



**HAL**  
open science

# De la topologie des courbes sur les surfaces aux cartes unicellulaires

Abdoul Karim Sane

► **To cite this version:**

Abdoul Karim Sane. De la topologie des courbes sur les surfaces aux cartes unicellulaires. Topologie générale [math.GN]. Université de Lyon, 2019. Français. NNT : 2019LYSEN028 . tel-02446574v2

**HAL Id: tel-02446574**

**<https://theses.hal.science/tel-02446574v2>**

Submitted on 27 Jan 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Numéro National de Thèse : **2019LYSEN028**

## **THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON**

opérée par

**I'École Normale Supérieure de Lyon**

**École Doctorale N°512**

**École Doctorale Informatique et Mathématiques**

**Discipline: Mathématiques**

Soutenue publiquement le 02/07/2019, par:

**Abdoul Karim SANE**

---

# **De la topologie des courbes sur les surfaces aux cartes unicellulaires**

---

Après l'avis de:

M. Guillaume CHAPUY  
M. Hugo PARLIER

CR CNRS  
Professeur

Université Paris Diderot-IRIF  
University of Luxembourg

Devant le jury composé de:

M. Pierre DEHORNOY  
Mme. Viveka ERLANDSSON  
Mme. Federica FANONI  
M. Étienne GHYS  
M. Hugo PARLIER  
M. Jean-Claude SIKORAV

MC  
MC  
CR CNRS  
DR CNRS  
Professeur  
Professeur

Université Grenoble Alpes-IF  
University of Bristol  
Université de Strasbourg-IRMA  
ENS de Lyon  
University of Luxembourg  
ENS de Lyon

*Co-encadrant*  
*Examinatrice*  
*Examinatrice*  
*Examineur*  
*Rapporteur*  
*Directeur*



---

# Remerciements

---

Bon, on va commencer évidemment par mes deux directeurs de thèse: Pierre DEHORNOY et Jean-Claude SIKORAV. C'est comme un seul *Homme* que vous m'avez suivi durant ces trois années. Ces trois années de thèse passées avec vous m'ont beaucoup contenté. Vous m'avez appris beaucoup de belles choses (des plus élémentaires comme comment écrire correctement un texte mathématiques, aux plus complexes) et je vous remercie pour votre grande disponibilité. Dans nos discussions, vous avez toujours réussi à extraire l'idée que je devais poursuivre parmi les idées pas trop ordonnées que j'avais. Cette thèse et tous ce qu'elle contient de bien n'aurait pu voir le jour sans vous. Il me reste encore beaucoup à apprendre.... un grand merci pour tous !

Je remercie aussi Hugo PARLIER et Guillaume CHAPUY pour avoir accepté de rapporter ma thèse. Merci aussi à tous les membre du jury.

Cette thèse s'est déroulée à l'UMPA ; je remercie tous les membres du labo qui travaillent à maintenir un cadre de travail idéal. Merci à Mathieu DUS-SAULE, Floriant YGOUF, Paul COTTALORDA, SIMON Christopher-Lloyd, Olga-Marie-Valentin (pour nous avoir Détente-ndu), Magalie, Virginia, Farah, Marco MAZZUCHELLI, Frédéric DÉGLISE, Jean-Yves WELSCHINGER...

*Ma petite (mais grande) famille. J'ai envie d'écrire de belles paroles pour vous, mais je vous les dirai directement. Mon Père, mes soeurs Mariama-Ngoné (c'est vecteur : rires), et ma maman (lmnt).*

À mes oncles et à mes tantes, un grand merci à vous tous (assimpoulo ôli ômè<sup>1</sup>). À mon oncle Salif (premier docteur de la famille), tu as maintenant un renfort. Merci pour ton soutien et tes conseils. Merci aussi à ta femme Heike et à ton ami tonton Mamina. Merci à ma tante Mélanie BASSÈNE et à toute la famille à Dakar/Fass.

Je tiens à remercier tous les profs de maths de l'université du *Cheikh Anta DIOP* de Dakar-Sénégal pour tous ce que vous m'avez appris : Cheikh M.

---

1. votre neveu est là! (en langue Diola)

DIOP, Hamidou DATHE, Bacary MANGA, Maseye GAYE, Athoumane NIANI, Mamadou L. FALL...

J'ai eu la chance d'être dans une promotion dorée à l'université. Un grand merci aux meneurs de la promo pour avoir tirés tout le monde vers le haut: Leysa Maty SALL, Adjaratou Arame DIAW et EL Hadji Abdou(1) Aziz DIOP. Merci Aziz pour tes visites de travail à l'UMPA pendant mes années de thèse et pour ta relecture minutieuse de ce texte; tu m'a aussi appris les espaces hyperboliques au sens de GROMOV. Mes compagnons d'amphi Lamarana DIALLO, Souleymane DIAGNE... merci pour tous ces moments passés ensemble.

Je remercie mon ami: mon Lieutenant Becaye NIANI pour ses bon moments passés ensemble au lycée et à la fac, ma grande soeur adoptif Aminata SANE, Bacary Thiouard DIATTA, Ibou Laye BA, Boubacar Poty DIALLO, mes Lieutenant Papa Omar THIAM, Mamadou Alpha DIALLO...

Mes amis à (Only)-Lyon, Abou LY, Abdoulaye, Aadil OUFKIR, Mohamed HIBAT ALLAH, Henri MOULGA, Safilidin KERE, Abdou SEYE, Le Prince Crève-Coeur, Mourtada AMAR, Arouna, Mamadou Chérif Ba (il y a assez de ressources pour tout le monde), Benjamin (l'érudit)... merci pour la chaleur humaine que vous m'avez apporté contre le froid lyonnais.

Maintenant, c'est autour de Mbok de France. Un grand merci à vous tous. À mon parrain Papa Magueye GUEYE, Amir-MDF Momar GNINGUE, Idrissa CAMARA, Cheikh YD Sadikh, Tonton Abou Bakr MBENGUE (Make difference by education), Ousseynou, Ahmed Tidiane Diallo, El Hadji SAMB, kou lim dioum<sup>2</sup>...,Ibrahima kindi DIALLO, Tonton Ibrahim COUNDOUL (j'utilise Euler cf preuve du lemme 3.2.2), Massina DIAGNE, Babacar THIOMBANE, Aboubacar DIOP,... un grand merci. Aux célibataires endurcis ainsi qu'aux mariés en téléchargement, amir Ahmad BA, Ibrahima Hothia DIALLO, Ahmed DIOP, Serigne Touba, Ibn Omar...

Un grand merci aussi Lahcen, Docteur Nejib, Fethi, Ami Sassa, Farouq et a tous les membres de l'association.

---

2. Toute tentative d'exhaustion est vouée à l'échec (en Wolof)

Par la plume, et ce qu'ils écrivent  
à ma petite famille



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>10</b>
1.1	Normes entières et classification . . . . .	10
1.2	Cartes unicellulaires . . . . .	13
1.3	Organisation du manuscrit . . . . .	15
1.4	Publications . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Généralités sur les Normes entières</b>	<b>18</b>
2.1	Définition et propriétés . . . . .	18
2.2	Normes d'intersections sur une surface orientable. . . . .	20
2.2.1	Classification des sections de Birkhoff de $T^1\Sigma_g$ . . . . .	20
2.2.2	Normes d'intersections et boules unités duales . . . . .	22
2.3	Norme de Thurston sur une 3-variété. . . . .	27
<b>3</b>	<b>Exemples de polytopes non-réalisables</b>	<b>32</b>
3.1	Minimalité des collections pour la question de réalisation . . . . .	33
3.2	Ordre partiel sur les collections remplissantes . . . . .	34
3.3	Retour à la norme de Thurston . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Graphe de chirurgies sur les cartes unicellulaires</b>	<b>42</b>
4.1	Rappels sur les cartes unicellulaires . . . . .	42
4.2	Définition et caractérisation des chirurgies . . . . .	46
4.3	Graphe de chirurgies sur les collections unicellulaires . . . . .	49
4.3.1	Connexité du graphe de chirurgies-sommes connexes $\hat{K}_{4,g}$ . . . . .	51
4.3.2	Connexité du graphe de chirurgies $K_{4,g}$ . . . . .	66
4.4	Graphe de chirurgies sur les cartes cubiques unicellulaires . . . . .	71
<b>A</b>	<b>Unicellular collections on <math>\Sigma_2</math></b>	<b>76</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>86</b>





# Chapitre 1

## Introduction

Dans cette thèse, on s'intéresse aux aspects combinatoires et topologiques des collections de courbes sur les surfaces. Cet objectif va nous conduire à l'étude des collections unicellulaires, et de façon plus générale à l'étude des cartes unicellulaires.

La résolution de certains problèmes de classification en topologie passe souvent par des correspondances entre objets topologiques et objets combinatoires. Nous donnons ici deux exemples notamment le problème de la détermination des classes d'Euler de feuilletages sans composantes de Reeb d'une 3-variété compacte orientable et la classification des sections de Birkhoff du flot géodésique du fibré tangent unitaire d'une surface fermée orientable. Ces deux exemples sont assez similaires par le fait qu'on associe à ces problèmes des objets combinatoires: les boules unités duales de normes entières.

### 1.1 Normes entières et classification

Dans son article *A norm for the homology of three manifolds* [33], W. Thurston définit une nouvelle classe de (semi-) normes sur le deuxième groupe d'homologie d'une 3-variété compacte orientable.

Soit  $M$  une 3-variété compacte orientable de bord  $\partial M$  (éventuellement vide). Soit  $(S, \partial S) \rightarrow (M, \partial M)$  une surface proprement plongée dans  $M$ . La *partie négative* de la caractéristique d'Euler de  $S$  est l'entier positif  $\chi_-(S)$  définit par:

$$\chi_-(S) := \max\{0, -\chi(S)\};$$

où  $\chi(S)$  désigne la caractéristique d'Euler de  $S$ .

## 1.1. NORMES ENTIÈRES ET CLASSIFICATION

Fort du fait que toute classe  $a \in H_2(M, \partial M, \mathbb{Z})$  est représentée par des réunions disjointes finies  $S := \cup S_i$  de surfaces orientées plongées dans  $M$ , Thurston définit l'application:

$$N_{Th} : H_2(M, \partial M, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$a \longmapsto \inf \{ \chi_-(S) := \sum_i \chi(S_i); [S] = a \}.$$

Il montre ensuite que l'application  $N_{Th}$  s'étend en une semi-norme sur  $H_2(M, \partial M, \mathbb{R})$ .

Par construction, la (semi-)norme de Thurston  $N_{Th}$  a la particularité de prendre des valeurs entières sur le réseau  $H_2(M, \partial M, \mathbb{Z})$  des classes entières: c'est donc une *(semi-)norme entière*.

Sur un espace vectoriel  $E$ , une *(semi-)norme entière* est une (semi-)norme qui prend des valeurs entières sur un certain réseau  $\Lambda \subset E$  de dimension maximale. Comme conséquence directe de la définition de ces normes, Thurston montre que leurs boules unités duales sont données par l'enveloppe convexe d'un nombre fini de vecteurs  $u_i \in \Lambda^* := \{u \in E^*, u(\Lambda) \in \mathbb{Z}\}$ .

Thurston montre ensuite que les classes d'Euler de feuilletages sans composantes de Reeb de la variété  $M$  sont représentées par des points à l'intérieur de la boule unité duale de la norme de Thurston.

La classification des sections de Birkhoff suit le même ordre d'idée [10]; la norme d'intersection jouant dans ce cas le rôle de la norme de Thurston.

Soit  $\Sigma_g$  une surface fermée orientable et  $\Gamma$  une collection de courbes sur  $\Sigma_g$ . On définit la fonction:

$$N_\Gamma : H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$a \longmapsto \inf \{ \#\{\alpha \cap \Gamma\}, [\alpha] = a \}.$$

Comme dans le cas précédant, elle s'étend à une semi-norme sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $H_1(\Sigma_g, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{2g}$ : c'est la *(semi-)norme d'intersection* associée à  $\Gamma$ . Si de plus  $\Gamma$  est *remplissante*, c'est-à-dire si le complémentaire  $\Sigma_g - \Gamma$  est une réunion de disques, alors  $N_\Gamma$  définit une norme entière.

Vu l'intérêt des boules unités duales de ces deux normes entières, on pose le problème inverse suivant:

**Problème 1.** *Etant donné un polytope symétrique à sommets entiers de  $\mathbb{R}^n$  (respectivement  $\mathbb{R}^{2g}$ ), est-il la boule unité duale d'une norme de Thurston sur une 3-variété (respectivement d'une norme d'intersection sur  $\Sigma_g$ ) ?*

Thurston [33] montre qu'en dimension 2, tout polygone symétrique à sommets entiers congruents modulo 2 est la boule unité duale d'une norme de Thurston sur une certaine 3-variété. Ce résultat reste encore valable pour la norme d'intersection.

La relation de congruence des sommets est donc une condition nécessaire que doit vérifier les polytopes réalisables par ces deux normes et elle est suffisante en dimension 2.

Soit  $\mathcal{P}_8$  l'ensemble des sous polytopes à huit sommets de  $[-1, 1]^4$  et d'intérieur non vide. Les éléments de  $\mathcal{P}_8$  vérifient la relation de congruence sur les sommets. Dans cette thèse, on montre le premier résultat suivant:

**Théorème 1.** *[Théorème 3.0.1 dans le texte.] Les éléments de  $\mathcal{P}_8$  ne sont pas des boules unités duales de normes d'intersections sur  $\Sigma_2$ .*

Dans la preuve du théorème 1, on verra des contraintes topologiques imposées par la combinatoire des polytopes aux collections qui les réalisent.

Pour la question de la réalisation d'un polygone du plan, Thurston construit une 3-variété  $N_K$  en prenant le complémentaire d'un noeud  $K$  (issue du relevé d'une collection  $\Gamma$  sur  $\mathbb{T}$ ) dans le fibré  $\pi : N \rightarrow \mathbb{T}$  de classe d'Euler 1. Notre remarque est que pour cette construction, la norme de Thurston sur  $N_K$  est égale au tiré en arrière de la norme d'intersection  $N_\Gamma$  sur  $\mathbb{T}$  par  $\pi$ ; c'est-à-dire pour toute classe entière  $a$ ,

$$N_{Th}(a) = N_\Gamma(\pi_*(a)).$$

Motivé par cette remarque, on propose la conjecture suivante:

**Conjecture 1.** *[Conjecture 3.3.1 dans le texte.] Un polytope qui est la boule unité duale d'une norme d'intersection  $N_\Gamma$  —avec  $\Gamma$  n'ont nulle en homologie pour une certaine orientation de ces composantes— est aussi la boule unité duale pour la norme de Thurston sur une 3-variété.*

La preuve du théorème 1 nous a conduit à un autre problème: la détermination des collections unicellulaires sur une surface  $\Sigma_g$ , ou de façon plus générale la détermination des cartes unicellulaires.

## 1.2 Cartes unicellulaires

Une *carte* (respectivement une *carte unicellulaire*) est un graphe  $G$  plongé sur une surface fermée orientable  $\Sigma_g$  tel que le complémentaire  $\Sigma_g - G$  de  $G$  dans  $\Sigma_g$  est une réunion de disques (respectivement un disque). On considère les cartes à homéomorphisme (préservant l'orientation) près. Le dénombrement des cartes est un problème de combinatoire qui remonte à très longtemps. W. Tutte ([35], [36], [37], [38]) fut le premier à s'intéresser au dénombrement des cartes planaires avec des formules de comptages pour les cartes planaires enracinées unicellulaires. S'ensuivit une généralisation des formules de comptages en tout genre, avec différentes méthodes. On peut citer notamment les travaux de T. R. S. Walsh et A. B. Lehman [39], A. Goupil et G. Schaeffer [14], J. Harer et D. Zagier [16] et G. Chapuy [7].

On a par exemple la formule de comptage de Goupil-Schaeffer qui se simplifie en  $\frac{(4g-2)!}{2^{2g-1}g!}$  pour les cartes régulières de degré 4.

Par ailleurs, le comptage des cartes a des redondances topologiques: les cartes étant enracinées, on différencie une carte munie de deux enracinement différents.

Dans cette thèse, on montre l'existence d'une structure de graphe sur l'ensemble des cartes unicellulaires en définissant une opération de chirurgie sur ces dernières.

Soit  $G$  une carte unicellulaire de  $\Sigma_g$ ; soient  $x$  et  $y$  deux arêtes orientées de  $G$ . On obtient un nouveau graphe  $G' := \sigma_{x,y}(G)$  en prenant un arc simple  $\lambda_{x,y}$  de  $x$  à  $y$  et en ouvrant  $G$  le long de  $\lambda_{x,y}$  (voir figure 1.1).

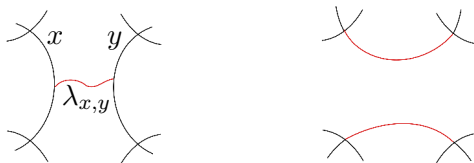


FIGURE 1.1 – Opération d'ouverture le long de l'arc  $\lambda_{x,y}$ .

Lorsque  $G' := \sigma_{x,y}(G)$  est unicellulaire, on dit que  $G'$  est obtenue par *chirurgie* sur  $G$  le long de  $x$  et  $y$ . Le lemme 4.2.1 (dans le chapitre 4) donne une condition nécessaire et suffisante sur  $x$  et  $y$  pour que  $\sigma_{x,y}(G)$  soit unicellulaire.

## 1.2. CARTES UNICELLULAIRES

Si  $G$  est une carte unicellulaire, on note  $d$  la *partition en degrés* de  $G$ : c'est la suite finie croissante des degrés des sommets de  $G$ . Si  $G$  est une carte unicellulaire régulière,  $d$  désigne alors le degré commun des sommets de  $G$ .

L'opération de chirurgie préserve la partition en degrés d'une carte unicellulaire.

On définit ainsi le *graphe de chirurgies*  $K_{d,g}$ :

- les sommets sont les cartes unicellulaires de  $\Sigma_g$  de partition en degrés égale à  $d$ ,
- deux cartes unicellulaires sont reliées par une arête si et seulement si on passe de l'une à l'autre par une chirurgie.

Pour les cartes unicellulaires régulières de degré 4, on obtient la famille des *collections unicellulaires* et on montre le résultat suivant:

**Théorème 2.** *[Théorème 4.2.1 dans le texte] Pour tout  $g \geq 1$ , le graphe de chirurgies  $K_{4,g}$  des collections unicellulaires est connexe.*

Pour démontrer le théorème 2, on rajoute à la chirurgie sur les collections unicellulaires une opération de somme connexe. Étant donné deux collections unicellulaires  $(\Gamma_1, x)$  et  $(\Gamma_2, y)$  (avec des arêtes orientées distinguées) sur  $\Sigma_{g_1}$  et  $\Sigma_{g_2}$  respectivement, on définit la somme connexe  $(\Gamma_1, x) \# (\Gamma_2, y)$  qui est une collection unicellulaire sur  $\Sigma_{g_1+g_2}$ .

On associe à ces deux opérations de chirurgie et de somme connexe un graphe  $\hat{K}_{4,g}$  dit de *chirurgie-somme connexe*:

- les sommets sont les collections unicellulaires sur une surface de genre inférieure ou égal à  $g$ ;
- deux collections  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont reliées par une arête s'il existe une chirurgie de  $\Gamma_1$  à  $\Gamma_2$ , ou si  $\Gamma_1$  est égale la somme connexe de  $\Gamma_2$  avec l'unique collection unicellulaire du tore.

Le théorème 2 est une conséquence du résultat suivant:

**Théorème 3.** *[Théorème 4.2.2 dans le texte] Pour tout  $g \geq 1$ , le graphe  $\hat{K}_{4,g}$  de chirurgie-somme connexe est connexe.*

On définit aussi le graphe  $\hat{K}_{4,\infty} := \cup_{g \geq 1} \hat{K}_{4,g}$  qui est la réunion des graphes de chirurgie-somme connexe, et on montre le résultat suivant:

**Proposition 1.2.1.** *[Proposition 4.3.1 dans le texte] Le graphe  $\hat{K}_{4,\infty}$  n'est pas hyperbolique au sens de Gromov.*

Comme corollaire directe du théorème 2, on a aussi:

**Théorème 4.** [Théorème 4.3.1 dans le texte] *Le graphe de chirurgies  $K_{3,g}$  des cartes unicellulaires régulières de degré 3 est connexe.*

Les théorèmes 2 et 4 fournissent des algorithmes permettant de générer toutes les cartes unicellulaires de degré 4 et 3. La figure 1.2 nous donne par exemple le graphe des cartes unicellulaires régulières de degré 4 sur le tore et la surface de genre 2. On l'obtient de façon inductive en essayant toutes les chirurgies sur une carte unicellulaire donnée. Les sommets de ce graphe correspondent aux "45" cartes combinatoires enracinées (modulo homéomorphismes préservant l'orientation) données par la formule de Goupil-Schaeffer : l'enracinement étant le choix d'une arête orientée distinguée.

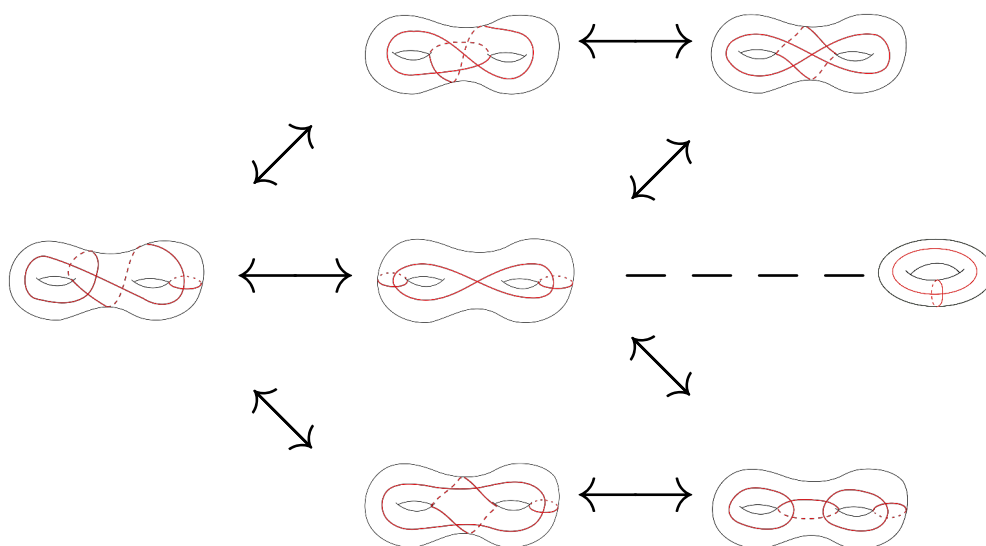


FIGURE 1.2 – Graphe de chirurgies-sommes connexes  $\hat{K}_{4,2}$ .

### 1.3 Organisation du manuscrit

Cette thèse est loin de fournir une histoire détaillée des notions qui y sont abordées. On a voulu se contenter de ramener ensemble les notions qui nous intéressent tout en donnant les références nécessaires pour leurs compréhensions détaillées.

Dans le Chapitre 2, on rappelle quelques faits généraux sur les normes entières et aussi sur les deux exemples qui nous intéresseront notamment la

## 1.4. PUBLICATIONS

norme de Thurston et les normes d'intersections. Le Chapitre 3 est consacré à la preuve du théorème 1. On y trouve aussi une proposition de généralisation de la construction de Thurston qui aboutira à l'énoncé de la Conjecture 1.

Dans le chapitre 4, on revient aux cartes unicellulaires pour la preuve du théorème 2, du théorème 3 et du théorème 4. On s'intéresse en particulier dans ce chapitre aux propriétés géométriques des différents graphes connexes obtenus sur les cartes unicellulaires notamment le diamètre du graphe de chirurgies pour les collections unicellulaires (complément dans le théorème 4.2.1) et l'hyperbolicité du graphe de chirurgies-sommes connexes (proposition 4.3.1).

L'annexe quant à elle reprend notre première preuve pour la détermination des collections unicellulaires sur la surface de genre 2.

## 1.4 Publications

Le contenu de cette thèse est issu en grande partie des articles suivants:

- *Intersection norms and one-faced collections* [28], arXiv :1809.03190.
- *Curves on surfaces and surgeries* [29], arXiv :1902.06436.
- *Surgery graph on cubic unicellular maps*, à venir.





## Chapitre 2

# Généralités sur les Normes entières

W. Thurston [33] construit une classe de (semi)-norme sur le deuxième groupe d'homologie d'une 3-variété compacte orientable. Cette norme (connue aujourd'hui sous le nom de norme de Thurston) prend des valeurs entières sur le réseau des classes d'homologies à coefficients entiers. Elles appartiennent donc à la classe des *normes entières*: ces normes qui prennent des valeurs entières sur un certain réseau de dimension maximale de l'espace vectoriel où elles sont définies.

Thurston [33] montre ensuite un lien étroit entre les classes d'Euler des feuilletages sans composantes de Reeb d'une 3-variété compacte orientable et la boule unité duale de la norme de Thurston associée à cette 3-variété.

On commence par rappeler quelques faits généraux sur les normes entières. Ensuite, on termine cette partie par quelques rappels sur les deux exemples de normes entières auxquelles nous nous intéresseront: *les normes d'intersections* et *la norme de Thurston*.

### 2.1 Définition et propriétés

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $(u_i)_{i=1,\dots,n}$   $n$  vecteurs linéairement indépendants de  $E$  et  $\Lambda(= \text{vect}_{\mathbb{Z}}\{u_1, \dots, u_n\})$  le réseau engendré par les vecteurs  $u_i$ . Les vecteurs de  $\Lambda$  seront dits *entiers*. Soit  $E^*$  le dual de  $E$ , on désigne par  $\Lambda^*$  l'ensemble des *formes entières* de  $E$ : les formes linéaires qui prennent des valeurs entières sur  $\Lambda$ .

## 2.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

**Définition 2.1.1.** Une norme  $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$  est dite *entière* relativement au réseau  $\Lambda$  si la restriction de  $N$  à  $\Lambda$  prend des valeurs entières:

$$\begin{aligned} N : E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \Lambda &\longrightarrow \mathbb{N}. \end{aligned}$$

**Exemple 2.1.1.** La norme  $l^1$  sur  $\mathbb{R}^n$ :  $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 := \sum_i |x_i|$ ; et sa duale (la norme  $l^\infty$ ) sont des normes entières relativement au réseau  $\mathbb{Z}^n$ . La boule unité duale de la norme  $l^1$  est donnée par l'enveloppe convexe des vecteurs de coordonnées  $\pm 1$ .

Le théorème suivant généralise cet aspect combinatoire de la boule unité duale de la norme  $l^1$  à toutes les normes entières.

**Théorème 2.1.1** (W. Thurston [33]). *Soit  $N$  une norme entière sur  $E$  relativement au réseau  $\Lambda$ . Il existe alors un nombre fini d'éléments  $u_i \in \Lambda^*$  tel que la boule unité  $B_N^1$  est donnée par :*

$$B_N^1 = \{X \in E; |u_i(X)| \leq 1, u_i \in \Lambda^*\}.$$

*De façon équivalente, la boule unité duale  $B_{N^*}^1$  est égale à l'enveloppe convexe des éléments  $u_i \in \Lambda^*$ :*

$$B_{N^*}^1 = \text{conv}\{u_1, \dots, u_n\}.$$

Thurston donne la preuve du théorème 2.1.1 en dimension 3; preuve qui s'étend de façon analogue en toute dimension (voir la preuve de Fried dans [11], page [217-219]). On retrouve par ailleurs une nouvelle preuve du théorème 2.1.1 chez M. de la Salle dans [9].

Comme exemple de normes entières, on commence par les *normes d'intersection* sur une surface fermée orientable de genre  $g \geq 1$ . Elles ont été introduites par V. Turaev [34] comme exemple sans pour autant faire l'objet d'une étude approfondie.

M. Cossarini et P. Dehornoy [10] ont quant à eux étudié ces normes qui se sont avérées utiles pour la classification à isotopie près des sections de Birkhoff du flot géodésique.

## 2.2 Normes d'intersections sur une surface orientable.

Commençons d'abord par rappeler quelques faits sur la classification des sections de Birkhoff du flot géodésique du fibré tangent unitaire d'une surface, ainsi que le rôle des normes d'intersections dans cette classification. On pourra consulter l'article [10] de M. Cossarini et P. Dehornoy pour plus de détails sur ce sujet.

### 2.2.1 Classification des sections de Birkhoff de $T^1\Sigma_g$

Soit  $\Sigma_g$  une surface fermée (compacte sans bord) orientable, munie d'une métrique hyperbolique (courbure négative égale à  $-1$ ). Le fibré tangent unitaire est la variété définie par  $T^1\Sigma_g := \{(x, u) \in T\Sigma_g, \|u\| = 1\}$ ; c'est un fibré en cercle au-dessus de  $\Sigma_g$ . On munit  $T^1\Sigma_g$  d'un flot naturel, appelé *flot géodésique*, et défini comme suite:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times T^1\Sigma_g &\longrightarrow T^1\Sigma_g \\ (t, (x, u)) &\longmapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)); \end{aligned}$$

où  $\gamma$  est l'unique géodésique vérifiant  $\gamma(0) = x$  et  $\dot{\gamma}(0) = u$ .

De façon générale, sur une 3-variété  $M$  munie d'un flot non singulier  $\phi$ , on cherche à déterminer les sections de  $\phi$  c'est-à-dire les surfaces plongées dans  $M$  partout transverses au flot. Si  $(M, \phi)$  admet une section globale  $S$ , alors  $M$  est une suspension de  $S$ :

$$M := S \times [0, 1] /_{(x,1) \sim (f(x),0)};$$

$f$  étant un difféomorphisme de  $S$ : c'est l'*application de premier retour* à  $S$ .

Clairement, toute section globale admet une orientation telle que l'intersection algébrique  $\langle S, \cdot \rangle$  est strictement positif. Plus généralement, si  $c$  est un *cycle asymptotique* (voir [32] pour la définition) de  $\phi$ , on a  $\langle S, c \rangle > 0$ . Schwarzmann [32] a montré la réciproque, notamment:

**Théorème 2.2.1** (Schwarzmann [32]). *Une surface  $S$  plongée dans  $M$  est une section globale du flot  $\phi$  si et seulement si  $\langle S, \cdot \rangle$  est positif sur les cycles asymptotiques de  $\phi$ .*

## 2.2. NORMES D'INTERSECTIONS SUR UNE SURFACE ORIENTABLE.

La condition d'existence d'une section globale est restrictive. Par exemple, sur  $(T^1\Sigma_g, \phi)$ , une géodésique orientée séparante  $\alpha$  de  $\Sigma_g$  se relève en une orbite périodique  $\vec{\alpha}$  de classe d'homologie nulle; d'où  $\langle S, \vec{\alpha} \rangle = 0$  pour toute surface  $S$  plongée dans  $T^1\Sigma_g$ . Le flot géodésique n'admet donc pas de section globale.

Une alternative moins contraignante aux sections globales sont les *sections de Birkhoff*.

**Définition 2.2.1.** Une surface à bord  $S$  plongée dans  $(M, \phi)$  est une *section transverse* au flot  $\phi$  si le bord  $\partial S$  est la réunion d'un nombre fini d'orbites périodiques de  $\phi$ , et si les orbites de  $\phi$  — hormis les composantes de bord  $S$  — qui intersectent  $S$ , le font de façon transverse.

Si de plus toutes les orbites de  $\phi$  — hormis les composantes de bord  $S$  — sont transverses à  $S$ , on dit que  $S$  est une *section de Birkhoff* du flot  $\phi$ .

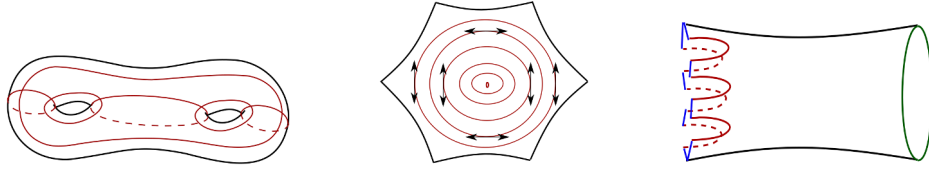


FIGURE 2.1 – Collection de géodésiques remplissantes avec quatre hexagones dans son complémentaire; feuilletage singulier par des convexes d'un hexagone et le relevé d'une orientation de ce feuilletage dans  $T^1\Sigma_2$ .

Rappelons l'exemple, dû à Birkhoff, de section sur  $T^1\Sigma_2$  [3].

Soit  $\Gamma$  la collection de géodésique sur  $\Sigma_2$  donnée sur la figure 2.1 et  $\overleftrightarrow{\Gamma}$  son relevé symétrique dans  $T^1\Sigma_2$  (chaque géodésique étant relevée dans les deux sens). Le complémentaire de  $\Gamma$  dans  $\Sigma_2$  est composé de quatre hexagones géodésiques. Soit  $\mathcal{F}$  le feuilletage de  $P_1$  et  $P_2$  par des convexes —  $P_1$  et  $P_2$  étant deux faces du complémentaire n'ayant pas d'arêtes en commun. On définit:

$$S_{\mathcal{F}} := \overline{T^1\mathcal{F}};$$

c'est l'adhérence du fibré tangent unitaire à  $\mathcal{F}$ .

L'ensemble  $S_{\mathcal{F}}$  est une surface de genre 1 bordée par  $\overleftrightarrow{\Gamma}$ . En effet, les feuilles de  $S_{\mathcal{F}}$  étant contractiles, leurs relevées correspondent à quatre copies d'un cylindre (figure 2.1 à droite) qu'on recolle de la façon suivante:

## 2.2. NORMES D'INTERSECTIONS SUR UNE SURFACE ORIENTABLE.

- On recolle les composantes de bord en vert — les fibres, qui correspondent aux relevés des quatre singularités des feuilletages orientés— deux à deux. On a ainsi deux cylindres dont les composantes de bords alternent entre bouts d'orbites géodésiques (en rouge) et bouts de fibres (en bleu) ;
- On recolle ensuite les bouts de fibres en bleu d'une composante aux bouts de fibres de l'autre composante.

On obtient ainsi une surface de genre 1 bordée par  $\overset{\leftrightarrow}{\Gamma}$ .

**Fait 2.2.1** (Birkhoff [3]). *La surface  $S_{\mathcal{F}}$  est une section de Birkhoff de genre 1 du flot géodésique.*

Sur les variétés  $(M, \phi)$  admettant des sections de Birkhoff, la question de la classification des surfaces de sections bordées par une même collection d'orbites se pose. M. Cossarini et P. Dehornoy donnent dans [10] une classification à isotopie près de toutes les sections de Birkhoff bordées par une collection symétrique  $\overset{\leftrightarrow}{\Gamma}$  d'orbites périodiques ; classification faisant intervenir les normes d'intersections.

**Théorème 2.2.2.** *(Cossarini-Dehornoy [10]) Soient  $\Gamma$  une collection de géodésiques sur  $\Sigma_g$  et  $\overset{\leftrightarrow}{\Gamma}$  son relevé symétrique dans  $T^1\Sigma_g$ . Il y a une correspondance bijective entre les classes d'isotopies des surfaces transverses de bord  $-\overset{\leftrightarrow}{\Gamma}$  et les points entiers (congruents modulo 2 à la classe d'homologie de  $\Gamma$ ), de la boule unité duale de la norme d'intersection associée à  $\Gamma$ .*

*Une surface  $S$  est une section de Birkhoff si et seulement si la classe d'isotopie de  $S$  est représentée par un point à l'intérieur de la boule.*

Passons maintenant à la définition des normes d'intersections.

### 2.2.2 Normes d'intersections et boules unités duales

On considère une surface  $\Sigma_g$  fermée orientée de genre  $g \geq 1$ . Soit  $\Gamma := \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  une collection de courbes sur  $\Sigma_g$ , en position générique c'est-à-dire n'ayant que des intersections transverses doubles. Sauf mention contraire, les collections seront toujours considérées en position générique.

Soit  $a \in H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$  une classe d'homologie entière ; on définit :

$$N_{\Gamma}(a) := \inf\{\#\{\alpha \cap \Gamma\}; [\alpha] = a; \alpha \pitchfork \Gamma\};$$

## 2.2. NORMES D'INTERSECTIONS SUR UNE SURFACE ORIENTABLE.

le symbole  $\pitchfork$  désignant la transversalité.

Si  $\alpha$  est une collection de courbes orientées représentant  $a$  et vérifiant  $N_\Gamma(a) = \#\{\alpha \cap \Gamma\}$ , on dira que  $\alpha$  est  $\Gamma$ -*minimisant*.

Par lissage des points doubles de  $\Gamma$ , on peut choisir un représentant  $\Gamma$ -minimisant formés de courbes simples deux à deux disjointes.

**Proposition 2.2.1** (Cossarini-Dehornoy). La fonction  $N_\Gamma : H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{N}$  vérifie les propriétés suivantes:

homogène de degré 1:  $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall a \in H_1(\Sigma_1, \mathbb{Z}), N_\Gamma(na) = |n|N_\Gamma(a)$ ;

sous-additive:  $\forall a, b \in H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}), N_\Gamma(a + b) \leq N_\Gamma(a) + N_\Gamma(b)$ .

La fonction  $N_\Gamma$  s'étend alors en une semi-norme  $N_\Gamma : H_1(\Sigma_g, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ . En effet, on étend d'abord  $N_\Gamma$  à  $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Q})$  par linéarité puisque

$$N_\Gamma(a) = N_\Gamma\left(p \frac{a}{p}\right) = p N_\Gamma\left(\frac{a}{p}\right).$$

L'extension sur  $H_1(\Sigma_g, \mathbb{R})$  vient de la convexité de  $N_\Gamma$ .

Si  $\Gamma$  est *remplissante* c'est-à-dire  $\Sigma - \Gamma$  est la réunion de disques topologiques, alors  $N_\Gamma$  est une norme à valeur entières sur  $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ ; donc une norme entière.

D'après le Théorème 2.1.1, la boule unité duale  $B_{N_\Gamma^*}$  est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de vecteurs entiers dans  $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ .

**Vecteurs de la boule unité duale et relation de congruence.** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux courbes orientées de  $\Sigma_g$  en position transverse. Le symbole  $\sim$  désigne ici la relation d'homotopie libre entre les courbes.

**Définition 2.2.2.** L'*intersection géométrique* entre  $\alpha$  et  $\beta$  est la quantité définie par:

$$i(\alpha, \beta) := \min\{\#\{\alpha' \cap \beta'\}, \alpha \sim \alpha'; \beta \sim \beta'; \alpha' \pitchfork \beta'\}.$$

Si  $i(\alpha, \beta) = \#\{\alpha \cap \beta\}$ , alors on dira que  $\alpha$  et  $\beta$  sont en position minimale l'une par rapport à l'autre.

L'*intersection algébrique* entre  $\alpha$  et  $\beta$  est la quantité définie par:

$$i_a(\alpha, \beta) = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p, \alpha, \beta),$$

## 2.2. NORMES D'INTERSECTIONS SUR UNE SURFACE ORIENTABLE.

où  $\varepsilon(p, \alpha, \beta) = \pm 1$  selon que la concatenation en  $p$  de l'orientation de  $\alpha$  et de celui de  $\beta$  coïncide avec l'orientation (choisit) de  $\Sigma_g$  ou non.

L'intersection algébrique ne dépend que des classes d'homologie des courbes et définit une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée sur  $H_1(\Sigma_g, \mathbb{R})$ . L'intersection algébrique se calcul bien sur des représentants en position minimale ce qui entraîne que l'intersection algébrique est congrue à l'intersection géométrique modulo 2.

Soit  $\Gamma$  une collection remplissante sur  $\Sigma_g$ :  $\Gamma$  définit canoniquement un graphe sur  $\Sigma_g$ , les sommets  $V(\Gamma)$  étant les points d'intersections, les arêtes  $E(\Gamma)$  étant les arcs allant d'un sommet à un autre et les faces  $F(\Gamma)$  étant les disques dans le complémentaire de  $\Gamma$ . On a la formule suivante pour la caractéristique d'Euler:

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g = |V| - |E| + |F|.$$

**Définition 2.2.3.** Une *co-orientation* de  $\Gamma$  est la donnée d'un sens positif de traversée de chaque arête de  $\Gamma$ .

Une co-orientation est dite *eulérienne* si en tournant autour d'un sommet de  $\Gamma$ , on traverse positivement deux arcs et négativement les deux autres, et ce pour tous les sommets de  $\Gamma$ .

Un sommet est dit *transparent* si les arêtes incidentes à ce sommet et issues de la même courbe ont les même co-orientations. Sinon, on dira que le sommet est *alternant*.



FIGURE 2.2 – Co-orientation eulérienne transparente (à gauche) et co-orientation eulérienne alternante (à droite).

### Remarques 2.2.1.

-Modulo rotation, on distingue deux types de co-orientations eulériennes autour d'un sommet (Voir figure 2.2).



## 2.2. NORMES D'INTERSECTIONS SUR UNE SURFACE ORIENTABLE.

-À une co-orientation d'une arête correspond une orientation de celle-ci. C'est l'orientation qui, superposée à la co-orientation, donne l'orientation de  $\Sigma_g$ .

Soit  $\alpha$  une courbe orientée de  $\Sigma_g$  transverse à  $\Gamma$ , et soit  $\nu$  une co-orientation de  $\Gamma$ . On définit l'évaluation de  $\nu$  sur  $\alpha$  par:

$$\nu(\alpha) := \sum_{p \in \alpha \cap \Gamma} \varepsilon(p, \alpha, \Gamma^\nu),$$

où  $\varepsilon(p, \alpha, \Gamma^\nu) = \pm 1$  selon que  $\alpha$  traverse  $\Gamma$  de façon positive en  $p$  ou de façon négative —relativement à la co-orientation  $\nu$  de  $\Gamma$ . Si de plus  $\nu$  est une co-orientation eulérienne, on a:

$$[\alpha] = 0 \quad \implies \quad \nu(\alpha) = 0.$$

Par conséquent, une co-orientation eulérienne  $\nu$  définit une classe de co-homologie entière

$$\begin{aligned} \nu : H_1(\Sigma_g, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{N}. \end{aligned}$$

De plus, pour toute co-orientation  $\nu$  et pour tout cycle  $\alpha$ , on a:

$$\nu(\alpha) = \#\{\alpha \cap \Gamma\} \pmod{2}.$$

Si  $\mathcal{B} := (\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g)$  est la base symplectique canonique de  $H_1(\Sigma_g, \mathbb{R})$ , le vecteur  $[\nu] \in H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$  associé à une co-orientation  $\nu$  est donnée par l'évaluation de  $\nu$  sur les éléments de  $\mathcal{B}$ .

Il vient donc que la classe de cohomologie de  $\nu$  est congrue à la classe d'homologie  $[\Gamma]$  modulo 2.

On note par  $\text{eulco}(\Gamma)$  l'ensemble des co-orientations eulériennes de  $\Gamma$  et  $[\text{eulco}(\Gamma)]$  l'ensemble de leurs classes de cohomologies.

Si  $\alpha$  est  $\Gamma$ -minimisante et  $\nu \in \text{eulco}(\Gamma)$ ,  $\nu(\alpha) \leq \#\{\alpha \cap \Gamma\} = N_\Gamma([\alpha])$ ; ce qui entraîne que pour toute classe d'homologie  $a$ ,

$$\frac{|\nu(a)|}{N_\Gamma(a)} \leq 1$$

L'ensemble  $[\text{eulco}(\Gamma)]$  est donc inclus dans  $B_{N_\Gamma}^1$ , et on a:

2.2. NORMES D'INTERSECTIONS SUR UNE SURFACE ORIENTABLE.

**Théorème 2.2.3.** (Cossarini-Dehornoy [10]) *L'enveloppe convexe de l'ensemble  $[\text{eulco}(\Gamma)]$  est égale à la boule unité duale  $B_{N_\Gamma^*}$  de  $N_\Gamma$ . De plus, tout vecteur  $v \in B_{N_\Gamma^*}$  congrue à  $[\Gamma] \pmod{2}$  est la classe de cohomologie d'une co-orientation eulérienne.*

Les théorèmes 2.2.3 et 2.1.1 impliquent que les vecteurs  $(u_i)_{i=1,\dots,n}$  vérifiant  $B_{N_\Gamma^*} = \text{conv}\{u_1, \dots, u_n\}$  sont déterminés par des co-orientations eulériennes et ont la même parité.

**Question 2.2.1** (P. Dehornoy). *Soit  $P$  un polytope symétrique de  $\mathbb{R}^{2g}$  dont les sommets sont entiers et congruents modulo 2. Existe-il une collection  $\Gamma$  sur  $\Sigma_g$  dont la norme d'intersection associée a pour boule unité duale  $P$  ?*

Dans le cas du plan, on la réponse suivante:

**Proposition 2.2.2.** Soit  $P$  un polygone symétrique à sommets entiers ayant la même parité. Il existe alors une collection  $\Gamma$  sur  $\mathbb{T}^2$  telle que  $B_{N_\Gamma^*}^1 = P$ .

*Démonstration.* D'abord, si  $P$  est un segment centré en l'origine de  $\mathbb{R}^2$  et à sommets entiers, il existe une matrice  $A \in SL(2, \mathbb{Z})$  telle que  $P' := A(P)$  est un segment vertical. De plus,  $A$  a une réalisation géométrique puisque  $\text{Mod}(\mathbb{T}^2) = SL(2, \mathbb{Z})$ ; c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme  $\phi$  de  $\mathbb{T}^2$  tel que

$$\phi_* : H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^2 \longrightarrow H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^2$$

est égale à  $A$ .

Soient  $l := \frac{1}{2} \text{longueur}(P')$  ( $l \in \mathbb{N}$ );  $\alpha$  et  $\beta$  les éléments de la base canonique de  $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ . En prenant  $l$  courbes parallèles à  $\beta$  on obtient une collection sur  $\mathbb{T}^2$  telle que  $B_{N_{\Gamma'}^*} = P'$ . Par conséquent,  $\Gamma := \phi^{-1}(\Gamma')$  est telle que  $B_{N_\Gamma^*} = P$ .

Par ailleurs, si  $\Gamma := \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  est une collection de géodésiques sur  $\mathbb{T}^2$  et  $\lambda$  une courbe de  $\mathbb{T}^2$ , on a:

$$i(\lambda, \Gamma) = \sum_j i(\lambda, \gamma_j).$$

L'intersection géométrique sur  $\mathbb{T}^2$  est donc additive, ce qui entraîne:

$$N_\Gamma(a) = \sum_{j=1}^n N_{\gamma_j}(a).$$

### 2.3. NORME DE THURSTON SUR UNE 3-VARIÉTÉ.

Par conséquent,  $B_{N_{\Gamma}^*}$  est la somme de Minkowski des  $B_{N_{\gamma_j}^*}$  :

$$B_{N_{\Gamma}^*} = \bigoplus_j B_{N_{\gamma_j}^*}.$$

Pour finir, la preuve découle du fait que tout polygone symétrique à sommets entiers est la somme de Minkowski de segments entiers centrés en 0.  $\square$

On reviendra à la question 2.2.1 pour le cas  $g = 2$  dans le Chapitre 3.

## 2.3 Norme de Thurston sur une 3-variété.

W. Thurston définit dans [33] une norme entière sur le deuxième groupe d'homologie d'une 3-variété compacte orientable.

Soit  $M$  une variété de dimension 3 compacte orientable et  $\partial M$  son bord (éventuellement vide). Soit  $(S, \partial S) \rightarrow (M, \partial M)$  une surface compacte connexe orientable plongée dans  $M$  avec son bord dans  $\partial M$  et  $[S] \in H_2(M, \partial M)$  sa classe d'homologie relative. On désigne par  $\chi(S)$  la caractéristique d'Euler de  $S$ .

**Définition 2.3.1.** La partie négative de la caractéristique d'Euler de  $S$  est l'entier  $\chi_-(S)$  définie par:

$$\chi_-(S) := \max\{0, -\chi(S)\}.$$

Si  $S$  est réunion disjointe finie de surfaces connexes  $(S_i)$ , alors

$$\chi_-(S) = \sum_i \chi_-(S_i)$$

Soit  $a \in H_2(M, \partial M)$  une classe entière.

**Fait 2.3.1** ([33]). *La classe  $a$  a des représentants plongés dans  $M$ , c'est-à-dire des surfaces orientées (éventuellement pas connexes) de classes d'homologies égales à  $a$ .*

On définit:

$$N_{Th}(a) := \min\{\chi_-(S), [S] = a\}$$

On a le théorème suivant dû à Thurston:

### 2.3. NORME DE THURSTON SUR UNE 3-VARIÉTÉ.

**Théorème 2.3.1.** *La fonction  $N_{Th} : H_2(M, \partial M, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{N}$  vérifie les propriétés suivantes:*

*homogénéité:  $\forall a \in H_2(M, \partial M, \mathbb{Z}), \forall k \in \mathbb{Z}, N_{Th}(ka) = |k|N_{Th}(a)$  ;*

*sous-additivité:  $N_{Th}(a + b) \leq N_{Th}(a) + N_{Th}(b)$ .*

Les propriétés mentionnées ci-dessus permettent d'étendre  $N_{Th}$  à une semi-norme entière sur  $H_2(M, \partial M, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{b_2(M)}$  ; où  $b_2(M)$  est le deuxième nombre de Betti de  $M$ . Si de plus  $M$  est irréductible —toute sphère plongée borde une boule— et sans tore essentiel,  $N_{Th}$  définit une norme.

**Définition 2.3.2.** Une surface  $S$  plongée dans  $M$  est dite *incompressible* si l'inclusion  $i_* : \pi_1(S) \longrightarrow \pi_1(M)$  est une injection.

Si  $S$  est telle que  $N_{Th}([S]) = \chi_-(S)$ , alors  $S$  est dite *minimisante* dans sa classe d'homologie.

**Lemme 2.3.1** (Lemme de Dehn [15]). *Soit  $M$  une 3-variété et  $f : D \longrightarrow M$  une application du disque dans  $M$  telle que sur un voisinage  $A$  du disque,  $f|_A$  est un plongement et  $f^{-1}(f(A)) = A$ . Alors  $f|_{\partial D}$  s'étend en un plongement.*

Si  $S$  est une surface minimisante pour la norme de Thurston, alors  $S$  est incompressible. En effet, si  $M$  est compressible, par le Lemme de Dehn, il existe une courbe simple  $\alpha$  essentielle sur  $S$  qui borde un disque plongé dans  $M$ . Quitte à faire une isotopie, on peut supposer que l'intérieur de  $D$  est disjoint de  $S$  de sorte qu'en coupant  $S$  le long de  $D$  (voir figure 2.3), on obtient une surface  $S'$  telle que  $\chi_-(S') < \chi_-(S)$ .

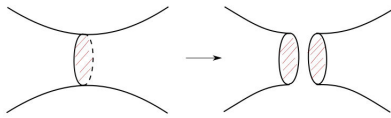


FIGURE 2.3 – Compression d'une surface le long d'un disque.

**Boule unité duale de la norme de Thurston et feuilletage sans composantes de Reeb.** Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage sur  $M$  transverse au bord de  $M$ , éventuellement vide. Pour la définition d'une composante de Reeb, on pourra consulter [6]. Le théorème suivant met un lien entre les feuilles compactes d'un feuilletage sans composante de Reeb de  $M$  et la norme de Thurston.

### 2.3. NORME DE THURSTON SUR UNE 3-VARIÉTÉ.

**Théorème 2.3.2** (Thurston). — Si  $S$  est la fibre d'une fibration au-dessus de  $\mathbb{S}^1$ , alors  $S$  est minimisante.

De plus, le demi-rayon  $r_S := \{k[S], k > 0\}$  donné par la classe d'homologie de  $S$  passe par l'intérieur d'une face de dimension maximale de  $\partial B_{N_{Th}}$ . Si  $e_S \in H^2(M)$  désigne la classe d'Euler de la fibration, alors

$$N_{Th}(a) = e_s(a)$$

pour  $a$  suffisamment proche de  $r_S$ .

— Si  $S$  est une feuille compacte d'un feuilletage sans composante de Reeb  $\mathcal{F}$  de  $M$ , alors  $S$  est minimisante, et la classe d'Euler  $e(\mathcal{F}) \in H^2(M, \mathbb{Z})$  est un élément de la boule unité duale de la norme de Thurston sur  $M$ .

Le théorème 2.3.2 implique que toutes les classes d'Euler de feuilletage de  $M$  sont des points entiers dans la boule unité duale de la norme de Thurston.

**Conjecture 2.3.1** (Thurston). Étant donné un élément  $a \in H^2(M, \mathbb{Z})$  tel que  $N_{Th}(a) = 1$ , il existe un feuilletage sans composantes de Reeb  $\mathcal{F}$  de classe d'Euler égale à  $a$ .

Avant Thurston, H. Rosenberg [27] avait montré que si une 3-variété  $M$  admet un feuilletage sans composantes de Reeb transverse à son bord, alors  $M$  est irréductible et  $\partial M$  est une union de tores.

D. Gabai a ensuite montré que les conditions ci-dessus sont suffisantes en montrant que les surfaces minimisantes pour la norme de Thurston sont des feuilles de feuilletages sans composantes de Reeb. Et comme conséquence de ce fait, il montre que la conjecture de Thurston est vraie pour les sommets de la boule unité duale.

Par ailleurs, on sait maintenant que la conjecture n'est pas vraie en général [42].

**Question 2.3.1.** Étant donné un polytope  $P$  symétrique à sommets entiers de  $\mathbb{R}^n$ , existe-t-il une 3-variété  $M$  dont la norme de Thurston associée a pour boule unité duale  $P$  ?

On ne sait pas pour l'instant caractériser les polytopes qui sont réalisables pour la norme de Thurston.

Contrairement aux normes d'intersections, la calculabilité de la norme de Thurston est plus compliquée puisqu'il n'y a pas d'algorithme polynomiale

### 2.3. NORME DE THURSTON SUR UNE 3-VARIÉTÉ.

permettant de déterminer les surfaces minimisantes (il y a des algorithmes exponentiels via les surfaces normales [1]). Dans [33], Thurston prouve le résultat suivant:

**Théorème 2.3.3.** *Si  $P$  est un polygone symétrique à sommets entiers dans le plan, il existe une 3-variété dont la norme de Thurston associée a pour boule unité duale  $P$ .*

*Idée de la preuve du théorème 2.3.3.* On part du fait que tout polygone symétrique entier à sommets congruents modulo 2 est réalisable pour la norme d'intersection associée à une collection de géodésiques  $\Gamma$  sur  $\mathbb{T}^2$ . On oriente ensuite les composantes de  $\Gamma$  de sorte que la classe d'homologie de la collection orientée, qu'on note encore  $\Gamma$ , soit non nulle. En "attachant"  $\Gamma$  en un point d'intersection  $p$  entre deux composantes différentes (voir figure 2.4), on obtient une nouvelle collection avec une composante en moins: les deux composantes s'intersectant en  $p$  ne forment plus qu'une.

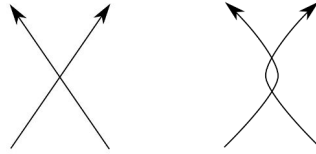


FIGURE 2.4 – Attachement en un point d'intersection entre deux composantes différentes.

En répétant ce procédé sur un nombre fini de points doubles bien choisis, on obtient une seule courbe orientée  $\Gamma'$  remplissante non nulle en homologie.

Considérons maintenant le fibré en cercle  $\pi : N \rightarrow \mathbb{T}^2$  au-dessus du tore de classe d'Euler 1, et relevons  $\Gamma'$  dans  $N$ : notons  $K$  le relevé de  $\Gamma'$ .

Soit  $N_K := N - \overset{\circ}{T}(K)$ , où  $\overset{\circ}{T}(K)$  désigne l'intérieur d'un voisinage tubulaire de  $K$ .

Le premier fait est que  $H_2(N_K, \partial N_K)$  est isomorphe à  $H_2(N)$ . En effet, on a la suite exacte longue suivante:

$$\dots H_2(T(K)) = 0 \rightarrow H_2(N) \rightarrow H_2(N, T(N)) \rightarrow H_1(T(K)) \rightarrow H_1(N) \dots$$

Puisque  $[\Gamma'] = \pi_*(K)$  est non nulle, alors  $[K]$  est aussi non nulle dans  $H_1(N)$ . Par conséquent, l'inclusion  $i_* : H_1(T(K)) \rightarrow H_1(N)$  est une injection. La flèche  $H_2(N) \rightarrow H_2(N, T(K))$  est donc un isomorphisme. Par

### 2.3. NORME DE THURSTON SUR UNE 3-VARIÉTÉ.

excision sur  $H(N, T(K))$  on obtient l'isomorphisme entre  $H_2(N_K, \partial N_K)$  et  $H_2(N)$ .

La partie difficile de la preuve consiste à montrer que les surfaces  $S_\alpha := \pi^{-1}(\alpha) \cap N_K$  pour  $\alpha$  minimisante pour la norme d'intersection  $N_\Gamma$ , sont minimisantes pour la norme de Thurston sur  $N_K$ . Pour cela Thurston construit un feuilletage de  $N_K$  sans composante de Reeb pour lequel  $S_\alpha$  est une feuille.

Les surfaces  $S_\alpha$  étant des tores avec  $N_{\Gamma'}(\alpha)$  composantes de bord, on a l'égalité

$$N_{Th}([a]) = N'_\Gamma(\pi_*(a)) = N_\Gamma(\pi_*(a))$$

pour toute classe  $a \in H_2(N_K, \partial N_K)$ . □

C'est bien sûr un anachronisme de parler de normes d'intersections dans la preuve de Thurston ; mais la construction de Thurston consiste exactement à tirer en arrière les normes d'intersections du tore  $\pi$  sur  $N_K$ .

Dans le chapitre 3 (Section 3.3), on reviendra à la question de la réalisation des boules unités duales pour la norme de Thurston ; avec pour objectif le rapprochement avec le problème de réalisation pour les normes d'intersections.

# Chapitre 3

## Exemples de polytopes non-réalisables

On a vu que les polygones symétriques à sommets entiers congruents modulo 2 sont boules unités duales de normes d'intersections sur le tore. Dans ce qui suit, on montre que le résultat ne se généralise pas pour  $g = 2$ .

Le groupe des homéomorphismes préservant l'orientation de  $\Sigma_g$  agit sur les collections de  $\Sigma_g$  et se surjecte dans le groupe des symplectomorphisme linéaire de  $H_1(\Sigma_g, \mathbb{R})$ . Pour le problème de réalisation, on considère donc les collections à homéomorphisme (préservant l'orientation) près d'une part, et les polytopes modulo l'action du groupe symplectique linéaire  $\text{Sp}(\mathbb{Z}, 2g)$  d'autre part.

Soient  $\mathcal{C} := [-1, 1]^4$  le cube unité de  $\mathbb{R}^4$  et  $\mathcal{P}_8$  l'ensemble des sous polytopes symétriques de  $\mathcal{C}$  à huit sommets et d'intérieurs non vide. L'ensemble  $\mathcal{P}_8$  n'est pas vide: il contient par exemple le polytope engendré par les vecteurs suivants ainsi que leurs opposés:

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), \quad v_2 = (1, -1, 1, 1), \quad v_3 = (-1, 1, 1, 1), \quad v_4 = (1, 1, -1, 1).$$

On démontre le résultat suivant:

**Théorème 3.0.1.** *Les éléments de  $\mathcal{P}_8$  ne sont pas des boules unités duales de normes d'intersections sur  $\Sigma_2$ .*

Pour la preuve du théorème 3.0.1, on commence par montrer que pour la question de la réalisation des boules, on peut se restreindre aux collections en position minimales.



### 3.1. MINIMALITÉ DES COLLECTIONS POUR LA QUESTION DE RÉALISATION

Ensuite, on définit une relation d'ordre partiel sur les collections ce qui nous amène au fait suivant: *si un élément de  $\mathcal{P}_8$  est réalisable, alors il l'est par une collection remplissante  $\Gamma$  sur  $\Sigma_2$  qui a une seule face dans son complémentaire: c'est ce qu'on appelle une collection unicellulaire.*

On finit la preuve en déterminant toutes les collections unicellulaires de  $\Sigma_2$  et en vérifiant qu'elles ne réalisent aucun élément de  $\mathcal{P}_8$ .

## 3.1 Minimalité des collections pour la question de réalisation

Soit  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  une collection remplissante de  $\Sigma_g$ .

**Définition 3.1.1.** On dit que  $\Gamma$  est en *position minimale* si les courbes  $\gamma_i$  sont deux à deux en position minimale; c'est-à-dire

$$i(\gamma_i, \gamma_j) = \#\{\gamma_i \cap \gamma_j\}.$$

**Lemme 3.1.1.** *Soit  $\Gamma$  une collection remplissante sur  $\Sigma_g$ . Il existe alors une collection  $\Gamma_{\min}$  remplissante en position minimale telle que  $N_\Gamma = N_{\Gamma_{\min}}$ .*

*Démonstration.* Si  $\Gamma$  n'est pas en position minimale, il existe une homotopie de  $\Gamma$  la rendant minimale. De façon générique, une telle homotopie correspond à une suite finie de mouvements de Reidemester (mouvement 1, 2 et 3; voir figure 3.1). Par le théorème de Hass-Scott [17], on peut choisir l'homotopie descendante c'est-à-dire de sorte que le nombre de points doubles de la collection décroît tout au long de l'homotopie. Les mouvements de Reidemester 1 et 3 ne changent pas la norme d'intersection tandis que le mouvement de Reidemester 2 —effacement d'un bigone— change la norme.

On remplace maintenant le mouvement 2 par un *mouvement 2bis* (voir figure 3.1) qui ne change pas la norme. Ce mouvement par contre change la classe d'homotopie de la collection et diminue le nombre de points doubles de 1. Puisque l'homotopie est descendante et le nombre de points doubles borné inférieurement, on obtient après un nombre fini de mouvement 1, 2bis et 3, une collection en position minimale  $\Gamma_{\min}$  telle que :

$$N_\Gamma = N_{\Gamma_{\min}}.$$

□

### 3.2. ORDRE PARTIEL SUR LES COLLECTIONS REMPLISSANTES

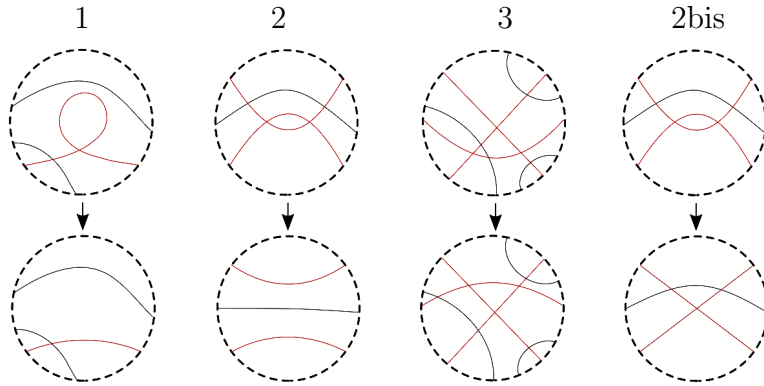


FIGURE 3.1 – De gauche à droite, les trois mouvements de Reidemester avec le mouvement 2bis. Les courbes en rouge représentent des arcs de  $\Sigma_g$  et celles en noir sont des arcs de  $\Gamma$ . On remarque que les mouvements 1 et 3 et le mouvement 2bis ne changent par la norme contrairement au mouvement 2.

## 3.2 Ordre partiel sur les collections remplissantes

Soit  $p$  un point d'auto-intersection d'une collection remplissante en position minimale  $\Gamma$  telle que deux faces différentes  $F_1$  et  $F_2$  ont  $p$  comme sommet commun.

En lissant le point  $p$  (voir figure 3.2 pour l'opération de lissage) de façon à ce que  $F_1$  et  $F_2$  ne fassent plus qu'une seule face, on obtient une nouvelle collection remplissante  $\Gamma'$ . On appelle cette opération *fusion de faces* (voir figure 3.2).

**Définition 3.2.1.** Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux collections remplissantes en position minimales. On dit que  $\Gamma_2 \leq \Gamma_1$  si  $\Gamma_2$  est obtenue après un nombre fini de mouvements de Reidemester 1, 2bis, 3 et de fusions de faces sur  $\Gamma_1$ .

On définit ainsi une relation d'ordre partiel sur les collections remplissantes en position minimales. On a :

**Lemme 3.2.1.** Si  $\Gamma_2 \leq \Gamma_1$ , alors  $N_{\Gamma_2} \leq N_{\Gamma_1}$ .

*Démonstration.* Soit  $\Gamma_1$  une collection remplissante en position minimale et  $\tilde{\Gamma}_2$  la collection obtenue par additions de deux faces  $F_1$  et  $F_2$  en un point

### 3.2. ORDRE PARTIEL SUR LES COLLECTIONS REMPLISSANTES

d'auto-intersection de  $p$ . Les collections  $\Gamma_1$  et  $\tilde{\Gamma}_2$  diffèrent dans un petit voisinage de  $p$ . Donc, pour toute courbe  $\alpha$  sur  $\Sigma_g$ ,

$$\#\{\alpha \cap \tilde{\Gamma}_2\} \leq \#\{\alpha \cap \Gamma_1\},$$

ce qui entraîne que  $N_{\tilde{\Gamma}_2} \leq N_{\Gamma_1}$ . Puisque les mouvements de Reidemester 1, 2bis et 3 ne changent pas la norme, alors  $N_{\Gamma_2} \leq N_{\Gamma_1}$ . Ce qui achève la preuve.  $\square$

**Définition 3.2.2.** Soit  $\Gamma$  une collection sur  $\Sigma_g$ .

La collection  $\Gamma$  est dite *bi-coloriable* si on peut colorier ses faces en blanc et noir de sorte que deux faces ayant une arête commune n'aient pas les mêmes couleurs.

La collection  $\Gamma$  est dite *unicellulaire* si elle a un seul disque dans son complémentaire.



FIGURE 3.2 – Lissage d'un point double et fusion de faces.

Si  $\Gamma$  est une collection bi-coloriable, alors  $N_\Gamma$  restreint à l'homologie entière de  $\Sigma_g$  ne prend que des valeurs paires. En effet, une courbe quelconque de  $\Sigma_g$  traverse alternativement les régions blanches et noires de  $\Gamma$ . D'où la parité de  $\#\{\alpha \cap \Gamma\}$  pour toute courbe  $\alpha$ ; ce qui entraîne la parité de  $N_\Gamma$ .

On note aussi que si  $\Gamma_2$  est obtenue par fusion de faces sur  $\Gamma_1$  alors  $\Gamma_2$  est bi-coloriable si et seulement  $\Gamma_1$  l'est.

Le résultat suivant est la pierre angulaire de ce chapitre.

**Lemme 3.2.2.** *Si  $\Gamma$  est une collection qui n'est pas bi-coloriable, alors il existe une suite finie  $\Gamma_0 = \Gamma \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma_n$  de fusions de faces telle que  $\Gamma_n$  est unicellulaire.*

*Démonstration.* Soit  $\Gamma$  une collection remplissante et  $\Gamma_0 = \Gamma \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma_n$  une suite de fusions de faces où  $\Gamma_n$  est telle qu'aucune fusion de faces n'est possible.

### 3.2. ORDRE PARTIEL SUR LES COLLECTIONS REMPLISSANTES

Soit  $p$  un point double de  $\Gamma_n$  et  $e := (v_1 = p, v_2, \dots, v_n = p)$  un *cycle eulérien* de  $\Gamma_n$  basé en  $p$  : un cycle sur  $\Gamma_n$  de point base  $p$  passant une fois par chaque arête de  $\Gamma_n$ . Puisque tous les sommets de  $\Gamma_n$  sont de degrés paire égale à 4, on a bien l'existence d'un tel cycle. De même, comme une fusion de faces n'est pas possible autour de  $p$ , on a donc deux faces au plus autour de  $p$  ; soient  $F_a$  et  $F_b$  ( $F_a$  éventuellement égale à  $F_b$ ) les faces autour de  $p$ . En tournant autour de  $p$ , on voit  $F_a - F_b - F_a - F_b$ .

Les faces  $F_a$  et  $F_b$  sont aussi des faces autour du sommet  $v_2$  puisque  $v_1$  et  $v_2$  sont les extrémités d'une même arête. La configuration des faces autour de  $v_2$  est aussi  $F_a - F_b - F_a - F_b$  puisqu'une fusion de faces est aussi impossible autour de  $v_2$ .

De proche en proche, en suivant le cycle eulérien, on montre que tous les sommets de  $\Gamma_n$  ont la même configuration de faces autour d'eux :  $F_a - F_b - F_a - F_b$ .

Il s'ensuit alors que  $\Gamma_n$  a soit une face soit deux faces selon que  $F_a = F_b$  ou pas. Si la collection  $\Gamma_n$  a deux faces alors elle est bi-coloriable. D'où la bi-colorabilité de  $\Gamma$ .

En prenant la contraposée, on a la preuve du lemme.  $\square$

Le lemme ci-dessus montre que la réduction par fusions de faces d'une collection remplissante s'arrête soit à une collection unicellulaire soit à une collection bi-coloriable avec deux disques dans son complémentaire.

**Corollaire 3.2.1.** *Soit  $\Gamma$  une collection remplissante sur  $\Sigma_g$  telle que  $B_{N_\Gamma^*} \subset [-1, 1]^{2g}$ , alors il existe une suite finie  $\Gamma_0 = \Gamma \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_n$  de fusions de faces telle que  $\Gamma_n$  est unicellulaire.*

*Démonstration.* La condition  $B_{N_\Gamma^*} \subset [-1, 1]^{2g}$  entraîne que  $N_\Gamma$  prend des valeurs impaires ;  $N_\Gamma$  n'est donc pas bi-coloriable. Le lemme 3.2.2 nous donne le résultat.  $\square$

On détermine maintenant les collections unicellulaires de  $\Sigma_2$ .

**Fait 3.2.1.** *La surface  $\Sigma_2$  admet six collections unicellulaires à homéomorphisme près — voir figure 3.3 pour ces six collections.*

L'algorithme permettant de retrouver les collections unicellulaires de  $\Sigma_2$  est expliqué dans le Chapitre 2. Initialement, dans [28], on déterminait les collections unicellulaires de  $\Sigma_2$  de façon analytique et cette méthode est explicitée dans l'annexe.

### 3.2. ORDRE PARTIEL SUR LES COLLECTIONS REMPLISSANTES

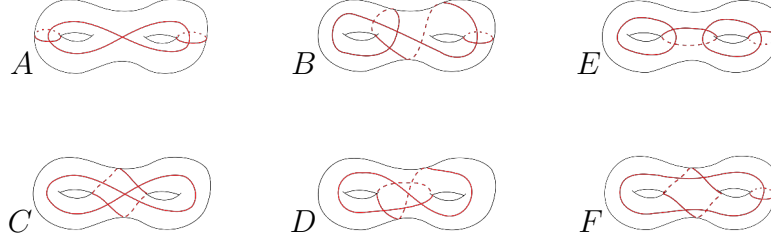


FIGURE 3.3 – Les six collections unicellulaires de  $\Sigma_2$ .

On peut maintenant démontrer le théorème 3.0.1

*Démonstration du théorème 3.0.1.* Par le lemme 3.1.1, on peut se restreindre aux collections en position minimales. Une conséquence du Corollaire 3.2.1 est que si  $P \in \mathcal{P}_8$  est la boule unité duale associée à une norme  $N_\Gamma$ , alors  $\Gamma$  est unicellulaire. Autrement,  $\Gamma$  serait réductible par fusion de faces à une collection unicellulaire  $\Gamma'$  de sorte que  $B_{N_{\Gamma'}}^* \subset B_{N_\Gamma}^*$ ; ce qui voudrait dire que  $B_{N_{\Gamma'}}^*$  a moins de huit sommets et est d'intérieur non vide, ce qui est impossible (les sous-polytopes de  $[-1, 1]^4$  à 8 sommets étant les plus petits d'intérieurs non vide).

Par conséquent,  $\Gamma$  serait l'une des collections de la figure 3.3. On vérifie que les boules unités duales de ces collections ne sont pas des éléments de  $\mathcal{P}_8$ ; ce qui implique que les éléments de  $\mathcal{P}_8$  ne sont pas réalisables.

**Calcul des boules unités duales.** On calcule les boules unités duales en évaluant toutes les co-orientations eulériennes de  $\Gamma$  sur la base symplectique canonique de  $H_1(\Sigma_2, \mathbb{R})$ . On obtient les boules unité suivantes:

$$\begin{aligned}
 A &\mapsto [-1, 1]^4 \\
 B &\mapsto \{\pm(1, 1, -1, 1); \pm(1, 1, -1, -1); \pm(1, -1, -1, 1); \pm(1, -1, -1, -1); \\
 &\quad \pm(1, -1, 1, 1); \pm(1, -1, 1, -1)\} \\
 C &\mapsto \{\pm(1, 1, -1, 1); \pm(1, -1, -1, -1); \pm(1, -1, 1, -1); \pm(1, 1, 1, 1); \\
 &\quad \pm(1, -1, -1, 1)\} \\
 D &\mapsto \{\pm(1, 1, -1, -1); \pm(1, -1, -1, 1); \pm(1, -1, 1, 1); \pm(1, 1, 1, 1); \\
 &\quad \pm(-1, 1, 1, 1)\}.
 \end{aligned}$$

### 3.3. RETOUR À LA NORME DE THURSTON

Les collections unicellulaires  $E$  et  $F$  ont en fait des boules unités duales qui ne sont pas incluses dans  $[-1, 1]^4$  puisque l'un des éléments de la base symplectique intersecte deux fois chacune d'elles.  $\square$

## 3.3 Retour à la norme de Thurston

Soit  $N$  un fibré en cercles au-dessus de  $\Sigma_g$  de classe d'Euler 1, et  $K$  un noeud obtenu par relevé d'une collection remplissante  $\Gamma$  après attachement, comme dans la construction de Thurston [33]. On rappelle que pour  $g = 1$ , la preuve de Thurston consiste à montrer que les surfaces  $S_\alpha$  au-dessus des courbes  $\alpha$ , minimisantes pour  $N_\Gamma$ , sont minimisantes pour la norme de Thurston sur  $N_K$ .

Pour  $g \geq 2$ , cette situation ne perdure pas. En effet, on a des *effets de canalisation* qui apparaissent: des arcs de  $K$  qui intersectent positivement et négativement  $S_\alpha$  (pour  $\alpha$  minimisante) de façon consécutive tout en restant proches dans  $N$ . Dans ce cas, si  $k \geq 2$  désigne le nombre de tels arcs, en remplaçant les  $2k$  composantes de bord de  $S_\alpha \cap N_K$  formées par ces arcs par un "tunnel" qui les entoure (voir figure 3.4), on obtient une surface  $S$  telle que:

$$\chi_-(S) = \chi_-(S_\alpha) - 2k + 2.$$

Une canalisation de plus de deux brins diminue donc la partie négative de la caractéristique d'Euler. Par conséquent  $\chi_-(S_\alpha) = N_\Gamma([\alpha]) \geq N_{Th}([S_\alpha])$ . On a donc l'inégalité

$$N_{Th}(\cdot) \leq N_\Gamma(\pi_*(\cdot)).$$

On propose une construction qui s'ajoute à celle de Thurston et qui aurait pour effet d'égaliser la norme de Thurston et la norme d'intersection.

### Une option pour la généralisation de la construction de Thurston.

Soit  $\Gamma$  une collection remplissante orientée sur  $\Sigma_g$ , de classe d'homologie non nulle. Soit  $\tilde{\Gamma}$  une courbe remplissante obtenue en attachant  $\Gamma$  et  $K$  un relevé  $\Gamma$  dans  $N$ .

Nous allons maintenant modifier d'avantage le noeud  $K$ .

Soient  $p_i$  un point double de  $\tilde{\Gamma}$ ,  $C_p$  un petit cercle centré en  $p_i$  de sorte que  $C_{p_i} \cap C_{p_j} = \emptyset$  pour  $i \neq j$ . Soit  $\{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}\} = C_{p_i} \cap \tilde{\Gamma}$ .

Sur  $K$ , on fait  $n_{ij}$  "twist de Dehn" le long de chaque fibre positive  $F_{ij}$  qui se projète sur  $a_{ij}$ . On choisit les entiers  $n_{ij}$  non nuls et deux à deux distincts.

### 3.3. RETOUR À LA NORME DE THURSTON

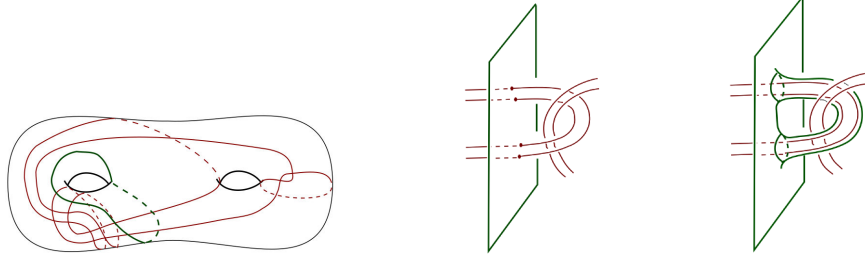


FIGURE 3.4 – Effet de canalisation sur une surface  $S_\alpha$  au-dessus de  $\alpha$ . À gauche, on a une courbe remplissante  $\tilde{\Gamma}$  (en rouge) et une courbe  $\alpha$  (en vert) minimisante pour  $N_\Gamma$ ; au milieu la surface  $S_\alpha$  de genre 1 avec quatre composantes de bord; et à droite la surface de genre 2 obtenue par canalisation des deux arcs qui intersectent  $S_\alpha$ .

On obtient un noeud  $K(n_{ij})$ . Soit,

$$N_{K(n_{ij})} := N - T(\overset{\circ}{K}(n_{ij}))$$

**Lemme 3.3.1.** *Le groupe  $H_2(N_{K(n_{ij})}, \partial N_{K(n_{ij})})$  est isomorphe à  $H_2(N)$ .*

*Démonstration.* On a la suite exacte longue suivante:

$$H_2(T(K(n_{ij}))) \rightarrow H_2(N) \rightarrow H_2(N, T(K(n_{ij}))) \rightarrow H_1(T(K(n_{ij}))) \rightarrow H_1(N) \dots$$

avec  $H_2(T(K(n_{ij}))) = 0$ .

Comme  $[\tilde{\Gamma}] = [\pi(K(n_{ij}))] \neq 0$  ( $K(n_{ij})$  se projetant sur  $\tilde{\Gamma}$ ) alors, l'inclusion

$$i_* : H_1(T(K(n_{ij}))) \longrightarrow H_1(N)$$

est injective. Le morphisme de  $H_2(N) \longrightarrow H_2(N, T(K))$  est donc un isomorphisme, et on obtient l'isomorphisme voulu par excision.  $\square$

Les représentants canoniques des éléments de  $H_2(N_{K(n_{ij})}, \partial N_{K(n_{ij})})$  sont donnés par les surfaces  $S_\alpha := \pi^{-1}(\alpha) \cap N_{K(n_{ij})}$  avec  $\alpha$  minimisante pour  $N_\Gamma$ .

**Conjecture 3.3.1.** *Les surfaces  $S_\alpha := \pi^{-1}(\alpha) \cap N_{K(n_{ij})}$  avec  $\alpha$  minimisante pour  $N_\Gamma$  sont minimisantes pour la norme de Thurston sur  $N_{K(n_{ij})}$ . En d'autres termes, la norme de Thurston sur  $N_{K(n_{ij})}$  est égale au tiré en arrière de la norme d'intersection  $N_\Gamma$ , c'est-à-dire  $N_{K(n_{ij})}(\cdot) = N_\Gamma(\pi_*(\cdot))$ .*

### 3.3. RETOUR À LA NORME DE THURSTON

Une preuve de la conjecture consisterait à montrer que le fait d'avoir rajouter des twist de Dehn aurait pour effet d'empêcher de réduire la complexité des surfaces  $S_\alpha := \pi^{-1}(\alpha) \cap N_K(n_{ij})$  par canalisation d'arcs de  $K(n_{ij})$ .

Au cas où la conjecture serait vraie, on aurait directement une famille de polytopes réalisables pour la norme de Thurston: celles qui viennent de normes d'intersections.

La conjecture est renforcée par le fait que la classification des surfaces incompressibles dans  $N$  est connue. En effet, une version moins générale du théorème de Rannaard [25] appliqué à  $N$  s'énonce comme suit:

**Théorème 3.3.1** (R. Rannaard). *Une surface incompressible  $S$  dans  $N$  est à isotopie près verticale ; c'est-à-dire  $\pi^{-1}(\pi(S)) = S$ .*

Une idée serait de montrer que les surfaces incompressibles de  $N_{K(n_{ij})}$  sont sommes connexes de verticales et de canaux autour d'arcs de  $K(n_{ij})$ ; chaque canal étant porté par un arc. Dans ce cas, on pourrait partir de telles surfaces incompressibles et arriver aux surfaces verticales par découpage, tout en diminuant le partie négative de la caractéristique d'Euler. Ce qui montrerait que les surfaces verticales sont minimisantes dans leurs classes d'homologie respectives.





# Chapitre 4

## Graphe de chirurgies sur les cartes unicellulaires

*"On peut faire de bien belle chose en math,  
même sans savoir ce qu'ont fait vos prédécesseurs"*  
E. GHYS

Dans le Chapitre 3, la non-réalisabilité des polytopes de  $\mathcal{P}_8$  reposait en partie sur la détermination des collections unicellulaires de  $\Sigma_2$ .

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude des *cartes unicellulaires*, les collections unicellulaires pouvant être vues comme des cartes unicellulaires 4-régulières. On présente ici une opération (algorithmique) qui, dans les cas des cartes 4-régulières et 3-régulières, engendre toutes les cartes unicellulaires quelque soit la surface.

### 4.1 Rappels sur les cartes unicellulaires

**Définitions et exemples.** On pourra consulter [18] pour plus détails sur les cartes.

Soient  $\Sigma_g$  une surface orientée de genre  $g$  et  $\text{Homeo}^+(\Sigma_g)$  l'ensemble des homéomorphismes de  $\Sigma_g$  préservant l'orientation.

**Définition 4.1.1.** Une *carte* sur  $\Sigma_g$  est un graphe  $G := (V, E)$  plongé dans  $\Sigma_g$  de sorte que:

- les sommets  $V(G)$  de  $G$  sont représentés par des points distincts de  $\Sigma_g$ ;

#### 4.1. RAPPELS SUR LES CARTES UNICELLULAIRES

- les arêtes  $E(G)$  sont représentées par des arcs de  $\Sigma_g$  qui s'intersectent seulement en les sommets ;
- le complémentaire de  $G$  dans  $\Sigma_g$  est une réunion de disques.

Si  $\Sigma_g - G$  est un disque on parle de *carte unicellulaire*.

Les cartes de  $\Sigma_g$  sont considérées modulo l'action du groupe  $\text{Homeo}^+(\Sigma_g)$ . Une carte unicellulaire est munie naturellement d'un ordre cyclique sur les arêtes incidentes à un sommet ; l'ordre étant obtenu en tournant autour d'un sommet dans le sens de l'orientation de  $\Sigma_g$ .

**Définition 4.1.2.** La *partition en degrés* d'une carte  $G$  est la suite finie  $(d_1, \dots, d_n)$  d'entiers positifs telle que :

- $d_i \leq d_{i+1}$  pour  $i = 1, \dots, n - 1$  ;
- $d_i$  est le degré d'un sommet  $v_i \in V(G)$ .

Si  $G$  est une carte régulière,  $d$  désigne dans ce cas le degré commun des sommets de  $G$ .

Une carte unicellulaire se représente généralement par :

- sa *représentation plongée* où la carte est représenté sur la surface  $\Sigma_g$  ;
- sa *représentation en brin* qui consiste à représenter le graphe dans le plan tout en respectant l'ordre cyclique autour des sommets ;
- sa *représentation en ruban* dans laquelle on représente la carte sur le plan en épaississant ces arêtes et en respectant l'ordre cyclique autour des sommets.

**Remarque 4.1.1.** Dans la représentation en ruban d'une carte unicellulaire, le bord de la surface obtenue est connexe.

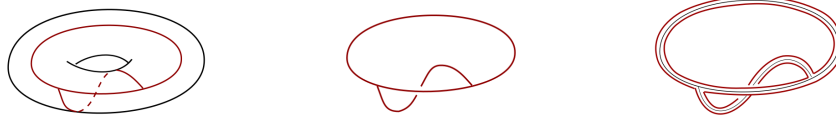


FIGURE 4.1 – La représentation plongée, la représentation en brin et la représentation en ruban d'une carte unicellulaire sur le tore.

Dans ce chapitre, on s'intéressera plus particulièrement à deux familles de cartes unicellulaires: les *cartes cubiques unicellulaires* et les *cartes quartiques unicellulaires*. Ce sont les cartes régulières de degré 3 et 4 respectivement. Les cartes quartiques unicellulaires correspondent aux collections unicellulaires déjà introduites dans le Chapitre 2.

#### 4.1. RAPPELS SUR LES CARTES UNICELLULAIRES

**Description combinatoire des cartes unicellulaires.** Soit  $G : (V, E)$  une carte unicellulaire sur  $\Sigma_g$  de partition en degrés  $(d_1, \dots, d_n)$ . La caractéristique d'Euler de  $\Sigma_g$  est donnée par  $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g = |V| - |E| - |F|$ , ce qui implique que

$$|E| - |V| = 2g - 1, \quad |F| = 1$$

De plus, on vérifie que:

$$\sum d_i = 2|E|.$$

**Mots associés à une carte unicellulaire.** Soit  $P_G := \Sigma_g - G$  le polygone dans le complémentaire de  $G$ . La surface  $\Sigma_g$  munie de la carte  $G$  est obtenue par un appariement de côtés sur  $P_G$ .

En étiquetant les côtés de  $P_G$  à partir d'une arête origine et dans le sens de l'orientation de  $P_G$  induite par celle de  $\Sigma_g$ , on obtient un mot  $W_G$  de longueur  $2E$ .

On donne aux arêtes identifiées de  $P_G$  la même étiquette avec le symbole bar ( $\bar{\phantom{a}}$ ) sur la deuxième étiquette. Le mot obtenu est bien défini modulo permutation cyclique et réétiquetage. On vérifie aussi que deux cartes unicellulaires  $G_1$  et  $G_2$  sont égales si et seulement si les mots respectifs  $W_{G_1}$  et  $W_{G_2}$  sont égaux modulo permutation cyclique et réétiquetage.

**Exemple 4.1.1.** La figure 4.2 représente l'unique collection unicellulaire du tore; on la note  $\Gamma_{\mathbb{T}}$  dans tout ce qui suit. On associe à cette collection le mot

$$W_{\mathbb{T}} = ab\bar{a}\bar{b}.$$

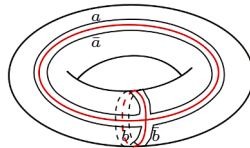


FIGURE 4.2 – L'unique collection unicellulaire (carte unicellulaire quartique) du tore.

#### 4.1. RAPPELS SUR LES CARTES UNICELLULAIRES

**Permutations associées aux cartes unicellulaires.** Soient  $H$  l'ensemble des étiquettes d'un mot  $W_G$  associées à une carte unicellulaire  $G$ ,  $\alpha$  la permutation de  $H$  qui à  $a \mapsto \bar{a}$ ,  $\gamma$  le cycle de longueur  $2E$  donnée par le décalage à droite sur le mot  $W_G$  et  $\mu$  la permutation de  $H$  égale à  $\gamma.\alpha$ .

La permutation  $\alpha$  est une involution sans point fixe; ces cycles  $(x, \bar{x})$  représentent les arêtes de  $\Gamma$  ( $x$  correspond à une arête orientée et  $\bar{x}$  à la même arête mais orientée dans l'autre sens). La permutation  $\gamma$  décrit quant à elle la face de  $G$ , et pour finir les cycles de  $\mu$  sont en bijection avec les sommets de  $G$  puisqu'elles correspondent aux cycles des arêtes sortant d'un sommet.

Tout ceci conduit à la définition combinatoire d'une carte unicellulaire:

**Définition 4.1.3.** Une *carte unicellulaire combinatoire* est la donnée d'un triplet de permutation  $(\alpha, \mu, \gamma)$  tel que  $\alpha$  est une involution sans point fixe,  $\gamma$  un cycle de longueur maximale et  $\mu = \gamma\alpha$ .

Les définitions combinatoire et topologique des cartes sont équivalentes (voir [18].)

Dans ce qui suit, ces deux définitions seront parfois utilisées simultanément.

**Exemple 4.1.2.** Dans la figure 4.3, on donne l'exemple d'une carte régulière de degré 4 ainsi que sa description polygonale (les arêtes de même couleur sont celles qui sont identifiées). À cette carte correspond le mot

$$W = abcd\bar{b}\bar{e}\bar{c}\bar{f}\bar{a}\bar{e}\bar{f}\bar{d},$$

et le triplet de permutations suivant:

$$\gamma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12), \quad \alpha = (1\ 9)(2\ 5)(3\ 7)(4\ 12)(6\ 10)(8\ 11),$$

$$\mu = (1\ 10\ 7\ 4)(2\ 6\ 11\ 9)(3\ 8\ 12\ 5).$$

**Remarque 4.1.2.** On a un ordre cyclique sur les arêtes orientées de  $G$  donnée par:

$$x < \gamma(x) < \dots < \gamma^k(x), \quad k = 2E - 1.$$

Si  $x$  et  $y$  sont deux arêtes orientées de  $G$ , on définit l'arc  $[x, y]$  d'extrémités  $x$  et  $y$  par:

$$[x, y] := \{t, x < t < y\}.$$

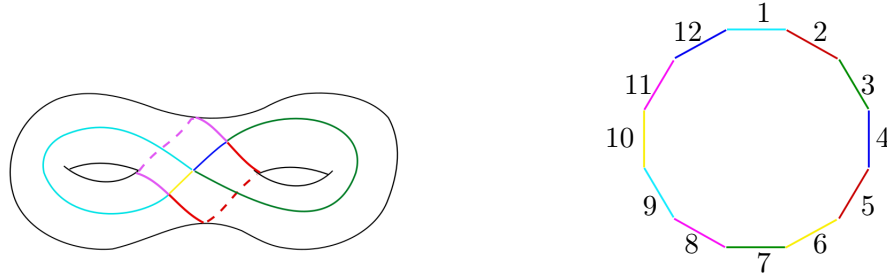


FIGURE 4.3

## 4.2 Définition et caractérisation des chirurgies

**Chirurgie sur les cartes unicellulaires.** On décrit maintenant l'opération de chirurgie sur une carte unicellulaire  $G$  de  $\Sigma_g$ .

Soient  $x$  et  $y$  deux arêtes orientées de  $G$ . On rappelle que  $x$  et  $y$  correspondent à deux côtés de  $P_G$ .

Puisque  $G$  est unicellulaire, il existe un arc simple  $\lambda_{x,y}$  de  $x$  à  $y$  et d'intérieur disjoint de  $G$ . L'arc  $\lambda_{x,y}$  est unique à homotopie relative près.

On obtient un nouveau graphe  $\sigma_{x,y}(G)$  (avec la même partition en degrés) en "ouvrant"  $G$  le long de  $\lambda_{x,y}$  (Voir figure 4.4). Ce faisant, le graphe  $\sigma_{x,y}(G)$  n'est a priori pas une carte unicellulaire.

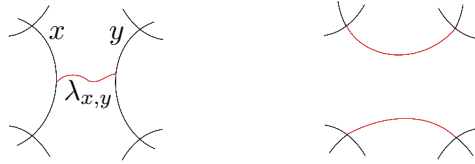


FIGURE 4.4 – Opération d'ouverture le long de l'arc  $\lambda_{x,y}$ .

**Définition 4.2.1.** Soient  $x$  et  $y$  deux arêtes orientées de  $G$ . On dit que  $(x, y)$  et  $(\bar{x}, \bar{y})$  sont *entrelacées* si  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  ne sont pas tous deux dans  $[x, y]$  ou tous deux dans  $[y, x]$ . Par abus, on dira seulement que  $x$  et  $y$  sont entrelacées pour faire référence à l'entrelacement entre  $(x, y)$  et  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

## 4.2. DÉFINITION ET CARACTÉRISATION DES CHIRURGIES

On caractérise maintenant les opérations, définies ci-dessus, qui donnent une carte unicellulaire.

**Lemme 4.2.1** (Battage de carte). *Si  $G$  est une carte unicellulaire, alors le graphe  $\sigma_{x,y}(G)$  est unicellulaire si et seulement si  $x$  et  $y$  sont entrelacées.*

*De plus, si  $w_1xw_2\bar{x}w_3w_4\bar{y}$  est un mot associé à  $G$ , alors  $w_3Xw_2\bar{X}w_1Yw_4\bar{Y}$  est un mot associé à  $\sigma_{x,y}(G)$ .*

*Démonstration.* Puisque  $\sigma_{x,y}(G)$  est un graphe de même partition en degrés que  $G$ , il suffit de montrer que  $\sigma_{x,y}(G)$  a une face dans son complémentaire. Pour cela, on procède par découpage et recollement du polygone  $P_G$  (voir figure 4.5).

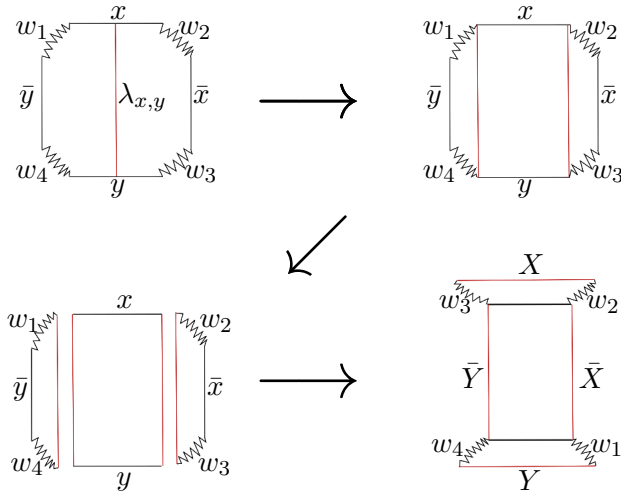


FIGURE 4.5 – Découpage et recollement de  $P_G$ .

Supposons que  $x$  et  $y$  sont entrelacées. En "ouvrant" le long de  $\lambda_{x,y}$ , les arêtes  $(x, \bar{x})$  et  $(y, \bar{y})$  sont remplacées par les nouvelles arêtes  $(X, \bar{X})$  et  $(Y, \bar{Y})$ . En coupant le polygone le long des nouvelles arêtes et en recollant les morceaux le long des anciennes (voir figure 4.5), on obtient un polygone dont tous les côtés sont deux à deux identifiés.

D'où le fait que  $\sigma_{x,y}(G)$  est une carte unicellulaire. Le mot de  $\sigma_{x,y}(G)$  se lit directement après le recollement et on a :  $W_{\sigma_{x,y}(G)} = w_3Xw_2\bar{X}w_1Yw_4\bar{Y}$ .

## 4.2. DÉFINITION ET CARACTÉRISATION DES CHIRURGIES

Supposons d'autre part que  $x$  et  $y$  ne sont pas entrelacées. On construit alors une courbe essentielle disjointe de  $\sigma_{x,y}(G)$  (voir figure 4.6 ), ce qui entraîne que  $\sigma_{x,y}(G)$  n'est pas unicellulaire.

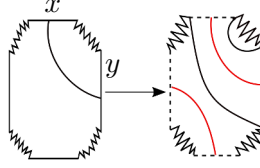


FIGURE 4.6 – Les deux arcs en rouge définissent une courbe essentielle sur  $\Sigma_g$  (puisque'elle intersecte algébriquement deux fois  $\Gamma$ ), et disjointe de  $\Gamma'$ .

□

**Définition 4.2.2** (Chirurgie). L'opération  $\sigma_{x,y}(G)$  sur une carte  $G$ , quand  $x$  et  $y$  sont entrelacées est appelée *chirurgie* sur  $G$ , le long de  $x$  et  $y$ .

**Remarque 4.2.1.** Le mot  $W_{\sigma_{x,y}(G)}$  dans le lemme 4.2.1 est obtenu en permutant  $w_1$  et  $w_3$ . C'est équivalent, à permutation cyclique et réétiquetage près, à permuter  $w_2$  et  $w_4$ .

**Remarque 4.2.2.** Si  $x$  et  $y$  sont entrelacées, alors  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  le sont aussi. De plus on vérifie que  $\sigma_{x,y}(G)$  et  $\sigma_{\bar{x},\bar{y}}(G)$  définissent la même carte unicellulaire.

**Graphe de chirurgies.** Soit  $G' := \sigma_{x,y}(G)$  une carte unicellulaire obtenue par chirurgie sur  $G$ ;  $G'$  et  $G$  ont donc la même partition en degrés. On définit le *graphe de chirurgies*, noté  $K_{d,g}$ , sur l'ensemble des cartes unicellulaires sur  $\Sigma_g$  de partition en degrés égale  $d$ , de la façon suivante:

- les sommets sont les cartes unicellulaires ;
- deux cartes unicellulaires  $G_1$  et  $G_2$  partagent une arête si  $G_2 = \sigma_{x,y}(G_1)$  pour un certain couple  $(x, y)$ .

**Question 4.2.1.** *Etant donné un genre  $g$  et une partition en degrés  $d$ , le graphe  $K_{d,g}$  est-t-il connexe ?*

Les cartes unicellulaires étant entièrement déterminées par leurs mots, une réponse positive à la question 4.2.1 combinée au lemme 4.2.1 donnerait un algorithme engendrant toutes les cartes unicellulaires sur  $\Sigma_g$  et de partition en degrés égale à  $d$ . C'est exactement ce qu'on fait pour déterminer toutes les collections unicellulaires de  $\Sigma_2$ , après avoir montré le théorème suivant:



### 4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

**Théorème 4.2.1.** *Pour tout  $g \geq 1$ , le graphe de chirurgies  $K_{4,g}$  des collections unicellulaires est connexe. De plus, si  $D_g$  désigne le diamètre de  $K_{4,g}$ , on a :*

$$g \leq D_g \leq 3g^2 + 9g - 12.$$

Comme conséquence de la connexité des  $K_{4,g}$ , on a:

**Théorème 4.2.2.** *Pour tout  $g \geq 1$ , le graphe de chirurgies  $K_{3,g}$  des cartes cubiques unicellulaires est connexe.*

Le reste du chapitre se consacre à la démonstration du théorème 4.2.1 et du théorème 4.2.2.

## 4.3 Graphe de chirurgies sur les collections unicellulaires

On s'intéresse dans cette section aux cartes unicellulaires régulières de degré 4. Elles sont équivalentes aux collections unicellulaires et on adoptera cette dernière appellation dans cette section. Pour les collections unicellulaires, on a:

$$V = 2g - 1, \quad E = 4g - 2.$$

**Somme connexe de collections unicellulaires.** Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux collections unicellulaires sur  $\Sigma_{g_1}$  et  $\Sigma_{g_2}$ , respectivement. On note par  $\Sigma_{g_1} \# \Sigma_{g_2}$  la somme connexe des surfaces; la somme connexe étant faite le long de disques disjoints de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

Puisque  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont unicellulaires, cette somme connexe est bien définie et le complémentaire de  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  dans  $\Sigma_{g_1} \# \Sigma_{g_2}$  est un anneau.

Maintenant, soient  $x$  et  $y$  deux arêtes orientées de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , respectivement, et  $\lambda_{x,y}$  un arc simple de  $\Sigma_{g_1} \# \Sigma_{g_2}$  disjoint de  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  et allant de  $x$  à  $y$ . Le graphe  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \lambda_{x,y}$  est clairement unicellulaire.

Par conséquent, la collection  $\Gamma' := \Gamma_1 \cup \Gamma_2 / \lambda_{x,y}$  (le quotient étant la contraction de  $\lambda_{x,y}$ ; voir figure 4.7) est une collection unicellulaire. On dit alors que  $\Gamma'$  est obtenue par *somme connexe* des collections marquées  $(\Gamma_1, x)$  et  $(\Gamma_2, y)$ . On le note

$$\Gamma' = (\Gamma_1, x) \# (\Gamma_2, y).$$

4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES



FIGURE 4.7 – Somme connexe

**Définition 4.3.1.** Deux arêtes orientées  $x$  et  $y$  d'une collection unicellulaire  $\Gamma$  sont dites *symétriques* si le mot associé à  $\Gamma$  avec  $x$  pour origine et le mot associé  $\Gamma$  avec  $y$  pour origine sont identiques modulo réétiquetage.

**Exemple 4.3.1.** L'unique collection du tore a toutes ses arêtes orientées qui sont symétriques.

**Lemme 4.3.1.** Si  $W_{\Gamma_1} = xw_1\bar{x}w_2$  et  $W_{\Gamma_2} = yw'_1\bar{y}w'_2$  sont des mots associés à  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  respectivement, et si les mots  $w_1w_2$  et  $w'_1w'_2$  n'ont pas de lettres en commun, alors

$$x_1w_1\bar{x}_1x_2w_2\bar{x}_2y_1w'_1\bar{y}_1y_2w'_2\bar{y}_2$$

est un mot associé à  $(\Gamma_1, x)\#(\Gamma_2, y)$ .

Donc, si  $y$  et  $y'$  sont symétriques alors  $(\Gamma_1, x)\#(\Gamma_2, y)$  et  $(\Gamma_1, x)\#(\Gamma_2, y')$  sont égales.

*Démonstration.* La preuve se lit directement sur la figure 4.7. □

Le lemme 4.3.1 implique que la somme connexe d'une collection unicellulaire  $\Gamma$  avec la collection unicellulaire  $\Gamma_{\mathbb{T}}$  du tore ne dépend que de l'arête orientée sur  $\Gamma$ , puisque toutes les arêtes orientées de  $\Gamma_{\mathbb{T}}$  sont symétriques.

On définit le graphe de *chirurgie-somme connexe*  $\hat{K}_{4,g}$  de la manière suivante:

- les sommets sont les collections unicellulaires sur  $\Sigma_i$  avec  $1 \leq i \leq g$ ;
- deux collections unicellulaires  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont jointes par une arête si  $\Gamma_2 = \sigma_{x,y}(\sigma_1)$  ou si  $\Gamma_2 = (\Gamma_1, x)\#\Gamma_{\mathbb{T}}$ .

Le graphe  $\hat{K}_{4,g}$  est à égal la réunion des  $K_{4,i}$  pour  $i \leq g$ , à laquelle on rajoute des arêtes supplémentaires définies par la somme connexe.

**Théorème 4.3.1.** *Le graphe  $\hat{K}_{4,g}$  est connexe pour tout  $g \geq 1$ .*

On montre aussi le résultat suivant:

**Proposition 4.3.1.** Le graphe  $\hat{K}_{4,\infty} := \cup_{g \geq 1} \hat{K}_{4,g}$  n'est pas hyperbolique.

### 4.3.1 Connexité du graphe de chirurgies-sommes connexes

$\hat{K}_{4,g}$

Commençons par la définition suivante:

**Définition 4.3.2.** Une composante  $\theta$  d'une collection unicellulaire  $\Gamma$  est dite *1-simple* si  $\theta$  est une courbe simple et  $i(\theta, \Gamma - \theta) = 1$ .

Le théorème 4.3.1 dit implicitement que partant d'une collection  $\Gamma$ , il existe une suite  $\Gamma_0 := \Gamma \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_n$  de chirurgies telle que  $\Gamma_n = (\Gamma', x) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$ . Par conséquent, une étape de la suite consistera à créer une courbe 1-simple si  $\Gamma$  n'en avait pas au début; puisque  $\Gamma_n$  a au moins une courbe 1-simple (celle qui vient de la somme connexe).

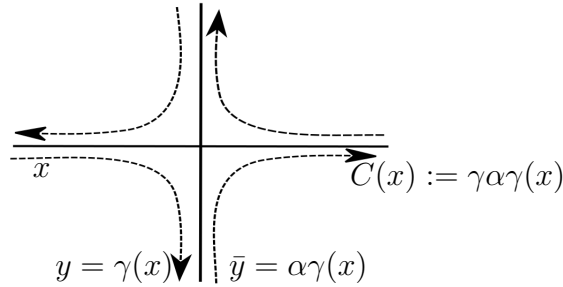


FIGURE 4.8 – Une arête orientée et sa consécutive.

**Simplification d'une collection unicellulaire.** Soit  $(H, \alpha, \mu, \gamma)$  le triplet de permutation associé à une collection unicellulaire  $\Gamma$ ;  $H$  étant l'ensemble des arêtes orientées. Soit  $x$  une arête orientée de  $\Gamma$ , l'arête  $C(x) := \gamma \alpha \gamma(x)$  appartient à une même courbe  $\beta \in \Gamma$  que l'arête  $x$  et elles sont consécutives sur  $\beta$  (voir figure 4.8). De plus, la suite  $(C^n(x))_n$  est périodique et correspond à la courbe  $\beta$  munie d'une orientation. On remarque que  $C(x) = x$  si et seulement si  $x$  est une courbe 1-simple orientée. Notons  $S_\Gamma$  le nombre de

### 4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

courbes 1-simples de  $\Gamma$ . On a  $S_\Gamma \leq g$ . En effet, comme  $\Gamma$  est unicellulaire, aucune de ses composantes n'est séparante. Par conséquent, si  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont deux courbes 1-simples de  $\Gamma$ , soit elles s'intersectent auquel cas  $\Gamma = \Gamma_{\mathbb{T}}$ , soit elles sont disjointes ce qui entraîne que leur nombre est inférieur ou égal au genre de la surface.

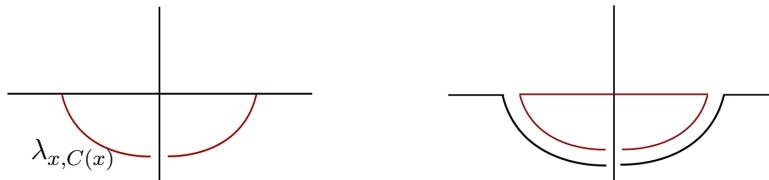


FIGURE 4.9 – Simplification d'une collection unicellulaire ; la courbe en rouge étant la nouvelle composante 1-simple créée.

**Définition 4.3.3.** Si  $x$  et  $C(x)$  sont entrelacées, on appelle *simplification* la chirurgie sur  $\Gamma$  le long de  $x$  et  $C(x)$ , et  $\Gamma' := \sigma_{x,C(x)}(\Gamma)$  est dite obtenue par simplification sur  $\Gamma$ .

Le lemme suivant justifie le terme simplification, puisqu'il montre qu'une simplification produit au moins une courbe 1-simple.

**Lemme 4.3.2.** Si  $\Gamma' := \sigma_{x,C(x)}(\Gamma)$ , alors  $S_{\Gamma'} \geq S_\Gamma + 1$ .

*Démonstration.* Si  $x$  et  $C(x)$  sont entrelacées, alors un mot associé  $\Gamma$  s'écrit de la façon suivante (le mot est lu sur la figure 4.8):

$$W_\Gamma = (tw'_1)\mathbf{x}(yw'_2\bar{t})\bar{\mathbf{x}}(w'_3\bar{y})\mathbf{C}(\mathbf{x})w_4\overline{\mathbf{C}(\mathbf{x})}.$$

D'après le lemme 4.2.1, un mot de  $\Gamma' := \sigma_{x,C(x)}(\Gamma)$  est donné par:

$$W_{\Gamma'} = w'_3\bar{y}\mathbf{X}yw'_2\bar{t}\bar{\mathbf{X}}tw'_1\mathbf{Z}w_4\bar{\mathbf{Z}}.$$

Sur  $\Gamma'$ , on a  $C(X) = \gamma\alpha\gamma(X) = \gamma\alpha(y) = \gamma(\bar{y}) = X$ : ce qui entraîne que  $X$  est une nouvelle courbe orientée 1-simple.  $\square$

**Définition 4.3.4.** Une collection unicellulaire est dite *non simplifiable* s'il n'existe pas de simplification possible sur  $\Gamma$ . Ce qui équivaut à dire que  $x$  et  $C(x)$  ne sont pas entrelacées pour toute arête orientée  $x$ .

**Remarque 4.3.1.** On a des exemples de collections unicellulaires non simplifiable sans courbes 1-simples (voir figure 4.19).

**Ordres cycliques autour des sommets d'une collection non simplifiable.** Dans ce paragraphe, on montre que les sommets d'une collection non simplifiable sont d'un certain type.

Soient  $\Gamma$  une collection unicellulaire et  $(H, \alpha, \mu, \gamma)$  le triplet de permutations associé à  $\Gamma$ . On rappelle qu'on a un ordre cyclique sur les arêtes orientées donné par:

$$x < \gamma(x) < \dots < \gamma^{8g-3}(x).$$

Si  $v$  est un sommet de  $\Gamma$  défini par un cycle  $(txyz)$  de  $\mu$ , on obtient un ordre local autour de  $v$  en ordonnant les arêtes orientées  $t, x, y$  et  $z$ . Puisque chaque arête orientée est incidente à un secteur angulaire autour de  $v$  (celui qui se trouve à droite de l'arête relativement à l'orientation de  $\Sigma_g$ ), l'ordre local sur les sommets correspond aussi à un ordre sur les quatre secteurs angulaires autour de  $v$  et vice versa.

**Définition 4.3.5.** Soit  $v$  un sommet de  $\Gamma$  défini par le cycle  $(txyz)$  de  $\mu$  ( $x = \mu(t), y = \mu^2(t), z = \mu^3(t)$ ) tel que  $t = \min\{t, x, y, z\}$ . On dit que

- $v$  est un sommet de *type 1* si  $t < x < y < z$ ;
- $v$  est un sommet de *type 2* si  $t < z < y < x$ .

Autrement, on dit que  $v$  est un sommet de *type 3*.

A permutation cyclique près des indices, on a les trois types de sommets représentés sur la figure 4.10.

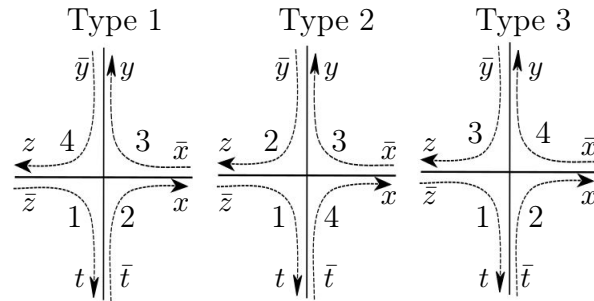


FIGURE 4.10 – Différents types de sommets d'une collection unicellulaire.

**Lemme 4.3.3.** Une collection unicellulaire est non simplifiable si et seulement si elle n'a que des sommets de *type 1* ou de *type 2*.

### 4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

*Démonstration.* La démonstration se fera cas par cas selon le type de sommet regardé.

**1er cas.** Si  $v$  est un sommet de type 1, alors un mot associé à  $\Gamma$  est donné par (le mot est lu sur la figure 4.10):

$$W_\Gamma = w_1 \bar{z} t w_2 \bar{t} x w_3 \bar{x} y w_4 \bar{y} z.$$

On vérifie bien que  $\bar{x}$  et  $C(\bar{x}) = z$  ne sont pas entrelacées pas plus que  $\bar{t}$  et  $C(\bar{t}) = y$ . Il vient donc qu'aucune simplification n'est possible autour de  $v$ .

**2e cas.** Si  $v$  est un sommet de type 2, on a:

$$W_\Gamma = w_1 \bar{z} t w_2 \bar{y} z w_3 \bar{x} y w_4 \bar{t} x.$$

Les arêtes  $\bar{x}$  et  $C(\bar{x}) = z$  ne sont pas entrelacées, pas plus que  $\bar{t}$  et  $C(\bar{t}) = y$ . Une simplification n'est donc pas possible autour d'un sommet de type 2.

**3e cas.** Si  $v$  est un sommet de type 3, alors:

$$W_\Gamma = w_1 \bar{z} t w_2 \bar{t} x w_3 \bar{y} z w_4 \bar{x} y.$$

Dans ce cas,  $\bar{t}$  et  $C(\bar{t}) = y$  sont entrelacées; une simplification est donc possible.

La collection  $\Gamma$  est donc non simplifiable si et seulement si tous ses sommets sont de type 1 et de type 2.  $\square$

**Lemme de Trisection et cardinal des sommets de type 1 et de type 2.** G. Chapuy définit dans [7], une notion qui capture la topologie d'une carte unicellulaire: c'est la notion de *trisection*. On rappelle cette notion, puisqu'elle nous sera très utile pour la suite.

Soit  $G$  une carte unicellulaire et  $(H, \alpha, \mu, \gamma)$  les permutations associées à  $G$ . Soit  $v$  un sommet de  $G$  de degré  $n$  défini par le cycle  $(x_1 x_2 \dots x_n)$  de  $\mu$ , avec  $x_1 := \min\{x_1, \dots, x_n\}$  relativement à un ordre de  $H$ .

**Définition 4.3.6** (G. Chapuy, [7]). Une arête orienté  $x_i$  est une *descente* si  $x_i \geq \mu(x_i)$ . Une descente  $x_i$  est appelé une *trisection* si  $\mu(x_i) \neq x_1$ , c'est-à-dire si ce n'est pas une descente vers le minimum autour de  $v$ .

**Lemme 4.3.4** (Lemme de trisection, [7]). *Soit  $G$  une carte unicellulaire sur  $\Sigma_g$ ,  $G$  a exactement  $2g$  trisections.*

Comme conséquence du lemme de trisection, on a:

**Corollaire 4.3.1.** *Une collection unicellulaire non simplifiable sur  $\Sigma_g$  a exactement  $g$  sommets de type 2 et  $g - 1$  sommets de type 1.*

*Démonstration.* Un sommet de type 2 (respectivement de type 1) a deux trisections (respectivement zero trisection) —voir figure 4.10.

Si  $N_i$  désigne le nombre de sommets de type  $i$  ( $i=1,2$ ), d'après le lemme de trisection on a  $2N_2 = 2g$ . D'où  $N_2 = g$ .

Puisque  $|V| = N_1 + N_2 = 2g - 1$ , il vient donc que  $N_1 = g - 1$ .  $\square$

**Repartition des sommets d'une collection unicellulaire non simplifiable.** On montre dans cette partie qu'en utilisant convenablement les chirurgies, on peut ré-ordonner les sommets d'une collection unicellulaire non simplifiable.

Deux sommets  $v_1$  et  $v_2$  de  $\Gamma$  sont dits *adjacents* s'ils ont au moins une arête commune. Si  $v_1 = (abcd)$  et  $v_2 = (efgh)$ , dire que  $v_1$  et  $v_2$  sont adjacents revient à dire qu'il existe  $x \in \{a, b, c, d\}$  tel que  $\bar{x} \in \{e, f, g, h\}$ .

Dans ce qui suit, on montre que certaines configurations de voisinage entre les sommets cachent des simplifications, c'est-à-dire qu'on peut rendre la collection simplifiable après une chirurgie bien choisie sans éliminer les anciennes courbes 1-simples.

**Lemme 4.3.5.** *Soit  $\Gamma$  une collection unicellulaire non simplifiable contenant deux sommets de type 2 adjacents. Il existe alors une suite  $\Gamma_0 = \Gamma \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_n$  de chirurgies telle que  $\Gamma_n$  est non simplifiable et telle que  $S_\Gamma < S_{\Gamma_n}$ .*

*Démonstration.* Soient  $v_1 = (b\bar{f}\bar{g}\bar{a})$  et  $v_2 = (c\bar{d}\bar{e}\bar{b})$  deux sommets de type 2 adjacents (Voir figure 4.11).

Fixons une arête d'origine de sorte que

$$a = \min\{a, \bar{c}, d, e, f, g\}.$$

L'ordre local est donné par:

$$a < b < c < g < \bar{a} < f < \bar{g} < e < \bar{b} < \bar{f} < d < \bar{e} < \bar{c} < \bar{d}.$$

Autrement, on aurait une contradiction sur le fait que  $v_1$  et  $v_2$  sont des sommets de type 2. Un mot de  $\Gamma$  est alors donné par:

$$W_\Gamma = w_1abcw_2g\bar{a}w_3f\bar{g}w_4e\bar{b}\bar{f}w_5d\bar{e}w_6\bar{c}\bar{d}.$$

### 4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

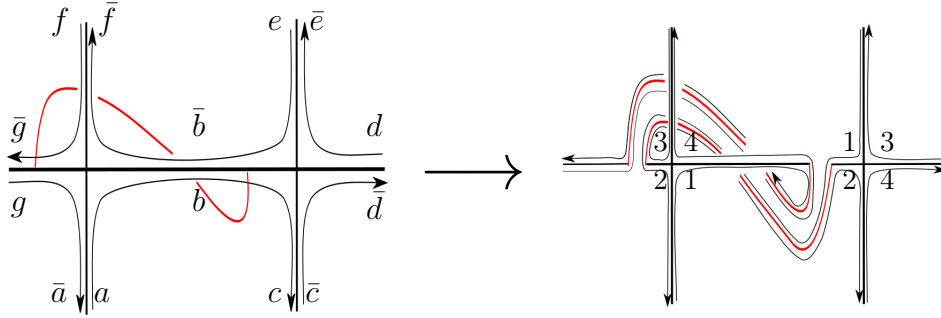


FIGURE 4.11 – Chirurgie faisant apparaître des simplifications. À gauche,  $a < g < f < e < d < \bar{c}$  est l'ordre dans lequel on tourne autour des points  $v_1$  et  $v_2$ . Sur la figure à droite, on a les ordres autour de chaque sommet  $v_1$  et  $v_2$ .

Les arêtes orientées  $b$  et  $\bar{g}$  sont entrelacées et soit  $\Gamma' := \sigma_{b,\bar{g}}(\Gamma)$ . D'après le lemme 4.2.1, on a:

$$W_{\Gamma'} = \bar{a}w_3f\mathbf{B}cw_2\mathbf{G}\bar{f}w_5d\bar{e}w_6\bar{c}\bar{d}w_1a\bar{\mathbf{G}}w_4e\bar{\mathbf{B}}.$$

Les cycles  $(\bar{G}\bar{f}\bar{B}\bar{a})$  et  $(\bar{B}\bar{c}\bar{d}\bar{e})$  définissent les deux sommets de  $\Gamma'$  sur la figure 4.11 et l'ordre autour de ces deux sommets est donné par:

$$\bar{G} < \bar{a} < \bar{B} < \bar{f}; \quad \bar{B} < \bar{c} < \bar{e} < \bar{d}.$$

Par conséquent, le sommet  $(\bar{B}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e})$  est un sommet de type 3 ce qui implique que  $\Gamma'$  est simplifiable. On a donc une suite  $\Gamma \rightarrow \Gamma_0 = \Gamma' \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_n$  qui accroît strictement le nombre de courbe 1-simples (la chirurgie le long de  $b$  et  $\bar{g}$  ne touchant aucune courbe 1-simple). La sous-suite de  $\Gamma'$  à  $\Gamma_n$  est une suite de simplifications, d'où  $S_\Gamma < S_{\Gamma_n}$ .  $\square$

Soit maintenant  $v_1 = (\bar{c}\bar{d}\bar{e})$  un sommet de type 1 adjacent à  $v_2 = (g\bar{a}bc)$  un sommet de type 2. La configuration locale est décrite sur la figure 4.12. On pose

$$a = \min\{a, \bar{b}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}\}.$$

**Lemme 4.3.6.** *Si  $\min\{\bar{b}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}\} \neq \bar{g}$ , il existe alors une suite  $\Gamma_0 = \Gamma \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_n$  de chirurgies telle que  $\Gamma_n$  est non simplifiable et telle que  $S_\Gamma < S_{\Gamma_n}$ .*



4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

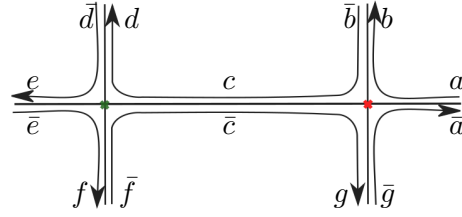


FIGURE 4.12

*Démonstration.* Comme  $v_2$  est un sommet de type 2,  $\min\{\bar{b}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}\}$  est différent de  $\bar{b}$  et  $\bar{f}$ .

**1er cas.** Si  $\min\{\bar{b}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}\} = \bar{d}$ , le fait que les sommets sont de type 1 et 2 entraîne les ordres locaux suivants:

$$a < b < \bar{d} < e < \bar{e} < f < \bar{g} < \bar{a} < \bar{f} < \bar{c} < g < \bar{b} < c < d,$$

ou

$$a < b < \bar{d} < e < \bar{g} < \bar{a} < \bar{e} < f < \bar{f} < \bar{c} < g < \bar{b} < c < d.$$

**1er sous cas.** Si  $a < b < \bar{d} < e < \bar{e} < f < \bar{g} < \bar{a} < \bar{f} < \bar{c} < g < \bar{b} < c < d$ , alors

$$W_\Gamma = w_1 \mathbf{a} b w_2 \bar{d} \mathbf{e} w_3 \bar{e} f w_4 \bar{g} \bar{a} w_5 \bar{f} \bar{c} g w_6 \bar{b} c d$$

est un mot associé à  $\Gamma$ .

Les arêtes orientées  $a$  et  $\bar{e}$  sont entrelacées et soit  $\Gamma' := \sigma_{a, \bar{e}}(\Gamma)$ . Le mot

$$W_{\Gamma'} = w_3 \mathbf{A} b w_2 \bar{d} \mathbf{E} w_5 \bar{f} \bar{c} g w_6 \bar{b} c d w_1 \bar{\mathbf{E}} f w_4 \bar{g} \bar{\mathbf{A}}$$

est associé à  $\Gamma'$ . De plus, les cycles  $(bcg\bar{A})$  et  $(E\bar{f}\bar{c}d)$  définissent les deux sommets de  $\Gamma'$  sur la figure 4.13. On a  $b < g < c < \bar{A}$  et  $E < \bar{c} < d < f$ , ce qui montre que les deux sommets sont donc de type 3.

La collection  $\Gamma'$  est donc simplifiable et il existe une suite de simplifications de  $\Gamma'$  à  $\Gamma_n$  telle que  $\Gamma_n$  est non simplifiable et telle que  $S_{\Gamma_n} > S_{\Gamma'} = S_\Gamma$ . L'égalité  $S_{\Gamma'} = S_\Gamma$  est due au fait que la chirurgie le long de  $a$  et  $\bar{e}$  ne touche pas une composante 1-simple de  $\Gamma$ .

**2e sous cas.** Si  $a < b < \bar{d} < e < \bar{g} < \bar{a} < \bar{e} < f < \bar{f} < \bar{c} < g < \bar{b} < c < d$ , alors

$$W_\Gamma = w_1 \mathbf{a} b w_2 \bar{d} \mathbf{e} w_3 \bar{g} \bar{a} w_4 \bar{e} \mathbf{f} w_5 \bar{f} \bar{c} g w_6 \bar{b} c d$$

est un mot associé à  $\Gamma$ .

4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

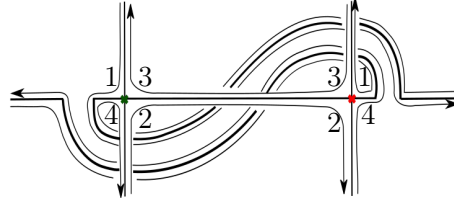


FIGURE 4.13

Dans ce cas, les arêtes orientées  $a$  et  $f$  sont entrelacées et un mot associé à  $\Gamma' := \sigma_{a,f}(\Gamma)$  est donné par :

$$W_{\Gamma'} = w_4 \bar{e} \mathbf{A} b w_2 \bar{d} e w_3 \bar{g} \bar{\mathbf{A}} \bar{c} g w_6 \bar{b} c d w_1 \mathbf{F} w_5 \bar{\mathbf{F}}.$$

Les deux sommets de la figure 4.14 sont définis par les cycles  $(bcg\bar{A})$  et  $(A\bar{c}de)$ . De plus,  $A < e < \bar{c} < d$ . Le sommet défini par le cycle  $(A\bar{c}de)$  est donc un sommet de type 3. La collection  $\Gamma'$  est donc simplifiable. Une suite de simplifications augmente strictement le nombre de courbes 1-simples.

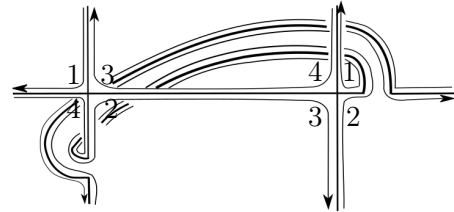


FIGURE 4.14

**2e Cas.** Si  $\min\{\bar{b}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}\} = \bar{e}$ , l'ordre local est donné par:

$$a < b < \bar{e} < f < \bar{g} < \bar{a} < \bar{f} < \bar{c} < \bar{g} < \bar{b} < c < d < \bar{d} < e,$$

et

$$W_4 = w_1 \mathbf{a} b w_2 \bar{e} f w_3 \bar{g} \bar{\mathbf{a}} w_4 \bar{f} \bar{c} g w_5 \bar{b} c d w_6 \bar{\mathbf{d}} e$$

est un mot associé  $\Gamma$ .

Les arêtes  $a$  et  $d$  sont entrelacées et

$$W_{\Gamma'} = w_4 \bar{f} \bar{c} g w_5 \bar{b} c \mathbf{A} b w_2 \bar{e} f w_3 \bar{g} \bar{\mathbf{A}} e w_1 \mathbf{D} w_6 \bar{\mathbf{D}}$$

### 4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

est un mot associé à  $\Gamma' := \sigma_{a,d}(\Gamma)$ . Les cycles  $(\bar{c}Aef)$  et  $(g\bar{A}bc)$  définissent les deux sommets sur la figure 4.15 et  $\bar{c} < A < f < e$ . Le sommet  $(\bar{c}Aef)$  est donc de type 3 et par conséquent  $\Gamma'$  est simplifiable.  $\square$

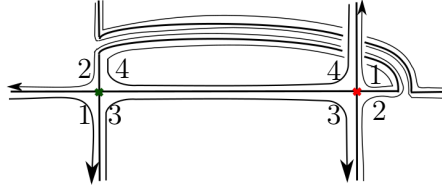


FIGURE 4.15

**Définition 4.3.7** (voir figure 4.12). Soient  $v_1$  et  $v_2$  deux sommets adjacents de types 1 et 2 respectivement. On dit qu'on a un *bon ordre local* autour du couple  $(v_1, v_2)$  si  $\min\{\bar{b}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}\} = \bar{g}$ .

**Définition 4.3.8.** Une collection unicellulaire est dite *presque torique* si :

- $\Gamma$  est non simplifiable,
- deux sommets de type 2 ne sont pas adjacents dans  $\Gamma$ ,
- on a un bon ordre local autour de sommets de types 1 et 2 adjacents.

**Lemme 4.3.7.** Soit  $\Gamma$  une collection non simplifiable, alors il existe une suite  $\Gamma_0 = \Gamma \longrightarrow \Gamma_1 \dots \longrightarrow \Gamma_n$  de chirurgies telle que  $\Gamma_n$  est presque torique.

*Démonstration.* Si  $\Gamma$  n'est pas presque torique, d'après le lemme 4.3.5 et le lemme 4.3.6, il existe une suite de chirurgies  $\Gamma_0 = \Gamma \longrightarrow \Gamma_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma_n$  telle que  $\Gamma_n$  est non simplifiable et telle que  $S_\Gamma < S_{\Gamma_n}$ . Puisque le nombre de courbes 1-simples est borné par  $g$ , ces suites se stabilisent à une collection presque torique.  $\square$

On améliore la configuration des sommets d'une collection presque torique.

**Lemme 4.3.8.** Soient  $\Gamma$  une collection presque torique,  $v_1$  et  $v_2$  deux sommets adjacents de types 1 et 2 respectivement; avec  $a = \min\{a, \bar{b}, \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}\}$  (voir figure 4.12).

Si  $x := \min\{\bar{b}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}\}$  est adjacent à un sommet de type 2, il existe alors une suite de chirurgies de  $\Gamma$  à  $\Gamma_n$  telle que  $\Gamma_n$  est presque torique et  $S_\Gamma < S_{\Gamma_n}$ .

### 4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

*Démonstration.* Si  $x := \min\{\bar{b}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}\}$  est adjacent au sommet  $v := (x\bar{y}\bar{t}\bar{u})$  qui est de type 2 (voir figure 4.16), alors un mot associé  $\Gamma$  est donné par:

$$W_\Gamma = w_1 \mathbf{a} w_2 \bar{\mathbf{a}} w_3 u \mathbf{x} w_4 \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{y}}.$$

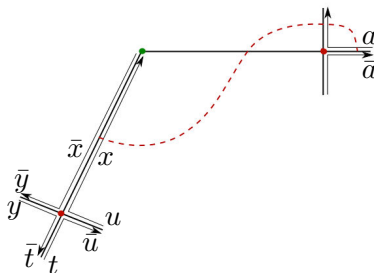


FIGURE 4.16

Puisque  $v$  est un sommet de type 2, on a  $x < \bar{u} < \bar{t} < \bar{y}$ . Par conséquent  $\bar{t} \in w_4$  et  $\bar{u} \in w_4$ .

Les arêtes  $a$  et  $x$  sont entrelacées et

$$W_{\Gamma'} = w_3 u \mathbf{A} w_2 \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{y}} w_1 \mathbf{X} w_4 \bar{\mathbf{X}}$$

est un mot associé à  $\Gamma' := \sigma_{a,x}(\Gamma)$ . Le sommet  $v \in \Gamma'$  est défini par le cycle  $(A\bar{y}\bar{t}\bar{u})$  et on a  $A < \bar{y} < \bar{u} < \bar{t}$ ; ce qui implique que  $v$  a été muté en un sommet de type 3. La collection  $\Gamma'$  est donc simplifiable. D'où l'existence d'une suite qui augmente le nombre de composantes 1-simples.  $\square$

**Définition 4.3.9.** Une collection unicellulaire est dite *torique* si elle est presque torique et si tout sommet de type 1 est adjacent à au plus deux sommets de type 2.

**Lemme 4.3.9.** Soit  $\Gamma$  une collection presque torique. Il existe alors une suite de chirurgies  $\Gamma_0 = \Gamma \longrightarrow \Gamma_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma_n$  telle que  $\Gamma_n$  est une collection torique.

*Démonstration.* Supposons que  $v$ , sommet de type 1, est adjacent à 4 sommets de type 2 ou 3 sommets étant tous de type 2. On est alors dans les conditions du lemme 4.3.8; il existe donc une suite  $\Gamma_0 = \Gamma \longrightarrow \Gamma_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma_n$  de chirurgies telle que  $S_\Gamma < S_{\Gamma_n}$ . Puisque le nombre de courbes 1-simples

### 4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

est borné par  $g$ , quitte à rallonger la suite, on obtient  $\Gamma_n$  presque torique où tout sommet de type 1, adjacents à 3 sommets de type 2 est adjacent à un quatrième de type 1.

La configuration locale autour de tels sommets est donnée par la figure 4.17, avec  $\bar{e} = \min\{\bar{d}, \bar{e}, \bar{f}\}$ . On associe le mot suivant à  $\Gamma_n$ :

$$W_{\Gamma_n} = w_1 \mathbf{a} w_2 \bar{\mathbf{a}} w_3 \mathbf{d} w_4 \bar{\mathbf{d}}.$$

Les arêtes orientées  $a$  et  $d$  sont entrelacées et la chirurgie  $\sigma_{a,d}(\Gamma_n)$  diminue le nombre de sommets adjacents à  $v$  (voir figure 4.17). Ainsi, en suivant ce procédé, on obtient une collection torique après un nombre fini de chirurgies.

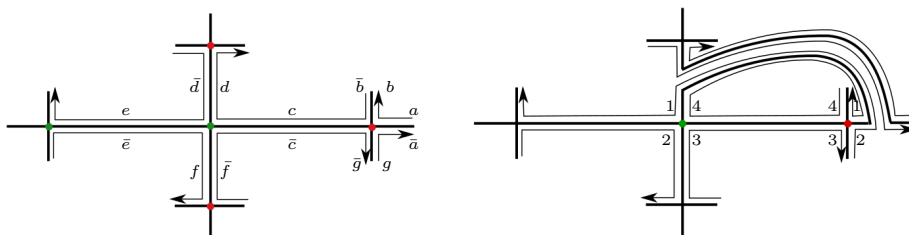


FIGURE 4.17

□

**Lemme 4.3.10.** *Soit  $\Gamma$  une collection torique sur  $\Sigma_{g+1}$ . Il existe une collection  $\Gamma'$  de  $\Sigma_g$  telle que à une chirurgie près,*

$$\Gamma = (\Gamma', x) \# \Gamma_{\mathbb{T}},$$

*Démonstration.* Montrons par l'absurde qu'il existe un sommet de type 2 adjacent à exactement un sommet de type 1.

Supposons que tout sommet de type 2 est adjacent à au moins deux sommets de type 1. Notons  $N_i$  le nombre de sommets de type  $i$  ( $i = 1, 2$ ) et  $N_{1,2}$  le nombre de paires de sommets de type 1 et 2 adjacents.

Comme  $\Gamma$  est une collection torique, un sommet de type 1 est adjacent au plus à deux sommets de type 2. Par conséquent:

$$N_{1,2} \leq 2N_1.$$

D'un autre côté, on a par hypothèse que tout sommet de type 2 est adjacent à au moins deux sommets de type 1 ; ce qui entraîne:

$$2N_2 \leq N_{1,2}.$$

### 4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

En combinant ces deux inégalités, on obtient  $N_2 \leq N_1$  ce qui est absurde puisqu'on a  $g$  sommets de type 2 et  $g - 1$  sommets de type 1.

Il existe donc un sommet  $v_0$  de type 2 adjacent à exactement un sommet de type 1 ; soit  $v_1$  ce sommet. Puisque les sommets de type 2 ne sont pas deux à deux adjacents,  $v_0$  est donc sur une courbe 1-simple.

Dans ce cas, soit  $v_1$  est un point d'auto-intersection auquel cas on a directement la somme connexe avec  $\Gamma_{\mathbb{T}}$ , soit  $v_1$  n'est pas un point d'auto-intersection. Il reste à montrer que si  $v_1$  n'est pas un point d'auto-intersection, on peut le transformer en un point d'auto-intersection par une chirurgie.

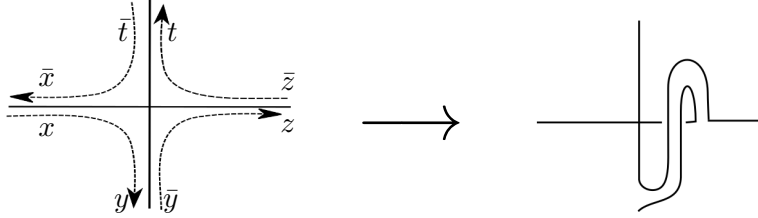


FIGURE 4.18 – Transformation d'un point de type 1 en point d'auto-intersection.

Puisque  $v_1$  est de type 1, un mot associé à  $\Gamma$  est donné par :

$$W_{\Gamma} = w_1 x \mathbf{y} w_2 \bar{\mathbf{y}} z w_3 \bar{\mathbf{z}} t w_4 \bar{t} \bar{x};$$

où  $v_1$  est défini par le cycle  $(yzt\bar{x})$  (figure 4.18).

Les arêtes orientées  $\bar{y}$  et  $\bar{z}$  sont entrelacées et  $\Gamma_1 = \sigma_{\bar{y}, \bar{z}}(\Gamma)$  a pour mot

$$W_{\Gamma_1} = \mathbf{Y} w_2 \bar{\mathbf{Y}} t w_4 \bar{t} \bar{x} w_1 x \mathbf{Z} w_3 \bar{\mathbf{Z}}.$$

Le sommet  $v_1 \in \Gamma_1$  est défini par le cycle  $(Yt\bar{x}Z)$  et  $Y < t < \bar{x} < Z$ . Le sommet  $v_1$  reste donc de type 1. Par ailleurs,  $v_1$  est transformé en un point d'auto intersection.

D'où  $\Gamma = (\Gamma', x) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$ . □

Les collections de la figure 4.19 sont des exemples de collections presque toriques (à gauche) et non simplifiables sans courbe 1-simple (à droite). Ce sont des exemples qui illustrent l'utilité des lemmes énoncés ci-dessus.

Sur la collection de gauche, on a un sommet type 1 adjacent à 3 sommets de type 2, d'où le fait qu'elle n'est pas torique. Dans la collection de droite,

### 4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

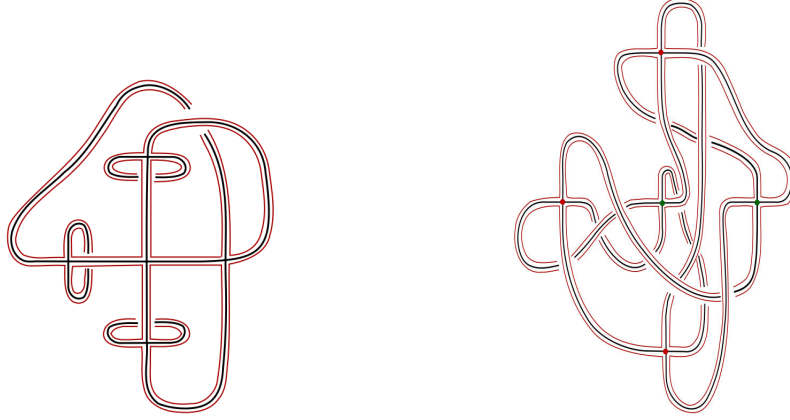


FIGURE 4.19 – Une collection presque torique à gauche et une collection non simplifiable sans courbe 1-simple à droite.

on a par exemple des sommets de type 2 (en rouge) qui sont deux à deux adjacents; d'où l'utilité du lemme 4.3.5.

La proposition suivante est le point de chute des lemmes 4.3.7 et 4.3.9.

**Proposition 4.3.2.** Soit  $\Gamma$  une collection unicellulaire sur  $\Sigma_{g+1}$ . Il existe alors une collection unicellulaire  $\Gamma'$  de  $\Sigma_g$  et une suite de chirurgies de  $\Gamma$  à  $\Gamma_n$  telle que  $\Gamma_n = (\Gamma', x) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$ .

*Démonstration.* Soit  $\Gamma$  une collection unicellulaire sur  $\Sigma_{g+1}$ . Il existe alors une suite de chirurgies  $\Gamma \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_1$  telle que  $\Gamma_1$  est non simplifiable. D'après le lemme 4.3.7, il existe une suite  $\Gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_2$  telle que  $\Gamma_2$  est presque torique et d'après le lemme 4.3.9, il existe une suite de chirurgies  $\Gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_3$  telle que  $\Gamma_3$  soit torique. Le lemme 4.3.10 entraîne que  $\Gamma_3 = (\Gamma', x) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$  avec  $\Gamma'$  collection unicellulaire sur  $\Sigma_g$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 4.3.1.* (Connexité de  $\hat{K}_{4,g}$ .) Soit  $\Gamma$  une collection unicellulaire de  $\Sigma_g$ . D'après la Proposition 4.3.2, il existe un chemin dans  $K_{4,g}$  de  $\Gamma$  à  $(\Gamma', x) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$  avec  $\Gamma'$  une collection sur  $\Sigma_{g-1}$ . Par conséquent, il existe un chemin dans  $\hat{K}_{4,g}$  de  $\Gamma$  à  $\Gamma'$ . Par induction sur  $g$ , on déduit un chemin de  $\Gamma$  à  $\Gamma_{\mathbb{T}}$ . D'où la connexité de  $\hat{K}_{4,g}$ .  $\square$

**Non hyperbolicité de  $\hat{K}_{4,\infty}$ .** Soit  $(X, d)$  un espace métrique *totale*ment géodésique, c'est-à-dire que tout couple de points est joignable par une géo-

### 4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

désique: une courbe qui minimise la distance.

**Définition 4.3.10.** Un *triangle géodésique* est la donnée d'un triplet  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  de géodésiques  $\eta_i : [0, 1] \rightarrow X$  telle que:

$$\eta_1(1) = \eta_2(0); \quad \eta_2(1) = \eta_3(0); \quad \eta_3(1) = \eta_1(0).$$

Soient  $\delta$  un réel positif et  $T := (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  un triangle géodésique de  $X$ . On dit que  $T$  est  *$\delta$ -fin* si le  *$\delta$ -voisinage* de l'union de deux géodésiques de  $T$  (l'ensemble des points de  $X$  distants d'au plus  $\delta$  de la réunion) contient le troisième.

Un espace métrique  $(X, d)$  est dit *hyperbolique au sens de Gromov* s'il existe  $\delta \geq 0$  tel que tous les triangles de  $X$  sont  $\delta$ -fins.

Les espaces métriques hyperboliques (au sens de Gromov) ont été introduit par Gromov. On pourra consulter [13] pour plus de détails sur ces espaces.

Un graphe fini est trivialement hyperbolique au sens de Gromov en prenant  $\delta$  égale à son diamètre. Dans le contexte des courbes sur les surfaces, on des exemples de graphes infinis hyperboliques comme le complexe des courbes sur une surface de genre  $g$  [20].

On montre que  $\hat{K}_{4,\infty}$  n'est pas hyperbolique en donnant un triangle qui ne vérifie pas la propriété de finesse pour tout réel  $\delta$  donné.

On note par  $d$  la distance naturelle sur le graphe  $\hat{K}_{4,\infty}$ . On a:

**Lemme 4.3.11.** *Soit  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux collections unicellulaires, alors*

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) \geq \frac{1}{2} |S_{\Gamma_1} - S_{\Gamma_2}|;$$

où  $S_{\Gamma_i}$  désigne le nombre de courbes 1-simples de  $\Gamma_i$ .

*Démonstration.* La preuve du lemme vient du fait qu'une chirurgie ou une somme connexe augmentent  $S_\Gamma$  d'au plus 2 et la diminue d'au plus 2. Donc, pour aller de  $\Gamma_1$  à  $\Gamma_2$ , il faut faire au moins  $\frac{1}{2}|S_{\Gamma_1} - S_{\Gamma_2}|$  pas dans  $\hat{K}_{4,\infty}$ .  $\square$

Soient  $A := \Gamma_{\mathbb{T}}$  et  $X_{2g}$  la collection unicellulaire de  $\Sigma_{2g}$  obtenue en collant  $g$  copies de  $\Gamma_{\mathbb{T}}$  au  $g$ -collier  $C_g$  —les  $g$  copies étant collées chacune sur une courbe 1-simple de  $C_g$  (voir figure 4.20 pour  $g = 4$ ). La collection  $X_{2g}$  a donc  $g$  courbes 1-simples.

Soit  $Y_{2g}$  la collection unicellulaire de  $\Sigma_{2g}$  obtenue en collant  $g - 1$  copies de  $\Gamma_{\mathbb{T}}$  au collier  $C_{g+1}$  comme sur la figure 4.20.



### 4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

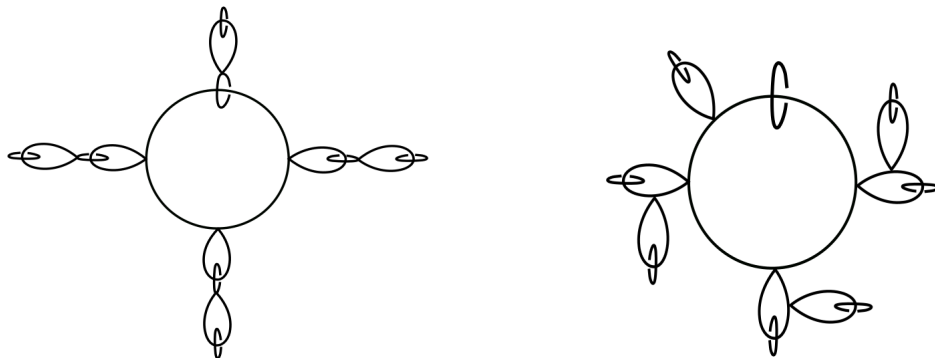


FIGURE 4.20 – La collection unicellulaire  $X_8$  à gauche et la collection  $Y_8$  à droite.

**Lemme 4.3.12.** *Les collections  $X_{2g}$  et  $Y_{2g}$  sont à distance  $2g$  de  $\Gamma_{\mathbb{T}}$  et on a*

$$\frac{g}{2} \leq d(X_{2g}, Y_{2g}) \leq 2g.$$

*Démonstration.* Puisque  $X_{2g}$  et  $Y_{2g}$  sont dans le niveau  $2g$  du graphe  $\hat{K}_{4,\infty}$  et sont obtenues par somme connexe de  $2g$  copies de  $\Gamma_{\mathbb{T}}$ , alors on a bien

$$d(X_{2g}, \Gamma_{\mathbb{T}}) = d(Y_{2g}, \Gamma_{\mathbb{T}}) = 2g.$$

En coupant les  $g$  copies de  $\Gamma_{\mathbb{T}}$  de  $X_{2g}$  collées sur les courbes 1-simples et en les recollant à  $C_g$  convenablement de façon à obtenir  $Y_{2g}$ , on obtient un chemin de longueur  $2g$ , de  $X_{2g}$  à  $Y_{2g}$ , dans le graphe  $\hat{K}_{4,\infty}$ . Par conséquent :

$$d(X_{2g}, Y_{2g}) \leq 2g.$$

De plus, on a  $|S_{X_{2g}} - S_{Y_{2g}}| = g$ , donc  $d(X_{2g}, Y_{2g}) \geq \frac{g}{2}$ . □

Soit  $T_{2g}$  un triangle géodésique formé par les points  $A$ ,  $X_{2g}$  et  $Y_{2g}$ . Les points  $X_{2g}$  et  $Y_{2g}$  sont dans le même niveau  $K_{4,2g}$ , mais rien ne dit que la géodésique les reliant reste dans ce niveau : les niveaux sont a fortiori pas géodésiques dans  $\hat{K}_{4,\infty}$ . Néanmoins, le lemme 4.3.12 assure que la géodésique  $(X_{2g}Y_{2g})$  reliant  $X_{2g}$  à  $Y_{2g}$  ne descend pas en dessous du niveau  $K_{4,g}$ , c'est-à-dire

$$d(\Gamma_{\mathbb{T}}, (X_{2g}Y_{2g})) \geq g.$$

### 4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

En effet, comme  $X_{2g}$  et  $Y_{2g}$  sont dans le même niveau, si la géodésique  $(X_{2g}Y_{2g})$  descend en niveau  $k$  fois, elle doit remonter en niveau  $k$  fois ce qui entraîne que  $k \leq g$ .

Cette dernière inégalité est cruciale car elle permet de montrer que la suite des triangles  $T_{2g}$  n'est pas  $\delta$ -fine pour tout  $\delta$  fixé.

*Démonstration de la Proposition 4.3.1.* Soit  $\mathcal{D}_k := (X_{2k}, \rightarrow)$  (respectivement  $\mathcal{D}'_k := (X_{2k}, \leftarrow)$ ) la demi-géodésique qui passe par tous les points  $X_{2m}$  (respectivement  $Y_{2m}$ ) pour  $m \geq k$ .

Comme  $d(X_{2g}, Y_{2g}) \geq \frac{g}{2}$  alors  $d(\mathcal{D}_k, \mathcal{D}'_k) \rightarrow +\infty$ .

Pour  $k$  suffisamment grand, les  $\delta$ -voisinage  $V_\delta(\mathcal{D}_k)$  et  $V_\delta(\mathcal{D}'_k)$  sont disjoints. Mieux,

$$d(V_\delta(\mathcal{D}_k), V_\delta(\mathcal{D}'_k)) \rightarrow +\infty$$

Par conséquent, pour  $k_0$  suffisamment grand  $d(\Gamma_{\mathbb{T}}, (X_{4k_0}Y_{4k_0})) > 2k_0$  et  $d(V_\delta(\mathcal{D}_{k_0}), V_\delta(\mathcal{D}'_{k_0})) > 1$ .

La géodésique  $(X_{4k_0}Y_{4k_0})$  n'est donc pas incluse dans  $V_\delta(\mathcal{D}_{k_0}) \cup V_\delta(\mathcal{D}'_{k_0})$ .

Ce qui entraîne que  $(X_{4k_0}Y_{4k_0})$  n'est pas incluse dans  $V_\delta(\Gamma_{\mathbb{T}}X_{4k_0}) \cup V_\delta(\Gamma_{\mathbb{T}}Y_{4k_0})$ .

D'où la preuve que  $\hat{K}_{4,\infty}$  n'est pas hyperbolique au sens de Gromov.  $\square$

#### 4.3.2 Connexité du graphe de chirurgies $K_{4,g}$

On montre maintenant la connexité du graphe  $K_{4,g}$ . Commençons par le lemme suivant qui montre que, modulo chirurgie, la somme connexe de  $\Gamma$  avec  $\Gamma_{\mathbb{T}}$  ne dépend que de l'arête choisie sur  $\Gamma$  et non de son orientation.

**Lemme 4.3.13.** *Soit une collection unicellulaire sur  $\Sigma_g$  et  $x$  une arête orientée de  $\Gamma$ . Alors, Il existe une chirurgie de  $(\Gamma, x) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$  à  $(\Gamma, \bar{x}) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$ .*

*Démonstration.* Soit  $W_\Gamma = w_1 x w_2 \bar{x}$  un mot de  $\Gamma$  et on pose  $\Gamma_1 := (\Gamma, x) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$  et  $\Gamma_2 := (\Gamma, \bar{x}) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$ . On rappelle que  $W_{\mathbb{T}} = a \bar{b} \bar{a} b$  est un mot associé à  $\Gamma_{\mathbb{T}}$ . D'après le lemme 4.3.1,

$$W_{\Gamma_1} = x_1 w_1 \bar{x}_1 x_2 w_2 \bar{x}_2 a_1 \bar{b}_1 a_2 \bar{b}_2$$

et

$$W_{\Gamma_2} = x_1 w_2 \bar{x}_1 x_2 w_1 \bar{x}_2 a_1 \bar{b}_1 a_2 \bar{b}_2$$

sont des mots associés à  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , respectivement.

### 4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

Dans  $W_{\Gamma_1}$ ,  $x_1$  et  $x_2$  sont entrelacées et  $\Gamma' := \sigma_{x_1, x_2}(\Gamma_1)$  est une collection unicellulaire ayant pour mot:

$$W_{\Gamma'} = x_1 w_2 \bar{x}_1 x_2 w_1 \bar{x}_2 a_1 \bar{b} \bar{a}_1 a_2 \bar{b} \bar{a}_2.$$

On a donc  $W_{\Gamma'} = W_{\Gamma_2}$ , d'où  $\Gamma_2 = \sigma_{x_1, x_2}(\Gamma_1)$ .  $\square$

**Définition 4.3.11.** On appelle  $g$ -collier la classe d'homéomorphisme de la collection unicellulaire de  $\Sigma_g$ , noté  $C_g$ , composée de  $g$  courbes 1-simples et d'une courbe  $\eta$  avec  $g - 1$  points d'auto-intersections spiralant autour des courbes 1-simples (Voir figure 4.21 pour le 5-collier).

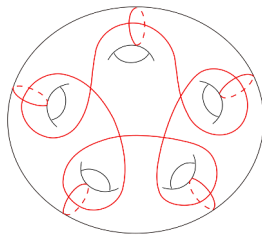


FIGURE 4.21 – Le 5-collier  $C_5$ .

**Remarque 4.3.2.** Les points d'intersections entre courbes 1-simples et  $\eta$  sont des points de type 2; les autres étant des points de type 1. Il y a  $g - 1$  sommets de type 2 qui sont adjacents à exactement un sommet de type 1 et un *sommet spécial* de type 2 qui est adjacent à deux sommets type 1 (sauf dans les cas  $g = 1$  et 2).

*Démonstration du théorème 4.2.1 (la connexité):* La preuve se fait par induction sur  $g$ . Supposons que  $K_{4,g}$  est connexe. Soit  $\Gamma$  une collection unicellulaire sur  $\Sigma_{g+1}$ . D'après la proposition 4.3.2, il existe un chemin de chirurgies de  $\Gamma$  à  $\Gamma_n$  où  $\Gamma_n = (\Gamma', x) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$ .

Puisqu'on a supposé  $K_{4,g}$  connexe, il existe une suite de chirurgies  $\Gamma' \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma'_n = C_g$  de  $\Gamma'$  au  $g$ -collier  $C_g$ . Cette suite se relève en une suite

$$\Gamma_0 = (\Gamma', x) \# \Gamma_{\mathbb{T}} \longrightarrow \dots \longrightarrow (C_g, x_n) \# \Gamma_{\mathbb{T}}.$$

En effet, si  $x$  est une arête orientée de  $\Gamma'$ , alors  $x$  se casse en deux morceaux  $x_1$  et  $x_2$  dans  $(\Gamma', x) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$ . Une chirurgie  $\sigma_{x,y}(\Gamma')$  (respectivement  $\sigma_{z,y}(\Gamma')$  avec  $z \neq x$  et  $z \neq \bar{x}$ ) se relève en  $\sigma_{x_1,y}(\Gamma')$  (respectivement  $\sigma_{z,y}(\Gamma')$ ).

### 4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

D'après le lemme 4.3.13, à chirurgie près, la somme connexe de  $\Gamma_{\mathbb{T}}$  avec  $C_g$  ne dépend que des arêtes et non de leurs orientations. Il vient donc que trois situations de somme connexe sont possibles selon que:

- $x_n$  est une arête orientée connectant deux sommets de type 1, ou un sommet de type 1 et le sommet spécial de type 2 ;
- $x_n$  est une arête orientée allant d'un sommet de type 1 à un sommet de type 2 ;
- $x_n$  est une courbe 1-simple orientée.

La première situation conduit directement au  $(g+1)$ -collier. Pour les deux autres situations, il existe une suite de chirurgies menant au  $(g+1)$ -collier. On donne cette suite pour le cas  $g = 5$  (voir figure 4.22) ; les autres  $g$  suivent la même logique.

Comme  $K_{4,1}$  est connexe (graphe réduit à un point), alors on a par induction la connexité de  $K_{4,g}$ .

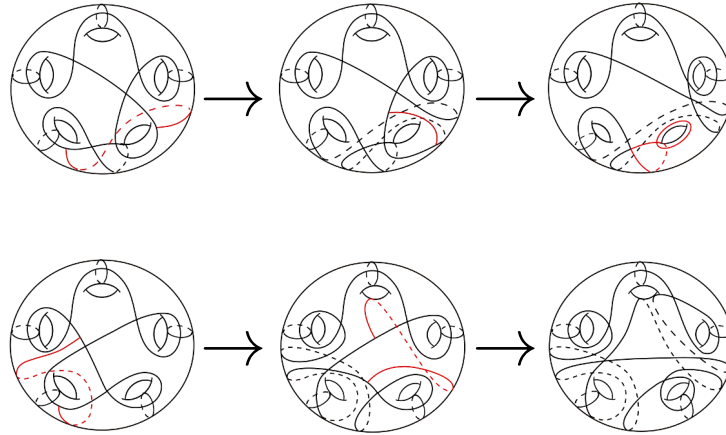


FIGURE 4.22 – Suite de chirurgies menant au collier pour  $g = 4$ . La première ligne va de  $(C_4, x) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$  où  $x$  est une courbe 1-simple orientée, à  $(C_4, y) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$  où  $y$  est une arête orientée allant d'un point de type 1 à un point de type 2. La seconde ligne va de  $(C_4, y) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$  à  $C_5$ . Les arcs en rouges sont les arcs le long desquels on fait les chirurgies.

□

**Lemme 4.3.14.** Soit  $k_{\Gamma}$  le nombre de composantes d'une collection unicel-

### 4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

lulaire  $\Gamma$  sur  $\Sigma_g$ ; alors  $k_\Gamma \leq 2g$ .

*Démonstration.* Soit  $\Gamma$  une collection unicellulaire sur  $\Sigma_g$  et  $\Gamma'$  une collection non simplifiable obtenue par simplification sur  $\Gamma$ . On a donc  $k_\Gamma \leq k_{\Gamma'}$  et  $\Gamma'$  n'a que des points de type 1 et de type 2.

Puisqu'un point d'intersection de type 1, entre deux composantes différentes d'une collection non simplifiable, peut être transformé en un point d'auto-intersection par une chirurgie (et vice-versa; voir figure 4.18), on peut prendre les  $g-1$  points de type 1 de  $\Gamma'$  comme des points d'intersections entre des composantes différentes.

La collection  $\Gamma'$  est donc formée de courbes 1-simples (au plus  $g$ ) et de composantes qui s'intersectent en des points de type 1 (au plus  $g$  dans le cas où deux composantes s'intersectent au plus une fois en un point de type 1), ce qui entraîne que  $k_{\Gamma'} \leq 2g$ . D'où

$$k_\Gamma \leq 2g$$

□

Le nombre de composantes d'une collection unicellulaire sur  $\Sigma_g$  est donc compris entre 1 et  $2g$ . Dans [23], les auteurs montrent un résultat pareil sur la taille des *systèmes remplissants minimaux*: les collections unicellulaires formées que de courbes simples. Ils montrent que leurs tailles sont majorées par  $2g$  et que pour tout  $2 \leq s \leq 2g$ , il existe un système remplissant minimal de taille  $s$  sur  $\Sigma_g$ ; sauf pour  $g = 2$  et  $s = 2$ .

Si  $\Gamma$  est une collection unicellulaire sur  $\Sigma_g$  telle que  $k_\Gamma = 1$ , alors  $\Gamma' := (\Gamma, x) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$  est une collection unicellulaire sur  $\Sigma_{g+1}$  avec 2 composantes, l'une étant une courbe 1-simple. En faisant une chirurgie entre une arête orientée sur la courbe 1-simple de  $\Gamma_{\mathbb{T}}$  et une autre de  $\Gamma'$ , on obtient une collection unicellulaire avec une seule composante. Comme  $\Sigma_2$  admet une collection unicellulaire avec une composante, il vient donc qu'il existe des collections unicellulaires sur  $\Sigma_g$  formées d'une seule courbe pour tout  $g \geq 2$ .

Ainsi, on montre que les collections unicellulaires sur  $\Sigma_g$  prennent toutes les tailles de 1 à  $2g$ .

*Démonstration du théorème 4.2.1; le diamètre.* Soit  $d_g := \max\{d(\Gamma, C_g)\}$  la distance maximale au collier. D'après le théorème 4.3.1, si  $\Gamma$  est une collection unicellulaire, il existe une suite  $s_n$  de chirurgies de  $\Gamma$  à  $\Gamma_n$  avec  $\Gamma_n = (\Gamma', x) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$ . Dans cette suite, on a trois types d'étapes:

### 4.3. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES COLLECTIONS UNICELLULAIRES

- faire une simplification apparente sur un sommet de type 3. Soit  $m$  nombre de simplifications apparentes ;
- faire une simplification forcée, c'est-à-dire une simplification qui apparaît à la suite d'une chirurgie convenable comme dans le lemme 4.3.5. Soit  $n$  leur nombre ;
- faire une chirurgie de sorte à diminuer le nombre de voisins d'un sommet de type 1 comme sur la figure 4.17. Soit  $k$  leur nombre.

Il s'ensuit que la longueur  $l(s_n)$  de la suite  $(s_n)$  est égale à  $m + 2n + k$  ; avec  $m + n \leq g$  et  $k \leq g - 1$  (puisque'on a  $g - 1$  sommets de type 1 et la dernière étape consiste à diminuer leur nombre de sommets adjacents.)

Le maximum est atteint quand toute simplification est précédée d'une chirurgie adéquate, ce qui implique que  $m = 0$  et  $n = g$ . On a alors

$$l(s_n) \leq 3g - 1.$$

Puisque  $\Gamma_n = (\Gamma', x) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$ , alors  $\Gamma$  est au plus à distance  $3g - 1 + d_{g-1}$  de  $(C_{g-1}, y) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$ . On a donc

$$d(\Gamma, C_g) \leq 3g + 3 + d_{g-1},$$

car  $(C_{g-1}, y) \# \Gamma_{\mathbb{T}}$  est au plus à distance 4 du collier (Voir figure 4.22). D'où,

$$d_g \leq 3g + 3 + d_{g-1};$$

et par induction sur  $g$  on obtient:

$$D_g \leq 2d_g \leq 3g^2 + 9g - 12.$$

La borne inférieure pour le diamètre vient du fait qu'une chirurgie sur une collection unicellulaire  $\Gamma$  fait varier le nombre de courbes  $k_{\Gamma}$  de  $\Gamma$  au maximum de  $\pm 2$ . Si  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont deux collections unicellulaires alors

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) \geq \frac{1}{2} |k_{\Gamma_1} - k_{\Gamma_2}|.$$

En prenant une collection  $\Gamma_1$  avec  $2g$  courbes et un autre  $\Gamma_2$  formée d'une seule courbe, on obtient

$$D_g \geq d(\Gamma_1, \Gamma_2) \geq g - \frac{1}{2}, \text{ et donc } D_g \geq g.$$

□

## 4.4 Graphe de chirurgies sur les cartes cubiques unicellulaires

Soit  $G := (E, V)$  un graphe cubique unicellulaire sur  $\Sigma_g$ . On a alors:

$$|V| = 4g - 2, \quad |E| = 6g - 3.$$

Parmi les cartes unicellulaires dont tous les sommets sont de degré supérieur ou égal à 3, les cartes cubiques unicellulaires sont celles qui ont le plus d'arêtes: on dit qu'elles sont *dominantes*. En effet, partant d'une carte unicellulaire où les sommets sont de degré supérieur ou égal à 3, et en éclatant successivement les sommets de degré strictement plus grand que 3, on obtient une carte cubique unicellulaire avec naturellement un nombre supérieur d'arêtes.

On utilise en outre l'éclatement des sommets (voir figure 4.23) afin relier les cartes cubiques unicellulaires aux collections unicellulaires.

Soit  $\Gamma$  une collection unicellulaire et  $v$  un sommet de  $\Gamma$ ; il y a deux façons d'éclater le sommet  $v$  (voir figure 4.23) et on obtient une carte unicellulaire après un choix d'éclatement de tous les sommets de  $\Gamma$ . La question naturelle est de se demander si toutes les cartes cubiques unicellulaires sont obtenues par éclatement des sommets de collections unicellulaires.

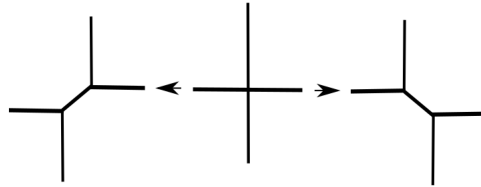


FIGURE 4.23 – Deux différentes façons d'éclater un sommet de degré 4.

**Définition 4.4.1.** Soit  $G := (V, E)$  un graphe connexe quelconque. Un *couplage parfait* de  $G$  est un sous-ensemble  $C$  d'arêtes de  $G$  tel que les arêtes de  $C$  n'ont pas de sommet en commun et tel que tout sommet de  $G$  appartient à une arête de  $C$ .

Une arête  $e$  de  $G$  est un *pont* (ou *isthme*) si  $G - e$  a deux composantes connexes.

#### 4.4. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES CARTES CUBIQUES UNICELLULAIRES

On a:

**Théorème 4.4.1** (Petersen [24]). *Un graphe cubique ayant au plus deux ponts admet un couplage parfait.*

Le théorème 4.4.1 donne une condition suffisante pour qu'un graphe cubique admette un couplage parfait. Par ailleurs, il existe des cartes cubiques unicellulaires sans couplage parfait (voir figure 4.24).

**Définition 4.4.2.** Une *collection unicellulaire virtuelle* est la donnée d'un couple  $(G, \mathcal{C})$  où  $G$  est un graphe cubique unicellulaire et  $\mathcal{C}$  un couplage parfait de  $G$ .

L'appellation *collection unicellulaire virtuelle* est inspirée par le fait que partant d'un couplage parfait  $\mathcal{C}$  sur une carte cubique unicellulaire  $G$ , on obtient une collection unicellulaire en contractant (opération inverse de l'éclatement) les arêtes de  $\mathcal{C}$ . Par abus, on notera  $G$  une collection unicellulaire virtuelle sans préciser le couplage parfait.

Sur la figure 4.24, on a l'exemple d'un *7-collier virtuel*. On le note  $CV_7$ , et  $CV_g$  en tout genre.

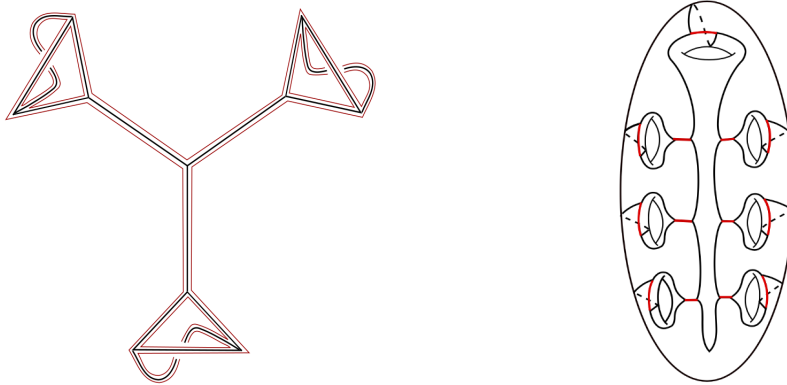


FIGURE 4.24 – Un graphe cubique sans couplage parfait à gauche et le 7-collier virtuel à droite ; les arêtes rouges formant le couplage parfait.

**Lemme 4.4.1.** *Soit  $G$  un graphe cubique unicellulaire n'admettant pas de couplage parfait. Il existe une suite de chirurgies  $G_0 = G \rightarrow \dots \rightarrow G_n$  telle que  $G_n$  admet un couplage parfait.*



#### 4.4. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES CARTES CUBIQUES UNICELLULAIRES

*Démonstration.* Soient  $k$  le nombre de ponts de  $G$  et  $e$  un pont de  $G$  :

$$G - e = G_1(e) \cup G_2(e).$$

On peut supposer par "innermost" que la composante  $G_1(e)$  n'a pas de pont. Soit  $e_1$  (respectivement  $e_2$ ) l'une des arêtes de  $G_1(e)$  (respectivement  $G_2(e)$ ) qui partage un sommet avec  $e$ .

Puisque  $e$  est pont, l'une des orientations de  $e_1$  —notons-la  $x$ — est entrelacée à l'une des orientations de  $e_2$  —notons-la  $y$ .

L'arête  $e$  n'est plus un pont dans  $G_1 := \sigma_{x,y}(G)$  puisque la chirurgie produit une nouvelle arête autre que  $e$  à extrémités dans  $G_1(e)$  et  $G_2(e)$  (voir figure 4.25).

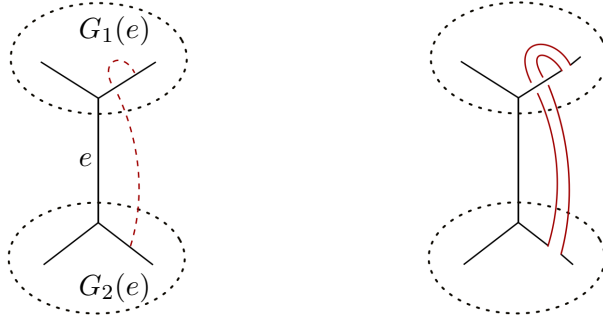


FIGURE 4.25 – "Destruction" d'un pont par une chirurgie.

Le nombre de ponts de  $G_1$  est donc égal à  $k - 1$ . De proche en proche, en répétant le procédé ci-dessus, on obtient un graphe cubique unicellulaire sans pont. Le résultat vient alors du théorème 4.4.1.  $\square$

Comme conséquence de la connexité du graphe de chirurgies pour les collections unicellulaires, on a :

**Lemme 4.4.2.** *Soit  $G$  une collection unicellulaire virtuelle sur  $\Sigma_g$  ; il existe alors une suite de chirurgies de  $G$  au  $g$ -collier virtuel  $CV_g$ .*

*Démonstration.* Fixons un couplage parfait  $\mathcal{C}$  sur  $G$ . En oubliant les arêtes de  $G$  dans  $\mathcal{C}$ , peut voir  $(G, \mathcal{C})$  comme une collection unicellulaire. Puisque que  $K_{4,g}$  est connexe, il existe une suite  $(G_0, \mathcal{C}_0) = (G, \mathcal{C}) \rightarrow \dots \rightarrow (G_n, \mathcal{C}_n)$  de chirurgies ne touchant pas les arêtes des couplages telle qu'en écrasant les

4.4. GRAPHE DE CHIRURGIES SUR LES CARTES CUBIQUES UNICELLULAIRES

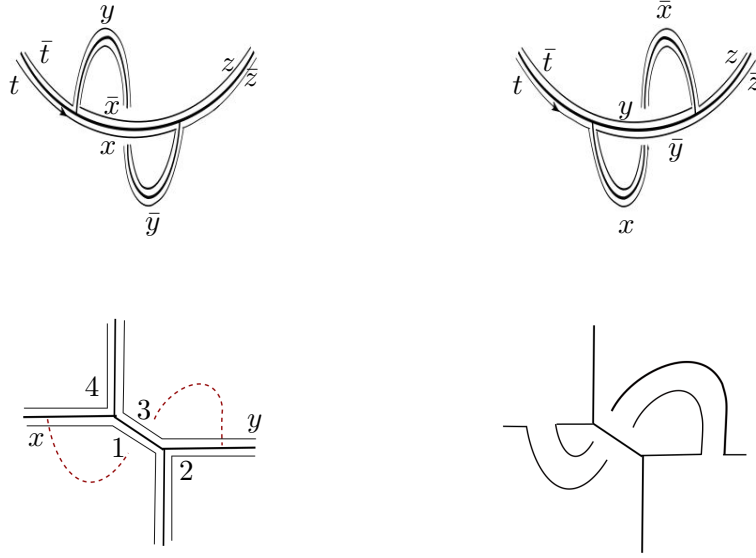


FIGURE 4.26 – Deux façons d'éclater un point de type 2 et de type 1.

arêtes de  $\mathcal{C}_n$  dans  $G_n$ , on obtient le collier  $C_g$ . Par conséquent,  $G_n$  diffère de  $CV_g$  de la façon dont on éclate les sommets de type 1 et 2 de  $C_g$ .

La figure 4.26 montre que les deux façons d'éclater un point de type 2 d'un collier sont équivalentes; le mot autour de l'éclatement d'un point de type 2 étant  $w_1txy\bar{t}w_2z\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ .

Dans le cas de l'éclatement d'un point de type 1, la chirurgie de  $x$  à  $y$  (figure 4.26) relie les deux façons d'éclater un point de type 1. Ce qui achève la preuve.  $\square$

On est maintenant en mesure de prouver la connexité de  $K_{3,g}$  pour tout  $g \geq 1$ .

*Démonstration du théorème 4.2.2.* Soit  $G$  une carte cubique unicellulaire. D'après le lemme 4.4.1, il existe une suite de chirurgies  $G_0 = G \rightarrow \dots \rightarrow G_n$  telle que  $G_n$  est une collection unicellulaire virtuelle. D'après le lemme 4.4.2 il existe une suite de chirurgies de  $G_n$  à  $CV_g$ ; d'où la connexité de  $K_{3,g}$ .  $\square$

# Conclusion

On a vu que la preuve de la non-réalisabilité des éléments de  $\mathcal{P}_8$  nous a conduit à la détermination des collections unicellulaires.

Ces exemples de polytopes non-réalisables laissent entendre que outre la condition de parité que doit vérifier les sommets d'un polytope réalisable, il existe d'autres conditions pour  $g \geq 2$ .

Si  $P \subset [-1, 1]^{2g}$  est réalisable et si  $P$  est minimal (dans le sens où le nombre de sommets de  $P$  est minimal parmi les polytopes d'intérieur non vide), alors la collection réalisant  $P$  est unicellulaire. Ceci illustre bien le lien entre la combinatoire des polytopes et la topologie des collections qui les réalisent.

La connexité du graphe de chirurgies des collections unicellulaires  $K_{4,g}$  (respectivement les cartes cubiques unicellulaires  $K_{3,g}$ ) produit une famille de graphes. On pourrait se demander si ces familles de graphes sont des *expanseurs*.

Un autre graphe auquel on pourrait s'intéresser est le graphe de chirurgies sur les collections unicellulaires; en regardant cette fois-ci les collections à isotopie près.

# Annexe A

## Unicellular collections on $\Sigma_2$

Here, we give the initial proof in [28] of the fact that there are four unicellular maps in  $\Sigma_2$  with dual unit ball in  $[-1, 1]^2$ .

**Partial configuration.** We consider a collection of closed (non oriented) curves  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  in  $\Sigma_2$  whose complement is one disk.

In what follows  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$  and  $\beta_2$  are the oriented simple closed curves, that canonically represent the generators of the first homology group (see Figure A.1). Let  $\eta := \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}$  be the curve depicted in red and  $A_\eta$  be a tubular neighborhood of  $\eta$ .

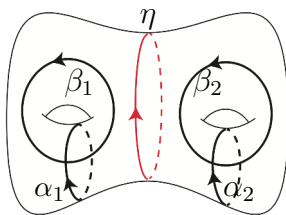


FIGURE A.1 – Canonical symplectic basis.

The following lemma gives a canonical partial configuration for unicellular collections.

**Lemme A.0.1.** *If  $\Gamma$  is a unicellular collection on  $\Sigma_2$  with dual unit ball in the cube  $[-1, 1]^4$ , then there exists a homeomorphism  $\psi$  of  $\Sigma_2$  such that*

$$i(\alpha_i, \psi(\Gamma)) = i(\beta_i, \psi(\Gamma)) = 1; i = 1, 2.$$

Hence, up to homeomorphism and outside  $A_\eta$ ,  $\Gamma$  looks like Figure A.2.

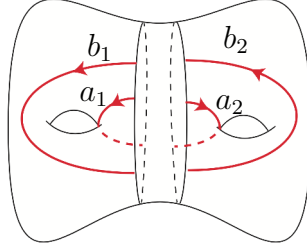


FIGURE A.2 – Partial configuration of the collection  $\psi(\Gamma)$  ; with labelled arcs.

*Proof.* Since  $\Gamma$  is unicellular with dual unit ball in  $[-1, 1]^4$  then

$$N_\Gamma(a_i) = N_\Gamma(b_i) = 1$$

where  $a_i, b_i$  is the symplectic basis of  $H_1(\Sigma_g, \mathbb{R})$ .

Now, as  $N_\Gamma(a_i) = N_\Gamma(b_i) = 1$ , there is an oriented simple closed curve  $\alpha$  such that

$$i(\alpha, \Gamma) = 1; \quad [\alpha] = a_1.$$

Up to homeomorphism , we can take  $\alpha = \alpha_1$ .

Now, let  $\beta$  be the  $\Gamma$ -minimizing simple curve in the homology class of  $b_1$ , then

$$i_a(\alpha_1, \beta) = 1; \quad i(\Gamma, \beta) = 1.$$

Therefore, one can make a "surgery" on  $\beta$  along  $\alpha$  (see Figure A.3) to get a new curve  $\beta'$  such that  $\beta'$  is a simple  $\Gamma$ -minimizing curve in the same homology class with  $\beta$  and such that

$$i(\beta', \alpha) = i(\beta', \Gamma) = 1.$$

Up to homeomorphism , we can take  $\beta' = \beta_1$ .

If  $\alpha$  and  $\beta$  are  $\Gamma$ -minimizing in the homology classes of  $\alpha_2$  and  $\beta_2$  respectively, we have

$$i_a(\alpha, \alpha_1 \cup \beta_1) = i_a(\beta, \alpha_1 \cup \beta_1) = 0.$$

Again, by performing surgery on  $\alpha$  and  $\beta$ , we get  $\alpha'$  and  $\beta'$  such that

$$i(\alpha', \alpha_1 \cup \beta_1) = i(\beta', \alpha_1 \cup \beta_1) = 0; \quad i(\alpha', \beta') = 1.$$

Then, up to homeomorphism  $\alpha' = \alpha_2$  and  $\beta' = \beta_2$ .

This prove that up to homeomorphism ,  $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$  are  $\psi(\Gamma)$ -minimizing.  $\square$

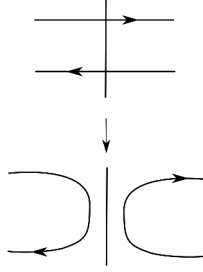


FIGURE A.3 – Surgery along the vertical curve.

**Remarque A.0.1.** Lemma A.0.1 remains true on a genus  $g$  surface and the proof is the same.

Lemma A.0.1 implies that, up to homeomorphism, a unicellular collection with dual unit ball in the cube  $[-1, 1]^4$  is obtained by connecting the extremities of the partial configuration by arcs in the annulus  $A_\eta$ . Moreover, the self-intersection number of  $\Gamma$  is determined by the intersection between those arcs we used to complete the partial configuration.

Let  $a_1, b_1, a_2$  and  $b_2$  be the four oriented arcs in the partial configuration (see Figure A.2). A closed curve from the partial configuration will be labelled by the arcs being used and the number of twists we make around  $\eta$  when we walk along that curve. For instance,  $a_1\eta^2b_1^{-1}b_2$  is the closed curve depicted on Figure A.4.

As we are dealing with non oriented curves, the labeling of curves is defined up to cyclic permutation and reversing. For example,  $a_1\eta^2b_1^{-1}b_2$  and  $a_1^{-1}b_2^{-1}b_1\eta^{-2}$  are labels of the same curve.

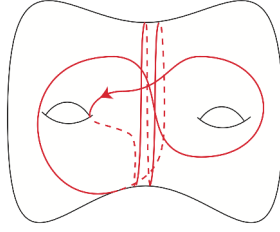


FIGURE A.4 – The curve  $a_1\eta^2b_1^{-1}b_2$

**Intersection of arcs in an annulus.** As we said above, the geometric intersection of a unicellular collection is completely determined by the intersection of arcs in an annulus. Here, the intersection number is computed over the homotopy class of arcs with fixed end points. Now, let  $\lambda$  be a simple oriented arc joining the two boundaries of  $A$ . Cutting along  $\lambda$ , we obtain a rectangle with two opposite sides identified. Let  $X$  and  $Y$  be two points in the boundary components of  $A$ . An oriented arc from  $X$  to  $Y$  will be denoted by  $\vec{XY}_p$  where  $p \in \mathbb{Z}$  is the algebraic intersection between  $\vec{XY}_p$  and  $\lambda$ .

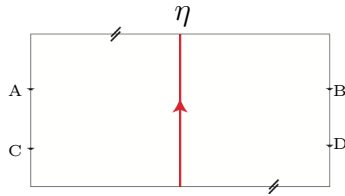


FIGURE A.5 – End-points in annulus.

Let  $A, B, C$  and  $D$  four points in the boundaries of  $A$  as in Figure A.5.

**Lemme A.0.2.** *The following formulas give the intersection between two oriented arcs in  $A$ :*

- $i(\vec{AB}_p, \vec{CD}_q) = i(\vec{BA}_p, \vec{DC}_q) = |p - q|$
- $i(\vec{AB}_p, \vec{DC}_q) = i(\vec{BA}_p, \vec{CD}_q) = |p + q|$
- $i(\vec{AD}_p, \vec{CB}_q) = i(\vec{DA}_p, \vec{BC}_q) = |p - q - 1|$
- $i(\vec{AD}_p, \vec{BC}_q) = |p + q - 1|$
- $i(\vec{DA}_p, \vec{CB}_q) = |q + p + 1|$

*Proof.* Up to the Dehn twist  $\tau_\eta^{-q}$  on the configuration of the arcs, one can assume that  $q$  is equal to 0 in all cases, that is one the arc is untwisted.

Therefore, we have:

$$i(\vec{AB}_p, \vec{CD}_q) = i(\vec{AB}_{p'}, \vec{CD}) = |p'|,$$

with

$$\vec{AB}_{p'} = \tau_\eta^{-q}(\vec{AB}_p).$$

Moreover,  $p' = p - q$ . Hence, we obtain the result.

Again, for the second formula, we have:

$$i(\vec{AB}_p, \vec{DC}_q) = i(\vec{AB}_{p'}, \vec{CD}) = |p'|$$

and  $p' = p + q$ . The difference between the first two cases show how crucial is the orientation for the computing of intersection.

We cover the third case, as the others are handle in a similar way.

We still have that

$$i(\vec{AD}_p, \vec{CB}_q) = i(\vec{AD}_{p'}, \vec{CB}) = |p' - 1|$$

and

$$p' = p - q.$$

The appearance of  $-1$  in this case comes from the cross configuration of the extremities.  $\square$

### **List of unicellular collections with dual unit ball in the cube $[-1, 1]^4$ .**

Now, we are able to determine all unicellular collections whose dual unit ball is a sub polytope of the cube  $[-1, 1]^4$ . Before that, we define some homeomorphisms which will be useful for the proof.

If  $\gamma$  is an oriented simple closed curve on  $\Sigma_2$ , we recall that  $\tau_\gamma$  is the right-handed Dehn twist along  $\gamma$ .

Let  $R_1$  (respectively  $R_2$ ) be the rotation of angle  $\pi$  along the axis  $\mathcal{D}$  (respectively the horizontal axis) as depicted in Figure A.6. The homeomorphism  $R_1$  (respectively  $R_2$ ) is an involution and it maps  $\alpha_1$  to  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  to  $\beta_2$  and  $\eta$  to  $\eta^{-1}$  (respectively  $\alpha_i$  to  $\alpha_i^{-1}$ ,  $\beta_i$  to  $\beta_i^{-1}$  and  $\eta$  to  $\eta$ ).

We recall that  $\alpha_i$  and  $\beta_i$  can be interchanged by a homeomorphism. More precisely, there is a homeomorphism sending  $\alpha_i$  to  $\beta_i$  and  $\beta_i$  to  $\alpha_i^{-1}$ . This fact



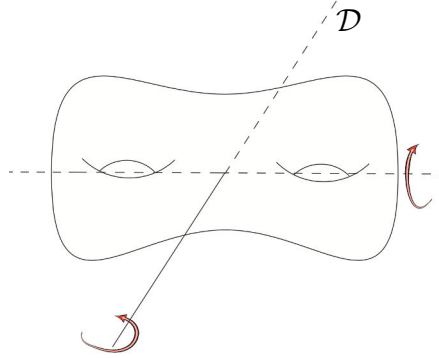


FIGURE A.6 – Rotations  $R_1$  and  $R_2$

implies that in the writing of the label of the curves,  $a_i$  can be replaced by  $b_i$  and  $b_i$  by  $a_i^{-1}$ ; we call this operation *interchanging*.

**Définition A.0.1.** Let  $\Gamma$  be a collection of closed curves on  $\Sigma_2$ . A cycle  $\gamma$  in  $\Gamma$  ( $\Gamma$  seen as graph on  $\Sigma_2$ ) is separating if  $\Sigma_2 - \gamma$  has more than one component.

The following lemma gives a necessary condition for a collection to be unicellular.

**Lemme A.0.3.** *If  $\Gamma$  is a unicellular collection, then  $\Gamma$  does not contain a separating cycle.*

*Proof.* Assume that  $\Gamma$  contain a separating cycle  $\gamma$ , then  $\Sigma_2 - \gamma$  has at least two connected components. We have in this case more than one disc in the complement. So if  $\Gamma$  is unicellular, it does not contain a separating cycle.  $\square$

**Proposition A.0.1** (Orbits of unicellular collections). If  $\Gamma$  is a unicellular collection on  $\Sigma_2$  with dual unit ball in the cube  $[-1, 1]^4$ , then  $\Gamma$  has at most three closed curves. Moreover, up to homeomorphism ,

- if  $\Gamma$  is made of three closed curves, then  $\Gamma = \{a_1, a_2, b_1 b_2^{-1}\}$
- if  $\Gamma$  is made of two closed curves, then  $\Gamma = \{a_1 a_2^{-1}, b_1 b_2 \eta\}$  or  $\Gamma = \{a_1, b_1 b_2 \eta a_2\}$
- if  $\Gamma$  is made by one closed curve, then  $\Gamma = \{a_1 a_2^{-1} b_1^{-1} b_2 \eta\}$

*Proof.* If  $\Gamma$  is unicellular, then  $i(\Gamma, \Gamma) = 3$ .

Now, if  $\Gamma$  has at least four closed curves, then the arcs  $a_i, b_i (i = 1, 2)$  belong to four different closed curves  $\alpha_i \eta^{p_i}, \beta_i \eta^{q_i}$ ; otherwise  $\Gamma$  would contain a separating cycle. Therefore,  $i(\Gamma, \eta) = 0$  which is absurd as  $\Gamma$  is filling. So, if  $\Gamma$  is unicellular  $|\Gamma| \leq 3$ .

**Case 1.** If  $|\Gamma| = 3$ , then two arcs of the partial configuration belong to the same closed curve and the other two belong to two different closed curves. Moreover, as  $\Gamma$  is filling, the two arcs containing in the same closed curve are in different handles. As one can interchange  $a_i$  and  $b_i$ , we can assume that the curve containing two arcs is  $\gamma := b_1 \eta^p b_2^{-1} \eta^q$ ; the other curves being  $\alpha_1 \eta^r$  and  $\alpha_2 \eta^s$ . Since  $\Gamma$  is unicellular, it does not contain a separating cycle that is  $r = s = 0$ , and up to a Dehn twist along  $\eta$ , one can take  $p=0$  that is  $\gamma = b_1 b_2^{-1} \eta^q$ . The fact that  $i(\Gamma, \Gamma) = 3$  implies that

$$i(\gamma, \gamma) = 1.$$

By Lemma A.0.2  $i(\gamma, \gamma) = |q + 1| = 1$ ; it implies that  $q = 0$  or  $q = -2$  and one checks that  $\Gamma_1 = \{a_1, a_2, a_1 a_2^{-1}\}$  and  $\Gamma_2 = \{a_1, a_2, b_1 b_2^{-1} \eta^{-2}\}$  are in the same orbit under the mapping class group action.

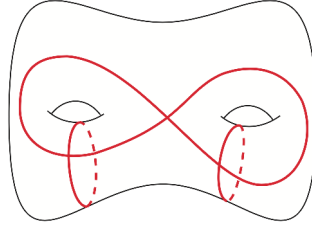


FIGURE A.7 – unicellular collection with three curves

**Case 2.** If  $|\Gamma| = 2$ , then one of the curves of  $\Gamma$  is simple. Otherwise if the two curves are not simple, one can smooth intersection points of one of the curves in  $\Gamma$ —let  $g_1$  be that curve— such that each smoothing separates  $g_1$  into two components. we obtain at least two simple curves  $\lambda_j, j = 1, \dots, n$ . The curves  $\lambda_j$ , as they are all parallels to  $g_1$ , intersect  $g_2$ . Then

$$i(\Gamma, \Gamma) \geq i(g_1, g_1) + i(g_2, g_2) + \sum_j i(\lambda_j, g_2) > 3$$

which is absurd since  $\Gamma$  is unicellular. Therefore, one of the two curves is simple, say  $g_1$ . Moreover, we know from [2] that  $\Sigma_2$  does not admit a filling

pairs (i.e a one faced-collection making of two simple closed curves), so the other one is non simple.

Up to homeomorphism (interchanging and rotations), one can assume that  $a_1$  is contained in  $g_1$ .

**Case 2.1.** If  $g_1$  does not contain another arc, then

$$g_2 = b_1 b_2 \eta^p a^\varepsilon$$

with  $\varepsilon = \pm 1$ . In this case,

$$i(\Gamma, \Gamma) = i(g_1, g_2) + i(g_2, g_2); \quad i(g_1, g_2) = 1.$$

Its implies that  $i(g_2, g_2) = 2$ . The solution of this equation is  $p = 1$  and  $\varepsilon = 1$ .

So

$$\Gamma = \{a_1, b_1 b_2 \eta a_2\}$$

which indeed is a unicellular collection unicellular(see Figure A.8).

**Case 2.2.** If  $g_1$  contains an arc other than  $a_1$ , that arc cannot be in the same handle as  $a_1$  (otherwise, the filling condition would fail). Up to interchanging, one can suppose that

$$g_1 = a_1 \eta^p a_2^{-1} \eta^{-p}$$

and again by applying a Dehn twist around  $\eta$ , one can take  $g_1 = a_1 a_2^{-1}$  and  $g_2 = b_1 \eta^p b_2^\varepsilon \eta^q$  with  $\varepsilon = \pm 1$ . Moreover,

$$i(\Gamma, \Gamma) = i(g_1, g_2) + i(g_2, g_2).$$

We have  $i(\alpha_1 \cup \alpha_2, \beta_1 \cup \beta_2) \equiv i(g_1, g_2) \pmod{2}$  since  $\alpha_1 \cup \alpha_2$  (respectively  $\beta_1 \cup \beta_2$ ) is homologous to  $g_1$  (respectively  $g_2$ ). It implies that  $i(g_1, g_2) = 2$  and,  $i(g_1, g_2) = 1$ .

**Case 2.2.1.** If  $\varepsilon = -1$ , by applying the formulas of Lemma A.0.2, we have:

$$i(g_2, g_2) = |p + q + 1|, \quad i(g_1, g_2) = |p| + |q| + |q + 1| + |p + 1|.$$

The solution of the equations  $i(g_2, g_2) = 1$  and  $i(g_1, g_2) = 2$  are  $\{p = 0, q = 0\}$  and  $\{p = -1, q = -1\}$ . The two collections obtained are not filling; one can checks that  $i(b_1 b_2, \Gamma) = 0$ .

**Case 2.2.2.** If  $\varepsilon = 1$ , then  $i(g_2, g_2) = |p - q|$  and  $i(g_1, g_2) = 2(|p| + |q|)$ . The solution of the equations  $i(g_2, g_2) = 1$  and  $i(g_1, g_2) = 2$  are  $\{p = 0, q = \pm 1\}$  and  $\{p = \pm 1, q = 0\}$ .

We check that  $\Gamma_1 = \{a_1 a_2^{-1}, b_1 \eta^{\pm 1} b_2\}$  and  $\Gamma_2 = \{a_1 a_2^{-1}, b_1 b_2 \eta^{\pm 1}\}$  are unicellular (here,  $\Gamma_i$  is a union of two collection according on whether the power of  $\eta$  is 1 or  $-1$ ). The rotation  $R_1$  maps elements  $\Gamma_1$  to elements of  $\Gamma_2$ . Finally, the collection  $\{a_1 a_2^{-1}, b_1 b_2 \eta\}$  is the mirror image of  $\{a_1 a_2, b_1 b_2 \eta^{-1}\}$ .

Hence, up to homeomorphism, we have two unicellular collections with two curves (see Figure A.8) namely

$$\Gamma_1 = \{a_1 a_2^{-1}, b_1 b_2 \eta\}, \quad \Gamma_2 = \{a_1, b_1 b_2 \eta a_2\}.$$

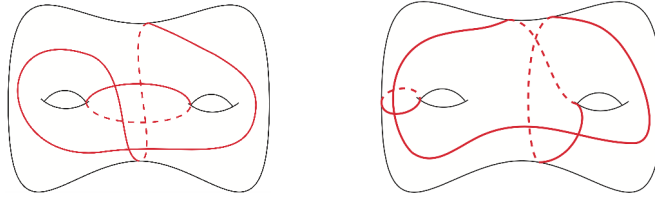


FIGURE A.8 – unicellular collections with two curves

**Case 3.** If  $\Gamma$  has only one curve  $g$ , then up to homeomorphism (interchangeability and rotations)  $g = a_1 a_2^{-1} \eta^p b_1^{\varepsilon_1} \eta^q b_2^{\varepsilon_2} \eta^r$  or  $g = a_1 \eta^p b_1^{\varepsilon_1} a_2^{-1} \eta^q b_2^{\varepsilon_2} \eta^r$ ; where  $\varepsilon_i = \pm 1$ .

If  $g = a_1 \eta^p b_1^{\varepsilon_1} a_2^{-1} \eta^q b_2^{\varepsilon_2} \eta^r$ , we check that  $\Gamma$  is either not filling, either filling with more than one disk in its complement.

For  $g(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = a_1 a_2^{-1} \eta^p b_1^{\varepsilon_1} \eta^q b_2^{\varepsilon_2} \eta^r$ ,  $R_1$  sends  $g(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  to  $g(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2)$ . If we start with  $g = a_1 a_2^{-1} \eta^p b_1^{-1} \eta^q b_2 \eta^r$  and we change  $a_1$  to  $b_1$  by a homeomorphism (that homeomorphism will map  $b_1$  to  $a_1^{-1}$ ),  $g$  gets mapped to

$$g' = b_1 a_2^{-1} \eta^p a_1 \eta^q b_2 \eta^r.$$

Now, if we reverse the orientation of  $g'$  starting at  $a_1$ , we have

$$g' = a_1^{-1} \eta^p a_2 b_1^{-1} \eta^r b_2^{-1} \eta^q, \quad R_2(g') = a_1 \eta^p a_2^{-1} b_1 \eta^r b_2 \eta^q.$$

Finally,  $\tau_{\eta^{-p}} \circ R_2(g') = a_1 a_2^{-1} \eta^p b_1 \eta^q b_2 \eta^r$ .  
Hence, up to homeomorphism, one can look at the case where

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = -1.$$

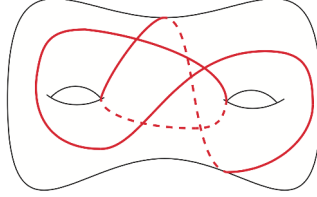


FIGURE A.9 – unicellular collection made of one curve

In this case we have

$$i(\Gamma, \Gamma) = |p| + |q| + |r| + |p + q + 1| + |p - r| + |q + r + 1|.$$

The equation  $i(\Gamma, \Gamma) = 3$  has two solutions

$$\{p = 0, q = 0, r = -1\}, \quad \{p = -1, q = 0, r = 0\}.$$

The collections  $\Gamma_1 = \{a_1 a_2^{-1} b_1 b_2^{-1} \eta^{-1}\}$  and  $\Gamma_2 = \{a_1 a_2^{-1} \eta^{-1} b_1 b_2\}$  are unicellular. Moreover  $R_1(\Gamma_1) = \Gamma_2$ . Therefore, up to homeomorphism, we have one unicellular collection with one curve (See Figure A.9), namely

$$\Gamma = \{a_1 a_2^{-1} b_1 b_2^{-1} \eta\}.$$

□

# Bibliographie

- [1] I. Agol, J. Hass, W. Thurston *The computational complexity of knot genus and spanning area*. Trans. AMS, Vol. 358 (2006), no. 9, p. 3821-3850.
- [2] T. Aougab, S. Huang, *Minimally intersecting filling pairs on surfaces*. Algebr. Geom. Topol., 15(2):903-932, 2015.
- [3] G. D. Birkhoff, *Dynamical systems with two degrees of freedom*, Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1917), 199-300.
- [4] M. Brunella, *On the discrete Godbillon-Vey invariant and Dehn surgery on geodesic flow*, Ann. Fac. Sc. Toulouse Sér. 63 (1994), 335-344.
- [5] A. Candel, L. Conlon, *Foliations I* Graduate Studies in Mathematics, AMS. 2000
- [6] A. Candel, L. Conlon, *Foliations II* Graduate Studies in Mathematics, AMS. 2003
- [7] G. Chapuy , *A new combinatorial identity for unicellular maps, via a direct bijective approach*. Advances in Applied Mathematics, 47(4):874-893, 2011.
- [8] G. Chapuy, V. Féray, E. Fusy, *A simple model of trees for unicellular maps*, J. Combin. Theory A 120 (2013), 2064-2092
- [9] M. de la Salle, *Another proof of Thurston's theorem for norms taking integer values on the integer lattice*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 354 (2016), no. 6, 611-613.
- [10] M. Cossarini, P. Dehornoy, *Intersection norms on surfaces and Birkhoff sections for geodesic flows*, arXiv:1604.06688.
- [11] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poénaru, *Thurston's work on surfaces*, Mathematical notes, vol. 48, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [12] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds*. J. Differential Geometry 18(1983) 445-503.

## BIBLIOGRAPHIE

- [13] E. Ghys, P. de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. Birkhäuser, 1990.
- [14] A. Goupil and G. Schaeffer, *Factoring  $n$ -cycles and counting maps of a given genus*, European J. Combin., 19(7): 819-834, 1998.
- [15] J. Hempel, *3-Manifolds*, Reprint of the 1975 original AMS Chelsea Publishing, 2004.
- [16] J. Harer, D. Zagier, *The Euler characteristic of the moduli space of curves*, Invent. Math., 85(3): 457-485, 1986.
- [17] J. Hass, P. Scott: *Shortening curves on surfaces*, Topology (1994), 1-19.
- [18] S. K. Lando, A. K. Zvonkin, *Graphs on surfaces and their applications*. Springer, 2004.
- [19] W. Lickorish, *A foliation for 3-manifolds*. Ann. Math., 82(2), 414-420.
- [20] H. A. Masur, Y. N. Minsky: *Geometry of the complex of curves I: Hyperbolicity*, Invent. Math. 138(1999), 103-149.
- [21] B. Mohar, C. Thomassen, *graphs on surfaces*, John Hopkins University Press, 2001.
- [22] S. P. Novikov, *Topology of foliations*, Trans Moscow Math. Soc. 14(1963) 268-305.
- [23] S. Parsad, B. Sanki, *Filling systems on surfaces*, arXiv:1708.06928.
- [24] J. Petersen, *Die Theorie der regulären Graphen*, Acta Math. 15 (1891) 283-291.
- [25] R. Rannard, *Incompressible surfaces in Seifert fibered spaces*. Topology and its Application 72 (1996) 19-30.
- [26] G. H. Reeb, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Actualités Sci. Indust., No 1183, Hermann, Paris, 1952, 91-158.
- [27] H. Rosenberg, *Foliations by planes*, Topology 7(1968) 131-138.
- [28] A. Sane, *Intersection norm and one-faced collections*, arXiv:1809.03190.
- [29] A. Sane, *Curves on surfaces and surgeries*, arXiv:1902.06436.
- [30] A. Schrijver, *Combinatorial Optimization, Polyhedra and Efficiency*, Springer (2003).
- [31] M. Scharlemann, *Sutured manifolds and generalized Thurston norms*, J. Differential Geometry ; 29(1989) 557-614.
- [32] S. Schwarzmann, *Asymptotic cycles*, Ann. Math. 66 (1957), 270-284.

## BIBLIOGRAPHIE

- [33] W. Thurston, *A norm for the homology of three manifolds*, *Mem. Amer. Math. Soc.* **339**(1986), 99-130.
- [34] V. Turaev, *A norm for the cohomology of 2-complexes*, *Algebr. Geom. Topol.* **2** (2002), 137-155.
- [35] W. T. Tutte, *A census of Hamiltonian polygons*, *Canad. J. Math.*, **14**:402-417, 1962.
- [36] W. T. Tutte, *A census of planar triangulations*, *Canad. J. Math.*, **14**:21-38, 1962.
- [37] W. T. Tutte, *A census of slicing* *Canad. J. Math.*, **14**:708-722, 1962.
- [38] W. T. Tutte, *A census planar graph*, *Canad. J. Math.*, **15**:249-271, 1963.
- [39] T. R. S. Walsh, A. B. Lehman, *Counting rooted maps by genus I*. *J. Combin. Theory Ser. B*, **13**:192-218, 1972.
- [40] T. R. S. Walsh, A. B. Lehman, *Counting rooted maps by genus II*. *J. Combin. Theory Ser. B*, **13**:122-141, 1972.
- [41] T. R. S. Walsh, A. B. Lehman, *Counting rooted maps by genus III: Non-separable maps*. *J. Combin. Theory Ser. B*, **18**:222-259, 1975.
- [42] M. Yazdi, *On Thurston's Euler class one conjecture*. arXiv:1603.03822.



---

# Résumé

---

Cette thèse se place à l'interface entre la topologie et la combinatoire. On s'intéresse dans un premier temps au problème de réalisation des boules unités duales des normes d'intersections sur les surfaces orientables. On établit aussi un lien entre les normes d'intersections et la norme de Thurston sur les 3-variétés.

Par ailleurs, on montre l'existence d'un graphe dit de chirurgie sur l'ensemble des cartes unicellulaires sur une surface fermée orientable. Dans le cas des collections unicellulaires et de cartes cubiques unicellulaires, les graphes de chirurgies se trouvent être connexes.

**Mots clés:** *Norme entière, carte unicellulaire, chirurgie, graphe, norme d'intersection, norme de Thurston.*

---

# Abstract

---

## FROM TOPOLOGY OF CURVES ON SURFACES TO UNICELLULAR MAPS.

This thesis stay in between topology and combinatory. Our first concern is the problem of realization of dual unit ball of intersection norms on orientable surfaces. We also establish a certain relation between intersection norms and Thurston norms on 3-manifolds.

On the other part, we show the existence of graph structure on unicellular maps on orientable surfaces coming from a surgery operation on unicellular maps : a surgery graph. It happens that surgery graph on unicellular collections and cubic unicellular maps is connected.

**Key words:** *Integer norm, unicellular map, surgery, graph, intersection norm, Thurston norm.*