Méthodes symboliques pour les systèmes différentiels linéaires à singularité irrégulière

Joelle Saadé

▶ **To cite this version:**

Joelle Saadé. Méthodes symboliques pour les systèmes différentiels linéaires à singularité irrégulière. Calcul formel [cs.SC]. Université de Limoges, 2019. Français. NNT : 2019LIMO0065 . tel-02444014

HAL Id: tel-02444014
https://theses.hal.science/tel-02444014

Submitted on 17 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LIMOGES

ÉCOLE DOCTORALE Sciences et Ingénierie pour l'Information

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Année : 2019 Thèse N°X

Thèse

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LIMOGES

Discipline : Mathématiques et ses applications

présentée et soutenue par

Joelle Saade

le 05 novembre 2019

Méthodes symboliques pour les systèmes différentiels linéaires à singularité irrégulière

Thèse dirigée par Moulay Barkatou et Jacques-Arthur Weil

JURY :

Xavier Caruso	Directeur de recherche, Université de Bordeaux	Rapporteur
Frédéric Chyzak	Chargé de recherche, INRIA-Saclay	Rapporteur
Thomas Cluzeau	HDR, Université de Limoges	Examinateur
Eckhard Pflügel	Professeur, Kingston University	Examinateur
Fernando Sanz Sánchez	Professeur, Universidad de Valladolid	Examinateur
Moulay Barkatou	Professeur, Université de Limoges	Directeur
Jacques-Arthur Weil	Professeur, Université de Limoges	Directeur

À ma famille, je t'aime.

Remerciements

Je remercie grandement mes deux directeurs de thèse Moulay Barkatou et Jacques-Arthur Weil de m'avoir accordé la chance de faire une thèse de doctorat au sein de l'équipe de Calcul Formel à Limoges, et d'avoir accepté d'encadrer mon travail. Outre vos qualités scientifiques, j'ai rapidement découvert vos qualités humaines, je suis ravie et chanceuse d'avoir eu l'opportunité de travailler avec vous. J'ai beaucoup apprécié votre encouragement et présence pendant les moments difficiles. Je ne me suis jamais sentie seule pendant toute cette aventure.

Je remercie énormément Xavier Caruso et Frédéric Chyzak d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je suis reconnaissante de votre implication dans l'évaluation de ma thèse et vos commentaires pertinents qui ont aidé à améliorer mon manuscrit. Ma gratitude s'adresse également à Thomas Cluzeau Eckhard Pflügel et Fernando Sanz Sánchez pour avoir accepté d'examiner ce travail. Je te remercie Thomas également pour toutes les discussions qu'on a eu pendant la thèse et un grand merci pour ta correction méticuleuse de mon manuscrit.

Merci à mes collègues de l'équipe de Calcul Formel Simone et Vincent, pour vos conseils et discussions, sans oublier bien sûr les matchs de tennis.

Tristan, tu as été un très bon référent scientifique et toujours à l'écoute quand j'en avais besoin. Je te remercie pour toutes les discussions scientifiques et le temps que tu m'as accordé pour répondre à mes questions. Je vous remercie également, Salomé et toi, de m'avoir accueilli chez vous pendant la fin de ma thèse, je vous en suis très reconnaissante. J'ai passé un très bon séjour chez vous, sans oublier bien évidemment les soirées pizzas (tout court).

J'adresse mes remerciements au personnel du laboratoire, je les remercie pour leur efficacité et professionnalisme qui ont facilité les conditions de travail. Merci Henri pour ta disponibilité. Un grand merci également à vous Annie et Débora pour votre gentillesse.

Je remercie mes amis de Limoges qui ont animé mon séjour : Flo, Paul et Milène (les week-ends chez vous sont toujours agréables), Zoé (merci pour ton déplacement), Tam (merci pour les cours de tennis), Xavier, MG, Adrien.

Florent, je te remercie pour ton soutien, la relecture de ma thèse et pour tes remarques importantes et ta contribution à l'amélioration de la rédaction de mon manuscrit.

Un chaleureux merci à mes amies Hala, Rana et Jihane d'avoir été à l'écoute pendant ma thèse et d'avoir organisé mon pot de thèse. Merci à vous deux Rana et Jihane de m'avoir accepté en tant que future "best" colocataire à Paris, je vous en serai toujours reconnaissante.

Jihane, je te remercie maintenant à part pour ton soutien pendant les moments durs à la fin de la thèse : merci pour toutes les répétitions que tu m'avais faites avant la soutenance et ta grande contribution au bon déroulement du jour J. Merci ma chère, tu assures.

Mes très chers parents, mon frère, et mes deux sœurs, merci pour votre soutien pendant la thèse, et depuis toujours. Vous m'avez fait confiance tout au long de cette aventure. Je m'excuse pour mon absence continue pendant les fêtes, les grands moments de famille (la naissance de mes magnifiques neveux Andrew et Karl) et au quotidien. Merci d'avoir fait de moi la personne que je suis aujourd'hui. Je vous dois beaucoup, je vous aime et je vous dédie cette thèse.

Table des matières

Introduction générale 5

Notations 11

Chapitre 1 : Réduction formelle et outils fondamentaux 13

1.1 Introduction 14
1.2 Notations et définitions 14
1.3 Lemme de découplage : « splitting lemma » 16
1.3.1 Exemples 18
1.3.2 Résolution d'une équation de Sylvester 20
1.3.3 Complexité du lemme de découplage 22
1.4 Calcul du rang de Poincaré minimal 23
1.4.1 Critère de réductibilité de Moser 23
1.4.2 Algorithmes existants et complexité 24
1.5 Polygone de Newton 25
1.6 Calcul de l'invariant de Katz 26
1.7 Solution formelle d'un système différentiel 29
1.7.1 Résolution au voisinage d'un point singulier régulier 29
1.7.2 Résolution au voisinage d'un point singulier irrégulier 30
1.7.2.1 Algorithme de Barkatou 31
1.7.2.2 Exemple 32
1.7.2.3 Minimisation des extensions algébriques 32
1.7.2.4 Algorithme de Pflügel pour la réduction formelle 35
1.7.2.5 Lemme de découplage généralisé 38
1.7.2.6 Description de l'algorithme 40

Chapitre 2 : Factorisation des systèmes différentiels linéaires de premier ordre en utilisant l'eigenring : application au cas local 42

2.1 Introduction 43
2.2 Définition de l'eigenring 43
2.3 Décomposition des systèmes matriciels linéaires 44
2.3.1 Quand $\mathcal{C}$ est algébriquement clos 49
2.3.2 Cas général : $\mathcal{C}$ est non-algébriquement clos 51
2.3.3 Conclusion 53
2.4 Décomposition isotypique avec $\mathcal{C}$ algébriquement clos 53
2.5 Factorisation dans le corps des séries formelles de Laurent 54
2.5.1 Solution formelle et structure du système 55
2.5.2 Décomposition et factorisation locale 58
2.5.2.1 Décomposition sur $\mathcal{C}((x))$ 59
2.5.2.2 Le cas d'un système indécomposable : $\chi_M = (x-c)^h$ . . . 60
2.5.2.3 Exemples 64
2.5.3 Une décomposition certifiée 68
2.5.3.1 Calcul de l'eigenring pour une précision donnée 68
2.5.3.2 Polynôme caractéristique 69
2.5.3.3 Calcul d'une base d'un noyau 70

2.5.3.4 Inverse d'une matrice . . . 70
2.5.3.5 Transformation de jauge . . . 72
2.6 Conclusion . . . 72

Chapitre 3 : Réduction formelle en utilisant l'eigenring . . . 77
3.1 Introduction . . . 78
3.2 Réduction formelle : le cas algébriquement clos . . . 78
3.2.1 Exemples . . . 79
3.3 Quand $\mathcal{C}$ n'est pas algébriquement clos . . . 80
3.3.1 Le cas où $\chi_M = f^h$ avec f irréductible . . . 82
3.4 Algorithme de réduction formelle . . . 87
3.4.1 Version 1 (naturelle) . . . 89
3.4.1.1 Une session d'exemples . . . 90
3.4.2 Version 2 (optimisée) . . . 94
3.4.2.1 Une session d'exemple . . . 95
3.4.3 Complexité et une méthode heuristique . . . 97
3.5 Conclusion . . . 99

Chapitre 4 : L'algorithme de Miyake pour la réduction formelle . . . 101
4.1 Introduction . . . 102
4.2 Définition et notations . . . 103
4.3 Description de l'algorithme . . . 107
4.3.1 Quand $\mathring{A}$ est nilpotente . . . 107
4.3.2 Quand $\mathring{A}$ est singulière mais non nilpotente . . . 111
4.3.3 L'algorithme de réduction . . . 115
4.3.4 Exemple . . . 116
4.4 Calcul du poids de Volevič . . . 118
4.4.1 Une méthode de complexité exponentielle pour le calcul du poids de Volevič . . . 118
4.4.1.1 La méthode du simplexe . . . 119
4.4.1.2 La méthode hongroise . . . 120
4.4.1.3 Une complexité exponentielle . . . 121
4.4.2 Une méthode polynomiale pour le calcul du poids de Volevič . . . 122
4.4.2.1 Interprétation géométrique . . . 123
4.4.3 Une méthode de programmation linéaire . . . 126
4.4.4 Une comparaison pratique . . . 127
4.4.5 Le poids de Volevič dans la littérature tropicale . . . 128
4.4.5.1 Arithmétique tropicale . . . 129
4.4.5.2 Algèbre linéaire tropicale . . . 129
4.4.5.3 Lien entre le poids de Volevič et le polynôme caractéristique 132
4.4.5.4 Le poids de Volevič et les valeurs propres tropicales . . . 133
4.5 Existence et calcul d'une suite de Volevič . . . 134
4.6 Algorithme de réduction du rang de Poincaré . . . 137
4.6.1 Algorithme de maximisation du poids de Volevič . . . 138
4.6.2 Classification des points singuliers . . . 138

4.6.3 Calcul du rang de Poincaré minimal . . . 139
4.7 Minimisation des extensions algébriques . . . 144

Chapitre 5 : Implémentation et performance . . . 157
5.1 Introduction . . . 158
5.2 Réduction du rang de Poincaré via des programmes linéaires . . . 158
5.2.1 Calcul du poids et des nombres de Volevič . . . 158
5.2.2 Calcul d'une forme échelonnée de la matrice des termes principaux . 159
5.2.3 Réduction du rang de Poincaré . . . 161
5.2.4 Comparaison pratique avec la réduction de Moser . . . 162
5.3 Calcul des parties exponentielles avec l'algorithme de Miyake . . . 163
5.3.1 Introduction . . . 163
5.3.2 Le T-développement . . . 164
5.3.3 Découplage par rapport au T-développement . . . 165
5.3.4 La procédure complète pour le calcul des parties exponentielles . . . 166
5.4 Comparaison entre les algorithmes de réduction formelle . . . 169
5.4.1 Performance pratique . . . 169
5.4.2 Commentaires . . . 170
5.5 Sur l'implémentation de la réduction formelle en utilisant l'eigenring . . . 172
5.5.1 Introduction . . . 172
5.5.2 Sur une implémentation d'une forme normale de Smith adaptée aux matrices à coefficients des séries de Laurent . . . 172
5.5.2.1 Forme normale de Smith : existence et construction . . . 172
5.5.2.2 Implémentations et utilisation du logiciel . . . 178
5.5.3 Réduction formelle avec la décomposition par eigenring . . . 182
5.5.3.1 Remarques sur l'implémentation . . . 182
5.5.3.2 Performance et conclusion . . . 184

Conclusion . . . 186

Introduction générale

Cette thèse est consacrée à la résolution formelle et locale d'un système différentiel du premier ordre qui possède une singularité irrégulière, disons en l'origine (quitte à effectuer un changement de variables). Le système a donc la forme suivante :

$$x^{p+1}\frac{dY}{dx} = A(x)Y(x), \tag{0.0.1}$$

où Y est un vecteur colonne de dimension n, A est une matrice dont les coefficients sont des séries formelles en x : $A(x) := A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots$ avec A_0 non nulle. Ceci permet de définir l'entier $p \geq 0$ comme étant le *rang de Poincaré* du système.

Par « résolution formelle » , nous entendons le fait de trouver une solution à notre équation différentielle dans la classe des solutions formelles. Ceci se manifeste à travers une certaine liberté dans la manipulation des symboles (variables x, t, opérations $+, -, \dots$ et autres expressions algébriques) ainsi que par une absence de considération des questions de convergence des solutions obtenues.

La réduction formelle est le processus de déterminer des transformations qui nous donne un système *équivalent* qui admet une structure simple où l'on peut déterminer directement la solution (ou une partie) du système (0.0.1). Dans la littérature, de nombreux algorithmes de réduction formelle du système (0.0.1) sont proposés. Dans cette thèse nous nous intéressons aux algorithmes développés dans [7, 61, 53]. L'objectif est de développer un nouvel algorithme de réduction formelle, comparer les différents algorithme en théorie et pratique et rendre effectif certaines étapes de l'algorithme dans [53].

Le point de départ de cette thèse est le travail de Barkatou [7] pour la réduction formelle. La méthode proposée dans [7] consiste tout d'abord à calculer la plus grande pente du polygone de Newton, ceci donne *l'invariant de Katz*.

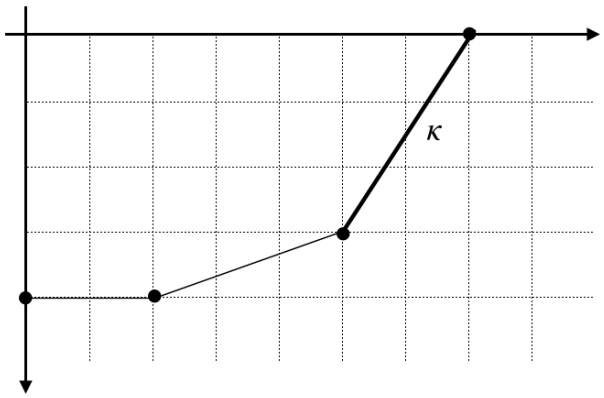


FIGURE 1 – Polygone de Newton – Invariant de Katz

Ensuite, il s'agit de découper au fur et à mesure le système en des sous-systèmes (donc de plus petites tailles) jusqu'à ce que la dimension de système soit de taille $n = 1$ ou bien que le point $x = 0$ soit singulier régulier. La considération de la plus grande pente peut cacher des pentes entières et par conséquent introduire des ramifications (pentes fractionnelles). Cet aspect a motivé Pflügel qui, pendant sa thèse ([59]), a proposé un nouvel algorithme de réduction formelle qui s'appuie sur un "lemme de découplage généralisé". Pflügel montre qu'il est possible d'accéder à toutes les pentes entières. Il calcule une décomposition en des sous-systèmes contenant soit une seule pente, soit des pentes Δ_i comprises strictement entre deux entiers consécutifs $k-1 < \Delta_i < k$. En effet, le lemme de découplage généralisé (Proposition 2.1 dans [59]), permet de séparer les pentes strictement supérieures à k à celles inférieures ou égales à k pour tout entier $k \leq p$.

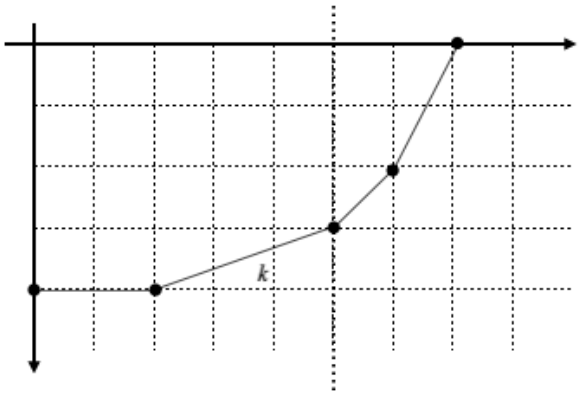


FIGURE 2 – Polygone de Newton - "lemme de découplage généralisé"

En étudiant la structure des solutions au voisinage d'un point singulier irrégulier (Chapitre 2), nous avons remarqué qu'un élément générique de l'eigenring nous permet d'obtenir une décomposition complète sur $\mathcal{C}((x))$, au sens où les différentes extensions algébriques du corps qui apparaissent dans la solution fondamentale, seront isolées dans des systèmes indépendants et de taille plus petite. Nous obtenons une décomposition du système en des sous-systèmes ayant une seule pente dans leur polygone de Newton.

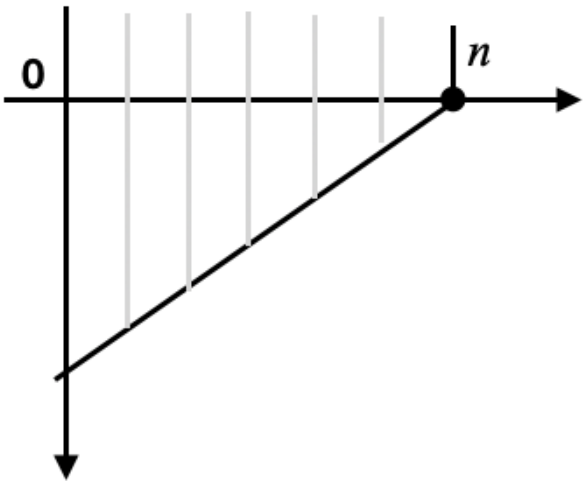


FIGURE 3 – Polygone de Newton - Une seule pente

Quand un système admet un rang de Poincaré minimal (irréductible au sens de Moser) et la matrice principale A_0 est nilpotente, nous obtenons l'invariant de Katz en utilisant une formule [10, 55] : $\kappa = p - 1 + \frac{\text{rang}(A_0)}{n}$. Notre méthode permet la détection des pentes (degré en x^{-1} de la partie exponentielle) non entières et la séparation de toutes les parties exponentielles qui ont des valuations différentes.

Dans la deuxième partie de la thèse nous nous intéressons à l'aspect effectif de l'algorithme de Miyake pour la réduction formelle présenté dans [53]. L'idée de son algorithme est de déterminer la plus grande pente (donc l'invariant de Katz) en utilisant un rationnel appelé poids de Volevič et calculé à partir de la matrice de valuation. Lorsque ce nombre est fractionnel ($\frac{m}{K}$ et p.g.c.d$(m, K) = 1$) et est égal à l'invariant de Katz, à l'aide d'un développement associé à des nombres t_i dits nombres de Volevič, il est toujours possible de séparer la partie ramifiée (pour $x = t^K$) du système à celle non ramifiée avant même d'introduire la ramification. De plus, ces nombres de Volevič permettent la construction d'une transformation de shearing dans le but de réduire le rang de Poincaré du système. Notre contribution dans ce chapitre concerne le calcul du poids ainsi que les nombres de Volevič. Nous donnons des interprétations en théorie de graphe et en algèbre tropicale du poids et suites de Volevič, et obtenons ainsi des méthodes de calculs efficaces en pratique, à l'aide de la programmation linéaire. Nous utilisons la méthode du simplexe (voir [62, 32]) pour résoudre nos programmes linéaires. Signalons toutefois que la complexité théorique de cette méthode est exponentielle dans le pire des cas. Mais, elle s'avère avoir une complexité polynomiale voir linéaire (voir [51]) en le nombre de contraintes pour un programme linéaire, donc linéaire en n^2 pour nos programmes où n est la taille du système. Cela va nous permettre aussi de présenter un nouvel algorithme pour la réduction du rang de Poincaré d'un système, basé sur la notion de Volevič et la résolution des programmes linéaires ainsi que de compléter une étape majeure dans l'algorithme de Miyake.

Ces aspects théoriques s'accompagnent de l'implémentation de ces méthodes dans le logiciel de calcul formel Maple et une comparaison des temps de calcul entre ces différentes méthodes.

Organisation de la thèse

Nous nous intéressons à l'aspect algorithmique de la réduction formelle d'un système différentiel linéaire au voisinage d'un point singulier irrégulier

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y(x),$$

où A est une matrice à coefficients dans le corps des séries formelles de Laurent.

Chapitre 1 Dans le chapitre 1, nous rappelons les différents outils classiques pour la réduction des systèmes différentiels comme la réduction de Moser, le lemme de découplage et le calcul de l'invariant de Katz. Nous décrivons l'algorithme de Barkatou [7] pour la réduction formelle, et ses procédures sous-jacentes ainsi que l'algorithme de Pflügel [61]. La nouvelle contribution de ce chapitre est l'estimation de la complexité de l'algorithme de calcul de l'invariant de Katz (Proposition 1.6.4).

Chapitre 2 Ce chapitre est composé de deux parties :
Dans la première partie, nous commençons par rappeler la méthode de décomposition d'un système $[A]$ en utilisant l'*eigenring*. Nous rappelons des résultats de Barkatou [21]. Nous montrons des résultats concernant la structure de l'eigenring dans le cas où le corps des constantes n'est pas algébriquement clos (Proposition 2.3.15). Enfin, nous étudions la structure de l'eigenring d'un système « complètement réductibles » dans le cas algébriquement clos (section 2.4).
Dans la deuxième partie nous établissons le lien entre la structure d'une matrice fondamentale de solutions et la factorisation locale du système sur $\mathcal{C}((x))$. Nous déduisons une factorisation *complète* en utilisant l'eigenring sur $\mathcal{C}((x))$, i.e, une forme triangulaire supérieure par blocs où chaque bloc sur la diagonale est *irréductible*. L'une des principales difficultés de ce travail se manifeste lors de l'implémentation de l'algorithme, à travers les manipulations des séries. En pratique, on considère des séries tronquées, la question se pose alors d'estimer le nombre de termes nécessaires à considérer afin de certifier chaque étape de la décomposition. Nous consacrons la section 2.5.3 pour répondre à ces questions. Les résultats de cette partie avec le chapitre 3 sont publiés dans [19, 20].

Chapitre 3 Le troisième chapitre présente une nouvelle méthode pour la réduction formelle en utilisant la décomposition locale avec l'eigenring. Suite au chapitre 2, nous commençons par le cas algébriquement clos. Puis, nous considérons le cas des corps de constantes non algébriquement clos (Section 3.3). L'analyse de l'eigenring dans ce cas permet d'obtenir une décomposition sur $\mathcal{C}((x))$ qui sépare toutes les parties exponentielles différentes (Proposition 3.3.11) avant d'introduire les ramifications. Nous montrons que

l'invariant de Katz de ces sous-systèmes s'obtient plus facilement ce qui permet d'obtenir les parties exponentielles de ces sous-systèmes à partir de l'algorithme dans [7] d'une manière efficace. Nous proposons deux versions (Section 3.4.1 et Section 3.4.2) ; dans la deuxième version nous pouvons adapter la même stratégie que dans [7] pour minimiser le degré des extensions algébriques. Nous donnons des exemples pour chaque version. Enfin, nous présentons une discussion sur la complexité de l'algorithme et proposons une méthode heuristique.

Chapitre 4 L'organisation de ce chapitre est la suivante : d'abord, nous commençons par rappeler les étapes de l'algorithme présenté par Miyake [53] pour la réduction formelle. Ensuite, nous nous intéressons à l'aspect effectif de son algorithme. Nous donnons des explications précises sur la façon d'implémenter d'une manière efficace quelques étapes importantes de l'algorithme : le calcul du poids de Volevič et le calcul des nombres de Volevič. Nous montrons que le poids de Volevič est en effet une quantité connue dans la littérature (Proposition 4.4.16, Section 4.4.3, Section 4.4.5). Nous proposons différentes méthodes pour le calculer et donnons une comparaison pratique de ces méthodes (Section 4.4.4). Nous nous intéressons particulièrement à la méthode qui utilise la résolution d'un programme linéaire. Il s'avère que son programme dual permet de déterminer les nombres de Volevič (Proposition 4.5.1, Proposition 4.5.3, Proposition 4.5.4). Nous proposons un algorithme de réduction du rang de Poincaré basé sur la résolution des programmes linéaires (Section 4.6). Enfin, nous adaptons une stratégie dans la ligne de celle proposée dans [7] pour minimiser le degré des extensions algébriques.

Chapitre 5 Tous les algorithmes présentés dans cette thèse ont été implémentés sous forme de librairies dans le logiciel de Calcul Formel Maple. Nous donnons une comparaison pratique de nos algorithmes avec ceux existants dans la littérature.

Notations

— $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ désignent les ensembles usuels d'entiers naturels et relatifs, des rationnels, des réels et des complexes.

— $\mathcal{C}$: un corps effectif de caractéristique zéro, vérifiant $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$ et finiment engendré sur $\mathbb{Q}$. La notation $\overline{\mathcal{C}}$ désigne la clôture algébrique de $\mathcal{C}$.

— $\mathcal{C}[x]$: anneau des polynômes en x à coefficients dans $\mathcal{C}$.

— $\mathcal{C}[[x]]$: anneau des séries formelles en x à coefficients dans $\mathcal{C}$.

— $\mathcal{C}((x))$: corps des séries de Laurent en x.

— $\mathcal{C}[x, x^{-1}]$: anneau des polynômes de Laurent en x.

$\star \quad \star \quad \star$

— $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathcal{K})$: l'anneau des matrices de taille $n \times m$ et à coefficients dans le corps commutatif $\mathcal{K}$. On notera par $\mathcal{M}_n(\mathcal{K})$ l'anneau des matrices de taille $n \times n$.

— $\mathrm{GL}_n(\mathcal{K})$: groupe des matrices carrées inversibles de taille $n \times n$ et à coefficients dans le corps commutatif $\mathcal{K}$.

— I_n : matrice identité de taille n.

— La matrice $\mathrm{O}_{n\times m}$ est la matrice nulle à n lignes et m colonnes.

— $\mathrm{spec}(A)$: ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée A.

— Pour $A \in \mathcal{M}_{n_1\times m_1}(\mathcal{K})$, on note par ${}^tA$ la matrice transposée de A.

— Pour $A \in \mathcal{M}_{n_1\times m_1}(\mathcal{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n_2\times m_2}(\mathcal{K})$, on note

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

— Pour $A \in \mathcal{M}_{n_1\times m_1}(\mathcal{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n_2\times m_2}(\mathcal{K})$, on note $A \otimes B$ le produit de Kronecker de A et B. Si $A = (a_{i,j})_{i,j}$,

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m_1}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1}B & \cdots & a_{n_1m_1}B \end{pmatrix}$$

$\star \quad \star \quad \star$

— On note $'$ la dérivation usuelle : $Y' = \frac{dY}{dx}$.

Chapitre 1 :

Réduction formelle et outils fondamentaux

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les outils fondamentaux pour la réduction des systèmes différentiels. Nous décrivons en particulier l'algorithme développé par Barkatou dans [7] et ses procédures sous-jacentes pour le calcul des parties exponentielles ainsi que l'algorithme de Pflügel [61] pour la réduction formelle. La contribution dans ce chapitre est l'estimation de la complexité du calcul de l'invariant de Katz (Proposition 1.6.4).

1.2 Notations et définitions

On considère le système

$$[A]: \quad x^{p+1}Y' = AY, \tag{1.2.1}$$

où Y est un vecteur de n composantes et A est une matrice carrée de taille n à coefficients dans l'anneau des séries formelles $\mathcal{C}[[x]]$. L'entier p est dans $\mathbb{Z}$. La matrice A admet un développement au voisinage de l'origine de la forme

$$A(x) := A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots, \quad A_0 \neq 0,$$

où les A_i sont des matrices constantes à coefficients dans le corps $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$.
Si $p \leq -1$, on dit que $x = 0$ est un *point ordinaire* du système. Si $p \geq 0$, on appelle p le *rang de Poincaré* du système $[A]$. Si $p = 0$, on dit que $x = 0$ est un *point singulier de première espèce* du système $[A]$. Si $p > 0$, on dit que $x = 0$ est un *point singulier de second espèce* du système $[A]$.

Définition 1.2.1 *Soit $\mathcal{K}$ est un corps différentiel. Une* transformation de jauge *est un changement de variable $Y = TZ$ où $T \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{K})$. Ce changement donne lieu à un nouveau système de même forme*

$$[\tilde{A}]: \qquad x^{\tilde{p}+1}Z' = \tilde{A}Z \tag{1.2.2}$$

où $\tilde{A}$ est à coefficients dans $\overline{\mathcal{C}}[[x]]$ avec $\tilde{A}_0 \neq 0$, $\tilde{p}$ un entier, et

$$\frac{\tilde{A}}{x^{\tilde{p}+1}} := T^{-1}\frac{A}{x^{p+1}}T - T^{-1}T'.$$

Les deux systèmes $[A]$ et $[\tilde{A}]$ sont dits équivalents *via T sur $\overline{\mathcal{C}}((x))$ et on notera $T[A] := \tilde{A}$ ($[A] \sim [\tilde{A}]$) .*

Remarque 1.2.2 *D'une manière générale, si $\mathcal{K}$ est un corps différentiel, on dit que $[A]$ et $[\tilde{A}]$ sont équivalents sur $\mathcal{K}$ s'il existe $T \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{K})$ telle que $\tilde{A} = T[A]$.*

Définition 1.2.3 *(Matrice fondamentale de solutions) Soit* $[A]$ *un système de taille* n*. On appelle une* matrice fondamentale de solutions*, une matrice carré de taille* n *dont les colonnes forment une base de solutions de* $[A]$*.*

Pour illustrer ce qui suit, nous commençons par le cas (bien connu) où $n = 1$. La série $\frac{1}{x^{p+1}}A$ admet un nombre fini de termes de puissance en x négative et se développe comme

$$\frac{1}{x^{p+1}}A(x) = \frac{1}{x^{p+1}}A_0 + \frac{1}{x^p}A_1 + \ldots + \frac{1}{x^2}A_{p-1} + \frac{1}{x}A_p + A_{p+1} + A_{p+2}x + \ldots$$

On a une équation scalaire de premier ordre dont une solution formelle est

$$Y(x) = \exp\left[\int \frac{1}{x^{p+1}}A(x)dx\right] = e^{R(x)}x^{\Lambda}e^{Q(x)},$$

où Q est la somme finie des intégrales de p termes de puissance en x inférieur ou égale à 2, R est la somme infinie des intégrales des termes de puissance en x positive et $\Lambda = A_p$. En particulier, si $p = 0$, $Q(x) = 0$ et la solution se réduit à $W(x)x^{\Lambda}$ où $W(x) \in \mathcal{C}[[x]] \setminus \{0\}$.

Dans le cas général où $n > 1$, dans [64], Turrittin montre l'existence d'une succession de transformations qui transforment le système $[A]$ en un système triangulaire supérieur à partir duquel on détermine une solution formelle. Cette procédure consistant à réduire le système pour trouver une solution formelle est appelée la *réduction formelle* du système $[A]$. Il a été montré (voir [64, 5, 70]) qu'il existe une matrice fondamentale de solutions formelles de la forme

$$Y(x) = \phi(x^{1/s})x^{\Lambda}\exp(Q(x^{-1/s})), \tag{1.2.3}$$

où

- s est un entier positif, appelé indice de *ramification* de Y.
- ϕ est une matrice inversible dont les coefficients sont dans $\overline{\mathcal{C}}((x^{1/s}))$.
- La matrice Q est diagonale et ses éléments q_i sont des polynômes en $x^{-1/s}$ à coefficients dans $\overline{\mathcal{C}}$. Elle est invariante sous des transformations de jauge (Définition 1.2.1). Quand $Q = 0$, on dit que le point $x = 0$ (ou le système) est *singulier régulier* si non, $x = 0$ est dit *singulier irrégulier*.
- La matrice Λ est constante et commute avec Q. Elle n'est pas invariante sous des transformations de jauge dans $\overline{\mathcal{C}}((x^{1/s}))$ mais, ses valeurs propres sont connues à un entier prés.

Soit U une matrice fondamentale de solutions formelles de $[A]$. La j-ième colonne de U peut être écrite sous la forme :

$$y_j = e^{\int w_j}z_j, \tag{1.2.4}$$

où z_j est un vecteur colonne à coefficients dans $\bar{\mathcal{C}}((x^{1/s_j}))[\log(x)]$ et

$$w_j := \frac{dq_j}{dx} + \frac{\lambda_j}{x} \in x^{-1}\overline{\mathcal{C}}[x^{-1/s_j}], \tag{1.2.5}$$

où λ_j est une valeur propre de Λ, s_j est diviseur de s et q_i un élément sur la diagonale de Q. Si s_j est l'indice minimal qui permet d'écrire y_j, on appelle s_j la *ramification de* y_j.

Définition 1.2.4 *(Partie exponentielle du système) Soit U une matrice fondamentale de solutions d'un système $[A]$. Pour tout vecteur solution de la forme* (1.2.4)*, on appelle w_j* (1.2.5) *une partie exponentielle du système $[A]$.*

En un point ordinaire, $[A]$ admet une matrice fondamentale de solution $\phi(x)$ qui admet un développement en série de Taylor au voisinage de $x = 0$ (voir [70]). Pour un point singulier de première espèce, il existe une matrice fondamentale de solutions de la forme $\phi(x)x^{\Lambda}$ (voir [29, Théorème 2.1 p.111]). En fait, même si $p \geq 1$, le système peut parfois admettre au voisinage de $x = 0$ une matrice fondamentale de solutions de la forme $\phi(x)x^{\Lambda}$. En effet, Horn montre dans [38] que l'origine est une singularité régulière si et seulement si le système est équivalent par une transformation de jauge à un système dont la singularité est de première espèce.

1.3 Lemme de découplage : « splitting lemma »

On considère le système de la forme (1.2.1). Si la *matrice principale* A_0 de A admet deux valeurs propres distinctes, alors il existe une matrice P_0 à coefficients constants telle que $P_0^{-1}A_0P_0 := A_0^{11} \oplus A_0^{22}$. On peut alors construire une transformation P à coefficients dans $\mathcal{C}[[x]]$ telle que $P[A]$ admette la même décomposition que A_0, $P[A] := A^{11} \oplus A^{22}$.

Lemme 1.3.1 *(Lemme de découplage, [70, p. 52-54]) Soit $[A]$ un système de la forme* (1.2.1) *et de dimension n. On suppose que A_0 est diagonale par blocs :*

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_0^{11} & 0 \\ 0 & A_0^{22} \end{pmatrix},$$

où $\operatorname{spec}(A_0^{11}) \cap \operatorname{spec}(A_0^{22}) = \varnothing$. Alors, il existe une unique transformation T inversible dans $\mathrm{GL}_n(\mathcal{C}[[x]])$, de la forme

$$T = \mathrm{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & T_k^{12} \\ T_k^{21} & 0 \end{pmatrix} x^k, \tag{1.3.1}$$

telle que le changement de variable $Y = TZ$ donne le nouveau système

$$x^{p+1}Z' = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{11} & 0 \\ 0 & \tilde{A}^{22} \end{pmatrix} Z \quad avec \quad \tilde{A}_0 = A_0.$$

Preuve. On va d'une part montrer qu'il existe une unique solution T de la forme (1.3.1) qui vérifie la relation

$$x^{p+1}T' := AT - T\tilde{A}, \tag{1.3.2}$$

et d'autre part, trouver les termes du nouveau système $[\tilde{A}]$. On pose $T = \mathrm{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & T_k^{12} \\ T_k^{21} & 0 \end{pmatrix} x^k$ et $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{11} & 0 \\ 0 & \tilde{A}^{22} \end{pmatrix}$. On partitionne la matrice A de la même façon que A_0 :

$$A := \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}.$$

Par identification dans (1.3.2), on obtient :

$$A^{11} - \tilde{A}^{11} + A^{12}T^{21} = 0, \tag{1.3.3}$$

$$A^{22} - \tilde{A}^{22} + A^{21}T^{12} = 0, \tag{1.3.4}$$

$$x^{p+1}\frac{d}{dx}T^{12} = A^{11}T^{12} - T^{12}\tilde{A}^{22} + A^{12}, \tag{1.3.5}$$

$$x^{p+1}\frac{d}{dx}T^{21} = A^{22}T^{21} - T^{21}\tilde{A}^{11} + A^{21}. \tag{1.3.6}$$

En substituant A^{11} par sa série $\sum_{i=0}^{\infty} A_i^{11}x^i$, A^{12} par $\sum_{i=0}^{\infty} A_i^{12}x^i$, $\tilde{A}^{11}$ par $\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{A}_i^{11}x^i$ et T^{21} par $\sum_{i=1}^{\infty} T_i^{21}x^i$ dans (1.3.3) et par identification du terme constant il vient

$$A_0^{11} - \tilde{A}_0^{11} = 0.$$

On procède de même pour l'équation (1.3.4) on a $A_0^{22} - \tilde{A}_0^{22} = 0$. Maintenant afin de déterminer le terme suivant de $\tilde{A}$, nous avons besoin de connaître un terme supplémentaire de T. Ceci peut être réalisé à travers les égalités (1.3.5) et (1.3.6). En effet, on a pour $k < p+1$

$$\begin{cases} A_0^{11}T_k^{12} - T_k^{12}A_0^{22} = -A_k^{12} - \sum_{i=1}^{k-1}(A_i^{11}T_{k-i}^{12} - T_{k-i}^{12}\tilde{A}_i^{22}), & \text{(1.3.7a)} \\ A_0^{22}T_k^{21} - T_k^{21}A_0^{11} = -A_k^{21} - \sum_{i=1}^{k-1}(A_i^{22}T_{k-i}^{21} - T_{k-i}^{21}\tilde{A}_i^{11}), & \text{(1.3.7b)} \end{cases}$$

et pour $k \geq p+1$

$$\begin{cases} A_0^{11}T_k^{12} - T_k^{12}A_0^{22} = -A_k^{12} - \sum_{i=1}^{k-1}(A_i^{11}T_{k-i}^{12} - T_{k-i}^{12}\tilde{A}_i^{22}) + (k-p)T_{k-p}^{12}, & \text{(1.3.8a)} \\ A_0^{22}T_k^{21} - T_k^{21}A_0^{11} = -A_k^{21} - \sum_{i=1}^{k-1}(A_i^{22}T_{k-i}^{21} - T_{k-i}^{21}\tilde{A}_i^{11}) + (k-p)T_{k-p}^{21}. & \text{(1.3.8b)} \end{cases}$$

Il est clair que T_k^{12}(resp. T_k^{21}) dépend des A_i pour $i \leq k$ et de T_k^{12}, $\tilde{A}_i$ (resp. A_i, T_k^{21}, $\tilde{A}_i$) pour $i < k$. Donc, pour tout k, les équations (1.3.7a) et (1.3.8a) (resp. (1.3.7b) et (1.3.8b)) des systèmes précédents sont des *équations de Sylvester* qui admettent une solution unique T_k^{12} (resp. T_k^{21}) car $\mathrm{spec}(A_0^{11}) \cap \mathrm{spec}(A_0^{22}) = \emptyset$ (voir Section 1.3.2).

Lorsque T_k^{12} et T_k^{21} sont déterminés, il reste à exploiter les équations (1.3.3) et (1.3.4), afin d'obtenir un nouveau terme dans $\tilde{A}$:

$$\begin{cases} \tilde{A}_k^{11} &= A_k^{11} + \sum_{i=0}^{k} A_i^{12}T_{k-i}^{21}, \\ \tilde{A}_k^{22} &= A_k^{22} + \sum_{i=0}^{k} A_i^{21}T_{k-i}^{12}. \end{cases}$$

Ainsi, les termes dans $\tilde{A}$ et T se calculent en alternance. ■

1.3.1 Exemples

Exemple 1.3.2 *On considère le système $x^{p+1}Y' = A(x)Y$ avec $p = 3$ et*

$$A := \begin{bmatrix} x - 2\,x^2 & x^2 & x^3 \\ -x^2 & -x^2+1 & -x \\ x^2 & x^4 - x^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice principale est

$$A_0 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elle admet deux valeurs propres distinctes ($\lambda_1 = 0$ valeur propre simple et $\lambda_2 = 1$ valeur propre double). Le lemme de découplage calcule une transformation pour une précision

donnée, on choisit par exemple $k = 5$:

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 3\,x^4 + 2\,x^3 & x^3 + x^2 \\ 2\,x^4 - x^3 - x^2 & 1 & 0 \\ -2\,x^4 + x^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^5)$$

et un système équivalent diagonal par blocs $x^{p+1}Y' = \tilde{A}(x)Y$ avec $p = 3$ et

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} x^4 - 2\,x^2 + x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\,x^4 - x^2 \\ 0 & -x & -x^4 - x^2 + 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^5).$$

En particulier, si la matrice principale A_0 admet n valeurs propre distinctes, le lemme de découplage permet de découpler le système en n sous-systèmes scalaires se résolvant de façon indépendantes.

Exemple 1.3.3 *On considère le système $x^2Y' = AY$ avec*

$$A := \begin{bmatrix} -27 & 13\,x & x \\ 32 & 6\,x & 0 \\ 0 & -33\,x & 33 \end{bmatrix}.$$

La matrice principale est

$$A_0 := \begin{bmatrix} -27 & 0 & 0 \\ 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33 \end{bmatrix}$$

qui admet trois valeurs propres distinctes ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 33$, $\lambda_3 = -27$).

Le lemme de découplage calcule une transformation pour une précision donnée, on choisit par exemple $k = 2$:

$$T := \begin{bmatrix} 1 & \frac{32\,x}{891} & -\frac{578\,x}{729} \\ x & 1 & 0 \\ -\frac{416\,x}{729} & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^2)$$

et un système équivalent diagonal par blocs $x^2Y' = \tilde{A}(x)Y$ *avec*

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} \frac{578}{27}x & 0 & 0 \\ 0 & 33 & -33x \\ 0 & -\frac{32}{27\,x} & \left(-27 - \frac{416\,x}{27}\right) \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^2).$$

On applique le lemme de découplage sur le système $x^2Y' = A_2Y$ *avec*

$$A_2 := \begin{bmatrix} 33 & -33x \\ -\frac{32}{27}x & -27 - \frac{416}{27}x \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^2).$$

Le lemme de découplage calcule une transformation

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{8\,x}{405} \\ \frac{11\,x}{20} & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^2)$$

et un système équivalent diagonal $x^2Y' = \tilde{A}_2(x)Y$ *avec*

$$\tilde{A}_2 := \begin{bmatrix} -27 - \frac{416}{27}x & 0 \\ 0 & 33 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^2).$$

Ainsi, on obtient un système équivalent $x^2Y' := BY$ *de matrice diagonale*

$$B = \begin{bmatrix} \frac{578}{27}x & 0 & 0 \\ 0 & -27 - \frac{416}{27}x & 0 \\ 0 & 0 & 33 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^2).$$

1.3.2 Résolution d'une équation de Sylvester

L'existence et l'unicité de la transformation dans le lemme de découplage est basée sur la résolution d'un nombre fini d'équations de Sylvester.

Définition 1.3.4 *On appelle* équation de Sylvester *une équation matricielle de la forme*

$$AX - XB = C, \tag{1.3.9}$$

où A, B *et* C *sont trois matrices à coefficients dans* $\mathcal{C}$ *et de dimensions respectives* $n \times n$, $m \times m$ *et* $n \times m$.

Nous consacrons cette section aux équations de Sylvester, notamment à l'existence d'une

solution unique et aux méthodes de résolution existantes dans la littérature, afin d'estimer la complexité du lemme de découplage.

Unicité de la solution

Par souci d'exhaustivité, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution d'une équation de Sylvester.

Lemme 1.3.5 *L'équation* (1.3.9) *admet une unique solution* $X \in \mathcal{C}^{n\times m}$ *si et seulement si* A *et* B *sont à spectres disjoints.*

Preuve. L'équation (1.3.9) peut être transformée en un système linéaire du premier ordre de dimension $n \times m$

$$(A \otimes I - I \otimes {}^tB)\tilde{X} = \tilde{C}, \tag{1.3.10}$$

où les entrées du vecteur $\tilde{X}$ (resp. $\tilde{C}$) sont les entrées de la matrice X (resp. C), $\tilde{X} := {}^t(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{21}, \cdots, x_{nm})$ (resp. $\tilde{C} := {}^t(c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{21}, \cdots, c_{nm})$). Le système (1.3.10) admet une solution unique $\tilde{X}$ si et seulement si la matrice $A \otimes I - I \otimes {}^tB$ est inversible. Or, les valeurs propres de cette matrice sont $\lambda - \mu$ où $\lambda \in \text{spec}(A)$ et $\mu \in \text{spec}(B)$. Donc, la matrice $A \otimes I - I \otimes {}^tB$ est inversible si et seulement si $\mu \neq \lambda$, pour tout $\lambda \in \text{spec}(A)$ et $\mu \in \text{spec}(B)$, i.e, spectres disjoints. ■

Méthodes de résolution

La méthode naïve revient à résoudre un système linéaire $(A \otimes I - I \otimes {}^tB)\tilde{X} = \tilde{C}$ de dimension $n \times m$. Ceci s'effectuerait en au plus $\mathcal{O}(n^3m^3)$ opérations en passant par l'élimination de Gauss. Une deuxième méthode consiste à supposer que B est sous forme de Jordan. On remplace X par XP et C par CP où P est telle que $J := P^{-1}BP$ est une matrice de Jordan supérieure. On se restreint donc au cas où $B = \text{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m) + N$ où N est la matrice nilpotente qui contient 0 partout sauf sur la deuxième diagonale où il y a des 1 ou des 0. En notant X_i (resp. C_i) la i-ème colonne de X (resp. C), on a :

$$AX - XB = C$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} (A - \mu_1 \mathrm{I}_n)X_1 & = C_1 \\ (A - \mu_i \mathrm{I}_n)X_i & = C_i + \epsilon_{i-1}X_{i-1} \quad \textit{pour} \quad i = 2 \ldots m, \end{cases} \tag{1.3.11}$$

avec $\epsilon_{i-1} = 0$ ou 1. Grâce à l'hypothèse sur le spectre de A et B, on sait que $A - \mu_i \mathrm{I}_n$ est toujours inversible. Ainsi, les équations précédentes nous permettent de trouver les colonnes de X récursivement. On a besoin d'inverser uniquement la matrice A et pour

chaque colonne X_i, il suffit de plus de multiplier une matrice de taille $n \times n$ par un vecteur de taille n. En procédant de la sorte, des extensions algébriques peuvent apparaître dans les calculs intermédiaires. C'est le cas, par exemple, si B admet une valeur propre dans une extension algébrique non triviale de $\mathcal{C}$. Une autre méthode présente dans la littérature (par exemple, algorithme de Bartels et Stewart [22], ou encore la méthode de Hessenberg-Schur, voir dans l'introduction de l'article de Kirrinnis [41]) calcule les valeurs propres de A ou bien de B pour construire une décomposition de Schur. Cette décomposition peut introduire des extensions algébriques du corps des constantes. En pratique, comme les données elles-mêmes sont rationnelles ainsi que la sortie X, nous voulons éviter l'introduction des extensions algébriques dans les calculs intermédiaires. Dans [41], Kirrinnis propose une méthode de résolution d'une équation de Sylvester qui utilise uniquement des opérations dans $\mathcal{C}$. L'idée est de transformer les matrices A et B sous formes de Frobenius (compagnon) en utilisant l'algorithme de Keller-Gehrig [40]. Cet algorithme produit des matrices équivalentes triangulaires supérieures par blocs et dont les blocs sur la diagonale sont des matrices de Frobenius (ou compagnon) à coefficients dans $\mathcal{C}$. Enfin, Kirrinnis utilise un algorithme de type « diviser pour régner » afin de résoudre l'équation de Sylvester pour ce type de matrices. Pour plus de détails, on invite le lecteur à consulter le papier [41].

Complexité

Nous supposons que deux matrices carrées de taille N à coefficients dans $\mathcal{C}$ peuvent être multipliées en $\mathcal{O}(N^\omega)$ opérations dans $\mathcal{C}$ où $2 \leq \omega \leq 3$ est l'exposant de multiplication de matrice (voir [69, Chapitre 12]).

Lemme 1.3.6 ([41], Théorème 1) *On considère l'équation de Sylvester $AX - XB = C$ où A et B et C sont des matrices à coefficients dans $\mathcal{C}$ et de dimension respectives n, m et $n \times m$. On suppose que n, $m \leq N$. La résolution d'une équation de Sylvester* (1.3.9) *avec la méthode de Kirrinnis s'effectue en $\mathcal{O}(N^\omega \log(N))$ opérations dans $\mathcal{C}$.*

1.3.3 Complexité du lemme de découplage

On considère un système $x^{p+1}Y' = AY$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C}[[x]])$. On suppose que la matrice principale A_0 de A est telle que $A_0 = A_0^{11} \oplus A_0^{22}$ sur $\mathcal{C}$ avec $\mathrm{spec}(A_0^{11}) \cap \mathrm{spec}(A_0^{22}) = \varnothing$. L'algorithme de découplage présenté dans la preuve du lemme 1.3.1 montre que pour calculer les k premiers termes du nouveau système B découplé, on a besoin de résoudre $2k$ équations de Sylvester. Dans le cas où A_0^{11} (ou bien A_0^{22}) est nilpotente, la complexité de cette résolution est donnée dans ([16], Théorème A.2). Barkatou et Pflügel montrent que, résoudre les $2k$ équations de Sylvester se fait en au plus $\mathcal{O}(kn^3)$ opérations dans $\mathcal{C}$.

Maintenant, il reste à estimer le coût de la construction de ses équations de Sylvester (le second membre). En effet, pour passer de la précision i à la précision $i+1$, nous avons besoin d'effectuer $2i$ multiplications de matrices. En sommant de 1 à k nous obtenons en total une complexité en $O(k^2n^3)$ opérations dans $\mathcal{C}$. Par conséquent, la complexité totale pour appliquer le lemme de découplage pour une précision k est majoré par $O(k^2n^3)$ opérations dans $\mathcal{C}$.

Dans le lemme suivant, nous estimons le nombre d'opérations dans $\mathcal{C}$ dans le cas général lorsque A_0 est semblable à $A_0^{11} \oplus A_0^{22}$ sur $\mathcal{C}$ avec $\mathrm{spec}(A_0^{11}) \cap \mathrm{spec}(A_0^{22}) = \varnothing$ sans supposer que A_0^{11} est nilpotente.

Lemme 1.3.7 *Avec les notations du lemme 1.3.1, le coût de calcul des k premiers termes de la transformation de découplage P ainsi que ceux du nouveau système $\tilde{A}$ est majoré par $\mathcal{O}(k^2n^3log(n))$ opérations dans $\mathcal{C}$.*

Preuve. Trouver une matrice constante Q telle que $Q^{-1}A_0Q = A_0^{11} \oplus A_0^{22}$ (en passant par l'élimination de Gauss) peut s'effectuer en $\mathcal{O}(n^3)$ opérations dans $\mathcal{C}$. Calculer $Q^{-1}AQ$ pour une précision k est majorée par $\mathcal{O}(kn^\omega)$ opérations dans $\mathcal{C}$. Résoudre $2k$ équations de Sylvester en utilisant l'algorithme dans [41] se fait en $\mathcal{O}(kn^\omega \log(n))$. Enfin, la construction des équations de Sylvester se fait en $O(k^2n^\omega)$. En conclusion, la complexité est majorée par $\mathcal{O}(k^2n^3log(n))$ opérations dans $\mathcal{C}$. ■

1.4 Calcul du rang de Poincaré minimal

Considérons un système $[A]$ de la forme $x^{p+1}Y' = AY$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C}[[x]])$. Soit $T \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{C}((x)))$. Soit le système équivalent $[T[A]]$ de la forme $x^{p'+1}Y' = BY$ avec $B := T[A] \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C}[[x]])$. Si $p' < p$ on dit que le rang de Poincaré du système $[A]$ a été réduit. La *réduction du rang* est le processus qui permet de construire un système équivalent de rang de Poincaré minimal. Dans le cas où la singularité est régulière, la réduction du rang permet de construire un système équivalent de première espèce. Nous présentons dans ce qui suit la réduction de Moser.

1.4.1 Critère de réductibilité de Moser

Dans [55], Moser a donné un critère pour réduire le rang de Poincaré. Il définit deux nombres :

1. *L'ordre* de $[A]$:
$$m(A) = \max(0; p + \frac{r}{n})$$
où r est le rang de la matrice A_0, $0 < r \leq n$.

2. La valeur minimale des ordres de tous les systèmes équivalents à $[A]$:

$$\mu(A) = \min(m(P[A])); \quad P \in \mathrm{GL}_n(\bar{\mathcal{C}}((x))).$$

Le système $[A]$ est dit *réductible au sens de Moser* si $m(A) > \mu(A)$.
Quand $m(A) > 1$, Moser a donné une condition nécessaire et suffisante pour que le système soit réductible. Celle-ci dépend uniquement des deux premiers termes A_0 et A_1.

Proposition 1.4.1 *([55, théorèmes 1 & 2]) Si $m(A) > 1$, le système $[A]$ est réductible au sens de Moser si et seulement si le polynôme ,dit* polynôme de Moser*,*

$$x^{\mathrm{rang}(A_0)} \det(\lambda \mathrm{I}_n + \frac{A_0}{x} + A_1) \mid_{x=0} \tag{1.4.1}$$

est identiquement nul. Dans ce cas, la réduction peut être effectuée par une transformation de la forme

$$(P_0 + xP_1)\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, x, x, \ldots, x) \tag{1.4.2}$$

avec P_0 et P_1 sont des matrices constantes et $\det(P_0) \neq 0$.

Chaque application de la proposition 1.4.1, diminue le rang de Poincaré du système. Par conséquent, $x = 0$ est un point singulier régulier si et seulement si il existe une transformation P qui est un produit de transformation de la forme (1.4.2) telle que le système $[P[A]]$ admette un rang de Poincaré $p = 0$.

1.4.2 Algorithmes existants et complexité

Plusieurs auteurs donnent un caractère pratique au critère de Moser et proposent des algorithmes effectifs qui calculent en un nombre fini d'étapes une transformation qui réduit le système pour obtenir un système équivalent de rang de Poincaré minimal (par exemple [35, 6]). En 2007, Barkatou et Pflügel proposent un nouvel algorithme pour la réduction de Moser en utilisant des systèmes super-réductibles [15]. Ils donnent dans [16] une analyse de complexité.

Lemme 1.4.2 *([16, Proposition 2.2]) Soit $[A]$ un système de la forme $x^{p+1}Y' = AY$, de taille n et de rang de Poincaré p. Le calcul d'une transformation P ainsi que des k premiers termes du système équivalent $[P[A]]$ irréductible au sens de Moser se fait en $\mathcal{O}(kpn^4)$ multiplications dans $\mathcal{C}$.*

1.5 Polygone de Newton

On considère une équation différentielle linéaire d'ordre n de la forme

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = 0, \tag{1.5.1}$$

où les a_i est dans $\mathcal{C}((x))$. Le *polygone de Newton* est construit à partir des coefficients a_i. À chaque a_i on associe le point $(i, \mathrm{val}(a_i) - i)$. On construit l'enveloppe convexe supérieure de l'ensemble des points $(i, \mathrm{val}(a_i) - i)$.

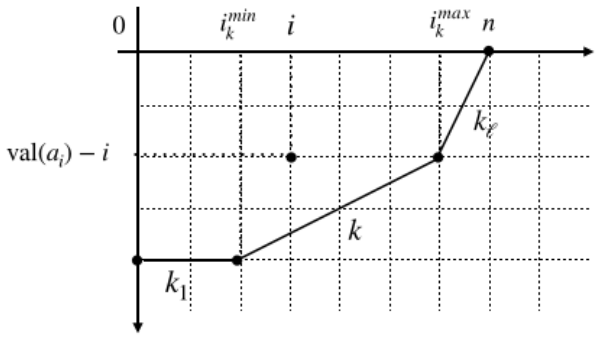


FIGURE 1.1 – Polygone de Newton

Le polygone de Newton est alors formé par les segments S_{k_i} de pentes positives $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_\ell$. Pour chaque segment S_k, on définit l'ensemble $I(k)$ des abscisses i des points $(i, \mathrm{val}(a_i) - i)$ appartenant au segment S_k. On pose $i_0^{\min} = 0$, $i_k^{\min} := \min(I(k))$ et $i_k^{\max} := \max(I(k))$ pour $k > 0$. Le *polynôme de Newton* associé à la pente k est un polynôme à coefficients constants défini comme suit

$$P_k(\lambda) = \lambda^{-i_k^{\min}} \sum_{i \in I(k)} \mathrm{lcoeff}(a_i)\lambda^i, \tag{1.5.2}$$

où $\mathrm{lcoeff}(a_i)$ est le coefficient principal de a_i. Le degré de $P_k(\lambda)$ est $i_k^{\max} - i_k^{\min}$.

Proposition 1.5.1 (Malgrange) *Pour toute pente k du polygone de Newton et pour toute racine a du polynôme de Newton associé de multiplicité m, il existe m parties exponentielles de terme principal $\frac{a}{x^{k+1}}$, i.e, de la forme $\frac{a}{x^{k+1}} + \cdots$.*

Tout système de la forme (1.2.1) peut se transformer en une équation scalaire (1.5.1) en utilisant la méthode des vecteurs cycliques (Théorème 3.1 dans [50], voir Section 2 dans [37]). Cette équation n'est pas unique elle dépend du choix du vecteur cyclique. Toutefois, pour tout choix de vecteur cyclique, les équations obtenues admettent le même polygone de Newton. Par conséquent, on peut définir le polygone de Newton pour les systèmes. Dans [36], en se basant sur les formes super-irréductibles du système, Hilali présente un algorithme de calcul du polygone de Newton du système sans utiliser la méthode des vecteurs cycliques.

1.6 Calcul de l'invariant de Katz

Rappelons tout d'abord la définition de l'invariant de Katz d'un système différentiel.

Définition 1.6.1 *Soit* $[A]$ *un système différentiel à singularité irrégulière. Le "degré" en* x^{-1} *de la partie exponentielle* $Q(x^{-1/s})$ *est un nombre rationnel positif appelé* invariant de Katz *du système* $[A]$ *(noté* κ*).*

On peut déduire de la proposition 1.5.1 que l'invariant de Katz κ coïncide avec la plus grande pente du polygone de Newton de $[A]$.

Dans [37], Hilali et Wazner développent un algorithme de calcul de l'invariant de Katz en utilisant le polynôme caractéristique de la matrice A du système. Ils montrent que lorsque le système est Moser réduit et A_0 nilpotente avec $p > r + 1$ où r est le rang de A_0, alors l'invariant de Katz peut se déduire directement à partir des coefficients du système. Ils montrent également que si la condition $p > r + 1$ n'est pas vérifiée, alors, avec une ramification $x = t^m$, on peut se ramener au cas où $p > r + 1$. Dans [7], Barkatou propose un algorithme analogue à celui de Hilali et Wazner pour le calcul de l'invariant de Katz fournissant une nouvelle condition $p > n - r$. Il montre également comment on peut déterminer le polynôme de Newton associé à κ afin d'obtenir les termes principaux des parties exponentielles correspondantes. Dans [10], Barkatou donne une version plus fine de l'algorithme de calcul de κ en remplaçant la condition $p > r + 1$ par :

$$p \geq (r + 1)(1 - \frac{r}{n - d}).$$

Barkatou estime également le nombre de termes suffisants de la matrice A qui interviennent dans le calcul de κ et de son polynôme de Newton associé.

Dans ce paragraphe, nous présentons l'algorithme de Barkatou ([10]) qui calcule l'invariant de Katz d'un système différentiel qui est irréductible au sens de Moser à partir du polynôme caractéristique de la matrice $A(x)$. Nous donnerons aussi sa complexité.
Cet algorithme est basé sur le résultat suivant ([10, Corollaire 2, p. 212]) qui améliore [37, Théorème 2, p 76-77] et [7, Théorème 1, p. 11].

Théorème 1.6.2 *([10, Théorème 3 et Corollaire 2]) On considère un système irréductible au sens de Moser* $x^{p+1}Y' = AY$, $A = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu x^\nu$ *de taille* n *et de rang de Poincaré* $p > 0$ *(*$A_0 \neq 0$*). On suppose que* A_0 *est nilpotente et soient* $r = \operatorname{rang}(A_0)$ *et* $d = \deg \mathcal{B}(A, \lambda)$ *le*

degré du polynôme de Moser [1]. *Soit* χ_A *le polynôme caractéristique de* A *:*

$$\chi_{\frac{A}{x^p}}(\lambda) := \det(\lambda I_n - \frac{A}{x^p}) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0,$$

où les a_i *sont dans* $\mathcal{C}((x))$*. Si* $p \geq (r+1)(1-\frac{r}{n-d})$*, alors*

$$\kappa = \max_{0 \leq i < n} \left(\frac{-\mathrm{val}(a_i)}{n-i}\right). \tag{1.6.1}$$

La preuve du théorème ci-dessus utilise les inégalités suivantes sur l'invariant de Katz ([60, Théorème 5.1] et [10, Proposition 3]) :

$$p - 1 + \frac{r}{n-d} \leq \kappa \leq p - \frac{1}{r+1}.$$

Ces inégalités sont valables pour tout système $[A]$ irréductible au sens de Moser avec une matrice principale nilpotente A_0. Dans le cas particulier où $n - d = r + 1$ on a $\kappa = p - 1 + \frac{r}{n-d} = p - \frac{1}{r+1}$.

On a les résultats suivants :

— Dans [10] (voir Proposition 4, p. 212), il est également montré que κ est déterminé par les coefficients $A_0, A_1, \cdots, A_{n-d-r}$ dans le développement de Taylor de $A(x)$. Il s'ensuit que dans le théorème ci-dessus, nous pouvons remplacer $\chi_{\frac{A}{x^p}}(\lambda)$ par $\chi_{x^{-p}A^{<n-d-r>}}$ où $A^{<n-d-r>} = A$ modulo $x^{n-d-r+1}$.

— D'une façon similaire aux résultats [37, Lemme 6, p.79] et [7, Lemme 5], lorsque la condition $p \geq (r+1)(1-\frac{r}{n-d})$ n'est pas vérifiée alors, en utilisant une ramification appropriée $x = t^m$ (où m est le plus petit entier qui vérifie $m \geq n/(p-1+r/(n-d))$), on peut construire un système Moser irréductible $t^{\tilde{p}+1}Y' = \tilde{A}(t)\tilde{Y}$ de rang de Poincaré $\tilde{p} \geq n$ et donc satisfaisant la condition requise $\tilde{p} \geq (\tilde{r}+1)(1-\frac{\tilde{r}}{n-d})$ (voir [10, Remarque 8]).

Ces résultats conduisent à l'algorithme suivant ([10]) :

1. On rappelle que $\mathcal{B}(A,\lambda) := x^r \det(\lambda \mathrm{I}_n - A_0/x - A_1)_{|_{x=0}}$

Algorithme 1 L'invariant de Katz

Entrée : Un système différentiel $[A] : x^{p+1}Y' = A(x)Y$ où $A(x)$ est une matrice de taille n à coefficients dans $\mathcal{C}[[x]]$ et de rang de Poincaré p.

Sortie : κ : l'invariant de Katz du système $[A]$.

1: Appliquer la réduction de Moser pour un obtenir un système $[A]$ de rang de Poincaré minimal p.
2: Soit $r := \operatorname{rang}(A_0)$ et $d := \deg \mathcal{B}(A, \lambda)$
3: Si $p = 0$ ou A_0 n'est pas nilpotente, retourner $\kappa = p$.
4: Si $p > 0$, A_0 est nilpotente et $n - d - r - 1 = 0$, retourner $\kappa = p - 1/(r+1)$.
5: Si $p \geq (r+1)(1 - \frac{r}{n-d})$, alors calculer les coefficients $a_i(x)$ du polynôme caractéristique de $\chi_{x^{-p}A^{<n-d-r>}}$ et retourner $\kappa = \max_{0 \leq i < n}(\frac{-\mathrm{val}(a_i)}{n-i})$.
6: Si non
   a: Choisir $m := n + \min(0, 1-p)$ et remplacer x par x^m.
   b: Appliquer la réduction de Moser. On obtient un nouveau système $[\tilde{A}]$ de rang de Poincaré $\tilde{p}$.
   c: Si $\tilde{A}_0$ est non nilpotente, retourner $\frac{\tilde{p}}{m}$.
   d: Si $\tilde{A}_0$ est nilpotente, calculer $\tilde{\kappa} := \max_{0 \leq i < n}(\frac{-\mathrm{val}(\tilde{a}_i)}{n-i})$ où $\tilde{a}_i$ sont les coefficients de $\chi_{x^{-\tilde{p}}\tilde{A}^{<n-\tilde{d}-\tilde{r}>}}$ et retourner $\kappa = \tilde{\kappa}/m$.

Remarque 1.6.3 *On pose $\hat{A} = \frac{A}{x^p}$ et on note a_i (resp. $\hat{a}_i$) les coefficients de χ_A (resp. $\chi_{\hat{A}}$). On a les égalités suivantes*

$$\max_{0 \leq i < n}\left(\frac{-\mathrm{val}(\hat{a}_i)}{n-i}\right) = \max_{0 \leq i < n}\left(\frac{-\mathrm{val}(a_i) + (n-i)p}{n-i}\right) = p + \max_{0 \leq i < n}\left(\frac{-\mathrm{val}(a_i)}{n-i}\right).$$

En particulier, il est suffisant de calculer le polynôme caractéristique de A.

Nous donnons maintenant une estimation

Proposition 1.6.4 *Considérons le système irréductible au sens de Moser $x^{p+1}Y' = AY$, de rang de Poincaré $p > 0$ et où A est une matrice à coefficients dans $\mathcal{C}[[x]]$ et de taille n. Le calcul de l'invariant de Katz en utilisant l'algorithme 1 se fait en au plus $\mathcal{O}(p^2n^5) + \mathcal{O}(pn^6) = \mathcal{O}(\max(p,n)pn^5)$ opérations dans $\mathcal{C}$.*

Preuve. À l'étape 1 de l'algorithme 1, on appliquer la réduction de Moser ([16]) sur le système tronqué

$$[A^{<\nu>}] := [A_0 + \ldots + A_\nu x^\nu]$$

où $\nu = pn - 1$ (car les parties exponentielles de $[A]$ ne dépendent que des premiers np termes dans le développement en série de $A(x)$ ([39])). D'après [16, Proposition 2.2], cette réduction de Moser coûte au plus $\mathcal{O}(p^2n^5)$ opérations dans $\mathcal{C}$. Si la condition 5 de l'algorithme 1 est vérifiée, alors on calcule le polynôme caractéristique de la matrice tronquée $x^{-p}A^{<n-d-r>} = x^{-p}(A_0 + \ldots + A_{n-d-r}x^{n-d-r})$ et on obtient κ en appliquant la formule (1.6.1). D'après la remarque 1.6.3, il suffit de calculer le polynôme caractéristique

de $A(x) := A_0 + \ldots + A_{n-r-d}x^{n-r-d}$ à coefficients dans $\mathcal{C}[[x]]/(x^{n-r-d+1})$. En utilisant par exemple l'algorithme de Le Verrier ([1]), le calcul de χ_A peut s'effectuer en au plus $\mathcal{O}(n^4)$ opérations dans l'anneau $\mathcal{C}[[x]]/(x^{n-r-d+1})$. Cela correspond à $\mathcal{O}(M(n)n^4)$ opérations dans $\mathcal{C}$ où $M(n)$ est le coût de la multiplication dans $\mathcal{C}$ des polynômes de degré au plus n. Si la condition 5 n'est pas vérifiée (ceci implique $p < n$), on applique d'abord une réduction de Moser sur le système ramifié obtenu en remplaçant x par x^m (avec $m = n$ ou $m = n+1$). Ce système admettant un rang de Poincaré mp par conséquent, le coût de la réduction de Moser est alors au plus $\mathcal{O}(pmn^5) = \mathcal{O}(pn^6)$ opérations dans $\mathcal{C}$. Enfin, calculer le polynôme caractéristique de la nouvelle matrice $\hat{A}$ peut s'effectuer en $\mathcal{O}(M(n)n^4) = \mathcal{O}(n^6)$ opérations au plus ($M(n)$ est bornée par $\mathcal{O}(n^2)$, voir Théorème 2.1 dans [24]). Ainsi, le coût total de l'algorithme dans le pire des cas est égal à $\mathcal{O}(\max(p,n)pn^5)$ opérations dans $\mathcal{C}$. ■

1.7 Solution formelle d'un système différentiel

On considère le système

$$x^{p+1}Y' = AY$$

où A est une matrice de taille n à coefficients dans $\mathcal{C}[[x]]$.

1.7.1 Résolution au voisinage d'un point singulier régulier

Dans cette section, nous rappelons brièvement les principaux résultats pour la résolution d'un système au voisinage d'un point singulier régulier (voir par exemple [70, Chapitre 2]). Sans perte de généralité, nous supposons que le système est de rang de Poincaré minimal, i.e, $p = 0$. Le système est alors de la forme

$$xY' := AY \quad \text{où} \quad A := A_0 + A_1x + \ldots. \tag{1.7.1}$$

La réduction s'effectue en regardant le spectre de la matrice principale A_0 :

Théorème 1.7.1 *([70, Théorème 5.1]) On considère un système de la forme* (1.7.1). *Si la matrice A_0 admet des valeurs propres qui ne diffèrent pas entre elles d'un entier non nul, alors il existe une transformation de séries formelles $P := (P_0 + P_1x + \ldots)$ avec $P_0 = I_n$ telle que le changement de variables $Y = PZ$ donne le système équivalent $xZ' = A_0Z$.*

Théorème 1.7.2 *([70, p. 94-95]) On considère un système de la forme* (1.7.1). *Alors, il existe une transformation inversible P à coefficients dans $\mathcal{C}[x]$ telle que les valeurs propres de la matrice principale de $P[A]$ ne différent pas entre elles d'un entier non nul.*

Par conséquent, tout système singulier régulier admet une matrice fondamentale de solutions formelles de la forme

$$\phi(x)x^{\Lambda},$$

où Λ est une matrice constante et ϕ une matrice de série formelle ([70, Théorème 5.5]).

1.7.2 Résolution au voisinage d'un point singulier irrégulier

Plusieurs stratégies ont été proposées dans la littérature ([64, 70, 46, 5, 28, 7, 61]). Elle consistent à réduire le système en sous-systèmes de dimensions plus petites. La procédure s'arrête lorsque tous les sous-systèmes sont soit de dimension 1 soit de rang de Poincaré $p = 0$. Le résultat ci-dessous est à la base de ces divers algorithmes.

Théorème 1.7.3 *([70, Théorème 12.3]) On considère le système $x^{p+1}Y' = AY$ de rang de Poincaré p. Pour toute valeur propre a de A_0 de multiplicité m, il existe m solutions formelles linéairement indépendantes admettant des parties exponentielles de la forme*

$$w = \frac{a}{x^{p+1}} + \dots$$

où $\dots$ représente les termes de valuation plus grande.

L'idée des algorithmes de réduction consiste alors à inspecter le spectre du terme principal A_0. Trois cas sont à distinguer :

— Si A_0 admet au moins deux valeurs propres distinctes, le lemme de découplage est appliqué pour réduire le système en deux ou plusieurs sous-systèmes.

— Si A_0 admet une seule valeur propre λ non-nulle dans $\bar{\mathcal{C}}$, on effectue le *changement d'exponentielle* en posant $Y = e^{\int \frac{\lambda}{x^{p+1}} dx} Z$ où $p > 0$ est le rang de Poincaré du système. Ce changement de variable conduit au nouveau système

$$A \leftarrow A - \frac{\lambda}{x^{p+1}} \mathrm{I}_n.$$

Dans ce cas, $\frac{\lambda}{x^{p+1}}$ est le terme principal de la partie exponentielle et l'invariant de Katz vaut $\kappa = p$.

— Si A_0 est nilpotente, alors l'invariant de Katz κ est strictement inférieur à p. L'objectif est maintenant de trouver une transformation de jauge dans $\mathcal{C}((x^{1/m}))$ où m est un entier, qui donne un système équivalent de terme principal A_0 non nilpotent.

1.7.2.1 Algorithme de Barkatou

Lorsque la matrice principale A_0 est nilpotente, une stratégie possible est donnée par Barkatou [7]. Il propose de réduire au sens de Moser le rang de Poincaré du système pour obtenir un système de rang de Poincaré minimal. On se ramène au cas, où A_0 est nilpotente et le système est de rang de Poincaré minimal. C'est la cas où l'invariant de Katz est *fractionnel* (i.e, $\kappa = \frac{l}{m}$ avec p.g.c.d$(l, m) = 1$) et l'introduction d'une ramification est alors nécessaire. On applique l'algorithme 1 pour calculer l'invariant de Katz $\kappa = \frac{\ell}{m}$ avec p.g.c.d.$(\ell, m) = 1$. La ramification $x = t^m$ donne un système équivalent $mt^{m-1}A(t^m)$ dont la matrice principale A_0 admet au moins m valeurs propres distinctes après une application de la réduction de Moser.

Ainsi, l'algorithme se résume en appliquant récursivement : lemme de découplage, réduction du rang de Poincaré avec l'algorithme de Moser et le calcul de l'invariant de Katz avec l'algorithme 1. Nous esquissons les étapes de l'algorithme de Barkatou ([7]) pour le calcul des parties exponentielles d'un système $[A]$.

Donnée : Un système différentiel de la forme $x^{p+1}Y' = AY$ avec $p \geq 0$.
Sortie : Liste des parties exponentielles q.

1. Si $p = 0$, retourner $q = 0$.
2. Si $n = 1$, retourner la partie singulière du système.
3. Si A_0 admet aux moins deux valeurs propres distinctes, appliquer le lemme de découplage 1.3.1 pour obtenir des sous-systèmes avec une matrice principal A_0 qui admet une seule valeur propre. Itérer sur chaque sous-système.
4. Si A_0 admet une seule valeur propre λ qui est non-nulle, alors le coefficient principal des parties exponentielles est $\frac{\lambda}{x^{p+1}}$. Effectuer le changement de variables

$$Y = e^{\int \frac{\lambda}{x^{p+1}} dx} Z,$$

   pour obtenir un système équivalent de matrice $A := A - \frac{\lambda}{x^{p+1}} \mathrm{I}_n$. Aller à l'étape 1.
5. Si A_0 est nilpotente, appliquer l'algorithme de Moser pour obtenir un rang de Poincaré minimal. Aller à l'étape 1.
6. Appliquer l'algorithme 1 pour calculer l'invariant de Katz $\kappa = \frac{\ell}{m}$ avec p.g.c.d.$(\ell, m) = 1$. On applique alors la ramification $x = t^m$. Effectuer un appel récursif sur le système ramifié $mt^{m-1}A(t^m)$.

1.7.2.2 Exemple

Exemple 1.7.4 *On considère l'exemple du tutorial [9] avec le système* $[A] : x^{3+1}Y' = AY$ *donné par*

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & -x^2 & x^2 & -x^2 \\ 0 & 1 & x^2 & 0 \\ x^2 & x^2 & 0 & -x^2 \end{pmatrix}.$$

On a donc $p = 3$ *et* $n = 4$. *La matrice principale* A_0

$$A_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente. De plus, le système $[A]$ *est irréductible au sens de Moser. L'invariant de Katz est calculé avec l'algorithme 1. On obtient* $\kappa = 8/3$. *On applique alors une réduction de Moser pour le nouveau système ramifié :* $3t^2A(t^3)$. *Ce système admet une matrice principale* A_0 *avec 4 valeurs propres distinctes. Le lemme découplage va permettre de découpler en 4 sous-systèmes de dimensions 1. Le système admet quatre parties exponentielles paramétrées par*

$$x = t^3, \quad q_1(\frac{1}{t}) = -\frac{3}{8t^8} - \frac{1}{4t^4}, \ q_2(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t^3}.$$

Remarque 1.7.5 *La ramification de la deuxième partie exponentielle de l'exemple précédent n'est pas minimale. En effet,* q_2 *peut s'écrire :* $x = t, \quad q_2(\frac{1}{t}) = \frac{1}{x}$.

1.7.2.3 Minimisation des extensions algébriques

Les algorithmes de recherche d'une solution formelle nécessitent en général l'introduction d'extensions algébriques du corps des constantes. Il n'est pas possible de les éviter car ils apparaîssent naturellement dans la sortie. Dans [7], Barkatou a proposé une stratégie pour réduire le degré de l'extension algébrique apparaissant dans le calcul qui suit une ramification. En effet, après avoir calculé l'invariant de Katz $\kappa = \frac{\ell}{m}$, au lieu de faire la ramification $x = t^m$, l'auteur propose d'utiliser des ramifications de la forme

$$x = ct^m,$$

où c est un nombre algébrique à déterminer.

On rappelle que pour un système $[A]$ de rang de Poincaré p, on a les faits suivants

(issus de l'article [7]) :

— Si A_0 n'est pas nilpotente, alors l'invariant de Katz est $\kappa = p$ et les racines du polynôme de Newton P_κ sont les valeurs propres de A_0 dans $\bar{\mathcal{C}}$ (les coefficients principaux des parties exponentielles).

— Si $\kappa = \frac{\ell}{m}$ avec $\text{pgcd}(\ell, m) = 1$ alors le polynôme de Newton associé à κ est un polynôme en x^m et $P_\kappa = R_\kappa(x^m)$ où R_κ est le *polynôme de Newton réduit* associé à la pente κ.
Dans le cas où κ est fractionnel, le polynôme caractéristique χ_{A_0} de A_0 est un polynôme en x^m, i.e $\chi_{A_0}(\lambda) = \hat{\chi}_{A_0}(\lambda^m)$.

Dans [7], Barkatou montre comment il est possible réduire les extensions algébriques dans le cas d'une ramification (κ est fractionnel). La stratégie utilisée pour réduire les extensions algébriques est la suivante :

1. On ramifie le système $[A]$ avec $x = ct^m$ où c est une indéterminée.
2. On effectue la réduction de Moser pour réduire le rang de Poincaré du système. On note ℓ le rang de Poincaré minimal.
3. On calcule $\chi_{A_0}(\lambda)$ en fonction de c.
4. On déduit le polynôme de Newton associé à $\kappa = \frac{\ell}{m}$, noté P_κ, en remplaçant c par 1 et λ par $m\lambda$ dans $\chi_{A_0}(\lambda)$, c'est un polynôme en λ^m.
5. Maintenant, si a est une racine du polynôme de Newton P_κ, alors il existe m parties exponentielles q_j ayant des termes principaux de la forme :

$$\frac{-\omega^j a}{\kappa x^\kappa}, j = 0, \ldots, m-1 \tag{1.7.2}$$

où ω est une m -ième racine de l'unité. Soit $b := a^m$ une racine du polynôme de Newton réduit $R_\kappa(\lambda) := P_\kappa(\lambda^{1/m})$. Les m parties exponentielles peuvent être paramétrisées par

$$q(1/t) = \frac{-b}{\kappa t^\ell} + \ldots$$

6. On calcule les entiers u et v tels que $u\ell + vm = 1$. Ensuite, on remplace a par $a^{u\ell+vm}$ dans (1.7.2). On en déduit qu'en posant $c = b^u$ où b est une racine du polynôme R_κ de degré $\deg(\chi_{A_0})/m$, on réduit le travail dans $\mathcal{C}(a)$ par une extension algébrique $\mathcal{C}(b)$ de degré plus petit (pour plus de détails, voir [7]).
7. Ainsi, nous retrouvons c et la ramification $x = ct^m$.

Exemple 1.7.6 *On considère le système $x^{p+1}Y' = AY$ de l'exemple 4 dans [7] avec*

$$A := \begin{pmatrix} 2x & x \\ x-1 & x^2 \end{pmatrix},$$

et $p = 2$. La matrice principale A_0 est nilpotente et le système est irréductible au sens de Moser. L'invariant de Katz est $\kappa = \frac{3}{2}$. On applique la ramification $x = ct^2$ avec c indéterminée ainsi qu'une réduction de Moser pour le système ramifié. On obtient le nouveau système $t^{3+1}Z' = 2ctA(ct^2)Z$ de rang de Poincaré $p = 3$:

$$\widetilde{A} := \begin{bmatrix} -\frac{t\left(ct^2-4\right)}{c} & 2\,c^{-1} \\ \frac{2\,ct^2-2}{c^2} & 2\,t^3 \end{bmatrix}$$

$\chi_{\widetilde{A_0}}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{4}{c^3}$. On substitue $c = 1$ et λ par 2λ. On obtient

$$P_{3/2}(\lambda) := \lambda^2 + 1.$$

Maintenant, on calcule u et v tels que $3u + 2v = 1$, on obtient $u = 1$ et $v = -1$. On a, $b = -1$ racine de $R_\kappa := \lambda + 1$. On remplace $c = (-1)^1 = -1$ dans $\widetilde{A}$. On applique le lemme de découplage et on obtient le système équivalent de matrice diagonale :

$$\begin{bmatrix} -2\,t^{-4} - 2\,t^{-3} - 2\,t^{-2} + 1/2\,t^{-1} & 0 \\ 0 & 2\,t^{-4} - 2\,t^{-3} + 2\,t^{-2} + 1/2\,t^{-1} \end{bmatrix}.$$

Pour obtenir la paramétrisation des parties exponentielles ramifiées du système $[A]$, on multiplie

$$-2\,t^{-4} - 2\,t^{-3} - 2\,t^{-2} + 1/2\,t^{-1}$$

par $\frac{1}{-1\times 2\times t}$. On obtient

$$x = -t^2, \quad \frac{dq}{dt} := t^{-5} + t^{-4} + t^{-3} - 1/4\,t^{-2}.$$

Remarque 1.7.7 *Si on avait utilisé la ramification $x = t^2$ au lieu de $x = -t^2$, le système ramifié obtenu après l'application de la réduction de Moser est $x^4Y' = \tilde{A}Y$ où*

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} -x^3 + 4\,x & 2 \\ 2\,x^2 - 2 & 2\,x^3 \end{bmatrix}.$$

La matrice principale admet deux valeurs propres distincts $2I$ et $-2I$. On effectue le changement d'exponentielle $\tilde{A} := \tilde{A} - \mathrm{RootOf}(Z^2+4)\mathrm{I}_2$. On obtient le système $x^4Y' = \tilde{A}Y$ où

$$\begin{bmatrix} -x^3 + 4\,x - RootOf\left(_Z^2 + 4\right) & 2 \\ 2\,x^2 - 2 & 2\,x^3 - RootOf\left(_Z^2 + 4\right) \end{bmatrix}$$

Après application du lemme de découplage nous obtenons la partie exponentielle

$$x = t^2, \quad -1/2\,\frac{RootOf\left(_Z^2+4\right)}{x^5} + x^{-4} + 1/2\,\frac{RootOf\left(_Z^2+4\right)}{x^3} + 1/4\,x^{-2}$$

1.7.2.4 Algorithme de Pflügel pour la réduction formelle

Dans la procédure de réduction, quand l'introduction d'une ramification est nécessaire, l'algorithme de Barkatou [7] calcule $\kappa = \frac{\ell}{m}$ avec p.g.c.d$(\ell, m) = 1$. Puis, la ramification $x = t^m$ s'impose pour tout le système. En procédant ainsi, la plus grande pente du polygone de Newton κ peut cacher des pentes entières comme on l'a vu dans l'exemple 1.7.4. D'un point de vue algorithmique, il est préférable de retarder l'apparition des ramifications et d'utiliser les ramifications minimales pour chaque partie exponentielle. Cet aspect motive Pflügel à développer pendant sa thèse ([59, 61]) un nouvel algorithme de réduction formelle qui s'avère avoir des avantages dans certains cas. Il montre notamment qu'il est possible d'accéder à toutes les pentes entières. Pour cela, il utilise la notion de système *k-simple*.

Définition 1.7.8 *On considère un système de la forme $x^{k+1}DY' = NY$ où $D \in GL_n()$ et N sont des matrices à coefficients dans $\mathcal{C}[[x]]$ et D est inversible dans $GL_n(\mathcal{C}((x)))$. On dit que le système est* k-simple *si le déterminant $P_k(\lambda) := \det(N_0 - \lambda D_0)$ est non identiquement nul. On dit que $P_k(\lambda)$ est le* k-polynôme *associé au système k-simple. Parfois nous utilisons la notation de l'opérateur $\mathcal{D}_k = D\theta_k - N$ pour désigner le système $x^{k+1}DY' = NY$ avec $\theta_k = x^{k+1}\frac{d}{dx}$.*

On a les cas particuliers suivants [61] :

— Tout système $x^{p+1}Y' = AY$ où A est une matrice à coefficient dans $\mathcal{C}[[x]]$ avec $A_0 \neq 0$ est un système p-simple avec $D = \mathrm{I}_n$, $N = A$ et $P_p(\lambda) = \chi_{A_0}(\lambda)$.

— Soit $[A]$ un système irréductible au sens de Moser. On pose $r = \mathrm{rang}(A_0)$. Quitte à effectuer une transformation constante, on peut supposer que A_0 admet r lignes L_i non nulles. Par conséquent, A admet r lignes L_i de valuation nulle $\mathrm{val}(L_i) = 0$. Alors, le système peut être écrit sous forme d'un système $(p-1)$-simple $x^pDY' = NY$ avec $A = xD^{-1}N$ où

$$D^{-1} = \mathrm{diag}(x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n}) \quad \alpha_i = min(\mathrm{val}(L_i) - 1, 0) \in \{0, -1\}$$

où L_i est la i-ème ligne de la matrice A pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et N est une matrice sans pôle. De plus, on peut facilement vérifier que

$$\begin{aligned} P_{p-1}(\lambda) = \det(N_0 - \lambda D_0) &= \det(N - \lambda D)\mid_{x=0} \\ &= \Theta(-\lambda) \neq 0 \end{aligned}$$

où Θ est le polynôme de Moser associé.

L'intérêt de la notion d'un système k-simple vient du résultat suivant [61] :

Proposition 1.7.9 *([61]) On considère le système k-simple $x^{k+1}DY' = NY$ de k-polynôme associé $P_k(\lambda)$. On a :*

1. *si $\deg(P_k(\lambda)) > 0$ alors pour toute racine a de $P_k(\lambda)$, il existe une partie exponentielle w de la forme*
$$w = \frac{a}{x^{k+1}} + \dots.$$
Par conséquent, k est une pente du polygone de Newton du système.
2. *si $\deg(P_k(\lambda)) = 0$ alors toutes les parties exponentielles w admettent des valuations strictement plus petites que $-k-1$. Par conséquent, k n'est pas une pente du polygone de Newton et toutes les pentes sont strictement supérieures à k.*

En particulier on obtient le résultat suivant :

Proposition 1.7.10 *([61]) On considère le système $[A]$ de rang de Poincaré p et irréductible au sens de Moser. On pose $\Theta(\lambda)$ le polynôme de Moser associé. Alors on a :*

1. *si A_0 est inversible, alors le polygone de Newton du système n'admet qu'une seule pente $\kappa = p$.*
2. *si A_0 est nilpotente et $\Theta(\lambda)$ est constant alors $p - 1 < \Delta_i < p$ pour toute pente Δ_i du polygone de Newton du système $[A]$.*

Preuve.

1. Le système peut être vu comme un système p-simple. Si A_0 est inversible, alors toutes les parties exponentielles sont de la forme $w = \frac{a}{x^{p+1}} + \dots$ pour toute valeur propre a de A_0.
2. Si A_0 est nilpotente alors les valuations de toutes les parties exponentielles sont strictement supérieures à p. Par conséquent, les pentes Δ_i sont strictement inférieures à p . Comme le système $[A]$ est irréductible au sens de Moser alors, $[A]$ peut être écrit sous la forme d'un système $(p-1)$-simple de polynôme $P_k(\lambda) = \Theta(-\lambda) \neq 0$. Par hypothèse Θ est constant. D'après la proposition précédente, les valuations des parties exponentielles sont strictement inférieures à $-p+1$. Par conséquent, les pentes Δ_i du polygone de Newton du système $[A]$ sont strictement supérieures à $p-1$.

■

Définition 1.7.11 *([61]) On dit qu'un système de rang de Poincaré p qui est irréductible au sens de Moser est* ρ-irréductible *si l'on a l'une des trois propriétés :*

1. $p = 0$.
2. A_0 *inversible.*
3. A_0 *est nilpotente et le polynôme de Moser* Θ *est constant.*

D'après la proposition 1.7.10, quand un système est ρ-irréductible, alors, soit le polygone de Newton n'a qu'une seule pente $\kappa = p$, soit toutes les pentes Δ_i sont strictement comprises entre $p-1$ et p.

L'idée de l'algorithme de réduction proposé par Pflügel est de considérer les systèmes irréductibles au sens de Moser puis, à partir de la notion d'un système $(p-1)$-simple, réduire le système en sous-systèmes qui sont ρ-irréductibles avant même d'introduire des ramifications. Procédant ainsi, on obtient des sous-systèmes admettant chacun soit une seule pente entière dans le polygone de Newton (c'est la cas où A_0 est inversible), soit toutes les pentes sont fractionnelles et comprises strictement entre deux entiers consécutifs (c'est le cas où A_0 est nilpotente, le système est irréductible au sens de Moser et le polynôme de Moser Θ est constant).

Proposition 1.7.12 *([61, Théorème 5.1]) Tout système différentiel est équivalent sur* $\bar{\mathcal{C}}((x))$ *à un système diagonal par blocs avec chaque bloc de la diagonale est* ρ*-irréductible.*

Pour montrer ce résultat, il suffit de considérer le cas où A_0 est nilpotente et le système est irréductible au sens de Moser avec Θ non constant. Dans ce cas, on a $\deg(\Theta) < n - r$ où $r := \mathrm{rang}(A_0)$. Car en effet, on a le résultat suivant

Proposition 1.7.13 *([10, Remarque 3]) On considère un système* $[A]$ *de rang de Poincaré* $p \geq 1$ *qui est irréductible au sens de Moser. Soit* Θ *son polynôme de Moser de degré* d*. Alors, le point* $(d, (d-n)(q-1) - r)$ *où* $r := \mathrm{rang}(A_0)$*, est un sommet du polygone de Newton du système* $[A]$*.*

Corollaire 1.7.14 *([10, Remarque 4]) On considère un système* $[A]$ *de dimension* n *et de rang de Poincaré* $p \geq 1$ *tel que* A_0 *est nilpotente. On pose* $r := \mathrm{rang}(A_0)$*. On suppose aussi que le système* $[A]$ *est irréductible au sens de Moser et soit* Θ *son polynôme de Moser de degré* d*. On a les résultats suivants :*

1. *si le polygone de Newton admet une seule pente alors* $\kappa := p - 1 + \frac{r}{n-d}$.
2. $d < n - r$.

Preuve. D'après la proposition 1.7.13 on a $(d, (d-n)(q-1)-r)$ est un point du polygone de Newton.

1. κ est atteint alors au point $(d, (d-n)(q-1)-r)$. D'après la formule de l'invariant de Katz (1.6.1), on a

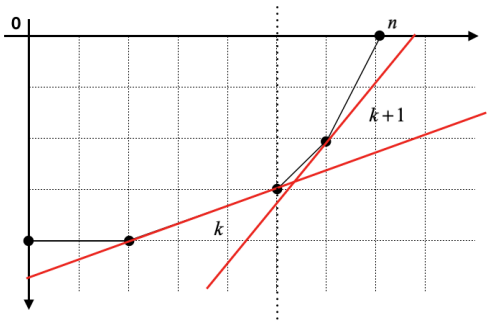
$$\kappa = -\frac{(d-n)(p-1)-r}{n-d} = p-1+\frac{r}{n-d}.$$

2. On a $p-1+\frac{r}{n-d} \leq \kappa < p$. Par conséquent,

$$d < n-r.$$

■

Pflügel généralise le lemme de découplage pour un système k-simple. Lorsque $\deg(P_k) < n$, il permet de décomposer le système k-simple en deux sous systèmes k-simples, l'un de k-polynôme qui est P_k et l'autre de k-polynôme constant. Ce lemme de découplage généralisé, permet de séparer les pentes strictement supérieures à k de celles inférieures ou égales à k.



En particulier, quand A_0 est nilpotente et quand le système est irréductible au sens de Moser on a $\deg(\Theta) < n-r$, alors le lemme de découplage généralisé permet de calculer un système équivalent qui est une somme directe de deux sous-systèmes $(p-1)$-simples dont l'un est de taille $n-\deg(\Theta)$ et il admet un $(p-1)$-polynôme constant et l'autre est de taille $\deg(\Theta)$ et il admet Θ comme $(p-1)$-polynôme.

1.7.2.5 Lemme de découplage généralisé

Définition 1.7.15 *Soient A, B, $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ à coefficients dans $\overline{\mathcal{C}}$ et λ une indéterminée. On dit que $A-\lambda B$ est équivalent à $\tilde{A}-\lambda\tilde{B}$ sur $\overline{\mathcal{C}}$ s'il existe S et T inversibles à coefficients dans $\overline{\mathcal{C}}$ telles que $S(A-\lambda B)T = \tilde{A}-\lambda\tilde{B}$.*

Proposition 1.7.16 *([61, Proposition 5.1]) Soient A et B des matrices constantes telles*

que $P(\lambda) = \det(A - \lambda B) \neq 0$ *et* $d = deg(P)$*. Alors* $A - \lambda B$ *est équivalent à*

$$\begin{pmatrix} E - \lambda H & 0 \\ 0 & C - \lambda I \end{pmatrix}, \tag{1.7.3}$$

où $E, H \in \mathcal{M}_{n-d}(\mathcal{C})$ *et* $\det(E - \lambda H)$ *est une constante nulle. La matrice* C *est de taille* d *et à coefficients dans* $\mathcal{C}$ *et* $\det(C - \lambda I) = P(\lambda)$*.*

La transformation de jauge $Y = SZ$ pour un système de la forme $x^{k+1}Y' = AY$ se traduit pour un système écrit sous la forme $x^{k+1}DY' = NY$ noté $\mathcal{D}_k = D\theta_k - N$ par la définition suivante.

Définition 1.7.17 *[61, Définition 3.4] Deux opérateurs* $\mathcal{D}_k = D\theta_k - N$ *et* $\tilde{\mathcal{D}}_k = \tilde{D}\theta_k - \tilde{N}$ *sont dit équivalents s'il existe* $S, T \in \mathrm{GL}_n(\overline{\mathcal{C}}((x)))$ *tels que* $DS - T\tilde{D} = 0$ *et* $NS - T\tilde{N} = D\theta_k(S)$*.*

La proposition suivante est une généralisation du lemme de découplage adapté à un système k-simple et à la base de l'algorithme de Pflügel pour la réduction formelle.

Proposition 1.7.18 *(Lemme de découplage généralisé, [61, Proposition 3.1]) On considère l'opérateur* k*-simple* $\mathcal{D}_k = D\theta_k - N$ *avec* $k > 0$*. On suppose que* $N_0 - \lambda D_0$ *est diagonale par blocs avec*

$$N_0 = \begin{pmatrix} N_0^{11} & 0 \\ 0 & N_0^{22} \end{pmatrix}, \quad D_0 = \begin{pmatrix} D_0^{11} & 0 \\ 0 & D_0^{22} \end{pmatrix},$$

où $\det(N_0^{11} - \lambda D_0^{11}) \neq 0$*,* $\det(N_0^{22} - \lambda D_0^{22}) \neq 0$ *et* $\mathrm{spec}(N_0^{11} - \lambda D_0^{11}) \cap \mathrm{spec}(N_0^{22} - \lambda D_0^{22}) = \varnothing$ [2]*. Alors, il existe* $S, T \in \mathrm{GL}_n(C[[x]])$ *qui transforment* $\mathcal{D}_k$ *en un opérateur* k*-simple* $\tilde{\mathcal{D}}_k = \tilde{D}\theta_k - \tilde{N}$ *tel que* $\tilde{D}_0 = D_0$ *et* $\tilde{N}_0 = N_0$ *et les matrices* $\tilde{D}$ *et* $\tilde{N}$ *sont diagonales par blocs avec la même décomposition que dans* D_0 *et* N_0*.*

Corollaire 1.7.19 *On considère un opérateur* k*-simple* $\mathcal{D}_k = D\theta_k - N$ *avec* D *et* N *deux matrices à coefficients dans* $\mathcal{C}[[x]]$*. On pose* $P_k(\lambda) = \det(N_0 - \lambda D_0)$*. Si* $d := \det(P_k) < n$*, alors il existe un opérateur équivalent*

$$\tilde{\mathcal{D}}_k = \begin{pmatrix} \tilde{D}^{11}\theta_k - \tilde{N}^{11} & 0 \\ 0 & \tilde{D}^{22}\theta_k - \tilde{N}^{22} \end{pmatrix}$$

où $\tilde{N}_0^{11}, \tilde{D}_0^{11} \in \mathcal{M}_{n-d}(\mathcal{C})$ *et* $\det(\tilde{N}_0^{11} - \lambda \tilde{D}_0^{11})$ *est contant non nul,* $\tilde{D}_0^{22} = \mathrm{I}$*,* $\tilde{N}_0^{22}, \in \mathcal{M}_d(\mathcal{C})$ *et* $\det(\tilde{N}_0^{22} - \lambda \mathrm{I}) = P_k(\lambda)$*. De plus, le système associé à l'opérateur* $\tilde{D}^{22}\theta_k - \tilde{N}^{22}$ *admet un rang de Poincaré au plus* k*.*

2. $spec(A - \lambda B) := \{\lambda = \frac{\gamma}{\alpha}, | \quad \exists g \in \overline{\mathcal{C}}^n, \quad \alpha Ag = \gamma Bg\}$

Preuve. Le résultat découle des deux propositions 1.7.18 et 1.7.16. Il reste à montrer que $\tilde{D}^{22}\theta_k - \tilde{N}^{22}$ admet un rang de Poincaré au plus k. En effet, comme $\tilde{D}_0^{22} = \mathrm{I}$ alors l'inverse de D est sans pôle ; par conséquent, l'opérateur $\tilde{\mathcal{D}}_k^{22}$ se traduit en terme de système de la façon suivante

$$x^{k+1}Y' = D^{-1}NY,$$

où $D^{-1}N$ est à coefficients dans $\mathcal{C}[[x]]$. D'où le résultat. ■

1.7.2.6 Description de l'algorithme

Quand la matrice principale A_0 du système $[A]$ est nilpotente et le système est irréductible au sens de Moser, le lemme de découplage généralisé permet d'effectuer une décomposition dans $\mathcal{C}((x))$ qui séparent les pentes strictement supérieur à $p-1$ à celles inférieur où égale à $p-1$. On a le résultat suivant

Corollaire 1.7.20 *On considère un système $[A]$ de rang de Poincaré p et de matrice principale A_0 nilpotente. On suppose que le système est irréductible au sens de Moser et son polynôme de Moser Θ de degré d. On a*

1. *si $d = 0$ alors $p-1 < \kappa < p$,*
2. *sinon, il existe un système équivalent qui est une somme directe de deux sous-systèmes $(p-1)$-simples. Le premier est de taille $n-d$ et il admet un $(p-1)$-polynôme constant et le second est de taille d et il admet Θ comme $(p-1)$-polynôme. De plus, ce dernier admet un rang de Poincaré au plus $p-1$.*

Preuve.

1. Proposition 1.7.10.
2. Ce résultat se déduit du Corollaire 1.7.19 et le fait que tout système de rang de Poincaré p et irréductible au sens de Moser est $(p-1)$-simple.

■

Un appel récursif du corolaire précédent permet d'obtenir une décomposition en des sous systèmes qui sont ρ-irréductibles. Chaque sous système admet soit une seule pente κ qui est entière, soit toutes les pentes sont fractionnelles et comprises strictement entre deux entiers consécutifs. Après pour chaque sous-système l'algorithme de Barkatou peut être appliqué pour calculer l'invariant de Katz et compléter la réduction formelle.

L'avantage de cette approche se résume dans le fait que l'on peut accéder à toutes les pentes entières (si elles existent) avant de ramifier le système. Ainsi, au moment de l'introduction des ramifications, les blocs sont de tailles plus petites. Par contre, ils ne sont pas de taille la plus petite possible et comme le dit Pflügel, ce qui manque est la

séparation complète des pentes non fractionnelles avant l'introduction des ramifications. Nous allons le faire dans les parties suivantes de la thèse.

Chapitre 2 :

Factorisation des systèmes différentiels linéaires de premier ordre en utilisant l'eigenring : application au cas local

2.1 Introduction

On considère le système

$$[A] : Y' = AY \tag{2.1.1}$$

où A est une matrice de taille n à coefficients dans un corps différentiel $\mathcal{K}$ de caractéristique zéro. On note $\mathcal{C}$ le corps des constantes de $\mathcal{K}$.

Le but de ce chapitre est de décrire la décomposition via l'eigenring des systèmes du type (2.1.1) lorsque $\mathcal{K} = \mathcal{C}((x))$. Nous commençons par présenter dans une première partie la décomposition sur un corps différentiel $\mathcal{K}$ en rappelant des résultats de [21]. Nous développons ensuite le cas où $\mathcal{C}$ est non-algébriquement clos. Enfin, nous décrivons l'eigenring d'un système complètement réductible sur un corps algébriquement clos. Dans la seconde partie, nous appliquons la décomposition en utilisant l'eigenring sur le corps des séries formelles de Laurent, $\mathcal{K} = \mathcal{C}((x))$. Cette étude nécessite d'établir certains liens entre la structure d'une matrice fondamentale de solutions et l'eigenring du système. L'une des difficultés majeures de ce travail réside dans la manipulation pratique des séries. En particulier, l'utilisation des séries tronquées rend nécessaire de certifier les résultats obtenus à chaque étape de la factorisation. Nous répondons alors aux questions de précision dans la section 2.5.3. Les résultats exposés dans la deuxième partie de ce chapitre ont été publiés dans [19, 20].

2.2 Définition de l'eigenring

Définition 2.2.1 *([21],[63]) L'eigenring $\mathcal{E}(A)$ d'un système $[A]$ à coefficients dans $\mathcal{K}$ est l'ensemble des matrices $T \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$ vérifiant $T' = AT - TA$.*

On note $[A, T] := AT - TA$ le crochet de Lie de deux matrices.

L'équation $T' = [A, T]$ peut être vue comme un système linéaire du premier ordre de dimension n^2. Ceci peut se réaliser à travers l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Vec} : \mathcal{M}_n(\mathcal{K}) & \longrightarrow & \mathcal{K}^{n^2} \\ \begin{pmatrix} a_{1.} \\ \vdots \\ a_{n.} \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} {}^t a_{1.} \\ \\ {}^t a_{n.} \end{pmatrix} \end{array}$$

où $a_{i.}$ est la $i-$ième ligne. En utilisant le fait que $\mathrm{Vec}(PXQ) = ({}^tQ \otimes P)Vec(X)$ où $\otimes$ est le produit de Kronecker pour les matrices, on obtient le système $[\mathrm{I}_n \otimes A - {}^tA \otimes \mathrm{I}_n]$ de dimension n^2. Par conséquent, déterminer l'eigenring revient à trouver les solutions dans le corps de base $\mathcal{K}$ pour le système $Y' = (\mathrm{I}_n \otimes A - {}^tA \otimes \mathrm{I}_n)\, Y$. Ainsi, l'eigenring $\mathcal{E}(A)$ est un $\mathcal{C}-$espace vectoriel de dimension au plus n^2. D'autre part, $\mathcal{E}(A)$ contient l'identité I_n et

le produit matriciel usuel de deux éléments dans $\mathcal{E}(A)$ appartient à $\mathcal{E}(A)$. Par conséquent, $\mathcal{E}(A)$ est une $\mathcal{C}$-algèbre associative de dimension au plus n^2.
Pour tout $T \in \mathcal{E}(A)$, si Y est solution de $[A]$, alors TY est aussi une solution. Ainsi les éléments de $\mathcal{E}(A)$ envoient une solution de $[A]$ sur une autre solution. Donc, si $\hat{Y}$ est une matrice fondamentale de solution de $[A]$, alors $T\hat{Y} = \hat{Y}C$ où C est une matrice constante. Ceci montre que T est semblable à une matrice constante. En particulier on a :

Proposition 2.2.2 *([21, Proposition 2.2]) Tout élément de l'eigenring admet un polynôme caractéristique à coefficients dans le corps des constantes $\mathcal{C}$.*

Proposition 2.2.3 *([21, Proposition 2.3]) Si deux systemes $[A]$ et $[B]$ sont équivalents, alors leur eigenring $\mathcal{E}(A)$ et $\mathcal{E}(B)$ sont isomorphe en tant que $\mathcal{C}$-algèbre ($\mathcal{E}(A) \sim \mathcal{E}(B)$). En particulier, on a $dim(\mathcal{E}(A)) = dim(\mathcal{E}(B))$.*

Définition 2.2.4 *On fixe une base $T_1, \ldots, T_d$ de $\mathcal{E}(A)$. On appelle* élément général *de $\mathcal{E}(A)$ toute combinaison $M = \sum_{i=1}^{d} t_i T_i$ où t_i est un paramètre. Soit ℓ le nombre de facteur irréductible sur $\mathcal{C}[t_1, \ldots, t_d][\lambda]$ du polynôme caractéristiques d'un élément général de $\mathcal{E}(A)$. Un élément $T \in \mathcal{E}(A)$ est dit* générique*, si le polynôme caractéristique de T admet un nombre maximal ℓ de facteurs irréductibles sur $\overline{\mathcal{C}}$.*

La terminologie « élément général » vient du fait que M est une solution générale du système $[\mathrm{I}_n \otimes A - {}^tA \otimes \mathrm{I}_n]$ sur $\mathcal{K}$.

Le lemme suivant est vrai pour un corps infini, en particulier, pour notre corps $\mathcal{C}$ de caractéristique zéro.

Lemme 2.2.5 *Soit d la dimension de $\mathcal{E}(A)$ en tant que $\mathcal{C}$-espace vectoriel et soit $M = \sum_{i=1}^{d} t_i T_i$ un élément général de $\mathcal{E}(A)$. Une spécialisation $\underline{t} \to \underline{c}$ avec $\underline{c}$ choisi au hasard dans $\mathcal{C}^d$ produit un élément générique presque sûrement.*

Preuve. Ceci est dû au fait qu'un polynôme irréductible sur $\mathcal{C}(t_1, \ldots, t_d)[\lambda]$ reste irréductible sur $\mathcal{C}[\lambda]$ pour presque toutes les spécialisations $\underline{c}$ de $\underline{t}$ dans $\mathcal{C}^d$; c'est le théorème d'irréductibilité de Hilbert (voir Appendice A de ce chapitre et pour plus de détails voir Chapitre 9 dans [44]). ■

Par la suite, quand il n'y a pas de risque de confusion, nous identifierons parfois l'eigenring à son élément général.

2.3 Décomposition des systèmes matriciels linéaires

Une *transformation de jauge* pour un système de type (2.1.1), est un changement de variables $Y = PZ$ où $P \in GL_n(\mathcal{K})$. Ce changement de variables donne lieu à un nouveau

système du même type

$$[B] : Z' = BZ, \quad \text{où} \quad B = P[A] := P^{-1}AP - P^{-1}P'.$$

On dit que les deux systèmes $[A]$ et $[B]$ sont *équivalents sur* $\mathcal{K}$ (noté $[A] \sim_{\mathcal{K}} [B]$) lorsque l'un des systèmes peut être obtenu à partir de l'autre à travers une transformation de jauge P à coefficients dans $\mathcal{K}$. On le notera $B = P[A]$. On a le résultat suivant :

Proposition 2.3.1 *([21, Proposition 2.3]) Soit $[A]$ et $[B]$ deux systèmes équivalents sur $\mathcal{K}$ tels que $B := P[A]$ où $P \in GL_n(\mathcal{K})$. Alors, l'application $T \to P^{-1}TP$ est un isomorphisme de $\mathcal{E}(A)$ dans $\mathcal{E}(B)$.*

Le système $[A]$ est dit *réductible* sur $\mathcal{K}$, lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathcal{K})$ telle que

$$P[A] = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix},$$

où $B_{ii} \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathcal{K})$ avec $n_i < n$ et $B_{12} \in \mathcal{M}_{n_1 \times n_2}(\mathcal{K})$; sinon, il est dit *irréductible* sur $\mathcal{K}$. Le processus pour trouver une telle matrice P et pour effectuer la transformation s'appelle la *factorisation*. Si de plus $B_{12} = 0$, on dit que le système $[A]$ est *décomposable* sur $\mathcal{K}$. Le processus pour trouver un tel P et pour effectuer la transformation s'appelle la *décomposition*. Dans le cas où le système n'est pas décomposable, on dit que le système est *indécomposable*. On dit qu'une décomposition $B_{11} \oplus \ldots \oplus B_{\ell\ell}$ est *maximale* si chaque B_{ii} est indécomposable sur $\mathcal{K}$. Enfin, on dit qu'une décomposition $B_{11} \oplus \ldots \oplus B_{\ell\ell}$ est *complètement réductible* lorsque chaque B_{ii} est irréductible sur $\mathcal{K}$.

Par souci d'exhaustivité, nous rappelons dans cette section le théorème de factorisation des systèmes de la forme (2.1.1) en utilisant un élément de l'eigenring [21].

Proposition 2.3.2 *([21, Théorème 3.1]) Soit $[A]$ un système à coefficients dans $\mathcal{K}$. Si l'eigenring de $[A]$ admet un élément non nul et non inversible, alors $[A]$ est réductible et la réduction peut s'effectuer par une transformation P à coefficients dans $\mathcal{K}$ qui peut être construite explicitement.*

L'idée de la preuve est de calculer la forme échelonnée d'un élément non-inversible de l'eigenring A. La transformation P qui effectue cet échelonnement va réduire le système $[A]$.

Exemple 2.3.3 *On considère le système* $Y' = AY$ *où*

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{x-1} & x+3 & x\,(x+3) & 0 \\ -2\,x^2 - x + 1 & x^{-2} & -\frac{x^4+2\,x-1}{x} & -3\,x \\ 3\,x & 0 & \frac{x^3+1}{x} & 3 \\ -\frac{x^2+x-1}{(x-1)x} & -x\,(x+3) & -x^3 - 3\,x^2 + x + 1 & \frac{x-1}{x^2} \end{bmatrix}$$

L'élément général de son eigenring est

$$M := \begin{bmatrix} \frac{C_1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_1}{2} & (\frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{2})x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_2}{2} & 0 \\ -(\frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{2})x & 0 & 0 & \frac{C_2}{2} \end{bmatrix}$$

On choisit un élément avec un choix des C_i *au hasard*

$$T := \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 4\,x & 0 \\ 0 & 0 & -7/2 & 0 \\ -4\,x & 0 & 0 & -7/2 \end{bmatrix}.$$

Il admet un polynôme caractéristique $1/16\,(2\,\lambda + 7)^2\,(2\,\lambda - 1)^2$. *On considère maintenant l'élément non inversible* $(2T + 7\mathrm{I}_4)^2$. *On construit la transformation*

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad \textit{telle que} \quad P^{-1}TP = \begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 & 64\,x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La transformation de jauge $Y = PZ$ *donne le système décomposé*

$$P[A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{x-1} & x+3 & 0 & x\,(x+3) \\ x^2 - x + 1 & x^{-2} & -3\,x & \frac{-x^4-2\,x+1}{x} \\ 0 & 0 & \frac{x-1}{x^2} & x+1 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{x^3+1}{x} \end{bmatrix}$$

Remarque 2.3.4 *Pour les systèmes qui admettent une matrice dont les coefficients sont des fonctions rationnelles dans $\mathcal{C}(x)$, l'algorithme de factorisation en utilisant l'eigenring a été implémenté par Barkatou et Pflügel. La procédure de factorisation est disponible dans lse packagesMaple Isolde et IntegrableConnections ([48, 17]).*

Si de plus, il existe un élément de l'eigenring qui admet au moins deux valeurs propres distinctes, alors celui-ci décompose le système ([21, Théorème 3.2]). Afin d'établir ce résultat, rappelons le lemme des noyaux qui décompose un sous-espace vectoriel en somme directe de sous-espaces stables :

Proposition 2.3.5 (Lemme des noyaux) *Soient E un $\mathcal{C}$-espace vectoriel et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E. Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathcal{C}$ tel que $P(\lambda) = P_1 \times \ldots \times P_\ell$ avec $\mathrm{pgcd}(P_i, P_j) = 1$ pour tout $i \neq j$. Alors,*

$$\ker(P(u)) = \ker(P_1(u)) \oplus \ldots \oplus \ker(P_\ell(u)).$$

Une conséquence fondamentale du lemme des noyaux est donnée par :

Corollaire 2.3.6 (conséquence du lemme des noyaux) *Soient E un $\mathcal{C}$-espace vectoriel et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E. Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathcal{C}$, annulateur de u, tel que $P(\lambda) = P_1 \times \ldots \times P_\ell$ avec $\mathrm{pgcd}(P_i, P_j) = 1$ pour tout $i \neq j$. Alors, en notant $E_i = \ker(P_i(u))$, on a*

$$E := E_1 \oplus \ldots \oplus E_\ell.$$

De plus les E_i sont stables par u.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de décomposition d'un système $[A]$:

Proposition 2.3.7 *([21, Théorème 3.2]) Soit $[A]$ un système de la forme (2.1.1) et soit T un élément de l'eigenring de $[A]$. Si le polynôme caractéristique de T est tel que $\chi_T(\lambda) = F_1 \times \ldots \times F_\ell$ avec $\mathrm{pgcd}(F_i, F_j) = 1$ pour tout $i \neq j$, alors il existe une transformation $P \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{K})$ telle que*

$$P^{-1}TP = T_1 \oplus \ldots \oplus T_\ell, \tag{2.3.1}$$

où T_i est un bloc de taille $\deg(F_i) = n_i$ et $\chi_{T_i} = F_i$. La matrice $B := P^{-1}AP - P^{-1}P'$ est de la forme

$$B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_\ell,$$

où B_i est une matrice carrée de taille n_i. Nous appelons un tel élément T de l'eigenring un élément séparateur.

Preuve. La première partie de la proposition est une application du lemme des noyaux sur l'élément T. On obtient une transformation P qui vérifie l'équation (2.3.1). Soit B le système obtenu par la transformation de jauge $P[A]$. On a $T \in \mathcal{E}(A)$, et $P^{-1}TP \in \mathcal{E}(B)$. On partitionne alors B selon la décomposition de $P^{-1}TP$. On a

$$\begin{pmatrix} T_1' & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & T_\ell' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{\ell 1} & \cdots & B_{\ell\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & T_\ell \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & T_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{\ell 1} & \cdots & B_{\ell\ell} \end{pmatrix}.$$

On en déduit les égalités

$$\begin{cases} B_{ii}T_i - T_iB_{ii} = T_i' & i = \{1, \ldots, \ell\}, \\ B_{ij}T_j - T_iB_{ij} = 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Les équations de Sylvester de la forme

$$B_{ij}T_j - T_iB_{ij} = 0, \;\; i \neq j$$

admettent une solution unique $B_{i,j} = 0$ car $\operatorname{pgcd}(\chi_{T_i}, \chi_{T_j}) = 1$, voir Lemme 1.3.5 du Chapitre 1. ■

Exemple 2.3.8 *On reprend l'exemple précédent 2.3.3 où un élément T de l'eigenring est donné par :*

$$T := \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 4\,x & 0 \\ 0 & 0 & -7/2 & 0 \\ -4\,x & 0 & 0 & -7/2 \end{bmatrix}.$$

Il admet un polynôme caractéristique $1/16\,(2\,\lambda + 7)^2\,(2\,\lambda - 1)^2$. *On construit la transformation*

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x^{-1} & 0 \\ 0 & -x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{telle que} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -7/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

La transformation de jauge $Y = PZ$ donne le système réduit

$$P[A] = \begin{bmatrix} \frac{x-1}{x^2} & x+1 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{x^3+1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2x-1}{(x-1)x} & -x(x+3) \\ 0 & 0 & -\frac{x^2-x+1}{x} & x^{-2} \end{bmatrix}.$$

2.3.1 Quand $\mathcal{C}$ est algébriquement clos

Dans cette section, on suppose que $\mathcal{C}$ est algébriquement clos. Une conséquence de la proposition 2.3.7 est donnée par :

Proposition 2.3.9 *Soient $[A]$ un système et M l'élément général de son eigenring. Alors $[A]$ est indécomposable sur $\mathcal{K}$ si et seulement si le polynôme caractéristique de M est de la forme $\chi_M(\lambda) = (\lambda - c)^h$ où c est une indéterminée et h un entier positif.*

Preuve. Si χ_M admet deux racines distinctes alors, d'après la proposition 2.3.7, on peut décomposer le système $[A]$ en deux sous-systèmes. Ceci contredit le fait que $[A]$ soit indécomposable. Supposons maintenant que $\chi_M(\lambda) = (\lambda - c)^h$. Si $[A]$ se décompose sur $\mathcal{K}$, alors il existe une transformation P à coefficients dans $\mathcal{K}$ telle que $P[A] = [A_1 \oplus A_2]$. Par conséquent, $\mathcal{E}(A)$ contient

$$\Pi_1 := \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}.$$

L'élément $c_1\Pi_1 + c_2\Pi_2$ est dans $\mathcal{E}(A)$ et admet deux valeurs propres distinctes. Ceci est contradictoire et termine la preuve. ■

Pour obtenir une décomposition maximale, il suffit de choisir au hasard un élément T de l'eigenring. Cet élément sera générique presque sûrement (Lemme 2.2.5). Le polynôme caractéristique χ_T admet un nombre maximal de valeurs propres distinctes. Par conséquent, χ_T admet un nombre maximal de facteurs irréductibles, ainsi qu'un nombre maximal de blocs dans le système équivalent $[B]$. Cela vient du fait que si le polynôme caractéristique de l'élément général admet un facteur irréductible, d'après le théorème d'irréductibilité d'Hilbert, l'ensemble des éléments génériques pour qui ce facteur reste irréductible après spécialisation des indéterminées à des constantes dans $\mathcal{C}$ est Zariski dense.
On obtient finalement l'algorithme probabiliste suivant pour construire une décomposition maximale ([21]).

Algorithme 2 *Décomposition Maximale*

Input : $[A]$ un système différentiel linéaire de taille n à coefficients dans $\mathcal{K}$.
Output : $P[A] = [A_1] \oplus \cdots \oplus [A_\ell]$ avec les A_i indécomposables sur $\mathcal{K}$.

1: Calculer une base $T_1, \ldots, T_d$ de $\mathcal{E}(A)$.
2: Choisir $\underline{c} := (c_1, \ldots, c_d)$ au hasard dans $\mathcal{C}$ et construire un probable élément générique, $T = \sum_{i=0}^{d} c_i T_i$.
3: Calculer le polynôme caractéristique de T, $\mathcal{X}_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{\ell} (\lambda - \lambda_i)^{h_i}$, $\lambda_i \in \mathcal{C}$.
4: Pour i de 1 à ℓ : calculer une base de $\ker((T - \lambda_i \mathrm{I}_n)^{h_i})$.
5: Construire P la transformation inversible qui admet pour colonnes les bases de $\ker((T - \lambda_i \mathrm{I}_n)^{h_i})$ pour chaque i.
6: Calculer $P[A]$. On obtient le nouveau système $[A_1] \oplus \cdots \oplus [A_\ell]$.

Définition 2.3.10 *[21] L'ensemble des homomorphismes entre deux systèmes $[A]$ et $[B]$ de taille respective n et m est défini par*

$$\mathrm{Hom}(A, B) = \{T \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathcal{K}) : T' = AT - TB\}.$$

Remarque 2.3.11 *Soit $[A]$ un système et P une transformation telle que*

$$P[A] = [A_1] \oplus \ldots \oplus [A_\ell].$$

Si $M = \sum_{j=1}^{dim(\mathcal{E}(A))} c_j T_j$ est un élément général de $\mathcal{E}(A)$, alors $P^{-1}MP$ est tel que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} M_{11} & \star & \cdots & \star \\ \star & \ddots & \star & \\ \vdots & \star & \ddots & \vdots \\ \star & & \cdots & M_{\ell\ell} \end{pmatrix}$$

où $M_i \in \mathcal{E}(A_i)$ et $\star_{ij} \in \mathrm{Hom}(A_i, A_j) := \{T \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathcal{K}) : T' = A_i T - T A_j\}$. Chaque M_{ij} est de la forme $\sum_{j=1}^{dim(\mathcal{E}(A))} c_j \tilde{T}_j^{ij}$ où $\tilde{T}_j^{ij}$ est à coefficients dans $\mathcal{K}$. La preuve de la proposition 2.3.7 montre que l'élément $M_{ii} := \sum_{j=1}^{dim(\mathcal{E}(A))} c_j \tilde{T}_j^{ii}$ appartient à l'eigenring de A_i. Les $(\tilde{T}_j^{ii})_j$ forment une famille génératrice de $\mathcal{E}(A_i)$. Pour trouver un élément général de $\mathcal{E}(A_i)$ il reste à extraire une famille libre de $(\tilde{T}_j^{i})_j$.

Remarque 2.3.12 *Afin de garantir une sortie correcte pour l'algorithme probabiliste de décomposition avec un élément générique, nous pourrions calculer les polynômes caractéristiques de chaque M_{ii} dans $\mathcal{C}(t_1^i, \ldots, t_d^i)[\lambda]$ et les factoriser ; T est générique si et seulement si chacun de ces polynômes a exactement un facteur irréductible. Ceci est dû au fait que deux facteurs de χ_M qui sont premiers entre eux sur $C(t_1, \ldots, t_d)[\lambda]$ restent premiers entre eux en spécialisant les t_j^i pour $j = 1, \ldots, d$ à des constantes aléatoires*

$c_j^i \in \mathcal{C}$ *(Théorème d'irréductibilité de Hilbert).*

Remarque 2.3.13 *L'algorithme précédent fournit une décomposition maximale pour des systèmes complètement réductibles. En général, il calcule un système équivalent diagonal par blocs* $[A_i] \oplus \ldots \oplus [A_\ell]$ *tel que chaque* A_i *est soit réductible soit irréductible mais indécomposable.*

2.3.2 Cas général : $\mathcal{C}$ est non-algébriquement clos

Dans le cas où $\mathcal{C}$ est non-algébriquement clos, l'algorithme de décomposition avec un élément générique de l'eigenring s'effectue en remplaçant les facteurs du polynôme caractéristique χ_T de la forme $(x-c)^h$ par des facteurs irréductibles sur $\mathcal{C}$:

Algorithme 3 *Décomposition rationnelle*

Input : $[A]$ un système différentiel linéaire de taille n à coefficients dans $\mathcal{K}$.

Output : $P[A] = [A_1] \oplus \cdots \oplus [A_\ell]$ avec le polynôme caractéristique de l'élément général de chaque $\mathcal{E}(A_i)$ est irréductible.

1: Calculer une base $T_1, \ldots, T_d$ de $\mathcal{E}(A)$.
2: Choisir $\underline{c} := (c_1, \ldots, c_d)$ au hasard et construire un probable élément générique, $T = \sum_{i=0}^{d} c_i T_i$.
3: Calculer le polynôme caractéristique de T, et le factoriser $\mathcal{X}_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{\ell} f_i(\lambda)^{h_i}$ où f_i est irréductible sur $\mathcal{C}$.
4: Pour i de 1 à ℓ : calculer une base de $\ker(f_i(T)^{h_i})$
5: Construire P la transformation inversible qui admet pour colonnes les bases de $\ker(f_i(T)^{h_i})$ pour chaque i.
6: Calculer $P[A]$. On obtient le nouveau système $[A_1] \oplus \cdots \oplus [A_\ell]$.

Nous montrons dans la suite que chaque sous-système obtenu $[A_i]$ avec l'algorithme 3 peut ne pas être indécomposable sur $\mathcal{K}$.

On considère un système qui est une somme directe de sous-systèmes indécomposables et tous équivalents entre eux. Nous décrivons la structure de l'eigenring ainsi que le polynôme caractéristique de son élément général dans le cas où le corps de constantes n'est pas algébriquement clos.
On suppose que $[A]$ est un système tel que $A = A_1 \oplus A_2$. Soit $M \in \mathcal{E}(A)$. Un calcul direct

de l'eigenring donne :

$$\begin{pmatrix} M'_{11} & M'_{12} \\ M'_{21} & M'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_{12} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad (2.3.2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M'_{11} = & [A_1, M_{11}] : M_{11} \in \mathcal{E}(A_1) \\ M'_{12} = & A_1 M_{12} - M_{12} A_2 : M_{12} \in \mathcal{H}(A_1, A_2) \\ M'_{21} = & A_2 M_{21} - M_{21} A_1 : M_{21} \in \mathcal{H}(A_2, A_1) \\ M'_{22} = & [A_2, M_{22}] : M_{22} \in \mathcal{E}(A_2). \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Lemme 2.3.14 *On suppose que* $[A]$ *est un système tel que* $[A] := [A_1] \oplus \ldots \oplus [A_\mu]$ *et où les* $[A_i]$ *sont équivalents deux à deux. Alors, on a*

$$\mathcal{E}(A) \sim \mathcal{M}_\mu(\mathcal{C}) \otimes \mathcal{E}(A_1).$$

Par conséquent, $\dim(\mathcal{E}(A)) = \mu^2 \dim(\mathcal{E}(A_1))$.

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mu = 2$. Soit M l'élément général de l'eigenring de $[A]$. D'après le calcul précédent (2.3.2) on a $M_{11} \in \mathcal{E}(A_1)$, $M_{22} \in \mathcal{E}(A_2) \sim \mathcal{E}(A_1)$, $M_{12} \in \mathrm{Hom}(A_1, A_2) \sim \mathcal{E}(A_1)$ et $M_{21} \in \mathrm{Hom}(A_2, A_1) \sim \mathcal{E}(A_1)$. Ceci justifie la première partie du résultat. L'égalité des dimensions en découle. ■

Proposition 2.3.15 *On considère un système* $[A]$ *à coefficients dans* $\mathcal{K}$ *et supposé être équivalent à une somme directe de* μ *copies d'un système indécomposable* $[\widetilde{A}]$. *Alors* $\dim(\mathcal{E}(A)) = \mu^2 \dim(\mathcal{E}(\tilde{A}))$ *et le polynôme caractéristique d'un élément générique* T *dans* $\mathcal{E}(A)$ *est une puissance d'un polynôme irréductible dont le degré est un multiple de* μ.

Preuve. Par hypothèse, on a $[A] \sim [I_\mu \otimes \widetilde{A}]$ avec $\widetilde{A}$ indécomposable sur $\mathcal{K}$. Ceci implique que $\mathcal{E}(A) \sim \mathcal{M}_\mu(\mathcal{C}) \otimes \mathcal{E}(\widetilde{A})$ et alors $\dim(\mathcal{E}(A)) = \mu^2 \dim(\mathcal{E}(\widetilde{A}))$. D'autre part, $\mathcal{E}(A)$ admet un élément générique de la forme $T = M \otimes \widetilde{T}$ où M est une matrice générique dans $\mathcal{M}_\mu(\mathcal{C})$ et $\widetilde{T}$ est un élément générique dans $\mathcal{E}(\widetilde{A})$. Ainsi, le polynôme caractéristique χ_T de T est égal au produit composé $\chi_M \diamond \chi_{\tilde{T}}$ (voir l'appendice A sur les produits composés des polynômes). Puisque $\widetilde{A}$ est indécomposable sur $\mathcal{K}$, on a $\chi_{\widetilde{T}} = f^h$ où f est irréductible sur $\mathcal{C}$ et ceci implique que $\chi_T = g \diamond f^h = (g \diamond f)^h$ où $g = \chi_M$. D'après la proposition A.7 dans l'appendice A, le polynôme $g \diamond f$ est irréductible. On obtient le résultat par le fait que $\deg(g \diamond f) = (\deg g)(\deg f) = \mu \deg f$. ■

En reprenant la preuve de la proposition 2.3.9, nous obtenons

Proposition 2.3.16 *Soit* A *un système tel que* $A \sim A_1 \oplus A_2$ *et* $\mathrm{Hom}(A_1, A_2) = \{0\}$. *Si* M *est l'élément général de* $\mathcal{E}(A)$, *alors son polynôme caractéristique* χ_M *admet deux facteurs premiers entre eux.*

Preuve. D'après le calcul direct (2.3.2) on voit aisément que tout élément de l'eigenring de $[A]$ est de la forme $M := M_1 \oplus M_2$ où M_1 (resp. M_2) est l'élément général de l'eigenring de A_1 (resp. A_2). Donc $\chi_M = F_1 \times F_2$ avec $\text{pgcd}(F_1, F_2) = 1$. ■

Remarque 2.3.17 *Si* $[A_1]$ *et* $[A_2]$ *sont deux systèmes tels que* $\text{Hom}(A_1, A_2) = \{0\}$ *alors* $[A_1] \nsim [A_2]$ *mais la réciproque n'est pas vraie. Il suffit de considérer un système* $[A_1]$ *et le système* $\left[\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix}\right]$ *où* A_i, C_1, *et* C_2 *sont à coefficients dans* $\mathcal{K}$.

2.3.3 Conclusion

Une décomposition de $[A]$ est obtenue en appliquant le lemme des noyaux à un élément générique T de l'eigenring de $[A]$ tel que $\chi_T = \prod_{i=1}^{\ell} f_i^{h_i}$ où f_i est irréductible. On obtient une transformation P qui décompose le noyau de T. Cette transformation P décompose le système $[A]$ en $[P[A]] = [A_1] \oplus \ldots \oplus [A_\ell]$ tel que pour tout $i \neq j$ on a soit $\text{Hom}(A_i, A_j) = \{0\}$, soit $\text{Hom}(A_i, A_j) \neq \{0\}$. Si $\mathcal{C}$ est algébriquement clos, cette décomposition construit un système équivalent diagonal par bloc où chaque sous-système est indécomposable sur $\mathcal{K}$. Dans le cas non algébriquement clos, les sous systèmes obtenus regroupent les blocs indécomposables équivalents entre eux sur $\mathcal{K}$. L'obtention d'une somme de sous-systèmes indécomposables sur $\mathcal{K}$ peut nécessiter le calcul dans des extensions algébriques du corps des constantes $\mathcal{C}$ pour séparer les blocs équivalents.

2.4 Décomposition isotypique avec $\mathcal{C}$ algébriquement clos

Soient $(\mathcal{K}, \partial = \frac{d}{dx})$ un corps différentiel, $\mathcal{C}$ le corps de constantes de $\mathcal{K}$ et $[A]$ le système $Y' = AY$ où A est une matrice de taille n à coefficients dans $\mathcal{K}$. Dans cette section nous supposons que le corps des constantes est algébriquement clos et nous considérons le cas d'un système complètement réductible. Nous rappelons quelques résultats concernant la structure de l'eigenring de ce type de systèmes.

Proposition 2.4.1 *([66, Proposition 2.4], [45, Proposition 1.2 p.643]) Soit* $[A]$ *un système complètement réductible. Alors* $[A]$ *est équivalent à un système* $[A_1] \oplus \ldots \oplus [A_\ell]$ *où chaque* A_i *est une somme directe de* μ_i *copies d'un même bloc* B_i *irréductible de taille* s_i *avec* $[B_i] \nsim [B_j]$ *pour* $i \neq j$. *Alors, l'eigenring de* $[A]$ *satisfait* $\mathcal{E}(A) \sim \bigoplus_i \mathcal{M}_{\mu_i}(\mathcal{C}) \otimes I_{s_i}$. *Cette décomposition est appelée la* décomposition isotypique *de* $[A]$ *et elle est unique à isomorphisme près.*

Lemme 2.4.2 *([45, Lemme de Schur, Proposition 1.1]) Soit* $[A]$ *un système irréductible sur* $\mathcal{K}$ *de dimension* n. *Alors, on a* $\mathcal{E}(A) = \{c\text{I}_n, c \in \mathcal{C}\}$.

Preuve. Soit $T \in \mathcal{E}(A)$. D'après la proposition 2.3.9 , on a $\chi_T[\lambda] = (\lambda - a)^n$ où $a \in \mathcal{C}$ car $[A]$ est irréductible donc indécomposable. L'élément $T - a\mathrm{I}_n$ de $\mathcal{E}(A)$ est non inversible. S'il est non nul, alors la proposition 2.3.2 montre que $[A]$ est réductible : contradiction. Donc $T = a\mathrm{I}_n$. ■

Proposition 2.4.3 *([21, Corollaire 4.2]) Soit $[A_1]$ et $[A_2]$ deux systèmes. Supposons que $[A_1]$ est irréductible alors,* $\dim(\mathrm{Hom}(A_1, A_2)) = 1$ *si* $[A_1] \sim [A_2]$, *et* $\dim(\mathrm{Hom}(A_1, A_2)) = 0$ *sinon.*

Corollaire 2.4.4 *Soit $[A]$ est un système diagonal par blocs de la forme*

$$[A_1] \oplus \ldots \oplus [A_\ell] \tag{2.4.1}$$

où chaque A_i est une somme directe de μ_i copies d'un même bloc B_i irréductible de taille s_i avec $B_i \nsim B_j$ pour $i \neq j$. Alors, l'eigenring de $[A]$ satisfait

$$\mathcal{E}(A) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathrm{span}\{E_{hj} \otimes Q^i_{hj} \quad pour \quad (h,j) \in \{1, \ldots, \mu_i\}\}, \tag{2.4.2}$$

où $Q^i_{hj} \in \mathrm{Hom}(A^h_i, A^j_i)$. De plus on a, $\dim(\mathcal{E}(A)) = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i^2$.

Exemple 2.4.5 *On considère le cas où $m = 3$ et $A = P_1[B_1] \oplus B_1 \oplus P_2[B_1] \oplus Q[B_2] \oplus B_2$. Un élément général de l'eigenring de $[A]$ admet la forme suivante*

$$\begin{pmatrix} c_1 I_{s_1} & c_2 P_1^{-1} & c_3 P_1^{-1} P_2 & 0 & 0 \\ c_4 P_1 & c_5 I_{s_1} & c_6 P_2 & 0 & 0 \\ c_7 P_2^{-1} P_1 & c_8 P_2^{-1} & c_9 I_{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{10} I_{s_2} & c_{11} Q^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & c_{12} Q & c_{13} I_{s_2} \end{pmatrix}$$

et $\dim(\mathcal{E}(A)) = 13$.

2.5 Factorisation dans le corps des séries formelles de Laurent

Dans cette section, nous considérons le cas où le corps des coefficients $\mathcal{K}$ est le corps des séries formelles de Laurent $\mathcal{C}((x))$ avec $\mathcal{C}$ algébriquement clos. En utilisant la notion de partie exponentielle d'une solution formelle du système $[A]$, nous montrons que tout système à coefficients dans $\mathcal{C}((x))$ est équivalent sur $\mathcal{C}((x))$ à une forme "spéciale" que

nous appelons *quasi complètement réductible* :

$$[A] \sim [A_1] \oplus \ldots \oplus [A_\ell],$$

où chaque sous-système $[A_i]$ est indécomposable et est soit irréductible soit équivalent à un système triangulaire supérieur dont les blocs sur la diagonale sont irréductibles. Nous appliquons la méthode de décomposition en utilisant l'eigenring des sections précédentes pour calculer cette décomposition. Dans un deuxième temps, nous expliquons comment procéder pour factoriser chaque $[A_i]$ en analysant son eigenring. Ainsi, avec un élément générique de l'eigenring de $[A]$, nous obtiendrons une *réduction maximale* du système dans $\mathcal{C}((x))$, i.e., un système équivalent diagonal supérieur par blocs où chaque système B_i de la diagonale est irréductible.
Dans le cas où $\mathcal{K} = \mathcal{C}((x))$, trouver l'eigenring du système $[A]$ revient à déterminer les solutions dans le corps des séries de Laurent pour le système $Y' = (I_n \otimes A - A^t \otimes I_n)\, Y$. En pratique, ce dernier peut être calculé pour une précision finie. La question se pose alors d'estimer le nombre de termes nécessaires à considérer afin de certifier chaque étape de la réduction. Nous traitons ces questions dans la section 2.5.3.

2.5.1 Solution formelle et structure du système

Considérons un système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients dans $\mathcal{C}((x))$, de dimension n et de rang de Poincaré $p > 0$

$$[A] : \frac{dY}{dx} = A(x)Y. \tag{2.5.1}$$

La matrice A s'écrit $A = \frac{1}{x^{p+1}} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$ où les matrices A_k sont de dimension n, à coefficients dans $\mathcal{C}$ et $A_0 \neq 0$.

Dans [5], Balser, Jurkat et Lutz montrent qu'un tel système admet une matrice fondamentale de solutions formelles de la forme

$$F(x)G(x) = F(x)\mathrm{diag}(G_1(x), \ldots, G_\ell(x)), \tag{2.5.2}$$

où $F \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{C}((x)))$ et où G est une matrice diagonale par blocs composée de blocs G_i, chacun de la forme

$$G_i = x^{\Lambda_i} U_i \exp(Q_i), \tag{2.5.3}$$

où :

— Q_i est une matrice diagonale de la forme

$$Q_i = q_i(\frac{1}{t})I_{m_i} \oplus q_i(\frac{1}{\omega_i t})I_{m_i} \oplus \ldots \oplus q_i(\frac{1}{\omega_i{}^{r_i-1}t})I_{m_i}, \tag{2.5.4}$$

avec $t = x^{\frac{1}{r_i}}$, r_i minimal, q_i est un polynôme sans terme constant, ω_i est une racine r_i-ème de l'unité et I_{m_i} est la matrice identité de dimension m_i ;

— Λ_i est une matrice triangulaire supérieure constante

$$\Lambda_i = J_{m_i}(\lambda_i) \oplus \left(J_{m_i}(\lambda_i) + (\frac{1}{r_i})I_{m_i}\right) \oplus \ldots \oplus \left(J_{m_i}(\lambda_i) + (\frac{r_i-1}{r_i})I_{m_i}\right), \tag{2.5.5}$$

où $J_{m_i}(\lambda_i)$ est un bloc de Jordan de dimension m_i, de valeur propre λ_i ;

— $U_i = \left(\omega_i^{(j-1)(k-1)} I_{m_i}\right)$ est une matrice de Vandermonde.

On note que G_i est complètement déterminée par $(q_i, \lambda_i, r_i, m_i)$. On appelle r_i (respectivement, m_i) l' *indice de ramification*, (respectivement, la *multiplicité*) de q_i dans G_i.

Dans la suite, nous ferons référence à ce résultat sous le nom du théorème BJL. Grâce à cette classification formelle ([5]), on déduit le résultat suivant qui est une conséquence du théorème I dans ([5]).

Théorème 2.5.1 *Pour tout système* $[A]$ *avec* $A = \frac{1}{x^{p+1}} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$, *il existe une transformation* $P \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{C}((x)))$ *telle que le changement de variables* $Y = PZ$ *produit un système équivalent au système* $[A]$ *et qui est diagonal par blocs*

$$[A_1(x)] \oplus \ldots \oplus [A_\ell(x)], \tag{2.5.6}$$

où chaque $[A_i]$ *est indécomposable sur* $\mathcal{C}((x))$. *De plus, pour tout* i, *il existe une matrice de permutation* P_i *telle que :*

$$P_i[A_i] = P_i^{-1} A_i P_i = \begin{pmatrix} B_i & \frac{1}{x} I_{r_i} & 0 \\ & \ddots & \frac{1}{x} I_{r_i} \\ 0 & & B_i \end{pmatrix}, \tag{2.5.7}$$

où $[B_i]$ *est irréductible sur* $\mathcal{C}((x))$ *de taille* r_i *et répété* m_i *fois. Chaque* $[B_i]$ *est décomposable dans* $\mathcal{C}((x^{1/r_i}))$. *Plus précisément, soit* $t := x^{1/r_i}$ *et* $[\mathcal{B}_i]$ *le système obtenu dans* $\mathcal{C}((t))$

$$[\mathcal{B}_i] : \quad \frac{dY}{dt} = \mathcal{B}_i Y, \quad \mathcal{B}_i := r_i t^{r_i-1} B_i(t^{r_i}).$$

Alors, il existe une transformation S_i *dans* $GL_{r_i}(\mathcal{C}((t)))$ *telle que* $S_i[\mathcal{B}_i] := S_i^{-1}\mathcal{B}_i S_i - S_i^{-1}\frac{dS_i}{dt}$

est une matrice diagonale de la forme

$$S_i[\mathcal{B}_i] = \operatorname{diag}\left(W_i(t), \ldots, W_i(\omega_i{}^{r_i-1}t)\right), \tag{2.5.8}$$

où $W_i(t) = \frac{dq_i(t)}{dt} + \frac{\widetilde{\lambda}_i}{r_i t^{r_i}}$ *et* $\widetilde{\lambda}_i$ *diffère de* λ_i *de l'équation* (2.5.5) *d'un entier.*

Nous commençons par donner une preuve de la première partie du théorème 2.5.1, à savoir que tout système $[A]$ est équivalent à un système diagonal par blocs de la forme (2.5.6) où chaque bloc est indécomposable et ayant la structure spéciale (2.5.7). Pour cela, nous remarquons d'abord, en utilisant (2.5.2), que $[A]$ est équivalent au système $F[A]$ qui a la matrice G en tant que matrice fondamentale de solutions. Comme G est la somme directe de ℓ blocs, nous voyons que $[A]$ est équivalent sur $\mathcal{C}((x))$ à un système diagonal par blocs de la forme (2.5.6).

Maintenant, nous allons établir que chaque bloc $[A_i]$ est équivalent à un système de la forme spéciale (2.5.7).

Proposition 2.5.2 *Soit* $[A_i]$ *le système qui admet* $G_i = x^{\Lambda_i} U_i \exp(Q_i)$ *(*(2.5.3), (2.5.4) *et* (2.5.5)*) comme matrice fondamentale de solutions. Il existe une matrice de permutation* P_i*, telle que*

$$P_i[A_i] = \begin{pmatrix} B_i & \frac{1}{x} I_{r_i} & 0 \\ & \ddots & \frac{1}{x} I_{r_i} \\ 0 & & B_i \end{pmatrix},$$

où $[B_i]$ *est irréductible sur* $\mathcal{C}((x))$ *de taille* r_i *répété* m_i *fois.*

Preuve. Afin d'alléger les notations nous omettons l'indexation dans (A_i, G_i, U_i, r_i, etc.) et nous utilisons (A, G, U, r, etc.). Dans la formule (2.5.4) du théorème BJL, la partie exponentielle de la matrice fondamentale de solutions est écrite de la façon suivante : m fois $q(\frac{1}{t})$ puis m fois $q(\frac{1}{\omega t})$, etc. Nous choisissons de les regrouper différemment, à savoir consécutivement en m blocs contenant $q(\frac{1}{t})$, …, $q(\frac{1}{\omega^{r-1}t})$ chacun ; soit $\tilde{Q}$ cette matrice. Soit P la matrice de permutations qui effectue cette opération. Alors le système $[\widetilde{A}]$, avec $\widetilde{A} := P^{-1}AP$, admet une matrice fondamentale de solutions $\widetilde{G} := x^{\widetilde{\Lambda}} \widetilde{U} \exp\left(\widetilde{Q}\right)$ où

$$\widetilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \widetilde{L} & I_r & 0 \\ & \ddots & I_r \\ 0 & & \widetilde{L} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{L} = (\lambda) \oplus (\lambda + \frac{1}{r}) \oplus \ldots \oplus (\lambda + \frac{r-1}{r}).$$

En remarquant que $\widetilde{\Lambda} = (J_m(0) \otimes I_r + I_m \otimes \widetilde{L})$, on voit que

$$\widetilde{G} = x^{J_m(0)} \otimes H,$$

où

$$H := x^{\tilde{L}}\, \tilde{U}\, \mathrm{diag}(e^{q(\frac{1}{t})}, \ldots, e^{q(\frac{1}{\omega^{r-1}t})}),$$

où $\tilde{U}$ est une matrice de Vandermonde de taille r. Soit $B := \frac{dH}{dx}H^{-1}$. Un calcul simple donne

$$\widetilde{A} = \frac{d\widetilde{G}}{dx}\widetilde{G}^{-1} = (\frac{1}{x}J_m(0) \otimes I_r + I_m \otimes B).$$

Nous devons encore vérifier que B admet ses coefficients dans $\mathcal{C}((x))$. Pour cela, on remarque que remplacer t par ωt dans H entraîne une permutation de ses colonnes. Cela implique $H(\omega t) = H(t)C$ où C est une matrice de permutations cyclique (constante). Il s'ensuit que B est invariant sous l'opération $t \mapsto \omega t$ et alors, par la théorie de Galois, $B \in \mathcal{M}_r(\mathcal{C}((x)))$. Finalement, $[B]$ est irréductible dans $\mathcal{C}((x))$ car $\mathcal{C}((x^{1/r}))$ est la plus petite extension algébrique de $\mathcal{C}((x))$ qui contient les parties exponentielles de H : l'indice de ramification r est minimal. ■

Remarque 2.5.3 *En particulier, si $m = 1$, le système $[A]$ ayant G comme solution déterminé par $(q_i, \lambda_i, r_i, 1)$ sera irréductible sur $\mathcal{C}((x))$.*

Il résulte les équivalences suivantes :

Proposition 2.5.4 *Soit $[A]$ un système de la forme* (2.5.1)*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $[A]$ *est équivalent à un système $[\tilde{A}]$ où $\tilde{A}$ est de la forme* (2.5.7)*.*

(ii) $[A]$ *est indécomposable dans $\mathcal{C}((x))$.*

(iii) $[A]$ *a une solution fondamentale* (2.5.2) *avec un seul bloc G_i ($\ell = 1$).*

Preuve. L'implication "(i) ⇒ (ii)" découle de la proposition 2.5.6. L'implication "(ii) ⇒ (iii)" est immédiate : en effet, si $\ell \geq 2$ alors d'après le théorème de BJL, $[A]$ est décomposable. Finalement, "(iii) ⇒ (i)" est le résultat de la proposition 2.5.2. ■

2.5.2 Décomposition et factorisation locale

On suppose ici que le corps des constantes est algébriquement clos (nous parlons du cas non algébriquement clos dans le chapitre suivant). D'après la section précédente, on a l'existence d'une matrice P à coefficients dans $\mathcal{C}((x))$ qui donne la factorisation (2.5.6) et (2.5.7). On souhaite à présent calculer cette factorisation. Nous procédons en deux étapes :

Étape 1. Trouver une transformation P à coefficient dans $\mathcal{C}((x))$ telle que

$$P[A] := [A_1(x)] \oplus \ldots \oplus [A_\ell(x)]$$

où chaque $[A_i]$ est indécomposable sur $\mathcal{C}((x))$.

Étape 2. Pour chaque A_i, calculer un système équivalent, triangulaire supérieur et tel que les sous-systèmes de la diagonale sont tous équivalents entre eux et irréductibles sur $\mathcal{C}((x))$.

Pour cela, on va utiliser la méthode de factorisation en utilisant l'eigenring. Comme expliqué dans la partie précédente, la forme de Jordan d'un élément générique de l'eigenring donne une factorisation du système $[A]$.

2.5.2.1 Décomposition sur $\mathcal{C}((x))$

La décomposition maximale est obtenue en appliquant l'algorithme 2 de la partie précédente. L'algorithme construit une transformation P telle que $P[A]$ est un système diagonal par blocs

$$P[A] = [A_1] \oplus \ldots \oplus [A_n],$$

où les polynômes caractéristiques des eigenrings de chaque A_i sont de la forme $(\lambda - c_i)^{h_i}$ où $c_i \in \mathcal{C}$ et $h_i \in \mathbb{N}$. Nous l'illustrons ceci à travers l'exemple suivant :

Exemple 2.5.5 *On considère l'exemple du tutorial [9]. Le système $[A]$ est donné par :*

$$A(x) = \frac{1}{x^4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & -x^2 & x^2 & -x^2 \\ 0 & 1 & x^2 & 0 \\ x^2 & x^2 & 0 & -x^2 \end{pmatrix}.$$

Par souci de clarté, nous ne montrons que quelques termes des séries impliqués. Nous verrons plus loin les questions liées au choix de la précision. Nous calculons d'abord un élément générique T dans l'eigenring de $[A]$ (nous affichons les 3 premiers termes) :

$$T = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 5\,x^2 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -5\,x^2 & -5\,x^2 & -5 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^3).$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_T(\lambda) = (\lambda + 5)\,(\lambda + 10)^3\,.$$

On construit une transformation P :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & x^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^3).$$

Cette transformation décompose le système $[A]$ en deux sous-systèmes :

$$A_1 := \begin{bmatrix} -x^{-2} - 1 & x^{-2} - 1 & x^{-4} + 3\,x + 2\,x^2 \\ x^{-4} & x^{-2} + 0 & 0 \\ 0 & x^{-3} & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^3)$$

et

$$A_2 := \begin{bmatrix} -x^{-2} + 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}\left(x^3\right).$$

2.5.2.2 Le cas d'un système indécomposable : $\chi_M = (x - c)^h$

Après une décomposition maximale sur $\mathcal{C}((x))$, on obtient un système diagonal par blocs :

$$[A_1(x)] \oplus \ldots \oplus [A_\ell(x)],$$

où chaque A_i est indécomposable sur $\mathcal{C}((x))$. De plus, d'après la proposition 2.5.4, chaque sous système A_i est équivalent à une structure particulière (2.5.7). Pour construire cette factorisation et obtenir une réduction "maximale", nous avons besoin de connaître r_i la taille du système irréductible dans $\mathcal{C}((x))$ et qui représente la ramification suffisante pour écrire la solution formelle associée à A_i.
Commençons tout d'abord par décrire la structure de l'eigenring d'un tel système :

Proposition 2.5.6 *Soit le système $[A]$ avec A une matrice de taille n triangulaire par blocs ayant la forme* spéciale

$$\begin{pmatrix} B & \frac{1}{x}\mathrm{I}_r & 0 \\ & \ddots & \frac{1}{x}\mathrm{I}_r \\ 0 & & B \end{pmatrix}, \tag{2.5.9}$$

où $[B]$ est irréductible sur $\mathcal{C}((x))$ de taille r et répété m fois ($n = m \times r$). Alors, l'eigenring

de $[A]$ *est formé par des matrices de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} c_1\mathrm{I}_r & c_2\mathrm{I}_r & \cdots & c_m\mathrm{I}_r \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_2\mathrm{I}_r \\ 0 & \cdots & 0 & c_1\mathrm{I} \end{pmatrix},$$

où $c_i \in \mathcal{C}$. *En particulier, on a* $\dim(\mathcal{E}(A)) = m$. *On appelle* m *la* multiplicité *de* $[B]$ *et* r *l'indice de* ramification *de* $[B]$.

Preuve. Soit T un élément dans $\mathcal{E}(A)$ partitionné en m^2 blocs de taille r :

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m1} & \cdots & T_{mm} \end{pmatrix}.$$

Par identification dans l'équation $T' = [A, T]$, on obtient le système d'équations :

$$T'_{i,j} = [B, T_{i,j}] - \frac{1}{x}T_{i,j-1} + \frac{1}{x}T_{i+1,j}, \;\; 1 \leq i, j \leq m,$$

avec $T_{m+1,j} = T_{i,0} = 0$. Comme $[B]$ est irréductible, d'après le lemme de Schur 2.4.2, $\dim(\mathcal{E}(B)) = 1$ et comme $T_{m,1} \in \mathcal{E}(B)$, on obtient $T_{m,1} = cI_r$ avec $c \in \mathcal{C}$. Pour tout i, chaque équation

$$T'_{i,1} = [B, T_{i,1}] + \frac{1}{x}T_{i+1,1}$$

peut être résolue par variation de la constante. Pour $i = m - 1$, ceci implique de trouver $f(x) \in \mathcal{C}((x))$ telle que $f'(x) = \frac{c}{x}$. Cela n'est possible que si $c = 0$ (alors $T_{m,1} = 0$) et f est constante. En procédant de la même manière pour tout $i = m-1, m-2, \ldots, 1$, on obtient que $T_{i+1,1} = 0$. De la même façon, pour toutes les équations

$$T'_{m,j} = [B, T_{m,j}] - \frac{1}{x}T_{m,j-1} \quad j = 2, \ldots, m,$$

on a $T_{m,j-1} = 0$.
À ce stade, nous avons résolu toutes les équations :

$$\begin{cases} T'_{m,j} &= [B, T_{m,1}] - \frac{1}{x}T_{m,j-1} \\ T'_{i,1} &= [B, T_{i,1}] + \frac{1}{x}T_{i+1,1} \\ T'_{m,1} &= [B, T'_{m,1}] \end{cases}$$

et jusqu'à présent nous avons :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 I_r & T_{1,2} & \cdots & \cdots & T_{1,m} \\ 0 & T_{22} & \cdots & T_{i,j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & T_{m-1,2} & \cdots & T_{m-1,m-1} & T_{m-1,m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_m I_r \end{pmatrix}.$$

Maintenant, on considère les équations

$$T'_{i,j} = [B, T_{i,j}] - \frac{1}{x} T_{i,j-1} + \frac{1}{x} T_{i+1,j},$$

pour $i \neq m$ et $j \neq 1$. Nous commençons simultanément par celles de la deuxième colonne et la ligne $(m-1)$ et nous itérons du bas vers le haut. Chaque système

$$T'_{i,j} = [B, T_{i,j}] - \frac{1}{x} T_{i,j-1} + \frac{1}{x} T_{i+1,j}$$

admet comme solution $T_{i,j} = \alpha_{i,j} I_r$ et impose la condition $T_{i,j-1} = T_{i+1,j}$.

Il s'ensuit que

$$\begin{cases} \forall j < i \quad , \quad T_{i,j} = 0, \\ \forall j \geq i \quad , \quad T_{i,j} = T_{i+1,j+1}. \end{cases}$$

Finalement on a bien

$$T = \begin{pmatrix} c_1 \mathrm{I}_r & c_2 \mathrm{I}_r & \cdots & c_m \mathrm{I}_r \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_2 \mathrm{I}_r \\ 0 & \cdots & 0 & c_1 \mathrm{I}_r \end{pmatrix} \tag{2.5.10}$$

et $\dim(\mathcal{E}(A)) = m$. ■

Corollaire 2.5.7 *Soit $[\widetilde{A}]$ un bloc indécomposable de multiplicité m (voir la définition de la multiplicité d'un block indécomposable dans la proposition 2.5.9). Soit T un élément générique dans $\mathcal{E}(\widetilde{A})$. Le polynôme* minimal *de T est $(\lambda - \widetilde{\lambda})^m$, $\widetilde{\lambda} \in \mathcal{C}$.*

Preuve. Le résultat est une conséquence de la structure de l'élément général de l'eigenring obtenu dans (2.5.10) de la proposition précédente. ■

Nous montrons dans ce qui suit, comment effectuer une factorisation pour calculer un

système équivalent de la forme

$$\begin{pmatrix} B & D_1 & \cdots & D_{m-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & D_1 \\ 0 & \cdots & 0 & B \end{pmatrix}, \tag{2.5.11}$$

où B est irréductible sur $\mathcal{C}((x))$ de taille r la ramification associée.

Proposition 2.5.8 *Soit $[A]$ un système indécomposable et M l'élément général de son eigenring tel que $\chi_M(\lambda) = (\lambda - c)^h$ où $c \in \mathcal{C}$ et $h \in \mathbb{N}$. Si le polynôme minimal de M est $\chi_{min,M}(\lambda) = (\lambda - c)^m$ avec $1 < m \leq h$, alors on peut construire P à coefficients dans $\mathcal{C}[[x]]$ telle que $P[A]$ est de la forme (2.5.11) où le bloc de la diagonale est de taille $r := \frac{h}{m}$.*

Preuve. La preuve est constructive. Soit T un élément générique de l'eigenring de $[A]$. D'après le Corollaire 2.5.7 on a $(T - \widetilde{\lambda}I)^{m-1} \neq 0$. Posons $r := \frac{h}{m}$. Soient $v_1, \ldots, v_r$ r vecteurs linéairement indépendants tels que $(T - \widetilde{\lambda}I)^{m-1} v_i \neq 0$. On construit un *cycle de Jordan* de longueur m en multipliant par $(T - \widetilde{\lambda}I)$ comme suit :

$$(v_1, \ldots, v_r) \overset{(T-\widetilde{\lambda}I).}{\longrightarrow} (v_{r+1}, \ldots, v_{2r}) \overset{(T-\widetilde{\lambda}I).}{\longrightarrow} \ldots \overset{(T-\widetilde{\lambda}I).}{\longrightarrow} (0, \ldots, 0).$$

Il est facile de vérifier que la famille

$$\{v_1, \ldots, v_r, (T - \widetilde{\lambda}I)v_1, \ldots, (T - \widetilde{\lambda}I)v_r, \ldots, (T - \widetilde{\lambda}I)^{m-1}v_1, \ldots, (T - \widetilde{\lambda}I)^{m-1}v_r\}$$

est linéairement indépendante. Soit P la transformation ayant comme colonnes les vecteurs :

$$((T - \widetilde{\lambda}I)^{m-1}v_1, \ldots, (T - \widetilde{\lambda}I)^{m-1}v_r, \ldots, (T - \widetilde{\lambda}I)v_1, \ldots, (T - \widetilde{\lambda}I)v_r, \ldots, v_1, \ldots, v_r).$$

On a

$$S := P^{-1}TP = \begin{pmatrix} \widetilde{\lambda}I_r & I_r & 0 \\ & \ddots & I_r \\ 0 & & \widetilde{\lambda}I_r \end{pmatrix}.$$

La matrice S appartient à l'eigenring de $P[A]$ et est constante. On a donc $P[A]S - SP[A] =$

0. Il reste à effectuer une simple identification pour obtenir

$$P[A] = \begin{pmatrix} B & D_1 & \cdots & D_{m-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & D_1 \\ 0 & \cdots & 0 & B \end{pmatrix}. \tag{2.5.12}$$

■

Remarque 2.5.9 *Avec les notations de la proposition précédente et de sa preuve, l'élément général M_B de l'eigenring de B a pour polynôme minimal $\chi_{min,M_B}(\lambda) = \lambda - c$. Par conséquent, $M_B = c\mathrm{I}_{\frac{h}{m}}$ et l'eigenring ne peut plus factoriser B. Contrairement au cas général, en factorisation locale, le système $[B]$ ne peut être qu'irréductible. En particulier, si $\chi_{min,M}(\lambda) = \chi_M(\lambda) = (\lambda - c)^h$ alors $[A]$ est équivalent à une matrice triangulaire supérieure.*

2.5.2.3 Exemples

Exemple 2.5.10 *On considère le système de l'exemple 2.5.5. Après une décomposition en somme directe d'éléments indécomposables, on obtient $[A_1]$ un système indécomposable de taille 3. Son eigenring est l'identité et donc A_1 est irréductible sur $\mathcal{C}((x))$. Par conséquent, la factorisation est complète sur $\mathcal{C}((x))$.*

Exemple 2.5.11 *On considère le système $[A]$ où A est une matrice de dimension 6×6 :*

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

où

$$A_1 := \begin{bmatrix} 2\,x^{-2} + x^{-1} - x^{-3} & x^{-2} + 1 + x & x^{-1} - x^{-3} \\ x^{-3} & x^{-2} + 1 & 0 \\ -x^{-2} - x^{-1} + x^{-3} - x^{-5} & -x^{-2} + x^{-1} - 1 - x & -x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} - x^{-5} \end{bmatrix},$$

$$A_2 := \begin{bmatrix} x^{-2} + 1 & x^{-1} - x^{-3} & x^{-2} + 1 \\ x^{-3} + x^{-1} & 0 & x^{-3} + x^{-1} \\ -1 & -x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} - 3\,x^{-4} & -x^{-5} \end{bmatrix},$$

$$A_3 := \begin{bmatrix} x^{-3} - x^{-5} - 2\,x^{-4} & -1 + x^{-1} - x & x^{-2} + x^{-3} - x^{-5} - 2\,x^{-4} \\ x^{-5} & 0 & x^{-5} \\ -x^{-2} + x^{-5} + 2\,x^{-4} & -x^{-1} & -x^{-2} + x^{-5} + 2\,x^{-4} \end{bmatrix},$$

et

$$A_4 := \begin{bmatrix} x^{-2} - 1 & x^{-2} + x^{-3} - 3\,x^{-4} - x^{-6} & -x^{-5} - 2\,x^{-4} + x^{-2} \\ 0 & 3\,x^{-4} & x^{-5} \\ -x^{-2} & -x^{-2} + 3\,x^{-4} + x^{-6} & -x^{-2} + x^{-5} + 2\,x^{-4} \end{bmatrix}.$$

Un élément général de son eigenring est

$$M := \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(x^2)$$

où

$$M_1 := \begin{bmatrix} -2_C_1 + 2_C_2 + _C_3 - _C_1 x & 0 & -2_C_1 - _C_1 x \\ -\frac{2_C_1}{3} x & 2_C_2 + _C_3 - 2_C_1 x & -\frac{2_C_1}{3} x \\ 2_C_1 + _C_1 x & 0 & 2_C_2 + 2_C_1 + _C_3 + _C_1 x \\ _C_3 & 0 & _C_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -_C_3 & 0 & -_C_3 \end{bmatrix},$$

et

$$M_2 := \begin{bmatrix} -2_C_1 x & -2_C_1 - _C_1 x & -2_C_1 x \\ -2_C_1 - _C_1 x & -\frac{2_C_1}{3} x & -2_C_1 - _C_1 x \\ 2_C_1 x & 2_C_1 + _C_3 + _C_1 x & 2_C_1 x \\ 2_C_2 + _C_3 + 2_C_1 x & _C_3 & _C_3 + 2_C_1 x \\ 0 & 2_C_2 & 0 \\ 0 & -_C_3 & 2_C_2 \end{bmatrix}.$$

On choisit un élément générique T et on factorise son polynôme caractéristique χ_T

$$T := \begin{bmatrix} -3+8\,x & 0 & 16+8\,x & 16\,x & 16+8\,x & 16\,x \\ 16/3\,x & -19+16\,x & 16/3\,x & 16+8\,x & 16/3\,x & 16+8\,x \\ -16-8\,x & 0 & -35-8\,x & -16\,x & -23-8\,x & -16\,x \\ -7 & 0 & -7 & -19-16\,x & -7 & -7-16\,x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 0 & 7 & -12 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^2),$$

$$\chi_T(\lambda) = (\lambda+12)^2\,(\lambda+19)^4\,.$$

On construit la matrice P qui décompose le noyau de T :

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x^5-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^6).$$

On a

$$P^{-1}TP = T_{11} \oplus T_{22} = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & -16\,x & 0 & 16-8\,x \\ 0 & 0 & 0 & -19-16\,x & 0 & -16\,x \\ 0 & 0 & 0 & 16+8\,x & -19+16\,x & 16+8/3\,x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^2).$$

La transformation P décompose A en deux sous-systèmes $P[A] = A_{11} \oplus A_{22}$

$$A_{11} := \begin{bmatrix} -x^{-5}+3\,x^{-4}+1-x & x^{-5}+x \\ x^{-6}-x^{-5}+x^{-4}+1+x & x^{-5}+2\,x^{-4} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^3),$$

et

$$A_{22} := \begin{bmatrix} 2\,x^{-2} & -1 & -x^{-2}+x^{-1}-1-x & -x^{-3}+x^{-2}+x^{-1} \\ x^{-2} & x^{-2}-1 & -1+x^{-1}-x & -x^{-3}+x^{-2} \\ -x^{-3} & x^{-3}+x^{-1} & x^{-2}+1 & x^{-1} \\ 0 & -x^{-2} & -x^{-1} & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^3).$$

Le calcul de $P^{-1}MP$ donne un élément générateur de l'eigenring de $[A_{ii}]$ (Remarque 2.3.11). On a :

$$P^{-1}MP = M_{11} \oplus M_{22}$$

où

$$M_{11} := \begin{bmatrix} 2_C_2 & 0 \\ 0 & 2_C_2 \end{bmatrix},$$

et

$$M_{22} := \begin{bmatrix} 2_C_2 + _C_3 & 2_C_1 x & 0 & _C_1 x - 2_C_1 \\ 0 & 2_C_1 x + 2_C_2 + _C_3 & 0 & 2_C_1 x \\ 0 & -_C_1 x - 2_C_1 & -2_C_1 x + 2_C_2 + _C_3 & -2_C_1 - 1/3_C_1 x \\ 0 & 0 & 0 & 2_C_2 + _C_3 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^2).$$

On déduit que l'eigenring de A_{11} sur $\mathcal{C}((x))$ est de dimension 1 et donc A_{11} est irréductible sur $\mathcal{C}((x))$ de ramification $r = 2$. L'eigenring de A_{22} sur $\mathcal{C}((x))$ est de dimension 2 et A_{22} admet une ramification $r := \frac{h}{m} = \frac{4}{2} = 2$. D'après la proposition 2.3.2, A_{22} est réductible sur $\mathcal{C}((x))$. On construit Q suivant la preuve de la Proposition 2.5.8 :

$$Q := \begin{bmatrix} 86\,x^2 - 56\,x + 112 & -160 + \frac{28\,x^2}{3} & 2 & -2 \\ -112\,x + \frac{328\,x^2}{3} & 80\,x + \frac{8x^2}{3} & 0 & 5 \\ 112 - \frac{328\,x}{3} - \frac{526\,x^2}{15} & -80 - \frac{8x}{3} - \frac{118\,x^2}{3} & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^3),$$

telle que

$$Q^{-1}T_{22}Q := \begin{bmatrix} -19 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -19 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^2)$$

On obtient une factorisation de A_{22}

$$B := Q[A_{22}] = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$$

où

$$B_{22} \sim B_{11} := \begin{bmatrix} \frac{-2}{x^3} - \frac{104}{35\,x^2} - \frac{13248}{1225\,x} & \frac{20}{7\,x^3} + \frac{313}{49\,x^2} + \frac{26741}{1715\,x} \\ \frac{-7}{5x^3} - \frac{52}{25\,x^2} - \frac{7324}{875\,x} & \frac{2}{x^3} + \frac{174}{35\,x^2} + \frac{13248}{1225\,x} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(1)$$

De plus, le système $[B_{11}]$ *admet un eigenring trivial dans* $\mathcal{C}((x))$ *et est donc irréductible sur* $\mathcal{C}((x))$ *de ramification 2.*

2.5.3 Une décomposition certifiée

En pratique, nous utilisons des séries tronquées. Il faut donc certifier qu'à chaque étape de la décomposition on dispose de suffisamment de termes pour obtenir ce que l'on souhaite calculer. Par exemple, combien de termes est-il nécessaire de considérer dans l'élément général de l'eigenring pour obtenir le polynôme caractéristique d'un élément générique ? Comment calculer une base du noyau avec le moins de perte de précision possible ?

Pour une matrice de séries M, on appelle *matrice tronquée de* M *à une précision* k, la matrice $M^{<k>}$ avec $M^{<k>} = x^{\mathrm{val}(M)}(M_0 + \cdots + x^k M_k)$, $M_0 \neq 0$. On dit que M est connue à une précision k (ou M est connue à une précision $\mathcal{O}(x^{\mathrm{val}(M)+k+1})$) et on a $M = M^{<k>} + \mathcal{O}(x^{val(M)+k+1})$.

Il est connu ([4, 39] par exemple) que pour un système $[A]$ de rang de Poincaré p, les parties exponentielles dépendent des np premiers termes ; le système tronqué $[A^{<np>}]$ admet les mêmes parties exponentielles que $[A]$ et donc une même structure de factorisation locale. Par conséquent, si nous souhaitons obtenir une factorisation locale significative, il suffit choisir np termes dans $[A]$. Dans la suite, nous répondons à quelques questions de précision.

2.5.3.1 Calcul de l'eigenring pour une précision donnée

Pour le calcul de l'eigenring, nous cherchons une solution $\hat{Y}$ en série de Laurent tronquée du système $[I \otimes A - A^t \otimes I]$. Pour cela, nous utilisons l'algorithme développé dans [8, 14]. Pour k un entier positif, on définit $e = \mathrm{val}(\hat{Y})$ et $\hat{Y} := c_e x^e + \ldots + c_{k+e} x^{k+e} + \mathcal{O}(x^{k+e+1})$. Le problème qui se pose est le suivant : combien de termes dans A faut-il considérer pour calculer $\hat{Y}$ à une précision $\mathcal{O}(x^{k+e+1})$? Cette question a été résolue dans

[3]. La réponse dépend de la méthode utilisée dans [8, 14] pour les calculs des solutions régulières.

Proposition 2.5.12 *([3]) On considère le système*

$$[A] : Y' = AY, \tag{2.5.13}$$

où A est une matrice de taille n à coefficients des séries de Laurent, de valuation p et Y est un vecteur de taille n. Pour calculer une solution de séries de Laurent pour le système $[A]$ à une précision $\mathcal{O}(x^{k+e+1})$, il suffit de considérer dans la matrice A les

$$np + max(e^* - e_* + 1, k + (n-1)p)$$

premiers termes. Ici, e^* et e_* sont les racines entières maximales et minimales du polynôme indiciel de $[A]$ (pour la définition du polynôme indiciel voir (Définition 3.1 , dans [8])).

Corollaire 2.5.13 *Pour calculer les k premiers termes de l'eigenring d'un système $[A]$ de dimension n et de rang Poincaré p, il suffit de considérer dans A les $n^2p + max(e^* - e_* + 1, k + (n^2-1)p)$ premiers termes où e^* et e_* sont les racines entières maximales et minimales du polynôme indiciel du système $[I \otimes A - A^t \otimes I]$.*

2.5.3.2 Polynôme caractéristique

En partant d'un système tronqué $[A^{<k>}]$ avec $k \geq np$, nous avons besoin de calculer le polynôme caractéristique (qui est à coefficients constants) d'un élément générique T de l'eigenring de $[A]$. Nous étudions le nombre de termes de T nécessaires pour calculer exactement son polynôme caractéristique.

On aura besoin du lemme suivant

Lemme 2.5.14 *([7, Lemma 3, p. 10] Soient M et H deux matrices de dimension n à coefficients dans $\mathcal{C}((x))$ avec $val(H) > val(M)$. Soit $\alpha = max(0, -val(M))$. On définit les coefficients $a_i \in \mathcal{C}((x))$ par*

$$a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_0 := \det(\lambda I_n - M) - det(\lambda I_n - M + H)$$

Alors, on a $val(a_{n-i}) \geq \alpha(1-i) + val(H) \quad i = 1, \ldots, n$.

Preuve. Par la formule de Leibniz, les coefficients a_{n-i} sont exprimés en somme de termes de la forme $h.w_1 \ldots w_{i-1}$ où h est un coefficient de H et w_i sont des coefficients de M ou de H. D'où le résultat. ■

Proposition 2.5.15 *Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C}((x)))$ un élément générique dans $\mathcal{E}(A)$. On pose $\alpha := \max(0, -val(T))$. Alors, il est suffisant de considérer les premiers $\alpha n + 1$ termes dans T pour obtenir son polynôme caractéristique.*

Preuve. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C}((x)))$ un élément générique dans $\mathcal{E}(A)$. Soit χ_T son polynôme caractéristique. D'après la proposition 2.2.2, on a $\chi_T(\lambda) \in \mathcal{C}[\lambda]$. Si $\mathrm{val}(T) \geq 0$, alors $\chi_T = \chi_{T_0}$ où T_0 est la matrice principale de T ; comme $\alpha = 0$ dans ce cas, le résultat est démontré. Si $\mathrm{val}(T) < 0$, on a $\alpha = -\mathrm{val}(T) > 0$. Soit k un entier positif, on pose $H := T - T^{<k>}$. On a $val(H) = \mathrm{val}(T) + k + 1 = -\alpha + k + 1$. On définit les a_i comme dans le lemme 2.5.14. On a alors $\mathrm{val}(a_{n-i}) \geq \alpha(1-i) - \alpha + k + 1 = -i\alpha + k + 1$. Si on choisit $k = n\alpha$, on a $\mathrm{val}(a_{n-i}) \geq 1$ pour tout i. Comme $\chi_T(\lambda) \in \mathcal{C}[\lambda]$, cela certifie que le terme de degré 0 (en x) de $\chi_{T^{<k>}}$ est χ_T. ■

2.5.3.3 Calcul d'une base d'un noyau

Étant donné une matrice M à coefficients dans $\mathcal{C}((x))$ de valuation $-\alpha$, on suppose que M est connue à une précision $\mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$. On suppose aussi que le polynôme caractéristique de M est constant et que M admet 0 comme valeur propre de multiplicité s. On souhaite calculer une base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_d\}$ de $\ker(M) \mod x^{k-\alpha+1}$ où

$$\ker(M) \mod x^{k-\alpha+1} = \{v \in \mathcal{C}[x]^n \mid Mv = \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})\}.$$

À l'aide d'une forme normale approchée de Smith (Voir Chapitre 5, Paragraphe 5.5.2.1), on construit deux matrices U,V telles que $UMV = \Delta_0 + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$. Comme

$$MV = U^{-1}(\Delta_0 + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})),$$

on voit que les dernières $n - s$ colonnes, $v_{n-s+1}, \ldots, v_n$ de V satisfont

$$Mv_j = \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}).$$

2.5.3.4 Inverse d'une matrice

Une fois la transformation P de séries formelles qui décompose le spectre d'un élément générique de l'eigenring de A construite, on calcule le système équivalent $P[A] := P^{-1}AP - P^{-1}P'$ à une précision suffisante $k \geq \mathrm{val}(P[A]) \times n \geq (\mathrm{val}(P^{-1}) + \mathrm{val}(A)) \times n$. Dans cette section, nous nous intéressons à la précision dans le calcul de l'inverse d'une matrice inversible P à coefficients dans $\mathcal{C}[[x]]$. Soit P la matrice de séries formelles au voisinage de $x = 0$:

$$P = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \ldots.$$

On suppose que P est formellement inversible. Si P_0 est inversible, alors au voisinage de $x = 0$ on a

$$P^{-1} = \tilde{P}_0 + \tilde{P}_1 x + \tilde{P}_2 x^2 + \dots,$$

où les $\tilde{P}_k$ sont calculés par les relations

$$\begin{cases} P_0\tilde{P}_0 & = \mathrm{I}_n, \\ & \vdots \\ P_0\tilde{P}_k & = -\sum_{i=1}^{k} P_i\tilde{P}_{k-i}. \end{cases}$$

Chaque coefficient $\tilde{P}_i$ de la matrice inverse P^{-1} dépend donc de tous les $\tilde{P}_j$ pour $j < i$ et tous les P_j pour $j \leq i$.

Maintenant supposons que P_0 est singulière. Dans ce cas, P^{-1} est une matrice de séries de Laurent de la forme

$$P^{-1} = \frac{1}{x^s}(\tilde{P}_0 + \tilde{P}_1 x + \tilde{P}_2 x^2 + \dots),$$

où $\tilde{P}_0 \neq 0$ et s un entier positif, qui représente l'ordre du pôle en $x = 0$.
Nous posons les problèmes suivants :

1. Combien de termes suffit-il de considérer dans le développement de P pour calculer la valuation s de P^{-1}.
2. De combien de termes dans P le terme $\tilde{P}_i$ dépend-il ?

Ces problèmes ont été étudiés dans [2].

Proposition 2.5.16 ([2], Proposition 3) *Soit R une matrice de polynômes de taille n. On suppose que R est non-singulière et que son degré k est tel que $k+\mathrm{val}(R^{-1}) \geq 0$. Alors, pour tout $Q \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C}[[x]])$, la matrice $R + x^{k+1}Q$ est non-singulière et le développement en série de Laurent de $(R + x^{k+1}Q)^{-1}$ et celui de R^{-1} coïncident jusqu'à la precision* $\deg(R) + 2\,\mathrm{val}(R^{-1})$.

Nous en déduisons la méthode suivante pour calculer la valuation de l'inverse d'une matrice de séries $P \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{C}[[x]])$: nous choisissons une precision k sur P telle que $\det(P^{<k>}) \neq 0$, nous augmentons k tant que $\mathrm{val}(P^{<k>^{-1}}) + k < 0$. Lorsque $\mathrm{val}(P^{<k_0>^{-1}}) + k_0 \geq 0$, on en déduit $s := \mathrm{val}(P^{-1}) = \mathrm{val}(P^{<k_0>^{-1}})$.

Ceci répond au premier problème. Concernant la deuxième question, d'après la proposition 2.5.16, le terme $\tilde{P}_i$ de P^{-1} dépend de tous les P_j pour $j \leq i + 2s$ avec $s = \mathrm{val}(P^{-1})$.

2.5.3.5 Transformation de jauge

Nous voulons déterminer les k premiers termes du système équivalent $P[A] := P^{-1}AP - P^{-1}P'$. Le lemme classique suivant estime le nombre de termes suffisant à considérer dans P, P^{-1} et A pour obtenir les k premiers termes de $P[A]$.

Lemme 2.5.17 *([47],[61, Lemma 5.1]) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C}((x)))$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C}[[x]])$ avec $\det(P) \neq 0$ et soit B le système équivalent $B := P[A] = P^{-1}AP - P^{-1}P'$. Alors, le coefficient B_j dépend des termes :*

1. *A_i pour tout $i \leq j - \mathrm{val}(P^{-1})$.*
2. *P_i pour tout $i \leq j - (\mathrm{val}(A) + \mathrm{val}(P^{-1}))$.*
3. *$(P^{-1})_i$ pour tout $i \leq j - \mathrm{val}(A)$.*

2.6 Conclusion

La décomposition dans $\mathcal{C}((x))$ présentée dans ce chapitre forme le premier pas pour notre nouvelle approche de calcul des parties exponentielles du système $[A]$, qui va être développée dans le chapitre suivant.

Appendices

Appendice A : Produits composés de polynômes

Dans cette annexe, nous prouvons des résultats sur les produits composés de polynômes que nous utilisons dans la proposition 2.3.15.

On suppose que le corps de constantes $\mathcal{C}$ tel que $\mathbb{Q} \subset \mathcal{C}$ est non algébriquement clos ($\mathcal{C}$ est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$).

Définition A.1 *Soient $f, g \in \mathcal{C}[X]$ deux polynômes de degrés n and m. Soient $\beta_1, \ldots, \beta_n$ (resp. $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$) les racines de f (resp. g) comptées avec leurs multiplicités. Le* produit composé *(ou* produit tensoriel*) de f et g est le polynôme $f \diamond g$ de degré $n\,m$ ayant comme racines tous les produits $\beta_i \gamma_j$.*

Les produits composés (ou produits tensoriels, ou produits en diamants de polynômes) ont été étudiés dans de nombreux travaux. Dans [25], des méthodes rapides de calcul sont proposées. Dans [26], Brawley et Carlitz donnent une condition nécessaire et suffisante pour leur irréductibilité dans le cas de corps finis. Dans [34], Glasby montre que, en caractéristique zéro, le produit composé de polynômes à coefficients indéterminés est irréductible. Nous allons donner une version plus fine, un critère d'irréductibilité pour $f \diamond g$ qui convient à notre travail dans la proposition 2.3.15 (et qui est intéressant en soi).

On suppose, sans perte de généralité, que f et g sont des polynômes unitaires. Alors si $f = \prod_{i=1}^{d} f_i^{n_i}$, on a $f \diamond g = \prod_{i=1}^{d} (g \diamond f_i)^{n_i}$. Le produit $f \diamond g$ peut aussi être obtenu avec la formule

$$(f \diamond g)(X) = \mathrm{res}_Y \left(f(Y), Y^m g(\frac{X}{Y}) \right) = \mathrm{res}_Y \left(g(Y), Y^n f(\frac{X}{Y}) \right),$$

où res_Y est le résultant par rapport à Y. Il s'ensuit que

$$g \diamond f = \prod_{i=1}^{m} (\gamma_i)^n f(\frac{X}{\gamma_i}) = g_0^n \prod_{i=1}^{m} f(\frac{X}{\gamma_i}), \tag{A.1}$$

où $g_0 = \prod_{i=1}^{m} \gamma_i$ est le coefficient de degré 0 de g, avec $g_0 \in \mathcal{C}$.

Proposition A.2 *Soient $f, g \in \mathcal{C}[X]$ deux polynômes irréductibles de degré n et m. Soit K une extension galoisienne de $\mathcal{C}$ pour g. Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ les racines de g dans K. On suppose que le groupe de Galois $Gal(g)$ de K sur $\mathcal{C}$ est le groupe symétrique S_m. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites, alors le polynôme $g \diamond f$ est irréductible sur $\mathcal{C}$:*

(H_1) f reste irréductible sur $K[X]$;

(H_2) $\forall i \neq j$, $f(\frac{X}{\gamma_i}) \neq f(\frac{X}{\gamma_j})$

Preuve. Soit $F(X) := \prod_{i=1}^{m} f(\frac{X}{\gamma_i}) \in \mathcal{C}[X]$. Comme $g \diamond f = g_0^n F$ d'après $(A.1)$, on veut montrer que F est irréductible sur $\mathcal{C}$. Par l'hypothèse (H_1), la décomposition $F = \prod_{i=1}^{m} f(\frac{X}{\gamma_i})$ est la factorisation de F comme produit de polynômes irréductibles sur $K[X]$. Soit P un facteur irréductible de F sur $\mathcal{C}[X]$. Alors P admet un des $f(\frac{X}{\gamma_i})$ comme facteur dans $K[X]$, disons $f(\frac{X}{\gamma_1})$. Comme $\mathrm{Gal}(g) = S_m$, pour tout i, il existe $\sigma_i \in \mathrm{Gal}(g)$ tel que $\sigma_i(\gamma_1) = \gamma_i$ donc $\sigma_i(f(\frac{X}{\gamma_1})) = f(\frac{X}{\gamma_i})$. D'après l'hypothèse (H_2), les $f(\frac{X}{\gamma_i})$ sont tous distincts et donc premiers entre eux sur $K[X]$, grâce à l'hypothèse (H_1). Donc, le plus petit multiple commun de $f(\frac{X}{\gamma_1})$ et tous ses conjugués dans $Gal(g)$ est F. Il en résulte que F est un facteur de P ; comme P est un facteur de F, on a $P = F$. Par hypothèse, P est irréductible sur $\mathcal{C}$ donc F irréductible sur $\mathcal{C}$. ■

Remarque A.3 *Si (H_1) n'est pas satisfaite alors $g \diamond f$ peut ne pas être irréductible : prenons $g = X^2 + 1$ et $f = X^2 + X + 5/4$ (qui se factorisent sur $\mathbb{Q}(i)$), on a $g \diamond f = \frac{1}{16}(4X^2 + 8X + 5)(4X^2 - 8X + 5)$. Pareil si (H_2) n'est pas satisfaite : prenons $g = X^2 - 2$ et $f = X^2 - 3$, alors $f(X/\sqrt{2}) = f(-X/\sqrt{2})$ et $g \diamond f = (X^2 - 6)^2$.*

Pour appliquer ce résultat dans la section 2.3.2, nous utilisons le théorème d'irréductibilité de Hilbert, voir [33, 30] et [67] pour des références plus récentes ; le chapitre 9 du livre de Lang constitue une bonne référence [44] pour notre utilisation. On considère un polynôme $P(x, a_1, \ldots, a_\ell)$ irréductible dans $\mathcal{C}[x, a_1, \ldots, a_\ell]$. Pour une spécialisation $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) \in \mathcal{C}^\ell$ de $(a_1, \ldots, a_\ell)$, on considère le polynôme $P_{\underline{\alpha}}(x) := P(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$. L'ensemble des spécialisations $\underline{\alpha} \in \mathcal{C}^\ell$ telles que $P_{\underline{\alpha}}(x)$ est irréductible dans $\mathcal{C}[x]$ est dense au sens de Zariski dans $\mathcal{C}^\ell$ (Chapitre 9 dans [44]).

Définition A.4 *Soit $A_{\underline{t}}$ une matrice de dimension n de coefficients indéterminés $\underline{t} := ((a_{ij})_{1 \le i,j \le n})$. Alors $A_{\underline{t}}$ est appelée* matrice générale.

Soit $A_{\underline{t}}$ une matrice générale et $g_{\underline{t}}$ son polynôme caractéristique à coefficients dans $\mathcal{C}(\underline{t})$. Par le théorème d'irréductibilité de Hilbert, nous avons les résultats connus suivants :

1. $g_{\underline{t}}$ est irréductible sur $\mathcal{C}(\underline{t})$ et son groupe de Galois sur $\mathcal{C}(\underline{t})$ est le groupe symétrique S_n (voir e. g. [33, 30]).
2. Il existe un ensemble Zariski dense de spécialisation $\underline{s} \in \mathcal{C}^{n^2}$ de $\underline{t}$ dans $\mathcal{C}$ tel que $g_{\underline{s}}$ est irréductible sur $\mathcal{C}$ et son groupe de Galois sur $\mathcal{C}$ est S_n.

Par exemple quand $\mathcal{C} = \mathbb{Q}$ on a les preuves élémentaires suivantes

Lemme A.5 *Soit $A_{\underline{t}}$ une matrice générale de dimension n telle que ses coefficients sont les indéterminées $\underline{t} := ((a_{ij})_{1 \le i,j \le n})$. Soit $g_{\underline{t}}$ son polynôme caractéristique. Alors, $g_{\underline{t}}$ est irréductible sur $\mathbb{Q}(\underline{t})$.*

Preuve. Si $g_{\underline{t}}$ est réductible alors,

$$g_{\underline{t}} = f^1_{\underline{t}} f^2_{\underline{t}}$$

avec $\deg(f^i_{\underline{t}}) < n$ et $f^i_{\underline{t}}$ sont à coefficients dans $\mathcal{C}(\underline{t})$. Cela implique pour toute spécialisation de $\underline{t}$ dans $\mathbb{Q}$, la matrice obtenue admet un polynôme caractéristique réductible. Cela n'est pas vrai si l'on considère la matrice compagnon du polynôme irréductible $x^n + 2$ sur $\mathbb{Q}$ (critère d'Eisenstein). ■

Proposition A.6 *Soit $A_{\underline{t}}$ une matrice générale de dimension n telle que ses coefficients sont les indéterminées $\underline{t} := ((a_{ij})_{1\leq i,j\leq n})$. Soit $g_{\underline{t}}$ son polynôme caractéristique. Alors, $g_{\underline{t}}$ est irréductible sur $\mathbb{Q}(\underline{t})$ et son groupe de Galois sur $\mathbb{Q}(\underline{t})$ est S_n.*

Preuve. On a montré par le lemme précédent que $g_{\underline{t}}$ est irréductible sur $\mathbb{Q}(\underline{t})$ et de degré n admettant n racines distinctes. Alors, le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe de S_n. Il suffit de montrer pour une seule spécialisation des coefficients $\underline{t}$, la matrice obtenue est telle que son polynôme caractéristique admet un groupe de Galois S_n. On considère la matrice compagnion du polynôme $X^n - X - 1$. Il a été montré dans [57] que le groupe de Galois de ce polynôme est S_n. D'où le résultat. ■

Maintenant on montre le résultat qui nous intéresse pour la section 2.3.2 :

Proposition A.7 *Soit f un polynôme irréductible sur $\mathcal{C}$ de degré m. Soit $A_{\underline{t}}$ une matrice générale de dimension n (Définition A.4). Soit $\underline{s}$ une spécialisation aléatoire de $\underline{t}$ dans $\mathcal{C}^{n^2}$ et $A_{\underline{s}}$ la spécialisation correspondante de $A_{\underline{t}}$. Soit $g_{\underline{s}}$ le polynôme caractéristique de $A_{\underline{s}}$ sur $\mathcal{C}$. L'ensemble des spécialisations $\underline{s} \in \mathcal{C}^{n^2}$ de $\underline{t}$ telles que le produit composé $g_s \diamond f$ soit irréductible sur $\mathcal{C}$ est Zariski-dense.*

Preuve.

D'après le théorème d'irréductibilité de Hilbert, il existe un ensemble de spécialisations $\underline{s}$ de $\underline{t}$ Zariski-dense tel que $g_{\underline{s}}$ est irréductible sur $\mathcal{C}$ et son groupe de Galois est S_n. Aussi, d'après la généralité de la matrice $A_{\underline{t}}$, il existe un ensemble de spécialisation $\underline{s}$ de $\underline{t}$ Zariski-dense tel que le polynôme f est irréductible sur $\mathcal{C}(\gamma_1^{[\underline{s}]}, \ldots, \gamma_n^{[\underline{s}]})$ où $\gamma_i^{[\underline{s}]}$ sont les racines de $g_{\underline{s}}$. Par conséquent, il existe un ensemble Zariski-dense de spécialisations $\underline{s}$ de $\underline{t}$ tel que les hypothèses (H_1) et (H_2) de la proposition A.2 sont vérifiées. Il s'ensuit que pour un ensemble dense au sens de Zariski de spécialisations $\underline{s}$ de $\underline{t}$, les conditions de la proposition A.2 sont vérifiées et $g_{\underline{s}} \diamond f$ est irréductible sur $\mathcal{C}$. ■

Chapitre 3 :

Réduction formelle en utilisant l'eigenring

3.1 Introduction

On considère un système de la forme

$$[A] : Y' = AY, \tag{3.1.1}$$

où A est une matrice à coefficients dans le corps des séries de Laurent $\mathcal{C}((x))$.

Dans ce chapitre nous poursuivons le travail initié au Chapitre 2. Les résultats que nous allons exposer proviennent de l'article [19, 20].
Nous proposons un nouvel algorithme de calcul des parties exponentielles du système $[A]$. La décomposition sur $\mathcal{C}((x))$ présentée dans le chapitre précédent forme la première étape de cet algorithme. Nous traitons premièrement le cas où le corps des constantes $\mathcal{C}$ est algébriquement clos puis le cas non algébriquement clos dans lequel il n'est plus possible d'obtenir la ramification r associée à chaque sous-système directement à partir de la dimension de son eigenring (pour la définition de la ramification r voir la proposition 2.5.6). Dans ce cas, nous analysons la structure de l'eigenring pour déterminer des informations concernant la ramification. Nous montrons que suite à une décomposition "maximale" sur $\mathcal{C}((x))$, chaque sous-système admet un seul "type" de partie exponentielle (modulo une conjugaison et une ramification). Il s'ensuit que l'invariant de Katz de ces systèmes est facile à trouver. Nous proposons alors un algorithme qui consiste en une combinaison de notre approche de décomposition avec l'eigenring sur $\mathcal{C}((x))$ et de la méthode de réduction formelle dans [7].

3.2 Réduction formelle : le cas algébriquement clos

Nous supposons que le corps des constantes $\mathcal{C}$ est algébriquement clos. Nous avons montré dans le chapitre précédent que tout système $[A]$ à coefficients dans $\mathcal{C}((x))$ admet une décomposition maximale sur $\mathcal{C}((x))$:

$$[A] \sim [A_1] \oplus \ldots \oplus [A_\ell],$$

où chaque sous-système $[A_i]$ est indécomposable sur $\mathcal{C}((x))$. Nous avons montré le lien entre la ramification r_i associée au système $[A_i]$ et la structure de son eigenring (Proposition 2.5.6). Nous avons montré dans la proposition 2.5.8 comment construire une factorisation

$$[A_i] \sim \left[\begin{pmatrix} B_i & D_1^i & \cdots & D_{m-1}^i \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & D_1^i \\ 0 & \cdots & 0 & B_i \end{pmatrix} \right],$$

où les $[B_i]$ sont irréductibles de taille r_i. Nous souhaitons maintenant obtenir une factorisation plus fine. D'après la proposition 2.5.4, chaque système irréductible $[B_i]$ de taille r_i est décomposable sur $\mathcal{C}((x^{\frac{1}{r_i}}))$

$$[B_i(t)] \sim_{\mathcal{C}((t))} [b_i^1 \oplus \cdots \oplus b_i^{r_i}]$$

pour $t = x^{\frac{1}{r_i}}$. Par conséquent, nous déduisons un algorithme pour le calcul des parties exponentielles d'un système $[A]$: on commence par décomposer $[A]$ avec un élément générique de l'eigenring pour obtenir la factorisation citée précédemment. Pour chaque B_i, on applique la ramification $x = t^{r_i}$; l'eigenring du nouveau système $[r_i t^{r_i-1} B(t^{r_i})]$ est non trivial et décompose $[B_i]$ en r_i sous-systèmes de dimension 1 chacun.

3.2.1 Exemples

Exemple 3.2.1 *On reprend l'exemple 2.5.11 du chapitre 2. On considère chaque sous-système irréductible obtenu après la factorisation :*

$$A_{11} := \begin{bmatrix} \frac{-1}{x^5} + \frac{3}{x^4} & \frac{1}{x^5} \\ \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^4} & \frac{1}{x^5} + \frac{2}{x^4} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(1).$$

et

$$B_{11} := \begin{bmatrix} \frac{-2}{x^3} - \frac{104}{35\,x^2} - \frac{13248}{1225\,x} & \frac{20}{7\,x^3} + \frac{313}{49\,x^2} + \frac{26741}{1715\,x} \\ \frac{-7}{5x^3} - \frac{52}{25\,x^2} - \frac{7324}{875\,x} & \frac{2}{x^3} + \frac{174}{35\,x^2} + \frac{13248}{1225\,x} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(1)$$

Comme on l'avait vu, chacun admet une ramification $r = 2$. On applique la ramification $x = t^2$ sur chaque système. Pour $[B_{11}]$, on obtient le nouveau système ramifié

$$\tilde{B}_1 := \begin{bmatrix} \frac{-4}{t^5} - \frac{208}{35\,t^3} - \frac{26496}{1225\,t} & \frac{40}{7\,t^5} + \frac{626}{49\,t^3} + \frac{53482}{1715\,t} \\ -\frac{14}{5\,t^5} - \frac{104}{25\,t^3} - \frac{14648}{875\,t} & \frac{4}{t^5} + \frac{348}{35\,t^3} + \frac{26496}{1225\,t} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(1).$$

Celui-ci admet un eigenring non trivial, dont le polynôme caractéristique de son élément général admet deux valeurs propres distinctes

$$\tilde{M}_1 := \begin{bmatrix} \frac{10_C_1}{7\,t} + _C_2 + \frac{139_C_1 t}{49} & -\frac{100_C_1}{49\,t} - \frac{1565_C_1 t}{343} \\ \frac{=C_1}{t} + \frac{52_C_1 t}{35} & -\frac{10_C_1}{7\,t} + _C_2 - \frac{139_C_1 t}{49} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(t^2).$$

On choisit un élément générique

$$\tilde{T}_1 := \begin{bmatrix} -\frac{30}{7\,t} + 3 - \frac{417\,t}{49} & \frac{300}{49\,t} + \frac{4695\,t}{343} \\ \frac{-3}{t} - \frac{156\,t}{35} & \frac{30}{7\,t} + 3 + \frac{417\,t}{49} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(t^2).$$

Son polynôme caractéristique est

$$1/49\ (7\,\lambda - 6)\,(7\,\lambda - 36)\,.$$

On construit la matrice $\tilde{P}_1$ *qui décompose le noyau de* $\tilde{T}_1$

$$\tilde{P}_1 := \begin{bmatrix} \frac{10}{7} + \frac{5t}{7} + \frac{5t^2}{7} & \frac{10}{7} - \frac{5t}{7} + \frac{5t^2}{7} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(t^3), \quad \tilde{P}_1^{-1}\tilde{T}_1\tilde{P}_1 = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & 0 \\ 0 & \frac{36}{7} \end{bmatrix}.$$

Cette transformation décompose $\tilde{B}_1$ *en deux sous-systèmes de taille 1 chacun :*

$$\left[\ -\tfrac{2}{t^4} + \tfrac{2}{t^3}\ \right] + \mathcal{O}\,(1)$$

et

$$\left[\ \tfrac{2}{t^4} + \tfrac{2}{t^3}\ \right] + \mathcal{O}\,(1)\,.$$

Les deux parties exponentielles de $[B_{11}]$ *peuvent être paramétrisées en multipliant par* $\frac{1}{2t}$ *:*

$$x = t^2, \quad w_1 = \frac{1}{t^5} + \frac{1}{t^4}.$$

On fait pareil pour $[A_{11}]$*, on obtient*

$$x = t^2, \quad w_2 := \frac{1}{t^{11}} + \frac{5}{2t^8} + \frac{1}{8t^5}.$$

3.3 Quand $\mathcal{C}$ n'est pas algébriquement clos

Dans la suite de ce chapitre on va supposer que $\mathcal{C}$ est non-algébriquement clos. L'algorithme de calcul des parties exponentielles décrit dans la section précédente, peut impliquer des calculs dans des extensions algébriques pour deux raisons : premièrement, pour exprimer les coefficients des parties exponentielles (voir Lemme 3.3.6), et deuxièmement, pour effectuer des calculs intermédiaires, même lorsque le résultat ne les implique pas (voir le lemme 2.3.15) ; ceci est illustré dans les exemples 3.3.1 et 3.3.2.

Exemple 3.3.1 *On considère le système* $Y' = AY$ *où*

$$A := \begin{bmatrix} x^{-5} & x^{-5} \\ x^{-5} & x^{-4} \end{bmatrix}.$$

On calcule un élément générique T *dans l'eigenring de* $[A]$*. Son polynôme caractéristique* $\chi_T(\lambda) := \lambda^2 - 18\lambda - 44$ *est irréductible sur* $\mathbb{Q}$*. On le factorise sur* $\overline{\mathbb{Q}}$*,* $\chi_T(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \bar{\alpha})$

où $\alpha = 9 + 5\sqrt{5}$. *On construit la transformation* P *qui décompose le noyau de* T *:*

$$P := \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} + \frac{\alpha}{10} + \left(-\frac{8}{25} - \frac{\alpha}{50}\right) x & -\frac{\alpha}{10} + \frac{7}{5} + \left(-\frac{17}{25} + \alpha\right) x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(x^2\right).$$

On obtient $P[A] = A_1 \oplus A_2$. *Les sous-systèmes* $[A_1]$ *and* $[A_2]$ *sont de taille* 1 *et conjugués sur* $\mathbb{Q}[\alpha]$. *Les deux parties exponentielles peuvent être paraméterisées par :*

$$\left[\frac{-2/5+\alpha/10}{t^5} + \frac{1}{t^4}\left(\frac{17}{25} - \frac{\alpha}{50}\right) + \frac{1}{t^3}\left(\frac{\alpha}{125} - \frac{9}{125}\right) + \frac{1}{t^2}\left(-\frac{9}{625} + \frac{\alpha}{625}\right) \ , \ x = t \right].$$

Dans ce cas, l'extension algébrique de $\mathbb{Q}$ *était en effet nécessaire car elle apparaît dans le résultat.*

Exemple 3.3.2 *On considère le système* $Y' = AY$ *où* A *est donnée par*

$$A := \begin{pmatrix} x^{-5} & x \\ x^2 & x^{-5} \end{pmatrix}.$$

On calcule un élément générique T *dans l'eigenring de* $[A]$. *Son polynôme caractéristique* $\chi_T(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 40$ *est irréductible sur* $\mathbb{Q}$. *On le factorise sur* $\overline{\mathbb{Q}}$, $\chi_T(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \bar{\alpha})$ *où* $\alpha := \frac{-3}{2} + \frac{\mathrm{I}\sqrt{151}}{2}$. *On construit la transformation* T *qui décompose le noyau de* T

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{10} + \frac{x^2}{2} & \frac{\alpha}{10} - \frac{1}{5} + \frac{x^2}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + O(x^3).$$

On obtient $P[A] = [x^{-5}] \oplus [x^{-5}]$. *Dans cet exemple, on voit que les calculs intermédiaires ont impliqué une extension algébrique « inutile » qui n'apparaît pas dans le résultat final.*

Dans le cas non-algébriquement clos, en général, il n'est pas possible d'obtenir une décomposition maximale dans $\mathcal{C}((x))$ en utilisant un élément générique de l'eigenring et en faisant que des calculs dans $\mathcal{C}((x))$; on le voit dans l'exemple précédent. En effet, comme expliqué dans la section 2.3.2 du chapitre 2, l'application de l'algorithme de décomposition rationnel (Algorithme 3) nous donne un système diagonal par blocs

$$[A] \sim [A_1] \oplus \ldots \oplus [A_\ell], \tag{3.3.1}$$

où les $[A_i]$ sont des systèmes avec des coefficients dans $\mathcal{C}((x))$ et les sous-systèmes $[A_i]$ peuvent être décomposables par exemple quand il y a un bloc qui se répète (Proposition 2.3.15). Par exemple, lorsque $[A]$ admet n copies d'une partie exponentielle w dans $x^{-1}\mathcal{C}[x^{-1}]$ (i.e $[A] \sim [wI_n]$), alors $\mathcal{E}(A) = \mathcal{M}_n(\mathcal{C})$. Par conséquent, la dimension de $\mathcal{E}(A)$

est n^2 et le polynôme caractéristique d'un élément général de $\mathcal{E}(A)$ est un polynôme irréductible de degré n.

Dans cette sous section, en utilisant la notion de partie exponentielle sur $\overline{\mathcal{C}}((x^{1/r}))$, nous analysons la structure de l'eigenring des sous-systèmes $[A_i]$ obtenus de la décomposition (3.3.1) dans $\mathcal{C}((x))$, dans le but de trouver des informations sur les ramifications de chaque sous-système.

3.3.1 Le cas où $\chi_M = f^h$ avec f irréductible

Dans la suite, nous utiliserons la notion de deux parties exponentielles conjuguées. Pour toute partie exponentielle w du système (voir Définition 1.2.4) on considère $\mathcal{F}$ une extension (algébrique) galoisienne de $\mathcal{C}$ contenant les coefficients de w. On peut écrire $w(t^{-1}) = \sum_{k=0}^{k} w_k t^{-k-1}$ avec $w_k \in \mathcal{F}$ et $x = t^r$. Pour $\sigma \in \mathcal{G}alois_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$, on définit $\sigma(w)$ par $\sigma(w)(t^{-1}) = \sum_{k=0}^{k} \sigma(w_k) t^{-k-1}$ où $\mathrm{Gal}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$ est l'ensemble des morphismes de corps de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{C}$.

Définition 3.3.3 *Soit w_1 une partie exponentielle du système $[A]$ et $\mathcal{F}_1$ une extension (algébrique) galoisienne de $\mathcal{C}$ contenant les coefficients de w_1. On dit qu'une partie exponentielle w_2 est* conjuguée à w_1 sur $\mathcal{F}_1$ *s'il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_1)$ telle que $\sigma(w_1) = w_2$.*

Définition 3.3.4 *Deux parties exponentielles w_1 et w_2 sont dites* conjuguées sous la ramification $x = t^r$ *si w_2 est obtenue de w_1 en remplaçant t par ωt où ω est une r-ième racine de l'unité.*

Définition 3.3.5 *Deux parties exponentielles w_1 et w_2 sont dit* équivalentes *si elles ont la même ramification r et $w_1 - w_2 \in \frac{\mathbb{Z}}{r}$.*

Lemme 3.3.6 *Soit $[A]$ un système de taille n. Soit $\mathcal{F}$ une extension algébrique de $\mathcal{C}$. On suppose que $[A]$ admet exactement n parties exponentielles conjuguées et différentes sur $\mathcal{F}$. Alors, $dim(\mathcal{E}(A)) = n$ et le polynôme caractéristique de l'élément général $M = \sum_{i=1}^{n} t_i M_i$ de $\mathcal{E}(A)$ est irréductible sur $\mathcal{C}[t_1, \ldots, t_n]$.*

Preuve. Comme toutes les n parties exponentielles sont conjuguées sur $\mathcal{F}$, $[A]$ est indécomposable sur $\mathcal{C}((x))$. Mais, il se décompose sur $\mathcal{F}((x))$ en une somme directe de sous-systèmes de dimension 1 et qui sont non équivalents deux à deux. Ainsi, $t_1 \oplus \cdots \oplus t_n$ est l'élément général de $\mathcal{E}_{\mathcal{F}((x))}(A)$ sur $\mathcal{F}((x))$ et $\dim_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}(A)) = \dim_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}(A)) = n$. Soit $M = \sum_{i=1}^{n} t_i M_i$ l'élément général de $\mathcal{E}_{\mathcal{C}((x))}(A)$ et soit χ_M son polynôme caractéristique. Alors, χ_M se factorise en produit de n facteurs distincts de degré 1 sur $\mathcal{F}[t_1, \ldots, t_n]$. Si χ_M se factorisait en deux facteurs distincts sur $\mathcal{C}[t_1, \ldots, t_n]$, alors A se décomposerait en une somme de deux systèmes sur $\mathcal{C}((x))$, une contradiction. D'où χ_M est irréductible sur $\mathcal{C}[t_1, \ldots, t_n]$. ■

Proposition 3.3.7 *On considère un système $[A]$ qui admet une seule partie exponentielle qui se répète de la manière suivante :*

$$[A] \sim [q_1 \mathrm{I}_n + \frac{1}{x} N]$$

où N est une matrice de Jordan nilpotente admettant ℓ blocs de Jordan nilpotent de tailles n_i et distincts deux à deux. Alors, le polynôme caractéristique de l'élément général de l'eigenring de $[A]$ est de la forme $\chi(\lambda) := \prod_{i=1}^{\ell} (\lambda - c_i)^{n_i}$ où c_i est une indéterminée.

Preuve. Par hypothèse, $[A] \sim [A_1] \oplus \ldots \oplus [A_\ell]$ où $A_i := q_1 \mathrm{I}_{n_i} + \frac{1}{x} N_i$ et N_i est un bloc de Jordan de taille n_i avec $n_i \neq n_j$ pour $i \neq j$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $q_1 = 0$ et $n_1 > \ldots > n_\ell$. Par un calcul direct $T' = AT - TA$ (comme dans la preuve de la proposition 2.5.6) on obtient la structure de l'eigenring

$$T = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(A_1) & \mathrm{Hom}(A_1, A_2) & \cdots & \mathrm{Hom}(A_1, A_\ell) \\ \mathrm{Hom}(A_2, A_1) & \ddots & \mathrm{Hom}(A_i, A_{i+1}) & \vdots \\ \vdots & \mathrm{Hom}(A_{i+1}, A_i) & \ddots & \mathrm{Hom}(A_1, A_{\ell-1}) \\ \mathrm{Hom}(A_\ell, A_1) & \cdots & \cdots & \mathcal{E}(A_\ell) \end{pmatrix}, \qquad (3.3.2)$$

où

$$\mathrm{Hom}(A_i, A_j) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathcal{E}(A_j) \\ \mathrm{O}_{(n_i - n_j) \times n_j} \end{pmatrix} & \textit{pour} \quad n_i > n_j \\ \begin{pmatrix} \mathrm{O}_{n_i \times (n_j - n_i)} & \mathcal{E}(A_i) \end{pmatrix} & \textit{pour} \quad n_i < n_j \end{cases}$$

où D'après la proposition 2.5.6, on a

$$\mathcal{E}(A_i) = \begin{pmatrix} c_{i,1} & c_{i,2} & \cdots & c_{i,n_i} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_{i,2} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{i,1} \end{pmatrix}.$$

pour $i = \{1, \ldots, \ell\}$. Pour trouver le polynôme caractéristique de T, on partitionne $T - \lambda \mathrm{I}_n$ de la façon suivante :

$$T - \lambda \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$$

où T_1, de taille $n_1 \times n_1$, est le premier bloc $\mathcal{E}(A_1) - \lambda \mathrm{I}_{n_1}$, $T_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(A_1, A_2) & \cdots & \mathrm{Hom}(A_1, A_\ell) \end{pmatrix}$, $T_3 := \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(A_2, A_1) \\ \vdots \\ \mathrm{Hom}(A_\ell, A_1) \end{pmatrix}$ et T_4 est la sous

matrice

$$T_4 := \begin{pmatrix} \mathcal{E}(A_2) - I_{n_2} & \mathrm{Hom}(A_2, A_3) & \cdots & \mathrm{Hom}(A_2, A_\ell) \\ \mathrm{Hom}(A_3, A_2) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathrm{Hom}(A_{\ell-1}, A_\ell) \\ \mathrm{Hom}(A_\ell, A_2) & \cdots & \mathrm{Hom}(A_\ell, A_{\ell-1}) & \mathcal{E}(A) - I_{n_\ell} \end{pmatrix}$$

On a

$$\det(T - \lambda I_n) = \det(T_1)\det(T_4 - T_3(T_1)^{-1}T_2) = (\lambda - c_{1,1})^{n_1}\det(T_4 - T_3(T_1)^{-1}T_2).$$

En utilisant la structure de T_3, T_1 et T_2 nous en déduisons que la matrice $T_4 - T_3(T_1)^{-1}T_2$ modifie juste les termes supérieurs stricts de chaque $\mathrm{Hom}(A_i, A_j)$ dans T_4. Par conséquent la matrice $T_4 - T_3(T_1)^{-1}T_2$ admet la même structure que T. En utilisant cette information et en effectuant un raisonnement par récurrence on obtient $\chi_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{\ell}(x - c_{i,1})^{n_i}$. ■

Exemple 3.3.8 *Pour $\ell = 3$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$ et $n_3 = 2$. L'eigenring de A est semblable à l'ensemble des matrices de la forme*

$$M := \left[\begin{array}{cccc|cccc|cc} _C_1 & _C_2 & _C_3 & _C_4 & _C_5 & _C_6 & _C_7 & _C_8 & _C_9 \\ 0 & _C_1 & _C_2 & _C_3 & 0 & _C_5 & _C_6 & 0 & _C_8 \\ 0 & 0 & _C_1 & _C_2 & 0 & 0 & _C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & _C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & _C_{10} & _C_{11} & _C_{12} & _C_{13} & _C_{14} & _C_{15} & _C_{16} & _C_{17} \\ 0 & 0 & _C_{10} & _C_{11} & 0 & _C_{13} & _C_{14} & 0 & _C_{16} \\ 0 & 0 & 0 & _C_{10} & 0 & 0 & _C_{13} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & _C_{18} & _C_{19} & 0 & _C_{20} & _C_{21} & _C_{22} & _C_{23} \\ 0 & 0 & 0 & _C_{18} & 0 & 0 & _C_{20} & 0 & _C_{22} \end{array}\right].$$

On pose

$$T_1 := \begin{bmatrix} _C_1 - \lambda & _C_2 & _C_3 & _C_4 \\ 0 & _C_1 - \lambda & _C_2 & _C_3 \\ 0 & 0 & _C_1 - \lambda & _C_2 \\ 0 & 0 & 0 & _C_1 - \lambda \end{bmatrix}, \quad T_2 := \begin{bmatrix} _C_5 & _C_6 & _C_7 & _C_8 & _C_9 \\ 0 & _C_5 & _C_6 & 0 & _C_8 \\ 0 & 0 & _C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_3 := \begin{bmatrix} 0 & _C_{10} & _C_{11} & _C_{12} \\ 0 & 0 & _C_{10} & _C_{11} \\ 0 & 0 & 0 & _C_{10} \\ 0 & 0 & _C_{18} & _C_{19} \\ 0 & 0 & 0 & _C_{18} \end{bmatrix}, \; T_4 := \begin{bmatrix} _C_{13} - \lambda & _C_{14} & _C_{15} & _C_{16} & _C_{17} \\ 0 & _C_{13} - \lambda & _C_{14} & 0 & _C_{16} \\ 0 & 0 & _C_{13} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & _C_{20} & _C_{21} & _C_{22} - \lambda & _C_{23} \\ 0 & 0 & _C_{20} & 0 & _C_{22} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de M est $\chi_M(\lambda) = \det(T_1)\det(T_4 - T_3(T_1)^{-1}T_2) = (_C_1 - \lambda)^4 \det(T_4 - T_3(T_1)^{-1}T_2)$. La matrice $\tilde{M} := T_4 - T_3(T_1)^{-1}T_2$ est de la forme

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} _C_{13} - \lambda & \star & \star & _C_{16} & \star \\ 0 & _C_{13} - \lambda & \star & 0 & _C_{16} \\ 0 & 0 & _C_{13} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & _C_{20} & \star & _C_{22} - \lambda & _C_{23} \\ 0 & 0 & _C_{20} & 0 & _C_{22} - \lambda \end{bmatrix}.$$

De la même façon, son polynôme caractéristique est $\chi_{\tilde{M}}(\lambda) := (\lambda - _C_{13})^3 \det(\tilde{T}_4 - \tilde{T}_3(\tilde{T}_1)^{-1}\tilde{T}_2)$. Ainsi de suite, nous obtenons

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda - _C_1)^4(\lambda - _C_{13})^3(\lambda - _C_{22})^2.$$

Remarque 3.3.9 *Si $[A] \sim [A_1] \oplus \ldots \oplus [A_\mu]$ où $A_i := q_1\mathrm{I} + \frac{1}{x}N$ et N est un bloc de Jordan de taille m. Soit M l'élément général de l'eigenring de $[A]$. Alors, son polynôme caractéristique est $\chi_M(\lambda) = f^m$ où f est irréductible de degré μ. (Proposition 2.3.15 et Proposition 2.5.6).*

Proposition 3.3.10 *Soient $[A]$ et $[B]$ deux systèmes indécomposables à coefficients dans $\mathcal{C}((x))$. Soit M l'élément général de l'eigenring de $[A \oplus B]$ à coefficients dans $k = \mathcal{C}[t_1, \ldots, t_{\dim(\mathcal{E}(A\oplus B))}]$. Alors,*

1. *Si $[A]$ et $[B]$ ne sont pas équivalents, alors $\chi_M(\lambda) = f_1^{h_1} \times f_2^{h_2}$ où les f_i sont irréductibles sur k.*
2. *Si $[A]$ et $[B]$ sont équivalents, alors $\chi_M(\lambda) = f_1^{h_1}$ où f_1 est irréductible sur k.*

Preuve. Le premier cas est le résultat de la proposition 2.3.16 et Proposition 3.3.7 . Le second cas est la résultat de la proposition 2.3.15. ■

La proposition suivante donne la structure de l'eigenring de $[A]$ dans le cas où le polynôme caractéristique de l'élément général de $\mathcal{E}(A)$ est une puissance d'un polynôme irréductible. On rappelle que $\mathcal{C}$ n'est pas algébriquement clos

Proposition 3.3.11 *Soit $[A]$ un système de dimension n. Soit M l'élément général de $\mathcal{E}(A)$. On suppose que M admet un polynôme caractéristique de la forme $\chi_M = f^h$ où f est irréductible sur $\mathcal{C}[t_1, \ldots, t_{\dim(\mathcal{E}(A))}]$. Alors, il existe quatre entiers positifs non nuls μ, d, r et m qui sont des invariants sous transformation de jauge de $[A]$, tels que $\deg(f) = \mu \times d$ et $h = m \times r$ où r est la ramification du système. De plus, $dim(\mathcal{E}(A)) = \mu^2 \times d \times m$.*

Preuve. Soit M l'élément général de $\mathcal{E}(A)$. Par hypothèse on a $\chi_M = f^h$, avec f à coefficients dans $\mathcal{C}[t_1, \ldots, t_{\dim(\mathcal{E}(A))}]$ et irréductible. Alors, $[A]$ est nécessairement une somme directe de μ ($\mu \geq 1$) systèmes indécomposables équivalents deux à deux sur $\mathcal{C}((x))$: sinon, χ_M aurait deux facteurs premiers entre eux, voir Proposition 3.3.10. Ainsi sans perte de généralité, on peut supposer que $[A] = [I_\mu \otimes \widetilde{A}]$ avec $[\widetilde{A}]$ indécomposable sur $\mathcal{C}((x))$. Il résulte de la proposition 2.3.15 que $\mathcal{E}(A) = \mathcal{M}_\mu(\mathcal{C}) \otimes \mathcal{E}(\widetilde{A})$, $\dim(\mathcal{E}(A)) = \mu^2 \times \dim(\mathcal{E}(\widetilde{A}))$ et le degré de f est un multiple de μ.
Maintenant, on considère le système $\widetilde{A}$. D'après le lemme 3.3.6, si $[\widetilde{A}]$ admet une partie exponentielle à coefficients dans une extension algébrique de $\mathcal{C}$ de degré d, alors, elle contient toutes les d parties exponentielles conjuguées et on a $[\widetilde{A}] \sim [B_1] \oplus \ldots \oplus [B_d]$ sur $\overline{\mathcal{C}}((x))$ où les coefficients de chaque $[B_i]$ sont dans $\overline{\mathcal{C}}((x))$ et les $[B_i]$ sont deux à deux non équivalents. De plus, chaque $[B_i]$ admet la structure décrite dans la proposition 2.5.2 et lui correspond deux entiers positifs non nuls : m est la taille du bloc de Jordan et la ramification r. La structure de l'eigenring de $[B_i]$ est obtenue par la proposition 2.5.6 et on a $\dim(\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(\widetilde{A})) = \dim(\mathcal{E}_{\overline{\mathcal{C}}}(\widetilde{A})) = d \times m$. Par conséquent, l'eigenring $\mathcal{E}(A)$ est engendré par tous les éléments de la forme

$$(M \in \mathcal{M}_\mu(\mathcal{C})) \otimes \mathrm{diag}(t_1, \cdots, t_d) \otimes \begin{pmatrix} c_1 I_r & c_2 I_r & \cdots & c_m I_r \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_2 I_r \\ 0 & \cdots & 0 & c_1 I_r \end{pmatrix}, \tag{3.3.3}$$

où t_i et c_i sont dans $\mathcal{C}$. De plus, $\dim(\mathcal{E}(A)) = \mu^2 \times d \times m$. Le degré de f se déduit de la structure $\mathcal{M}_\mu(\mathcal{C}) \otimes \mathrm{diag}(t_1 \oplus \ldots \oplus t_d)$ et l'exposant h de la suite. ■

Remarque 3.3.12

1. *On note que les entiers μ, d, r et m de la proposition ci-dessus ne dépendent que de l'orbite du système $[A]$ (c'est-à-dire qu'ils sont invariants sous des transformations de jauge).*
2. *Les parties exponentielles d'un système $[A]$ satisfaisant les hypothèses de la proposition précédente ont le même indice de ramification minimal r, elles sont conjuguées sur $\overline{\mathcal{C}}$ et leur multiplicité est égale à $m\mu$. On dit alors que $[A]$ possède "un*

type" de partie exponentielle, ça veut dire des parties exponentielles tous conjuguées modulo une extension algébrique ou une ramification.

3. *La puissance h du polynôme irréductible f, est un multiple de la ramification r. Alors la ramification $x = t^{h_i}$ donne un système ramifié qui est décomposable sur $\mathcal{C}((t))$ (car $\mathcal{C}((x^{1/r_i})) \subseteq \mathcal{C}((x^{1/h_i}))$).*
4. *Contrairement au cas algébriquement clos, nous ne pouvons plus obtenir la ramification minimale à partir de la dimension de l'eigenring. Sous les hypothèses de la proposition 3.3.11 et par analogue à la proposition 2.5.7, le polynôme minimal d'un élément générique T de $\mathcal{E}(A)$ est égal à f^m où $\chi_T = f^h$. Il résulte que si nous connaissons m et h, nous pouvons obtenir la ramification $r = \frac{h}{m}$. Ainsi, nous pouvons obtenir l'indice de ramification minimal à partir du polynôme minimal d'un élément générique de $\mathcal{E}(A)$.*

3.4 Algorithme de réduction formelle

Nous avons vu dans la section précédente que la décomposition sur $\mathcal{C}((x))$ en utilisant un élément générique de l'eigenring permet d'obtenir des sous-systèmes dans $\mathcal{C}((x))$ qui admettent un seul type de partie exponentielle. Elles sont toutes conjuguées sur $\overline{\mathcal{C}}$ et admettent la même ramification. Par conséquent, elles admettent toutes le même degré en x^{-1}. Il en résulte que le polygone de Newton de chaque sous-système admet une seule pente.

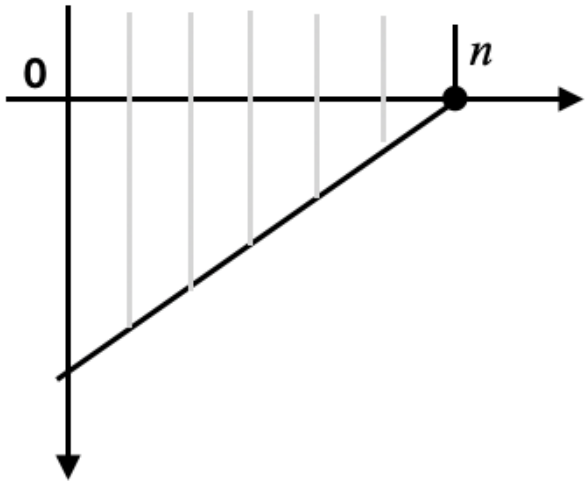


FIGURE 3.1 – Polygone de Newton d'un système indécomposable dans $\mathcal{C}((x))$

Lorsque la matrice principale A_0 est nilpotente et le système est irréductible au sens de Moser, d'après [10, Remarque 6] le point $(d, (d-n)(p-1) - \text{rang}(A_0))$ est un point du polygone de Newton où $d < n$ est le degré du polynôme de Moser, p le rang de Poincaré

du sous-système et n sa dimension. Or, le polygone de newton admet une seule pente, par conséquent, $d = 0$ et

$$\kappa = \frac{-\mathrm{val}(a_d)}{n-d} = \frac{-(0-n)(p-1)+\mathrm{rang}(A_0)}{n-0} = p-1+\frac{\mathrm{rang}(A_0)}{n}. \tag{3.4.1}$$

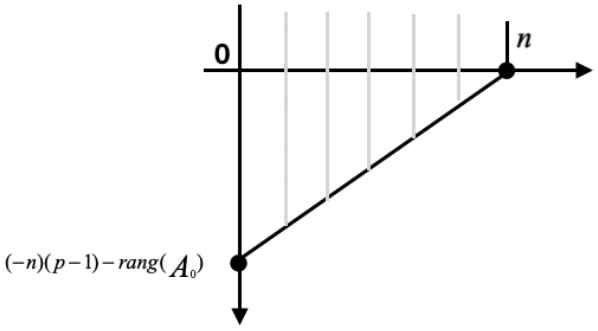


FIGURE 3.2 – Polygone de Newton d'un système indécomposable dans $\mathcal{C}((x))$, irréductible au sens de Moser et de matrice principale nilpotente

Nous obtenons un algorithme pour la réduction formelle qui permet de séparer les différentes parties exponentielles avant l'introduction des ramifications. Puis, chaque extension algébrique est traitée indépendamment dans un sous-système de taille plus petite. La stratégie consiste à commencer par appliquer un appel récursif des trois opérations lemme de découplage, changement d'exponentielle, et réduction de Moser. Quand la matrice principale du système est nilpotente et le système est irréductible au sens de Moser, nous avons deux possibilités : soit ramifier le système avec $x = t^h$ où h est un multiple de la ramification minimale (voir Remarque 3.3.12), soit calculer l'invariant de Katz en utilisant 3.4.1. Nous résumons les étapes :

On considère le système $Y' = AY$ avec $A := \frac{1}{x^{p+1}}(A_0 + A_1x + \ldots)$ et $A_0 \neq 0$.

1. Si A_0 admet des valeurs propres distinctes, appliquer le lemme de découplage.
2. Si A_0 admet une valeur propre unique a non nulle, effectuer le changement de partie exponentielle $A \leftarrow A - \frac{a}{x^{p+1}}$: on obtient un nouveau terme $\frac{a}{x^{p+1}}$ dans les parties exponentielles.
3. Si A_0 est nilpotente, appliquer une réduction du rang avec l'algorithme de Moser et aller à l'étape 1.
4. Si A_0 est nilpotent et que le système est irréductible au sens de Moser, appliquer une décomposition dans $\mathcal{C}((x))$ en utilisant l'eigenring (Algorithme 3). On obtient une décomposition de la forme

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_\ell$$

où les A_i sont à coefficients dans $\mathcal{C}((x))$ et un élément générique de l'eigenring de chaque sous-système $[A_i]$ admet un polynôme caractéristique de la forme $f_i^{h_i}$ où f_i est irréductible.

(a) Faire un appel aux trois premières étapes 1, 2 et 3.

(b) Si A_0 est nilpotente et que le système est irréductible au sens de Moser, on a deux possibilités pour procéder :

i. **Version 1 :** Ramifier le système avec $x = t^{h_i}$. Faire un appel récursif sur le système ramifié.

ii. **Version 2 :** Calculer l'invariant de Katz κ avec la formule (3.4.1). On pose $\kappa = \frac{\ell}{m}$ avec p.g.c.d$(\ell, m) = 1$. Ramifier le système avec $x = t^m$. Faire un appel aux trois premières étapes 1, 2 et 3 pour le système ramifié.

Remarque 3.4.1 *L'algorithme 3 du Chapitre 2 permet d'obtenir une décomposition de la forme* $[A_1] \oplus [A_2] \oplus \ldots \oplus [A_\ell]$ *où les* A_i *sont à coefficients dans* $\mathcal{C}((x))$ *et l'eigenring de chaque* $[A_i]$ *admet un polynôme caractéristique de la forme* $f_i^{h_i}$ *où* f_i *est irréductible. Par simplicité, nous notons la sortie de l'Algorithme 3 par* $[A_1, h_1] \oplus [A_2, h_2] \oplus \ldots [A_\ell, h_\ell]$.

Nous appelons la première version 4(b)i par la "version naturelle", et la version 4(b)ii sera plus optimisée dans le sens où nous utilisons les ramifications minimales.

3.4.1 Version 1 (naturelle)

Nous allons détailler dans cette sous section la première version de l'algorithme.

Algorithme 4 *Parties Exponentielles - Version 1*

Entrée : Un système $[A]$ de dimension n et de rang de Poincaré p.
Sortie : L'ensemble des parties exponentielles de $[A]$.

1: Si $p \leq 0$ retourner 0.
2: Si $n = 1$ retourner la partie singulière de A (la somme des termes de valuation négative).
3: Si la matrice principale A_0 est nilpotente, appliquer la réduction de Moser pour obtenir un système $[A]$ de rang de Poincaré minimal p et aller à l'étape 1.
4: Factoriser le polynôme caractéristique de A_0 : pour tout facteur irréductible choisir une racine λ_0 et faire
   a: $A := A - \frac{\lambda_0}{x^p+1} I_n$
   b: Appliquer le lemme de découplage pour obtenir un système équivalent $A_1 \oplus A_2$ où la matrice principale de A_2 est nilpotente.
   c: Poser $A = A_2$ et aller à l'étape 1.
5: Si A_0 est nilpotente et le système est irréductible au sens de Moser, appliquer l'algorithme 3 pour obtenir un système équivalent $[A_1, h_1] \oplus [A_2, h_2] \oplus \ldots [A_\ell, h_\ell]$ où chaque $[A_i, h_i]$ admet un seul type de partie exponentielle (voir Remarque 3.4.1). Pour chaque sous-système $[A, h]$:
   a: Appliquer les étapes 1 à 4. Poser A_0 le terme principale du nouveau système obtenu.
   b: Si A_0 est nilpotente et le système est irréductible au sens de Moser, appliquer la ramification $x = x^h$, $A \leftarrow hx^{h-1}A(x^h)$.
   c: Faire un appel récursif sur le système ramifié.

On note que l'étape 5 est appliquée une seule fois. C'est parce que h est un multiple de la ramification r qui est suffisante pour écrire la partie exponentielle associée à chaque sous-système obtenu. Après cette étape, on obtient la partie exponentielle par un appel récursif des étapes 1 à 4. L'étape 4 s'applique pour une seule valeur propre λ_0 pour un système $[A, h]$ ramifié.

3.4.1.1 Une session d'exemples

Exemple 3.4.2 *On considère le système* $[A]$ *de l'exemple 1.7.4, où*

$$A := \frac{1}{x^4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & -x^2 & x^2 & -x^2 \\ 0 & 1 & x^2 & 0 \\ x^2 & x^2 & 0 & -x^2 \end{pmatrix}.$$

On calcule l'élément général de l'eigenring :

$$M := \begin{pmatrix} _C_1 & 0 & 0 & (-_C_1 + _C_2)\,x^2 \\ 0 & _C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & _C_1 & 0 \\ 0 & x^2\,(_C_1 - _C_2) & x^2\,(_C_1 - _C_2) & _C_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(x^3\right) /$$

On choisit un élément générique T

$$T := \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 12\,x^2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -12\,x^2 & -12\,x^2 & 8 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(x^3)/$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_T(\lambda) = (\lambda - 8)\,(\lambda + 4)^3\,.$$

On construit la transformation P qui décompose le noyau de T :

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & x^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(x^3)$$

Cette transformation décompose $[A]$ en deux sous-systèmes :

$$A_1 := \begin{pmatrix} -x^{-2} - 1 & x^{-2} - 1 & x^{-4} + 3\,x + 2\,x^2 \\ x^{-4} & x^{-2} & 0 \\ 0 & x^{-3} & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(x^3)$$

et

$$A_2 := \begin{bmatrix} -x^{-2} + 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^3).$$

Le sous-système $[A_2]$ est de dimension 1, il admet la partie exponentielle

$$x = t, \quad w_2 = \frac{-1}{t^2}.$$

Le polynôme caractéristique de l'élément général l'eigenring de $[A_2]$ *est de la forme* $(x-c)^{h_2}$ *avec* $h_2 = 3$. *On ramifie le système avec* $x = t^3$ *; après application de la réduction de Moser, on obtient le système*

$$\tilde{A}_2 := \begin{bmatrix} \frac{-2}{t} & 0 & \frac{3}{t^9} \\ \frac{6\,t^{18}+9\,t^{15}+3}{t^9} & -\frac{3\,t^6+t^3+3}{t^4} & -\frac{3\,t^6-3}{t^5} \\ 0 & \frac{3}{t^9} & \frac{3}{t^4} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(1).$$

Le polynôme caractéristique de sa matrice principale est $(\lambda - 3)(\lambda^2 + 3\lambda + 9)$. *Puisque les parties exponentielles sont toutes conjuguées, il suffit de considérer une seule valeur propre* $\lambda_0 = 3$ *et décomposer* $[\tilde{A}_2]$ *en deux sous-systèmes :*

$$[\tilde{A}_2] \sim [\tilde{A}_2^1] \oplus [\tilde{A}_2^2]$$

avec $[\tilde{A}_2^1]$ *de dimension 1 admettant une partie exponentielle*

$$[x = t, \quad \tilde{w}_1 = 3t^{-9} + t^{-5} - t^{-1}].$$

Une paramétrisation des parties exponentielles de A_2, *s'obtient en multipliant* $\tilde{w}_1$ *par* $1/3t^2$ *:*

$$x = t^3, \quad w_1 = t^{-11} + t^{-7} - t^{-3}.$$

Exemple 3.4.3 *On considère le système* $Y' = AY$ *où*

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x} & \frac{-1}{3x^2} + \frac{1}{3x} & \frac{1}{3x^2} & \frac{-1}{3x^3} & \frac{1}{x^4} & \frac{-1}{x^4} + \frac{1}{x} \\ \frac{-1}{x^4} & \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x} & 0 & \frac{1}{3x^3} & 0 & \frac{1}{x^4} \\ \frac{-1}{3x^3} & \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x} & \frac{1}{3x^3} & \frac{1}{3x^3} & \frac{1}{x^4} \\ \frac{-1}{x^4} - \frac{1}{3x^2} & \frac{1}{x^3} & 0 & \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} & \frac{1}{x^4} & \frac{1}{3x^2} \\ \frac{1}{3x^2} - \frac{4}{3x} & \frac{-1}{x^3} + \frac{1}{3x} & \frac{1}{x^3} + \frac{1}{3x^2} & \frac{-1}{3x^3} + \frac{1}{x} & \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} & \frac{-1}{x^4} + \frac{1}{x} \\ \frac{-1}{x} & \frac{1}{3x} & \frac{1}{3x^2} & \frac{1}{x^4} - \frac{1}{3x^3} & \frac{1}{x^4} & -\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{3x} \end{bmatrix}.$$

L'eigenring de ce système est engendré par la matrice identité. Ceci implique que le système est irréductible sur $\mathcal{C}((x))$ *et de ramification* $r = 6$. *On ramifie avec* $x = t^6$.

On obtient le système ramifié

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} \frac{6}{t^7} - \frac{2}{t} & -\frac{2}{t^7} + \frac{2}{t} & \frac{2}{t^7} & \frac{-2}{t^{13}} & \frac{6}{t^{19}} & \frac{-6}{t^{19}} + \frac{6}{t} \\ \frac{-6}{t^{19}} & \frac{6}{t^7} + \frac{2}{t} & 0 & \frac{2}{t^{13}} & 0 & \frac{6}{t^{19}} \\ \frac{-2}{t^{13}} & \frac{6}{t^{19}} + \frac{6}{t} & \frac{6}{t^7} + \frac{2}{t} & \frac{2}{t^{13}} & \frac{2}{t^{13}} & \frac{6}{t^{19}} \\ \frac{-6}{t^{19}} - \frac{2}{t^7} & \frac{6}{t^{13}} & 0 & \frac{6}{t^7} + \frac{6}{t} & \frac{6}{t^{19}} & \frac{2}{t^7} \\ \frac{2}{t^7} - \frac{8}{t} & -\frac{6}{t^{13}} + \frac{2}{t} & \frac{6}{t^{13}} + \frac{2}{t^7} & \frac{-2}{t^{13}} + \frac{6}{t} & \frac{6}{t^{19}} + \frac{6}{t^7} + \frac{6}{t} & \frac{-6}{t^{19}} + \frac{6}{t} \\ \frac{-6}{t} & \frac{2}{t} & \frac{2}{t^7} & \frac{6}{t^{19}} - \frac{2}{t^{13}} & \frac{6}{t^{19}} & \frac{-6}{t^{19}} + \frac{6}{t^7} + \frac{10}{t} \end{bmatrix}.$$

Sa matrice principale est

$$A_0 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 & 0 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est :

$$(\lambda - 6)^2(\lambda^2 + 6\lambda + 36)^2.$$

La matrice A_0 admet les valeurs propres $\{6, -3 - 3\,i\sqrt{3}, -3 + 3\,i\sqrt{3}\}$ chacune de multiplicité deux. On effectue le changement d'exponentielle $A = A - \frac{6}{t^{17}}\mathrm{I}_6$. On obtient un système équivalent de matrice principale singulière admettant une valeur propre nulle double. On applique le lemme de découplage ; on obtient le système réduit $[\tilde{A}_1] \oplus [\tilde{A}_2]$ où $[\tilde{A}_2]$ a une matrice principale nilpotente. Il suffit de faire un appel récursif sur le système $[\tilde{A}_2]$. Après une réduction de rang, le système $[\tilde{A}_2]$ se décompose en deux sous-systèmes de taille 1

$$\begin{bmatrix} -2\,\frac{RootOf\left(_Z^2-12\right)}{x^{10}} + \frac{2}{x^9} + \frac{6}{x^7} - \frac{5}{2x} & 0 \\ 0 & 2\,\frac{RootOf\left(_Z^2-12\right)}{x^{10}} + \frac{2}{x^9} + \frac{6}{x^7} - \frac{5}{2x} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(1).$$

On obtient la partie exponentielle ramifiée du système $[A]$ en multipliant les termes obtenus par $\frac{1}{6t^5}$

$$x = t^6, \quad w_1 = \frac{1}{t^{22}} + \frac{2\sqrt{3}}{6t^{15}} + \frac{1}{3t^{14}} + \frac{1}{t^{12}} - \frac{5}{12\,t^6}.$$

3.4.2 Version 2 (optimisée)

Cette version permet d'adapter la même stratégie que [7] pour minimiser les extensions algébriques. Notons que les 4 premières étapes sont les mêmes comme dans la Version 1 de l'algorithme.

Algorithme 5 Parties Exponentielles - Version 2

Input : Un système $[A]$ de dimension n et de rang de Poincaré p.
Output : L'ensemble des parties exponentielles de $[A]$.

1: Si $p \leq 0$ retourner 0.
2: Si $n = 1$ retourner la partie singulière de A (la somme des termes de valuation négative).
3: Si la matrice principale A_0 est nilpotente, appliquer la réduction de Moser pour obtenir un système $[A]$ de rang de Poincaré minimal p et aller à l'étape 1.
4: Factoriser le polynôme caractéristique de A_0 : pour tout facteur irréductible choisir une racine λ_0 et faire
   a: $A := A - \frac{\lambda_0}{x^p+1} I_n$
   b: Appliquer le lemme de découplage pour obtenir un système équivalent $A_1 \oplus A_2$ où la matrice principale de A_2 est nilpotente.
   c: Poser $A = A_2$ et appliquer les étapes 1, 2, 3 et 4.
5: Si A_0 est nilpotente et le système est irréductible au sens de Moser, appliquer l'algorithme 3 pour obtenir un système équivalent $A_1 \oplus \ldots \oplus A_\ell$ où chaque $[A_i]$ admet un seul type de partie exponentielle. Pour chaque sous-système $[A_i]$:
   a: Appliquer les étapes 1, 2, 3 et 4.
   b: Si A_0 est nilpotente et le système est irréductible au sens de Moser, calculer l'invariant de Katz $\kappa := \frac{l}{m} = q - 1 + \frac{r_0}{n}$ avec $\gcd(l, m) = 1$.
   c: Appliquer la ramification $x = cx^m$, $A \leftarrow cmx^{m-1}A(x)$.
   d: Appliquer la réduction de Moser sur le système ramifié A.
   e: Soit A_0 la matrice principale du nouveau système. Calculer $\chi_{A_0}(\lambda, c)$ et déterminer le polynôme de Newton $p_\kappa := \chi_{A_0}(m\lambda, 1)$ ([7]). Poser $R_\kappa := p_\kappa(\lambda^{1/m})$.
   f: Déterminer u et v tels que $ul + vm = 1$
   g: Pour une racine b de R, remplacer c par b^u dans le système ramifié $[A]$.
   h: $A \leftarrow A - \frac{mb^v}{x^l} I_n$
   i: Appliquer le lemme de découplage pour obtenir le système équivalent $[A_1] \oplus [A_2]$ où la matrice principale de A_2 est nilpotente.
   j: Poser $A = A_2$ et aller à l'étape 5.a.

Nous notons que chaque sous-système $[A_i]$ à l'étape 5 n'a qu'une seule partie exponentielle modulo une conjugaison. Maintenant, quand A est un système avec un seul type de partie exponentielle, pour toute transformation P à coefficients dans $\mathcal{C}((x^{1/r_i}))$ telle que $P[A] = A_1 \oplus \ldots \oplus A_\ell$ chaque sous-système $[A_i]$ a uniquement la même partie exponentielle. Ainsi, chaque sous-système n'a qu'une pente dans le polygone de Newton et il est encore possible de calculer l'invariant de Katz correspondant avec la formule (3.4.1). De ce fait, après avoir appliqué l'étape 5.j, il est toujours possible de calculer le

prochain invariant de Katz à l'aide de la formule (3.4.1).

3.4.2.1 Une session d'exemple

Exemple 3.4.4 *On considère le système $Y' = AY$ de l'exemple 3.4.3 où*

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{3x} & \frac{-1}{3x^2}+\frac{1}{3x} & \frac{1}{3x^2} & \frac{-1}{3x^3} & \frac{1}{x^4} & \frac{-1}{x^4}+\frac{1}{x} \\ \frac{-1}{x^4} & \frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x} & 0 & \frac{1}{3x^3} & 0 & \frac{1}{x^4} \\ \frac{-1}{3x^3} & \frac{1}{x^4}+\frac{1}{x} & \frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x} & \frac{1}{3x^3} & \frac{1}{3x^3} & \frac{1}{x^4} \\ \frac{-1}{x^4}-\frac{1}{3x^2} & \frac{1}{x^3} & 0 & \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x} & \frac{1}{x^4} & \frac{1}{3x^2} \\ \frac{1}{3x^2}-\frac{4}{3x} & \frac{-1}{x^3}+\frac{1}{3x} & \frac{1}{x^3}+\frac{1}{3x^2} & \frac{-1}{3x^3}+\frac{1}{x} & \frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x} & \frac{-1}{x^4}+\frac{1}{x} \\ \frac{-1}{x} & \frac{1}{3x} & \frac{1}{3x^2} & \frac{1}{x^4}-\frac{1}{3x^3} & \frac{1}{x^4} & -\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{3x} \end{bmatrix}.$$

L'eigenring de ce système est engendré par l'identité. Ceci implique que le système est irréductible sur $\mathcal{C}((x))$ et admet un seul type de partie exponentielle. La matrice principale est nilpotente et le système est irréductible au sens de Moser. On trouve l'invariant de Katz $\kappa = p-1+\frac{\operatorname{rang}(A_0)}{n} = 4-1+\frac{4}{6} = \frac{8}{3}$. On ramifie par $x = ct^3$. On applique la réduction de Moser, on obtient le nouveau système

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} 2\,\frac{1}{ct^4} & -3\,t^{-2} & -3\,\frac{1}{t^9c^2} & 0 & -3\,\frac{1}{t^9c^2} & -\frac{ct^3-3}{t^8c^2} \\ -\frac{c^2t^6+3}{c^3t^9} & \frac{ct^3+3}{ct^4} & -\frac{ct^3+3}{t^8c^2} & 3\,\frac{1}{t^9c^2} & -3\,\frac{1}{t^8c^2} & 3\,\frac{1}{c^2t^7} \\ -\frac{ct^3-1}{ct^2} & \frac{3\,c^3t^9-3}{c^3t^9} & \frac{c^2t^6+4\,ct^3+3}{c^2t^7} & -\frac{1}{t^5c} & \frac{ct^3+3}{c^2t^7} & -3\,\frac{1}{c^2t^6} \\ -\frac{1}{c^2t^4} & \frac{1}{c^2t^5} & -\frac{3\,c^3t^9+3}{c^3t^9} & \frac{4\,ct^3+3}{ct^4} & -3 & \frac{3\,c^3t^9+3}{c^3t^8} \\ -\frac{3\,c^2t^6+1}{c^2t^5} & 3\,\frac{1}{c^3t^9} & -7\,t^{-1} & \frac{3\,ct^3+1}{t^5c} & -\frac{3\,ct^3-3}{ct^4} & \frac{4\,c^3t^9+3}{c^3t^9} \\ -\frac{4\,c^3t^9-c^2t^6+3}{c^3t^9} & 3\,t^{-1} & -\frac{3\,c^2t^6-ct^3-3}{t^8c^2} & 0 & \frac{ct^3+3}{t^8c^2} & \frac{3\,ct^3-3}{c^2t^7} \end{bmatrix}.$$

La matrice principale est $\tilde{A}_0$

$$\tilde{A}_0 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3\,c^{-2} & 0 & -3\,c^{-2} & 0 \\ -3\,c^{-3} & 0 & 0 & 3\,c^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -3\,c^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3\,c^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\,c^{-3} & 0 & 0 & 0 & 3\,c^{-3} \\ -3\,c^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_{\tilde{A}_0}(\lambda, c) = \lambda^6 - \frac{54\lambda^3}{c^8} + \frac{729}{c^{16}}$$

On en déduit le polynôme de Newton réduit

$$R_\kappa = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Il admet $b = 1$ comme racine de multiplicité 2. Il s'ensuit que $c = b^u = 1$. On remplace $c = 1$ dans $\tilde{A}$. On considère une racine de $\chi_{\tilde{A}_0}(\lambda, 1)$, $\lambda_0 = 3$. Le terme principal de la partie exponentielle est donc

$$\frac{3}{t^9}.$$

On pose $\tilde{A} = \tilde{A} - \frac{3}{t^9}\mathrm{I}_6$ et on fait un appel récursif sur $[\tilde{A}]$. La matrice principale de $\tilde{A}$ admet la valeur propre double $\lambda_0 = 0$. On applique le lemme de découplage et on obtient le système équivalent $[\tilde{A}^1] \oplus [\tilde{A}^2]$ où la matrice principale de $\tilde{A}^2$ est nilpotente. On fait un appel récursif uniquement sur $\tilde{A}^2$.

$$\tilde{A}_2 := \begin{bmatrix} t^{-5} + 3\,t^{-4} + 3\,t^{-2} + 4\,t^{-1} & t^{-6} - t^{-5} + t^{-4} - 1/3\,t^{-3} - 1/3\,t^{-2} + t^{-1} - \frac{11}{9} \\ 3\,t^{-5} + 3\,t^{-4} - 2\,t^{-2} & t^{-5} + 3\,t^{-4} - 3\,t^{-2} - 6\,t^{-1} + 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(t)$$

Ce système admet une matrice principale nilpotente et est irréductible au sens de Moser. On calcule $\kappa := 5 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$. On ramifie le système $[\tilde{A}]$ avec $t = cz^2$. Le nouveau système ramifié

$$\tilde{A}^2 := \begin{bmatrix} \frac{2\,c^5 z^{10} - 13\,c^4 z^8 - 6\,c^3 z^6 + 6\,cz^2 + 2}{c^4 z^9} & -\frac{4\,c^3 z^6 - 6\,cz^2 - 6}{c^4 z^{10}} \\ -2/9\,\frac{11\,c^6 z^{12} - 9\,c^5 z^{10} + 3\,c^4 z^8 + 3\,c^3 z^6 - 9\,c^2 z^4 + 9\,cz^2 - 9}{c^5 z^{10}} & \frac{8\,c^4 z^8 + 6\,c^3 z^6 + 6\,cz^2 + 2}{c^4 z^9} \end{bmatrix}$$

admet une matrice principale

$$\tilde{A}_0^2 := \begin{bmatrix} 0 & 6\,c^{-4} \\ 2\,c^{-5} & 0 \end{bmatrix}.$$

Son polynôme caractéristiques $\chi_{\tilde{A}_0^2}(\lambda, c) = \lambda^2 - \frac{12}{c^9}$. On déduit le polynôme de Newton réduit $R(\lambda) = 4\lambda - 12$. On calcule $u = 1$, $v = -4$ tels que $9u + 2v = 1$ et on obtient $c = 3^1 = 3$. On choisit une racine de de $\chi_{\tilde{A}_0^2}(\lambda, 3) = \frac{2}{81}$. On pose $\tilde{A}^2 := \tilde{A}^2 - \frac{2}{81z^{10}}\mathrm{I}_6$ et on fait un appel récursif sur $\tilde{A}^2$. Celui-ci le découpe en deux systèmes de dimension 1 chacun. On considère uniquement celui de rang de Poincaré inférieur à 9

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{81\,z^9} + \frac{2}{9z^7} - \frac{5}{2z} \end{bmatrix}$$

Finalement, la partie exponentielle peut être paramétrisée par

$$\left[\frac{1}{177147t^{22}}+\frac{1}{6561t^{15}}+\frac{1}{6561t^{14}}+\frac{1}{729t^{12}}+\frac{-5}{324t^{6}},\ x=27t^{6}\right]$$

Nous avons réduit le calcul dans $\mathbb{Q}[2\sqrt{3}]$ *(Exemple 3.4.3) à un calcul uniquement dans* $\mathbb{Q}$.

Remarque 3.4.5 *Sur la base de cet exemple nous constatons que l'utilisation d'une ramification* $x = ct^r$ *au lieu de* $x = t^r$ *(*$c \neq 1$*), peut nous donner un nouveau système de coefficients entiers plus grands comparé au système de départ (provenant des puissances de c).*

3.4.3 Complexité et une méthode heuristique

L'étape la plus coûteuse de l'algorithme est le calcul de l'eigenring. En effet, nous utilisons l'algorithme de calcul des solutions régulières dans $\mathcal{C}((x))$ développé par Barkatou et Pflügel dans [14] pour le système $[I_n \otimes A - A^t \otimes I_n]$. Cet algorithme commence par transformer le système pour le mettre sous une *forme simple* de sorte que le système admet un polynôme indiciel non identiquement nul. Les valuations des solutions régulières sont les racines entières de ce polynôme indiciel. Puis une solution est construite en trouvant progressivement des monômes possibles de la forme $x^\mu c$, $0 \neq c \in \mathcal{C}^n$. Pour plus de détails voir ([14] ou [59, Chapitre 1]).

Dans [12], Barkatou et El Bacha proposent un algorithme pour calculer une forme simple d'un système de taille n en $\mathcal{O}(kpn^4)$ opérations sur $\mathcal{C}$ où p est le rang de Poincaré du système et k est la précision dans A. Ainsi, l'appliquer à notre système $[I_n \otimes A - A^t \otimes I_n]$ de taille n^2 coûterait $\mathcal{O}(kpn^8)$ opérations dans $\mathcal{C}$.

De plus, dans [11], Barkatou, Cluzeau et El Bacha montrent que l'algorithme dans [14] construit une solution régulière, jusqu'à l'ordre k pour un système simple en $\mathcal{O}(n^4k^2)$ opérations dans $\mathcal{C}((x))$. Ainsi l'appliquer à notre système $[I_n \otimes A - A^t \otimes I_n]$ coûterait $\mathcal{O}(n^8k^2)$ opérations in $\mathcal{C}$.

Cela confirme, comme l'attestent les performances pratiques, que le coût principal du calcul de l'eigenring est la transformation en forme simple du système $[I_n \otimes A - A^t \otimes I_n]$ pour déterminer les valuations possibles des solutions régulières. Cependant, comme démontré dans [13], les valuations de solutions régulières de $[I_n \otimes A - A^t \otimes I_n]$ sont essentiellement trouvées à partir des différences des parties exponentielles du système $[A]$.

Dans de nombreuses situations, cela explique pourquoi nous pouvons trouver des éléments non triviaux de l'eigenring $\mathcal{E}(A)$ avec des valuations au moins égales à 0. Quand il y en a suffisamment, en particulier quand il y a un élément de valuation positive, une

combinaison générique de ceux-ci peut être un *séparateur* dans $\mathcal{E}(A)$ et peut donner une décomposition du système $[A]$.

Ceci motive notre stratégie heuristique pour éviter de calculer des formes simples et déterminer toutes les valuations des solutions régulières : nous regarderons juste les éléments de l'eigenring de valuation supérieure où égale à 0 (où même -1). Une méthode pour trouver ces termes est d'effectuer le calcul direct en résolvant l'équation de l'eigenring $T' = AT - TA$ avec $T = \sum_{i\geq 0} T_i x^i$ (ou $T = \sum_{i\geq -1} T_i x^i$). Ceci se réduit à résoudre des équations successives de la forme $[A_0, T_i] = \mathcal{L}_i(T_0, \ldots, T_{i-1})$ où $\mathcal{L}_i(\bullet)$ est linéaire et A_0 peut être supposée sous forme de Jordan et nilpotente (car nous ne procédons à la décomposition en utilisant l'eigenring que lorsque la matrice principale est nilpotente et le système est irréductible au sens de Moser). Ce sont des équations de Sylvester qui n'admettent pas nécessairement des solutions uniques.

Nous appelons cette stratégie la *méthode heuristique* car elle s'avère efficace dans la pratique mais elle présente deux inconvénients : premièrement, nous ne connaissons pas encore de borne sur les précisions nécessaires pour certifier que T_0 est correct. De plus, nous ne pouvons pas garantir qu'un tel élément séparateur de l'eigenring et de valuation supérieur ou égale à 0 existe toujours ; sinon, nous pouvons appliquer l'algorithme complet de solutions régulières de [14].

Exemple 3.4.6 *On considère le système* $[A] : Y' = AY$ *où* A *est une matrice de dimension 6*

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{x^5}+\frac{3}{x} & 0 & \frac{1}{x^4}+\frac{4}{x} & 0 & \frac{1}{x^4}+\frac{4}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^3}+\frac{3}{x} & 0 & \frac{1}{x^5}+\frac{4}{x} & 0 & \frac{1}{x^3}+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x} \\ 0 & \frac{1}{x^5} & 0 & 0 & \frac{1}{x^4} & 0 \\ \frac{1}{x^5} & 0 & 0 & \frac{1}{x^5}+\frac{4}{x} & 0 & \frac{1}{x^5}+\frac{4}{x} \\ 0 & \frac{1}{x^5} & 0 & 0 & \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x} & 0 \\ \frac{1}{x^4}+\frac{4}{x} & 0 & \frac{1}{x^5}+\frac{4}{x} & \frac{1}{x^6}+\frac{3}{x} & \frac{1}{x^6}+\frac{3}{x} & \frac{1}{x^6} \end{pmatrix}.$$

On applique la méthode heuristique pour le calcul des éléments T_i *de valuation positive dans l'eigenring de* $[A]$*.On obtient une base d'éléments de* $\mathcal{E}(A)$ *de valuation au moins* 0 *de dimension 6. Soit* M *un élément général de cet espace ; il est formé par une combinaison linéaire* $M := \sum_{i=1}^{6} c_i T_i$ *avec les* c_i *sont des indéterminées. On détermine un élément générique (en spécialisant les* c_i *aléatoirement dans* $\mathcal{C}$*). Son polynôme caractéristique admet 4 facteurs simples et 1 facteur irréductible de degré 2 sur* $\mathbb{Q}$*. Cet élément* T *de l'eigenring décomposer le système* $[A]$ *en 5 sous-systèmes (4 sous-systèmes de taille 1 et un système de taille 2) à coefficients dans* $\mathbb{Q}((x))$*. On obtient les parties exponentielles*

$\frac{dq_i}{dt}$

$$[\frac{\alpha}{t^5}+\frac{-1+\alpha}{t^4}+\frac{8/3-4/3\,\alpha}{t^3}+\frac{-4/3\,\alpha-5}{t^2}+\frac{\frac{35}{9}+\frac{161\,\alpha}{9}}{t},\quad x=t],$$
$$[-t^{-5}+3/2\,t^{-3}+\frac{19}{12\,t^2}-\frac{5}{12\,t},\quad x=t],$$
$$[t^{-6}+t^{-5}+t^{-3}-t^{-2}+9\,t^{-1},\quad x=t],$$
$$[t^{-5}+t^{-4}-5/2\,t^{-3}+\frac{15}{4\,t^2}-\frac{17}{4\,t},\quad x=t],$$
$$[\frac{-2}{t^3}+\frac{8}{t^2}-\frac{19}{t},\quad x=t],$$

où α vérifie $\alpha^2-\alpha+1=0$.
D'autre part, l'algorithme dans [14] calcule des solutions en séries de Laurent du système $[I_n\otimes A-A^t\otimes I_n]$ de taille n^2 qui nous permet d'obtenir l'eigenring de $[A]$. Il se trouve que sa valuation est 0.

	Temps (s) pour calculer un élément de l'eigenring	Nombre de blocs dans la décomposition dans $\mathbb{Q}((x))$
Calcul des éléments de valuation au moins 0 (Méthode heuristique)	0.297	5
Calcul d'élément général (algorithme [14])	7.556	5

Le temps correspond à un calcul pour une précision de 10 termes.

3.5 Conclusion

Au cours des chapitres 2 et 3, nous avons développé des résultats de Balser, Jurkat et Lutz, ainsi que les techniques de décomposition avec l'eigenring sur $\mathcal{C}((x))$, pour établir une méthode de réduction formelle qui "sépare" en premier lieu les parties exponentielles avant de les calculer.

L'algorithme dans chacune de ses deux versions, consiste en une combinaison de notre approche de décomposition avec l'eigenring sur $\mathcal{C}((x))$ et de la méthode de réduction formelle dans [7]. La version 2 gère mieux les extensions algébriques ; elle permet le calcul dans des extensions algébriques plus petites ce qui est préférable d'un point de vue algorithmique.

Un point fort de notre algorithme est que, en utilisant des opérations sur le corps de base, nous construisons itérativement des sous-systèmes de taille plus petite. Chaque

sous-système ayant exactement un type de partie exponentielle (Remarque 3.3.12). En ce sens, nous séparons les parties exponentielles, en utilisant des opérations dans $\mathcal{C}((x))$ avant d'introduire la ramification. Cela permet de retarder autant que possible les ramifications et les extensions algébriques. Au moment de leur introduction, le sous-système est le plus petit possible. En fait, nous utilisons toujours la plus petite ramification qui rend la matrice principale non-nilpotente. Toute ramification que nous utilisons lors de calculs intermédiaires apparaît dans le résultat final.

Notons que, pour obtenir une matrice fondamentales de solutions formelles complète, l'algorithme de réduction formelle peut être complété en résolvant des sous-systèmes de tailles plus petites et ayant au plus un pôle simple à l'origine.

Chapitre 4 :

L'algorithme de Miyake pour la réduction formelle

4.1 Introduction

Dans [53], Miyake a présenté une méthode pour la construction d'une matrice fondamentale de solutions formelles d'un système différentiel linéaire. Cet article fait suite à un travail effectué avec Ichnobe [54]. Il utilise des idées provenant de ses travaux précédents [52] et un outil provenant des travaux de Volevič [68]. L'idée est toujours la même : construire des transformations dans le corps de base pour réduire le système en des sous-systèmes de tailles plus petites. Quand cela n'est plus possible, trouver la ramification suffisante pour décomposer le système de nouveau et ainsi de suite.

Des étapes importantes dans la réduction :

— Le calcul du poids de Volevič du système différentiel $x^{p+1}Y' = AY$, noté V_A et obtenu à partir des valuations des entrées de la matrice A (voir Définition 4.2.1, Définition 4.2.8). Ce nombre, dans certains cas, va donner l'invariant de Katz. En effet, Kitagawa a montré dans [42] que, pour tout système, il existe une transformation polynomiale telle que l'invariant de Katz du nouveau système $x^{\tilde{p}+1}Y' = \tilde{A}Y$ vaut $\kappa = \tilde{p} - V_{\tilde{A}}$.

— Le calcul d'une transformation de shearing $S := \mathrm{diag}(x^{t_1}, \ldots, x^{t_n})$ dans le but de réduire le rang de Poincaré du système. Les t_i sont des rationnels appelés *nombres de Volevič* et leur existence est dû au lemme de Volevič ([52, p. 317], [68]).

— Il est préférable parfois de ne pas appliquer la transformation de shearing directement. Par exemple si les rationnels sont non entiers. Miyake utilise un T-développement où T est une suite de Volevič $T := (t_1, \ldots, t_n)$ (Définition 4.2.6) au lieu du développement de Taylor. Cela dans le but d'accéder au coefficient qui forme le terme principal noté par $\mathring{A}$ du système $S[A]$ sans calculer le système. Si $\mathring{A}$ n'est ni inversible ni nilpotente, cela signifie que $\kappa = p - V_A$ est fractionnel et il existe des parties exponentielles de degré strictement inférieur à $p - V_A$. Un découplage spécifique au T-développement (Section 4.3.2) est appliqué pour décomposer le système en deux sous-systèmes avant même d'introduire la ramification.

Ce qui manque dans les travaux de Miyake, c'est l'aspect effectif de l'exécution de ses algorithmes. Par exemple, pour calculer le poids de Volevič en utilisant la formule (4.2.1), nous chercherions le minimum sur $k!$ quantités pour chaque mineur de taille k. Donc au total, nous chercherions le minimum de $\sum_{k=1}^{n} C_n^k k!$ quantités où C_n^k est le nombre de combinaisons de k parmi n. De plus on est amené à calculer ce poids de Volevič plusieurs fois dans la procédure de réduction. Concernant le calcul d'une suite de Volevič il n'existe pas une preuve pour le résultat annoncé dans le travail de Volevič concernant l'existence des nombres de Volevič. Ce résultat a été repris par Miyake qui a donné une méthode pour calculer ces t_i en proposant de choisir chaque t_i dans un intervalle. Le choix de l'intervalle ainsi que sa définition ne nous semble pas

évident. Notre contribution concerne essentiellement le calcul effectif du poids ainsi que les nombres de Volevič qui forment deux étapes majeures dans la réduction de Miyake.

L'organisation de ce chapitre est la suivante : nous commençons par rappeler les différentes étapes de l'algorithme présenté par Miyake. Ensuite nous donnons des interprétations du nombre de Voleviç en théorie de graphe et l'algèbre tropicale. Nous obtenons ainsi des méthodes de programmation linéaire pour calculer le poids et les nombres de Volevič. Dans la section 4.6, nous présentons un algorithme de réduction du rang de Poincaré qui utilise la notion de Volevivč et la programmation linéaire. Enfin, nous adaptons la même stratégie de minimisation des extensions algébriques que celle proposée par Barkatou [7] (Chapitre 1, section 1.7.2.3) pour la réduction formelle de Miyake. Des exemples pour illustrer les différentes étapes et méthodes sont donnés.

4.2 Définition et notations

On considère une matrice $A(x) = (a_{i,j}(x))_{1\leq i,j\leq n}$ à coefficients dans $\mathcal{C}[[x]]$. La matrice A est de la forme $A(x) = A_0 + A_1 x + \dots$ où les A_i sont des matrices constantes de dimension n. On associe à la matrice A la *matrice de valuation* $R = (r_{ij})$ où $r_{ij} := \mathrm{val}(a_{ij}) \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$.

Définition 4.2.1 *([54, Définition 3.3]) Le* poids de Volevič *d'une matrice A à coefficients dans $\mathcal{C}[[x]]$ et de matrice de valuation R est défini par*

$$V_A := \min_{1\leq k\leq n}\left(\min_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_k\leq n}\left(\min_{\sigma\in S_k}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} r_{i_j,i_{\sigma(j)}}\right)\right) \tag{4.2.1}$$

où S_k est le groupe symétrique des permutations de $\{1,\dots,k\}$.

Exemple 4.2.2 *Soit la matrice de valuation*

$$R := \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} V = \min(&r_{11}, r_{22}, r_{33}, \frac{r_{12}+r_{21}}{2}, \frac{r_{11}+r_{22}}{2}, \frac{r_{23}+r_{32}}{2}, \frac{r_{22}+r_{33}}{2}, \frac{r_{13}+r_{31}}{2}, \\ &\frac{r_{11}+r_{33}}{2}, \frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}}{3}, \frac{r_{11}+r_{23}+r_{32}}{3}, \frac{r_{12}+r_{21}+r_{33}}{3}, \frac{r_{12}+r_{23}+r_{31}}{3}, \\ &\frac{r_{13}+r_{22}+r_{31}}{3}, \frac{r_{13}+r_{21}+r_{32}}{3}). \end{aligned}$$

Lemme 4.2.3 *([53, Lemme 3.2]) Soit A une matrice à coefficients dans $\mathcal{C}[[x]]$, soit $R = (r_{ij})$ sa matrice de valuation et $V_A = \frac{m}{K}$ son poids de Volevič. Alors, il existe des rationnels t_i dans $\frac{\mathbb{Z}}{K}$ tels que $r_{ij} \geq t_i - t_j + V_A$ pour tout $i, j \in 1, \ldots, n$. Ces rationnels t_i sont appelés les* nombres de Volevič associés à V_A. *On appellera $T := (t_1, \ldots, t_n)$* une suite de Volevič.

Miyake [52, 53] et Kitagawa [42, Appendice] utilisent ce résultat en s'appuyant sur un lemme dit "Lemme de Volevič" donné dans [68] sans preuve.

Lemme 4.2.4 (Lemme de Volevič [68]) *Soit $S = (s_{ij})$ une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ de dimension n. Si*

1. *$s_{ii} = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$*
2. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\sum_{j=1}^{k} s_{i_j, i_{\sigma(j)}} \geq 0$ pour $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n$ et pour toute permutation $\sigma \in S_k$.*

Alors il existe des nombres $\{s_1, \ldots, s_n\}$ dans $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, tels que l'on ait

$$s_{ij} \geq s_i - s_j$$

pour tout i et j dans $\{1, \ldots, n\}$.

De plus, Miyake présente une méthode pour calculer les t_i d'une suite de Volevič, voir Lemme 4.2.3. Il propose de choisir les t_i dans un intervalle qui dépend uniquement des t_k avec $k < i$ et des r_{ij} ([52, lemme de Volevič p.317]). Le choix de l'intervalle n'est pas clair et il semble utiliser toutes les permutations. Nous présentons une preuve d'existence ainsi qu'une méthode de calcul de V_A et des t_i dans la section 4.5.

Remarque 4.2.5 *Une observation directe montre que pour un choix des t_i, les nombres $\tilde{t}_i := t_i - \alpha$ vérifient aussi $r_{ij} \geq \tilde{t}_i - \tilde{t}_j + V_A$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

Soit $a \in \mathcal{C}((x))$ et k un entier. Nous notons $\mathrm{coeff}(a, x, k)$ le coefficient du terme en x^k dans a.

Définition 4.2.6 *([53]) On considère la matrice $A(x) = (a_{ij}(x))$ où les $a_{ij}(x)$ sont dans $\mathcal{C}((x))$. Soit V_A le poids de Volevič $V_A = \frac{m}{K}$ et $T := (t_1, \ldots, t_n)$ une suite de Volevič associée telle que $t_i \in \frac{\mathbb{Z}}{K}$. On écrit*

$$a_{ij}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)} x^{t_i - t_j + \frac{m}{K} + \frac{k}{K}},$$

où

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \mathrm{coeff}(a_{ij}(x), x, t_i - t_j + \frac{m}{K} + \frac{k}{K}) & si \quad t_i - t_j + \frac{m}{K} + \frac{k}{K} \in \mathbb{N}, \\ 0 & si \quad t_i - t_j + \frac{m}{K} + \frac{k}{K} \notin \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.2.2}$$

On définit le T-développement de $A(x)$ par rapport à V_A *par*

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}(x),\ A^{(k)}(x) := (a_{ij}^{(k)} x^{t_i - t_j + \frac{m}{K} + \frac{k}{K}})_{i,j}. \tag{4.2.3}$$

La matrice $\mathring{A} := A^{(0)} = (a_{ij}^{(0)})$ *est appelée la* matrice principale *du* T*-développement. La matrice* $\mathring{A}(x) := A^{(0)}(x) = (a_{ij}^{(0)} x^{t_i - t_j + V_A})$ *est appelée la* matrice des termes principaux *du* T*-développement.*

Exemple 4.2.7 *On considère la matrice*

$$A(x) := \begin{bmatrix} x^5 + x^3 + x^2 & 4x & 1 + x \\ -x^4 + \frac{1}{3}x^2 & -x^2 & \frac{1}{2}x^3 \\ x^4 & x^4 + x^3 & x^3 \end{bmatrix}$$

On a $V_A = \frac{3}{2}$ *et* $T = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ *est une suite de Volevič. Le* T*-développement de* A *par rapport à* V_A *est* $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}(x)$ *avec*

$$A^{(0)}(x) := \begin{bmatrix} 0 & 4x & 1 \\ \frac{1}{3}x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A^{(1)}(x) := \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & 0 \\ 0 & x^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)}(x) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x^4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ A^{(3)}(x) := \begin{bmatrix} x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^4 & x^3 \end{bmatrix}$$

$$A^{(4)}(x) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A^{(5)}(x) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}x^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{(6)}(x) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A^{(7)}(x) := \begin{bmatrix} x^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et $A^{(k)}(x) = 0$ *pour* $k \geq 7$*. La matrice principale* $\mathring{A}$ *est la matrice des coefficients de*

$A_0(x)$:

$$\mathring{A} := \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans ce qui suit, nous notons $[A, p]$ le système de dimension n

$$[A, p] : \quad x^{p+1}Y' = AY \tag{4.2.4}$$

où p est un entier $p \geq 0$ avec $A_0 \neq 0$.

Définition 4.2.8 *Le poids de Volevič (resp. une suite de Volevič) du système $[A, p]$ est le poids de Volevič (resp. une suite de Volevič) de la matrice $A(x)$.*

Définition 4.2.9 *(Développement plat) On considère un système $[A, p]$ de poids de Volevič V_A. Soit $T := (t_1, \ldots, t_n)$ une suite de Volevič associée à V_A. Soit S la transformation de shearing $S := \mathrm{diag}(x^{t_1}, \ldots, x^{t_n})$. On appelle un* développement plat*, l'application de la transformation de shearing $S[A] := S^{-1}AS - x^{p+1}S^{-1}S$.*

Exemple 4.2.10 *Supposons que la matrice A de l'exemple 4.2.7 corresponde au système $[A, 4]$. Le de poids de Volevič du système est alors $V_A := \frac{3}{2}$ et la suite de Volevič associée est $T = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. On pose $S := \mathrm{diag}(1, x^{1/2}, x^{3/2})$, on a*

$$S^{-1}AS - x^5 S^{-1}S' := A_0 x^{3/2} + A_1 x^2 + A_2 x^{5/2} + A_3 x^3 + A_4 x^{7/2} + A_5 x^4 + A_6 x^{9/2} + A_7 x^5$$

avec

$$A_0 := \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_5 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{2} \end{bmatrix},$$

$$A_6 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_7 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Remarque 4.2.11 *Pour $k \neq p+1$, les coefficients $a_{ij}^{(k)}$ de chaque matrice $A^{(k)}$ dans le T-développement vont correspondre aux coefficients qui admettent la puissance rationnelle $\frac{k}{K} + V_A$ en x après l'application de la transformation de shearing $S[A] := S^{-1}AS - x^{p+1}S^{-1}S'$ où $S := \mathrm{diag}(x^{t_1}, \ldots, x^{t_n})$. En effet, on a $\tilde{A} := S[A] = (\tilde{a}_{ij})$ où*

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij}x^{t_j - t_i} & i \neq j, \\ a_{ij} - x^p t_i & i = j. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

4.3 Description de l'algorithme

4.3.1 Quand $\mathring{A}$ est nilpotente

Miyake montre que dans le cas où $\mathring{A}$ est nilpotente, on peut construire une transformation P à coefficient polynomiaux telle que le système équivalent $\tilde{A} := P^{-1}AP - x^{p+1}P^{-1}P'$ admette un poids de Volevič supérieur strictement à V_A. On a besoin du résultat suivant pour reproduire la preuve de Miyake.

Proposition 4.3.1 *On considère un système $[A, p]$ de poids de Volevič V_A. Une matrice principale $\mathring{A}$ associée à une suite de Volevič $T = (t_1, \ldots, t_n)$ ne peut pas être triangulaire supérieure (ou inférieure) stricte.*

Preuve. Soit $R = (r_{ij})$ la matrice de valuation de A. On a $r_{ij} \geq t_i - t_j + V_A$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Si $\mathring{A}$ est triangulaire supérieure stricte alors, pour $i \geq j$ on a $r_{ij} > t_i - t_j + V_A$. Donc, toute les permutations cycliques $r_{i_1 i_2}, r_{i_2 i_3}, \ldots, r_{i_k i_1}$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, admette une longueur $r_{i_1 i_2} + r_{i_2 i_3} + \ldots + r_{i_k i_1}$ est strictement supérieure à kV_A. Cela est contradictoire avec la définition du poids de Volevič. ■

Proposition 4.3.2 *([54, Proposition 4.1]) On considère le système $[A, p]$ de dimension n. Soit V_A le poids de Volevič avec $V_A < p$ et $T := (t_1, \ldots, t_n)$ une suite de Volevič associée. On suppose que la matrice principale $\mathring{A}$ associée au T-développement est nilpotente. Alors, il existe une transformation P à coefficients dans $\mathcal{C}[x]$ qui donne une matrice*

$$\tilde{A} := P^{-1}AP - x^{p+1}P^{-1}P'$$

tel que $V_{\tilde{A}} > V_A$.

Preuve. Sans perte de généralité, nous supposons que $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ quitte à permuter les lignes et colonnes. Puisque $\mathring{A}$ est nilpotente, on peut supposer qu'il existe un vecteur dans le noyau à gauche de $\mathring{A}$ de la forme $v := (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k, 0, \ldots, 0)$ avec $\ell_k = 1$. On construit la matrice inversible

$$P_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \cdots & \vdots \\ & & \tilde{v} & & & \\ 0 & \cdots & & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $\tilde{v} := (-\ell_1, -\ell_2, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$. On a alors, la k-ème ligne de la matrice $P_0^{-1}\mathring{A}P_0$ est nulle. On souhaite maintenant construire un vecteur qui annule la k-ème ligne de la matrice $\mathring{A}(x)$ des termes principaux en x. Pour cela, on construit le vecteur $v(x) := (v_1 x^{t_k - t_1}, v_2 x^{t_k - t_2}, \ldots, v_{k-1} x^{t_k - t_{k-1}}, v_k, 0, \ldots, 0)$ avec $v_i = \ell_i$ si $t_k - t_i \in \mathbb{N}$, $v_i = 0$ si $t_k - t_i \notin \mathbb{N}$ et $v_k = 1$. Le terme à la position (i, j) du vecteur $v(x)\mathring{A}(x)$ est alors de la forme

$$\sum_{i=1}^{k} v_i \mathring{a}_{ij} x^{t_k - t_j + V_A}.$$

On va montrer que pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$ on a $\sum_{i=1}^{k} v_i \mathring{a}_{ij} = 0$. Pour j fixé, on considère le terme $\mathring{a}_{kj}$ sur la ligne k et on distingue 2 cas :

cas 1 Si $t_k - t_j + V_A \notin \mathbb{N}$, c'est-à-dire $\mathring{a}_{kj} = 0$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$,

— Si $t_k - t_i \in \mathbb{N}$, alors $t_i - t_j + V_A \notin \mathbb{N}$. Par conséquent, $\mathring{a}_{ij} = 0$.

— si $\mathring{a}_{ij} \neq 0$ c'est-à-dire si $t_i - t_j + V_A \in \mathbb{N}$, alors $t_k - t_i \notin \mathbb{N}$. Par conséquent, $v_i = 0$.

Il s'ensuit que $\sum_{i=1}^{k} v_i \mathring{a}_{ij} = \sum_{i=1}^{k} 0 = 0$.

cas 2 Si $\mathring{a}_{kj} \neq 0$, alors $t_k - t_j + V_A \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$,

— Si $t_k - t_i \notin \mathbb{N}$, alors $t_i - t_j + V_A \notin \mathbb{N}$. Par conséquent, $\mathring{a}_{ij} = 0$.

Or $\mathring{a}_{kj} \neq 0$, il existe alors au moins un $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ tel que $t_k - t_i \in \mathbb{N}$ et $\ell_i \neq 0$ avec $\sum_{i=1}^{k} v_i \mathring{a}_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \ell_i \mathring{a}_{ij} = 0$.

Par conséquent, $v(x)$ est bien un vecteur dans le noyau à gauche de $\mathring{A}(x)$. On pose

maintenant

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \cdots & \vdots \\ & & \tilde{v}(x) & & & \\ 0 & \cdots & & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.3.1}$$

où $\tilde{v} := (-v_1 x^{t_k - t_1}, -v_2 x^{t_k - t_2}, \ldots, -v_{k-1} x^{t_k - t_{k-1}}, 1, 0, \ldots, 0)$. Alors, la k-ème ligne de la matrice $P^{-1}\mathring{A}(x)P$ est nulle. Soit le système équivalent $\tilde{A} := P^{-1}AP - x^{p+1}P^{-1}P'$. La partie $x^{p+1}P^{-1}P'$ est une matrice où il y a 0 partout sauf à la ligne k :

$$P_{k\cdot} := \begin{pmatrix} (t_1 - t_k)\ell_1 x^{t_k - t_1 + p} & \cdots & (t_{k-1} - t_k)\ell_k x^{t_k - t_{k-1} + p} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

avec $t_k - t_i + p \geq p$ pour $i \in \{1, \cdots, k-1\}$. On en déduit que la partie $x^{p+1}P^{-1}P'$ n'a pas d'effet sur le calcul du poids de Volevič. Pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\begin{cases} \tilde{r}_{ij} \geq t_i - t_j + V_A & i \neq k, \\ \tilde{r}_{ij} > t_i - t_j + V_A & i = k, \end{cases}$$

où $\tilde{r}_{ij}$ est la valuation du terme $\tilde{a_{ij}}$ de $\tilde{A}$. Si $V_{\tilde{A}} > V_A$ alors nous avons trouvé le système réduit. Sinon, on permute les lignes et colonnes pour mettre la ligne k à la position n et on fait un appel récursif sur la sous matrice obtenue en éliminant la ligne et la colonne n et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on obtienne un système $[B, p]$ de matrice de valuation $R = (b_{ij})$ et qui admet une matrice principale triangulaire supérieure stricte avec

$$\begin{cases} b_{ij} \geq t_i - t_j + V_A, & i < j, \\ b_{ij} > t_i - t_j + V_A; & i \geq j. \end{cases}$$

Par conséquent, $V_B > V_A$. ■

Exemple 4.3.3 *On considère le système* $[A, 4]$ *où*

$$A := \begin{bmatrix} 3\,x^6 + 4\,x^3 - 3\,x^2 & 4\,x^4 + 5\,x^3 - 3\,x^2 - x & -1 \\ -4\,x^3 + 3\,x^2 & -4\,x^4 - 5\,x^3 + 3\,x^2 + x & -5\,x^7 + 3\,x^6 + 1 \\ -3\,x^7 - 4\,x^6 + 5\,x^4 - 3\,x^3 & 3\,x^6 + 3\,x^5 + 7\,x^4 - 3\,x^3 - x^2 & 8\,x^5 + x^3 - x \end{bmatrix}.$$

Sa matrice de valuation est

$$R := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

On calcule le poids de Volevič et une suite de Volevič, on obtient $V_A = 1$ et $T = (-1, -1, 0)$. La matrice principale et la matrice tes termes principaux sont données par :

$$\mathring{A} := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathring{A}(x) := \begin{bmatrix} 0 & -x & -1 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & -x^2 & -x \end{bmatrix}.$$

La matrice principale $\mathring{A}$ est nilpotente. On considère le vecteur v dans le noyau à gauche de A_0, $v := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On construit le vecteur $v(x) := \begin{pmatrix} -x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tel que

$$v(x)\mathring{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient les transformations P et $P_1(x)$ telles que :

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}\mathring{A}P := \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$P_1(x) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_1(x)^{-1}\mathring{A}(x)P_1(x) := \begin{bmatrix} -x & -x & -1 \\ x & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Une vérification montre que le système $[P[A], p]$ admet un poids de Volevič qui vaut 1. On poursuit la réduction en considérant les sous-matrices

$$\mathring{B} := \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathring{B}(x) := \begin{bmatrix} -x & -x \\ x & x \end{bmatrix}.$$

De la même façon, on construit la transformation

$$P_2(x) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_2(x)^{-1}\mathring{B}(x)P_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalement, on obtient la transformation

$$Q(x) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . P_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

telle que

$$Q^{-1}\mathring{A}(x)Q = \begin{bmatrix} 0 & -x & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le système équivalent $[\tilde{A}, 4]$ est donnée par

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} 3\,x^6 + 4\,x^3 - 3\,x^2 - x & 4\,x^4 + 5\,x^3 - 3\,x^2 - x & -1 \\ -5\,x^8 + 3\,x^7 - 4\,x^3 + 3\,x^2 + x & -4\,x^4 - 5\,x^3 + 3\,x^2 + x & -5\,x^7 + 3\,x^6 + 1 \\ -6\,x^7 + 4\,x^6 - x^5 + 2\,x^4 & 3\,x^6 - x^5 + 2\,x^4 & 8\,x^5 + x^3 \end{bmatrix}$$

et admet un poids de Volevič $V_{\tilde{A}} = 3 > V_A$.

4.3.2 Quand $\mathring{A}$ est singulière mais non nilpotente

On suppose dans cette section que $\det(\mathring{A}) = 0$ sans que $\mathring{A}$ soit nilpotente. La même stratégie que celle de la proposition 4.3.2 permet d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 4.3.4 *([53, Proposition 4.2]) On considère le système $[A, p]$ où $A(x)$ est à coefficient dans $\mathcal{C}[[x]]$. Soit V_A le poids de Volevič et $T := (t_1, \ldots, t_n)$ une suite de Volevič associée. On suppose que la matrice principale $\mathring{A}$ associée au T-développement est non nilpotente avec $\det(\mathring{A}) = 0$. Alors il existe une transformation P à coefficients dans $\mathcal{C}[x]$ qui donne un système équivalent*

$$B := P^{-1}AP - x^{p+1}P^{-1}P'$$

où

$$\mathring{B}(x) = \begin{pmatrix} \mathring{B}_{11}(x) & \mathring{B}_{12}(x) \\ 0 & \mathring{B}_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathring{B}_{22}(x) := \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.2}$$

et $\det(\mathring{B}_{11}(x)) \neq 0$.

Proposition 4.3.5 *([53, Proposition 4.4, Lemme 4.5]) On considère le système $[A, p]$ avec A une matrice de taille n, de poids de Volevič $V_A := \frac{m}{K}$ et $T := (t_1, \ldots, t_n)$ une*

suite de Volevič associée. On suppose que la matrice principale du T-développement $\mathring{A}$ est triangulaire supérieure par blocs :

$$\mathring{A} = \begin{pmatrix} \mathring{A}_{11} & \mathring{A}_{12} \\ 0 & \mathring{A}_{22} \end{pmatrix},$$

avec $\mathrm{spec}(\mathring{A}_{11}) \cap \mathrm{spec}(\mathring{A}_{22}) = \varnothing$ *et* $\mathring{A}_{11}$ *(resp.* $\mathring{A}_{22}$*) de taille* $n_1 \times n_1$ *(resp.* $n_2 \times n_2$*). Alors, il existe une unique transformation inversible* P *dans* $\mathrm{GL}_n(\mathcal{C}((x)))$ *de la forme*

$$P = \mathrm{I}_n + \begin{pmatrix} 0 & \sum_{k=0}^{\infty} P_{12}^{(k)}(x) \\ \sum_{k=1}^{\infty} P_{21}^{(k)}(x) & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.3.3}$$

où $P_{12}^{(k)}(x)$ *(resp.* $P_{21}^{(k)}(x)$*) est de taille* $n_1 \times n_2$ *(resp.* $n_2 \times n_1$*) et telle que le changement de variables* $Y = PZ$*, donne un système équivalent* $[B, p]$ *de même poids* V_A *et même nombres de Volevič* T *:*

$$x^{p+1} Z' = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} Z$$

à coefficients dans $\mathcal{C}[[x]]$ *et où* $\mathring{B} = \mathring{A}_{11} \oplus \mathring{A}_{22}$*.*

Preuve. On pose $P = \mathrm{I}_n + \begin{pmatrix} 0 & \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{12}(x) \\ \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{21}(x) & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B^{11}(x) & 0 \\ 0 & B^{22}(x) \end{pmatrix}$, avec la même partition que $\mathring{A}$. Dans la suite, on va d'une part montrer qu'il existe une unique transformation P de la forme (4.3.3) qui vérifie la relation

$$x^{p+1} P' := AP - PB, \tag{4.3.4}$$

et d'autre part, trouver les termes du système équivalent. Cela s'effectue en alternance terme par terme. On commence par partitionner la matrice A selon la décomposition de $\mathring{A}$:

$$A := \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}.$$

Par identification dans (4.3.4), on obtient :

$$\begin{cases} A^{11} - B^{11} + A^{12} P^{21} & = 0, \\ A^{22} - B^{22} + A^{21} P^{12} & = 0, \\ x^{p+1} \frac{d}{dx} P^{12} & = A^{11} P^{12} - P^{12} B^{22} + A^{12}, \\ x^{p+1} \frac{d}{dx} P^{21} & = A^{22} P^{21} - P^{21} B^{11} + A^{21}. \end{cases} \tag{4.3.5}$$

On considère le T-développement par rapport à $V_A = \frac{m}{K}$ des $A^{ij}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{ij}(x)$ et $B^{ii}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{ii}(x)$. Dans les équations du système (4.3.5), on substitue chaque sous par son T-développement. On considère le T-développement de A^{11} :

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{11}(x) \;\; avec \;\; A_k^{11}(x) := (a_{ij}^k x^{t_i - t_j + \frac{m}{K} + \frac{k}{K}})_{ij}$$

pour i et j dans $\{1, \ldots, n_1\}$(voir la définition du T-développement (4.2.2) et (4.2.3)). On considère aussi le T-développement par rapport à $V = 0$ de P^{21} et P^{12}

$$P^{21}(x) := \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{21}(x) \;\; avec \;\; P_k^{21}(x) := (P_{ij}^k x^{t_i - t_j + \frac{k}{K}})_{ij},$$

pour $i \in \{n_1 + 1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, n_1\}$ et

$$P^{12}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{12}(x) \;\; avec \;\; P_k^{12}(x) := (P_{ij}^k x^{t_i - t_j + \frac{k}{K}})_{ij},$$

pour $i \in \{1, \ldots, n_1\}$ et $j \in \{n_1 + 1, \ldots, n\}$. Par identification dans (4.3.5) on obtient les deux premières équations :

$$\begin{cases} B_k^{11}(x) & = A_k^{11}(x) + \sum_{i=0}^{k} A_i^{12}(x) P_{k-i}^{21}(x), \\ B_k^{22}(x) & = A_k^{22}(x) + \sum_{i=0}^{k} A_i^{21}(x) P_{k-i}^{12}(x). \end{cases} \tag{4.3.6}$$

Pour $k < Kp - m$, les termes dans P^{12} et P^{21} se calculent en utilisant ces deux équations respectivement

$$\begin{cases} A_0^{11}(x) P_k^{12}(x) - P_k^{12}(x) A_0^{22}(x) & = -A_k^{12}(x) - \sum_{i=0}^{k-1} (A_{k-i}^{11}(x) P_i^{12}(x) - P_i^{12}(x) B_{k-i}^{22}(x)), \\ A_0^{22}(x) P_k^{21}(x) - P_k^{21}(x) A_0^{11}(x) & = -A_k^{21}(x) - \sum_{i=0}^{k-1} (A_{k-i}^{22}(x) P_i^{21}(x) - P_i^{21}(x) B_{k-i}^{11}(x)). \end{cases} \tag{4.3.7}$$

Pour $k = 0$, les équations (4.3.6) et (4.3.7) donnent

$$\begin{cases} B_0^{11}(x) & = A_0^{11} + A_0^{12}(x) P_0^{21}(x), \\ B_0^{22}(x) & = A_0^{22}(x) + A_0^{21}(x) P_0^{12}(x) = A_0^{22}(x), \\ A_0^{11}(x) P_0^{12}(x) - P_0^{12}(x) A_0^{22}(x) & = -A_0^{12}(x), \\ A_0^{22}(x) P_0^{21}(x) - P_0^{21}(x) A_0^{11}(x) & = -A_0^{21}(x) = 0. \end{cases} \tag{4.3.8}$$

On en déduit d'abord que $\mathring{B}^{22} = \mathring{A}^{22}$. Les deux dernières équations peuvent être transformées en des équations de Sylvester avec des matrices constantes. On considère

l'équation

$$A_0^{11}(x)P_0^{12}(x) - P_0^{12}(x)A_0^{22}(x) = -A_0^{12}(x). \tag{4.3.9}$$

En multipliant à droite par $\mathrm{diag}(x^{t_1}, \dots, x^{t_{n_1}})$ et à gauche par $x^{-V_A}\mathrm{diag}(x^{-t_{n_1+1}}, \dots, x^{-t_n})$ les deux membres de l'équation (4.3.9), on obtient une équation de Sylvester

$$\mathring{A}^{22}X - X\mathring{A}^{11} = -\mathring{A}^{12}. \tag{4.3.10}$$

Cette nouvelle équation est une équation de Sylvester avec des matrices constantes ; elle admet une solution constante unique X. On déduit $P_0^{12}(x) = \mathrm{diag}(x^{-t_{n_1+1}}, \dots, x^{-t_n})X\mathrm{diag}(x^{t_1}, \dots, x^{t_{n_1}})$. On fait pareil pour la quatrième équation et on obtient $P^{21} = 0$. On en déduit que $\mathring{B}^{11} = \mathring{A}^{11}$.

En général, pour k fixé, les équations (4.3.7) se transforment en une équation de Sylvester à matrices constantes en effectuant une multiplication à gauche par $U_k := x^{-V_A - \frac{k}{K}}\mathrm{diag}(-x^{t_{n_1+1}}, \dots, -x^{t_n})$ et à droite par $V := \mathrm{diag}(x^{t_1}, \dots, x^{t_{n_1}})$. Si X est une solution de l'équation (4.3.10), alors $U_k^{-1}XV^{-1}$ est solution de (4.3.9).

On remarque aussi que, pour k fixé, $B_k^{11}(x)$ (resp. $B_k^{22}(x)$) dépend de A_k^{11}, A_i^{12} et P_i^{21} pour $i = 1 \dots k$ (resp. A_k^{22}, A_i^{21} pour $i = 1 \dots k$ et P_i^{12} pour $i = 0 \dots k-1$). Pour résoudre les équations (4.3.6) et (4.3.7) on utilise l'ordre des équations suivant

$$\begin{cases} B_k^{22}(x) & = A_k^{22}(x) + \sum_{i=0}^{k} A_i^{21}(x)P_{k-i}^{12}(x), \\ A_0^{11}(x)P_k^{12}(x) - P_k^{12}(x)A_0^{22}(x) & = -A_k^{12}(x) - \sum_{i=0}^{k-1}(A_{k-i}^{11}(x)P_i^{12}(x) - P_i^{12}(x)B_{k-i}^{22}(x)), \end{cases} \tag{4.3.11}$$

pour calculer B^{11} et P^{21} et

$$\begin{cases} A_0^{22}(x)P_k^{21}(x) - P_k^{21}(x)A_0^{11}(x) & = -A_k^{21}(x) - \sum_{i=0}^{k-1}(A_{k-i}^{22}(x)P_i^{21}(x) - P_i^{21}(x)B_{k-i}^{11}(x)), \\ B_k^{11}(x) & = A_k^{11}(x) + \sum_{i=0}^{k} A_i^{12}(x)P_{k-i}^{21}(x), \end{cases} \tag{4.3.12}$$

pour calculer B^{11} et P^{21}.

Pour $k \geq pK - m$, on a

$$\begin{cases} A_0^{11}(x)P_k^{12}(x) - P_k^{12}(x)A_0^{22}(x) & = -A_k^{12}(x) - \sum_{i=1}^{k-1}(A_i^{11}(x)P_{k-i}^{12}(x) - P_{k-i}^{12}(x)B_i^{22}(x)) \\ & \quad + x^{p+1}\frac{d}{dx}P_{k+m-Kp}^{12}, \\ A_0^{22}(x)P_k^{21}(x) - P_k^{21}(x)A_0^{11}(x) & = -A_k^{21}(x) - \sum_{i=1}^{k-1}(A_i^{22}(x)P_{k-i}^{21}(x) - P_{k-i}^{21}(x)B_i^{11}(x)) \\ & \quad + x^{p+1}\frac{d}{dx}P_{k+m-Kp}^{21}. \end{cases} \tag{4.3.13}$$

Comme précédemment, résoudre ces équations est équivalent à résoudre une équation de Sylvester avec des matrices constantes et qui admet une solution unique.

Et ainsi le calcul des termes dans B et P s'effectue en alternance. ■

4.3.3 L'algorithme de réduction

Dans cette section, nous résumons les principales étapes de l'algorithme de Miyake dans [53] pour la réduction formelle.

1. Calcul du poids de Volevič V_A (en utilisant la formule (4.2.1)). On note K son dénominateur.
2. Calcul d'une suite de Volevič associée à V_A, $T := (t_1, \dots, t_n)$ où les t_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ sont dans $\frac{\mathbb{Z}}{K}$.
3. Si $V_A \geq p$, on pose $S := \mathrm{diag}(x^{t_1}, \dots, x^{t_n})$. La transformation $S[A] := S^{-1}AS - x^{p+1}S^{-1}S$ donne un système de première espèce au sens usuel.
4. Sinon, on note $\mathring{A}$ la matrice principale du T-développement (voir Définition 4.2.6).
5. La suite dépend des valeurs propres de $\mathring{A}$.
   (a) si $\det(\mathring{A}) \neq 0$, on rend d'abord le développement plat (Définition 4.2.9) en appliquant la transformation de shearing $\mathrm{diag}(x^{t_1}, \dots, x^{t_n})$. Puis, on ramifie avec x^K où K est le dénominateur de V_A (ça peut être 1). On note $[A, p']$ le nouveau système avec $p' = K(p - V)$. La matrice principale dans le développement de Taylor du nouveau système est $A_0 := \mathring{A}$ et elle est telle que $\det(A_0) \neq 0$. On procède comme la méthode classique :
      i. si A_0 admet une seule valeur propre a, on effectue un changement d'exponentielle $A \leftarrow A - \frac{a}{x^{p'+1}}I$. Le terme $\frac{a}{x^{p'+1}}$ est le terme principal des parties exponentielles. Dans ce cas, l'invariant de Katz du système est $\kappa = p - V_A$. On fait un appel récursif de l'algorithme sur le nouveau système.
      ii. si A_0 admet des valeurs propres distinctes toutes non nulles, on applique le lemme de découplage classique au système $[A, p']$ (Lemme 1.3.1). Dans ce cas, l'invariant de Katz du système est $\kappa = p - V_A$. On fait un appel récursif de l'algorithme pour chaque sous-système.
   (b) si $\mathring{A}$ est non nilpotente mais $\det(\mathring{A}) = 0$, on applique la proposition 4.3.4 pour calculer une forme triangulaire supérieure de $\mathring{A}(x)$: $\begin{pmatrix} \mathring{A}_{11}(x) & \mathring{A}_{12}(x) \\ 0 & \mathring{A}_{22}(x) \end{pmatrix}$ avec $\det(\mathring{A}_{22}(x)) = 0$ et $\det(\mathring{A}_{11}(x)) \neq 0$. Soit $[A, p]$ le nouveau système, on applique un lemme de découplage sur le T-développement de A pour calculer une transformation P à coefficient dans $\mathcal{C}((x))$ telle que $P[A] = B_{11} \oplus B_{22}$ avec

$V_{B_{11}} = V_A$, $V_{B_{22}} > V_A$, $\det(\mathring{B}_{11}) \neq 0$ et $\det(\mathring{B}_{22}) = 0$ (voir Section 4.3.2). On fait un appel récursif pour chaque sous-système.

(c) si $\mathring{A}$ est nilpotente, on applique la proposition 4.3.2 pour obtenir un système équivalent ayant un poids de Volevič supérieur strictement à V_A. Dans ce cas, l'invariant de Katz du système est strictement inférieur à $p - V_A$. On fait un appel récursif sur le nouveau système.

4.3.4 Exemple

On reprend le système $[A, 3]$ de l'exemple 1.7.4 du Chapitre 1 où

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & -x^2 & x^2 & -x^2 \\ 0 & 1 & x^2 & 0 \\ x^2 & x^2 & 0 & -x^2 \end{pmatrix}.$$

On calcule le poids et T l'ensemble des nombres de Volevič : $V_A := \frac{1}{3}$, $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{-1}{3}$, $t_3 = \frac{-2}{3}$ et $t_4 = 0$. Nous ordonnons le système pour avoir $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$. Soit le nouveau système permuté $[B, 3]$ où

$$B := \begin{pmatrix} x^2 & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & -x^2 & 1 & -x^2 \\ x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & x^2 & -x^2 \end{pmatrix}$$

et $V_B := \frac{1}{3}$, $t_1 = \frac{-2}{3}$, $t_2 = \frac{-1}{3}$, $t_3 = 0$ et $t_4 = 0$. La matrice principale associée au T-développement est

$$\mathring{B} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle admet une valeur propre nulle. On applique le lemme de découplage pour le T-développement (Lemme 4.3.5). On obtient la transformation P

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2\,x^5 \\ 0 & 0 & 1 & x^5 + x^2 \\ x^6 - 2\,x^5 + x^2 & 3\,x^5 + x^2 & x^5 - 2\,x^4 - 3\,x^3 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(x^6),$$

et le système équivalent $[P[B], p]$ où $P[B] = B_1 \oplus B_2$ avec

$$B_1 := \begin{bmatrix} x^4 - x^2 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^5)$$

et

$$B_2 := \begin{bmatrix} x^2 & 1 & 0 \\ -x^4 + x^2 & -x^4 - x^2 & 3\,x^5 + 1 \\ x & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^6).$$

Le système B_1 est de dimension 1, on en déduit la première partie exponentielle

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{-1}{t^2}, \quad x = t.$$

Le système $[B_2, 3]$ admet un poids de Volevič $V_B := \frac{1}{2}$ et les nombres de Volevič $T := \frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, 0$. Sa matrice principale par rapport au T-développement est $\mathring{B}_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\mathring{B}_2$ admet trois valeurs propres non nulles distinctes. On applique la transformation de shearing

$$S := \mathrm{diag}(x^{\frac{-3}{2}}, x^{\frac{-1}{2}}, x^0),$$

on ramifie le système obtenu et on applique le lemme de découplage classique. On obtient $[\tilde{B}_1 \oplus \tilde{B}_2, 2]$ où $\tilde{B}_1$ est de dimension 1. On en déduit une paramétrisation des parties exponentielles de B_2

$$\frac{dq_1}{dt} := \frac{1}{t^{11}} + \frac{1}{3t^7} - \frac{1}{3t^3}, \quad x = t^3.$$

Remarque 4.3.6 *Le T-développement et le lemme de découplage associé permettent de séparer la partie exponentielle ramifiée de celle non ramifiée avant d'introduire la ramification. Toutefois, l'application du lemme de découplage peut nécessiter la résolution*

d'un nombre d'équations de Sylvester important. En général, pour obtenir les k premiers dans le développement de Taylor du nouveau système, on a besoin de calculer $h := K(k-\min(t_i-t_j))$ *termes dans le T-développement où K est le dénominateur du poids de Volevič. Notons que d'après la proposition 3.5 dans [54] les* t_i *peuvent être choisis tels que* $\max(|\ t_i-t_j\ |) < (n-1)V_A$. *Ainsi* $\min(t_i-t_j)$ *est minoré par* $-(n-1)p$. *Par conséquent, h est majoré par* $K(k+(n-1)p)$.

4.4 Calcul du poids de Volevič

On considère le système $[A,p]$ de dimension n. On note $R=(r_{i,j})$ la matrice des valuations de $A(x)$. Nous rappelons que le poids de Volevič de la matrice $A(x)$ est défini par

$$V_A := \min_{1\leq k\leq n}\left(\min_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}\left(\min_{\sigma\in S_k}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} r_{i_j,i_{\sigma(j)}}\right)\right), \tag{4.4.1}$$

où S_k est le groupe symétrique des permutations de $\{1,\ldots,k\}$.

En pratique, si on applique la formule, le calcul du poids de Volevič semble être non efficace. En effet, nous cherchons le minimum sur $k!$ quantités pour chaque mineur principal de taille k pour k allant de 1 à n. Donc au total, nous cherchons le minimum entre $\sum_{k=1}^{n} C_n^k k!$ quantités et cela peut devenir très coûteux pour une dimension n légèrement grande.

4.4.1 Une méthode de complexité exponentielle pour le calcul du poids de Volevič

D'abord, nous avons remarqué que le minimum

$$\min_{\sigma\in S_k}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} r_{i_j,i_{\sigma(j)}}$$

de la formule (4.4.1) est un *déterminant tropical* (voir la sous section 4.4.5). Ainsi, le calcul du poids de Volevič peut être vu comme étant une succession de calcul de déterminants tropicaux pour chaque mineur principal de la matrice R de taille n. Par conséquent, pour chaque $k=1,..,n$, on est ramené à calculer une combinaison de k parmi n, C_n^k déterminants tropicaux. Il s'avère que calculer un "déterminant tropical" revient à résoudre le problème d'affectation en optimisation combinatoire. Il existe des méthodes pour résoudre ce type de problème. Nous présentons d'abord la méthode du simplexe puis la méthode hongroise qui admet une meilleur complexité pour résoudre le problème

d'affectation.

4.4.1.1 La méthode du simplexe

On considère le problème d'affectation suivant : on souhaite affecter n travails à n personnes différentes de telle sorte qu'exactement une seule personne soit affectée à chaque travail et exactement un travail soit affecté à chaque personne. On considère la matrice R de taille $n \times n$ qui représente le coût de l'affection du travail i à la personne j :

$$R := \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix},$$

où r_{ij} représente le coût d'affecter le travail i à la personne j. On cherche à calculer le coût d'affectation minimal. Par exemple pour $n = 3$, on a la matrice 3×3 et on cherche à trouver le chemin le moins coûteux parmi les $3! = 6$

$$\begin{pmatrix} \boxed{r_{11}} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & \boxed{r_{22}} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & \boxed{r_{33}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{r_{11}} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & \boxed{r_{23}} \\ r_{31} & \boxed{r_{32}} & r_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{11} & \boxed{r_{12}} & r_{13} \\ \boxed{r_{21}} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & \boxed{r_{33}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & \boxed{r_{12}} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & \boxed{r_{23}} \\ \boxed{r_{31}} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \boxed{r_{13}} \\ \boxed{r_{21}} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & \boxed{r_{32}} & r_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \boxed{r_{13}} \\ r_{21} & \boxed{r_{22}} & r_{23} \\ \boxed{r_{31}} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}.$$

Ce problème peut être vu comme étant un problème de programmation linéaire en nombre entier avec des contraintes de la manière suivante : on a besoin d'introduire n^2 variables x_{ij} pour $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ où x_{ij} vaut 1 si le travail i est affecté à la personne j et 0 sinon. Ainsi le programme d'optimisation linéaire de ce problème sera de minimiser la fonction

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_{ij}, \tag{4.4.2}$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = 1 \quad i = \{1, \ldots, n\}, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & = 1 \quad j = \{1, \ldots, n\}, \\ x_{ij} = 0 \ \textit{ou} \ 1. & \end{cases} \tag{4.4.3}$$

On note que ce programme en nombre entier peut être transformé en un programme linéaire en remplaçant la condition d'intégralité $x_{ij} = 0$ ou 1 par $0 \leq x_{ij} \leq 1$ (ou $x_{ij} \geq 0$) où x_{ij} vaut maintenant la proportion du travail i attribuée à la personne j, en supposant maintenant que des parties d'un travail peuvent être réalisées par différentes personnes. Il s'avère que le programme linéaire est plus facile à résoudre qu'un programme en nombres entiers. De plus, il donnera toujours des solutions entières. Ceci est dû à l'aspect unimodulaire de la matrice de contraintes. Ces résultats sont classiques et on peut les retrouver sous la référence de problème d'affectation en tant que problème de programmation linéaire ou binaires par exemple dans [58].

En général, la méthode du simplexe pour résoudre ce type de problème n'est pas la plus adaptée. Il existe une méthode plus efficace pour résoudre le problème d'affectation. C'est la méthode hongroise.

4.4.1.2 La méthode hongroise

Il existe un algorithme polynomial qui résout le problème d'affectation. Il a été développé par Harold Kuhn en 1955 ([43]) puis repris par Munkres en 1957 ([56]). L'algorithme est connu sous le nom de la méthode hongroise ou algorithme de Kuhn-Munkres. Cet algorithme résout le problème d'affectation en optimisation combinatoire. Le nombre total d'opérations arithmétiques est en $\mathcal{O}(n^3)$ ([56, 71]). Si on considère que le poids de Volevič est le minimum sur des déterminants tropicaux de chaque mineur principal de taille k, nous remplaçons le facteur $k!$ dans $\sum_{k=1}^{n} C_n^k k!$ de la méthode naïve par un facteur k^3. Voir l'appendice B pour plus de détails sur la méthode hongroise.

Exemple 4.4.1 *On considère la matrice suivante de taille* 12×12

$$\begin{bmatrix}
57 & 68 & 26 & 9 & 97 & 44 & 24 & 42 & \boxed{17} & 86 & 83 & 98 \\
54 & 80 & 13 & \boxed{8} & 3 & 21 & 75 & 33 & 84 & 15 & 49 & 30 \\
50 & 41 & 34 & 73 & \boxed{5} & 37 & 81 & 85 & 28 & 91 & 46 & 67 \\
56 & 60 & 49 & 28 & 97 & 88 & 40 & 50 & 24 & 44 & 48 & \boxed{17} \\
43 & 47 & 42 & 96 & 37 & 28 & 16 & 79 & 20 & \boxed{4} & 60 & 73 \\
75 & \boxed{3} & 86 & 68 & 98 & 62 & 46 & 2 & 80 & 17 & 52 & 30 \\
58 & 99 & \boxed{32} & 41 & 81 & 98 & 90 & 53 & 40 & 75 & 80 & 31 \\
14 & 79 & 82 & 77 & 37 & 72 & 86 & \boxed{4} & 41 & 70 & 58 & 58 \\
93 & 36 & 51 & 19 & 90 & \boxed{3} & 64 & 48 & 97 & 97 & 96 & 66 \\
61 & 46 & 61 & 88 & 79 & 24 & \boxed{1} & 16 & 30 & 95 & 99 & 24 \\
\boxed{10} & 55 & 29 & 19 & 40 & 57 & 35 & 8 & 96 & 46 & 58 & 22 \\
61 & 43 & 68 & 25 & 18 & 84 & 35 & 35 & 95 & 11 & \boxed{12} & 63
\end{bmatrix}$$

La somme minimale en choisissant un élément différent de chaque ligne et de chaque colonne est $17+8+5+17+4+3+32+4+3+1+10+12 = 116$. *Bien évidement, on n'a pas calculé le minimum sur les* $12! = 479001600$ *permutations possibles.*

Nous présentons dans le tableau suivant une comparaison pratique des deux méthodes : la méthode du simplexe (en utilisant la procédure « minimize » de la librairie « simplexe ») et notre implémentation de la méthode hongroise. Nous calculons le temps moyen de 30 exemples générés aléatoirement (RandomMatrix de la librairie LinearAlgebra dans Maple).

n	4	5	6	7	8	9	10	13	15
simplexe	0.03	0.07	0.14	0.24	0.43	0.51	0.73	1.92	3.71
hongroise	0.0005	0.0007	0.0013	0.0019	0.0020	0.0024	0.0035	0.0072	0.0104

Tableau 4.1 – Temps de calcul moyen en seconde d'un problème d'affectation (ou d'un déterminant tropical)

4.4.1.3 Une complexité exponentielle

Proposition 4.4.2 *On considère le système* $[A, p]$ *de dimension* n. *Le calcul du poids de Volevič de* $A(x)$ *en utilisant la méthode de Kuhn-Munkres se fait en* $\mathcal{O}(2^n n^3)$ *opérations.*

Preuve. Il s'agit de calculer, pour chaque mineur principal de la matrice de valuation, son déterminant tropical. Chaque déterminant tropical se calcule en $\mathcal{O}(n^3)$ par la méthode de Kuhn-Munkres. Or, il existe C_n^k mineurs principaux de taille k. Le coût maximal en opérations sera $\sum_{k=1}^{n} C_n^k k^3$. Cette quantité est toujours majorée par $2^n n^3$. ■

4.4.2 Une méthode polynomiale pour le calcul du poids de Volevič

Dans cette sous-section nous proposons une méthode de calcul du poids de volevič en calculant le polynôme caractéristique d'une matrice construite à partir de la matrice de valuation. Nous proposons ainsi une méthode de complexité polynomiale en nombre d'opérations.

Proposition 4.4.3 *On considère la matrice $A(x)$ à coefficients dans $\mathcal{C}[[x]]$ de matrice de valuation $R := (r_{ij})$ où $r_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On considère la matrice $R_x := (r_x^{ij})$ des monômes en x où $r_x^{ij} := 0$ si $r_{ij} = \infty$ sinon $r_x^{ij} := x^{r_{ij}}$. Soit χ le polynôme caractéristique de R_x, $\chi(\lambda) := \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\lambda^i$. On a alors*

$$V_A := \min_{1 \leq i < n} \left(\frac{\mathrm{val}(a_i)}{n-i} \right).$$

Exemple 4.4.4 *Soit la matrice*

$$A(x) := \begin{bmatrix} 2\,x^8 + x^7 + x^6 & 3\,x^5 + x^4 & 1 \\ x^2 & 3\,x^7 + x^5 & x^5 \\ 4\,x^4 + x^3 & x^6 & 3\,x^5 + x^4 \end{bmatrix}.$$

On calcule le polynôme caractéristique $\chi(x)$ de la matrice

$$R_x := \begin{bmatrix} x^6 & x^4 & 1 \\ x^2 & x^5 & x^5 \\ x^3 & x^6 & x^4 \end{bmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &:= \lambda^3 - \left(x^6 + x^5 + x^4\right)\lambda^2 - \left(-x^{10} - x^9 + x^6 + x^3\right)\lambda + x^{17} - x^{15} - x^{12} + x^{10} \\ &= \lambda^3 + a_2(x)\lambda^2 + a_1(x)\lambda_1 + a_0(x). \end{aligned}$$

On a alors

$$V_A := \min_{1\leq i<n}\left(\frac{\mathrm{val}(a_i)}{n-i}\right) = \frac{3}{2}.$$

4.4.2.1 Interprétation géométrique

Avec les mêmes notations que dans la proposition 4.4.3, on considère les droites $\delta_i = v(a_i) + ix$ pour $i = \{1, \ldots, n-1\}$ et la droite $y = nx$. Géométriquement V_A donnée par la formule $\min_{1\leq i<n}\left(\frac{\mathrm{val}(a_i)}{n-i}\right)$ représente l'intersection d'abscisse minimale entre les droites δ_i et la droite $y = nx$.

Exemple 4.4.5 *On reprend l'exemple 4.4.4. Le point donnant le poids de Volevič est égal*

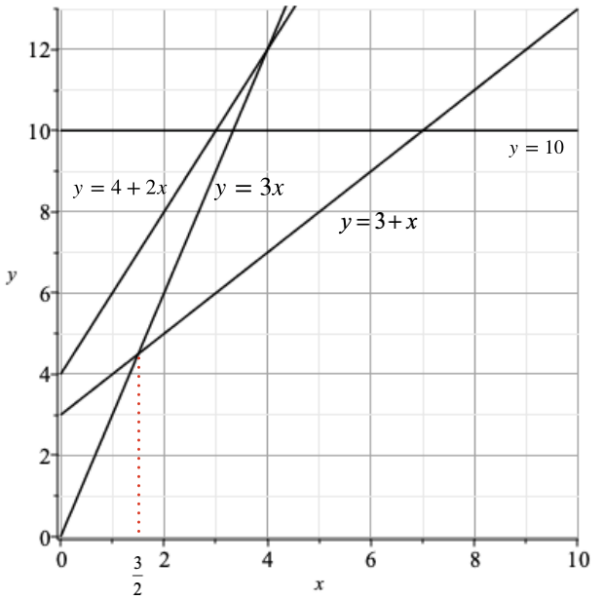


FIGURE 4.1 – Interprétation graphique du poids de Volevič

à l'abscisse du point d'intersection de la droite $y = x + 3$ avec la droite $y = 3x$; $x = \frac{3}{2}$.

Preuve de la proposition 4.4.3

On considère S_n le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Nous rappelons les notions d'orbite et de permutation circulaire.

Définition 4.4.6 *(Orbite) Soit $\sigma \in S_n$. Pour $e \in \{1, \ldots, n\}$, l'*orbite *de e sous l'action de σ est $O_\sigma(e) = \{\sigma^k(e), k \in \mathbb{N}\}$.*

Proposition 4.4.7 *(Taille d'un orbite) Soit $\sigma \in S_n$. Pour $e \in \{1, \ldots, n\}$, il existe une orbite de longueur minimale k telle que $\sigma^k(e) = e$. On dit que k est la* taille *de l'orbite.*

Définition 4.4.8 *(Permutation circulaire) Une* permutation circulaire *est une permutation $\sigma \in S_n$ avec $n \geq 2$ qui admet une seule orbite de taille n. C'est donc une orbite de taille n.*

Exemple 4.4.9 *La permutation* $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *admet une seule orbite de taille $k = 3$ et de support $\{2, 3, 4\}$. La permutation* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ *admet une seule orbite de taille $k = 4$ et de support $\{1, 2, 3, 4\}$. C'est donc une permutation circulaire.*

Proposition 4.4.10 *Toute permutation se décompose en produit d'orbites* disjointes*, i.e, leurs supports sont disjoints.*

Définition 4.4.11 *(Signature) Soient $n \geq 2$ et $\sigma \in S_n$. La signature de la permutation σ est $\epsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$.*

Proposition 4.4.12 *La signature d'une permutation circulaire de longueur k est $(-1)^{k-1}$.*

On considère maintenant le poids de Volevič donné par

$$V_A = \min_{1 \leq k \leq n} \left(\min_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \left(\min_{\sigma \in S_k} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} r_{i_j, i_{\sigma(j)}} \right) \right).$$

Nous allons montrer que le poids de Volevič peut être obtenu en considérant uniquement toutes les permutations cycliques de taille $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Lemme 4.4.13 *On suppose que le poids de Volevič V_A est atteint par une permutation de longueur k et qui admet deux orbites de tailles c_1 et c_2 ($c_1 + c_2 = k$). Alors, V_A est atteint aussi par les deux orbites de taille c_1 et c_2.*

Preuve. Par hypothèse on a

$$V_A = \frac{(r_{i_1 i_2} + r_{i_2 i_3} + \cdots + r_{i_{c_1} i_1}) + (r_{j_1 j_2} + r_{j_2 j_3} + \cdots + r_{j_{c_2} j_1})}{c_1 + c_2}.$$

On notera par $\mid O \mid_1$ la somme $r_{i_1 i_2} + r_{i_2 i_3} + \cdots + r_{i_{c_1} i_1}$ associée à l'orbite de taille c_1 et par $\mid O \mid_2$ la somme $[r_{j_1 j_2} + r_{j_2 j_3} + \cdots + r_{j_{c_2} j_1}]$ associée à l'orbite de taille c_2. D'après la définition du poids de Volevič, on a $V_A = \frac{|O|_1 + |O|_2}{c_1 + c_2} \leq \frac{|O|_1}{c_1}$. Cela implique que $\frac{|O|_2}{c_2} \leq \frac{|O|_1}{c_1}$. Aussi on a que $V_A = \frac{|O|_1 + |O|_2}{c_1 + c_2} \leq \frac{|O|_2}{c_2}$. Cela implique que $\frac{|O|_1}{c_1} \leq \frac{|O|_2}{c_2}$. On en déduit que $\frac{|O|_1}{c_1} = \frac{|O|_2}{c_2}$. Par conséquent,

$$V_A = \frac{\mid O \mid_1 + \mid O \mid_2}{c_1 + c_2} = \frac{\mid O \mid_1 + \frac{c_2}{c_1} \mid O \mid_1}{c_1 + c_2} = \frac{\frac{(c_1 + c_2)|O|_1}{c_1}}{c_1 + c_2} = \frac{\mid O \mid_1}{c_1}.$$

Le même calcul donne aussi que $V_A = \frac{|O|_2}{c_2}$. ■

Exemple 4.4.14 *On considère la matrice de valuation d'une matrice $A(x)$ de séries formelles*

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le poids de Volecič est alors

$$V_A = \min\{1, 2, 2, \frac{6}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{2}, \frac{4}{2}; \frac{6}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{3}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}\} = 1.$$

Il est atteint par $\frac{r_{11}+r_{23}+r_{32}}{3}$ et aussi par r_{11} et $\frac{r_{23}+r_{32}}{2}$.

Corollaire 4.4.15 *On suppose que le poids de Volevič V_A est atteint par une permutation de longueur k admettant ℓ orbites. Alors, V_A est atteint aussi par les ℓ orbites.*

Preuve. On suppose que V_A est atteint par une permutation admettant ℓ orbites

$$V_A = \frac{\mid O \mid_1 + \ldots + \mid O \mid_\ell}{c_1 + \ldots + c_\ell}.$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, on peut écrire

$$V_A = \frac{\mid O \mid_i + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{\ell} \mid O \mid_j}{c_i + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{\ell} c_j}.$$

En utilisant le même raisonnement que dans la preuve du lemme 4.4.13, on obtient $V_A = \frac{|O|_i}{c_i}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. ■

Nous venons de prouver le résultat suivant

Proposition 4.4.16 *Le poids de Volevič peut être calculé uniquement à partir des permutations circulaires d'ordre $k \in \{1, \ldots n\}$*

$$V_A := \min_{1\leq k\leq n} \left(\min_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} \left(\min_{\sigma\in PC_k} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} r_{i_j, i_{\sigma(j)}} \right) \right),$$

où PC_k est l'ensemble des permutations circulaires dans S_k.

Preuve de la proposition 4.4.3 On pose $V' := \min_{1\leq i<n}\left(\frac{\mathrm{val}(a_i)}{n-i}\right)$. Le polynôme caractéristique de la matrice R_x est de la forme

$$\chi_{R_x}(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f_k(\lambda) x^{n-k}$$

où f_k est la somme des tous les mineurs principaux de taille $k \in \{1,\ldots,n\}$:

$$f_k(x) := \sum_{i_1\leq\ldots\leq i_k<n} \left(\sum_{\sigma_k\in S_k} \left((-1)^{\epsilon_{\sigma_k}} \prod_{j=1}^{k} x^{r_{i_j\sigma_k(i_j)}} \right) \right). \tag{4.4.4}$$

D'après le proposition précédente, nous nous intéressons uniquement aux termes en x pour qui σ_k est une permutation circulaire de longueur k. Notons que la signature d'une telle permutation est $(-1)^{k-1}$ (Proposition 4.4.12). On suppose que V_A est atteint pour une permutation circulaire de taille k :

$$V_A = \frac{r_{i_1i_2} + r_{i_2i_3} + \ldots + r_{i_ki_1}}{k}.$$

On a alors $V' \geq V_A$ d'après le caractère absorbant de $(-1)^{\epsilon_{\sigma_k}}$ dans (4.4.4) (des monômes de même puissance et de signe opposé s'annulent). Supposons que le terme $x^{r_{i_1i_2}+r_{i_2i_3}+\ldots+r_{i_ki_1}}$ est absorbé dans $f_k(x)$. Il existe alors une permutation σ_k de signature opposée donc $(-1)^k$ telle que V_A est aussi atteint. Cette permutation ne peut pas être une permutation circulaire car elle admet une signature $(-1)^k$. Par conséquent σ_k est composé d'au moins deux orbites. On a alors

$$V_A = \frac{\mid O \mid_1 + \ldots + \mid O \mid_\ell}{c_1 + \ldots + c_\ell}$$

avec $c_1 + \ldots + c_\ell = k$. D'après le corollaire 4.4.15, $V_A = \frac{|O|_1}{c_1}$ avec $c_1 < k$. Si le terme $x^{|O|_1}$ est à son tour absorbé dans $f_{c_1}(x)$, on effectue le même raisonnement sur la permutation circulaire $\mid O \mid_1$ de taille c_1 jusqu'à ce que l'on obtient une orbite $\mid \tilde{O} \mid_1$ de taille $\tilde{c}_1 = 1$. Dans ce cas, le terme $x^{m_{i_1i_1}}$ ne peut pas être absorbé dans $f_1(x)$ car toutes les permutations d'ordre 1 ont la même signature qui est égale à 1. Ceci achève la preuve de la proposition 4.4.3.

4.4.3 Une méthode de programmation linéaire

Nous avons montré dans la proposition 4.4.16 que le poids de Volevič est déterminé uniquement à partir de permutations circulaires de taille $k \in \{1,\ldots,n\}$ dans la matrice de valuation R. En théorie des graphes, cette quantité correspond à la valeur minimale des *longueurs normalisées* de tous les cycles directs (permutations circulaires) dans un graphe orienté pondéré. Si on suppose que R représente un graphe orienté où chaque

coefficient $r_{ij} < \infty$ signifie qu'il y a un arc de poids r_{ij} entre les deux points i et j alors la longueur normalisée d'un cycle direct de taille k est défini par $\frac{r_{i_1 i_2}+\ldots+r_{i_k i_1}}{k}$. Nous notons qu'un point i peut être relié à lui même par une boucle.
Une formulation classique de programmation linéaire pour déterminer la longueur normalisée minimale parmi tous les cycles directs d'un graphe orienté est la suivante

$$\textit{minimiser} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_{ij} \tag{4.4.5}$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{i,j}^{n} x_{ij} & = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = \sum_{k=1}^{n} x_{ki}, \quad \forall 1 \leq i \leq n \\ x_{ij} & \geq 0, \quad \forall 1 \leq i,j \leq n \end{cases}$$

Le problème est de trouver un cycle direct $x_{i_1 i_2}, x_{i_1 i_2}, \ldots, x_{i_k i_1}$ de taille k qui représente le cycle de longueur normalisée minimale de la matrice de valuation R. Chaque x_{ij} représente le poids ou la probabilité que r_{ij} soit dans ce cycle de taille minimale. La valeur optimale du programme linéaire est soit finie soit non bornée. En particulier, quand le graphe est fortement connexe (pour tout couple (i_0, i_k) il existe un chemin $i_0 i_1, i_1 i_2, \ldots, i_{k-1} i_k$ qui les relie), alors la valeur optimale est finie.

Exemple 4.4.17 *On considère la matrice de valuation*

$$R := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'algorithme du simplexe sur Maple trouve une solution au programme linéaire (4.4.5)

$$\{x_{1,1} = 0, x_{1,2} = 1/2, x_{1,3} = 0, x_{2,1} = 1/2, x_{2,2} = 0, x_{2,3} = 0, x_{3,1} = 0, x_{3,2} = 0, x_{3,3} = 0\}$$

On en déduit $V := 2 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = 1$.

4.4.4 Une comparaison pratique

Nous avons présenté 3 méthodes différentes hormis la méthode naïve pour le calcul du poids de Volecič : la méthode naïve, le calcul d'un polynôme caractéristique (Proposition 4.4.3), en appliquant la méthode hongroise sur chaque mineur principal de la matrice de valuation, enfin la méthode de programmation linéaire (Section 4.4.3). Le calcul a été fait dans le logiciel du calcul formel Maple où on utilise notre implémentation de l'algorithme Hongrois. Nous présentons dans ce qui suit une comparaison du temps moyen pour le

calcul du poids de Volevič pour les différentes méthodes. Nous avons généré 30 matrices aléatoire (RandomMatrix) de coefficient comprise entre 0 et 99 et de taille allant de 2 à 25.

Méthodes / n	Méthode naïve	Méthode exp.	Méthode poly.	Programme Linéaire
2	0.0003	0.0016	0.0005	0.0036
3	0.0005	0.0025	0.0007	0.0063
4	0.0012	0.0052	0.0009	0.0092
5	0.0031	0.0107	0.0019	0.0196
6	0.0139	0.0263	0.0042	0.0190
7	0.0834	0.0647	0.0090	0.0262
8	0.6691	0.1938	0.0178	0.0280
9	6.4962	0.3656	0.0426	0.0389
10	79.1789	0.9681	0.0676	0.0479
11	-	3.2998	0.1064	0.0610
12	-	9.171	0.1661	0.0677
13	-	18.4611	0.2991	0.0749
14	-	39.7581	0.3434	0.0972
15	-	93.4996	0.4688	0.0988
16	-	-	0.6141	0.1204
17	-	-	0.8110	0.1595
18	-	-	1.0451	0.1387
19	-	-	1.3549	0.1793
20	-	-	1.8942	0.2154
25	-	-	10.2144	0.3219

Tableau 4.2 – Temps de calcul en seconde du poids de Volevič

Le - signifie que nous avons arrêté le test. Nous arrêtons le calcul quand le temps dépasse une heure de calcul pour les 30 exemples.

4.4.5 Le poids de Volevič dans la littérature tropicale

Nous allons à présent voir que le poids de Volevič a également une interprétation algébrique au sens de l'algèbre linéaire tropicale. Il correspond à l'unique "valeur propre *géométrique* tropicale" (si elle existe) de la matrice de valuation ([31, Lemme 1], [49, Proposition 5.1.2]). Celle-ci coïncide avec la plus petite "valeur propre *algébrique*

tropicale" ([31, Théorème 3], [49, Corollaire 5.1.5]). Par définition, les valeurs propres algébriques tropicales sont les racines du "polynôme caractéristique tropical". À notre connaissance, il n'existe aucun algorithme polynomial permettant de calculer un tel polynôme caractéristique. Toutefois, signalons que dans [27], Burkard et Butkovič montrent que les termes "essentiels" du polynôme caractéristique tropical peuvent être calculés en $\mathcal{O}(n^4)$ opérations. Ceux-ci par définition, sont les termes qui permettent de construire géométriquement le polynôme caractéristique tropical.
Par conséquent, nous avons quatre quantités qui coïncident : le poids de Volevič, la valeur propre géométrique tropicale, la valeur propre algébrique tropicale minimale et la longueur normalisée minimale d'un graphe orienté pondéré.

4.4.5.1 Arithmétique tropicale

On considère le corps des réels $\mathbb{R}$. Le semi-anneau tropical $\mathbb{R}_{min}$=$\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ est composé des nombres réels $\mathbb{R}$, ainsi que d'un élément supplémentaire appelé l'infini noté ∞. Les opérations arithmétiques de l'addition et de la multiplication sont

$$x \oplus y := \min(x, y) \;\; et \;\; x \otimes y := x + y.$$

La somme tropicale de deux nombres est leur minimum au sens usuel et le produit tropical de deux nombres est leur somme au sens usuel. L'infini ∞ est l'élément neutre pour l'addition

$$x \oplus \infty = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}_{min}$$

et le 0 est l'élément neutre pour la multiplication

$$x \otimes 0 = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}_{min}.$$

4.4.5.2 Algèbre linéaire tropicale

Soit $R := (r_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_{min})$ une matrice à coefficients dans le semi-anneau tropical $\mathbb{R}_{min}$. Le déterminant tropical de R est défini par

$$\mathrm{TropDet}(R) := \bigoplus_{\sigma \in S_n} r_{1,\sigma(1)} \otimes r_{2,\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes r_{n,\sigma(n)}$$

où S_n est le groupe symétrique des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. On note que calculer un déterminant tropical revient au même que résoudre un problème d'affectation ([49]). Il est déterminé par exemple par la méthode hongroise (sous section 4.4.1.2) en $\mathcal{O}(n^3)$.

Le *polynôme caractéristique tropical* de R a été défini dans [31] de la manière suivante :

$$\chi_R^{\min}(x) := \mathrm{TropDet}(R \oplus x) = \mathrm{TropDet}\left(\begin{pmatrix} r_{1,1} \oplus x & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ r_{n,1} & \cdots & r_{n,n-1} & r_{n,n} \oplus x \end{pmatrix}\right)$$

Cuninghame et Green montrent ([31, p. 114]) que $\chi_R^{\min}(x)$ peut s'écrire

$$\chi_R^{\min}(x) = \delta_0 \oplus (\delta_1 \otimes x) \oplus \ldots \oplus (\delta_{n-1} \otimes x^{n-1}) \oplus x^n = \bigoplus_{i=0}^{n} \delta_i \otimes x^i, \tag{4.4.6}$$

où $x^i = x \otimes x \otimes \ldots \otimes x$ avec le x répété i fois avec la convention $x^0 = 0$, $\delta_n = 0$ et

$$\delta_k = \bigoplus_{R_k \in P_k(R)} \mathrm{DetTrop}(R_k) \in \mathbb{R}_{\min} \tag{4.4.7}$$

où $P_k(R)$ est l'ensemble des mineurs principaux de taille $n-k$ de R.

Cette expression du polynôme caractéristique (4.4.6) peut être exprimée en terme d'opérations usuelles

$$\chi_R^{\min}(x) = \min(\delta_0, \delta_1 + x, \ldots, \delta_{n-1} + (n-1)x, nx).$$

Le polynôme caractéristique tropical $\chi_R^{\min}$ est donc une fonction convexe, affine et linéaire par morceaux. Le terme $\delta_0 = \mathrm{DetTrop}(R)$ se calcule en $\mathcal{O}(n^3)$ avec la méthode hongroise et $\delta_{n-1} = \min(r_{1,1}, r_{2,2}, \ldots, r_{n,n})$. Pour calculer δ_k avec $k \in \{2, \ldots, n-2\}$ il faut calculer le minimum du C_n^k déterminants tropicaux.

Définition 4.4.18 *(Racine du polynôme caractéristique) Les racines du polynôme caractéristique $\chi_R^{min}(x) := \bigoplus_{i=0}^{n} \delta_i \otimes x^i$ sont les abscisses des points d'intersection des fonctions affines qui forment l'enveloppe inférieure des fonctions affines $\delta_i \otimes x^i$.*

Exemple 4.4.19 *On considère la matrice*

$$R := \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique tropical est $\chi_R^{min}(x) = x^3 \oplus 4 \otimes x^2 \oplus 3 \otimes x^1 \oplus 8 = \min\{8, 2x+4, x+3, 3x\}$. Il correspond à l'enveloppe inférieure des fonctions affines (en rouge, Figure 4.2). Ses racines sont $\lambda_0 = \frac{3}{2}$ et $\lambda_1 = 5$.

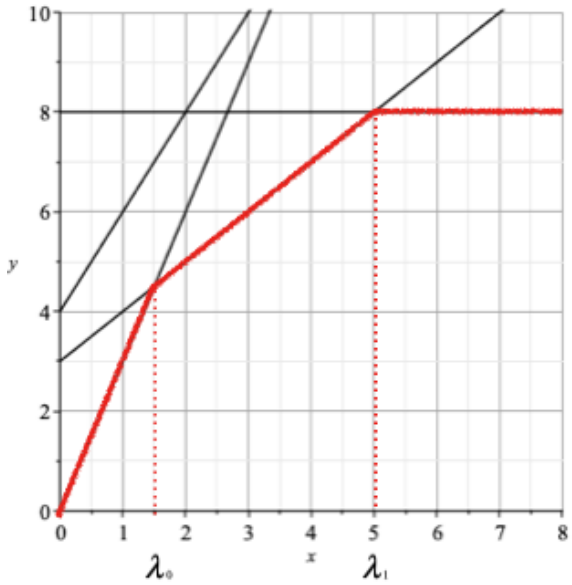


FIGURE 4.2 – Polynôme caractéristique tropical

Définition 4.4.20 *(Terme essentiel du polynôme caractéristique tropical) On considère le polynôme caractéristique tropical de la forme* (4.4.6) *:*

$$\chi_R^{\min}(x) = \delta_0 \oplus (\delta_1 \otimes x) \oplus \ldots \oplus (\delta_{n-1} \otimes x^{n-1}) \oplus x^n = \bigoplus_{i=0}^{n} \delta_i \otimes x^i.$$

Si pour $k \in \{0, \ldots, n\}$ *on a*

$$\forall x \quad \delta_k + kx \geq \min_{i \neq k}(\delta_i + ix),$$

où $\min_{i \neq k}(\delta_i + ix)$ *est l'enveloppe convexe inférieur limité par les droites* $\delta_i + ix$ *pour* $i \neq k$ *et* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, alors, on dit que le terme* $\delta_k \otimes x^k$ *n'est pas essentiel. Sinon, on dit que le terme* $\delta_k \otimes x^k$ *est essentiel.*

Exemple 4.4.21 *On reprend l'exemple 4.4.19 avec*

$$R := \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

La représentation graphique des $n+1$ *fonctions affines qui interviennent dans le polynôme caractéristique tropical*

$$\chi_R^{\min}(x) = x^3 \oplus 4 \otimes x^2 \oplus 3 \otimes x^1 \oplus 8 = \min\{8, 2x + 4, x + 3, 3x\}$$

est

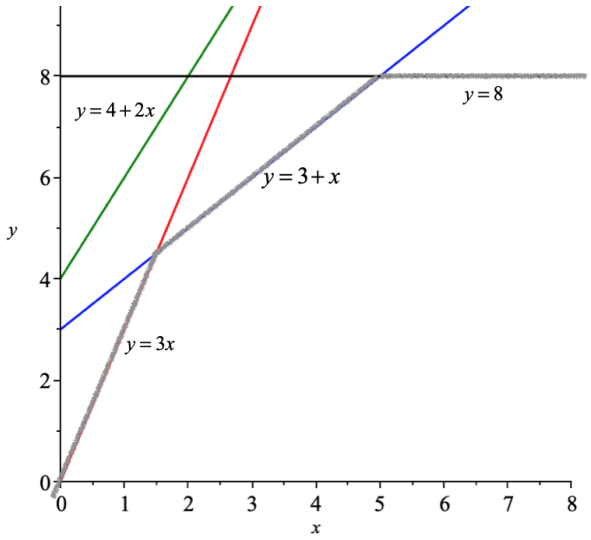


FIGURE 4.3 – Le polynôme caractéristique tropical et les $n+1$ fonctions affines

On voit que la droite $y = 4 + 2x$ *est strictement supérieure à la fonction affine par morceaux* $\min(3x, 3+x, 8)$. *Le terme* $4 \otimes x^2$ *n'est pas essentiel. Les termes* x^3, $3 \otimes x^1$ *et* 8 *sont essentiels et forment le polynôme caractéristique tropical.*

Dans [27], Burkard et Butkovič présentent une méthode pour calculer les termes essentiels du polynôme caractéristique tropical pour une matrice de taille n en $\mathcal{O}(n^4)$ opérations. Si la matrice R contient des entrées ∞, ces dernières seront remplacées par 0 et dans ce cas le calcul des termes essentiels s'effectue en $\mathcal{O}(n^2(m + n\log n))$ où m est le nombre de termes finis.

4.4.5.3 Lien entre le poids de Volevič et le polynôme caractéristique

Soit A une matrice à coefficients dans $\mathcal{C}[[x]]$ et R sa matrice de valuation à coefficients dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soit $\chi_R^{\min}$ le polynôme caractéristique tropical de R donné par (4.4.6). On considère les droites affines $y = \delta_i + ix$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ avec $\delta_i = n$ et où les δ_i sont donnés par (4.4.7). Le sommet d'abscisse minimale de l'enveloppe inférieure des fonctions affines $y = \delta_i + ix$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ est donné par

$$\min_{1 \le i < n} \left(\frac{\delta_i}{n - i} \right).$$

En opérations usuelles, cette formule correspond à la formule du poids de Volevič (4.4.1) de la matrice de valuation R.

Exemple 4.4.22 *On reprenant l'exemple précédent, on a* $V_A := \min\{\frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{8}{3}\} = \frac{3}{2}$.

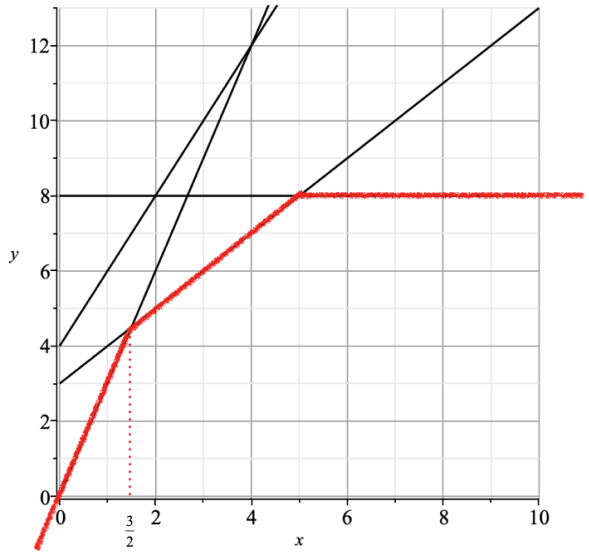


FIGURE 4.4 – Le poids de Volevič et le polynôme caractéristique tropical

4.4.5.4 Le poids de Volevič et les valeurs propres tropicales

Le poids de Volevič est l'unique valeur propre géométrique tropicale quand elle existe. Nous allons présenter dans la suite des résultats connus dans la littérature tropicale qui montrent ce résultat [31], [49].

Définition 4.4.23 *(Valeur propre algébrique tropicale) Soit R une matrice à coefficients dans le semi-anneau tropical $\mathbb{R}_{\min}$. Les* valeurs propres algébriques tropicales *de R sont les racines du polynôme caractéristique tropical.*

Définition 4.4.24 *(Valeur propre géométrique tropicale) Soit R une matrice à coefficients dans le semi-anneau tropical $\mathbb{R}_{\min}$. Une* valeur propre géométrique tropicale *de R est un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ qui vérifie*

$$R \otimes v = \lambda \otimes v,$$

pour certains $v \in \mathbb{R}^n$. On dit que v est un vecteur propre tropical de R.

En opérations usuelles et pour $n = 2$, on pose $v := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. On a,

$$R \otimes v = \lambda \otimes v$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} \min(r_{11} + v_1, r_{12} + v_2) \\ \min(r_{21} + v_1, a_{22} + v_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + v_1 \\ \lambda + v_2 \end{pmatrix}.$$

Définition 4.4.25 *Soit $R = (r_{ij})$ une matrice de taille n à coefficients dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Nous appelons une* permutation circulaire de R, *un chemin $(r_{i_1 i_2}, r_{i_2 i_3}, \ldots, r_{i_k i_1})$ de taille k. La* longueur normalisée *de cette permutation est $\frac{r_{i_1 i_2} + r_{i_2 i_3} + \ldots + r_{i_k i_1}}{k}$.*

Proposition 4.4.26 *([31, Lemme 1], [49, Proposition 5.1.2]) La valeur propre géométrique est unique (si elle existe) et est égale au minimum des longueurs normalisées de toutes les permutations circulaires $\lambda(R) := \frac{r_{i_1,i_2} + r_{i_2,i_3} + \ldots + r_{i_k,i_1}}{k}$.*

En particulier, toute matrice tropicale à coefficients finis admet une unique valeur propre géométrique $\lambda(R)$ ([49, Théorème 5.1.1]).

La valeur propre géométrique est une valeur propre algébrique. Seule la valeur propre algébrique minimale est aussi une valeur propre géométrique d'après le résultat suivant.

Proposition 4.4.27 *([31, Théorème 3], [49, Corollaire 5.1.5]) La valeur propre géométrique tropicale, si elle existe, elle coïncide avec la racine minimale du polynôme caractéristique tropical.*

4.5 Existence et calcul d'une suite de Volevič

Soit A une matrice de taille n à coefficients dans $\mathcal{C}[[x]]$, $R = (r_{ij})$ sa matrice de valuation et V_A son poids de Volevič. Le but de cette section est de fournir une preuve d'existence et une méthode de calcul d'une suite de Volevič $T = (t_1, \ldots, t_n)$ vérifiant $r_{ij} \geq t_i - t_j + V_A$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ dans les deux cas où V_A est fini ou bien $V_A = \infty$. La méthode de calcul sera basée sur la résolution d'un programme linéaire primal ou de son programme dual.

La proposition suivante est inspirée de [49, Proposition 5.1.2].

Proposition 4.5.1 *On considère une matrice $R = (r_{ij})$ de taille n et à coefficients dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. S'il existe au moins une permutation de longueur normalisée $V \in \mathbb{Q}$, alors il existe des nombres t_i tels que $r_{ij} \geq t_i - t_j + V$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Preuve. On considère le programme linéaire primal qui calcule la longueur minimale normalisée des permutations dans R et formé par $n+1$ contraintes (sans compter la positivité des variables) de n^2 variables :

$$\begin{aligned} &\text{minimiser} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_{ij}, \\ \text{sous contraintes} &\sum_{i,j}^{n} x_{ij} = 1, \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ki}, \quad \forall 1 \leq i \leq n, \\ &x_{ij} \geq 0, \quad \forall 1 \leq i,j \leq n. \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Soit V la valeur optimale de ce programme linéaire. On construit le programme dual associé afin de déterminer une borne V^* qui minore V, $V \geq V^*$. Pour cela, on considère les $n+1$ variables t et t_i pour $i \in \{1,\ldots,n\}$ et la combinaison linéaire des $n+1$ contraintes (4.5.1) :

$$V^* := \sum_{i=1}^{n} t_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} \right) + t \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}.$$

Les contraintes dans (4.5.1) vérifient $V^* = t$. On regroupe selon les termes x_{ij} dans V^*, on obtient

$$V^* := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (t_i - t_j + t)\, x_{ij} = t$$

On cherche à minorer la fonction $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_{ij}$ du programme primal, on écrit alors

$$V^* = t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (t_i - t_j + t)\, x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_{ij}$$

La fonction du programme linéaire primal est alors minorée par la fonction $f(t) = t$. On obtient le programme dual de n^2 contraintes et $n+1$ variables

$$\begin{aligned} &\text{maximiser} \quad f(t) = t \\ \text{sous contraintes} \quad &t_i - t_j + t \leq r_{ij} \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

La preuve s'achève par le fait que si l'un des deux problèmes primal ou dual admet une solution optimale finie, alors il en est de même pour le second problème ; d'après le théorème de la dualité forte, les valeurs optimales des deux problèmes sont égales [23,

Lemme 8.3]. Or, par hypothèse, il existe une longueur normalisée finie. Par conséquent, le programme primal admet une valeur optimale finie et le programme dual est aussi réalisable. ■

Remarque 4.5.2 *Si la valeur optimale du programme linéaire* (4.5.1) *n'est pas bornée* ($V = \infty$)*, alors le domaine des contraintes du problème dual* (4.5.2) *est vide [23, Lemme 8.2].*

La proposition 4.5.1 montre que quand le poids de Volevič V est fini, le programme dual (4.5.2) permet d'obtenir V ainsi que des rationnels t_i vérifiant $r_{ij} \geq t_i - t_j + V$. On ne sait pas à priori la nature de la sortie, si elle est entière ou fractionnelle. Quand $V = \frac{m}{K}$ avec p.g.c.d$(m, K) = 1$ on souhaite obtenir des t_i dans $\frac{\mathbb{Z}}{K}$ afin de pouvoir appliquer toutes les procédures concernant le T-développement. En particulier, quand V est entière, on souhaite calculer des t_i entiers pour former la transformation de shearing avec des puissances de x entières. Nous avons la proposition suivante qui montre l'existence de tels t_i.

Proposition 4.5.3 *On considère une matrice $R = (r_{ij})$ de taille n et à coefficients dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. S'il existe au moins une permutation de longueur normalisée $V = \frac{m}{K} \in \mathbb{Q}$ avec* p.g.c.d$(m, K) = 1$ *, alors il existe des nombres $t_i \in \frac{\mathbb{Z}}{K}$ tels que $r_{ij} \geq t_i - t_j + V$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Preuve. On note $S = (s_{ij})$ la matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} s_{ii} & = 0, \\ s_{ij} & = K(r_{ij} - V) \in \mathbb{Z} \quad \textit{pour} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Pour toute permutation circulaire $(s_{i_1 i_2}, s_{i_2 i_3}, \ldots, s_{i_k i_1})$, sa longueur normalisée est

$$\frac{s_{i_1 i_2} + s_{i_2 i_3} + \ldots + s_{i_k i_1}}{k} = K \left(\frac{(r_{i_1 i_2} + r_{i_2 i_3} + \ldots + r_{i_k i_1})}{k} - \frac{m}{K} \right) \geq 0$$

car par hypothèse V est la longueur normalisée minimale de toutes les permutations de R. Par conséquent, la longueur normalisée minimale de S est $V_S = 0$ (la longueur des cycles de longueurs 1 vaut $s_{ii} = 0$). Le programme linéaire dual (4.5.2) admet une valeur optimale 0 et il détermine des nombres s_i tels que $s_{ij} \geq s_i - s_j$ pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Par conséquent, on sait qu'il existe des solutions qui vérifient le domaine des contraintes du programme linéaire

$$\begin{aligned} \text{maximiser} \quad & 0 \\ \text{sous contraintes} \quad & s_i - s_j \leq s_{ij} \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Grâce à l'aspect *totalement unimodulaire* [58, Définition 13.1] (chaque sous-matrice est unimodulaire) de la matrice des contraintes de ce programme (4.5.3) et puisque les r_{ij} sont entiers, les solutions qui vérifient l'ensemble du domaine des contraintes sont toujours entières ([58, Théorème 13.2]). Par conséquent, le programme linéaire (4.5.3) donne une solution $(s_1, \ldots, s_n)$ qui vérifie (4.5.3) et qui est entière. La preuve s'achève en posant $t_i = \frac{s_i}{K}$. ■

Proposition 4.5.4 *Soit R une matrice de taille n à coefficients dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si les longueurs normalisées de toutes les permutations de R sont toutes non bornées (égales à ∞), alors pour tout $e \in \mathbb{N}$ il existe des entiers t_i tel que $r_{ij} \geq t_i - t_j + e$.*

Preuve. On pose $S = (s_{ij})$ la matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} s_{ii} & = 0 \\ s_{ij} & = (r_{ij} - e) \quad pour \quad i \neq j \end{cases}$$

Pour toute permutation circulaire $(s_{i_1 i_2}, s_{i_2 i_3}, \ldots, s_{i_k i_1})$, sa longueur normalisée est

$$\frac{s_{i_1 i_2} + s_{i_2 i_3} + \ldots + s_{i_k i_1}}{k} = \frac{r_{i_1 i_2} + r_{i_2 i_3} + \ldots + r_{i_k i_1}}{k} - e \geq 0,$$

car par hypothèse les longueurs normalisées de toutes les permutations de R valent ∞. La suite de la preuve est la même que dans la preuve de la proposition 4.5.3. ■

Le résultat plus générale suivant va nous être utile plus tard.

Proposition 4.5.5 *Soit R une matrice de taille n à coefficients dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soit V la longueur normalisée minimale des permutations de R. Alors pour tout $e \in \mathbb{N}$ tel que $V \geq e$, il existe des entiers t_i tel que $r_{ij} \geq t_i - t_j + e$.*

Remarque 4.5.6 *Dans nos implémentations, pour résoudre un programme linéaire, nous utilisons la méthode du simplexe ([62, 32]). Nous rappelons que la complexité théorique de cette méthode est exponentielle dans le pire des cas. Mais, sa complexité pratique est linéaire en le nombre de contraintes pour un programme linéaire ([51]).*

4.6 Algorithme de réduction du rang de Poincaré

Dans cette section, nous décrivons un algorithme de calcul du poids de Volevič *maximal* (Définition 4.6.1) basé sur la résolution des programmes linéaires (4.5.1) et (4.5.3) et l'application de la proposition 4.3.2. Nous effectuons le lien entre la classification au sens de Volevič et la classification usuelle. Finalement, nous déduisons un algorithme de calcul du rang de Poincaré minimal basé sur la résolution des programmes linéaires.

4.6.1 Algorithme de maximisation du poids de Volevič

Définition 4.6.1 *(Poids de Volevič maximal) On considère le système* $[A, p]$. *Soit* V_A *son poids de Volevič et* T *une suite de Volevič associée. On dit que le système* $[A, p]$ *admet un* poids de Volevič maximal *si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

1. $V_A < p$ *et* $\mathring{A}$ *non nilpotente.*
2. $V_A \geq p$.

Algorithme 6 *Poids de Volevič maximal*

Entrée : Un système $[A, p]$.
Sortie : Un système équivalent $[\tilde{A}, p']$ de poids de Volevič maximal.

1: si $p = 0$, retourner $[A, p]$
2: si $p \geq 1$, on pose R la matrice de valuation de A.
3: On résout le programme linéaire (4.5.1). On obtient V_A.
4: Si $V_A \geq p$, retourner $[A, p]$.
5: Sinon, on applique la proposition 4.5.3 pour calculer une suite de Volevič $T = (t_1, \ldots, t_n)$ en utilisant le programme linéaire (4.5.3).
   a: Soit $\mathring{A}$ la matrice principale associée à V_A et T.
   b: Si $\mathring{A}$ n'est pas nilpotente, retourner $[A, p]$.
   c: Si $\mathring{A}$ est nilpotente, on applique la proposition 4.3.2 pour construire une transformation P telle que le poids de Volevič de la matrice $P[A]$ soit strictement supérieur à V_A. Soit $\tilde{p}$ le rang Poincaré du système de matrice $\tilde{A} := x^{-p-1}P[A]$. On fait un appel récursif sur le système $[x^{\tilde{p}+1}\tilde{A}, \tilde{p}]$.

L'algorithme termine en retournant un système de poids de Volevič maximal. On rappelle que le poids de Volevič d'un système $[A, p]$ vaut par définition le poids de Volevič de la matrice A quand A admet un terme constant non nul. À l'étape 5.c, le poids de Volevič pour la matrice obtenue $P[A]$ va toujours augmenter (Proposition 4.3.2). Il peut arriver deux cas

— Si la matrice $P[A]$ a un terme constant, alors on obtient un système $[\tilde{A}, p]$ avec un poids de Volevič $V_{\tilde{A}} > V_A$.

— Si la matrice $P[A]$ n'admet pas un terme constant, on obtient alors un système $[\tilde{A}, \tilde{p}]$ avec $\tilde{p} < p$. Le rang de Poincaré du système diminue de p à $\tilde{p}$.

Par conséquent, quand A_0 est nilpotent l'algorithme se termine soit quand $V_{\tilde{A}}$ dépasse p soit quand p se réduit à 0.

4.6.2 Classification des points singuliers

Définition 4.6.2 *(Système de première espèce au sens de Volevič) Le système* $[A, p]$ *est dit de* première espèce au sens de Volevič *si* $V_A \geq p$.

Nous notons que tout système de première espèce au sens usuel est de première espèce au sens de Volevič. Mais la réciproque n'est pas vraie. Cependant, tout système de première espèce au sens de Volevič est singulier régulier au sens usuel.

Proposition 4.6.3 *Tout système $[A, p]$ de première espèce au sens de Volevič est un système singulier régulier au sens usuel.*

Preuve. Soit V_A le poids de Volevič. On a $V_A \geq p$. D'après la proposition 4.5.5, il existe une transformation de shearing $S := \mathrm{diag}(x^{t_1}, \ldots, x^{t_n})$ construite à partir d'une suite de Volevič $(t_1, \ldots, t_n)$ associée à $p : r_{ij} - t_i + t_j \geq p$. Le système équivalent $\tilde{A} = S[A] := S^{-1}AS - x^{p+1}S^{-1}S$ est de première espèce au sens usuel car d'après la remarque 4.2.11, on a

$$\tilde{A} := \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{A}_k x^{p+k}$$

On en déduit que les coefficients de $\tilde{A}$ admettent une valuation supérieure ou égale à p. Par conséquent, $[x^{-p-1}\tilde{A}, 0]$ est un système de première espèce au sens usuel. ■

Définition 4.6.4 *(Singulier régulier au sens de Volevič) Le système $[A, p]$ est dit de* singulier régulier au sens de Volevič *s'il est équivalent à un système $\tilde{A}$ tel que $V_{\tilde{A}} \geq p$.*

Proposition 4.6.5 *Un système $[A, p]$ est singulier régulier au sens de Volevič si et seulement si c'est un système singulier régulier au sens usuel.*

Preuve. Si $[A, p]$ est singulier régulier au sens de Volevič, alors par définition il est équivalent à un système de première espèce au sens de Volevič. D'après la proposition 4.6.3, il est équivalent à un système de premier espèce au sens usuel. Par conséquent, il est singulier régulier au sens usuel. La réciproque est claire. ■

Nous allons définir maintenant la notion d'un système singulier irrégulier au sens de Volevič.

Définition 4.6.6 *(Singulier irrégulier au sens de Volevič) Le système $[A, p]$ est dit* singulier irrégulier au sens de Volevič *s'il n'est pas singulier régulier au sens de Volevič. Dans ce cas, le système est équivalent à un système qui admet un poids de Volevič maximal avec $V_A < p$ et $\mathring{A}$ est non nilpotente.*

4.6.3 Calcul du rang de Poincaré minimal

On considère un système $[A, p]$ de poids de Volevič V_A. Soit T une suite de Volevič et $\mathring{A}$ la matrice principale associée.

1. si $V_A \geq p$, il existe une transformation de shearing S telle que le rang de Poincaré minimal du système $[\frac{S[A]}{x^{p+1}}, p']$ est $p' = 0$ (Proposition 4.6.3).

2. si $V_A < p$ et $\mathring{A}$ est non nilpotente. On note e le plus grand entier inférieur ou égal à V_A. Il existe une transformation de shearing S telle que le rang de Poincaré du système $[\frac{x^{p'+1}S[A]}{x^{p+1}}, p']$ est $p' = p - e$. La matrice principale de son développement de Taylor est $A_0 = \mathring{A}$ et l'invariant de Katz κ vaut $p - e$ (Propositions 4.5.3 et 4.5.5).
3. si $V_A < p$ et $\mathring{A}$ est nilpotente. Dans ce cas l'invariant de Katz κ est tel que $\kappa < p - V_A$. Il existe une transformation de la forme (4.3.1) et des matrices de permutations qui donnent un système $[\tilde{A}, p']$ qui vérifie un des deux cas suivants :
   — $p' = p$ et $[\tilde{A}, p']$ admet un poids de Volevič strictement supérieur à V_A ;
   — $p' < p$ et le rang de Poincaré du nouveau système est strictement inférieur à p.

Nous déduisons un algorithme de calcul du rang de Poincaré minimal. Pour faciliter la présentation, nous donnons la forme générale du programme linéaire qui intervient dans les preuves des propositions 4.5.3, 4.5.4 et 4.5.5. Le programme suivant sera appliqué pour toute matrice de valuation R de taille n et $V \in \mathbb{Q}$. Il calcule une suite de Volevič qui vérifie $r_{ij} \geq t_i - t_i + V$.

NombresDeVolevič(R,V) :

1. On pose $K :=$ *dénominateur*(V) et $m :=$ *numérateur*(V).
2. On forme la matrice

$$\begin{cases} s_{ii} & = 0, \\ s_{ij} & = K(r_{ij} - V) \in \mathbb{Z} \quad \textit{pour} \quad i \neq j \end{cases}$$

3. On trouve une solution possible dans le domaine des contraintes du programme linéaire

$$\begin{aligned} \text{maximiser} \quad & 0 \\ \text{sous contraintes} \quad & s_i - s_j \leq s_{ij} \end{aligned}$$

4. On retourne $t_i := \frac{s_i}{K}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Nous noterons $S := x^T$ au lieu de $S := \text{diag}(x^{t_1}, \ldots, x^{t_n})$.

Algorithme 7 *Réduction du rang de Poincaré*

Entrée : Un système $[A, p]$.
Sortie : Un système équivalent $[\tilde{A}, p']$ de rang de Poincaré minimal.

1: Si $p < 1$, **retourner** $[A, p]$.
2: si $p \geq 1$, on pose R la matrice de valuation de A.
3: On résout le programme linéaire (4.5.1). On obtient le poids de Volevič V_A.
4: Si $V_A \geq p$, on calcule $T :=$**NombresDeVolevič**(R,p). **retourner** le nouveau système de première espèce au sens usuel $[x^{-p-1}S[A], 0]$ où $S := x^T$.
5: Si $V_A < p$, on calcule les nombres de Volevič $T :=$**NombresDeVolevič**(R,p). Soit $\mathring{A}$ la matrice principale associée.
a: Si $\mathring{A}$ n'est pas nilpotente. Soit e le plus petit entier supérieur à V_A. On calcule $T :=$**NombresDeVolevič**(V,e). **retourner** le nouveau système $[x^{-e}S[A], p-e]$ où $S := x^T$.
b: Si $\mathring{A}$ est nilpotente, on applique la proposition 4.3.2 pour construire une transformation P telle que le poids de Volevič de la matrice $P[A]$ soit strictement supérieur à V_A. Soit $\tilde{p}$ le rang Poincaré du système de matrice $\tilde{A} := x^{-p-1}P[A]$. On fait un appel récursif sur le système $[x^{\tilde{p}+1}\tilde{A}, \tilde{p}]$.

Exemple 4.6.7 *On considère le système* $x^{p+1}Y' = AY$ *avec* $p = 4$ *et*

$$A := \begin{bmatrix} -x^4 & 0 & x^8 \\ 0 & -3\,x^4 & 2\,x^6 \\ 1 & 0 & -6\,x^4 \end{bmatrix}.$$

Soit R *la matrice de valuations. On a*

$$R := \begin{bmatrix} 4 & \infty & 8 \\ \infty & 4 & 6 \\ 0 & \infty & 4 \end{bmatrix} \quad et \quad V_A := 4.$$

Le programme linéaire NombresDeVolevič(R,4) calcule des nombres de Volecič $T := (0, -2, -4)$. *La transformation de shearing* $S := x^T$ *donne un système équivalent de première espèce* $[B, 0]$ *avec*

$$B := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nous réduisons ainsi le rang de Poincaré de 5 *à* 0.

Exemple 4.6.8 *On considère le système* $[A, p]$ *avec* $p = 5$ *et*

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3\,x^3 \\ 1/4\,x^4 & 0 & 2\,x^7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit R *la matrice de valuations. On a*

$$R := \begin{bmatrix} \infty & \infty & 3 \\ 4 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \quad et \quad V_A := \infty,$$

Le programme linéaire NombresDeVolevič(R,5) calcule des nombres de Volecič $T := (-2, -3, 0)$. *La transformation de shearing* $S := x^T$ *donne un système équivalent de première espèce* $[B, 0]$ *avec*

$$B := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1/4 & 3 & 2\,x^5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous réduisons ainsi le rang de Poincaré de 5 *à* 0.

Exemple 4.6.9 *On considère le système* $[A, 50]$ *où*

$$A := \begin{bmatrix} -\frac{31\,x^{50}}{3} + x^{49} & \frac{x^{60}}{3} - \frac{x^{59}}{3} & \frac{x^{69}}{3} & -\frac{x^{78}}{3} & x^{87} & x^{100} - x^{97} \\ -x^{37} & -\frac{59\,x^{50}}{3} + x^{49} & 0 & \frac{x^{68}}{3} & 0 & x^{87} \\ -\frac{x^{28}}{3} & x^{40} + x^{37} & -\frac{89\,x^{50}}{3} + x^{49} & \frac{x^{58}}{3} & \frac{x^{68}}{3} & x^{77} \\ -\frac{x^{19}}{3} - x^{17} & x^{28} & 0 & -39\,x^{50} + x^{49} & x^{57} & \frac{x^{69}}{3} \\ -\frac{4x^{10}}{3} + \frac{x^9}{3} & \frac{x^{20}}{3} - x^{18} & \frac{x^{29}}{3} + x^{28} & x^{40} - \frac{x^{38}}{3} & -49\,x^{50} + x^{49} + x^{47} & x^{60} - x^{57} \\ -1 & \frac{x^{10}}{3} & \frac{x^{19}}{3} & -\frac{x^{28}}{3} + x^{27} & x^{37} & -\frac{175\,x^{50}}{3} + x^{49} - x^{47} \end{bmatrix}$$

Le poids de Volecič est $V_A := 47$ *et* $T := (0, -10, -20, -30, -40, -50)$ *une suite de Volevič.*

La matrice principale et la matrice des termes principaux associées sont

$$\mathring{A} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathring{A}(x) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x^{87} & -x^{97} \\ -x^{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & x^{87} \\ 0 & x^{37} & 0 & 0 & 0 & x^{77} \\ -x^{17} & 0 & 0 & 0 & x^{57} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^{47} & -x^{57} \\ 0 & 0 & 0 & x^{27} & x^{37} & -x^{47} \end{bmatrix}$$

est nilpotente. On construit la transformation

$$P(x) = \begin{bmatrix} x^{50} & x^{40} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -x^{40} & -x^{30} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x^{30} & -x^{20} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^{10} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}\mathring{A}(x)P = \begin{bmatrix} 0 & x^{37} & x^{27} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x^{37} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x^{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^{37} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x^{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On obtient un système équivalent $[\tilde{A}, 50]$ *qui admet un poids de Volevič* $V_{\tilde{A}} = \frac{142}{3}$*. Une suite de Volevič est* $T = (-51, -122/3, -91/3, -62/3, -31/3, 0)$*. La matrice principale associée est inversible. Par conséquent, l'invariant de Katz est* $\kappa = 51 - \frac{147}{2} - 1 = \frac{8}{3}$*. Pour obtenir le système de rang de Poincaré minimal, on considère le plus grand entier plus petit que* $\frac{142}{3}$ *: c'est 47. On a déjà trouvé une suite de Volevič* $T := (0, -10, -20, -30, -40, -50)$ *associée à* $V_A := 47$*. On applique la transformation de shearing* $S := x^T$ *au système* $[A, 50]$*. On obtient le système réduit* $[\tilde{A}, 3]$ *où*

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} -\frac{31\,x^3}{3} + x^2 & 1/3\,x^3 - 1/3\,x^2 & 1/3\,x^2 & -x/3 & 1 & x^3 - 1 \\ -1 & -\frac{29\,x^3}{3} + x^2 & 0 & x/3 & 0 & 1 \\ -x/3 & x^3 + 1 & -\frac{29\,x^3}{3} + x^2 & x/3 & x/3 & 1 \\ -1/3\,x^2 - 1 & x & 0 & -9\,x^3 + x^2 & 1 & 1/3\,x^2 \\ -4/3\,x^3 + 1/3\,x^2 & 1/3\,x^3 - x & 1/3\,x^2 + x & x^3 - x/3 & -9\,x^3 + x^2 + 1 & x^3 - 1 \\ -x^3 & 1/3\,x^3 & 1/3\,x^2 & -x/3 + 1 & 1 & -\frac{25\,x^3}{3} + x^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Nous réduisons ainsi le rang de Poincaré de 50 *à* 3*.*

4.7 Minimisation des extensions algébriques

Dans cette section, nous adaptons la méthode de minimisation des extensions algébriques présentée dans [7] dans la procédure de réduction du système $[A, p]$. La situation est légèrement différente puisque qu'on travaille avec un T-développement. On considère le cas où le poids de Volevič est fractionnel $V = \frac{m}{K}$ avec p.g.c.d$(m, K) = 1$ et la matrice principale du T-développement admet n valeurs propres non nulles où n est la dimension du système. Cela veut dire que le système admet n parties exponentielles dont leur terme principal est dans $\mathcal{C}[x^{-\frac{1}{K}}]$. En effet, c'est le seul cas dans l'algorithme où on va ramifier le système. On pose $T := \{\frac{s_1}{K}, \ldots, \frac{s_n}{K}\}$. En adaptant les mêmes idées que dans [7] voir Chapitre 1, Section 1.7.2.3, on a les étapes suivantes :

1. On ramifie le système par $x = ct^K$ avec c une indéterminée à trouver. On pose $[A, Kp]$ le nouveau système obtenu où $A := c^{-p}KA(ct^K)$.
2. On pose $K := \text{numer}(V)$ et $T := (s_1, \ldots, s_n)$.
3. On applique la transformation de shearing $S[A]$ avec $S := x^T = \text{diag}(x^{s_1}, \ldots, x^{s_n})$. On pose $A = x^{-m}S[A]$ et on considère le nouveau système $[A, pK - m]$. On note A_0 la matrice principale du développement de Taylor de A et $\chi_{A_0}(c, \lambda)$ son polynôme caractéristique.
4. L'invariant de Katz $\kappa := p - \frac{m}{K}$. On pose $\kappa := \frac{\tilde{m}}{K}$ avec p.g.c.d$(\tilde{m}, K) = 1$.
5. On calcule les entiers u et v tel que $u\tilde{m} + vK = 1$.
6. On remplace c par 1 et λ par$K\lambda$ dans $\chi_{A_0}(c, \lambda)$ pour obtenir son polynôme de Newton P_κ.
7. On remplace λ par $\lambda^{\frac{1}{K}}$ dans P_κ pour obtenir son polynôme de Newton réduit R_κ.
8. Pour toute racine b de R_κ :
   (a) On pose $c = b^u$.
   (b) On remplace c dans A. On applique le lemme de découplage pour $[A - Kb^v\text{I}_n, pK - m]$ afin de décomposer en deux sous-systèmes $[A_1, pK - m] \oplus [A_2, pK - m]$ où A_2 qui admet une matrice principale nilpotente.
   (c) On fait un appel récursif de l'algorithme de réduction sur $[A_2, pK - m]$.

Exemple 4.7.1 *(voir Appendice A) On considère le système* $x^{p+1}Y' = AY$ *avec* $p := 3$

et

$$A := \begin{bmatrix} x^2 - \frac{1}{3}x^3 & -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 & \frac{1}{3}x^2 & -\frac{x}{3} & 1 & x^3 - 1 \\ -1 & x^2 + \frac{1}{3}x^3 & 0 & \frac{x}{3} & 0 & 1 \\ -\frac{x}{3} & x^3 + 1 & x^2 + \frac{1}{3}x^3 & \frac{x}{3} & \frac{x}{3} & 1 \\ -1 - \frac{1}{3}x^2 & x & 0 & x^3 + x^2 & 1 & \frac{1}{3}x^2 \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x^3 & -x + \frac{1}{3}x^3 & x + \frac{1}{3}x^2 & -\frac{x}{3} + x^3 & x^3 + x^2 + 1 & x^3 - 1 \\ -x^3 & \frac{1}{3}x^3 & \frac{1}{3}x^2 & 1 - \frac{x}{3} & 1 & -1 + x^2 + \frac{5}{3}x^3 \end{bmatrix}.$$

L'application de la ramification $x = 27t^6$ *donne les parties exponentielles*

$$[x = 27\,t^6, \frac{1}{177147\,x^{22}} + \frac{1}{6561\,x^{15}} + \frac{1}{6561\,x^{14}} + \frac{1}{729\,x^{12}} - \frac{5}{324\,x^6}],$$

alors que l'application de la ramification $x = t^6$ *fait intervenir des calculs dans* $\mathbb{Q}[RootOf\left(5184_Z^2 + 144_Z - 62207\right), RootOf\left(_Z^2 + 3_Z + 9\right)]$ *:*

$$[x = t^6, \frac{1}{x^{22}} + \frac{RootOf\left(5184_Z^2 + 144_Z - 62207\right)}{6x^{15}} + \frac{1}{432\,x^{15}} + \frac{1}{3x^{14}} + \frac{1}{x^{12}} - \frac{5}{12\,x^6}],$$

$$[x = t^6, -1/3\,\frac{RootOf\left(_Z^2 + 3_Z + 9\right)}{x^{22}} - \frac{1}{x^{22}} + \frac{RootOf\left(5184_Z^2 + 144_Z - 62207\right)}{6x^{15}} + \frac{1}{432\,x^{15}} + \frac{RootOf\left(_Z^2 + 3_Z + 9\right)}{9x^{14}} + \frac{1}{x^{12}} - \frac{5}{12\,x^6}].$$

Exemple 4.7.2 *L'exemple suivant montre que l'introduction d'une ramification* $x = ct^r$ *trop tôt, peut faire apparaitre des extensions algébriques qui pourraient être évitées.*
On considère le système $x^{p+1}Y' = AY$ *où* $p := 7$ *et*

$$A := \begin{bmatrix} 4\,x^3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -x^6 - 5\,x^4 & 0 & 0 \\ -5\,x^4 & -9\,x^5 & 6\,x^2 & 1 - 6\,x & -2\,x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10\,x^2 & -x^6 - 5\,x^5 + x^4 & -2\,x^3 & 10\,x & 0 & 6\,x^5 \\ 0 & 0 & 2\,x^6 & -x^2 & 0 & 0 & -8\,x^3 & -5\,x^4 \\ -7\,x^3 & -3\,x^4 & 0 & -4\,x^4 - 6\,x^2 & 0 & -6\,x^3 & 0 & 8\,x \\ -x^6 - 9\,x^5 + 1 & 0 & 0 & 6\,x^6 & -10\,x^4 & 8\,x^3 + 1 & 0 & -x^6 + 8\,x^3 \\ 2\,x^6 & 0 & 0 & x^3 + 1 & 0 & 7\,x^4 & 0 & -8\,x^2 \\ -5\,x^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6\,x^4 + 10\,x^2 & 0 & 3\,x^4 - 10\,x \end{bmatrix}.$$

L'application de l'algorithme de Barkatou [7] donne les parties exponentielles

$$[x=-10t^2,\quad \frac{1}{1000000\,x^{13}}-\frac{1}{200000\,x^{12}}+\frac{131}{2000000\,x^{11}}-\frac{19}{20000\,x^{10}}+\frac{143239}{8000000\,x^9}-\frac{69539}{200000\,x^8}+\frac{113459131}{16000000\,x^7}-\frac{466768}{3125\,x^6}+\frac{82655665103}{25600000\,x^5}-\frac{3560584523}{50000\,x^4}+\frac{408609419976357}{256000000\,x^3}-\frac{1812600804291}{50000\,x^2}] \quad (4.7.1)$$

$$[x=t^2,\quad -\frac{10}{x^{12}}+\frac{4}{25\,x^{10}}-\frac{17311}{12500\,x^8}+\frac{687971}{3125000\,x^6}+\frac{12315211171}{78125000\,x^4}-\frac{844534363492397}{390625000000\,x^2}] \quad (4.7.2)$$

$$[x=t^2,\quad 1/2\,\frac{RootOf\left(_Z^2+32\right)}{x^{11}}-\frac{1}{6x^{10}}-\frac{29\,RootOf\left(_Z^2+32\right)}{864\,x^9}-\frac{66137}{31104\,x^8}+\frac{8799649\,RootOf\left(_Z^2+32\right)}{89579520\,x^7}+\frac{556575917}{806215680\,x^6}+\frac{27825936553\,RootOf\left(_Z^2+32\right)}{154793410560\,x^5}-\frac{2519093693257}{3482851737600\,x^4}+\frac{9706680792390541\,RootOf\left(_Z^2+32\right)}{8024490403430400\,x^3}-\frac{59329162490453969}{108330620446310400\,x^2}] \quad (4.7.3)$$

$$[x=t^2,\quad 1/2\,\frac{RootOf\left(5_Z^2-32\right)}{x^{11}}-\frac{31}{75\,x^{10}}+\frac{21137\,RootOf\left(5_Z^2-32\right)}{86400\,x^9}+\frac{171923293}{97200000\,x^8}-\frac{254308345693\,RootOf\left(5_Z^2-32\right)}{559872000000\,x^7}-\frac{161270312110441}{62985600000000\,x^6}+\frac{59660172017758747\,RootOf\left(5_Z^2-32\right)}{120932352000000000\,x^5}-\frac{12990039338482186199}{1360488960000000000\,x^4}+\frac{1421410099469277912836123\,RootOf\left(5_Z^2-32\right)}{3134566563840000000000000\,x^3}-\frac{23952670363305410391926 4991}{2644790538240000000000000000\,x^2}] \quad (4.7.4)$$

$$[x=t,\quad \frac{1}{x^7}+\frac{10}{x^6}-\frac{200}{x^5}+\frac{6968}{x^4}-\frac{298725}{x^3}+\frac{14242192}{x^2}-\frac{725038151}{x}] \quad (4.7.5)$$

L'application de l'algorithme de Miyake présenté dans ce chapitre donne les parties exponentielles

$$[x=-10t^2,\quad \frac{1}{1000000\,x^{13}}-\frac{1}{200000\,x^{12}}+\frac{131}{2000000\,x^{11}}-\frac{19}{20000\,x^{10}}+\frac{143239}{8000000\,x^9}-\frac{69539}{200000\,x^8}+\frac{113459131}{16000000\,x^7}-\frac{466768}{3125\,x^6}+\frac{82655665103}{25600000\,x^5}-\frac{3560584523}{50000\,x^4}+\frac{408609419976357}{256000000\,x^3}-\frac{1812600804291}{50000\,x^2}] \quad (4.7.6)$$

$$[x=t,\quad -\frac{10}{x^6}+\frac{4}{25\,x^5}-\frac{17311}{12500\,x^4}+\frac{687971}{3125000\,x^3}+\frac{12315211171}{78125000\,x^2}-\frac{844143738492397}{390625000000\,x}] \quad (4.7.7)$$

$$[x=\frac{8}{5}t^2,\quad \frac{3125}{32768\,x^{11}}-\frac{3875}{98304\,x^{10}}+\frac{528425}{7077888\,x^9}+\frac{171923293}{637009920\,x^8}-\frac{254308345693}{1146617856000\,x^7}-\frac{161270312110441}{257989017600000\,x^6}+\frac{59660172017758747}{154793410560000000\,x^5}-\frac{1299003933848218 6199}{3482851737600000000\,x^4}+\frac{1421410099469277912836123}{250765325107200000000000\,x^3}+\frac{92050439128251745896080735009}{42316648611840000000000000\,x^2}] \quad (4.7.8)$$

$$[x=-8t^2,\quad -\frac{1}{32768\,x^{11}}+\frac{1}{196608\,x^{10}}-\frac{29}{1769472\,x^9}-\frac{66137}{127401984\,x^8}-\frac{8799649}{22932357120\,x^7}-\frac{556575917}{412782428160\,x^6}+\frac{27825936553}{4953389137920\,x^5}-\frac{2519093693257}{222902511206400\,x^4}-\frac{9706680792390541}{32097961613721600\,x^3}+\frac{378079029209890594769}{866644963570483200\,x^2}] \quad (4.7.9)$$

$$[x=t,\quad \frac{1}{x^7}+\frac{10}{x^6}-\frac{200}{x^5}+\frac{6968}{x^4}-\frac{298725}{x^3}+\frac{14242192}{x^2}-\frac{725038149}{x}] \quad (4.7.10)$$

Ce sont les mêmes parties exponentielles paramétrisées dans des extensions algébriques différentes : l'application de l'algorithme de Barkatou ([7]) impose une ramification $x = t^2$ à la partie exponentielle non ramifiée ((4.7.2) *ou* (4.7.7)*). Par contre, la réduction de Miyake utilise la ramification nécessaire la plus petite. Cela grâce à l'utilisation du T-développement (Définition 4.2.6) et du lemme de découplage associé (Lemme 4.3.5 qui permet de séparer toujours la partie du système ramifiée à celle nilpotente).*

Appendices

Appendice A : La procédure de réduction dans Maple

Nous avons implémenté notre version de l'algorithme de Miyake présenté dans ce chapitre sous forme d'une librairie pour le logiciel de calcul formel Maple. Nous détaillons les fonctionnalités de la librairie dans le chapitre 5. Dans cet appendice nous présentons un exemple d'utilisation de la procédure de calcul des parties exponentielles (Exemple 4.7.1).

On considère le système $x^{p+1}Y' = AY$ de dimension 6 et de rang de Poincaré $p = 3$ avec,

$$A := \begin{bmatrix} x^2 - \frac{1}{3}x^3 & -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 & \frac{1}{3}x^2 & -\frac{x}{3} & 1 & x^3 - 1 \\ -1 & x^2 + \frac{1}{3}x^3 & 0 & \frac{x}{3} & 0 & 1 \\ -\frac{x}{3} & x^3 + 1 & x^2 + \frac{1}{3}x^3 & \frac{x}{3} & \frac{x}{3} & 1 \\ -1 - \frac{1}{3}x^2 & x & 0 & x^3 + x^2 & 1 & \frac{1}{3}x^2 \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x^3 & -x + \frac{1}{3}x^3 & x + \frac{1}{3}x^2 & -\frac{x}{3} + x^3 & x^3 + x^2 + 1 & x^3 - 1 \\ -x^3 & \frac{1}{3}x^3 & \frac{1}{3}x^2 & 1 - \frac{x}{3} & 1 & -1 + x^2 + \frac{5}{3}x^3 \end{bmatrix}$$

La procédure MiyakeReduction calcule les parties exponentielles du système :

```
>ReductionWithLP(A, p,  x, t);
ReductionWithLP: a call of the algorithm
ReductionWithLP:  Compute Volevic time:  0.13e-1
ReductionWithLP:  Volevic is 0
ReductionWithLP: Compute Volevic numbers time:  0.15e-1
ReductionWithLP: Volevic Numbers are [0 0 0 0 0 0]
ReductionWithLP: case 2: det=0 and A0 is nilpotente.
V not fractional. We compute a block triangular form for A0
ReductionWithLP: a call of the algorithm
ReductionWithLP:  Compute Volevic time:  0.2e-2
ReductionWithLP:  Volevic is 1/3
Ramified_Case:  Volevic is fractional 1/3
Ramified_Case: Computing Volevic numbers timetime: 0.44e-1
Ramified_Case: Volevic Numbers [0 1/3 1/3 2/3 2/3 1]
Ramified_Case: all eigenvalues are different from 0
[1 -1/2-((1/2)*I)*3^(1/2) -1/2+((1/2)*I)*3^(1/2)
1 -1/2-((1/2)*I)*3^(1/2) -1/2+((1/2)*I)*3^(1/2)]
Ramified_Case: We ramified with c*x^3
Ramified_Case: Volevic after ramification 1
```

```
Ramified_Case: Compute Volevic numbers time:  0.52e-1
Ramified_Case: Computing Volevic Numbers [0 1 1 2 2 3]
Ramified_Case: We flat the developpement
Ramified_Case: Smart ramification x^3
ReductionWithLP: a call of the algorithm
ReductionWithLP:  Compute Volevic time:  0.1e-2
ReductionWithLP:  Volevic is 7/2
Ramified_Case:  Volevic is fractional 7/2
Ramified_Case: Computing Volevic numbers timetime: 0.13e-1
Ramified_Case: Volevic Numbers [-7/2 0]
Ramified_Case: all eigenvalues are different from 0
 [3^(1/2) -3^(1/2)]
Ramified_Case: We ramified with c*x^2
Ramified_Case: Volevic after ramification 7
Ramified_Case: Compute Volevic numbers time:  0.7e-2
Ramified_Case: Computing Volevic Numbers [0 7]
Ramified_Case: We flat the developpement
Ramified_Case: Smart ramification 27*x^2
ReductionWithLP: a call of the algorithm
ReductionWithLP: we get an exponential part
```

$$[x = 27\,t^6, \frac{1}{177147\,x^{22}} + \frac{1}{6561\,x^{15}} + \frac{1}{6561\,x^{14}} + \frac{1}{729\,x^{12}} - \frac{5}{324\,x^6}]$$

Appendice B : La méthode hongroise ou algorithme de Kuhn-Munkres

Dans cet appendice nous rappelons l'algorithme hongrois [43] (ou l'algorithme de Kuhn-Munkres) pour le problème d'affectation. Nous avons implémenté cet algorithme sous forme de librairie dans le logiciel de calcul formel de Maple.

Étant donnée une matrice de coûts $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (l'algorithme résout le cas ou $R \in \mathbb{R}^{n\times m}$), où l'élément de la i-ème ligne et de la j-ème colonne représente le coût de l'attribution du i-ème travail au j-ème travailleur, le problème de l'affectation est de trouver une affectation des emplois aux travailleurs pour un coût minimal. La complexité de l'algorithme de Kuhn-Munkres est $\mathcal{O}(n^3)$ ([56, 71]).

La méthode de calcul

Nous nous intéressons uniquement au cas d'une matrice carrée. Les principales étapes de la méthode hongroise se résument comme suit :

1. Trouver le nombre minimal $\min_i$ sur chaque ligne i et le soustraire de toute la ligne i pour faire apparaitre des 0. Cette opération ne change rien à notre problème ; chaque chemin choisi est diminué de la somme $\sum min_i$. Donc on obtient une matrice équivalente à celle de départ, au sens où on obtient la même affectation minimale pour les deux matrices de coûts.
2. Trouver le nombre minimal $\min_j$ sur chaque colonne j et le soustraire de toute la colonne j pour faire apparaitre des 0. Cette opération ne change toujours rien à notre problème ; chaque chemin choisi, est diminué de la somme $\sum min_j$.
3. Trouver k le nombre minimal de lignes et de colonnes qui couvrent tous les 0.
   (a) Si k est égal à la dimension de la matrice, alors on a trouvé le chemin minimal. Aller à l'étape 4.
   (b) Sinon, trouver la valeur minimale a_{ij} parmi les valeurs non couvertes, la soustraire aux autres et l'ajouter à l'intersection d'une ligne et une colonne couverte (aux éléments couverts deux fois). Revenir à l'étape 3. Cette opération ne change rien à notre problème ; chaque chemin choisi, est diminué de $(n-k)a_{ij}$.
4. Choisir un seul 0 de chaque ligne i_0 et colonne j_0. Un zéro choisi ne doit pas appartenir à une ligne ou colonne choisi précédemment.

Exemple A.3 *On cherche à trouver une affectation à coût minimal de la matrice de coût suivante :*

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 7 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Étape 1 : Trouver le coût minimal sur chaque ligne i et le soustraire de toute la ligne i :

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 8 & \boxed{3} \\ \boxed{1} & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 7 & \boxed{1} \\ 5 & 5 & 5 & \boxed{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Étape 2 : On fait pareil sur les colonnes :

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 5 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & \boxed{3} & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Étape 3 : On couvre les zéros

$$\left[\begin{array}{cccc} 5 & 2 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{5} \\ 3 & 8 & 3 & 0 \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

Le nombre minimal de lignes et colonnes qui couvrent les 0 est $k = 3$. On va à l'étape 3b :

$$\left[\begin{array}{cccc} 5 & \boxed{2} & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{5} \\ 3 & 8 & 3 & 0 \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc} 3 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{7} \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{2} \end{array}\right] \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

On va à l'étape 3 :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{7} \\ \cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{2} \end{bmatrix}$$

Le nombre minimal de lignes et colonnes qui couvrent les 0 est $k = 4$. On va à l'étape 4. Chaque 0 nous donne un choix possible d'une ligne et colonne. Le mieux est de commencer par choisir parmi les lignes ou colonnes qui ont le moins de choix possible, ça veut dire

les lignes ou colonnes qui ont le moins de 0. On trouve le chemin à partir des zéros :

$$\begin{bmatrix} 3 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & 1 & \boxed{0} \\ 3 & 3 & \boxed{0} & 2 \end{bmatrix}$$

Donc, dans la matrice de coût

$$\begin{bmatrix} 8 & \boxed{5} & 8 & 3 \\ \boxed{1} & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 7 & \boxed{1} \\ 5 & 5 & \boxed{5} & 2 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, le cout minimal est $5 + 1 + 1 + 5 = 12$.

Implémentation et une session d'exemple

La manipulation manuelle pour trouver les zéros, couvrir ou découvrir des lignes et colonnes est présentée algorithmiquement dans le papier original « Algorithms for Assignment and Transportation Problems » de Munkres [56]. Dans [71], Wong donne une analyse de complexité de la méthode de Munkres. Il s'avère que la complexité de l'algorithme est en $\mathcal{O}(n^4)$. Il propose une implémentation plus efficace qui se fait en $\mathcal{O}(n^3)$. Nous avons implémenté l'algorithme de Munkres sous forme d'une procédure dans Maple. Dans cette section, nous expliquons comment utiliser la procédure pour résoudre le problème d'affectation optimale. On considère l'exemple suivant

$$A := \begin{bmatrix} 25 & 81 & 99 & 78 & 68 & 50 & 4 & 33 & 7 \\ 22 & 86 & 39 & 3 & 13 & 58 & 26 & 31 & 93 \\ 17 & 16 & 56 & 83 & 50 & 11 & 15 & 1 & 77 \\ 97 & 12 & 82 & 97 & 29 & 74 & 69 & 21 & 86 \\ 31 & 26 & 69 & 53 & 66 & 8 & 27 & 25 & 19 \\ 29 & 69 & 10 & 29 & 9 & 72 & 45 & 52 & 37 \\ 5 & 86 & 7 & 72 & 83 & 15 & 62 & 88 & 41 \\ 22 & 96 & 21 & 23 & 25 & 2 & 14 & 36 & 97 \\ 14 & 35 & 17 & 78 & 76 & 81 & 16 & 53 & 57 \end{bmatrix}$$

La procédure MinimalPathWithHungarian prend en paramètre la matrice A :

$$> \text{MinimalPathWithHungarian}(A)$$

Cette procédure donne en sortie la matrice :

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où les positions de 1 donnent le chemin de coût minimal. La procédure LengthOfMinimalPath prend en paramètre la matrice A et celle obtenue par la précédente procédure pour donner la somme du chemin trouvé.

$$> \text{HungarianMethod}(A, M)$$

Chapitre 5 :

Implémentation et performance

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la description des fonctions et librairies Maple développées pour les différents algorithmes présentés dans cette thèse sur la réduction des systèmes différentiels de la forme $x^{p+1}Y' = AY$ avec $A(x) := A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots$ et p un entier positif.
L'organisation est la suivante : nous commençons par l'implémentation de l'algorithme de réduction du rang de Poincaré présenté dans Chapitre 4 (Section 4.6). Nous comparons cette réduction avec celle de Moser (voir Chapitre 1, Section 1.4). Puis, nous présentons la librairie pour le calcul des parties exponentielles avec l'algorithme de Miyake présenté dans Chapitre 4. Nous donnons une comparaison et une analyse de profilage avec l'algorithme présenté dans [7]. Enfin, nous présentons la librairie pour le calcul des parties exponentielles qui utilise la décomposition via l'eigenring et qui est développé dans le chapitre 3.

5.2 Réduction du rang de Poincaré via des programmes linéaires

Dans cette section nous présentons une description des fonctions pour calculer un système équivalent de rang de Poincaré minimal avec l'algorithme 4.6 du Chapitre 4.

5.2.1 Calcul du poids et des nombres de Volevič

Calcul du poids de Volevič La fonction *MinimalNormalizedPath* donne le chemin de longueur normalisée minimale $\frac{r_{i_1i_2}+r_{i_2i_3}+\dots r_{i_ki_1}}{k}$ dans une matrice $R := (r_{ij})$. Le résultat se présente sous la forme d'une matrice $M = (m_{ij})$, où le coefficient m_{ij} représente le poids ou la probabilité que r_{ij} soit dans ce cycle de taille minimale. Cette procédure utilise la fonction *minimize* de la librairie *simplex* dans Maple, pour résoudre le programme linéaire (4.4.5) de la proposition 4.4.3.
On considère l'exemple $x^{p+1}Y' = AY$ avec $p = 4$ et

$$A := \begin{bmatrix} 3\,x^6 + 4\,x^3 - 3\,x^2 & 4\,x^4 + 5\,x^3 - 3\,x^2 - x & -1 \\ -4\,x^3 + 3\,x^2 & -4\,x^4 - 5\,x^3 + 3\,x^2 + x & -5\,x^7 + 3\,x^6 + 1 \\ -3\,x^7 - 4\,x^6 + 5\,x^4 - 3\,x^3 & 3\,x^6 + 3\,x^5 + 7\,x^4 - 3\,x^3 - x^2 & 8\,x^5 + x^3 - x \end{bmatrix}.$$

La matrice de valuation est

```
>R := map(ldegree, A, x);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

On calcule le chemin de longueur normalisée minimale

```
>M := MinimalNormalizedPath(R);
```

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La fonction *MinimalNormalizedPathLength* prend en paramètres la matrice R et M le résultat de la procédure *MinimalNormalizedPath*, pour donner la longueur normalisée minimale des permutations dans $R : \sum_{i,j} r_{ij} m_{ij}$.

```
>V := MinimalNormalizedPathLength(R, M);
```

$$V := 1$$

Calcul des nombres de Volevič Nous utilisons la fonction *maximize* ou bien *minimize* de la librairie *simplex* pour résoudre le programme linéaire (4.5.3) de la proposition 4.5.3.

```
>T := VolevicNumbers(R, V);
```

$$T := [-1, -1, 0]$$

5.2.2 Calcul d'une forme échelonnée de la matrice des termes principaux

La procédure *PrincipalMatrix* donne la matrice principale du T-développement (Définition 4.2.6). Elle prend en paramètres la matrice A, la variable x, les nombres de Volevič T et le poids de Volevič V.

```
>A0 := PrincipalMatrix(A, x, T, V);
```

$$A0 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

La procédure *PrincipalMatrixFunction* donne la matrice des termes principaux du T-développement (Définition 4.2.6). Elle prend en paramètres la matrice principale $A0$, la variable x, les nombres de Volevič s et le poids de Volevič V.

```
>A0x := PrincipalMatrixFunction(A0, x, T, V);
```

$$A0x := \begin{bmatrix} 0 & -x & -1 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & -x^2 & -x \end{bmatrix}$$

La procédure *EchelonizeThePrincipalMatrixFunction* calcule une transformation dont les coefficients sont des polynômes qui réalisent une forme triangulaire supérieure de la matrice des termes principaux $A0x$ (Proposition 4.3.4).

```
>P,NewA0,NewA0x,Px:=EchelonizeThePrincipalMatrixFunction(A, p, A0, A0x, s);
EchelonizeThePrincipalMatrixFunction: The old A0 and A0x
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -x & -1 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & -x^2 & -x \end{bmatrix}$$

```
EchelonizeThePrincipalMatrixFunction: The new A0 and the transformation :
```

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
EchelonizeThePrincipalMatrixFunction: The new A0x and the transformation :
```

$$\begin{bmatrix} -x & -x & -1 \\ x & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
EchelonizeThePrincipalMatrixFunction: The old A0 and A0x
```

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -x & -x & -1 \\ x & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
EchelonizeThePrincipalMatrixFunction: The new A0 and the transformation :
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
EchelonizeThePrincipalMatrixFunction: The new A0x and the transformation :
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -x & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P, NewA0, NewA0x, P_x := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -x & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La procédure construit la transformation

$$P_x := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

telle que

$${P_x}^{-1} A0x P_x := \begin{bmatrix} 0 & -x & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.2.3 Réduction du rang de Poincaré

La procédure *RankReductionLP* prend en paramètres la matrice A, $p+1$ où p est le rang de Poincaré et la variable x. Elle utilise les fonctions précédentes pour calculer un système équivalent de rang de Poincaré minimal (Algorithme 7).

```
>A,q:=RankReductionLP(A, 5, x);
RankReductionLP: Call of the algorithm
RankReductionLP: Volevic weight and numbers : 1 [-1 -1 0]
RankReductionLP: Preparation of A0x
RankReductionLP: Call of the algorithm
RankReductionLP: Volevic weight and numbers : 3 [-3 0 0]
RankReductionLP: Preparation of A0x
RankReductionLP: Call of the algorithm
RankReductionLP: Volevic weight and numbers : 10/3 [-2/3 -10/3 0]
RankReductionLP: Singular irregular. Katz: 2/3 .6666666667
```

$$A, q := \begin{bmatrix} 0 & 5\,x^4 - 3\,x^3 - 5\,x^2 + 3\,x + 3 & -5\,x^4 + 3\,x^3 \\ 4\,x^4 + 5\,x^3 - 3\,x^2 - x & 3\,x^3 - x & -1 \\ 4\,x^4 + 8\,x^3 - 4\,x^2 + x & 3\,x^3 - 8\,x^2 - 7\,x & 8\,x^2 \end{bmatrix}, 2$$

La procédure construit un système équivalent de rang de Poincaré $p = q - 1 = 1$.

5.2.4 Comparaison pratique avec la réduction de Moser

On considère l'exemple $x^{51}Y' = AY$ où

$$A := \begin{bmatrix} x^{49} - \frac{31}{3}x^{50} & -\frac{1}{3}\,x^{59} + \frac{1}{3}\,x^{60} & \frac{1}{3}x^{69} & -\frac{1}{3}x^{78} & x^{87} & x^{100} - x^{97} \\ -x^{37} & x^{49} - \frac{59}{3}x^{50} & 0 & \frac{1}{3}x^{68} & 0 & x^{87} \\ -\frac{1}{3}\,x^{28} & x^{40} + x^{37} & x^{49} - \frac{89}{3}x^{50} & \frac{1}{3}x^{58} & \frac{1}{3}x^{68} & x^{77} \\ -x^{17} - \frac{1}{3}x^{19} & x^{28} & 0 & -39\,x^{50} + x^{49} & x^{57} & \frac{1}{3}\,x^{69} \\ \frac{1}{3}\,x^{9} - \frac{4}{3}\,x^{10} & -x^{18} + \frac{1}{3}\,x^{20} & x^{28} + \frac{1}{3}\,x^{29} & -\frac{1}{3}x^{38} + x^{40} & -49\,x^{50} + x^{49} + x^{47} & x^{60} - x^{57} \\ -1 & \frac{1}{3}\,x^{10} & \frac{1}{3}\,x^{19} & x^{27} - \frac{1}{3}x^{28} & x^{37} & -x^{47} + x^{49} - \frac{175}{3}x^{50} \end{bmatrix}.$$

Le rang de Poincaré minimal de ce système est 3. Nous remarquons que la réduction de Moser [15] implémentée dans la librairie DEtools de Maple augmente la taille des coefficients de 3 chiffres jusqu'à 341 (en calculant les $np := 6 \times 50$ premiers termes du nouveau système). Voici par exemple un coefficient dans le système obtenu

```
-219869232988934322755440105445303722142787857994000280 66
783713813995932023587888361525478267148722481619874804379
579x/52806340017167771316154636122536355326894897489687736
69843700393685983560155281705809715361008345146956388207804
```

D'autre part, la réduction de rang basé sur le calcul des transformations de shearing à l'aide des programmes linéaires (Chapitre 4, Algorithme 7), calcule la transformation

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^{-30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-40} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^{-50} \end{bmatrix}$$

qui réduit le rang de Poincaré de 50 à 3 et donne le système équivalent $x^4Y' = BY$ où

$$B := \begin{bmatrix} -\frac{29\,x^3}{3} + \frac{2x^2}{3} & \frac{-4x^3}{3} - \frac{x^2}{3} + 1 & \frac{-x}{3} + 1 & \frac{x^2}{3} & \frac{x^3}{3} & -x^3 \\ \frac{x^2}{3} & -\frac{28\,x^3}{3} + \frac{4x^2}{3} & x^3 - 1 & x & -x & -1/3\,x^3 + 1/3\,x^2 \\ -x & \frac{-x^2}{3} - x & -9\,x^3 + x^2 & 0 & x & -1/3\,x^2 - 1 \\ -x^3 & -2\,x^3 & x^3 & -\frac{29\,x^3}{3} + \frac{4x^2}{3} + x & \frac{4x^3}{3} + 1 - x & \frac{-x}{3} - \frac{4x^3}{3} + 1/3\,x^2 \\ 0 & -x^3 & x^3 & \frac{x^2}{3} + x & -\frac{28\,x^3}{3} + x^2 - x & -1 - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{3} \\ 0 & 0 & -x^3 & -x & \frac{-x^2}{3} + x & -9\,x^3 + \frac{2x^2}{3} \end{bmatrix}.$$

Nos expérimentations montrent que l'Algorithme 7 du Chapitre 4 semble obtenir en pratique des résultats avec des coefficients de taille plus petite. Cette augmentation de taille des coefficients dans l'application de l'algorithme de Moser provient de l'application de l'élimination de Gauss. En effet, l'algorithme de Moser [15], à chaque étape construit une transformation qui réduit le rang de Poincaré de 1. Dans le pire des cas, cette étape fait appel $n-1$ fois à l'élimination de Gauss. D'autre part, si le système est régulier, on a besoin de réduire le rang de Poincaré de p à 0. Par conséquent, l'algorithme de Moser fait appel au pire à $p(n-1)$ fois à l'élimination de Gauss. On rappelle que théoriquement l'ordre de grandeur des coefficients pour l'élimination de Gauss est 2^{n-1}. De même, l'algorithme de réduction de rang de Poincaré en utilisant des programmes linéaires fait appel $p(n-1)$ fois à l'élimination de Gauss avec la fonction *EchelonizeThePrincipalMatrixFunction*. Toutefois, nous remarquons en pratique que les transformations construites à chaque étape font diminuer le rang de Poincaré « rapidement ». Ainsi, l'application de l'élimination de Gauss est moins importante que dans l'algorithme de Moser. Mais la complexité théorique sur la taille des coefficients reste la même.

5.3 Calcul des parties exponentielles avec l'algorithme de Miyake

5.3.1 Introduction

Nous présentons dans cette section la libraire Maple pour le calcul des parties exponentielles d'un système différentiel linéaire en utilisant notre version de l'algorithme de Miyake présenté dans Chapitre 4 et qui utilise la fonction de réduction du rang de Poincaré de la section précédente.

5.3.2 Le T-développement

La fonction *TExpansion* prend en paramètres la matrice A, le poids de Volevič V, les nombres de Volevič T multipliés par K où K est le dénominateur de V et une precision k. La sortie est l'ensemble des $k+1$ premiers termes du T-développement par rapport à V et T (voir Définition 4.2.6). On considère le système $x^{p+1}Y' = AY$ avec $p = 4$ et

$$A := \begin{bmatrix} x & x^4 & x^3 \\ x^5 & x^3 & x^6 + x \\ 0 & x^2 + 1 & x^5 + x^3 \end{bmatrix}$$

```
>R := map(ldegree, A, x)
```

$$R := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ \infty & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
>M := MinimalNormalizedPath(R)
```

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>V := MinimalNormalizedPathLength(R, M)
```

$$V := \frac{1}{2}$$

```
>T := VolevicNumbers(R, V)
```

$$T := [0, 0, \frac{-1}{2}]$$

```
>LIST := TExpansion(A, [0, 0, -1], V, 10)
```

$$LIST := \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right],$$
$$\left[\begin{matrix} 0 & 0 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^3 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 0 & x^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right],$$
$$\left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ x^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^5 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^6 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right].$$

5.3.3 Découplage par rapport au T-développement

La fonction *SplittingTdevelop* prend en paramètres la liste des termes d'un T-développement, les dimensions n_1 et n_2 dans la décomposition du spectre de la matrice principale, le poids et les nombres de Volevič et $p+1$ où p est le rang de Poincaré du système. Elle calcule un système équivalent de la forme $A^{11} \oplus A^{22}$ où les A^{ii} sont des matrices de séries en x en appliquant le lemme de découplage par rapport au T-développement (Proposition 4.3.5).
On reprend le même exemple que précédemment. La matrice principale

```
>PrincipalMatrix(A, x, T, V)
```

$$\left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right]$$

est de la forme $\mathring{A}^{11} \oplus \mathring{A}^{22}$ où $\mathring{A}^{11}$ est de taille $n1 := 1$ et $\mathring{A}^{22}$ est de taille $n2 := 2$.

```
>SplittingTdevelop([LIST], n1, n2, V, T, p+1)
```

$$\left[\begin{matrix} 1 & -x^5+2\,x^4+x^3+x^2 & 2\,x^4+x^3 \\ -x^5 & 1 & 0 \\ -x^4 & 0 & 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x^3 & x^6+x \\ 0 & x^2+1 & x^5+x^3 \end{matrix}\right], [\left[\begin{matrix} x \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} x^3 & x^6+x \\ x^2+1 & x^5+x^3 \end{matrix}\right]].$$

La sortie est une liste de 3 éléments : la transformation qui calcule cette décomposition, le système décomposé et la liste des sous-systèmes obtenus.

5.3.4 La procédure complète pour le calcul des parties exponentielles

La fonction *ReductionWithLP* prend en paramètres la matrice A, $p+1$ où p est le rang de Poincaré du système, la variable x dans A et le paramètre t. Elle utilise la réduction du rang de Poincaré *RankReductionLP* et toutes les fonctions présentées précédemment pour calculer les parties exponentielles d'un système $x^{p+1}Y' = AY$ en utilisant l'algorithme de réduction du Chapitre 4.

On reprend l'exemple précédent.

```
> infolevel[ReductionWithLP] := 1;
> ReductionWithLP(A, 5, x,t);
ReductionWithLP: a call of the algorithm
ReductionWithLP: Reduce the Poincare rank
ReductionWithLP: case 2-2 : irregular singular V fractional
Ramified_Case:  Volevic is fractional 1/2
Ramified_Case: Computing Volevic numbers time: 0.5e-2
Ramified_Case: Volevic Numbers [-1/2 0 0]
Ramified_Case: LeadingMatrix not invertible with V fractional :
 we prepare A0
Ramified_Case: Miyake decomposition prepareA0 time:  0.61e-1
Ramified_Case: We separate the nilpotent part and recall for
 the two sub systems
Ramified_Case: SplittingTdevelop time:  .190
ReductionWithLP: a call of the algorithm
ReductionWithLP: Reduce the Poincare rank
ReductionWithLP: case 2-2 : irregular singular V fractional
Ramified_Case:  Volevic is fractional 1/2
Ramified_Case: Computing Volevic numbers time: 0.11e-1
Ramified_Case: Volevic Numbers [0 1/2]
Ramified_Case: all eigenvalues are different from 0 [1 -1]
Ramified_Case: We ramify with c*x^2
Ramified_Case: Volevic after ramification 1
Ramified_Case: Compute Volevic numbers time:  0.5e-2
Ramified_Case: Computing Volevic Numbers [0 1]
Ramified_Case: We flat the developpement
Ramified_Case: Smart ramification x^2
Ramified_Case:  with splitting the system after ramification time:  0.79e-1
```

```
ReductionWithLP: a call of the algorithm
ReductionWithLP: we get an exponential part [x = t^2 1/x^9+(1/2)/x^5+1/x^4
-(1/4)/x^2] with ramification x = t^2
ReductionWithLP: a call of the algorithm
ReductionWithLP: we get an exponential part [x = t 1/x^4]
 with ramification x = t
```

$$[x = t^2, \frac{1}{x^9} + \frac{1}{2x^5} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{4x^2}], \quad [x = t, \frac{1}{x^4}].$$

On considère le système $x^7 Y' = AY$ avec

$$A(x) := \begin{bmatrix} x^5 & -x^3 & x^3-1 & -x^3 & -1 & -x^4 \\ 0 & 0 & x^2-x & x^6+x & x & -x \\ x^2 & x^6-x^5+x^2 & -x^3 & -x^3+1 & -x^4 & -x^5+x^3 \\ 0 & 0 & x-1 & x^6+x^4-x^3 & 1 & x^5 \\ 0 & x^2 & x^5 & -x^5 & -x^6+x^3 & -x^2 \\ -x^4 & x^6-x^4+x & -x^4 & 1 & -x^2 & x^2 \end{bmatrix}.$$

```
> infolevel[ReductionWithLP] := 1;
> ReductionWithLP(A, 7, x,t);
ReductionWithLP: a call of the algorithm
ReductionWithLP: Reduce the Poincare rank
ReductionWithLP: case 2-1 : irregular singular V integer
ReductionWithLP: We flat the developpement
ReductionWithLP: case 2-1-b: for all roots we split
ReductionWithLP: a call of the algorithm
ReductionWithLP: we get an exponential part [x = t RootOf(_Z^2+1)/x^7-
(1/2)*RootOf(_Z^2+1)/x^6+(3/8)*RootOf(_Z^2+1)/x^5+(1/2)/x^5-
(5/16)*RootOf(_Z^2+1)/x^4-(173/128)*RootOf(_Z^2+1)/x^3-
(399/256)*RootOf(_Z^2+1)/x^2+(183/1024)*RootOf(_Z^2+1)/x-2/x]
with ramification x = t
ReductionWithLP: a call of the algorithm
ReductionWithLP: Reduce the Poincare rank
ReductionWithLP: case 2-1 : irregular singular V integer
ReductionWithLP: We flat the developpement
ReductionWithLP: case 2-1-b: for all roots we split
ReductionWithLP: a call of the algorithm
ReductionWithLP: we get an exponential part [x = t RootOf(_Z^2+1)/x^6-
```

```
RootOf(_Z^2+1)/x^5+1/x^5-2*RootOf(_Z^2+1)/x^4+2/x^4-6*RootOf(_Z^2+1)/x^3+
21/x^3+(55/2)*RootOf(_Z^2+1)/x^2+131/x^2+(1129/2)*RootOf(_Z^2+1)/x+721/x]
with ramification x = t
ReductionWithLP: a call of the algorithm
ReductionWithLP: Reduce the Poincare rank
ReductionWithLP: case 2-2 : irregular singular V fractional
Ramified_Case:  Volevic is fractional 1/2
Ramified_Case: Computing Volevic numbers time: 0.6e-2
Ramified_Case: Volevic Numbers [0 1/2]
Ramified_Case: all eigenvalues are different from 0 [I*2^(1/2) -I*2^(1/2)]
Ramified_Case: We ramify with c*x^2
Ramified_Case: Volevic after ramification 1
Ramified_Case: Compute Volevic numbers time:  0.6e-2
Ramified_Case: Computing Volevic Numbers [0 1]
Ramified_Case: We flat the developpement
Ramified_Case: Smart ramification -2*x^2
SplittingTheSystemOnePart: decompose A0 time 0.14e-1
SplittingTheSystemOnePart: compute new B 0.34e-1
SplittingTheSystemOnePart: call of Splitting 0.34e-1
Ramified_Case:  with splitting the system after ramification time:  0.91e-1
ReductionWithLP: a call of the algorithm
ReductionWithLP: we get an exponential part [x = -2*t^2 -(1/32)/x^11+
(1/32)/x^10+(3/32)/x^9-(5/32)/x^8-(25/64)/x^7+(41/16)/x^6-(261/8)/x^4+
(13057/256)/x^3+(2875/8)/x^2] with ramification x = -2*t^2
```

$$[x=t, \frac{RootOf\left(_Z^2+1\right)}{x^7}-\frac{RootOf\left(_Z^2+1\right)}{2x^6}+\frac{3RootOf\left(_Z^2+1\right)}{8x^5}+\frac{1}{2x^5}-\frac{5\,RootOf\left(_Z^2+1\right)}{16\,x^4} -\frac{173\,RootOf\left(_Z^2+1\right)}{128\,x^3}-\frac{399\,RootOf\left(_Z^2+1\right)}{256\,x^2}+\frac{183\,RootOf\left(_Z^2+1\right)}{1024\,x}-2\,x^{-1}],$$

$$[x=t, \frac{RootOf\left(_Z^2+1\right)}{x^6}-\frac{RootOf\left(_Z^2+1\right)}{x^5}+x^{-5}-2\,\frac{RootOf\left(_Z^2+1\right)}{x^4}+2\,x^{-4}-6\,\frac{RootOf\left(_Z^2+1\right)}{x^3} +21\,x^{-3}+\frac{55\,RootOf\left(_Z^2+1\right)}{2\,x^2}+131\,x^{-2}+\frac{1129\,RootOf\left(_Z^2+1\right)}{2\,x}+720\,x^{-1}]$$

et

$$[x=-2\,t^2, \quad -1/32\,x^{-11}+1/32\,x^{-10}+\frac{3}{32\,x^9}-\frac{5}{32\,x^8}-\frac{25}{64\,x^7}+\frac{41}{16\,x^6}-\frac{261}{8\,x^4}+\frac{13249}{256\,x^3}+\frac{2875}{8\,x^2}]$$

5.4 Comparaison entre les algorithmes de réduction formelle

Nous nous intéressons à comparer les implantations des trois différents algorithmes :

— **méthode 1 :** L'algorithme de Barkatou-Pflügel qui utilise la "super-réduction" ([61]) pour calculer des systèmes k-simples. Nous utilisons la procédure de la librairie IntegrableConnection [48] reprise du package Isolde [18].

— **méthode 2 :** Notre implémentation de l'algorithme de Barkatou pour la réduction formelle présentée dans [7] et qui utilise la réduction de Moser (nous utilisons la fonction moser_reduce de DEtools) pour réduire le rang de Poincaré et le calcul de l'invariant de Katz par l'algorithme 1.

— **méthode 3 :** Notre version de l'algorithme de Miyake pour la réduction formelle qui utilise les programmes linéaires et qui est présentée dans le chapitre 4.

5.4.1 Performance pratique

Pour faire les tests sur le temps de calcul, nous faisons varier la dimension du système pour n allant de 3 à 10. Pour chaque n fixé, nous faisons varier la valuation p du système de 2 à 10 (p est le rang de Poincaré $+1$). Pour n et p fixés nous générons des systèmes à l'aide de la fonction Maple :

```
Generate_System:= proc (n, p)
return RandomMatrix(n,n,generator=1..1, density=0.2)*x^(-p)+
add(x^i*RandomMatrix(n,n,generator=-10..10,density=0.3),i =-p+1..-1)
end proc
```

n \ p	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0.05	0.09	0.17	0.23	0.32	0.49	0.71	0.79	1.11
4	0.06	0.14	0.26	0.45	0.59	0.84	1.38	1.73	2.40
5	0.10	0.22	0.49	0.67	1.22	1.49	2.53	3.01	3.89
6	0.22	0.51	0.97	1.21	1.95	3.23	4.14	5.68	5.43
7	0.39	0.92	1.38	2.41	4.04	6.48	7.46	8.67	11.31
8	0.60	1.60	2.96	4.00	6.19	8.45	11.28	13.17	17.07
9	0.72	2.25	4.25	6.25	11.54	14.77	18.38	23.69	38.51
10	1.83	4.36	8.63	11.68	19.64	29.28	34.87	52.16	81.59

Tableau 5.1 – Temps de calcul des parties exponentielles avec la méthode 1

n \ p	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0.10	0.31	0.25	0.41	0.42	0.43	0.38	0.53	0.62
4	0.39	0.72	0.61	0.90	0.85	1.23	1.20	1.50	1.41
5	0.80	1.78	1.54	1.64	2.04	2.36	2.08	2.34	2.34
6	0.81	1.37	1.78	2.36	2.58	3.45	4.34	3.98	5.34
7	1.23	1.84	2.49	3.26	4.46	5.20	6.38	8.98	6.03
8	2.23	3.35	4.00	5.11	4.91	5.59	6.97	10.12	11.85
9	2.55	3.94	4.94	7.26	10.48	9.40	10.86	11.65	16.56
10	4.52	7.28	9.81	11.09	12.74	20.74	19.93	23.19	30.69

Tableau 5.2 – Temps de calcul des parties exponentielles avec la méthode 2

n \ p	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0.34	0.45	0.50	0.40	0.27	0.36	0.33	0.20	0.20
4	0.34	0.41	0.62	0.70	0.76	0.75	1.03	1.14	0.87
5	0.60	1.00	1.23	1.38	1.64	2.35	1.97	1.91	1.93
6	0.82	1.28	1.46	2.03	2.41	3.11	3.57	3.40	4.49
7	1.53	1.77	2.38	3.01	4.27	4.670	5.82	8.28	6.08
8	2.19	2.95	3.23	4.17	4.79	4.87	6.34	8.80	10.80
9	2.45	3.68	4.67	6.83	9.66	8.07	8.04	9.90	14.66
10	4.19	7.27	9.22	10.82	12.35	19.04	18.50	23.19	30.95

Tableau 5.3 – Temps de calcul des parties exponentielles avec la méthode 3

La comparaison est faite avec Maple 16 sur une machine avec un processeur $2,7$ GHz Intel Core $i5$ et une mémoire de 8 Go 1867 MHz DDR3. Pour n et p fixés, nous faisons la moyenne du temps sur 30 systèmes générés avec Generate_System.

5.4.2 Commentaires

Génériquement les méthodes 2 et 3 semblent avoir une complexité similaire avec un léger avantage pour la méthode 3. L'augmentation de la taille des coefficients dû à l'application de la réduction de Moser n'apparaît pas systématiquement dans des exemples génériques qui sont eux presque sûrement irréductibles au sens de Moser. Notons qu'une augmentation importante de la taille des coefficients peut aussi s'expliquer par l'application du lemme de découplage, qui est l'outil fondamental pour les deux méthodes. D'autre part, d'après la section 4.7 du chapitre 4, la méthode 2 peut faire intervenir des calculs dans des extensions algébriques plus grandes que celles avec la méthode 3. Nous

pensons que le temps de calcul dans des extensions algébriques non minimales de la méthode 2 est probablement compensé par le temps de calcul d'un T-développement de la méthode 3 (voir Remarque 4.3.6).
Concernant le temps de calcul pour la méthode 1, on remarque que cette méthode est plus rapide que les méthodes 2 et 3 quand p est petit $p \leq 5$. Lorsque p augmente nous avons remarqué que le temps de calcul devient véritablement plus élevé : une analyse de profilage sur Maple nous a montré qu'un grand nombre d'itérations peut apparaître provenant de l'application de la "super-réduction" ; ce qui augmente naturellement le temps de calcul.

5.5 Sur l'implémentation de la réduction formelle en utilisant l'eigenring

5.5.1 Introduction

Dans cette section nous présentons la librairie Maple de l'algorithme de réduction formelle developpé dans les chapitres 2 et 3. Une étape importante dans cet algorithme de réduction est le calcul d'une base du noyau d'une matrice de séries de Laurent. Pour cela nous avons choisi d'utiliser une « forme normale de Smith approchée ». Nous référons, par exemple, à la thèse de Vaccon [65], qui a présenté la forme normale de Smith approchée sur des corps de valuation discrète. Vaccon a montré que, réaliser une réduction gaussienne avec un pivot bien choisi permet de minimiser la perte de précision que l'on peut obtenir par un échelonnement de Gauss. Pour cela, on a trouvé nécessaire une implémentation de cette réduction sur les matrices à coefficients des séries de Laurent pour notre algorithme de réduction formelle.

L'organisation de cette section sera la suivante : dans la première partie nous rappelons des résultats sur la forme normale de Smith de [65] particulièrement sur les matrices à coefficients dans le corps de séries de Laurent. Nous donnons une description et quelques exemples sur l'utilisation de la librairie SMITHNORMALFORM implémentée dans Maple. Enfin nous présentons les fonctions qui réalisent le calcul des parties exponentielles.

5.5.2 Sur une implémentation d'une forme normale de Smith adaptée aux matrices à coefficients des séries de Laurent

5.5.2.1 Forme normale de Smith : existence et construction

Dans cette section, nous allons voir que toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathcal{C}((x)))$ peut être transformée en une matrice diagonale « approchée » par une suite d'opérations élémentaires. Cette transformation peut être utilisée pour résoudre des systèmes linéaires, en particulier trouver une base du noyau d'une matrice (Section 5.5.2.1). D'abord nous rappelons des résultats sur la précision de quelques opérations élémentaires dans $\mathcal{C}((x))$: Soient a et b deux éléments dans $\mathcal{C}((x))$ avec $a = x^{-\alpha}\sum_{i=0}^{k} a_i x^i + \mathcal{O}(x^{-\alpha+k+1})$ et $b = x^{-\beta}\sum_{i=0}^{h} b_i x^i + \mathcal{O}(x^{-\beta+h+1})$.

Proposition 5.5.1

$$\begin{aligned} a+b &= x^{-\alpha}\sum_{i=0}^{k} a_i x^i + \mathcal{O}(x^{-\alpha+k+1}) + x^{-\beta}\sum_{i=0}^{h} b_i x^i + \mathcal{O}(x^{-\beta+h+1}) \\ &= x^{-\alpha}\sum_{i=0}^{k} a_i x^i + x^{-\beta}\sum_{i=0}^{h} b_i x^i + \mathcal{O}(x^{\min(-\alpha+k+1,-\beta+h+1)}) \end{aligned}$$

Proposition 5.5.2

$$\begin{aligned} a\times b &= (x^{-\alpha}\sum_{i=0}^{k} a_i x^i + \mathcal{O}(x^{-\alpha+k+1}))\times(x^{-\beta}\sum_{i=0}^{h} b_i x^i + \mathcal{O}(x^{-\beta+h+1})) \\ &= (x^{-\alpha}\sum_{i=0}^{k} a_i x^i)(x^{-\beta}\sum_{i=0}^{h} b_i x^i) + \mathcal{O}(x^{\min(-\alpha+k+1-\beta,-\beta+h+1-\alpha)}) \end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de voir que

$$\begin{gathered} (a_0+\ldots+a_k x^k+\mathcal{O}(x^{k+1}))\times(b_0+\ldots+b_h x^h+\mathcal{O}(x^{h+1})) \\ = \\ (a_0+\ldots+a_k x^k)\times(b_0+\ldots+b_h x^h)+\mathcal{O}(x^{\min(k+1,h+1)}) \end{gathered} .$$

■

Proposition 5.5.3 *Soit $a \in \mathcal{C}((x))$ de valuation $-\alpha$. Supposons que a est connue pour une précision k, i.e, $a = x^{-\alpha}\sum_{i=0}^{k} a_i x^i + \mathcal{O}(x^{-\alpha+k+1})$. Alors, $a^{-1} = x^{\alpha}(\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x + \ldots)$ et les constantes $\tilde{a}_0$,$\tilde{a}_1$, …, $\tilde{a}_k$ sont uniquement déterminées.*

Preuve.

$$\begin{gathered} x^{-\alpha}(a_0+\cdots a_k x^k)\times x^{\alpha}(\tilde{a}_0+\cdots+\tilde{a}_k x^k) = 1+\mathcal{O}(x^k) \\ \Longleftrightarrow \\ (a_0+\cdots a_k x^k)\times(\tilde{a}_0+\cdots+\tilde{a}_k x^k) = 1+\mathcal{O}(x^k) \\ \Longleftrightarrow \\ \begin{cases} a_0\tilde{a}_0 & = 0 & \\ a_0\tilde{a}_1 + a_1\tilde{a}_0 & = 0 & \text{pour tout } j=1,\ldots,k \\ a_0\tilde{a}_j & = -\sum_{i=1}^{j} a_i\tilde{a}_{j-i} & \end{cases} \end{gathered}$$

Pour tout $j = 1, \ldots, k$, chaque $\tilde{a}_j$ est calculé à partir des tous les a_i tels que $i \leq j$ et tous les $\tilde{a}_i$ tels que $i < j$. ■

Proposition 5.5.4 *On note* $\gamma = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ *et* $\beta = \sum_{i=0}^{h} b_i x^i$. *On a alors :*

$$\frac{a}{b} = \frac{x^{-\alpha}\gamma + \mathcal{O}(x^{-\alpha+k+1})}{x^{-\beta}\beta + \mathcal{O}(x^{-\beta+h+1})} = x^{-\alpha-\beta}\gamma\beta + \mathcal{O}(x^{min(-\alpha+\beta+h+1,-\alpha+\beta+k+1)})$$

Preuve. Le résultat se déduit des deux propositions 5.5.1 et 5.5.3. ■

Nous notons la matrice tronquée M par $M^{<k>}$ avec $M^{<k>} = x^{\mathrm{val}(M)}(M_0 + \cdots + x^k M_k)$. On dit que M est connue à une précision k (ou M est connue à une précision $\mathcal{O}(x^{\mathrm{val}(M)+k+1})$) et on a $M = M^{<k>} + \mathcal{O}(x^{\mathrm{val}(M)+k+1})$.

Définition 5.5.5 ([65], Definition 1.3.4) *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C}((x)))$ *de valuation* $-\alpha$, *connue à une précision* $\mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$. *On appelle* forme approchée de Smith *de* M, *une factorisation de la forme*

$$M = U\Delta V,$$

où U *et* $V \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{C}((x)))$ *sont connues à une précision* k *et* $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C}((x)))$ *est telle que* $\Delta = \Delta_0 + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$, *où* Δ_0 *est une matrice diagonale*

$$\Delta_0 = \mathrm{diag}(x^{a_1}, \ldots, x^{a_s}, 0, \ldots, 0),$$

avec $a_1 \leq \ldots \leq a_s$.

Le processus de calcul de U, V et Δ consiste à appliquer une réduction de Gauss successivement sur les lignes et colonnes en utilisant comme pivot un élément de plus petite valuation à chaque étape [65]. L'algorithme peut être résumé par les étapes suivantes :

- Choisir un élément de plus petite valuation. Permuter les colonnes et les lignes pour mettre cet élément en première position $\tilde{M}_{1,1}$. On note $\tilde{M}$ la nouvelle matrice $\tilde{M} = (\tilde{M}_{i,j})$.
- Écrire le pivot $\tilde{M}_{1,1} = x^{-\alpha} \times a + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$, où $-\alpha$ est la valuation de M.
- Normaliser le pivot en effectuant l'opération $L_1 := a^{-1}L_1$ où L_1 est la première ligne de la matrice $\tilde{M}$.
- Pivoter pour i allant de 2 à n (pour annuler la première colonne) :
  - Poser $\tilde{M}_{i,1} := x^{-\beta} \times b + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$
  - Faire $L_i := L_i - \frac{x^{-\beta}\times b}{x^{-\alpha}} L_1$ (où b admet un terme constant).
- Faire pareil pour la première ligne.

Proposition 5.5.6 *([65]) Soit* M *une matrice à coefficients dans* $\mathcal{C}((x))$ *et de valuation* $-\alpha$. *Supposons que* M *est connue à une precision* $\mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$, *i.e,* $M^{<k>} = \frac{1}{x^\alpha}(M_0 + M_1 x +$

$\ldots + M_k x^k$). *Alors, il existe deux matrices inversibles* $U \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C}[[x]])$ *et* $V \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C}[[x]])$ *connues pour une précision infinie telles que :*

$$U(M^{<k>} + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}))V = \Delta$$

avec

$$\Delta = \begin{pmatrix} x^{-\alpha} + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) & & \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) & \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{5.5.1}$$

où la sous matrice

$$\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.5.2}$$

est connue à une précision $\mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$.

Preuve. Soit $M := (m_{ij})_{i,j}$ pour $i, j \in \{1, n\}$. Si tous les coefficients de M sont en $\mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$, alors, M a déjà la forme désirée et $U = V = I$. Sinon, on trouve un couple (i, j) tel que $\text{val}(m_{i,j}) = -\alpha$. Sans perte de généralité, on peut considérer que $(i, j) = (1, 1)$ quitte à faire une permutation sur les colonnes et les lignes. On écrit $m_{i,j} = x^{-\alpha} \times a + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$, où $a = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$. Nous effectuons l'opération élémentaire sur la première ligne L_1 de M :

$$L_1 \leftarrow a^{-1} L_1,$$

Cela revient à multiplier M à gauche par

$$P_1 = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.5.3}$$

L'opération $L_1 := a^{-1} L_1$ garde les précisions $\mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$ puisque a est connue pour une précision infinie. Soit $U := P_1$ et $M^{(1)}$ la nouvelle matrice. On considère maintenant L_i la i-ème ligne de $M^{(1)}$ for $i \in \{2, \ldots, n\}$. On écrit $m_{i,1}^{(1)} = x^{-\beta} \times b + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$ puis nous effectuons les opérations élémentaires sur toutes les lignes

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{x^{-\beta} \times b}{x^{-\alpha}} L_1$$

Cela revient à multiplier la matrice $M^{(1)}$ à gauche par

$$P_i := \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & \cdots \\ \frac{x^{-\beta} \times b}{x^{-\alpha}} & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.5.4}$$

où P_i est une matrice inversible ayant des 1 sur la diagonale, $\frac{x^{-\beta} \times b}{x^{-\alpha}}$ à la position $(i, 1)$ et 0 ailleurs. Cette opération conserve le $\mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$ puisque $\alpha > \beta$. On obtient

$$UM^{(1)} = \begin{pmatrix} x^{-\alpha} + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) & \star + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) & \cdots & \star + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) \\ \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) & \star + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) & \cdots & \star + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) & \star + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) & \cdots & \star + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) \end{pmatrix},$$

avec $U := P_n \dots P_1$. On fait pareil sur les colonnes et on construit $V := Q_n \dots Q_1$ telle que

$$UAV = \begin{pmatrix} x^{-\alpha} + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) & \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) & \dots & \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) \\ \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) & \star + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) & \cdots & \star + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) & \star + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) & \cdots & \star + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}) \end{pmatrix}. \tag{5.5.5}$$

■

Pour calculer une forme normale de Smith approchée pour la matrice M on applique la proposition précédente sur le mineur principal (5.5.2) obtenu en éliminant la première ligne et la première colonne de la matrice (5.5.5) et ainsi de suite. Ainsi, on construit deux matrices U,V à coefficients des polynômes telles que $U(M^{<k>} + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})V = \Delta_0 + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$ avec les notations de la définition 5.5.5.

Remarque 5.5.7 *Les matrices inverses de U et V peuvent être retrouvées à partir des matrices inverses :*

$$P_1^{-1} := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$P_i^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0\cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & \cdots \\ -\frac{x^{-\beta}\times b}{x^{-\alpha}} & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Application au calcul d'une base « approchée » d'un noyau Soit une matrice M à coefficients dans $\mathcal{C}((x))$ de valuation $-\alpha$. On suppose que M est connue à une précision $\mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$. On souhaite calculer des vecteurs $v_1, \ldots, v_d$ de $\ker(M) \mod x^{k-\alpha+1}$ où

$$\ker(M) \mod x^{k-\alpha+1} = \{v \in \mathcal{C}[x]^n \mid Mv = \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})\}.$$

À l'aide d'une forme normale de Smith approchée, on construit deux matrices U,V telles que $UMV = \Delta_0 + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$. On a

$$MV = U^{-1}\Delta = U^{-1}(\Delta_0 + \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})).$$

Si s est la dimension de $\ker(M)$, les dernières s colonnes $v_{n-s+1}, \ldots, v_n$ de V satisfont

$$Mv_j = \mathcal{O}(x^{k-\alpha+1}).$$

Application pour calculer une décomposition du noyau On considère une matrice M à coefficients dans $\mathcal{C}((x))$ de valuation $-\alpha$ et connue à une précision $\mathcal{O}(x^{k-\alpha+1+n\alpha})$. On suppose que le polynôme caractéristique de M est à coefficients constants $\chi_M(\lambda) = \prod_{i=1}^{\ell} f_i(\lambda)^{h_i}$ avec p.g.c.d$(f_i, f_j) = 1$ pour $i \neq j$ et les f_i sont des polynômes en λ à coefficients constants. Alors, il existe une transformation P à coefficients des séries de Taylor et connue pour une précision au moins $\mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$, telle que

$$P^{-1}MP := M_1 \oplus \ldots \oplus M_\ell,$$

où les sous matrices M_i sont connues pour une précision $\mathcal{O}(x^{k-\alpha+1})$. Les colonnes de P sont formées à partir des bases des espaces $\ker(f_i(M))^{h_i}$.

5.5.2.2 Implémentations et utilisation du logiciel

Forme Normale de Smith On considère la matrice M connue pour une précision $\mathcal{O}(x^2)$:

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 6\,x & 7\,x^{-3} - 10\,x^{-2} & 0 \\ 5\,x^{-1} & 0 & 10 & -x \\ -6\,x^{-1} & -3\,x^{-2} - 8\,x^{-1} & -x^{-3} & 4\,x^{-3} - x^{-2} - 2\,x \\ 0 & 0 & -2\,x^{-1} & 7 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^2)$$

La fonction SmithNormalForm_Series(M,x,d,k) prend en paramètres la matrice M, la variable x, le degré en x de M (ou la precision dans M) et une précision k. En sortie, les matrices U, U^{-1}, Δ, V, V^{-1} pour la précision k, telles que $UMV = \Delta$.
Les deux matrices U et V sont connues pour une précision infinie : nous choisissons d'afficher le calcul pour une précision $\mathcal{O}(x^3)$:

```
U, invU, M, V, invV := SmithNormalForm_Series(A, x, 1, 2);
SmithNormalForm_Series: pivot 7/x^3-10/x^2
SmithNormalForm_Series: normalize the pivot: unit part 7-10*x
SmithNormalForm_Series: normalize the pivot: inverse of the unit part 1/7+(10/49)*x
SmithNormalForm_Series: normalize pivot: invariant 1/x^3
SmithNormalForm_Series: pivoting
SmithNormalForm_Series: pivoting: row  2 0
SmithNormalForm_Series: pivoting: row  3 1
SmithNormalForm_Series: pivoting: row  4 0
SmithNormalForm_Series: pivoting: column 2 0
SmithNormalForm_Series: pivoting: column 3 0
SmithNormalForm_Series: pivoting: column 4 0
SmithNormalForm_Series: recursion
SmithNormalForm_Series: pivot 4/x^3-1/x^2-2*x
SmithNormalForm_Series: normalize the pivot: unit part -2*x^4-x+4
SmithNormalForm_Series: normalize the pivot: inverse of the unit part 1/4+(1/16)*x
SmithNormalForm_Series: normalize pivot: invariant 1/x^3
SmithNormalForm_Series: pivoting
SmithNormalForm_Series: pivoting: row  2 0
SmithNormalForm_Series: pivoting: row  3 0
SmithNormalForm_Series: pivoting: column 2 0
SmithNormalForm_Series: pivoting: column 3 (3/4)*x
SmithNormalForm_Series: recursion
```

```
SmithNormalForm_Series: pivot 5/x
SmithNormalForm_Series: normalize the pivot: unit part 5
SmithNormalForm_Series: normalize the pivot: inverse of the unit part 1/5
SmithNormalForm_Series: normalize pivot: invariant 1/x
SmithNormalForm_Series: pivoting
SmithNormalForm_Series: pivoting: row  2 0
SmithNormalForm_Series: pivoting: column 2 0
SmithNormalForm_Series: recursion
SmithNormalForm_Series: pivot (21/4)*x
SmithNormalForm_Series: normalize the pivot: unit part 21/4
SmithNormalForm_Series: normalize the pivot: inverse of the unit part 4/21
SmithNormalForm_Series: normalize pivot: invariant x
SmithNormalForm_Series: pivoting
SmithNormalForm_Series: recursion
```

On obtient

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} + \frac{10\,x}{49} + \frac{100\,x^2}{343} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{28} + \frac{47\,x}{784} + \frac{1929\,x^2}{21952} & 0 & \frac{1}{4} + \frac{x}{16} + \frac{x^2}{64} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{8\,x^2}{147} & 0 & 0 & \frac{4}{21} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^3).$$

La forme normale de Smith approchée

$$\Delta := \begin{bmatrix} x^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^2)$$

et

$$V := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3x^2}{2} & \frac{3x}{4} + \frac{35\,x^2}{16} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^3).$$

On peut vérifier que $UMV = \Delta + \mathcal{O}(x^2)$. Pour cela il faut considérer dans U et V une précision de $\mathcal{O}(x^{2+3})$.

Base d'un noyau On considère la matrice $A + \mathcal{O}(x^4)$ connue à une précision $\mathcal{O}(x^4)$ avec

$$A = \begin{bmatrix} -28\,x^2 - 28\,x - 70 + \frac{1337\,x^3}{8} & \frac{-7}{x} + 56 - \frac{469\,x}{4} + \frac{3115\,x^2}{8} - \frac{104321\,x^3}{64} & -70 + 7\,x - \frac{77\,x^2}{4} + \frac{371\,x^3}{4} \\ -14\,x^3 - 7\,x^2 & 63\,x^2 - 14\,x - 133 - \frac{567\,x^3}{2} & 56\,x^3 - 7\,x^2 \\ -70 + 7\,x - \frac{105\,x^2}{4} + \frac{623\,x^3}{4} & \frac{-7}{x} - 7 - \frac{413\,x}{4} + \frac{3787\,x^2}{8} - \frac{129129\,x^3}{64} & -35\,x^2 + 42\,x - 70 + \frac{931\,x^3}{8} \end{bmatrix}.$$

Cette matrice n'a pas été choisi au hasard, mais elle correspond à une matrice générique dans l'eigenring d'un système. On sait alors que son polynôme caractéristique est constant :

$$\chi_A(\lambda) = \lambda\ (\lambda + 140)\,(\lambda + 133)$$

$> U, invU, \Delta, V, invV$:=SmithNormalForm_Series(A, x, 3, 3) :
On obtient

$$U := \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} - \frac{8\,x}{7} - \frac{27\,x^2}{4} - \frac{2397\,x^3}{56} & 0 & 0 \\ -\frac{x}{70} + \frac{3\,x^2}{532} + \frac{3\,x^3}{760} & \frac{1}{1330} - \frac{17\,x}{2660} + \frac{3\,x^2}{190} + \frac{2057\,x^3}{10640} & 0 \\ -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{4} & \frac{-1}{2} + \frac{3x}{8} - \frac{x^2}{8} - \frac{581\,x^3}{32} & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^4),$$

et son inverse

$$invU := \begin{bmatrix} -7 + 56\,x - \frac{469\,x^2}{4} + \frac{3115\,x^3}{8} & 0 & 0 \\ -63\,x^3 + 14\,x^2 + 133\,x & 1330 + 11305\,x + \frac{136325\,x^2}{2} & 0 \\ 7 + 7\,x + \frac{413\,x^2}{4} - \frac{3787\,x^3}{8} & -\frac{240065\,x^2}{8} - \frac{20615\,x}{4} - 665 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^4).$$

La forme normale de Smith

$$\Delta := \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^4).$$

La matrice V

$$V := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{393\,x^3}{16} \\ 1 & -10\,x - 84\,x^2 - \frac{1017\,x^3}{2} & \frac{x^3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^4),$$

et son inverse

$$invV := \begin{bmatrix} -10\,x - 84\,x^2 - \frac{1017\,x^3}{2} & 1 & -10\,x - 79\,x^2 - \frac{1869\,x^3}{4} \\ 1 & 0 & -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{393\,x^3}{16} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^4).$$

Soit f un polynôme. On souhaite calculer une base approchée de $\ker(f(A))$. On utilise la procédure suivante NullSpace_Series qui prend en paramètres une matrice $A(x)$, la variable x, λ, le polynôme f en λ, la précision dans A et une précision k. Pour l'exemple précédent, on a λ est un facteur simple du polynôme caractéristique de A. Le noyau approché de $\ker(A)$ est alors :
> NullSpace_Series(A, x, λ, λ, 3, 3)

$$\begin{bmatrix} -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{393\,x^3}{16} \\ \frac{x^3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^4), 1$$

La procédure NullSpace_Series utilise la procédure précédente pour calculer une forme normale de Smith approchée. Une base approchée du noyau est trouvée à partir des colonnes de V. La sortie est une base approchée du noyau de $f(A)$ et sa dimension.

Décomposition d'un noyau On considère la matrice suivante :

$$A := \begin{bmatrix} -28\,x^2 - 28\,x - 9 + \frac{1337\,x^3}{8} & -7\,x^{-1} + 56 - \frac{469\,x}{4} + \frac{3115\,x^2}{8} - \frac{104321\,x^3}{64} & -70 + 7\,x - \frac{77\,x^2}{4} + \frac{371\,x^3}{4} \\ -14\,x^3 - 7\,x^2 & 63\,x^2 - 14\,x - 72 - \frac{567\,x^3}{2} & 56\,x^3 - 7\,x^2 \\ -70 + 7\,x - \frac{105\,x^2}{4} + \frac{623\,x^3}{4} & -7\,x^{-1} - 7 - \frac{413\,x}{4} + \frac{3787\,x^2}{8} - \frac{129129\,x^3}{64} & -35\,x^2 + 42\,x - 9 + \frac{931\,x^3}{8} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^4)$$

qui est un élément générique dans l'eigenring d'un système. Son polynôme caractéristique est $\chi = (\lambda + 72)(\lambda - 61)(\lambda + 79)$. On souhaite appliquer le lemme des noyaux et trouver une transformation qui effectue une décomposition approchée. On utilise la procédure RationalKernelDecomposition qui prend en paramètres la matrice A, la variable x, le polynôme caractéristique $p(\lambda)$, la variable λ, la précision dans A et une précision k.

>P, List :=RationalKernelDecomposition(A, x, λ, χ, 3, 3) ;

$$\begin{bmatrix} x^2 + x + 1 & 1 + x/2 - \frac{7\,x^2}{8} + 3/4\,x^3 & -1 + x/2 - 1/8\,x^2 - \frac{393\,x^3}{16} \\ -x^3 - 2\,x^2 - x & 2\,x^2 - 3/2\,x^3 & 1/2\,x^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, [1, 1, 1]$$

La sortie est une transformation P et une liste qui contient la taille des blocs obtenus en appliquant la transformation P sur A.
> test :=map(series, 1/P . A . P, x, 3) ;

$$test := \begin{bmatrix} -72 + O\left(x^2\right) & O\left(x^2\right) & O\left(x^2\right) \\ O\left(x^2\right) & -79 + O\left(x^2\right) & O\left(x^2\right) \\ O\left(x^3\right) & O\left(x^3\right) & 61 + O\left(x^3\right) \end{bmatrix}.$$

5.5.3 Réduction formelle avec la décomposition par eigenring

Nous présentons dans cette section l'implémentation de l'algorithme 5 présenté dans le chapitre 3.

5.5.3.1 Remarques sur l'implémentation

Étant donnée une matrice de séries, les parties exponentielles dépendent uniquement des np premiers termes de A ([4, 39]). Nous travaillons alors uniquement avec les coefficients A_0, A_1, ..., A_{np-1}. En pratique, nous ne pouvons pas stocker une infinité de coefficients. Nous avons répondu à quelques questions de précision dans la section 2.5.3 du chapitre 2 afin de savoir le nombre de termes suffisants dans chaque étape pour obtenir ce que l'on veut calculer.
Par exemple, nous calculons uniquement un nombre fini de termes de l'eigenring. L'algorithme que nous utilisons pour le calcul d'un élément général de l'eigenring se fait terme par terme. Par conséquent, à tout moment de la réduction il est possible d'ajouter si besoin un terme à l'élément de l'eigenring. Par contre, nous utilisons une forme normale de Smith pour calculer une transformation P à une precision k qui permet de décomposer le noyau d'un élément générique de l'eigenring avec le moins de perte de précision possible. Au fur et à mesure de la réduction, nous avons besoin d'ajouter des termes dans P afin d'obtenir une décomposition sur $\mathcal{C}((x))$ qui contient suffisamment d'information pour obtenir les parties exponentielles. Nous ne possédons pas à présent une méthode qui permet de calculer une forme normale de Smith approchée pour le système $A^{<k+1>}$ à partir de la forme normale de Smith approchée de $A^{<k>}$.

Calcul de l'eigenring Pour calculer l'eigenring du système $[A]$ à une précision k, nous utilisons une version modifiée de la fonction reg_sols de la librairies Maple Isolde (ou IntegrableConnections) pour trouver les solutions régulières (sans log) du système

$$\tilde{Y}' := (A \otimes I - I \otimes {}^tA)\tilde{Y}.$$

On considère le système $Y' = AY$ avec

$$A := \begin{bmatrix} 5\,x^{-1} & -10\,x^{-5} + 9\,x^{-2} - 5\,x^{4} & -2\,x^{-5} - 9\,x^{-4} - x^{-3} \\ 2\,x^{-5} & -3\,x^{4} + 5\,x^{-3} + 4\,x^{-4} & 7\,x^{-4} + 1 \\ 8\,x^{-6} + x^{-1} & -x^{-4} + x^{-3} + 10\,x^{2} & -4\,x^{-5} - 10\,x^{-3} + 8\,x^{-2} - 8\,x \end{bmatrix}$$

La procédure LocalEigenring prend en paramètres la matrice A, la variable x et une précision k, pour calculer un élément général de l'eigenring de A pour une précision k (les k premiers termes des solutions régulières).

```
>M,v := LocalEigenring(A, x, 20):
```

La sortie est une liste de deux éléments : un élément général M de l'eigenring pour une précision k et sa valuation v.

Élément générique de l'eigenring On choisit un élément générique en spécifiant aux indéterminés de M des valeurs dans $\mathbb{Q}$. La fonction Generic_Element spécifie des valeurs aléatoires aux indéterminées dans M. La sortie est une liste de deux éléments : un élément "générique" T et son polynôme caractéristique p.

```
>T,p:= Generic_Element(M, x):
```

Une décomposition séparant les parties exponentielles différentes Nous utilisons la fonction RationalKernelDecomposition pour calculer une transformation

```
> P,list:=RationalKernelDecomposition(T, x, lambda, p, 20, 20):
```

On obtient alors P telle que

$$P^{-1}TP := \begin{bmatrix} -32 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(x^{20})$$

La fonction VerifyValuationOfInvP vérifie si la précision dans P était suffisante pour obtenir la valuation de P^{-1} avec le critère dans [2] (voir Section 2.5.3.4 du Chapitre 2). Si oui elle retourne la valuation.

```
> VerifyValuationOfInvP(P, x, 20);
```

0

La transformation de jauge $P[A]$ donne

```
> GaugeTransformation(A, P)
```

$$A11, A22$$

Le système $[A11]$ est de dimension 1 on obtient la partie exponentielle

$$[x = t, -\frac{36}{t^4} + \frac{921}{4\,t^3} - \frac{26449}{16\,t^2} + \frac{1089471}{64\,t}].$$

Quand un système $[A]$ admet une seule pente dans son polygone de Newton, la fonction OneSlopeBarkatouReduction prend en paramètres la matrice A, la variable x et un paramètre t et applique les étapes de 5.a à 5.j de l'algorithme 5 du chapitre 3 pour calculer les parties exponentielles.

```
> OneSlopeBarkatouReduction(A22,x,t);
```

$$[[x = -16\,t^2, -\frac{1}{1048576\,t^{11}} + \frac{1}{524288\,t^{10}} + \frac{11}{262144\,t^9} + \frac{5}{16384\,t^8} + \frac{193}{131072\,t^7} + \frac{941}{32768\,t^6} + \frac{8033}{32768\,t^5} + \frac{26577}{8192\,t^4} + \frac{1435765}{32768\,t^3} + \frac{1089183}{2048\,t^2}]]$$

5.5.3.2 Performance et conclusion

Concernant la complexité de cet algorithme, nous avons déjà mentionné dans la section 3.4.3 du chapitre 3 que le calcul de l'eigenring est l'étape la plus coûteuse en temps. Nous avons donc effectué des tests uniquement sur la première étape de la réduction. Plus précisément, nous calculons l'eigenring pour une précision 1 (i.e., le premier terme dans chaque solution régulière). À partir de nos expérimentations ; nous avons constaté les faits suivants :

1. Pour n petit, par exemple nous avons testé pour $n = 4$ et $p = 8$, le temps de calcul de l'eigenring pour deux systèmes différents et sélectionnés au hasard peut être très différent d'un système à un autre.
2. Le comportement non régulier du temps relevé pour un n et p fixé, nous empêche d'avoir une idée sur le temps moyen d'exécution.

Nous déduisons que malgré l'importance des résultats théoriques obtenus (à savoir, isoler les parties exponentielles de même type dans des sous-systèmes indépendants avant même de les calculer) il reste des points à améliorer d'un point de vue pratique :

1. Exploiter la structure de l'équation $\tilde{Y}' := (A \otimes I - I \otimes {}^tA)\tilde{Y}$ pour calculer l'eigenring d'une manière plus efficace.

2. Gérer la précision en pratique. Par exemple, pour pouvoir ajouter si besoin un terme de plus à la transformation qui décompose le noyau d'un élément générique sans avoir à calculer de nouveau la transformation (à ce sujet, nous renvoyons à la discussion dans la section 5.5.3.1). Ceci permettra de construire une procédure qui prend en paramètre le système A et donne systématiquement en sortie les parties exponentielles.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons commencé par développer une nouvelle méthode pour la réduction formelle des systèmes différentiels au voisinage d'un point singulier. Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés au caractère effectif de l'algorithme de réduction formelle de Miyake. L'objectif majeur de la thèse consistait en la réalisation d'une comparaison avec les méthodes mentionnées précédemment mais également avec celles de Barkatou et de Pflügel dont les principaux éléments sont rappelés dans le présent manuscrit. Naturellement, nous avons accompagné les aspects théoriques d'implémentations sous forme de librairies dans le logiciel de calcul formel Maple.

La principale différence entre l'algorithme que nous avons développé dans les chapitres 2 et 3 et ceux de la littérature traitant la réduction formelle est que notre méthode consiste à construire une seule transformation sans extensions de corps qui permet la séparation des différentes parties exponentielles. Nous obtenons ainsi des sous-systèmes admettant une seule pente dans leur polygone de Newton associé. Par conséquent, nous utilisons toujours les ramifications minimales et nous travaillons dans des extensions algébriques les plus petites possibles. Notre méthode peut ainsi être considérée comme l'équivalent de la réduction dans le cas scalaire ce qui était une question ouverte énoncée dans la thèse de Pflügel. Pour être complet, mentionnons qu'il serait intéressant de trouver une méthode directe afin de calculer l'eigenring. Ceci permettrait en effet d'améliorer la complexité théorique et pratique de notre algorithme, comme constaté expérimentalement au cours de cette thèse. La résolution de ce problème sera un aspect fondamental dans la réalisation d'une comparaison de notre méthode avec celles de Barkatou, Pflügel et Miyake.

L'algorithme de Miyake permet également d'isoler au cours de la réduction les parties exponentielles de valuation fractionnelle via un développement différent de celui de Taylor. Notre contribution concerne le calcul du poids et des nombres de Volevič : deux concepts permettant de mesurer l'irrégularité de la solution et de construire une transformation de shearing pour diminuer le rang de Poincaré du système. Dans cette thèse, nous avons proposé des méthodes de programmation linéaire pour calculer les éléments de Volevič. En particulier, nous obtenons un algorithme de réduction du rang de Poincaré dont il semble en pratique avoir recours à un moindre nombre d'itérations que celui de la réduction de Moser. Enfin, nous remarquons que la minimisation des extensions algébriques proposée dans [7] s'adapte mieux à cette réduction.

La comparaison entre les temps de calcul a montré sur des exemples aléatoires que les deux algorithmes de Miyake et Barkatou semblent avoir une même complexité pratique. Par opposition, il semble que la méthode de Pflügel (implémentée dans le package de

Maple « Isolde ») basée sur la « super-réduction » soit plus lente que les deux précédentes. Nous pensons qu'une étude approfondie de la complexité théorique des diverses méthodes exposées ici serait sans nul doute une perspective intéressante à développer en complément de ce travail afin de comprendre les compensations possible : par exemple, le calcul dans des extensions algébriques de degrés minimales qui peut entraîner une augmentation des tailles des coefficients (Remarque 3.4.5 du chapitre 3).

Bibliographie

[1] J. Abdeljaoued and H. Lombardi. *Méthodes matricielles : introduction à la complexité algébrique*, volume 42 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[2] S. Abramov and M. A. Barkatou. On strongly non-singular polynomial matrices. In C. Schneider and E. (eds.) Zima, editors, *Advances in Computer Algebra : Proceedings of the Waterloo Workshop in Computer Algebra*, volume 226 of *Proceedings in Mathematics & Statistics*. Springer, 2018.

[3] S. A. Abramov, M. A. Barkatou, and E. Pflügel. Higher-order linear differential systems with truncated coefficients. In *International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing*, pages 10–24. Springer, 2011.

[4] D. Babbitt and V. Varadarajan. Formal reduction theory of meromorphic differential equations : a group theoretic view. *Pacific Journal of Mathematics*, 109(1) :1–80, 1983.

[5] W. Balser, W. B. Jurkat, and D. A. Lutz. A general theory of invariants for meromorphic differential equations. I. Formal invariants. *Funkcial. Ekvac.*, 22(2) :197–221, 1979.

[6] M. A. Barkatou. A rational version of Moser's algorithm. In *Proceedings of the 1995 international symposium on Symbolic and algebraic computation*, pages 297–302. ACM, 1995.

[7] M. A. Barkatou. An algorithm to compute the exponential part of a formal fundamental matrix solution of a linear differential system. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 8(1) :1–23, 1997.

[8] M. A. Barkatou. On rational solutions of systems of linear differential equations. *J. Symbolic Comput.*, 28(4-5) :547–567, 1999. Differential algebra and differential equations.

[9] M. A. Barkatou. Symbolic methods for solving systems of linear ordinary differential equations. Part II. *Tutorial at the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM Press*, pages 7–8, July 2010.

[10] M. A. Barkatou. On the Newton polygon of a Moser-irreducible linear differential system. In *Formal and analytic solutions of diff. equations*, volume 256 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 201–218. Springer, Cham, 2018.

[11] M. A. Barkatou, T. Cluzeau, and El B. Carole. Simple forms of higher-order linear differential systems and their applications in computing regular solutions. *J. Symbolic Comput.*, 46(6) :633–658, 2011.

[12] M. A. Barkatou and C. El B. On k-simple forms of first-order linear differential systems and their computation. *J. Symbolic Comput.*, 54 :36–58, 2013.

[13] M. A. Barkatou and E. Pflügel. On the equivalence problem of linear differential systems and its application for factoring completely reducible systems. In *Proceedings of the 1998 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (Rostock)*, pages 268–275. ACM, New York, 1998.

[14] M. A. Barkatou and E. Pflügel. An algorithm computing the regular formal solutions of a system of linear differential equations. *J. Symbolic Comput.*, 28(4-5) :569–587, 1999. Differential algebra and differential equations.

[15] M. A. Barkatou and E. Pflügel. Computing super-irreducible forms of systems of linear differential equations via Moser-reduction : a new approach. In *Proceedings of the 2007 international symposium on Symbolic and algebraic computation*, pages 1–8. ACM, 2007.

[16] M. A. Barkatou and E. Pflügel. On the Moser and super-reduction algorithms of systems of linear differential equations and their complexity. *J. Symbolic Comput.*, 44(8) :1017–1036, 2009.

[17] M. A. Barkatou, E. Pflügel, and G. Broughton. Isolde : a maple package for systems of linear functional equations.

[18] M. A. Barkatou, E. Pflügel, and F. Stan. Isolde : a maple package for systems of linear functional equations. *ACM Communications in Computer Algebra*, 46(3/4) :157–159, 2013.

[19] M. A. Barkatou, J. Saade, and J.-A. Weil. A new approach for formal reduction of singular linear differential systems using eigenrings. In *Proceedings of the 2018 ACM International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, ISSAC '18, pages 47–54, New York, NY, USA, 2018. ACM.

[20] M. A. Barkatou, Joelle Saade, and Jacques-Arthur Weil. Formal reduction of singular linear differential systems using eigenrings : a refined approach. *Accepted for publication in Journal of Symbolic Computation*, 2019.

[21] Moulay A. Barkatou. Factoring systems of linear functional equations using eigenrings. In *Computer algebra 2006*, pages 22–42. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.

[22] R. H. Bartels and G. W. Stewart. Solution of the matrix equation ax+ xb= c. *Communications of the ACM*, 15(9) :820–826, 1972.

[23] J. F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemaréchal, and C. A. Sagastizábal. *Numerical optimization*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006. Theoretical and practical aspects.

[24] A. Bostan, F. Chyzak, M. Giusti, R. Lebreton, G. Lecerf, B. Salvy, and É. Schost. *Algorithmes efficaces en calcul formel*. 2017.

[25] A. Bostan, P. Flajolet, B. Salvy, and É. Schost. Fast computation of special resultants. *J. Symbolic Comput.*, 41(1) :1–29, 2006.

[26] J. V. Brawley and L. Carlitz. Irreducibles and the composed product for polynomials over a finite field. *Discrete Math.*, 65(2) :115–139, 1987.

[27] R. E. Burkard and P. Butkovič. Finding all essential terms of a characteristic maxpolynomial. *Discrete Applied Mathematics*, 130(3) :367–380, 2003.

[28] G. Chen. An algorithm for computing the formal solutions of differential systems in the neighborhood of an irregular singular point. In *Proceedings of the international symposium on Symbolic and algebraic computation*, pages 231–235. ACM, 1990.

[29] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. Tata McGraw-Hill Education, 1955.

[30] S. D. Cohen. The distribution of Galois groups and Hilbert's irreducibility theorem. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 43(2) :227–250, 1981.

[31] Ray A Cuninghame-Green. The characteristic maxpolynomial of a matrix. *Journal of mathematical analysis and applications*, 95(1) :110–116, 1983.

[32] George B Dantzig. Origins of the simplex method. Technical report, Stanford Univ CA Systems Optimization Lab, 1987.

[33] P. Dèbes. Résultats récents liés au théorème d'irréductibilité de Hilbert. In *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1985–86*, volume 71 of *Progr. Math.*, pages 19–37. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987.

[34] S. P. Glasby. On the tensor product of polynomials over a ring. *J. Aust. Math. Soc.*, 71(3) :307–324, 2001.

[35] A. Hilali. Réductibilité d'un système différentiel linéaire. *Numer. Math.*, 41(1) :1–17, 1983.

[36] A. Hilali. On the algebraic and differential Newton-Puiseux polygons. *J. Symbolic Comput.*, 4(3) :335–349, 1987.

[37] A. Hilali and A. Wazner. Un algorithme de calcul de l'invariant de Katz d'un système différentiel linéaire. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 36(3) :67–81, 1986.

[38] J. Horn. Integration linearer differentialgleichungen durch laplacesche integrale und fakultätenreihen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 24 :309–329, 1915.

[39] W. B. Jurkat and D. A. Lutz. On the order of solutions of analytic linear differential equations. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 22 :465–482, 1971.

[40] Walter Keller-Gehrig. Fast algorithms for the characteristics polynomial. *Theoretical Computer Science*, 36 :309 – 317, 1985.

[41] Peter Kirrinnis. Fast algorithms for the Sylvester equation AX- XBT= C. *Theoretical Computer Science*, 259(1-2) :623–638, 2001.

[42] K. Kitagawa. L'irrégularité en un point singulier d'un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 23(3) :427–440, 1983.

[43] H. W. Kuhn. The hungarian method for the assignment problem. *Naval research logistics quarterly*, 2(1-2) :83–97, 1955.

[44] S. Lang. *Fundamentals of Diophantine geometry*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[45] S. Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

[46] A. H. M. Levelt. Jordan decomposition for a class of singular differential operators. *Ark. Mat.*, 13 :1–27, 1975.

[47] D. A. Lutz and R. Schäfke. On the identification and stability of formal invariants for singular differential equations. *Linear Algebra Appl.*, 72 :1–46, 1985.

[48] Barkatou M., Cluzeau T., El Bacha C., and Weil J.-A. Maple package IntegrableConnections. http://www.unilim.fr/pages_perso/thomas.cluzeau/Packages/IntegrableConnections/PDS.html.

[49] D. Maclagan and B. Sturmfels. *Introduction to tropical geometry*, volume 161. American Mathematical Soc., 2015.

[50] Bernard Malgrange. Sur les points singuliers des équations différentielles. *Enseignement Math. (2)*, 20 :147–176, 1974.

[51] Nimrod Megiddo et al. *On the complexity of linear programming*. IBM Thomas J. Watson Research Division, 1986.

[52] M. Miyake. On Cauchy-Kowalevski's theorem for general systems. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 15(2) :315–337, 1979.

[53] M. Miyake. Newton polygon and Gevrey hierarchy in the index formulas for a singular system of ordinary differential equations. *Funkcial. Ekvac.*, 55(2) :169–237, 2012.

[54] M. Miyake and K. Ichinobe. Irregularity for singular system of ordinary differential equations in complex domain. *Funkcial. Ekvac.*, 52(1) :53–82, 2009.

[55] J. Moser. The order of a singularity in Fuchs' theory. *Math. Z*, 72 :379–398, 1959/1960.

[56] J. Munkres. Algorithms for the assignment and transportation problems. *Journal of the society for industrial and applied mathematics*, 5(1) :32–38, 1957.

[57] H. Osada. The Galois groups of the polynomials $X^n + aX^l + b$. *J. Number Theory*, 25(2) :230–238, 1987.

[58] C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz. *Combinatorial optimization : algorithms and complexity*. Courier Corporation, 1998.

[59] E. Pflügel. *Résolution symbolique des systemes différentiels linéaires*. Université de Grenoble 1, 1998.

[60] E. Pflügel. An improved estimate for the maximal growth order of solutions of linear differential systems. *Arch. Math. (Basel)*, 83(3) :256–263, 2004.

[61] Eckhard Pflügel. Effective formal reduction of linear differential systems. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 10(2) :153–187, 2000.

[62] A. Schrijver. *Theory of linear and integer programming*. John Wiley & Sons, 1998.

[63] M. F. Singer. Testing reducibility of linear differential operators : a group theoretic perspective. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 7(2) :77–104, 1996.

[64] H. L. Turrittin. Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point. *Acta Math.*, 93 :27–66, 1955.

[65] T. Vaccon. *Précision p-adique*. PhD thesis, Université Rennes 1, 2015.

[66] M. van der Put and M. F. Singer. *Galois theory of linear differential equations*, volume 328 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[67] M. B. Villarino, W. Gasarch, and K. W. Regan. Hilbert's proof of his irreducibility theorem. *Amer. Math. Monthly*, 125(6) :513–530, 2018.

[68] L. R. Volevič. On general systems of differential equations. *Soviet Math. Dokl.*, 1 :458–461, 1960.

[69] J. Von Zur Gathen and J. Gerhard. *Modern computer algebra*. Cambridge university press, 2013.

[70] W. Wasow. *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*. Pure and Applied Mathematics, Vol. XIV. Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1965.

[71] J. K. Wong. A new implementation of an algorithm for the optimal assignment problem : An improved version of Munkres' algorithm. *BIT Numerical Mathematics*, 19(3) :418–424, 1979.

Symbolic methods for linear differential systems with irregular singularity

Abstract : This thesis is devoted to symbolic methods for local resolution of linear differential systems with coefficients in $K = \mathcal{C}((x))$, the field of Laurent series, on an effective field $\mathcal{C}$. More specifically, we are interested in effective algorithms for formal reduction. During the reduction, we are led to introduce algebraic extensions of the field of coefficients K (algebraic extensions of $\mathcal{C}$, ramification of the variable x) in order to obtain a finer structure. From an algorithmic point of view, it is preferable to delay as much as possible the introduction of these extensions. To this end, we developed a new algorithm for formal reduction that uses the ring of endomorphisms of the system, called "eigenring". Using the formal classification given by Balser-Jurkat-Lutz, we deduce the structure of the eigenring of an indecomposable system. These theoretical results allow us to construct a decomposition on the base field K that separates the different exponential parts of the system and thus allows us to isolate, in indecomposable subsystems in K, the different algebraic extensions that can appear in order to treat them separately. In a second part, we are interested in Miyake's algorithm for formal reduction. This algorithm is based on the computation of the Volevič weight and numbers of the valuation matrix of the system. We provide interpretations in graph theory and tropical algebra of the Volevič weight and numbers, and thus obtain practically efficient methods using linear programming. This completes a fundamental step in the Miyake reduction algorithm. These different algorithms are implemented as libraries for the computer algebra software Maple. Finally, we present a discussion on the performance of the reduction algorithm using the eigenring as well as a comparison in terms of timing between our implementation of Miyake's reduction algorithm by linear programming and the algorithms of Barkatou and Pflügel.

Keywords : Computer algebra, algorithms, differential systems, singularities, formal reduction, formal solutions, exponential parts, eigenring, decomposition, factorization, Poincaré rank reduction.

LABORATOIRE XLIM - UMR CNRS n° 7252
123, avenue Albert Thomas - 87060 LIMOGES

Méthodes symboliques pour les systèmes différentiels linéaires à singularité irrégulière

Résumé : Cette thèse est consacrée aux méthodes symboliques de résolution locale des systèmes différentiels linéaires à coefficients dans $K = \mathcal{C}((x))$, le corps des séries de Laurent, sur un corps effectif $\mathcal{C}$. Plus précisément, nous nous intéressons aux algorithmes effectifs de réduction formelle. Au cours de la réduction, nous sommes amenés à introduire des extensions algébriques du corps de coefficients K (extensions algébriques de $\mathcal{C}$, ramifications de la variable x) afin d'obtenir une structure plus fine. Du point de vue algorithmique, il est préférable de retarder autant que possible l'introduction de ces extensions. Dans ce but, nous développons un nouvel algorithme de réduction formelle qui utilise l'anneau des endomorphismes du système, appelé « eigenring », afin de se ramener au cas d'un système indécomposable sur K. En utilisant la classification formelle donnée par Balser-Jurkat-Lutz, nous déduisons la structure de l'eigenring d'un système indécomposable. Ces résultats théoriques nous permettent de construire une décomposition sur le corps de base K qui sépare les différentes parties exponentielles du système et permet ainsi d'isoler dans des sous-systèmes, indécomposables sur K, les différentes extensions de corps qui peuvent apparaître afin de les traiter séparément. Dans une deuxième partie, nous nous intéressons à l'algorithme de Miyake pour la réduction formelle. Celle-ci est basée sur le calcul du poids et d'une suite de Volevič de la matrice de valuation du système. Nous donnons des interprétations en théorie de graphe et en algèbre tropicale du poids et suites de Volevič, et obtenons ainsi des méthodes de calculs efficaces sur le plan pratique, à l'aide de la programmation linéaire. Ceci complète une étape fondamentale dans l'algorithme de réduction de Miyake. Ces différents algorithmes sont implémentés sous forme de librairies pour le logiciel de calcul formel Maple. Enfin, nous présentons une discussion sur la performance de l'algorithme de réduction avec l'eigenring ainsi qu'une comparaison en terme de temps de calcul entre notre implémentation de l'algorithme de réduction de Miyake par la programmation linéaire et ceux de Barkatou et Pflügel.

Mots clés : Calcul formel, algorithmes, système différentiel, singularités, réduction formelle, solutions formelles, parties exponentielles, eigenring, décomposition, factorisation, réduction du rang de Poincaré.

LABORATOIRE XLIM - UMR CNRS n° 7252
123, avenue Albert Thomas - 87060 LIMOGES