HAL
open science

Réduction de modèles cinétiques et applications à l'acoustique du bâtiment

Pierre Gerhard

To cite this version:

Pierre Gerhard. Réduction de modèles cinétiques et applications à l'acoustique du bâtiment. Acoustique [physics.class-ph]. Université de Strasbourg, 2020. Français. NNT : 2020STRAD001 . tel-02445322v3

HAL Id: tel-02445322

https://theses.hal.science/tel-02445322v3

Submitted on 6 Apr 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

ÉCOLE DOCTORALE 269

Mathématiques, Sciences de l'Information et de l'Ingénieur (MSII)

UMR 7501

UMR Institut de Recherche en Mathématique Avancée (IRMA)

THÈSE présentée par :

Pierre GERHARD

soutenue le : **28 janvier 2020**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : MATHÉMATIQUES

Réduction de modèles cinétiques et applications à l'acoustique du bâtiment

THÈSE dirigée par :

M. HELLUY Philippe	Professeur, université de Strasbourg

RAPPORTEURS :

M. SEGUIN Nicolas	Professeur, université de Rennes 1
M. SONNENDRÜCKER Éric	Professeur, institut Max Planck de Munich

AUTRES MEMBRES DU JURY :

M. BERTHON Christophe	Professeur, université de Nantes
M. NAVORET Laurent	Maitre de conférence, université de Strasbourg

Pierre GERHARD

Réduction de modèles cinétiques et applications à l'acoustique du bâtiment

Résumé

Dans cette thèse nous nous intéressons à différentes méthodes numériques pour la simulation de problèmes acoustiques haute-fréquence prenant place à l'échelle du bâtiment. Dans l'approximation haute-fréquence la propagation du son peut être modélisée par une équation de transport cinétique couplée à des conditions aux bords traduisant la nature spéculaire ou diffuse des réflexions avec les bords du domaine. Dans une première partie et afin de résoudre ce modèle posé dans un espace à sept dimensions, nous lui appliquons la méthode des ordonnées discrètes. Cette méthode consiste à discrétiser l'espace des vitesses en un nombre fini de directions admissibles et conduit à un système d'équations de transport couplées ayant perdu toute dépendance en vitesse. Dans une seconde partie, nous appliquons la méthode des moments avec fermeture entropique. Le système obtenu, de nature hyperbolique, permet de décrire la dynamique macroscopique par deux variables conservatives seulement. En dimension deux d'espace, la résolution de ces modèles est effectuée au travers d'un schéma volumes finis implémenté sur GPU. En dimensions trois d'espace, nous utilisons une méthode Galerkin discontinue exécutable sur architecture hybride GPU/CPU. À des fins comparatives, nous mettons également en place une méthode particulaire que nous résolvons par un algorithme de ray-tracing entièrement parallélisé sur GPU. Enfin, nous appliquons et comparons les méthodes développées sur plusieurs cas tests propres à l'acoustique des salles.

Mots clés : Acoustique haute fréquence ; Acoustique du bâtiment ; Modèle cinétique ; Méthode des ordonnées discrètes ; Méthode des moments ; Réduction d'entropie ; Méthode particulaire ; Volume fini ; Galerkin discontinue ; Ray-tracing ; Calculs GPU

Résumé en anglais

In this PhD thesis we are interested in the study of different numerical methods for the simulation of high-frequency acoustic problems taking place on the scale of the building. In the high-frequency approximation the sound propagation can be modeled through a kinetic transport equation paired with the boundary conditions that describe the specular or diffuse nature of the reflections with the boundaries of the domain. In the first part of this paper we will tackle the resolution of this model, posed in a seven-dimensional space, by the application of the discrete ordinates method. This method consists in the discretisation of the velocity space into a finite number of allowable directions and leads to a system of coupled transport equations having lost all velocity dependence. Secondly, we will apply the method of moments with entropic closure. The resulting system, of a hyperbolic nature, allows the macroscopic dynamics to be described by only two conservative variables. In two dimensions, the resolution of these models is performed through a finite volume scheme implemented on GPU. In three dimensions, a discontinuous Galerkin method is used which can be executed on a hybrid GPU/CPU architecture. For comparative purposes, a particle method has also been implemented and solved using a fully GPU-parallelised ray-tracing algorithm. Finally, we will apply and compare the developed methods on several test cases specific to room acoustics.

Keywords : High-frequency acoustic ; Building acoustic ; Kinetic model ; Discrete ordinates method ; Method of moments ; Entropy reduction ; Particle method ; Finite-volume ; Discontinuous Galerkin ; Ray-tracing ; GPU computations.

À mes parents et à toi Beatriz.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse Philippe Helluy. Sans son soutien, sa vision de la recherche et toutes ces discussions formelles et informelles, cette thèse n'aurait jamais vu le jour.

Dans un second temps, je tiens à remercier mon encadrant Laurent Navoret. Sa disponibilité sans faille, son immense implication, sa patience, son calme et sa positivité ont su me donner la force et la persévérance pour mener à bien ce travail. Je souhaite aussi remercier mon co-encadrant Cédric Foy, pour son expertise sur la partie acoustique et son travail méticuleux lors de la relecture du manuscrit.

Mes remerciements s'adressent également à Nicolas Seguin et Éric Sonnendrücker qui ont accepté de rapporter ma thèse.
Je remercie aussi Christophe Berthon et Yannick Privat de me faire l'honneur de compléter mon jury.

Un grand merci à François Der Hovsepian et Myriam Ounaïes pour votre optimisme, votre soutien moral et toutes ces longues discussions. Nos différences fondent toute la richesse de nos échanges.

Je remercie chaleureusement toutes les personnes que j'ai croisées à l'UFR durant toutes ces années : les doctorants présents et passés, les membres de l'équipe MOCO, mes collègues d'enseignement et enfin l'ensemble du personnel administratif.

Une pensée particulière à mes frères d'armes David B. et Guillaume B. qui me soutiennent depuis de nombreuses années.

À ma famille, j'adresse ma plus profonde reconnaissance, merci pour votre écoute, votre compréhension et votre soutien indéfectible, sans vous je ne serais jamais arrivé jusque là.

Enfin merci à Beatriz, la femme qui partage ma vie, sans ta présence et ton amour au quotidien je n'y serais jamais arrivé.

Table des matières

Introduction générale **1**

1 Équations de l'acoustique **9**
1 Introduction 10
2 Contexte acoustique 10
2.1 Ordres de grandeur 10
2.2 Équations des ondes acoustiques 11
2.3 L'onde plane harmonique 13
2.4 Conditions aux bords 13
2.5 Énergie acoustique 15
3 Modèles pour l'acoustique haute fréquence 17
3.1 Équation eikonale 17
3.2 Asymptotique basée sur la transformée de Wigner 18
4 Modèle cinétique pour l'acoustique 20
4.1 Équation de transport 20
4.2 Modélisation des conditions au bord 20
4.2.1 Loi de réflexion diffuse 21
5 Quantités d'intérêt en acoustique des salles 22
5.1 Échogramme 23
5.2 Décroissance de l'énergie totale 23
5.3 Temps de réverbération 24
5.4 Décroissance spatiale de la densité d'énergie 25

2 Discrétisation du modèle cinétique en dimension deux **27**
1 Modèle aux ordonnées discrètes 28
1.1 Modèle cinétique d'application 28
1.2 Discrétisation angulaire 28
1.3 Modèle aux ordonnées discrètes 29
2 Méthode volumes finis 31
2.1 Discrétisation en espace 32
2.2 Flux numérique 33
2.3 Discrétisation en temps 34

3 Discrétisation du modèle aux ordonnées discrètes 34
4 Implémentation 36
4.1 Les librairies OpenCL et PyOpen 37
4.1.1 Les kernels OpenCL 38
5 Validations 39
5.1 Transport libre avec conditions de Dirichlet 39
5.2 Transport avec condition de rebond spéculaire 42
5.3 Transport avec conditions de rebond mixtes 43
6 Conclusion 46

3 Discrétisation du modèle aux moments en dimension deux 49
1 Introduction 50
2 Méthode des moments 50
2.1 Moments de la fonction de distribution 51
2.2 Application aux équations de l'acoustique 51
3 Fermeture par réduction d'entropie 53
3.1 Entropie de Boltzmann 54
3.2 Réduction d'entropie 55
3.3 Inversion 56
3.4 Fermeture 58
3.5 Propriétés du modèle macroscopique 59
3.6 Calcul de la fermeture par méthode de Newton 61
3.7 Évaluation des fonctions de Bessel modifiées de première espèce 65
3.8 Calcul de la fermeture par interpolation 68
4 Résolution numérique 68
4.1 Modèle 68
4.2 Discrétisation en temps et en espace 69
4.3 Flux numériques 69
4.4 Conditions aux limites 70
5 Résultats numériques 71
5.1 Problème de Riemann 71
5.1.1 Valeur propres et champs caractéristiques 72
5.2 Validation numérique 75
6 Conclusion 78

4 Simulations acoustiques par ray-tracing sur GPU 81
1 Le ray-tracing pour l'acoustique 82
1.1 Principes de la méthode 82
1.2 Procédés de modélisation 84
2 Implémentation 89
2.1 Algorithme de ray-tracing 89
2.2 Traitement des données temporelles en volume récepteur . . . 90

2.3 Modélisation des états stationnaires 94
3 Validations 94

5 Discrétisation du modèle cinétique en dimension trois 97
1 Modèle aux ordonnées discrètes 98
1.1 Modèle cinétique d'application 98
1.2 Discrétisation angulaire 98
1.3 Modèle aux ordonnées discrètes 101
2 Méthode Galerkin discontinue 102
2.1 Généralités 102
2.2 Discrétisation en espace 103
2.3 Approximation nodale 105
2.4 Approximation des intégrales 106
3 Discrétisation en temps par méthode Runge-Kutta 109
4 Implémentation 110
4.1 Data-based parallelism and StarPU 110
4.2 L'approche macro-cellule 111
5 Codelets hybrides C/OpenCL 112
6 Validations 114
6.1 Transport libre avec conditions de Dirichlet 114

6 Discrétisation du modèle aux moments en dimension trois 117
1 Introduction 118
2 Application aux équations de l'acoustique 118
3 Fermeture par réduction d'entropie 119
3.1 Réduction d'entropie 119
3.2 Inversion 120
3.3 Fermeture 122
3.4 Calcul de la fermeture 124
4 Résolution numérique 126
4.1 Discrétisation en temps et en espace 127
4.2 Ordre élevé et sortie du domaine de réalisabilité physique . . . 127
4.3 Validations 128

7 Applications acoustiques 133
1 Introduction 134
2 Échogrammes 134
2.1 Problème 134
2.2 Résultats numériques en dimensions deux 135
3 Décroissance de l'énergie totale et temps de réverbération 144
3.1 Problème 144
3.2 Résultats numériques en dimensions deux 144

Conclusion générale et perspectives **149**

Bibliographie **153**

Introduction générale

Au cours des dix dernières années, les notions de performances et de qualité acoustique sont devenues des préoccupations majeures dans le domaine du bâtiment. Que cela soit pour des locaux tertiaires, des habitations ou encore des ateliers, ingénieurs et acousticiens travaillent conjointement à l'amélioration du confort acoustique des constructions. Au travers de leurs activités, ces derniers nécessitent des outils permettant de prévoir la propagation du son.

L'acoustique dans le domaine de l'audible et à l'échelle du bâtiment, repose sur le phénomène de propagation dans l'air, à la vitesse du son $c = 343\ m.s^{-1}$, d'ondes de pression sonore dont la fréquence varie entre 20 Hz et 20 kHz. Si nous négligeons l'absorption atmosphérique, ces ondes, émises par une source, vont subir, au fil des collisions sur les bords du domaine (mur, encombrement), des pertes d'énergie plus ou moins grandes et finiront par être complètement absorbées. Chercher à résoudre numériquement ce problème, revient ainsi à capturer un phénomène très localisé en espace (longueur d'onde $\lambda = c/f \approx 10^{-1}$) sur des distances de l'ordre de la dizaine de mètres. Si la résolution numérique de l'équation des ondes les caractérisant est possible en basses fréquences, elle reste toutefois hors de portée dans les cas de hautes fréquences du fait des coûts calculatoires imposés par la finesse de la discrétisation à employer. La simulation des problèmes hautes fréquences nécessite ainsi une modification de l'approche employée [58].

Une approche classique utilisée pour la résolution des problèmes acoustiques hautes fréquences est la méthode du lancer de rayons (RT pour ray-tracing en anglais) [59]. Cette méthode, basée sur une conception particulaire du son, offre d'excellents résultats, mais présente toutefois un certain nombre de limitations par exemple en présence de géométries complexes où les "rayons" peinent à couvrir certaines zones de l'espace, limitant de ce fait le calcul des grandeurs acoustiques [9]. Des travaux récents ont été effectués afin de décrire le transport acoustique à l'échelle du bâtiment au moyen d'une équation de diffusion [56, 33] et ainsi éviter la dépendance statistique inhérente à la méthode RT. Ce modèle présente lui aussi certaines limitations imposant le besoin de modifier le coefficient de diffusion en présence de forte anisotropie géométrique [21].

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la modélisation du transport acoustique hautes fréquences au travers d'un modèle de transport cinétique posé dans un

espace à sept dimensions [43]. À des fins numériques et après avoir détaillé comment construire ce modèle de transport, nous chercherons à réduire sa complexité. En s'inspirant de travaux effectués en théorie du transport radiatif [1, 29, 18], nous lui appliquerons la méthode des ordonnées discrètes ainsi que celle des moments avec fermeture entropique. L'application de ces méthodes en deux et trois dimensions d'espace nous permettra d'établir des modèles réduits que nous chercherons alors à résoudre par méthode volumes finis et Galerkin discontinue. Dans le but d'avoir une base comparative pour nos modèles, nous avons également développé un code de ray-tracing fonctionnant entièrement sur carte graphique (GPU). Une fois l'ensemble de ces modèles établis et après validation des méthodes de résolutions numériques, nous chercherons à les confronter sur des cas tests afin de dégager leurs capacités et leurs limites à restituer les propriétés acoustiques d'une salle. La structure de la thèse est détaillée ci-dessous.

Structure de la thèse

Chapitre 1

Le premier chapitre présente le contexte physique et mathématique des problèmes étudiés. Nous commencerons par rappeler comment obtenir, à partir des équations de la dynamique des fluides, l'équation des ondes

$$\partial_{tt}p(\mathbf{x},t) - c^2\Delta p(\mathbf{x},t) = 0, \quad \forall t > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

dépendant de la variable d'espace $\mathbf{x} \in \Omega$ et du temps $t > 0$. Dans un second temps nous décrirons les phénomènes qui prennent place lors d'une collision entre une onde plane harmonique (solution de (1)) et une paroi du domaine Ω. Nous nous placerons ensuite dans l'approximation hautes fréquences et présenterons une méthode étudiée par Gérard, Markowich, Mauser et Poupaud [22] qui permet, par le biais de la transformée de Wigner, de passer de l'équation des ondes (1) à une équation de transport,

$$\partial_t f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = 0, \quad \forall(\mathbf{x},\mathbf{v},t) \in \Omega\times\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}^+, \tag{2}$$

régissant la dynamique d'une fonction de distribution $f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ associée à des "particules sonores". Chaque particule sonore transporte alors une certaine quantité d'énergie acoustique et $f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\,\delta x\,\delta v$ est égale au nombre de particules présentes à l'instant t dans un voisinage (de taille δx) autour de $\mathbf{x}$ et se déplaąnt à une vitesse comprise dans un voisinage (de taille δv) de $\mathbf{v}$. Nous expliquerons également le lien qui existe entre la fonction de distribution f et la densité d'énergie acoustique $w(\mathbf{x},t)$ et l'intensité acoustique $\mathbf{I}(\mathbf{x},t)$ que nous chercherons à étudier. Par la suite, nous compléterons ce modèle de transport, en lui ajoutant des conditions aux

bords permettant de traduire les phénomènes de réflexions et d'absorption à l'échelle cinétique. Ces conditions, similaires aux conditions de Maxwell pour l'équation de Boltzmann, sont de la forme

$$f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = (1-\alpha)\beta f^s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)+(1-\alpha)(1-\beta)f^d(\mathbf{x},\mathbf{v},t), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{S}^-(\mathbf{x}), \forall t \in \mathbb{R}^+, \tag{3}$$

et permettent de traiter les réflexions de types spéculaire et diffuse. Le coefficient α désigne le coefficient d'absorption et β est appelé coefficient d'accomodation. Les équations (2) et (3) constituent le modèle de base employé dans toute cette thèse. La dernière section de ce chapitre permettra d'introduire les différentes quantités d'intérêt propre à l'acoustique des salles. Ces quantités nous permettront de confronter, au travers de cas tests acoustique réalisés au Chapitre 7, les différents modèles réduits développés dans cette thèse.

Chapitre 2

Dans ce chapitre, nous considérons le problème en dimension deux d'espace. Nous rappellerons dans un premier temps la méthode des ordonnées discrètes (DOM) et l'appliquerons au modèle de transport (2)-(3). La méthode repose sur la discrétisation de l'ensemble des vitesses $\mathbb{S}^{d-1}$ en un nombre N de vitesses discrètes. Au travers de cette discrétisation, que nous choisirons ici comme uniforme, la méthode DOM nous permettra d'aboutir à un système de N équations de transport couplées par les conditions aux bords. Nous expliquerons également les difficultés relatives au traitement des conditions aux bords de type spéculaire dans le modèle discret en vitesse obtenu par méthode DOM. Ce modèle, également appelé modèle S_N, sera ensuite résolu en espace et en temps par méthode volumes finis (VF). Nous introduirons pour cela, le cadre général de la méthode VF et nous l'appliquerons au modèle S_N. Nous donnerons en outre, quelques détails liés à l'implémentation du schéma sur carte graphique (GPU) au travers des librairies OpenCL et PyOpenCL. Des cas tests par solutions manufacturées et inspirés des travaux de Hardy [41] nous permettront de tester notre méthode en présence (ou non) de conditions aux bords et ainsi de la valider au travers des ordres de convergence obtenus.

Chapitre 3

Dans ce chapitre, nous considérerons à nouveau le problème en deux d'espace. Nous rappellerons tout d'abord la méthode des moments puis l'appliquerons au modèle cinétique (2)-(3). Cette méthode de réduction consiste à prendre les N premiers moments de la fonction de distribution f et ainsi éliminer toute dépendance en vitesse. Le passage à l'échelle macroscopique effectué par le calcul des moments, engendre toutefois, une perte de fermeture du système : le moment d'ordre $N+1$ est

indéterminé. Afin de fermer notre système, nous utiliserons la méthode de minimisation d'entropie [48]. Cette méthode de fermeture consiste à supposer que la fonction de distribution f réalise le minimum d'une fonction d'entropie sous contrainte des $N-1$ premiers moments. Cette opération permet alors d'exprimer le moment d'ordre $N+1$ en fonction des N autres moments et ainsi de retrouver la fermeture de notre système. Dans nos applications nous considérerons uniquement les deux premiers moments w et $\mathbf{I}$ (ordre 0 et 1) de la fonction de distribution f nous permettant d'aboutir au système macroscopique,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \partial_t w(\mathbf{x},t) & + & \nabla\cdot\mathbf{I}(\mathbf{x},t) & = & 0, \\ \partial_t \mathbf{I}(\mathbf{x},t) & + & \nabla\cdot\mathbf{P}(\mathbf{x},t) & = & 0. \end{array} \right. \tag{4}$$

La fermeture par minimisation d'entropie permettra de donner l'expression du moment d'ordre 2, $\mathbf{P}$ en fonction de w et $\mathbf{I}$ telle que

$$\mathbf{P}(w,\mathbf{I}) = c^2 w \left[\big(1-\chi(r)\big)\,\mathbf{Id} + \big(2\chi(r)-1\big)\frac{\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}}{I^2} \right]. \tag{5}$$

avec $\mathbf{Id}$ la matrice identité, $r = |\mathbf{I}|/(cw)$ le facteur d'anisotropie du milieu et $\chi(r)$ une fonction non linéaire qui est l'équivalent du facteur d'Eddington dans les modèles de transport radiatif. Nous donnerons également quelques propriétés importantes relatives au modèle non linéaire (4)-(5) (appelée également modèle M_1). Nous verrons que le calcul du terme χ, impose en deux dimensions d'espace, l'inversion d'un problème non linéaire dans lequel interviennent les fonctions de Bessel modifiées de première espèce. Par la suite, nous chercherons à résoudre numériquement le modèle M_1 au travers de la méthode VF développée au Chapitre 2. Nous verrons également comment imposer la condition aux bords cinétique (3) à l'échelle macroscopique du modèle M_1. Pour ce faire nous utiliserons un flux numérique cinétique, calculé à partir des méthodes de quadrature sur le cercle développées au Chapitre 2. Nous présenterons à ce moment-là certains détails relatifs à l'implémentation de l'algorithme permettant le calcul de χ. La dernière partie de ce chapitre sera consacrée à la validation du schéma numérique mis en place. Cette validation se base sur la résolution du problème de Riemann en une dimension d'espace. Ce problème a été résolu théoriquement [17] dans le cadre d'un modèle M_1 dont les moments sont calculés sur la sphère unité $\mathbb{S}^2$. En nous basant directement sur les résultats de [17], nous vérifions numériquement les propriétés assurant l'existence et l'unicité de la solution dans le cas d'un modèle M_1 construit à partir du cercle unité $\mathbb{S}^1$. Cette étude nous permettra enfin d'écrire un solveur de Riemann exact et ainsi de vérifier l'ordre de convergence de notre schéma numérique.

Chapitre 4

Dans le Chapitre 4 nous développons une méthode de ray-tracing dédiée à l'acoustique que nous utiliserons pour résoudre des problèmes à deux et trois di-

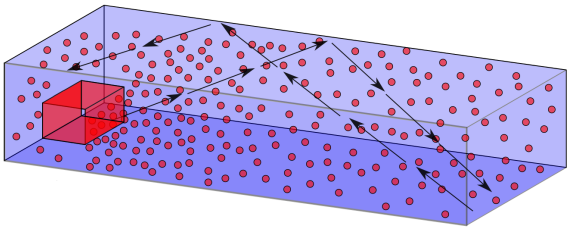


Figure 1: Illustration de la méthode de ray-tracing

mensions en espace. Nous commencerons ce chapitre en présentant la méthode de ray-tracing. Cette approche permet de passer du modèle cinétique de départ (2)-(3) à un modèle dit "particulaire". Elle consiste à approcher la fonction de distributions f par une somme pondérée de N_p deltas de Dirac telle que,

$$f_p(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{k=1}^{N_p} \omega_k(t)\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k(t))\, \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k(t)) \quad t > 0, \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d. \tag{6}$$

À chaque delta de Dirac sera associe le concept de "particules sonores". Au regard de l'équation de transport, (2) la propagation de ces particules entre deux collisions s'effectue en ligne droite le long de "rayons" venant intersecter les bords du domaine (voir Figure 1). Nous expliquerons également la modélisation employée afin de traiter les collisions spéculaire et diffuse.

L'objectif de cette méthode est naturellement de pouvoir remonter aux variations spatiales et temporelles des quantités acoustiques. Pour les calculer, nous utiliserons le concept de volume récepteur dans lequel nous déterminerons les variations temporelles de ces quantités. Par la suite, nous détaillerons certains aspects liés à l'implémentation de la méthode sur GPU. Nous insisterons en particulier sur une des difficultés algorithmiques rencontrées lors de la reconstruction des données temporelles. Nous expliquerons comment contourner cette difficulté, qui est un problème de type ""histogramme", en utilisant un ensemble de primitives GPU parallélisées. La fin de ce chapitre sera consacrée à la validation de notre méthode en la confrontant à un code de ray-tracing dédié à l'acoustique des salles [57].

Chapitre 5

Dans ce Chapitre nous appliquerons la méthode des ordonnées discrètes (DOM) ou méthode S_N au modèle de transport cinétique posé en trois dimensions (2)-(3). Dans le cas 3D, nous utiliserons une discrétisation en vitesse basée sur les points de Lebedev [46] et qui permet d'obtenir de bonnes propriétés d'intégration sur la sphère unité $\mathbb{S}^2$. Ce modèle sera ensuite discrétisé en espace par méthode Galerkin discontinue (DG) et en temps par méthode Runge-Kutta (RK) d'ordre deux. Nous décrirons le cadre général de la méthode RK-DG et l'appliquerons au modèle S_N

3D. Ce modèle sera implémenté au sein de la librairie SCHNAPS (Solveur pour les lois de Conservation Hyperboliques Non-linéaires Appliqué aux PlasmaS) [31]. Nous détaillerons certains points de son implémentation via la librairie StarPU [5]. Le schéma sera ensuite validé au travers d'une étude de convergence.

Chapitre 6

Le chapitre 6 est dédié à l'application de la méthode des moments avec fermeture entropique pour le problème (2)-(3) en 3D. La fermeture entropique nous donnera alors comme expression du moment d'ordre 2 $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(w, \mathbf{I}) = c^2 w \left[\frac{(1-\chi(r))}{2} \mathbf{Id} + \frac{(3\chi(r)-1)}{2} \frac{\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}}{I^2} \right], \tag{7}$$

Le calcul du facteur d'Eddington χ demande à nouveau la résolution d'un problème non linéaire, impliquant cette fois-ci, des fonctions hyperboliques. Pour le résoudre, nous réutiliserons la méthode employée au Chapitre 3. La discrétisation en temps et en espace du modèle sera faite par méthode RK-DG. Nous utilisation à nouveau un flux cinétique permettant d'imposer les conditions aux bords du domaine. Le calcul de ces flux fera alors appel aux méthodes de quadrature de Lebedev mises en place au Chapitre 5. Le modèle sera implémenté dans la librairie SCHNAPS que nous validerons au travers d'une étude de convergence sur le problème de Riemann à une dimension associé.

Chapitre 7

Dans ce dernier chapitre, nous chercherons à comparer nos différents modèles sur des cas tests acoustiques prenant place dans des salles à géométries simples (cube/couloir). Ces applications nous permettront d'évaluer, la capacité ainsi que les limites des modèles réduits M_1 et S_N, à restituer les comportements propres à l'acoustique des salles.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons à l'étude de la réponse impulsionnelle d'une salle. L'étude de l'évolution temporelle de la densité d'énergie w dans un volume récepteur nous permettra d'évaluer l'aptitude des modèles à restituer l'écho-gramme d'une salle. Nous verrons les limites de ces modèles réduits en présence d'anisotropie géométrique et en fonction des coefficients d'accommodation et d'absorption aux parois.

Dans un second temps, nous chercherons à étudier certaines propriétés obtenues en présence d'un état stationnaire de l'énergie totale. Nous nous intéresserons plus particulièrement à la décroissance de l'énergie totale en fonction du temps et du coefficient d'absorption à la paroi. Pour les salles, cette décroissance est caractérisée

par la loi d'Eyring [20] avec laquelle nous chercherons à nous comparer. La vitesse de décroissance de l'énergie totale nous permettra également de remonter aux temps de réverbérations des salles considérées.

Enfin, lors d'un dernier cas test, nous étudierons, à l'état stationnaire, les variations en espace de la densité d'énergie w en fonction de la distance à la source. Nous confronterons nos résultats avec les résultats théoriques propres à l'acoustique des salles.

Chapitre 1

Équations de l'acoustique

Contenu

1 Introduction 10

2 Contexte acoustique 10

2.1 Ordres de grandeur 10

2.2 Équations des ondes acoustiques 11

2.3 L'onde plane harmonique 13

2.4 Conditions aux bords 13

2.5 Énergie acoustique 15

3 Modèles pour l'acoustique haute fréquence 17

3.1 Équation eikonale 17

3.2 Asymptotique basée sur la transformée de Wigner 18

4 Modèle cinétique pour l'acoustique 20

4.1 Équation de transport 20

4.2 Modélisation des conditions au bord 20

5 Quantités d'intérêt en acoustique des salles 22

5.1 Échogramme 23

5.2 Décroissance de l'énergie totale 23

5.3 Temps de réverbération 24

5.4 Décroissance spatiale de la densité d'énergie 25

1 Introduction

Dans ce premier chapitre, nous rappelons comment obtenir l'équation des ondes à partir des équations de la dynamique des fluides. La résolution numérique de l'équation des ondes à l'échelle du bâtiment reste aujourd'hui impossible au regard du maillage devant être employé. En effet, à l'échelle du bâtiment, résoudre l'équation des ondes revient à déterminer en trois dimensions d'espace sur des géométries de plusieurs mètres, un phénomène acoustique oscillatoire ayant une longueur d'onde proche de 10^{-4} m (10 kHz). Afin de contourner cette limitation, nous présenterons un résultat permettant de passer de l'équation des ondes en haute fréquence à une équation de transport cinétique de "particules acoustiques". Le modèle ainsi obtenu, sera complété par des conditions aux bords traduisant le comportement des dites particules aux parois et servira de base pour toute cette thèse. Enfin nous présenterons un certain nombre de grandeurs physiques d'intérêt propre à l'acoustique du bâtiment. Ces grandeurs nous permettront d'évaluer nos modèles lors de cas tests acoustiques au Chapitre 7.

2 Contexte acoustique

2.1 Ordres de grandeur

Avant de décrire les modèles mathématiques de propagation des ondes, nous commençons par introduire quelques ordres de grandeur. De manière simplifier, les ondes de pression dans l'air sont caractérisées par leurs vitesses, leurs fréquences et leurs amplitudes. Par exemple, une onde harmonique plane s'écrit

$$p(\mathbf{x}, t) = \hat{p} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - ct)$$

où $c > 0$ est la vitesse d'onde, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur d'onde et $\hat{p} > 0$ l'amplitude du signal.

Vitesse du son. À une température de 20°C, les ondes de pression se propagent à environ 343 m.s^{-1}.

Fréquence du son. La fréquence du son, appelée aussi hauteur du son, est égale à la quantité $f = ||\mathbf{k}||c/(2\pi)$. La parole comprend des fréquences comprises entre 50 et 350 Hz. Il s'agit de la tonalité fondamentale de vibration des cordes vocales. Une salle de concert doit quant à elle permettre de transmettre correctement des sons compris entre 50 Hz et 10 kHz. Le piano couvre par exemple 7 octaves et demie et va du La - 27,5 Hz au Do - 4 186,01 Hz.

L'onde plane est également caractérisée par sa longueur d'onde $\lambda = 2\pi/||\mathbf{k}|| = c/f$, qui est inversement proportionnelle à la fréquence.

Intensité du son. L'intensité du son est mesurée à travers le niveau de pression acoustique ou SPL pour sound pressure level. Il s'agit de la quantité

$$\mathrm{SPL} = 10 \log_{10} \left(\frac{\hat{p}^2}{2p_0^2} \right) \text{ dB}, \tag{1.1}$$

où p_0 est une pression de référence, égale à 2×10^{-5} Pa et qui correspond au niveau de pression nécessaire à l'oreille humaine pour entendre un signal de 1000 Hz. Il est à noter que le niveau de pression acoustique est sans dimension. L'unité, le décibel (dB), est uniquement introduite pour rappeler la définition de cette quantité. De manière plus générale, le niveau de pression acoustique peut-être définit à partir la moyenne temporelle de la pression au carré. Il s'agit en fait d'une quantité liée à l'énergie de l'onde. Nous renvoyons pour plus détails à [39].

Une conversation normale génère une un niveau de pression acoustique d'environ 70 dB, tandis qu'un orchestre génère un niveau de pression acoustique d'environ 100 dB.

Cette description par onde plane s'avère trop peu précise pour décrire l'acoustique d'une salle où il faut prendre en compte les multiples réverbérations et absorptions sur les parois et les obstacles présents dans la salle. C'est pourquoi nous nous tournons vers une description de la dynamique des ondes de pression.

2.2 Équations des ondes acoustiques

Dans cette section nous rappelons comment obtenir l'équation des ondes sonores à partir des lois de la dynamique des fluides. La propagation du son est modélisée par le déplacement d'une onde de pression dans un milieu fluide (ici l'air). En espace, nous caractériserons le milieu fluide au travers de son domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ où d désigne la dimension physique du problème. Dans ce chapitre, nous considérons la dimension physique $d = 3$. La dynamique d'un fluide compressible est gouvernée par les équations d'Euler traduisant la conservation de sa masse et de sa quantité de mouvement. Pour fermer le modèle d'Euler, nous rajoutons une équation d'état propre aux caractéristiques thermodynamiques du fluide considéré. Ici, nous considérerons l'air comme un gaz isentropique, *ie* sa pression P est alors uniquement fonction de sa densité ρ. Enfin, en considérant l'air comme un gaz parfait non visqueux et en négligent les forces externes, les équations de la dynamique des fluides deviennent [40]

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1.2a}$$

$$\rho\, \partial_t \mathbf{u} + \rho\, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla P(\rho) = 0, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1.2b}$$

avec $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$ la variable d'espace, $t > 0$ le temps, $\rho(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ la densité du fluide, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d$ la vitesse du fluide et $\rho \mapsto P(\rho) \in \mathbb{R}$ la loi de pression. Dans notre cas, la pression satisfait la relation : $P'(\rho) = c^2$ où $c > 0$ désigne la vitesse du son dans le fluide.

Une solution particulière de (1.2a) est la solution constante $u = 0$, $P = \overline{p}$, qui correspond à un gaz immobile à pression constante. Nous introduisons à présent, une variation de pression p de faible amplitude telle que,

$$P = \bar{p} + p. \tag{1.3}$$

En linéarisant les équations (1.2a)-(1.2b) autour de la solution constante, nous trouvons alors

$$\frac{1}{c^2}\partial_t p + \bar{\rho}\,\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1.4a}$$

$$\bar{\rho}\,\partial_t \mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1.4b}$$

avec $\bar{\rho} = \rho(\bar{P})$. En divisant à présent par $\bar{\rho}$ (1.4a)-(1.4b), puis en soustrayant la dérivée temporelle de (1.4a) par la divergence de (1.4b) nous obtenons

$$\frac{1}{\bar{\rho}c^2}\partial_{tt} p - \nabla \cdot \frac{1}{\bar{\rho}}\nabla p = 0, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{1.5}$$

Nous pouvons ainsi réécrire (1.5) sous la forme

$$\partial_{tt} p - c^2 \Delta p = 0, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{1.6}$$

L'équation (1.6) est appelée équation des ondes. Il est important de noter que l'approche précédente repose sur le fait que le milieu de propagation est considéré comme statique, adiabatique et homogène. L'introduction d'une dépendance entre la vitesse du son c et la température du fluide nécessite de modifier les équations précédentes.

Équation d'Helmholtz

L'équation des ondes (1.6) peut être réécrite dans le domaine fréquentiel au travers de la transformée de Fourier. Cela nous donne

$$\Delta p(\mathbf{x}, \omega) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p(\mathbf{x}, \omega) = 0 \tag{1.7}$$

avec ω la fréquence angulaire. Cette équation, appelée équation d'Helmholtz, est généralement plus simple à résoudre que l'équation des ondes du fait de la réduction dimensionnelle engendrée par le passage dans le domaine fréquentiel.

2.3 L'onde plane harmonique

Afin d'illustrer les phénomènes acoustiques régis par l'équation des ondes, nous nous intéressons à une solution particulière de (1.6) : l'onde plane harmonique. Pour la pression, l'onde plane harmonique est définie par,

$$p(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{k}) \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \tag{1.8}$$

avec $i = \sqrt{-1}$ le nombre complexe, $\mathbf{k}$ le vecteur d'onde désignant la direction de propagation, $\omega \in \mathbb{R}^*$ la pulsation ou fréquence angulaire et $A(\mathbf{k})$ l'amplitude de l'onde. Nous définissons le nombre d'onde comme

$$k = \frac{\omega}{c}. \tag{1.9}$$

Dans le cas $k = |\mathbf{k}|$, l'onde plane harmonique (1.8) est alors solution de l'équation des ondes (1.6). Au travers de l'équation (1.4b), il est également possible de réécrire (1.8) sur la vitesse du fluide $\mathbf{u}$. Cela nous donne

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{k}}{\bar{\rho}\omega} A(\mathbf{k}) \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}, t)}{\bar{\rho}\omega}. \tag{1.10}$$

D'après (1.8), nous remarquons que pour toute onde plane progressive, la pression p reste constante selon tout plan perpendiculaire à $\mathbf{k}$. Ces plans sont également appelés fronts d'onde. Dans le cas tridimensionnel, nous définissons également la longueur d'onde λ et la fréquence f comme

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} \quad \text{et } \omega = |\mathbf{k}|c. \tag{1.11}$$

2.4 Conditions aux bords

L'onde plane harmonique (1.8) décrit la propagation d'une perturbation ondulatoire à l'intérieur d'un milieu fluide dont le domaine spatial est caractérisé par Ω. Lorsque l'onde atteint un bord du domaine $\partial\Omega$, une partie de son énergie est réfléchie tandis qu'une autre est absorbée ou transmise au travers de la paroi.

Coefficients de réflexion et d'absorption

La variation d'énergie de l'onde réfléchie est traduite par un changement de son amplitude. Ce changement d'amplitude est relié à une propriété intrinsèque du matériau appelée coefficient de réflexion. Le coefficient de réflexion R est défini selon

$$R = |R| \exp(i\chi) \tag{1.12}$$

avec χ désignant le déphasage induit à la paroi. Le coefficient de réflexion peut naturellement varier selon l'angle d'incidence de l'onde, mais aussi selon de sa fréquence.

À partir de la (1.12) nous pouvons également définir le coefficient d'absorption α tel que

$$\alpha = 1 - |R|^2. \tag{1.13}$$

Sous cette notation, une paroi sera qualifiée de non absorbante lorsque $\alpha = 0$ et de totalement absorbante lorsque $\alpha = 1$.

Impédance acoustique

Une autre quantité d'intérêt est l'impédance acoustique, elle quantifie la résistance de la paroi au passage de l'onde. En notant par $\mathbf{n}$ la normale sortante unitaire à la paroi, l'impédance acoustique est alors définie par

$$Z = \frac{p}{v_n} \tag{1.14}$$

avec

$$v_n = \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p \cdot \mathbf{n}. \tag{1.15}$$

L'impédance acoustique dépend généralement de la fréquence et de l'angle d'incidence. En utilisant (1.4b), nous remarquerons par ailleurs que la quantité v_n est reliée à la vitesse du fluide par

$$v_n = -\partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \tag{1.16}$$

nous avons ainsi

$$-\partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial n}. \tag{1.17}$$

Réflexion spéculaire

Lorsqu'une onde entre en collision avec une paroi, elle subira un changement de direction. Ce changement de direction est caractérisé par la nature de la réflexion. Lors d'une réflexion dite spéculaire, les vecteurs d'onde $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}'$ respectivement associés à l'onde incidente p_i et l'onde réfléchiep_r sont reliés par la relation géométrique

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} - 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \tag{1.18}$$

Nous allons chercher à présent, à traduire la condition (1.18) à l'échelle de la pression et de la vitesse du fluide. Nous considérons une onde de pression plane incidente p_i dont le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ fait un angle θ avec la normale sortant $\mathbf{n}$ à la paroi. Par une rotation nous nous ramenons dans le plan $\mathcal{P}$ contenant les vecteurs $\mathbf{n}$ et $\mathbf{k}$. Dans ce plan, nous choisissons comme premier vecteur de base le vecteur $\mathbf{n}$ et comme second vecteur le vecteur tangent à la paroi contenu dans le plan $\mathcal{P}$. Dans ce repère, le vecteur $\mathbf{k}$ a alors pour composantes

$$\mathbf{k} = k \left[\cos(\theta), \sin(\theta)\right], \tag{1.19}$$

avec $\theta \in [0, \pi/2]$. D'après (1.8) l'onde plane incidente p_i s'écrit

$$p_i(\mathbf{x}, t) = A \exp(-i\omega t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \tag{1.20}$$

En utilisant la définition du coefficient de réflexion (1.12), nous avons alors pour l'onde réfléchie

$$p_r(\mathbf{x}, t) = RA \exp(-i\omega t) \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}). \tag{1.21}$$

Cherchons à présent une condition vérifiée par l'onde totale

$$p(\mathbf{x}, t) = p_i(\mathbf{x}, t) + p_r(\mathbf{x}, t). \tag{1.22}$$

Un calcul de la dérivée normale de p nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{A}{\bar{\rho}} \exp(-i\omega t) \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + Ri\mathbf{k}' \cdot \mathbf{n} \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}) \right] \\ &= i \frac{A}{\bar{\rho}} \frac{\omega}{c} \exp(-i\omega t) \cos(\theta) \left[\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) - R \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}) \right]. \end{aligned} \tag{1.23}$$

D'autre part,

$$p(\mathbf{x}, t) = A \exp(-i\omega t) \left[\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + R \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}) \right]. \tag{1.24}$$

En se plaçant sur un point du bord tel que $\mathbf{x} = (0, y)$, nous obtenons

$$Z = \frac{p}{\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}} = \frac{c\bar{\rho}}{i\omega \cos(\theta)} \frac{1+R}{1-R}. \tag{1.25}$$

Cela nous donne ainsi, comme condition sur la pression :

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{1-R}{1+R} \frac{\cos\theta}{c\bar{\rho}} \partial_t p = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{1.26}$$

En utilisant (1.17) et en intégrant en temps, nous obtenons une autre condition aux limites naturelle :

$$-\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \frac{\cos\theta}{\bar{\rho}^2 c} \frac{1-R}{1+R} p = \text{cste}, \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{1.27}$$

2.5 Énergie acoustique

L'énergie transportée par une onde acoustique dans un milieu fluide peut être vue comme la somme de l'énergie cinétique générée par le mouvement des particules

autour de leur position d'origine et de l'énergie potentielle provenant de la compression du fluide. Nous avons vu que, dans le cas d'un fluide homogène non visqueux au repos, les équations générales de l'acoustique sans terme source s'écrivent

$$\bar{\rho}\,\partial_t \mathbf{u} + \nabla p \quad = 0 \tag{1.28}$$

$$\frac{1}{\bar{\rho}c^2}\,\partial_t p + \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad = 0. \tag{1.29}$$

En multipliant (1.29) par $p/\bar{\rho}$ et (1.28) par $\mathbf{u}$ puis en additionnant les deux équations, nous obtenons,

$$\frac{1}{2\bar{\rho}c^2}\partial_t p^2 + \frac{\bar{\rho}}{2}\partial_t |\mathbf{u}|^2 + \nabla \cdot (p\mathbf{u}) = 0. \tag{1.30}$$

Nous pouvons interpréter l'équation (1.30) comme une équation conservative de la forme

$$\partial_t w + \nabla \cdot \mathbf{I} = 0, \tag{1.31}$$

où la densité d'énergie acoustique est définie par

$$w(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}p(\mathbf{x}, t)^2 + |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2\right). \tag{1.32}$$

et le flux d'énergie acoustique, ou intensité acoustique, par

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \tag{1.33}$$

Nous pouvons également définir l'énergie acoustique totale $\mathcal{E}$ sur un domaine Ω par

$$\mathcal{E}(t) = \int_\Omega w(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x} = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{p(\mathbf{x}, t)^2}{\bar{\rho}c^2} + \bar{\rho}|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}. \tag{1.34}$$

La dissipation au court du temps de l'énergie totale se traduit alors par,

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0), \quad \forall t \geq 0. \tag{1.35}$$

En intégrant l'équation de propagation de l'énergie (1.31) sur Ω, puis en utilisant la formule de Stokes et la condition aux limites (1.27), nous obtenons bien

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2c^2}p^2 + \mathbf{u}^2 = -\int_{\partial\Omega} p^2\,\frac{\cos\theta}{\bar{\rho}^2 c}\frac{1-R}{1+R} \leq 0, \tag{1.36}$$

puisque $\cos\theta > 0$ sur $\partial\Omega$.

3 Modèles pour l'acoustique haute fréquence

Si la résolution de l'équation des ondes par méthode éléments finis est relativement aisée en basses fréquences (*ie* pour des longueurs d'onde grandes), il n'en est pas de même lors du passage en hautes fréquences. En effet, pour les sons hautes fréquences, la longueur d'onde diminue drastiquement et impose de ce fait, un maillage extrêmement fin qui fera exploser les coûts calculatoires. De la même manière, une connaissance détaillée de la réponse fréquentielle de chacun des constituants du domaine de calcul Ω reste naturellement hors de portée en termes de mesures. Dans cette section, nous présentons des modèles réduits permettant de traiter les problèmes hautes fréquences. Nous n'allons donc plus chercher à résoudre l'équation des ondes, mais une équation lui étant équivalente à haute fréquence.

La caractérisation des problèmes hautes fréquences se fait au travers d'un paramètre ϵ défini comme

$$\epsilon = \frac{\lambda}{L} \tag{1.37}$$

avec λ la longueur d'onde caractéristique et L la longueur caractéristique du problème.

3.1 Équation eikonale

Cette méthode repose sur un développement asymptotique de la solution en fonction du paramètre ϵ. Elle est valide lorsque $\epsilon \to 0$. Nous rappelons ici comment obtenir une équation asymptotique : l'équation eikonale. Nous considérons une solution $p(\mathbf{x})$ de (1.7) telle que

$$p(\mathbf{x}) = \exp(i\omega S(\mathbf{x})) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j(\mathbf{x})}{(i\omega)^j}. \tag{1.38}$$

avec $S(\mathbf{x})$ le terme de phase et $\{A_j(\mathbf{x})\}_{j=0}^{\infty}$ les amplitudes associées. La solution (1.38) est appelée "ray serie" et est une approximation à l'asymptotique de la solution exacte de (1.7) (voir *eg* [35]). En réinjectant l'équation précédente et en supprimant le terme de phase, $\exp(i\omega S(\mathbf{x}))$ nous obtenons

$$\left((-\omega^2 |\nabla S(\mathbf{x})|^2 + i\omega \Delta S(\mathbf{x})) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j(\mathbf{x})}{(i\omega)^j} + 2i\omega \nabla S(\mathbf{x}) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\nabla A_j(\mathbf{x})}{(i\omega)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Delta A_j(\mathbf{x})}{(i\omega)^j} \right) + \frac{\omega}{c^2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j(\mathbf{x})}{(i\omega)^j} \right) = 0 \tag{1.39}$$

En assumant $A_0 \neq 0$ et en développant selon j puis en regroupant les termes de même ordre en ω, nous obtenons à l'ordre 1

$$2\nabla S(\mathbf{x}) \cdot \nabla A(\mathbf{x})_0 + A_0(\Delta S(\mathbf{x})) = 0, \tag{1.40}$$

et à l'ordre 2,

$$|\nabla S(\mathbf{x})|^2 = \frac{1}{c^2}. \tag{1.41}$$

L'équation (1.40) est une équation de transport sur l'amplitude $A_0(\mathbf{x})$. L'équation (1.41) portant sur le terme de phase est quant à elle appelée équation eikonale. La résolution numérique des équations (1.40) et (1.41) est la méthode traditionnellement employée pour étudier l'équation des ondes en hautes fréquences. Malheureusement, cette équation est non-linéaire et difficile à résoudre, notamment à la traversée des caustiques [14, 65]. La raison de ces difficultés provient du fait que l'équation eikonale conserve les informations sur la phase de l'onde acoustique. La connaissance de la phase n'est pas essentielle pour l'acoustique à l'échelle du bâtiment. L'information sur l'énergie est beaucoup plus importante. Nous allons donc présenter une analyse plus récente [22] permettant d'obtenir une équation cinétique de transport de l'énergie acoustique plus simple que l'équation eikonale. Cette analyse due à [22] est basée sur la transformée de Wigner.

3.2 Asymptotique basée sur la transformée de Wigner

Transformée de Wigner

Définition 1. *Soit $u(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ deux champs scalaires complexes et soit $\epsilon > 0$ un réel, caractérisant l'échelle spatiale du phénomène oscillatoire. On définit la transformée de Wigner $W_\epsilon(u, g)$ des deux champs par*

$$W_\epsilon(u, g)(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \exp(i\mathbf{v} \cdot \mathbf{y})\, u\left(\mathbf{x} - \frac{\epsilon \mathbf{y}}{2}\right) g^*\left(\mathbf{x} + \frac{\epsilon \mathbf{y}}{2}\right) d\mathbf{y} \tag{1.42}$$

où g^* désigne le complexe conjugué de g.

Dans cette définition, $\mathbf{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{v}$ une direction, elle aussi dans $\mathbb{R}^3$. Lorsqu'une seule fonction u est donnée, nous dirons que sa transformée de Wigner est $W_\epsilon(u, u)(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Nous constatons d'abord que,

$$\int_{\mathbb{R}^3} W_\epsilon(u, u)(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v} = |u(\mathbf{x}, t)|^2. \tag{1.43}$$

En d'autres termes, $W_\epsilon(u, u)(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ "stocke" la quantité d'énergie du champ u au point x et dans la direction $\mathbf{v}$. Dans la suite, nous aurons à considérer des suites de fonctions u_ϵ, g_ϵ dépendant d'un paramètre ϵ qui représente la longueur d'onde des oscillations. Dans ce cadre nous définissons alors

$$W(u, g) = \lim_{\epsilon \to 0} W_\epsilon(u_\epsilon, g_\epsilon). \tag{1.44}$$

De l'équation des ondes à l'équation de transport

Nous présentons ici une approche mathématique permettant de passer de l'équation des ondes à une équation de transport portant sur la densité d'énergie acoustique. Cette méthode repose sur la transformée de Wigner introduite en (1.42). Nous commençons par considérer une solution u_ϵ, p_ϵ des équations de l'acoustique adimensionnées :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_\epsilon + \nabla p_\epsilon = 0 \\ \partial_t p_\epsilon + \nabla \cdot \mathbf{u}_\epsilon = 0. \end{cases} \tag{1.45}$$

Ces équations reviennent à supposer que la vitesse du son $c = 1$ et que $\overline{\rho} = 1$. Nous supposons que la condition initiale $p_\epsilon(x, 0)$, $u_\epsilon(x, 0)$ a des oscillations spatiales dont la longueur d'onde est de l'ordre de ε. Alors dans [22], Gérard, Markowich, Mauser et Poupaud introduisent les quantités cinétiques $f^\pm$ définies par :

$$f^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2} W(p, p)(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \frac{1}{2} W(\mathbf{u}, \mathbf{u})(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \pm \Re \left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} W(\mathbf{u}, p)(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \right). \tag{1.46}$$

Notons que ces quantités cinétiques sont obtenues à partir de la transformée de Wigner (1.42) dans laquelle nous avons fait tendre la longueur d'onde ϵ vers 0 (voir (1.44)). Dans [22], il est démontré que ces quantités vérifient alors les deux équations de transport

$$\partial_t f^\pm \pm \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \nabla_{\mathbf{x}} f^\pm = 0. \tag{1.47}$$

Notons par ailleurs que l'intégrale de $f^\pm$ par rapport à $\mathbf{v}$ est en fait l'énergie acoustique

$$\int_{\mathbf{v}} f^+(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v} = \int_{\mathbf{v}} f^-(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v} = \frac{1}{2} p(\mathbf{x}, t)^2 + \frac{1}{2} u(\mathbf{x}, t)^2. \tag{1.48}$$

La conclusion de cette analyse est que pour calculer la propagation de l'énergie acoustique à haute fréquence il suffit de calculer une fonction de distribution

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

de l'énergie acoustique qui dépend d'une vitesse $\mathbf{v}$ dont la norme est égale à la vitesse du son

$$|\mathbf{v}| = c.$$

Cette fonction de distribution est solution de l'équation de transport

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = 0.$$

En physique, généralement, une fonction de distribution $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ compte à l'instant t et au point $\mathbf{x}$ les particules qui se propagent dans la direction $\mathbf{v}$. Dès lors,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v} d\mathbf{x} \tag{1.49}$$

comptabilise le nombre de particules "sonores" comprises, à l'instant t dans le domaine $[\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x}] \times [\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}]$ de l'espace des phases. En introduisant une énergie élémentaire e et en intégrant sur l'ensemble des directions nous obtenons la densité d'énergie acoustique locale telle que,

$$w(\mathbf{x}, t) = e \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v} \tag{1.50}$$

De la même manière, nous pouvons définir le flux d'énergie acoustique, tel que

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}, t) = e \int_{\Omega} \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v}. \tag{1.51}$$

4 Modèle cinétique pour l'acoustique

Dans cette section nous présentons le modèle cinétique pour l'acoustique qui servira de base dans cette thèse.

4.1 Équation de transport

D'après les développements précédents, nous avons vu que la fonction de distribution associée à nos particules sonores est régie par l'équation de transport,

$$\partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + c\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{S}^{d-1} \times \in \mathbb{R}^+ \tag{1.52}$$

où $\mathbf{x}$ désigne la variable d'espace, t le temps, $\mathbf{v}$ le vecteur vitesse et d la dimension physique du problème. Le sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ désigne alors le domaine spatial et $\mathbb{S}^{d-1}$ la sphère unité : $\mathbb{S}^{d-1} = \left\{v \in \mathbb{R}^d, |v| = 1\right\}$, associée à l'espace des vitesses. Dans un souci de simplification et sans perte de généralité nous fixerons $c = 1$ et $e = 1$. L'équation de transport (1.52) traduit simplement le fait que nos particules sonores se déplacent en ligne droite à l'intérieur de notre domaine spatial Ω.

4.2 Modélisation des conditions au bord

En tout point du bord $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, nous définissions par $\mathbb{S}^+(\mathbf{x})$ la demi-sphère des directions sortantes

$$\mathbb{S}^+(\mathbf{x}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{d-1} \,|\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \geq 0\} \tag{1.53}$$

et par $\mathbb{S}^-(\mathbf{x})$ la demi-sphère des directions rentrantes

$$\mathbb{S}^-(\mathbf{x}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{d-1} \,|\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) < 0\}. \tag{1.54}$$

Nous rappelons qu'en tout point $\mathbf{x}$ du bord $\partial\Omega$ le vecteur $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ désigne la normale sortante unitaire. À la paroi, les particules dont le vecteur vitesse appartient à l'ensemble $\mathbb{S}^+(\mathbf{x})$ vont entrer en collision avec celle-ci. Une fraction de ces particules

sera absorbée par la paroi, tandis qu'une autre sera réfléchie à l'intérieur du domaine Ω. Ces réflexions, caractérisant les changements directionnels à la paroi, se décomposent selon deux types : la réflexion spéculaire et la réflexion diffuse.

Loi de réflexion spéculaire

La réflexion spéculaire relie la direction d'incidente des particules $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^-(\mathbf{x})$ avec la direction de réflexion $\mathbf{v}' \in \mathbb{S}^+(\mathbf{x})$ par la relation géométrique

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}))\mathbf{n}(\mathbf{x}). \tag{1.55}$$

4.2.1 Loi de réflexion diffuse

Dans le cas d'une réflexion diffuse, les particules seront redistribuées non pas dans une seule direction, mais selon une certaine loi de probabilité associée à l'ensemble des directions rentrantes de $\mathbb{S}^-(\mathbf{x})$.

Au regard de cette modélisation, nous caractériserons ainsi un matériau, suivant deux coefficients. Le coefficient d'absorption $\alpha \in [0,1]$ traduisant la proportion de particules absorbées à la paroi, et le coefficient d'accommodation $\beta \in [0,1]$ traduisant la proportion de particules subissant une réflexion de type spéculaire. Le cas purement spéculaire est alors obtenu lorsque $\beta = 1$ et le cas non absorbant lorsque $\alpha = 0$. En jouant sur les paramètres, α, β nous essayerons de reproduire la réponse physique du matériau constituant les bords du domaine.
À l'échelle de fonction de densité de probabilité f, nous obtenons alors pour tous points du bord $\mathbf{x} \in \partial\Omega$

$$f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = (1-\alpha)\beta f^s(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + (1-\alpha)(1-\beta) f^d(\mathbf{x},\mathbf{v},t), \quad \forall (\mathbf{v},t) \in \mathbb{S}^-(\mathbf{x}) \times \mathbb{R}^+, \tag{1.56}$$

avec

$$f^s(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = f(\mathbf{x},\mathbf{v} - 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}))\mathbf{n}(\mathbf{x}),t) \tag{1.57}$$

et

$$f^d(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = \int\limits_{\mathbf{v}' \in \mathbb{S}^+(\mathbf{x})} R_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}',\mathbf{v})\, f(\mathbf{x},\mathbf{v}',t)\, (\mathbf{v}'\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{v}'. \tag{1.58}$$

Le terme $R_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}',\mathbf{v})$ modélise la loi de réflexion à la paroi. Elle est directement reliée à la loi de probabilité $P_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}',\mathbf{v}')$ qu'une particule ayant une direction incidente $\mathbf{v}' \in \mathbb{S}^+(\mathbf{x})$ reparte avec la direction $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^-(\mathbf{x})$. En effet, dans le cas purement diffus, nous avons par conservation du flux de particules,

$$f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})| = \int\limits_{\mathbf{v}' \in \mathbb{S}^+(\mathbf{x})} P_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}',\mathbf{v})\, f(\mathbf{x},\mathbf{v}',t)\, |\mathbf{v}'\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})|\, d\mathbf{v}'. \tag{1.59}$$

nous donnant ainsi

$$R_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = \frac{P_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}', \mathbf{v})}{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})|}. \tag{1.60}$$

Nous avons également la propriété de normalisation suivante

$$\int_{\mathbf{v} \in \mathbb{S}^-(\mathbf{x})} P_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}', \mathbf{v})\, d\mathbf{v} = \int_{\mathbf{v} \in \mathbb{S}^-(\mathbf{x})} R_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}', \mathbf{v}) |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})| d\mathbf{v} = 1 \tag{1.61}$$

et de symétrie

$$R_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = R_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'). \tag{1.62}$$

Nous renvoyons à [12] pour une présentation détaillée de ce type de conditions aux limites. Il est courant d'utiliser la loi dite de Lambert pour représenter la réflexion diffuse aux parois [39]. Cette loi de réflexion (1.63) a la particularité d'être uniforme en vitesse, rendant ainsi la loi de probabilité P proportionnelle au cosinus de l'angle de réflexion. Sa représentation graphique est donnée en Figure 1.1. En utilisant les propriétés (1.61) et prenant pour mesure sur $\mathbb{S}^1$, $d\mathbf{v} = d\theta/(2\pi)$ en coordonnées polaires (avec $\theta \in [0, 2\pi[$), et sur $\mathbb{S}^2$, $d\mathbf{v} = \sin\theta\, d\theta\, d\phi/(4\pi)$ en coordonnées sphériques (avec $\theta \in [0, \pi[$ et $\phi \in [0, 2\pi[$), un calcul rapide nous donne respectivement à deux et trois dimensions,

$$R_{\mathbf{x}}^{2\mathrm{D}}(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = \pi \quad \text{et} \quad R_{\mathbf{x}}^{3\mathrm{D}}(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = 4. \tag{1.63}$$

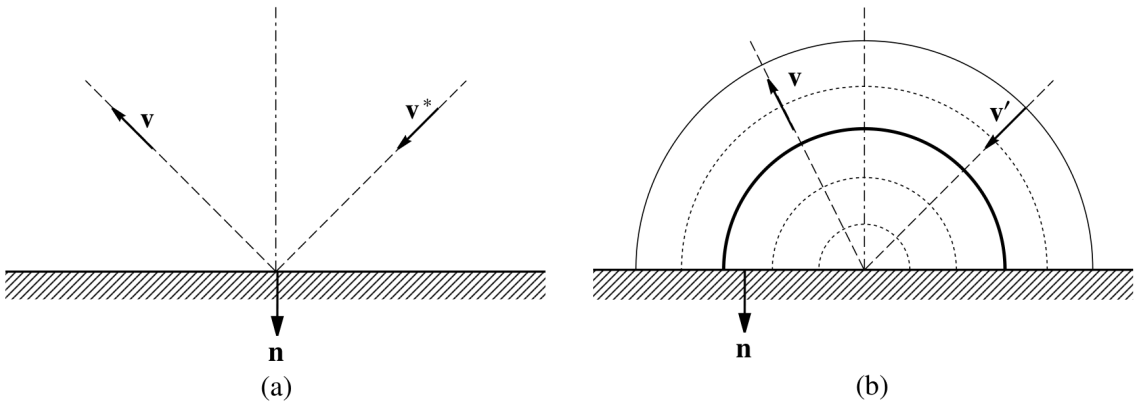


Figure 1.1: Illustration des lois de réflexion spéculaire (a) et (b) uniforme reliant le la direction incidente $\mathbf{v}$ et celle de rebond $\mathbf{v}'$. Source [44].

5 Quantités d'intérêt en acoustique des salles

Dans cette thèse, nous nous intéresserons à la propagation du son à l'échelle du bâtiment. Les géométries étudiées s'apparenteront ainsi à des salles aux dimensions

homogènes (cube/carré) ou inhomogènes (couloir/rectangle). Dans une salle, les grandeurs acoustiques d'intérêts seront :

1. Échogramme ou évolution de l'énergie locale.
2. La décroissance de l'énergie totale $\mathcal{E}$.
3. Le temps de réverbération (RT)
4. La décroissance de la densité d'énergie acoustique w en fonction de la distance à la source.

Ces grandeurs d'intérêt, que nous détaillerons plus bas, nous permettrons de comparer les différents modèles, mais aussi de les confronter à la théorie propre à l'acoustique des salles. Le choix de ces grandeurs est basé sur celui employé dans les travaux de Y. Jing et N. Xiang [33], où les auteurs cherchent à valider l'utilisation de l'équation de diffusion en acoustique des salles.

5.1 Échogramme

L'échogramme d'une salle s'obtient en appliquant une excitation sonore brève et localisé au sein de cette dernière. Il caractérise la transformation temporelle d'un signal sonore entre une source et un récepteur. Dans notre cas, il est représenté par la variation temporelle de la densité (ou de l'intensité) dans une zone limitée de l'espace. La zone d'espace étudiée, également appelée volume récepteur, sera notée R et s'apparente dans notre cas à une sphère pleine ou un disque de rayon $r > 0$. Le fait de donner un étalement r au volume récepteur est imposé par l'emploi d'une méthode particulaire au chapitre 4. En effet, dans cette méthode, l'estimation de la densité ou de l'intensité, nécessite un comptage du passage des particules dans le volume récepteur R. Afin d'estimer statistiquement et de manière correcte la densité d'énergie acoustique w dans R lorsque $r \to 0$, il nous faudrait tirer un nombre de particules $N_p \to \infty$, ce qui ferait exploser les coûts calculatoires. Pour les modèles continus étudiés dans cette thèse, une excitation brève sera caractérisée par la mise en place d'une condition initiale très localisée en espace et l'emploi d'un terme source nul. Dans notre modèle particulaire, toutes les particules seront activées à $t = 0$. L'étude de la réponse impulsionnelle permet par exemple d'identifier les échos d'une salle et l'établissement du régime diffus [39].

5.2 Décroissance de l'énergie totale

Pour une salle absorbante contenant une source émettant en continu à une puissance constante P, l'état stationnaire est caractérisé par une énergie totale $\mathcal{E}$ constante au cours du temps. La puissance P est un terme source de densité d'énergie w : c'est la quantité d'énergie introduite par unité de temps. Lorsque la source commence à émettre à $t = 0$, la densité d'énergie w va se répartir progressivement dans

le domaine Ω (une partie sera naturellement absorbée aux parois) et l'énergie totale va augmenter jusqu'à atteindre une valeur seuil que nous noterons $\mathcal{E}_0$. Cette valeur $\mathcal{E}_0$ restera constante au cours du temps et traduit l'équilibre entre l'énergie émise par la source et celle absorbée aux parois. Si maintenant nous coupons la source à $t = T_s$, l'énergie totale va décroitre continuellement au travers de l'absorption aux parois. La rapidité de cette décroissance en fonction du temps et du coefficient α servira de base comparative pour les modèles établis. Dans la configuration énoncée plus haut, la décroissance de l'énergie totale peut-être modélisée analytiquement par la théorie d'Eyring [**?**]. Nous présentons ci-dessous l'équation permettant de déterminer l'énergie totale en fonction du temps et de l'absorption aux parois (caractérisée par le coefficient d'absorption moyen $\bar{\alpha}$).

Notons tout d'abord par $\langle \ell \rangle$ le libre parcours moyen d'une particule entre deux collisions et par $n = ct/\langle \ell \rangle$ le nombre moyen de collisions engendrée au temps t. Eyring [20] propose de décrire, au travers de la théorie ergodique, la décroissance de l'énergie totale $\mathcal{E}$ selon la relation suivante

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(1-\bar{\alpha})^n = \mathcal{E}_0 \exp\left(\frac{c\ln(1-\bar{\alpha})t}{\langle \ell \rangle}\right), \tag{1.64}$$

où $\bar{\alpha}$ désigne le coefficient d'absorption moyen aux parois. Cette loi, traduisant la perte d'énergie induite par les collisions aux parois, nécessite toutefois la connaissance du libre parcours moyen des particules dans la salle considérée. En acceptant l'analogie conceptuelle qui existe entre notre problème de transport de particules acoustiques entrant en collision aux parois et celle propre aux billards ergodiques (voir *e.g.* [54]), le libre parcours moyen d'une particule dans une salle Ω de volume $|\Omega|$ (aire à 2d) et de surface $|\partial\Omega|$ (périmètre à 2d) est alors donné en deux et trois dimensions d'espace par,

$$\langle \ell_{2d} \rangle = \frac{\pi|\Omega|}{|\partial\Omega|} \quad \text{et} \quad \langle \ell_{3d} \rangle = \frac{4|\Omega|}{|\partial\Omega|}. \tag{1.65}$$

Ces résultats sont des résultats classiques en théorie ergodique (voir *e.g.* [15]). En combinant (1.64) et (1.65), nous serons à même de pouvoir calculer théoriquement la décroissance de l'énergie totale d'une salle en fonction du temps et du coefficient d'absorption moyen $\bar{\alpha}$.

5.3 Temps de réverbération

Directement relié à la décroissance de l'énergie totale, le temps de réverbération mesure la manière dont le son s'atténue dans une salle après extinction de la source. Dans notre cas nous considérerons le temps de réverbération T_{30dB} est donné par,

$$T_{30dB} = \frac{3\langle \ell \rangle}{-c\log_{10}(1-\bar{\alpha})}. \tag{1.66}$$

Cela correspond au temps nécessaire pour une décroissance de 30 dB du niveau de pression acoustique (SPL), défini en (1.1).

Remarque 1. *En acoustique des salles il également très commun d'utiliser le* T_{60dB}.

La loi de Sabine en acoustique des salles se retrouve par développement limité dans (1.67) pour les faibles valeurs de α. On obtient alors

$$T_{30dB} = \frac{3\langle \ell \rangle}{c\bar{\alpha}}. \tag{1.67}$$

Dans la pratique, la loi de Sabine est uniquement valide pour les faibles d'absorption $\alpha < 0.2$.

5.4 Décroissance spatiale de la densité d'énergie

Il peut être démontré [39] à partir de (1.64) que, pour une salle absorbante ayant atteint l'état stationnaire via l'émission d'une source ponctuelle située au point $\mathbf{x}_s$ et de puissance constante P, la densité d'énergie w à l'équilibre se décompose comme la somme d'une densité d'énergie réverbérée homogène w_d et d'une densité d'énergie directe $w_d(\mathbf{x})$. Elle s'écrit en deux et trois dimensions d'espace

$$w^{2d}(\mathbf{x}) = w_r^{2d} \, + \, w_d^{2d}(\mathbf{x}) = \frac{P\langle \ell_{2d} \rangle}{-c\ln(1-\bar{\alpha})} + \frac{P}{2\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_s|} \tag{1.68}$$

et

$$w^{3d}(\mathbf{x}) = w_r^{3d} \, + \, w_d^{3d}(\mathbf{x}) = \frac{P\langle \ell_{3d} \rangle}{-c\ln(1-\bar{\alpha})} + \frac{P}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_s|^2} \tag{1.69}$$

avec w_r et w_d respectivement les densités d'énergie acoustique réverbérée et directe. Nous remarquerons que le terme w_d n'est rien d'autre que la puissance de la source divisée par l'angle solide en deux et trois dimensions d'espace, justifiant de ce fait la dépendance avec la distance à la source.

Chapitre 2

Discrétisation du modèle cinétique en dimension deux

Contenu

1 Modèle aux ordonnées discrètes 28
1.1 Modèle cinétique d'application 28
1.2 Discrétisation angulaire 28
1.3 Modèle aux ordonnées discrètes 29
2 Méthode volumes finis 31
2.1 Discrétisation en espace 32
2.2 Flux numérique 33
2.3 Discrétisation en temps 34
3 Discrétisation du modèle aux ordonnées discrètes 34
4 Implémentation 36
4.1 Les librairies OpenCL et PyOpen 37
5 Validations 39
5.1 Transport libre avec conditions de Dirichlet 39
5.2 Transport avec condition de rebond spéculaire 42
5.3 Transport avec conditions de rebond mixtes 43
6 Conclusion 46

1 Modèle aux ordonnées discrètes

1.1 Modèle cinétique d'application

Nous considérons dans ce chapitre, une fonction de distribution $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ en deux dimensions d'espace où $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ désigne la variable d'espace, $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^1$ la vitesse avec $\mathbb{S}^1$ le cercle unité et enfin $t \in \mathbb{R}^+$ le temps. Nous cherchons alors à étudier dans $\Omega \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+$ le système de transport libre suivant,

$$\begin{cases} \partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + c\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0, \\ f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{cases} \tag{2.1}$$

auquel nous ajoutons la condition au bord définie en (1.56)

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = (1-\alpha)\beta f^s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + (1-\alpha)(1-\beta) f^d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \mathbf{v} \in \mathbb{S}^-(\mathbf{x}), t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.2}$$

Nous rappelons que cette condition, détaillée au chapitre 1, caractérise les changements directionnels auxquels sont soumises les particules après collision avec la paroi.

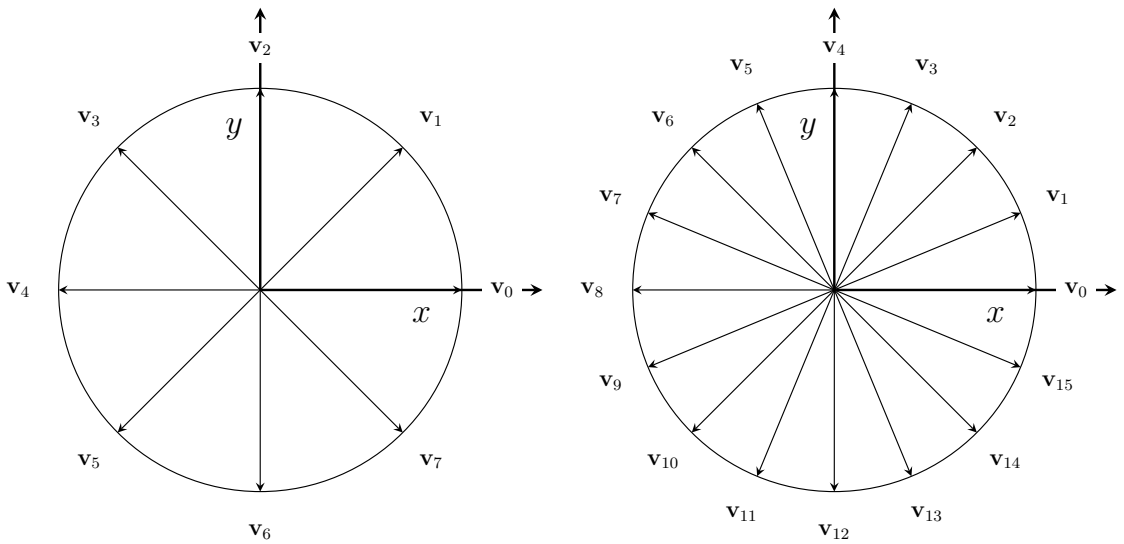
1.2 Discrétisation angulaire

Le problème continu (2.1) est posé dans un espace à cinq dimensions. Afin de diminuer sa complexité ainsi que son coût calculatoire, nous allons chercher à réduire le nombre de dimensions de ce dernier. Nous employons ici la méthode des ordonnées discrètes (DOM). Cette méthode consiste à restreindre l'ensemble $\mathbb{S}^1$ en un nombre discret N de vitesses admissibles $\mathbf{v}_k$. Nous notons par S_N l'ensemble des vitesses discrètes. Pour l'étude de notre problème en deux dimensions, nous choisissons ici des vitesses équiréparties sur le cercle unité telles que,

$$\mathbf{v}_k = [\cos(\theta_k), \sin(\theta_k)], \quad \theta_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad \forall k = 0, \ldots, N-1. \tag{2.3}$$

Une illustration de cette discrétisation uniforme est donnée en figure 2.1.
Une fois cet ensemble S_N fixé, nous chercherons alors à résoudre un système d'équations de transport selon chaque vitesse $\mathbf{v}_k$ de S_N. De plus, afin de reconstruire les grandeurs acoustiques définies au chapitre 1, à savoir la densité d'énergie acoustique w et l'intensité acoustique $\mathbf{I}$, nous complétons la discrétisation précédente avec la règle de quadrature Q_N de la forme,

$$Q_N[f] = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_k f(\mathbf{v}_k) \approx \int_{\mathbb{S}^1} f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}, \tag{2.4}$$



(a) $N = 8$ **(b)** $N = 16$

Figure 2.1: Illustration de la discrétisation en vitesse S_N

où les $(\omega_k)_{k=0,\dots,N-1}$ désignent les poids d'intégration. Pour la discrétisation uniforme (2.3) employée, nous considérons

$$\omega_k = \frac{1}{N}, \quad \forall k = 0, \dots, N-1. \tag{2.5}$$

1.3 Modèle aux ordonnées discrètes

Au travers de la discrétisation en vitesse précédente, nous pouvons ainsi remplacer la fonction de distribution $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ continue sur $\Omega \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+$ par sa forme semi-discrète en vitesse sur $\Omega \times S_N \times \mathbb{R}$. Plus précisément, nous recherchons une fonction de distribution approchée du type :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \approx \sum_{k=0}^{N-1} f_k(\mathbf{x}, t)\, \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k), \tag{2.6}$$

où δ désigne la mesure delta de Dirac en 0 et où pour tout $k = 0, \dots, N-1$, $f_k(\mathbf{x}, t)$ désigne la composante de f pour la vitesse discrète $\mathbf{v}_k$. En insérant l'équation (2.6) dans (2.1), nous obtenons alors sur le domaine $\Omega \times \mathbb{R}^+$, pour tout $k = 0, \dots, N-1$, un ensemble d'équations de transport de la forme,

$$\begin{cases} \partial_t f_k(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v_k} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_k(\mathbf{x}, t) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad f_k(\mathbf{x}, t) = f^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k). \end{cases} \tag{2.7}$$

avec f^0 une fonction connue. De la même manière sur le domaine $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$ nous avons,

$$f_k(\mathbf{x},t) = (1-\alpha)\beta f_k^s(\mathbf{x},t) + (1-\alpha)(1-\beta) f_k^d(\mathbf{x},t), \quad k = 0,\dots,N-1. \tag{2.8}$$

Discrétisation de la condition spéculaire

Nous détaillons ici la forme de la condition au bord spéculaire dans (2.8). D'après sa définition au Chapitre 1, nous avons alors nous avons pour $k = 0,\dots,N$,

$$f_k^s(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k - 2(\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, t), \quad \forall (\mathbf{x},t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+. \tag{2.9}$$

Il est important de noter que, suivant la normale $\mathbf{n}$ à la paroi, la direction spéculaire après collision (portée par $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_k - 2(\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$) n'est pas nécessairement incluse dans l'ensemble de discrétisation angulaire S_N. Toutefois dans cette étude, et comme nous le verrons par la suite, nos simulations numériques prennent toutes places sur des domaines de calcul Ω à géométries rectangulaires (2D) ou cubiques (3D). Ce type de géométrie simplifie grandement le traitement des conditions de rebonds spéculaires et motive le choix d'une discrétisation de S_N uniforme (2.3). En effet, dans le cas de cette dernière, il nous suffit de prendre $N = 2^m$ avec $m \in \mathbb{N}$ dans (2.3) afin d'assurer l'inclusion dans S_N d'une direction et son homologue spéculaire au regard des plans de symétrie de Ω. Dans ce cas particulier nous pouvons alors réécrire $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_k - 2(\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) = \mathbf{v}_p$ avec $\mathbf{v}_p \in S_N$ et l'indice $p \in 0,\dots N$.

$$f_k^s(\mathbf{x},t) = f_p(\mathbf{x},t), \quad \forall (\mathbf{x},t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+. \tag{2.10}$$

Dans le cas d'une normale à la paroi quelconque, il est en revanche toujours possible de répartir f suivant une ou plusieurs directions S_N. Ce procédé est relativement aisé lors d'une discrétisation uniforme sur le cercle unité $\mathbb{S}^1$. En effet, nous pouvons par exemple (voir [41]) répartir f selon le rapport des distances sur le cercle (longueurs des arcs) entre la direction spéculaire réelle $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_k - 2(\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ et les deux directions voisines les plus proches dans S_N. En calculant la liste des vitesses $\{\mathbf{v}_{p_0}, \mathbf{v}_{p_1}, \dots, \mathbf{v}_{p_{N-1}}\}$ triée selon leur distance respective à $\mathbf{v}^*$, nous obtenons alors pour la condition au bord spéculaire,

$$f_k^s(\mathbf{x},t) = \gamma f_{p_0}(\mathbf{x},t) + (1-\gamma) f_{p_1}(\mathbf{x},t), \quad \forall (\mathbf{x},t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{2.11}$$

avec,

$$\gamma = \frac{\cos^{-1}(\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}_{p_1})}{\cos^{-1}(\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}_{p_0}) + \cos^{-1}(\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}_{p_1})}. \tag{2.12}$$

On remarquera que dans le cas particulier où $\mathbf{v}^* \in S_N$ alors $\mathbf{v}_{p0} = \mathbf{v}^*$, l'équation (2.11) se ramène après simplification à l'équation (2.9).

Discrétisation de la condition diffuse

Nous donnons à présent la forme de la condition au bord diffuse dans (2.8). Au travers de la règle de quadrature (2.4) nous la réécrivons selon,

$$f_k^d(\mathbf{x},t) = \frac{1}{C}\left(\sum_{\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{n}\geq 0} \omega_j f_j(\mathbf{x},t)\,\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{n}\right), \quad \forall(\mathbf{x},t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}^+ \tag{2.13}$$

avec C la constante de normalisation telle que,

$$C = \sum_{\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{n}\geq 0} w_j(\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{n}). \tag{2.14}$$

Dans cette section nous avons discrétisé en vitesse notre modèle cinétique pour l'acoustique. Le modèle semi-discret ainsi obtenu est un système d'équations de transport linéaires (2.7) couplées par l'intermédiaire des conditions aux bords du domaine (2.8). Dans la section suivante, nous présenterons la méthode volumes finis permettant leurs discrétisations en espace et en vitesse.

2 Méthode volumes finis

Nous présentons ici, la méthode volumes finis (VF) permettant la discrétisation du système (2.7). Nous faisons choix d'introduire la méthode VF dans un cadre relativement général, puisque nous réutiliserons cette dernière au chapitre 3 lors de la discrétisation du modèle M^1 en deux dimensions d'espace. Pour ce faire, nous écrirons ainsi la méthode VF pour un système général de lois de conservation, de la forme

$$\begin{cases} \partial_t\mathbf{W} + \partial_i\mathbf{F}^i(\mathbf{W}) = \mathbf{S} \\ \qquad\qquad \mathbf{W}(\mathbf{x},0) = \mathbf{W}_0(\mathbf{x}) \\ \qquad\quad +\text{CL}. \end{cases} \tag{2.15}$$

Dans ce système, le vecteur inconnu $\mathbf{W}(\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^m$ est composé de m variables conservatives qui dépendent chacune de la variable d'espace $\mathbf{x}\in\Omega\subset\mathbb{R}^2$ et du temps t. Le terme $\mathbf{F}(\mathbf{W}) = (\mathbf{F}^1(\mathbf{W}),\mathbf{F}^2(\mathbf{W}))\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$ désigne le flux physique et $\mathbf{S}(\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^m$ le terme source. Nous utilisons ici la convention d'Einstein sur la somme des indices répétés. Ainsi, pour chaque composante du flux $\mathbf{F}^i$, $i = 1\ldots 2$, nous avons

$$\partial_i\mathbf{F}^i(\mathbf{W}) = \sum_{i=1}^{2}\partial_i(\mathbf{F}^i(\mathbf{W})), \tag{2.16}$$

où ∂_i désigne la dérivée selon la i-ème coordonnée spatiale. Afin de simplifier l'écriture de la méthode, nous noterons également le flux dans la direction $\mathbf{n} = (n_1,n_2)\in\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F}(\mathbf{W},\mathbf{n}) = \mathbf{F}^i(\mathbf{W})n_i \quad \in\mathbb{R}^m. \tag{2.17}$$

Nous allons à présent chercher à discrétiser en espace et en temps le système (2.15).

2.1 Discrétisation en espace

Nous considérons tout d'abord un maillage $\mathcal{M}$ constitué d'un nombre fini d'ouverts L_i bornés, connexes, à frontière Lipshitz (par exemple, polygonal), appelées cellules, et formant une partition du domaine de calcul Ω telle que,

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{L_i \in \mathcal{M}} \bar{L} \quad \text{et} \quad L_i \cap L_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j. \tag{2.18}$$

Nous noterons par h le diamètre maximal des cellules, tel que

$$h = \sup_{L \in \mathcal{M}} \frac{|L|}{|\partial L|}, \tag{2.19}$$

avec $|L|$ l'aire de la cellule L et $|\partial L|$ son périmètre.

Soit L une cellule d'un maillage $\mathcal{M}$. En intégrant (2.15) sur L nous obtenons alors la formulation suivante,

$$\int_L \partial_t \mathbf{W}\, d\mathbf{x} + \int_L \partial_i \mathbf{F}^i(\mathbf{W})\, d\mathbf{x} = \int_L \mathbf{S}\, d\mathbf{x}. \tag{2.20}$$

En notant par $e_{L/R}$ l'arête partagée par deux cellules adjacentes L et R (quelconque) telle que,

$$e_{L/R} = \bar{L} \cap \bar{R}, \tag{2.21}$$

et en désignant par $\mathbf{n}_{L/R}$ le vecteur normal unitaire dirigé de L vers R sur l'arête $e_{L/R}$, nous obtenons par application du théorème de Stokes sur (2.20),

$$\frac{d}{dt} \int_L \mathbf{W}\, d\mathbf{x} + \int_{\partial L} \mathbf{F}(\mathbf{W}, \mathbf{n}_{L/R})\, d\sigma = \int_L \mathbf{S}\, d\mathbf{x}. \tag{2.22}$$

En décomposant l'intégrale sur le bord de L comme la somme des contributions provenant de chaque arête $e_{L/R}$, l'équation (2.22) devient,

$$\frac{d}{dt} \int_L \mathbf{W}\, d\mathbf{x} + \sum_{e_{L/R} \subset \partial L} \int_{e_{L/R}} \mathbf{F}(\mathbf{W}, \mathbf{n}_{L/R})\, d\sigma = \int_L \mathbf{S}\, d\mathbf{x}. \tag{2.23}$$

L'approche VF consiste alors à chercher, pour la formulation (2.23), une solution approchée $\mathbf{W}^h$ constante par morceau sur chaque cellule L de $\mathcal{M}$. Pour une cellule L donnée, nous notons cette solution par

$$\mathbf{W}_L(t) = \frac{1}{|L|} \int_L \mathbf{W}(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}, \tag{2.24}$$

En appliquant le même principe pour le terme source, il vient alors,

$$\mathbf{S}_L(t) = \frac{1}{|L|} \int_L \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}. \tag{2.25}$$

Enfin, en réinjectant (2.24) et (2.25) dans (2.23) nous obtenons, pour toute cellule L du maillage $\mathcal{M}$, le schéma semi-discret :

$$\frac{d\mathbf{W}_L}{dt}(t) + \frac{1}{|L|} \sum_{e_{L/R} \subset \partial L} \int_{e_{L/R}} \mathbf{F}(\mathbf{W}_L, \mathbf{n}_{L/R})\, d\sigma = \mathbf{S}_L(t). \tag{2.26}$$

2.2 Flux numérique

Sur les bords des cellules la solution recherchée n'est en général pas continue. Il nous faudra dès lors déterminer une manière d'approcher le terme $\mathbf{F}(\mathbf{W}_L, \mathbf{n}_{L/R})$ sur le bord ∂L. Dans l'approche VF, cette approximation se fait au travers d'une quantité nommée flux numérique. Nous notons le flux numérique par

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R, \mathbf{n}_{L/R}). \tag{2.27}$$

Le flux numérique doit vérifier deux propriétés suivantes :

1. la consistance :
$$\mathbf{F}^*(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_L, \mathbf{n}) = \mathbf{F}^*(\mathbf{W}_L, \mathbf{n}), \tag{2.28}$$
2. la conservation :
$$\mathbf{F}^*(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R, \mathbf{n}_{L/R}) = -\mathbf{F}^*(\mathbf{W}_R, \mathbf{W}_L, \mathbf{n}_{R/L}). \tag{2.29}$$

En utilisant la notation (2.27) et en approchant le flux à travers l'arête $e_{L/R}$ de longueur $|e_{L/R}|$ par,

$$\int_{e_{L/R}} F(\mathbf{W}, \mathbf{n}_{L/R})\, d\sigma \approx |e_{L/R}| \mathbf{F}^*(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R, \mathbf{n}_{L/R}), \tag{2.30}$$

l'équation (2.26) devient alors, pour toute cellule L du maillage $\mathcal{M}$,

$$\frac{d\mathbf{W}_h}{dt}(t) + \frac{1}{|L|} \sum_{e_{L/R} \subset \partial L} |e_{L,R}| \mathbf{F}^*(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R, \mathbf{n}_{L,R}) = \mathbf{S}_L(t) \tag{2.31}$$

Il est important de noter que sur une arête e appartenant aux bords du domaine Ω telle que $e \subset \partial L \cap \partial\Omega$, l'état droit $\mathbf{W}_R$ n'est pas défini. Dans le cas présent, nous utiliserons un état fantôme $\mathbf{W}_R^*$, caractérisé par la nature des conditions aux bords imposées à notre problème initial (2.15).

2.3 Discrétisation en temps

Schéma d'Euler explicite

Après avoir effectué la discrétisation de (2.15) en espace, nous allons chercher à discrétiser l'équation (2.31) en temps. Pour cela, nous introduisons les instants $t^n = n\Delta t$ avec n un entier positif et $\Delta t > 0$ le pas de temps. Nous notons par $\mathbf{W}_L^n$ l'approximation dans la cellule L au temps t^n. De plus, nous faisons le choix d'approcher la dérivée temporelle par un schéma d'Euler explicite. Ainsi, pour toute cellule L et tout instant discret t^n, nous avons comme schéma volumes finis,

$$\mathbf{W}_L^{n+1} = \mathbf{W}_L^n - \frac{\Delta t}{|L|} \sum_{e_{L,R} \subset \partial L} |e_{L,R}| \, \mathbf{F}^*(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R, \mathbf{n}_{L/R}) + \Delta t \, \mathbf{S}^n \tag{2.32}$$

complété par la condition initiale,

$$\mathbf{W}_L^0 = \frac{1}{|L|} \int_L \mathbf{W}_L(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x}. \tag{2.33}$$

Condition de stabilité

Par application du principe du maximum discret il peut être démontré [47] que le schéma volumes finis explicite en temps est stable sous la condition de stabilité CFL,

$$\Delta t \max_{L \in \mathcal{M}} \left(\frac{1}{|L|} \sum_{e_{L,R} \subset \partial L} |e_{L,R}| \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{L,R} \right) \leq 1. \tag{2.34}$$

Dans cette section et au travers de la méthode VF, nous avons établi un schéma purement discret nous permettant de calculer numériquement une solution approchée du problème (2.15). Nous allons à présent appliquer ce schéma de discrétisation au problème de transport pour l'acoustique (2.7), (2.8).

3 Discrétisation du modèle aux ordonnées discrètes

Dans la section précédente, nous avons introduit la méthode VF dans un cadre général. Nous l'appliquons à présent, à notre modèle aux ordonnées discrètes pour l'acoustique (2.7) et (2.8).

Maillage

Nous considérons tout d'abord un domaine spatial $\Omega =]a, b[\times]c, d[$ que nous découpons en $N_x N_y$ cellules rectangulaires avec $N_x, N_y \in \mathbb{N}^*$. Nous définissons les

pas d'espaces par $\Delta x = (b-a)/N_x$ et $\Delta y = (d-c)/N_y$. Le centre $\mathbf{x}_{i,j}$ d'une cellule $L_{i,j}$ est alors repéré par,

$$\mathbf{x}_{ij} = \left((i - \frac{1}{2})\Delta x, (j - \frac{1}{2})\Delta y \right), \tag{2.35}$$

et nous pouvons écrire h la taille caractéristique du maillage comme

$$h = \max(\Delta x, \Delta y). \tag{2.36}$$

En utilisant (2.36) nous pouvons alors réécrire la condition CFL (2.34) sous la forme

$$\frac{\Delta t}{h} \leq 1. \tag{2.37}$$

Discrétisation des équations de transport

Le système (2.7) consiste en N équations de transport scalaires à vitesse constante couplées seulement par les conditions aux limites. Considérant le vecteur $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = [f_0(\mathbf{x}, t),\ f_1(\mathbf{x}, t),\ \ldots,\ f_{N-1}(\mathbf{x}, t)]$, la k-ème composante satisfait l'équation

$$\partial_t \mathbf{W}_k + \mathbf{v}_k \cdot \nabla_x \mathbf{W}_k = 0, \tag{2.38}$$

avec pour vitesse d'advection la vitesse $\mathbf{v}_k \in S^N$. En suivant l'approche volumes finis présentée dans la section précédente, nous notons dans un premier temps la solution approchée au temps t^n dans la cellule $L_{i,j}$ telle que,

$$\mathbf{W}^n_{i,j} = \frac{1}{|L_{i,j}|} \int_{L_{i,j}} \begin{pmatrix} f_0(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ f_1(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ \vdots \\ f_{N-1}(\mathbf{x}, n\Delta t) \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} f^n_{0,i,j} \\ f^n_{1,i,j} \\ \vdots \\ f^n_{N-1,i,j} \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

En remarquant que l'équation (2.38) peut être mise sous forme la conservative (2.15) avec pour flux $\mathbf{F}(\mathbf{W}) = (v_{k,1}\mathbf{W}, v_{k,2}\mathbf{W})$ et d'après l'équation (2.32), le schéma numérique s'écrit alors pour la k-ème composante de ce vecteur, toute cellule $L_{i,j}$ et tout temps t^n,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{n+1}_{k,i,j} = \mathbf{W}^n_{k,i,j} &- \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}^*(\mathbf{W}^n_{k,i,j}, \mathbf{W}^n_{k,i+1,j}, \mathbf{n}_x) + \mathbf{F}^*(\mathbf{W}^n_{k,i-1,j}, \mathbf{W}^n_{k,i,j}, \mathbf{n}_x) \right) \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\mathbf{F}^*(\mathbf{W}^n_{k,i,j}, \mathbf{W}^n_{k,i,j+1}, \mathbf{n}_y) + \mathbf{F}^*(\mathbf{W}^n_{k,i,j-1}, \mathbf{W}^n_{k,i,j}, \mathbf{n}_y) \right) \\ &+ \Delta t\, \mathbf{S}_{ij}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

où le flux numérique choisit comme décentré amont (upwind),

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R, \mathbf{n}_{L/R}) = (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}^+_{L/R})\mathbf{W}_L + (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}^-_{L/R})\mathbf{W}_R \tag{2.41}$$

où

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}^{+} = \max(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}, 0) \quad \text{et} \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}^{-} = \min(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}, 0). \tag{2.42}$$

Le pas de temps et le pas d'espace sont choisis de manière à satisfaire la contrainte de stabilité de type CFL

$$\Delta t = \gamma_{CFL} \min\left\{\frac{\Delta x}{c}, \frac{\Delta y}{c}\right\}, \tag{2.43}$$

avec $\gamma_{CFL} \leqslant 1$ dans le cas où le terme source est nul. Dans le cas où le terme source est non nul, le pas de temps est choisi de la façon suivante

$$\Delta t = \min\left\{\gamma_{CFL}\frac{\Delta x}{c}, \frac{1}{\max_{i,j}|\mathbf{S}_{ij}|}\right\}. \tag{2.44}$$

Discrétisation de la condition au bord

Pour les cellules appartenant au bord du domaine, (*ie* $i = \{0, N_x - 1\}$ ou $j = \{0, N_y - 1\}$), il est nécessaire de définir la valeur de l'état fantôme $\mathbf{W}^{*,n}_{k,i,j}$. Nous avons ainsi pour $i = \{-1, N_x\}$ ou $j \in \{-1, N_y\}$ et $k = 0, \ldots, N-1$,

$$\mathbf{W}^{*,n}_{k,i,j} = (1-\alpha)\beta f^{n}_{p,i,j} + (1-\alpha)(1-\beta)D^{n}_{i,j} \tag{2.45}$$

avec $p \in 0, \ldots, N$ l'indice tel que $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_k - 2(\mathbf{v}_k\cdot\mathbf{n}_{ij})\mathbf{n}_{ij} \in S_N$ et $D^{n}_{i,j}$ le terme de diffusion discret tel que,

$$D^{n}_{i,j} = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{l=1\\ \mathbf{v}_l\cdot\mathbf{n}_{i,j}>0}}^{N-1} (\mathbf{v}_l\cdot\mathbf{n}_{i,j}) f^{n}_{l,i,j}}{\displaystyle\sum_{\substack{l=1\\ \mathbf{v}_l\cdot\mathbf{n}_{i,j}>0}}^{N} (\mathbf{v}_l\cdot\mathbf{n}_{i,j})}. \tag{2.46}$$

Nous avons ainsi établi, dans cette section, un schéma purement direct permettant la résolution en temps et en espace du modèle DOM pour l'acoustique. Nous présenterons dans la section suivante, certains détails liés à d'implémentation du schéma.

4 Implémentation

Dans cette section nous présentons certains détails relatifs à l'implémentation de notre méthode volumes finis. L'implémentation mise en place a été choisie dans l'optique d'exploiter au mieux les ressources de calculs présentes sur la machine hôte et repose sur l'utilisation des librairies OpenCL et PyOpenCL.

L'objectif du standard OpenCL est de mettre en place une interface et un langage de programmation communs afin de faciliter l'implémentation de programme sur des architectures hétérogènes. La couche d'abstraction offerte par l'interface de programmation (API) d'OpenCL permet d'exécuter avec flexibilité des tâches sur une large variété d'unités de calculs (processeurs multi-cœurs (CPU), cartes graphiques (GPU), ...). Cette flexibilité est majoritairement conditionnée par la capacité d'OpenCL à supporter ou non les architectures et le matériel sous-jacent par le biais de pilotes constructeurs. La liste recensant le matériel compatible dépasse le millier d'entrées et couvre plus d'une dizaine de fabricants (Nvidia, AMD, Intel, Qualcomm, ...). Cette large compatibilité matérielle couplée au support d'OpenCL par les systèmes d'exploitation courants (Linux, macOS, Windows, ...) assure une grande portabilité aux programmes développés.
Dans nos applications nous nous intéresserons plus particulièrement à l'exécution sur GPU dont le paradigme repose sur la parallélisation de données.
Au fil de cette section, nous présenterons brièvement, dans une première partie, les librairies OpenCL et PyOpenCL employées ainsi que quelques spécificités liées à la programmation sur GPU. Dans une seconde partie, nous détaillerons l'implémentation de notre méthode VF et l'illustrerons par quelques exemples de code développés.

4.1 Les librairies OpenCL et PyOpen

Les éléments détaillés ci-dessous sont largement tirés de l'ouvrage de David R. Kaeli *et al.* intitulé "Heterogeneous Computing with OpenCL 2.0" [34] et de l'article [37] d'Andreas Klöckner mainteneur de la librairie PyOpenCL. Pour plus de détails, nous renverrons ainsi le lecteur à la littérature mentionnée.

La librairie open source OpenCL fût créée par Apple dans les années 2000, puis cédée au groupe KHRONOS [38] en 2008. Le groupe KHRONOS assure depuis cette date son maintien et son évolution : la version la plus récente est OpenCL 2.2. OpenCL se base sur une API en C et sur un langage de programmation dérivé du C99 (C++14 pour OpenCL 2.2). La librairie offre une couche d'abstraction à la programmation sur architecture hétérogène au travers de fonctionnalités communes (via l'API), pouvant être exécutées par n'importe quelle unité de calcul. Elle permet également d'effectuer une implémentation plus fine au travers de fonctionnalités spécifiques et propres à l'architecture ciblée. La spécification du standard OpenCL repose sur quatre couches d'abstraction fondamentales :

1. Le modèle de plateforme
2. Le modèle d'exécution
3. Le modèle de mémoire
4. Le concept de kernels

Le modèle de plateforme d'OpenCL

Dans OpenCL, une plateforme est composée d'un seul hôte (*host*) (très souvent un CPU) connecté à un ou plusieurs périphériques (*devices*) pouvant être un CPU, un GPU, ou tous autres types d'accélérateurs. L'hôte est l'unité qui agira comme un chef d'orchestre au regard des périphériques présents sur la machine. Un *device* contient une ou plusieurs unités de calculs appelées *compute units* (coeurs) elles-mêmes composées d' un ou plusieurs threads appelés *processing elements* (PE). Au niveau de l'API, une plateforme peut être vue comme une interface commune sur un ensemble de (PE) indépendants pouvant exécuter les mêmes instructions de bas niveau par le biais du pilote constructeur. Le modèle de plateforme permet ainsi de désigner l'unité qui prendra le rôle de l'hôte et quels devices exécuteront les tâches calculatoires. Dans nos applications, nous traiterons uniquement des plateformes composées d'un hôte (CPU) et d'un seul périphérique de calcul (GPU).

Le modèle d'exécution

Le modèle d'exécution d'OpenCL se base sur la notion de contexte *context*. La notion de *context* définit un environnement abstrait où la gestion mémoire (allocations, transferts hôte/devices) et la coordination des tâches calculatoire sont bien définies. L'hôte effectuera la soumission de tâches auprès des périphériques de calculs par le biais de commandes. Cette communication est effectuée au travers du concept de *command-queue*. Une *command-queue* est attribuée à un unique device. Par défaut la file d'attente constituant la *command-queue* est une FIFO (First In First Out). Il est toutefois possible, grâce à une définition précise de la dépendance des données, d'exécuter les tâches dans un ordre plus optimal. Le modèle d'exécution offre également l'accès à des mécanismes de synchronisation entre les différentes tâches exécutées sur le périphérique.

4.1.1 Les kernels OpenCL

Comme énoncé précédemment l'hôte contrôlera les périphériques de calculs au travers de commandes et d'une file d'attente. Les commandes relatives à la soumission de tâches calculatoires se basent sur le concept de *kernel*. Un kernel désigne la partie de code rédigée en C99 (avec quelques macros en plus) qui sera effectivement exécutée sur le périphérique de calcul. La granularité du parallélisme se détermine au travers de deux concepts les *work-item* et les *work-group*. L'unité de calcul concurrente la plus fine est le *work-item*. Lors de la soumission d'une tâche, OpenCL se chargera de réquisitionner autant de *work-item* que demandé pour l'exécution parallèle du kernel. Le mapping entre les *work-item* et les *processing elements* composant le device sera réalisé par le pilote constructeur.

5 Validations

Dans cette section nous cherchons à valider le schéma numérique (2.40) ainsi que son implémentation. Dans un premier temps, la validation portera sur la partie transport en imposant une condition de type Dirichlet sur les bords du domaine et en considérant une solution initiale identiquement nulle sur le domaine Ω. Dans un second temps, nous testerons notre schéma en présence de conditions aux bords de types spéculaire et diffuse. Les validations sont toutes effectuées sur le carré unité $\Omega = [0,1]^2$. Nous étudierons l'erreur relative entre la solution exacte $\mathbf{W}^{ex}$ et la solution approchée $\mathbf{W}$. Nous définissons l'erreur relative discrète en norme p pour une taille du maillage h donnée comme

$$\epsilon_p^n = \frac{\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{i=0}^{N_x}\sum_{j=0}^{N_y}|\mathbf{W}_{k,i,j}^n - \mathbf{W}_k^{ex}(\mathbf{x}_{i,j},t^n)|^p\right)^{1/p}}{\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{i=0}^{N_x}\sum_{j=0}^{N_y}|\mathbf{W}_{k,i,j}^n|^p\right)^{1/p}}. \tag{2.47}$$

L'évolution de cette erreur en fonction de la taille du maillage h nous permettra de vérifier l'ordre de convergence q du schéma. En présence de conditions aux bords nous vérifierons également la conservation de l'énergie totale au cours du temps, définie par,

$$\mathcal{E}_{tot}^n = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{i=0}^{N_x}\sum_{j=0}^{N_y}|\mathbf{W}_{k,i,j}^n|^2\right)^{1/2}. \tag{2.48}$$

5.1 Transport libre avec conditions de Dirichlet

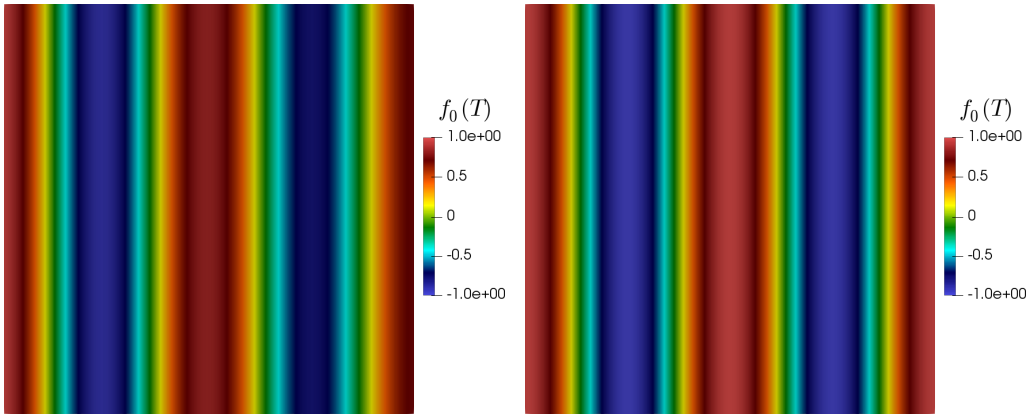
Problème

Notre premier cas test cherche à valider la partie transport du schéma. lSoit $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)^T$ un point du plan de coordonnées $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{x}_1$. Nous nous intéressons tout d'abord au problème de transport libre, tel que pour tout $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T]$ nous,

$$\begin{cases} \partial_t f_0(\mathbf{x},t) + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x},t) = 0, \\ f_0(\mathbf{x},t) = F(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{2.49}$$

où $\mathbf{v}_0 = [1, 0]$ désigne la vitesse de transport. Dans le cas d'un transport linéaire, nous pouvons calculer la solution exacte du problème (2.49) par la méthode des caractéristiques. Dans notre cas la solution exacte f_0^{ex} de (2.49) est donnée par,

$$f_0^{ex}(\mathbf{x},t) = F(\mathbf{x} - \mathbf{v}_0 t). \tag{2.50}$$



(a) $N_x = N_y = 128$ **(b)** $N_x = N_y = 4096$

Figure 2.2: Validation de la partie transport sans condition de rebond. Tracés des solutions exacte et approchée à $t = 1.5$ pour deux finesses de maillage. L'onde est injectée par condition de Dirichlet. Paramètres de calcul : nombre de vitesse $N = 1$ et CFL $= 0.8$.

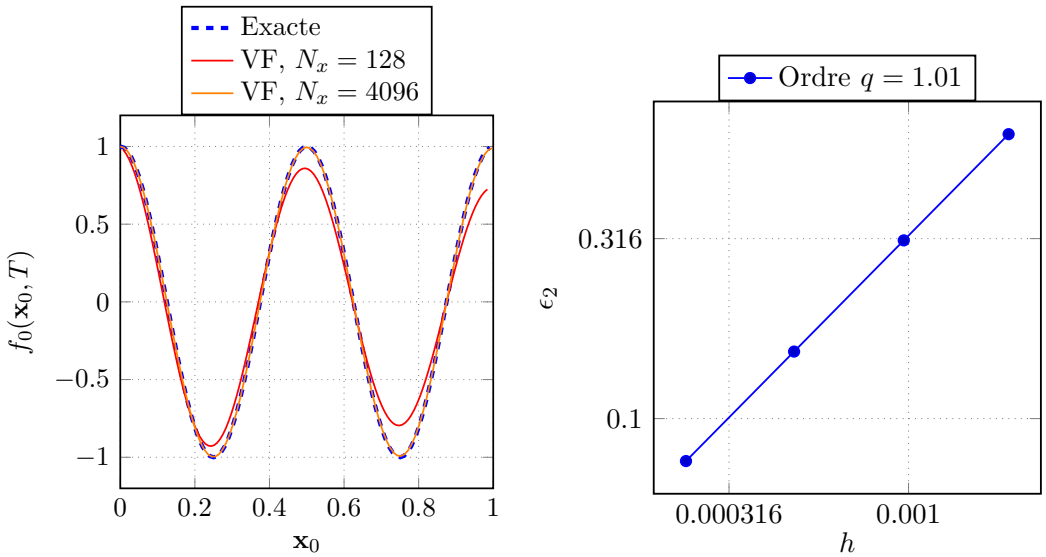
Dans notre application, nous considérons la fonction

$$F(\mathbf{x}) = \cos(\nu 2\pi \mathbf{x}_0) \tag{2.51}$$

avec $\nu = 2$ la fréquence. Pour valider notre méthode VF nous appliquons ainsi la condition de Dirichlet au bord du domaine telle que,

$$f_0(\mathbf{x}, t) = f_0^{ex}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \times [0, T]. \tag{2.52}$$

Les allures des solutions approchées (cellule par cellule) sont données en figure 2.2 pour deux finesses de maillage. Nous présentons également en figure 2.3a, une coupe de la solution pour $\mathbf{x}_1 = 0.5$, permettant d'illustrer, sans surprise, le caractère diffusif du schéma VF explicite. En effet nous remarquons bien, en figure 2.3a, l'étalement de la solution $N_x = N_y = 128$. L'évolution de l'erreur relative ϵ_2 en fonction du pas d'espace h est donnée en figure 2.3b au travers d'un graphe log log (voir Tableau 2.1 pour les valeurs). La régression linéaire calculée nous donne $q = 1.13$ comme estimateur de l'ordre de convergence du schéma. Cette valeur mesurée correspond au résultat théorique souhaité et valide donc la partie transport de notre méthode.



(a) **(b)**

Figure 2.3: Validation de la partie transport sans condition de rebond. Tracés des solutions exacte et approchée à $t = 1.5$ pour deux finesses de maillage. L'onde est injectée sur le bord par une condition de Dirichlet. Paramètres de calcul : nombre de vitesse $N = 1$ et CFL $= 0.8$.

N_x	h	ϵ_2
128	$7.8 \cdot 10^{-3}$	0.73
256	$3.9 \cdot 10^{-3}$	0.36
512	$1.9 \cdot 10^{-3}$	0.18
1,024	$9.7 \cdot 10^{-4}$	$8.9 \cdot 10^{-2}$
2,048	$4.8 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-2}$
4,096	$4.8 \cdot 10^{-4}$	$2.22 \cdot 10^{-2}$

Table 2.1: Validation de la partie transport sans condition de rebond. Valeurs de l'erreur relative ϵ_2 entre la solution exacte et approchée à $t = 1.5$. Paramètres de calcul : nombre de vitesse $N = 1$ et CFL $= 0.8$.

5.2 Transport avec condition de rebond spéculaire

Problème

Soit S_8 la discrétisation uniforme de $\mathbb{S}^1$ composée des vitesses $\mathbf{v}_k$ pour $k = 0, \ldots, 7$. Nous nous intéressons à présent au problème de transport pour tous $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T]$ et tous $k = 0, \ldots 7$,

$$\begin{cases} \partial_t f_k(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}_k \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_k(\mathbf{x}, t) = 0, \\ f_k(\mathbf{x}, 0) = 0, \end{cases} \tag{2.53}$$

complété par la condition au bord pour tout $(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$ telle que,

$$\begin{aligned} f_1^s(\mathbf{x}, t) &= \mathbb{1}_{\mathbf{x}_0=0,\, \mathbf{x}_1 \in [0.3, 0.7]}, \\ f_k^s(\mathbf{x}, t) &= (1 - \alpha(\mathbf{x})) f_p(\mathbf{x}, t), \quad \forall k = 0, \ldots 7 \end{aligned} \tag{2.54}$$

avec p l'indice de la vitesse de rebond spéculaire $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_k - 2(\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \in S_7$ pour tous $p = 0, \ldots, 7$ et toute normale $\mathbf{n}$ au bord $\partial\Omega$. Dans (2.54), nous prenons α le coefficient d'absorption tel que

$$\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x}_0 = 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.55}$$

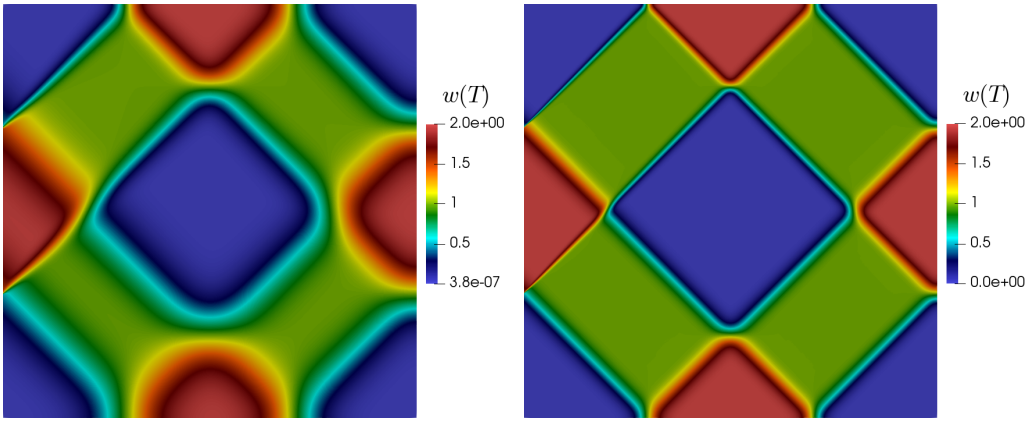
Description

Ce cas test largement inspiré de [41] se base sur l'injection d'une onde constante sur une zone ($\mathbf{x}_1 \in [0.3, 0.7]$) du bord gauche du domaine Ω. L'injection se fait au travers d'une condition de Dirichlet imposée sur la vitesse $\mathbf{v}_1 = [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. L'onde, arrivant avec un angle de 45 degrés, rebondit alors de manière spéculaire vers les autres bords du domaine pour finalement ressortir par le bord gauche lorsque $\alpha(\mathbf{x}) = 1$. Ce cas test permet de valider, en présence d'absorption ou non, le bon comportement des conditions de rebond spéculaire. Au travers de considérations géométriques, nous pouvons calculer la densité exacte $w^{ex}(\mathbf{x}, t)$ ainsi que le temps $T_s = 2\sqrt{2}$ nécessaire à l'établissement du régime stationnaire. La densité exacte est ainsi donnée par

$$w^{ex}(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{k=0}^{N} f_k^{ex}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{4} \mathbb{1}_{T_i}(\mathbf{x}), \tag{2.56}$$

où les domaines T_i sont définis ainsi :

$$\begin{aligned} T_1 &= \left\{\mathbf{x} \in [0, 1]^2, |x_1 - x_0 - 0.5| \leqslant 0.2\right\}, \\ T_2 &= \left\{\mathbf{x} \in [0, 1]^2, |x_0 + x_1 - 1.5| \leqslant 0.2\right\}, \\ T_3 &= \left\{\mathbf{x} \in [0, 1]^2, |x_1 - x_0 + 0.5| \leqslant 0.2\right\}, \\ T_4 &= \left\{\mathbf{x} \in [0, 1]^2, |x_0 + x_1 - 0.5| \leqslant 0.2\right\}. \end{aligned}$$



(a) $N_x = N_y = 512$ **(b)** $N_x = N_y = 4096$

Figure 2.4: Validation de la condition spéculaire. Tracés de la densité exacte et approchée à $t = 1.5$ pour deux finesses de maillage. L'onde est injectée par condition de Dirichlet sur une zone du bord gauche. Paramètres de calcul : nombre de vitesses $N = 8$ et CFL $= 0.8$.

Ce sont des voisinages en norme infinie des trajectoires affines qui rejoignent les points $(0, 0.5)$, $(0.5, 1)$, $(1, 0.5)$, $(0.5, 0)$.

Commentaires

Les allures des solutions approchées (cellule par cellule) sont données en figure 2.4 et pour deux finesses de maillage. Nous complétons cette illustration en ajoutant une coupe de la solution pour $\mathbf{x}_1 = 0.5$ en figure 2.5a. Nous remarquons le caractère très diffusif du schéma, puisque même dans le cas d'un maillage très fin $N_x = N_y = 4096$, la solution numérique présente encore un étalement en espace. En figure 2.5b nous montrons également l'évolution de l'énergie totale ϵ_{tot} au cours du temps. Nous remarquons le fait que notre schéma capte bien l'état stationnaire qui s'établit lorsque $t > T_s$. Le tableau 2.2 présente les valeurs de l'erreur relative ϵ_2 obtenue en fonction du pas d'espace h. La régression linéaire tracée (log log) en figure 2.5c nous donne un ordre de convergence $q = 1.01$ ce qui correspond au résultat théorique souhaité. Ceci valide donc l'implémentation de la condition au bord spéculaire.

5.3 Transport avec conditions de rebond mixtes

Problème

Dans le cas d'une condition mixte au bord, nous ne pouvons utiliser la méthode des solutions manufacturées. Afin de valider notre schéma en présence de ces conditions nous proposons le cas test suivant. Soit l'ensemble des vitesses discrètes S_N discrétisé de manière uniforme avec $N = 64$. Nous considérons alors le problème de transport avec terme source dans $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T]$ et pour tous $k = 0, \ldots, N-1$

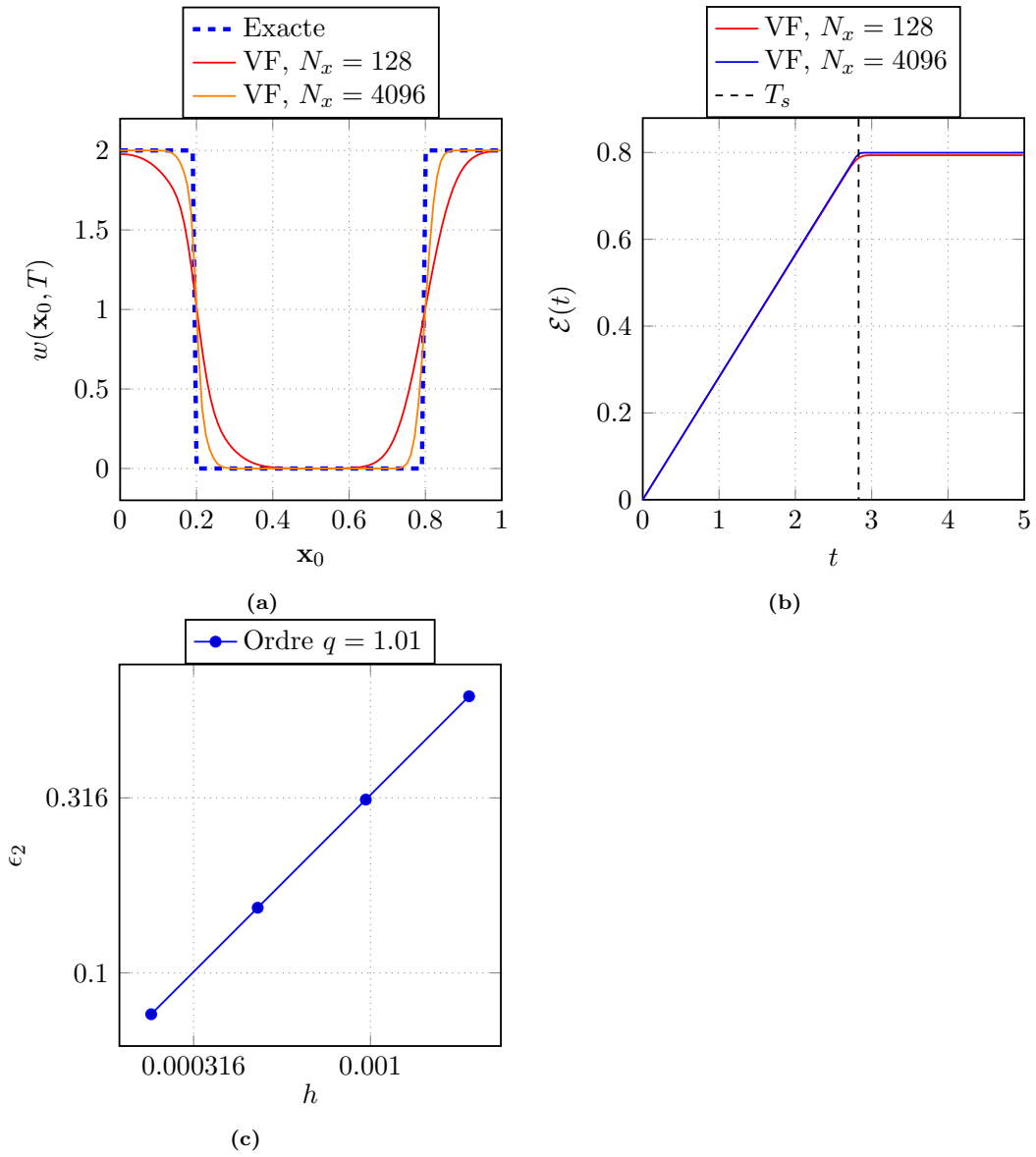


Figure 2.5: Validation de la condition spéculaire. Figure 2.5a, tracés de la densité exacte et approchée à $t = 1.5$ pour une coupe en $\mathbf{x}_1 = 0.5$. Figure 2.5b, tracés de l'énergie totale ϵ_{tot} au cours du temps t. Figure 2.5c, tracé log log de l'erreur relative. Paramètres de calcul : nombre de vitesse $N = 8$ et CFL $= 0.8$.

N_x	h	ϵ_2
512	$1.9 \cdot 10^{-3}$	0.63
1,024	$9.7 \cdot 10^{-4}$	0.31
2,048	$4.8 \cdot 10^{-4}$	0.15
4,096	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$7.72 \cdot 10^{-2}$

Table 2.2: Validation de la condition spéculaire. Valeurs de l'erreur relative ϵ_2 entre la solution exacte et approchée au temps terminal. Paramètres de calcul : nombre de vitesse $N = 8$ et CFL $= 0.8$, $T = 1.5$.

tel que

$$\begin{cases} \partial_t f_k(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}_k \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_k(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t), \\ f_k(\mathbf{x}, 0) = F(\mathbf{x}, 0). \end{cases} \tag{2.57}$$

Nous complétons ce dernier par la condition mixte pour tout $(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$ telle que,

$$f_k(\mathbf{x}, t) = \beta f_k^s(\mathbf{x}, t) + (1 - \beta) f_k^d(\mathbf{x}, t), \quad k = 0, \ldots, N - 1, \tag{2.58}$$

avec $\beta = 0.8$ et $\alpha = 0$. Pour la forme des termes f_k^s et f_k^d voir (2.9) et (2.13). Dans notre application nous choisissons comme terme source $F(\mathbf{x}, t)$ une gaussienne de la forme,

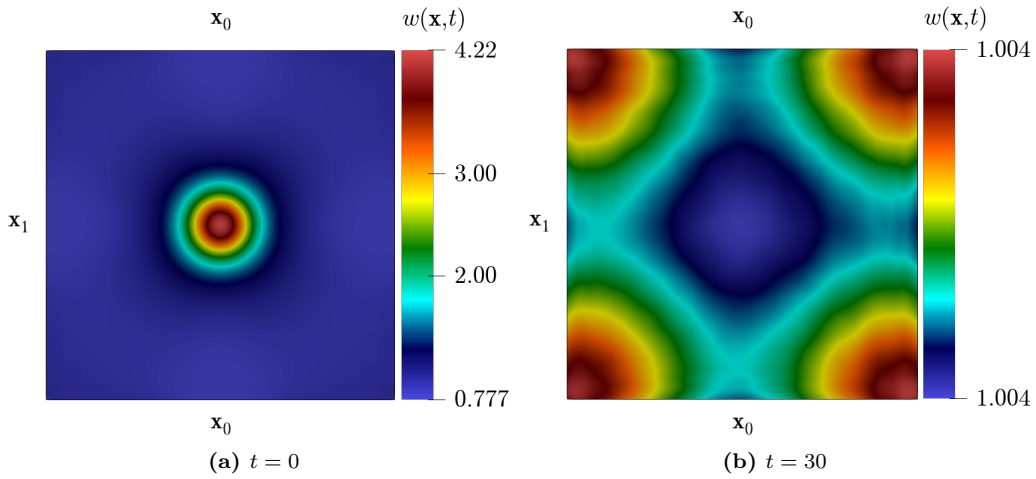
$$F(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi N \sigma^2} \exp\left(\dfrac{-||\mathbf{x} - \mathbf{x}_c||^2}{2\sigma^2}\right), & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1, \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.59}$$

où $\mathbf{x}_c = [0.5, 0.5]$ et $\sigma = 0.05$ désignent respectivement la position de son centre et sa largeur à mi-hauteur.

Description

Ce cas test cherche à faire rebondir de manière spéculaire et diffuse N perturbations gaussiennes à l'intérieur de Ω. Ces perturbations gaussiennes envoyées suivant chaque direction de S_N seront émises pendant un temps $T_{src} = 1$. En l'absence d'absorption, et sous l'hypothèse d'un schéma conservatif, nous souhaitons, grâce au mélange engendrée par les multiples réflexions aux parois, tendre pour $t \gg 0$ vers un état diffusif où la densité $w(\mathbf{x}, t)$ est alors pleinement uniforme sur Ω. Dans cet état la valeur de la densité en un point $\mathbf{x}$ est alors égale à la densité totale divisée par l'aire du domaine de calcul. Cette égalité se traduit par,

$$\lim_{t \gg 0} w(\mathbf{x}, t) = \frac{\int_d \int_\Omega w(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt}{\int_\Omega d\mathbf{x}} = T_{src} \int_\Omega F(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 1. \tag{2.60}$$



(a) $t = 0$ **(b)** $t = 30$

Figure 2.6: Validation en présence de conditions mixtes au bord. Tracés de la densité à $t = 1$ et $t = 10$. Paramètres de calcul : nombre de vitesses $N = 64$, $N_x = N_y = 1024$ et CFL $= 0.8$.

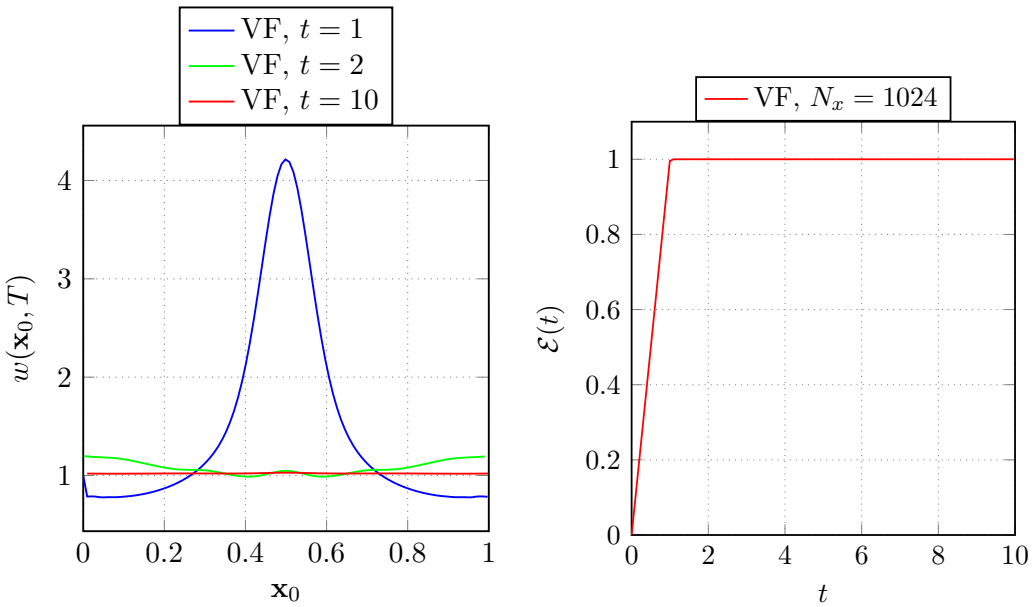
La rapidité à laquelle le régime diffusif s'établit est bien entendu conditionnée par la valeur du coefficient d'accommodation β.

Commentaires

Nous remarquons en figures 2.6 et 2.7 la convergence de notre solution vers un état stationnaire. Numériquement (voir Figure 2.7b) nous retrouvons bien la croissance linéaire de l'énergie totale au regard de l'émission de la source. La figure 2.7b montre très clairement l'uniformisation de la densité par les collisions au bords. Pour des temps suffisamment longs ($t = 10$) la solution atteint bien la valeur souhaitée (voir (2.60)). La cohérence des résultats obtenus valide ainsi de manière "qualitative" l'implémentation du schéma en présence de conditions mixtes aux bords.

6 Conclusion

Dans ce chapitre, et au travers d'une discrétisation uniforme du cercle unité $\mathbb{S}^1$, nous avons appliqué la méthode des ordonnées discrètes (DOM) au modèle cinétique (2.1). La méthode DOM nous a permis d'aboutir à un modèle semi-discret en vitesse à partir duquel, nous pouvons reconstruire les grandeurs acoustiques d'intérêt. Dans un second temps, nous avons présenté la méthode volumes finis permettant la résolution numérique du modèle DOM sur GPU. Le code développé fut ensuite validé sur différents cas tests. Au travers de ces validations, nous constatons que le schéma numérique employé introduit de par son ordre, une diffusion numérique importante et limite grandement les possibilités d'étude "locales" du champ acoustique. La compensation de cette diffusivité numérique est possible en raffinant considérablement



(a) **(b)**

Figure 2.7: Validation en présence de conditions mixtes au bord. Figure 2.7a, tracés de la densité à $t = 1$ et $t = 10$. Figure 2.7b tracé de l'énergie totale au cours du temps. Paramètres de calcul : nombre de vitesses $N = 64$, $N_x = N_y = 1024$ et CFL $= 0.8$.

le maillage faisant ainsi exploser les coûts calculatoires. Ces constatations ouvrent donc la voie à deux directions de recherche. La première consiste à chercher à réduire les dimensions du problème afin de diminuer le coût calculatoire tout en conservant les comportements acoustiques d'intérêt. La seconde est de changer de méthode numérique et d'employer des méthodes d'ordre élevé qui possède à coût calculatoire égal, une diffusivité numérique intrinsèque nettement plus faible.

Chapitre 3

Discrétisation du modèle aux moments en dimension deux

Contenu

1 Introduction 50

2 Méthode des moments 50

2.1 Moments de la fonction de distribution 51

2.2 Application aux équations de l'acoustique 51

3 Fermeture par réduction d'entropie 53

3.1 Entropie de Boltzmann 54

3.2 Réduction d'entropie 55

3.3 Inversion 56

3.4 Fermeture 58

3.5 Propriétés du modèle macroscopique 59

3.6 Calcul de la fermeture par méthode de Newton 61

3.7 Évaluation des fonctions de Bessel modifiées de première espèce 65

3.8 Calcul de la fermeture par interpolation 68

4 Résolution numérique 68

4.1 Modèle 68

4.2 Discrétisation en temps et en espace 69

4.3 Flux numériques 69

4.4 Conditions aux limites 70

5 Résultats numériques 71

5.1 Problème de Riemann 71

5.2 Validation numérique 75

6 Conclusion 78

1 Introduction

La méthode des moments est une méthode de réduction qui vise réduire le nombre de dimensions d'un système d'équations cinétiques et ainsi diminuer le coût calculatoire lié à sa résolution numérique. Son principe repose dans un premier temps, sur la réécriture du système cinétique initial au travers de grandeurs purement macroscopiques. Appelées moments, ces grandeurs macroscopiques sont calculées à partir d'opérations de moyenne en vitesse sur la fonction de distribution de particules $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$.
Le passage à l'échelle macroscopique induit une perte d'information faisant disparaître la fermeture du système aux moments et impose de ce fait une étape dite de fermeture. La fermeture du système aux moments s'obtient généralement au travers de l'ajout d'une ou plusieurs équations basées sur des considérations physiques liées au problème étudié. Le choix de la méthode de fermeture joue un rôle crucial puisqu'il conditionne des propriétés importantes du système macroscopique comme son hyperbolicité ou la positivité des solutions.
La méthode des moments a été appliquée à une large gamme de problèmes physiques. On peut citer par exemple son application au transport radiatif [13, 18, 6, 10], à la théorie cinétique des gaz [48, 27, 52], la physique des plasmas [49, 50, 28] ou encore pour calculer la dose déposée en radiothérapie [19, 7].

En première partie de ce chapitre, nous présentons la méthode des moments et l'appliquons au système d'équations cinétiques pour l'acoustique introduit au chapitre 1. Nous nous limiterons ici à un modèle constitué des deux premiers moments de la fonction de distribution que nous fermerons par fermeture entropique. Une fois le système d'équations macroscopiques pour l'acoustique établi, nous détaillerons en seconde partie, le schéma volume fini permettant sa résolution numérique sur cartes graphiques (`GPU`). Enfin, nous validerons ce schéma sur le problème de Riemann associé au modèle M_1 en une dimension d'espace.

2 Méthode des moments

Dans ce chapitre, nous considérons une fonction de distribution $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ en deux dimensions d'espace où $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ désigne la variable d'espace, $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^1$ la vitesse avec $\mathbb{S}^1$ le cercle unité et enfin $t \in \mathbb{R}^+$ le temps. La méthodologie présentée ci-dessous peut s'étendre à la dimension trois, comme nous le verrons au chapitre 6.

Remarque 2. *Nous avons fait choix de laisser apparaître la vitesse du son c au sein des équations. Ce choix est justifié par le fait qu'il facilite le dimensionnement des équations lors d'un éventuel passage sur des grandeurs physiques réelles.*

2.1 Moments de la fonction de distribution

Dans cette section nous définissons les premiers moments de la fonction de distribution $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ ainsi que les grandeurs acoustiques qui leurs sont associées.

Définition 2. *Soit k un entier positif ou nul. Nous appelons moment d'ordre k de la fonction f, l'intégrale*

$$\mathbf{M}_k(f)(\mathbf{x}, t) = c \int_{\mathbb{S}^1} \mathbf{v}^{\otimes k} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \tag{3.1}$$

où $\otimes$ désigne le produit tensoriel et $\mathbf{v}^{\otimes k}$ la k-ème puissance de $\mathbf{v}$ par rapport au produit tensoriel tel que,

$$\mathbf{v}^{\otimes k} = \underbrace{\mathbf{v} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}}_{k}. \tag{3.2}$$

Par analogies aux quantités acoustiques introduites au chapitre 1, nous donnons ici les définitions, au travers des premiers moments de f, de la densité d'énergie w, de l'intensité $\mathbf{I}$ et enfin du tenseur d'ordre 2 en vitesse $\mathbf{P}$.

Définition 3. *La densité d'énergie acoustique w est donnée par*

$$w(\mathbf{x}, t) = M_0(f)(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{v} \in \mathbb{S}^1} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \tag{3.3}$$

Définition 4. *L'intensité acoustique $\mathbf{I}$ est donnée par*

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}_1(f)(\mathbf{x}, t) = c \int_{\mathbf{v} \in \mathbb{S}^1} \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \tag{3.4}$$

Définition 5. *Le tenseur flux d'intensité $\mathbf{P}$ est donné par*

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}_2(f)(\mathbf{x}, t) = c^2 \int_{\mathbf{v} \in \mathbb{S}^1} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \tag{3.5}$$

2.2 Application aux équations de l'acoustique

Modèle cinétique

Nous rappelons ici le modèle cinétique de transport sur lequel nous allons appliquer la méthode des moments. Soit le système suivant,

$$\begin{cases} \partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + c\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0, \\ f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{cases} \tag{3.6}$$

auquel nous ajoutons la condition au bord définie en (1.56)

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = (1-\alpha)\beta f^s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + (1-\alpha)(1-\beta) f^d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+. \tag{3.7}$$

Nous allons à présent chercher à réécrire le système (3.6) sur les deux premiers moments de la fonction de distribution f.

Équation sur la densité d'énergie acoustique

Pour établir l'équation portant sur la densité d'énergie acoustique w, le moment d'ordre 0, nous intégrons (3.6) sur l'ensemble des vitesses. Commençons par réécrire l'équation sous forme conservative :

$$\partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (c f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\mathbf{v}) = 0,$$

puis intégrons. Cela nous donne,

$$\int_{\mathbf{v}\in\mathbb{S}^1} \partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + \int_{\mathbf{v}\in\mathbb{S}^1} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (c f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\mathbf{v}) d\mathbf{v} = 0. \tag{3.8}$$

En supposant la fonction f suffisamment régulière, nous obtenons

$$\partial_t \left(\int_{\mathbf{v}\in\mathbb{S}^1} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \right) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\int_{\mathbf{v}\in\mathbb{S}^1} c\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v} \right) = 0, \tag{3.9}$$

soit encore d'après les définitions 3 et 4,

$$\partial_t w(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{x}, t) = 0. \tag{3.10}$$

Équation sur l'intensité acoustique

Pour obtenir l'équation portant sur l'intensité acoustique I, le moment d'ordre 1, nous multiplions l'équation (3.8) par $c\mathbf{v}$. Nous obtenons

$$c\mathbf{v}\partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + c^2 \mathbf{v} \left(\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \right) = 0,$$

soit sous forme conservative

$$\partial_t \left(c f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\mathbf{v} \right) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(c^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \right) = 0.$$

En intégrant en vitesse et en supposant la fonction f suffisamment régulière, il vient

$$\partial_t \left(\int_{\mathbf{v}\in\mathbb{S}^1} c\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \right) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\int_{\mathbf{v}\in\mathbb{S}^1} c^2 (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v} \right) = 0, \tag{3.11}$$

soit encore, en utilisant la définition 5,

$$\partial_t \mathbf{I}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = 0. \tag{3.12}$$

Système macroscopique

Les calculs précédents nous ont permis de passer d'un système d'équations cinétiques (3.6) posé dans un espace à cinq dimensions, au système macroscopique suivant,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \partial_t w(\mathbf{x}, t) & + & \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{x}, t) & = & 0, \\ \partial_t \mathbf{I}(\mathbf{x}, t) & + & \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) & = & 0, \\ & & w(\mathbf{x}, 0) & = & w_0, \\ & & \mathbf{I}(\mathbf{x}, 0) & = & \mathbf{I}_0 \\ + \text{ CL.} & & & & \end{array} \right. \tag{3.13}$$

Domaine de réalisabilité

Il est important de noter que de par sa définition, le modèle microscopique (3.6) impose un déplacement des particules à la vitesse du son c ainsi que la positivité de la fonction de distribution f. Le passage à l'échelle macroscopique nécessite dès lors une traduction de ces contraintes microscopiques sur les moments de f. Afin de définir dans notre cas, les contraintes sur les deux premiers moments w et $\mathbf{I}$, nous introduisons la notion de domaine de réalisabilité physique $\mathcal{M}$.

Définition 6. *[36] Le domaine de réalisabilité physique $\mathcal{M}$ pour les deux premiers moments $(w, \mathbf{I})$ est donné par,*

$$\mathcal{M} = \left\{ (w, \mathbf{I}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \ t.q. \ w \ > 0 \quad et \ \frac{I}{cw} < 1 \right\}. \tag{3.14}$$

où $I = \|\mathbf{I}\|$ désigne la norme de l'intensité $\mathbf{I}$.

Nous cherchons ainsi les solutions $(w, \mathbf{I})$ du système (3.13) appartenant au cône convexe $\mathcal{M}$.

Perte de fermeture

Nous pouvons constater que le système (3.13) porte uniquement sur des grandeurs macroscopiques et a perdu toute dépendance avec la variable vitesse $\mathbf{v}$. Nous avons ainsi réduit le nombre de dimensions du problème initial (3.6). Toutefois, cette réduction dimensionnelle a engendré une perte de fermeture. En effet, le système (3.13) est constitué de 2 équations pour 3 inconnues. Pour fermer ce système, nous utilisons ici la méthode de réduction d'entropie. Cette méthode de fermeture est présentée dans la section 3.

3 Fermeture par réduction d'entropie

Pour fermer le système aux moments (3.13), nous allons lui ajouter une équation fondée sur des considérations thermodynamiques liées au comportement de la fonction de distribution f. Nous utilisons ici une fermeture par réduction d'entropique. Cette méthode, introduite par C. D. Levermore [48] dans le cadre de la mécanique des fluides, se décompose suivant deux aspects. Le premier est l'introduction d'une fonction d'entropie H qui va mesurer le désordre microscopique local de notre système. Le second consiste à calculer la forme que revêt la fonction de distribution f lorsqu'elle minimise l'entropie H du système. Une fois la forme de f obtenue nous pouvons alors fermer notre système macroscopique en exprimant le tenseur flux d'intensité $\mathbf{P}$ comme fonction des deux premiers moments w et $\mathbf{I}$.

Afin d'alléger l'écriture des développements qui suivent, notons tout d'abord par,

$$\langle f \rangle := \int_{\mathbf{v}\in\mathbb{S}^1} f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}. \tag{3.15}$$

3.1 Entropie de Boltzmann

Comme énoncé précédemment, nous donnons dans un premier temps la définition de l'entropie de notre système.

Définition 7. *[48] L'entropie H de Boltzmann associée à une fonction de distribution $f(v) \geqslant 0$ est définie par*

$$H(f) = \langle f \ln(f) \rangle. \tag{3.16}$$

Au travers de cette définition de l'entropie, nous pouvons alors établir la proposition 1.

Proposition 1. *L'entropie H définie en 7 est strictement convexe.*

Preuve. La fonction $h(t) = t\ln(t)$ est strictement convexe sur sur $\mathbb{R}^+$. Nous en déduisons alors $\forall f(v), g(v) \geqslant 0$ et $\theta \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} H(\theta f + (1-\theta)g) &= \langle h(\theta f + (1-\theta)g) \rangle \\ &\leq \langle \theta h(f) + (1-\theta)h(g) \rangle = \theta H(f) + (1-\theta)H(g). \end{aligned} \tag{3.17}$$

H est donc convexe. Il y a égalité si et seulement si

$$\int_{\mathbf{v}\in\mathbb{S}^1} \theta h(f(\mathbf{v})) + (1-\theta)h(g(\mathbf{v})) - h(\theta f(\mathbf{v}) + (1-\theta)g(\mathbf{v}))\, d\mathbf{v} = 0.$$

Comme l'intégrande est positive par convexité de h, cela implique que nous avons

$$h(\theta f(\mathbf{v}) + (1-\theta)g(\mathbf{v})) = \theta h(f(\mathbf{v})) + (1-\theta)h(g(\mathbf{v}))$$

presque partout. Par stricte convexité de h, cela implique que si θ est différent de 0 et de 1, alors $f(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v})$ presque partout. Par contraposée, si $f \neq g$ et $\theta \in]0,1[$, alors l'inégalité (3.17) est stricte, ce qui implique la stricte convexité de H. □

La proposition 1 est importante puisqu'elle permettra de justifier l'existence du minimum d'entropie.

3.2 Réduction d'entropie

En suivant l'idée de Levermore, nous cherchons donc la fonction de distribution $f_{(w,\mathbf{I})}$ telle que

$$H(f_{(w,\mathbf{I})}) = \min_f \{H(f),\ \forall f(v) \geqslant 0 \text{ t.q. } \langle f \rangle = w \text{ et } \langle c\mathbf{v}f \rangle = \mathbf{I}\}. \tag{3.18}$$

Au travers du domaine de réalisabilité des premiers moments défini en (3.14)nous pouvons calculer la forme de $f_{(w,\mathbf{I})}$.

Proposition 2. *Soit un couple de moments $(w, \mathbf{I}) \in \mathcal{M}$ donné. Le problème 3.18 admet une unique solution et la solution $f_{(w,\mathbf{I})}$ est de la forme suivante,*

$$f_{(w,\mathbf{I})}(\mathbf{v}) = \exp(-1 - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{m}), \tag{3.19}$$

avec $\mathbf{m} = (1, c\mathbf{v})^T$ et $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}_1)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ déterminé de manière unique tels que $\langle f_{(w,\mathbf{I})} \rangle = w$ et $\langle c\mathbf{v} f_{(w,\mathbf{I})} \rangle = \mathbf{I}$.

Preuve. La preuve de l'existence et de l'unicité de la solution à ce problème peut être trouvée dans [60] par exemple. La preuve s'appuie sur le fait que l'espace des vitesses est compact. Nous reproduisons ici seulement la preuve formelle conduisant à la forme de la fonction de distribution.

Nous introduisons le Lagrangien $\mathcal{L}$ associé au problème d'optimisation sous contraintes (3.18) tel que,

$$\mathcal{L}(f, \boldsymbol{\lambda}) = H(f) - [\lambda_0(w - \langle f \rangle) + \boldsymbol{\lambda}_1(\mathbf{I} - \langle c\mathbf{v}f \rangle)] \tag{3.20}$$

avec $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}_1) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$. Or, le gradient des contraintes étant linéairement indépendant, si $f_{(w,\mathbf{I})}$ est solution de (3.18) alors il existe $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_0^*, \boldsymbol{\lambda}_1^*) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ tel que $(f_{(w,\mathbf{I})}, \boldsymbol{\lambda}^*)$ soit un point critique du Lagrangien. La réciprocité de la proposition est assurée par la stricte convexité de H (voir proposition 1).

Nous définissons à présent la dérivée de Gâteaux de $\mathcal{L}$ dans la direction f par,

$$\partial_f \mathcal{L}(f_{(w,\mathbf{I})}, \boldsymbol{\lambda}^*) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\mathcal{L}(f_{(w,\mathbf{I})} + \delta f, \boldsymbol{\lambda}^*) - \mathcal{L}(f_{(w,\mathbf{I})}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\delta}. \tag{3.21}$$

D'après la condition d'optimalité du premier ordre, si $\mathcal{L}$ est dérivable au point $f_{(w,\mathbf{I})}$, nous avons alors en posant $\mathbf{m} = (1, c\mathbf{v})^T$,

$$\partial_f \mathcal{L}(f_{(w,\mathbf{I})}, \boldsymbol{\lambda}^*) = \partial_f H(f_{(w,\mathbf{I})}) + \langle \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\lambda}^* \rangle = 0. \tag{3.22}$$

Or d'après (3.16) nous avons,

$$\partial_f H(f_{(w,\mathbf{I})}) = \langle 1 + \ln(f_{(w,\mathbf{I})}) \rangle = \langle -\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\lambda}^* \rangle, \tag{3.23}$$

ainsi nous avons presque partout,

$$f_{(w,\mathbf{I})} = \exp(-1 - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\lambda}^*). \tag{3.24}$$

□

3.3 Inversion

Dans cette section nous allons chercher à exprimer les quantités a, κ et $\mathbf{b}$ en fonction des moments w et $\mathbf{I}$. Pour ce faire nous donnons dans un premier temps la définition des fonctions de Bessel modifiées de première espèce.

Définition 8. *[2]. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La n-ième fonction de Bessel modifiée de première espèce est définie par :*

$$I_n(\kappa) = \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \exp(\kappa \cos(\theta)) \frac{d\theta}{2\pi}. \tag{3.25}$$

On note $G(\kappa)$ la fonction suivante :

$$G(\kappa) = \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}. \tag{3.26}$$

Nous introduisons également le facteur d'anisotropie associé à w et $\mathbf{I}$.

Définition 9. *Soit $(w, \mathbf{I}) \in \mathcal{M}$ un couple de moments réalisables. Notons $I = \|\mathbf{I}\|$ la norme de l'intensité. La quantité suivante est appelée le facteur d'anisotropie du milieu :*

$$r = \frac{I}{cw}. \tag{3.27}$$

Nous pouvons à présent établir la proposition suivante.

Proposition 3. *Soit $(w, \mathbf{I}) \in \mathcal{M}$ un couple de moments réalisables. Alors la fonction de distribution $f_{(w,\mathbf{I})}(\mathbf{v})$ s'écrit ainsi :*

$$f_{(w,\mathbf{I})}(\mathbf{v}) = w \frac{\exp\left(\kappa \frac{\mathbf{I}\cdot\mathbf{v}}{I}\right)}{Z_\kappa}, \tag{3.28}$$

avec $Z_\kappa = I_0(\kappa)$ et où $\kappa \geqslant 0$ est solution de l'équation suivante :

$$G(\kappa) = r. \tag{3.29}$$

où G est définie en (3.26).

Preuve. Nous commençons par réécrire la fonction de distribution (3.30) ainsi

$$f_{(w,\mathbf{I})}(\mathbf{v}) = a \exp(\kappa \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}), \tag{3.30}$$

en posant

$$a = \exp(-1 - \lambda_0) \quad \text{et} \quad \kappa \mathbf{b} = -\boldsymbol{\lambda}_1 / c, \tag{3.31}$$

avec $\kappa \geqslant 0$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{S}^1$.

Le scalaire a se détermine directement à partir de l'équation,

$$w = \langle f_{(w,\mathbf{I})} \rangle = \langle a \exp(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \rangle. \tag{3.32}$$

En passant en coordonnées polaires $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi[$ dans la base $(\mathbf{b}, \mathbf{b}_\perp)$, nous avons alors

$$w = a \int_0^{2\pi} \exp(\kappa \cos(\theta)) \frac{d\theta}{2\pi} = a I_0(\kappa), \tag{3.33}$$

d'après la définition 3.25. Notant $Z_\kappa = I_0(\kappa)$, nous obtenons $a = w/Z_\kappa$.

Nous considérons à présent l'équation,

$$\mathbf{I} = \langle (c\mathbf{v}) a \exp(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \rangle. \tag{3.34}$$

En passant en coordonnées polaires (r, θ) dans la base $(\mathbf{b}, \mathbf{b}^\perp)$, nous obtenons l'expression

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= ac \int_0^{2\pi} [\cos(\theta)\mathbf{b} + \sin(\theta)\mathbf{b}_\perp] \exp(\kappa \cos(\theta)) \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= ac \left(\int_0^{2\pi} \cos(\theta) \exp(\kappa \cos(\theta)) \frac{d\theta}{2\pi} \right) \mathbf{b} \\
&= ac I_1(\kappa) \mathbf{b},
\end{aligned}$$

car le second terme de l'intégrale s'annule. Enfin en utilisant l'expression de a donnée par (3.33), nous obtenons

$$\frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \mathbf{b} - \frac{\mathbf{I}}{cw} = 0. \tag{3.35}$$

Nous déduisons de cette expression que $\mathbf{I}$ et $\mathbf{b}$ sont colinéaires. De plus nous avons

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{b} = \frac{cw I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \geqslant 0, \tag{3.36}$$

par positivité de I_1 et I_0 [2]. $\mathbf{I}$ et $\mathbf{b}$ sont donc orientés dans la même direction et donc $\mathbf{b} = \mathbf{I}/I$. L'équation (3.35) conduit alors à la relation (3.29) en introduisant la fonction $G(\kappa) = I_1(\kappa)/I_0(\kappa)$ et le facteur d'anisotropie $r = I/(cw)$. □

La construction que nous venons de faire est classique en physique du transport radiatif (voir *e.g.* [18]).

3.4 Fermeture

Grâce aux développements précédents, nous pouvons à présent fermer le système en exprimant le tenseur flux d'intensité $\mathbf{P}$ en fonction de w et $\mathbf{I}$. Nous commençons par définir le facteur d'Eddington.

Définition 10. *L'équivalent (acoustique) en deux dimensions d'espace du facteur d'Eddington χ est défini comme,*

$$\chi(r) = 1 - \frac{r}{\kappa}, \tag{3.37}$$

avec $\kappa > 0$ tel que $G(\kappa) = r$. Si $r = 0$, alors $\kappa = 0$ et l'on défini $\chi(0) = 0$.

Le fermeture obtenue est donnée par :

Proposition 4. *Soit w et $\mathbf{I}$ l'énergie et l'intensité acoustiques. La fermeture par réduction d'entropie consiste à prendre pour tenseur flux d'intensité celui associé à $f_{(w,I)}(\mathbf{v})$ qui s'exprime*

$$\mathbf{P}(w, \mathbf{I}) = \langle c^2 \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} f_{(w,\mathbf{I})}(\mathbf{v}) \rangle \tag{3.38}$$

$$= c^2 w \left[\big(1 - \chi(r)\big) \mathbf{Id} + \big(2\chi(r) - 1\big) \frac{\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}}{I^2} \right]. \tag{3.39}$$

avec $\mathbf{Id}$ est la matrice identité, où $r = I/(cw)$ est le facteur d'anisotropie du milieu et $\chi(r)$ le facteur d'Eddington.

Preuve. Reprenant l'expression (3.28), nous avons :

$$\mathbf{P}(w, \mathbf{I}) := w \langle c^2 (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \frac{\exp\left(\kappa \frac{\mathbf{I} \cdot \mathbf{v}}{I}\right)}{Z_\kappa} \rangle \tag{3.40}$$

avec $\kappa \geqslant 0$ tel que $G(\kappa) = r$.

En passant en coordonnées polaires (r, θ) dans la base $(\mathbf{I}/I, \mathbf{I}^\perp/I)$, le tenseur $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ prend alors la forme suivante,

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = \cos^2\theta \left(\frac{\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}}{I^2} \right) + \sin^2\theta \left(\frac{\mathbf{I}_\perp \otimes \mathbf{I}_\perp}{I^2} \right) + \sin\theta\cos\theta \left(\frac{\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}_\perp}{I^2} + \frac{\mathbf{I}_\perp \otimes \mathbf{I}}{I^2} \right). \tag{3.41}$$

Il vient ensuite

$$\mathbf{P}(w, \mathbf{I}) = \frac{wc^2}{Z_\kappa} \int_0^{2\pi} \exp(\kappa\cos(\theta)) \left((1 - \sin^2(\theta)) \left(\frac{\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}}{I^2} \right) + \sin^2(\theta) \left(\frac{\mathbf{I}_\perp \otimes \mathbf{I}_\perp}{I^2} \right) \right) \frac{d\theta}{2\pi}, \tag{3.42}$$

en remarquant que le dernier terme dans (3.41) conduit à des termes nuls une fois intégré par rapport à la variable θ. Nous allons chercher à présent à exprimer les

intégrales dans (3.42) en fonction de w et $\mathbf{I}$. Par intégration par partie, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_\kappa}\int_0^{2\pi}\sin^2(\theta)\,\exp(\kappa\cos(\theta))\frac{d\theta}{2\pi} &= \frac{1}{Z_\kappa\kappa}\int_0^{2\pi}\cos(\theta)\exp(\kappa\cos(\theta))\,\frac{d\theta}{2\pi}\\ &= \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)\kappa} = \frac{r}{\kappa}.\end{aligned} \tag{3.43}$$

En utilisant à présent le facteur d'Eddington, défini en (3.37), nous avons

$$\mathbf{P}(w,\mathbf{I}) = c^2 w\left[\chi(r)\left(\frac{\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}}{I^2}\right) + (1-\chi(r))\left(\frac{\mathbf{I}_\perp\otimes\mathbf{I}_\perp}{I^2}\right)\right] \tag{3.44}$$

Enfin, en décomposant la matrice identité ainsi

$$\mathbf{Id} = \frac{\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}}{I^2} + \frac{\mathbf{I}_\perp\otimes\mathbf{I}_\perp}{I^2}, \tag{3.45}$$

nous pouvons réécrire le tenseur $\mathbf{P}$ comme la somme d'un tenseur isotrope et anisotrope. Nous obtenons ainsi,

$$\mathbf{P}(w,\mathbf{I}) = c^2 w\left[\big(1-\chi(r)\big)\mathbf{Id} + \big(2\chi(r)-1\big)\frac{\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}}{I^2}\right]. \tag{3.46}$$

□

Remarque 3. *Le modèle composé des deux premiers moments de la fonction de distribution f et dont la fermeture est effectuée par réduction d'entropie est aussi appelé modèle M_1 [53].*

3.5 Propriétés du modèle macroscopique

Dans cette section nous présentons certaines propriétés liées au modèle M_1.

Positivité

Comme nous l'avons vu précédemment, une des conditions de réalisabilité physique est la positivité du moment d'ordre zéro : w. Cette positivité est clairement assurée par la forme de $f_{(w,\mathbf{I})}$ obtenue par fermeture entropique.

Hyperbolicité

Un autre propriété importante induite par la fermeture entropique est la préservation de l'hyperbolicité du système. Nous résumons ce résultat dans la proposition 5.

Proposition 5. *Soit le vecteur* $\mathbf{m} = (1, c\mathbf{v})^T$ *et soit le système aux moments,*

$$\partial_t \langle \mathbf{m} f_{(w,I)} \rangle + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \langle c\mathbf{m} \otimes \mathbf{v} f_{(w,I)} \rangle = 0 \tag{3.47}$$

avec $f_{(w,\mathbf{I})}(\mathbf{v})$ *la fonction de distribution obtenue par minimisation d'entropie. .*

Le système (3.47) *est un système hyperbolique dont les vitesses caractéristiques sont comprises entre* $-c$ *et* c.

Le système (3.47) est équivalent au système (3.13) complété par la fermeture (3.38).

Preuve. La preuve se trouve dans [48]. Nous la reproduisons ci-dessous. Nous réécrivons la fonction distribution (3.30) ainsi

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v}) := f_{(w,\mathbf{I})}(\mathbf{v}) = \exp(-1 - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\lambda}) \tag{3.48}$$

avec $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \boldsymbol{\lambda_1})$ le vecteur des multiplicateurs de Lagrange, reliés à $(w, \mathbf{I})$ par la relation $\langle f_{(w,\mathbf{I})} \rangle = w$ et $\langle c\mathbf{v} f_{(w,\mathbf{I})} \rangle = \mathbf{I}$. . En réinjectant la forme (3.48) dans (3.47) et dérivant par rapport à $\boldsymbol{\lambda}$ nous obtenons,

$$\langle (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) f_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v}) \rangle \, \partial_t \boldsymbol{\lambda} + \sum_{i=1}^{2} \langle c\mathbf{v}_i (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) f_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v}) \rangle \partial_{\mathbf{x}_i} \boldsymbol{\lambda} = 0. \tag{3.49}$$

que nous pouvons noter

$$A(\boldsymbol{\lambda}) \partial_t \boldsymbol{\lambda} + \sum_{i=1}^{2} K_i(\boldsymbol{\lambda}) \partial_{\mathbf{x}_i} \boldsymbol{\lambda} = 0 \tag{3.50}$$

en introduisant

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\lambda}) &= \langle (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) f_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v}) \rangle, \\ K_i(\boldsymbol{\lambda}) &= \langle c\mathbf{v}_i (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) f_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v}) \rangle, \quad \text{pour } i = 1, 2. \end{aligned}$$

Nous remarquons que les matrices K_i sont symétriques pour $i = 1, 2$ et A est symétrique définie positive. En effet, pour tout vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{d+1}$, non nul, nous avons

$$\mathbf{u} \cdot (A(\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{u}) = \langle (\mathbf{u} \cdot \mathbf{m})^2 f_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v}) \rangle > 0. \tag{3.51}$$

Nous en déduisons que le système (3.50) est un système hyperbolique. En effet, soit $R(\boldsymbol{\lambda})$ la racine carrée de $A(\boldsymbol{\lambda})$, qui est elle aussi symétrique définie positive. Alors $A^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) K_i(\boldsymbol{\lambda}) = R^{-1}(\boldsymbol{\lambda})(R^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) K_i(\boldsymbol{\lambda}) R^{-1}(\boldsymbol{\lambda})) R(\boldsymbol{\lambda}))$ et $R^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) K_i(\boldsymbol{\lambda})$ est symétrique donc diagonalisable à valeurs propres réelles. On en déduit que $A^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) K_i(\boldsymbol{\lambda})$ est aussi diagonalisable à valeurs propres réelles.

De plus nous définissons pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$K(\boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{\xi}) := \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{\xi}_i K(\boldsymbol{\lambda}) = \langle c(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\xi})(\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}) f_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v})\rangle. \tag{3.52}$$

Pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{d+1}$, nous avons

$$\mathbf{u}\cdot(K(\boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{\xi})\mathbf{u}) = \langle c(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\xi})(\mathbf{m}\cdot\mathbf{u})^2 f_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v})\rangle \tag{3.53}$$

Comme $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{d-1}$, nous avons $|\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\xi}| \leqslant 1$. D'où

$$-c\langle(\mathbf{m}\cdot\mathbf{u})^2 f_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v})\rangle \leqslant \mathbf{u}\cdot(K(\boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{\xi})\mathbf{u}) \leqslant c\langle(\mathbf{m}\cdot\mathbf{u})^2 f_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v})\rangle \tag{3.54}$$

soit encore

$$-c \leqslant \frac{\mathbf{u}\cdot(K(\boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{\xi})\mathbf{u})}{\mathbf{u}\cdot(A(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{u})} \leqslant c. \tag{3.55}$$

Nous en déduisons que toute valeur propre de $A^{-1}(\boldsymbol{\lambda})K(\boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{\xi})$ est comprise entre $-c$ et c. □

La propriété d'hyperbolicité découlant de la fermeture entropique est également valable en trois dimensions d'espace lorsque l'ensemble compact Ω des vitesses est caractérisé par la sphère unité $\mathbb{S}^2$. Cette propriété justifie également l'utilisation dans cette thèse, de méthodes de résolution numérique de type volumes finis.

3.6 Calcul de la fermeture par méthode de Newton

Nous remarquons que la fermeture du système se ramène ainsi à la connaissance de la grandeur $\chi(r)$, pleinement déterminée à partir des moments w et $\mathbf{I}$. Dès lors, pour calculer la fermeture à partir d'un couple de moments donné nous avons deux possibilités,

1. Calculer le coefficient κ en résolvant numériquement l'équation (3.29) puis déterminer $\chi(r)$
2. Calculer directement $\chi(r)$ en fonction du facteur d'anisotropie r au travers d'une fonction analytique connue.

L'équation (3.29) ne peut être inversée analytiquement, il nous faudra dès lors utiliser une méthode de recherche de zéros. Nous choisissons d'utiliser ici une méthode de Newton-Raphson. L'existence et l'unicité de ce zéro sont assurées par la proposition, (2) mais nous pouvons donner une preuve directe de cette propriété. Ce résultat est donné en proposition 6.

Proposition 6. *La fonction $G(\kappa) = I_1(\kappa)/I_0(\kappa)$ est strictement croissante et strictement concave sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, l'équation*

$$G(\kappa) = r \tag{3.56}$$

admet une unique solution $\kappa \in \mathbb{R}^+$ pour tout $0 \leq r < 1$.

Avant de donner la preuve de la proposition 6, nous donnons dans les deux Lemmes ci-dessous certaines propriétés satisfaites par les fonctions de Bessel modifiées.

Lemme 1. *Nous avons $I_0'(\kappa) = I_1(\kappa)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les relations suivantes sont satisfaites :*

$$I_n'(\kappa) = I_{n-1}(\kappa) - n\frac{I_n(\kappa)}{\kappa} = \frac{1}{2}\Big(I_{n+1}(\kappa) + I_{n-1}(\kappa)\Big). \tag{3.57}$$

Nous en déduisons l'expression suivante : $G'(\kappa) = 1 - G(\kappa)/\kappa - G^2(\kappa)$.

Preuve. Les propriétés (3.57) s'obtiennent aisément par intégration partie (voir également [2]). Nous avons ensuite

$$G'(\kappa) = \left(\frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}\right)' = \frac{I_1'(\kappa)I_0(\kappa) - I_1(\kappa)I_0'(\kappa)}{I_0^2(\kappa)} = \frac{(I_0(\kappa) - \frac{I_1(\kappa)}{\kappa})I_0(\kappa) - I_1(\kappa)I_1(\kappa)}{I_0^2(\kappa)}$$

d'où le résultat. □

Lemme 2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit I_n la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre α. Nous définissons les fonctions suivantes*

$$G_n(\kappa) = I_{n+1}(\kappa)/I_n(\kappa). \tag{3.58}$$

Nous avons alors les relations pour tout $n \geq 0$,

$$0 < G_n'(\kappa) < \frac{G_n(\kappa)}{\kappa}, \quad \forall \kappa > 0, \tag{3.59}$$

de plus,

$$G_{n+1}(\kappa) \leq \frac{\kappa}{n + (\kappa^2 + n^2)^{1/2}} \leq G_n(\kappa), \quad \forall \kappa \geq 0. \tag{3.60}$$

et enfin,

$$0 \leq \frac{\kappa}{n + (\kappa^2 + n^2)^{1/2}} \leq G_n(\kappa) \leq \frac{\kappa}{n + (\kappa^2 + (n+2)^2)^{1/2}} < 1, \quad \forall \kappa \geq 0. \tag{3.61}$$

Les résultats de ce Lemme sont tirés de la référence [3], où le lecteur pourra y trouver la preuve détaillée. Ci-dessous nous donnons à présent la preuve de la proposition 6.

Preuve. La fonction G est continue sur $\mathbb{R}$. Nous avons $G(0) = 0$ et par la propriété (3.61) appliquée à $G = G_0$, nous obtenons

$$\lim_{\kappa \to +\infty} G(\kappa) = 1. \tag{3.62}$$

Ainsi, cela prouve l'existence d'au moins un zéro s^* pour tout $0 \leq r < 1$. De plus, d'après la stricte monotonie de la dérivée assurée par l'inégalité (3.59), l'équation (3.37) admet pour tout $0 \leq r < 1$, un unique zéro κ^* sur $\mathbb{R}^+$.

Nous ne sommes pas parvenus à démontrer rigoureusement la concavité de la fonction G. Cependant, nous observons numériquement sur la Figure 3.1 que cette fonction est bien concave. □

Limitations de la méthode Newton

Au vu des propriétés de convexité, la méthode de Newton nous assure en théorie une convergence globale. Néanmoins, elle présente un certain nombre de limitations pour les deux cas limites $r \to 0$ et $r \to 1$.

1. Cas où r tend vers 0.

   D'après la Définition 8 nous avons,

   $$\lim_{\kappa \to 0} G''(\kappa) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\kappa \to 0} G(\kappa) = 0. \tag{3.63}$$

   Ce cas apparaît effectivement lorsque $r \to 0$. Pour contourner ce problème, nous utilisons un développement de Taylor à l'ordre 3 autour de 0 (voir [2]) pour le calcul de b. Cela nous donne,

   $$G(\kappa) = \frac{1}{2}\kappa + O\left(\kappa^3\right). \tag{3.64}$$

   Ainsi, lorsque r tends vers 0 nous avons,

   $$\lim_{r \to 0} \chi(r) \approx 1 - \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}. \tag{3.65}$$

2. Cas où r tend vers 1.

   Si la propriété 6 nous assure la convergence de la méthode de Newton-Raphson pour tout point de départ b_0 dans $\mathbb{R}^{+*}$, la vitesse de convergence de cette dernière est très fortement limitée lorsque $r \to 1$. En effet un calcul nous donne,

   $$\lim_{\kappa \to \infty} G(\kappa) = 1, \quad \lim_{\kappa \to \infty} G'(\kappa) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{r \to 1} \chi(r) = 0. \tag{3.66}$$

   Afin d'assurer la convergence de notre méthode de recherche de zéros, nous avons apporté plusieurs modifications. Une première amélioration effectuée consiste à optimiser le choix du point d'initialisation de la méthode. Après plusieurs essais "empiriques" nous avons retenu l'initialisation suivante,

   $$\kappa_0 = \frac{r}{1 - 0.9\, r^2}. \tag{3.67}$$

Cette initialisation nous assure d'être toujours à droite du zéro et nous permet de gagner deux à trois itérations par résolution. Ce résultat est non négligeable puisque l'évaluation des fonctions de Bessel possède un coût relativement élevé. Malgré cette amélioration, cela ne fut pas suffisant pour assurer la convergence de la méthode de Newton lorsque le facteur d'anisotropie r devient très proche de 1. En effet, nous avons constaté que très vite, *e.g* $r > 1 - 10^{-3}$ la méthode de Newton à besoin de beaucoup d'itérations ($N > 40$) pour converger à la précision demandée (ici 10^{-6}). La solution mise en place, consiste alors à poser un maximum d'itérations relativement bas *e.g* $N = 20$ pour la méthode de Newton et de passer le relai à une méthode de dichotomie. Cette méthode hybride (voir l'algorithme 1 pour plus de détails) assure une bonne convergence pour des valeurs de r inférieures à $1 - 10^{-4}$. Néanmoins, nous nous sommes heurtés à une autre limitation qui provient cette fois-ci de l'évaluation des fonctions de Bessel modifiées de première espèce en simple précision lorsque l'argument devient très grand. La manière dont sont évaluées les fonctions de Bessel sera l'objet de la section suivante.

La figure 3.1 ci-dessous illustre graphiquement la situation à laquelle nous sommes confrontés lors du calcul de κ par résolution de l'équation (3.29) par la méthode de Newton-Raphson. La figure 3.2 donne l'allure de $\chi(r)$ en fonction du facteur d'anisotropie r.

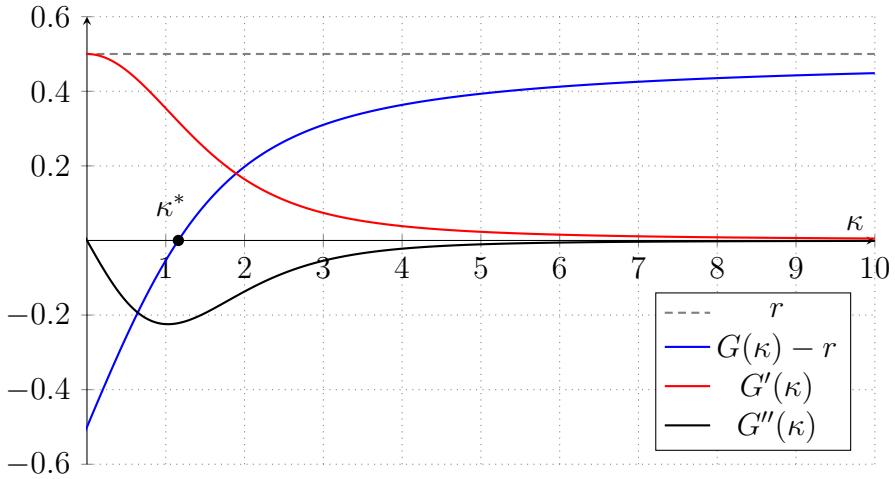


Figure 3.1: Tracé du minimum recherché κ^*, de la fonction $G(\kappa) - r$ ainsi que ses dérivées pour $r = 0.5$.

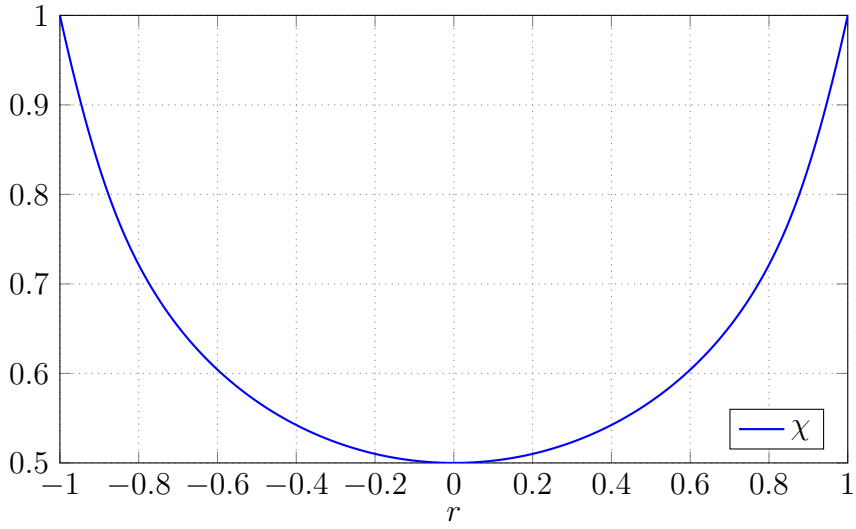


Figure 3.2: Évolution de $\chi(r)$ en fonction du facteur d'anisotropie r

3.7 Évaluation des fonctions de Bessel modifiées de première espèce

L'algorithme de volumes finis que nous présentons plus loin sera programmé sur carte graphique (GPU) en utilisant l'environnement `OpenCL`. Pour l'instant, la bibliothèque mathématique `OpenCL` ne comporte pas les fonctions de Bessel. Nous indiquons donc ci-dessous comment elles seront calculées. Cette procédure est extraite de [2]. Les données ci-dessous donnent les interpolants pour I_0 et I_1 ainsi que les erreurs associées.

- Si $0 \leq \kappa \leq 3.75$ alors,

$$I_0(\kappa) = P_0(\kappa) + \varepsilon_0(\kappa) = \sum_{k=0}^{6} a_k \kappa^{2k} + \varepsilon_0(\kappa) \tag{3.68}$$

et

$$I_1(\kappa) = P_1(\kappa) + \varepsilon_1(\kappa) = \sum_{k=0}^{6} b_k \kappa^{2k+1} + \varepsilon_1(\kappa), \tag{3.69}$$

avec $|\varepsilon_0(\kappa)| < 1.6.10^{-7}$, $|\varepsilon_1(\kappa)| < 8.10^{-9}$ et les coefficients,

$$\begin{array}{llll} a_0 = 1, & a_1 = 3.5156229, & a_2 = 3.0899424, & a_3 = 1.2067492, \\ a_4 = 0.2659732, & a_5 = 0.0360768, & a_6 = 0.0045813, & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{llll} b_0 = 1/2, & b_1 = 0.87890594, & b_2 = 0.51498869, & b_3 = 0.15084934, \\ b_4 = 0.02658733, & b_5 = 0.00301532, & b_6 = 0.00032411. & \end{array}$$

Entrées : Un vecteur $\mathbf{I} = (I_x, I_y)$ et un réel $w > 0$
Sorties : Un réel $\chi \leq 0$

```
y(x) ← I_1(x)/I_0(x) − r
ε ← 10^{−8}
N ← 20
I ← √(I_x^2 + I_y^2)
si I < ε ou w < ε alors
    retourner 0.5
r ← I/w
si r > 1 − ε alors
    retourner 0
▷ Newton-Raphson
sinon
    b_n ← r/(1 − 0.9r^2)
    i ← 0
    tant que i ≤ N ou |δ| ≥ ε faire
        δ ← y(b_n)/y'(b_n)
        b_{n+1} ← b_n − δ
        i ← i + 1
        b_n ← b_{n+1}
    ▷ Dichotomie
    si |δ| ≥ ε alors
        l ← b_n
        r ← 10^6
        tant que l − r > ε faire
            m ← (l + r)/2
            si y(m)y(l) < 0 alors
                r ← m
            sinon
                l ← m
        b_n ← m
    retourner 1 − r/b_n
```

Algorithme 1 : Calcul de χ par recherche de zéros

- Si $3.75 \leq \kappa < \infty$ alors,

$$\sqrt{\kappa}\exp(-\kappa)I_0(\kappa) = Q_0(\kappa) + \varepsilon_0'(\kappa) = \sum_{k=0}^{8} c_k \kappa^{-k} + \varepsilon_0'(\kappa) \tag{3.70}$$

et

$$\sqrt{\kappa}\exp(-\kappa)I_1(\kappa) = Q_1(\kappa) + \varepsilon_1'(\kappa) = \sum_{k=0}^{8} d_k \kappa^{-k} + \varepsilon_1'(\kappa), \tag{3.71}$$

avec $|\varepsilon_0'(\kappa)| < 1.9.10^{-7}$, $|\varepsilon_1'(\kappa)| < 2.2.10^{-7}$ et les coefficients,

$c_0 = 0.39384228$, $c_1 = 0.01328592$, $c_2 = 0.00225319$, $c_3 = -0.00157565$,
$c_4 = 0.00916281$, $c_5 = -0.02057706$, $c_6 = 0.02635537$ $c_7 = -0.01647633$
$c_8 = 0.392377$.

et

$d_0 = 0.39894228$, $d_1 = -0.03988024$, $d_2 = -0.00362018$, $d_3 = 0.00163801$,
$d_4 = 0.0101555$, $d_5 = 0.02282967$, $d_6 = -0.02895312$ $d_7 = 0.01787654$
$d_8 = -0.00420059$.

De manière plus spécifique, nous nous intéressons à l'évaluation du rapport $I_1/I_0 = G$ ainsi qu'à sa dérivée. Afin d'optimiser les coûts calculatoires, nous avons programmé une fonction qui renvoie directement une approximation rationnelle de G. La fonction rationnelle Π a été obtenue par simplification formelle via `MAPLE` des rapports P_1/P_0 et Q_1/Q_0 sur les intervalles respectifs.
En notant l'écart $\varepsilon_r(\kappa) = G(\kappa) - \Pi(\kappa)$ et en remarquant que par définition de I_0 et I_1 pour tout $\kappa \geq 0$, $P_0 \geq 1 \pm |\varepsilon_0|$, et $Q_0 \geq 1 \pm |\varepsilon_0'|$ nous avons alors pour $0 \leq \kappa \leq 3.75$,

$$G(\kappa) = \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} = \frac{P_1(\kappa) + \varepsilon_1(\kappa)}{P_0(\kappa) + \varepsilon_0(\kappa)} = \frac{P_1(\kappa) + \varepsilon_1(\kappa)}{P_0(\kappa)\left(1 + \frac{\varepsilon_1(\kappa)}{P_0(\kappa)}\right)} \leq \frac{P_1(\kappa)}{P_0(\kappa)} + \varepsilon_1(\kappa). \tag{3.72}$$

En raisonnant de la même manière sur l'intervalle $3.75 \leq \kappa \leq \infty$ nous avons alors

$$|\varepsilon_r| = \max\left(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_1'|\right). \tag{3.73}$$

Remarque 4. *Le choix de cette forme d'interpolation pour les fonctions de Bessel, est justifié par le fait que nos simulations numériques sont effectuées en simple précision. Ainsi, avec une erreur d'interpolation e_r très proche de l'epsilon machine $\epsilon \approx 1.1910^{-7}$ en simple précision, nous espérons n'impacter que très faiblement la précision des calculs.*

3.8 Calcul de la fermeture par interpolation

En suivant l'idée proposée par R. Duclous, B. Dubroca et M. Frank [19], nous présentons ici une approximation par fraction rationnelle pour la grandeur χ. En utilisant la méthode proposée dans l'article [55] et implémentée en `MATLAB` nous obtenons comme approximation,

$$\chi(r) \approx \frac{a_6 r^6 + a_4 r^4 + a_2 r^2 + a_0}{r^4 + b_2 r^2 + b_0} \tag{3.74}$$

avec,

$$\begin{array}{lll} a_0 = 0.762066949972264, & a_2 = 0.219172080193380, & a_4 = -0.259725400168378 \\ a_6 = 0.457105130221120, & b_0 = 2.28620084991677, & b_2 = -2.10758208969840. \end{array}$$

Nous avons calculé l'erreur entre la valeur de χ obtenue par méthode de Newton (tolérance de la méthode de Newton à 10^{-14}) et celle obtenue par interpolation pour 10^3 points dans l'intervalle $[0, 1[$. L'erreur engendrée sur le calcul de χ est inférieure à 10^{-6} sur l'ensemble des points de calcul. Il est clair que l'emploi de la méthode d'interpolation engendre une diminution drastique des temps de calcul.

4 Résolution numérique

4.1 Modèle

Au travers de la méthode des moments et d'une fermeture entropique nous avons effectué, dans la section précédente, la réduction du modèle cinétique (3.6). Celle-ci nous a permis d'établir un nouveau système de lois de conservations portant sur les premiers moments de la fonction de distribution f. Nous rappelons ci-dessous le modèle que nous allons chercher à résoudre numériquement :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \partial_t w(\mathbf{x},t) & + & \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{x},t) & = & w^s(\mathbf{x},t), \\ \partial_t \mathbf{I}(\mathbf{x},t) & + & \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}(w(\mathbf{x},t), \mathbf{I}(\mathbf{x},t)) & = & \mathbf{I}^s(\mathbf{x},t), \\ & & w(\mathbf{x},0) & = & w_0, \\ & & \mathbf{I}(\mathbf{x},0) & = & \mathbf{I}_0, \\ + \text{ CL.} & & & & \end{array} \right. \tag{3.75}$$

où $\mathbf{P}$, le tenseur flux d'intensité, est défini par

$$\mathbf{P}(w, \mathbf{I}) = c^2 w \left[(1 - \chi(r))\mathbf{Id} + (2\chi(r) - 1)\frac{\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}}{I^2} \right], \tag{3.76}$$

avec $\chi(r) = 1 - r/\kappa$ où κ est l'unique solution de l'équation $G(\kappa) = r$. Les termes w^s et $\mathbf{I}^s$ font références à des termes sources.

Nous cherchons ici à discrétiser ce système hyperbolique (voir 5) par méthode volumes finis. En utilisant la notation introduite au chapitre 2 nous pouvons réécrire le système sous la forme condensée suivante,

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \partial_i \mathbf{F}^i(\mathbf{W}) = \mathbf{S}, \\ + \text{CL}, \end{cases} \tag{3.77}$$

avec $\mathbf{W} = (w, \mathbf{I})^T$ le vecteur inconnu, $\mathbf{F} = (\mathbf{I}, \mathbf{P})^T$ le flux physique et enfin $\mathbf{S} = (w^s, \mathbf{I}^s)^T$ le terme source.

4.2 Discrétisation en temps et en espace

Nous considérons un domaine spatial $]0, L_x[\times]0, L_y[$ que nous découpons en N_x (resp. N_y) cellules suivant la direction $\mathbf{x}$ (resp. $\mathbf{y}$). Nous définissons les pas d'espace par $\Delta x = L_x/N_x$ et $\Delta y = L_y/N_y$. Le centre $\mathbf{x}_{ij}$ d'une cellule $L_{i,j}$ est alors repéré par,

$$\mathbf{x}_{ij} = \left((i - \frac{1}{2})\Delta x, (j - \frac{1}{2})\Delta y \right). \tag{3.78}$$

Nous définissons également les instants $t^n = n\Delta t$, avec Δt le pas de temps et n un entier naturel. En réutilisant la notation introduite au chapitre 2 nous avons alors par méthode volumes finis en espace et schéma d'Euler explicite en temps,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{W}_{i,j}^n &- \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}^*(\mathbf{W}_{i,j}^n, \mathbf{W}_{i+1,j}^n, \mathbf{n}_x) + \mathbf{F}^*(\mathbf{W}_{i-1,j}^n, \mathbf{W}_{i,j}^n, \mathbf{n}_x) \right) \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\mathbf{F}^*(\mathbf{W}_{i,j}^n, \mathbf{W}_{i,j+1}^n, \mathbf{n}_y) + \mathbf{F}^*(\mathbf{W}_{i,j-1}^n, \mathbf{W}_{i,j}^n, \mathbf{n}_y) \right) \\ &+ \Delta t\, \mathbf{S}_{ij}. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Nous rappelons que cette décomposition vient du fait que nous travaillons sur une maillage composé de cellules rectangulaires, ainsi toute normale $\mathbf{n}$ à une cellule peut être décomposée selon $\mathbf{n}_x = (1, 0)^T$ et $\mathbf{n}_y = (0, 1)^T$.

Le pas de temps et le pas d'espace sont choisis de manière à satisfaire la contrainte de stabilité de type CFL (5.47) ou (2.44) déjà introduites au chapitre 3.

4.3 Flux numériques

Nous utiliserons par la suite deux flux numériques : le flux numérique de Rusanov et le flux numérique cinétique.

Le flux numérique de Rusanov, encore appelé local Lax-Friedrichs, s'écrit ainsi

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R, \mathbf{n}) = \frac{\left(\mathbf{F}(\mathbf{W}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_R) \right) \cdot \mathbf{n}}{2} - \frac{\lambda}{2} \left(\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_L \right), \tag{3.80}$$

avec $\lambda > 0$ le maximum des valeurs absolues des valeurs propres de la Jacobienne de $\mathbf{F}$ pris sur les deux cellules voisines L et R. Nous connaissons explicitement les valeurs propres du système pour le système purement uni-dimensionnel (voir proposition 7). Pour le système 2D, nous n'avons malheureusement pas d'expression explicite des valeurs propres. Nous prenons alors un majorant des valeurs propres $\lambda = c$, comme énoncé dans la propriété 5, et le schéma devient le schéma Lax-Friedrichs.

Le flux numérique cinétique s'écrit quant à lui

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R, \mathbf{n}) = \int_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{S}^1 \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}>0}} f_{(w_L,\mathbf{I}_L)}(\mathbf{v}) \begin{bmatrix} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \\ \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) \end{bmatrix} d\mathbf{v} + \int_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{S}^1 \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}<0}} f_{(w_R,\mathbf{I}_R)}(\mathbf{v}) \begin{bmatrix} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \\ \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) \end{bmatrix} d\mathbf{v} \tag{3.81}$$

où $\mathbf{W}_L = (w_L, \mathbf{I}_L)$ et $\mathbf{W}_R = (w_R, I_R)$. Ce flux nécessite donc de reconstruire la fonction de distribution puis de l'intégrer sur des demi-cercles. Nous utiliserons pour cela une intégration numérique de type trapèze comme introduite au chapitre 2 (voir (2.4)). Il est donc plus coûteux à évaluer que le flux de Rusanov mais il nous permet de définir des conditions aux bords de façon consistante avec les conditions aux bords cinétiques. Pour plus détails sur ce flux, nous renvoyons le lecteur aux références suivantes [8].

4.4 Conditions aux limites

Pour les conditions aux limites, nous considérons les conditions aux limites cinétiques (1.56) que nous rappelons ici

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = (1-\alpha)\beta f^s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + (1-\alpha)(1-\beta) f^d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \mathbf{v} \in \mathbb{S}^-(\mathbf{x}), t \in \mathbb{R}^+, \tag{3.82}$$

où $\alpha \in [0,1]$ est le coefficient d'absorption et $\beta \in [0,1]$ est la proportion de particules subissant une réflexion spéculaire. La distribution f^s est la distribution de réflexion spéculaire (1.57) et f^d la distribution de réflexion diffuse (1.58). Nous remarquons que ces deux distributions sont des fonctions de $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ avec $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^+(\mathbf{x})$, l'ensemble des vitesses sortantes. Nous pouvons donc réécrire la condition (3.82) sous la forme

$$f(\mathbf{x}, ., t)_{|\mathbb{S}^-(\mathbf{x})} = \mathcal{R}\Big(f(\mathbf{x}, ., t)_{|\mathbb{S}^+(\mathbf{x})} \Big),$$

avec $\mathcal{R}$ un opérateur défini à partir de (1.57)-(1.58).

Soit un état $\mathbf{W}_L = (w_L, \mathbf{I}_L)$ sur une cellule L_L qui borde le domaine Ω. Soit $\mathbf{n}$ la normale sortante au domaine sur $L \cap \partial\Omega$. Afin de définir des conditions aux limites consistantes avec ces conditions aux limites cinétiques, nous considérons le

flux numérique aux bords suivants :

$$\mathbf{F}^{*,b}(\mathbf{W}_L^n, \mathbf{n}) = \int_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{S}^1 \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}>0}} f_{(w_L,\mathbf{I}_L)}(\mathbf{v}) \begin{bmatrix} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \\ \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) \end{bmatrix} d\mathbf{v} \tag{3.83}$$

$$+ \int_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{S}^1 \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}<0}} \mathcal{R}\Big(f_{(w_L,\mathbf{I}_L)}(\mathbf{x},.,t)_{|\mathbb{S}^-(\mathbf{x})}\Big)(\mathbf{v}) \begin{bmatrix} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \\ \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) \end{bmatrix} d\mathbf{v}. \tag{3.84}$$

5 Résultats numériques

5.1 Problème de Riemann

Afin de valider notre méthode de résolution numérique pour le modèle M_1, nous nous intéressons ici à l'étude du problème de Riemann homogène associé en une dimension d'espace.

Nous considérons ainsi une solution de la forme : $w(\mathbf{x}, t) = w(x, t)$ et $\mathbf{I}(\mathbf{x}, t) = (I(x, t), 0)$. Cette solution ne dépend pas de la variable y et l'intensité $\mathbf{I}$ a une composante nulle suivant y. Le système (3.75)-(3.76) s'écrit alors

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x I = 0, \\ \partial_t I + \partial_x(w\chi(r)) = 0, \end{cases} \tag{3.85}$$

avec $r = |I|/(cw)$. Comme $\chi(r) = \chi(-r)$, nous pouvons considérer que $r = I/(cw)$.

Définition 11. *Soit $w_L, w_R > 0$ et $I_L, I_R \in \mathbb{R}$ deux états tels que $|I_L|/(cw_L) < 1$ et $|I_R|/(cw_R) < 1$. En notant par $r = I/(cw)$, nous appelons alors problème de Riemann homogène le système hyperbolique* (3.85) *auquel on ajoute la condition initiale*

$$(w(x, 0), I(x, 0)) = \begin{cases} (w_L, I_L), & si\ x < 0, \\ (w_R, I_R), & si\ x > 0. \end{cases} \tag{3.86}$$

La résolution analytique de ce problème de Riemann (11) a été faite dans [17] dans le cas d'une fermeture entropique où l'ensemble des vitesses Ω est la sphère unité $\mathbb{S}^2$ et non le cercle unité $\mathbb{S}^1$. Comme nous le verrons dans chapitre 3, l'application de la méthode des moments et de la fermeture entropique confèrent dans ce cas une forme différente à la quantité χ. Il est important de remarquer que la difficulté inhérente à la résolution de ce problème de Riemann (3.85) provient de l'absence de relation explicite pour le calcul de la grandeur χ et que, de ce fait, les propriétés de monotonie permettant d'assurer l'unicité de la solution sont relativement difficiles à obtenir.

Dans cette section nous reprenons les résultats de [17] en les adaptant au cas purement 2D *ie* en prenant $\chi(r) = 1 - r/\kappa$ avec κ solution de l'équation (3.29) :

$G(\kappa) = r$ avec $G(\kappa) = I_1(\kappa)/I_0(\kappa)$. Toutefois, ces résultats s'appuient sur des propriétés de monotonie qui sont pour certaines, spécifiquement démontrées pour la fonction $\chi(r)$ 3D. La fonction G impliquant des fonctions de Bessel modifiées, nous n'avons pas pu démontrer rigoureusement que ces propriétés étaient préservées dans notre cas, mais nous nous sommes assurés qu'elles étaient valides numériquement.

5.1.1 Valeur propres et champs caractéristiques

Proposition 7. *Les vitesses caractéristiques du système* (3.85) *sont*

$$\lambda_1(r) = \frac{\chi'(r) - \sqrt{\chi'(r)^2 - 4r\chi'(r) + 4\chi(r)}}{2}, \tag{3.87}$$

$$\lambda_2(r) = \frac{\chi'(r) + \sqrt{\chi'(r)^2 - 4r\chi'(r) + 4\chi(r)}}{2}, \tag{3.88}$$

et les vecteurs propres associés sont

$$r_1(w, I) = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1(r) \end{bmatrix}, \quad r_2(w, I) = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2(r) \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres satisfont l'inégalité suivante : $\lambda_1(r) < r < \lambda_2(r)$ *pour tout* $r \in]-1, 1[$. *Nous avons également* $\lambda_1(r)$ *et* $\lambda_2(r)$ *sont strictement croissante sur* $]-1, 1[$. *De plus, les champs caractéristiques sont vraiment non-linéaires.*

Les vitesses caractéristiques sont tracées en Figure 3.3.

Preuve. La matrice jacobienne du flux $F = (I, w\chi(I/w))^T$ dans (3.85) est donnée par

$$\partial F(w, I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \chi(r) - r\chi'(r) & \chi'(r) \end{bmatrix}, \tag{3.89}$$

dont les valeurs propres sont bien données par (3.87)-(3.88). Ces valeurs propres sont bien réelles car nous avons

$$\chi'(r)^2 - 4r\chi'(r) + 4\chi(r) = (\chi'(r) - 2r)^2 + 4(\chi(r) - r^2) \geqslant 4(\chi(r) - r^2) > 0.$$

La dernière inégalité vient de la relation suivante

$$\chi(r) = 1 - G(\kappa)/\kappa = G'(\kappa) + G^2(\kappa) = G'(\kappa) + r^2$$

qui implique $\chi(r) - r^2 = G'(\kappa) > 0$ du fait de la stricte monotonie de G (voir proposition 6). Nous obtenons également la relation suivante

$$\chi'(r)^2 - 4r\chi'(r) + 4\chi(r) > (\chi'(r) - 2r)^2,$$

ce qui entraine la relation $\lambda_1(r) < r < \lambda_2(r)$ pour tout $r \in]-1, 1[$.

Le fait que les champs soient linéairement dégénérés découle du fait que χ est strictement convexe, ce qui peut être observé sur le graphique (3.3). Pour la preuve du caractère linéairement dégénéré qui en découle, nous renvoyons à [17]. □

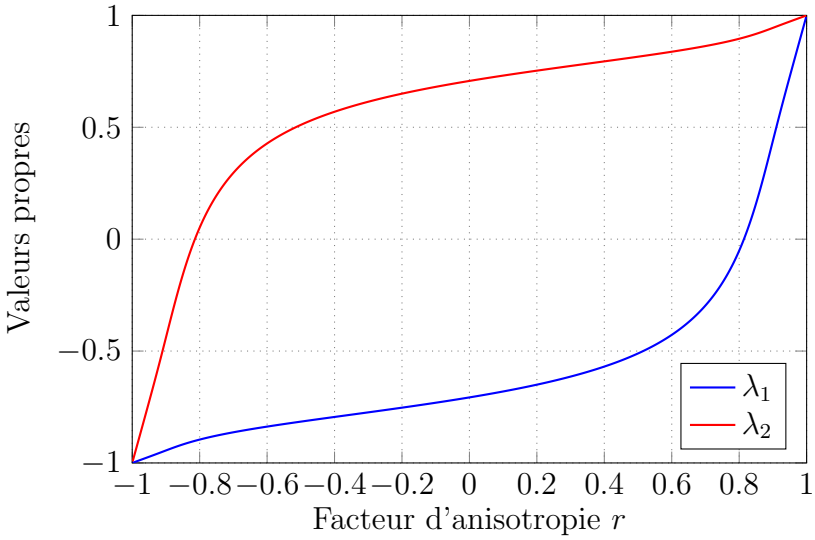


Figure 3.3: Évolution des valeurs propres λ_1, λ_2 du système en fonction du facteur d'anisotropie r

Ondes de détente

Soit deux états (gauche et droit) caractérisés par les couples respectifs (w_-, I_-) et (w_+, I_+). Nous appelons i-ondes de détente ($i = 1, 2$), une solution faible autosimilaire de (3.85) qui connecte les deux états telle que,

$$(w, I)(x, t) = \begin{cases} (w_-, I_-), & \text{si } x/t \leq \lambda_i(r_-), \\ V(x/t), & \text{si } \lambda_i(r_-) \leq x/t < \lambda_i(r_+), \\ (w_+, I_+), & \text{si } \lambda_i(r_+) \leq x/t. \end{cases} \tag{3.90}$$

avec $\lambda_i(r_-) < \lambda_i(r_+)$, avec $r_- = I_-/(cw_-)$ et $r_+ = I_+/(cw_+)$.

La proposition 8 donne la forme des ondes de détente pour le problème (3.85)

Proposition 8. *[17] Deux états (w_-, I_-) et (w_+, I_+) sont connectés par une i-onde de détente si et seulement si $r_- \leq r_+$ et*

$$w_+ = w_- \exp\left(\int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\lambda_i(r) - r}\right). \tag{3.91}$$

Preuve. Nous considérons les fonctions suivantes

$$Z_i(w, I) = -\ln(w) + \int_0^{I/(cw)} \frac{dr}{\lambda_i(r) - r},$$

pour $i = 1, 2$. Elles sont bien définies du fait que $\lambda_i(r) \neq r$ pour tout $r \in]-1, 1[$. Ce sont des invariants de Riemann :

$$\nabla Z_i \cdot r_i = 0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{w} - \frac{I}{cw^2}\frac{1}{\lambda_i(r)-r} \\ \frac{1}{(cw)}\frac{1}{\lambda_i(r)-r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i(r) \end{bmatrix} = 0. \tag{3.92}$$

Les i-ondes de détentes sont définies à partir d'une courbe intégrale du champ de vecteur r_i et donc ces invariants de Riemann sont conservés entre deux états reliés par une onde de détentes. Ainsi nous obtenons la forme annoncée. De plus, par monotonie des vitesses caractéristiques, nous avons $\lambda_i(r_-) \leqslant \lambda_i(r_+)$ avec $r_- \leqslant r_+$. □

Ondes de choc

La vitesses $s \in \mathbb{R}$ des ondes de choc du système doivent satisfaire la condition de saut de Rankine-Hugoniot [24], telle que,

$$\begin{cases} I_+ - I- = s\,(w_+ - w_-), \\ w_+\chi(r_+) - w_-\chi(r_-) = s\,(I_+ - I_-). \end{cases} \tag{3.93}$$

De plus, pour être entropique au sens de Lax [24], les ondes de chocs (1-choc et 2-choc), de vitesses respective s_1 et s_2 doivent satisfaire les inégalités suivantes,

$$\begin{aligned} \lambda_1(r_+)_1 < s_1 < \lambda_2(r_+), \quad s_1 < \lambda_1(r_-), \\ \lambda_1(r_-)_1 < s_2 < \lambda_2(r_-), \quad s_2 > \lambda_2(r_+). \end{aligned} \tag{3.94}$$

Il peut être démontré que les ondes de chocs admissibles prennent la forme suivante (9).

Proposition 9. *Soit deux états caractérisés par les facteurs d'anisotropie r_- et r_+. La solution du problème de Riemann homogène connectant les états gauche et droit sont des chocs entropique si et seulement si $r_+ < r_-$. De plus, lors d'une onde 1-choc et d'une onde 2-choc, les états gauches et droit sont reliés via la relation suivante*

$$w_+ = w_- X_i(r_-, r_+), \quad I_+ = (cw_- X_i(r_-, r_+))r_+ \tag{3.95}$$

où $X_1(r_-, r_+)$ et $X_2(r_-, r_+)$ désignent les deux solutions du polynôme

$$P(X) = X^2(\chi(r_+) - r_+^2) - X^2(\chi(r_+) + \chi(r_+) - 2r_+r_-) + \chi(r_-) - r_-^2 = 0. \tag{3.96}$$

ordonnées ainsi : $0 < X_2(r_-, r_+) < 1 < X_1(r_-, r_+)$. Les vitesses respectives $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ sont données par

$$s_1 = \frac{X_1(r_-, r_+)r_+ - r_-}{X_1(r_-, r_+) - 1} \quad \text{et} \quad s_2 = \frac{X_2(r_-, r_+)r_+ - r_-}{X_2(r_-, r_+) - 1}. \tag{3.97}$$

Nous ne reproduisons pas ici la preuve de cette propriété. Nous renvoyons à [17]. La preuve de cette propriété n'utilise que la propriété de monotonie des vitesses caractéristiques ainsi que la propriété $\chi(r) > r^2$ pour tout $r \in]-1, 1[$. Elle ne dépend donc pas de la forme spécifique de χ.

Solution du problème de Riemann

Nous souhaitons à présent résoudre le problème de Riemann (3.86). La théorie relatives aux systèmes hyperboliques [47] nous indique alors que l'état gauche (w_L, I_L) sera connecté à un état milieu (w_M, I_M) par une 1-onde (choc ou détente), lui même connecté à un état droit (w_R, I_R) par une 2-onde (choc ou détente). L'état milieu s'obtient donc au travers de la résolution de l'équation suivante

$$\frac{w_R}{w_L} = \mathcal{L}_1(r_L, r_M)\mathcal{L}_2(r_M, r_R) \tag{3.98}$$

avec, pour tout couple $(r_-, r_+) \in [-1, 1]^2$ et $i = 1, 2$,

$$\mathcal{L}_i(r_-, r_+) = \begin{cases} X_i(r_-, r_+) & \text{si} \quad r_+ < r_-, \\ \exp\left(\displaystyle\int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\lambda_i(r) - r} dr\right) & \text{si} \quad r_+ \geq r_-. \end{cases} \tag{3.99}$$

où nous avons utilisé les expressions des courbes de choc et de détentes établies dans les propriétés 8 et 9.

Proposition 10. *Pour tout couple (w_L, I_R), (w_R, I_R) avec $w_L, w_R > 0$ et $|I_L|/(cw_L)$, $|I_R|/(cw_R) < 1$, il existe une unique solution $r_M \in]-1, 1[$ au problème* (3.98).

Cette propriété repose sur des propriétés de monotonie des courbes de chocs et de détentes. Une partie de la démonstration proposée dans [17] est spécifique au choix de la fonction $\chi(r)$. Comme annoncé précédemment, nous n'avons pas réussi à les transcrire à notre cas. Nous nous sommes néanmoins assurés numériquement que toutes les propriétés étaient vérifiées (voir Figure 3.4).

Une fois la valeur de r_M déterminée, les moments (w_M, I_M) s'obtiennent ainsi

$$w_M = w_L\mathcal{L}_1(r_L, r_M), \quad I_M = (cw_L\mathcal{L}_1(r_L, r_M))r_M. \tag{3.100}$$

L'état milieu pleinement déterminé, nous pouvons alors construire la solution finale grâce aux propositions 8 et 9.

5.2 Validation numérique

Afin de valider numériquement notre code, nous considérons les deux problèmes de Riemann suivants

Problème de Riemann 1 (détente / détente)

$$(w_L, I_L) = (0.7, -0.2), \quad (w_R, I_R) = (0.8, 0.3).$$

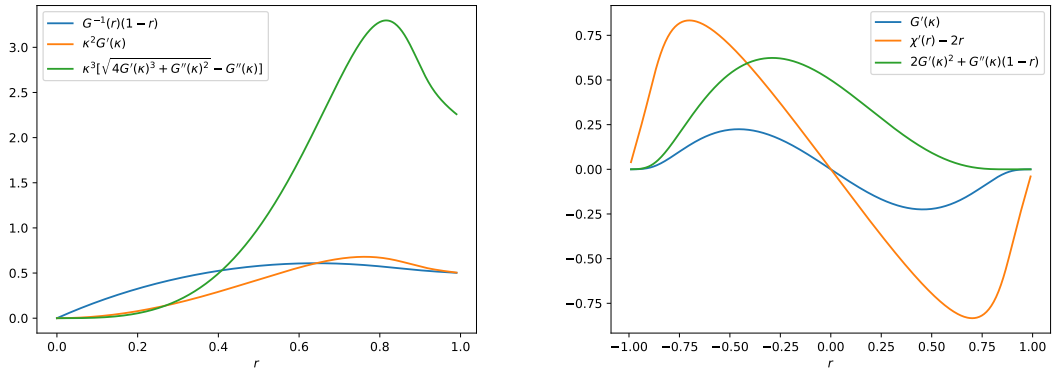


Figure 3.4: Vérifications numériques des propriétés nécessaires au Lemme 4 (à gauche) et Propriété 6 (à droite) de [17].

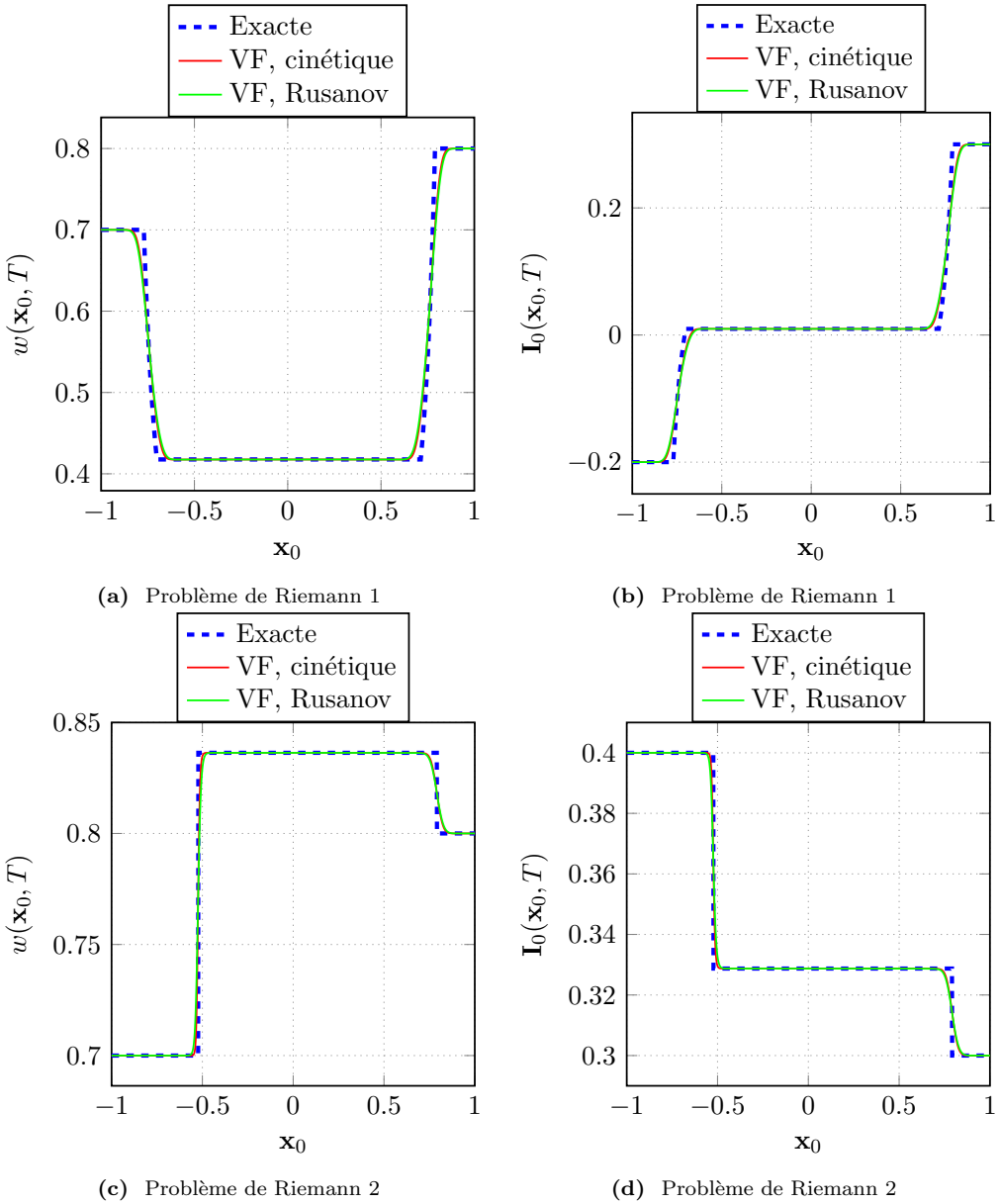
Problème de Riemann 2 (choc / choc)

$$(w_L, I_L) = (0.7, 0.4), \quad (w_R, I_R) = (0.8, 0.3).$$

Sur la Figure (3.5), sont représentées les solutions obtenues au temps $t = 1$ en utilisant les flux de Rusanov (3.80) et cinétique (3.81). Nous avons utilisé $N_x = 2048$ cellules en espace avec $\Omega = [-1, 1]$ et une CFL égale à 0.8. Nous observons que les résultats sont très similaires. Le tracé de l'erreur relative ϵ_2 (définition 5.51) en fonction h montre toutefois que le flux de Rusanov est légèrement plus diffusif que le flux cinétique. Ce résultat est un peu plus marqué dans le cas d'ondes de chocs. Notons que le flux numérique de Rusanov nécessite l'évaluation des valeurs propres (3.87)-(3.88). Cette évaluation est coûteuse et nous devons la répéter en chaque cellule et à chaque pas de temps. Nous employons donc une approximation polynômiale pour le calcul des valeurs propres comme présenté au (3.8). Les résultats obtenus valident donc notre schéma de résolution du modèle M_1. Des simulations utilisant les conditions aux bords seront effectuées au chapitre 7.

N	h	VF, Rusanov	VF, cinétique
128	$1.56 \cdot 10^{-2}$	0.44	0.4
256	$7.8 \cdot 10^{-3}$	0.34	0.31
512	$3.9 \cdot 10^{-3}$	0.26	0.23
1,024	$2 \cdot 10^{-3}$	0.19	0.17
2,048	$1 \cdot 10^{-3}$	0.14	0.12

Table 3.1: Validation du schéma VF sur le problème de Riemann 1. Valeurs de l'erreur relative ϵ_2 entre la solution exacte et approchée au temps final $t = 1$ pour les flux de Rusanov et cinétique. Paramètres de calculs : $\Omega = [-1, 1]$, CFL $= 0.8$.



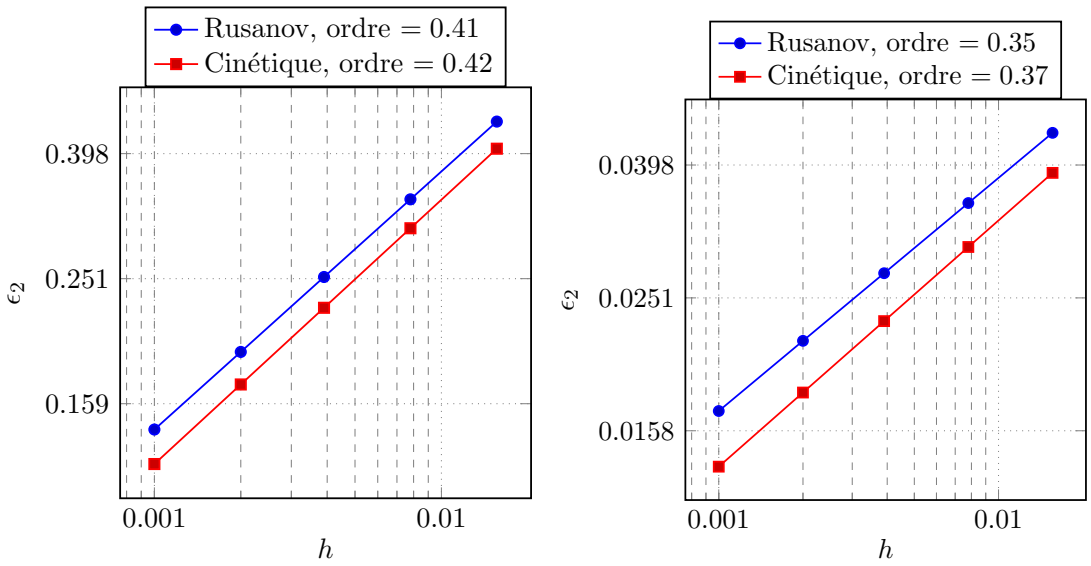
(a) Problème de Riemann 1

(b) Problème de Riemann 1

(c) Problème de Riemann 2

(d) Problème de Riemann 2

Figure 3.5: Validation du schéma VF sur le problème de Riemann à une dimension. Tracés des solutions des problèmes de Riemann 1 et 2 au temps $t = 1$ en utilisant les flux de Rusanov et cinétiques. Paramètres de calcul : $N_x = 2048$, $\Omega = [-1, 1]$ et CFL $= 0.8$.



(a) Problème de Riemann 1 **(b)** Problème de Riemann 2

Figure 3.6: Validation du schéma VF sur les problème de Riemann 1 et 2. Tracés log log de l'erreur relative pour les flux de Rusanov et cinétique. Paramètres de calcul : temps final $t = 1$, $\Omega = [-1, 1]$ et CFL $= 0.8$.

6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé un nouveau modèle réduit pour la simulation de l'acoustique des salles. Par une méthode des moments appliquée sur le cercle unité $\mathbb{S}^1$ et par fermeture entropique [48] nous avons supprimé toute dépendance vis à vis de la variable vitesse. Le modèle M_1 mis en place est à présent constitué des variables conservatives $\mathbf{I}(\mathbf{x}, t)$ et $w(\mathbf{x}, t)$. Même si ce modèle macroscopique ne dépend que du temps et de l'espace, le calcul de sa fermeture nécessite toutefois la résolution intensive de problèmes non-linéaires représentant une grande partie de son coût calculatoire. Ce modèle 2D à ensuite été discrétisé par méthode volumes finis en utilisant des flux numériques de Rusanov et cinétique. Nous avons choisi de traduire les conditions au bord cinétiques en utilisant le flux cinétique particulièrement bien adapté. Ces conditions au bords seront testées lors de cas tests acoustiques au chapitre 7. Dans le cadre de géométries simples, nous avons effectué une implémentation GPU du schéma de résolution, en se basant sur les librairies OpenCL et PyOpenCL. En utilisant les travaux effectués par J.-F. Coulombel et T. Goudon [17] nous avons mis en place un solveur de Riemann dans le cas purement 2D. Ce solveur nous a permis de valider l'implémentation de notre schéma au travers d'une étude de convergence de l'erreur.

N	h	VF, Rusanov	VF, cinétique
128	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$4.36 \cdot 10^{-2}$	$3.8 \cdot 10^{-2}$
256	$7.8 \cdot 10^{-3}$	$3.52 \cdot 10^{-2}$	$3.02 \cdot 10^{-2}$
512	$3.9 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-2}$	$2.37 \cdot 10^{-2}$
1,024	$2 \cdot 10^{-3}$	$2.19 \cdot 10^{-2}$	$1.83 \cdot 10^{-2}$
2,048	$1 \cdot 10^{-3}$	$1.66 \cdot 10^{-2}$	$1.37 \cdot 10^{-2}$

Table 3.2: Validation du schéma VF sur le problème de Riemann 2. Valeurs de l'erreur relative ϵ_2 entre la solution exacte et approchée au temps final $t = 1$ pour les flux de Rusanov et cinétique. Paramètres de calculs : $\Omega = [-1, 1]$, CFL $= 0.5$.

Chapitre 4

Simulations acoustiques par ray-tracing sur GPU

Contenu

1 Le ray-tracing pour l'acoustique 82

1.1 Principes de la méthode 82

1.2 Procédés de modélisation 84

2 Implémentation 89

2.1 Algorithme de ray-tracing 89

2.2 Traitement des données temporelles en volume récepteur . 90

2.3 Modélisation des états stationnaires 94

3 Validations 94

1 Le ray-tracing pour l'acoustique

Dans ce chapitre nous présentons un algorithme de lancer de rayons (ray-tracing : RT) sur carte graphique (GPU) permettant de simuler le transport acoustique. L'application du RT à l'acoustique naît au travers de la notion d'acoustique géométrique. L'acoustique géométrique se conceptualise sur la même base que l'optique fondamentale, où la nature ondulatoire du phénomène physique sous-jacent est approchée au travers du concept de particules se propageant en ligne droite le long de "rayons" et interagissant avec les constituants du domaine. Comme énoncé au chapitre 1, cette approche, dérivée de l'approximation hautes fréquences, nous fait perdre toute information sur la phase de l'onde, et simplifie de ce fait grandement, l'implémentation de l'algorithme de résolution. De par cette simplicité d'implémentation, le RT et ses variantes restent des méthodes largement employées en acoustiques des salles [39] même si leurs limitations reposent généralement sur un coût calculatoire important. Cette limitation est tout simplement liée à l'estimation statistique des grandeurs acoustiques qui nécessitent le tracé d'un très grand nombre de particules. Dans cette thèse et dans le cadre de géométries simples nous avons cherché à développer notre propre code de ray-tracing sur GPU. Le choix de cibler les GPU est clairement motivé par la complète indépendance des particules entre-elles et par leurs seules interactions avec les parois du domaine. Cette indépendance des données permet ainsi de paralléliser massivement les calculs. Notre méthode RT sur GPU, validée par comparaison avec un code RT pour l'acoustique `SPPS` [57] développé par l'UMRAE IFSTTAR-CEREMA de Nantes, servira de base comparative pour le modèle aux ordonnées discrètes et celui aux moments.

1.1 Principes de la méthode

Modèle particulaire

Dans ce chapitre, nous considérons une fonction de distribution $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ où $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ désigne la variable d'espace, $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{d-1}$ la vitesse, $t \in \mathbb{R}^+$ le temps et d la dimension physique du problème.
L'approche ray-tracing consiste en une approximation de la fonction de distribution $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ par une somme de masses de Dirac centrées en $(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{v}_k(t))$ et pondérée par $\omega_k(t) \geqslant 0$ pour $k = 1, \ldots, N_p$ et $N_p \in \mathbb{N}$ telle que

$$f_p(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{k=1}^{N_p} \omega_k(t)\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k(t))\, \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k(t)) \quad t > 0, \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d. \tag{4.1}$$

avec $d = 2, 3$ la dimension physique du problème. En injectant (4.1) dans l'équation de transport (1.52), nous obtenons, au sens des distributions pour $k = 1, \ldots, N_p$,

que chaque particule obéisse aux équations caractéristiques suivantes :

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{dt}(t) = \mathbf{v}_k(t), \tag{4.2}$$

et

$$\frac{d\mathbf{v}_k}{dt}(t) = 0, \quad \text{si } \mathbf{x}_k(t) \notin \partial\Omega. \tag{4.3}$$

En tout temps t tel que $\mathbf{x}_k(t) \in \partial\Omega$ et $\omega_k(t) > 0$, nous avons

$$\mathbf{v}_k(t^+) = \begin{cases} \beta_{k,t}\Big(\mathbf{v}_k(t^-) - 2(\mathbf{v}_k(t^-)\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\Big) + (1-\beta_{k,t})\mathbf{v}_k^d, & \text{si } \alpha_{k,t} = 1, \\ 0, & \text{si } \alpha_k^t = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\omega_k(t^+) = \begin{cases} \omega_k(t^-), & \text{si } \alpha_{k,t} = 1, \\ 0, & \text{si } \alpha_{k,t} = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

où $\alpha_{k,t}$ et $\beta_{k,t}$ sont des variables aléatoires de Bernouilli de paramètres respectifs α et β et où $\mathbf{v}_k^d$ désigne un vecteur unitaire aléatoire suivant une loi sur la demi-sphère $\mathbb{S}^-(\mathbf{x}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{d-1}, \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}) < 0\}$. Lorsque $\alpha_{k,t}$ est nul, la particule est absorbée et donc n'évolue plus : son poids ω_k est donc mis à 0. Lorsque $\alpha_{k,t}$ vaut 1, le poids de la particule est inchangé et sa vitesse est une somme pondérée de la vitesse réfléchie et d'une vitesse diffuse, avec pour facteur de pondération le coefficient $\beta_{k,t}$. Nous complétons également ces équations caractéristiques avec

$$\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_{k,0} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_k(0) = \mathbf{v}_{k,0}, \quad \forall k = 1, \ldots, N_p, \tag{4.6}$$

où les grandeurs $\mathbf{x}_{k,0}$ et $\mathbf{v}_{k,0}$ sont données par la condition initiale du problème. Les poids ω_k sont déterminés à partir de la fonction de distribution initiale $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)$. Nous utiliserons ici des poids uniformes donnés par

$$\omega_k(0) = \frac{1}{N_p} \int_\Omega \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) d\mathbf{x} d\mathbf{v}, \quad \forall k = 1, \ldots, N_p. \tag{4.7}$$

Aspects qualitatifs

D'un point de vue qualitatif, nous considérons l'histoire d'une particule ponctuelle k émise par une source et se propageant en ligne droite entre deux collisions (4.2) avec les parois du domaine de calcul Ω. Nous caractérisons une particule par sa position $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d$, sa direction de propagation $\mathbf{v}_k \in \mathbb{S}^{d-1}$ et son temps de vie $t \in \mathbb{R}^+$. Dans notre étude nous supposerons la vitesse c des particules constante et la fixons à $c = 1$.
Lorsqu'une particule arrive en un point du bord, $\partial\Omega$ cette dernière pourra être absorbée ou non par la paroi. Dans le cas d'une absorption, la particule ne sera alors

plus tracée par l'algorithme. Sur un point du bord, une particule non absorbée subira également un changement de sa direction de propagation $\mathbf{v}_k$. Ce changement de direction sera établi en fonction de la nature spéculaire ou diffuse de la réflexion. Nous ne modéliserons aucun phénomène physique d'interaction entre la particule et le milieu fluide de propagation (vent, turbulence, absorption atmosphérique, ...). Afin de reconstruire les données acoustiques, une particule sera également porteuse d'une énergie élémentaire. Lors d'une simulation, nous émettrons un très grand nombre de particules possédant chacune leur histoire propre (indépendance des particules entre elles). Pour reconstruire les grandeurs acoustiques en temps et en espace, nous effectuerons un comptage des particules dans les régions d'intérêts.

1.2 Procédés de modélisation

Dans cette section, nous détaillons les procédés employés afin de modéliser la création des particules, leurs transports ainsi que leurs interactions avec les éléments géométriques du domaine Ω.

Géométries et transport

Dans notre étude, nous considérons des domaines Ω à géométrie rectangulaire ou cubique. Ces domaines pourront éventuellement comporter en leur intérieur des sphères appelées volumes récepteurs. Ces dernières permettront de compter les particules en temps et en espace. De par la simplicité des géométries étudiées, et en l'absence d'éléments collisionnels en leur intérieur, nous considérons le domaine Ω comme une unique cellule dans laquelle nous transportons nos particules. Au cours de la première itération de transport, les particules sont déplacées de la source vers le bord. Par la suite, et durant toutes les itérations de transport, chaque particule se propage d'un bord à un autre de la géométrie. Si la particule n'a pas été absorbée avant le temps final de simulation T, alors le temps de vie t de la particule, calculé à partir de la distance totale parcourue par cette dernière, atteindra le temps final T lors de la dernière étape de transport. La particule sera alors stoppée à l'intérieur de Ω et non nécessairement transportée jusqu'à un bord. Au cours de toute itération de transport, une particule pourra traverser un volume récepteur sans être affectée.

Sources

Nous désignons par source sonore, le processus qui, lors de la création d'une particule k à $t = 0$, cherche à lui attribuer une position $\mathbf{x}_k$ et une direction $\mathbf{v}_k$ initiales. Afin d'assurer la répartition souhaitée en espace et en vitesse, en présence d'un très grand nombre de particules, nous utiliserons des tirages aléatoires pour chacune d'entre elles. En espace, nous utilisons deux types de répartition :

1. Ponctuelle : aucun tirage aléatoire, les positions des particules sont toutes initialisées au point $\mathbf{x}_s$.
2. Localisée : tirage aléatoire, les positions des particules sont réparties uniformément sur une boule (ou un disque) de centre $\mathbf{x}_s$ et de rayon r.

En vitesse, nous considérons les répartitions suivantes :

1. Monodirectionnelle : aucun tirage aléatoire, les vitesses des particules sont toutes initialisées avec le même vecteur unitaire $\mathbf{v}_s$.
2. Omnidirectionnelle : tirage aléatoire, les vitesses des particules sont réparties uniformément sur une sphère (ou un cercle) de rayon $r = c = 1$.

Il serait bien évidemment possible, suivant la loi échantillonnée (pour les vitesses), de conférer une directivité particulière à la source. Les énumérations précédentes nécessitent d'obtenir une répartition uniforme de points sur une sphère ou sur un cercle. Pour générer cette distribution uniforme sur la sphère unité centrée sur l'origine, nous tirons aléatoirement trois nombres réels X, Y et Z selon des lois normales indépendantes. Une fois ces nombres obtenus, les coordonnées du point sur la sphère sont alors données par $\mathbf{V} = (X, Y, Z)/||(X, Y, Z)||$. Ce procédé fonctionne puisque la fonction de distribution du vecteur (X, Y, Z) s'écrit

$$\begin{aligned} f_{(X,Y,Z)}(x,y,z) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2})\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{z^2}{2})\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(x^2+y^2+z^2)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp\left(-\frac{||(x,y,z)||^2}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ainsi, la fonction de distribution $f_{(X,Y,Z)}$ dépend uniquement de la norme de (x, y, z) et ne privilégie aucune direction. On a donc pour toute fonction $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ (mesurable)

$$\begin{aligned} E\Big[g(\mathbf{V})\Big] &= E\left[g\left(\frac{(X,Y,Z)}{||(X,Y,Z)||}\right)\right] = \int_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} g\left(\frac{(x,y,z)}{||(x,y,z)||}\right) f_{(X,Y,Z)}(x,y,z)dxdydz \\ &= \int_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} g\left(\frac{(x,y,z)}{||(x,y,z)||}\right)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp(-\frac{||(x,y,z)||^2}{2})dxdydz \\ &= \int_{\mathbf{v}\in\mathbb{S}^2}\int_{r\in[0,+\infty[} g(\mathbf{v})\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp(-\frac{r^2}{2})(4\pi)d\mathbf{v}dr \\ &= \int_{\mathbf{v}\in\mathbb{S}^2} g(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbf{V}$ a bien une distribution uniforme sur la sphère.

Collisions

Les coordonnées du point de collision d'une particule k avec une paroi du domaine sont caractérisées par les solutions positives de l'équation traduisant l'intersection de la demi-droite portée par son vecteur vitesse $\mathbf{v}_k$ et de l'élément géométrique (plan/segment) constituant le bord du domaine. Pour le calcul des intersections, nous utiliserons la forme paramétrique de la demi-droite (rayon) matérialisant la trajectoire de la particule. Pour une particule située au point $\mathbf{x}_k$ et de vecteur vitesse $\mathbf{v}_k$, cette forme paramétrique est donnée par

$$p(\ell) = \mathbf{x}_k + \ell \mathbf{v}_k, \quad \forall \ell \in \mathbb{R}^+ \tag{4.9}$$

1. L'intersection de tout rayon avec un plan $\mathcal{P}$ représenté par un point $\mathbf{p}_0$ et un vecteur normal $\mathbf{n}$ (non parallèle à $\mathbf{v}_k$) est donnée par

$$(\mathbf{x}_k + \ell \mathbf{v}_k - \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{4.10}$$

   En résolvant pour ℓ, nous obtenons

$$\ell = \frac{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{x}_k)}{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}}. \tag{4.11}$$

   Les coordonnées du point d'intersection $\mathbf{x}_c$ sont alors données par

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_k + \ell \mathbf{v}_k. \tag{4.12}$$

   L'implémentation de l'algorithme de collision se base sur une adaptation GPU d'un algorithme AABB sans branchement [64]. Le calcul des min/max s'effectuant par l'utilisation de "bithacks" [4].

2. Dans le cas d'une intersection avec une sphère de rayon r et centrée au point $\mathbf{x}_s$, il peut être démontré [61], en notant par $\gamma = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$ et $\delta = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|^2 - r^2$, que le rayon traverse la sphère, uniquement lorsque $4(\gamma^2 - \delta) > 0$. Si cette condition est vérifiée, les coordonnées des points d'intersection sont alors données par

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} + (-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \delta})\mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} + (-\gamma - \sqrt{b^2 - \delta})\mathbf{v}. \tag{4.13}$$

   Nous utilisons à nouveau un algorithme sans branchement inspiré de celui employé pour détecter les collisions aux bords du domaine.

   Remarque 5. *Une comparaison sera également nécessaire afin de distinguer le point d'entrée du point de sortie parmi les points d'intersection x_1 et x_2. Lors de l'itération de transport terminale, il est tout à fait possible qu'une particule atteigne son temps de vie maximal $t_k = T$ en amont de la sphère qu'elle était supposée intersecter.*

Phénomène d'absorption

Afin de modéliser le phénomène d'absorption aux parois, nous utilisons un tirage aléatoire pour chaque particule. Soit $\alpha \in [0,1]$ le coefficient d'absorption sur le bord considéré et soit X un nombre aléatoire tiré à partir de la loi uniforme sur $[0,1]$, une particule est dite absorbée si et seulement si $X < \alpha$. Si la particule est absorbée, elle ne sera plus transportée lors des itérations de transport suivantes. Dans le cas contraire, la particule subira un changement directionnel en accord avec la loi de réflexion du bord.

Lois de réflexion

Pour déterminer si la réflexion après collision est spéculaire ou diffuse, nous utilisons à nouveau un tirage aléatoire selon la loi uniforme sur $[0,1]$ pour chacune des particules. Soit $\beta \in [0,1]$ le coefficient d'accommodation et soit Y le nombre tiré aléatoirement, la réflexion sera diffuse si $Y < \beta$ et spéculaire dans le cas contraire. Dans le cas d'une réflexion spéculaire, le nouveau vecteur vitesse $\mathbf{v}_k(t^+)$ est calculé selon la relation $\mathbf{v}_k(t^+) = \mathbf{v}_k - 2(\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$. Afin de modéliser le caractère stochastique d'une réflexion diffuse (loi de Lambert), nous tirons deux nombres aléatoires X_1 et X_2 selon la loi uniforme sur $[0,1]$. Ces deux nombres aléatoires nous permettent de déterminer, en utilisant la fonction de distribution cumulée inverse, les angles θ_r et ϕ_r tels que

$$\theta_r = \arccos\left(\sqrt{X_1}\right) \quad \text{et} \quad \phi_r = 2\pi X_2. \tag{4.14}$$

En considérant à présent une base orthonormée $(\mathbf{n}_\perp^1, \mathbf{n}_\perp^2, \mathbf{n})$ sur le point du bord considéré, nous pouvons alors calculer la nouvelle direction de la particule $\mathbf{v}_k(t^+)$ telle que,

$$\mathbf{v}_k(t^+) = -\cos(\theta_r)\mathbf{n} + \sin(\theta_r)\cos(\phi_r)\mathbf{n}_\perp^1 + \sin(\theta_r)\sin(\phi_r)\mathbf{n}_\perp^2. \tag{4.15}$$

Comptage des particules en volume récepteur

Nous nous intéressons à l'évolution de la densité d'énergie acoustique w_R et de l'intensité acoustique I_R en fonction du temps dans un volume récepteur R. Le volume récepteur V_R est défini comme une sphère pleine (ou un disque en 2D) de rayon r. Considérons un pas de temps $\Delta t = T/N_t$ avec $N_t \in \mathbb{N}^*$. La densité d'énergie acoustique w_R et l'intensité acoustiques I_R sont alors données par

$$w_R(i\Delta t) = \frac{\omega_k}{V_R}\sum_{k=1}^{N_p} d_k^i, \qquad \text{et} \qquad \mathbf{I}_R(i\Delta t) = \frac{\omega_k}{V_R}\sum_{k=1}^{N_p} d_k^i \mathbf{v}_k(i\Delta t), \quad \forall i = 0, \ldots, N_t, \tag{4.16}$$

avec V_R le volume du récepteur et $d_k^i = d_k(i\Delta t)$ la longueur du trajet parcouru dans la sphère par une particule k durant l'intervalle de temps $[i\Delta t, (i+1)\Delta t]$. Il est

important de remarquer que le choix du rayon du récepteur r impose la granularité $\Delta t = 2r$ avec laquelle nous distinguerons les variations temporelles de w_R et fixe ainsi le nombre de points de discrétisation N_t. Une représentation graphique du passage d'une particule dans un volume récepteur est donnée en Figure 4.1. Dans le cas 3D, nous pouvons toujours nous ramener dans un plan contenant la direction de la particule $\mathbf{v}$ et ainsi décrire la collision au travers la situation décrite en figure 4.1. Soient t_{in} et t_{out} respectivement les temps physiques réels d'entrée et de sortie dans le volume récepteur. Le passage d'une particule sera ainsi caractérisé par trois grandeurs :

1. L'indice discret i tel que $i = \lfloor t_{in}/2r \rfloor$ associé au temps d'entrée de la particule
2. La distance $d_k^i = (t_{i+1} - t_{in})/c$ parcourue dans l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$
3. La distance $d_k^{i+1} = (t_{out} - t_{i+1})/c$ parcourue dans l'intervalle de temps $[t_{i+1}, t_{i+2}]$

Nous remarquerons qu'avec cette discrétisation temporelle, nous assurons le fait que toute traversée (même celles de longueur maximale $2r$) pourra toujours être décomposée selon la situation décrite en figure 4.1. Il est toutefois possible d'avoir dans le cas d'une collision $d_k^i = 0$ ou $d_k^{i+1} = 0$. Enfin, nous remarquerons également que sous ces considérations, il est inutile de stocker l'indice de sortie qui sera toujours égal à $i + 1$.

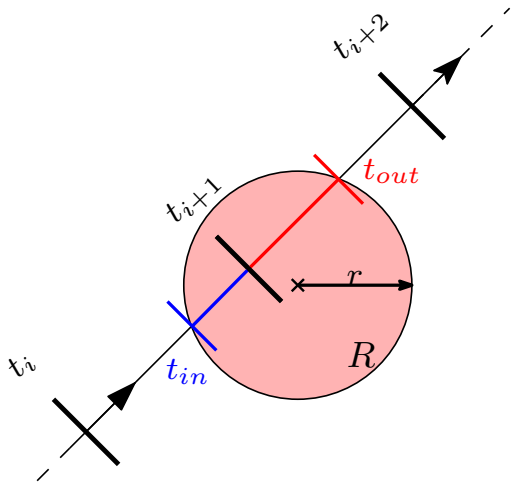


Figure 4.1: Représentation de la traversée d'une particule k (flèche noire) dans un volume récepteur V_R de rayon r. Nous représentons les temps de vie discrets de la particule t_i et t_{i+1} le long de son trajet. Les données temporelles caractérisant le passage de la particule dans le volume récepteur sont l'indice d'entrée $i = \lfloor t_{in}/2r \rfloor$ et les distances respectives parcourues dans chacun des intervalles (*ie* $d_k^i = (t_{i+1} - t_{in})$ et $d_k^{i+1} = (t_{out} - t_{i+1})$.

Reconstruction des grandeurs macroscopique

Afin de reconstruire les grandeurs acoustiques, nous utiliserons les relations suivantes :

$$w(\mathbf{x},t) \approx \sum_{k=1}^{N_p} \omega_k(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k(t)) \quad \text{et} \quad \mathbf{I}(\mathbf{x},t) \approx \sum_{k=1}^{N_p} \omega_k(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k(t))\mathbf{v}_k(t). \tag{4.17}$$

En pratique nous souhaitons reconstruire des champs acoustiques continus. Pour ce faire, les fonctions delta de Dirac $\delta(\mathbf{x})$ seront approchées par des fonctions de type B-splines $S^m(\mathbf{x})$ d'ordre $m \in \mathbb{N}$ (voir [63]). À une dimension la fonction $S^m(x)$ est donnée par

$$S^0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta x}, & \text{si } |x| \leq \dfrac{\Delta x}{2}, \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases}, \qquad S^m(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} S^{m-1}(y)dy, \quad m \geq 1. \tag{4.18}$$

Les fonctions B-splines de dimensions supérieures sont alors obtenues par produit tensoriel de fonctions 1D.

2 Implémentation

Dans cette section nous détaillons certains aspects liés à l'implémentation de l'algorithme RT sur GPU. Notre implémentation se base sur les librairies OpenCL et PyOpenCL introduites au Chapitre 2.

2.1 Algorithme de ray-tracing

L'indépendance des particules nous permet un parallélisme total lors des opérations de transport, et sera effectuée au travers de l'association d'un *work-item* par particule. Ainsi, sur une itération de transport chaque *work-item* calculera, sans dépendance de données, les nouvelles positions et vitesses, mais aussi les éventuels passages dans un volume récepteur.

Stockage mémoire

Les données relatives aux particules sont stockées dans un grand tableau à N_p lignes. Une illustration de l'ordre de stockage est faite en Figure 4.4. Au démarrage de l'algorithme de RT, l'ensemble des données sont copiées sur la mémoire du GPU via des *buffer* OpenCL. Durant toutes les itérations de transport, les données resteront sur le GPU. Un seul transfert GPU $\rightarrow$ CPU est effectué, il interviendra après la

dernière itération de transport pour éventuellement tracer et recomposer les grandeurs macroscopiques.

$\mathbf{x}_1^1$	$\mathbf{x}_1^2$	$\mathbf{x}_1^3$	$\mathbf{v}_1^1$	$\mathbf{v}_1^2$	$\mathbf{v}_1^3$	t_1	i_1	d_1^i	d_1^{i+1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{x}_k^1$	$\mathbf{x}_k^2$	$\mathbf{x}_k^3$	$\mathbf{v}_k^1$	$\mathbf{v}_k^2$	$\mathbf{v}_k^3$	t_k	i_k	d_k^i	d_k^{i+1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{x}_{N_p}^1$	$\mathbf{x}_{N_p}^2$	$\mathbf{x}_{N_p}^3$	$\mathbf{v}_{N_p}^1$	$\mathbf{v}_{N_p}^2$	$\mathbf{v}_{N_p}^3$	t_{N_p}	i_{N_p}	$d_{N_p}^i$	$d_{N_p}^{i+1}$

N_p particules

Figure 4.2: Représentation du stockage des particules dans l'algorithme RT. Chaque ligne du tableau désigne une particule. Un *work-item* sera associé à chacune des particules.

Structure et étapes

Nous présentons en Figure 4.3, les différentes étapes de l'algorithme de ray-tracing. Les tirages aléatoires sont tous effectués sur GPU et en parallèle via l'algorithme PhiloxGenerator [51]. Cet algorithme, classé parmi les plus rapides sur GPU, est directement disponible dans la librairie PyOpenCL et permet de générer directement des tableaux contenant N_p nombres aléatoires tirés selon une loi uniforme ou normale. De plus, dans 4.3, nous remarquons l'utilisation d'un entier "arbitraire" N_{iter} fixant le nombre d'itérations de transport. Nous choisissons initialement cet entier comme suffisamment grand *ie* $N_{iter} = T/(L/c)$ avec L la longueur caractéristique de Ω. Au fil des itérations de transport nous effectuerons un test (toutes les 10 itérations) afin de déterminer si les particules ont toutes été absorbées ou si elles ont atteintes leur temps de vie maximal $t_k = T$. Pour matérialiser le fait qu'une particule ne doit plus se propager, nous fixerons son entier i_k dans 4.4 comme égal à -1. Les itérations de transport sont alors arrêtées lorsque le test, basé sur une somme cumulative, renverra la valeur $-N_p$.

2.2 Traitement des données temporelles en volume récepteur

La reconstruction des données temporelles du récepteur consiste à récupérer, pour chaque pas de temps, l'ensemble des contributions de chaque particule. En d'autres termes ce problème revient à transférer, à chaque itération de transport, un très grand tableau à N_p entrées vers un tableau w_R beaucoup plus petit de taille N_t.

```
1  [CPU] Initialisation des structures de données associées aux N_p particules
2  Transferts des données [CPU]→[GPU]
3  [GPU] PhiloxGenerator : Initialisation de x_k, v_k par tirages aléatoires pour
     chaque particule.
4  while j ≤ N_iter do
5      [GPU] PhiloxGenerator : tirages aléatoires pour les lois de réflexion
6      for k ← 1 à N_p par 1 do
           ▷ 1 work-item par particule
7          si i_k ≠ −1 alors
8              [GPU] Transport de la particule vers le bord → x_k, t_k.
9              [GPU] Lois de réflexion → v_k.
10             [GPU] Collision avec le volume récepteur → i_k, d_k^i, d_k^{i+1}.
11     si j mod 10 = 0 alors
12         [GPU] Test sur le nombre de particules (restantes) à transporter.
13     Traitement des données temporelles en volume récepteur :
14         [GPU] Tri radix
15         [GPU] Sommes cumulatives
16         [GPU] Correction
17         [GPU] Réduction
18     j ← j + 1
19 Reconstruction des données acoustiques
```

Figure 4.3: Étapes successives dans l'algorithme de ray-tracing. Les préfixes `[GPU]` et `[CPU]` indiquent où à lieu l'exécution des tâches.

Ce problème est un problème classique en algorithmique et porte le nom de problème d'histogramme ou de *binning*. D'un point de vue qualitatif, nous considérons à présent l'intervalle de temps $[0, T]$ comme une juxtaposition de N_t *bins* (corbeilles) et associons de ce fait à chacun des *bin* j l'intervalle de temps $[j\Delta t, j+1\Delta t]$. Dans un bin j, contenant initialement une valeur nulle, toute particule possédant un indice de passage $i_k = j$, devra y ajouter sa contribution d_k^i sur le pas de temps considéré Une procédure similaire est effectuée pour récupérer les contributions de "sorties" d_k^{i+1} également stockées. Un problème d'histogramme nécessite donc des écritures au sein des mêmes zones mémoires lorsque deux particules distinctes passent au même moment dans le détecteur. Dans un contexte d'exécution des tâches en parallèle sur GPU, les problèmes d'histogramme imposent un certain nombre de contraintes à respecter, en particulier celle liée au fait que deux work-items (nos particules) ne peuvent pas écrire de manière concurrente dans une même zone mémoire globale (ici le tableau w_R associé à la densité). Ce résultat est également valable sous CUDA. Pour contourner cette limitation, différentes solutions sont néanmoins disponibles :

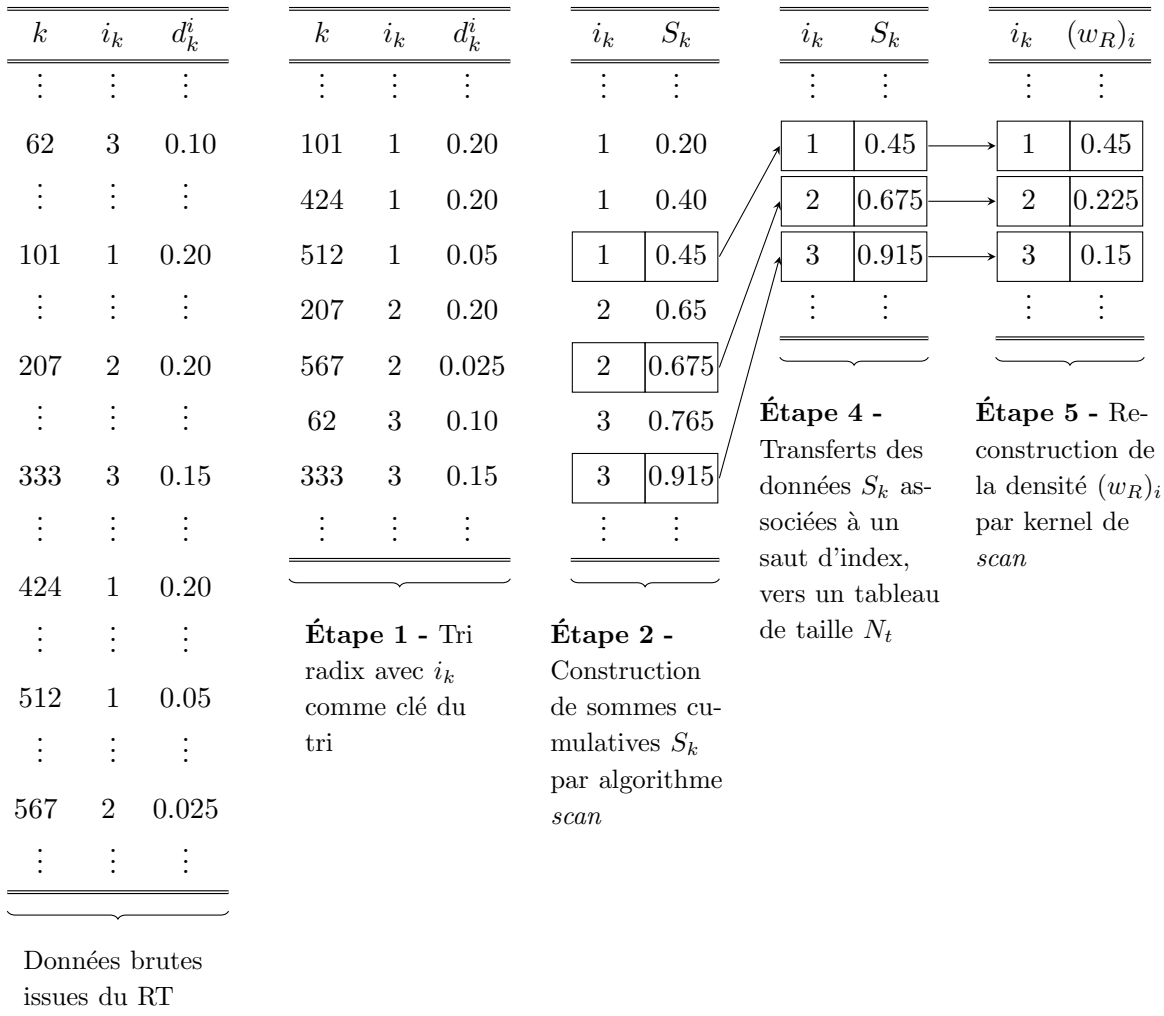


Figure 4.4: Illustration du processus de reconstruction des données temporelles en volume récepteur. Traduction de l'algorithme de binning au travers de primitives GPU. L'indice k fait référence à l'indice de ligne du tableau présenté en figure 4.4 et contenant les données d'une particule k. L'indice k n'est jamais utilisé, mais permet de garder la trace des particules afin illustrer le fonctionnement des processus employés.

1. Sérialiser les opérations d'écriture en les rendant atomiques et ainsi éliminer tous accès concurrentiels. Cette solution impose une perte de parallélisation.
2. Pour des valeurs N_t faibles et comme puissance de 2, nous pouvons utiliser des algorithmes de binning hautement optimisés sous GPU. Ces derniers sont régulièrement basés sur le découpage du problème initial en une collection de sous problèmes de binning de petite taille pouvant être exécutés en parallèle grâce à l'utilisation de mémoire partagée. Ce procédé souvent appliqué au traitement d'images [25], réduit les conflits d'écritures concurrentes et offre de très

bonnes performances. En plus de la contrainte sur N_t ces algorithmes ne sont malheureusement pas disponibles nativement dans les bibliothèques OpenCL ou PyOpenCL et représentent un travail d'implémentation conséquent.

3. Dans le cas de valeurs de N_t quelconques nous avons cherché à traduire ce problème binning avec des primitives GPU déjà existantes dans les librairies OpenCL et PyOpenCL. La solution simple retenue est présentée en Figure 4.4 et s'articule selon la procédure décrite ci-dessous.

Binning par primitives GPU

1. À la fin d'une itération de transport, nous appliquons un algorithme de tri dont la clé de tri est i_k. Ce tri découpe les N_p particules en blocs regroupés par même indice i_k. Le tri employé est un *tri-radix* porté sur GPU via la librairie OpenCL [30]. Une version de ce tri est disponible nativement dans la librairie PyOpenCL. Sa complexité est très intéressante puisqu'elle est de $\mathcal{O}(np)$ avec p la taille moyenne des clés. Cette dernière garantit des temps d'exécution courts même dans les cas de grands volumes de données à traiter. Au regard des faibles valeurs prises par les clés i_k, nous utiliserons uniquement leur 16 premiers bits significatifs pour comparaison. Les données temporelles de sortie d_k^{i+1} sont ainsi triées au même moment.
2. Une fois les données triées, nous appliquons un kernel de *scan* permettant de calculer une somme cumulative. Ce kernel entièrement parallélisé crée un tableau dont les éléments sont $S_k = \sum_{i=1}^{k} d_k^i$. La même procédure est appliquée aux données temporelles de sortie. En modifiant ces kernels, nous pouvons inclure un produit avec les composantes de la vitesse des particules $\mathbf{v}_k$. Cette modification permettra de calculer alors les composantes de l'intensité acoustique.
3. Nous cherchons à présent à extraire les valeurs de S_k associées à un saut d'index $i_k \neq i_{k+1}$. Cette opération est effectuée par un kernel de recopie. Lorsqu'un workitem détecte un saut d'index il recopie sa valeur S_k dans un tableau C à la position i_k. Le fait d'avoir trié les données assure la non-existence d'écritures concurrentes. La même procédure est appliquée aux données temporelles de sortie.
4. Les valeurs de chaque ligne du tableau C correspondent en fait à la somme cumulative de tous les bins. Pour obtenir la somme cumulative par bin nous devons soustraire au bin courant les valeurs des bins précédents. Cette procédure va écrire dans le tableau global w_R. Cette opération est également effectuée sur le tableau C associé aux données temporelles de sorties. Pour les données temporelles de sortie la recopie vers le tableau global w_R sera toutefois effectuée en prenant soin de décaler l'index d'une unité tel que $C'_i \rightarrow (w_R)_{i+1}$

2.3 Modélisation des états stationnaires

L'algorithme présenté ci-dessus permet d'obtenir une réponse acoustique impulsionnelle. En effet, à $t = 0$ l'intégralité des particules sont lâchées et vont se mouvoir dans Ω. La modélisation mise en place ne traduit pas une émission de particules au cours du temps. De ce fait, elle ne permet donc pas de représenter en tant que tel, un état stationnaire caractérisé par l'existence d'un équilibre entre l'énergie émise et celle absorbée aux parois. Toutefois, comme nous le verrons dans le Chapitre 7 de cette thèse, l'étude des états stationnaires acoustiques permet de remonter à certaines grandeurs d'intérêt en l'acoustique des salles. Afin de nous rapprocher de ce concept de compensation des flux d'énergie à l'état stationnaire, nous proposons de modifier l'algorithme précédent et de réinjecter au cours du temps et au niveau de la source, toute particule ayant été absorbée par une paroi. Dans la pratique cette modification impose uniquement un nouveau tirage aléatoire (en espace et en vitesse) pour la particule à réémettre.

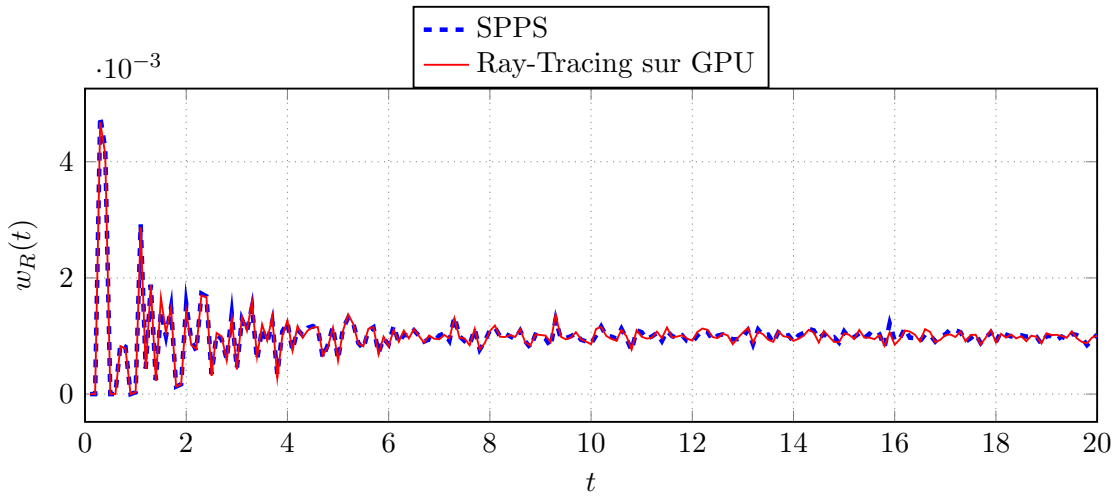
3 Validations

Dans cette section nous chercherons à valider les réponses impulsionnelles obtenues par notre algorithme. Cette validation portera sur différents cas tests et s'effectuera en comparant nos données avec celles obtenues avec un code dédié à l'acoustique des salles. Le code de comparaison, SPPS, développé par l'UMRAE IFSTTAR-CEREMA [57], consiste en un algorithme de ray-tracing 3D sur CPU. Au vu de la comparaison des différents modèles au Chapitre 7, nous souhaitons nous assurer que notre algorithme produise bien des résultats cohérents et puisse servir de base comparative. Dans l'ensemble des cas tests suivants, nous fixons la vitesse du son $c = 1$.

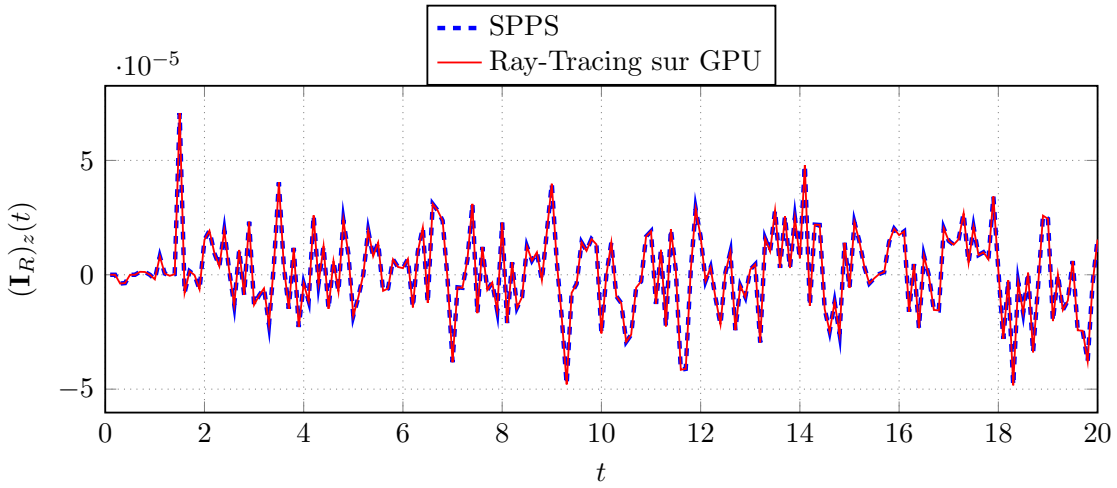
Salle cubique et rectangulaire avec différentes absorptions Nous choisissons le domaine de calcul Ω comme le cube unité, et plaçons une source ponctuelle isotrope au point $\mathbf{x}_s = [0.5, 0.5, 0.5]$ ainsi qu'un volume récepteur sphérique de rayon $r = 0.05$ au point $\mathbf{x}_r = [0.8, 0.5, 0.5]$. Les calculs ont été effectués avec $N_p = 10^6$ pour une durée de simulation $T = 20$. Le coefficient d'absorption α est pris comme identiquement nul pour tous points du bord $\partial\Omega$, et le coefficient d'accommodation β est fixé à 1 (cas spéculaire pur). Les évolutions au cours du temps de la densité w_R et de la composante $(\mathbf{I}_R)_z$ sont données en Figure 4.5. Nous constatons une superposition quasi parfaite entre les deux courbes. Les différences observées sont très certainement liées au générateur de nombres aléatoires. Des comparaisons similaires ont été effectuées dans des cas de géométries allongées. Ces dernières montrent la même adéquation entre notre algorithme et le code SPPS.

Sur la Figure 4.6, nous avons réalisé le même cas test, mais avec cette fois-ci un

paramètre d'absorption égal à $\alpha = 0.10$. Nous observons la même adéquation entre les deux codes. Contrairement au cas précédent, la densité d'énergie acoustique décroît au cours du temps dans le volume récepteur.

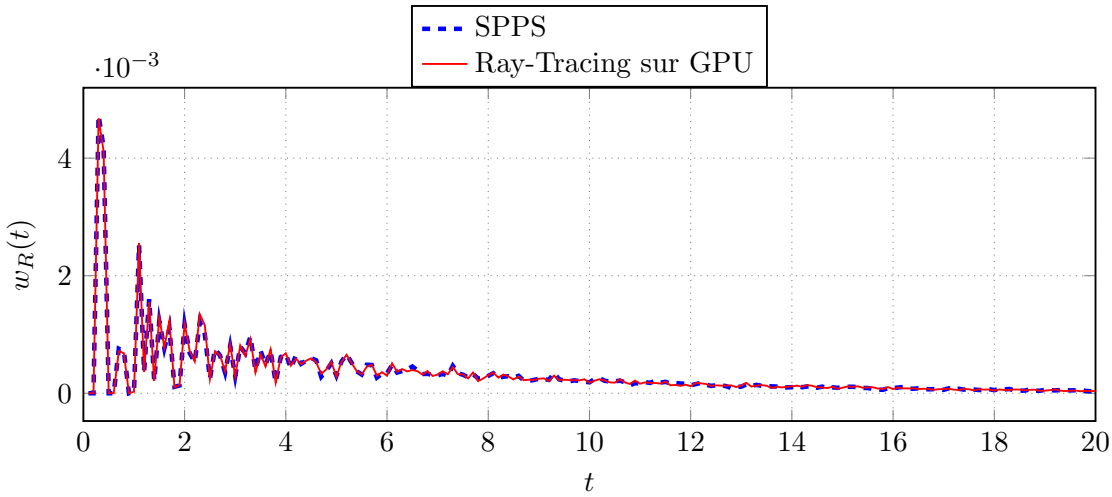


(a) Densité d'énergie dans le volume récepteur

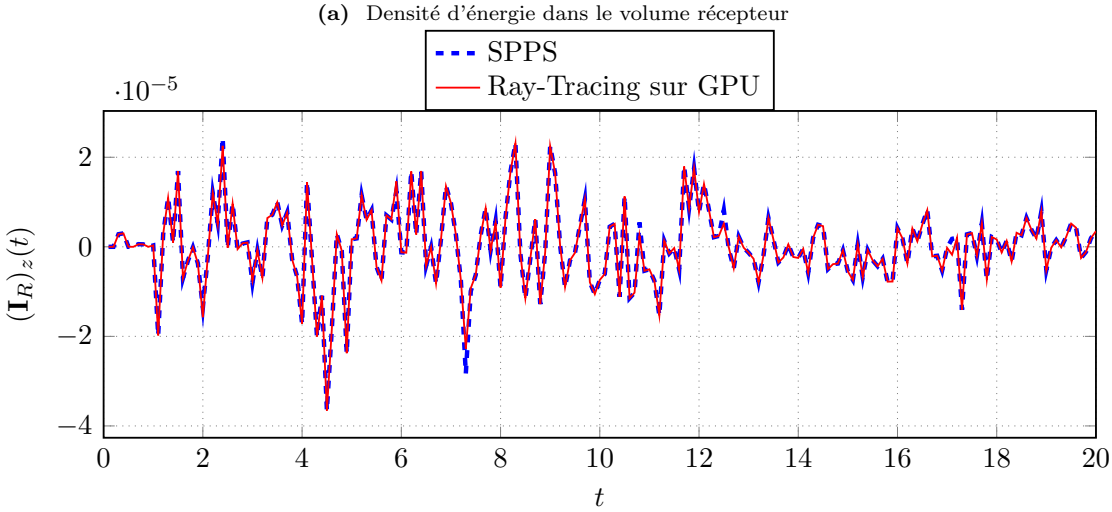


(b) Intensité acoustique dans le volume récepteur

Figure 4.5: Évolution au cours du temps de la densité w_R 4.5a et de la composante $(\mathbf{I}_R)_z$ de l'intensité acoustique 4.5b dans le volume récepteur. Comparaison entre le code SPPS et notre algorithme de ray-tracing sur GPU. Nous considérons une source isotrope située au point $\mathbf{x}_s = [0.5, 0.5, 0.5]$ émettant $N_p = 10^6$ particules à $t = 0$. Le volume récepteur est une sphère de rayon $r = 0.05$ située au point $\mathbf{x}_r = [0.8, 0.5, 0.5]$. Nous fixons la durée de la simulation à $T = 20$ et le coefficient d'absorption à $\alpha = 0$ pour tous points du bord. $\partial\Omega$



(a) Densité d'énergie dans le volume récepteur



(b) Intensité d'énergie dans le volume récepteur

Figure 4.6: Évolution au cours du temps de la densité w_R 4.5a et de la composante $(\mathbf{I}_R)_x$ de l'intensité acoustique 4.5b dans le volume récepteur. Comparaison entre le code SPPS et notre algorithme de ray-tracing sur GPU. Nous considérons une source isotrope située au point $\mathbf{x}_s = [0.5, 0.5, 0.5]$ émettant $N_p = 10^6$ particules à $t = 0$. Le volume récepteur est une sphère de rayon $r = 0.05$ située au point $\mathbf{x}_r = [0.8, 0.5, 0.5]$. Nous fixons la durée de la simulation à $T = 20$ et le coefficient d'absorption à $\alpha = 0.10$ et $\beta = 0$ pour tous points du bord. $\partial\Omega$

Chapitre 5

Discrétisation du modèle cinétique en dimension trois

Contenu

1 Modèle aux ordonnées discrètes 98
1.1 Modèle cinétique d'application 98
1.2 Discrétisation angulaire 98
1.3 Modèle aux ordonnées discrètes 101
2 Méthode Galerkin discontinue 102
2.1 Généralités 102
2.2 Discrétisation en espace 103
2.3 Approximation nodale 105
2.4 Approximation des intégrales 106
3 Discrétisation en temps par méthode Runge-Kutta . . . 109
4 Implémentation 110
4.1 Data-based parallelism and StarPU 110
4.2 L'approche macro-cellule 111
5 Codelets hybrides C/OpenCL 112
6 Validations 114
6.1 Transport libre avec conditions de Dirichlet 114

1 Modèle aux ordonnées discrètes

1.1 Modèle cinétique d'application

Nous considérons une fonction de distribution $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \in \mathbb{R}^+$ où $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ désigne la variable d'espace, $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$ la vitesse avec $\mathbb{S}^2$ la sphère unité et enfin $t \in \mathbb{R}^+$ le temps. Nous cherchons alors à étudier dans $\Omega \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+$ le système de transport libre suivant

$$\begin{cases} \partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + c\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \end{cases} \tag{5.1}$$

avec f_0 une fonction connue. Nous ajoutons à ce système la condition au bord définie en (1.56) pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ dans $\partial\Omega \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+$, tels que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) < 0$,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = (1-\alpha)\beta f^s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + (1-\alpha)(1-\beta) f^d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \tag{5.2}$$

avec $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ la normale au point du bord $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Dans ce chapitre nous chercherons ainsi à appliquer la méthode des ordonnées discrètes au modèle cinétique (5.2) et (5.1).

1.2 Discrétisation angulaire

En suivant les principes de la méthode aux ordonnées discrètes, il nous faut choisir un ensemble $S_N \subset \mathbb{S}^2$ composé de N directions discrètes $(\mathbf{v}_k)_{k=0,\dots,N-1}$ que nous complétons avec une règle de quadrature sur la sphère $\mathbb{S}^2$, notée $Q_N[f]$, telle que

$$Q_N[f] = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_k f(\mathbf{v}_k) \approx \int_{\mathbb{S}^2} f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}, \tag{5.3}$$

où les $(\omega_k)_{k=0,\dots,N-1}$ désignent les poids d'intégration. Il est important de remarquer que le choix de la discrétisation angulaire est conditionné, dans notre cas, par deux aspects :

1. Les grandeurs acoustiques (w et $\mathbf{I}$) sont reconstruites numériquement au travers de la règle de quadrature (5.3) définie à partir de l'ensemble S_N. De ce fait, la discrétisation S_N doit être choisie afin de chercher à minimiser l'erreur de quadrature lors des opérations de reconstruction.
2. Le traitement des conditions aux bords spéculaires peut s'avérer compliqué en trois dimensions d'espace lorsque la direction de rebond spéculaire n'est pas incluse dans l'ensemble S_N. Dans notre cas, afin de simplifier le traitement de ces dernières, nous souhaitons que notre ensemble S_N possède un certain nombre de propriétés de symétrie induites par la géométrie de notre domaine

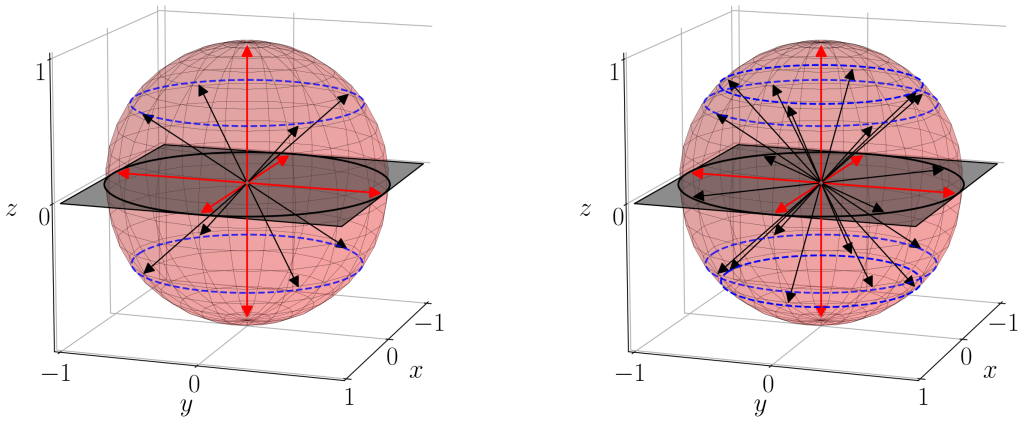
spatial Ω. En effet, comme nous travaillerons uniquement en géométries rectangulaires/cubiques, que nous caractérisons par 3 plans orthogonaux, il serait intéressant que S_N possède également ces 3 plans de symétrie. Si tel est le cas, alors toute direction de transport possède son équivalent "spéculaire" dans S_N.

Quadrature de Lebedev

Une règle de quadrature possédant les aspects présentés ci-dessus est la règle de quadrature de Lebedev [46]. Dans une philosophie proche des quadratures de Gauss, les nœuds et poids de Lebedev sont déterminés en forçant la règle de quadrature associée à intégrer exactement toutes les harmoniques sphériques de degré inférieur ou égal à p. L'entier p désignera alors également la précision de la méthode [45]. La mise en équations de ces contraintes d'intégrations exactes conduit alors à un système d'équations non linéaires qui demande à être inversé numériquement. Le nombre d'inconnues de ce système peut être diminué grâce à un résultat dû à Sobolev [62]. L'idée de Sobolev est qu'en cherchant une règle de quadrature invariante par l'action d'un groupe de rotation $G \subset O(3)$ (incluant éventuellement l'inversion), il est alors possible de diminuer le nombre d'inconnues du système. Au regard des différentes propriétés de symétrie relative au groupe G et celles liées aux harmoniques sphériques, le résultat de Sobolev fixe ainsi le nombre de nœuds minimal nécessaire afin d'obtenir l'intégration exacte de ces dernières.

La règle de quadrature de Lebedev est invariante pour le groupe de symétrie octahédrale avec l'inversion $G = O_h$ [46]. Des illustrations des nœuds de Lebedev, pour $p = 5$ et $p = 7$, sont données en figure 5.1. Sur cette figure, chaque flèche représente une direction $\mathbf{v}_k$ de S_N. Les "directions cardinales" sont volontairement représentées en rouge. Nous remarquons, sur cette figure les propriétés de symétrie de l'ensemble S_N, ainsi que la construction hiérarchique traduite par le fait que, $S_6 \subset S_{14} \subset S_{26} \subset \ldots \subset \mathbb{S}^2$. L'aspect hiérarchique des sphères de Lebedev est intéressant, puisque l'augmentation du nombre de vitesses N se fait par de simples ajouts de vitesses au regard de l'ensemble précédent. Cette propriété facilite de ce fait, la comparaison des résultats, et permet d'isoler l'influence de la discrétisation en vitesse lorsque nous augmenterons N. Nous donnons également à titre d'exemple dans le tableau 5.1 le nombre de nœuds N et la précision p associée.

Remarque 6. *Nous ne calculons à aucun moment les nœuds et poids de Lebedev. Ces derniers sont stockés statiquement en mémoire à partir de tables précalculées [11].*



(a) $p = 5$, $N = 14$ **(b)** $p = 7$, $N = 26$

Figure 5.1: Illustration de la discrétisation en vitesse S_N associée à la sphère de Lebedev

Précision (p)	3	5	7	9	11	13	15
Nombre de noeuds (N)	6	14	26	38	50	74	86

Table 5.1: Nombre de nœuds et précision pour la méthode de quadrature de Lebedev sur la sphère $\mathbb{S}^2$. Référence :

1.3 Modèle aux ordonnées discrètes

En utilisant la discrétisation S_N nous cherchons ainsi à approcher la fonction de distribution $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ continue sur $\Omega \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+$ par sa forme semi-discrète en vitesse telle que

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \approx \sum_{k=0}^{N-1} f_k(\mathbf{x}, t)\, \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k), \tag{5.4}$$

où δ désigne la mesure delta de Dirac en 0 et où pour tout $k = 0, \ldots, N-1$, $f_k(\mathbf{x}, t)$ désigne la composante de f pour la vitesse discrète $\mathbf{v}_k$. En insérant l'équation (5.4) dans (5.1), nous obtenons alors sur le domaine $\Omega \times \mathbb{R}^+$ et pour tout $k = 0, \ldots, N-1$, un ensemble d'équations de transports de la forme

$$\begin{cases} \partial_t f_k(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v_k} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_k(\mathbf{x}, t) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad f_k(\mathbf{x}, t) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k). \end{cases} \tag{5.5}$$

De la même manière sur le domaine $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$ nous avons,

$$f_k(\mathbf{x}, t) = (1-\alpha)\beta f_k^s(\mathbf{x}, t) + (1-\alpha)(1-\beta) f_k^d(\mathbf{x}, t), \quad k = 0, \ldots, N-1. \tag{5.6}$$

où les fonctions $f_k^s(\mathbf{x}, t)$, $f_k^d(\mathbf{x}, t)$ restent à définir.

Discrétisation de la condition spéculaire

En utilisant le fait que pour notre domaine de calcul Ω, chaque direction spéculaire est incluse dans S_N (voir section 1.2), nous obtenons comme discrétisation de la condition spéculaire,

$$f_k^s(\mathbf{x}, t) = f^s(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k, t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k - 2(\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}), t) = f_p(\mathbf{x}, t), \tag{5.7}$$

avec l'indice $p \in \{0, \ldots, N-1\}$ et $\mathbf{v}_p \in S_N$ tel que $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_k - 2(\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n})$.

Remarque 7. *Le traitement des conditions spéculaires nécessite, dans le cadre de géométries tridimensionnelles complexes, un traitement particulier permettant la redistribution de la fonction de densité de probabilité f selon une ou plusieurs directions de S_N. Ce traitement est beaucoup plus compliqué qu'en dimension deux comme présenté au Chapitre 2. En trois dimensions d'espace, nous pouvons par exemple citer [42] où, dans le cadre du transport radiatif, les auteurs présentent une méthode de redistribution purement géométrique.*

Discrétisation de la condition diffuse

En utilisant la règle de quadrature (5.3), la condition aux bords diffuse (1.58)-(1.63) peut ainsi être réécrite sous la forme

$$f_k^d(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{C_N} \left(\sum_{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n} \geq 0} \omega_j f_j(\mathbf{x}, t)\, \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n} \right), \tag{5.8}$$

avec C_N la constante de normalisation définie par

$$C_N = \sum_{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n} \geq 0} w_j (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n}), \tag{5.9}$$

qui garantit que l'intégrale discrète sur la demi-sphère vaut bien 1. Nous remarquerons que pour un point $\mathbf{x}$ du bord $\partial\Omega$ et un instant $t > 0$ donnés, la condition diffuse est indépendante de la vitesse $\mathbf{v}_k$ considérée. Cela introduira alors un terme de flux constant pour toutes vitesses rentrantes $\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n} \leq 0$ au point du bord $\mathbf{x}$ considéré.

2 Méthode Galerkin discontinue

L'application de la méthode aux ordonnées discrètes nous a permis d'aboutir à un modèle aux ordonnées discrètes pour l'acoustique. Afin de résoudre ce dernier numériquement, nous allons chercher à le discrétiser en espace par la méthode Galerkin discontinue (DG). Dans cette section, nous présenterons le cadre général de la méthode DG et son application au modèle aux ordonnées discrètes considéré. Nous renvoyons à [32] pour une présentation plus générale de la méthode

2.1 Généralités

La méthode Galerkin Discontinue (DG) est une méthode éléments finis, permettant d'approcher les systèmes de lois de conservation de la forme

$$\partial_t \mathbf{W} + \sum_{k=1}^{3} \partial_k \mathbf{F}^k(\mathbf{W}) = 0. \tag{5.10}$$

L'inconnue est un vecteur composé des variables conservatives $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^m$ qui dépendent de la variable d'espace $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et du temps t. Nous rappelons que ∂_t désigne la dérivée partielle par rapport au temps t et ∂_k la dérivée partielle par rapport à la variable x_k. Soit $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$ une direction spatiale quelconque, alors le flux dans la direction $\mathbf{n}$ est défini par

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}, \mathbf{n}) = \sum_{k=1}^{3} n_k \mathbf{F}^k(\mathbf{W}). \tag{5.11}$$

Dans cette section nous considérons l'application de la méthode DG au modèle aux ordonnées discrètes pour l'acoustique (5.5)-(5.6). Dans ce cas particulier nous avons $m = N$ et les variables conservatives sont désignées par,

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = [f_0(\mathbf{x}, t), f_1(\mathbf{x}, t), \ldots, f_{N-2}(\mathbf{x}, t), f_{N-1}(\mathbf{x}, t)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m, \tag{5.12}$$

où $f_k(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ est la fonction de densité de probabilité pour une vitesse $\mathbf{v}_k$ donnée. Pour ce modèle, et avec les notations précédentes, le flux dans la direction $\mathbf{n}$ s'écrit alors

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_0)\, f_0 \\ \vdots \\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_k)\, f_k \\ \vdots \\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{N-1})\, f_{N-1} \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

2.2 Discrétisation en espace

Maillage

Nous considérons tout d'abord un maillage $\mathcal{M}$ constitué d'un nombre N_c d'ouverts L_i, bornés, connexes, à frontière Lipshitz. Appelées également cellules, ces dernières forment une partition du domaine de calcul Ω telle que,

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{L_i \in \mathcal{M}} \bar{L}_i \quad \text{et} \quad L \cap L_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j. \tag{5.14}$$

Nous noterons par h le diamètre maximal des cellules, tel que

$$h = \sup_{L \in \mathcal{M}} \frac{|L|}{|\partial L|}, \tag{5.15}$$

avec $|L|$ le volume de la cellule L et $|\partial L|$ sa surface.

Transformations géométriques

Dans cette étude, nous considérons uniquement des cellules L de type hexaédriques. La construction du maillage $\mathcal{M}$ repose alors sur la donnée d'un élément de référence (cube unité) noté

$$\hat{L} =]-1, 1[^D \tag{5.16}$$

et d'une transformation régulière $\mathbf{x} = \boldsymbol{\tau}_L(\hat{\mathbf{x}})$, $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{L}$, caractérisant le passage de la cellule de référence $\hat{L}$ à une cellule physique L, tel que

$$\boldsymbol{\tau}_L(\hat{L}) = L. \tag{5.17}$$

Nous supposons que cette transformation est inversible et notons par $\boldsymbol{\tau}'_L$ la matrice jacobienne qui lui est associée. Nous supposons également que cette dernière est une transformation directe (elle préserve l'orientation et donc l'ordre des sommets), caractérisée par

$$|\boldsymbol{\tau}'_L| > 0. \tag{5.18}$$

où $|\boldsymbol{\tau}_L'|$ désigne le déterminant de la matrice jacobienne. Dans notre implémentation, l'élément de référence, appelé `H20`, est un élément fini hexahédral composé de 20 nœuds. La transformation $\boldsymbol{\tau}_L$ est quant à elle une transformation d'ordre 2. La génération du maillage est entièrement effectuée via l'outil `gmsh` (voir [23]) en utilisant l'algorithme transfinite [26].

Convention

Afin de détailler le couplage opérant entre des cellules voisines, nous détaillons ici la convention utilisée (voir figure 5.2). Nous utiliserons ainsi l'indice R pour désigner une cellule voisine à la cellule L considérée. Le bord partagé entre L et R sera noté par $\partial L \cap \partial R$ et celui partagé entre L et le bord du domaine sera noté $\partial L \cap \partial \Omega$. Dans cette configuration, le vecteur $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{L/R}$ désigne alors le vecteur normal unitaire sur le bord ∂L et orienté de L vers R. L'inconnue $\mathbf{W}_R$ correspond ainsi à la valeur de $\mathbf{W}$ dans la cellule voisine R sur le bord partagé $\partial L \cap \partial R$. Si toutefois, une cellule L est une cellule située au bord du domaine Ω, nous utiliserons la valeur imposée par les conditions aux bords. Dans ce cas, elle sera alors notée par, $\mathbf{W}_R = \mathbf{W}_b$ sur $\partial L \cap \partial \Omega$.

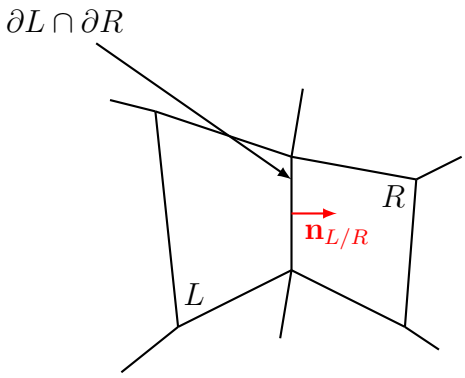


Figure 5.2: Convention employée pour désigner deux cellules voisines L et R

Formulation DG

La discrétisation DG se base sur la formulation faible de (5.10) et consiste à approcher $\mathbf{W}$ par une solution polynomiale sur chaque cellule du maillage. Pour ce faire, nous définissons tout d'abord l'espace d'approximation V_h tel que,

$$V_h = \left\{ v_h \,|\, v_h \in L^2(\Omega),\, v_h \circ \tau_L(\hat{x}) \in \mathbb{P}^d(\hat{L}), \quad \forall L \in \mathcal{M} \right\}, \tag{5.19}$$

où $\mathbb{P}^d(\hat{L})$ est l'espace engendré par le produit tensoriel de polynômes de degré au plus d. La formulation DG revient alors à trouver pour tout $t > 0$, toutes cellules

$L \in \mathcal{M}$ et toutes fonctions test $v_h \in V_h$, l'inconnue $\mathbf{W} \in (V_h)^m$ comme solution de

$$\int_L \partial_t \mathbf{W} v_h d\mathbf{x} - \int_L \mathbf{F}(\mathbf{W}, \boldsymbol{\nabla} v_h) d\mathbf{x} + \int_{\partial L} \mathbf{F}^*(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R, \mathbf{n}_{L/R}) v_h ds = 0. \tag{5.20}$$

Remarque 8. *Par abus de notation, nous désignerons à présent par* $\mathbf{W}$ *l'approximation de* $\mathbf{W}$ *sur une cellule* L.

Flux numérique

Du fait que notre solution n'est pas nécessairement définie aux bords des cellules, il nous faut introduire la notion de flux numérique $\mathbf{F}^*(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R, \mathbf{n}_{L/R})$ dans (5.31). Pour l'application au modèle aux ordonnées discrètes, nous utiliserons un flux décentré amont (upwind) donné par

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R, \mathbf{n}_{L/R}) = (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}^+_{L/R})\mathbf{W}_L + (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}^-_{L/R})\mathbf{W}_R, \tag{5.21}$$

où

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^+ = \max(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 0) \quad \text{et} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^- = \min(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 0). \tag{5.22}$$

2.3 Approximation nodale

Dans cette section nous cherchons à construire une base de l'espace V_h sur laquelle nous décomposerons notre solution approchée $\mathbf{W}$.

Nœuds et poids de Gauss-Lobatto

Pour ce faire, nous considérons tout d'abord dans la cellule de référence, des nœuds de Gauss-Lobatto (GL) $(\hat{\mathbf{x}}_i)_{i=0\ldots N_d-1}$ et leurs poids associés $(\omega_i)_{i=0\ldots N_d-1}$, avec $N_d = (d+1)^3$. Ces derniers sont obtenus par le produit tensoriel de vecteurs composés de $(d+1)$ nœuds de Gauss-Lobatto à une dimension. Les nœuds et les poids de GL dans la cellule physique L sont alors déterminés par le biais de la transformation géométrique $\boldsymbol{\tau}_L$ telle que

$$\mathbf{x}_{L,i} = \boldsymbol{\tau}_L(\hat{\mathbf{x}}_i), \quad \omega_{L,i} = \omega_i |\boldsymbol{\tau}'_L(\hat{\mathbf{x}}_i)| > 0. \tag{5.23}$$

Fonctions de base

Nous considérons à présent les polynômes de Lagrange associés aux nœuds de GL à une dimension $(\hat{x}_i)_{i=0\ldots d}$. Ces polynômes sont donnés, sur l'élément de référence, par

$$l_p(\hat{x}) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq p}}^{d} \frac{\hat{x} - \hat{x}_p}{\hat{x}_k - \hat{x}_p}, \quad \forall \hat{x} \in]-1, 1[, \tag{5.24}$$

et vérifient la propriété

$$l_i(\hat{x}_j) = \delta_{ij}. \tag{5.25}$$

Nous pouvons ainsi définir des fonctions de base $\hat{\varphi}_i$ sur l'élément de référence $\hat{L}$, par produits tensoriels des polynômes de Lagrange (5.24) à une dimension. Cela nous donne

$$\hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{x}}) = l_m(\hat{x}_1)l_p(\hat{x}_2)l_q(\hat{x}_3) \tag{5.26}$$

avec $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ et $i = m + (d+1)(p + (d+1)q)$. Par construction ces fonctions de bases satisfont la propriété d'interpolation

$$\hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{x}}_j) = \delta_{ij}. \tag{5.27}$$

Pour déterminer les fonctions de base sur la cellule physique L, nous utilisons la relation

$$\varphi_{L,i}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}_i(\boldsymbol{\tau}_L^{-1}(\mathbf{x})). \tag{5.28}$$

Ces dernières satisfont également la propriété d'interpolation sur L

$$\varphi_{L,i}(\mathbf{x}_{L,j}) = \delta_{ij}. \tag{5.29}$$

Nous remarquerons que $(\varphi_{L,j}(\mathbf{x}))_{j=0\ldots N_d-1}$ forme bien une base de l'espace $\mathbb{P}^d(L)$.

Approximation nodale

Grâce aux développements précédents, nous pouvons ainsi décomposer notre solution approchée sur la base $(\varphi_{L,j}(\mathbf{x}))_{j=0\ldots N_d-1}$. Cela nous donne

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=0}^{N_d-1} \mathbf{W}_{L,j}(t)\varphi_{L,j}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in L. \tag{5.30}$$

Cette équation est aussi appelée approximation nodale, en référence au fait que la solution $\mathbf{W}$ est entièrement déterminée par sa valeur aux nœuds [32]. En considérant comme fonction test $\varphi_{L,i}(\mathbf{x}) \in V_h$ et d'après (5.20) la formulation DG revient alors à trouver $\mathbf{W} \in (V_h)^m$ solution de,

$$\int_L \partial_t \mathbf{W}\varphi_{L,i} - \int_L \mathbf{F}(\mathbf{W}_L, \boldsymbol{\nabla}\varphi_{L,i}) + \int_{\partial L} \mathbf{F}^*(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R, \mathbf{n})\varphi_{L,i} = 0, \quad i = 0 \ldots N_d - 1 \tag{5.31}$$

2.4 Approximation des intégrales

Afin d'établir pleinement la discrétisation spatiale du système initial, nous allons chercher à approcher les termes intégraux dans (5.31) par des formules de quadrature.

Terme de masse

Le premier terme dans (5.31) est appelé terme de masse. Il se réécrit d'après (5.30) et (5.23) de la manière suivante

$$\begin{aligned}\int_L \partial_t \mathbf{W}(\mathbf{x},t)\,\varphi_{L,i}\,dx &= \int_L \sum_{j=0}^{N_d-1} \partial_t \mathbf{W}_{L,j}\,\varphi_{L,j}\,\varphi_{L,i}\,dx \\ &= \int_{\hat{L}} \sum_{j=0}^{N_d-1} \partial_t \mathbf{W}_{L,j}\,\hat{\varphi}_j\,\hat{\varphi}_i\,|\boldsymbol{\tau}'_L|\,d\hat{x} \\ &= \omega_{L,i}\,\partial_t \mathbf{W}_{L,i}.\end{aligned} \tag{5.32}$$

Nous remarquons que la matrice de masse est une matrice diagonale (propre à la méthode DG) et que d'après (5.23) elle ne dépend que des poids d'intégration et de la jacobienne de la transformation géométrique.

Terme de rigidité

Le second terme dans (5.31) est appelé terme de rigidité. Afin de le calculer, nous détaillons dans un premier temps comment déterminer les gradients des fonctions test sur les nœuds de L. Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée de taille n, nous rappelons que la matrice des cofacteurs de $\mathbf{A}$ vérifie la relation

$$\mathrm{co}(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{5.33}$$

Le gradient de la fonction de base est déterminé en utilisant le gradient calculé sur l'élément de référence. En utilisant la relation (5.33), il vient alors

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi_{L,i}(\mathbf{x}_{L,j}) = (\boldsymbol{\tau}'_L(\hat{\mathbf{x}}_j)^{-1})^T\hat{\boldsymbol{\nabla}}\hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{x}}_j) = \frac{1}{|\boldsymbol{\tau}'_L(\hat{\mathbf{x}}_j)|}\mathrm{co}(\boldsymbol{\tau}'_L(\hat{\mathbf{x}}_i))\hat{\boldsymbol{\nabla}}\hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{x}}_j). \tag{5.34}$$

Enfin, en notant la matrice des cofacteurs par

$$\mathbf{c}_{L,i} = \mathrm{co}(\boldsymbol{\tau}'_L(\hat{\mathbf{x}}_i)), \tag{5.35}$$

nous pouvons approcher le terme de rigidité par

$$\begin{aligned}\int_L \mathbf{F}\left(\mathbf{W}_L, \boldsymbol{\nabla}\varphi_{L,i}\right)d\mathbf{x} &= \int_{\hat{L}} \mathbf{F}\left(\mathbf{W}_L, \boldsymbol{\nabla}\varphi_{L,i}(\boldsymbol{\tau}_L)\right)\,|\boldsymbol{\tau}'_L|\,d\hat{\mathbf{x}} \\ &\approx \sum_{j=0}^{N_d-1} \omega_j\,\mathbf{F}(\mathbf{W}_{L,j}, \mathbf{c}_{L,j}\hat{\nabla}\hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{x}}_j)).\end{aligned} \tag{5.36}$$

Termes de flux

Le troisième terme dans (5.31) est appelé terme de flux. Afin de le calculer, nous donnons dans un premier temps l'expression des normales $\mathbf{n}_\epsilon$ aux faces d'une cellule physique L en fonction de la normale à l'élément de référence. Cette relation implique la comatrice de la jacobienne de la transformation

$$\mathbf{n}_\epsilon(\mathbf{x}_{L,i}) = \frac{\mathrm{co}(\boldsymbol{\tau}'_L(\hat{\mathbf{x}}_i))\hat{\mathbf{n}}_\epsilon}{||\mathrm{co}(\boldsymbol{\tau}'_L(\hat{\mathbf{x}}_i))\hat{\mathbf{n}}_\epsilon||}. \tag{5.37}$$

Dans cette étude, nous considérons uniquement des transformations géométriques conformes. De ce fait, sur une face partagée entre deux cellules L et R, les points de GL appartenant à L sont directement situés en vis-à-vis des points de GL appartenant à R. Ainsi, en considérant deux cellules voisines L et R, et $\mathbf{x}_{L,i}$ un point de GL situé sur la face commune à ces dernières, il est alors possible, de définir un indice i' tel que

$$\mathbf{x}_{L,i} = \mathbf{x}_{R,i'}. \tag{5.38}$$

Nous noterons par F_ϵ, $\epsilon = 1 \dots 6$ chacune des six faces de l'hexaèdre. Pour chacune de ces faces, nous faisons correspondre une normale sortante unitaire notée $\hat{\mathbf{n}}_\epsilon$. De plus, si un nœud de GL $\hat{x}_i$ appartient à une face F_ϵ, nous noterons par μ_i^ϵ le poids associé. Enfin, nous utiliserons également la convention $\mu_i^\epsilon = 0$ si le nœud $\hat{x}_i$ n'appartient pas à la face F_ϵ.

Remarque 9. *Un point particulier de la quadrature de GL est le fait que les cellules et les faces partagent les mêmes points de quadrature. Ainsi, un nœud de GL donné $\hat{\mathbf{x}}_i$ peut appartenir à plusieurs faces si ce dernier appartient à une arête ou un sommet de $\hat{L}$. Par symétrie, nous observons que si $\mu_i^\epsilon \neq 0$, alors le poids μ_i^ϵ ne dépend pas de ϵ.*

Avec ces notations, et en utilisant le fait que $\hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{x}}_j) = \delta_{ij}$, le terme de flux s'exprime alors par

$$\begin{aligned}
\int_{\partial L} \mathbf{F}^*(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R, \mathbf{n}_{L/R})\, \varphi_{L,i}\, ds &= \int_{\partial \hat{L}} \mathbf{F}^*(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R, \mathbf{n}_{L/R}(\boldsymbol{\tau}_L))\, \hat{\varphi}_i\, ||\mathrm{co}(\boldsymbol{\tau}'_L)\hat{\mathbf{n}}||\, d\hat{s} \\
&\approx \left(\sum_{\epsilon=1}^{6} \sum_{j=0}^{N_d-1} \mu_j^\epsilon\, \hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{x}}_j)\, \mathbf{F}^*\left(\mathbf{W}_{L,j}, \mathbf{W}_{R,j'}, \mathbf{c}_{L,j}\hat{\mathbf{n}}_\epsilon\right) \right) \\
&\approx \sum_{\epsilon=1}^{6} \mu_i^\epsilon\, \mathbf{F}^*\left(\mathbf{W}_{L,i}, \mathbf{w}_{R,i'}, \mathbf{c}_{L,i}\hat{\mathbf{n}}_\epsilon\right).
\end{aligned} \tag{5.39}$$

En réinjectant les termes précédents (5.32), (5.36) et (5.39) dans (5.31) nous obtenons finalement comme formulation DG pour toutes cellules $L \in \mathcal{M}$ et toutes

fonctions test

$$\partial_t \mathbf{W}_{L,i} - \frac{1}{\omega_{L,i}} \sum_{j=0}^{N_d-1} \mathbf{f}(\mathbf{W}_{L,j}, \mathbf{c}_{L,j} \hat{\nabla} \hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{x}}_j))\omega_j + \frac{1}{\omega_{L,i}} \sum_{\epsilon=1}^{6} \mu_i^\epsilon \mathbf{F}^* \left(\mathbf{W}_{L,i}, \mathbf{W}_{R,i'}, \mathbf{c}_{L,i}\hat{\mathbf{n}}_\epsilon\right) = 0. \tag{5.40}$$

Dans (5.40) nous pouvons identifier le terme de volumique associé aux nœuds de GL situés dans le volume, selon la relation suivante

$$V_{i,j} = \mathbf{F}(\mathbf{W}_{L,j}, \mathbf{c}_{L,j} \hat{\nabla} \hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{x}}_j))\omega_j \tag{5.41}$$

et le terme de surface associé aux bords des cellules

$$S_{i,i'} = \mu_i^\epsilon \mathbf{F} \left(\mathbf{W}_{L,i}, \mathbf{W}_{R,i'}, \mathbf{c}_{L,i}\hat{\mathbf{n}}_\epsilon\right). \tag{5.42}$$

Une fois les éléments (5.41) et (5.42) assemblés, nous appliquons l'inverse de la matrice de masse caractérisée par la multiplication par le terme

$$\frac{1}{\omega_{L,i}}. \tag{5.43}$$

Si les indices i et i' sont généralement bien définis pour des cellules situées à l'intérieur du domaine de calcul Ω, dans le cas des cellules de bords, la valeur $\mathbf{W}_{R,i'}$ est alors donnée par la condition au bord

$$\mathbf{W}_{R,i'} = \mathbf{W}_b(\mathbf{x}_{L,i}, t), \quad \mathbf{x}_{L,i} = \mathbf{x}_{R,i'}. \tag{5.44}$$

Pour des raisons pratiques et afin d'imposer les conditions aux bords, il peut être intéressant de considérer $\mathbf{W}_{R,i'}$ comme une inconnue artificielle. Cette inconnue est alors solution de l'équation différentielle,

$$\partial_t \mathbf{W}_{R,i'} = \partial_t \mathbf{W}_b(\mathbf{x}_{L,i}, \cdot). \tag{5.45}$$

3 Discrétisation en temps par méthode Runge-Kutta

Enfin, en écrivant les inconnues du système dans un même vecteur $\mathbf{W}_{\text{tot}}(t) = (\mathbf{W}_{L,i}(t))_{L\in\mathcal{M},\, i=0\ldots N_d-1}$, les équations (5.40) et (5.45) peuvent alors s'écrire comme un système d'équations différentielles couplées

$$\partial_t \mathbf{W}_{\text{tot}} = \mathbf{F}(\mathbf{W}_{\text{tot}}). \tag{5.46}$$

Cet ensemble d'équations différentielles est alors résolu numériquement par une méthode de Runge-Kutta. En pratique, nous utilisons une méthode de Runge-Kutta

d'ordre 2 (RK2). Notant $\mathbf{W}_{\text{tot}}^n$ l'approximation de $\mathbf{W}_{\text{tot}}(t)$ au temps $t_n = n\Delta t$ avec $\Delta t > 0$ le pas de temps, la n-ième itération de ce schéma s'écrit

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{\text{tot}}^* &= \mathbf{W}_{\text{tot}}^n + \Delta t/2\ \mathbf{F}(\mathbf{W}_{\text{tot}}^n),\\ \mathbf{W}_{\text{tot}}^{n+1} &= \mathbf{W}_{\text{tot}}^n + \Delta t\ \mathbf{F}(\mathbf{W}_{\text{tot}}^*).\end{aligned}$$

Là encore nous considérons un pas de temps et un pas d'espace soumis à une contrainte CFL :

$$\Delta t = \gamma_{CFL} \min\left\{\frac{\delta_x}{c}, \frac{\delta_y}{c}\right\}, \tag{5.47}$$

où δ_x et δ_y sont les distances minimales entre deux noeuds de Gauss-Lobatto. La constante γ_{CFL} maximale associée au schéma RK2 est comme pour la méthode d'Euler de l'ordre de 1. Pour plus de détails sur ces conditions de stabilité, nous renvoyons à [32].

4 Implémentation

Dans cette section nous présentons certains éléments relatifs à l'implémentation du code DG.

4.1 Data-based parallelism and StarPU

L'implémentation de la méthode DG se base sur l'utilisation de la librairie runtime StarPU [5]. Développée à l'Inria de Bordeaux et reposant sur le paradigme du parallélisme de données, StarPU est une plateforme unifiée pour l'ordonnancement de tâches sur architecture hybrides. L'utilisation de StarPU repose dans un premier temps sur un découpage de l'algorithme employé en une multitude de tâches élémentaires. Chacune de ces tâches devra alors être implémentée en langage `C` au travers de *codelets* StarPU. Afin de traiter les différentes architectures des unités de calcul, une même tâche élémentaire peut être implémentée au travers de différentes *codelets* dédiées. Cela permet par exemple de traiter les CPU vectoriels ou les unités de calcul supportant le langage `OpenCL`. Dans la terminologie StarPU, ces unités de calcul sont appelées *workers*. Dans le cas où une *codelet* requiert l'exécution de kernels OpenCL, des utilitaires spéciaux sont disponibles afin d'assurer les transferts des buffers StarPU vers les buffers OpenCL. Pour chaque tâche, l'utilisateur doit décrire précisément le mode suivant lequel les données d'entrée doivent être traitées. Trois modes sont disponibles pour les données en entrée : `read`, `write`, et `read/write`. La soumission des tâches se fait ensuite de manière séquentielle au sein de StarPU. Une fois la soumission effectuée le runtime StarPU va alors générer, au travers de l'analyse des dépendances des données, le graphe de dépendance des tâches. L'analyse de ce graphe lui permettra d'envoyer automatiquement les tâches sur les différents

workers disponibles (cœurs CPU, GPU, ...). Si la dépendance des données le permet, les tâches seront exécutées de manière concurrente dans différents threads. Les transferts des données entre les threads, y compris lors de l'utilisation d'OpenCL, sont entièrement supervisés par StarPU. À l'exécution, l'utilisateur peut choisir entre différents ordonnanceurs prédéfinis. Le plus simple, `eager`, est un ordonnanceur sans optimisation où les tâches sont exécutées par ordre de soumission sur les workers disponibles. D'autres ordonnanceurs plus sophistiqués, par exemple `dmda` ou `dmdar`, sont capables de mesurer en temps réel, l'efficacité de chacune des tâches ainsi que les temps relatifs au transfert des données. Au travers de ces analyses, les ordonnanceurs sont alors capables d'optimiser l'allocation mémoire liée aux tâches. En jouant sur l'ordonnancement et l'allocation mémoire, StarPU va donc agir comme un chef d'orchestre et chercher à maximiser l'utilisation des ressources disponibles.

4.2 L'approche macro-cellule

StarPU est relativement efficace, mais son utilisation engendre un inévitable overhead lors de la mise en place des mécanismes de soumission de codelets ainsi que lors de la construction et de l'analyse du graphe des tâches. Afin de diminuer cet overhead il est donc nécessaire de trouver un bon découpage en tâches élémentaires. Un découpage trop fin, constitué de tâches trop petites et à exécution trop rapide, ferait croître drastiquement l'overhead lié à la soumission. À l'inverse un faible découpage en tâches très chronophage bloquerait les workers et formerait un frein à un bon parallélisme.
Afin de diminuer l'overhead, nous avons donc fait le choix, dans notre étude, de faire travailler les tâches de l'algorithme DG à l'échelle d'un groupe de cellules plutôt qu'à l'échelle d'une seule cellule. L'implémentation du schéma de résolution DG est faite au sein de la librairie `schnaps` (Solveur Conservatif Hyperbolique Non-linéaire Appliqués aux Plasmas)[31]. Dans `schnaps`, nous construisons dans un premier temps un maillage *macromesh* associé au domaine de calcul Ω. Ensuite, chaque macro-cellules *macrocell* est découpée en sous cellules appelées *subcells*. Ces sous-cellules forment généralement un sous-maillage structuré des macro-cellules. De cette façon, il est possible d'optimiser un peu plus la méthode. Par exemple, les sous-cellules L d'une même macro-cellule $\mathcal{L}$ partagent la même transformation géométrique $\boldsymbol{\tau}_L$ ce qui permet de limiter les accès mémoire.

Dans `schnaps` nous définissons également des structures appelées *interface* afin de gérer la communication entre différentes macro-cellules. Cette structure contient une copie des données aux nœuds de GL communs à deux macro-cellules voisines. Une itération en temps dans la méthode DG se découpe alors suivant les tâches principales suivantes :

1. Extraction des interfaces : cette tâche extrait les valeurs $\mathbf{W}$ entre les deux macro-cellules composant l'interface. Les données des macro-cellules sont accédées

en mode `read` et celles de la structure interface sont accédées en mode `write`.

2. Calcul des flux aux interfaces : cette tâche calcule les termes de flux (5.42) pour les nœuds de GL composant l'interface. Le terme de flux est ensuite appliqué aux macro-cellules voisines. Dans cette tâche les données situées dans la structure interface sont accédées en mode `read` et les données des macro-cellules voisines sont accédées en mode `read/write`. Pour une efficacité maximale, nous utilisons également le paramètre `commute` lors de l'accès aux données des macro-cellules. Dans ce cas le terme de flux aux interfaces peut être assemblé dans n'importe quel ordre, facilitant de ce fait l'ordonnancement par StarPU.
3. Calcul des flux aux bords : cette tâche calcule la condition aux bords et assemble le terme de flux (5.42) pour les macro-cellules situées aux bords du domaine. Le terme de flux est ensuite appliqué aux macro-cellules voisines. Dans cette tâche les données situées dans la structure interface sont accédées en mode `read` et les données des macro-cellules voisines sont accédées en mode `read/write/commute`.
4. Calcul du terme de volume : Cette tâche assemble le terme volumique (5.41) dans une macro-cellule donnée. Les données de la macro-cellule sont accédées en mode `read/write/commute`.
5. Calcul du terme de flux pour les sous-cellules : Cette tache applique le flux numérique aux sous-cellules internes à une macro-cellule donnée (5.42). Les données de la macro-cellule sont accédées en mode read/write/commute.

Des tâches additionnelles sont requises pour appliquer l'algorithme de Runge-Kutta. Nous ne les décrivons pas ici.

L'algorithme séquentiel de résolution DG est donné ci-dessous. À l'aide de StarPU, cet algorithme peut être décrit de manière complètement séquentielle. StarPU utilise alors les dépendances de données pour distribuer les tâches en parallèle sur les différentes unités de calculs (*workers*).

Dans le paragraphe suivant, nous donnons quelques détails concernant l'implémentation des codelets OpenCL.

5 Codelets hybrides C/OpenCL

Afin d'atteindre de meilleures performances, nous avons programmé des versions OpenCL des codelets précédemment décrits. Nous avons prêté une attention particulière à la coalescence des accès mémoire. Les valeurs de $\mathbf{W}$ en un point de Gaus-Lobatto sont stockées dans une structure appelée *field*, qui regroupe toutes les données associées à une macro-cellule. Une composante de $\mathbf{W}$ est localisée dans la structure field grâce à son indice de sous-cellule `ic`, son indice de points de Gaus-Lobatto `ig` dans la cellule et à l'indice de la composante `iw`. Si la macro-cellule

1 Pour chaque interface :
2 Extraction de l'interface (copie les données venant des macro-cellules voisines de l'interface)
3 Si l'interface correspond à un bord, calcul des flux surfaciques de bords (5.42) et application à la macro-cellule voisine.
4 Si l'interface est interne, calcule des flux numériques (5.42) et application aux deux macro-cellules voisines
5 Fin pour
6 Puis, pour chaque macro-cellule :
7 Calcul et application du flux numérique (5.42) entre les sous-cellules
8 Calcul du terme volumique (5.41) entre les sous-cellules
9 Application de l'inverse de la matrice de masse (5.43) à l'intérieur de chaque sous-cellule.
10 Fin pour

Algorithme 2 : Algorithme Galerkin-Discontinu

est découpée en n_r sous-cellules dans chaque direction et si d désigne le degré des polynômes utilisés, puis enfin m la taille du système hyperbolique alors ces indices varient dans les intervalles suivants

$$0 \leq \texttt{ic} < n_r^3, \quad 0 \leq \texttt{ig} < (d+1)^3, \quad 0 \leq \texttt{iw} < m. \tag{5.48}$$

Les valeurs de $\mathbf{W}$ dans un *field* donné sont stockées dans un buffer `wbuf`. Afin de tester différents arrangements en mémoire, l'indice dans le buffer est calculé via une fonction `varindex(ic,ig,iw)` que nous pouvons facilement changer. Par exemple, nous pouvons considérer la formule suivante

$$\texttt{varindex}(\texttt{ic}, \texttt{ig}, \texttt{iw}) = \texttt{iw} + m * (\texttt{ig} + (d+1)^3 * \texttt{ic}), \tag{5.49}$$

pour laquelle les données sont regroupées par composante, ou bien la formule suivante

$$\texttt{varindex}(\texttt{ic}, \texttt{ig}, \texttt{iw}) = \texttt{ig} + (d+1)^3 * (\texttt{iw} + m * \texttt{ic}), \tag{5.50}$$

pour laquelle les données sont regroupées par point de Gauss-Lobatto.

Nous avons programmé un codelet OpenCL pour chaque tâche décrite dans le paragraphe 4.2. Les tâches qui prennent le plus de temps sont : (i) la tâche associée aux calculs des termes volumiques (5.41) à l'intérieur des macro-cellules et (ii) la tâche qui calcule les flux entre sous-cellules. Les termes d'interface et de bords requièrent généralement moins de calculs.

Une distribution naturelle des tâches est d'associer à chaque sous-cellule un work-group OpenCL puis les calculs à chaque point de Gauss-Lobatto un work-item. Avec cette distribution naturelle, la formule (5.50) assure un accès mémoire coalescent

optimal pour la tâche (i) mais l'accès n'est plus optimal pour le terme surfacique. En effet, les points de Gauss-Lobatto voisins sur une interface entre deux sous-cellules ne sont pas nécessairement proches en mémoire. Ainsi, nous considérons en pratique plutôt la première formule (5.49).

6 Validations

Dans cette section nous cherchons à valider notre schéma DG (5.31) ainsi que son implémentation. Afin de mettre en évidence les gains en précision apportés par l'utilisation d'une méthode d'ordre élevé nous suivrons les mêmes étapes de validation que celles employées au chapitre 2. Notre validation portera ainsi dans un premier temps sur la partie transport en imposant une condition de type Dirichlet sur les bords du domaine et en considérant une solution initiale identiquement nulle sur le domaine Ω. Les validations sont toutes effectuées sur le cube unité $\Omega = [0,1]^3$. Nous calculerons l'erreur relative entre la solution exacte $\mathbf{W}^{ex}$ et la solution approchée $\mathbf{W}$. Nous définissons l'erreur relative discrète en norme p pour une taille de maillage h et un ordre polynomial d donnés comme

$$\epsilon_p^n = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_\Omega |\mathbf{W}_k(\mathbf{x},t^n) - \mathbf{W}_k^{ex}(\mathbf{x},t^n)|^p \underset{\cdot}{\mathrm{x}} \right)^{1/p}}{\sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_\Omega |\mathbf{W}_k(\mathbf{x},t^n)|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}}. \tag{5.51}$$

L'évolution de cette erreur en fonction de la taille du maillage h et de l'ordre polynomial d employés nous permettra de vérifier les ordres de convergence q de la méthode. En présence des conditions aux bords nous vérifions également la conservation de l'énergie totale au cours du temps, définie par

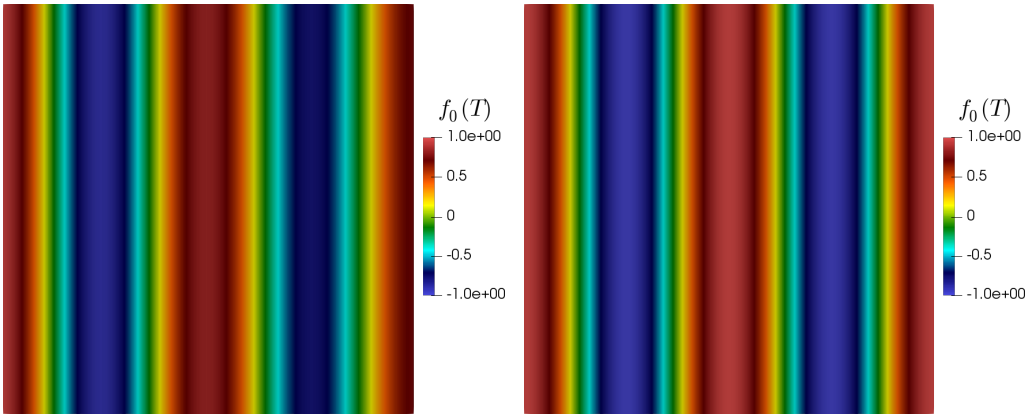
$$\mathcal{E}_{tot}^n = \sum_{k=0}^{N-1} \int_\Omega \left(|\mathbf{W}_k(\mathbf{x},t^n)|^2 \right)^{1/2} d\mathbf{x}. \tag{5.52}$$

6.1 Transport libre avec conditions de Dirichlet

Problème

Ce cas test cherche à valider la partie transport du schéma. Nous nous intéressons au problème de transport libre, tel que pour tout $(\mathbf{x},t) \in \Omega \times [0,T]$ nous avons,

$$\begin{cases} \partial_t f_0(\mathbf{x},t) + \mathbf{v_0} \cdot \nabla_\mathbf{x} f_0(\mathbf{x},t) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad f_0(\mathbf{x},t) = F(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{5.53}$$



(a) $N_x = N_y = 128$ **(b)** $N_x = N_y = 4096$

Figure 5.3: Validation de la partie transport sans conditions de rebond. Tracé des solutions approchées à $t = 1.5$ pour deux finesses de maillage. L'onde est injectée par condition de Dirichlet. Paramètres de calcul : nombre de vitesse $N = 1$ et CFL $= 0.8$.

où $\mathbf{v}_0 = [1, 0]$ désigne la vitesse de transport. Nous complétons ce problème avec la condition au bord de type Dirichlet,

$$f_0(\mathbf{x}, t) = f_0^{ex}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \times [0, T]. \tag{5.54}$$

où f_0^{ex} désigne la solution exacte de (5.53) obtenue par méthode des caractéristiques telle que,

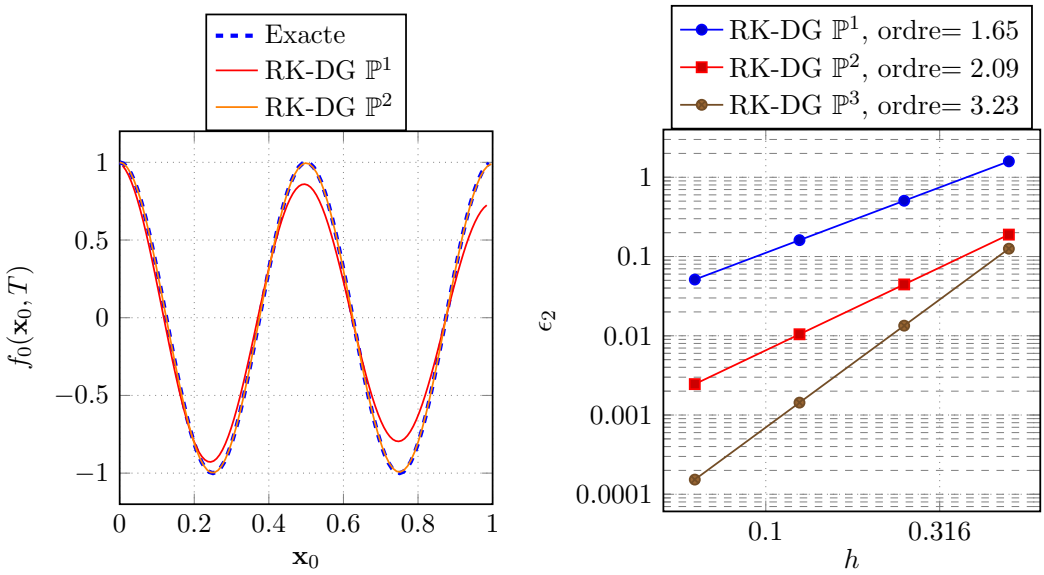
$$f_0^{ex}(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x} - \mathbf{v}_0 t). \tag{5.55}$$

Dans notre application, nous considérons la fonction de fréquence $\nu = 2$

$$F(\mathbf{x}) = \cos(\nu 2\pi \mathbf{x}_0). \tag{5.56}$$

Commentaires

La figure 5.3 présente l'allure des solutions approchées pour deux ordres d'approximation. En figure 5.4a, nous présentons une coupe de la solution pour $\mathbf{x}_1 = 0.5$. L'évolution de l'erreur relative ϵ_2 en fonction du pas d'espace h et de l'ordre d'approximation d est donnée en figure 5.4a au travers d'un graphe log log (voir tableau 5.2 pour les valeurs). Les régressions linéaires calculées nous donnent les bons ordres de convergence pour le schéma RK-DG et valident ainsi la partie transport de notre méthode.



(a) **(b)**

Figure 5.4: Validation de la partie transport sans conditions de rebond. Tracé des solutions exacte et approchée à $t = 1.5$ pour deux finesses de maillage. L'onde est injectée sur le bord par une condition de Dirichlet. Paramètres de calcul : nombre de vitesse $N = 1$ et CFL $= 0.8$.

h	RK-DG $\mathbb{P}^1$	RK-DG $\mathbb{P}^2$	RK-DG $\mathbb{P}^3$
0.5	1.73	0.14	0.11
0.25	0.42	$7.6 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$
0.13	0.18	$8.8 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$
$6.25 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$

Table 5.2: Validation de la partie transport sans condition de rebond. Valeurs de l'erreur relative ϵ_2 entre la solution exacte et approchée à $t = 1.5$ pour différents ordres d'approximation dans la méthode RK-DG. Paramètres de calcul : nombre de vitesse $N = 1$ et CFL $= 0.8$.

Chapitre 6

Discrétisation du modèle aux moments en dimension trois

Contenu

1 Introduction 118

2 Application aux équations de l'acoustique 118

3 Fermeture par réduction d'entropie 119

3.1 Réduction d'entropie 119

3.2 Inversion 120

3.3 Fermeture 122

3.4 Calcul de la fermeture 124

4 Résolution numérique 126

4.1 Discrétisation en temps et en espace 127

4.2 Ordre élevé et sortie du domaine de réalisabilité physique 127

4.3 Validations 128

1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la réduction du modèle cinétique pour l'acoustique en trois dimensions d'espace et lorsque la variable vitesse $\mathbf{v}$ appartient cette fois-ci à la sphère unité $\mathbb{S}^2$. Au travers d'une méthode des moments avec fermeture entropique similaire à celle employée au Chapitre 3, nous chercherons à construire un modèle réduit macroscopique. Nous verrons que l'application de la méthode des moments sur $\mathbb{S}^2$ nous mène à système d'équations macroscopiques différent de celui obtenu pour l'ensemble des vitesses $\mathbb{S}^1$. Une fois ce système établi, nous le discrétiserons en temps et en espace en utilisant la méthode RK-DG présentée au Chapitre 5. Afin de valider notre schéma numérique ainsi que son implémentation, nous nous intéresserons à la convergence $h-p$ de l'erreur entre la solution exacte et approchée lors d'un cas test traitant du problème de Riemann à 1D (voir Chapitre 2). Nous verrons que la méthode DG introduit des oscillations non désirées au niveau de la solution. Nous chercherons a éliminer ces oscillations par à la mise en place d'un limiteur de pente dégradant notre solution à l'ordre 0.

2 Application aux équations de l'acoustique

Le modèle aux ordonnées discrètes présenté au 5 soulève, malgré sa simplicité apparente, un nombre élevé de complications en particulier lors la mise en place de conditions aux bords de type spéculaire. Dans cette section et au travers de la méthode des moments avec fermeture entropique, nous établissons un modèle purement macroscopique.

Modèle cinétique

Nous considérons, une fonction de distribution $f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ en trois dimensions d'espace où $\mathbf{x}\in\Omega\subset\mathbb{R}^3$ désigne la variable d'espace, $\mathbf{v}\in\mathbb{S}^2$ la vitesse avec $\mathbb{S}^2$ la sphère unité et enfin $t\in\mathbb{R}^+$ le temps. Nous cherchons alors à réduire l'équation de transport libre, posée dans $\Omega\times\mathbb{S}^2\times\in\mathbb{R}^+$ telle que

$$\begin{cases}\partial_t f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)+c\mathbf{v}\cdot\nabla f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)=0,\\ f(\mathbf{x},\mathbf{v},0)=f_0(\mathbf{x},\mathbf{v}),\end{cases}\tag{6.1}$$

avec $f_0(\mathbf{x},\mathbf{v})$ la condition initiale connue. Nous complétons ce problème avec la condition de réflexion mixte au bord (1.56), que nous rappelons : pour tout $\mathbf{x}\in\partial\Omega$ et tout $\mathbf{v}\in\mathbb{S}^2$ tels que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})<0$,

$$f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)=(1-\alpha)\beta f^s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)+(1-\alpha)(1-\beta)f^d(\mathbf{x},\mathbf{v},t).\tag{6.2}$$

Système macroscopique

Afin d'obtenir le modèle macroscopique M_1 en trois dimensions d'espace, nous appliquons la méthode des moments présentée au Chapitre 3. Nous commençons dès lors par calculer les deux premiers moments l'équation (6.1). Pour ce faire nous multiplions (6.1) par le vecteur $\mathbf{m} = (1, c\mathbf{v})^T$ et intégrons sur l'ensemble des vitesses $\mathbb{S}^2$. Avec les notations introduites au Chapitre 3, nous obtenons alors le système de lois de conversation suivant

$$\begin{cases} \partial_t \langle f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\rangle & + \quad \nabla_x \cdot \langle c\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\rangle & = 0, \\ \partial_t \langle c\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\rangle & + \quad \nabla_x \cdot \langle c^2 \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\rangle & = 0, \end{cases} \tag{6.3}$$

où $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = (v_i v_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ désigne le produit tensoriel du vecteur $\mathbf{v}$ avec lui-même. En utilisant à présent les définitions (3.3)-(3.4)-(3.5) de la densité d'énergie $w(\mathbf{x}, t)$, de l'intensité acoustique $\mathbf{I}(\mathbf{x}, t)$ et du tenseur flux d'intensité $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ introduits au chapitre 3, nous pouvons alors réécrire dans $\Omega \times \mathbb{R}^+$, le système (6.3) tel que

$$\begin{cases} \partial_t w(\mathbf{x}, t) & + & \nabla \cdot \mathbf{I}(\mathbf{x}, t) & = & 0, \\ \partial_t \mathbf{I}(\mathbf{x}, t) & + & \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) & = & 0, \\ & & w(\mathbf{x}, 0) & = & w_0, \\ & & \mathbf{I}(\mathbf{x}, 0) & = & \mathbf{I}_0. \end{cases} \tag{6.4}$$

Ce système est complété par des conditions aux limites compatibles avec les conditions aux limites cinétiques sous-jacentes. Nous les traiterons de la même manière qu'au chapitre 3 (voir paragraphe 4.4).

3 Fermeture par réduction d'entropie

3.1 Réduction d'entropie

Nous fermons le système macroscopique (6.4) par minimisation entropique, *i.e.* étant donné $(w, \mathbf{I}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ nous cherchons la fonction de distribution à l'équilibre $f_{(w,\mathbf{I})}(\mathbf{v})$ telle que

$$H(f_{(w,\mathbf{I})}) = \min_f \left\{ H(f),\ \forall f(v) \geqslant 0 \text{ t.q. } \langle f \rangle = w \text{ et } \langle c\mathbf{v} f \rangle = \mathbf{I} \right\}. \tag{6.5}$$

où $H(f) = \langle f \ln(f) \rangle$ désigne l'entropie de Boltzmann associée à f. Un calcul identique à celui effectué au Chapitre 3 nous donne la forme suivante,

$$f_{(w,\mathbf{I})} = \exp(-1 - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{m}) \tag{6.6}$$

pour tout couple $(w, \mathbf{I}) \in \mathcal{M}$ de moments réalisables avec $\mathbf{m} = (1, c\mathbf{v})^T$ et $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}_1)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ déterminés de telle sorte que $f_{(w,\mathbf{I})}$ satisfasse les contraintes :

$\langle f_{(w,\mathbf{I})} \rangle = w$ et $\langle c\mathbf{v} f_{(w,\mathbf{I})} \rangle = \mathbf{I}$. L'ensemble des moments réalisables $\mathcal{M}$ est défini comme l'extension directe de la définition (3.14) à la dimension 3 comme l'ensemble des moments $(w, \mathbf{I}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ associés à une fonction de distribution positive sur l'espace des vitesses $\mathbb{S}^2$.

3.2 Inversion

Dans cette section nous allons exprimer les quantités a et $\mathbf{b}$ dans (6.6) en fonction des premiers moments w et $\mathbf{I}$. Nous donnons ce résultat dans le Lemme 3.

Lemme 3. *Soit $(w, \mathbf{I}) \in \mathcal{M}$ un couple de moments réalisables. Alors la fonction de distribution s'écrit :*

$$f_{(w,\mathbf{I})}(\mathbf{v}) = w \frac{\exp(\kappa \frac{\mathbf{I}\cdot\mathbf{v}}{I})}{Z_\kappa}, \tag{6.7}$$

où $\kappa \geqslant 0$ est l'unique solution de l'équation non linéaire

$$\left(\coth(\kappa) - \frac{1}{\kappa}\right) - \frac{I}{cw} = 0. \tag{6.8}$$

et où le coefficient $Z_\kappa \geqslant 0$ est donné par

$$Z_\kappa = \frac{4\pi \sinh \kappa}{\kappa}. \tag{6.9}$$

Preuve. Commençons par réécrire la fonction de distribution (6.6) sous la forme

$$f_{(w,\mathbf{I})} = a \exp(\kappa \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \tag{6.10}$$

avec $a \in \mathbb{R}$, $\kappa \geqslant 0$ et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{S}^2$ tels que

$$a = \exp(-1 - \lambda_0), \quad \kappa \mathbf{b} = c\boldsymbol{\lambda}_1.$$

Le scalaire a se détermine directement à partir de l'équation,

$$w = \langle f_{(w,\mathbf{I})} \rangle = \langle a \exp(\kappa \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \rangle. \tag{6.11}$$

Introduisant les coordonnées sphériques $(\theta, \phi) \in [0, \pi[\times[0, 2\pi[$ dans la base $(\mathbf{b}_\perp, \mathbf{b}'_\perp, \mathbf{b})$ avec $(\mathbf{b}_\perp, \mathbf{b}'_\perp)$ une base orthonormée du plan orthogonal à $\mathbf{b}$, de telle sorte que $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = \cos\theta$, nous avons

$$w = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a \exp(\kappa \cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta d\phi = a 2\pi \int_{-1}^{1} \exp(\kappa u)\, du, \tag{6.12}$$

en faisant le changement de variable $u = \cos(\theta)$. Nous obtenons alors

$$w = \frac{a 4\pi \sinh \kappa}{\kappa}, \tag{6.13}$$

ce qui nous donne l'expression de Z_κ donnée dans (6.9)

$$a = \frac{w\kappa}{4\pi \sinh \kappa} = \frac{w}{Z_\kappa}. \tag{6.14}$$

En considérant à présent l'équation

$$\mathbf{I} = \langle (c\mathbf{v}) a \exp(\mathbf{b} \cdot c\mathbf{v}) \rangle, \tag{6.15}$$

et en se plaçant dans les coordonnées sphériques (θ, ϕ) introduites précédemment, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= ac \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [\cos(\theta)\mathbf{b} + \sin(\theta)\sin(\phi)\mathbf{b}_\perp + \sin(\phi)\cos(\theta)\mathbf{b}'_\perp] \exp(\kappa\cos(\theta)) \sin(\theta)\, d\theta d\phi \\ &= ac\,(2\pi) \left(\int_0^{\pi} \cos(\theta)\sin(\theta)\exp(\kappa\cos(\theta))\, d\theta \right) \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{6.16}$$

du fait que le second et le troisième terme dans l'intégrale s'annulent. En effectuant le changement de variable $u = \cos(\theta)$, nous obtenons

$$\mathbf{I} = ac\,(2\pi) \left(\int_{-1}^{1} u \exp(\kappa u)\, du \right) \mathbf{b} = \frac{ac\,(4\pi)}{\kappa} \left[\cosh \kappa - \frac{\sinh \kappa}{\kappa} \right] \mathbf{b}. \tag{6.17}$$

En utilisant l'expression de a donnée par (6.14), nous obtenons l'expression

$$\mathbf{I} = cw \left(\coth \kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \mathbf{b}. \tag{6.18}$$

Nous déduisons de cette expression que $\mathbf{I}$ et $\mathbf{b}$ sont colinéaires. De plus nous avons

$$\kappa \mathbf{I} \cdot \mathbf{b} = cw\,(\kappa \coth \kappa - 1)\,. \tag{6.19}$$

En posant $s(t) = t\coth(t) - 1$ continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et prolongeable par continuité en 0, il nous reste alors à montrer que $s(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. Nous avons les propriétés suivantes

$$\lim_{t\to 0} s(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} s(t) = +\infty \quad \text{et} \quad s'(t) = \frac{\cosh(t)\sinh(t) - t}{\sinh(t)^2}. \tag{6.20}$$

En posant à présent $y(t) = \cosh(t)\sinh(t) - t$, nous avons

$$\lim_{t\to 0} y(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty \quad \text{et} \quad y'(t) = \sinh(t)^2 + \cosh(t)^2 - 1 \geq 1 \quad \forall t. \tag{6.21}$$

Nous en déduisons que s est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc que pour tout $t \geq 0$ nous avons $t\coth(t) - 1 \geq 0$ et ainsi

$$\kappa \mathbf{I} \cdot \mathbf{b} \geq 0. \tag{6.22}$$

Les vecteurs $\mathbf{I}$ et $\mathbf{b}$ sont donc orientés dans la même direction et donc $\mathbf{b} = \mathbf{I}/I$. Nous obtenons ensuite (6.8) en reportant cette relation dans (6.17). □

3.3 Fermeture

Après avoir effectué l'inversion dans la section précédente, nous pouvons fermer le système (6.4) en exprimant le tenseur $\mathbf{P}(\mathbf{x},t)$ en fonction des moments $w(\mathbf{x},t)$ et $\mathbf{I}(\mathbf{x},t)$. Avant de calculer la forme de $\mathbf{P}$ nous introduisons la quantité suivante :

Définition 12. *L'équivalent acoustique du facteur d'Eddington χ est défini en trois dimensions d'espace comme*

$$\chi(r) = 1 - \frac{2r}{\kappa} = 1 - \frac{2}{\kappa}\left(\coth(\kappa) - \frac{1}{\kappa}\right). \tag{6.23}$$

où nous rappelons que $r = I/(cw)$ et où $\kappa \geqslant 0$ est l'unique solution de (6.8).

La forme de la fermeture obtenue est donnée dans la Proposition 11.

Proposition 11. *Soit w et $\mathbf{I}$ l'énergie et l'intensité acoustiques. La fermeture par réduction d'entropie consiste à prendre pour tenseur flux d'intensité celui associé à $f_{(w,I)}(\mathbf{v})$ qui s'exprime*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(w,\mathbf{I}) &= \langle c^2\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} f_{(w,\mathbf{I})}(\mathbf{v})\rangle \\ &= c^2 w\left[\frac{(1-\chi(r))}{2}\mathbf{Id} + \frac{(3\chi(r)-1)}{2}\frac{\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}}{I^2}\right],\end{aligned} \tag{6.24}$$

avec $\mathbf{Id}$ *la matrice identité et $\chi = \chi(r)$ le facteur d'Eddington défini en* (6.23).

Preuve. Reprenant l'expression de $f_{(w,I)}(\mathbf{v})$ en (6.7), le tenseur flux d'intensité associé est défini ainsi

$$\mathbf{P}(w,\mathbf{I}) = \langle (c\mathbf{v}\otimes c\mathbf{v}) w \frac{\exp(\kappa\frac{\mathbf{I}\cdot\mathbf{v}}{I})}{Z_\kappa}\rangle. \tag{6.25}$$

En passant en coordonnées sphériques (θ,ϕ) dans la base $(\mathbf{I}_\perp/I, \mathbf{I}'_\perp/I, \mathbf{I}/I)$, le tenseur $\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}$ prend dans cette base la forme suivante

$$\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta\cos^2\phi & \sin^2\theta\cos\phi\sin\phi & \sin\theta\cos\phi\cos\theta \\ \sin^2\theta\cos\phi\sin\phi & \sin^2\theta\sin^2\phi & \sin\theta\sin\phi\cos\theta \\ \sin\theta\cos\phi\cos\theta & \sin\theta\sin\phi\cos\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix}. \tag{6.26}$$

En remarquant que les termes extra diagonaux dans (6.26) conduisent à des termes nuls une fois intégrés par rapport à la variable ϕ, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(w,\mathbf{I}) = \frac{w}{Z_\kappa}c^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\exp(\kappa\cos\theta)\Bigg[\sin^2\theta\left(\cos^2\phi\frac{\mathbf{I}_\perp\otimes\mathbf{I}_\perp}{I^2} + \sin^2\phi\frac{\mathbf{I}'_\perp\otimes\mathbf{I}'_\perp}{I^2}\right) \\ + \cos^2\theta\frac{\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}}{I^2}\Bigg]\,d\theta\,d\phi.\end{aligned}$$

Intégrant en la variable ϕ et faisant le changement de variable $u = \cos\theta$, il vient ensuite

$$\mathbf{P}(w, \mathbf{I}) = \frac{w}{Z_\kappa} c^2 \pi \int_{-1}^{1} \exp(\kappa u) \left((1-u^2) \left(\frac{\mathbf{I}_\perp \otimes \mathbf{I}_\perp}{I^2} + \frac{\mathbf{I}'_\perp \otimes \mathbf{I}'_\perp}{b^2} \right) + (2u^2) \frac{\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}}{I^2} \right) du. \tag{6.27}$$

Nous calculons ensuite les coefficients apparaissant dans cette expression. Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} 2u^2 \exp(\kappa u) du &= 2 \left[u^2 \frac{\exp(\kappa u)}{\kappa} \right]_{-1}^{1} - 4 \int_{-1}^{1} u \frac{\exp(\kappa u)}{\kappa} du \\
&= \frac{4}{\kappa} \sinh\kappa - \frac{4}{\kappa} \left(\left[u \frac{\exp(\kappa u)}{\kappa} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{\exp(\kappa u)}{\kappa} du \right) \\
&= \frac{4}{\kappa} \sinh\kappa - \frac{4}{\kappa} \left(\frac{2\cosh\kappa}{\kappa} - \frac{2\sinh\kappa}{\kappa^2} \right) \\
&= \frac{4}{\kappa} \sinh\kappa \left(1 - \frac{2}{\kappa} \left(\coth\kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \right) \\
&= \left(\frac{4}{\kappa} \sinh\kappa \right) \chi(r).
\end{aligned} \tag{6.28}$$

où l'on a utilisé la définition de χ (6.23). De la même manière nous avons,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1-u^2) \exp(\kappa u) du &= \frac{2}{\kappa} \sinh\kappa - \frac{2}{\kappa} \sinh\kappa \left(1 - \frac{2}{\kappa} \left(\coth\kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \right) \\
&= \frac{4}{\kappa^2} \sinh\kappa \left(\coth(\kappa) - \frac{1}{\kappa} \right) \\
&= \left(\frac{4}{\kappa} \sinh\kappa \right) \left(\frac{1-\chi(r)}{2} \right).
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Ainsi l'expression (6.27) devient

$$\mathbf{P}(w, \mathbf{I}) = wc^2 \left(\frac{1-\chi(r)}{2} \right) \left(\frac{\mathbf{I}_\perp \otimes \mathbf{I}_\perp}{I^2} + \frac{\mathbf{I}'_\perp \otimes \mathbf{I}'_\perp}{I^2} + \chi(r) \frac{\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}}{I^2} \right). \tag{6.30}$$

où nous avons utilisé la relation (6.9) sous la forme

$$\left(\frac{4}{\kappa} \sinh\kappa \right) = \frac{Z_\kappa}{\pi}. \tag{6.31}$$

Enfin, utilisant l'identité suivante

$$\frac{\mathbf{I}_\perp \otimes \mathbf{I}_\perp}{I^2} + \frac{\mathbf{I}'_\perp \otimes \mathbf{I}'_\perp}{I^2} = \mathbf{Id} - \frac{\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}}{I^2}, \tag{6.32}$$

nous obtenons l'expression voulue. □

3.4 Calcul de la fermeture

Les développements précédents nous ont permis de calculer la fermeture du système macroscopique. Nous remarquons que de manière identique au Chapitre 3, cette fermeture repose sur le calcul de la quantité χ qui s'obtient au travers de la résolution de l'équation non linéaire (6.8). Nous avons ainsi à nouveau deux possibilités pour déterminer χ :

1. Résoudre l'équation (6.8) par une méthode de recherche de zéros,
2. Calculer directement χ par le biais d'une fonction connue.

Calcul de la fermeture par méthode de Newton

L'équation (6.8) ne peut être inversée analytiquement, il nous faudra dès lors utiliser une méthode de recherche de zéros. Nous donnons ici une preuve directe de l'existence et l'unicité de ce zéro. Ce résultat est donné en Proposition 12.

Proposition 12. *La fonction* $\coth(\kappa) - \frac{1}{\kappa}$ *est strictement croissante et strictement concave sur* $\mathbb{R}^{+*}$. *De plus, l'équation*

$$\coth(\kappa) - \frac{1}{\kappa} = r \tag{6.33}$$

admet une unique solution $\kappa^* \in \mathbb{R}^+$ *pour tout* $0 \leq r < 1$.

Preuve. Notons d'abord par $y(\kappa) = \coth(\kappa) - \frac{1}{\kappa}$. La fonction y est continue sur $\mathbb{R}^+/\{0\}$. Nous avons alors les propriétés suivantes

$$\lim_{\kappa \to 0} y(\kappa) = 0, \quad \lim_{\kappa \to +\infty} y(\kappa) = 1 \quad \text{et} \quad y'(\kappa) = \frac{1}{\kappa^2} - \frac{1}{\sinh^2 \kappa}. \tag{6.34}$$

Cela prouve l'existence d'au moins une solution κ^* à (6.33) pour tout $r \in [0, 1[$. L'unicité de κ^* provient de la stricte monotonie de y pour $\kappa > 0$. En effet, y est strictement croissante puisque nous avons pour tout $\kappa > 0$, $y'(\kappa) > 0$ puisque $\sinh \kappa > \kappa$. Cela inégalité découle de la stricte convexité de de la fonction sinh sur $\mathbb{R}^+$: $(\sinh \kappa - \sinh 0) \geqslant (\kappa - 0)$ pour tout $\kappa > 0$.

(Concavité) Nous avons pour tout $\kappa > 0$

$$y''(\kappa) = \frac{2}{\kappa^3} \left(\frac{\kappa^3 \cosh \kappa}{\sinh^3 \kappa} - 1 \right).$$

Or nous avons $y''(\kappa) < 0$ pour $\kappa > 0$ si et seulement si

$$\frac{\kappa^3 \cosh(\kappa)}{\sinh^3(\kappa)} < 1. \tag{6.35}$$

D'après la relation de trigonométrie suivante

$$\sinh(2\kappa) = 2\cosh(\kappa)\sinh(\kappa), \tag{6.36}$$

nous pouvons écrire

$$\frac{\kappa^3 \cosh(\kappa)}{\sinh^3(\kappa)} = \frac{\kappa^3 \sinh(2\kappa)}{2\sinh^4(\kappa)}. \tag{6.37}$$

Enfin, utilisant l'expression en produit infini du sinus hyperbolique [2]

$$\sinh(\kappa) = \kappa \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{\kappa^2}{k^2\pi^2}), \tag{6.38}$$

nous obtenons,

$$\frac{\kappa^3 \sinh(2\kappa)}{2\sinh^4(\kappa)} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{\infty}(1 + \frac{4\kappa^2}{k^2\pi^2})\right)}{\left(\prod_{k=1}^{\infty}(1 + \frac{\kappa^2}{k^2\pi^2})\right)^4} < 1. \tag{6.39}$$

car $\left(1 + \frac{\kappa^2}{k^2\pi^2}\right)^4 > (1 + \frac{4\kappa^2}{k^2\pi^2})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi nous avons $y''(\kappa) < 0$ pour tout $\kappa > 0$. □

Nous utilisons dans ce chapitre, la même méthode que celle présentée au Chapitre 3. La seule modification apportée est l'initialisation de b_0 que nous prendrons égale à $r/(1-r)$. Les limitations de l'algorithme restent similaires en tous points à celles identifiées dans le cas purement 2D. En effet, malgré une convergence assurée par la proposition 12, la convergence de l'algorithme est fortement freinée lorsque le facteur d'anisotropie $r \to 1$ (*i.e.* la dérivée tend vers 0).

Calcul de la fermeture par interpolation

Afin d'éviter le coût lié à la résolution numérique du problème non linéaire (6.8), nous proposons là aussi une interpolation de χ par fraction rationnelle. Nous obtenons,

$$\chi(r) \approx \frac{a_6 r^6 + a_4 r^4 + a_2 r^2 + a_0}{r^4 + b_2 r^2 + b_0} \tag{6.40}$$

avec,

$$\begin{aligned} &a_0 = 0.762066949972264, \quad a_2 = 0.219172080193380, \quad a_4 = -0.259725400168378 \\ &a_6 = 0.457105130221120, \quad b_0 = 2.28620084991677, \quad b_2 = -2.10758208969840. \end{aligned}$$

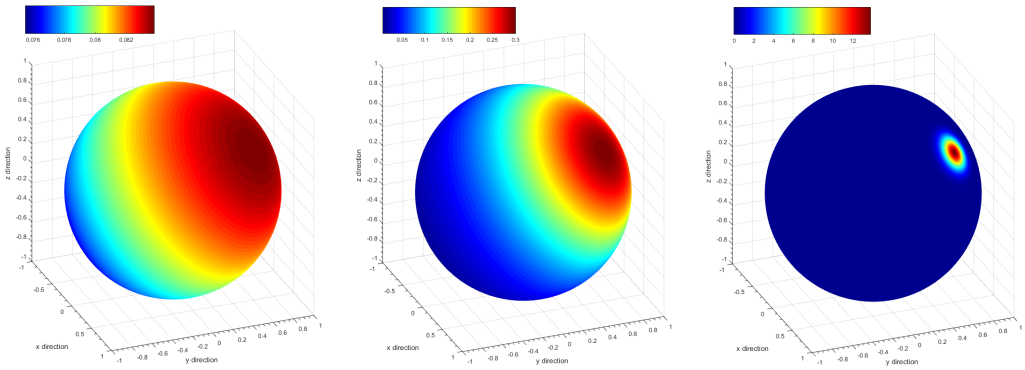
Nous avons calculé l'erreur entre la valeur de χ obtenue par méthode de Newton (tolérance de la méthode de Newton à 10^{-14}) et celle obtenue par interpolation pour 10^4 points dans l'intervalle $[0, 1[$. L'erreur engendrée sur le calcul de χ est inférieure à 10^{-6} sur l'ensemble des points de calcul.

Reconstruction de la fonction de distribution

Dans cette section nous nous proposons d'illustrer graphiquement la fonction de distribution $f_{(w,\mathbf{I})}$ obtenue par minimisation entropique. Pour ce faire, nous fixons un couple de moments réalisables tel que

$$w = r \quad \text{et} \quad \mathbf{I} = [1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]^T. \tag{6.41}$$

Le tracé de $f_{(w,\mathbf{I})}$ est alors effectué sur la sphère unité $\mathbb{S}^2$ pour plusieurs valeurs du facteur d'anisotropie $r = \{0.01, 0,33, 0,98\}$. La figure 6.1 illustre très clairement le caractère diffus de la fonction de densité $f_{(w,\mathbf{I})}$ pour les faibles valeurs de r et son aspect très piqué dans la direction de $\mathbf{I}$ lorsque r se rapproche de 1.



(a) $r = 0.1$ **(b)** $r = 0.33$ **(c)** $r = 0.98$

Figure 6.1: Représentation de la fonction de distribution à l'équilibre $f_{(w,\mathbf{I})}$ sur la sphère unité en fonction de différentes valeurs de r.

4 Résolution numérique

Nous rappelons ci-dessous (6.4) le modèle que nous allons chercher à résoudre numériquement :

$$\begin{cases} \partial_t w(\mathbf{x},t) & + & \nabla \cdot \mathbf{I}(\mathbf{x},t) & = & w^s(\mathbf{x},t), \\ \partial_t \mathbf{I}(\mathbf{x},t) & + & \nabla \cdot \mathbf{P}(w(\mathbf{x},t), \mathbf{I}(\mathbf{x},t)) & = & \mathbf{I}^s(\mathbf{x},t), \\ & & w(\mathbf{x},0) & = & w_0, \\ & & \mathbf{I}(\mathbf{x},0) & = & \mathbf{I}_0, \\ + \text{ CL.} & & & & \end{cases} \tag{6.42}$$

où $\mathbf{P}$ désigne le tenseur flux d'intensité

$$\mathbf{P}(w,\mathbf{I}) = c^2 w \left[\frac{(1-\chi(r))}{2}\mathbf{Id} + \frac{(3\chi(r)-1)}{2}\frac{\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}}{I^2} \right]. \tag{6.43}$$

avec $\chi(r) = 1-2r/\kappa$ avec $r = |\mathbf{I}|/(cw)$ et où κ désigne la solution de l'équation (6.8). Les termes w^s et $\mathbf{I}^s$ représentent ici les termes sources.

4.1 Discrétisation en temps et en espace

Nous discrétisons ce système hyperbolique par la méthode RK-DG introduite au Chapitre 5. En utilisant la notation introduite au Chapitre (5) nous pouvons réécrire le système sous la forme condensée suivante,

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \partial_i \mathbf{F}^i(\mathbf{W}) = \mathbf{S} \\ + \text{CL}. \end{cases} \tag{6.44}$$

avec $\mathbf{W} = (w,\mathbf{I})^T$ le vecteur inconnu, $\mathbf{F}(\mathbf{W}) = (\mathbf{I},\mathbf{P}(w,\mathbf{I}))^T$ le flux physique et enfin $\mathbf{S} = (w^s,\mathbf{I}^s)^T$ le terme source.

Pour l'approximation spatiale, nous utilisons donc le schéma de Galerkin discontinu. Le flux numérique aux interfaces entre les cellules est donné par le flux de Rusanov (3.80) ou le flux cinétique (3.81) introduit au chapitre 3 pour le modèle M_1.

Les conditions aux limites sont traitées de la même manière que dans le cas 2D, à savoir par flux cinétique au bord. Nous renvoyons au paragraphe 4.4.

Pour l'approximation temporelle, nous utilisons à nouveau le schéma RK2.

Comme pour le modèle S_N, le modèle a été implémenté dans la librairie `schnaps`.

4.2 Ordre élevé et sortie du domaine de réalisabilité physique

Utilisant une méthode d'ordre élevée, les solutions numériques sont susceptibles de sortir du domaine de réalisabilité physique $\mathcal{M}$ défini en (3.14). En effet, du fait de la dispersion numérique, les solutions peuvent osciller et les conditions $w \geqslant 0$ et $|\mathbf{I}|/(cw) \leqslant 1$ ne sont plus nécessairement garanties. Le cas échéant, le facteur d'Eddington et donc le modèle M_1 ne sont plus définis.

Afin de traiter cette difficulté, nous adoptons la démarche suivante. Sur toute cellule L du maillage DG, s'il existe un nœud $\mathbf{x}_{L,j}$ en lequel $\mathbf{W}_{L,j} = (w_{L,j},\mathbf{I}_{L,j})$ ne satisfait pas les contraintes de réalisabilité physique, alors sur toute la cellule la densité d'énergie acoustique $w_{L,j}$ est remplacée par sa moyenne

$$w_{L,j} = \frac{1}{|L|}\sum_{i=0}^{N_d-1} \omega_{L,i}\, w_{L,i}, \quad \forall j = 0,\dots,N_d-1.$$

Ainsi la densité d'énergie acoustique est approchée par sa projection constante sur la cellule. La méthode redevient localement une méthode de type Volumes Finis.

4.3 Validations

D'une manière similaire au chapitre 3, nous considérons le problème en une dimension d'espace ayant une solution de la forme : $w(\mathbf{x}, t) = w(x, t)$ et $\mathbf{I}(\mathbf{x}, t) = (I(x, t), 0, 0)$. Cette solution ne possède aucune dépendance vis à vis des variables (y, z) et le vecteur intensité $\mathbf{I}$ a une composante nulle suivant y et z. Le système (6.42)-(6.43) s'écrit alors

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x I = 0, \\ \partial_t I + \partial_x (w\chi(r)) = 0, \end{cases} \tag{6.45}$$

avec $r = |I|/(cw)$. La fonction $\chi(r)$ est cette fois donnée par (6.23). Comme $\chi(r) = \chi(-r)$, nous considérerons que $r = I/(cw)$.

Le problème de Riemann consiste à nouveau à considérer la donnée initiale suivante :

$$(w(x), I(x)) = \begin{cases} (w_L, I_L), & \text{si } x < 0, \\ (w_R, I_R), & \text{si } x > 0, \end{cases} \tag{6.46}$$

avec (w_L, I_L) et (w_R, I_R) satisfaisant les conditions de réalisibilité physique.

Contrairement au système (3.85) considéré au chapitre 3, la fonction $\chi(r)$ et donc le système (6.45) sont identiques à ceux étudiés dans le travail [17]. En particulier, toutes les propriétés énoncées au chapitre 3 concernant la construction des courbes de détentes, de chocs et de la solution du problème de Riemann ont été rigoureusement établies dans cet article. Dans les cas-tests de validation qui suivent, les erreurs ont donc été calculées en utilisant les solutions exactes du problème de Riemann.

Nous considérons les deux problèmes de Riemann suivants pour lesquels les solutions donnent lieu aux développements deux ondes de chocs ou de deux ondes de détentes :

Problème de Riemann 1 (détente / détente)

$$(w_L, I_L) = (0.7, -0.2), \quad (w_R, I_R) = (0.8, 0.3).$$

Problème de Riemann 2 (choc / choc)

$$(w_L, I_L) = (0.7, 0.4), \quad (w_R, I_R) = (0.8, 0.3).$$

Les erreurs obtenues pour différentes tailles de maillage et différents ordres d'approximation sont données dans les tableaux 6.1, 6.2 et 6.3. Sur la Figure 6.2, nous affichons la solution au temps $t = 1$ pour les deux problèmes de Riemann avec un

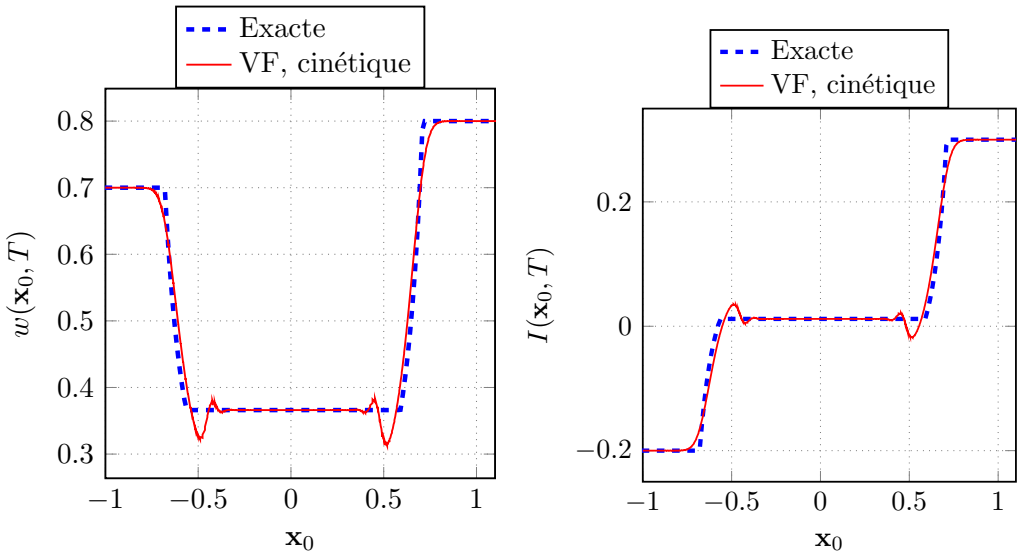
flux de Lax. Nous observons des oscillations autour des chocs et des détentes qui sont propres aux méthodes d'ordre élevé. Le limiteur de pente actuellement employé ne permet pas la suppression de ces oscillations mais assure uniquement la re-projection des inconnues (dans certaines cellules) dans l'ensemble de réalisabilité. Nous observons dans tous les cas la convergence de l'erreur absolue en norme L^2 et les ordres de convergence obtenus (voir Figure 6.3) sont cohérents avec la théorie en présence de discontinuités. Pour le cas test avec les ondes de détentes (Pb. de Riemann 2), l'erreur est similaire quel que soit le flux utilisé. Pour le cas test avec ondes de chocs, nous observons que le flux cinétique est légèrement plus précis que le flux de Rusanov. Cela s'explique par sa diffusivité plus faible.

	Problème de Riemann 1		Problème de Riemann 2	
h	Lax	Cinétique	Lax	Cinétique
$3.125 \cdot 10^{-3}$	$9.058 \cdot 10^{-2}$	$8.362 \cdot 10^{-2}$	$2.459 \cdot 10^{-2}$	$2.287 \cdot 10^{-2}$
$1.563 \cdot 10^{-3}$	$6.148 \cdot 10^{-2}$	$5.692 \cdot 10^{-2}$	$2.201 \cdot 10^{-2}$	$2.092 \cdot 10^{-2}$
$7.810 \cdot 10^{-4}$	$3.891 \cdot 10^{-2}$	$3.617 \cdot 10^{-2}$	$1.732 \cdot 10^{-2}$	$1.511 \cdot 10^{-2}$
$3.910 \cdot 10^{-4}$	$2.374 \cdot 10^{-2}$	$2.229 \cdot 10^{-2}$	$1.411 \cdot 10^{-2}$	$1.110 \cdot 10^{-2}$

Table 6.1: Erreur absolue en norme L^2 entre la solution exacte et la solution approchée RK-DG $\mathbb{P}^1$ au temps $t = 1$ pour les flux de Lax et cinétique. Paramètres de calculs : CFL = 0.8, nombre vitesses employées dans la méthode de quadrature du flux cinétique : 25.

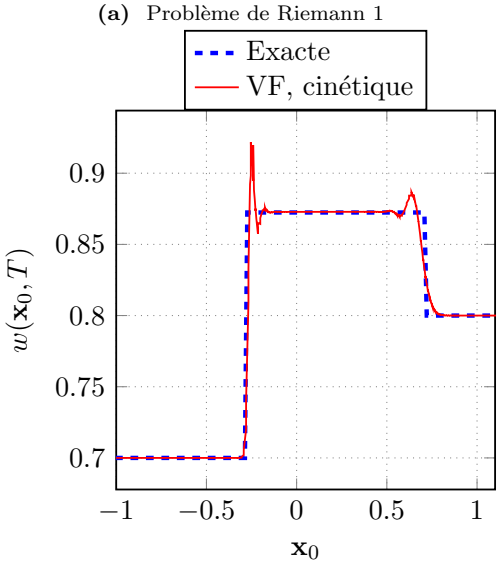
	Problème de Riemann 1		Problème de Riemann 2	
h	Lax	Cinétique	Lax	Cinétique
$2.083 \cdot 10^{-3}$	$3.452 \cdot 10^{-2}$	$2.836 \cdot 10^{-2}$	$2.818 \cdot 10^{-2}$	$2.604 \cdot 10^{-2}$
$1.042 \cdot 10^{-3}$	$1.849 \cdot 10^{-2}$	$1.544 \cdot 10^{-2}$	$1.662 \cdot 10^{-2}$	$1.387 \cdot 10^{-2}$
$5.210 \cdot 10^{-4}$	$1.067 \cdot 10^{-2}$	$9.273 \cdot 10^{-3}$	$1.160 \cdot 10^{-2}$	$9.059 \cdot 10^{-3}$
$2.600 \cdot 10^{-4}$	$5.668 \cdot 10^{-3}$	$4.879 \cdot 10^{-3}$	$7.840 \cdot 10^{-3}$	$5.634 \cdot 10^{-3}$

Table 6.2: Erreur absolue en norme L^2 entre la solution exacte et la solution approchée RK-DG $\mathbb{P}^2$ au temps $t = 1$ pour les flux de Lax et cinétique. Paramètres de calculs : CFL = 0.8, nombre vitesses employées dans la méthode de quadrature du flux cinétique : 25.

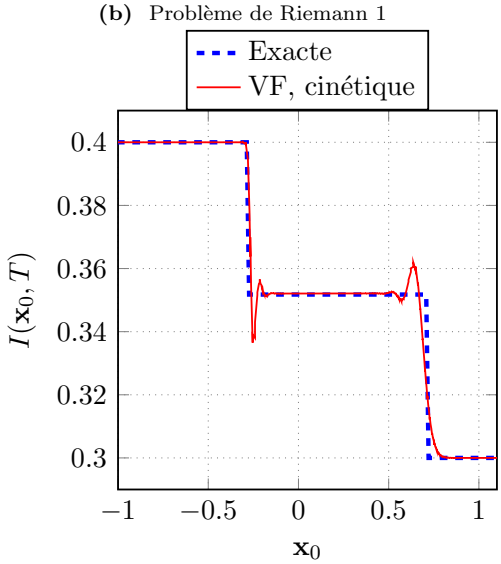


(a) Problème de Riemann 1

(b) Problème de Riemann 1

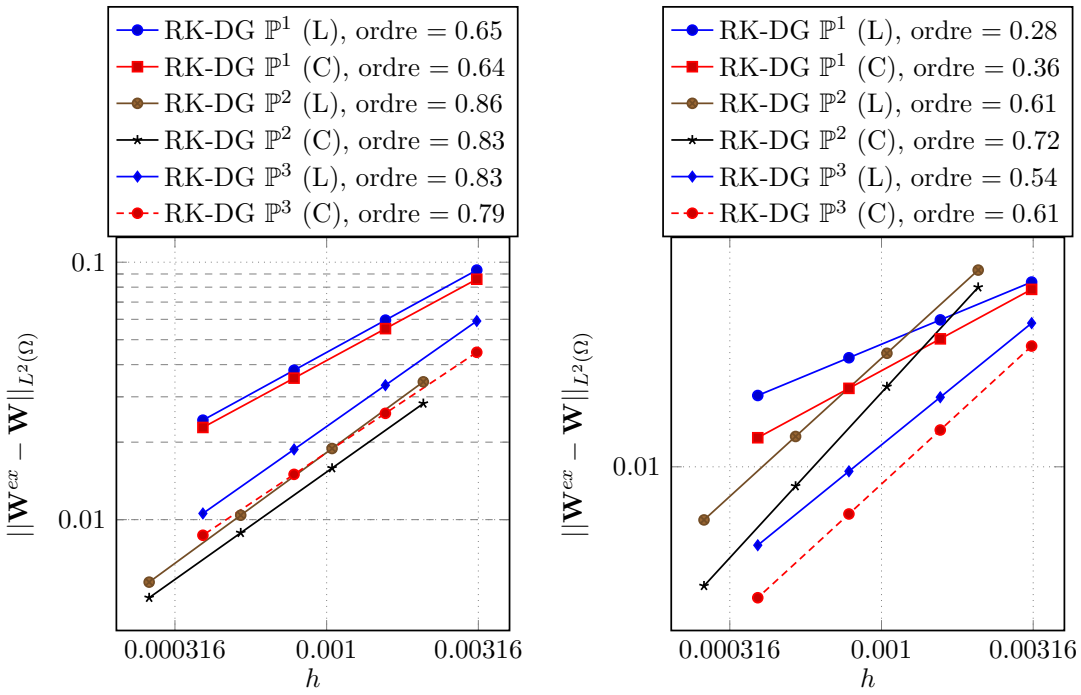


(c) Problème de Riemann 2



(d) Problème de Riemann 2

Figure 6.2: Solutions des problèmes de Riemann 1 et 2 au temps $t = 1$ en utilisant le flux de Lax. Paramètres de calcul : $N_x = 200$, $d = 1$ et CFL $= 0.8$.



(a) Problème de Riemann 1 : détente/détente

(b) Problème de Riemann 2 : choc/choc

Figure 6.3: Tracés log log de l'erreur en normes L^2 entre la solution exacte et la solution approchée RK-DG au temps $t = 1$ en fonction du pas d'espace h, de l'ordre polynomial d. Comparaison entre un flux numérique de Lax (L) et un flux numérique cinétique (C). Paramètres de calculs : CFL= 0.8, nombre vitesses employées dans la méthode de quadrature du flux cinétique : 25.

	Problème de Riemann 1		Problème de Riemann 2	
h	Lax	Cinétique	Lax	Cinétique
$3.125 \cdot 10^{-3}$	$5.869 \cdot 10^{-2}$	$4.455 \cdot 10^{-2}$	$2.470 \cdot 10^{-2}$	$2.267 \cdot 10^{-2}$
$1.562 \cdot 10^{-3}$	$3.293 \cdot 10^{-2}$	$2.550 \cdot 10^{-2}$	$1.041 \cdot 10^{-2}$	$8.414 \cdot 10^{-3}$
$7.810 \cdot 10^{-4}$	$1.954 \cdot 10^{-2}$	$1.559 \cdot 10^{-2}$	$1.062 \cdot 10^{-2}$	$8.606 \cdot 10^{-3}$
$3.910 \cdot 10^{-4}$	$1.032 \cdot 10^{-2}$	$8.520 \cdot 10^{-3}$	$7.070 \cdot 10^{-3}$	$5.494 \cdot 10^{-3}$

Table 6.3: Erreur absolue en norme L^2 entre la solution exacte et la solution approchée RK-DG $\mathbb{P}^3$ au temps $t = 1$ pour les flux de Lax et cinétique. Paramètres de calculs : CFL $= 0.8$, nombre vitesses employées dans la méthode de quadrature du flux cinétique : 25.

Chapitre 7

Applications acoustiques

Contenu

1 Introduction 134

2 Échogrammes 134

2.1 Problème 134

2.2 Résultats numériques en dimensions deux 135

3 Décroissance de l'énergie totale et temps de réverbération 144

3.1 Problème 144

3.2 Résultats numériques en dimensions deux 144

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous cherchons à appliquer nos modèles sur différents cas tests acoustiques. Ces applications nous permettront de mettre en lumière leurs la capacité des modèles ainsi que leurs limites à restituer les comportements propres à l'acoustique des salles.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'échogramme d'une salle (voir Chapitre 1, paragraphe 5.1). Ce cas test étudie la variation (au cours du temps) de l'énergie acoustique locale (dans une volume récepteur) après avoir émis une impulsion sonore. Pour les modèles continus (M_1, S_N), cette impulsion est caractérisée par la mise en place d'une condition initiale non nulle pour la densité d'énergie w. Dans un second temps, nous chercherons à étudier certaines propriétés obtenues en présence d'un régime stationnaire de l'énergie totale $\mathcal{E}$. En l'absence d'absorption atmosphérique, ce régime est caractérisé par une énergie totale constante au cours du temps. Il s'établit lorsque l'énergie émise par la source $\mathcal{E}_s$ est totalement compensée par la somme de l'énergie $\mathcal{E}_a$ absorbée aux parois et de celle liée au champ diffus $\mathcal{E}_d$:

$$\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_a + \mathcal{E}_d. \tag{7.1}$$

Une fois cet état atteint, nous couperons la source à $t = T_s$ et étudierons la vitesse de décroissance de $\mathcal{E}$. Cette vitesse de décroissance nous permettra de remonter aux temps caractéristiques T_{30dB} (1.67) des salles considérées.

Enfin, à l'état stationnaire et cette fois-ci sans couper la source, nous étudierons les variations en espace de la densité d'énergie w. Nous comparerons nos résultats avec les relations (1.69) et (1.69) qui caractérisent la décroissance de w en fonction de la distance à la source et du coefficient d'absorption α.

De manière complémentaire, nous chercherons également à voir comment se comportent nos modèles en présence d'anisotropie géométrique. Nous traduirons cette anisotropie par l'allongement d'une salle selon une direction d'espace. Cet allongement impose une modification intrinsèque du libre parcours moyen des particules et impacte de ce fait les propriétés acoustiques de la salle.

2 Échogrammes

2.1 Problème

Afin de modéliser l'échogramme d'une salle en dimension $d = 2$ ou 3, nous considérons le problème de transport suivant

$$\begin{cases} \partial_t f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + c\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = 0, & \forall(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\in\Omega\times\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}^+, \\ f(\mathbf{x},\mathbf{v},0) = \dfrac{\mathbb{1}_{B(\mathbf{x}_s,r)}}{|B(\mathbf{x}_s,r)|}, & \forall(\mathbf{x},\mathbf{v})\in\Omega\times\mathbb{S}^{d-1}, \end{cases} \tag{7.2}$$

où l'ensemble $B(\mathbf{x}_s, r) = \{\mathbf{x} \in \Omega \text{ tq. } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s| \leq r\}$ désigne un disque ou une sphère pleine de centre $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^d$, de rayon $r > 0$ et de volume $|B(\mathbf{x}_s, r)|$. L'étalement spatial r de la condition initiale est justifié du fait des limitations liées à la finesse de maillage h qui nous empêche de modéliser un vrai delta de Dirac (vraie impulsion). Nous remarquerons également que le fait d'avoir un terme constant pour tout $\mathbf{v}$ dans $\mathbb{S}^{d-1}$ traduit le caractère isotrope de l'impulsion. Aux équations précédentes, nous ajoutons la condition de rebond mixte au bord définie en (1.56) telle que

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = (1-\alpha)\beta f^s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + (1-\alpha)(1-\beta) f^d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \mathbf{v} \in \mathbb{S}^-(\mathbf{x}), t \in \mathbb{R}^+. \tag{7.3}$$

avec α, β les coefficients d'absorption et d'accommodation. Dans ce cas test, nous nous intéresserons à l'évolution de la densité d'énergie w_R dans un volume récepteur $R = B(\mathbf{x}_r, r')$ (avec $\mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^d$ et $r' > 0$ donnés) définie telle que

$$w_R(t) = \int_\Omega \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \frac{\mathbb{1}_{B(\mathbf{x}_r, r')}}{|B(\mathbf{x}_r, r')|} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad \forall t > 0. \tag{7.4}$$

2.2 Résultats numériques en dimensions deux

Variation du coefficient d'accommodation β

Nous considérons tout d'abord une salle carrée non absorbante, $\alpha = 0$, et fixons les paramètres géométriques à $\Omega = [0, 1]^2$, $\mathbf{x}_s = [0.5, 0.5]$ $r = 0.025$, $\mathbf{x}_r = [0.8, 0.5]$ et $r' = 0.025$. La Figure 7.1b (resp. 7.1d) donne l'évolution en de la densité d'énergie w_R en volume récepteur pour le cas purement diffus $\beta = 0$ (resp. purement spéculaire $\beta = 1$). Dans les deux cas ($\beta = 0, 1$), la différence de niveaux observée sur w_R, qui par ailleurs apparaît déjà sur le champ direct à $t = 0.3$ (voir 7.1a et 7.1c), traduit clairement et sans surprise, la forte diffusivité numérique du schéma VF employé lors de la résolution des modèles M_1 et S_N.

En effectuant un zoom sur l'intervalle de temps $[0, 2]$ pour les figures 7.1a et 7.1c, nous constatons un certain décalage temporel au niveau des premières réflexions mesurées avec le modèle M_1. Ce déphasage s'explique dans ce modèle, par le fait que la vitesse des ondes $\lambda = c$ est uniquement atteinte lorsque la fonction de distribution f est très piquée en vitesse *ie.* lorsque le facteur d'anisotropie $r = |\mathbf{I}|/(cw)$ est proche de 1. La perturbation isotrope (en vitesse) appliquée à $t = 0$, impose sur les premiers instants, de très forts gradients au niveau la densité d'énergie w. Ces gradients vont, par calculs des flux, donner une composante non nulle à l'intensité et former des rapports $|\mathbf{I}|/(cw)$ proches de 1, expliquant de ce fait, le bon temps de passage du champ direct. Les réflexions suivantes sont quant à elles liés au retour des ondes réfléchies aux parois. À la paroi, le mélange local opérant entre les ondes incidentes et réfléchies, fait baisser le rapport $|\mathbf{I}|/(cw)$ et explique l'arrivée plus tardive de ces derniers. À l'inverse, dans le modèle S_N, l'information voyage toujours à vitesse

constante c. Pour une salle carrée, et dans le cas spéculaire comme diffus, le modèle S_N semble ainsi meilleur accord avec les données issues du ray-tracing.

Regardons à présent ce qui se passe lorsque nous effectuons le même cas test dans une salle rectangulaire (anisotropie géométrique). Nous fixons pour cela les paramètres géométriques à $\Omega = [0, 5] \times [0, 1]$, $\mathbf{x}_s = [0.5, 0.5]$ $r = 0.025$, $\mathbf{x}_r = [4, 0.5]$ et $r' = 0.025$. Dans cette configuration, les échogrammes sont données en Figure 7.2. Nous constatons clairement l'impact de la diffusivité numérique du schéma VF employé. En effet, dans cette configuration le champ direct doit maintenant parcourir une distance $D = 3.5$ avant d'atteindre le récepteur, rendant le "pic" beaucoup plus étalé.

Les Figures 7.2b et 7.2d montrent l'impossibilité de restituer l'écho-gramme d'une salle en utilisant le modèle M_1. Dans les cas diffus comme spéculaire, le modèle M_1 présente des pics de densité qui ne sont absolument pas synchronisés (ni de même valeur) avec ceux obtenus par ray-tracing. À notre surprise, nous constatons pour le modèle M_1 possède une très faible influence vis-à-vis du coefficient β. En effet même dans le cas purement diffus $\beta = 0$, le mélange aux parois ne parvient pas à atténuer les oscillations de densité constatées dans le cas spéculaire.

La Figure 7.2d illustre également les limitations du modèle S_N à la restitution de l'échogramme d'une salle. Dans le cas spéculaire illustré par cette figure, nous constatons une nette différence entre les réflexions produits par le modèle S_N et celles obtenues par ray-tracing. Ce déphasage peut s'expliquer dans le cas de ce modèle par l'utilisation d'une discrétisation finie en vitesse. Pour illustrer ce qui se passe, considérons le fait qu'à $t > 0$ chaque vitesse $\mathbf{v}_k$ transporte à la vitesse c, une fraction f_k de la densité d'énergie initiale. Lors des premiers instants et avant toute collision, les quantités f_k s'éloignant de la source restent relativement proches et la reconstruction de la densité w s'apparente alors à une couronne d'épaisseur $\approx 2r$ et de rayon ct qui ne cessera de croître au fil du temps. Si le trajet des f_k devient trop important avant collision, les quantités f_k, de diamètre $2r$, ne vont plus se superposer et du vide apparaîtra sur la couronne formant w. Même si la diffusion numérique du schéma favorise l'étalement des f_k en espace, il est tout à fait possible qu'un récepteur ne détecte aucun signal pour la vitesse correspondante.

Outre cette impossibilité de restituer l'échogramme "parfait" d'une salle, nous constatons en revanche, que pour des temps suffisamment longs $t \geq 20$ et en l'absence d'absorption, les trois modèles semblent converger vers le même état de densité constante $w_R = 1$ ($w_R = 0.20$ dans le cas d'une salle rectangulaire). Cet état de densité constante, aussi appelée régime diffusif, traduit la répartition uniforme de l'énergie sur le domaine Ω. La vitesse d'établissement de ce régime est naturellement influencée par le paramètre d'accommodation β qui force la création de mélange aux parois (voir Figures 7.1b et 7.2b). Par ailleurs, notons intuitivement, la diffusion numérique du schéma va également accélérer le processus d'établissement de ce régime dans la salle. Dans les cas purement spéculaires, le mélange se produit plus

lentement justifiant ainsi les temps plus longs d'obtention du régime diffusif. Nous remarquerons toutefois en Figure 7.1b, que le modèle M_1 prend beaucoup plus de temps à atteindre le régime diffusif. Il semblerait en effet que ce dernier entretienne des ondes nécessitant des temps longs d'amortissement. Ce phénomène d'oscillation est par ailleurs, encore plus marqué lorsque nous passons sur une géométrie rectangulaire comme on peut le voir Figure 7.2b. Des simulations (non présentées ici) ont également été effectuées pour des valeurs intermédiaires du coefficient β. Ces dernières confirment les comportements observés.

Variation du coefficient d'absorption α

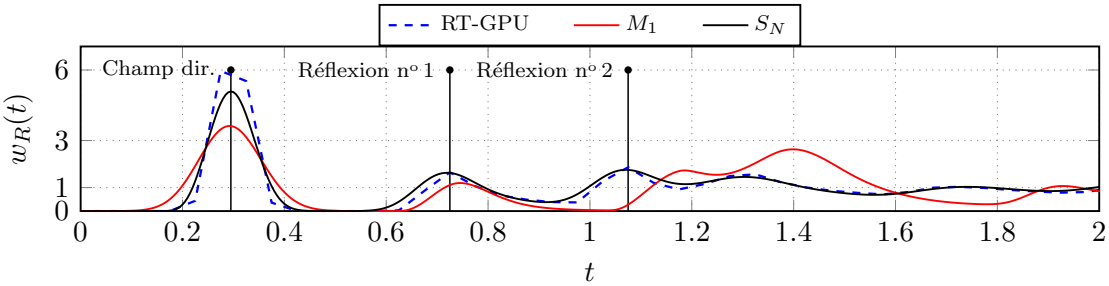
Nous nous intéressons à présent à l'impact du coefficient d'absorption α sur l'échogramme. Nous nous placerons à nouveau dans les deux configurations géométriques (carré/rectangle) employées précédemment. Nous remarquons que, pour les deux géométries employées (Figures 7.3 et 7.4), la variation du coefficient α n'améliore en rien les déphasages présents sur les différents échogrammes. Il est par ailleurs normal de ne pas sentir les effets de l'absorption sur les premières réflexions puisque cette dernière demande un certain nombre de collisions. Son influence se ressent surtout dans le régime diffusif, où elle va conditionner la décroissance progressive de la densité d'énergie. Comme dans le cas non absorbant, si nous nous plaçons sur des temps suffisamment longs, les trois modèles semblent avoir le même comportement de décroissance.

Influence de la discrétisation angulaire

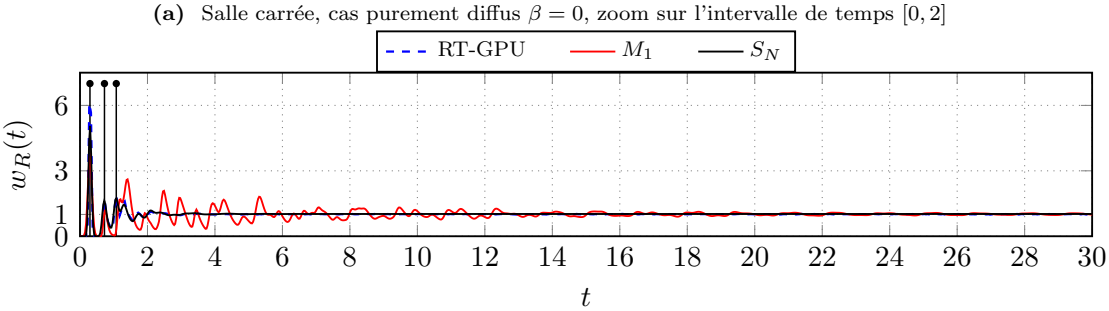
Nous nous intéressons à présent à l'influence du nombre de vitesses employées dans le modèle aux ordonnées discrètes S_N. La Figure 7.5 présente les échogrammes obtenus pour $\beta = 1$ et $\beta = 0.5$, dans une salle rectangulaire $\Omega = [0, 5] \times [0, 1]$ absorbante de coefficient $\alpha = 0.1$. Dans le cas purement spéculaire $\beta = 1$ (Figure 7.5a) nous remarquons qu'une discrétisation angulaire élevée permet d'atténuer les oscillations présentes sur w_R. L'augmentation du nombre de vitesses permet d'accentuer le mélange et d'atteindre plus rapidement le régime diffus. Dans le cas $\beta = 0.5$ (Figure 7.5b) le mélange aux parois est plus important du fait de la redistribution au bord de l'énergie suivant $N/2$ vitesses. Nous voyons clairement que la discrétisation angulaire possède un plus faible impact sur la rapidité d'obtention du régime diffus. Ce résultat est intéressant, puisqu'en présence de diffusion aux parois, nous pouvons alors chercher à diminuer le nombre de vitesses dans la discrétisation angulaire et ainsi gagner en temps de calculs.

Au regard des résultats obtenus, les modèles M_1 et S_N ne semblent donc pas adaptés à l'étude de l'échogramme d'une salle. Les déphasages présents ne permettent pas de retrouver les temps de passages liés aux diverses réflexions dans une

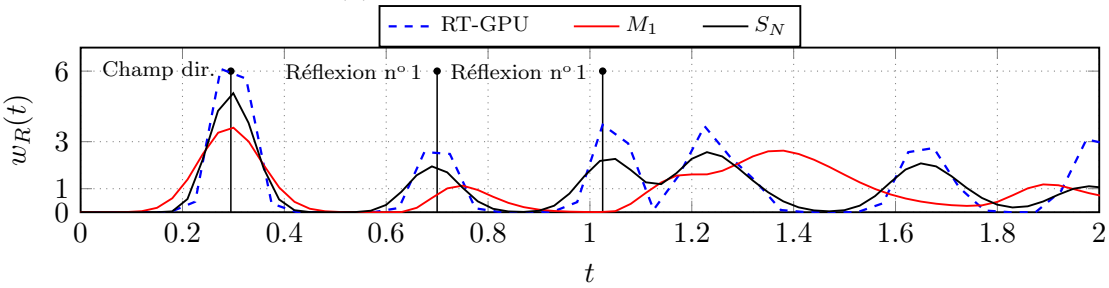
pièce. Malgré cette limitation ils semblent toutefois adaptés à l'étude de problèmes acoustique prenant place en régime diffusif pour lesquels nous dédions les deux sections suivantes.



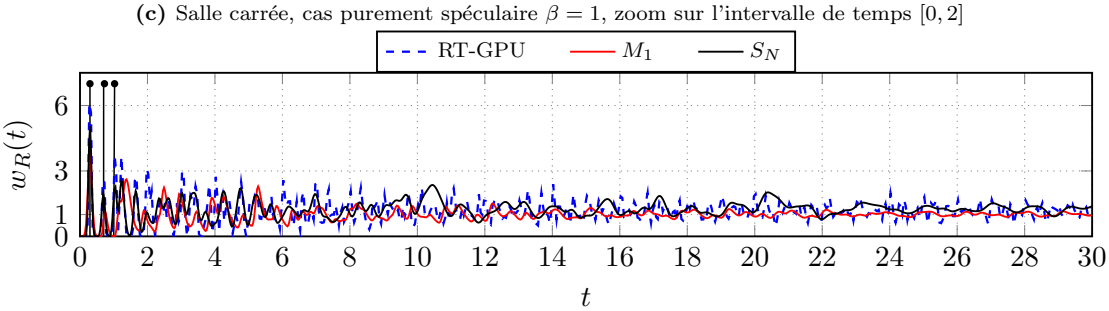
(a) Salle carrée, cas purement diffus $\beta = 0$, zoom sur l'intervalle de temps $[0, 2]$



(b) Salle carrée, cas purement diffus $\beta = 0$

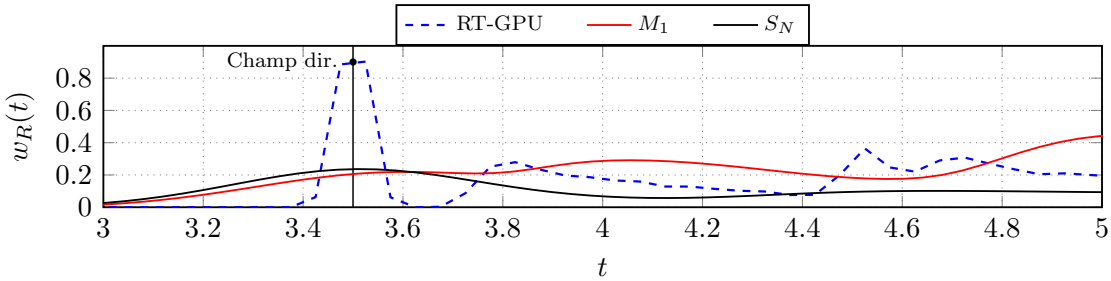


(c) Salle carrée, cas purement spéculaire $\beta = 1$, zoom sur l'intervalle de temps $[0, 2]$

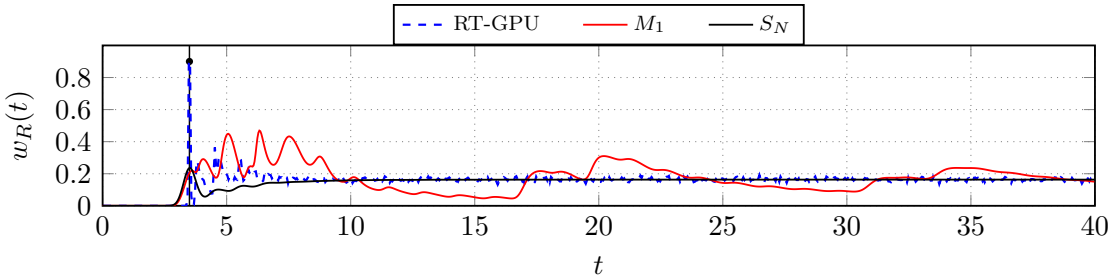


(d) Salle carrée, cas purement spéculaire $\beta = 1$

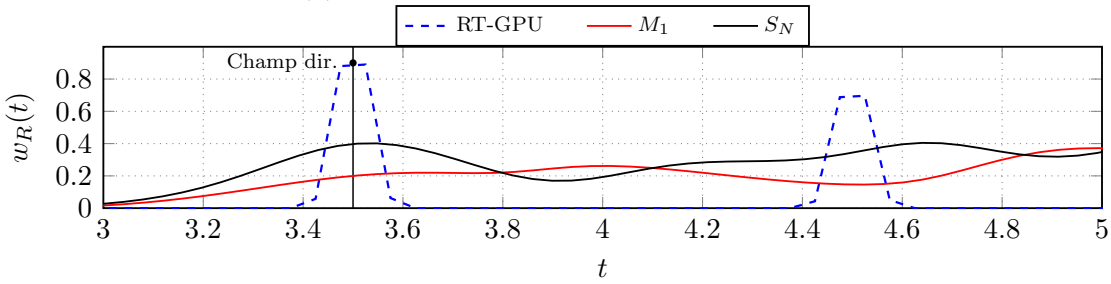
Figure 7.1: Variation du coefficient d'accommodation β. Échogramme pour une salle carrée $[0, 1]^2$ non absorbante $\alpha = 0$. Évolution au cours du temps de la densité w_R dans le volume récepteur R. Comparaison entre les modèles M_1, S_N et de ray-tracing GPU à vitesse du son $c = 1$. Nous considérons une source isotrope de type disque de rayon $r = 0.05$ et centrée au point $\mathbf{x}_s = [0.5, 0.5]$. Le volume récepteur est un disque de rayon $r = 0.025$ centré sur le point $\mathbf{x}_r = [0.8, 0.5]$. Durée de la simulation $T = 30$. Paramètres pour les modèles M_1 et S_N ($N = 64$ vitesses uniformes), $h = 0.002$, $CFL = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$. Paramètre RT-GPU $N_p = 10^7$ particules.



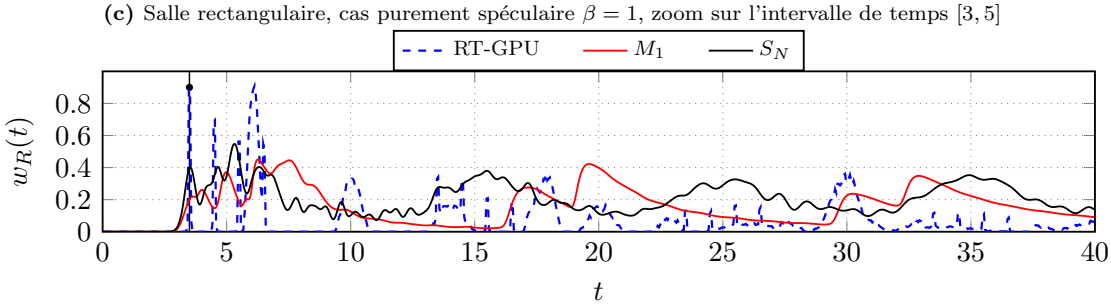
(a) Salle rectangulaire, cas purement diffus $\beta = 0$, zoom sur l'intervalle de temps $[3, 5]$



(b) Salle rectangulaire, cas purement diffus $\beta = 0$

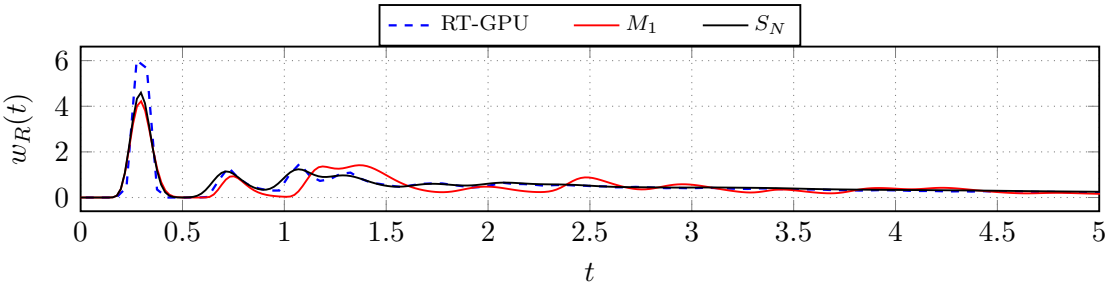


(c) Salle rectangulaire, cas purement spéculaire $\beta = 1$, zoom sur l'intervalle de temps $[3, 5]$

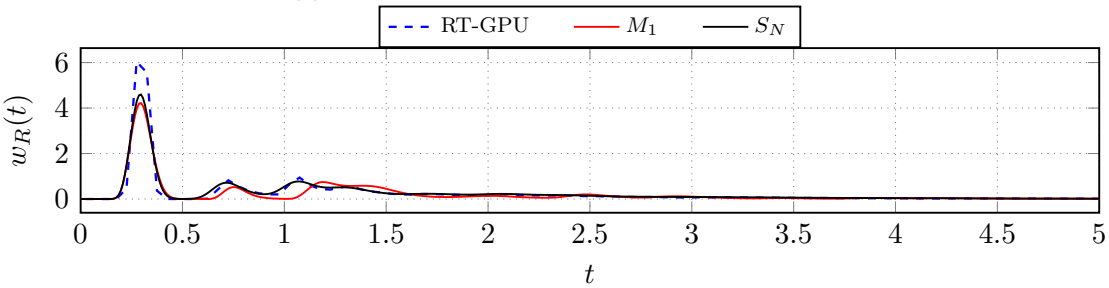


(d) Salle rectangulaire, cas purement spéculaire $\beta = 1$

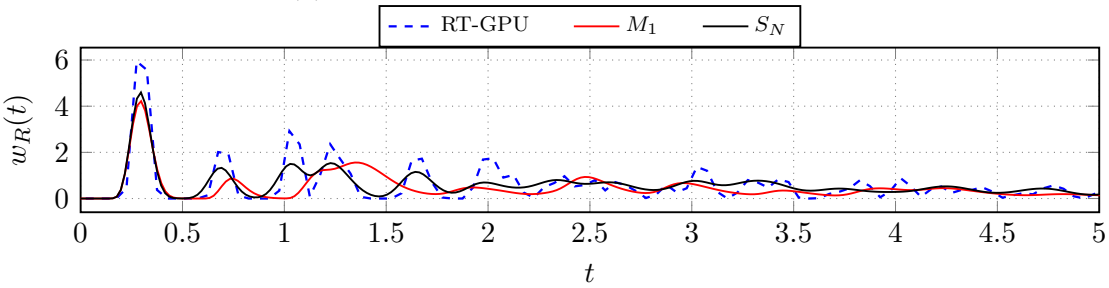
Figure 7.2: Variation du coefficient d'accommodation β. Échogramme pour une salle rectangulaire $[0, 5] \times [0, 1]$ non absorbante $\alpha = 0$. Évolution au cours du temps de la densité w_R dans le volume récepteur R. Comparaison entre les modèles M_1, S_N et de ray-tracing GPU à vitesse du son $c = 1$. Nous considérons une source isotrope de type disque de rayon $r = 0.05$ et centrée au point $\mathbf{x}_s = [0.5, 0.5]$. Le volume récepteur est un disque de rayon $r = 0.025$ centré sur le point $\mathbf{x}_r = [4, 0.5]$. Durée de la simulation $T = 30$. Paramètres pour les modèles M_1 et S_N ($N = 64$ vitesses uniformes), $h = 0.002$, $CFL = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$. Paramètre RT-GPU $N_p = 10^7$ particules.



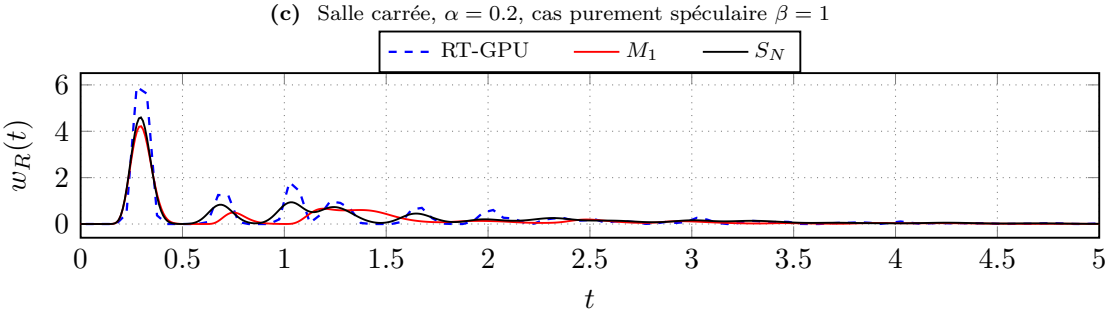
(a) Salle carrée, $\alpha = 0.2$, cas purement diffus $\beta = 0$



(b) Salle carrée, $\alpha = 0.5$, cas purement diffus $\beta = 0$

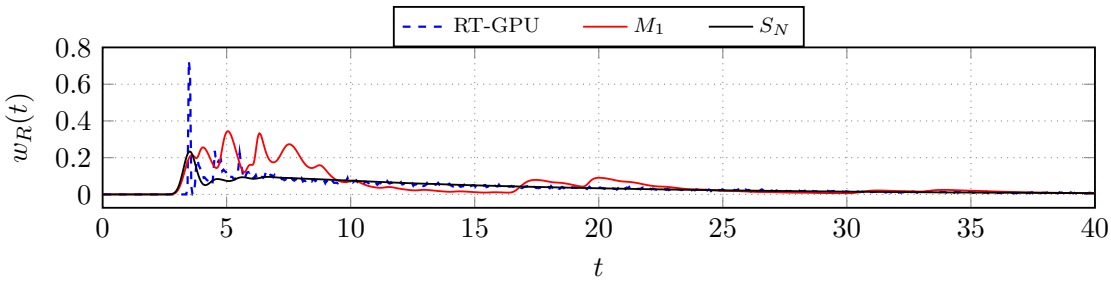


(c) Salle carrée, $\alpha = 0.2$, cas purement spéculaire $\beta = 1$

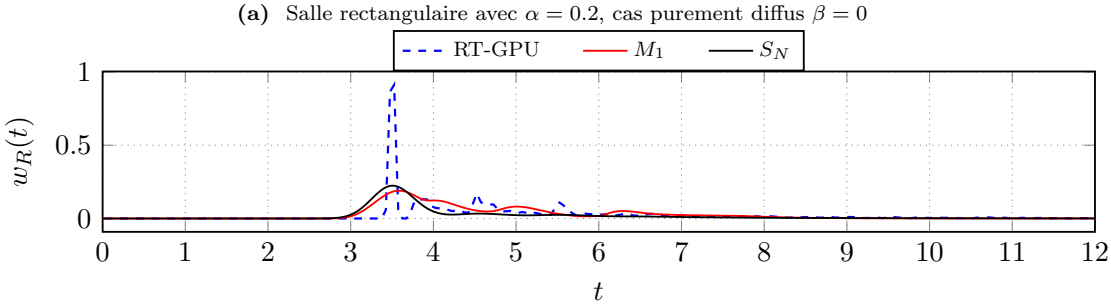


(d) Salle carrée, $\alpha = 0.5$, cas purement spéculaire $\beta = 1$

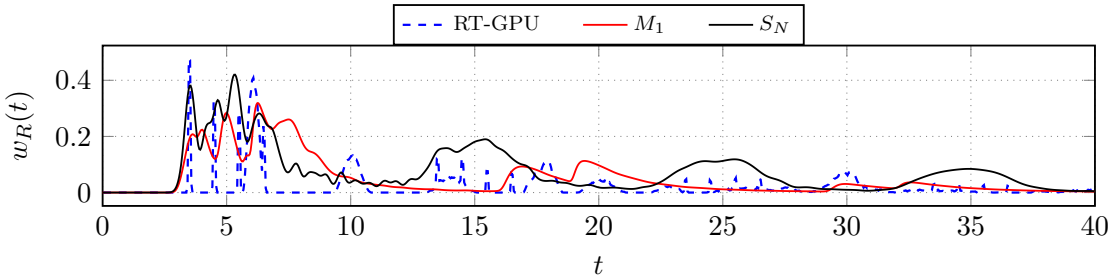
Figure 7.3: Variation du coefficient d'absorption $\alpha = 0.1, 0,5$ pour $\beta = 0, 1$. Échogramme pour une salle carrée $[0, 1]^2$. Évolution au cours du temps de la densité w_R dans le volume récepteur R. Comparaison entre les modèles M_1, S_N et de ray-tracing GPU à vitesse du son $c = 1$. Nous considérons une source isotrope de type disque de rayon $r = 0.05$ et centrée au point $\mathbf{x}_s = [0.5, 0.5]$. Le volume récepteur est un disque de rayon $r = 0.025$ centré sur le point $\mathbf{x}_r = [0.5, 0.5]$. La durée de la simulation est fixée à $T = 5$. Paramètres pour les modèles M_1 et S_N ($N = 64$ vitesses uniformes), $h = 0.002$, $CFL = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$. Paramètre RT-GPU $N_p = 10^7$ particules.



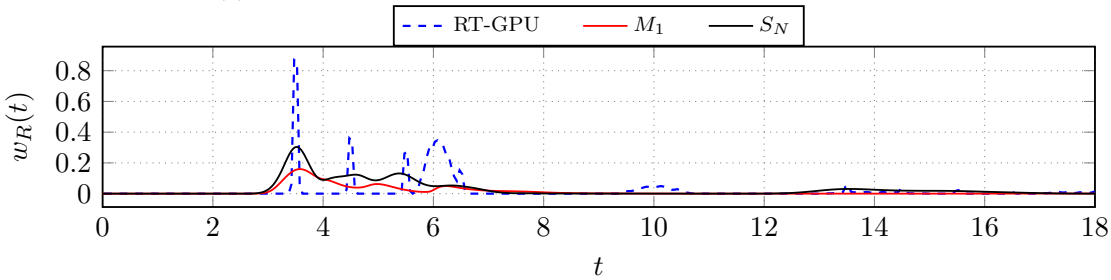
(a) Salle rectangulaire avec $\alpha = 0.2$, cas purement diffus $\beta = 0$



(b) Salle rectangulaire avec $\alpha = 0.5$, cas purement diffus $\beta = 0$

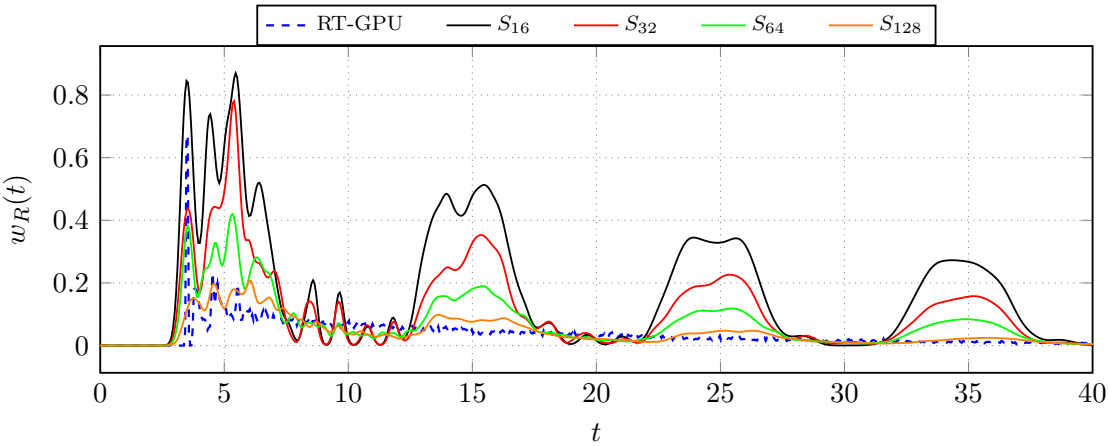


(c) Salle rectangulaire avec $\alpha = 0.2$, cas purement spéculaire $\beta = 1$

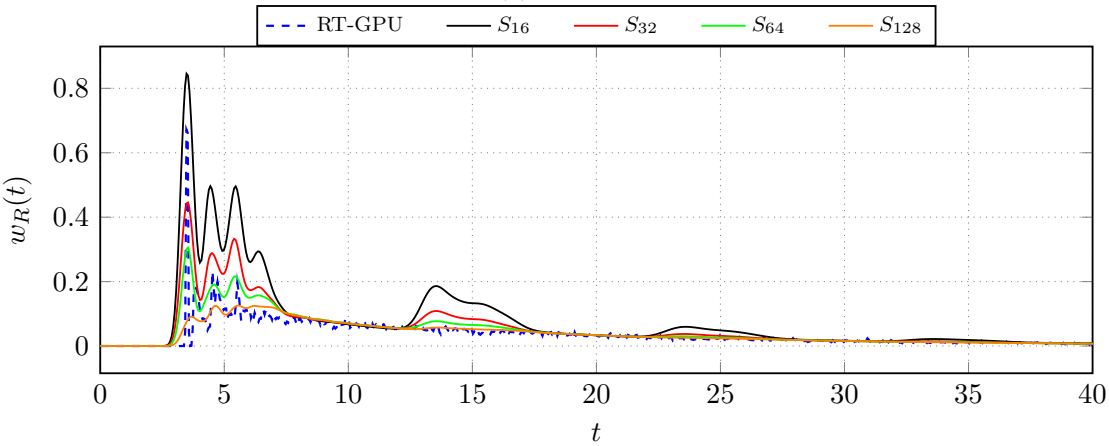


(d) Salle rectangulaire avec $\alpha = 0.5$, cas purement spéculaire $\beta = 1$

Figure 7.4: Variation du coefficient d'absorption $\alpha = 0.1, 0,5$ pour $\beta = 0, 1$. Échogramme pour une salle rectangulaire $[0, 5] \times [0, 1]$. Évolution au cours du temps de la densité w_R dans le volume récepteur R. Comparaison entre les modèles M_1, S_N et de ray-tracing GPU à vitesse du son $c = 1$. Nous considérons une source isotrope de type disque de rayon $r = 0.05$ et centrée au point $\mathbf{x}_s = [0.5, 0.5]$. Le volume récepteur est un disque de rayon $r = 0.025$ centré sur le point $\mathbf{x}_r = [4, 0.5]$. La durée de la simulation est fixée à $T = 40$ pour $\alpha = 0.1$ et $T = 15$ pour $\alpha = 0.5$. Paramètres pour les modèles M_1 et S_N ($N = 64$ vitesses uniformes), $h = 0.002$, $CFL = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$. Paramètre RT-GPU $N_p = 10^7$ particules.



(a) $\beta = 1$



(b) $\beta = 0.5$

Figure 7.5: Influences de la discrétisation angulaire employées dans le modèle S_N. Échogramme pour $\beta = 1$ et $\beta = 0.5$ dans une salle rectangulaire $[0, 5] \times [0, 1]$ avec $\alpha = 0.1$. Évolution au cours du temps de la densité w_R dans le volume récepteur R. Nous considérons une condition initiale de type disque de rayon $r = 0.05$ et centrée au point $\mathbf{x}_s = [0.5, 0.5]$. Le volume récepteur est un disque de rayon $r = 0.025$ centré sur le point $\mathbf{x}_r = [4, 0.5]$. La durée de la simulation est fixée à $T = 40$ Paramètres de simulation $h = 0.002$, $CFL = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$. Paramètre RT-GPU $N_p = 10^7$ particules.

3 Décroissance de l'énergie totale et temps de réverbération

3.1 Problème

Nous nous plaçons dans une salle en dimension $d = 2$ ou 3, et considérons le problème de transport avec le terme source suivant

$$\begin{cases} \partial_t f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + c\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = \dfrac{\mathbb{1}_{[0,T_s]}\mathbb{1}_{B(\mathbf{x}_s,r)}}{|B(\mathbf{x}_s,r)|}, & \forall(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\in\Omega\times\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}^+, \\ f(\mathbf{x},\mathbf{v},0) = 0, & \forall(\mathbf{x},\mathbf{v})\in\Omega\times\mathbb{S}^{d-1}, \end{cases} \tag{7.5}$$

où $T_s > 0$ désigne le temps auquel nous coupons l'émission de la source. À ces équations, nous ajoutons la condition de rebond mixte au bord définie en (1.56) telle que

$$f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = (1-\alpha)\beta f^s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)+(1-\alpha)(1-\beta)f^d(\mathbf{x},\mathbf{v},t), \quad \forall\mathbf{x}\in\partial\Omega, \mathbf{v}\in\mathbb{S}^-(\mathbf{x}), t\in\mathbb{R}^+. \tag{7.6}$$

avec α, β les coefficients d'absorption et d'accommodation.

Dans ce cas test, nous nous placerons toujours à l'état stationnaire de l'énergie totale $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}(t) = \int_\Omega w(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} = \int_{\Omega\times\mathbb{S}^{d-1}} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\,d\mathbf{x}d\mathbf{v}.$$

Cet état se traduit par un équilibre entre la quantité d'énergie émise par la source et la somme de l'énergie absorbée aux parois et de celle liée au champs diffus. Une fois l'état stationnaire établi, nous couperons l'émission de la source et chercherons à étudier la décroissance de $\mathcal{E}$. Numériquement nous considèrerons l'état stationnaire comme atteint lorsque $|\mathcal{E}(t^n+1)-\mathcal{E}(t^n)| \leq 10^{-3}$. Dans la pratique nous couperons la source à $t = T_e$ avec le temps T_e choisi comme suffisamment long et comme vérifiant la condition énoncée plus haut. L'étude de la décroissance de $\mathcal{E}$ pour $t > T_e$ nous permettra de comparer nos résultats avec la loi d'Eyring (1.64) et de déterminer les temps caractéristiques des salles considérées. Dans le cas du ray-tracing, toutes les particules sont lâchées à $t = 0$. Afin de comparer les courbes de décroissance obtenues par ray-tracing, nous effectuerons une translation des données de $+T_e$.

3.2 Résultats numériques en dimensions deux

Variation du coefficient d'absorption α

Nous considérons tout d'abord une salle réverbérante $\beta = 0.7$ de paramètres géométriques $\Omega = [0,1]^2$, $\mathbf{x}_s = [0.5, 0.5]$ $r = 0.025$ et nous ferons varier le coefficient

d'absorption α. Le fait de choisir $\beta = 0.7$ permet d'accélérer la mise en place du régime diffusif. La Figure 7.6 présente les résultats de décroissance temporelle de l'énergie totale obtenus pour différentes valeurs de α. Ces résultats montrent une très bonne adéquation avec la loi d'Eyring pour des valeurs d'absorption $\alpha < 0.5$. Dans le cas d'une absorption forte $\alpha = 0.8$ la différence constatée avec le ray-tracing peut s'expliquer par une difficulté de ce dernier à atteindre le régime diffusif. En effet, les particules disparaissent trop rapidement de la géométrie avant même d'avoir été mélangées. Le tableau 7.1 présente les temps de réverbération T_{30dB} calculés à partir des courbes de décroissance de la figure 7.6. Pour les faibles valeurs de $\alpha < 0.5$, nous retrouvons une excellente adéquation (erreur relative inférieure à 2%) avec la loi d'Eyring. Ces résultats nous confortent dans l'idée que les modèles M_1 et S_N permettent une bonne restitution des propriétés acoustiques prenant place en régime stationnaire. La Figure 7.7 et le tableau 7.1 montrent les résultats obtenus pour une salle rectangulaire $[0, 5] \times [0, 1]$. Là encore, nous constatons une très bonne adéquation entre les modèles, en particulier de $\alpha < 0.5$. Il serait intéressant d'étudier la validité de la loi d'Eyring en présence d'anisotropie géométrique. Il semblerait que les T_{30dB} calculés à partir de cette loi soient toujours plus courts que ceux mesurés avec les 3 modèles.

α	Eyring 2d	S_N	M_1	RT-GPU
0.1	51.91	51.32	51.02	50.940
0.2	24.45	24.52	24.18	24.150
0.5	7.84	8.19	7.79	8.040
0.8	3.37	3.69	3.25	3.720

Table 7.1: Temps de décroissance T_{30dB} (vitesse du son $c = 1$) en fonction du coefficient α, pour une salle carrée $[0, 1]^2$ avec $\beta = 0.7$. Comparaison entre la loi d'Eyring et les modèles M_1, S_N et de ray-tracing GPU à vitesse du son $c = 1$. Paramètres pour les modèles M_1 et S_N ($N = 64$ vitesses uniformes), $h = 0.002$, $CFL = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$. Paramètre RT-GPU $N_p = 10^7$ particules.

α	Eyring 2d	S_N	M_1	RT-GPU
0.1	86.34	86.58	86.19	87.100
0.2	40.96	42.08	41.79	42.290
0.5	13.22	15.63	16.91	19.900
0.8	5.66	9.26	8.22	8.670

Table 7.2: Temps de décroissance T_{30dB} (vitesse du son $c = 1$) en fonction du coefficient α, pour une salle rectangulaire $[0, 5] \times [0, 1]$ avec $\beta = 0.7$. Comparaison entre la loi d'Eyring et les modèles M_1, S_N et de ray-tracing GPU à vitesse du son $c = 1$. Paramètres pour les modèles M_1 et S_N ($N = 64$ vitesses uniformes), $h = 0.002$, $CFL = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$. Paramètre RT-GPU $N_p = 10^7$ particules.

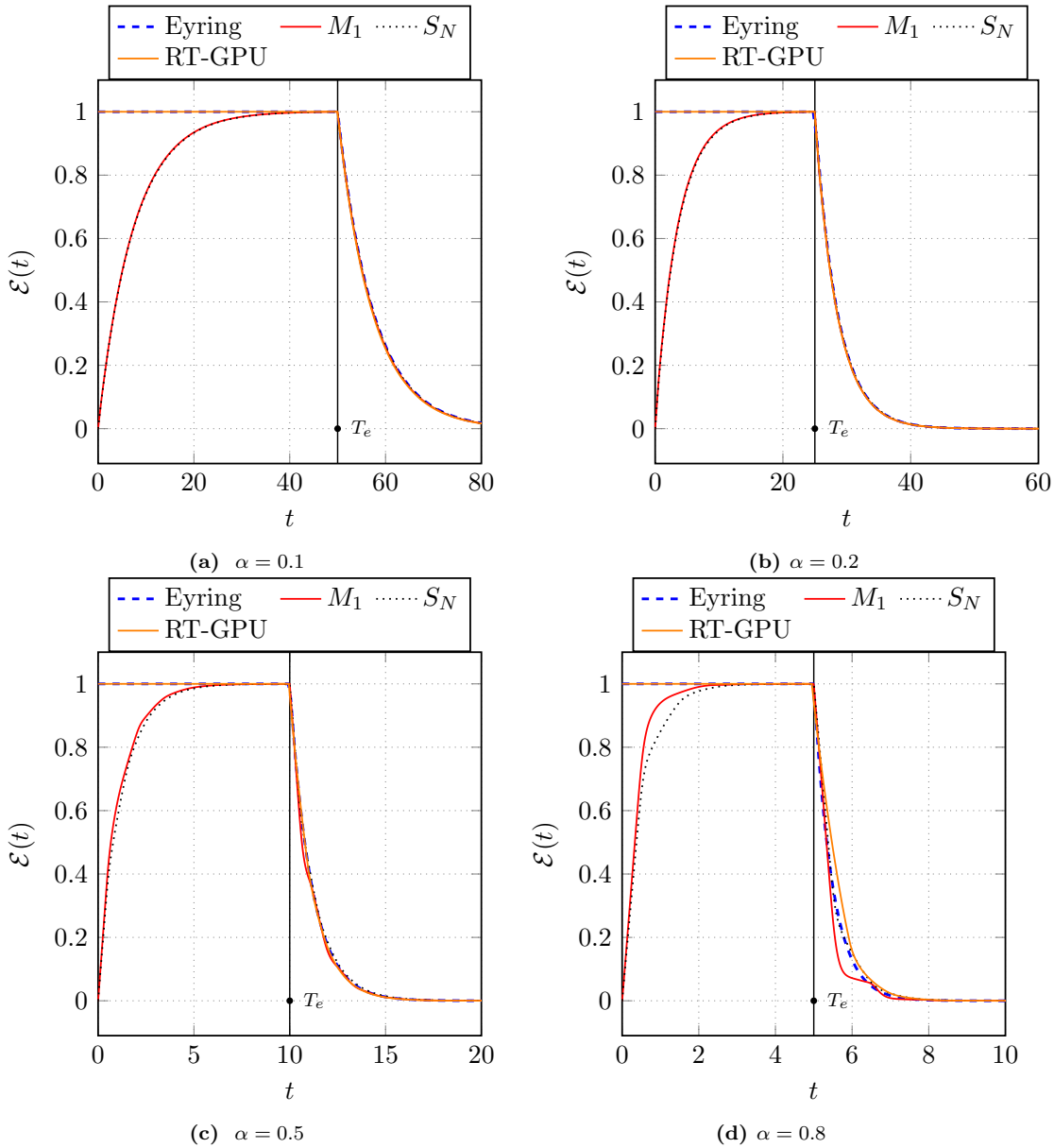


Figure 7.6: Évolution de l'énergie totale en fonction du temps et du paramètre α pour une salle carrée $[0,1]^2$. Comparaison entre la loi d'Eyring et les modèles M_1, S_N et de ray-tracing GPU à vitesse du son $c = 1$. Nous considérons une source isotrope de type disque de rayon $r = 0.05$ et centrée au point $\mathbf{x}_s = [0.5, 0.5]$ qui émet de manière continue pendant un temps T_e. À $t = T_e$ nous coupons la source. Paramètres pour les modèles M_1 et S_N ($N = 64$ vitesses uniformes), $h = 0.002$, $CFL = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$. Paramètre RT-GPU $N_p = 10^7$ particules.

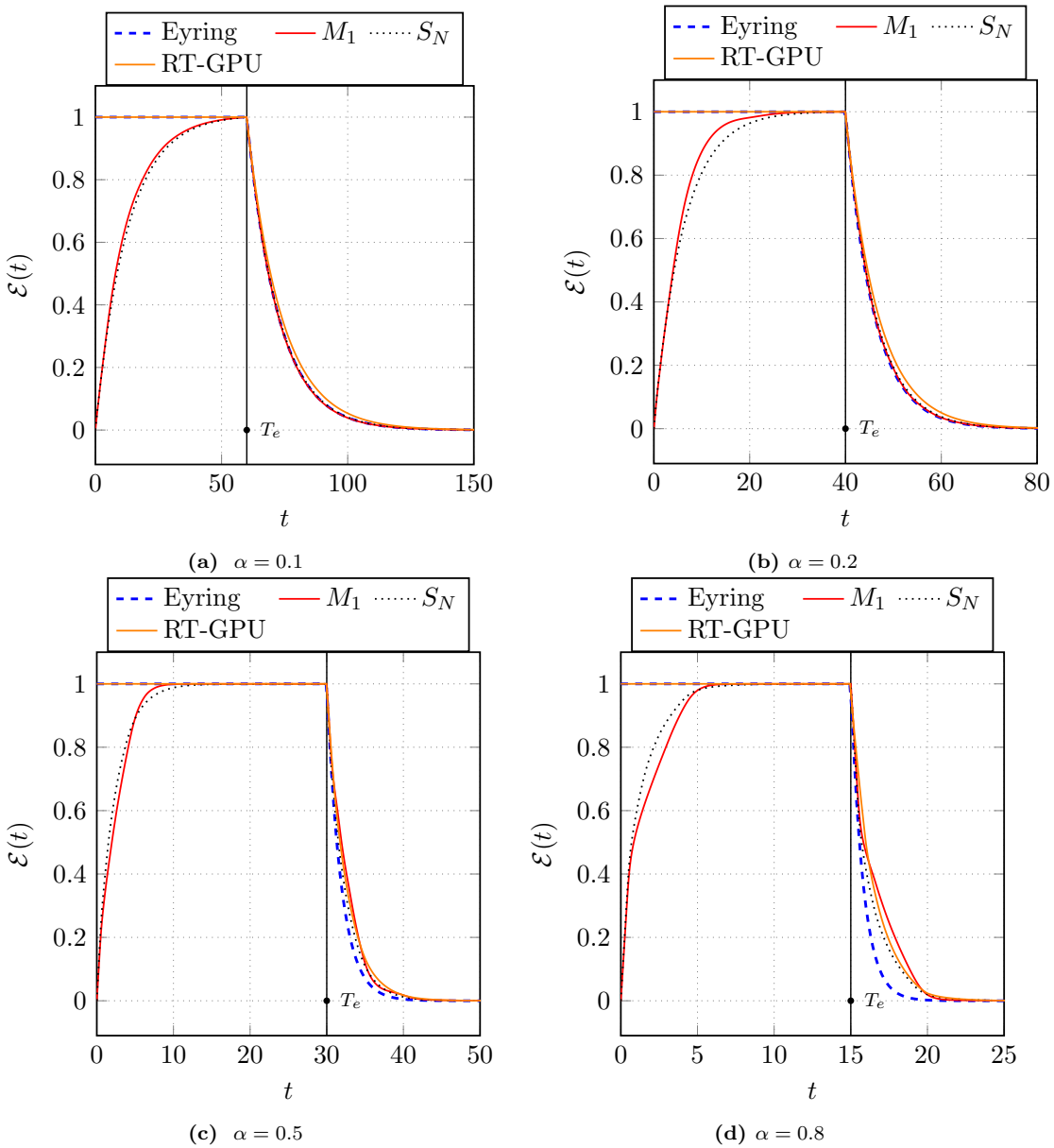
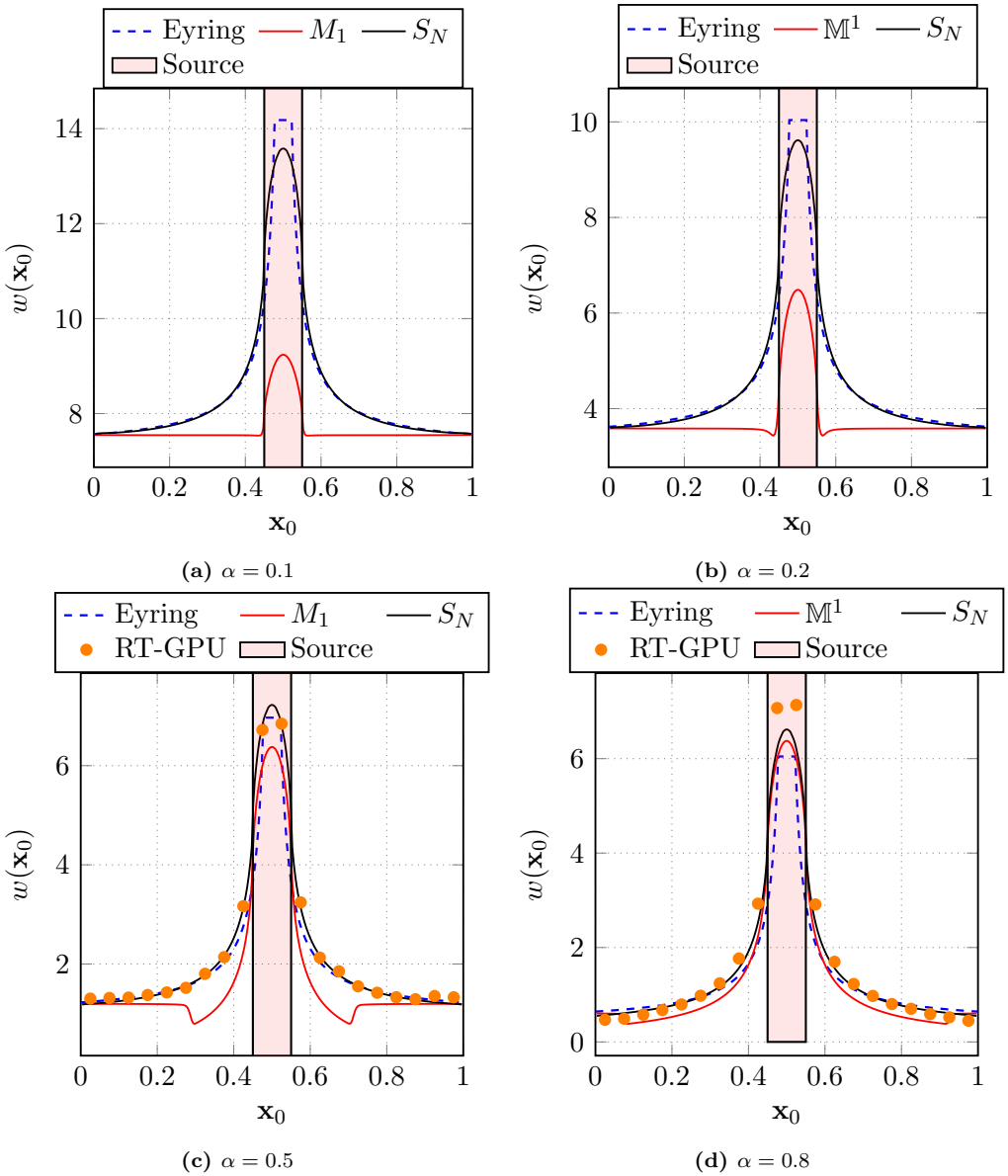


Figure 7.7: Évolution de l'énergie totale en fonction du temps et du paramètre α pour une salle rectangulaire $[0,5] \times [0,1]$. Comparaison entre la loi d'Eyring et les modèles M_1, S_N et de ray-tracing GPU à vitesse du son $c = 1$. Nous considérons une source isotrope de type disque de rayon $r = 0.05$ et centrée au point $\mathbf{x}_s = [0.5, 0.5]$ qui émet de manière continue pendant un temps T_e. À $t = T_e$ nous coupons la source. Paramètres pour les modèles M_1 et S_N ($N = 64$ vitesses uniformes), $h = 0.002$, $CFL = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$. Paramètre RT-GPU $N_p = 10^7$ particules.



(a) $\alpha = 0.1$ **(b)** $\alpha = 0.2$

(c) $\alpha = 0.5$ **(d)** $\alpha = 0.8$

Figure 7.8: Profils de densité à l'état stationnaire dans une salle diffuse $\beta = 0$. Variation en espace et en fonction de α de la densité w. Comparaison entre le modèle M_1, S_N et de ray-tracing GPU à vitesse du son $c = 1$. Nous considérons une source isotrope de type disque de rayon $r = 0.05$, centrée au point $\mathbf{x}_s = [0.5, 0.5]$ et qui émet en continue à puissance constante $P = 1$. Paramètres pour les modèles $\mathbb{M}^1$ et S_N ($N = 64$ vitesses uniformes), $h = 0.002$, $CFL = 0.5$, $\Delta t = 0.00025$. Paramètre RT-GPU $N_p = 10^7$ particules, rayon volume récepteur $r = 0.025$

Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié différentes méthodes permettant de simuler les phénomènes acoustiques prenant place à l'échelle de bâtiment.

Nous avons vu que l'approximation haute fréquence de l'équation des ondes nous permet de modéliser la propagation sonore par une équation de transport cinétique posée dans un espace des phases à six dimensions. Pour résoudre numériquement ce modèle cinétique, trois approches ont été étudiées :

1. La première est basée sur la méthode des ordonnées discrètes (S_N).
2. La seconde repose sur la méthode des moments avec fermeture entropique (M_1).
3. La troisième s'appuie sur la méthode du ray-tracing.

Pour chacune des approches précédentes, nous avons établi puis validé des méthodes de résolutions en deux et trois dimensions. Dans le cadre de géométries simples, ces travaux ont ainsi conduit à la mise en place de quatre codes de calculs basés sur trois langages de programmation différents. En outre, et sans pour autant rentrer dans des considérations propres au calcul hautes performances, nous nous sommes souciés de leurs donner une implémentation efficace sur GPU. Les travaux de cette thèse ont été découpés en deux grandes étapes. La première fut consacrée à la dimension deux en espace et en vitesse. Elle nous a permis de nous familiariser avec toutes les difficultés inhérentes aux trois approches énoncées ci-dessus. La seconde partie de la thèse fut dédiée au passage à la dimension trois en espace et en vitesse.

Nous avons débuté nos travaux en appliquant la méthode des ordonnées discrètes (S_N) en deux dimensions au travers d'une discrétisation uniforme du cercle unité. Elle nous a conduit à un système formé de N équations de transports qui a ensuite été résolu par méthode volumes finis. L'implémentation du schéma de résolution a été effectuée au travers des librairies OpenCL PyOpenCL et tire son efficacité par le biais de deux aspects. Le premier est lié au stockage intégral des données sur le GPU, le second provient du fait que nous avons travaillé sur des maillages cartésiens et dans des géométries rectangulaires simplifiant grandement le traitement des conditions spéculaires au bord du domaine.

Les étapes de validation de notre schéma ont mis en lumière sa forte diffusivité numérique. Cette dernière nous força ainsi à utiliser des maillages très fins dans le but d'avoir une restitution précise des grandeurs d'intérêts. Une idée fut alors de diminuer les coûts calculatoires en réduisant le nombre de dimensions du problème étudié.

Dans cette optique, nous nous sommes intéressés à la méthode des moments avec fermeture entropique. Cette méthode composée des deux premiers moments de la fonction de distribution f nous a permis de mettre en place un modèle (M_1) purement macroscopique. Nous avons vu que le calcul de sa fermeture nécessite toutefois l'inversion coûteuse et intensive de problèmes non linéaires qui impliquent l'évaluation de fonctions de Bessel modifiées de première espèce. Pour pallier à cette limitation, nous avons utilisé une interpolation par fraction rationnelle qui permet de calculer à faible cout cette fermeture.

Pour valider notre schéma, nous nous sommes intéressés au problème de Riemann à une dimension. À notre connaissance, ce problème n'a jamais été résolu analytiquement pour un modèle M_1 construit sur le cercle unité en vitesse. En nous basant sur la démonstration faite dans le cas d'une sphère unité en vitesse [17], nous avons essayé, en vain, de démontrer ce résultat. Nous n'avons malheureusement pas réussi à établir certaines propriétés de monotonie nécessaire à la preuve. La difficulté provient de la complexité des calculs impliquant les fonctions de Bessel modifiées de première espèce. Ce problème reste donc ouvert. Nous avons néanmoins vérifié numériquement les propriétés manquantes, ce qui nous a permis de déterminer la solution exacte du problème de Riemann. Lors de la résolution numérique du modèle, M_1 nous avons été confrontés à un problème classique des modèles M_1 : la perte de réalisabilité. Afin de contourner cette difficulté, nous avons mis en place un limiteur qui reprojette la solution dans le cône convexe.

Par ailleurs, dans le cadre du traitement des conditions au bord cinétique, il n'a pas été possible de les traduire directement sur les premiers moments de f. En géométrie carrée/cubique, une solution serait toutefois d'utiliser la méthode des moments partiels basée sur une construction des moments à partir de demi-espaces en vitesse. En nous inspirant de cette méthode, nous avons fait choix d'imposer les conditions au bord au travers d'un flux numérique cinétique.

Afin de mettre en place une base comparative pour nos modèles S_N et M_1, nous avons développé une méthode particulaire basée sur un algorithme de ray-tracing. Cet algorithme implémenté entièrement sur GPU permet un parallélisme massif des opérations de transport du fait de l'indépendance complète des particules considérées. Nous nous sommes toutefois heurtés à plusieurs contraintes lors de la reconstruction temporelle des données acoustiques impliquant un `binning` à accès concurrentiels. Par ailleurs, si pour un unique volume récepteur, le cout lié à la reconstruction de données temporelles ne pose aucun problème, il peut s'avérer contraignant en présence de plusieurs de ces derniers et nous forcer à sérialiser les

opérations d'écriture.

Lors de l'extension à la dimension 3, nous avons dû effectuer plusieurs modifications. Pour le modèle S_N, nous avons fait le choix d'utiliser une discrétisation en vitesse basée sur les points de Lebedev. L'utilisation de cette discrétisation nous a permis une implémentation directe des conditions aux bords de type spéculaire.

Dans le cas du modèle M_1 le passage à la dimension 3 est marqué par un changement dans l'équation de fermeture. Nous avons toutefois pu réutiliser avec peu de modifications, tous les algorithmes développés pour la dimension 2. Lors de la résolution numérique du modèle M_1 par méthode RK-DG nous avons constaté beaucoup de pertes de réalisabilité du fait des oscillations non désirées et propres aux méthodes d'ordre élevées. Nous avons alors utilisé une solution proposée par [16] qui consiste à d'utiliser une CFL suffisamment petite au regard des poids de Gauss-Lobato employés.

Dans le dernier chapitre, nous avons présenté les résultats obtenus lors de cas tests acoustiques. Nous avons remarqué sans surprise, que les modèles M_1 et S_N ne sont pas adapté à reproduire la réponse impulsionnelle d'une salle. Nous avons également pu remarquer que le coefficient d'accommodation β n'influence que très peu le comportement du modèle M_1. En effet, de par sa construction, le modèle M_1 ne fera pas la distinction entre la somme de deux fonctions de distribution de directions opposées (deltas de Dirac en vitesse) et une fonction de distribution purement isotrope. Il semble donc limité à des cas d'étude où le régime diffus est bien établi. Enfin, lors d'un dernier cas test à l'état stationnaire dans une salle diffuse, nous avons vu que les 3 modèles montrent en revanche une très bonne adéquation avec la théorie de l'acoustique des salles.

Cette thèse ouvre la voie à de nouveaux modèles pour l'acoustique des salles à l'état stationnaire. Les perspectives et extensions de ces travaux sont ainsi multiples. Nous pouvons tout d'abord citer l'extension à des géométries complexes. Pour le modèle M_1 cela ne poserait pas de difficultés supplémentaires, en revanche dans le cas du modèle S_N l'implémentation des conditions spéculaires aux bord s'avère être difficile puisqu'elle demande une étape de projection de la vitesse de départ sur l'ensemble des vitesses rentrantes admissibles. Cette étape de projection requiert par ailleurs l'utilisation d'un algorithme de recherche de plus proches voisins et de branchement conditionnels qui réduisent l'efficacité des calculs sur GPU. Dans le cas du ray-tracing l'algorithme possède une implémentation purement optimisée pour les géométries cubiques et rectangulaires. De ce fait, son adaptation à des géométries complexes nécessiterait de repenser complètement l'algorithme initial. Il serait également intéressant d'étudier la possibilité d'utiliser l'API de ray-tracing disponible sur les cartes graphiques de dernière génération.

Au niveau de la modélisation, une approche intéressante serait de mettre en place un modèle aux moments d'ordres plus élevés, par exemple le modèle M_2 qui est capable de différencier deux ondes de directions opposées.

Comme les cas tests acoustiques nécessitent l'établissement du régime stationnaire (temps longs), il serait évidement intéressant de mettre en place des schémas implicites permettant de travailler sur des pas de temps très grands. Cette direction de recherche est d'autant plus motivée par le fait que l'acoustique des salles ne demande pas une discrétisation en espace très fine.

Bibliographie

[1] Dinshaw . Fast and accurate discrete ordinates methods for multidimensional radiative transfer. part i, basic methods. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 69(6) :671 – 707, 2001.

[2] M. Abramowitz and I.A. Stegun, editors. *Handbook of mathematical functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. NBS, 10 edition, 1972.

[3] D. E. Amos. Computation of modified Bessel functions and their ratios. *Mathematics of Computation*, 28(125) :239–251, 1974.

[4] S.E. Anderson. Bit twiddling hacks, 2009. Disponible à `http://graphics.stanford.edu/~seander/bithacks.html`.

[5] C. Augonnet, S. Thibault, R. Namyst, and P.-A. Wacrenier. StarPU : A unified platform for task scheduling on heterogeneous multicore architectures. *CCPE - Concurrency and Computation : Practice and Experience, Special Issue : Euro-Par 2009*, 23 :187–198, February 2011.

[6] C. Berthon, P. Charrier, and B. Dubroca. An HLLC scheme to solve the M1 model of radiative transfer in two space dimensions. *Journal of Scientific Computing*, 31(3) :347–389, Jun 2007.

[7] G. Birindelli, J.-L. Feugeas, J. Caron, B. Dubroca, G. Kantor, J. Page, T. Pichard, V. Tikhonchuk, and P. Nicolaï. High performance modelling of the transport of energetic particles for photon radiotherapy. *Physica Medica*, 42 :305 – 312, 2017.

[8] F. Bouchut. *Nonlinear stability of finite Volume Methods for hyperbolic conservation laws : And Well-Balanced schemes for sources publisher=*. Springer Science & Business Media, 2004.

[9] F. H. Brittain and E. H. Marlund. Some limitations of ray-tracing software for predicting community noise from industrial facilities. 2008.

[10] C. Buet and B. Després. Asymptotic preserving and positive schemes for radiation hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 215 :717–740, 2006.

[11] J. Burkardt. Quadrature rules for the sphere, 2010. Disponible à `https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/datasets/sphere_lebedev_rule/sphere_lebedev_rule.html`.

[12] C. Cercignani. *Rarefied gas dynamics : from basic concepts to actual calculations.* Cambridge University Press, 2000.

[13] S. Chandrasekhar. *Radiative transfer.* Dover publications, 1960.

[14] F. Chardard, F. Dias, and T.J. Bridges. Fast computation of the Maslov index for hyperbolic linear systems with periodic coefficients. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 39(47) :14545, 2006.

[15] N. Chernov. Entropy, lyapunov exponents, and mean free path for billiards. *Journal of Statistical Physics*, 88 :1–29, 1997.

[16] P. Chidyagwai, M. Frank, Schneider F., and Seibold B. A comparative study of limiting strategies in discontinuous galerkin schemes for the m1 model of radiation transport. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 342 :399 – 418, 2018.

[17] J.-F. Coulombel and T. Goudon. Entropy-based moment closure for kinetic equations : Riemann problem and invariant regions. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 3, 12 2005.

[18] B. Dubroca and J.-L. Feugeas. Etude théorique et numérique d'une hiérarchie de modèles aux moments pour le transfert radiatif. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 329(10) :915 – 920, 1999.

[19] R. Duclous, B. Dubroca, and M. Frank. A deterministic partial differential equation model for dose calculation in electron radiotherapy. *Physics in Medicine and Biology*, 55 :3843–3857, 2010.

[20] C. F. Eyring. Reverberation time in "dead" rooms. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1(2A) :168–168, 1930.

[21] C. Foy, J. Picaut, and V. Valeau. Including scattering within the room acoustics diffusion model : An analytical approach. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 140(4) :2659–2669, 2016.

[22] P. Gérard, P.A. Markowich, N.J. Mauser, and F. Poupaud. Homogenization

limits and wigner transforms. *Communications on Pure and Applied Mathematics : A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 50(4) :323–379, 1997.

[23] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11) :1309–1331, 2009.

[24] E. Godlewski and P-A. Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Applied Mathematical Sciences 118. Springer New York, 1996.

[25] J. Gómez-Luna, J. González-Linares, J. Benavides, and N. Guil. An optimized approach to histogram computation on GPU. *Machine Vision and Applications*, 24 :899–908, 07 2013.

[26] W. J. Gordon and L. C. Thiel. Transfinite mappings and their application to grid generation. *Applied Mathematics and Computation*, 10-11 :171 – 233, 1982.

[27] C.P.T. Groth and J. G. McDonald. Towards physically realizable and hyperbolic moment closures for kinetic theory. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 21 :467–493, 2009.

[28] S. Guisset, S. Brull, B. Dubroca, E. d'Humières, S. Karpov, and I. Potapenko. Asymptotic-preserving scheme for the M1-Maxwell system in the quasi-neutral regime. *Communications in Computational Physics*, 19(2) :301–328, 2016.

[29] W Han, J. Huang, and J. A. Eichholz. Discrete-ordinate discontinuous galerkin methods for solving the radiative transfer equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(2) :477–497, 2010.

[30] P. Helluy. A portable implementation of the radix sort algorithm in OpenCL. *Technical Report*, 2011.

[31] P. Helluy. Solveur conservatif hyperbolique non-linéaire appliqués aux plasmas, 2014-2019. Disponible à `https://gitlab.math.unistra.fr/tonus/schnaps`.

[32] J.S. Hesthaven and T. Warburton. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods : Algorithms, Analysis, and Applications*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2007.

[33] Y. Jing and N. Xiang. A modified diffusion equation for room-acoustic predication. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 121 :3284, 2007.

[34] D. R. Kaeli, P. Mistry, D. Schaa, and D. P. Zhang. *Heterogeneous computing with OpenCL 2.0*. Morgan Kaufmann, 1 edition, 2015.

[35] J.B. Keller and R.M. Lewis. *Surveys in Applied Mathematics*. Surveys in Applied Mathematics. Springer US, 1 edition, 1995.

[36] D. S. Kershaw. Flux limiting nature‘s own way - a new method for numerical solution of the transport equation. 1976.

[37] A. Klöckner, N. Pinto, Y. Lee, B. Catanzaro, P. Ivanov, and A. Fasih. PyCUDA and PyOpenCL : A scripting-based approach to GPU run-time code generation. *Parallel Computing*, 38(3) :157 – 174, 2012.

[38] The Kronos Group. The open standard for parallel programming of heterogeneous system, 2000. Lien `https://www.khronos.org/opencl/`.

[39] H. Kuttruff. *Room Acoustics*. CRC Press, 6th edition, 2016.

[40] L.D. Landau and J.B. Sykes. *Fluid mechanics*, volume Volume 6 of *Course of theoretical physics 6*. Pergamon Press, 2nd ed., 2nd english ed., rev edition, 1987.

[41] D. Le Hardy, Y. Favennec, and B. Rousseau. Solution of the 2-D steady-state radiative transfer equation in participating media with specular reflections using SUPG and DG finite elements. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 179(C) :149–164, 2016.

[42] D. Le Hardy, Y. Favennec, B. Rousseau, and F. Hecht. Specular reflection treatment for the 3d radiative transfer equation solved with the discrete ordinates method. *Journal of Computational Physics*, 334, 01 2017.

[43] T. Le Pollès, J. Picaut, M. Bérengier, and C. Bardos. Sound field modeling in a street canyon with partially diffusely reflecting boundaries by the transport theory. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 116(5) :2969–2983, 2004.

[44] Thierry Le Pollès. *Modélisation des champs diffus en acoustique architecturale par la théorie des transports : application au milieu urbain*. PhD thesis, 2003. Thèse de doctorat dirigée par Bérengier, Michel Acoustique Le Mans 2003.

[45] V.I. Lebedev. Values of the nodes and weights of ninth to seventeenth order Gauss-Markov quadrature formulae invariant under the octahedron group with inversion. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 15(1) :44 – 51, 1975.

[46] V.I. Lebedev. Quadratures on a sphere. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 16(2) :10 – 24, 1976.

[47] R.J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 1 edition, 2002.

[48] C.D. Levermore. Moment closure hierarchies for kinetic theories. *Journal of Statistical Physics*, 83 :1021–1065, 1996.

[49] J. Mallet, S. Brull, and B. Dubroca. An entropic scheme for an angular moment model for the classical Fokker-Planck-Landau equation of electrons. *Communications in Computational Physics*, 15 :422–450, 2014.

[50] J. Mallet, S. Brull, and B. Dubroca. General moment system for plasma physics based on minimum entropy principle, 2015.

[51] M. Manssen, M. Weigel, and A. K. Hartmann. Random number generators for massively parallel simulations on GPU. *The European Physical Journal Special Topics*, 210(1) :53–71, Aug 2012.

[52] J. McDonald and M. Torrilhon. Affordable robust moment closures for cfd based on the maximum-entropy hierarchy. *Journal of Computational Physics*, 251 :500–523, 2013.

[53] G. N. Minerbo. Maximum entropy eddington factors. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 20(6) :541 – 545, 1978.

[54] F. Mortessagne, O. Legrand, and D. Sornette. Transient chaos in room acoustics. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 3(4) :529–541, 1993.

[55] Y. Nakatsukasa, O. Sète, and L. Trefethen. The AAA algorithm for rational approximation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 40, 12 2016.

[56] F. Ollendorff. Statistical room-acoustics as a problem of diffusion (a proposal). *Acta Acustica united with Acustica*, 21(4) :236–245, 1969.

[57] J. Picaut and N. Fortin. SPPS, a particle-tracing numerical code for indoor and outdoor sound propagation prediction. In Société Française d'Acoustique, editor, *Acoustics 2012*, Nantes, France, Apr 2012.

[58] O. Runborg. Mathematical models and numerical methods for high frequency waves. *Communications in Computational Physics*, 2(5) :827–880, 2007.

[59] L. Savioja and U. P. Svensson. Overview of geometrical room acoustic modeling techniques. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 138(2) :708–730, 2015.

[60] J. Schneider. Entropic approximation in kinetic theory. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 38(3) :541–561, 2004.

[61] P. Shirley and R. Keith Morley. *Realistic Ray Tracing*. AK Peters, 2nd ed edition, 2003.

[62] S. Sobolev. Cubature formulas on the sphere invariant under finite groups of rotations. *Soviet Math. Dokl.*, 3, 01 1962.

[63] E. Sonnendrücker. Numerical methods for Vlasov-Maxwell equations. *Springer*, 2016.

[64] A. Williams, S. Barrus, R. Keith, and M.P. Shirley. An efficient and robust ray-box intersection algorithm. *Journal of Graphics Tools*, 10 :54, 2003.

[65] R.W. Ziolkowski and G. A. Deschamps. Asymptotic evaluation of high-frequency fields near a caustic : An introduction to Maslov's method. *Radio Science*, 19(04) :1001–1025, 1984.