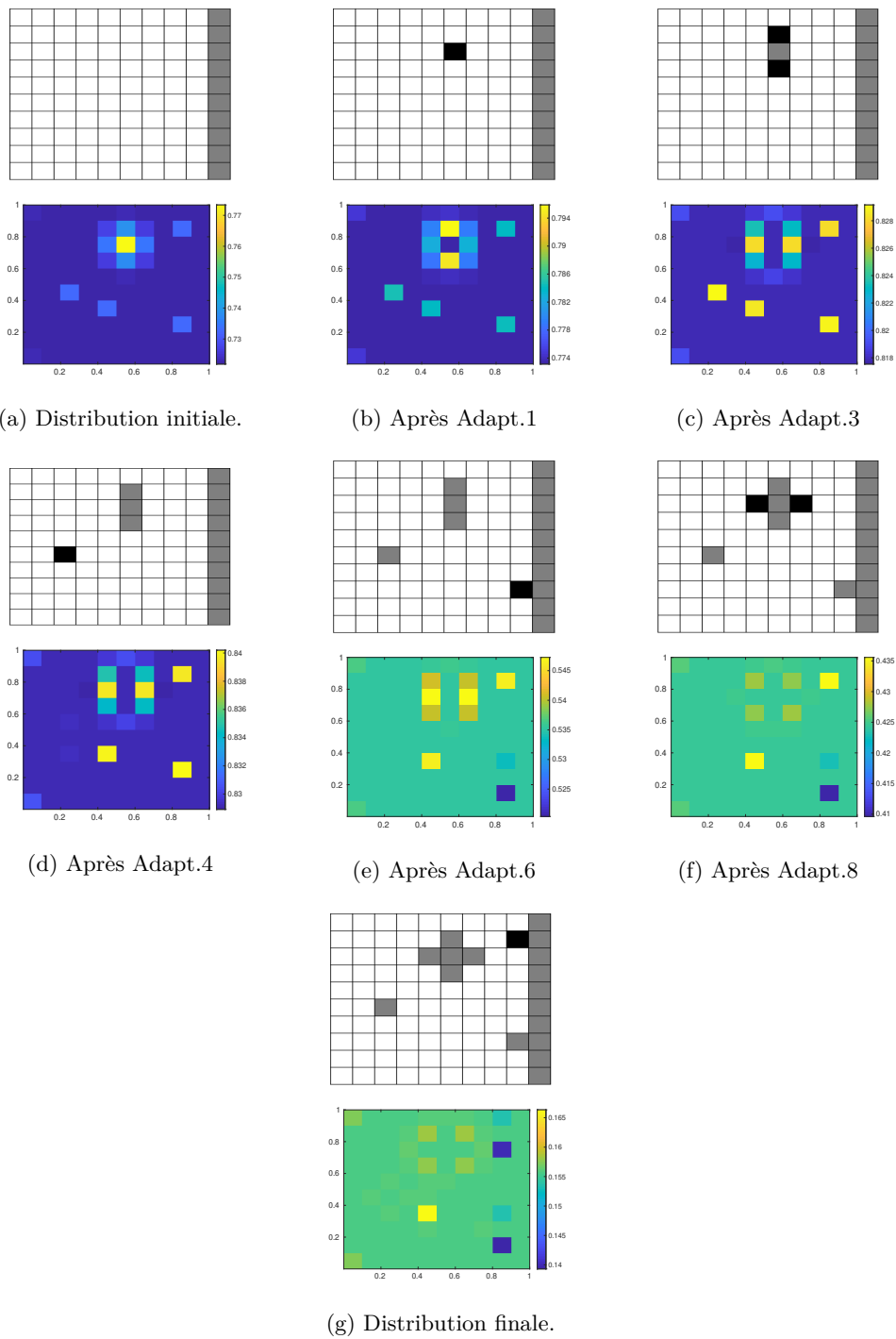


FIGURE 8.17 – Distribution de l'erreur globale à différentes étapes de la procédure d'adaptation. Sur la figure du dessus à chaque étape, la zone locale est en gris et les éléments nouvellement inclus dans cette zone sont en noir.

maillage non-structuré d'éléments triangles d'ordre 1 y est défini.

La solution de référence sur la composante  $\varepsilon_{yy}$  du champ de déformation est donnée sur la Figure 8.19a : l'ensemble de 160 trous est considéré dans ce cas.

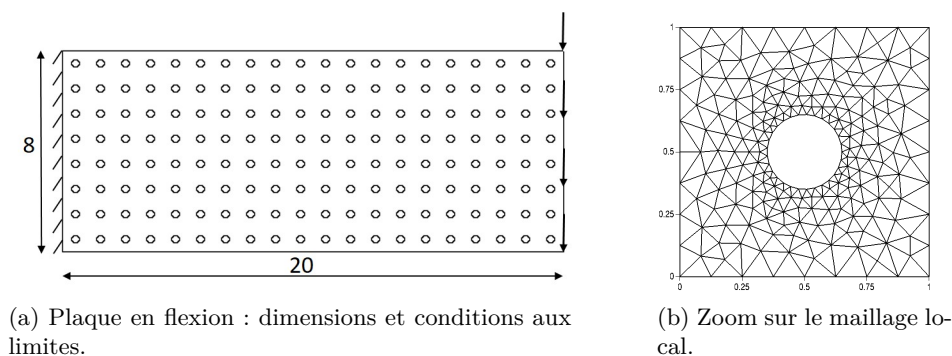


FIGURE 8.18 – Description du problème de plaque en flexion. La géométrie de référence (a) est composée de 160 trous qui peuvent chacun être représenté par un patch (b) dans l'approximation numérique.

### 8.3.1 Quantité d'intérêt en déplacement

Dans un premier temps, la quantité d'intérêt étudiée est le déplacement vertical moyen en bout de plaque où l'effort de flexion est appliqué, la zone locale se situe donc initialement dans cette zone. La solution approchée du problème primal couplé avec une telle zone locale est donnée sur la Figure 8.19b. Dans cette zone locale seulement il y a prise en compte des trous comme on peut le distinguer sur la droite de la Figure 8.19b.

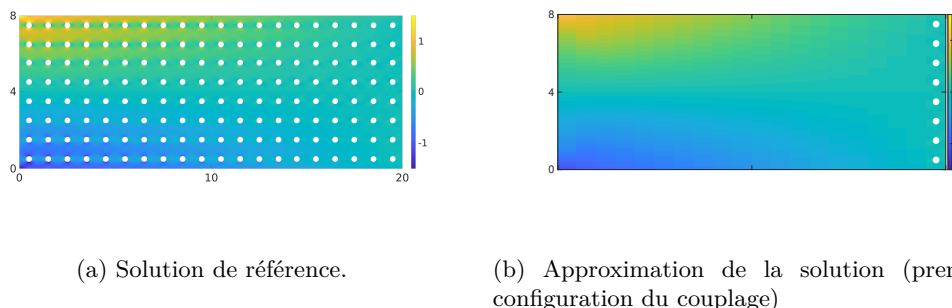


FIGURE 8.19 – Champs de déformation  $\varepsilon_{yy}$  pour le problème de plaque considéré : (a) tous les nœuds sont considérés (solution de référence, sans couplage), (b) une stratégie de couplage global-local est utilisée et seule une couche d'éléments macro en bout de poutre se trouve dans la zone locale où le trou est pris en compte.

Pour la procédure d'adaptation, on considère dans ce cas que le maillage de la zone locale est assez fin par rapport à la zone globale si bien que l'erreur de discrétisation est négligée dans la zone locale. En conséquence, le but de la procédure d'adaptation est ici de déterminer le nombre d'itérations nécessaire pour l'algorithme de couplage local-global ainsi que les trous qui ont besoin d'être représentés par un patch local. La tolérance d'erreur est choisie égale à 2%. La procédure d'adaptation est initiée avec la configuration précédemment décrite (voir la position de la zone locale sur la Figure 8.21a) et une itération dans l'algorithme de couplage. Grâce au couplage non-intrusif, les zones critiques sont analysées en ajoutant des patches dans le problème adjoint pour prendre en compte les sources d'erreur associées. L'ensemble des problèmes adjoints ainsi défini peut être résolu en parallèle.

Les résultats de l'adaptation sont montrés sur la Figure 8.20, où l'évolution des estimateurs d'erreur relatifs (en terme d'itérations et de modèle) sont évalués tout au long de la procédure (voir Figure 8.20a ainsi que la solution approchée du couplage final vérifiant la tolérance sur la quantité d'intérêt en déplacement (voir Figure 8.20b).

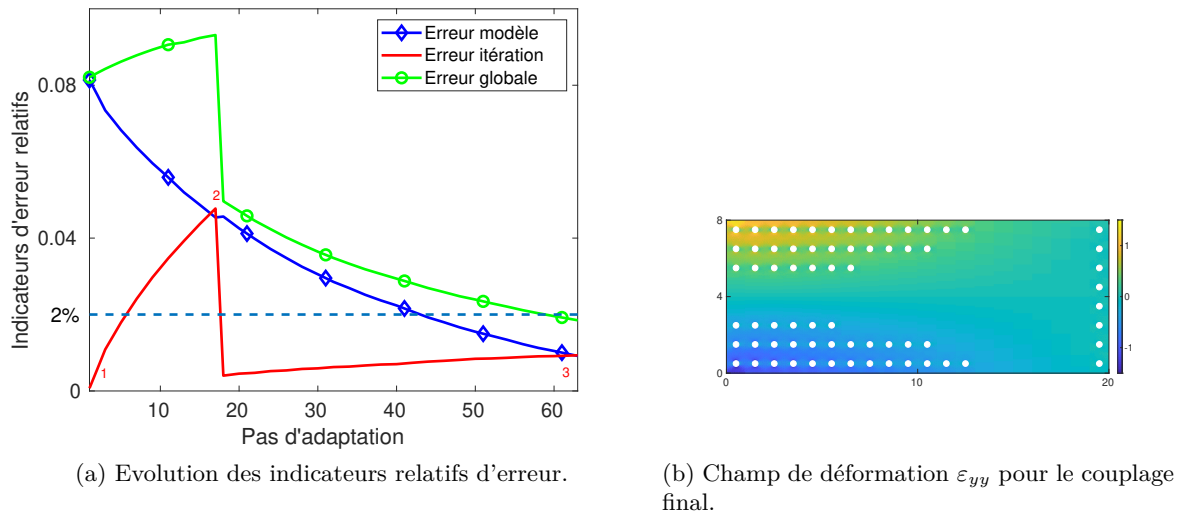
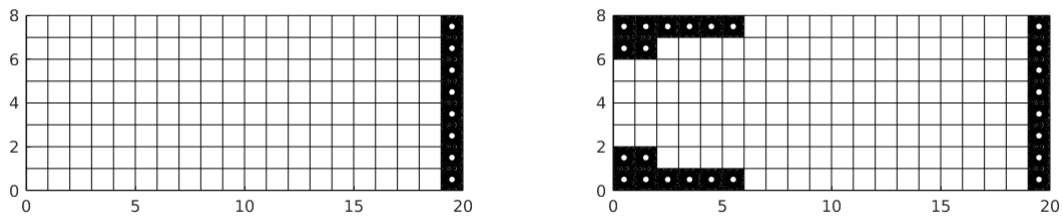


FIGURE 8.20 – Évolutions des estimateurs d'erreur et configuration finale du couplage pour contrôler la quantité d'intérêt dans une plaque avec des trous.

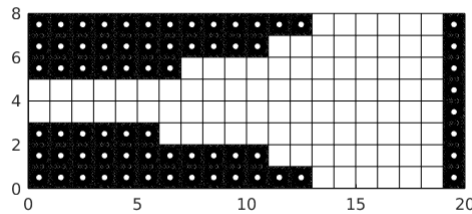
La configuration finale, optimale, du couplage est obtenue après 63 pas d'adaptation. Elle nécessite 3 itérations dans l'algorithme de couplage et un agrandissement de la zone locale pour prendre en compte l'effet de pollution venant du modèle global grossier. La procédure d'adaptation peut être développée de la façon suivante :

- des étapes 1 à 16, l'erreur de modèle prédomine si bien qu'un certain nombre de patches sont ajoutés à la zone locale. L'évolution de la zone locale au pas 16 est donnée sur la Figure 8.21b ;
- au pas 17, une itération supplémentaire est nécessaire ;
- des étapes 18 à 62, des nouveaux patches sont inclus dans la zone locale. L'évolution de cette zone au pas 62 est visible sur la Figure 8.21c ;
- au pas 63, une itération de plus est faite dans l'algorithme de couplage et l'erreur globale atteint la tolérance  $\gamma_{tol}$ .



(a) Zone locale initiale.

(b) Zone locale au pas 16 d'adaptation.



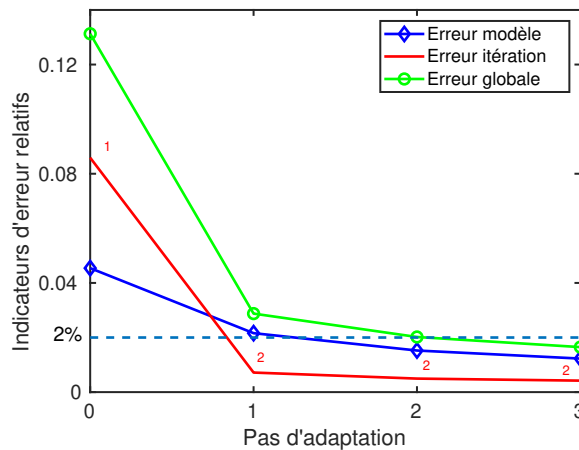
(c) Zone locale finale.

FIGURE 8.21 – Évolution de la zone locale au cours des pas d'adaptation.

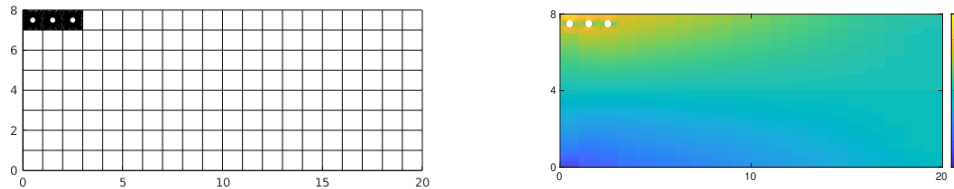
### 8.3.2 Quantité d'intérêt en contrainte

On s'intéresse dorénavant à une quantité d'intérêt en contrainte moyenne de  $\sigma_{xx}$  dans la zone locale  $\omega_Q \in \Omega$  qui correspond à l'élément macro de  $\tau^H$  en haut à gauche. Pour cette quantité, le chargement de l'adjoint correspond à une pré-contrainte dans  $\omega_Q$ . On commence la procédure d'adaptation avec  $\Omega_L = \omega_Q$  et une tolérance d'erreur  $\gamma_{tol} = 2\%$ . Les résultats de l'adaptation sont donnés sur la Figure 8.22.

L'évolution de l'estimateur et des indicateurs d'erreur relatifs, sur la Figure 8.22a, indique que la tolérance d'erreur choisie est atteinte en 4 pas d'adaptation avec  $n = 2$  itérations du couplage local-global et une zone locale  $\Omega_L$  élargie. La configuration finale de  $\Omega_L$  est décrite sur la Figure 8.22b et la solution approchée finale du couplage local-global est montrée sur la Figure 8.22c. Il est intéressant de noter que dans ce cas, seuls trois trous sur les 160 initialement présents dans la plaque ont besoin d'être représentés pour atteindre l'erreur de tolérance sur la quantité d'intérêt fixée. Ainsi très peu de ressources de calculs sont nécessaires.



(a) Évolution de l'estimateur d'erreur et des indicateurs.



(b) Emplacement final de  $\Omega_L$  et  $\Omega_0$ , avec les maillages associés, à l'intérieur de la structure globale. (c) Champ de déformation  $\varepsilon_{xx}$  de la solution finale du couplage local-global.

FIGURE 8.22 – Évolution de la zone locale au cours des pas d'adaptation.

**Bilan** : Au cours de ce chapitre, nous avons mis en place la séparation des sources d'erreur et l'algorithme adaptatif sur plusieurs exemples. Plusieurs types de quantités d'intérêt ont été étudiés. La démarche adoptée a permis de définir la configuration du couplage en terme de position de la zone locale, de son raffinement et du nombre d'itérations de l'algorithme de couplage, qui est suffisant pour approximer la quantité d'intérêt choisie. Ainsi on a pu montrer que la zone locale avait besoin d'être placée uniquement dans certaines zones, et que l'algorithme de couplage n'avait pas besoin d'être mené à convergence pour décrire la quantité d'intérêt choisie. Néanmoins, nous avons pour le moment limité notre implémentation sur des cas linéaires. Comme précisé dans le chapitre 3, cette méthode n'est pas suffisante pour garantir les bornes d'erreurs, des techniques de type erreur en relation de comportement vont donc être utilisées dans le chapitre 9 pour traiter des cas linéaires et non-linéaires.

---

Vers une procédure d'adaptation basée sur l'erreur en relation de  
comportement

---

### Sommaire

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>9.1 Principe de l'erreur en relation de comportement pour un couplage non-intrusif</b> . . . . . | <b>104</b> |
| 9.1.1 Construction d'une famille de solutions approchées . . . . .                                  | 104        |
| 9.1.2 Estimation d'erreur basée sur l'ERC pour un couplage non-intrusif . . .                       | 105        |
| 9.1.3 Indicateurs d'erreur basés sur l'ERC et adaptation . . . . .                                  | 106        |
| 9.1.4 Modification de la procédure d'équilibrage avec un couplage non-intrusif                      | 108        |
| <b>9.2 Application de l'adaptation basée sur l'ERC</b> . . . . .                                    | <b>109</b> |
| 9.2.1 Comportement linéaire dans la zone locale . . . . .   | 109        |
| 9.2.2 Comportement non-linéaire dans la zone locale . . . . .                                       | 111        |

---

Dans ce chapitre, on exploite l'estimation d'erreur *a posteriori* basée sur l'erreur en relation de comportement dans le cadre des couplages non-intrusifs. Contrairement à l'approche basée sur les résidus, elle permet de déterminer des bornes d'erreurs garanties pour des modèles linéaires et non-linéaires. Les bases de cette méthode ont été mises en place dans un contexte général dans la partie 3.2.3, nous montrons ici les modifications de la définition de l'ERC dans le cas d'un couplage local-global non-intrusif et la séparation des sources d'erreur qui en découle. Cette technique est notamment illustrée sur un cas-test présentant de la non-linéarité locale.



## 9.1 Principe de l'erreur en relation de comportement pour un couplage non-intrusif

### 9.1.1 Construction d'une famille de solutions approchées

D'après l'approche de couplage non-intrusif (voir chapitre 2), et en utilisant les discrétisations des maillages  $\tau^H$  et  $\tau^h$ , une approximation continue du champ de déplacement local-global  $\mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)} \in \mathcal{V}$  est déterminée à chaque itération  $n$  du processus (et ainsi possible avant la convergence). Elle est construite comme suit :

$$\mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)} = \begin{cases} \mathbf{u}_L^{h(n)} & \text{dans } \Omega_L \\ \mathbf{u}_G^{H(n)} & \text{dans } \Omega_0 \end{cases} . \quad (9.1)$$

Cependant le champ de contrainte local-global  $\boldsymbol{\sigma}_{LG,D}^{hH(n)}$  correspondant à ce champ de déplacement défini ainsi :

$$\boldsymbol{\sigma}_{LG,D}^{hH(n)} = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_L^{h(n)} = \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_L^{h(n)}) & \text{dans } \Omega_L \\ \boldsymbol{\sigma}_G^{H(n)} = \mathcal{K}_0\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_G^{H(n)}) & \text{dans } \Omega_0 \end{cases} , \quad (9.2)$$

ne respecte pas l'équilibre au sens faible (avant la convergence) au niveau de l'interface  $\Gamma$ .

Alternativement, un champ de contrainte local-global  $\boldsymbol{\sigma}_{LG,N}^{hH(n)}$  faiblement équilibré au niveau de l'interface  $\Gamma$  peut être reconstruit. En effet, les formulations faibles de l'équilibre du problème global (2.14) à l'itération  $n$  et du problème local (2.10) à l'itération  $n-1$  peuvent aussi être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_G^{(n)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) - \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}_G^{(n-1)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^{(n-1)} \cdot \mathbf{v}_G \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V}, \\ \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}_L^{(n-1)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_L) &= \int_{\Omega_L} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_L + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^{(n-1)} \cdot \mathbf{v}_L \quad \forall \mathbf{v}_L \in \mathcal{V}_L. \end{aligned} \quad (9.3)$$

On réécrit l'équilibre faible global de la façon suivante :

$$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma}_G^{(n)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) + \int_{\Omega_L} (\boldsymbol{\sigma}_G^{(n)} - \boldsymbol{\sigma}_G^{(n-1)}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) = \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^{(n-1)} \cdot \mathbf{v}_G \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V}. \quad (9.4)$$

Ainsi, il apparaît le champ de contrainte équilibré  $\boldsymbol{\sigma}_{LG,N}^{hH(n)}$  défini tel que :

$$\boldsymbol{\sigma}_{LG,N}^{hH(n)} = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_L^{h(n-1)} + [\boldsymbol{\sigma}_G^{H(n)} - \boldsymbol{\sigma}_G^{H(n-1)}] & \text{dans } \Omega_L \\ \boldsymbol{\sigma}_G^{H(n)} & \text{dans } \Omega_0 \end{cases} . \quad (9.5)$$

Par contre, le champ de déplacement local-global associé :  $\mathbf{u}_{LG,N}^{hH(n)}$  défini ainsi :

$$\mathbf{u}_{LG,N}^{hH(n)} = \begin{cases} \mathbf{u}_L^{h(n-1)} + [\mathbf{u}_G^{H(n)} - \mathbf{u}_G^{H(n-1)}] & \text{dans } \Omega_L \\ \mathbf{u}_G^{H(n)} & \text{dans } \Omega_0 \end{cases} , \quad (9.6)$$

n'est quant à lui pas continu sur  $\Gamma$  (avant la convergence) si bien qu'il n'appartient pas à  $\mathcal{V}$ .

**Remarque 23** Dans la procédure de couplage intrusif décrite dans la Section 2.2.2, les champs solution local-global deviennent ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)} &= \begin{cases} \mathbf{u}_L^{h(n)} & \text{dans } \Omega_L \\ \mathbf{u}_G^{H(n)} & \text{dans } \Omega_0 \end{cases} ; & \boldsymbol{\sigma}_{LG,D}^{hH(n)} &= \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_L^{h(n)} & \text{dans } \Omega_L \\ \boldsymbol{\sigma}_G^{H(n)} & \text{dans } \Omega_0 \end{cases} ; \\ \mathbf{u}_{LG,N}^{hH(n)} &= \begin{cases} \mathbf{u}_L^{h(n-1)} & \text{dans } \Omega_L \\ \mathbf{u}_G^{H(n)} & \text{dans } \Omega_0 \end{cases} ; & \boldsymbol{\sigma}_{LG,N}^{hH(n)} &= \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_L^{h(n-1)} & \text{dans } \Omega_L \\ \boldsymbol{\sigma}_G^{H(n)} & \text{dans } \Omega_0 \end{cases} . \end{aligned} \quad (9.7)$$

Il faut noter que les indices  $D$  et  $N$  se réfèrent respectivement à "Dirichlet" et "Neumann". Cela est cohérent avec les notations utilisées en décomposition de domaine (type des quantités échangées à l'interface).

### 9.1.2 Estimation d'erreur basée sur l'ERC pour un couplage non-intrusif

Afin d'utiliser l'approche ERC à l'itération  $n$  de la procédure itérative locale-globale, une paire de champs admissibles doit être reconstruite à partir de la solution du couplage. La construction d'un champ de contrainte admissible pertinent  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{S}$ , qui détermine la pertinence de l'estimateur d'erreur  $E_{ERC}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}})$ , est un aspect technique clé de l'approche ERC. Afin de reconstruire un champ de contrainte parfaitement équilibré, différentes techniques ont été développées dans [4, 93, 95, 99, 100, 131, 154]. Il est important de noter que ce champ équilibré repose sur le post-traitement d'un champ qui vérifie l'équation d'équilibre au sens faible EF.

Tout d'abord, le champ de déplacement  $\mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)} \in \mathcal{V}$  peut être utilisé comme un champ de déplacement admissible. D'autre part, il est possible de reconstruire un champ de contrainte admissible  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,N}^{hH(n)} \in \mathcal{S}$  à partir du champ  $\boldsymbol{\sigma}_{LG,N}^{hH(n)} \notin \mathcal{S}$ . En effet :

- la discrétisation du problème global à l'itération  $n$  fournit un champ de contrainte global  $\boldsymbol{\sigma}_G^{H(n)}$  vérifiant l'équilibre EF suivant au sens faible :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_G^{H(n)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G^H) = \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G^H + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G^H - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^{h(n-1)} \cdot \mathbf{v}_G^H + \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}_G^{H(n-1)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G^H) \quad \forall \mathbf{v}_G^H \in \mathcal{V}^H. \quad (9.8)$$

En utilisant cette propriété ainsi que la procédure d'équilibrage, un champ de contrainte  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_G^{H(n)}$  vérifiant l'équilibre complet suivant :

$$\int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_G^{H(n)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) = \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^{h(n-1)} \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}_G^{H(n-1)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V}, \quad (9.9)$$

peut être reconstruit sur  $\Omega$  ;

- la discrétisation du problème global à l'itération  $n - 1$  fournit un champ de contrainte local  $\boldsymbol{\sigma}_L^{h(n-1)}$  vérifiant l'équilibre EF suivant au sens faible :

$$\int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}_L^{h(n-1)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_L^h) = \int_{\Omega_L} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_L^h + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^{h(n-1)} \cdot \mathbf{v}_L^h \quad \forall \mathbf{v}_L^h \in \mathcal{V}_L^h. \quad (9.10)$$

De la même manière que pour le champ global, un champ de contrainte  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_L^{h(n-1)}$  vérifiant l'équilibre complet suivant :

$$\int_{\Omega_L} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_L^{h(n-1)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_L) = \int_{\Omega_L} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_L + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^{h(n-1)} \cdot \mathbf{v}_L \quad \forall \mathbf{v}_L \in \mathcal{V}_L, \quad (9.11)$$

peut être reconstruit sur  $\Omega_L$ .

Ainsi le champ  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,N}^{hH(n)}$  défini tel que :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,N}^{hH(n)} = \begin{cases} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_L^{h(n-1)} + [\hat{\boldsymbol{\sigma}}_G^{H(n)} - \boldsymbol{\sigma}_G^{H(n-1)}] & \text{dans } \Omega_L \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_G^{H(n)} & \text{dans } \Omega_0 \end{cases}, \quad (9.12)$$

est statiquement admissible, c'est-à-dire :

$$\int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,N}^{hH(n)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (9.13)$$

Il est important de noter, une fois encore, que la construction du champ de contrainte admissible dans le cas d'un couplage non-intrusif peut être faite de façon indépendante dans chacun des codes dédiés aux problèmes local et global. Il faut simplement que les codes utilisés disposent d'une procédure d'équilibrage (basée sur la technique des flux hybrides).

En conséquence, en utilisant (3.17), on obtient la borne supérieure d'erreur garantie  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)}\|$  en norme énergétique :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)}\| \leq E_{ERC}(\mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,N}^{hH(n)}) = \eta_{g,ERC}^{tot}. \quad (9.14)$$

De manière similaire, en définissant le champ de contrainte admissible adjoint  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,N}^{hH(n)} \in \tilde{\mathcal{S}}$  à partir d'un champ adjoint approximé  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,N}^{hH(n)} \notin \tilde{\mathcal{S}}$ , on obtient de (3.23) :

$$|Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)}) - Q_{corr,2}| \leq \frac{1}{2} E_{ERC}(\mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,N}^{hH(n)}) \cdot E_{ERC}(\tilde{\mathbf{u}}_{LG,D}^{hH(n)}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,N}^{hH(n)}) = \eta_{Q,ERC}^{tot}, \quad (9.15)$$

si bien que des bornes garanties sur  $Q(\mathbf{u})$  (ou  $Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)})$ ) sont obtenues.

Les estimateurs  $\eta_{g,ERC}^{tot}$  et  $\eta_{Q,ERC}^{tot}$  définis respectivement dans (9.14) et (9.15) sont garantis indépendamment de la convergence du solveur itératif local-global. Ils comprennent l'intégralité des sources d'erreur, mais ne permettent pas, sous cette forme, de séparer les différentes sources d'erreur.

**Remarque 24** *A cause de la définition de  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,N}^{hH(n)}$  dans laquelle sont mixées des quantités venant des problèmes local et global, la procédure non-intrusive ne peut pas être utilisée pour calculer les estimateurs d'erreur  $\eta_{g,ERC}^{tot}$  et  $\eta_{Q,ERC}^{tot}$  indépendamment dans le code local ou global. Cela aurait été possible avec un couplage intrusif.*

### 9.1.3 Indicateurs d'erreur basés sur l'ERC et adaptation

Nous définissons le champ de contrainte  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,D}^{hH(n)} \notin \mathcal{S}$  obtenu par post-traitement de  $\boldsymbol{\sigma}_{LG,D}^{hH(n)}$  avec des techniques d'équilibrage. Il vérifie l'équilibre sur  $\Omega_0$  et  $\Omega_L$ , mais pas sur l'interface de couplage  $\Gamma$ . Il est construit comme suit :

- nous utilisons le champ de contrainte  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_G^H$  vérifiant l'équilibre complet suivant :

$$\int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_G^H : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) = \int_{\Omega_0} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}_G - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^{h(n-1)} \cdot \mathbf{v}_G + \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}_G^{H(n-1)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_G) \quad \forall \mathbf{v}_G \in \mathcal{V}; \quad (9.16)$$

- la discrétisation du problème local à l'itération  $n$  fournit un champ de contrainte local  $\boldsymbol{\sigma}_L^{h(n)}$  vérifiant l'équilibre EF suivant au sens faible :

$$\int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}_L^{h(n)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_L^h) = \int_{\Omega_L} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_L^h + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^{h(n)} \cdot \mathbf{v}_L^h \quad \forall \mathbf{v}_L^h \in \mathcal{V}_L^h; \quad (9.17)$$

En utilisant cette propriété ainsi que la procédure d'équilibrage, un champ de contrainte  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_L^{h(n)}$  vérifiant l'équilibre complet suivant :

$$\int_{\Omega_L} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_L^{h(n)} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_L) = \int_{\Omega_L} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_L + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^{h(n)} \cdot \mathbf{v}_L \quad \forall \mathbf{v}_L \in \mathcal{V}_L, \quad (9.18)$$

peut être reconstruit sur  $\Omega_L$ .

Ainsi, le champ  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,D}^{hH(n)}$  est défini tel que :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,D}^{hH(n)} = \begin{cases} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_L^{h(n)} & \text{dans } \Omega_L \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_G^{H(n)} & \text{dans } \Omega_0 \end{cases}. \quad (9.19)$$

A partir de ce nouveau champ de contrainte  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,D}^{hH(n)}$ , l'estimateur d'erreur global  $\eta_{g,ERC}^{tot}$  se réécrit ainsi :

$$E_{ERC}(\mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,D}^{hH(n)}) = \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,D}^{hH(n)} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)})\|_{\sigma} = \|(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,D}^{hH(n)} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,D}^{hH(n)}) + (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,D}^{hH(n)} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)}))\|_{\sigma}. \quad (9.20)$$

Notons que :

- $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,N}^{hH(n)} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,D}^{hH(n)})|_{\Omega_0} = 0$
- $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,D}^{hH(n)} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)}))|_{\Omega_L} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_L^{h(n)} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_L^{h(n)})$  (= 0 quand il n'y a pas d'erreur de discrétisation due au maillage  $\tau^h$ )
- $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,D}^{hH(n)} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)}))|_{\Omega_0} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_G^{H(n)} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_G^{H(n)})$  (= 0 quand il n'y a pas d'erreur de modèle sur  $\Omega_0$ )

Ainsi, on obtient :

$$\eta_{g,ERC}^{tot} \leq \eta_{g,ERC}^{conv} + \eta_{g,ERC}^{dis} + \eta_{g,ERC}^{mod}, \quad (9.21)$$

avec

$$\begin{aligned} \eta_{g,ERC}^{conv} &= \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,N}^{hH(n)} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,D}^{hH(n)}\|_{\sigma|\Omega_L} = \|[\hat{\boldsymbol{\sigma}}_L^{h(n-1)} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_G^{H(n-1)}] - [\hat{\boldsymbol{\sigma}}_L^{h(n)} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_G^{H(n)}]\|_{\sigma|\Omega_L} \\ \eta_{g,ERC}^{dis} &= \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_L^{h(n)} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_L^{h(n)})\|_{\sigma|\Omega_L} \\ \eta_{g,ERC}^{mod} &= \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_G^{H(n)} - \mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_G^{H(n)})\|_{\sigma|\Omega_0} \end{aligned}. \quad (9.22)$$

Les indicateurs sont ainsi définis :

$$\eta_{g,ERC}^{conv} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad ; \quad \eta_{g,ERC}^{dis} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad ; \quad \eta_{g,ERC}^{mod} \xrightarrow{\Omega_L \rightarrow \Omega} 0. \quad (9.23)$$

Une séparation similaire est utilisée pour l'estimation d'erreur sur une quantité d'intérêt permettant de déterminer  $\eta_{Q,ERC}^{conv}$ ,  $\eta_{Q,ERC}^{dis}$ , et  $\eta_{Q,ERC}^{mod}$ . Les indicateurs d'erreur définis dans (9.22) peuvent aussi être interprétés comme suit :

- l'indicateur d'erreur de convergence  $\eta_{g,ERC}^{conv}$  quantifie le changement entre deux itérations successives du champ de contrainte dans  $\Omega_L$  ;
- l'indicateur d'erreur de discrétisation  $\eta_{g,ERC}^{dis}$  se ramène à définir l'admissibilité et la fonctionnelle ERC à partir d'un modèle de référence intermédiaire avec une discrétisation grossière dans  $\Omega$ , ayant une solution continue dans  $\Omega_L$  ;
- l'indicateur d'erreur de modèle  $\eta_{g,ERC}^{mod}$  se ramène à définir l'admissibilité et la fonctionnelle ERC à partir d'un modèle de référence intermédiaire haute-fidélité sur tout le domaine  $\Omega$  et étant discrétisé avec  $\tau^h$  dans  $\Omega_L$ .

**Remarque 25** Les indicateurs  $\eta_{g,ERC}^{dis}$  et  $\eta_{g,ERC}^{mod}$  peuvent être calculés indépendamment dans les codes des problèmes local ou global.

**Remarque 26** *La séparation des erreurs et la définition d'indicateurs d'erreur utilisant l'ERC se basent sur une approche différente de celle présentée dans [139–141] dans un contexte de décomposition de domaine et inspirée de [160]. Dans ces travaux, une source d'erreur algébrique est séparée des autres sources par l'introduction d'un champ de déplacement discontinu  $\mathbf{u}_N^{(n)}$  associé à un champ de contrainte équilibré  $\boldsymbol{\sigma}_N$ . Cela conduit à une borne sous la forme  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N^{(n)}\|_{brok} \leq C + E_{ERC}(\mathbf{u}_N^{(n)}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_N^{(n)})$  où le terme  $C$  correspond à l'erreur algébrique.*

Un algorithme glouton d'adaptation (similaire à celui défini dans 7.2.3) peut être mis en place afin de calculer (à chaque itération du solveur local-global) l'estimateur et les indicateurs d'erreur. Si on s'intéresse par exemple au contrôle d'une erreur en norme énergétique (sous une certaine tolérance d'erreur  $\gamma_{tol}$ ), et après initialisation de  $\Omega_L$  et  $\tau_h$ , l'algorithme peut s'écrire :

0. Fixer  $n = 1$  ;
1. Résoudre le problème primal de substitution pour obtenir  $\mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)}$  ;
2. Reconstruire le champ de contrainte admissible  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,N}^{hH(n)}$  et calculer l'estimateur  $\eta_{g,ERC}^{tot}$  ;
3. Si  $\eta_{g,ERC}^{tot} / \|\mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)}\| \leq \gamma_{tol}$  alors STOP. Sinon aller à l'étape 4 ;
4. Reconstruire le champ de contrainte  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,D}^{hH(n)}$  et calculer les indicateurs  $\eta_{g,ERC}^{conv}$ ,  $\eta_{g,ERC}^{dis}$ , et  $\eta_{g,ERC}^{mod}$  :
  - si  $\max(\eta_{g,ERC}^{conv}, \eta_{g,ERC}^{dis}, \eta_{g,ERC}^{mod}) = \eta_{g,ERC}^{conv}$ , augmenter  $n + 1 \rightarrow n$  et retourner à l'étape 1 ;
  - si  $\max(\eta_{g,ERC}^{conv}, \eta_{g,ERC}^{dis}, \eta_{g,ERC}^{mod}) = \eta_{g,ERC}^{dis}$ , décomposer  $\eta_{g,ERC}^{dis}$  et raffiner localement  $\tau^h$  afin d'atteindre  $\eta_{g,ERC}^{dis} / \|\mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)}\| \leq \gamma_{tol}/3$ , puis retourner à l'étape 0 ;
  - si  $\max(\eta_{g,ERC}^{conv}, \eta_{g,ERC}^{dis}, \eta_{g,ERC}^{mod}) = \eta_{g,ERC}^{mod}$ , décomposer  $\eta_{g,ERC}^{mod}$  et agrandir localement  $\Omega_L$  pour atteindre  $\eta_{g,ERC}^{mod} / \|\mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)}\| \leq \gamma_{tol}/3$ , puis retourner à l'étape 0.

#### 9.1.4 Modification de la procédure d'équilibrage avec un couplage non-intrusif

Dans ce chapitre, nous utilisons une méthode quasi-explicite pour déterminer les champs de contrainte admissibles dite technique d'équilibrage par élément (EET) introduite dans [95]. Elle se décompose en 2 étapes :

- la construction des densités d'efforts  $\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{h}}$  en équilibre avec le chargement imposé sur chacun des éléments. L'utilisation des efforts imposés et d'une condition de prolongement entre le champ admissible et le champ EF conduit à la résolution de plusieurs problèmes locaux associés à chaque nœud (voir Figure 9.1a), et permet de définir de façon quasi-explicite les densités  $\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{h}}$  ;
- le calcul, au niveau de l'élément, d'un champ de contrainte admissible en équilibre avec les densités  $\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{h}}$  construites et les charges internes (voir Figure 9.1b).

La procédure d'équilibrage actuellement disponible ne permet de prendre en compte que des efforts sur le bord de la structure. Or dans le cas d'un couplage local-global non-intrusif, l'effort imposé s'écrit sous la forme  $\mathbf{F}_0 - \mathbb{C}_G^T \boldsymbol{\Lambda}^{(n-1)} + \mathbb{K}_{0L} \mathbf{U}_G^{(n-1)}$  dont les efforts d'interface  $\boldsymbol{\Lambda}^{(n-1)}$  sont définis à l'intérieur de la géométrie globale. La stratégie choisie dans ce cas pour obtenir le champ de contrainte global équilibré est la suivante :

- sur le maillage local, on résout un problème élastique ayant pour second membre  $\mathbf{F} = \mathbb{C}_G^T \boldsymbol{\Lambda}^{(n-1)} + \mathbb{K}_{0L} \mathbf{U}_G^{(n-1)}$ . On obtient ainsi  $\sigma_L^{h,0}$  ;
- sur le maillage global, on résout un problème élastique ayant pour second membre l'intégralité du second membre soit  $\mathbf{F}_0 - \mathbb{C}_G^T \boldsymbol{\Lambda}^{(n-1)} + \mathbb{K}_{0L} \mathbf{U}_G^{(n-1)}$ , on obtient ainsi  $\sigma_G$  ;

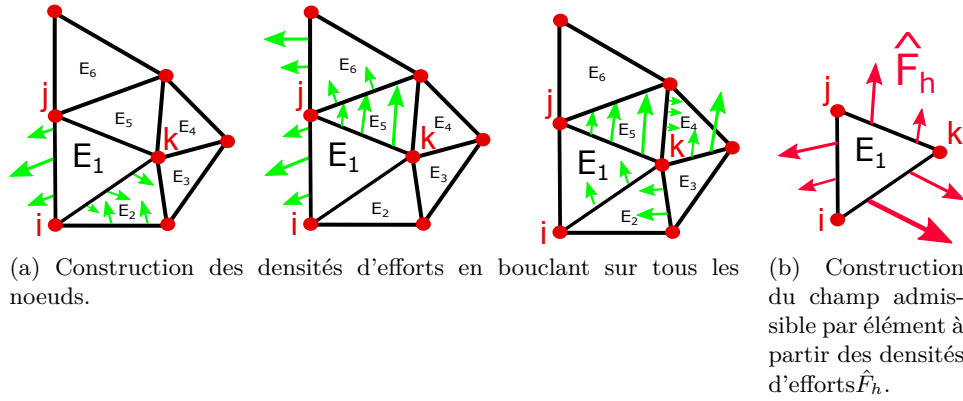


FIGURE 9.1 – Principe de l'équilibrage EET.

- on crée une contrainte intermédiaire :  $\bar{\sigma}^h = \sigma_G - \sigma_L^{h,0}$ , qui aura donc uniquement un effort  $\mathbf{F}_0$  non nul sur le bord de la structure, la procédure d'équilibrage peut ainsi être utilisée afin d'obtenir  $\hat{\sigma}^h$ . Le champ de contrainte global équilibré devient donc :

$$\hat{\sigma}_G = \hat{\sigma}^h + \sigma_L^{h,0}$$

## 9.2 Application de l'adaptation basée sur l'ERC

Afin d'initier l'application de l'ERC, nous nous intéressons à une structure en forme de L. Le maillage de la zone globale est un maillage triangulaire, initialement constitué de quadrangles à 4 nœuds qui sont divisés afin d'obtenir un maillage d'éléments triangulaires, visible sur la Figure 9.2b, pour lesquels les routines d'équilibrage de contrainte sont déjà disponibles. La zone locale est initialement choisie comme un assemblage de 3 patchs globaux (quadrangulaires) comme indiqué sur la Figure 9.2c. Dans cette zone locale, un maillage triangulaire est défini via le mailleur GMSH, il est visible sur la Figure 9.2d. Ce maillage est défini de façon à obtenir la compatibilité géométrique sur l'interface  $\Gamma$  avec le maillage global.

### 9.2.1 Comportement linéaire dans la zone locale

Le comportement défini dans les zones locale et globale est élastique de module de Young  $E = 1$  et  $\nu = 0,3$ . L'effort  $F$  est égal à 10. Les modèles utilisés étant identiques, l'erreur est due à la différence entre les maillages des deux domaines et à l'erreur de convergence.

Sur la Figure 9.3, les différents champs de contrainte admissibles dans le domaine local sont donnés dans le cas où la zone locale est celle présentée sur la Figure 9.2. La visualisation des contraintes est donnée dans le cas où l'algorithme de couplage global-local est à convergence. Les contraintes dans le domaine global sont données sur la Figure 9.4, la procédure décrite dans 9.1.4 a été utilisée pour déterminer le champ admissible global.

Les indicateurs d'erreur globaux basés sur la fonctionnelle ERC (voir section 9.1.3) ont été calculés et une procédure d'adaptation a été mise en place. Dans le cas où l'erreur prédominante vient du modèle, la zone locale est élargie. L'erreur de modèle est évaluée élément par élément et permet d'ajouter uniquement les éléments du domaine global qui impactent le plus l'erreur.

L'évolution des différentes sources d'erreur, non normalisées, est donnée sur la Figure 9.5a. Celle de l'erreur globale relative est donnée sur la Figure 9.5b. On observe cinq adaptations engendrant l'élargissement de la zone locale. Deux itérations supplémentaires de l'algorithme de couplage sont faites de façon à atteindre  $n = 3$ . La discrétisation n'a pas d'effet prédominant

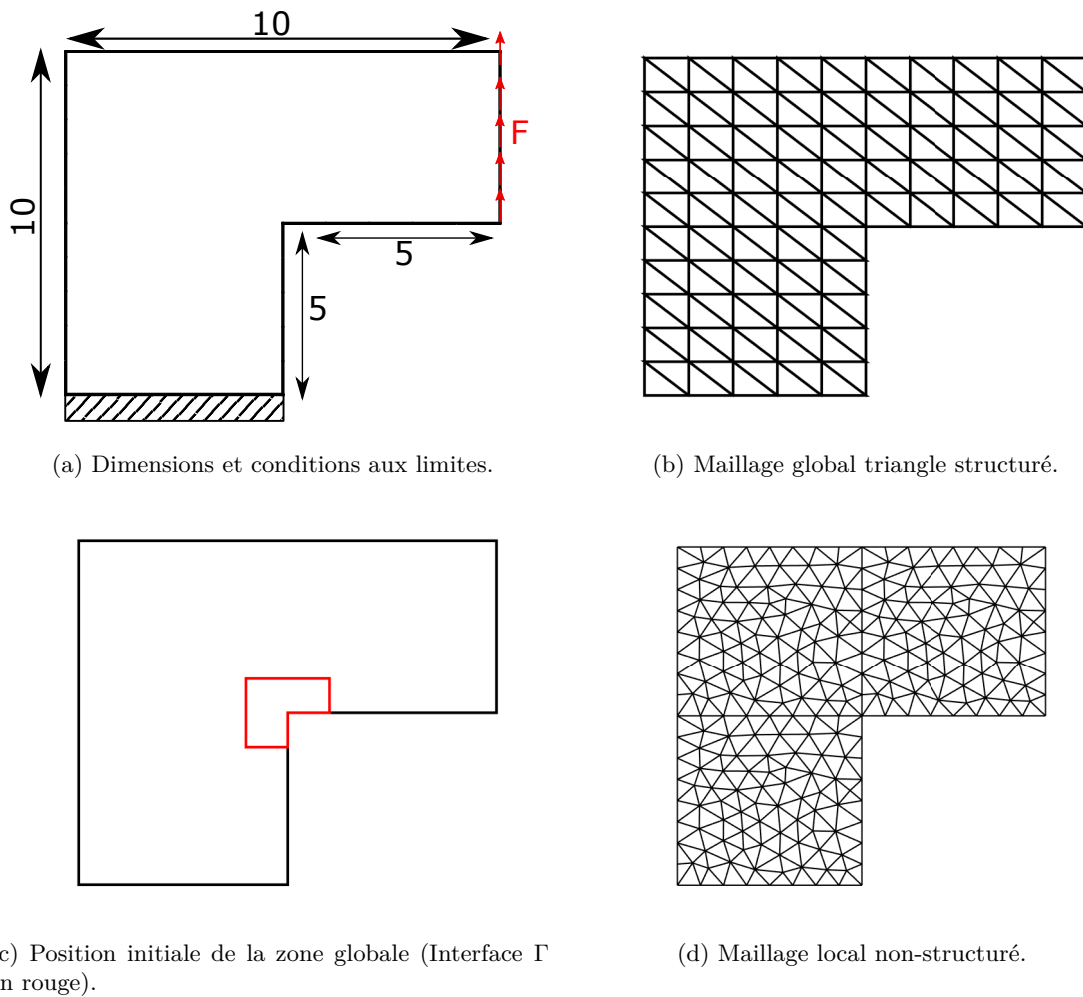


FIGURE 9.2 – Maillages et positions des zones globales et locales sur une structure en L.

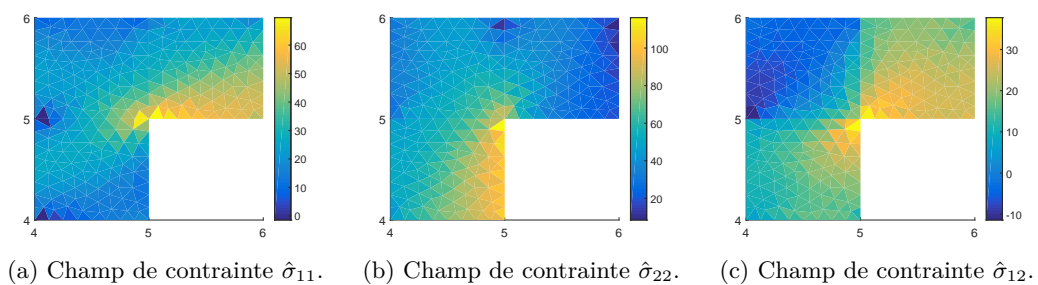


FIGURE 9.3 – Composante du champs de contrainte admissible  $\hat{\sigma}_L$  dans le domaine local initialement composé de 3 éléments.

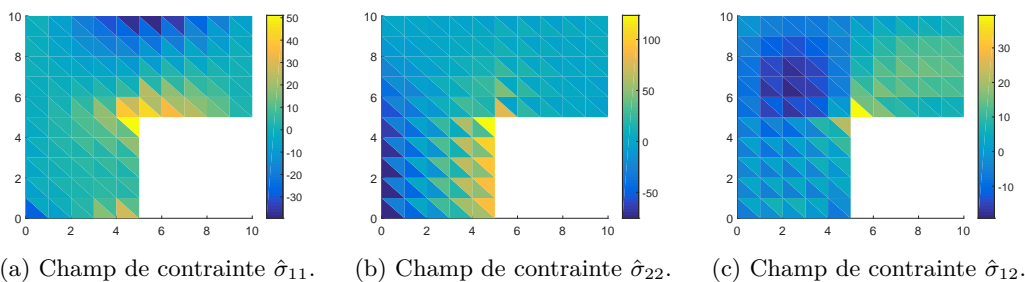
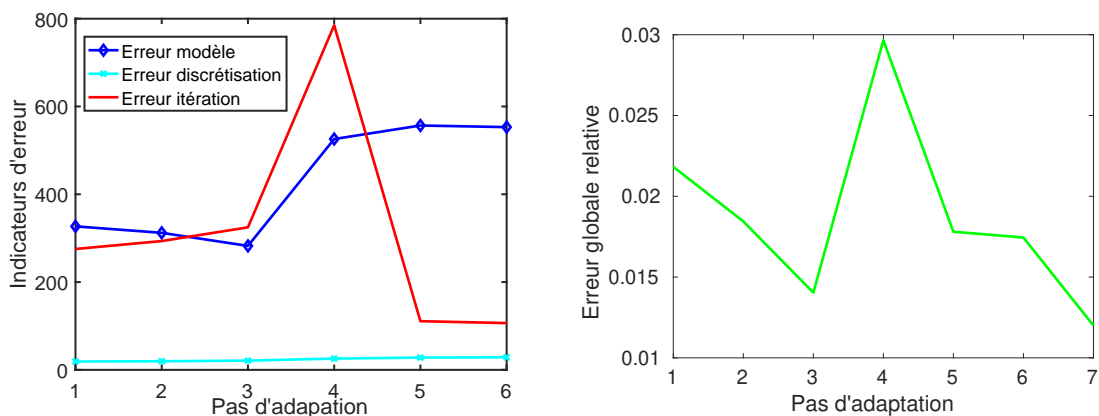
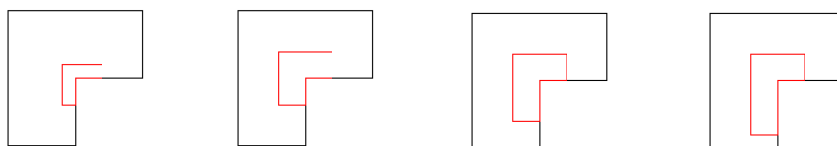


FIGURE 9.4 – Composantes du champ de contrainte admissible  $\hat{\sigma}_G$  dans le domaine global.

sur l'erreur. L'erreur globale (voir Figure 9.5b) varie peu au cours de l'adaptation et est faible, on a donc très peu d'erreur dans ce cas ce qui se comprend car les modèles sont très similaires.



(a) Évolution des différentes sources d'erreur en fonction du pas d'adaptation. (b) Évolution de l'erreur globale en fonction du pas d'adaptation.



(c) Evolution de la zone locale.

FIGURE 9.5 – Résultat de l'adaptation sur un problème linéaire avec l'ERC. On observe cinq adaptations de la taille de la zone locale et deux itérations supplémentaires de l'algorithme de couplage. La discrétisation n'a pas d'effet prédominant sur l'erreur.

### 9.2.2 Comportement non-linéaire dans la zone locale

Dans ce cas, nous avons un modèle initial élasto-plastique basé sur le modèle de Prandtl-Reuss. Ce comportement est conservé uniquement dans une zone près de l'angle, tandis que le modèle est remplacé par un modèle élastique autre part afin de définir notre problème de couplage. Les potentiels servant à définir la fonctionnelle ERC dans le cas non-linéaire sont donnés en Annexe 9.2.2. Les champs de contrainte admissibles dans la zone locale ainsi que la plasticité présente dans cette zone sont donnés sur la Figure 9.6. Les champs de contrainte admissibles dans la zone locale sont quant à eux donnés sur la Figure 9.7.



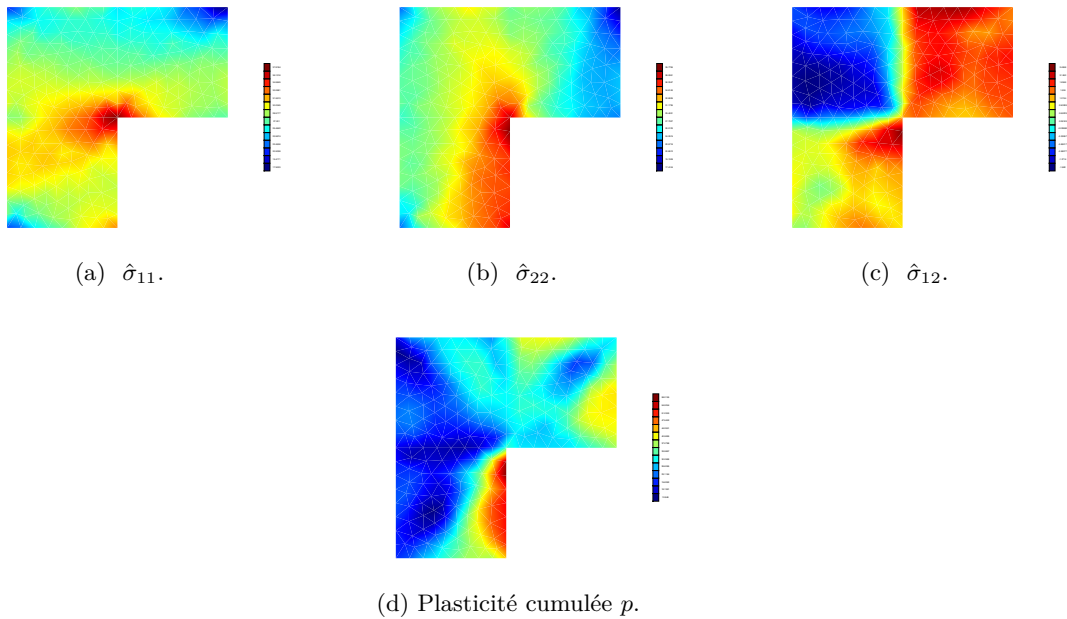


FIGURE 9.6 – Composantes du Champ de contrainte admissible  $\hat{\sigma}_L$  dans la zone locale et plasticité cumulée  $p$  dans cette zone.

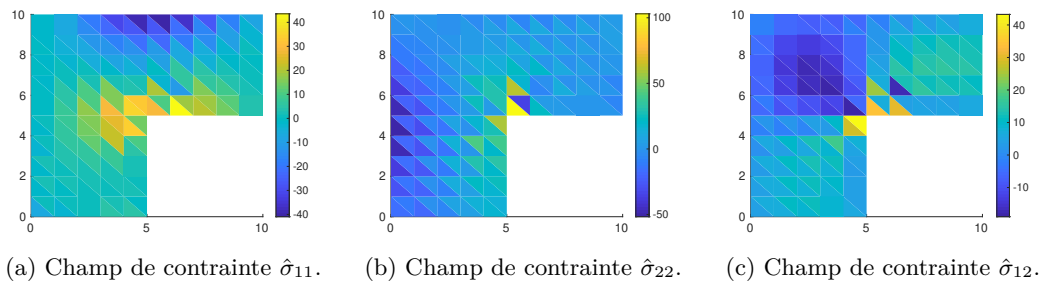


FIGURE 9.7 – Composantes du champ de contrainte admissible  $\hat{\sigma}_G$  dans le domaine global.

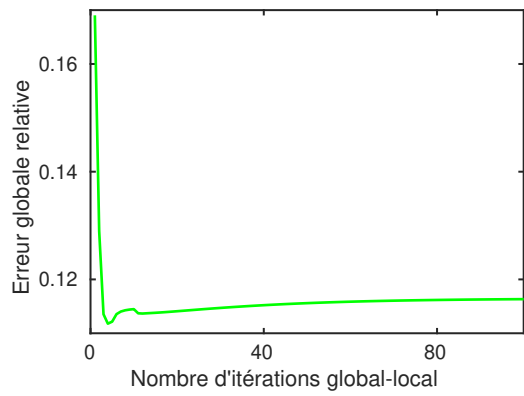
Pour le résidu sur les lois d'évolution, nous utilisons les potentiels donnés en annexe 9.2.2. Il en résulte donc la valeur de l'ERC dans ce cas non-linéaire :

$$\eta_{g,ERC}^{tot} = \sqrt{E_{ERC}^2(\mathbf{u}_{LG,D}^{hH(n)}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{LG,N}^{hH(n)}) + R_0 \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p\|}. \quad (9.24)$$

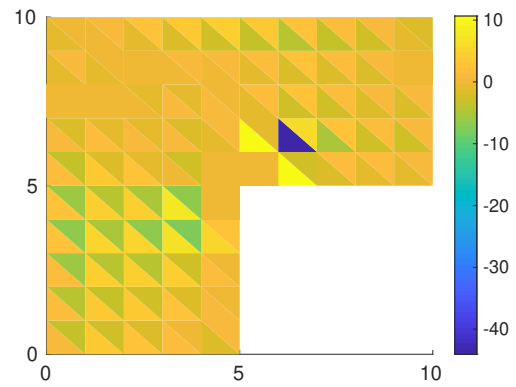
Afin d'initier, l'adaptation dans le cas non-linéaire seule cette erreur globale est déterminée. La séparation des différentes sources d'erreur se ferait en appliquant les définitions des indicateurs d'erreur en linéaire avec les potentiels quadratiques choisis. La procédure d'équilibrage des champs se fait de façon identique au cas linéaire, avec interpolation entre les pas de chargement.

On trace donc sur la Figure 9.8a l'évolution de l'erreur globale en fonction des itérations de l'algorithme de couplage global-local. Le niveau d'erreur est ici plus élevé, il débute à 20%. L'erreur globale diminue bien au fur et à mesure des itérations de l'algorithme mais stagne rapidement vers une valeur. On peut ainsi intuitivement que la source d'erreur majoritaire ne provient plus de la convergence mais du modèle, en particulier du positionnement de la zone locale. Ainsi les outils ERC permettent d'arrêter d'itérer inutilement après une dizaine d'itérations. La répartition spatiale de l'erreur globale, au bout de 100 itérations, est donnée sur la Figure 9.8b

et permet de mettre en évidence deux éléments hors de la zone locale où l'erreur est concentrée, il serait donc pertinent de rajouter ces deux éléments macro dans la zone locale.



(a) Évolution de l'erreur globale ERC en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de couplage global-local non-linéaire.



(b) Répartition spatiale de l'erreur globale.

FIGURE 9.8 – Évolution et répartition de l'erreur globale.

**Bilan** : Dans ce chapitre, nous avons mis en place l'estimation d'erreur basée sur de l'erreur en relation de comportement qui permet d'obtenir des bornes garanties en linéaire et non-linéaire. Les différentes sources d'erreurs (modèle, convergence et discrétisation) peuvent aussi être séparées en utilisant l'ERC. Un algorithme adaptatif est donc créé. Un exemple de séparation de sources d'erreur basée sur l'ERC pour un problème linéaire sur une structure en L-Shape a permis de mettre en place cet algorithme adaptatif. Dans ce cas l'ERC était évaluée de façon globale, l'extension à l'ERC sur des quantités d'intérêt est possible. La théorie et un premier exemple permettant d'utiliser l'ERC sur des couplages avec non-linéarité ont été donnés et on mis en évidence l'utilisation des outils ERC pour stopper les itérations inutiles de l'algorithme de couplage.

Au cours de ces travaux de thèse, nous avons développé une nouvelle procédure permettant de fortement simplifier l'implémentation de l'AIG dans un environnement EF existant et bien connu. Cela a pour but d'élargir l'utilisation de l'AIG pour des applications industrielles. Cette stratégie d'implémentation est pertinente grâce à son faible niveau d'intrusivité ; en effet aucune modification n'est apportée aux routines classiques EF. En d'autres termes, l'intégralité du code EF, pouvant contenir des modèles complexes, non-linéaires et ayant des routines optimisées, peut être vu comme une boîte noire. Le code commercial doit pour cela respecter les deux critères suivants pour permettre cette implémentation : être capable de fournir la matrice de rigidité tangente et le second membre ; posséder un élément quadratique complet (soit un élément quadratique à 9 noeuds en 2D ou un élément cubique à 27 noeuds en 3D). Une fois ces conditions remplies il est possible de résoudre un problème isogéométrique, via un script externe, à partir du système EF. Ainsi, cette démarche s'inscrit dans la famille des méthodes non-intrusives visant à transférer des technologies avancées issues de la recherche dans des outils accessibles aux ingénieurs telles que celles développées ces dernières années [18, 24, 25, 38, 53, 63, 70, 123].

L'aspect clé de notre implémentation est de considérer le lien entre l'AIG et la MEF d'un point de vue global. En partant de la formulation globale de l'opération d'extraction de Lagrange [148], il est possible de réaliser une analyse isogéométrique basée sur des B-Splines dans un vrai code industriel EF, ce qui constitue dans un premier temps un progrès du point de vue pratique. Par ailleurs, afin d'atteindre le même niveau de non-intrusivité dans le cas de fonctions rationnelles, un lien global approximé a été développé entre les polynômes classiques de Lagrange et les fonctions NURBS. Un opérateur supplémentaire, permettant de prendre en compte les poids des points de contrôle Lagrange rationnels a ainsi été construit et offre la possibilité de réaliser des analyses isogéométriques basées sur des fonctions NURBS de façon non-intrusive.

La performance de la méthode a tout d'abord été mise en évidence sur des cas 2D et 3D élastiques dans le code industriel EF : *Code\_Aster* développé par EDF R&D [169] et a permis de réaliser des calculs isogéométriques à partir de ce code. Puis la méthode a été implémentée dans le cas non-linéaire, plus précisément une simulation isogéométrique d'un problème non-linéaire élasto-plastique a été réalisée dans *Code\_Aster*. Il est important de mettre en évidence le fait qu'aucune routine non-linéaire intrinsèque au code n'est modifiée. Seuls des produits matrices-matrices ou matrices-vecteurs sont réalisés à chaque itération du solveur non-linéaire. Cela permet de lier le système tangent isogéométrique et le résidu non-linéaire isogéométrique avec leurs équivalents EF. Les résultats de ces exemples et en particulier le dernier montrent les opportunités qu'offrent les fonctions de haut niveau de continuité dans des applications industrielles.

Par ailleurs, nous avons montré que grâce à l'opérateur liant les polynômes de Lagrange aux NURBS, le couplage multi-échelles local-global est facilité en définissant de façon simple et automatique les opérateurs de Mortar qui permettent le transfert d'information à l'interface des modèles. Un exemple de couplage entre un problème global IG avec un problème local EF comportant des détails géométriques complexes a été développé et permet d'augmenter les

possibilités d'application de la méthode.

Ainsi, les travaux menés dans cette partie de la thèse contribuent à réduire l'écart entre l'AIG et la MEF standard. Enfin, le pont algébrique global des fonctions polynomiales Lagrange aux fonctions (potentiellement rationnelles) isogéométriques permet une nouvelle compréhension du lien entre les deux méthodes que sont l'AIG et la MEF. En effet, l'AIG peut ainsi être interprétée comme la projection de l'analyse EF sur une base réduite spécifique plus régulière.

Ensuite, afin de certifier les couplages local-global mis en place, nous avons proposé une procédure permettant de contrôler l'exactitude d'une stratégie de couplage vis-à-vis d'une quantité d'intérêt afin de calculer juste au juste coût. Dans un premier temps, cette procédure se base sur des fonctionnelles de résidus et des techniques basées sur des problèmes adjoints. Elle permet de calculer exactement avec un coût de calcul adéquate et apparaît ainsi comme un outil intéressant pour des applications pratiques. Un estimateur d'erreur entièrement calculable a été défini ainsi que des indicateurs d'erreur qui sont utilisés dans une procédure d'adaptation. Ces indicateurs permettent de séparer les sources d'erreur entre l'itération (c'est à dire défaut de convergence à l'interface de couplage), le modèle, et la discrétisation. Le solveur itératif est, par exemple, souvent arrêté avant que la convergence basée usuellement sur l'équilibre d'interface soit atteint.

Cette stratégie d'estimation d'erreur est compatible avec le point de vue non-intrusif du couplage. En effet, elle peut être réalisée en couplant deux codes différents et les analyses locales pour déterminer les sources erreur (en ajoutant un patch local dans la résolution du problème adjoint) peuvent donc bénéficier de la démarche non-intrusive. Par conséquent, la solution du problème adjoint ne nécessite pas de ressources de calcul exorbitantes mais est plutôt obtenue en définissant des problèmes individuels (qui diffèrent en terme de position de la zone locale) qui peuvent être résolus en parallèle. La procédure d'adaptation peut être étendue dans le cas de problèmes non-linéaires en utilisant des opérateurs linéarisés bien que dans ce cas l'estimateur et les indicateurs d'erreur ne sont pas complètement robustes.

C'est pourquoi une stratégie d'estimation d'erreur basée sur l'ERC a été proposée à la fin de cette thèse. Elle permet d'obtenir des estimateurs d'erreurs garantis même pour des problèmes non-linéaires.

Plusieurs aspects relatifs aux travaux réalisés durant cette thèse mériteraient d'être étudiés à l'avenir :

- En poussant plus loin l'interprétation de l'AIG comme une projection sur une base réduite de la MEF, la procédure d'implémentation peut être intéressante dans un contexte de réduction de modèle [39, 40, 89, 136]. Cela permettrait d'implémenter n'importe quel modèle réduit de façon non-intrusive dans un code EF standard ;
- L'implémentation de l'AIG dans un code industriel EF durant la thèse s'est limitée à l'utilisation de *Code\_Aster* grâce à sa facilité de prise en main. Il peut être envisagé de créer une architecture de code complète industrielle afin de pouvoir réaliser cette implémentation dans tous les codes industriels disposant des conditions requises pour notre méthode ;
- La mise en place d'un couplage local-global entre un modèle global IG et un modèle local EF grâce à l'opérateur créé au cours de cette thèse pourrait être étendu, vu que tous les outils nécessaires ont été développés, à des cas de couplage plus complexes, pour encore plus mettre en évidence l'intérêt d'utiliser la méthode IG pour le problème global afin de réduire le nombre de degrés de libertés dans cette zone ;
- Dans les procédures d'adaptation, le critère d'arrêt a toujours été choisi de façon arbitraire. Des travaux supplémentaires pourraient être menés pour corrélérer ce critère d'arrêt avec le critère d'arrêt classique du solveur itératif (généralement le résidu d'équilibre)

- comme dans [52];
- Les techniques d'adaptation basées sur de l'ERC ont été initiées sur des cas simples linéaire et non-linéaire d'un point de vue global, elles pourraient être étendues à l'étude sur une quantité d'intérêt;
  - L'erreur de l'algorithme itératif utilisé pour résoudre le problème local non-linéaire pourrait aussi être prise en compte dans les différentes sources d'erreur;
  - Une autre étude intéressante qui pourrait être menée est l'évaluation de l'influence de l'erreur d'interface (par exemple l'approximation venant du transfert de données entre des maillages incompatibles) sur des sorties d'intérêt.
  - La procédure globale mise en place, avec couplage AIG-MEF a pour vocation à être utilisée dans un contexte industriel (bureau d'étude) pour l'analyse fine en conception, l'optimisation... Il peut donc être envisageable de mettre en place une structure de code adapté à ce contexte.

---

## Fonctionnelle ERC en non-linéaire

---

Après la définition en linéaire rappelée dans le chapitre 3, des extensions de l'ERC dans le cas non-linéaires ont été développées dans la littérature [96, 98].

La méthode repose sur la formulation du comportement non-linéaire en équations d'état et lois d'évolution [64, 72]. En utilisant le cadre thermodynamique, on introduit le potentiel d'énergie libre de Helmholtz  $\psi$  :

$$\psi := \psi(T, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}_p, \mathbf{V}) = \psi(T, \boldsymbol{\epsilon}_e, \mathbf{V}), \quad (25)$$

qui dépend de variables d'états, c'est à dire des variables observables (température  $T$  et déformation  $\boldsymbol{\epsilon}$ ) et des variables internes : (i) la partie inélastique de la déformation  $\boldsymbol{\epsilon}_p$ , telle que  $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_e + \boldsymbol{\epsilon}_p$ ; (ii) des variables internes supplémentaires  $V_i$  (regroupées dans le vecteur  $\mathbf{V}$ ). Les deux premiers principes de la thermodynamique conduisent à l'inégalité de Clausius-Duhem (26) :

$$\left( \boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_e} \right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e - \rho \left( s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \sum_i \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_i} \circ \dot{V}_i + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0, \quad (26)$$

où  $\rho$  est la densité,  $s$  l'entropie, et  $\mathbf{q}$  le flux thermique. Par conséquent, en considérant les transformations non-dissipatives, on aboutit à :

$$\boldsymbol{\sigma} = \partial_{\boldsymbol{\epsilon}_e} \rho \psi \quad ; \quad s = -\partial_T \psi. \quad (27)$$

De façon similaire, un chargement thermodynamique  $Y_i$  (regroupé dans le vecteur  $\mathbf{Y}$ ) associé aux variables internes  $V_i$  est introduit :

$$Y_i = \partial_{V_i} \psi, \quad (28)$$

si bien que (26) peut être reformulée de façon condensée :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p - \mathbf{Y} \cdot \dot{\mathbf{V}} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0. \quad (29)$$

Notons que (27) et (28) constituent les équations d'état du comportement matériau.

**Remarque 27** *Par dualité, il est possible de définir les potentiels d'énergie libre de Gibbs, notés  $\psi^*$  comme la transformé de Legendre-Fenchel de l'énergie libre de Helmholtz (25) :*

$$\psi^*(T, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}) = \sup_{\boldsymbol{\epsilon}_e, \mathbf{V}} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}_e + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{V} - \psi(T, \boldsymbol{\epsilon}_e, \mathbf{V})), \quad (30)$$

si bien que  $\psi(T, \boldsymbol{\epsilon}_e, \mathbf{V}) + \psi^*(T, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}_e - \mathbf{Y} \cdot \mathbf{V} \geq 0$ .

En utilisant une analyse de la convexité [114] les équations d'état peuvent être réécrites :

$$\psi(T, \boldsymbol{\epsilon}_e, \mathbf{V}) + \psi^*(T, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}) - \langle (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}), (\boldsymbol{\epsilon}_e, \mathbf{V}) \rangle = 0, \quad (31)$$

en introduisant  $\langle (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}), (\boldsymbol{\epsilon}_e, \mathbf{V}) \rangle = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}_e + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{V}$ .

L'inégalité (29) reflète l'évolution dissipative du phénomène associé au comportement non-linéaire. En particulier, cela impose une condition sur le couple  $((\boldsymbol{\epsilon}_p, \mathbf{V}), (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}))$  qui garantit la positivité de la partie intrinsèque  $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p - \mathbf{Y} \cdot \dot{\mathbf{V}}$  de la dissipation. Pour satisfaire cette condition, un pseudo-potential de dissipation  $\varphi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p, -\dot{\mathbf{V}})$  ainsi que le dual (défini avec la transformation de Legendre-Fenchel) sont couramment introduits :

$$\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}) = \sup_{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p, \dot{\mathbf{V}}} \left( \langle (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}), (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p, -\dot{\mathbf{V}}) \rangle - \varphi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p, -\dot{\mathbf{V}}) \right). \quad (32)$$

Ainsi, les lois d'évolution sont définies à partir des gradients des potentiels  $\varphi$  (ou  $\varphi^*$ ), en utilisant l'opérateur  $\mathcal{B}$  :

$$\begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{V}} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p \end{bmatrix} = \mathcal{B} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \right) = \partial_{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y})} \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}). \quad (33)$$

L'inégalité de Clausius-Duhem (29) est ainsi naturellement satisfaite quand les pseudo-potentiels de dissipation sont choisis convexes avec  $\varphi(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \varphi^*(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ .

Avec la formulation thermodynamique du comportement non-linéaire, l'erreur en relation de comportement a été dérivée à partir des résidus sur : (i) les équations d'état ; (ii) les lois d'évolution. Ces résidus sont définis à l'aide de l'inégalité de Legendre-Fenchel appliquée aux potentiels thermodynamiques. Ils s'écrivent ainsi :

- résidu sur les équations d'état :

$$\eta_\psi(\boldsymbol{\epsilon}_e, \mathbf{V}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}) = \psi(\boldsymbol{\epsilon}_e, \mathbf{V}) + \psi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}) - \langle (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}), (\boldsymbol{\epsilon}_e, \mathbf{V}) \rangle \geq 0; \quad (34)$$

- résidu sur les lois d'évolution :

$$\eta_\varphi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p, -\dot{\mathbf{V}}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}) = \varphi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p, -\dot{\mathbf{V}}) + \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}) - \langle (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y}), (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p, -\dot{\mathbf{V}}) \rangle \geq 0. \quad (35)$$

Notons que l'étude de la convexité conduit à  $\eta_\psi = 0$  (resp.  $\eta_\varphi = 0$ ) quand les équations d'état (resp. les lois d'évolution) sont satisfaites.

Afin de simplifier les notations, nous définissons  $\boldsymbol{\Sigma} = (\boldsymbol{\epsilon}_e, \boldsymbol{\epsilon}_p, \mathbf{V}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y})$  l'ensemble des variables. A partir des deux résidus (34,35), la mesure local en espace et en temps de l'ERC  $e_{ERC}$  est définie ainsi :

$$e_{ERC}^2(\boldsymbol{\Sigma}) = \eta_\psi(\boldsymbol{\Sigma}) + \int_0^t \eta_\varphi(\boldsymbol{\Sigma}) dt \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in I_t, \quad (36)$$

et la mesure globale  $E_{ERC}^2 = \int_\Omega \int_{I_t} e_{ERC}^2$  est obtenue par intégration en espace-temps.

## Choix des potentiels pour un problème élasto-plastique

L'exemple utilisé dans le thèse (voir le chapitre 9) étant de l'élasto-plasticité, les expressions des potentiels et de leurs duaux sont données ci-dessous. C'est le modèle de Prandtl-Reuss.

— les potentiels pour les équations d'état :

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\epsilon}_e, p) &= \frac{1}{2} \mathcal{K} \boldsymbol{\epsilon}_e : \boldsymbol{\epsilon}_e + g(p), \\ \psi^*(\boldsymbol{\sigma}, R) &= \frac{1}{2} \mathcal{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} + g^*(R); \end{aligned} \quad (37)$$



— les potentiels pour les lois d'évolution :

$$\begin{aligned}\varphi(\dot{\epsilon}_p, -\dot{p}) &= R_0 \|\dot{\epsilon}_p\| + \psi_C(\dot{\epsilon}_p, -\dot{p}) \quad \text{avec } C = \{(\dot{\epsilon}_p, -\dot{p}) \in e, \text{tr}[\dot{\epsilon}_p] = 0, \|\dot{\epsilon}_p\| - \dot{p} \leq 0\}, \\ \varphi^*(\sigma, R) &= \psi_{C_p}(\sigma, R) \quad \text{avec } C_p = \{(\sigma, R) \in f, \|\sigma^0\| - (R + R_0) \leq 0, R \geq 0\}.\end{aligned}\tag{38}$$

**Remarque 28** *La définition par potentiels permet de retrouver la fonctionnelle ERC en linéaire. En effet dans ce cas seuls les potentiels des équations d'état sont définis de la façon suivante :*

$$\begin{aligned}\psi(\epsilon) &= \frac{1}{2} \mathcal{K} \epsilon : \epsilon, \\ \psi^*(\sigma) &= \frac{1}{2} \mathcal{K}^{-1} \sigma : \sigma.\end{aligned}\tag{39}$$

*Le résidu sur les équations d'état (34), devient ainsi :  $\psi(\epsilon) + \psi^*(\sigma) - \langle (\sigma, \epsilon) \rangle$  soit en détaillant :  $\frac{1}{2}(\sigma - \mathcal{K}\epsilon)\mathcal{K}^{-1}(\sigma - \mathcal{K}\epsilon)$ .*

- [1] A. Abdulle and A. Nonnenmacher. A posteriori error analysis of the heterogeneous multiscale method for homogenization problems. *Comptes Rendus Mathématique de l'Académie des Sciences*, 347(17-18) :1081–1086, 2009.
- [2] M. Ainsworth and J.T. Oden. A posteriori error estimation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142(1-2) :1–88, 1997.
- [3] H. Al-Akhras, T. Elguedj, A. Gravouil, and M. Rochette. Isogeometric analysis-suitable trivariate NURBS models from standard B-Rep models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 307 :256–274, 2016.
- [4] P.E. Allier, L. Chamoin, and P. Ladevèze. Towards simplified and optimized a posteriori error estimation using PGD reduced models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 113(6) :967–998, 2018.
- [5] F. Auricchio, L. Beirão da Veiga, T.J.R. Hughes, A. Reali, and G. Sangalli. Isogeometric collocation methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Science*, 20(11) :2075–2107, 2010.
- [6] F. Auricchio, F. Calabrò, T.J.R. Hughes, A. Reali, and G. Sangalli. A simple algorithm for obtaining nearly optimal quadrature rules for NURBS-based isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 249-252 :15–27, 2012.
- [7] I. Babuška, U. Banerjee, and J. Osborn. Survey of meshless and generalized finite element methods : A unified approach. *Acta Numerica*, 12, 2003.
- [8] L. Barrière, S. Marguet, B. Castanié, P. Cresta, and J.C. Passieux. An adaptive model reduction strategy for post-buckling analysis of stiffened structures. *Thin-Walled Structures*, 73 :81–93, 2013.
- [9] P.T. Bauman, J.T. Oden, and S. Prudhomme. Adaptive multiscale modeling of polymeric materials with Arlequin coupling and Goals algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(5-8) :799–818, 2009.
- [10] R. Becker and R. Rannacher. An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. *Acta Numerica*, 10 :1–102, 2001.
- [11] F.B. Belgacem. The Mortar finite element method with Lagrange multipliers. *Numerische Mathematik*, 84(2) :173–197, 1999.
- [12] T. Belytschko, H. Stolarski, W.K. Liu, N. Carpenter, and J.S.J. Ong. Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51 :221–258, 1985.

- [13] H. Ben Dhia. Problèmes mécaniques multi-échelles : La méthode Arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences - Serie Iib : Mécanique, Physique, Chimie, Astronomie*, 326(12) :899–904, 1998.
- [14] H. Ben Dhia, L. Chamoin, J.T. Oden, and S. Prudhomme. A new adaptive modeling strategy based on optimal control for atomic-to-continuum coupling simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(37-40) :2675–2696, 2011.
- [15] H. Ben Dhia and G. Rateau. The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(11) :1442–1462, 2005.
- [16] D.J. Benson, S. Hartmann, Y. Bazilevs, M.C. Hsu, and T.J.R. Hughes. Blended isogeometric shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255 :133–146, 2013.
- [17] C. Bernardi, Y. Maday, and F. Rapetti. Basics and some applications of the mortar element method. *GAMM-Mitteilungen*, 28(2) :97–123, 2005.
- [18] O. Bettinotti, O. Allix, U. Perego, V. Oancea, and B. Malherbe. A fast weakly intrusive multiscale method in explicit dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 100(8) :577–595, 2014.
- [19] O. Bettinotti, O. Allix, U. Perego, V. Oancea, and B. Malherbe. Simulation of delamination under impact using a global-local method in explicit dynamics. *Finite Elements in Analysis and Design*, 125 :1–13, 2017.
- [20] M. Blanchard, O. Allix, P. Gosselet, and G. Desmeure. Maîtrise des analyses non-intrusives globales/locales dans le cas de la visco-plasticité et première extension pour le calcul de fatigue à faible nombre de cycles. In *Proceedings of 13e Colloque national en calcul des structures*, 2017.
- [21] M. Borden, M.A. Scott, J.A. Evans, and T.J.R. Hughes. Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of NURBS. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 87(1–5) :15–47, 2011.
- [22] R. Bouclier, T. Elguedj, and A. Combescure. Efficient isogeometric NURBS-based solid-shell elements : Mixed formulation and B-method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 267(5-8) :86–110, 2013.
- [23] R. Bouclier and J.C. Passieux. A Nitsche-based non-intrusive coupling strategy for global/local isogeometric structural analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 340 :253–277, 2018.
- [24] R. Bouclier, J.C. Passieux, and M. Salaün. Local enrichment of NURBS patches using a non-intrusive coupling strategy : Geometric details, local refinement, inclusion, fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 300 :1–26, 2016.
- [25] R. Bouclier, J.C. Passieux, and M. Salaün. Development of a new, more regular, mortar method for the coupling of NURBS subdomains within a NURBS patch : Application to a non-intrusive local enrichment of NURBS patches. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 316 :123–150, 2017.
- [26] F. Brezzi, J.L. Lions, and O. Pironneau. Analysis of a Chimera method. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I : Mathematics*, 332(7) :655–660, 2001.
- [27] P. Bézier. *Courbes & Surfaces*. Hermès, 1986.
- [28] F. Calabrò, G. Sangalli, and M. Tani. Fast formation of isogeometric Galerkin matrices by weighted quadrature. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 316 :606–622, 2017.

- [29] C. Carstensen and S.A. Funken. Fully reliable localized error control in the FEM. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(4) :1465–1484, 1999.
- [30] L. Chamoin and L. Desvillettes. Control of modeling errors in the coupling of linear transport and diffusion models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 261-262 :83–95, 2013.
- [31] L. Chamoin and P. Díez. *Verifying calculations– forty years on : an overview of classical verification techniques for FEM simulations*. SpringerBriefs, 2016.
- [32] L. Chamoin and P. Ladevèze. A non-intrusive method for the calculation of strict and efficient bounds of calculated outputs of interest in linear viscoelasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(9-12) :994–1014, 2008.
- [33] L. Chamoin and F. Legoll. A posteriori error estimation and adaptive strategy for the control of MsFEM computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 336 :1–38, 2018.
- [34] T. Chantraït, J. Rannou, and A. Gravouil. Low intrusive coupling of implicit and explicit time integration schemes for structural dynamics : Application to low energy impacts on composite structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 86 :23–33, 2014.
- [35] T. Charras, A. Millard, and P. Verpeaux. Solution of two-dimensional and three dimensional contact problems by means of Lagrange multipliers in the CASTEM 2000 finite element program. *In Proceedings of the Conference on Contact Mechanics*, pages 183–194, 1993.
- [36] L. Chen and R. de Borst. Adaptive refinement of hierarchical T-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 337 :220–245, 2018.
- [37] Y. Chen, S.P. Lin, O. Faruque, J. Alanoly, M. El-Essawi, and R. Baskaran. Current status of LS-DYNA isogeometric analysis in crash simulation. *In Proceedings of 14th International LS-DYNA Users Conference*, pages 1–24, 2016.
- [38] M. Chevreuril, A. Nouy, and E. Safatly. A multiscale method with patch for the solution of stochastic partial differential equations with localized uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255 :255–274, 2013.
- [39] F. Chinesta, A. Huerta, G. Rozza, and K. Willcox. *Model reduction methods - Part 1 : solids and structures*. John Wiley & Sons, Ltd, 2017.
- [40] F. Chinesta, P. Ladevèze, and E. Cueto. A short review in model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18(4) :395–404, 2011.
- [41] E.T. Chung, W.T. Leung, and S. Pollock. Goal-oriented adaptivity for GMsFEM. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 296 :625–637, 2016.
- [42] E. Cohen, T. Lyche, and R. Riesenfeld. Discrete B-splines and subdivision techniques in computer-aided geometric design and computer graphics. *Computer Graphics and Image Processing*, 14(2) :87–111, 1980.
- [43] A.R. Conn, N.I.M. Gould, and P.L. Toint. Convergence of quasi-Newton matrices generated by the symmetric rank one update. *Mathematical Programming*, 50(1-3) :177–195, 1991.
- [44] J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes, and Y. Bazilevs. Isogeometric Analysis - Toward Integration of CAD and FEA. In D. Kroner, C. Rohde, and M. Ohlberger, editors, *Lecture journals in Computational Science and Engineering*. Springer, 2009.
- [45] P. Cresta, O. Allix, C. Rey, and S. Guinard. Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : Application to post-buckling analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8) :1436–1446, 2007.

- [46] F. Daghia and P. Ladevèze. A micro-meso computational strategy for the prediction of the damage and failure of laminates. *Composite Structures*, 94(12) :3644–3653, 2012.
- [47] G. Desmeure, C. Rey, P. Gosselet, and P. Cresta. A mixed domain decomposition method for structural assemblies with interface tractions represented in  $H^{1/2}$ . In *Proceedings of 21st International Conference on Domain Decomposition Methods*, 2012.
- [48] P. Destuynder and B. Métivet. Explicit error bounds in a conforming finite element method. *Mathematics of Computation*, 68(288) :1379–1396, 1999.
- [49] T. Dokken, T. Lyche, and K.F. Pettersen. Polynomial splines over locally refined box-partitions. *Computer Aided Geometric Design*, 30 :331–356, 2013.
- [50] C.A. Duarte and D.J. Kim. Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6-8) :487–504, 2008.
- [51] A. Duval, T. Elguedj, H. Al-Akhras, and F. Maurin. AbqNURBS : implémentation d’éléments isogéométriques dans Abaqus et outils de pré - et post - traitement dédiés. In *Proceedings of 12e Colloque national en Calcul des Structures*, 2015.
- [52] M. Duval, A. Lozinski, J.C. Passieux, and M. Salaün. Residual error based adaptive mesh refinement with the non-intrusive patch algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 329 :118–143, 2018.
- [53] M. Duval, J.C. Passieux, M. Salaün, and S. Guinard. Non-intrusive coupling : recent advances and scalable nonlinear domain decomposition. *Computational Methods in Engineering*, 23(1) :17–38, 2016.
- [54] D. D’Angella, S. Kollmannsberger, E. Rank, and A. Reali. Multi-level Bézier extraction for hierarchical local refinement of Isogeometric Analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 328 :147–174, 2017.
- [55] T. Elguedj, A. Duval, F. Maurin, and H. Al-Akhras. Abaqus User Element implementation of NURBS based isogeometric analysis. In *Proceedings of 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, pages 10–14, 2012.
- [56] A. Ern and M. Vohralik. A posteriori error estimation based on potential and flux reconstruction for the heat equation. *SAIM : Journal on Numerical Analysis*, 48(1) :198–223, 2010.
- [57] E.J. Evans, M.A. Scott, X. Li, and D.C. Thomas. Hierarchical T-splines : Analysis-suitability, Bézier extraction, and application as an adaptive basis for isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 284 :1–20, 2015.
- [58] C. Farhat, M. Lesoinne, P. LeTallec, K. Pierson, and D. Rixen. FETI-DP : a dual-primal unified FETI method - part I : A faster alternative to the two-level FETI method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :1523–1544, 2001.
- [59] C. Farhat and F.X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(6) :1205–1227, 1991.
- [60] E. Florentin, L. Gallimard, and J.P. Pelle. Evaluation of the local quality of stresses in 3d finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(39) :4441–4457, 2002.
- [61] B. Fraeijs de Veubeke. Displacement and equilibrium models in the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(3) :287–342, 1965.
- [62] L. Gendre, O. Allix, and P. Gosselet. A two-scale approximation of the Schur complement and its use for non-intrusive coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 97(9) :233–245, 2011.

- [63] L. Gendre, O. Allix, P. Gosselet, and F. Comte. Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity. *Computational Mechanics*, 44(2) :233–245, 2009.
- [64] P. Germain, Q.S. Nguyen, and P. Suquet. Continuum thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 50(4b) :1010–1020, 1983.
- [65] R. Glowinski, J. He, A. Lozinski, J. Rappaz, and J. Wagner. Finite element approximation of multi-scale elliptic problems using patches of elements. *Numerische Mathematik*, 101(4) :663–687, 2005.
- [66] P. Gosselet, M. Blanchard, O. Allix, and G. Guguin. Non-invasive global-local coupling as a Schwarz domain decomposition method : acceleration and generalization. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 5(4), 2018.
- [67] S. Govindjee, J. Strain, T.J. Mitchell, and R.L. Taylor. Convergence of an efficient local least squares fitting method for bases with compact support. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 84-92 :213–216, 2012.
- [68] G. Guguin, O. Allix, P. Gosselet, and S. Guinard. Non-intrusive coupling of 3D and 2D laminated composite models based on finite element 3D recovery. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 98(5) :324–343, 2014.
- [69] G. Guguin, O. Allix, P. Gosselet, and S. Guinard. On the computation of plate assemblies using realistic 3D joint model : a non-intrusive approach. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 3(1), 2016.
- [70] S. Guinard, R. Bouclier, M. Toniolli, and J.C. Passieux. Multiscale analysis of complex aeronautical structures using robust non-intrusive coupling. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 5(1) :1, 2018.
- [71] P. Gupta, J.P. Pereira, D.J. Kim, C.A. Duarte, and T. Eason. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems : A non-intrusive approach using a generalized finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 90 :41–64, 2012.
- [72] B. Halphen and Q.S. Nguyen. Sur les matériaux standards généralisés. *Journal de Mécanique*, 14 :39–63, 1975.
- [73] A. Hansbo and P. Hansbo. An unfitted finite element method, based on nitsche’s method, for elliptic interface problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(47-48) :5537–5552, 2002.
- [74] S. Hartmann, D. Benson, and A. Nagy. Isogeometric analysis with LS-DYNA. *Journal of Physics : Conference Series*, 734(3), 2016.
- [75] S. Hartmann, D.J. Benson, and D. Lorenz. About isogeometric analysis and the new NURBS-based finite elements in LS-DYNA. In *Proceedings of 8th European LS-DYNA Users Conference*, 2011.
- [76] P. Hennig, S. Müller, and M. Kästner. Bézier extraction and adaptive refinement of truncated hierarchical NURBS. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 305 :316–339, 2016.
- [77] P. Henning, M. Ohlberger, and B. Schweizer. An adaptive multiscale finite element method. *Multiscale Modeling & Simulation*, 12(3) :1078–1107, 2014.
- [78] I. Hirai, B.P. Wang, and W.D. Pilkey;. An efficient zooming method for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(9) :1671–1683, 1984.

- [79] T. Hirschler, R. Bouclier, A. Duval, T. Elguedj, and J. Morlier. The embedded isogeometric Kirchhoff-Love shell : From design to shape optimization of non-conforming stiffened multipatch structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 349 :774–797, 2019.
- [80] T.Y. Hou and X.H. Wu. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *Journal of Computational Physics*, 134(1) :169–189, 1997.
- [81] M.C. Hsu, C. Wang, A.J. Herrema, D. Schillinger, A. Ghoshal, and Y. Bazilevs. An interactive geometry modeling and parametric design platform for isogeometric analysis. *Computer and Mathematics with Applications*, 70(7) :1481–1500, 2015.
- [82] T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, and Y. Bazilevs. Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(39-41) :4135–4195, 2005.
- [83] T.J.R. Hughes, G.R. Feijoo, L. Mazzei, and J.B. Quincy. The variational multiscale method - a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166(1-2) :3–24, 1998.
- [84] T.J.R. Hughes, A. Reali, and G. Sangalli. Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :301–313, 2010.
- [85] B.M. Irons and R.C. Tuck. A version of the Aitken accelerator for computer iteration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1(3) :275–277, 1969.
- [86] C.C. Jara-Almonte and C.E. Knight. The specified boundary stiffness/force SBSF method for finite element subregion analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(7) :1567–1578, 1988.
- [87] C. Jhurani and L. Demkowicz. Multiscale modeling using goal-oriented adaptivity and numerical homogenization. Part I : Mathematical formulation and numerical results. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213-216 :399–417, 2012.
- [88] D. Kamensky and Y. Bazilevs. tIGAr : Automating isogeometric analysis with FEniCS. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 344 :477–498, 2019.
- [89] P. Kerfriden, J.C. Passieux, and S.P.A Bordas. Local/global model order reduction strategy for the simulation of quasi-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89(2) :154–179, 2012.
- [90] P. Ladevèze. Strict upper error bounds on computed outputs of interest in computational structural mechanics. *Computational Mechanics*, 42(2) :271–286, 2008.
- [91] P. Ladevèze, B. Blaysat, and E. Florentin. Strict upper bounds of the error in calculated outputs of interest for plasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 245-246 :194–205, 2012.
- [92] P. Ladevèze and L. Chamoin. The constitutive relation error method : A general verification tool. *SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology*, 172 :59–94, 2015.
- [93] P. Ladevèze, L. Chamoin, and E. Florentin. A new non-intrusive technique for the construction of admissible stress fields in model verification. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(9-12) :766–777, 2010.
- [94] P. Ladevèze and E. Florentin. Verification of stochastic models in uncertain environments using the constitutive relation error method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(1-3) :225–234, 2006.

- [95] P. Ladevèze and D. Leguillon. Error estimate procedure in the finite element method and applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20(3) :485–509, 1983.
- [96] P. Ladevèze, O. Loiseau, and D. Dureisseix. A micro–macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(12) :121–138, 2001.
- [97] P. Ladevèze and N. Moës. A new a posteriori error estimation for nonlinear time-dependent finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157(1–2) :45–68, 1998.
- [98] P. Ladevèze, N. Moës, and B. Douchin. Constitutive relation error estimators for (visco)plastic finite element analysis with softening. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1–4) :247–264, 1999.
- [99] P. Ladevèze and J.P. Pelle. *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*. Springer, 2005.
- [100] P. Ladevèze and P. Rougeot. New advances on a posteriori error on constitutive relation in f.e. analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 150(1–4) :239–249, 1997.
- [101] Y. Lai, Y.J. Zhang, L. Liu, X. Wei, E. Fang, and J. Lua. Integrating CAD with Abaqus : A practical isogeometric analysis software platform for industrial applications. *Computers & Mathematics with Applications*, 74(7) :1648–1660, 2017.
- [102] M.G. Larson and A. Malqvist. Adaptive variational multiscale methods based on a posteriori error estimation : energy norm estimates for elliptic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(21–24) :2313–2324, 2007.
- [103] F. Larsson and K. Runesson. On two-scale adaptive FE analysis of micro-heterogeneous media with seamless scale-bridging. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(37–40) :2662–2674, 2011.
- [104] P.L. Lions. On the Schwarz method. In R. Glowinski, G.H. Golub, G.A. Meurant, and J. Périaux, editors, *Domains Decomposition Methods for partial differential Equations*. SIAM, Philadelphia, 1987.
- [105] A. Lozinski and O. Pironneau. Numerical zoom for advection diffusion problems with localized multiscales. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27 :197–207, 2011.
- [106] L. Machiels, Y. Maday, and A.T. Patera. A “flux-free” nodal Neumann subproblem approach to output bounds for partial differential equations. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 330(3) :249–254, 2000.
- [107] R.H. MacNeal and R.L. Harder. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1 :3–20, 1985.
- [108] J. Mandel. Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(3) :233–241, 1993.
- [109] K.M. Mao and C.T. Sun. A refined global-local finite element analysis method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(1) :29–43, 1991.
- [110] F. Mathieu, H. Leclerc, F. Hild, and S. Roux. Estimation of elastoplastic parameters via weighted FEMU and integrated-DIC. *Experimental Mechanics*, 55 :105–119, 2015.
- [111] J.M. Melenk and I. Babuška. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1–4) :289–314, 1996.



- [112] T.J. Mitchell, S. Govindjee, and R.L. Taylor. *A method for enforcement of Dirichlet boundary conditions in isogeometric analysis*. Springer-Verlag, 2011.
- [113] J.P. Moitinho de Almeida and E.A.W. Maunder. *Equilibrium Finite Element Formulations*. John Wiley & Sons, 2016.
- [114] J.J. Moreau. Convexity and duality. *Functional Analysis and Optimization*, pages 145–169, 1996.
- [115] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46 :131–150, 1999.
- [116] A. Nouy and F. Pled. A multiscale method for semi-linear elliptic equations with localized uncertainties and non-linearities. *ESIAM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 52(5) :1763–1802, 2018.
- [117] M. Occelli, T. Elguedj, L. Morancay, S. Bouabdallah, and L. Morancay. LR B-Splines implementation in the Altair Radioss solver for explicit dynamics isogeometric analysis. *Advances in Engineering Software*, 131 :166–185, 2019.
- [118] J.T. Oden, T. Belytschko, J. Fish, T.J.R. Hughes, C. Johnson, D. Keyes, A. Laub, L. Petzold, D. Srolovitz, and S. Yip. Simulation-based engineering science : Revolutionizing engineering science through simulation. *NSF Blue Ribbon Panel on SBES*, pages 1–66, 2006.
- [119] J.T. Oden and S. Prudhomme. Estimation of modeling error in computational mechanics. *Journal of Computational Physics*, 182(2) :496–515, 2002.
- [120] J.T. Oden, S. Prudhomme, A. Romkes, and P.T. Bauman. Multiscale modeling of physical phenomena : Adaptive control of models. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 28(6) :2359–2389, 2006.
- [121] J.T. Oden and K. Vemaganti. Estimation of local modeling error and goal-oriented adaptive modeling of heterogeneous materials : I. Error estimates and adaptive algorithms. *Journal of Computational Physics*, 164(1) :22–47, 2000.
- [122] J.T. Oden and T.I. Zohdi. Analysis and adaptive modeling of highly heterogeneous elastic structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148(3-4) :367–391, 1997.
- [123] P. Oumaziz, P. Gosselet, P.A. Boucard, and M. Abbas. A parallel non-invasive multiscale strategy for a mixed domain decomposition method with frictional contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 115(8) :893–912, 2018.
- [124] D.A. Paladim, J.P. Moitinho de Almeida, S.P.A. Bordas, and P. Kerfriden. Guaranteed error bounds in homogenisation : an optimum stochastic approach to preserve the numerical separation of scales. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 110(2) :103–132, 2016.
- [125] M. Paraschivoiu, J. Peraire, and A.T. Patera. A posteriori finite element bounds for linear-functional outputs of elliptic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 150(1-4) :289–312, 1997.
- [126] I.D. Parsons and J.F. Hall. The multigrid method in solid mechanics : Part I : Algorithm description and behaviour. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29(4) :739–753, 1990.
- [127] J.C. Passieux, J. Réthoré, A. Gravouil, and M.C. Baietto. Local/global non-intrusive crack propagation simulation using a multigrid X-FEM solver. *Computational Mechanics*, 52(6) :1381–1393, 2013.

- [128] J. Pebre, C. Rey, and P. Gosselet. A nonlinear dual-domain decomposition method : application to structural problems with damage. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 6(3) :251–262, 2008.
- [129] M. Picasso, J. Rappaz, and V. Rezzonico. Multiscale algorithm with patches of finite elements. In *Communications in Numerical Methods in Engineering*, volume 24, pages 477–491, 2008.
- [130] L. Piegl and W. Tiller. *The NURBS Book (Monographs in Visual Communication)*, second ed. Springer-Verlag, 1997.
- [131] F. Pled, L. Chamoin, and P. Ladevèze. On the techniques for constructing admissible stress fields in model verification : Performances on engineering examples. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 88(5) :409–441, 2011.
- [132] W. Prager and J.L. Synge. Approximation in elasticity based on the concept of function space. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5(4-6) :261–269, 1947.
- [133] S. Prudhomme, P.T. Bauman, and J.T. Oden. Error control for molecular statics problems. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 4(5-6) :647–662, 2006.
- [134] S. Prudhomme, L. Chamoin, H. Ben Dhia, and P.T. Bauman. An adaptive strategy for the control of modeling error in two-dimensional atomic-to-continuum coupling simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(21-26) :1887–1901, 2009.
- [135] S. Prudhomme and J.T. Oden. On goal-oriented error estimation for elliptic problems : Application to the control of pointwise errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4) :313–331, 1999.
- [136] A. Quarteroni, A. Manzoni, and F. Negri. *Reduced basis methods for partial differential equations - An introduction*. Springer., 2016.
- [137] A.A. Rahimabadi, P. Kerfriden, and S. Bordas. Scale selection in nonlinear fracture mechanics of heterogeneous materials. *Philosophical Magazine*, 95(28-30) :3328–3347, 2015.
- [138] R. Rannacher and F.T. Suttmeier. A feed-back approach to error control in finite element methods : Application to linear elasticity. *Computational Mechanics*, 19(5) :434–446, 1997.
- [139] V. Rey, P. Gosselet, and C. Rey. Strict bounding of quantities of interest in computations based on domain decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 287 :212–228, 2015.
- [140] V. Rey, P. Gosselet, and C. Rey. Strict lower bounds with separation of sources of error in non-overlapping domain decomposition methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 108(9) :1007–1029, 2016.
- [141] V. Rey, C. Rey, and P. Gosselet. A strict error bound with separated contributions of the discretization and of the iterative solver in non-overlapping domain decomposition methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 270 :293–303, 2014.
- [142] Rhinoceros. NURBS modelling for windows. <http://www.rhino3d.com/>, 2012.
- [143] A. Romkes and J.T. Oden. Adaptive modeling of wave propagation in heterogeneous elastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(6-8) :539–559, 2004.
- [144] A. Romkes, J.T. Oden, and K. Vemaganti. Multi-scale goal-oriented adaptive modeling of random heterogeneous materials. *Mechanics of Materials*, 38(8-10) :859–872, 2006.
- [145] D. Schillinger, L. Dedé, M.A. Scott, J.A. Evans, M.J. Borden, E. Rank, and T.J.R. Hughes. An isogeometric design-through- analysis methodology based on adaptive hierarchical refinement of NURBS, immersed boundary methods, and T-spline CAD surfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 249–250 :116–150, 2012.

- [146] D. Schillinger, J.A. Evans, A. Reali, M.A. Scott, and T.J.R. Hughes. Isogeometric collocation : Cost comparison with Galerkin methods and extension to adaptive hierarchical NURBS discretizations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 267 :170–232, 2013.
- [147] D. Schillinger, S.J. Hossain, and T.J.R. Hughes. Reduced Bézier element quadrature rules for quadratic and cubic splines un isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 277 :1–45, 2014.
- [148] D. Schillinger, P.K. Ruthala, and L.H. Nguyen. Lagrange extraction and projection for NURBS basis functions : A direct link between isogeometric and standard nodal finite element formulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 108 :515–534, 2016.
- [149] M.A. Scott, M. Borden, C. Verhoosel, T. Sederberg, and T.J.R. Hughes. Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of T-splines. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 88 :126–156, 2011.
- [150] M.A. Scott, X. Li, T.W. Sederberg, and T.J.R. Hughes. Local refinement of analysis-suitable T-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213–216 :206–222, 2012.
- [151] M.A. Scott, D.C. Thomas, and E.J. Evans. Isogeometric spline forests. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 269 :222–264, 2014.
- [152] T. Strouboulis, I. Babuška, and K. Copps. The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1-3) :43–69, 2000.
- [153] T. Strouboulis, L. Zhang, D. Wang, and I. Babuška. A posteriori error estimation for generalized finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(9-12) :852–879, 2006.
- [154] H.P. Thai, L. Chamoin, and C. Ha Minh. A posteriori error estimation for isogeometric analysis using the concept of Constitutive Relation Error. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019.
- [155] D.C. Thomas, M.A. Scott, J.A. Evans, K. Tew, and E.J. Evans. Bézier projection : a unified approach for local projection and quadrature-free refinement and coarsening of NURBS and t-splines with particular application to isogeometric design and analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 284 :55–105, 2014.
- [156] M. Tirvaudey, R. Bouclier, J.C. Passieux, and L. Chamoin. Non-invasive implementation of nonlinear isogeometric analysis in an industrial fe software. *Engineering Computations*, accepté, 2019.
- [157] M. Tirvaudey, L. Chamoin, R. Bouclier, and J.C. Passieux. A posteriori error estimation and adaptivity in non-intrusive couplings between concurrent models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, submitted, 2019.
- [158] K. Vemaganti and J.T. Oden. Estimation of local modeling error and goal-oriented adaptive modeling of heterogeneous materials : Part II : A computational environment for adaptive modeling of heterogeneous elastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(46-47) :6089–6124, 2001.
- [159] R. Verfürth. A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4) :419–440, 1999.
- [160] M. Vohralik. A posteriori error estimates for lowest-order mixed finite element discretizations of convection-diffusion-reaction equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis, Society for Industrial and Applied Mathematics*, 45(4), 2007.

- [161] S.R. Voleti, N. Chandra, and J.R. Miller. Global-local analysis of large-scale composite structures using finite element methods. *Computers and Structures*, 58(3) :453–464, 1996.
- [162] G.J. Wagner and W.K. Liu. Coupling of atomistic and continuum simulations using a bridging scale decomposition. *Journal of Computational Physics*, 190(1) :249–274, 2003.
- [163] J.D. Whitcomb. Iterative global/local finite element analysis. *Computers and Structures*, 40(4) :1027–1031, 1991.
- [164] B.I. Wohlmuth. A residual based error estimator for mortar finite element discretizations. *Numerische Mathematik*, 84(1) :143–171, 1999.
- [165] C. Zaccardi, L. Chamoin, R. Cottureau, and H. Ben Dhia. Error estimation and model adaptation for a stochastic-deterministic coupling method based on the arlequin framework. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 96(2) :87–109, 2013.
- [166] O.C. Zienkiewicz, R. Taylor, and J. Zhu. *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals, Sixth Edition*. Butterworth-Heinemann, 2003.
- [167] O.C. Zienkiewicz and J. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 :337–357, 1987.
- [168] T.I. Zohdi, P. Wriggers, and C. Huet. A method of substructuring large-scale computational micromechanical problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(43-44) :5639–5656, 2001.
- [169] Électricité de France. Code\_aster. [http ://www.code-aster.org](http://www.code-aster.org), 2014.

## Résumé

Dans le contexte industriel actuel, où la simulation numérique joue un rôle majeur, de nombreux outils sont développés afin de rendre les calculs les plus performants et exacts possibles en utilisant les ressources numériques de façon optimale. Parmi ces outils, ceux non-intrusifs, c'est-à-dire ne modifiant pas les codes commerciaux disponibles mais permettant d'utiliser des méthodes de résolution avancées telles que l'analyse isogéométrique ou les couplages multi-échelles, apparaissent parmi les plus attirants pour les industriels.

L'objectif de cette thèse est ainsi de coupler l'Analyse IsoGéométrique (AIG) et la Méthode des Éléments Finis (MEF) standard pour l'analyse de détails structuraux par une approche non-intrusive et certifiée. Dans un premier temps, on développe un lien global approché entre les fonctions de Lagrange, classiquement utilisées en éléments finis et les fonctions NURBS bases de l'AIG, ce qui permet d'implémenter des analyses isogéométriques dans un code industriel EF vu comme une boîte noire. Au travers d'exemples linéaires et non-linéaires implémentés dans le code industriel Code\_Aster de EDF, nous démontrons l'efficacité de ce pont AIG\MEF et les possibilités d'applications industrielles. Il est aussi démontré que ce lien permet de simplifier l'implémentation du couplage non-intrusif entre un problème global isogéométrique et un problème local éléments finis.

Ensuite, le concept de couplage non-intrusif entre les méthodes étant ainsi possible, une stratégie d'adaptation est mise en place afin de certifier ce couplage vis-à-vis d'une quantité d'intérêt. Cette stratégie d'adaptation est basée sur des méthodes d'estimation d'erreur a posteriori. Un estimateur global et des indicateurs d'erreur d'itération, de modèle et de discrétisation permettent de piloter la définition du problème couplé. La méthode des résidus est utilisée pour évaluer ces erreurs dans des cas linéaires, et une extension aux problèmes non-linéaires via le concept d'Erreur en Relation de Comportement (ERC) est proposée.

**Mots clés :** Analyse isogéométrique ; Extraction de Lagrange ; Couplage non-intrusif ; Estimation d'erreur a posteriori ; Adaptation de modèle.

## Abstract

In the current industrial context where the numerical simulation plays a major role, a large amount of tools are developed in order to perform accurate and effective simulations using as less numerical resources as possible. Among all these tools, the non-intrusive ones which do not modify the existing structure of commercial softwares but allowing the use of advanced solving methods, such as isogeometric analysis or multi-scale coupling, are the more attractive to the industry.

The goal of these thesis works is thus the coupling of the Isogeometric Analysis (IGA) with the Finite Element Method (FEM) to analyse structural details with a non-intrusive and certified approach. First, we develop an approximate global link between the Lagrange functions, commonly used in the FEM, and the NURBS functions on which the IGA is based. It's allowed the implementation of isogeometric analysis in an existing finite element industrial software considering as a black-box. Through linear and nonlinear examples implemented in the industrial software Code\_Aster of EDF, we show the efficiency of the IGA\FEM bridge and all the industrial applications that can be made. This link is also a key to simplify the non-intrusive coupling between a global isogeometric problem and a local finite element problem.

Then, as the non-intrusive coupling between both methods is possible, an adaptive process is introduced in order to certify this coupling regarding a quantity of interest. This adaptive strategy is based on a posteriori error estimation. A global estimator and indicators of iteration, model and discretization error sources are computed to control the definition of the coupled problem. Residual base methods are performed to estimated errors for linear cases, an extension to the concept of constitutive relation errors is also initiated for non-linear problems.

**Keywords :** Isogeometric analysis ; Lagrange extraction ; non-intrusif coupling ; a posteriori error estimation ; model adaptation.

